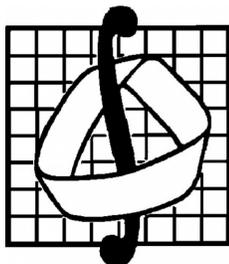


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



ПЕПА РУСЛАН ЮРЬЕВИЧ

УДК 517.938.5

ОБЩЕННЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПОТОКИ РИЧЧИ

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Фёдор Юрьевич Попеленский

Москва–2019 г.

# Оглавление

Введение	2
<b>1 Комбинаторный поток Риччи на поверхностях: положения равновесия</b>	<b>21</b>
1.1 Основные определения и предварительные сведения	21
1.2 Метрики на тетраэдре и положения равновесия комбинаторного потока Риччи	24
1.2.1 Метрики постоянной кривизны на тетраэдре с первым типом симметрии весов	25
1.2.2 Метрики постоянной кривизны на тетраэдре со вторым типом симметрии весов	29
1.2.3 Несколько замечаний о траекториях комбинаторного потока Риччи	34
<b>2 Пространство метрик, выпуклость функции <math>F</math></b>	<b>38</b>
2.1 Случай евклидовой метрики на гранях	39
2.2 Случай гиперболической метрики на гранях	42
<b>3 Комбинаторный поток Риччи для метрик упаковки кругов с вырождениями</b>	<b>50</b>
3.1 Метрики упаковок кругов с вырождениями	50
3.2 Существование решения для $t \in [0, \infty)$	57
3.3 Поток Риччи как отрицательный градиентный поток	59
3.4 Вырождение	60
3.5 Случай евклидовой метрики на гранях	61
3.6 Случай гиперболической метрики на гранях	62
<b>4 Потоки средней кривизны на поверхностях вращения</b>	<b>65</b>
4.1 Дискретизация потока средней кривизны	65
4.2 Замкнутая поверхность вращения	68
4.3 Перераспределение вершин триангулированной поверхности вращения	69
4.4 Примеры	72
Список литературы	79

# Введение

## Актуальность темы

Потоки метрик, то есть дифференциальные уравнения на семейства метрик, зависящих от времени, уже довольно давно активно используются в геометрии. Наиболее известным на сегодняшний день является применение Перельманом потоков Риччи с перестройками для доказательств гипотез Пуанкаре и Тёрстона. Потоки нетривиальны даже в двумерном случае. Поток Риччи на двумерной поверхности  $X$  называется семейство метрик  $g(t) = (g_{ij}(t))$ , удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2K(g(t))g(t),$$

где  $K(g(t))$  — гауссова кривизна метрики  $g(t)$ .

**Теорема** (Hamilton [8]). *Для любой начальной метрики  $g(0)$  на замкнутой ориентированной поверхности  $X$  решение потока Риччи существует для всех  $t \geq 0$ . Если поверхность  $X$  не диффеоморфна  $S^2$ , то поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны. Если  $X = S^2$ , то поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны при условии, что гауссова кривизна  $K(g(0))$  положительна во всех точках  $X$ .*

Случаи, не подходящие под условия этой теоремы Гамильтона, были рассмотрены Чоу.

**Теорема** (Chow [1]). *Пусть  $g_0$  — произвольная начальная метрика на сфере, и пусть  $g(t)$  — решение потока Риччи с этим начальным условием  $g(0) = g_0$ . Тогда найдется такое  $T > 0$ , что кривизна  $K(g(T))$  положительна во всех точках.*

Наиболее удачный дискретный аналог потоков Риччи был введен Чоу и Луо в работе [2]. Под метрикой они понимали так называемую метрику упаковки кругов [3],[5],[19]. Соответствующие определения приведены в главе 1, здесь же достаточно отметить следующее. Для замкнутой поверхности  $X$  фиксируются триангуляция  $T$  и весовая функция  $w$  на рёбрах триангуляции, принимающая значение в  $(-1, 1]$ . Метрика кодируется положительными радиусами окружностей  $r_i$ , заданными для каждой вершины триангуляции. Комбинаторный поток Риччи в евклидовом случае (точное определение см. в гл. 1) — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \tag{1}$$

аналогичным образом определяется комбинаторный поток Риччи для гиперболического случая. Для евклидова и гиперболического случаев Чоу и Луо доказали, что при выполнении определенных условий на веса и на комбинаторику триангуляции  $T$ , поток Риччи сходится к единственной метрике постоянной кривизны. Один из ключевых моментов в доказательствах Чоу и Луо — это возможность представить поток Риччи как отрицательный градиентный поток некоторой функции  $F$ . Существование такой функции  $F$  выводится из того, что пространство метрик диффеоморфно  $\mathbb{R}_+^N$ , где  $N$  — число вершин триангуляции. Затем доказывается, что функция  $F$  выпуклая. Сходимость траекторий отрицательного градиентного потока к положению равновесия выводится из выпуклости функции  $F$ . В доказательствах этих фактов важную роль играет условие  $w \geq 0$ . В данной работе мы показываем, как условие  $w \geq 0$  можно ослабить так, чтобы пространство метрик осталось диффеоморфно  $\mathbb{R}_+^N$ , а функция  $F$  осталась выпуклой. Любопытно, что эти обобщенные условия для обоих фактов оказываются одинаковыми. Кроме того, мы строим контрпримеры, которые показывают, что дальнейшее ослабление невозможно. Этому посвящены главы 1 и 2.

Если весовая функция и триангуляция не удовлетворяют условиям теоремы Чоу и Луо, то численное моделирование показывает, что в ряде случаев под действием потока Риччи метрика в пределе вырождается (а именно, некоторые радиусы стремятся к нулю), но при этом наблюдаются определенные закономерности в поведении кривизн. В главе 3 мы определяем вырожденные метрики упаковок кругов в евклидовом и гиперболическом случаях, определяем комбинаторный поток Риччи для таких метрик, и доказываем теоремы сходимости потока Риччи к положению равновесия для любой начальной метрики при определенных условиях на триангуляцию  $T$  и веса  $w$ . При этом на веса  $w$  накладываются более общие условия из главы 2, а не условие  $w \geq 0$ .

Кроме потока Риччи интересен поток средней кривизны

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} = -H(\bar{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}, t), \quad (2)$$

где  $f(\bar{x}, t)$  — семейство вложений поверхности  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $H(\bar{x}, t)$ ,  $\mathbf{n}(\bar{x}, t)$  — средняя кривизна и нормаль в точке  $\bar{x}$  в момент времени  $t$  соответственно, и его нормализованная версия  $\tilde{f}(\tilde{t})$ , сохраняющая объём (площадь) поверхности.

**Теорема** (см. [6]). *Пусть  $f_0$  — вложение гладкого замкнутого многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной формы подмногообразия  $M_0^n$  строго больше нуля для всех  $\bar{x} \in M_0^n$ . Тогда уравнение (2) с начальным условием  $f(\bar{x}, 0) = f_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение на конечном интервале времени  $0 \leq t < T$  такое, что поверхность  $M_t^n$  стягивается в некоторую точку  $O$  при  $t \rightarrow T$ ; нормализованное условием постоянства объема многообразия, уравнение (2) с начальным условием  $\tilde{f}(\bar{x}, 0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение при  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ . В то же время  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  стремится принять форму сферы площади  $|M_0|$ . Подмногообразие  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  получается из  $M_t$  гомотетией с центром в точке  $O$ .*

В главе 4 представлен метод численного моделирования дискретного потока средней кривизны на поверхностях вращения с различными начальными профильными функциями. Результаты численного моделирования на поверхности вращения совпадают с теоретическими в случае, если поверхность вращения удовлетворяет условиям теоремы Хьюскена. Наиболее интересные результаты главы 4 касаются моделирования потока средней кривизны для поверхностей вращения, не удовлетворяющих условиям теоремы Хьюскена, в частности, смоделировано формирование особенности.

## Цель диссертации

Цели работы:

1. Исследовать количество метрик упаковок кругов, имеющих постоянную кривизну, для весовой функции, принимающей значения в  $(-1, 1]$ , для тетраэдра.
2. Исследовать условия на весовую функцию, гарантирующие выпуклость функции  $F$ . Исследовать условия на весовую функцию, при которых пространство метрик стягиваемо.
3. Определить метрику упаковки кругов с вырождениями, определить комбинаторный поток Риччи для таких метрик, доказать теоремы сходимости для евклидова и гиперболического случаев.
4. Смоделировать дискретный поток средней кривизны для визуализации формирования особенности на поверхности вращения, профильная функция которой не является выпуклой.

## Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Нахождение и классификация метрик упаковок кругов с постоянной кривизной на тетраэдре для двух типов симметричных весовых функций  $w \in (-1, 1]$ ;
2. Нахождение новых, более слабых условий на весовую функцию со значениями в  $(-1, 1]$ , при которых комбинаторный поток Риччи является градиентным потоком выпуклой функции, определённой в пространстве  $\mathbb{R}_+^N$ ;
3. Определение нового класса метрик упаковок кругов с вырождениями и комбинаторного потока Риччи для них; доказательство теорем сходимости комбинаторного потока Риччи к единственной метрике постоянной кривизны с вырождениями при определенных условиях для евклидова и гиперболического случаев;

4. Построение устойчивого алгоритма вычисления решения дискретного потока средней кривизны на поверхности вращения; моделирование и визуализация формирования особенности в случае, когда начальная профильная функция поверхности вращения не является выпуклой.

## Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно, и её новизна заключается в следующем:

1. Исследовано количество метрик постоянной кривизны на тетраэдре с весовой функцией, обладающей одним из двух типов симметрии.
2. Найденные новые ослабленные условия, при которых пространство метрик диффеоморфно  $\mathbb{R}_+^N$ , а поток Риччи эквивалентен отрицательному градиентному потоку некоторой выпуклой функции.
3. Доказана сходимости комбинаторного потока Риччи для вырожденных метрик упаковок кругов для любой начальной метрики в евклидовом и гиперболическом случаях при определенных условиях на триангуляцию и весовую функцию.
4. Предложен новый алгоритм моделирования потока средней кривизны на поверхности вращения.

## Методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и алгебры. Использовались системы численного моделирования.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и численного моделирования.

## Апробация работы

Результаты опубликованы в четырёх статьях [20],[23],[21],[22] из которых четыре опубликованы в журналах, удовлетворяющие положению о присуждении учёных степеней в МГУ.

Результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А. Т. Фоменко;
- семинар «Некоммутативная геометрия и топология» под руководством профессора А. С. Мищенко, профессора В. М. Мануйлова, профессора И. К. Бабенко, доцента А. А. Ирматова;
- семинар «Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование» под руководством член-корреспондента РАН А. И. Шафаревича;
- «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна ВЗМШ — 2016», Воронеж, 25 — 31 января 2016 г.;
- «Ломоносов 2016», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 11 — 15 апреля 2016 г.;
- «Ломоносов 2017», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 10 — 14 апреля 2017 г.;
- «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна ВЗМШ — 2018», Воронеж, 26 — 31 января 2018 г.;
- «XX Geometrical Seminar», Faculty of Mathematics University of Belgrade Serbia, May 20 — 23, 2018;
- «International Conference on Topology and its Application», Nafpaktos, Greece, July 7—11, 2018;
- «Современные проблемы математики и механики», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 13 — 15 мая 2019 г.

## Структура и объём работы

Диссертационная работа состоит из введения и четырёх глав. Список литературы содержит 29 наименований. Текст диссертации изложен на 82 страницах.

## Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

## Содержание главы 1

Рассмотрим замкнутую поверхность  $X$  с триангуляцией  $T$ . Следуя Тёрстону (см. [5], гл. 13), определим для  $X$  аналог плоской метрики с коническими особенностями. Пусть  $V = \{A_1, \dots, A_N\}$  — множество вершин триангуляции  $T$ . Обозначим через  $E$  и  $F$  соответственно множества рёбер и граней триангуляции  $T$ .

**Определение.** *Весовой функцией* называется функция  $w : E \rightarrow (-1, 1]$ ,  $w(A_i A_j) = w_{ij} = w_{ji}$ , а число  $w_{ij}$  называется *весом* ребра  $A_i A_j$ .

**Определение.** Под *метрикой* (в евклидовом случае) на поверхности мы понимаем способ вычисления длины любой ломаной или «хорошей» кривой на этой поверхности. Для фиксированной тройки  $(X, T, w)$ , состоящей из поверхности  $X$ , её триангуляции  $T$  и весовой функции  $w$ , определим *метрику* на  $X$  следующим образом:

1. на каждой грани триангуляции будем считать *метрикой* плоской;
2. *метрика* зависит от параметров  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
3. длина  $l_{ij}$  ребра  $A_i A_j \in E$  задается формулой

$$l_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j w_{ij}}. \quad (3)$$

Эти условия определяют метрику на  $X$ , причем единственным образом, тогда и только тогда, когда длины рёбер  $l_{ij}, l_{jk}, l_{ki}$  каждой грани триангуляции  $A_i A_j A_k \in F$  удовлетворяют трем неравенствам треугольника. Для простоты метрикой называется набор  $r = \{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ .

**Определение.** *Пространством метрик*  $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$ , соответствующим весовой функции  $w$ , будем называть множество всех наборов  $r = \{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ , для которых  $\{l_{ij} \mid A_i A_j \in E\}$  удовлетворяют неравенствам треугольника на каждой грани триангуляции  $T$ .

Описанные комбинаторные данные имеют очень простую геометрическую интерпретацию. А именно, рассмотрим на евклидовой плоскости окружности  $C_i, C_j$  радиусами  $r_i, r_j$  соответственно. Предположим, что эти окружности пересекаются. Обозначим через  $\theta_{ij}$  угол пересечения, который выбирается так, что  $\theta_{ij} = 0$  для окружностей, касающихся внешним образом. Тогда расстояние между вершинами  $A_i$  и  $A_j$  задается формулой (3), в которой  $w_{ij} = \cos \theta_{ij}$ .

Кривизна такой метрики сконцентрирована в вершинах триангуляции. Поскольку каждый набор  $r = \{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$  определяет длины рёбер  $\{l_{ij}\}$ , то определены плоские углы в вершинах каждой грани.

**Определение.** *Кривизной*  $K_j$  в вершине  $A_j$  называется величина

$$K_j = 2\pi - \sum_{A_i A_j A_k \in F} \angle A_i A_j A_k, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

**Определение.** Говорят, что набор  $r = (r_1, \dots, r_N)$  задает метрику постоянной кривизны (или метрика  $r = (r_1, \dots, r_N)$  имеет постоянную кривизну), если  $K_1(r) = \dots = K_N(r) = 2\pi\chi(M)/N$ .

**Определение.** *Комбинаторный поток Риччи* — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

которая определяет зависимость метрики от времени в терминах эволюции набора параметров  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\}$ .

**Определение.** Решение (5) называется сходящимся, если

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_i(t) = K_i(\infty) \in (-\infty, 2\pi)$  существует для всех  $i$ ,
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) = r_i(\infty) \in \mathbb{R}_+$  существует для всех  $i$ .

В работе [2] Чоу и Луо доказано, что при определенных условиях (среди которых имеются условия  $w \geq 0$ ), комбинаторный поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны; пространство метрик при этом совпадает с  $\mathbb{R}_+^N$ .

В первой главе исследовано пространство метрик на тетраэдре, при условии, что весовая функция обладает одним из двух типов симметрии. Выяснено, когда пространство метрик совпадает с  $\mathbb{R}_+^4$ . Выяснено, сколько имеется неэквивалентных между собой метрик постоянной кривизны. В данном случае мы считаем, что метрики  $r$  и  $\lambda r$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ , эквивалентны, так как у них одинаковые кривизны.

Интересен также гиперболический случай.

**Определение.** Пусть  $T$  — триангуляция замкнутой ориентированной поверхности  $X$  рода  $g \geq 2$  с заданной весовой функцией  $w$  на её рёбрах. Метрику в гиперболическом случае будем задавать следующим образом:

1. метрика на каждой грани триангуляции  $T$  имеет постоянную отрицательную кривизну  $-1$ ;
2. метрика зависит от параметров  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+$ ;
3. длина  $l_{ij}$  ребра  $A_i A_j \in E$  определяется формулой  $\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + w_{ij} \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j$ .

В этом (гиперболическом) случае приведенные условия имеют тот же геометрический смысл, что и в евклидовом случае. Пространство метрик обозначается так же:  $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$ .

**Определение.** *Гиперболический комбинаторный поток Риччи* — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Тёрстон в [5] доказал, что при определенных комбинаторных условиях на триангуляцию и веса существует единственная метрика постоянной кривизны. Иными словами, в гиперболическом случае метрика постоянной кривизны в вершинах не имеет конических особенностей. Ясно, что для гиперболического случая метрики постоянной кривизны — в точности то же самое, что положения равновесия потока Риччи (6). Чтобы связать метрики постоянной кривизны с особенностями потока Риччи в евклидовом случае, нам понадобится *нормализованный поток Риччи*, который определяется как система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av})r_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где  $K^{av} = \frac{2\pi\chi(X)}{N}$ . В евклидовом случае метрики постоянной кривизны в точности являются положениями равновесия потока (7).

Чоу и Луо [2] показали, что при условиях, найденных Тёрстоном, поток Риччи (в обоих случаях (6) и (7)), сходится к единственной метрике постоянной кривизны. В евклидовом случае здесь не возникает противоречия, так как произведение  $\prod_{i=1}^N r_i$  — первый интеграл нормализованного потока Риччи (7).

Определим *линк*  $Lk(I)$  подмножества  $I \subset V$  вершин триангуляции  $T$  как множество пар  $(e, v)$ , состоящих из ребра  $e$  и вершины  $v$  таких, что

- (1) концы ребра  $e$  не содержатся в  $I$ ;
- (2)  $v \in I$ ;
- (3)  $e$  и  $v$  образуют грань.

Обозначим также через  $F_I$  подмножество в  $X$ , состоящее из симплексов, все вершины которых принадлежат  $I$ . В случае, когда на гранях триангуляции метрика евклидова, кривизны метрик  $r = (r_1, \dots, r_N)$  и  $\lambda r = (\lambda r_1, \dots, \lambda r_N)$ ,  $\lambda > 0$  совпадают. Поэтому при подсчете числа метрик постоянной кривизны метрики  $r$  и  $\lambda r$  различать не будем.

**Теорема** (см. [2]). *Пусть  $(X, T, w)$  — триангуляция  $T$  поверхности  $X$  с набором весов  $w \geq 0$ . Тогда для потоков Риччи (6) или (7) верны следующие условия верны следующие условия:*

- (1) *существует решение  $r(t)$ , определенное для  $t \in [0, \infty)$ , для любой начальной метрики  $r(0)$ ;*
- (2) *решение  $r(t)$  сходится к метрике постоянной кривизны тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества  $I \subset V$  выполнено неравенство*

$$0 > - \sum_{(e,v) \in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \quad \text{для потока (6),}$$

$$2\pi|I|\chi(X)/|N| > - \sum_{(e,v) \in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \quad \text{для потока (7);}$$

(3) при выполнении условий (2) решение  $r(t)$  сходится к метрике постоянной кривизны экспоненциально быстро.

Вернёмся к результатам главы 1. Рассмотрим тетраэдр  $A_0A_1A_2A_3$ , он даёт простейшую триангуляцию сферы  $S^2$ . В главе 1 пространство  $\mathcal{R}_w$  описано в случаях, когда весовая функция на тетраэдре обладает одним из двух видов симметрии:

1.  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{13} = \gamma$ ;
2.  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{23} = w_{13} = \alpha$ .

Условие, выделяющее  $\mathcal{R}_w$  в  $\mathbb{R}_+^4$ , можно записать в виде:

$$\frac{1-w_{12}}{r_3^2} + \frac{1-w_{31}}{r_2^2} + \frac{1-w_{23}}{r_1^2} + 2\frac{w_{23}+w_{31}w_{12}}{r_2r_3} + 2\frac{w_{31}+w_{23}w_{12}}{r_3r_1} + 2\frac{w_{12}+w_{23}w_{31}}{r_1r_2} > 0, \quad (8)$$

где  $w_{ij}, i \neq j, i, j = \{0, 1, 2, 3\}$  — вес на ребре  $l_{ij}$ . Выписав такие неравенства для каждой грани триангуляции, получим набор ограничений, выделяющих пространство  $\mathcal{R}_w$  в  $\mathbb{R}_+^4$ ,

**Лемма** (см. [20]). Пусть  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$ . Если  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , то пространство  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^4$ . В противном случае, когда  $\gamma \leq -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , пространство  $\mathcal{R}_w \subsetneq \mathbb{R}_+^4$ .

**Теорема** (см. [20]). Пусть  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, показанной на рис. 1.2. А именно:

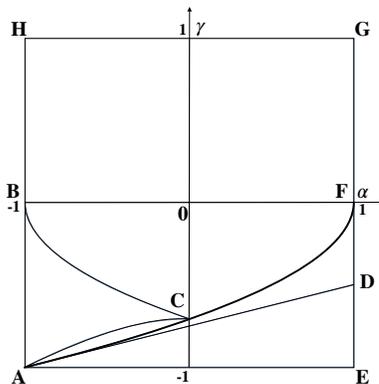


Рис. 1: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны. Кривая  $ACF$  определяет границу области, для которой  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\gamma} = \mathbb{R}_+^4$ .

1. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ACBHG D$  существует единственная метрика постоянной кривизны,  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ;

2. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ABC$  имеется пять различных метрик постоянной кривизны:  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$  и еще четыре, для которых выполняется один из наборов соотношений  $r_0 = r_1, r_0 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$  или  $r_2 \neq r_0 \neq r_1 \neq r_3, r_2 = r_3$ ; кроме того, эти четыре метрики получаются друг из друга соответствующими перестановками индексов у параметров  $r_i$ ;

3. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ADE$  метрик постоянной кривизны нет.

Более того, отрезок  $AD$  лежит на прямой  $\alpha = 3 + 4\gamma$ , кривая  $BD$  — дуга параболы  $2\gamma^2 - \alpha - 1 = 0$ , а кривая  $AD$  — дуга гиперболы  $2\gamma^2 - \alpha^2 - 1 = 0$ . На отрезке  $AD$  пропадает решение  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ , на дугах  $BC$  и  $AD$  пропадают четыре решения, описанные в пункте 2.

**Замечание.** На рис. 1 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой  $ACF$ , заданной уравнением  $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , отделяющей область изменения весов  $\alpha, \gamma$ , для которой  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^4$ .

Теперь приведём утверждения касательно весовой функции со вторым типом симметрии.

**Лемма** (см. [20]). Пусть  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Если  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , тогда пространство  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^4$ . И наоборот, при  $\gamma \leq -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$  имеем  $\mathcal{R}_w \subsetneq \mathbb{R}_+^4$ .

**Теорема** (см. [20]). Пусть  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, изображенной на рис. ??  
А именно,

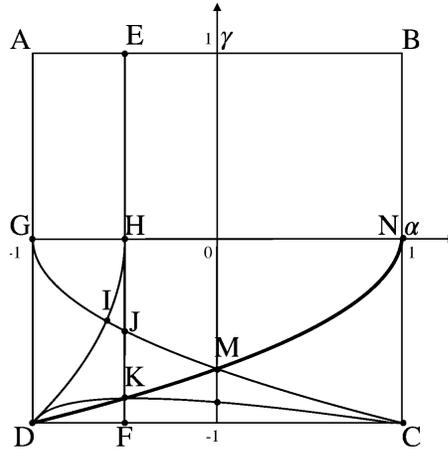


Рис. 2: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны. Кривая  $DKMN$  определяет границу области, для которой  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\gamma} = \mathbb{R}_+^4$ .

1. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $AENHIG$ , то метрик постоянной кривизны не существует;

2. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $EBCJH$ , то существует единственная метрика постоянной кривизны, причем  $r_1 = r_2 = r_3$ ;
3. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $DGI$ , то существуют три различные метрики постоянной кривизны  $(r_1, r_2, r_3)$  таких, что  $(t, t, s), (t, s, t)$  или  $(s, t, t)$ , где  $t \neq s$ ;
4. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $IJH$ , то существуют две метрики постоянной кривизны, причем для каждой из них  $r_1 = r_2 = r_3$ ;
5. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит одной из областей  $DKJI$  и  $DKF$ , то существуют пять метрик постоянной кривизны, описанных в пунктах 3 и 4;
6. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит одной из областей  $FKC$  и  $JKC$ , то существуют четыре метрики постоянной кривизны, описанных в пунктах 2 и 3;

Более того,  $EHJKF$  — отрезок прямой  $\alpha = -1/2$ ,  $GIJC$  — дуга параболы  $2\gamma^2 - 1 - \alpha = 0$ ,  $DIH$  — дуга параболы  $\gamma^2 + 2\alpha + 1 = 0$ , а исключительная кривая  $DKC$  задается уравнением  $\gamma^2(5 + 4\alpha) - \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$ .

На кривой  $GIJC$  исчезают метрики из пункта 3, на кривых  $DIH$  и  $FKJH$  две метрики из пункта 4 вырождаются в одну, на прямой  $EH$  метрик постоянной кривизны нет, а на исключительной кривой  $DKC$  три метрики из пункта 3 вырождаются в одну метрику, для которой  $t = s$ .

**Замечание.** На рис. 2 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой  $DKMN$ , заданной уравнением  $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , отделяющей область изменения весов  $\alpha, \gamma$ , для которой  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^4$ .

## Содержание главы 2

Евклидов комбинаторный поток Риччи заменой  $u_i = \ln r_i$  приводится к виду  $\frac{du}{dt} = -K_i(u)$ ; гиперболический поток приводится к такому же виду заменой  $u_i = \ln \text{th}(r_i/2)$ . Более того, оказывается, что в обоих случаях  $\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i}$ , то есть 1-форма  $\Omega = \sum K_i du_i$  замкнута.

Для неотрицательной весовой функции  $w$  пространство метрик  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^N$ . Поэтому существует функция  $F$ , для которой  $dF = \Omega$ . Более того, в гиперболическом случае  $F$  строго выпукла на  $\mathbb{R}_+^N$ , а в евклидовом  $F$  строго выпукла на гиперплоскости  $\sum u_i = 0$ . Из результатов первой главы следует, что если условия  $w \geq 0$  не выполнены, то существуют весовые функции  $w$ , для которых  $\mathcal{R}_w \subsetneq \mathbb{R}_+^N$ , поэтому односвязность  $\mathcal{R}_w$  нужно устанавливать какими-то дополнительными рассуждениями. Кроме того, выпуклость функции  $F$  опирается на интересное утверждение из элементарной геометрии, для которого существуют контрпримеры, если не

выполнены условия  $w \geq 0$ . В главе 2 найдены условия на весовую функцию, уже не удовлетворяющие условию  $w \geq 0$ , при которых  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^N$  (а следовательно, существует  $F$  такая, что  $dF = \sum K_i du_i$ ). Показано, что при тех же условиях  $F$  выпукла.

**Лемма** (см. [21]). Пусть на грани  $\triangle A_1 A_2 A_3$  задана весовая функция  $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$  такая, что  $\beta = \gamma \geq 0 > \alpha$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $\beta\gamma + \alpha \geq 0$ . Тогда для любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  из отрезков  $l_1, l_2, l_3$  можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.

**Лемма** (см. [21]). Пусть на грани  $\triangle A_1 A_2 A_3$  задана весовая функция  $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$  такая, что  $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$  и  $\gamma, \beta$  или  $|\alpha| \neq 1$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $\beta\gamma + \alpha \geq 0$ . Тогда для любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  из отрезков  $l_1, l_2, l_3$  можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.

**Замечание.** Нетрудно убедиться в том, что вышеуказанная теорема не может быть доказана для любого набора положительных чисел  $r_1, r_2, r_3$  при положительных  $\beta, \gamma$  и отрицательном значении  $\alpha$  без дополнительного ограничения.

Воспользуемся обозначениями теоремы, сформулированной выше и обозначим через  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  внутренние углы при соответствующих вершинах треугольника. Внутренние углы  $\theta_i, i = \{1, 2, 3\}$  являются функциями переменных  $r_j, j = \{1, 2, 3\}$ , для которых верно следующее:

**Теорема** (см. [21]). Пусть веса  $\alpha, \beta, \gamma$  удовлетворяют одному из следующих условий: (i) все три веса неотрицательны; (ii)  $\beta\gamma + \alpha > 0$ , причем веса  $\beta$  и  $\gamma$  неотрицательны, а вес  $\alpha$  отрицателен. Тогда:

1.  $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$ ;
2.  $\partial\theta_j/\partial r_i > 0$  для любых  $j \neq i$ ;
3.  $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_k = 0$ .

**Замечание.** Невозможно доказать утверждение последней теоремы при  $\gamma = \beta \geq 0 > \alpha$  без ограничения  $\gamma^2 + \alpha > 0$ .

Обратимся к гиперболическому случаю, когда грани триангуляции имеют постоянную отрицательную кривизну  $-1$ . Аналогично предыдущему пункту рассмотрим грань  $\triangle A_1 A_2 A_3$  и положим  $w_{23} = \alpha, w_{13} = \beta$  и  $w_{12} = \gamma$ . Длины рёбер  $l_{ij}, i, j = \{1, 2, 3\}, i \neq j$  грани  $\triangle A_1 A_2 A_3$  определяются формулами

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + \gamma \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j. \quad (9)$$

Для гиперболического случая имеется утверждение, не имеющее аналога в евклидовом случае.

**Лемма** (см. [21]). Пусть  $\beta = \gamma \geq 0 \geq \alpha$ . Тогда существует треугольник с ребрами  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  при любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$ .

Следующие два утверждения имеют аналоги.

**Лемма** (см. [21]). Пусть  $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$  и  $\beta\gamma + \alpha > 0$  (или  $\beta\gamma + \alpha = 0$ , но  $\beta \neq 1$  и  $\gamma \neq 1$ ). Тогда из отрезков  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  можно сложить треугольник при любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$ .

**Теорема** (см. [21]). Пусть для весов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  выполняется одно из условий:

- (a) все три веса неотрицательны;
- (b) два веса  $\beta$  и  $\gamma$  неотрицательны, вес  $\alpha$  отрицателен,  $\beta\gamma + \alpha > 0$ ;

Тогда:

1.  $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$  при  $i = \{1, 2, 3\}$ ;
2.  $\partial\theta_i/\partial r_j > 0$  при  $i, j = \{1, 2, 3\}$  и  $i \neq j$ ;
3.  $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_i < 0$ , при  $i = \{1, 2, 3\}$ .

### Содержание главы 3

Численное моделирование решений комбинаторных потоков Риччи, не удовлетворяющих условиям теоремы Чоу и Луо, выявило, что в ряде случаев наблюдаются следующие закономерности: несколько параметров  $r_i$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , но кривизны при этом имеют конечные пределы. Мы вводим новое понятие: метрику упаковок кругов с вырождениями. Отметим, что вырождается только упаковка. Такие метрики должны служить пределами потоков Риччи при описанном выше вырождении. Для таких метрик мы определяем потоки Риччи в евклидовом и гиперболическом случаях и доказываем аналог теорем о сходимости решения к единственной метрике с одинаковыми кривизнами в невырожденных вершинах. При этом весовая функция удовлетворяет не условию  $w \geq 0$ , а более общим, связанному с условиями, полученными в главе 2. Изложим результаты более подробно.

Рассмотрим замкнутую поверхность  $X$  с триангуляцией  $T$ . Предполагается, что поднятие замкнутой грани или ребра в универсальное накрытие  $\tilde{X}$  является вложением. Обозначим множество вершин, ребер и граней триангуляции  $T$  через  $V, E, F$  соответственно. Множество вершин  $V = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  триангуляции  $T$  представим в виде несвязного объединения двух подмножеств  $V = V_n \sqcup V_d$  таких, что никакие две вершины из множества  $V_d$  не соединяются ребром. Подходящим образом перенумеровав вершины, можем считать, что  $V_n = \{A_1, \dots, A_M\}$ ,  $V_d = \{A_{M+1}, \dots, A_N\}$ . Вершины из множества  $V_n$  будем называть *невырожденными*, а из множества  $V_d$  — *вырожденными*.

**Определение.** Метрикой упаковки кругов с вырождениями называется набор  $r = \{r_i \geq 0\}$  такой, что  $r_i = 0$  тогда и только тогда, когда  $A_i$  — вырожденная вершина.

Элемент триангуляции  $T$  (ребро или грань) назовём *невыврожденным* тогда и только тогда, когда все его вершины *невыврождены* и вырожденным в противном случае. Обозначим множество (не)вырожденных рёбер и граней через  $E_d(E_n)$  и  $F_d(F_n)$  соответственно. Очевидно, что  $E = E_n \sqcup E_d$  и  $F = F_n \sqcup F_d$ . Иногда для удобства будем обозначать подмножество вершин и соответствующее подмножество индексов одним символом. Весовая функция определена только на невырожденных рёбрах,  $w : E_n \rightarrow (-1, 1]$ . Зафиксируем тройку  $(X, T, w)$ . В евклидовом случае, когда все грани триангуляции  $T$  — плоские евклидовы треугольники, длина ребра определяется формулой (3). Для вырожденной вершины  $A_i$  кривизна  $K_i$  явно выражается через веса формулой

$$K_i = 2\pi - \sum_{\Delta A_i A_j A_k \in F} (\pi - \arccos(w_{jk})).$$

*Комбинаторный поток Риччи для метрики с вырождениями* — это система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (10)$$

*Усредненной кривизной  $K^{av}$  для метрики упаковки кругов с вырождениями* называется величина:

$$K^{av} = \frac{1}{M} \left( 2\pi\chi(X) - \sum_{j=M+1}^N K_j \right). \quad (11)$$

*Нормированный комбинаторный поток Риччи* — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av})r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (12)$$

**Лемма** (см. [23]). *Набор функций  $r_i(t), i = 1, \dots, M$  является решением уравнений (10) тогда и только тогда, когда  $e^{K^{av}t}r_i(t)$  — решение уравнений (12).*

**Лемма** (см. [23]).  $\prod_{j=1}^M r_j(t)$  — первый интеграл системы уравнений (12).

Пусть на гранях выбрана гиперболическая метрика постоянной кривизны  $-1$ , а длина ребра  $l_{ij}$ , соединяющего вершины  $A_i$  и  $A_j$ , определяется формулой (9). Если ребро является вырожденным, то последнее слагаемое в формуле (9) равно нулю, поэтому вес  $w_{ij}$  не определяется, а  $l_{ij} = r_i$  при  $r_i = 0$ . Комбинаторным гиперболическим потоком Риччи называется система ОДУ вида

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (13)$$

Тройка  $(X, T, w)$  задает пространство метрик  $\mathcal{R}_w$ , которое в свою очередь является подмножеством таких  $r$  из пространства  $\mathbb{R}_+^M \times (0, \dots, 0) \subset \mathbb{R}^N$ , что на каждой грани триангуляции  $T$  выполняются три неравенства треугольника. Будем говорить, что выполняются условия  $(W)$ , если весовая функция  $w$  удовлетворяет условиям леммы, приведенной ниже.

**Лемма** (см. [23]). Пусть каждая грань триангуляции удовлетворяет одному из условий:  
 (а) грань невырождена и весовая функция на её ребрах принимает неотрицательные значения;  
 (б) грань невырождена, весовая функция на одном из ребер грани принимает значение  $\alpha < 0$ , на двух других ребрах  $\beta, \gamma > 0$ , при этом выполняется неравенство  $\alpha + \beta\gamma \geq 0$ ;  
 (с) грань вырождена, значение весовой функции на невырожденном ребре грани отлично от 1.  
 Тогда и для евклидова, и для гиперболического случаев имеем  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^M$ .

**Лемма** (см. [23]). Пусть в грани  $\triangle A_i A_j A_k$  вершины  $A_j, A_k$  невырождены. Тогда

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} r_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} r_k \text{ для евклидова случая,} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} \operatorname{sh} r_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} \operatorname{sh} r_k \text{ для гиперболического случая.} \quad (15)$$

Из этих двух лемм следует существование функции  $F$  на  $\mathbb{R}_+^M$ , для которой  $dF = \sum K_i du_i$ .

**Лемма** (см. [23]). Пусть  $\triangle A_i A_j A_k$  — грань триангуляции. Углы при вершинах  $A_i, A_j, A_k$  обозначим через  $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  соответственно. Предположим, что условие (W) выполняется.

(а) Пусть  $\triangle A_i A_j A_k \in F_n$ , тогда

$$(a1) \quad \frac{\partial \theta_p}{\partial r_p} < 0, \quad p \in \{i, j, k\};$$

$$(a2) \quad \frac{\partial \theta_p}{\partial r_q} > 0, \quad p, q \in \{i, j, k\}, \quad p \neq q;$$

(a3)  $\frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = 0$  для евклидовой метрики на гранях и  $\frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} < 0$  для гиперболической,  $p \in \{i, j, k\}$ .

(б) Пусть  $A_i \in V_d$ , тогда

$$(b1) \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial r_j} < 0 \text{ и } \frac{\partial \theta_k}{\partial r_k} < 0;$$

$$(b2) \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} < 0 \text{ и } \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} < 0;$$

$$(b3) \quad \frac{\partial(\theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = 0 \text{ для евклидовой метрики на гранях и } \frac{\partial(\theta_i + \theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_j + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} < 0$$

для гиперболической,  $p \in \{j, k\}$ .

Более того, частные производные  $\frac{\partial \theta_n}{\partial r_m}$  являются элементарными функциями от  $r_i, r_j, r_k$ , где  $n, m \in \{i, j, k\}$ .

Эта лемма позволит нам доказать выпуклость функции  $F$ .

**Предложение** (см. [23]). Пусть  $(X, T, w)$  — замкнутая триангулированная поверхность с весами. Пусть функции  $r_i(t), i = 1, \dots, M$  удовлетворяют системе уравнений  $\frac{dr_i}{dt} = -L_i(r_1, \dots, r_M)r_i$ . Тогда производную внутреннего угла  $\theta_i^{jk}$  при невырожденной вершине  $A_i$  грани  $\triangle A_i A_j A_k$  можно представить в виде:

$$1. \quad \frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_{ik}(L_k - L_i) - B_i \lambda L_i \text{ для грани } \triangle A_i A_j A_k \in F_n;$$

$$2. \quad \frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_i \lambda L_i \text{ для грани } \triangle A_i A_j A_k \in F_d \text{ с вершиной } A_k \in V_d.$$

Здесь  $\lambda = 0$  для случая евклидовой метрики на гранях и  $\lambda = -1$  для гиперболической.

**Предложение** (см. [23]). Пусть весовая  $w$  функция, заданная на рёбрах триангуляции, удовлетворяет условию (W). Тогда при выполнении условий предыдущего предложения для  $1 \leq i \leq M$  выполняется равенство

$$\frac{dK_i}{dt} = \sum_{i \sim j, j \leq M} C_{ij}(L_j - L_i) + \lambda C_i L_i,$$

где  $C_{ij} = C_{ji}$  и  $C_{ij}$  — положительные элементарные функции переменных  $r_1, \dots, r_M$ , суммирование идёт по невырожденным вершинам  $A_j$ , смежным с вершиной  $A_i$ .

Решение комбинаторного потока Риччи для метрик с вырождениям существует при  $t \in [0, \infty)$ . Введем обозначения  $\overline{M}(t) = \max(K_1(t), \dots, K_M(t))$  и  $\underline{M}(t) = \min(K_1(t), \dots, K_M(t))$ .

**Предложение** (см. [23]). Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_M(t))$  — решение уравнений (12) или (13) на некотором интервале. Тогда

- (1) для евклидова случая функция  $\overline{M}(t)$  невозрастающая, а функция  $\underline{M}(t)$  — неубывающая;
- (2) для гиперболического случая функция  $\max(0, \overline{M}(t))$  невозрастающая, а функция  $\min(0, \underline{M}(t))$  — неубывающая.

**Предложение** (см. [23]). Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_M(t))$  — решение нормализованного потока Риччи. Пусть  $r(t)$  содержится в компактном подмножестве пространства  $\mathbb{R}_+^M$ . Тогда  $r(t)$  сходится экспоненциально быстро к точке  $(r_1, \dots, r_M) \in \mathbb{R}_+^M$ , для которой кривизна в каждой невырожденной вершине равна  $K^{av} = \frac{1}{M} \left( 2\pi\chi(X) - \sum_{j \geq M+1} K_j \right)$ .

**Предложение** (см. [23]). Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_M(t))$  — решение потока (13). Если кривая  $r(t)$  содержится в компактном подмножестве  $\mathbb{R}^M$ , то она сходится экспоненциально быстро в точку  $(r_1, \dots, r_M) \in \mathbb{R}_+^M$ , которая соответствует нулевому набору кривизн  $K_1, \dots, K_M$ .

Воспользуемся следующей заменой переменных: для евклидова случая положим  $u_j = \ln r_j$ , а для гиперболического случая  $u_j = \ln \text{th}(r_j/2)$ . Такая замена позволяет привести оба потока Риччи (10) и (13) к виду

$$\frac{du_j}{dt} = -K_j, \quad j = 1, \dots, M, \tag{16}$$

где  $K_j$  — некоторые функции переменных  $u_1, \dots, u_M$ . При выполнении условий (W) точка  $u = (u_1, \dots, u_M)$  может быть любой точкой пространства  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^M$  в евклидовом случае и пространства  $\mathcal{U} = (-\infty, 0)^M \subset \mathbb{R}^M$  в гиперболическом случае. Утверждение последней леммы можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i}. \tag{17}$$

Следовательно, дифференциальная форма  $\Omega = \sum_{i=1}^M K_i du_i$  замкнута, то есть  $d\Omega = 0$ . Так как  $\mathcal{U}$  — односвязное пространство, то из леммы Пуанкаре следует, что существует гладкая функция  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , заданная на  $\mathcal{U}$ , такая, что  $dF = \Omega$ .

**Предложение** (см. [23]). Пусть весовая функция удовлетворяет условиям (W). Тогда

(a) в гиперболическом случае функция  $F(u_1, \dots, u_M)$  строго выпукла;

(b) в евклидовом случае функция  $F(u_1, \dots, u_M)$  строго выпукла на гиперплоскости  $\sum_{i=1}^N u_i = 0$ .

**Предложение** (см. [23]). Пусть  $X$  — замкнутая поверхность с триангуляцией  $T$  и весовой функцией  $w$ , удовлетворяющая условиям (W). Пусть  $I \subsetneq V_N$ . Обозначим через  $D_I$  множество всех вырожденных вершин, смежных с вершинами из  $I$ . Пусть существуют пределы последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i^{(n)} = 0$  при  $i \in I$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i^{(n)} > 0$  при  $i \in \{1, \dots, M\} \setminus I$  для гиперболического или евклидова случаев  $r^{(n)} = r_i^{(n)} : i = 1, \dots, M$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} K_i(r^{(n)}) + \sum_{j \in D_I} K_j = - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (18)$$

Более того, как в гиперболическом, так и в евклидовом случаях для любого собственного подмножества  $I \subsetneq V_N$  выполняется неравенство

$$\sum_{i \in I} K_i(r) + \sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (19)$$

Главными результатами главы 3 являются следующие теоремы.

**Теорема** (см. [23]). Пусть  $X$  — замкнутая поверхность с фиксированной триангуляцией  $T$  и весовой функцией  $w$ , удовлетворяющей условиям (W). Решение нормализованного потока Риччи (12) сходится, независимо от начальной метрики, тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества  $I \subsetneq V_N$  верно неравенство

$$|I|K^{av} + \sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I})). \quad (20)$$

Кроме того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к единственной метрике с набором одинаковых кривизн  $K_i = K^{av}, i = 1, \dots, M$  в невырожденных вершинах.

**Теорема** (см. [23]). Пусть  $T$  — триангуляция замкнутой поверхности  $X$  с отрицательной эйлеровой характеристикой. Пусть  $w$  — весовая функция на ребрах, удовлетворяющая условиям (W). Решение гиперболического потока Риччи (13) сходится для любой начальной метрики тогда и только тогда, когда для любого подмножества  $I \subsetneq V_N$  верно неравенство

$$\sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (21)$$

Более того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к метрике с набором кривизн  $K_i = 0, i = 1, \dots, M$ .

## Содержание главы 4

Глава посвящена потоку средней кривизны на поверхности, вложенной в  $\mathbb{R}^3$ . *Потоком средней кривизны* для замкнутого многообразия  $M^n$  называется семейство вложений  $f_t : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , гладко зависящее от  $t$ , которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} = -H(\bar{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}, t). \quad (22)$$

В отличие от двумерного потока Риччи, под действием потока средней кривизны у поверхности могут формироваться особенности. Известна следующая теорема:

**Теорема** (Huisken [6]). *Пусть  $f_0$  — вложение гладкого замкнутого многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной формы подмногообразия  $M_0^n$  строго больше нуля для всех  $\bar{x} \in M_0^n$ . Тогда уравнение (22) с начальным условием  $f(\bar{x}, 0) = f_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение на конечном интервале времени  $0 \leq t < T$  такое, что поверхность  $M_t^n$  стягивается в некоторую точку  $O$  при  $t \rightarrow T$ ; нормализованное условием постоянства объема многообразия, уравнение (22) с начальным условием  $\tilde{f}(\bar{x}, 0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение при  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ . В то же время  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  стремится принять форму сферы площади  $|M_0|$ . Подмногообразие  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  получается из  $M_t$  гомотетией с центром в точке  $O$ .*

В этой теореме семейства  $\tilde{f}_t(\bar{x})$  и  $f_t(\bar{x})$  пропорциональны друг другу с точностью до некоторого коэффициента  $\psi(t)$  таким, что объем многообразий, заданных семейством вложений  $\tilde{f}_t(\bar{x})$ , равны объему многообразия  $M_0^n$  для всех  $t$ , то есть  $\tilde{f}_t(\bar{x}) = \psi(t) \cdot f_t(\bar{x})$ , причем  $\tilde{t}(t) = \int_0^t \psi^2(\tau) d\tau$ .

В данной главе описан алгоритм интегрирования потока средней кривизны на двумерной поверхности вращения. Алгоритм основан на методе конечных элементов и показал свою устойчивость на большом интервале изменения времени. Алгоритм работает для любых поверхностей вращения, независимо от того, удовлетворяет исходное вложение условиям теоремы Хьюскена или нет. Наиболее интересны его применения к поверхностям вращения, не удовлетворяющим теореме Хьюскена. Приведён ряд примеров таких поверхностей. Среди них есть примеры, для которых предельное многообразие — вложенная сфера. Также приведены примеры, для которых под действием потока средней кривизны развивается особенность вложения поверхности. Основная вычислительная часть программной реализации предложенного алгоритма была использована при моделировании комбинаторных потоков Риччи на триангулированных поверхностях и с различными весовыми функциями  $w$ .

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Ф. Ю. Попеленскому за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Автор благодарит академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко за постоянное внимание и поддержку.

Автор благодарит профессора Андрея Александровича Ошемкова за полезные замечания и обсуждения.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую и доброжелательную атмосферу.

# Глава 1

## Комбинаторный поток Риччи на поверхностях: положения равновесия

### 1.1 Основные определения и предварительные сведения

Рассмотрим замкнутую поверхность  $M$  с триангуляцией  $T$ . Следуя Тёрстону (см. [5], гл. 13), определим для  $M$  аналог плоской метрики с коническими особенностями. Пусть  $V = \{A_1, \dots, A_N\}$  — множество вершин триангуляции  $T$ . Обозначим через  $E$  и  $F$  соответственно множества рёбер и граней триангуляции  $T$ . *Весовой функцией* называется функция  $w : E \rightarrow (-1, 1]$ ,  $w(A_i A_j) = w_{ij} = w_{ji}$ , а число  $w_{ij}$  называется *весом* ребра  $A_i A_j$ .

Под метрикой на поверхности мы понимаем способ вычислить длину любой ломанной или «хорошей» кривой на этой поверхности. Для фиксированной тройки  $(M, T, w)$ , состоящей из поверхности  $M$ , её триангуляции  $T$  и весовой функции  $w$ , определим метрику на  $M$  следующим образом:

- а) на каждой грани триангуляции будем считать метрику плоской;
- б) метрика зависит от параметров  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
- в) длина  $l_{ij}$  ребра  $A_i A_j \in E$  задается формулой

$$l_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j w_{ij}}. \quad (1.1)$$

Эти условия определяют метрику на  $M$ , причем единственным образом, тогда и только тогда, когда каждой грани триангуляции  $A_i A_j A_k \in F$  длины рёбер  $l_{ij}, l_{jk}, l_{ki}$  удовлетворяют трем неравенствам треугольника. Для простоты под метрикой будем понимать набор  $\{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ .

*Пространством метрик*  $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$ , соответствующим весовой функции  $w$ , будем называть множество всех наборов  $\{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ , для которых  $\{l_{ij} \mid A_i A_j \in E\}$  удовлетворяют неравенствам треугольника на каждой грани триангуляции  $T$ .

Описанные комбинаторные данные имеют очень простую геометрическую интерпретацию. А именно, рассмотрим на евклидовой плоскости окружности  $C_i, C_j$  с радиусами  $r_i, r_j$  соответственно. Предположим, что эти окружности пересекаются. Обозначим через  $\theta_{ij}$  угол пересечения, который выбирается так, что  $\theta_{ij} = 0$  для окружностей, касающихся внешним образом. Тогда расстояние между вершинами  $A_i$  и  $A_j$  задается формулой (1.1), в которой  $w_{ij} = \cos \theta_{ij}$ .

Кривизна такой метрики сконцентрирована в вершинах триангуляции. Поскольку каждый набор  $\{r_i > 0, i = 1, \dots, N\} \in \mathcal{R}_w$  определяет длины рёбер  $\{l_{ij}\}$ , то плоские углы в вершинах каждой грани также определены. *Кривизной*  $K_i$  в вершине  $A_i$  называется величина

$$K_i = 2\pi - \sum_{A_i A_j A_k \in F} \angle A_j A_i A_k, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

*Комбинаторный поток Риччи* — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

которая определяет зависимость метрики в терминах эволюции набора параметров  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathcal{R}_w$ .

Для замкнутых ориентированных поверхностей рода  $g \geq 2$  естественно рассматривать метрику на  $(M, T, w)$ , которая не является плоской на каждой грани, но имеет постоянную отрицательную кривизну. Более точно, метрики такого типа задаются следующим образом:

- a) метрика на каждой грани триангуляции  $T$  имеет постоянную отрицательную кривизну  $-1$ ;
- b) метрика зависит от параметров  $\{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
- c) длина  $l_{ij}$  ребра  $A_i A_j \in E$  определяется формулой  $\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + w_{ij} \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j$ .

В этом (гиперболическом) случае приведенные условия имеют тот же геометрический смысл, что и в евклидовом случае. *Пространством метрик*  $\mathcal{R}_w \subseteq \mathbb{R}_+^N$ , соответствующим весовой функции  $w$ , в гиперболическом случае будем называть множество всех наборов  $\{r_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ , для которых  $\{l_{ij} \mid A_i A_j \in E\}$  удовлетворяют гиперболическому неравенству треугольника на каждой грани триангуляции  $T$ . *Гиперболический комбинаторный поток Риччи* — это система дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

В работе [5] Тёрстон доказал, что при определенных комбинаторных условиях на триангуляцию и веса метрика постоянной кривизны существует и единственна. Здесь следует сделать следующее важное замечание. В евклидовом случае кривизна метрики сконцентрирована в вершинах триангуляции, поэтому у метрики постоянной кривизны  $K_i(r) = 2\pi\chi(M)/N, i = 1, \dots, N$ .

Кроме того, метрики  $r$  и  $\lambda r$ , где  $\lambda$  — произвольное положительное вещественное число имеют одинаковую кривизну, поэтому в евклидовом случае в теореме Тёрстона идёт речь о единственности метрики постоянной кривизны с точностью до умножения на положительный скаляр. В гиперболическом случае для метрики  $r$  постоянной кривизны во всех вершинах выполняются равенства  $K_i(r) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , иными словами в гиперболическом случае метрика постоянно кривизны в вершинах не имеет конических особенностей.

Ясно, что для гиперболического случая метрики постоянной кривизны — в точности то же самое, что положения равновесия потока Риччи (1.4). Чтобы связать метрики постоянной кривизны с особенностями потока Риччи в евклидовом случае, нам понадобится *нормализованный поток Риччи*, который определяется как система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av})r_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

где  $K^{av} = \frac{2\pi\chi(X)}{N}$ . Нетрудно проверить, что  $r(t)$  — решение потока (1.3) тогда и только тогда, когда  $e^{K^{av}t}r_i(t)$  — решение потока (1.5). В евклидовом случае метрики постоянной кривизны в точности являются положениями равновесия потока (1.5).

Чоу и Луо, см. [2], показали, что при условиях, найденных Тёрстоном, поток Риччи (в обоих случаях: и (1.4) и (1.5)) сходится к единственной метрике постоянной кривизны. В евклидовом случае здесь не возникает противоречия, так как произведение  $\prod_{i=1}^N r_i$  — первый интеграл нормализованного потока Риччи (1.5).

Прежде чем сформулировать теорему Чоу и Луо о сходимости потока из работы [2], определим *линк*  $Lk(I)$  подмножества  $I \subset V$  вершин триангуляции  $T$ , как множество пар  $(e, v)$ , состоящих из ребра  $e$  и вершины  $v$  таких, что

- (1) концы ребра  $e$  не содержатся в  $I$ ,
- (2)  $v \in I$ ,
- (3)  $e$  и  $v$  образуют грань.

Обозначим также через  $F_I$  подмножество в  $X$ , состоящее из симплексов, все вершины которых принадлежат  $I$ .

**Теорема 1.1** (см.[2]). *Пусть  $(X, T, w)$  — триангуляция  $T$  поверхности  $X$  с набором весов  $w \geq 0$ . Тогда для потока Риччи (1.4) или (1.5)*

- (1) *существует решение  $r(t)$ , определенное для  $t \in [0, \infty)$ , для любой начальной метрики  $r(0)$ .*
- (2) *решение  $r(t)$  сходится к метрике постоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

для любого собственного подмножества  $I \subset V$  выполнено неравенство

$$0 > - \sum_{(e,v) \in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \quad \text{для потока (1.4),}$$

$$2\pi|I|\chi(X)/|N| > - \sum_{(e,v) \in Lk(I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I) \quad \text{для потока (1.5);}$$

(3) при выполнении условий (2) решение  $r(t)$  сходится к метрике постоянной кривизны экспоненциально быстро.

Идея доказательств теоремы (1.1) состоит в том, чтобы подходящими заменами переменных представить поток Риччи как отрицательный градиентный поток некоторой выпуклой функции  $F$ . В свою очередь, выпуклость функции  $F$  является следствием интересного факта из элементарной геометрии, доказанного в лемме 13.7.3 из книги Тёрстона [5]. Тёрстон использовал при этом неравенство  $w \geq 0$ . В следующей главе будет показано, как ослабить условие неотрицательности  $w$ , сохранив при этом выпуклость функции  $F$ .

## 1.2 Метрики на тетраэдре и положения равновесия комбинаторного потока Риччи

В этом разделе мы рассмотрим некоторые пространства  $\mathcal{R}_w$  метрик на тетраэдре в евклидовом случае. В частности, мы покажем, что ослаблять условия Тёрстона или Чоу и Луо произвольным образом нельзя. А именно, мы рассмотрим пространство  $\mathcal{R}_w$  в следующих случаях, когда весовая функция обладает определенным видом симметрии:

1.  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{13} = \gamma;$
2.  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{23} = w_{13} = \alpha,$

где  $w_{ij}, i \neq j, i, j = \{0, 1, 2, 3\}$  — вес на ребре  $l_{ij}$ .

Напомним, что в евклидовом случае кривизны метрик  $r$  и  $\lambda r$  во всех вершинах совпадают. Поэтому метрики, отличающиеся скалярным множителем, в этой главе мы не различаем. В частности, это соглашение используется в нижеследующих теоремах 1.3, 1.5.

### Пространство метрик $R_w$ для тетраэдра

Опишем условия, выделяющее  $\mathcal{R}_w$  в  $\mathbb{R}_+^4$ . Для положительных  $r_1, r_2, r_3$  определим  $l_3 = l_{12}, l_1 = l_{23}, l_2 = l_{13}$  формулой (1.1). Три неравенства треугольника для величин  $l_1, l_2, l_3$  эквивалентны одному неравенству

$$(l_1 + l_2 + l_3)(-l_1 + l_2 + l_3)(l_1 - l_2 + l_3)(l_1 + l_2 - l_3) > 0, \quad (1.6)$$

которое можно переписать в виде:

$$-(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2 + 4l_1^2l_2^2 + 4l_1^2l_3^2 + 4l_2^2l_3^2 > 0. \quad (1.7)$$

Подставляя в данное неравенство выражения для  $l_1^2, l_2^2, l_3^2$  через веса  $w_{12}, w_{23}, w_{31}$  и параметры  $r_1, r_2, r_3$ , получаем одно из неравенств, выделяющих  $\mathcal{R}_w$  в  $\mathbb{R}_+^4$ :

$$\frac{1-w_{12}}{r_3^2} + \frac{1-w_{31}}{r_2^2} + \frac{1-w_{23}}{r_1^2} + 2\frac{w_{23}+w_{31}w_{12}}{r_2r_3} + 2\frac{w_{31}+w_{23}w_{12}}{r_3r_1} + 2\frac{w_{12}+w_{23}w_{31}}{r_1r_2} > 0. \quad (1.8)$$

Выписав такие неравенства для каждой грани триангуляции, получим набор неравенств, выделяющих пространство  $\mathcal{R}_w$  в  $\mathbb{R}_+^4$ .

### 1.2.1 Метрики постоянной кривизны на тетраэдре с первым типом симметрии весов

**Лемма 1.2.** Пусть  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$ . Если  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , то пространство  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^4$ . В противном случае, когда  $\gamma \leq -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , пространство  $\mathcal{R}_w \subsetneq \mathbb{R}_+^4$ .

*Доказательство.* Все грани тетраэдра имеют один и тот же набор весов на её рёбрах. Таким образом, достаточно проверить, что при любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  выполняется неравенство

$$\frac{1-\gamma^2}{r_3^2} + \frac{1-\gamma^2}{r_2^2} + \frac{1-\alpha^2}{r_1^2} + 2\frac{\alpha+\gamma^2}{r_2r_3} + 2\frac{\gamma(1+\alpha)}{r_3r_1} + 2\frac{\gamma(1+\alpha)}{r_1r_2} > 0. \quad (1.9)$$

Воспользуемся следующей заменой переменных  $s_2 = \frac{r_1}{r_2}, s_3 = \frac{r_1}{r_3}$  и перепишем неравенство (1.9) в виде

$$(1-\gamma^2)(s_2^2 + s_3^2) + (1-\alpha^2) + 2\gamma(1+\alpha)(s_2 + s_3) + 2(\alpha+\gamma^2)s_2s_3 > 0. \quad (1.10)$$

Необходимость условия  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$  вытекает из того, что существует точка  $s_2 = s_3 > 0$ , в которой неравенство (1.10) не выполняется. В самом деле, подставим  $s = s_2 = s_3$  в 1.10 и упростим неравенство, имеем

$$2(1+\alpha)s^2 + 4\gamma(1+\alpha)s + 1-\alpha^2 > 0.$$

Теперь заметим, что из  $\gamma \leq -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$  следует, что  $-2\gamma^2 - \alpha + 1 \leq 0$  и  $\gamma < 0$  (при  $\alpha \neq 1$ ). Таким образом, при  $s = -\gamma$  левая часть неравенства равна выражению  $(1+\alpha)(-2\gamma^2 - \alpha + 1)$ , которое не может быть положительным.

Докажем достаточность условия  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ . Рассмотрим два случая:

(A)  $\gamma \geq 0$ ;

(B)  $-\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} < \gamma < 0$ .

Перепишав неравенство (1.10) для случая (А), получим

$$(1 - \alpha^2) + 2(1 + \alpha)\gamma(s_2 + s_3) + (1 - \gamma^2)(s_2 - s_3)^2 + 2(1 + \alpha)s_2s_3 > 0,$$

что очевидным образом выполняется при любых  $s_2, s_3 > 0$ .

Теперь рассмотрим случай (В). Воспользуемся следующей заменой  $s_2 = t_1 + t_2, s_3 = t_1 - t_2$ , тогда неравенство (1.10) примет вид

$$2(1 + \alpha)t_1^2 + 4\gamma(1 + \alpha)t_1 + (1 - \alpha^2) + 2(1 - 2\gamma^2 - \alpha)t_2^2 > 0.$$

Левая часть неравенства достигает своего минимума при  $t_1 = -\gamma$ . Подставим  $t_1 = -\gamma$  и упростим полученное выражение, получим

$$(1 - 2\gamma^2 - \alpha)(1 + \alpha + 2t_2^2) > 0,$$

откуда, силу ограничений (В) и  $|\alpha| < 1$  следует утверждение теоремы.  $\square$

**Теорема 1.3.** Пусть  $w_{01} = w_{23} = \alpha, w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, показанной на рис. 1.1. А именно:

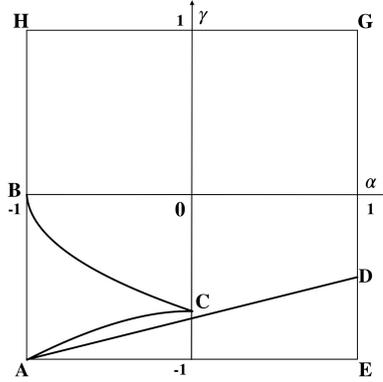


Рис. 1.1: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны.

1. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ACBHG$  существует единственная метрика постоянной кривизны,  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ;
2. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ABC$  имеется пять различных метрик постоянной кривизны:  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$  и еще четыре, для которых выполняется один из наборов соотношений  $r_0 = r_1, r_0 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$  или  $r_2 \neq r_0 \neq r_1 \neq r_3, r_2 = r_3$ ; кроме того, эти четыре метрики получают друг из друга соответствующими перестановками индексов у параметров  $r_i$ ;

3. для  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ADE$  метрик постоянной кривизны нет.

Более того, отрезок  $AD$  лежит на прямой  $\alpha = 3 + 4\gamma$ , кривая  $BD$  — дуга параболы  $2\gamma^2 - \alpha - 1 = 0$ , а кривая  $AD$  — дуга гиперболы  $2\gamma^2 - \alpha^2 - 1 = 0$ . На отрезке  $AD$  пропадает решение  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ , на дугах  $BC$  и  $AD$  пропадают четыре решения, описанные в пункте 2.

На рис. 1.1 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой  $ACF$ , заданной уравнением  $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , отделяющей область изменения весов  $\alpha, \gamma$ , в которой  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^4$ .

*Доказательство.* Набор  $\{r_i\}$  определяет метрику постоянной кривизны на тетраэдре тогда и только тогда, когда тетраэдр равногранный, иными словами, длины его противоположных рёбер равны:

$$\begin{cases} r_0^2 + r_1^2 + 2r_0r_1\alpha = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha, \\ r_0^2 + r_2^2 + 2r_0r_2\gamma = r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3\gamma, \\ r_0^2 + r_3^2 + 2r_0r_3\gamma = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\gamma. \end{cases} \quad (1.11)$$

Необходимым условием существования метрики постоянной кривизны также является выполнение неравенства (1.10) для каждой грани, причем в силу равногранности тетраэдра достаточно проверить это неравенство только для одной из граней. Очевидно, что у этой системы имеется решение  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$  и существование такой метрики на сфере определяется выполнением неравенства (1.10). В этом случае стороны одной из граней равны  $\sqrt{2+2\alpha}, \sqrt{2+2\gamma}, \sqrt{2+2\gamma}$  и неравенство (1.10) равносильно  $2\sqrt{2+2\gamma} > \sqrt{2+2\alpha}$  откуда следует, что  $\alpha < 3 + 4\gamma$ . Обратимся теперь к поиску других решений системы (1.11). Заменив два последних уравнения в системе (1.11) на их сумму и разность, получим систему

$$\begin{cases} r_0^2 + r_1^2 + 2r_0r_1\alpha = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha, \\ (r_2 - r_3)(r_2 + r_3 + \gamma(r_0 + r_1)) = 0, \\ (r_0 - r_1)(r_0 + r_1 + \gamma(r_2 + r_3)) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Из второго и третьего уравнений следует, что при  $\gamma \geq 0$  получаются соотношения  $r_0 = r_1, r_2 = r_3$ . Тогда при  $\alpha \neq -1$  из первого уравнения получаем решение  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ , исследованное выше. При  $\gamma < 0$  и  $\gamma \neq -1$ , возникают еще два случая:

$$r_0 - r_1 = 0 = r_2 + r_3 + \gamma(r_2 + r_3),$$

или

$$r_2 - r_3 = 0 = r_0 + r_1 + \gamma(r_0 + r_1).$$

В силу симметрии первого уравнения системы (1.12), достаточно исследовать только один из них, например первый. Поскольку решения определены с точностью до умножения на положительный множитель, можно считать, что  $r_0 = r_1 = 1$ , и тогда система уравнений на переменные  $r_2, r_3$  примет вид

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha, \\ r_2^2 + 2r_2\gamma = r_3^2 + 2r_3\gamma. \end{cases} \quad (1.13)$$

Исключая из рассмотрения очевидные решения  $r_2 = r_3 = 1$ , перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha, \\ r_2 + r_3 + 2\gamma = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Сделав стандартную замену  $u = r_2 + r_3, v = r_2r_3$ , сведем систему к

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha = u^2 - 2v + 2v\alpha, \\ u + 2\gamma = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

При условии, что  $\alpha \neq 1$ , получим решение

$$\begin{cases} u = -2\gamma, \\ v = \frac{2\gamma^2 - \alpha - 1}{1 - \alpha}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Существование положительных  $r_2$  и  $r_3$  для данных  $u, v$  определяется условиями

$$\begin{cases} u > 0, \\ v > 0, \\ u^2 - 4v \geq 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Так как  $\alpha, \gamma \in (-1, 1)$ , то последнее неравенство эквивалентно  $\frac{(1+\alpha)(1-\gamma^2)}{1-\alpha} > 0$ , из строгости которого следует, что  $r_2 \neq r_3$ , а это значит, что в силу симметрии имеются два различных решения  $(r_2, r_3)$ . Аналогичные рассуждения применимы для случая  $r_2 = r_3 = 1$  — они приводят к тем же условиям существования двух различных решений  $r_0 \neq r_1$ .

Таким образом, при условии, что верны неравенства  $\gamma < 0$  и  $2\gamma^2 - \alpha - 1 > 0$ , существуют четыре различных решения  $(r_0, r_1, r_2, r_3)$  вида  $(1, 1, s, t), (1, 1, t, s), (s, t, 1, 1), (t, s, 1, 1)$ , где  $1 \neq t \neq s \neq 1$  и  $t, s > 0$  — некоторые различные положительные числа.

Если  $2\gamma^2 - \alpha - 1 = 0$ , то один из параметров,  $t$  или  $s$ , обращается в нуль, что исключает существование метрик постоянной кривизны на тетраэдре. Остается проверить выполнение неравенства (1.10) для каждого из этих четырех решений. Из системы (1.11) при подстановке  $r_0 = r_1 = 1$  и  $r_2 \neq r_3$  следует, что грань тетраэдра должна быть равнобедренным треугольником с основанием  $2 + 2\alpha$  и боковой стороной  $1 + r_2^2 + 2r_2\gamma = 1 + r_3^2 + 2r_3\gamma$ . Тогда (1.10) равносильно неравенству

$$1 + r_2^2 + 2r_2\gamma + 1 + r_3^2 + 2r_3\gamma > 2 + 2\alpha.$$

Возвращаясь к подстановке  $u = r_2 + r_3, v = r_2 r_3$ , приведем это неравенство к виду

$$2 + u^2 - 2v + 2\gamma u > 2 + 2\alpha.$$

Подставив в данное неравенство решение (1.16), получим  $2\gamma^2 < \alpha^2 + 1$ . Итак, если три неравенства  $\gamma < 0, 2\gamma^2 - \alpha - 1 > 0, 2\gamma^2 < \alpha^2 + 1$  верны одновременно, то существуют четыре различных решения  $(r_0, r_1, r_3, r_4)$   $(1, 1, s, t), (1, 1, t, s), (s, t, 1, 1), (t, s, 1, 1)$ , где  $t \neq s \neq 1$  — некоторые различные положительные числа, которые задают метрики постоянной кривизны.  $\square$

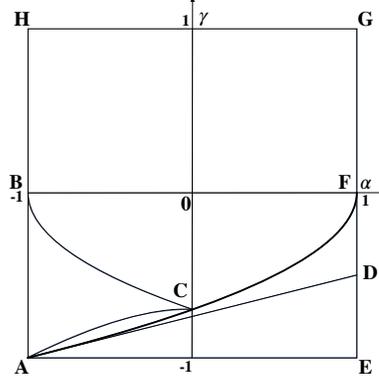


Рис. 1.2: Граница области, для которой  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha, \gamma} = \mathbb{R}_+^4$ , определяется кривой  $ACF$ .

**Замечание 1.** На рис. 1.2 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой  $ACF$ , заданной уравнением  $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , отделяющей область изменения весов  $\alpha, \gamma$ , для которой  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^4$ .

## 1.2.2 Метрики постоянной кривизны на тетраэдре со вторым типом симметрии весов

**Лемма 1.4.** Пусть  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Если  $\gamma > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , тогда пространство  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^4$ . И наоборот, при  $\gamma \leq -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$  имеем  $\mathcal{R}_w \subsetneq \mathbb{R}_+^4$ .

*Доказательство.* Необходимо доказать утверждение леммы для грани  $A_1 A_2 A_3$ , так как для граней  $A_0 A_1 A_2, A_0 A_2 A_3, A_0 A_1 A_3$  утверждение по сути доказано в лемме 1.2. Весовая функция на ребрах на всех рёбрах грани  $A_1 A_2 A_3$  принимает значение равное  $\alpha$ . Покажем, что утверждение для грани  $A_1 A_2 A_3$  следует из леммы 1.2 при  $\gamma = \alpha$ . А именно, неравенство  $\alpha > -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$  для  $1 \geq \alpha \geq 0$  выполняется тривиальным образом. Если  $\alpha < 0$ , то неравенство сводится к  $\frac{1-\alpha}{2} > \alpha^2$ , что равносильно  $2\alpha^2 + \alpha - 1 < 0$ , которое, в свою очередь, верно для  $\alpha \in (-1, 0)$ .  $\square$

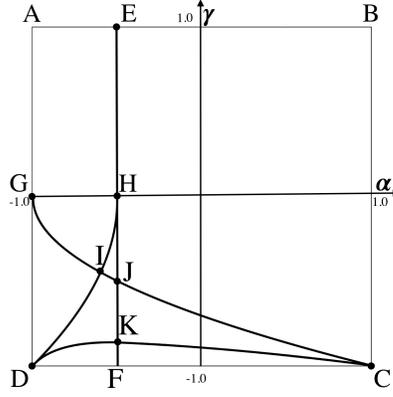


Рис. 1.3: Области с различными количествами метрик постоянной кривизны.

**Теорема 1.5.** Пусть  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = \gamma, w_{12} = w_{13} = w_{23} = \alpha$ , где  $\alpha, \gamma \in (-1, 1]$ . Тогда количество метрик постоянной кривизны описывается диаграммой, изображенной на рис. 1.3. Более того,

1. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $AEHIG$ , то метрик постоянной кривизны не существует;
2. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $EBCJH$ , то существует единственная метрика постоянной кривизны, причем  $r_1 = r_2 = r_3$ ;
3. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $DGI$ , то существуют три различные метрики постоянной кривизны  $(r_1, r_2, r_3)$  таких, что  $(t, t, s), (t, s, t)$  или  $(s, t, t)$ , где  $t \neq s$ ;
4. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит области  $IJH$ , то существуют две метрики постоянной кривизны, причем для каждой из них  $r_1 = r_2 = r_3$ ;
5. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит одной из областей  $DKJI$  и  $DKF$ , то существуют пять метрик постоянной кривизны, описанных в пунктах 3 и 4;
6. если  $(\alpha, \gamma)$  принадлежит одной из областей  $FKC$  и  $JKC$ , то существуют четыре метрики постоянной кривизны, описанных в пунктах 2 и 3.

Более того,  $EHJKF$  — отрезок прямой  $\alpha = -1/2$ ,  $GIJC$  — дуга параболы  $2\gamma^2 - 1 - \alpha = 0$ ,  $DIH$  — дуга параболы  $\gamma^2 + 2\alpha + 1 = 0$ , а исключительная кривая  $DKC$  задается уравнением  $\gamma^2(5 + 4\alpha) - \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$ .

На кривой  $GIJC$  исчезают метрики из пункта 3, на кривых  $DIH$  и  $FKJH$  две метрики из пункта 4 вырождаются в одну, на прямой  $EH$  метрик постоянной кривизны нет, а на исключительной кривой  $DKC$  три метрики из пункта 3 вырождаются в одну метрику, для которой  $t = s$ .

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 1.3, нам необходимо исследовать количество решений  $(r_0, r_1, r_2, r_3)$  системы уравнений

$$\begin{cases} r_0^2 + r_1^2 + 2r_0r_1\gamma = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha, \\ r_0^2 + r_2^2 + 2r_0r_2\gamma = r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3\alpha, \\ r_0^2 + r_3^2 + 2r_0r_3\gamma = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\alpha, \end{cases} \quad (1.18)$$

с точностью до умножения на константу.

Заменяя два первых уравнения на их сумму и разность, а третье — на разность третьего и первого уравнений, получим равносильную систему

$$\begin{cases} r_0^2 - r_3^2 + r_0\gamma(r_1 + r_2) - r_3\alpha(r_1 + r_2), \\ (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 + r_0\gamma + r_3\alpha) = 0, \\ (r_2 - r_3)(r_2 + r_3 + r_0\gamma + r_1\alpha) = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Далее, рассмотрим три случая.

*Случай 1.* Пусть  $r_1 = r_2 = r_3$ . Тогда, для  $r_0 = 1$  из первого уравнения системы (1.19) получаем

$$1 + r_3^2 + 2r_3\gamma = 2r_3^2 + 2r_3^2\alpha,$$

что можно переписать в виде

$$(1 + 2\alpha)r_3^2 - 2\gamma r_3 - 1 = 0.$$

Любое положительное решение этого уравнения дает метрику постоянной кривизны на тетраэдре, поскольку из (1.18) следует, что длины всех рёбер тетраэдра равны. Поэтому неравенство (1.10) выполняется очевидным образом. Далее, если  $2\alpha + 1 = 0$ , то положительное решение  $r_3 = -1/(2\gamma)$  существует при  $\gamma < 0$ .

Если  $2\alpha + 1 > 0$ , то положительное решение единственно и равно  $r_3 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha + 1}}{2\alpha + 1}$ .

Если  $2\alpha + 1 < 0$ , то при  $\gamma \geq 0$  положительных решений нет, а при  $\gamma < 0$  положительных решений два  $r_3 = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha + 1}}{2\alpha + 1}$ , при условии, что  $\gamma^2 + 2\alpha + 1 > 0$ . Наконец, если  $2\alpha + 1 < 0$ ,  $\gamma < 0$  и  $\gamma^2 + 2\alpha + 1 = 0$ , то решение одно:  $r_3 = \gamma/(2\gamma + 1)$ .

*Случай 2.* Пусть два числа из трёх  $r_1, r_2, r_3$  равны между собой. Поскольку  $r_1, r_2, r_3$  входят в систему (1.18) симметрично, существуют три набора решений вида  $(1, s, s, t)$ ,  $(1, s, t, s)$ ,  $(1, t, s, s)$ . Без ограничения общности положим, что  $r_2 = r_3$  и упростим систему (1.19), тогда

$$\begin{cases} r_0^2 - r_3^2 + r_0\gamma(r_1 + r_2) - r_3\alpha(r_1 + r_2) = 0, \\ r_2 = r_3, \\ r_1 + r_2 + r_0\gamma + r_3\alpha = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Из третьего уравнения выразим сумму  $r_1 + r_2$  и подставим в первое при условии, что  $r_0 = 1$ , получим

$$1 - r_3^2 - (\gamma + r_3\alpha)(\gamma - r_3\alpha) = 0,$$

отсюда

$$(1 - \alpha^2)r_3^2 = 1 - \gamma^2.$$

Тогда при  $\alpha, \gamma \in (-1, 1)$  решения для положительных  $r_2, r_3$  примут вид

$$r_2 = r_3 = \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{1 - \alpha^2}}. \quad (1.21)$$

Из третьего уравнения системы (1.20) получаем

$$r_1 = -\gamma - \sqrt{\frac{(1 - \gamma^2)(1 + \alpha)}{1 - \alpha}}, \quad (1.22)$$

которое является положительным тогда и только тогда, когда  $\gamma < 0$  и  $\gamma^2 > \frac{(1+\alpha)(1-\gamma^2)}{1-\alpha}$ . Последнее неравенство равносильно неравенству  $(2\gamma^2 - 1 - \alpha)/(1 - \alpha) > 0$ . При обращении любого из этих неравенств в равенство не существует решений для положительного  $r_1$ .

Перейдем к исследованию условий на  $\alpha$  и  $\gamma$ , при которых выполняется неравенства (1.10) для квадратов длин сторон тетраэдра, равных  $r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha$ ,  $r_0^2 + r_2^2 + 2r_0r_2\gamma$ ,  $r_0^2 + r_3^2 + 2r_0r_3\gamma$ , где  $r_0 = 1$ , а  $r_2, r_3$  определены уравнением (1.21). В нашем случае две последние величины одинаковы, то есть грани тетраэдра — равнобедренные треугольники, поэтому достаточно проверить одно неравенство треугольника из трёх

$$2\sqrt{r_0^2 + r_3^2 + 2r_0r_3\gamma} > \sqrt{r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha}.$$

Перепишем его в виде

$$4(r_0^2 + r_3^2 + 2r_0r_3\gamma) > (r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\alpha)$$

и, воспользовавшись тем, что  $r_0 = 1, r_2 = r_3$ , получим

$$(1 - \alpha)r_3^2 + 2 + 4r_3\gamma > 0. \quad (1.23)$$

Очевидно, что последнее неравенство верно при  $\gamma \geq 0$ , но тогда из (1.22) следует, что  $r_1$  принимает неположительные значения. Остается исследовать случай  $\gamma < 0$ . Тогда неравенство (1.23) примет вид

$$2 + \frac{1 - \gamma^2}{1 + \alpha} > -4\gamma\sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{1 - \alpha^2}}. \quad (1.24)$$

Докажем, что условия  $\gamma < 0$  и  $2\gamma^2 - 1 - \alpha > 0$  при  $\alpha \in (-1, 1), \gamma \in (-1, 0)$  являются достаточными для выполнения последнего неравенства. В самом деле, перепишем неравенство (1.24) в виде

$$\frac{9 + 3\alpha - 8\alpha^2 - 4\alpha^3 - 22\gamma^2 - 14\alpha\gamma^2 + 4\alpha^2\gamma^2 + 17\gamma^4 + 15\alpha\gamma^4}{(1 - \alpha)(1 + \alpha^2)^2} > 0. \quad (1.25)$$

Воспользовавшись заменой  $t = \gamma^2$ , сведем задачу к доказательству неравенства

$$9 + 3\alpha - 8\alpha^2 - 4\alpha^3 - 22t - 14\alpha t + 4\alpha^2 t + 17t^2 + 15\alpha t^2 > 0.$$

при условии, что

$$\begin{cases} t \in (0, 1) \\ \alpha > -1, \\ 2t - \alpha - 1 > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Сделаем еще одну замену  $t = (b - 2)/k + 1, b = \alpha - 1$ . Тогда ограничения (1.26) принимают простой вид:  $b \in (0, 2), k > 2$ ; в то же время наше неравенство перепишем в виде

$$\frac{(2 - b)(4k^2b^2 - 4kb^2 - 15b^2 + 28b - 8bk + 4)}{k^2} > 0.$$

Таким образом, достаточно проверить, что неравенство  $4b^2k^2 - 4(b^2 + 2b)k - 15b^2 + 28b + 4 > 0$  верно при  $b \in (0, 2), k > 2$ . Для фиксированного  $b \geq \frac{2}{3}$  функция  $f(k) = 4b^2k^2 - 4(b^2 + 2b)k - 15b^2 + 28b + 4$  возрастает при  $k \geq 2$  и упрощается до квадратного трёхчлена  $-7b^2 + 12b + 4$  при  $k = 2$ , который принимает значения больше нуля если  $b \in (0, 2)$ . Если  $0 < b < \frac{2}{3}$ , то функция  $f(k) = 4b^2k^2 - 4(b^2 + 2b)k - 15b^2 + 28b + 4$  имеет минимум при  $k = \frac{b+2}{2b}$ , который равен  $8(3 - 2b)b$  и положителен при  $0 < b < \frac{2}{3}$ . Наконец осталось исключить случай, когда величина  $r_1$ , определенная формулой (1.22), совпадает с величинами  $r_2 = r_3$ , определенными формулой (1.21). Приравняем правые части этих двух формул и, воспользовавшись ограничением  $\gamma < 0$ , с помощью элементарных преобразований получим

$$\frac{\gamma^2(5 + 4\alpha) - \alpha^2 - 4\alpha - 4}{1 - \alpha^2} = 0.$$

*Случай 3.* Пусть все числа  $r_1, r_2, r_3$  попарно различны. Тогда систему (1.19) можно переписать в виде

$$\begin{cases} r_0^2 - r_3^2 + r_0\gamma(r_1 + r_2) - r_3\alpha(r_1 + r_2) = 0, \\ r_1 + r_2 + r_0\gamma + r_3\alpha = 0, \\ r_2 + r_3 + r_0\gamma + r_1\alpha = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Вычтем из второго уравнения третье, получим соотношение

$$r_1 + \alpha r_3 - r_3 - \alpha r_1 = 0,$$

откуда при  $\alpha \neq 1$  получаем  $r_1 = r_3$ , что противоречит исходному допущению о том, что все числа  $r_1, r_2, r_3$  попарно различны.  $\square$

**Замечание 2.** На рис. 1.4 изображены границы областей с различным количеством положений равновесия вместе с кривой  $DKMN$ , заданной уравнением  $\gamma = -\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$ , отделяющей область изменения весов  $\alpha, \gamma$ , для которой  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^4$ .

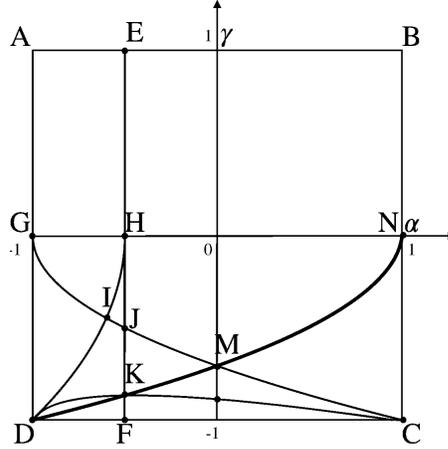


Рис. 1.4: Граница области, для которой  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha, \gamma} = \mathbb{R}_{+}^4$ , определяется кривой  $DKMN$ .

### 1.2.3 Несколько замечаний о траекториях комбинаторного потока Риччи

В данном пункте приведены результаты численного моделирования нормализованного комбинаторного потока Риччи на тетраэдре с весами  $w_{01} = w_{23} = \alpha$ ,  $w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = \gamma$  — это случай, исследованный в пункте 1.2.1. Интерес представляет различие поведения траекторий потока Риччи при  $(\alpha, \gamma)$ , принадлежащих разным областям на диаграмме 1.1. Аналогичный результат нетрудно получить для распределения весов, исследованного в пункте 1.2.2. Как уже было сказано, произведение  $\prod_{i=1}^{i=N} r_i(t)$  является первым интегралом нормализованного комбинаторного потока Риччи. Опишем траектории с условием  $\prod_{i=1}^{i=N} r_i(t) = 1$ , остальные случаи можно получить из данного соответствующим масштабированием. На рисунках отображены несколько траекторий после проекции  $(r_0, r_1, r_2, r_3) \mapsto (r_1/r_0, r_2/r_0, r_3/r_0)$  гиперповерхности  $r_0 r_1 r_2 r_3 = 1$  на  $\mathbb{R}^3$ .

Сначала рассмотрим значения  $(\alpha, \gamma)$  из области  $ABC$  (см. теорему 1.3), для которых имеются пять точек положений равновесия комбинаторного потока Риччи. Численное моделирование показывает, что одно из них (а именно,  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ ) является стоком, в то время как остальные четыре ( $r_0 = r_1, r_0 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$  или  $r_2 \neq r_0 \neq r_1 \neq r_3, r_2 = r_3$ ) являются седловыми точками. На рис. 1.5 изображены несколько типичных траекторий для данного случая.

Стоит отметить, что существует множество начальных метрик, имеющих положительную меру, для которых траектории сходятся к стоку. Эволюция тетраэдра для подобных траекторий изображена на рис. 1.6.

Также наблюдается множество начальных метрик, имеющих положительную меру, для которых траектории стремятся к бесконечности, отдаляясь от положения равновесия. Оказывается, во всех этих случаях кривизны имеют определенный предел. Данное наблюдение оказалось клю-

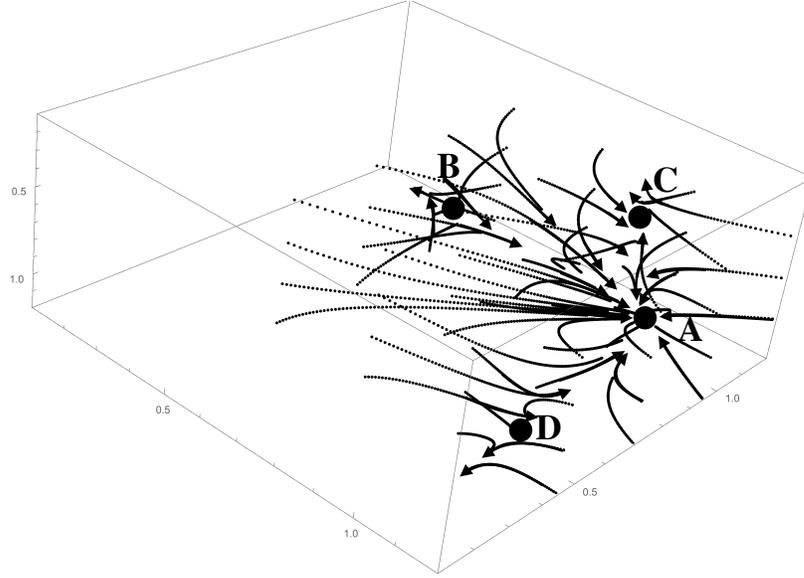


Рис. 1.5: Типовые траектории в области положений равновесий при  $\alpha = -0.8, \gamma = -0.7$ . Здесь  $A$  — сток, а  $B, C$  и  $D$  — седловые, пятое положение равновесия не отображено.

чевым для мотивировки и результатов главы 3. Эволюция тетраэдра для подобных траекторий показана на рис. 1.7.

Другая интересная область — это  $ACFD$  на рис. 1.3. Из леммы 1.2 и теоремы 1.3 следует, что для набора  $(\alpha, \gamma) \in ACFD$  нормализованный комбинаторный поток Риччи имеет единственное положение равновесия  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ , но при этом  $\mathcal{R}_{\alpha, \gamma} \not\subseteq \mathbb{R}_+^4$ . Более того, моделирование показывает, что пространство  $\mathcal{R}_{\alpha, \gamma}$  получается из  $\mathbb{R}^4$  выбрасыванием областей, заключенных между двумя гиперповерхностями. Таких областей всего четыре, одна из которых показана на рис. 1.8. Кроме того, на рис. 1.8 показаны траектории, стартующие из точек компоненты связности  $\mathcal{R}_{\alpha, \gamma}$ , не содержащей положения равновесия. За конечное время каждая из этих траекторий достигает границы выброшенной области, при этом одна из граней тетраэдра вырождается в отрезок, а поток Риччи дальше не продолжается см. рис. 1.9. Тем самым, для описанных начальных условий теорема сходимости потока Риччи не может выполняться.

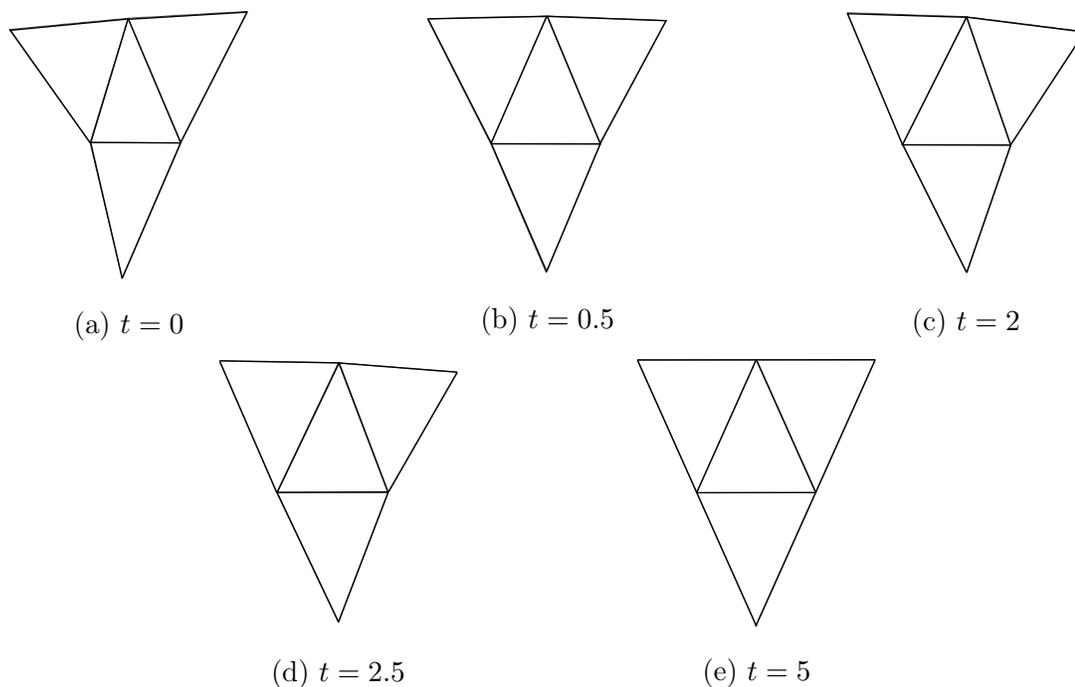


Рис. 1.6: Эволюция тетраэдра при  $\alpha = -0.8, \gamma = -0.7$  и начальных значениях  $r_0 = 0.99915635, r_1 = 0.6003817, r_2 = 1.249603, r_3 = 1.344204$ . Траектория проходит вблизи одного из седел, после чего падает в сток  $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$ .

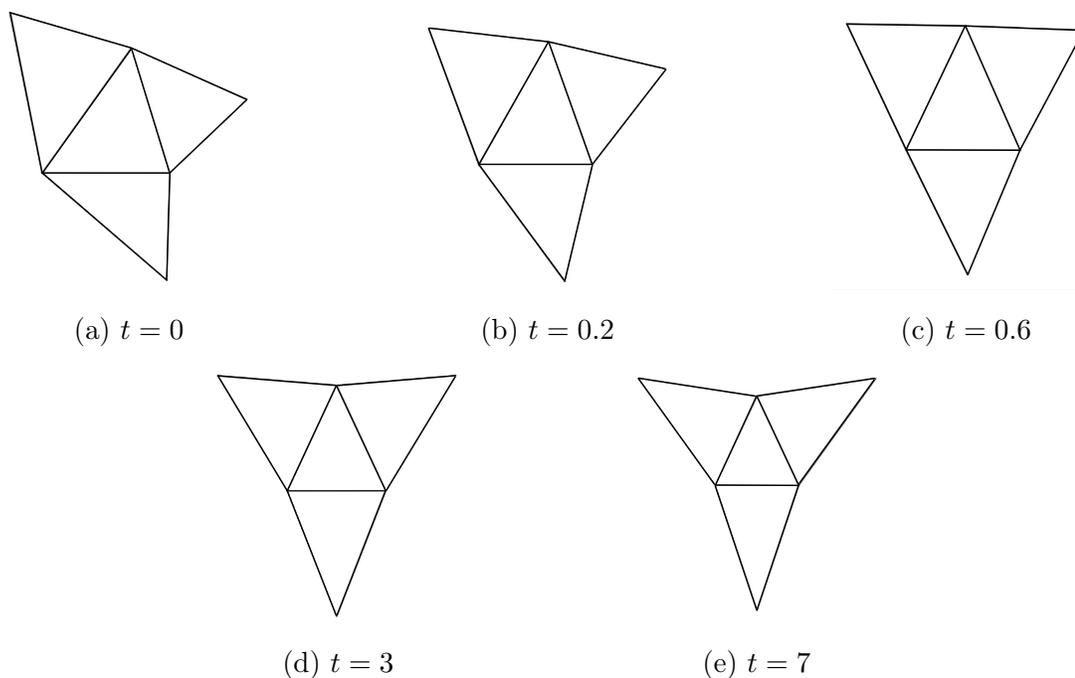


Рис. 1.7: Эволюция развития тетраэдра при  $\alpha = -0.8, \gamma = -0.7$  и начальных значениях  $r_0 = 0.99915635, r_1 = 0.6003817, r_2 = 1.249603, r_3 = 1.344204$ . Траектория проходят вблизи одного из седел и продолжается вдоль сепаратрисы таким образом, что  $r_3$  устремляется к нулю.

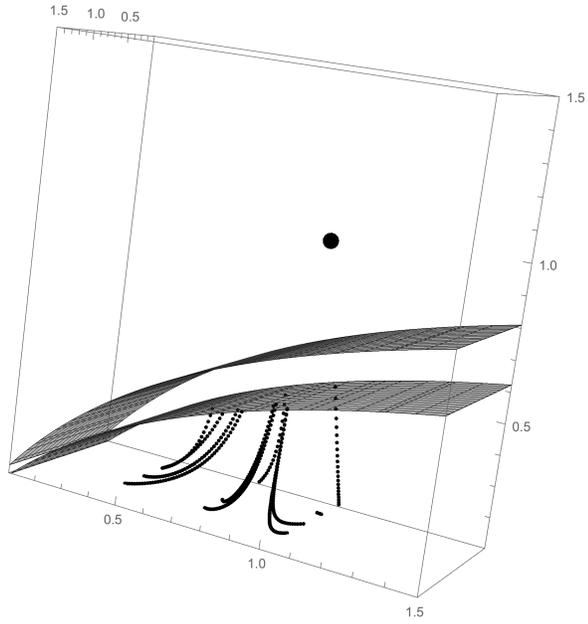


Рис. 1.8: Метрика постоянной кривизны единственная и  $\mathcal{R}_{\alpha,\gamma} \not\subseteq \mathbb{R}_+^4$

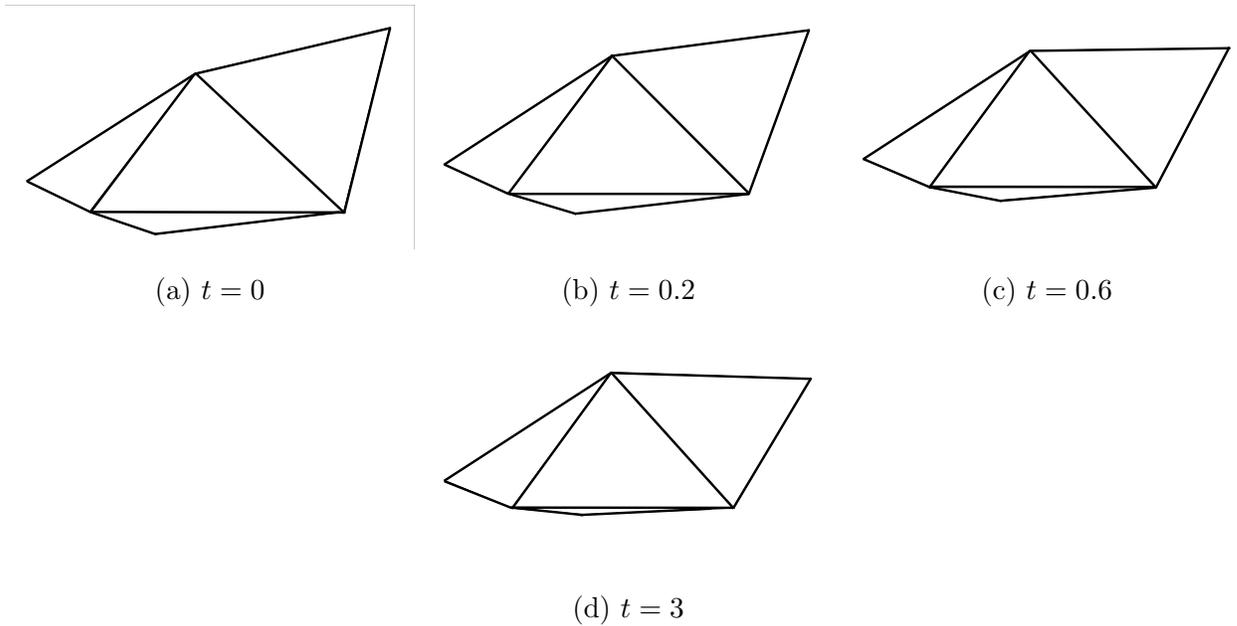


Рис. 1.9: Эволюция тетраэдра при  $\alpha = 0.8, \gamma = -0.45$  и начальных значения  $r_0 = 1.109733, r_1 = 2.963189, r_2 = 2.990186, r_3 = 0.1016562$ . Траектория за конечное время достигает границы  $\mathcal{R}_{\alpha,\gamma}$ , как показано на рис. 1.8

## Глава 2

# Пространство метрик, выпуклость функции $F$

В этой главе мы исследуем два вопроса, касающиеся представления потока Риччи в виде отрицательного градиентного потока некоторой выпуклой функции  $F$ . Дело в том, что после подходящей замены переменных (см. 3.3) и евклидов поток Риччи, и гиперболический поток Риччи приводятся к виду  $\frac{du_i}{dt} = -K_i(u)$ , причем  $\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i}$ . Общий случай этого равенства доказали Чоу и Луо [2], опираясь на частный случай, который доказал Колан де Вердьер [19]. Отсюда следует в частности, что дифференциальная 1-форма  $\Omega = \sum_i^n du_i$  является замкнутой. Если пространство изменения переменных  $u = (u_1, \dots, u_n)$  односвязное, то существует функция  $F$  такая, что  $dF = \Omega$ . В этом случае поток можно записать в виде  $\frac{du}{dt} = -\text{grad } F$ . Вместо односвязности Чоу и Луо использовали более сильное утверждение, доказанное Тёрстоном, а именно, что в предположении неотрицательности весов пространство метрик  $\mathcal{R}_w$  совпадает с  $\mathbb{R}_+^n$ , в частности поэтому пространство изменения переменных  $u$  оказывается стягиваемым.

Свойство выпуклости функции  $F$ , в свою очередь, выводится из следующего геометрического факта, который справедлив как для евклидова, так и для гиперболического случаев.

Рассмотрим грань  $\Delta A_i A_j A_k$ . Обозначим внутренние углы треугольника  $\Delta A_i A_j A_k$  через  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  и  $\theta_k$  соответственно. Опираясь на условие неотрицательности весов, Тёрстон доказал, что выполняются неравенства  $\frac{\partial \theta_p}{\partial r_p} < 0$  и  $\frac{\partial \theta_p}{\partial r_q} > 0$  при  $p, q \in \{i, j, k\}, p \neq q$ .

В данной главе показано, что эти неравенства остаются верными, если на некоторых гранях определенным образом ослабить условие неотрицательности весов. А именно, если на грани  $\Delta A_i A_j A_k$  один из весов, скажем  $\alpha$ , отрицателен, тогда два другие  $\beta$  и  $\gamma$  положительны, причем выполняется неравенство  $\alpha + \beta\gamma \geq 0$ . Данное утверждение частично отвечает на вопрос из работы [2] о том для каких весовых функций теорема о сходимости потока остается верной. Результаты этой главы были опубликованы в работе [21]. Эквивалентные условия были позже получены в работе Жу[15] и использованы в работе Сю[16].

## 2.1 Случай евклидовой метрики на гранях

Выясним, при каких условиях любой набор  $r = \{r_i > 0 \mid i = 1, \dots, N\}$  задает такие длины рёбер  $l_{ij}$ , что для каждой грани триангуляции  $T$  выполнены три неравенства треугольника. Рассмотрим одну из таких граней, без ограничения общности можно считать, что её вершинами являются  $A_1, A_2, A_3$ . Здесь и далее, в случаях, когда речь будет идти о конкретной грани триангуляции, мы будем использовать более простые обозначения для длин её рёбер. Например, для треугольника с вершинами  $A_1, A_2, A_3$  положим  $l_1 = l_{23}, l_2 = l_{13}, l_3 = l_{12}$ . Три неравенства треугольника на длины сторон  $l_1, l_2, l_3$  можно записать в виде одного неравенства

$$(l_1 + l_2 + l_3)(-l_1 + l_2 + l_3)(-l_2 + l_1 + l_3)(l_1 + l_2 - l_3) > 0, \quad (2.1)$$

которое можно упростить:

$$-(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2 + 4l_1^2l_2^2 + 4l_1^2l_3^2 + 4l_2^2l_3^2 > 0. \quad (2.2)$$

По лемме 13.7.2 из [5], если весовая функция принимает неотрицательные значения на рёбрах грани  $\triangle A_1A_2A_3$ , то для любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  из отрезков  $l_1, l_2, l_3$ , длины которых определены формулами (1.1), можно сложить треугольник (иными словами,  $l_1, l_2, l_3$  удовлетворяют неравенству (2.2)). Следующая лемма обобщает этот результат на случай, когда некоторые значения весовой функции отрицательные.

**Лемма 2.1.** *Пусть на грани  $\triangle A_1A_2A_3$  задана весовая функция  $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$  такая, что  $\beta = \gamma \geq 0 > \alpha$  и  $\gamma, \beta$  или  $|\alpha| \neq 1$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $\beta\gamma + \alpha \geq 0$ . Тогда для любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  из отрезков  $l_1, l_2, l_3$  можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.*

*Доказательство.* Подставим в левую часть неравенства (2.2) выражения для квадратов  $l_1, l_2, l_3$  из формулы (1.1), получим неравенство для величин  $r_1, r_2, r_3$ :

$$4(1 - \gamma^2)r_1^2r_2^2 + 4(1 - \gamma^2)r_1^2r_3^2 + 4(1 - \alpha^2)r_2^2r_3^2 + 8r_1r_2r_3((\alpha + \gamma^2)r_1 + (\gamma + \alpha\gamma)r_2 + (\alpha\gamma + \gamma)r_3) > 0.$$

Все слагаемые полученного выражения больше нуля, кроме  $8r_1r_2r_3(\alpha + \gamma^2)$ . Разделим неравенство на 4 и преобразуем

$$(1 - \alpha^2)r_2^2r_3^2 + 2(1 + \alpha)\gamma r_1r_2r_3(r_2 + r_3) + r_1^2((1 - \gamma^2)r_2^2 + 2(\alpha + \gamma^2)r_2r_3) + (1 - \gamma^2)r_3^2 > 0$$

Левую часть неравенства можно привести к виду

$$(1 - \alpha^2)r_2^2r_3^2 + 2(1 + \alpha)\gamma r_1r_2r_3(r_2 + r_3) + r_1^2(1 - \gamma^2)(r_2 - r_3)^2 + 2r_1^2(1 + \alpha^2)r_2r_3,$$

которая является положительной величиной. □

**Лемма 2.2.** Пусть на грани  $\triangle A_1A_2A_3$  задана весовая функция  $w_{12} = \alpha, w_{23} = \beta, w_{31} = \gamma$  такая, что  $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $\beta\gamma + \alpha \geq 0$ . Тогда для любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$  из отрезков  $l_1, l_2, l_3$  можно сложить треугольник на евклидовой плоскости.

*Доказательство.* Подставим в левую часть неравенства (2.2) выражения для квадратов  $l_1, l_2, l_3$  из формулы (1.1), тогда

$$4(1 - \gamma^2)r_1^2r_2^2 + 4(1 - \beta^2)r_1^2r_3^2 + 4(1 - \alpha^2)r_2^2r_3^2 + 8r_1r_2r_3((\alpha + \beta\gamma)r_1 + (\beta + \alpha\gamma)r_2 + (\alpha\beta + \gamma)r_3) > 0.$$

Полученное неравенство справедливо при  $r_1 > 0, r_2 > 0, r_3 > 0$ , так как из неравенства  $\alpha + \beta\gamma \geq 0$  следует, что  $\beta + \alpha\gamma \geq 0, \alpha\beta + \gamma \geq 0$ . □

**Замечание 3.** Нетрудно убедиться в том, что лемма 2.2 не может быть доказана для любого набора положительных чисел  $r_1, r_2, r_3$  при положительных  $\beta, \gamma$  и отрицательном значении  $\alpha$  без дополнительного ограничения  $\alpha + \beta\gamma$ . Например, при  $\alpha = -0.6, \beta = 0.9, \alpha = 0.1$  неравенство (2.2) верно не для любых положительных  $r_1, r_2, r_3$ .

Рассмотрим грань  $\triangle A_1A_2A_3$ . Для выбранных радиусов  $r_1, r_2, r_3 > 0$  обозначим через  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  внутренние углы при соответствующих вершинах треугольника, а веса  $w_{12}, w_{13}, w_{23}$  обозначим через  $\gamma, \beta$  и  $\alpha$  соответственно. Внутренние углы  $\theta_i, i = \{1, 2, 3\}$  являются функциями переменных  $r_j, j = \{1, 2, 3\}$ , для которых верна следующая

**Теорема 2.3.** Пусть веса  $\alpha, \beta, \gamma$  удовлетворяют одному из следующих условий: (i) все три веса неотрицательны; (ii)  $\beta\gamma + \alpha > 0$ , причем веса  $\beta$  и  $\gamma$  неотрицательны, а вес  $\alpha$  отрицателен. Тогда:

1.  $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$ ;
2.  $\partial\theta_j/\partial r_i > 0$  для любых  $j \neq i$ ;
3.  $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_k = 0$ .

*Доказательство.* Утверждение теоремы при выполнении условия (i) доказано в работе [2].

Разберем теперь случай, когда выполняется второе условие. Стоит отметить, что наши рассуждения дают еще одно доказательство утверждения леммы 13.7.2 из [5] при выполнении условий (i). Неравенства 1 и 2, согласно анализу доказательства Тёрстона, следуют из того факта, что радикальный центр окружностей, радиусы которых равны  $r_1, r_2, r_3$  с центрами в соответствующих вершинах, находится внутри треугольника  $\triangle A_1A_2A_3$ . Рассмотрим в плоскости

треугольника декартову систему координат с началом в точке  $A_1$  и направим её оси так, чтобы точка  $A_2$  имела координаты  $(l_3, 0)$ , а  $A_3$  — координаты  $(l_2 \cos \theta_1, l_2 \sin \theta_1)$ . Тогда координаты радикального центра удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - l_3)^2 + y^2 - r_2^2, \\ x^2 + y^2 - r_2^2 = (x - l_2 \cos \theta_1)^2 + (y - l_2 \sin \theta_1)^2 - r_3^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим выражение для значения координаты  $x$  радикального центра

$$x = \frac{r_1^2 + r_1 r_2 \gamma}{l_3},$$

и подставим его во второе уравнение, откуда легко получить выражение для координаты  $y$  радикального центра

$$2y l_2 \sin \theta_1 = 2r_1^2 + 2r_1 r_3 \beta - \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}{l_3^2} (r_1^2 + r_1 r_2 \gamma).$$

Достаточно доказать, что относительно прямой, содержащей сторону  $A_1 A_2$  треугольника  $A_1 A_2 A_3$ , радикальный центр лежит в той же полуплоскости, что и третья вершина  $A_3$ . То есть, из условий (2) теоремы, нужно вывести  $y > 0$  для любых положительных  $r_1, r_2, r_3$ . Это неравенство имеет вид

$$l_3^2 (2r_1^2 + 2r_1 r_3 \beta) - (l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) (r_1^2 + r_1 r_2 \gamma) > 0, \quad (2.3)$$

что можно переписать в эквивалентной форме

$$2r_1 r_2 ((1 - \gamma^2) r_1 r_2 + (\alpha + \beta \gamma) r_1 r_3 + (\beta + \alpha \gamma) r_2 r_3) > 0. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) при всех  $r_1, r_2, r_3 > 0$  больше нуля, так как  $\beta + \alpha \gamma > 0$  в силу знаков весов и предположения  $\alpha + \beta \gamma > 0$ . Утверждение о том, что радикальный центр и вершина  $A_2$  находятся в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей сторону  $A_1 A_3$ , доказывается аналогично.

Теперь покажем, что радикальный центр и вершина  $A_1$  находятся в одной полуплоскости относительно прямой  $A_2 A_3$ . Для этого в предыдущих выкладках заменим номера вершин и сторон:  $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$ , и соответствующим образом заменим веса:  $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\beta, \gamma, \alpha)$ . Таким образом, доказательство будет окончено, если выражение

$$2r_2 r_3 ((1 - \alpha^2) r_2 r_3 + (\beta + \gamma \alpha) r_2 r_1 + (\gamma + \beta \alpha) r_2 r_1) \quad (2.5)$$

принимает положительное значение. Но в предположениях пункта (2) неравенства  $\beta + \gamma \alpha > 0$  и  $\gamma + \beta \alpha > 0$  выполняются, поэтому (2.5) положительно для всех  $r_1, r_2, r_3 > 0$ .

□

**Замечание 4.** Невозможно доказать утверждение теоремы 2.3 при  $\gamma = \beta \geq 0 > \alpha$  без ограничения  $\gamma^2 + \alpha > 0$ . В самом деле, в этом случае неравенство (2.5) верно при любых значениях  $r_1, r_2, r_3$ . Тем не менее, неравенство (2.4) можно переписать в виде

$$2r_1r_2((1 - \gamma^2)r_1r_2 + (\alpha + \gamma^2)r_1r_3 + (\gamma + \alpha\gamma)r_2r_3) > 0,$$

и для  $\alpha + \gamma^2 < 0$  нетрудно подобрать такие значения для  $r_1, r_2, r_3$ , которые не удовлетворяют неравенству. Например, зафиксируем  $r_1$  и  $r_3$ , при этом выберем значение  $r_2 > 0$  бесконечно малым.

## 2.2 Случай гиперболической метрики на гранях

Рассмотрим случай, когда грани триангуляции имеют постоянную отрицательную кривизну  $-1$ . Аналогично предыдущему пункту рассмотрим грань  $\triangle A_1A_2A_3$  и положим  $w_{23} = \alpha, w_{13} = \beta$  и  $w_{12} = \gamma$ . Длины рёбер  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  грани  $\triangle A_1A_2A_3$  определяются формулами

$$\operatorname{ch} l_{12} = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{ch} l_{13} = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \beta \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3, \quad (2.7)$$

$$\operatorname{ch} l_{23} = \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3. \quad (2.8)$$

Следующее утверждение не имеет аналога в евклидовом случае, см. замечание 4.

**Лемма 2.4.** Пусть  $\beta = \gamma \geq 0 \geq \alpha$ . Тогда существует треугольник с ребрами  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  при любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$ .

*Доказательство.* Достаточно убедиться в справедливости следующих двух неравенств

$$\begin{cases} l_{13} + l_{12} > l_{23}, \\ l_{13} + l_{23} > l_{12}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Действительно, доказательство неравенства  $l_{13} + l_{23} > l_{12}$  легко применить для доказательства неравенства  $l_{12} + l_{23} > l_{13}$  перестановкой весов  $\beta, \gamma$  и индексов 2 и 3.

Рассмотрим функцию  $\operatorname{ch} t$ , которая является строго возрастающей при  $t \in [0, \infty)$ . Неравенства системы очевидно будут верными, если выполняются неравенства

$$\operatorname{ch}(l_{13} + l_{12}) > \operatorname{ch} l_{23}, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{ch}(l_{13} + l_{23}) > \operatorname{ch} l_{12}. \quad (2.11)$$

Начнём с неравенства (2.10). Преобразовав левую часть неравенства, получим:

$$\operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{12} + \operatorname{sh} l_{13} \operatorname{sh} l_{12} > \operatorname{ch} l_{23}.$$

Далее, перейдем к доказательству более строгого неравенства

$$\operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{12} > \operatorname{ch} l_{23}. \quad (2.12)$$

Подставим  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  из формул (2.6), (2.7), (2.8) в (2.12):

$$(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2) = \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3. \quad (2.13)$$

Используя ограничения на  $\alpha, \gamma$ , преобразуем это неравенство следующим образом:

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2) &\geq \\ &\geq (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2) > \\ &> \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 \geq \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к доказательству неравенства (2.11), для чего перепишем его в виде

$$\operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{23} + \operatorname{sh} l_{13} \operatorname{sh} l_{23} > \operatorname{ch} l_{12}, \quad (2.14)$$

и оценим разность  $\operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} l_{12}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} l_{12} &= \\ &= \operatorname{ch} l_{13}(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3) - \operatorname{ch} l_{12} \geq \\ &\geq \operatorname{ch} l_{13}(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 - \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3) - \operatorname{ch} l_{12} = \\ &= (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 - \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3) - \\ &\quad - (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2) = \\ &= (\operatorname{sh} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \gamma \operatorname{sh} r_3 \operatorname{ch} r_1)(\operatorname{sh} r_1 \operatorname{ch} r_1 - \operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_2) = \\ &= (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_3 + \gamma \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1) \operatorname{sh}(r_3 - r_2). \quad (2.15) \end{aligned}$$

Если  $r_2 \leq r_3$ , то (2.14) следует из (2.15). Для случая, когда  $r_3 > r_2$  неравенство (2.14) следует из двух неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{sh} l_{13} > \operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_3 + \gamma \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1, \\ \operatorname{sh} l_{23} > |\operatorname{sh}(r_3 - r_2)|. \end{cases} \quad (2.16)$$

Для доказательства первого неравенства (2.16) заметим, что

$$\operatorname{ch}^2 l_{13} - (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_3 + \gamma \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1)^2 = \operatorname{ch}^2 r_1 - \gamma^2 \operatorname{sh}^2 r_1 \geq \operatorname{ch}^2 r_1 - \operatorname{sh}^2 r_1 = 1. \quad (2.17)$$

Откуда

$$\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_3 + \gamma \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1 \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_{13} - 1} = \operatorname{sh} l_{13}. \quad (2.18)$$

Далее,

$$\operatorname{ch} l_{23} = \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3 \geq \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 - \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3 = \operatorname{ch}(r_2 - r_3). \quad (2.19)$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} l_{23} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_{23} - 1} \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2(r_2 - r_3) - 1} = |\operatorname{sh}(r_2 - r_3)|, \quad (2.20)$$

что доказывает второе неравенство системы (2.16).  $\square$

**Теорема 2.5.** Пусть  $\beta, \gamma \geq 0 > \alpha$  и  $\beta\gamma + \alpha > 0$  (или  $\beta\gamma + \alpha = 0$ , но  $\beta \neq 1$  и  $\gamma \neq 1$ ). Тогда из отрезков  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  можно сложить треугольник на гиперболической плоскости при любых  $r_1, r_2, r_3 > 0$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать два неравенства  $l_{13} + l_{12} > l_{23}$ ,  $l_{13} + l_{23} > l_{12}$ . Неравенство  $l_{13} + l_{23} > l_{12}$  доказывается аналогично неравенству  $l_{13} + l_{12} > l_{23}$ . В силу того, что гиперболический косинус строго возрастает на промежутке  $t \in [0, \infty)$ , достаточно доказать неравенства

$$\operatorname{ch}(l_{13} + l_{12}) > \operatorname{ch} l_{23}, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{ch}(l_{13} + l_{23}) > \operatorname{ch} l_{12}. \quad (2.22)$$

Начнём с неравенства (2.21). Как и в лемме 2.4, докажем более строгое неравенство

$$\operatorname{ch} l_{13} \operatorname{ch} l_{12} > \operatorname{ch} l_{23}. \quad (2.23)$$

Выразим  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  через  $r_1, r_2, r_3$  и подставим в (2.23):

$$(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \beta \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2) > \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3. \quad (2.24)$$

Далее, используя ограничения на  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , получим

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \beta \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \gamma \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2) &\geq (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3)(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2) \geq \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 \geq \\ &\geq \operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 + \alpha \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Неравенство (2.22) более сложное. Рассмотрим случай  $\beta \geq \gamma$  и заменим  $\gamma$  на  $\beta$  в выражении (2.22). Тогда левая часть неравенства станет меньше, но останется больше правой части неравенства, это доказывается также как и (2.11), см. доказательство леммы 2.4. Теперь пусть  $\gamma > \beta$ . Тогда достаточно проверить неравенство (2.22) для  $\gamma = 1$  и  $\alpha = -\beta$ , которое в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} l_{13} \operatorname{sh} l_{23} &> \operatorname{ch} l_{r_1} \operatorname{ch} r_2 + \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 - \\ &- (\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_3 + \beta \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3)(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} r_3 - \beta \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Правую часть неравенства можно привести к виду:

$$A = -\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh}^2 r_3 + \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2(1 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 r_3) - \beta \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_3(\operatorname{sh}(r_1 - r_2)).$$

Заметим, чтобы неравенство (2.26) выполнилось, достаточно доказать неравенство  $B^2 > A^2$ , где  $B = \text{sh } l_{13} \text{ sh } l_{23}$ . Пусть  $u_j = e^{r_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} 16u_1u_2u_3^2A &= -(u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)(u_3^2 - 1)^2 + \\ &\quad + (u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)(4u_3^2 + \beta^2(u_3^2 - 1)^2) + \\ &\quad + \beta(u_3^2 + 1)(u_3^2 - 1)((u_1^2 + 1)(u_1^2 - 1) - (u_1^2 - 1)(u_2^2 + 1)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} B^2 &= (\text{ch}^2 l_{13} - 1)(\text{ch}^2 l_{23} - 1) = \\ &= \frac{[(u_1^2 + 1)(u_3 + 1) + \beta(u_1^2 - 1)(u_3^2 - 1)]^2 - 16u_1^2u_3^2}{16u_1^2u_3^2} \times \\ &\quad \times \frac{[(u_2^2 + 1)(u_3^2 + 1) - \beta(u_2^2 - 1)(u_3^2 - 1)]^2 - 16u_2^2u_3^2}{16u_2^2u_3^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать несложными, но объемными выкладками, что

$$(16u_1u_2u_3^2)^2(B^2 - A^2) = 16(1 - \beta^2)(u_1^2u_2^2 - 1)^2u_3^2(u_3^2 - 1)^2 > 0. \quad (2.29)$$

□

Прежде чем перейти к выпуклости в гиперболическом случае, напомним некоторые факты геометрии плоскости Лобачевского. Рассмотрим на гиперболической плоскости точку  $P$  и окружность  $C$  радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ . Рассмотрим геодезическую прямую, которая содержит точку  $P$  и пересекает окружность в двух точках  $A$  и  $B$ . Степенью точки  $P$  по отношению к окружности  $C$  называется произведение  $\text{deg}_C P = d(l_{AB})d(l_{BP})$ . Здесь  $l_{MN}$  — расстояние между точками  $M$  и  $N$  на гиперболической плоскости, а функция  $d(l)$  определена формулой  $\frac{e^l - 1}{e^l + 1}$ . Можно показать, что степень точки  $P$  не зависит от выбора прямой, проходящей через точку  $P$  и пересекающей окружность  $C$ . Следовательно, если расстояние от точки  $P$  до центра окружности  $C$  равно  $l$ , то

$$\text{deg}_C P = d(l + r)d(l - r) = \frac{e^{l+r} - 1}{e^{l+r} + 1} \frac{e^{l-r} - 1}{e^{l-r} + 1}. \quad (2.30)$$

*Радикальной осью* двух окружностей  $C_1$  и  $C_2$  называется геодезическая, которая состоит из множества точек  $P$  таких, что  $\text{deg}_{C_1} P = \text{deg}_{C_2} P$ . *Радикальным центром* трёх окружностей  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  называется точка пересечения радикальных осей, соответствующие каждой паре окружностей. Подробное доказательства этого факта см. в [18]. Дальнейшие вычисления нам удобно провести в модели Клейна. Напомним, что в данной модели точками являются точки открытого единичного круга  $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , прямыми являются хорды и диаметры этого круга. Расстояния между двумя точками  $A, B \in \Lambda$  определяются с помощью логарифма двойного отношения

$$l_{AB} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{B - P}{B - Q} : \frac{A - P}{A - Q} \right), \quad (2.31)$$

где  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямой  $AB$  с окружностью  $|z| = 1$ , причем порядок на прямой следующий:  $PABQ$ . Рассмотрим частный случай этой формулы, когда  $A$  совпадает с началом координат, а  $B = (x, 0)$  — точка на вещественной оси. Тогда  $P = (-1, 0)$ ,  $Q = (1, 0)$  и

$$l_{AB} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} : \frac{0+1}{0-1} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{e^{2l} - 1}{e^{2l} + 1} = \operatorname{th} l. \quad (2.32)$$

**Лемма 2.6.** Пусть в модели Клейна даны две окружности:  $C_1$  радиуса  $r_1$  с центром в начале координат и  $C_2$  радиуса  $r_2$  с центром  $(x, 0)$ . Расстояние между центрами окружностей равно  $l = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ . Тогда радикальная ось окружностей  $C_1$  и  $C_2$  задается уравнением  $x = p$ , где

$$p = \frac{\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} l - \operatorname{ch} r_2}{\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} l}. \quad (2.33)$$

*Доказательство.* Заметим, что искомая радикальная ось ортогональна вещественной оси  $OX$ , поэтому достаточно найти точку  $P = (p, 0)$  на вещественной оси, для которой  $\deg_{C_1} P = \deg_{C_2} P$ .

Вычислим  $\deg_{C_1} P$  с помощью формул (2.30) и (2.32):

$$\begin{aligned} \deg_{C_1} P &= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+p}{1-p} \right) + r_1} - 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+p}{1-p} \right) + r_1} + 1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+p}{1-p} \right) - r_1} - 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+p}{1-p} \right) - r_1} + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} e^{r_1} - 1}{\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} e^{r_1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \frac{1}{e^{r_1}} - 1}{\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \frac{1}{e^{r_1}} + 1} = \\ &= \frac{2e^{r_1} - (e^{2r_1} + 1)\sqrt{1-p^2}}{2e^{r_1} - (e^{2r_1} + 1)\sqrt{1-p^2}} = \frac{1 - \sqrt{1-p^2} \operatorname{ch} r_1}{1 + \sqrt{1-p^2} \operatorname{ch} r_1}. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Подобным образом вычислим  $\deg_{C_2} P$  с помощью формул (2.30) и (2.32):

$$\begin{aligned} \deg_{C_2} P &= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \frac{1-p}{1+p} \right) + r_2} - 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \frac{1-p}{1+p} \right) + r_2} + 1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \frac{1-p}{1+p} \right) - r_2} - 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \frac{1-p}{1+p} \right) - r_2} + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} e^{r_2} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} e^{r_2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} e^{-r_2} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} e^{-r_2} + 1} = \\ &= \frac{2(1-xp)e^{r_2} - (e^{2r_2} + 1)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-p^2}}{2(1-xp)e^{r_2} - (e^{2r_2} + 1)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-p^2}} = \\ &= \frac{2(1-xp)e^{r_2} - \operatorname{ch} r_2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-p^2}}{2(1-xp)e^{r_2} - \operatorname{ch} r_2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-p^2}}. \quad (2.35) \end{aligned}$$

Приравнивая правые части формул (2.34) и (2.35), получаем уравнение на  $p$ :

$$\frac{1 - \sqrt{1-p^2} \operatorname{ch} r_1}{1 + \sqrt{1-p^2} \operatorname{ch} r_1} = \frac{(1-xp) - \operatorname{ch} r_2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-p^2}}{(1-xp) + \operatorname{ch} r_2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-p^2}}, \quad (2.36)$$

откуда

$$p = \frac{\operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} l - \operatorname{ch} r_2}{\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} l}. \quad (2.37)$$

□

**Теорема 2.7.** Пусть для весов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  выполняется одно из условий:

- (a) все три веса неотрицательны;
- (b) два веса  $\beta$  и  $\gamma$  неотрицательны, вес  $\alpha$  отрицателен,  $\beta\gamma + \alpha > 0$ ;

Тогда:

- 1.  $\partial\theta_i/\partial r_i < 0$  при  $i = \{1, 2, 3\}$ ;
- 2.  $\partial\theta_i/\partial r_j > 0$  при  $i, j = \{1, 2, 3\}$  и  $i \neq j$ ;
- 3.  $\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)/\partial r_i < 0$ , при  $i = \{1, 2, 3\}$ .

*Доказательство.* Заметим, что в пункте (3) отрезок  $l_{jk}$  не зависит от  $r_i$ , кроме того, выполняются неравенства  $\frac{\partial\theta_j}{\partial r_i} > 0$  при  $j \neq i$  и  $\frac{\partial\theta_k}{\partial r_i} > 0$  при  $k \neq i$ , где  $i, j, k = \{1, 2, 3\}$ . Поэтому,  $\frac{\partial Area(\Delta A_i A_j A_k)}{\partial r_i} > 0$ , следовательно

$$\frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_i} = \frac{\partial(\pi - Area(\Delta A_i A_j A_k))}{\partial r_i} < 0.$$

Утверждение теоремы при выполнении условий (a) доказано в работе [2].

Теперь разберем случай, когда выполняется условие (b). Стоит отметить, что данное доказательство применимо и для доказательства пункта (a). Как и в доказательстве теоремы 2.7, неравенства (1) и (2) следуют из того факта, что радикальный центр  $\Omega$  окружностей  $C_1, C_2$  и  $C_3$  радиусов  $r_1, r_2, r_3$  с центрами в соответствующих вершинах  $A_1, A_2$  и  $A_3$  находится внутри треугольника  $\Delta A_1 A_2 A_3$ . Для этого достаточно проверить, что  $\Omega$  находится с вершиной  $A_k$  в одной полуплоскости относительно прямой  $A_i A_j$  для всех  $k = 1, 2, 3$  и  $\{i, j\} = \{1, 2, 3\}$ . Сначала рассмотрим случай  $k = 3$ . В модели Клейна расположим треугольник так, чтобы вершина  $A_2$  была расположена в точке 0, вершина  $A_1$  — на положительной части вещественной оси, а  $A_3$  — в верхней полуплоскости. Тогда радикальная прямая окружностей  $C_2$  и  $C_1$  по лемме 2.6 задается уравнением  $x = p$ , где

$$p = \frac{\text{ch } r_2 \text{ ch } l_{12} - \text{ch } r_1}{\text{ch } r_2 \text{ sh } l_{12}}. \quad (2.38)$$

Воспользовавшись теоремой косинусов, вычислим угол  $\angle A_1 A_2 A_3 = \theta$ ,

$$\theta = \arccos \left( \frac{\text{ch } l_{23} \text{ ch } l_{12} - \text{ch } l_{13}}{\text{sh } l_{12} \text{ sh } l_{23}} \right). \quad (2.39)$$

Радикальная ось окружностей  $C_2$  и  $C_3$  получается поворотом на угол  $\theta$  против часовой стрелки прямой  $x = q$ , где по лемме (2.6)

$$q = \frac{\text{ch } r_2 \text{ ch } l_{23} - \text{ch } r_3}{\text{ch } r_2 \text{ sh } l_{23}}, \quad (2.40)$$

а следовательно, задается уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1. \quad (2.41)$$

Таким образом, координаты радикального центра  $\Omega$  являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x = p, \\ x \cos \theta + y \sin \theta = 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Легко проверить, что  $y > 0$  тогда и только тогда, когда  $q - p \cos \theta > 0$ , подставим в него выражение для  $p, q$  и  $\cos \theta$ :

$$\frac{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} r_3}{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{23}} - \frac{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} r_1}{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{12}} \cdot \frac{\operatorname{ch} l_{23} \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} l_{13}}{\operatorname{sh} l_{12} \operatorname{sh} l_{23}} > 0. \quad (2.43)$$

Домножим (2.43) на положительную величину

$$\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{23} \operatorname{sh}^2 l_{12} = \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{23} (\operatorname{ch}^2 l_{12} - 1), \quad (2.44)$$

получим

$$(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} r_3)(\operatorname{ch}^2 l_{12} - 1) - (\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} r_1)(\operatorname{ch} l_{23} \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} l_{13}) > 0. \quad (2.45)$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, сведем его к неравенству

$$\operatorname{ch} r_1 (\operatorname{ch} l_{23} \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} l_{13}) + \operatorname{ch} r_2 (\operatorname{ch} l_{12} \operatorname{ch} l_{13} - \operatorname{ch} l_{23}) + \operatorname{ch} r_3 (1 - \operatorname{ch}^2 l_{12}) > 0. \quad (2.46)$$

Выразив  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  из формул (2.6), (2.7), (2.8), приведем это неравенство к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 ((1 - \gamma^2) \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 + (\alpha + \beta\gamma) \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3 + \\ + (\beta + \alpha\gamma) \operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3) > 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Заметим, что при наложенных нами условиях на  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  все слагаемые в левой части положительны при любых  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+$ . Аналогично доказывается неравенство для  $k = 2$  — в выкладках нужно поменять местами индексы 2 и 3.

Соответствующее неравенство для  $k = 1$  имеет вид  $p - q \cos \theta > 0$ , подставим в него выражения для  $p, q$  и  $\cos \theta$ :

$$\frac{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} r_1}{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{12}} - \frac{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} r_3}{\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{23}} \cdot \frac{\operatorname{ch} l_{12} \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} l_{13}}{\operatorname{sh} l_{23} \operatorname{sh} l_{12}} > 0. \quad (2.48)$$

Домножим (2.48) его на положительную величину

$$\operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{12} \operatorname{sh}^2 l_{23} = \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} l_{12} (\operatorname{ch}^2 l_{23} - 1), \quad (2.49)$$

и получим

$$(\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} r_1)(\operatorname{ch}^2 l_{13} - 1) - (\operatorname{ch} r_2 \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} r_3)(\operatorname{ch} l_{23} \operatorname{ch} l_{12} - \operatorname{ch} l_{13}) > 0. \quad (2.50)$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, сведем его к неравенству

$$\operatorname{ch} r_2(\operatorname{ch} l_{23} \operatorname{ch} l_{13} - \operatorname{ch} l_{12}) + \operatorname{ch} r_3(\operatorname{ch} l_{12} \operatorname{ch} l_{23} - \operatorname{ch} l_{13}) + \operatorname{ch} r_1(1 - \operatorname{ch}^2 l_{23}) > 0. \quad (2.51)$$

Выразив  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$  с помощью формул (2.6), (2.7) и (2.8), приведем это неравенство к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3((\alpha\gamma + \beta) \operatorname{ch} r_3 \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 + \\ + (\alpha\beta + \gamma) \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_3 + (1 - \alpha^2) \operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_2 \operatorname{sh} r_3) > 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Легко видеть, что при наложенных нами условиях на  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  все слагаемые в левой части положительны для всех  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+$ .

□

# Глава 3

## Комбинаторный поток Риччи для метрик упаковки кругов с вырождениями

### 3.1 Метрики упаковок кругов с вырождениями

Рассмотрим замкнутую поверхность  $X$  с триангуляцией  $T$ . Предполагается, что поднятие замкнутой грани или ребра в универсальное накрытие  $\tilde{X}$  является вложением. Обозначим множество вершин, ребер и граней триангуляции  $T$  через  $V, E, F$  соответственно. Множество вершин  $V = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  триангуляции  $T$  представим в виде несвязного объединения двух подмножеств  $V = V_n \sqcup V_d$  таких, что никакие две вершины из множества  $V_d$  не соединяются ребром. Подходящим образом перенумеровав вершины можем считать, что  $V_n = \{A_1, \dots, A_M\}$ ,  $V_d = \{A_{M+1}, \dots, A_N\}$ . Вершины из множества  $V_n$  будем называть *невырожденными*, а из множества  $V_d$  — *вырожденными*. Элемент триангуляции  $T$  (ребро или грань) назовём *невырожденным* тогда и только тогда, когда все его вершины *невырождены* и вырожденным в противном случае. Обозначим множество (не)вырожденных рёбер и граней через  $E_d(E_n)$  и  $F_d(F_n)$  соответственно. Очевидно, что  $E = E_n \sqcup E_d$  и  $F = F_n \sqcup F_d$ . Иногда для удобства будем обозначать подмножество вершин и соответствующее подмножество индексов одним символом.

В отличие от классического случая, будем считать что весовая функция определена только на невырожденных рёбрах,  $w : E_n \rightarrow (-1, 1]$ . Зафиксируем тройку  $(X, T, w)$ . Под метрикой будем понимать набор  $r = (r_1, \dots, r_N)$ , где  $r_j > 0$  при  $1 \leq j \leq M$  и  $r_j = 0$  при  $M + 1 \leq j \leq N$ . Это определение от классического отличается тем, что в некоторых (а именно, в вырожденных) вершинах радиусы  $r_j$  равны нулю.

Сначала рассмотрим евклидовое случаем, когда все грани триангуляции  $T$  — плоские евклидовы треугольники, длины рёбер которых определены формулой

$$l_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 + 2w_{ij}r_i r_j. \quad (3.1)$$

Заметим, что если вершина  $A_i$  ребра  $A_i A_j$  вырождена, то последнее слагаемое в этой формуле

равно нулю независимо от значений веса  $w_{ij}$ , именно поэтому веса на вырожденных рёбрах не заданы. Более того, если  $r_i = 0$ , то  $l_{ij} = r_j$ .

Кривизна в вершине  $A_i$  определяется стандартным образом, а именно по формуле.

$$K_i = 2\pi - \sum_{A_i A_j A_k \in F} \angle A_j A_i A_k, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Если вершина является вырожденной, то кривизна в ней не зависит от  $r$ , и определяется весовой функцией  $w$ . В самом деле, пусть  $A_i \in V_d$  и  $\Delta A_i A_j A_k \in F$ , тогда вершины  $A_j, A_k \in V_n$ . Пользуясь теоремой косинусов, имеем  $\cos \angle A_j A_i A_k = -w_{jk}$ , откуда угол  $\angle A_j A_i A_k = \pi - \arccos(w_{jk})$ . Тем самым, для вырожденной вершины  $A_i$  кривизна  $K_i$  явно выражается через веса формулой

$$K_i = 2\pi - \sum_{\Delta A_i A_j A_k \in F} (\pi - \arccos(w_{jk})).$$

*Комбинаторный поток Риччи для метрики с вырождениями* — это система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.3)$$

Заметим, что при  $i = M + 1, M + 2, \dots, N$  уравнения (3.3) выполняется тривиальным образом, поэтому в уравнениях (3.3) можно считать, что  $1 \leq i \leq N$ .

Введем понятие *усредненной кривизны  $K^{av}$  метрики с вырождениями*:

$$K^{av} = \frac{1}{M} \left( 2\pi \chi(X) - \sum_{j=M+1}^N K_j \right). \quad (3.4)$$

*Нормированным потоком Риччи* будем называть систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av}) r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.5)$$

Нормированный и ненормированный потоки Риччи в определенном смысле эквивалентны друг другу.

**Лемма 3.1.** *Набор функций  $r_i(t), i = 1, \dots, M$  является решением уравнений (3.3) тогда и только тогда, когда  $e^{K^{av}t} r_i(t)$  — решение уравнений (3.5).*

*Доказательство.* Положим  $\hat{r}(t) = e^{K^{av}t} r_i(t)$ . Тогда

$$\frac{d\hat{r}_i}{dt} = K^{av} e^{K^{av}t} r_i(t) + e^{K^{av}t} (-K_i r_i(t)) = (K^{av} - K_i) e^{K^{av}t} r_i(t) = -(K_i - K^{av}) \hat{r}_i(t).$$

□

Вместе с тем, нормированный поток Риччи удобней ненормированного, что следует следующей леммы.

**Лемма 3.2.**  $\prod_{j=1}^M r_j(t)$  — первый интеграл системы уравнений (3.5).

*Доказательство.*

$$\frac{d \left( \prod_{j=1}^M r_j(t) \right)}{dt} = \left( \sum_{j=1}^M -(K_j - K^{av}) \right) \left( \prod_{j=1}^M r_j(t) \right) = 0.$$

□

Перейдем к гиперболическому случаю. Будем считать, что на гранях выбрана гиперболическая метрика постоянной кривизны  $-1$ , а длина ребра  $e_{ij}$ , соединяющего вершины  $A_i$  и  $A_j$ , определяется формулой

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \operatorname{ch} r_i \operatorname{ch} r_j + \operatorname{sh} r_i \operatorname{sh} r_j w_{ij}. \quad (3.6)$$

Как и в евклидовом случае, если ребро является вырожденным, то последнее слагаемое в формуле (3.6) равно нулю, поэтому вес  $w_{ij}$  не определяется. Ясно, что  $l_{ij} = r_i$  при  $r_i = 0$ . Кривизна  $K_i$  в вершине  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq M$  также определяется формулой (3.2). Кривизна в вырожденной вершине  $A_i$ ,  $M+1 \leq i \leq N$  определяется формулой (3.1).

*Комбинаторным гиперболическим потоком Риччи* называется система ОДУ вида

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \operatorname{sh} r_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.7)$$

При  $i = M+1, M+2, \dots, N$  имеем  $r_i = \frac{dr_i}{dt} = 0$ , таким образом, в (3.7) можно полагать, что  $1 \leq i \leq N$ .

**Замечание 5.** Уравнения (3.1) и (3.6) показывают, что требования того, что никакие две вырожденные вершины не могут соединяться ребром, совершенно естественно. В самом деле, в противном случае длина соединяющего их ребра должна быть равна нулю. Более того, очевидно, что грань с тремя вырожденными вершинами стягивается в точку, а с двумя вырожденными вершинами — стягивается в отрезок. Отсюда следует, что исходную триангуляцию нужно будет перестроить определенным образом.

Важной задачей является определение комбинаторного типа триангуляции, который может появиться в пределе при  $t \rightarrow \infty$ , когда теорема 1.1 не применима. Здесь мы этого вопроса мы касаться не будем.

Тройка  $(X, T, w)$  задает пространство метрик  $\mathcal{R}_w$ , которое в свою очередь является подмножеством таких  $r$  из пространства  $\mathbb{R}^M \times (0, \dots, 0) \subset \mathbb{R}^N$ , что на каждой грани триангуляции  $T$  выполняются три неравенства треугольника.

**Лемма 3.3.** Пусть каждая грань триангуляции удовлетворяет одному из условий:

(а) грань невырождена и весовая функция на её ребрах принимает неотрицательные значения;

- (b) грань невырождена, весовая функция на одном из ребер грани принимает значение  $\alpha < 0$ , на двух других ребрах  $\beta, \gamma > 0$ , при этом выполняется неравенство  $\alpha + \beta\gamma \geq 0$ ;
- (c) грань вырождена, значение весовой функции на невырожденном ребре грани отлично от 1. Тогда и для евклидова, и для гиперболического случаев имеем  $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}_+^M$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что грань триангуляции удовлетворяет неравенству треугольника при любом  $r$ . При условии (a) это доказано в работе [2] лемма 13.7.2. При условии (b) это доказано в теореме 2.2 и теореме 2.5. При условии (c) для грани  $\triangle A_i A_j A_k$  с вырожденной вершиной  $A_i$  утверждение следует из уравнений (3.1) и (3.6), так как  $l_{ij} = r_j$ ,  $l_{ik} = r_k$ .  $\square$

Будем говорить, что выполняются условия (W), если весовая функция  $w$  удовлетворяет условиям леммы 3.3.

Следующее утверждение является ключевым в доказательстве выпуклости функции, отрицательный градиентный поток которой совпадает с потоком Риччи.

**Лемма 3.4.** Пусть  $\triangle A_i A_j A_k$  — грань триангуляции. Углы при вершинах  $A_i, A_j, A_k$  обозначим через  $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  соответственно. Предположим, что условие (W) выполняется.

(a) Пусть  $\triangle A_i A_j A_k \in F_n$ , тогда

$$(a1) \quad \frac{\partial \theta_p}{\partial r_p} < 0, \quad p \in \{i, j, k\};$$

$$(a2) \quad \frac{\partial \theta_p}{\partial r_q} > 0, \quad p, q \in \{i, j, k\}, \quad p \neq q;$$

(a3)  $\frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = 0$  для евклидовой метрики на гранях и  $\frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} < 0$  для гиперболической,  $p \in \{i, j, k\}$ .

(b) Пусть  $A_i \in V_d$ , тогда

$$(b1) \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial r_j} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial r_k} < 0;$$

$$(b2) \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} < 0;$$

(b3)  $\frac{\partial(\theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} = 0$  для евклидовой метрики на гранях и  $\frac{\partial(\theta_i + \theta_k)}{\partial r_p} = \frac{\partial(\theta_j + \theta_j + \theta_k)}{\partial r_p} < 0$  для гиперболической, здесь  $p \in \{j, k\}$ .

Более того, частные производные  $\frac{\partial \theta_n}{\partial r_m}$  являются элементарными функциями от  $r_i, r_j, r_k$ , где  $n, m \in \{i, j, k\}$ .

*Доказательство.* (a) Случай, когда весовая функция  $w$  на ребрах грани  $\triangle A_i A_j A_k \in F_n$  принимает неотрицательные значения разобран в книге [5], лемма 13.7.3. Остальные случаи доказаны в теоремах 2.3 и 2.7.

(b) Запишем теорему косинусов в евклидовом случае

$$r_k^2 = r_j^2 + l_{jk}^2 - 2r_j l_{jk} \cos \theta_j = r_j^2 + r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk} r_j r_k - 2r_j \sqrt{r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk} r_j r_k} \cos \theta_j.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_j} = -\sin \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial r_j},$$

знак производной  $\frac{\partial \theta_j}{\partial r_j}$  можно выразить через знак производной  $\cos \theta_j$  по  $r_j$ . По формуле производной дроби знак  $\frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_j}$  совпадает со знаком выражения

$$\begin{aligned} (r_j + w_{jk}r_k)'_{r_j} (r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k) - \frac{1}{2}(r_j + w_{jk}r_k)(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_kr_j)'_{r_j} = \\ = (r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k) - (r_j + w_{jk}r_k)^2 = \\ = r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k - r_j^2 - r_k^2 - 2r_jr_kw_{jk} = r_k^2(1 - w_{jk}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial r_j} < 0.$$

Аналогично, знак  $\frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_k}$  совпадает со знаком выражения

$$\begin{aligned} (r_j + w_{jk}r_k)'_{r_k} (r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k) - \frac{1}{2}(r_j + w_{jk}r_k)(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_kr_j)'_{r_k} = \\ = w_{jk}(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k) - (r_j + w_{jk}r_k)(r_k + w_{jk}r_j) = \\ = w_{jk}r_j^2 + w_{jk}r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k - r_jr_k - w_{jk}r_j^2 - w_{jk}r_k^2 - w_{jk}^2r_kr_j = r_jr_k(-1 + w_{jk}^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} > 0.$$

Гиперболической случай исследуется аналогично. Детальные вычисления производных приведены в доказательстве леммы 3.5.  $\square$

**Лемма 3.5.** Пусть в грани  $\triangle A_i A_j A_k$  вершины  $A_j, A_k$  невырождены. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} r_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} r_k \text{ для евклидова случая,} \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} \operatorname{sh} r_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} \operatorname{sh} r_k \text{ для гиперболического случая.} \end{aligned} \tag{3.8}$$

*Доказательство.* Если все три вершины рассматриваемого треугольника невырождены, то для всех трёх пар вершин можно написать равенство вида (3.8). Равенства для такого треугольника доказаны в лемме 2.3 работы [2]. Теперь предположим, что  $A_i$  — вырожденная вершина. Тогда для евклидова случая в обозначениях леммы 3.4 имеем

$$\cos \theta_j = \frac{r_i + w_{jk}r_k}{\sqrt{r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k}}.$$

Используя вычисления из доказательства леммы 3.4, получим

$$-\sin \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} = \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_k} = \frac{r_j r_k (w_{jk}^2 - 1)}{(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk}r_jr_k)^{3/2}}.$$

Тем самым,

$$r_k \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} = -\frac{r_k}{\sin \theta_j} \cdot \frac{r_j r_k (w_{jk}^2 - 1)}{(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk} r_j r_k)^{3/2}}.$$

Аналогично,

$$r_j \frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} = -\frac{r_j}{\sin \theta_j} \cdot \frac{r_j r_k (w_{jk}^2 - 1)}{(r_j^2 + r_k^2 + 2w_{jk} r_j r_k)^{3/2}}.$$

Наконец заметим, что по теореме синусов

$$\frac{r_j}{\sin \theta_k} = \frac{r_k}{\sin \theta_j}.$$

Теперь рассмотрим гиперболический случай. Обозначим через  $x_i, x_j, x_k$  длины сторон треугольника  $\triangle A_i A_j A_k$ , противолежащих вершинам  $A_i, A_j, A_k$  соответственно. Из теоремы синусов получим соотношение  $A_{ijk} = \text{sh } x_i \text{sh } x_k \text{sh } \theta_k$ , которое симметрично по индексам  $i, j, k$ . Далее, воспользуемся соотношениям леммы A1 из работы [2]:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial x_k} = \frac{\text{sh } x_k}{A_{ijk}} \text{ и } \frac{\partial \theta_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \theta_k}{\partial x_k} \cos \theta_j.$$

Пользуясь нашими обозначениями, имеем  $x_i = l_{jk}, x_j = r_k, x_k = r_j$ . Таким образом,  $\frac{\partial l_{jk}}{\partial r_j} = \frac{1}{\text{sh } l_{jk}} \frac{\partial \text{ch } l_{jk}}{\partial r_j}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} \text{sh } r_j &= \text{sh } r_j \frac{\text{sh } x_k}{A_{ijk}} \left( 1 - \cos \theta_j \frac{\partial x_i}{\partial r_j} \right) = \\ &= \frac{1}{A_{ijk} \text{sh}^2 l_{jk}} \times \\ &\times (\text{sh}^2 r_j \text{sh}^2 l_{jk} - \text{sh } r_j (\text{ch } r_j \text{ch } l_{jk} - \text{ch } r_k) (\text{sh } r_j \text{ch } r_k + w_{jk} \text{ch } r_j \text{sh } r_k)) = \\ &= \frac{(1 - w_{jk}^2) \text{sh}^2 r_j \text{sh}^2 r_k}{A_{ijk} \text{sh}^2 l_{jk}}, \end{aligned}$$

где правая часть уравнения, очевидно, симметрична по индексам  $j, k$ .  $\square$

**Предложение 3.1.1.** Пусть  $(X, T, w)$  — замкнутая триангулированная поверхность с весами. Пусть функции  $r_i(t), i = 1, \dots, M$  удовлетворяют системе уравнений  $\frac{dr_i}{dt} = -L_i(r_1, \dots, r_M) r_i$ . Тогда производную внутреннего угла  $\theta_i^{jk}$  при невырожденной вершине  $A_i$  грани  $\triangle A_i A_j A_k$  можно представить в следующем виде:

1.  $\frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_{ik}(L_k - L_i) - B_i \lambda L_i$  для грани  $\triangle A_i A_j A_k \in F_n$ ;
2.  $\frac{d\theta_i^{jk}}{dt} = -B_{ij}(L_j - L_i) - B_i \lambda L_i$  для грани  $\triangle A_i A_j A_k \in F_d$  с вершиной  $A_k \in V_d$ .

Более того, если весовая функция удовлетворяет условиям (W), то  $B_{ij} = B_{ji}$  и  $B_i$  для всех  $i, j = 1, \dots, M, i \neq j$  — положительные элементарные функции. Здесь  $\lambda = 0$  для случая евклидовой метрики на гранях и  $\lambda = -1$  для гиперболической.

*Доказательство.* Случай (1) подробно разобран в работе [2], тем не менее, выпишем следующие выкладки из доказательства:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_i^{jk}}{dt} &= \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}r'_i + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}r'_j + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_k}r'_k = -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}L_i s(r_i) - \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}L_j s(r_j) - \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_k}L_k s(r_k) = \\
&= -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}(L_j - L_i)s(r_j) - \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_k}(L_k - L_i)s(r_k) - \left( \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}s(r_i) + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}s(r_j) + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_k}s(r_k) \right) L_i = \\
&= -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}(L_j - L_i)s(r_j) - \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_k}(L_k - L_i)s(r_k) - \left( \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}s(r_i) + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}s(r_i) + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}s(r_i) \right) L_i = \\
&= -B_{ij}(L_j - L_i) - B_{jk}(L_k - L_i) - B_i L_i \lambda
\end{aligned}$$

Для случая (2), то есть когда  $A_k$  — вырожденная вершина грани  $\triangle A_i A_j A_k$ , имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial t} &= \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}r'_i + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}r'_j = -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}L_i s(r_i) - \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}L_j s(r_j) = \\
&= -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}(L_j - L_i)s(r_j) - \left( \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}L_i s(r_i) + \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}L_i s(r_j) \right) = -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}(L_j - L_i) - \\
&\left( \frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_i}L_i s(r_i) + \frac{\theta_j^{ik}}{\partial r_i}L_i s(r_i) \right) = -\frac{\partial\theta_i^{jk}}{\partial r_j}(L_j - L_i)s(r_j) - \left( \frac{\partial(\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik} + \theta_k^{ij})}{\partial r_i} \right) L_i s(r_i) = \\
&= -B_{ij}(L_j - L_i) - B_i L_i \lambda
\end{aligned}$$

□

Из предложения 3.1.1 нетрудно вывести формулу для производных кривизн по времени в невырожденных вершинах.

**Предложение 3.1.2.** Пусть весовая функция  $w$ , заданная на рёбрах триангуляции, удовлетворяет условию (W). Тогда в условиях предложения 3.1.1 для  $1 \leq i \leq M$  выполняется равенство

$$\frac{dK_i}{dt} = \sum_{i \sim j, j \leq M} C_{ij}(L_j - L_i) + \lambda C_i L_i,$$

где  $C_{ij} = C_{ji}$  и  $C_{ij}$  — положительные элементарные функции переменных  $r_1, \dots, r_M$ , и суммирование идёт по невырожденным вершинам  $A_j$ , смежным с вершиной  $A_i$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы следует из предложения 3.1.1, так как

$$\frac{dK_i}{dt} = - \sum_{\triangle A_i A_j A_k \in F} \frac{d\theta_i^{jk}}{dt}. \quad (3.9)$$

□

## 3.2 Существование решения для $t \in [0, \infty)$

В этом разделе показано, что решение комбинаторного потока Риччи для метрик с вырождением существует при  $t \in [0, \infty)$ . Данное утверждение можно получить, пользуясь принципами максимума и минимума, как и в доказательстве из раздела 3.4. работы [2]. Введем обозначения  $\overline{M}(t) = \max(K_1(t), \dots, K_M(t))$  и  $\underline{M}(t) = \min(K_1(t), \dots, K_M(t))$ .

**Предложение 3.2.1.** Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))$  — решение уравнений (3.5) или (3.7) на некотором интервале. Тогда

- (1) для евклидова случая функция  $\overline{M}(t)$  невозрастающая, а функция  $\underline{M}(t)$  — неубывающая;
- (2) для гиперболического случая функция  $\max(0, \overline{M}(t))$  невозрастающая, а функция  $\min(0, \underline{M}(t))$  — неубывающая.

Это утверждение доказывается также как следствие 3.3 из [2].

**Предложение 3.2.2.** Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))$  — решение нормализованного потока Риччи. Пусть  $r(t)$  содержится в компактном подмножестве пространства  $\mathbb{R}_+^M$ . Тогда  $r(t)$  сходится экспоненциально быстро к точке  $(r_1, \dots, r_M) \in \mathbb{R}_+^M$ , для которой кривизна в каждой невырожденной вершине равна  $K^{av} = \frac{1}{M} \left( 2\pi\chi(X) - \sum_{j \geq M+1} K_j \right)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$g(t) = \sum_{j=1}^M (K_j(t) - K^{av})^2 = \sum_{j=1}^M K_j^2(t) - M(K^{av})^2.$$

Её производная имеет вид

$$g' = \sum_{j=1}^M K_j(t)K_j'(t).$$

Далее, вычислим значение производной  $K_j'(t)$ . По предложению 3.1.2 для  $L_j = (K_j - K^{av})$

$$K_j'(t) = \sum_{j \sim i, i \leq M} C_{ij}((K_j - K^{av}) - (K_i - K^{av})) = \sum_{j \sim i, i \leq M} C_{ij}(K_j - K_i).$$

Таким образом,

$$g'(t) = 2 \sum_{j=1}^M \sum_{i \sim j, i \leq M} C_{ji} K_j (K_i - K_j). \quad (3.10)$$

Поменяв местами индексы  $i$  и  $j$ , получим

$$g'(t) = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j \sim i, j \leq M} C_{ij} K_i (K_j - K_i). \quad (3.11)$$

Складывая уравнения (3.11) и (3.10), имеем

$$g'(t) = -2 \sum_{i \sim j \leq M} C_{ij} (K_i - K_j)^2.$$

Важно отметить следующее, так как кривая  $r_i(t)$  лежит в компактном подмножестве  $\mathbb{R}_+^M$ , то  $C_{ij}$  — положительные функции, отличные от нуля. Причем для любой пары смежных невырожденных вершин  $A_i, A_j : A_i \sim A_j$  существует константа  $c_1 > 0$  такая, что выполняется неравенство  $C_{ij}(r(t)) \geq c_1 > 0$ . Далее, воспользуемся неравенством Коши

$$\frac{\sum_{j=1}^M y_j}{M} \leq \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M y_j^2}{M}}.$$

Подставим в него  $y_j = K_i - K_j$ . Тогда

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^M (K_j - K_i)}{M} \right)^2 \leq \frac{\sum_{j=1}^M (K_i - K_j)^2}{M},$$

откуда

$$(K_i - K^{av})^2 \leq \frac{\sum_{j=1}^M (K_i - K_j)^2}{M}.$$

Суммируя по  $i$  от 1 до  $M$ , получим:

$$\sum_{i=1}^M (K_i - K^{av})^2 \leq \frac{1}{M} \sum_{i,j=1}^M (K_i - K_j)^2. \quad (3.12)$$

Любые две невырожденные вершины  $A_i$  и  $A_j$  можно соединить ломаной  $A_i, A_{i_1}, \dots, A_{i_p}, A_j$ , проходящей только через невырожденные вершины. Откуда для подходящей константы  $c_2 = p + 1$  имеем

$$(K_i - K_j)^2 \leq c_2 ((K_i - K_{i_1})^2 + (K_{i_1} - K_{i_2})^2 + \dots + (K_{i_p} - K_j)^2).$$

Так как количество рёбер в данной последовательности ограничено числом  $|V_n| - 1$ , то существует константа  $c_3 > 0$ , такая что

$$\sum_{i,j=1}^M (K_i - K_j)^2 \leq c_3 \sum_{i \sim j \leq M} (K_i - K_j)^2. \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.12) и (3.13) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^M (K_i - K^{av})^2 \leq \frac{c_3}{M} \sum_{i \sim j} (K_i - K_j),$$

откуда

$$\sum_{i \sim j \leq M} C_{ij} (K_i - K_j)^2 \geq c_1 \sum_{i \sim j \leq M} (K_i - K_j)^2 \geq \frac{M c_1}{c_3} \sum_{j=1}^M (K_i - K^{av})^2.$$

Поэтому существует положительная константа  $c_4$ , для которой

$$g' = - \sum_{i \sim j \leq M} C_{ij} (K_i - K_j)^2 \leq -c_4 \sum_{j=1}^M (K_i - K^{av})^2 = -c_4 g.$$

Таким образом,

$$g(t) \leq c_5 e^{-c_4 t},$$

где  $c_4, c_5$  — положительные константы. Следовательно,

$$(K_i - K^{av})^2 \leq \sum_{i=1}^M (K_i - K^{av})^2 \leq c_5 e^{-c_4 t}.$$

□

**Предложение 3.2.3.** Пусть  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_M(t))$  — решение потока (3.7). Если кривая  $r(t)$  содержится в компактном подмножестве  $\mathbb{R}_+^M$ , то она сходится экспоненциально быстро в точку  $(r_1, \dots, r_M) \in R_+^M$ , которая соответствует нулевому набору кривизн  $K_1, \dots, K_M$ .

Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 3.7 из [2].

### 3.3 Поток Риччи как отрицательный градиентный поток

Рассмотрим следующую замену переменных. Для евклидова случая положим  $u_j = \ln r_j$ , а для гиперболического случая рассмотрим  $u_j = \ln \tanh r_j/2$ . Такая замена позволяет привести оба потока Риччи (3.3) и (3.7) к виду

$$\frac{du_j}{dt} = -K_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.14)$$

где  $K_j$  — некоторые функции переменных  $u_1, \dots, u_M$ . При выполнении условий (W) точка  $u = (u_1, \dots, u_M)$  может быть любой точкой пространства  $\mathcal{U} = R^M$  в евклидовом случае и пространства  $\mathcal{U} = (-\infty, 0)^M \subset R^M$  в гиперболическом случае. Утверждение леммы 3.4 запишем в виде:

$$\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i} \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.15)$$

Следовательно, дифференциальная форма  $\Omega = \sum_{i=1}^M K_i du_i$  замкнута, то есть  $d\Omega = 0$ . Так как  $\mathcal{U}$  — односвязное пространство, то из леммы Пуанкаре следует, что существует гладкая функция  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , заданная на  $\mathcal{U}$  такая, что  $dF = \Omega$ .

**Предложение 3.3.1.** Пусть весовая функция удовлетворяет условиям  $(W)$ . Тогда

(a) в гиперболическом случае функция  $F(u_1, \dots, u_M)$  строго выпукла;

(b) в евклидовом случае функция  $F(u_1, \dots, u_M)$  строго выпукла на гиперплоскости  $\sum_{i=1}^N u_i = 0$ .

Доказательство 3.3.1 такое же как для предложения 3.9 [2]. Предложение 3.3.1 показывает, что метрика определяется однозначно её кривизной в гиперболическом случае, а в евклидовом случае это утверждение верно с точностью до умножения метрики на скалярную константу. Тем самым, доказана и жесткость метрики упаковки кругов с вырождениями.

### 3.4 Вырождение

**Предложение 3.4.1.** Пусть  $X$  — замкнутая поверхность с триангуляцией  $T$  и весовой функцией  $w$ , удовлетворяющая условиям  $(W)$ . Пусть  $I \subsetneq V_N$ . Обозначим через  $D_I$  множество всех вырожденных вершин, смежных с вершинами из  $I$ . Пусть существуют пределы последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i^{(n)} = 0$  при  $i \in I$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i^{(n)} > 0$  при  $i \in \{1, \dots, M\} \setminus I$  для гиперболического или евклидова случаев  $r^{(n)} = r_i^{(n)} : i = 1, \dots, M$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} K_i(r^{(n)}) + \sum_{j \in D_I} K_j = - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (3.16)$$

Более того, как в гиперболическом, так и в евклидовом случаях для любого собственного подмножества  $I \subsetneq V_N$  выполняется неравенство

$$\sum_{i \in I} K_i(r) + \sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) является прямым следствием рассуждений из доказательства предложения 4.1 в работе [2], или из доказательства теоремы 13.7.1 в [5], с учётом того, что кривизна в вырожденной вершине фиксирована. Доказательство неравенства (3.17), при условии, что весовая функция удовлетворяет условию  $(W)$ , нуждается в дополнительных рассуждениях.

Обозначим через  $\theta_i^{jk}$  внутренний угол при вершине  $A_i$  треугольника  $\triangle A_i A_j A_k$  триангуляции  $T$ . Грани триангуляции, вершины которых содержатся в подмножестве  $I \cup D_I$ , можно разбить на три типа  $T_1, T_2, T_3$ , где нижний индекс  $s \in 1, 2, 3$  обозначает количество вершин из множества  $I \cup D_I$  (более точно,  $\triangle \in T_s$  тогда и только тогда, когда поднятие грани  $\tilde{\Delta}$  в универсальное накрытие  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  имеет в точности  $s$  вершин из  $\pi^{-1}(I \cup D_I)$ ). Значение кривизны в вершине  $A_i$  запишем как  $2\pi - a_i$ . Распишем сумму  $\sum_{i \in I \cup D_I} a_i$  в виде

$$\sum_{A_i \in I \cup D_I \triangle A_i A_j A_k \in T_1} \theta_i^{jk} + \sum_{A_i, A_j \in I \cup D_I \triangle A_i A_j A_k \in T_1} (\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik}) + \sum_{A_i, A_j, A_k \in I \cup D_I \triangle A_i A_j A_k \in T_1} (\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik} + \theta_k^{ij}).$$

Пользуясь доказательством предложения 4.1 [2], из формулы (3.16) получим утверждение о поведении предела суммы  $\sum_{i \in I} K_i(r^n)$ .

Прежде чем доказывать неравенство (3.17), заметим, что сумма  $\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik} + \theta_k^{ij}$  не превышает  $\pi$  при любых значениях  $r$ . Также заметим, что  $\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik}$  во второй сумме меньше  $\pi$  при любых значениях  $r$ . Первая сумма содержит два типа слагаемых. Если вершина  $A_i \in D_I$ , то  $\theta_i^{jk} = \pi - \arccos w_{jk}$ . Наконец, если весовая функция удовлетворяет условию (W), то для вершин  $A_i \in I$  имеем  $\theta_i^{jk} < \pi - \arccos w_{jk}$  в силу монотонности из леммы 3.4.

### 3.5 Случай евклидовой метрики на гранях

**Теорема 3.6.** Пусть  $X$  — замкнутая поверхность с фиксированной триангуляцией  $T$  и весовой функцией  $w$ , удовлетворяющей условиям (W). Решение нормализованного потока Риччи (3.5) сходится, независимо от начальной метрики, тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества  $I \subsetneq V_N$  верно неравенство

$$|I|K^{av} + \sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}). \quad (3.18)$$

Кроме того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к единственной метрике с набором одинаковых кривизн  $K_i = K^{av}, i = 1, \dots, M$  в невырожденных вершинах.

*Доказательство.* Рассмотрим множество метрик

$$M_a = \{(r_1, \dots, r_M) \mid r_i > 0 \text{ при всех } i = 1, \dots, M \text{ и } \prod_{i=1}^M r_i = a\},$$

где  $a > 0$ . Определим отображение

$$\Xi : M_a \rightarrow \mathbb{R}^M,$$

где  $\Xi(r) = (K_1(r), \dots, K_M(r))$ . Из предложения 3.3.1 следует, что отображение  $\Xi$  является инъективным. Образ такого отображения содержится в гиперплоскости

$$\Pi = \left\{ (K_1, \dots, K_M) \in \mathbb{R}^M \mid \sum_{i=1}^M K_i = 2\pi\xi(X) - \sum_{j=M+1}^N K_j \right\}.$$

Далее, рассмотрим открытый выпуклый многогранник  $P_K \subset \Pi$ , определенный неравенством

$$\sum_{i \in I} K_i > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_I \cup D_I) - \sum_{j \in D_I} K_j,$$

где индекс  $I$  пробегает все подмножества  $I \subset V_n$ . Таким образом, мы имеем инъективное непрерывное отображение  $\Xi : M_a \rightarrow P_K$  между гомеоморфными пространству  $\mathbb{R}^{M-1}$  множествами  $M_a$  и  $P_K$ . По теореме инвариантности области,  $\Xi$  гомеоморфно отображает  $M_a$  на  $\text{im } \Xi$ . Из

предложения 3.3.1 следует, что  $\text{im } \Xi = P_K$ . Следовательно, существует единственная метрика  $r^{(0)} = (r_1^0, \dots, r_m^0) \in M_a$ , которая соответствует набору кривизн вида  $\Xi(r^0) = (K^{av}, \dots, K^{av}) \in P_K$ . Таким образом, метрика постоянной кривизны существует, более того, она единственная с точностью до скалярного умножения. Перейдем к доказательству сходимости нормализованного потока Риччи. Как было сказано выше, при замене переменных  $u_i = \ln r_i, i = 1, \dots, M$ , нормализованный поток Риччи примет вид

$$\frac{du_i}{dt} = -(K_i(u) - K^{av}). \quad (3.19)$$

Кроме того, существует функция  $F$ , такая что  $\frac{\partial F}{\partial u_i} = K_i(u) - K^{av}$ . Откуда следует, что последнее уравнение является отрицательным градиентным потоком функции  $F$ . Далее, зафиксируем переменную  $a = 1$ . Ограниченная на гиперплоскость  $U_0 = \{u \in \mathbb{R}^M \mid \sum_{i=1}^M u_i = 0\}$  функция  $F$  строго выпукла. Как уже было доказано выше, функция  $F$  имеет единственную критическую точку  $u^{(0)} \in U_0$ . Следовательно, данная точка является минимумом функции  $F$ . Если начальная точка отрицательной градиентной линии функции  $F$  содержится в области  $U_0$ , то и вся градиентная линия содержится в  $U_0$ . Покажем, что отрицательная градиентная линия сходится в  $u^{(0)}$ .

Рассмотрим линию  $u(t)$ , такую что  $\frac{du}{dt} = -\text{grad } F(u(t))$ . Выберем некоторую последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$  и введем обозначения  $u^{(n)} = u(t_n)$ . Функция  $F$  ограничена снизу, кроме того,  $\frac{dF(u(t))}{dt} = -\|\text{grad } F|_{u=u(t)}\|^2$ , поэтому при необходимости переходя к подпоследовательности можем считать, что  $\text{grad } F(u^{(n)}) \rightarrow 0$ . Для последовательности  $r^{(n)}$ , которая соответствует последовательности  $u^{(n)}$ , данное утверждение означает, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_i(r^{(n)}) = K^{av}$ . Так как замыкание окрестности точки  $(K^{av}, \dots, K^{av}) \in P$  содержится в  $P_K$ , то переходя к подпоследовательности, мы видим, что  $r^{(n)}$  лежит в компактном множестве  $M_a$  и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно,  $u^{(n)}$  содержит сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, получаем, что все отрицательные градиентные линии сходятся к метрике с набором кривизн  $K_i = K^{av}, i = 1, \dots, M$ .  $\square$

### 3.6 Случай гиперболической метрики на гранях

**Теорема 3.7.** Пусть  $T$  — триангуляция замкнутой поверхности  $X$  с отрицательной эйлеровой характеристикой. Пусть  $w$  — весовая функция на ребрах, удовлетворяющая условиям (W). Решение гиперболического потока Риччи (3.7) сходится для любой начальной метрики тогда и только тогда, когда для любого подмножества  $I \subsetneq V_N$  верно неравенство

$$\sum_{j \in D_I} K_j > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi \chi(F_{I \cup D_I}). \quad (3.20)$$

Более того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к метрике с набором кривизн  $K_i = 0, i = 1, \dots, M$ .

*Доказательство.* Рассмотрим множество всех метрик

$$M = \{(r_1, \dots, r_M) \mid r_i > 0 \text{ при любых } i = 1, \dots, M\}.$$

Рассмотрим отображение этого множества  $\Xi : M \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $\Xi(r) = (K_1(r), \dots, K_M(r))$ . Отображение  $\Xi$  инъективно в силу предложения 3.3.1. По теореме Гаусса-Бонне образ  $\Xi$  содержится в полупространстве  $L \subset \mathbb{R}^M$ , заданном неравенством

$$\sum_{i=1}^M K_i > - \sum_{j=M+1}^N K_j + 2\pi\chi(X).$$

Далее, рассмотрим подмножество  $L_K \subset L$ , заданное неравенствами

$$\sum_{i \in I} K_i > - \sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}) - \sum_{j \in D_I} K_j,$$

где индекс  $I$  пробегает всевозможные собственные подмножества  $I \subset V_n$ . Тогда  $\Xi : M \rightarrow L_K$  является инъективным непрерывным отображением, при этом каждое из множеств  $M$  и  $L_K$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^M$ .

Докажем существования метрики  $r^{(0)}$  такая, что  $K_i(r^{(0)}) = 0$  при  $i = 1, \dots, M$ . Выберем некоторую метрику  $r(0)$ , для которой кривизна  $K_i(r)$  близка к значению  $2\pi$  при  $i = 1, \dots, M$ . Это возможно в силу следующего утверждения.  $\square$

**Лемма 3.8** (см.[2], лемма 3.5). *Пусть  $A_i \in V_n$  и условия (W) верны. Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $L$ , что при любых положительных  $r_i, r_j, r_k$  и  $r_i > L$  внутренний угол  $\theta_i^{jk}$  гиперболического треугольника  $\triangle A_i A_j A_k$  меньше  $\epsilon$ .*

*Доказательство.* Зафиксируем число  $\delta > 0$ , при котором  $K_i(r(0)) < 2\pi - \delta$ . Рассмотрим решение  $r(t)$  гиперболического потока Риччи (3.5) с начальным значением  $r(0)$ . Из принципа максимума следует, что  $\min(K_1(r(t)), \dots, K_M(r(t)))$  не убывает при  $t \rightarrow +\infty$ . Другими словами  $K_i(t) \geq 0$  при  $t \geq 0$  и  $i = 1, \dots, M$ . С другой стороны, функция  $\max(K_1(r(t)), \dots, K_M(r(t)), 0)$  не возрастает, откуда следует, что  $K_i(r(t)) < 2\pi - \delta$  для  $t \geq 0$  и  $i = 1, \dots, M$ . Следовательно, функция  $K(r(t))$  содержится в компактном подмножестве  $L_K$ , а значит и кривая  $r(t)$  содержится в компактном подмножестве  $M$ .  $r(t)$  сходится к метрике  $r^{(0)}$  с кривизной  $K_i = 0$ , при  $i = 1, \dots, M$ , что является очевидным следствием предложения 3.2.3. Отсюда можем заключить, что  $r^{(0)}$  существует.

Теперь докажем сходимости потока Риччи (3.7). Уравнение потока Риччи можно записать в виде

$$\frac{du_i}{dt} = -K_i(u), \tag{3.21}$$

где  $u \in U = (\infty, 0)^M$ ,  $u_i = \ln \operatorname{th}(\frac{r_i}{2})$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Кроме того, существует выпуклая функция  $F$ , заданная на  $U$ , такая что  $\frac{\partial F}{\partial u_i} = K_i(u)$ . Следовательно, последнее уравнение является отрицательным градиентным потоком функции  $F$ . Ранее было показано, что функция  $F$

имеет единственную критическую точку  $u^{(0)} \in U$ , при этом эта точка является минимумом  $F$ . Рассмотрим решение  $u(t)$  отрицательного градиентного потока  $\frac{du}{dt} = -\text{grad } F(u(t))$ . Выберем последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$  и положим  $u^{(n)} = u(t_n)$ . Функция  $F$  ограничена снизу, и  $\frac{dF(u(t))}{dt} = -\|\text{grad } F|_{u=u(t)}\|^2$ , поэтому переходя при необходимости к подпоследовательности можем считать, что  $F(u^{(n)}) \rightarrow 0$ . Последовательность  $r^{(n)}$ , которая соответствует последовательности  $u^{(n)}$ , имеет предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_i(r^{(n)}) = 0$ . Точка  $(0, \dots, 0) \in L_k$  имеет окрестность, замыкание которой компактно и содержится в  $L_K$ . Поэтому, переходя к подпоследовательности, можем считать, что последовательность  $r^{(n)}$  лежит в компактном подмножестве в  $M$  и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно,  $u^{(n)}$  содержит сходящуюся подпоследовательность. Отсюда можем заключить, что все отрицательные градиентные линии сходятся к метрике с кривизной  $K_i = 0, i = 1, \dots, M$ .  $\square$

Для случая вырожденной грани в лемме 3.5 приведем доказательство А. А. Ошемкова, которое является общим для евклидова и гиперболического случаев. Для этого запишем теорему синусов в виде  $\frac{\partial \theta_k}{\partial r_j} \sin \theta = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k} \sin \theta_j$ , которая применима для гиперболического и евклидова случаев. Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 3.5, пусть  $x_i, x_j, x_k$  — длины рёбер, противолежащие вершинам  $A_i, A_j, A_k$  в треугольнике  $\triangle A_i A_j A_k$  соответственно. Будем полагать, что угол  $\theta_i$  фиксирован. Затем, в силу фактов из элементарной геометрии, заметим, что  $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \cos \theta_j$  как в случае евклида так и в гиперболическом случае. Например, рассмотрим правый угол треугольника  $\triangle A_k A_j H$ , где  $H$  — точка на геодезической прямой  $A_i A_j$ , через которую проходит прямая  $A_k H$ , перпендикулярна геодезической  $A_i A_j$ .

В наших предположениях  $x_i = l_{jk}$ ,  $x_j = r_k$ ,  $x_k = r_j$  и  $\frac{\partial l_{jk}}{\partial r_j} = \cos \theta_j$ . Тогда  $\frac{\partial^2 l_{jk}}{\partial r_j \partial r_k} = -\sin \theta_j \cdot \frac{\partial \theta_j}{\partial r_k}$ . Наконец, применив теорему о равенстве смешанных производных, получим соотношение  $\frac{\partial^2 l_{jk}}{\partial r_j \partial r_k} = -\sin \theta_k \cdot \frac{\partial \theta_k}{\partial r_j}$ .

# Глава 4

## Потоки средней кривизны на поверхностях вращения

### 4.1 Дискретизация потока средней кривизны

Кроме потоков, учитывающих внутреннюю геометрию многообразия [2],[8](Риччи, Калаби, Ямабе), также интерес представляют потоки, определенные внешней геометрией, например, учитывающие кривизну вложения многообразия в евклидово пространство [6],[13]. Простейшим из таковых является поток средней кривизны. Дадим необходимые определения. Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие размерности  $n \geq 1$ . Поток средней кривизны для замкнутого многообразия  $M^n$  называется семейство вложений  $f_t : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$  гладко зависящее от  $t$ , которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} = -H(\bar{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}, t), \quad (4.1)$$

где  $\bar{x}$  — точка многообразия,  $\mathbf{n}(\bar{x}, t)$  и  $H(\bar{x}, t)$  — нормаль к вложению и средняя кривизна поверхности  $M^n$  относительно вложения  $f_t$  в точке  $f(\bar{x}, t)$  соответственно; здесь  $f(\bar{x}, t) = f_t(\bar{x})$ . Отображения  $f_t$  задают семейство вложенных многообразий  $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_t(\bar{x})}{\partial t} = \Delta_{LB}(t) f_t(\bar{x}), \quad (4.2)$$

где  $\Delta_{LB}(t)$  — оператор Лапласа-Бельтрами, вычисленный в индуцированной вложением  $f_t$  метрике на  $M_t^n$ . С геометрической точки зрения поток средней кривизны стремится «стянуть» выпуклые области  $M_t^n$ , причем скорость стягивания тем выше, чем больше значение средней кривизны  $H_t(\bar{x})$ . Это наглядное свойство является общим для потока Риччи и для потока средней кривизны.

Помимо семейства вложений  $f_t(\bar{x})$ , удовлетворяющего уравнению (4.2), удобно рассматривать так называемый нормализованный поток средней кривизны  $\tilde{f}_t(\bar{x})$ . Оба семейства опреде-

лены при  $t \in [0, T)$  и пропорциональны друг другу с коэффициентом  $\psi(t)$

$$\tilde{f}_t(\bar{x}) = \psi(t) \cdot f_t(\bar{x}) \quad (4.3)$$

таким, что объемы многообразий, заданных семейством вложений  $\tilde{f}_t(\bar{x})$ , равны объему многообразия  $M_0^n$  для всех  $t$ .

Выберем новый параметр времени  $\tilde{t}(t) = \int_0^t \psi^2(\tau) d\tau$ ; тогда можно показать, что  $\tilde{f}_{\tilde{t}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x})}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Delta}_{\tilde{t}} \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x}) + \frac{1}{n} \tilde{h}_{\tilde{t}} \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x}); \quad (4.4)$$

$$\tilde{f}_0 = f_0, \quad (4.5)$$

где  $\tilde{h}_{\tilde{t}} = \int_{\tilde{M}_{\tilde{t}}} \tilde{H}_{\tilde{t}}^2 d\text{Vol}_{\tilde{t}} / \int_{\tilde{M}_{\tilde{t}}} d\text{Vol}_{\tilde{t}}$  — усредненное значение квадрата средней кривизны для  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ .

**Теорема 4.1** (см. [6]). Пусть  $f_0$  — вложение гладкого замкнутого многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной формы подмногообразия  $M_0^n$  строго больше нуля для всех  $\bar{x} \in M_0^n$ . Тогда уравнение (4.2) с начальным условием  $f(\bar{x}, 0) = f_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение на конечном интервале времени  $0 \leq t < T$ , такое что поверхность  $M_t^n$  стягивается в некоторую точку  $O$  при  $t \rightarrow T$ . При этом уравнение (4.4) с начальным условием  $\tilde{f}(\bar{x}, 0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$  имеет гладкое решение при  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ , при этом  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  стремится принять форму сферы площади  $|M_0|$ . Подмногообразие  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  получается из  $M_t$  гомотетией с центром в точке  $O$ .

Будем строить дискретный аналог уравнения (4.2) для  $M = S^2$  методом конечных элементов (см. [12]). Зададим базисные функции  $L_i, i = 1, 2, \dots, N$ , на вершинах триангуляции, где  $N$  — их количество, следующим образом:

$$L_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \text{ то есть } v_i \text{ и } v_j \text{ различны,} \\ 1, & \text{если } i = j, \text{ то есть } v_i \text{ совпадает с } v_j. \end{cases} \quad (4.6)$$

Кроме того, потребуем, чтобы все  $L_i$  были линейны на каждом двумерном симплексе. Уравнение (4.2) будем решать в слабом смысле. Это значит, что мы ищем функцию  $f_t(x)$  такую, что для любой функции  $g_t(x)$  выполняется условие

$$\left\langle \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}, g_t(x) \right\rangle = \langle \Delta_{LB} f_t(x), g_t(x) \rangle. \quad (4.7)$$

Перепишем (4.7) в виде

$$\left\langle \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}, g_t(x) \right\rangle = - \langle \nabla f_t(x), \nabla g_t(x) \rangle. \quad (4.8)$$

Заменим функции  $f_t(x), g_t(x)$  их дискретными аналогами

$$f_t(x) \rightarrow \sum_i^N f_i(t) L_i, \quad g_t(x) \rightarrow \sum_i^N g_i(t) L_i,$$

где  $f_i(t), g_i(t)$  — значения функций  $f$  и  $g$  в  $i$ -й вершине триангуляции соответственно. Подставляя эти выражения в уравнение (4.8), получим

$$\left\langle \sum_{j=1}^N \frac{df_j(t)}{dt} L_j, \sum_{i=1}^N g_i L_i \right\rangle = - \left\langle \sum_{j=1}^N f_j(t) \nabla L_j, \sum_{i=1}^N g_i \nabla L_i \right\rangle, \quad (4.9)$$

откуда

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{df_j(t)}{dt} g_i(t) \langle L_i, L_j \rangle = - \sum_{i,j=1}^N f_j(t) g_i(t) \langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle. \quad (4.10)$$

Дискретизация данного уравнения по времени имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\tau} \langle L_i, L_j \rangle = - \sum_{i,j=1}^N f_j^{n-1} \langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (4.11)$$

здесь и далее по тексту  $n$  — номер шага по времени. Рассмотрим матрицы  $A^n = (\langle L_i, L_j \rangle)_{i,j=1}^N$ ,  $B^n = (\langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle)_{i,j=1}^N$ , а также вектор-столбцы  $F^{n-1} = (f_i^{n-1})_{i=1}^N$ ,  $F^n = (f_i^n)_{i=1}^N$ . Тогда уравнение (4.11) можно переписать в виде

$$A^n F^n = -\tau B^n F^{n-1} + A^{n-1} F^{n-1}, \quad (4.12)$$

откуда

$$F^n = -\tau (A^n)^{-1} B^{n-1} F^{n-1} + F^{n-1}. \quad (4.13)$$

Элементы матрицы  $A^n$  вычисляются в явном виде (см.[12]):

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{12} (|\Delta_1| + |\Delta_2|), & \text{для смежных вершин } v_i, v_j, \\ \frac{1}{6} \sum_{k \in \text{deg } v_i} |\Delta_k|, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ совпадают,} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Здесь  $|\Delta|$  — площадь грани  $\Delta$ , причем  $\Delta_1, \Delta_2$  — грани смежные по ребру, соединяющему вершины  $v_i, v_j$ , а  $\Delta_k$  пробегает набор граней, имеющих  $v_i = v_j$  вершиной. Элементы матрицы  $B^n$  тоже могут быть вычислены явно (см. [12]):

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\text{ctg } \gamma_{p,ij} + \text{ctg } \gamma_{q,ij}), & \text{для смежных вершин } v_i, v_j, \\ -\frac{1}{2} \sum_{k \in \text{deg } v_i} \frac{l_{qp}}{l_{ip} l_{qi} \sin \gamma_{i,qp}}, & \text{если } v_i, v_j \text{ совпадают,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.15)$$

где  $\gamma_{i,qp}$  — угол при вершине  $v_i$  грани  $\Delta_{iqp}$ , а  $l_{pq}$  — длина ребра, соединяющего вершины  $v_p$  и  $v_q$ .

Явная схема заданная соотношением (4.13) неустойчива, и поэтому предпочтительнее воспользоваться неявной схемой

$$F^n = (C^n)^{-1} (A^{n-1} F^{n-1} + \tau(1 - \sigma) B^{n-1} F^{n-1}), \quad (4.16)$$

где,  $C^n = A^n - \tau\sigma B^n$ .

Как и в случае непрерывного времени удобно вместо (4.16) рассматривать нормализованное уравнение. Определим дискретный аналог  $\xi_n$  коэффициента  $\psi(t)$  соотношением

$$\xi_n = \sqrt{\frac{S_{\Delta}^{n-1}}{S_{\Delta}^n}}, \quad (4.17)$$

где  $S_{\Delta}^n$  и  $S_{\Delta}^{n-1}$  — площади триангулированной поверхности в текущий и предыдущий момент времени, и нормализуем уравнение (4.16):

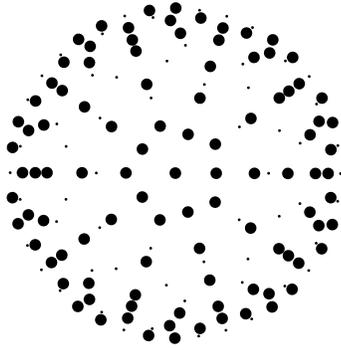
$$F^n = \xi_n(C^n)^{-1}(A^{n-1}F^{n-1} + \tau(1 - \sigma)B^{n-1}F^{n-1}). \quad (4.18)$$

С учетом нормировочного коэффициента общая площадь триангулированной поверхности под действием потока (4.18) не меняется.

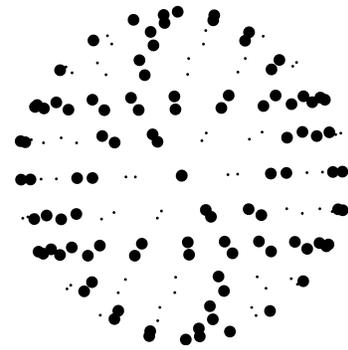
## 4.2 Замкнутая поверхность вращения

Зададим хорошую с комбинаторной точки зрения триангуляцию сферы, такая триангуляция легко строится, измельчается и кодируется. Рассмотрим единичную сферу и вписанный в неё правильный икосаэдр. Выберем декартовы координаты так, чтобы ось  $Oz$  проходила через две вершины икосаэдра, будем называть их полюсами:  $(0, 0, -1)$  — южный,  $(0, 0, 1)$  — северный. Шаг измельчения состоит в следующем: в каждой грани проведем средние линии. Прделаем нужное количество шагов, и обозначим через  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  — множество всех вершин триангуляции,  $E = \{l_{ij} \mid v_i v_j \text{ — ребро}\}$  — множество всех её ребер, а  $F = \{\Delta_{ijq} \mid v_i v_j v_q \text{ — грань}\}$  — множество граней. Заметим, что после  $k$ -го шага измельчения икосаэдра количество вершин, ребер, граней триангуляции равно  $|V| = 2 + 10 \cdot 2^{2k}$ ,  $|E| = 30 \cdot 4^k$ ,  $|F| = 20 \cdot 2^{2k}$  соответственно. Назовем уровнем вершины триангуляции наименьшее количество звеньев ломаной, составленной из ребер триангуляции и соединяющей вершину с южным полюсом. Тогда уровни вершин принимают значения от 0 до  $3 \cdot 2^k$ , где  $k$  — количество шагов измельчения исходной икосаэдральной сетки. Рассмотрим любую трехзвенную ломаную, составленную из ребер исходного икосаэдра, которая соединяет его северный и южный полюса. После нужного числа шагов разбиения, такая ломаная будет состоять из  $3 \cdot 2^k$  звеньев и будет содержать в точности по одной вершине каждого уровня. Будем называть такие ломаные характеристическими.

Теперь опишем триангуляцию исходной поверхности вращения на примере сферы. Вершины одного уровня измельченного икосаэдра лежат в одной плоскости, ортогональной оси  $Oz$ . Спроецировав их вдоль лучей, лежащих в плоскости данного набора на окружность радиуса  $1/\sqrt{1-z_i^2}$  с центром на оси  $Oz$ , мы получим вершины на поверхности сферы. Иными словами, вершины измельченного икосаэдра  $(x_i, y_i, z_i)$  дают на сфере точки с координатами  $\left( \frac{x_i \sqrt{1-z_i^2}}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}, \frac{y_i \sqrt{1-z_i^2}}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}, z_i \right)$  (см. рис 4.1).



(а) Вид вдоль оси вращения.



(б) Вид ортогонально оси вращения.

Рис. 4.1: Икосаэдральная сетка сферы единичного радиуса при  $k = 2$ .

Для поверхности вращения, заданной профильной функцией  $\beta(z)$ ,  $\beta(-1) = \beta(1) = 0$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ ,  $\beta(z) > 0$  при  $z \neq \pm 1$ , поступим следующим образом: вершине измельченного икосаэдра  $(x_i, y_i, z_i)$  ставим в соответствие вершину на поверхности вращения  $\left( \frac{x_i \sqrt{1-z_i^2}}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}} \beta(z_i), \frac{y_i \sqrt{1-z_i^2}}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}} \beta(z_i), z_i \right)$ . Комбинаторика триангуляции остается прежней. В общем случае, когда профильная функция  $\beta(z)$  поверхности вращения определена на некотором отрезке  $[a, b]$ , её триангуляция подходящими сдвигом и растяжением сводится к вышеописанной.

### 4.3 Перераспределение вершин триангулированной поверхности вращения

Из геометрических соображений следует, что длины ребер нашей триангулированной поверхности под действием потока средней кривизны изменяются быстрее вблизи вершин, в которых больше абсолютное значение средней кривизны. В результате этого вершины триангулированной поверхности вращения, которая в «полярной шапочке» имеет локальный максимум кривизны, скапливаются у её оси. В качестве примера на рис. 4.2 показана эволюция триангулированного эллипсоида вращения с начальным значением полуосей  $a = b = 1, c = 3$  под действием дискретного (для  $\sigma = 1/2$ ) потока средней кривизны (4.18). Видно, что вершины триангуляции скапливаются к полюсам, что в конечном итоге приводит к неустойчивости разностной схемы. Более того, эволюция триангулированной сферы единичного радиуса под действием потока средней кривизны, показанная на рис.4.3, демонстрирует неустойчивость схемы даже в случае, когда кривизна исходной поверхности постоянна.

Явный вид элементов матриц  $A^n$  и  $B^n$  (см. формулы (4.14), (4.15)) показывает, что элементы этих матриц определяются значениями углов при вершинах триангуляции и длинами её ребер. Если в процессе эволюции отношение максимальной площади грани триангуляции к минимальной стремится к бесконечности, то число обусловленности матрицы  $C^n$  неограничен-

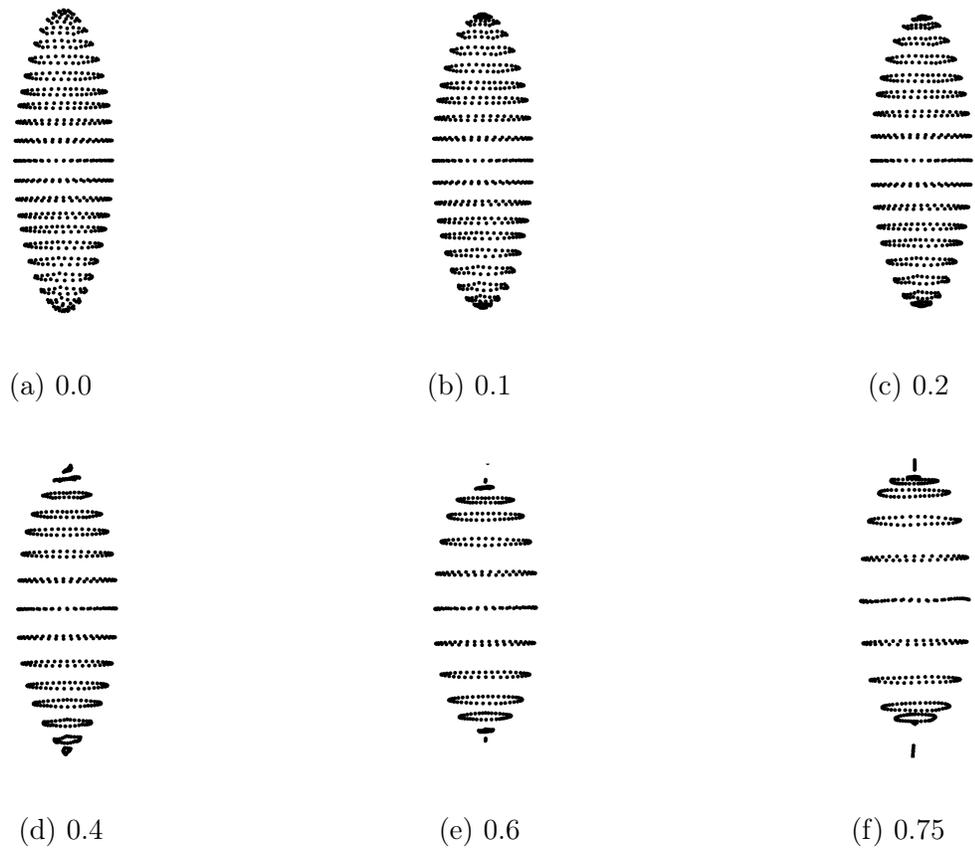


Рис. 4.2: Эволюция эллипсоида вращения под действием дискретного потока средней кривизны от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

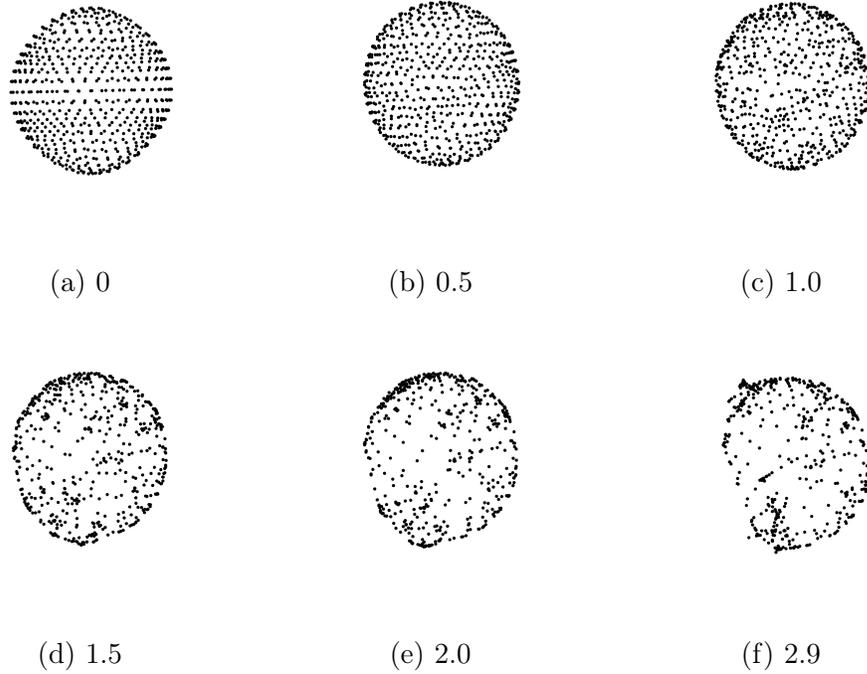


Рис. 4.3: Эволюция сферы под действием дискретного потока средней кривизны от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

но возрастает и поэтому схема (4.18) оказывается неустойчивой (типичное поведение потока показано на рис. 4.2). Чтобы сохранить число обусловленности вблизи 1, мы воспользуемся следующей идеей, происходящей из геометрии и комбинаторики рассматриваемой триангуляции. Идея состоит в перераспределении вершин триангуляции по поверхности так, чтобы: 1) уровни вершин не менялись 2) звенья характеристической ломаной имели одинаковую длину.

Алгоритм перераспределения вершин триангулированной поверхности использует следующие векторы:

$R^n$  — состоит из расстояний от вершин триангулированной поверхности  $v_i$  до оси вращения,  $\{r_i^n \in R^n \mid r_i^n = \sqrt{(x_i^n)^2 + (y_i^n)^2}; 1 \leq i \leq N\}$ ;

$H^n$  — состоит из значений проекции вершин триангулированной поверхности на ось вращения,  $\{h_i^n \in H^n \mid h_i^n = z_i^n; 1 \leq i \leq N\}$ ;

$\Phi^n$  — состоит из значений полярных углов при вершинах триангулированной поверхности и определяется соотношениями:  $\{x_i^n = r_i^n \cos \phi_i^n, y_i^n = r_i^n \sin \phi_i^n; 1 \leq i \leq N\}$ .

Кроме того, вспомогательный вектор  $P = \{p_{i(m)} \mid p_{i(m)} = i(m)/(3 \cdot 2^k), 0 \leq m \leq 3 \cdot 2^k\}$  нужен в качестве параметризации вектора  $L_0^n$ . Также используется вектор расстояний вдоль характеристической ломаной от её вершин до южного полюса:  $L_0^n = \{l_j^n \mid l_j^n = \sum_{m=1}^j d_m^n; j = [0; 3 \cdot 2^k]\}$ , где  $d_m^n = \sqrt{(\Delta x_{i(m)}^n)^2 + (\Delta y_{i(m)}^n)^2 + (\Delta z_{i(m)}^n)^2}$  — расстояние между  $m$ -ой и  $(m-1)$ -ой вершинами характеристической ломаной ( $m = 1, \dots, 3 \cdot 2^k$ ), а  $i(m)$  — номер вершины уровня  $m$

характеристической ломаной в списке всех вершин триангуляции, полагаем  $l_0^n = 0$ ,  $\hat{L}^n = \{\hat{l}_m^n = \frac{m}{3 \cdot 2^k} l_{3 \cdot 2^k}^n; m = 0, \dots, 3 \cdot 2^k\}$ .

$\Lambda^n$  — вектор, содержащий изменения полярных углов вершин характеристической ломаной за один шаг по времени,  $\{\lambda_{i(m)}^n \in \Lambda^n \mid \lambda_{i(m)}^n = \phi_{i(m)}^n - \phi_{i(m)}^{n-1}, 0 \leq m \leq 3 \cdot 2^k\}$ .

С помощью сплайновой аппроксимации вычислим вектор  $\hat{P}^n$  такой, что соответствия  $P \rightarrow L_0^n$  и  $\hat{P}^n \rightarrow \hat{L}^n$  задают одну функцию, затем, с помощью сплайновой аппроксимацией, вычислим новые векторы  $\hat{R}^n$  и  $\hat{H}^n$ , как значения функций  $\hat{P}^n \rightarrow \hat{R}^n$ ,  $\hat{P}^n \rightarrow \hat{H}^n$  в точках вектора  $\hat{P}^n$  соответственно. Результатом перераспределения служат точки с координатами  $\hat{x}_i = \hat{r}_i \cos \phi_i^n$ ;  $\hat{y}_i = \hat{r}_i \sin \phi_i^n$ ;  $z_i = \hat{h}_i$ .

Общий алгоритм описывается следующим образом:

1. определить и создать глобальные данные: векторы  $\Phi^n, R^n, H^n$ ;
2. проделать итерацию метода конечных элементов;
3. создать локальный вектор  $\Lambda^n$ , элементами которого являются углы поворота вершин характеристической ломаной в горизонтальной плоскости;
4. перераспределить вершины характеристической ломаной равномерно по её длине и определить координаты её вершин;
5. определить координаты вершин множества  $V$  триангулированной поверхности для каждого набора вершин одного уровня с учетом поворота вершин характеристической ломаной в горизонтальной плоскости;

## 4.4 Примеры

Представленные в работе вычисления выполнены на персональном компьютере с процессором i5 2,4 GHz. Код программы написан на языке программирования “C++11”, с использованием библиотеки “Eigen”(eigen.tuxfamily.org).

Эволюция триангулированной сферы единичного радиуса под действием потока средней кривизны с перераспределением её вершин показана на рис. 4.4. Соответствующий ей график значения числа обусловленности  $\mu(C^n)$  показывает, что при  $t = \tau n > 8.0$  численное решение перестает соответствовать точному (см. рис. 4.5).

Эволюция эллипсоида вращения с полуосями  $a = b = 1, c = 3$  под действием нормализованного дискретного потока средней кривизны показана на рис. 4.6, здесь  $k = 3$ . При этом используется перераспределение вершин. Соответствующая зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  от времени показана на рис. 4.7. Численное моделирование потока средней кривизны в этом случае, как и в случае сферы, находится в полном согласии с теоремой 4.1.

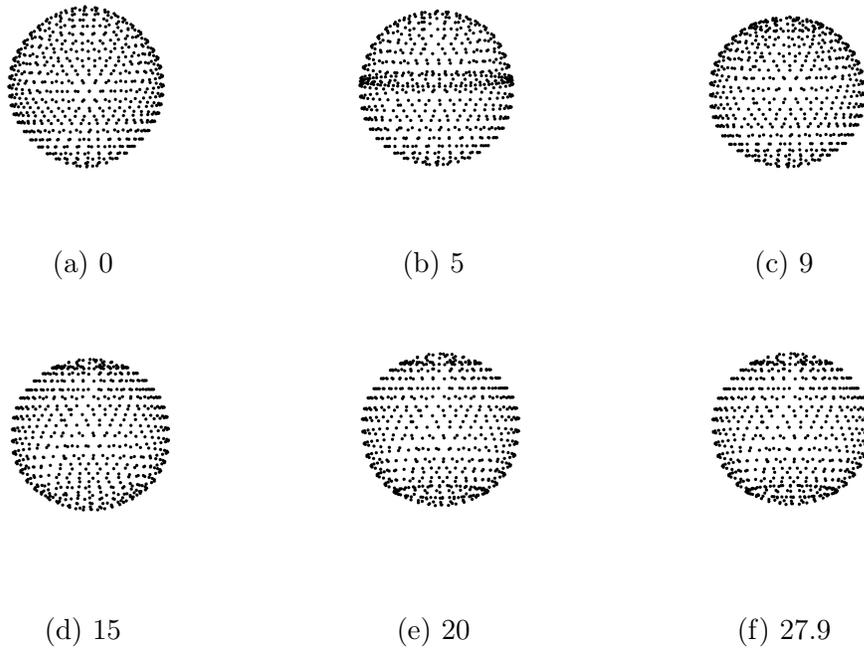


Рис. 4.4: Эволюция потока средней кривизны на сфере с перераспределением от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

Под действием потока средней кривизны поверхность вращения, имеющая вначале форму гантели, может эволюционировать по двум различным сценариям, в зависимости от формы профильной кривой. Рассмотрим два типа поверхностей, имеющие форму гантели. В первом случае поверхность стягивается к сфере (см. рис. 4.8). Во втором случае поток формирует сингулярность (см. рис. 4.10). Поведение числа обусловленности  $\mu(C^n)$  в этих двух случаях показаны на рис. 4.9 и 4.11. Отметим, что к этим поверхностям теорема 4.1 не применима.

Для каждой из вышеописанных триангулированных поверхностей на рис. 4.5, 4.7, 4.9, 4.11 показано как меняется число обусловленности  $\mu(C^n)$  в процессе эволюции поверхности под действием дискретного потока средней кривизны, если применить алгоритм перераспределения вершин. Из графиков видно, что увеличение числа шагов разбиения  $k$  увеличивает устойчивость численного решения для выпуклых поверхностей, замедляя рост числа обусловленности. Применение алгоритма перераспределения влечет за собой ограничение роста числа обусловленности в окрестности значения 1.5 на значительный промежуток времени для выпуклых поверхностей. В случае невыпуклых поверхностей зависимость значения числа обусловленности от числа шагов разбиения  $k$  выглядит иначе. Отметим, что для гантели второго типа увеличение числа шагов разбиений  $k$  увеличивает скорость роста числа обусловленности  $\mu(C^n)$  в процессе эволюции гантели под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением в силу формирования особенности.

Наконец приведём результаты расчетов для двух типов “гантелей” при  $k = 4$ , которые лучше

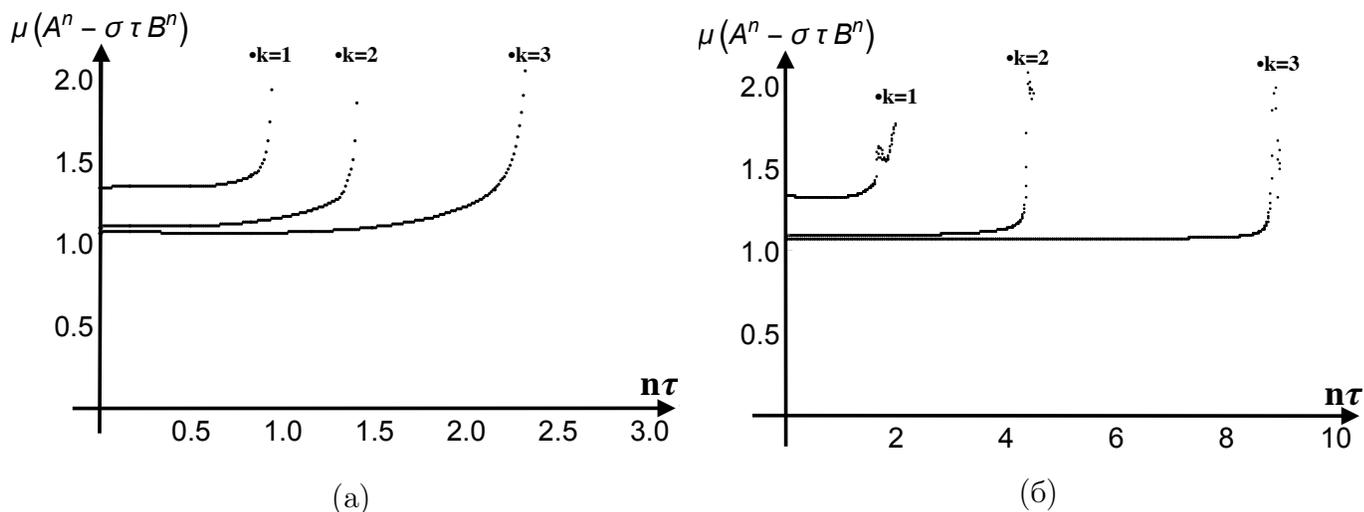


Рис. 4.5: Зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  для начальной сферы от времени  $t = n\tau$  при различных значениях числа шагов разбиения  $k$ : (а) — без применения алгоритма; (б) — с применением алгоритма.

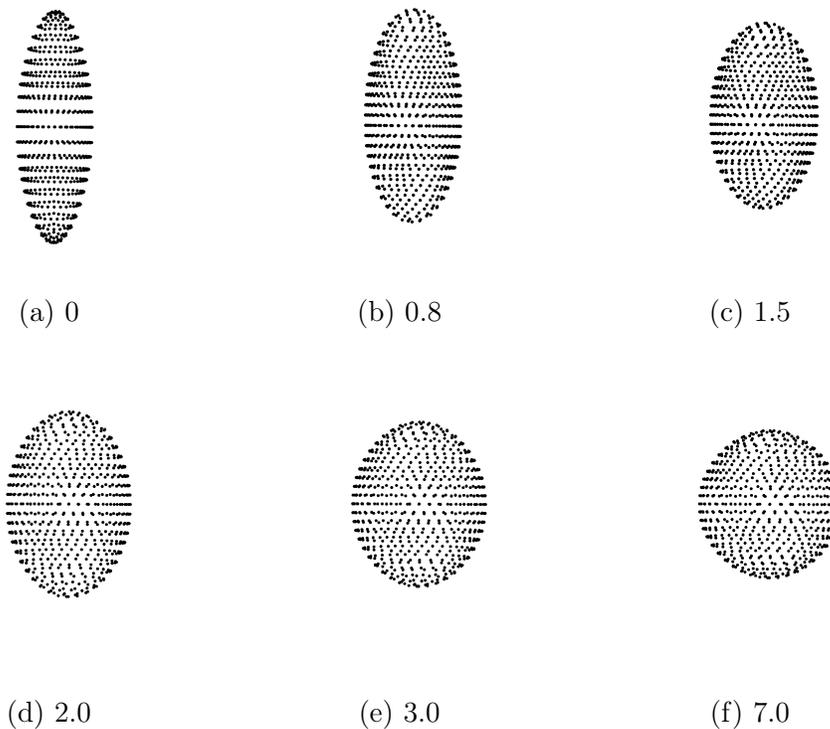


Рис. 4.6: Эволюция эллипсоида вращения под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

приближают точное решение потока средней кривизны чем для  $k = 1, 2, 3$ . Использование более мощного компьютера позволит в дальнейшем увеличить число шагов разбиения  $k$ .

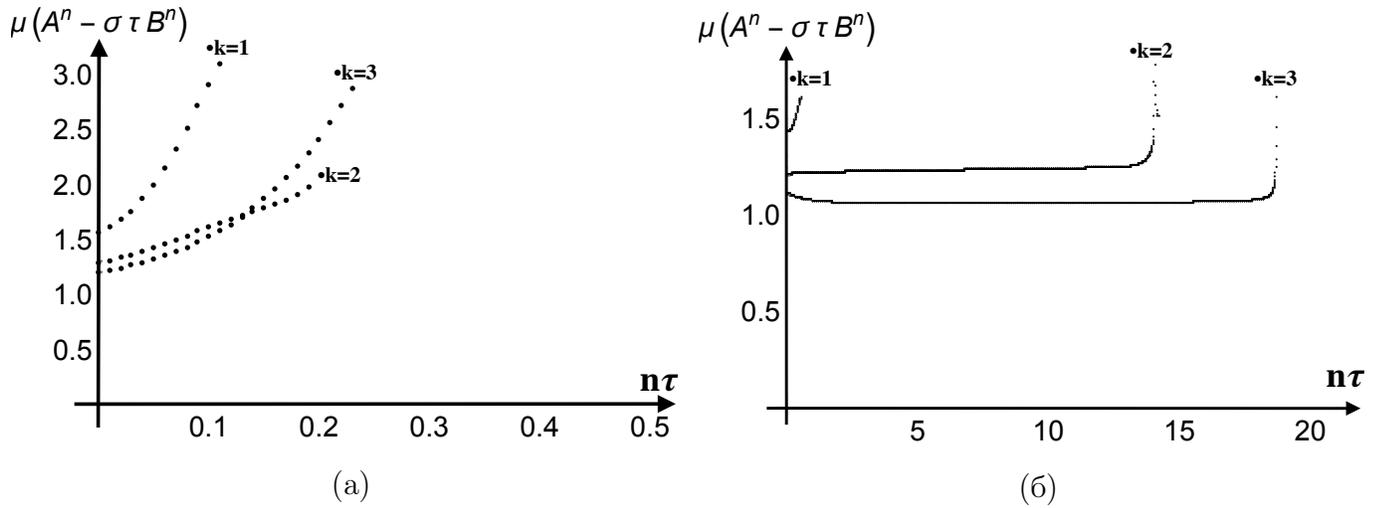


Рис. 4.7: Зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  для начального эллипсоида вращения от времени  $t = n\tau$  при различных значениях числа шагов разбиения  $k$ : (а) — без применения алгоритма; (б) — с применением алгоритма.

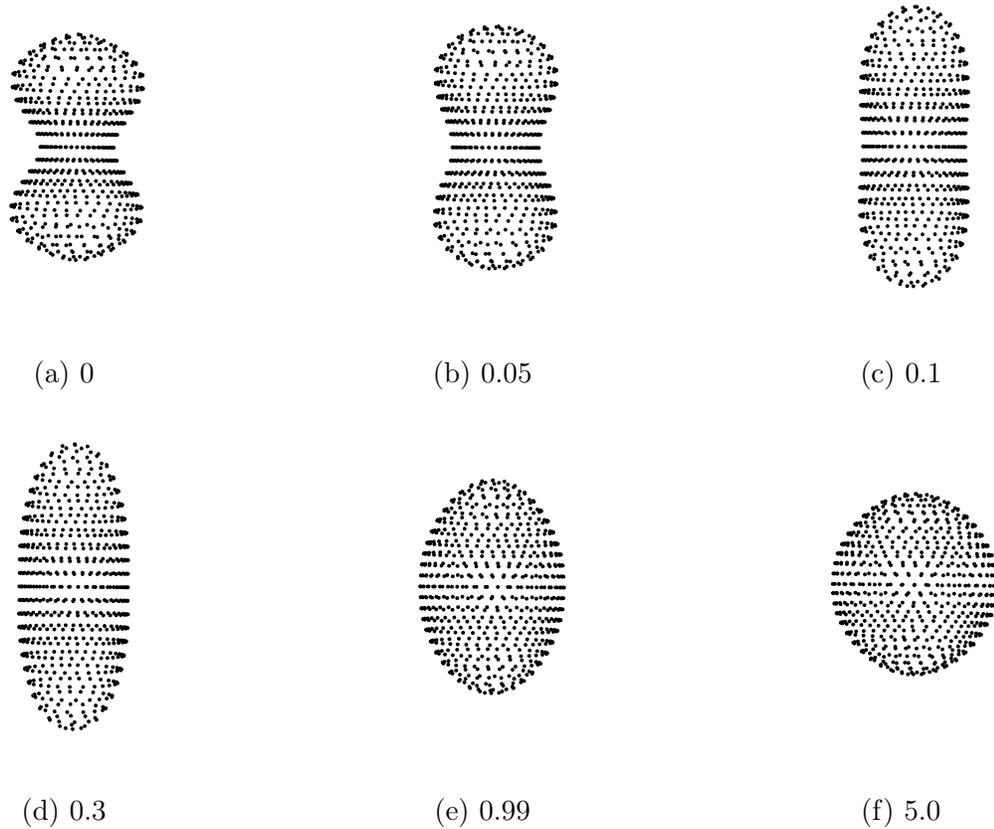


Рис. 4.8: Эволюция гантели первого типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением вершин от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

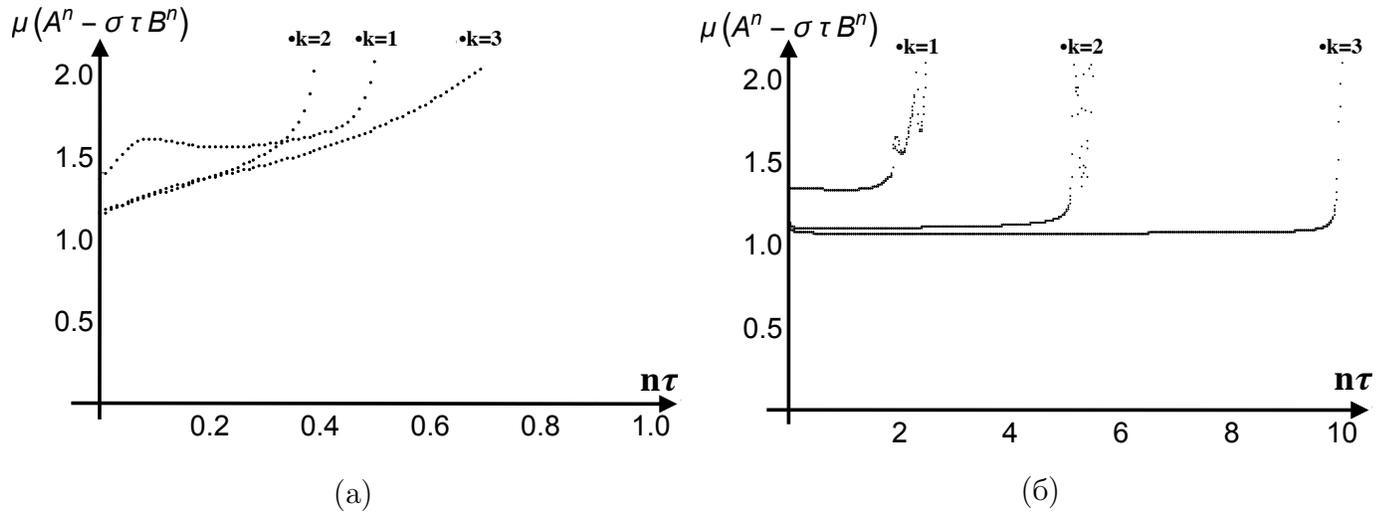


Рис. 4.9: Зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  для начальной гантели первого типа от времени  $t = n\tau$  при различных значениях числа шагов разбиения  $k$ : (а) — без применения алгоритма; (б) — с применением алгоритма.

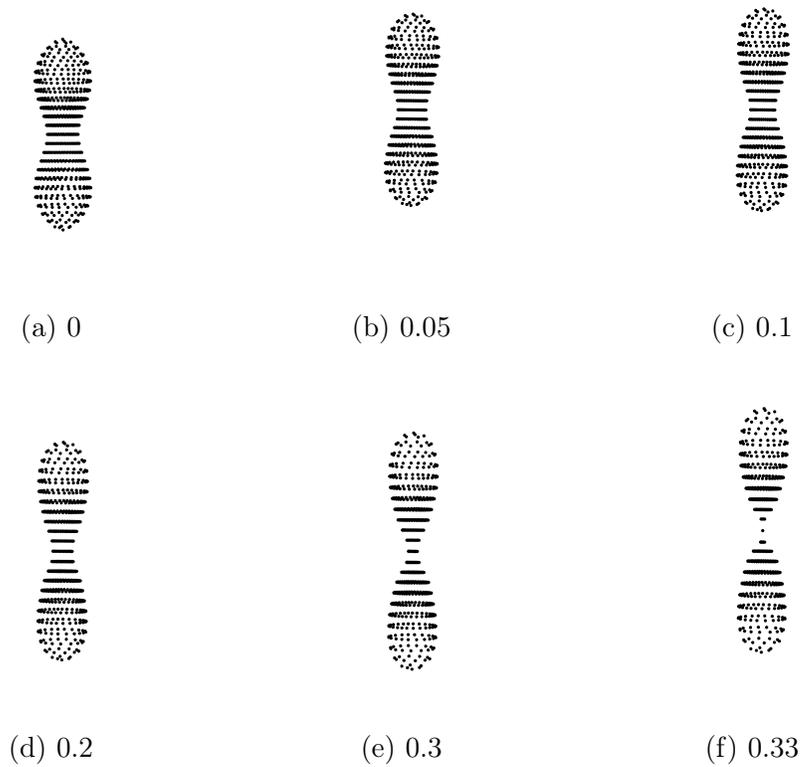


Рис. 4.10: Эволюция гантели второго типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 3$ ,  $\tau = 0.01$ .

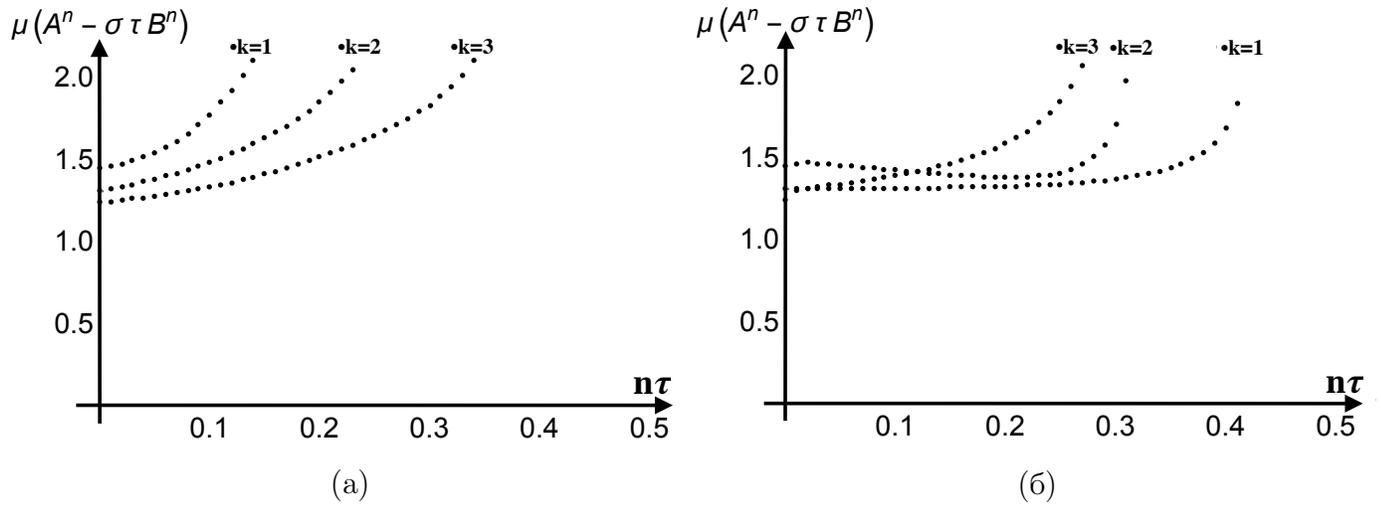


Рис. 4.11: Зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  для начальной гантели второго типа от времени  $t = n\tau$  при различных значениях числа шагов разбиения  $k$ : (а) — без применения алгоритма; (б) — с применением алгоритма.

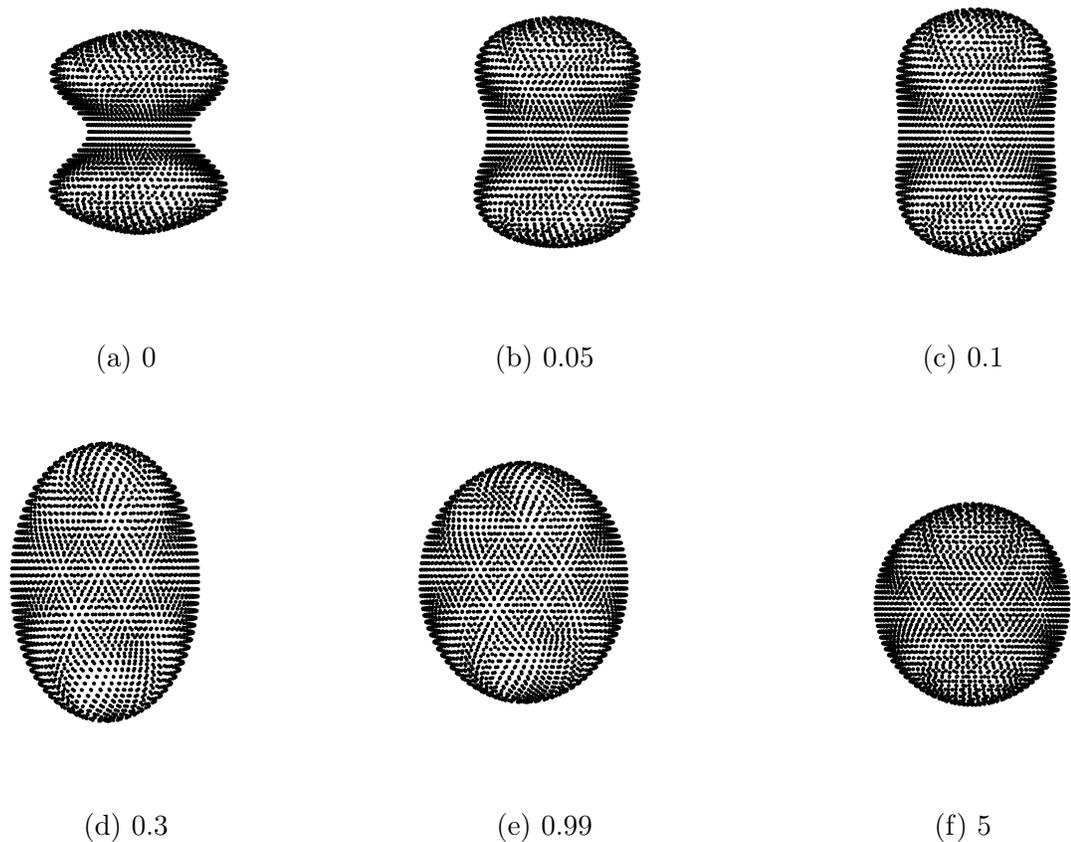


Рис. 4.12: Эволюция гантели первого типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением по времени  $t = n\tau$ , при  $k = 4$ ,  $\tau = 0.002$ .

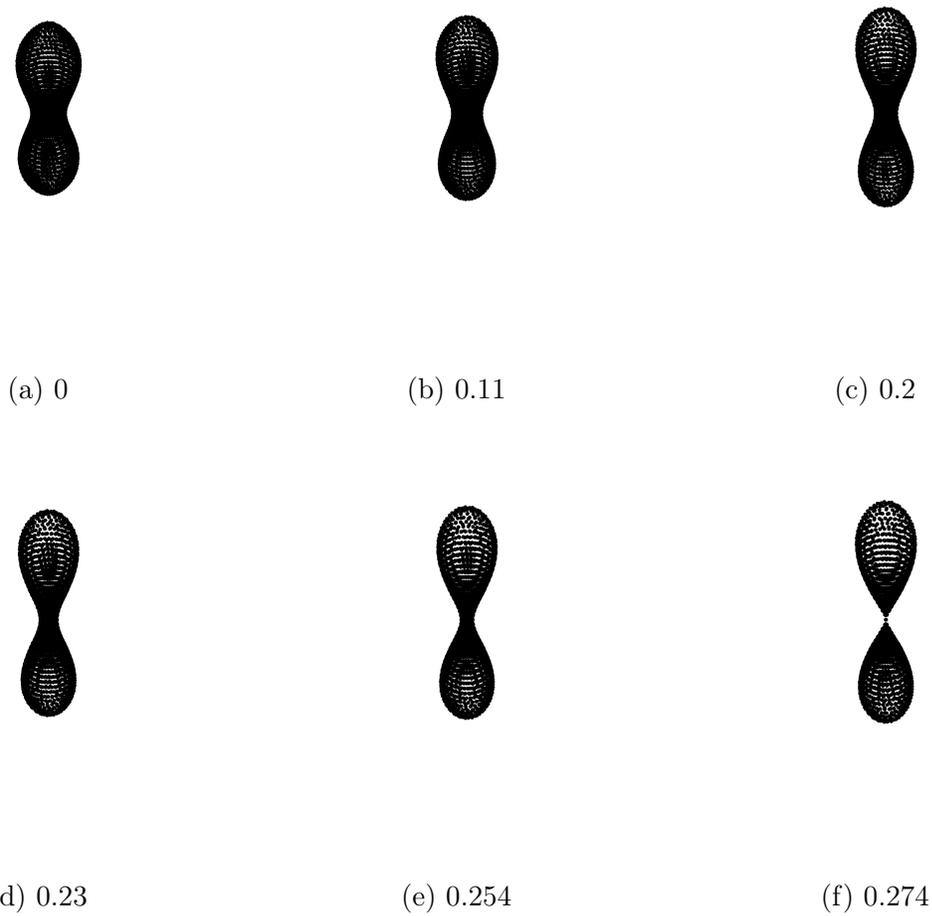


Рис. 4.13: Эволюция гантели второго типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени  $t = n\tau$ , при  $k = 4$ ,  $\tau = 0.002$ .

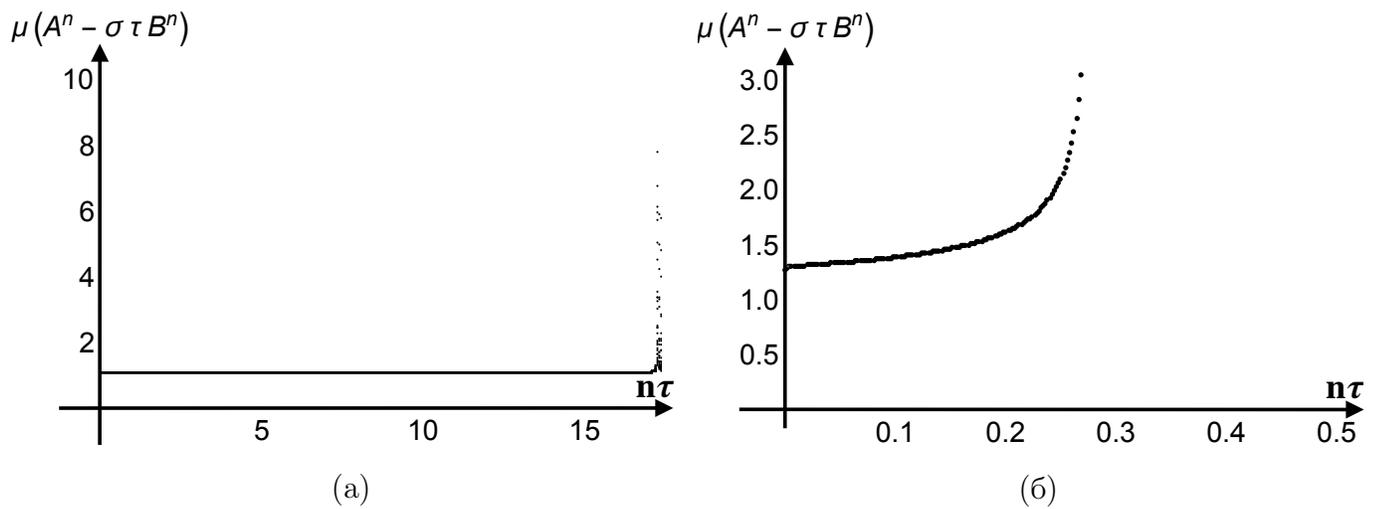


Рис. 4.14: Зависимость числа обусловленности  $\mu(C^n)$  для гантелей первого (a) и второго (б) типа от времени  $t = n\tau$  при  $k = 4$ .

# Литература

- [1] B. Chow, *The Ricci flow on the 2-sphere*, J. Differential Geometry 33(1991). 325-334.
- [2] B.Chow, F. Luo, *Combinatorial Ricci flows on surfaces*, J. of differential geometry 63 (2003). 97–129.
- [3] E.M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskiy spaces*. Mat. USSR Sbornik 10.
- [4] A. Marden, B. Rodin, *On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem*, Computational methods and function theory (Valparaiso, 1989), 103–115, Lect. Notes in Math., 1435, Springer, Berlin, 1990.
- [5] W. Thurston, *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes, 1976, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [6] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geometry 20, (1984). 237-266.
- [7] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, Sur les puissances de Steenrod, J. Differential Geometry 31(1990). 285-299.
- [8] R. S. Hamilton, *Three manifold with positive Ricci curvature*, J. Differential Geometry 17, (1982), pp. 255-306.
- [9] R.S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Contemporary Mathematics 18, (1988).
- [10] M. Gage, R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journal of Differential Geometry 23(1986). 69-96.
- [11] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245 [math.DG].
- [12] J. R. Baumgardner, P. O. Frederickson, *Icosahedral Discretization of the Two-Sphere*, SIAM J. Numer. Anal., 22(6). 1107–1115.
- [13] M. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, Journal of Differential Geometry, 26(1987). 285-314.

- [14] Rubinstein J., Sinclair R., *Visualising Ricci Flow of Manifolds of Revolution*, arXiv:math/0406189.
- [15] Z. Zhou, *Circle patterns with obtuse exterior intersection angles*, arXiv:1703.01768[Math.GT].
- [16] X. Xu, *Rigidity of inversive distance circle packings revisited*, Advances in Mathematics 332 (2018) 476–509, arXiv:1705.02714 [math.GT].
- [17] S. Altschuler, S. B. Angenent, Yoshikazu Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, Journal of Geometric Analysis, 5 (1995). 293–358.
- [18] A. V. Akopyan, *On some classical constructions extended to hyperbolic geometry*, arXiv:math.MG/1105.2153v1 (2011).
- [19] Y. C. de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles* Invent. Math, 104(3) (1991), pp 655-669.

## Список публикаций автора по теме диссертации

### Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

- [20] R. Yu. Peпа, Th. Yu. Popelensky, *Equilibrium for a Combinatorial Ricci Flow with Generalized Weights on a Tetrahedron*, Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, № 5, pp. 566-578 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: теорема 2, теорема 3, теорема 4 и их доказательства).
- [21] R. Yu. Peпа, Th. Yu. Popelensky, *On Convergence of Combinatorial Ricci Flow on Surfaces with Negative Weights*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, № 6, pp. 1061-1068 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: лемма 1, лемма 2, теорема 1, лемма 5, теорема 2 и их доказательства).
- [22] Р. Ю. Пепа, *Моделирование потоков средней кривизны на поверхности вращения*, Журнал Вычислительной математики и математической физики, 2019, том 59, №2, сс. 122-133. (Перевод:R. Yu. Peпа, *Simulation of Mean Curvature Flows on Surfaces of Revolution*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, Vol. 59, No. 2, pp. 290–300).
- [23] R. Yu. Peпа, Th. Yu. Popelensky, *Combinatorial Ricci Flow for degenerate circle packing metric*, Regular and Chaotic Dynamics, 2019, Vol. 24, № 3, pp. 198-311 (лично Пепа Р.Ю. принадлежат следующие результаты: лемма 4, предложение 2, предложение 4, теорема 3, теорема 4 и их доказательства).

## Тезисы докладов

- [24] Р. Ю. Пепа, *Обобщенные комбинаторные потоки Риччи на некоторых многогранниках*, материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2016», Научная книга Воронеж, тезисы.
- [25] Р. Ю. Пепа, *Обобщенный комбинаторный поток Риччи на тетраэдре*, материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016» (2016), МАКС Пресс, Москва.
- [26] Р. Ю. Пепа, *Обобщенный комбинаторный поток Риччи с отрицательными весами*, материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» (2017), МАКС Пресс, Москва.
- [27] Р. Ю. Пепа, *Сходимость комбинаторного потока Риччи с обобщенными весами*, материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2018», Научная книга Воронеж, тезисы.
- [28] R. Yu. Pepa, *Discrete geometric flows on two-dimensional compact oriented surfaces*, the international Conference «XX GEOMETRICAL SEMINAR» Faculty of Mathematics University of Belgrade, Vrnjačka Banja, Serbia May 20-23, 2018.
- [29] R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky, *Discrete geometric flows on two-dimensional compact oriented surfaces*, International Conference on Topology and its Application, the international Conference Nafpaktos, Greece, July 7—11, 2018.