

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи  
УДК 514.124+519.174.1

Овсянников Захар Николаевич

**Задачи об оптимальном соединении в пространствах  
КОМПАКТОВ**

Специальность 01.01.04 —  
«геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени кандидат  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук Иванов Александр Олегович

Москва — 2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Необходимые определения и предварительные результаты</b>	<b>8</b>
1.1 Расстояние Хаусдорфа, пространство компактов и его основные свойства . . . . .	8
1.1.1 Свойства кратчайших в пространстве компактов с расстоянием Хаусдорфа . . . . .	9
1.2 Кратчайшие сети, минимальные заполнения, различные фундаментальные отношения . . . . .	12
<b>2 Различные отношения типа Штейнера для пространства <math>\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)</math></b>	<b>17</b>
2.1 Определения и предварительные результаты . . . . .	17
2.2 Отношения Штейнера и Громова-Штейнера . . . . .	18
2.3 Суботношение Штейнера степени 3 и 4 . . . . .	19
<b>3 Суботношения Штейнера типа 4 для <math>\mathbb{R}^3</math> и 5 для <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>23</b>
3.1 Пятиточечное суботношение Штейнера для плоскости . . .	23
3.1.1 Общий случай . . . . .	23
3.1.2 Выпуклый случай . . . . .	24
3.2 Четырехточечное суботношение Штейнера для трехмерного пространства . . . . .	27
<b>4 Возможные количества кратчайших</b>	<b>33</b>
4.1 Определения и предварительные результаты . . . . .	33
4.1.1 Характеристики графа с выделенной вершиной с точки зрения реберных покрытий . . . . .	33
4.1.2 Атомарные графы . . . . .	35
4.2 Основные результаты . . . . .	38
<b>5 Заключение</b>	<b>42</b>
<b>Список литературы</b>	<b>43</b>
<b>А Исходный код программы, реализующей поиск возможного количества реберных покрытий двудольного графа</b>	<b>45</b>

# Введение

Диссертация посвящена изучению фундаментальных свойств пространства компактов евклидового пространства с метрикой Хаусдорфа, связанных с кратчайшими сетями и кратчайшими кривыми в этом пространстве, а также фундаментальных свойств евклидовых плоскости и пространства, связанных с кратчайшими сетями и минимальными заполнениями.

Расстояние Хаусдорфа было введено в начале XX века и широко используется в различных прикладных областях, например, в распознавании изображений, компьютерной графике и финансовой математике. Неформально расстояние Хаусдорфа между двумя компактами в метрическом пространстве можно описать как минимальную величину, такую, что если мы «раздуем» какое-либо из множеств на эту величину, то оно целиком покроет другое. Функция расстояния Хаусдорфа задает метрику на множестве компактов метрического пространства. Естественным образом возникает интерес к кратчайшим кривым и кратчайшим сетям в пространстве компактов. Несложно показать, что метрика пространства компактов евклидового пространства является строго внутренней, то есть, длина кратчайшей кривой в пространстве компактов равна расстоянию Хаусдорфа (пример доказательства можно найти в [16]). В серии работ, рассматривавшей количество различных кратчайших между двумя фиксированными точками пространства компактов евклидового пространства было показано, что «в большинстве случаев» их количество бесконечно [2], затем были получен неожиданный результат, показавший, что между двумя компактами в этом пространстве не может быть 19 кратчайших, но может быть любое другое количество кратчайших от 1 до 36 [1], и, наконец, что 37 кратчайших быть не может [4]. Таким образом, поиск возможных количеств кратчайших представляет интерес как в связи с возможностью продолжения этой последовательности, так и как фундаментальная характеристика пространства компактов. В главе 4 показывается возможность продолжения последовательности с помощью машинного перебора и приводятся результаты такового, показывающие, что между двумя компактами в данном пространстве не может быть 41, 59 или 67 кратчайших кривых.

Одной из важных и интересных фундаментальных характеристик метрического пространства является отношение Штейнера, возникающее при изучении кратчайших сетей. Сеть, соединяющая заданный набор точек метрического пространства, называемых граничными, это набор кривых в метрическом пространстве, возможно, имеющих общие концы, таких, что из любой граничной точки в любую другую ведет цепочка кривых с общими концами. Длиной такой сети называется сумма длин этих кривых, она очевидным образом ограничена снизу. Сеть,

соединяющая заданный набор граничных точек, имеющая минимально возможную длину, называется (если она существует) кратчайшей. Можно представить граничные точки городами, которые нужно соединить дорогами (или телефонной сетью) так, чтобы из каждого города можно было бы доехать (или позвонить) в каждый другой. Естественно, длину получившейся сети хочется сделать минимальной для экономии на ее строительстве. Задача нахождения кратчайшей сети по данному набору граничных точек называется задачей Штейнера и имеет множество различных применений, от трассировки печатных плат до отслеживания эволюционных процессов. Существует ряд алгоритмов для решения этой задачи, например, алгоритм Мелзака [21] или Мелзака-Хванга [22] для евклидовой плоскости. К сожалению, задача Штейнера является NP-полной (см. [20]), а значит, скорее всего, для нее не существует алгоритма, работающего за полиномиальное время от количества граничных точек.

Вследствие этого представляют интерес алгоритмы по поиску приближенного решения задачи Штейнера, «почти кратчайшей» сети. Одним из приближений кратчайшей сети является минимальное остовное дерево, для которого существует алгоритм построения квадратичной сложности на плоскости [23] и алгоритм сложности  $O(n^2 \log n)$  в общем случае. Остовное дерево — это сеть, соединяющая данный набор точек кривыми между ними. В общем случае длина минимального остовного дерева не совпадает с длиной кратчайшей сети, при этом не меньше ее. Однако минимальное остовное дерево является хорошим приближением кратчайшей сети в том смысле, что отношение длины кратчайшей сети к длине минимального остовного дерева ограничено снизу. Это отношение называется отношением Штейнера и для любого метрического пространства и конечного множества граничных точек оно не меньше  $\frac{1}{2}$  (см., например, [12]). Известная гипотеза Гильберта-Поллака говорит, что для евклидовой плоскости минимальное остовное дерево еще лучше приближает кратчайшую сеть и отношение Штейнера для любого конечного множества граничных точек не меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Несмотря на ряд попыток доказать эту гипотезу, она все еще остается недоказанной для общего случая (см., например, [14]). Отношением Штейнера метрического пространства называется инфимум отношений Штейнера для всех возможных конечных граничных подмножеств. Отношение Штейнера пространства является его важной фундаментальной характеристикой. В различных работах были получены оценки и точные значения для отношений Штейнера евклидовой плоскости и различных частных множеств граничных точек (например, [8], [9], [10]), евклидового пространства ([24]), манхэттенской плоскости ([25]) и многих других метрических пространств. В главе 2 настоящей диссертации показывается, что значение отношения Штейнера для пространства компактов евклидового

пространства достигает минимально возможного значения.

**Теорема 1.** *Отношение Штейнера на пространстве компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа достигает минимально возможного значения  $\frac{1}{2}$ .*

Другими важными характеристиками метрического пространства являются отношения Громова-Штейнера и суботношение Штейнера, основывающиеся на понятии минимального заполнения, введенного в [14]. В одной из интерпретаций, минимальное заполнение конечного метрического пространства или конечного подмножества метрического пространства — это сеть минимальной длины, выбранная среди всех сетей во всех возможных метрических пространствах, с множеством граничных точек, изометричным данному конечному метрическому пространству. Она всегда существует и ее длина называется весом минимального заполнения. Вес минимального заполнения является своеобразной оценкой снизу для длины кратчайшей сети, и отношение веса минимального заполнения к длине кратчайшей сети, называемое суботношением Штейнера, не больше 1. В [17] показано, что существуют банаховы метрические пространства, для конечных подмножеств которых это суботношение всегда равно 1. Аналогично отношению и суботношению Штейнера конечного подмножества метрического пространства вводится отношение Громова-Штейнера, являющееся отношением веса минимального заполнения к длине минимального остовного дерева. Несложно заметить, что отношение Громова-Штейнера — это произведение отношения и суботношения Штейнера. По аналогии можно определить эти отношения и для метрического пространства. Задача поиска отношения Громова-Штейнера и суботношения Штейнера метрического пространства тесно связана с поиском отношения Штейнера для него. Были найдены оценки и точные значения суботношения Штейнера для евклидовой плоскости в [11] и пространств Линденштраусса (в частности, манхэттенской плоскости) в [17]. Также любая оценка на отношение Штейнера, очевидно, дает оценку на отношение Громова-Штейнера. В главе 2 находится отношение Громова-Штейнера для пространства компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа и оценка для суботношения Штейнера того же пространства. Также в главе 3 приводятся оценки на эти отношения для евклидовой плоскости и пространства, опровергается ряд имевшихся гипотез.

## Структура работы

Работа состоит из введения, четырех глав, списка литературы и приложения.

В первой главе вводятся понятия сетей, различных отношений для конечных множеств и пространств, реберных покрытий и формулируются результаты, необходимые для доказательства основных утверждений диссертации, в том числе отношение между реберными покрытиями двудольного графа и кратчайшими в пространстве компактов.

Во второй главе доказываются оценки на отношения Штейнера, Громова-Штейнера и суботношение Штейнера для метрического пространства компактов в евклидовом пространстве.

В третьей главе доказываются оценки на суботношение Штейнера для различных граничных множеств в евклидовой плоскости и евклидовом пространстве.

В четвертой главе получены результаты, позволившие разработать и обосновать алгоритм машинного перебора для поиска возможного количества кратчайших кривых между двумя фиксированными компактами в метрическом пространстве компактов и приводятся его основные результаты.

В приложении приводится исходный код программы, производящей поиск возможного количества кратчайших.

Библиография содержит 28 наименований. Текст диссертации изложен на 51 страницах.

## **Список основных результатов, выносимых на защиту**

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Теорема 2.5 о минимальности отношений Штейнера и Громова-Штейнера метрического пространства компактов евклидового пространства.
2. Получена оценка суботношения Штейнера метрического пространства компактов евклидового пространства.
3. Получена точная оценка минимума суботношений Штейнера выпуклых пятиточечных подмножеств евклидовой плоскости.
4. Теорема 4.16 о невозможности наличия ровно 41, 59 или 67 кратчайших между двумя компактами в евклидовом пространстве.

## **Методы исследования**

В диссертации применяются методы геометрии, топологии, теории графов. Используется метод машинного перебора. Вводится новый подход к исследованию реберных покрытий через склейки графов с выделенной вершиной и атомарные графы.

## **Апробация работы**

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре «Оптимальные сети» под руководством профессора А. О. Иванова и А. А. Тужилина (МГУ, 2010-2014 гг.)
- на второй международной конференции «Вероятность, анализ и геометрия» (МГУ, 2014 год)
- на семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А. Т. Фоменко (МГУ, 2014 год)
- на семинаре «Дискретная геометрия и теория чисел» под руководством профессора М. Д. Ковалева (МГУ, 2015 год)

## **Публикации**

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [ShPaths], [GHSub] и [Ssr5], все — в журналах из перечня ВАК (для работ [GHSub] и [Ssr5] в перечень входит версия журнала на английском языке).

## **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постановку задач, поддержку и внимание к работе, а также П. А. Бородину, Н. П. Стрелковой, И. Л. Лауту и другим слушателям и докладчикам семинара «Оптимальные сети» за полезные обсуждения и предложения.

# 1 Необходимые определения и предварительные результаты

## 1.1 Расстояние Хаусдорфа, пространство компактов и его основные свойства

**Определение 1.1.** Пусть  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $d$ ,  $a \in X$  — произвольная точка в нем, а  $B \subset X$  — произвольное непустое подмножество. Тогда *расстоянием между точкой и множеством* будем называть величину  $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ .

**Определение 1.2.** Пусть  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $d$ , а  $A, B \subset X$  — некоторые его непустые подмножества. *Расстоянием Хаусдорфа между ними* называется величина

$$d_H(A, B) = \max(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)).$$

Вышеприведенное определение требует некоторых пояснений. Неформально, это наименьшая возможная величина на которую нужно «раздуть» множества таким образом, что раздутые множества покрывают оба исходных. Отметим что, во-первых, эта величина не всегда существует (например, если одно из множеств ограничено, а второе — нет), а, во-вторых, это расстояние весьма непохоже на обычно рассматриваемое «расстояние» между множествами как инфимум расстояний между их элементами, которое на самом деле не является расстоянием в пространстве компактов. Например, расстояние между пересекающимися, но не совпадающими компактами не равно нулю, в отличие от обычного «расстояния» между множествами.

Несложно показать, что верно следующее утверждение (доказательство можно посмотреть, например, в [16]):

**Утверждение 1.3.** *Если рассмотреть пространство всех замкнутых ограниченных множеств в  $X$ , то расстояние Хаусдорфа задает на нем метрику.*

**Определение 1.4.** Пространство компактов из  $X$  с заданной на нем метрикой Хаусдорфа будем обозначать как  $\mathcal{H}(X)$ , в частности, пространство компактов из  $\mathbb{R}^n$  будем обозначать как  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ .

Это пространство обладает многими интересными свойствами, например, полнотой [16] и ограниченностью (там же).

При этом в некотором смысле расстояние Хаусдорфа является естественным обобщением расстояния между точками.

**Замечание 1.5.** *Расстояние Хаусдорфа между компактами, состоящими из одной точки, равно расстоянию между этими точками.*



### 1.1.1 Свойства кратчайших в пространстве компактов с расстоянием Хаусдорфа

**Определение 1.6.** Кривая, соединяющая точки  $a, b \in X$ , называется *кратчайшей*, если она имеет конечную длину и не существует кривой с теми же концами, но меньшей длиной.

Кратчайшие в пространстве компактов в  $\mathbb{R}^n$  с расстоянием Хаусдорфа довольно хорошо изучены. Нам понадобится несколько утверждений из разных источников, в частности [3], [1], [4], [16].

**Утверждение 1.7.** *Метрика Хаусдорфа на пространстве компактов  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  является внутренней, то есть, расстояние Хаусдорфа равно инфимуму длин кривых, соединяющих компакты.*

**Утверждение 1.8.** *Для любой пары компактов из  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  существует хотя бы одна кратчайшая.*

Из этих утверждений следует, что метрика Хаусдорфа является *строго внутренней*, то есть, между любыми двумя точками существует кривая, длина которой будет равна расстоянию между ними.

**Утверждение 1.9.** *Пусть  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  — произвольные компакты в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , и  $d_H(A, B)$  — расстояние Хаусдорфа между ними. Если существует пара точек  $a \in A, b \in B$  такая, что  $d(a, b) < d_H(A, B)$ , то существует бесконечное количество кратчайших, соединяющих их (например, [2]).*

Это утверждение показывает, что лишь очень узкий класс пар компактов может иметь конечное количество кратчайших.

**Определение 1.10.** *Реберным покрытием графа  $G = (V, E)$  с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$  называется любое подмножество ребер  $E' \subset E$  такое, что для любой вершины  $v \in V$  графа  $G$  существует хотя бы одно ребро из  $E'$ , инцидентное данной вершине.*

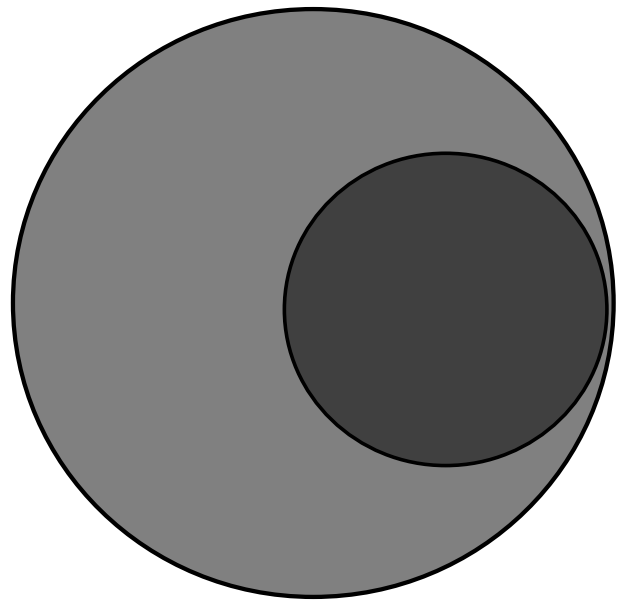


Рис. 1: Расстояние Хаусдорфа между большим кругом и маленьким равно радиусу большого круга

**Утверждение 1.11.** Пусть  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  — произвольные компакты в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , и  $k$  — конечное количество кратчайших между ними. Тогда существует двудольный граф  $G$  такой, что он имеет ровно  $k$  реберных покрытий.

Обратно, пусть  $G$  — произвольный двудольный граф и  $k > 0$  — количество его реберных покрытий. Тогда существует  $n > 0$  и два компакта  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  такие, что количество кратчайших между ними равно  $k$ .

Приведем здесь краткий ход доказательства. Сначала показывается, что для двух компактов  $A$  и  $B$  в евклидовом пространстве, находящихся на расстоянии  $r$  в смысле Хаусдорфа, количество кратчайших равно количеству компактов в  $s$ -положении для некоторого  $0 < s < r$ , а именно, компактов, расстояние Хаусдорфа от которых до компакта  $A$  равно  $s$ , а до компакта  $B$  равно  $r - s$ . При этом конкретное значение  $s$  не имеет значения. Из предыдущих работ известно, что хотя бы один компакт в  $s$ -положении есть, а именно,  $S = \bigcup_{a \in A} B_a(s) \cap \bigcup_{b \in B} B_b(r - s) \neq \emptyset$ , более того, любой другой компакт в  $s$ -положении является его подмножеством. Здесь  $B_x(r)$  — замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ . Затем показывается, что если существуют точки  $a \in A$  и  $b \in B$  на расстоянии  $d(a, b) < d_H(A, B)$ , то число компактов в  $s$ -положении бесконечно. В самом деле, если взять открытый шар достаточно маленького размера  $\text{int} B_x(\delta)$ , выбрав центр шара из  $B_a(s) \cap B_b(r - s)$ , и вырезать его из компакта  $S$ , то получится компакт  $S \setminus \text{int} B_x(\delta)$ , который также будет находиться в  $s$ -положении.

Таким образом, конечным числом кратчайших могут обладать лишь пары компактов, точки которых попарно находятся на расстоянии не менее расстояния Хаусдорфа. Для простоты будем рассматривать конечные компакты, но в исходной работе те же утверждения доказывались для произвольных компактов. Пусть  $A$  и  $B$  — конечные компакты, такие, что для любой точки  $a \in A$  верно  $d(a, B) = d_H(A, B)$ , и, аналогично, для любой точки  $b \in B$  верно  $d(b, A) = d_H(A, B)$ . Тогда множество  $S$  будет состоять из точек, которые находятся на расстоянии  $s$  от какой-либо точ-

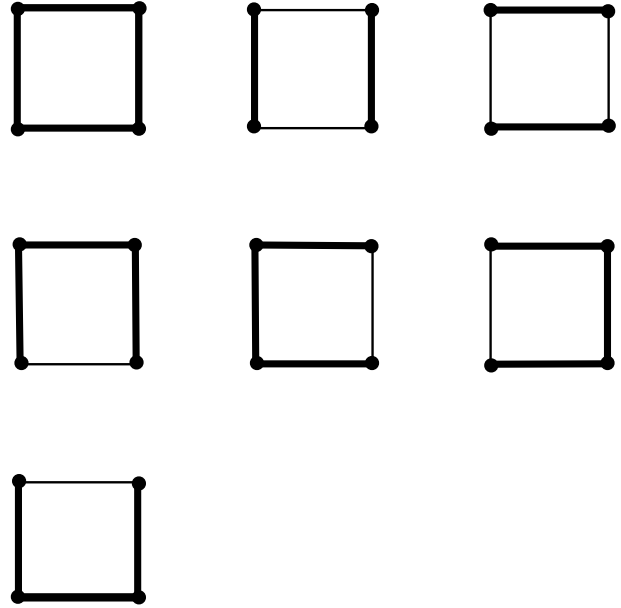


Рис. 2: Квадрат имеет 7 реберных покрытий

ки  $a \in A$  и  $r - s$  от какой-либо точки  $b \in B$ . При этом расстояние между точками  $a$  и  $b$  должно быть равно  $r$ , для каждой точки из  $S$  такая пара точек определяется единственным образом и для каждой пары точек  $a \in A, b \in B$ , находящихся на расстоянии  $r$ , такая точка единственна (последние два свойства как раз обеспечивает евклидовость пространства). Можно представить точки из компактов  $A$  и  $B$  как вершины некоторого графа, а точки из  $S$  — как его ребра, соединяющие соответствующие вершины из  $A$  и  $B$ . Получили двудольный граф, при этом каждому компакт в  $s$ -положении можно однозначно сопоставить подмножество ребер этого графа. При этом, компакт находится в  $s$ -положении тогда и только тогда, когда для любой точки  $a \in A$  есть точка из этого компакта, находящаяся на расстоянии  $s$  от него, и для любой точки  $b \in B$  есть точка этого компакта, находящаяся от нее на расстоянии  $r - s$ . Переведя это утверждение на язык графов, получим, что для каждой вершины графа должно быть ребро из подмножества ребер, инцидентное этой вершине, то есть, это подмножество является реберным покрытием.

В обратную сторону, пусть есть двудольный граф  $G$  в котором нет вершин степени 0, множество его вершин  $V$  разбивается на две доли,  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ . Рассмотрим отображение  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ , обозначим:  $f(a_i) = (a_i^1, \dots, a_i^{2m+1})$ , а  $f(b_j) = (b_j^1, \dots, b_j^{2m})$ . Пусть  $a_i^{2i} = 0, a_i^{2i+1} = 0, a_k^{2i} = 1, a_k^{2i+1} = 0$  при  $i \neq k$ . Пусть между вершинами  $a_i$  и  $b_j$  в графе есть ребро, тогда  $b_j^{2i} = \frac{1}{2}, b_j^{2i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , а если такого ребра в графе нет, то  $b_j^{2i} = 1, b_j^{2i+1} = 1$ . Значит, если между  $a_i$  и  $b_j$  есть ребро, то  $d(f(a_i), f(b_j))^2 = \sum_{i=1}^m \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = m$ , а если такого ребра нет, то  $d(f(a_i), f(b_j))^2 = \sum_{i=1, i \neq k}^m (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) + 1 + 1 = m + 1 > m$ . Получили пару компактов  $f(A)$  и  $f(B)$ , расстояние Хаусдорфа между ними равно  $\sqrt{m}$  и, если для него произвести операции из предыдущего абзаца, получим исходный двудольный граф.

Стоит отметить, что в утверждении ничего не сказано о минимальной размерности пространства  $\mathbb{R}^n$ , из которого выбираются компакты, и в общем случае про его возможные значения ничего не известно. Например, в [1] утверждается, что в  $\mathbb{R}^2$  нет пары компактов, между которыми было бы 57 кратчайших, а в  $\mathbb{R}^3$  есть. Из этой переформулировки был выведен ряд фактов, которые можно суммировать в следующем утверждении:

**Утверждение 1.12.** *Для любых двух компактов  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  количество кратчайших между ними не может равняться 19 [1] или 37 [4]. Для любого натурального числа  $k$  от 1 до 36 включительно (кроме 19) существуют натуральные  $n$  и пары компактов  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  с таким количеством кратчайших между ними [1].*

## 1.2 Кратчайшие сети, минимальные заполнения, различные фундаментальные отношения

**Определение 1.13.** *Метрическим пространством* называется множество  $X$  вместе с введенной числовой функцией  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , для которой выполняются следующие условия:

- 1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- 3)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

Если выполняются только последние два условия, то пространство называется *псевдометрическим*.

Пусть  $\mathcal{X} = (X, d)$  — псевдометрическое пространство и  $G$  — произвольный связный граф,  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество его ребер. *Сетью* в  $\mathcal{X}$ , *параметризованной графом*  $G$  или *сетью типа*  $G$  назовем пару отображений, сопоставляющих каждой вершине графа некоторую точку, а каждому ребру — пару точек в  $X$ , являющихся образами вершин ребра. *Вершинами* и *ребрами* сети  $\Gamma$  называются ограничения отображения  $\Gamma$  соответственно на вершины и ребра графа  $G$ . *Длиной ребра*  $\Gamma: vw \rightarrow X$  назовем расстояние между образами вершин, а *длиной*  $d(\Gamma)$  *сети*  $\Gamma$  — сумму длин всех ее ребер. Будем называть сеть *невыврожденной*, если в ней нет ребер длины ноль. Также в пространствах со строго внутренней метрикой сетью будем называть образ невырожденной сети, в котором ребра заменяются на какие-либо кратчайшие, соединяющие образы вершин этих ребер.

Будем говорить, что сеть  $\Gamma$  *затягивает* или *соединяет* множество  $M$ , если  $M$  — подмножество образа вершин сети.

**Определение 1.14.** Число  $\text{smt}(M) = \inf\{d(\Gamma) \mid \Gamma \text{ — сеть, соединяющая } M\}$  назовем *длиной кратчайшей сети*. Сеть такой длины существует не всегда, но если она существует, то называется *кратчайшей сетью, соединяющей*  $M$  или *минимальным деревом Штейнера для*  $M$ .

Заметим, что достаточно искать кратчайшие сети среди деревьев, а не произвольных графов. Более того, как показано, например, в [14], можно ограничиться еще более узким классом графов.

**Определение 1.15.** Дерево называется *бинарным*, если все его вершины имеют степень 1 и 3. Пара ребер, инцидентных вершинам степени 1 и одной и той же внутренней вершине, называется *усами*, вершины степени 1 называются *лежащими на одних усах*.

**Утверждение 1.16.** *Для любого конечного множества*  $M$ , *являющегося подмножеством метрического пространства, верно следующее равенство:*

$$\inf\{d(\Gamma)|\Gamma - \text{сеть, соединяющая } M\} =$$

$$\inf\{d(\Gamma)|\Gamma - \text{сеть типа бинарного дерева, соединяющая } M\}$$

**Определение 1.17.** Сеть,  $\Gamma$ , соединяющая множество  $M$ , называется *локально кратчайшей*, если для любой точки из образа сети существует окрестность  $E$  такая, что пересечение  $\partial E \cap \Gamma$  будет конечным множеством, и если взять ограничение сети  $\Gamma$  на  $E$ , то оно будет соответствовать образу некоторой кратчайшей сети, затягивающей  $(M \cap E) \cup (\partial E \cap \Gamma)$ .

Любая кратчайшая сеть обязана быть локально кратчайшей, обратное не обязательно верно, как пример можно рассмотреть точки, лежащие на экваторе на сфере, соединенные большим кругом. Для евклидовых пространств известен критерий того, что сеть является локально кратчайшей [5].

**Утверждение 1.18.** *Невырожденная сеть в евклидовом пространстве является локально кратчайшей тогда и только тогда, когда образы ребер являются отрезками, и углы между любыми двумя соприкасающимися отрезками не меньше 120 градусов.*

**Определение 1.19.** Сеть  $\Gamma$  называется *остовной* для множества  $M$ , если она затягивает  $M$  и образ всех ее вершин лежит в  $M$ .

**Определение 1.20.** *Минимальным остовным деревом* для конечного множества  $M$  называется остовная сеть минимальной длины, ее длина называется *длиной минимального остовного дерева* и обозначается  $\text{mst}(M)$ .

Такое дерево существует потому, что невырожденных остовных сетей конечное число.

**Определение 1.21.** *Отношением Штейнера для множества  $M$  называется отношение  $\text{sr}(M) = \frac{\text{smt}(M)}{\text{mst}(M)}$ . Отношением Штейнера для метрического пространства  $X$  называется величина*

$$\text{sr}(X) = \inf\{\text{sr}(M) \mid M - \text{конечное подмножество } X, \text{ состоящее не менее, чем из двух элементов}\}.$$

Заметим, что отношение Штейнера для множества не обязательно реализуется на какой-либо кратчайшей сети даже в случае полного пространства, так, в [15] был, в частности, приведен пример такого множества в банаховом пространстве. Остается открытым вопрос, обязано ли

отношение Штейнера в пространстве достигаться на каком-либо конечном множестве. В [24] была выдвинута гипотеза, что этого не происходит даже в трехмерном евклидовом пространстве.

Очевидно, что отношение Штейнера не больше 1. В [12] показано, что если рассматривать отношения Штейнера для множеств из не более, чем  $n$  точек, то они не меньше, чем  $\frac{n}{2(n-1)}$ , а отношение Штейнера произвольного метрического пространства не меньше  $\frac{1}{2}$ .

Минимальное заполнение конечного метрического пространства, впервые введенное в [14], можно рассматривать с двух точек зрения: как взвешенный граф с вершинами в метрическом пространстве и как минимум кратчайших сетей по всем возможным изометрическим вложениям конечного метрического пространства. По мере необходимости будем использовать как одну интерпретацию, так и другую. Следующие определения взяты из [14].

**Определение 1.22.** Граф  $G$  вместе с функцией  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  из множества ребер графа в вещественные числа называется *взвешенным*, функция  $f$  называется *весом*, ее значение на каком-либо ребре называется *весом ребра*. Для пути, или последовательности ребер, в графе *весом пути* называется сумма весов всех входящих в него ребер. *Весом графа* называется сумма весов всех его ребер.

**Определение 1.23.** *Заполнением конечного псевдометрического пространства  $M$  типа  $G$*  называется произвольный взвешенный граф  $G$  с неотрицательными весами такой, что  $M$  — подмножество множества его вершин и вес любого пути между элементами  $M$  не меньше расстояния между ними.

**Определение 1.24.** Заполнение конечного метрического пространства  $M$  типа  $G$  минимального веса называется *минимальным параметрическим заполнением типа  $G$* . Граф  $G$  называется *типом* заполнения. Заполнение пространства  $M$  минимального веса называется *минимальным заполнением*. Его вес называется *весом минимального заполнения* и обозначается  $\text{mf}(M)$ .

В [14] было показано, что минимальное заполнение, то есть, заполнение минимального веса, существует для любого конечного метрического пространства и что, как и в случае с минимальным деревом Штейнера, достаточно рассматривать минимум по заполнениям типа бинарного дерева.

Минимальному заполнению можно дать альтернативное определение, показывающее его связь с минимальным деревом Штейнера:

**Определение 1.25.** Пусть  $M$  — конечное метрическое пространство. Тогда *весом минимального заполнения* назовем следующую величину:

$\text{mf}(M) = \inf \{ \text{smt}(f(M)) \mid f: M \rightarrow X \text{ —}$   
 изометрическое отображение пространства  $M$   
 в произвольное конечное метрическое пространство  $X \}$ .

Сеть (в пространстве, объемлющем  $M$ ) такой минимальной длины будем называть *минимальным заполнением*.

То есть, минимальное заполнение — это кратчайшая сеть, выбранная среди всех сетей изометричных отображений нашего пространства в какое-либо объемлющее метрическое пространство.

**Утверждение 1.26** ([14]). *Два вышеприведенных определения минимального заполнения эквивалентны в том смысле, что их веса одинаковы, а граф кратчайшей сети с весами — расстояниями между вершинами образует взвешенный граф минимального заполнения.*

В [14] также было показано, что можно выбирать не среди всех вложений во все объемлющие метрические пространства, а рассмотреть лишь одно (!) фиксированное вложение в пространство  $\ell_\infty^n$ , где  $n$  — мощность исходного метрического пространства (координаты образа точки — расстояния до соответствующих точек в исходном метрическом пространстве). Более того, в [17] показано, что для любого пространства Линденштраусса (в частности,  $\ell_\infty^n$ ) кратчайшая сеть для любого конечного подмножества совпадает с его минимальным заполнением.

**Определение 1.27.** *Отношением Громова-Штейнера пространства  $X$  называется величина*

$$\text{sgr}(X) = \inf \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{mst}(M)} \mid M \text{ — конечное подмножество } X, \#M > 1 \right\}.$$

**Определение 1.28.** *Суботношением Штейнера пространства  $X$  называется величина  $\text{ssr}(X) = \inf \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{smt}(M)} \mid M \text{ — конечное подмножество } X \right\}$ .*

Поиск отношений Штейнера, Громова-Штейнера и особенно суботношения Штейнера — нетривиальная задача, которая пока не выполнена даже для евклидовой плоскости [13], поэтому имеет смысл попытаться найти некоторые оценки на эти величины. Естественным способом оценки может быть ограничение на количество точек в подмножествах.

**Определение 1.29.** *Для произвольного натурального  $n > 1$*

*Суботношением Штейнера пространства  $X$  степени  $n$  называется величина*

$$\text{ssr}_n(X) = \inf \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{smt}(M)} \mid M - \text{конечное подмножество } X \text{ мощности } n \right\}.$$

Отношением Штейнера-Громова пространства  $X$  степени  $n$  называется величина

$$\text{sgr}_n(X) = \inf \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{mst}(M)} \mid M - \text{конечное подмножество } X \text{ мощности } n \right\}.$$

Отношением Штейнера пространства  $X$  степени  $n$  называется величина

$$\text{sr}_n(X) = \inf \left\{ \frac{\text{smt}(M)}{\text{mst}(M)} \mid M - \text{конечное подмножество } X \text{ мощности } n \right\}.$$

Попытки найти такого рода отношения неоднократно предпринимались для евклидовой плоскости. Так, уже в [5] было показано, что  $\text{sr}_3(\mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , а утверждение  $\text{sr}_4(\mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  было доказано лишь через 10 лет в [6]. Далее, утверждение  $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  было доказано для  $n = 5$  в [7], для  $n = 6$  в [8], для  $n = 7$  в [9] и, наконец, для  $n = 8$  в [10].

Для суботношения Штейнера евклидовой плоскости подобные утверждения были получены в [11] ( $\text{ssr}_4(\mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) и в [Ssr5] ( $\text{ssr}_5(\mathbb{R}^2) \leq 0,8562\dots < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

Более общие утверждения, касающиеся произвольных метрических пространств, были получены в [12]. Необходимая нам часть может быть суммирована в следующем утверждении:

**Утверждение 1.30.** *Для любого метрического пространства  $X$  и натурального  $n > 2$  выполнены следующие неравенства:*

- 1)  $\text{ssr}_n(X) \geq \text{sgr}_n(X) \geq \frac{n}{2(n-1)}$
- 2)  $\text{sr}_n(X) \geq \text{sgr}_n(X) \geq \frac{n}{2(n-1)}$



## 2 Различные отношения типа Штейнера для пространства $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$

В этом разделе построены различные примеры, показывающие, что для пространства  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  достигаются минимально возможные значения всех рассмотренных отношений и суботношений. Все рассмотренные примеры приведены для размерности  $n = 1$ , но обобщаются на пространства больших размерностей естественным вложением. Все примеры были опубликованы в [GHSub].

### 2.1 Определения и предварительные результаты

Основным приемом, используемым в данном разделе, будет перенос задачи в пространство большей размерности  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ . Здесь мы определим его и найдем его основные свойства.

**Определение 2.1.** Под пространством  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  будем понимать прямую сумму пространств с метрикой максимума, а именно:

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_i \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\text{при этом } d((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)) = \max_{i=1, \dots, m} d(a_i, b_i).$$

**Лемма 2.2.** Пусть  $A = \{a^1, \dots, a^k\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  — конечное ограниченное множество элементов, при этом  $a^i = (a_1^i, \dots, a_m^i)$ . Тогда существует изометрическое отображение  $g: A \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  такое, что  $\text{smt}(A) = \text{smt}(g(A))$ .

*Доказательство.* Выбрав произвольный индекс  $j$ , можно рассматривать  $(a_j^1, \dots, a_j^k)$  как набор компактов в  $\mathbb{R}^n$ , при этом заведомо существует движение  $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое переводит все  $a_j^i$  внутрь любого выбранного нами шара  $U_j$  с диаметром  $2 \text{mst}(A)$ . Так как это движение, то расстояния Хаусдорфа между компактами сохраняются. Выберем шары  $U_j$  так, что расстояние между любыми двумя шарами не меньше  $100 \text{mst}(A)$ . Получили отображение  $f: \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  такое, что

$$f((x_1, \dots, x_m)) = \bigcup_{i=1}^m f_i(x_i).$$

Покажем, что отображение  $f$  сжимающее. Рассмотрим два элемента  $x = (x_1, \dots, x_m)$  и  $y = (y_1, \dots, y_m)$  из  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ . Возьмем произвольную точку  $p$  из образа  $f(x)$ , она принадлежит одному из образов  $f_i(x_i)$ , пусть  $p \in f_k(x_k)$ . Заметим что расстояние  $d(p, f(y))$  (в обычном, нехаусдорфовом смысле), равно  $\min_i d(p, f_i(y_i)) \leq d(p, f_k(y_k))$ , значит,

$$d(p, f(y)) \leq d_H(f_k(x_k), f_k(y_k)) \leq d(x, y).$$

Следовательно, для любой точки  $p \in f(x)$  верно  $d(p, f(y)) \leq d(x, y)$ . Аналогичное утверждение верно для любой точки из  $f(y)$ . Тогда

$$d(f(x), f(y)) = \max\left(\sup_{p \in f(x)} d(p, f(y)), \sup_{q \in f(y)} d(q, f(x))\right) \leq d(x, y).$$

Будем обозначать  $F_j$  шар с тем же центром, что и  $U_j$ , но диаметром  $3 \operatorname{mst}(A)$ . Если  $f_i(x_i) \subset F_i$  и  $f_i(y_i) \subset F_i$ , а также  $d(x, y) < 2 \operatorname{mst}(A)$ , то для любой точки  $p = f_k(q) \in f_k(x_k)$  верно  $d(q, y_k) = d(p, f_k(y_k)) = d(p, f(y))$ , так как образы всех остальных компактов находятся слишком далеко. Тогда  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ .

Тогда отображение  $f$  сохраняет расстояния между любыми элементами из  $A$ .

Из того, что отображение сжимающее, очевидно, что  $\operatorname{smt}(f(A)) \leq \operatorname{smt}(A)$ . Рассмотрим произвольное дерево Штейнера для  $f(A)$  с длиной, не большей  $\operatorname{mst}(A)$ . Все его элементы лежат внутри  $\bigcup F_j$  и каждый элемент имеет хотя бы одну точку в каждом  $F_j$ . Следовательно, отображение  $g$  из образа кратчайшей сети в  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ , такое, что  $g(x) = (f_1^{-1}(F_1 \cap x), \dots, f_m^{-1}(F_m \cap x))$  сохраняет расстояния между элементами дерева Штейнера и переводит  $f(A)$  в  $A$ . Значит,  $\operatorname{smt}(A) \geq \operatorname{smt}(f(A))$ .  $\square$

Так как полученное отображение — изометрическое на  $A$ , то оно сохраняет также длину минимального остовного дерева и вес минимального заполнения.

**Утверждение 2.3.** *Отношения и отношения степени  $n$  Штейнера и Штейнера-Громова, а также суботношение и суботношения степени  $n$  Штейнера равны для метрических пространств  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  и  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  при произвольных натуральных  $m$  и  $n$ .*

*Доказательство.* Отображение, полученное в предыдущей лемме, показывает, что все рассматриваемые отношения для  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  не больше таких же отношений для  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ , так как для любого множества из  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  найдется множество из  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  с таким же отношением рассматриваемого типа.

Аналогично, рассмотрев отображение  $f: \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  такое, что  $f(x) = (x, \{0\}, \{0\}, \dots, \{0\})$ , получим, что все отношения для  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  не больше таких же отношений для  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ , и, следовательно, они равны.  $\square$

## 2.2 Отношения Штейнера и Громова-Штейнера

Из предыдущего утверждения и утверждения 1.30 нетрудно вывести следующее утверждение:

**Утверждение 2.4.** Для произвольного натурального  $n$  и  $k > 1$  верно  $\text{sr}_k(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{k}{2(k-1)}$ .

*Доказательство.* Утверждение 1.30 говорит, что  $\text{sr}_k(X) \geq \frac{k}{2(k-1)}$ . Таким образом, достаточно найти пример множества с отношением Штейнера, равным этому числу.

Пусть  $m > \log_2(k)$  — натуральное число. Можно рассмотреть множество  $M = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m \mid x_i = \{(0, 0, \dots, 0)\} \text{ или } x_i = \{(1, 0, 0, \dots, 0)\}\}$ . Расстояния между любыми двумя элементами множества равны 1, а расстояние от любого элемента множества до точки  $c = \{(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)\}, \{(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)\}, \dots, \{(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$  равно  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, для любых  $k$  элементов множества  $M$  их отношение Штейнера будет не больше  $\frac{\frac{1}{2}k}{1(k-1)} = \frac{k}{2(k-1)}$ .  $\square$

Из того, что отношение Штейнера степени  $n$  достигает теоретического минимума и утверждения 1.30 автоматически следует, что отношения Громова-Штейнера (степени  $n$ ) также минимальны.

**Теорема 2.5.** Для метрического пространства  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  при произвольном натуральном  $n$  выполнены следующие равенства:

- 1)  $\text{sr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{1}{2}$ ,
- 2)  $\text{sgr}_k(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{k}{2(k-1)}$  для произвольного  $k > 1$ ,
- 3)  $\text{sgr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{1}{2}$ .

### 2.3 Суботношение Штейнера степени 3 и 4

В течение всего параграфа мы будем опираться на утверждение 1.30, а именно, на то, что  $\text{ssr}_k(X) \geq \frac{k}{2(k-1)}$ .

**Теорема 2.6.** Суботношение Штейнера степени 3 для  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  равно  $\frac{3}{4}$

*Доказательство.* Рассмотрим компакты  $a_1 = \{1, 4, 5\}$ ,  $a_2 = \{1, 2, 5\}$  и  $a_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  из  $\mathbb{R}$ . Расстояние между любыми двумя из них равно 1. Кратчайшая сеть может иметь единственную топологию звезды с тремя лучами. Обозначим центральную вершину звезды за  $v$ , а расстояния  $d(y, a_i) = r_i$ . Это означает, в частности, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} y &\subset B_1(r_1) \cup B_4(r_1) \cup B_5(r_1), \\ y &\subset B_1(r_2) \cup B_2(r_2) \cup B_5(r_2), \\ y &\subset B_1(r_3) \cup B_2(r_3) \cup B_3(r_3) \cup B_4(r_3) \cup B_5(r_3). \end{aligned}$$

Длина кратчайшей сети будет равна  $x = r_1 + r_2 + r_3$ , вес минимального заполнения —  $\frac{3}{2}$ . Пусть  $x < 2$  (понятно, что  $x \leq 2$ , так как это длина

минимального остовного дерева). Так как  $x < 2$ , то  $r_i + r_j < 2$  при  $i \neq j$ . Значит,  $y \cap B_3(r_3) \cap B_2(r_2) = \emptyset$  (пересечение этого множества с  $B_1(r_1) \cup B_4(r_1) \cup B_5(r_1)$  пусто) и  $y \cap B_3(r_3) \cap B_4(r_1) = \emptyset$  (пересечение этого множества с  $B_1(r_2) \cup B_2(r_2) \cup B_5(r_2)$  пусто). Тогда  $y \cap B_3(r_3) = \emptyset$ , и  $r_3 \geq d(3, y) \geq 2 - \max(r_1, r_2)$ , что противоречит предположению о том, что  $x < 2$ . Значит,  $x = 2$  и суботношение Штейнера для  $B$  будет равно  $\frac{3}{4}$ .

Так как суботношение Штейнера для трехточечного множества не может быть меньше  $\frac{3}{4}$ , то суботношение Штейнера степени 3 для  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  равно  $\frac{3}{4}$ .  $\square$

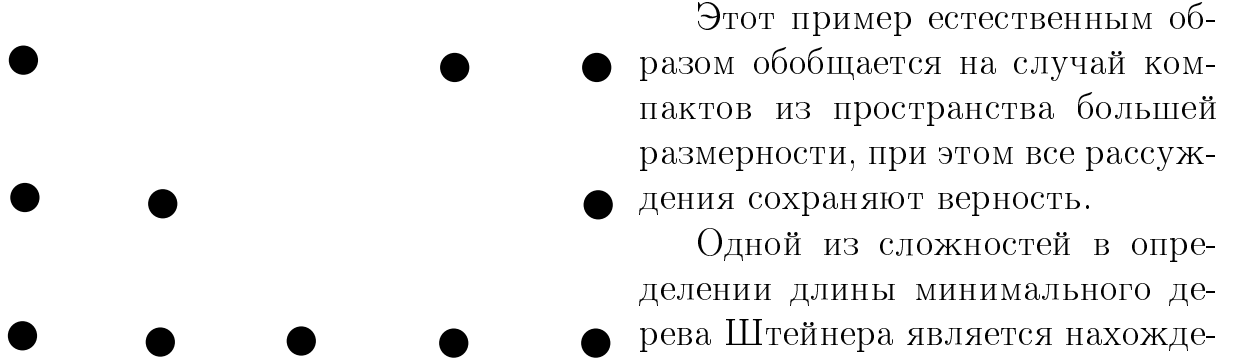


Рис. 3: Сверху вниз:  $a_1, a_2, a_3$

Одной из сложностей в определении длины минимального дерева Штейнера является нахождение топологии этого дерева. С помощью операции увеличения размерности мы сможем выбирать топологию рассматриваемого дерева произвольным образом.

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  — множество компактов из  $\mathbb{R}^n$  таких, что  $d(a_i, a_j) \leq 1$ , при этом для каких-то  $i$  и  $j$  выполняется равенство  $d(a_i, a_j) = 1$ . Рассмотрим множество  $B = \{b_1, \dots, b_m\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{m!}$ , построенное следующим образом: пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_m!$  — упорядоченный набор всех перестановок из  $m$  элементов. Тогда  $b_i = (a_{\sigma_1(i)}, \dots, a_{\sigma_m!(i)})$ .

Расстояние между элементами  $b_i$  и  $b_j$  равно 1 и длина минимального остовного дерева равна  $m - 1$ .

**Лемма 2.7.** Пусть  $\sigma$  — некоторая перестановка из  $m$  элементов. Тогда найдется перестановка  $\sigma_1$  из  $m!$  элементов такая, что для функции  $f: \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{m!} \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{m!}$ , определяемой как  $f((c_1, \dots, c_m!)) = (c_{\sigma_1(1)}, \dots, c_{\sigma_1(m!)})$  верно равенство

$$f(b_i) = b_{\sigma(i)}$$

**Лемма 2.8.** Пусть  $G$  — топология минимального дерева Штейнера для множества  $B$  и  $G_1$  — некоторое бинарное дерево с вершинами  $a_1, \dots, a_m$ , получающееся из  $G$  заменой вершин  $b_i$  на  $a_{\sigma_j(i)}$ . Тогда длина минимального дерева Штейнера для множества  $B$  не меньше длины минимального дерева топологии  $G_1$ , затягивающего  $a_1, \dots, a_m$ .

*Доказательство.* Рассмотрим проекцию минимального дерева Штейнера для множества  $B$  на  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{(j)}$ . Получившаяся сеть будет затягивать  $a_1, \dots, a_m$ , при этом ее топология будет  $G_1$ , а длина каждого ребра будет не больше длины соответствующего ребра в исходном минимальном дереве Штейнера. Следовательно, длина исходной сети будет не меньше длины ее проекции, а та, в свою очередь, не меньше длины минимальной сети топологии  $G_1$ .  $\square$

**Теорема 2.9.** *Суботношение Штейнера степени 4 для  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  равно  $\frac{2}{3}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим компакты  $a_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $a_2 = \{1, 4, 5\}$ ,  $a_3 = a_2$  и  $a_4 = \{1, 2, 5\}$  из  $\mathbb{R}$  (различных множеств получается три).

Расстояние между любыми двумя из них, кроме  $a_2$  и  $a_3$  равно 1. Рассмотрим множество  $B \subset \mathcal{H}(\mathbb{R})^{4!}$ , образованное таким же образом, как в утверждениях выше. Кратчайшая сеть может иметь единственную бинарную топологию с двумя внутренними точками. Рассмотрим такую проекцию  $f$  этой сети на  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ , что вершины  $a_1$  и  $a_2$  лежат на одних усах и вершины  $a_3$  и  $a_4$  лежат на одних усах, пусть при этом  $f(b_{\sigma(i)}) = a_i$ . Обозначим внутренние вершины проекции за  $y_1$  и  $y_2$ , вершина  $y_1$  соединяется ребрами с вершинами  $a_1$  и  $a_2$ . Пусть также  $f(c) = y_1$ ,  $f(d) = y_2$ , здесь  $c$  и  $d$  – внутренние вершины исходного минимального дерева Штейнера. Обозначим расстояния между точками как  $d(b_{\sigma(1)}, c) = r_1$ ,  $d(b_{\sigma(2)}, c) = r_2$ ,  $d(b_{\sigma(3)}, d) = r_3$ ,  $d(b_{\sigma(4)}, d) = r_4$ ,  $d(c, d) = w$ . Понятно, что  $r_i + r_j \geq 1$  при  $i \neq j$ .

Длина кратчайшей сети для множества  $B$  будет равна  $x = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + w$ , вес минимального заполнения – 2. Пусть  $x < 3$  (понятно, что  $x \leq 3$ , так как это длина минимального остовного дерева для множества  $B$ ). Тогда  $r_1 + r_2 < 3 - r_3 - r_4 - w < 2$ . Аналогично,  $r_3 + r_4 < 2$ . Из леммы 2.8 следует, что расстояния между точками на проекции не больше расстояний между их прообразами. Это значит, что выполнены следующие условия (здесь первое условие следует непосредственно из определения расстояния Хаусдорфа, а второе – из расстояния Хаусдорфа между  $y_1$  и  $a_2$ ):

$$y_1 \cap B_3(r_1) \neq \emptyset$$

$$y_1 \subset B_1(r_2) \cup B_4(r_2) \cup B_5(r_2).$$

Значит, так как  $r_1 + r_2 < 2$ , то  $y_1 \cap B_3(r_1) \cap B_4(r_2) \neq \emptyset$ . Выберем из этого множества произвольную точку  $p$ . Также верно, что  $y_2 \subset B_1(r_4) \cup B_2(r_4) \cup B_5(r_4)$ . Несложно заметить, что расстояние от точки  $p$  до  $B_1(r_4) \cup B_2(r_4) \cup B_5(r_4)$  не меньше  $\min(2 - r_1 - r_4, 2 - r_2 - r_4)$ . Значит,

$$w \geq d_H(y_1, y_2) \geq d(p, y_2) \geq d(p, B_1(r_4) \cup B_2(r_4) \cup B_5(r_4)) \geq \min(2 - r_1 - r_4, 2 - r_2 - r_4).$$

Тогда  $x = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + w \geq 2 + \min(r_2 + r_3, r_1 + r_3) \geq 3$ , что противоречит нашему предположению. Значит,  $x = 3$ . Суботношение Штейнера для  $B$  при этом будет равно  $\frac{2}{3}$ .

Так как суботношение Штейнера для четырехточечного множества не может быть меньше  $\frac{3}{4}$ , то суботношение Штейнера типа 4 для  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  равно  $\frac{2}{3}$ .

Этот пример непосредственно обобщается на случай  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ , все рассуждения сохраняют силу, и только их запись становится более громоздкой.  $\square$

К сожалению, так и не удалось доказать гипотезу, что  $\text{ssr}_k(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{k}{2(k-1)}$ .

**Гипотеза 2.10.**  $\text{ssr}_k(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \frac{k}{2(k-1)}$

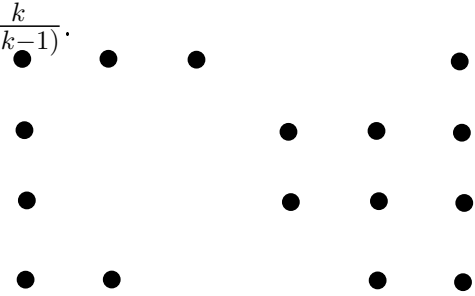


Рис. 4: Сверху вниз:  $a_1, a_2, a_3, a_4$

## 3 Суботношения Штейнера типа 4 для $\mathbb{R}^3$ и 5 для $\mathbb{R}^2$

Как было упомянуто ранее, суботношение Штейнера для евклидовой плоскости для трех- и четырех-точечных множеств было получено в [11] и оказалось равно  $\frac{3}{2}$ , а отношение Громова-Штейнера, соответственно,  $\frac{3}{4}$ . Как следствие результата была выдвинута гипотеза о том, что и для случая произвольного количества точек эти соотношения сохранятся. К сожалению, это оказалось неверно, был получен пример пятиточечного множества с меньшим суботношением Штейнера.

Тем не менее, гипотеза оказалась верной для выпуклых пятиточечных множеств, что было показано, как и пример невыпуклого множества, в [Ssr5]. В трехмерном евклидовом пространстве любое трехточечное множество лежит в одной плоскости вместе с кратчайшей сетью и, следовательно, суботношение Штейнера равно такому в случае плоскости, а именно,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Четырехточечное суботношение Штейнера также было получено в [Ssr5] и равно  $\frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ .

### 3.1 Пятиточечное суботношение Штейнера для плоскости

#### 3.1.1 Общий случай

Рассмотрим пятиточечное множество, образованное вершинами двух одинаковых правильных треугольников, пересекающихся по одной вершине и повернутых таким образом, что две их стороны находятся под углом  $\frac{\pi}{2}$  (см. рисунок 5). Очевидно, что, если принять длину стороны треугольников за 1, то длина минимального остовного дерева будет равна 4, а, как следствие, кратчайшая сеть будет иметь длину не больше  $4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ . А. О. Иванов и А. А. Тужилин написали программу на языке Wolfram Mathematica, которая находит минимальное заполнение и его вес для заданного конечного метрического пространства, перебирая все возможные топологии минимального заполнения и решая задачу линейного программирования для каждой топологии. Найденный с ее помощью вес минимального заполнения данного пространства оказался равен  $2 + (1 + \sqrt{3})/(2\sqrt{2}) < 3$ . Таким образом, отношение Громова-Штейнера данного множества равно  $\frac{2+(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{2})}{4} < \frac{3}{4}$ , а суботношение Штейнера равно  $\frac{2+(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Это приводит нас к следующему утверждению:

**Теорема 3.1.** *Для евклидовой плоскости выполнены следующие неравенства:*

$$1) \text{ssr}_5(\mathbb{R}^2) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

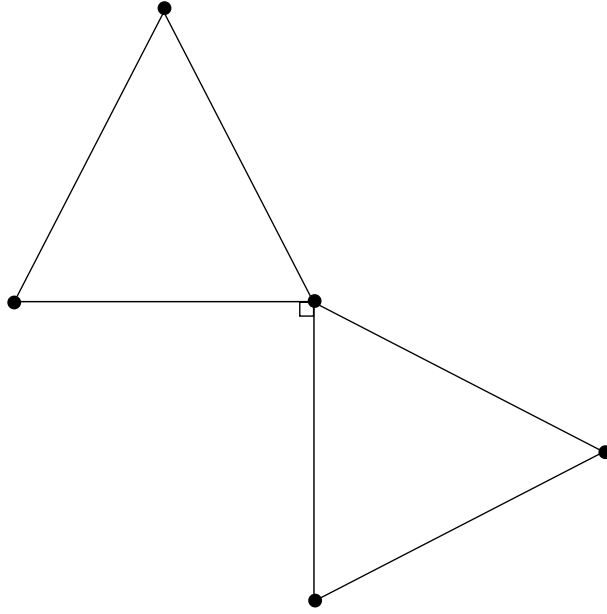


Рис. 5: Пример пятиточечного множества на плоскости, для которого суботношение Штейнера меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2) \operatorname{sgr}_5(\mathbb{R}^2) \leq \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} < \frac{3}{4}$$

### 3.1.2 Выпуклый случай

Для рассмотрения выпуклого случая нам понадобится определение *бабочки*. Подробнее про описание обходов пятиточечного множества можно прочитать в [19]. Пусть имеется некоторый граф — цикл на пяти вершинах. Тогда *бабочками* для этого цикла будут называться такие циклы на этих же вершинах, что они имеют с исходным циклом ровно два общих ребра, которые не имеют общих вершин (см. рисунок 6). Нетрудно заметить, что каждому циклу соответствует ровно пять бабочек и каждая из них однозначно определяется одной вершиной, которая называется *носик*. *Длиной* бабочки назовем полусумму длин всех ее ребер.

**Лемма 3.2.** Пусть имеется цикл  $G$  и отображение его вершин в евклидову плоскость. Если образ цикла является выпуклым пятиугольником (как на рисунке 6), то любая бабочка имеет длину не менее  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  длины кратчайшей сети.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную бабочку выпуклого пятиугольника. Ее можно представить как объединение трех треугольников, сумма полупериметров которых равна длине бабочки. Для произвольного треугольника длина кратчайшей сети не больше, чем  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  его полупериметра. Кратчайшие сети треугольников можно объединить в сеть, затягивающую вершины пятиугольника, при этом ее длина будет не больше  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  сумм их полупериметров, а, значит, длины бабочки (см. рисунок



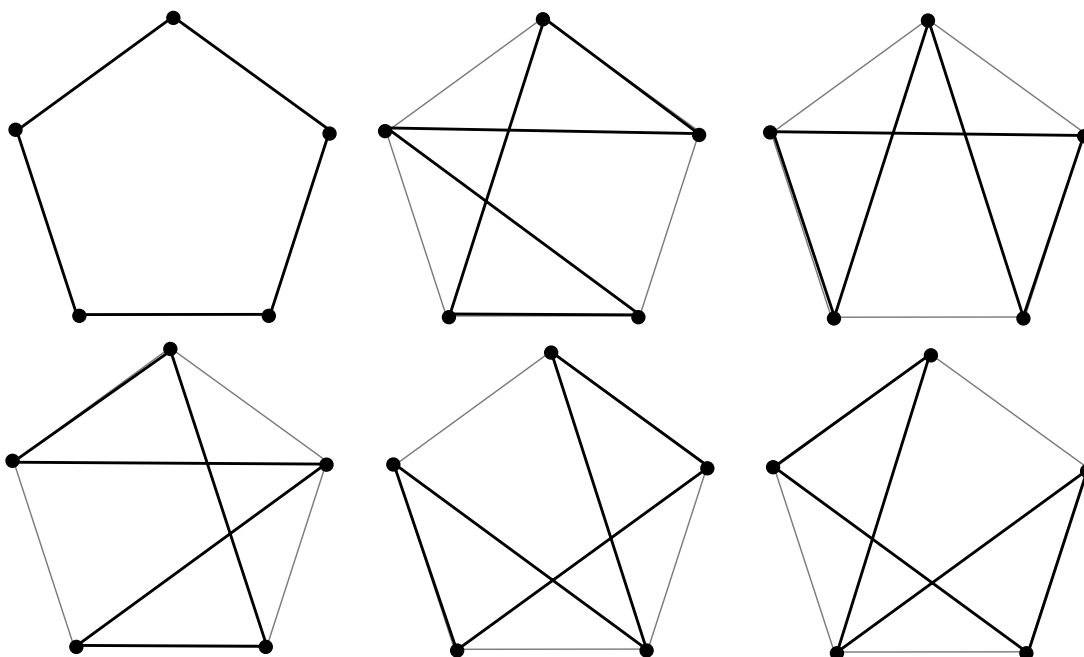


Рис. 6: Исходный цикл (слева сверху) и пять его бабочек

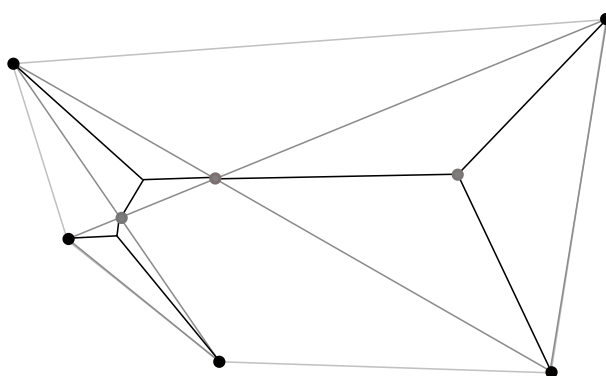


Рис. 7: У выпуклого цикла все бабочки большие

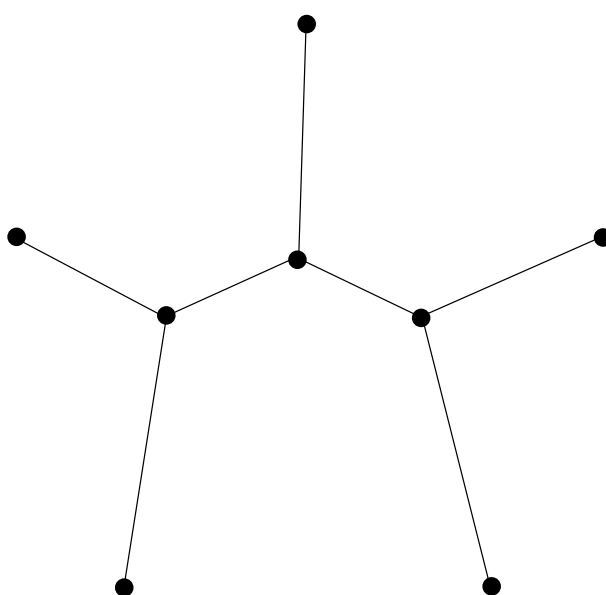


Рис. 8: Единственно возможная бинарная топология минимального заполнения на пяти вершинах

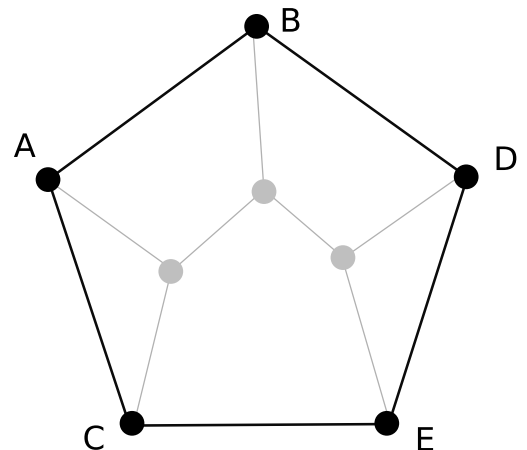
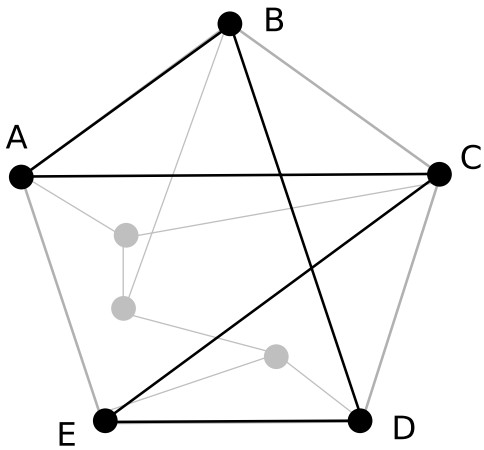
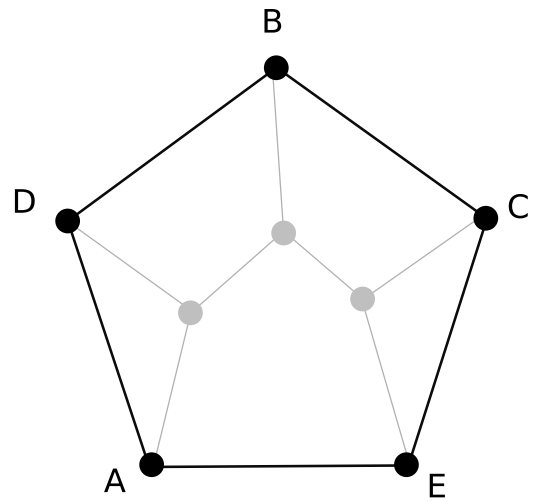
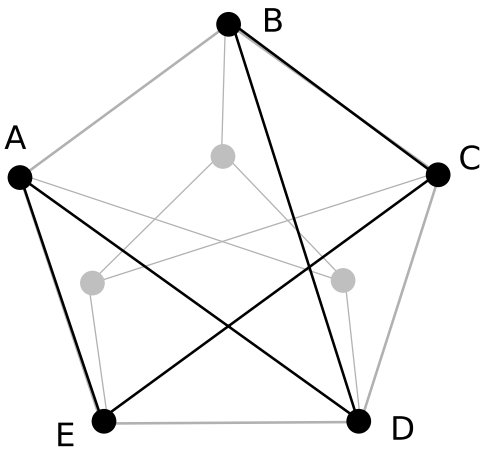
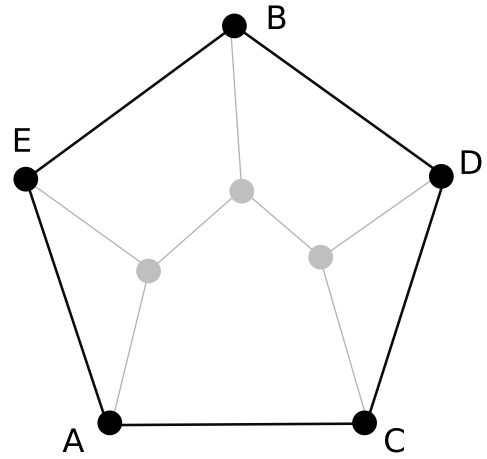
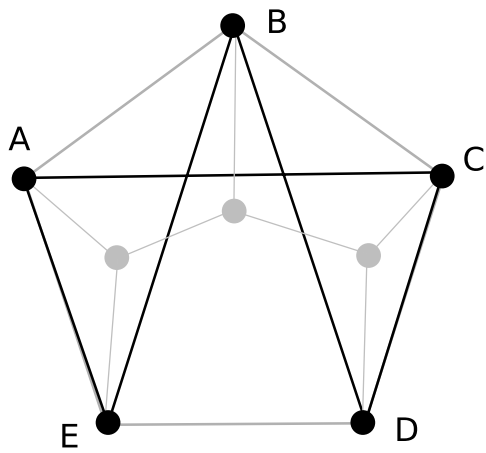


Рис. 9: Примеры бабочек, являющихся планарными обходами для всех возможных бинарных графов с вершиной  $B$ , лежащей не на усах и вложения, показывающие, что бабочки действительно являются планарными обходами

7).

□

В [18] была предложена формула для веса минимального заполнения, которая основывается на понятии планарных мультиобходов. Нам потребуется лишь упрощенная часть этой формулы. Обходом дерева будем называть циклическую последовательность вершин дерева. Длиной обхода назовем полусумму расстояний между соседними относительно обхода вершинами. Обход будем называть планарным, если существует вложение этого дерева в плоскость такое, что можно соединить вершины дерева в порядке обхода жордановой кривой без самопересечений, не пересекающей дерево. Из формулы Еремина веса минимального заполнения непосредственно следует следующее утверждение.

**Утверждение 3.3** ([18]). *Вес минимального параметрического заполнения не меньше максимума длин его планарных обходов.*

**Теорема 3.4.** *Суботношение Штейнера для вершин выпуклого пятиугольника на плоскости не меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .*

*Доказательство.* Для пяти точек существует 15 различных бинарных деревьев, способных быть типами минимального параметрического заполнения, но все они эквивалентны с точностью до перестановки вершин (см. рисунок 8).

В ситуации с выпуклым пятиугольником можно фиксировать вершину, расположенную не на усах. Тогда нужно рассмотреть всего 3 случая. Как видно из рисунка 9, в каждом из этих случаев существует обход, планарный для выбранного графа и являющийся бабочкой для пятиугольника. По лемме 3.2 эти обходы имеют полупериметр не меньше, чем  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  длины кратчайшей сети, следовательно, для каждого типа сети вес минимального параметрического заполнения не меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  длины кратчайшей сети, откуда непосредственно следует утверждение. □

## 3.2 Четырехточечное суботношение Штейнера для трехмерного пространства

**Определение 3.5.** Рассмотрим произвольное конечное множество точек  $M$  метрического пространства и бинарное дерево  $G$ , в котором вершинами степени один будут эти точки. Тогда *параметрическим суботношением Штейнера типа  $G$*  для этого множества будем называть отношение веса минимального параметрического заполнения типа  $G$  к длине минимального дерева с топологией  $G$  (оно будет также локально минимальным), будем обозначать данное отношение  $\text{ssrp}_G(M)$ . Для некоторого семейства  $X$  конечных подмножеств метрического пространства

параметрическим суботношением Штейнера типа  $G$  будем называть величину  $\text{ssrp}_G(X) = \inf_{M \in X} \text{ssrp}_G(M)$ .

Рассмотрим четыре точки  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ . Существует три топологии бинарных деревьев с вершинами степени 1 в этих точках, которые отличаются расположением усов. Выберем одну из них: пусть в бинарном дереве  $G$  вершины  $A$  и  $B$  лежат на одних усах, а  $C$  и  $D$ , соответственно, на других. Семейство упорядоченных четырехточечных подмножеств таких, что для них существует минимальное заполнение топологии  $G$  будем обозначать за  $K_G$ .

Для каждого множества из  $K_G$  его параметрическое суботношение не больше его суботношения Штейнера. Значит,  $\text{ssrp}_G(K_G) \leq \text{ssr}_4(K_G)$ . При этом суботношение Штейнера степени 4 достигает минимума на каком-то четырехточечном множестве, без ограничения общности можно считать, что  $G$  — топология минимального заполнения на этом множестве, отсюда следует, что  $\text{ssrp}_G(K_G) \leq \text{ssr}_4(\mathbb{R}^3)$ .

Семейство  $K_G$  естественным образом разбивается на три: семейство четырехточечных множеств таких, что внутреннее ребро минимальной параметрической сети топологии  $G$  вырождено (такое семейство будем обозначать  $K_G^1$ ), семейство четырехточечных множеств таких, что внутренне ребро минимальной параметрической сети топологии  $G$  невырождено, но имеются другие вырожденные ребра (такое семейство будем обозначать  $K_G^2$ ) и семейство четырехточечных множеств таких, что в минимальной параметрической сети топологии  $G$  нет вырожденных ребер (такое семейство будем обозначать  $K_G^3$ ).

Семейство четырехточечных подмножеств  $\mathbb{R}^3$  таких, что локально минимальная сеть топологии  $G$  невырождена, будем обозначать  $E_G$ , а его замыкание —  $H_G$ . Значит,  $K_G^3 = K_G \cap E_G$ .

Для доказательства следующих лемм нам понадобится утверждение о весе минимального заполнения для четырехточечного множества из [14]:

**Утверждение 3.6.** *Вес минимального параметрического заполнения, затагивающего точки  $a, b, c, d$  так, что точки  $a$  и  $b$  находятся на одних усах ( $c$  и  $d$ , соответственно, тоже) равен*

$$\text{mpf}_G = \frac{1}{2}((d(a, b) + d(c, d)) + \max(d(a, c) + d(b, d), d(a, d) + d(b, c)))$$

**Лемма 3.7.** *Рассмотрим семейство четырехточечных множеств*

$A(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)\}$ , где  $a_i(t)$  — непрерывные кривые. Можно представить вес минимального параметрического заполнения типа  $G$ , как функцию от параметра  $t$ . Если все  $a_i(t)$  представляют собой отрезки, то функция  $\text{mpf}_G(t)$  выпукла.

*Доказательство.* Расстояние между любыми двумя точками при таких условиях выпукло как функция от параметра  $t$ . Сумма и максимум выпуклых функций — это выпуклая функция, следовательно, функция из утверждения 3.6 выпукла.  $\square$

**Лемма 3.8.** *Параметрическое суботношение  $\text{ssrp}_G(H_G) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ . При этом минимум достигается на четырехточечном множестве  $M_G$  таком, что  $M_G \in K_G^3$ .*

*Доказательство.* Пусть инфимум параметрического суботношения для четырехточечных множеств достигается на множестве  $X = \{A, B, C, D\}$ . Без ограничения общности можно считать, что внутреннее ребро минимальной параметрической сети имеет длину 1, длины ребер, инцидентных  $A, B, C, D$  обозначим как  $a, b, c, d$ . Угол между плоскостями усов обозначим за  $\phi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим движение точек  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  такое, что  $A(0) = A, B(0) = B, \dots$ , причем точки движутся вдоль инцидентных ребер минимальной параметрической сети так, что длины ребер, лежащих на одних усах, «меняются местами»:  $a(t) = a t + b(1 - t)$ ,  $b(t) = a(1 - t) + b t$ ,  $c(t) = c t + d(1 - t)$ ,  $d(t) = c(1 - t) + d t$ . При этом длина минимальной параметрической сети не изменяется, а вес минимального заполнения — выпуклая функция от параметра  $t$  по лемме 3.7, симметричная относительно точки  $t = \frac{1}{2}$ , так как  $d(A(t), C(t)) = d(B(1 - t), D(1 - t))$  и т.п. Значит, без ограничения общности можно считать, что  $a = b$ ,  $c = d$ .

Рассмотрев аналогичное движение вида  $b(t) = a(t) = a t + c(1 - t)$ ,  $d(t) = c(t) = c t + a(1 - t)$ , видим, что без ограничения общности можно положить  $a = b = c = d$ .

Получили семейство четырехточечных множеств задающихся двумя параметрами:  $a$  — длина ребер при висячих вершинах и  $\phi$  — угол между плоскостями усов (напомним, что длину внутреннего ребра мы приняли равной единице). Длина минимального параметрического дерева не зависит от параметра  $\phi$ , а вес минимального параметрического заполнения равен

$$\sqrt{3}a + \max\left(\sqrt{(a+1)^2 + \frac{3}{4}a^2(1 \pm \cos \phi)^2} + \frac{3}{4}a^2 \sin^2 \phi\right) =$$

$$\sqrt{3}a + \sqrt{(a+1)^2 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 |\cos \phi|}$$

и достигает минимума при  $\cos \phi = 0$ , то есть,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

Осталась лишь одна неизвестная величина, а именно, длина граничного ребра  $a$ . Длина минимальной параметрической сети и вес минимального параметрического заполнения выражаются как функции от  $a$ :

$\text{mpn}_G(a) = 4a + 1$ , и  $\text{mpf}_G(X) = \sqrt{3}a + \sqrt{\frac{3}{2}a^2 + (a+1)^2}$ . Задача поиска минимального значения отношения при положительных  $a$  решается поиском нуля у производной, при этом в точке минимума значение  $a$  равно  $\frac{2}{7}(1 + \sqrt{15})$ , а значение отношения равно  $\frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ .  $\square$

Из леммы следует, что  $\text{ssrp}_G(K_G^3) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ .

**Лемма 3.9.** *У множества  $M_G$  из предыдущей леммы кратчайшая сеть имеет топологию  $G$ .*

*Доказательство.* Вследствие симметрии множества  $M_G$  кратчайшая сеть может иметь две различные топологии: топология  $G$  с усами  $AB$  и  $CD$  и топология с усами  $AC$  и  $BD$  (третий случай идентичен второму). Минимальная параметрическая сеть и ее длина известны из предыдущего утверждения. Длина минимальной параметрической сети не меньше суммы расстояний между элементами усов. Мы можем его найти, оно равно  $2 * \sqrt{(\sqrt{3}a + 1)^2 + \frac{1}{2}a^2} = 7,101\dots$ . При этом длина минимальной параметрической сети топологии  $G$  равна  $4a + 1 = 6,569\dots < 7,101\dots$ . Таким образом, минимальная параметрическая сеть типа  $G$  является кратчайшей сетью.  $\square$

Следующая лемма непосредственно следует из теоремы косинусов.

**Лемма 3.10.** *Пусть в треугольнике стороны имеют длины  $a, b$  и  $c$ , причем угол напротив стороны длины  $c$  не меньше  $120^\circ$ , тогда  $c \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b)$ .*

**Лемма 3.11.**  $\text{ssrp}_G(K_G^1) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что минимальная параметрическая сеть топологии  $G$  для  $X$  устроена следующим образом: есть вершина  $O$ , от которой идут ребра к вершинам  $A, B, C, D$  длинами  $a, b, c, d$  соответственно. При этом углы между отрезками  $OA$  и  $OB$ , а также  $OC$  и  $OD$  не меньше  $120^\circ$ , иначе сеть не будет локально кратчайшей (утверждение 1.18). Так как  $\text{mpf}_G(X) \geq (AB + CD)$ , то по предыдущей лемме  $\text{mpf}_G(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(OA + OB + OC + OD) = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{mpn}_G(X)$ .  $\square$

Аналогично лемме 3.8 доказывается следующая лемма.

**Лемма 3.12.** *Минимум  $\inf_{X \in K_G^2} \text{ssrp}_G(X)$  не меньше минимума  $\inf_{x \in H_G} \text{ssrp}_G(X)$*

*Доказательство.* Пусть минимум достигается на каком-то четырехточечном множестве  $X \in K^2(G)$ .

Если в минимальной параметрической сети вырождены оба ребра на каких-либо усах, то получается плоская конфигурация, при этом минимальная параметрическая сеть автоматически становится минимальной, а минимальное параметрическое заполнение — минимальным заполнением. При этом мы знаем, что для трех точек на плоскости суботношение Штейнера не меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2} > \inf_{x \in H_G} \text{ssrp}_G(X)$ .

Пусть в минимальной параметрической сети вырождены два ребра на разных усах, без ограничения общности можно считать, что ребра, инцидентные вершинам  $A$  и  $C$  вырождены, а ребра, инцидентные вершинам  $B$  и  $D$  невырождены, углы между ними и вырожденным ребром не меньше 120 градусов. Если вращать ребро, инцидентное вершине  $B$ , сохраняя его длину и угол с внутренним ребром, то меняется только длина  $BD$ , без ограничения общности можем выбрать  $X$  так, что она минимальна, это происходит, когда все четыре точки лежат в одной плоскости. Теперь, если уменьшать угол между ребром, инцидентным  $B$  и внутренним ребром, то длина минимального параметрического заполнения не будет изменяться, а расстояния между точками не будут увеличиваться. Таким образом, можно считать, что в  $X$  углы между ребрами  $B$  и  $D$  и внутренним ребром равны 120 градусам. Тогда  $X \in H(G)$ .

Пусть невырождено ровно одно ребро, инцидентное вершине  $D$ . Пусть вершины  $A$  и  $C$  лежат по одну сторону плоскости, проходящей через внутреннее ребро перпендикулярно плоскости усов. Обозначим  $k(X) = (AB + BC + CD + DA)/\text{mpn}_G(X) \leq \text{ssrp}_G(X) = \text{ssrp}_G(K_G^2)$ . Пусть  $E$  — вершина минимальной параметрической сети типа  $G$  для множества  $X$ . При повороте ребра  $CD$  вокруг внутреннего ребра с сохранением угла между ними из расстояний, входящих в  $k(X)$  изменится только  $BC$ .

Повернем ребро  $CD$  таким образом, что плоскость  $ECD$  станет перпендикулярна плоскости  $ABD$ . Если уменьшать угол между ребрами  $CD$  и  $DE$ , пока он не станет равным 120 градусам, то все расстояния, входящие в  $k(X)$  не увеличатся. В результате этих операций получили набор  $Y = \{A, B, C', D\} \in H_G$ , при этом  $k(Y) \leq k(X) \leq \text{ssrp}_G(K_G^2)$ . Теперь мы можем добавить ребро  $DD'$  ненулевой длины и получить набор  $Z = \{A, B, C', D'\}$ . Пусть длина ребер  $AE, BE, CD$  равна  $a, b, c$  соответственно. Можно рассмотреть семейство наборов  $Z(t) = \{A(t), B(t), C'(t), D'(t)\}$ , отличающихся длинами граничных ребер, равных  $b t + a(1 - t), a t + b(1 - t), c(1 - t), c t$  соответственно. Можно также рассмотреть функцию  $k(t) = k(Z(t))$ . По лемме 3.7  $k(t)$  достигает минимума при  $t = \frac{1}{2}$ , обозначим  $Z(\frac{1}{2})$  за  $F = \{A \gg, B \gg, C \gg, D \gg\} \in H_G$ . Заметим, что  $k(F) = \text{ssrp}_G(F)$ , при этом  $k(F) \leq k(Z) \leq \text{ssrp}_G(K_G^2)$ . Но, так как  $F \in H_G$ , выполняется неравенство  $k(F) \geq \text{ssrp}_G(H_G)$  и утверждение

леммы выполнено. □

Из этих лемм тривиальным образом следует утверждение

**Утверждение 3.13.** *Параметрическое суботношение Штейнера  $\text{ssrp}_G(K_G) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ . Суботношение Штейнера для четырех точек в  $\mathbb{R}^3$  не меньше этого числа.*

**Теорема 3.14.**

$$\text{ssr}_4(\mathbb{R}^3) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

*Доказательство.* Мы знаем, что  $\text{ssrp}_G(K_G) \leq \text{ssr}_4(\mathbb{R}^3)$ . Но инфимум минимального параметрического суботношения достигается на множестве  $M_G$ , для которого  $G$  — одновременно и топология минимального заполнения и топология кратчайшей сети. Следовательно,  $\text{ssrp}_G(K_G) = \text{ssrp}_G(M_G) = \text{ssr}(M_G) \geq \text{ssr}_4(\mathbb{R}^3)$ . □



## 4 Возможные количества кратчайших

Как было показано в 1.11, можно рассматривать несколько иную задачу, нежели возможные количества кратчайших, а именно, возможные количества реберных покрытий некоторого двудольного графа. Это позволит нам перевести задачу в плоскость машинного перебора.

### 4.1 Определения и предварительные результаты

В нижеприведенных леммах и утверждениях все графы будем считать двудольными, если не указано иначе. Все графы будем считать связными, если явным образом не указано иного. Зная, что количество реберных покрытий графа, состоящего из нескольких связных компонент равно произведению количества реберных покрытий для каждой компоненты (доказательство можно посмотреть, например, в [1]), можно будет исключить некоторые составные числа, полученные машинным перебором, из рассмотрения (забегая вперед, заранее скажем, что это не повлияло на результат, и вопрос, существует ли натуральное число такое, что нет связного двудольного графа с таким количеством реберных покрытий, но есть несвязный, открыт).

#### 4.1.1 Характеристики графа с выделенной вершиной с точки зрения реберных покрытий

**Определение 4.1.** *Графом с выделенной вершиной* будем называть произвольную пару  $(G, v)$  из непустого графа  $G = (V, E)$  и его вершины  $v \in V$ . Также такой граф будем обозначать  $(V, E, v)$

Следующие определения могут показаться избыточными, но именно они позволят нам упорядочить перебор.

**Определение 4.2.** Пусть  $\mathcal{G} = (V, E, v)$  — граф с выделенной вершиной. Тогда число реберных покрытий графа  $(V, E)$  будем обозначать  $\alpha(\mathcal{G})$  (заметим, что это значение не зависит от выбранной вершины). Число реберных покрытий графа  $(V \setminus v, E \setminus \{uv \mid u \in V\})$  будем обозначать  $\beta(\mathcal{G})$ , а их сумму —  $s(\mathcal{G}) = \alpha(\mathcal{G}) + \beta(\mathcal{G})$ .

**Определение 4.3.** *Реберное предпокрытие* графа  $G$  с выделенной вершиной  $v$  — это такое подмножество  $E'$  его ребер, что любая вершина  $G$ , кроме, *возможно*,  $v$ , инцидентна хотя бы одному ребру из  $E'$ .

Заметим, что тогда  $s(G)$  — количество реберных предпокрытий графа  $G$ .

Пусть  $\mathcal{G} = (G, v)$  — граф с выделенной вершиной  $v$ , а  $X$  — некоторое множество вершин, тогда будем обозначать

$$f(\mathcal{G}, X) = \begin{cases} s(\mathcal{G}), & \text{если } v \in X; \\ \alpha(\mathcal{G}), & \text{если } v \notin X. \end{cases}$$

**Утверждение 4.4** (О склейке двух графов с выделенной вершиной). Пусть  $G_1 = (V_1, E_1, v)$  и  $G_2 = (V_2, E_2, v)$  — два графа с общей выделенной вершиной, причем  $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ . Тогда можно рассмотреть граф с выделенной вершиной  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, v)$  и для него будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1) \beta(G) &= \beta(G_1) \times \beta(G_2) \\ 2) s(G) &= s(G_1) \times s(G_2) \end{aligned}$$

*Доказательство.* 1) Граф  $G$  без вершины  $v$  и прилегающих к ней ребер распадается на два несвязных графа, получающихся из  $G_1$  и  $G_2$  соответственно с помощью удаления вершины  $v$  и прилегающих к ней ребер, тогда количество их реберных покрытий равно  $\beta(G_1)$  и  $\beta(G_2)$  соответственно, следовательно, количество реберных покрытий искомого графа будет равно  $\beta(G_1) \times \beta(G_2)$ .

2) Если рассмотреть произвольное подмножество ребер графа  $G$ , покрывающего все его вершины, кроме, возможно,  $v$ , то его ограничение на  $G_1$  и  $G_2$  будет снова покрывать все вершины, кроме, возможно,  $v$ . Следовательно,  $s(G) \leq s(G_1) \times s(G_2)$ . Если рассмотреть произвольные подмножества ребер графов  $G_1$  и  $G_2$ , каждое из которых покрывает все вершины соответствующего графа, кроме, возможно,  $v$ , то их объединение будет покрывать все вершины графа  $G$ , кроме, возможно,  $v$ . Следовательно,  $s(G) \geq s(G_1) \times s(G_2)$ .  $\square$

Подграф графа  $G$ , порожденный подмножеством  $V$  множества его вершин, обозначим как  $G|_V$ .

**Утверждение 4.5** (О склейке графов с выделенной вершиной с отдельным графом с выделенной вершиной). Пусть  $\mathcal{G}_0 = (G_0, v)$ , причем  $G_0$  — связный граф,  $V_0 = \{v, v_1, \dots, v_n\}$  — множество его вершин, а  $E_0$  — множество его ребер. Пусть также для  $i = 1, \dots, n$  есть графы  $\mathcal{G}_i = (G_i, v_i)$ , причем  $G_i \cap G_j = \emptyset$  при  $i \neq j \neq 0$ , а  $G_i \cap G_0 = \{v_i\}$ . Тогда для графа  $\mathcal{G} = (\bigcup_{i=0}^n G_i, v)$  выполнены равенства:

$$\begin{aligned} 1) \alpha(\mathcal{G}) &= \sum_{V' \subset V_0 | v \in V'} \alpha(G_0|_{V'}) \prod_{i=1}^n f(\mathcal{G}_i, V'), \\ 2) \beta(\mathcal{G}) &= \sum_{V' \subset V_0 | v \notin V'} \alpha(G_0|_{V'}) \prod_{i=1}^n f(\mathcal{G}_i, V'). \end{aligned}$$

*Доказательство.* 1) Фиксируем  $V' \subset V_0$ . Пусть  $E'$  — реберное покрытие графа  $G = \bigcup_{i=0}^n G_i$  и  $E'_i = E' \cap G_i$  таковы, что для любой вершины  $u \in V_0$

верно:  $u \in V'$  тогда и только тогда, когда в  $E'_0$  есть ребро, инцидентное  $u$ . Очевидно,  $v \in V'$ .

Найдем количество покрытий графа  $G$  для фиксированного  $V'$ . Так как  $G_i$  и  $G_0$  пересекаются друг с другом по одной вершине, а  $G_i$  и  $G_j$  не пересекаются, то все  $E'_i, i \neq 0$  — предпокрытия соответствующих графов  $G_i$ . Тогда каждое реберное покрытие  $E'$  однозначно задает и задается набором предпокрытий  $E'_i$  и множеством  $E'_0$ .

Если  $v_i \notin V'$ , то  $E'_i$  должно быть покрытием, при этом любое покрытие подходит. Всего их  $\alpha(G_i)$ . Если же  $v_i \in V'$ , то  $E'_i$  может быть любым предпокрытием графа  $G_i$ , всего таких покрытий  $s(G_i)$ . Таким образом, существует  $f(G_i, V')$  возможных значений  $E'_i$ .

Множество  $E'_0$  может быть любым набором ребер таким, что для любой вершины из  $V'$  есть ребро в  $E'_0$ , инцидентное ей, а для любой вершины не из  $V'$  таких ребер нет. Таким образом, каждый подходящий набор ребер  $E'_0$  — покрытие графа  $G_0|_{V'}$ , таких покрытий  $\alpha(G_0|_{V'})$ . Значит, всего покрытий, для которых выполняется условие на  $V'$  равно  $\alpha(G_0|_{V'}) \prod_{i=1}^n f(G_i, V')$ . Просуммировав по  $V'$ , получим искомое равенство.

2) Доказательство для второго равенства полностью аналогично доказательству для первого, за исключением того, что  $v$  не будет принадлежать  $V'$ . □

#### 4.1.2 Атомарные графы

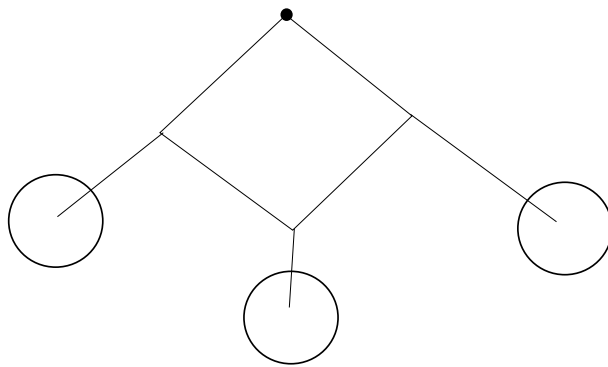


Рис. 10: Склейка нескольких графов с выделенной вершиной с выбранным графом

Два приведенных выше утверждения образуют основную часть процесса перебора. Для того, чтобы узнать  $\alpha$  и  $\beta$  для графа с выделенной вершиной, полученного с помощью склейки двух графов по выделенной вершине, достаточно знать  $\alpha$  и  $\beta$  его частей. Эти величины мы и будем хранить при переборе.

К сожалению, для склейки графов способом, описанным в 4.5, нужна дополнительная информация о графе  $G_0$ . Решение заключается в том, чтобы в качестве графа

$G_0$  брать графы из некоторого фиксированного небольшого набора графов. В этом параграфе мы опишем такие графы, которые мы будем называть *атомарными*, а в следующем покажем, что этих графов достаточно для полного перебора.

**Определение 4.6.** Рассмотрим граф  $G = (V, E)$  и множество графов  $G_1, \dots, G_n, G_i = (V_i, E_i)$ . Будем называть это множество *разбиением* графа  $G$ , если  $V = \bigcup V_i, E = \bigcup E_i$  (далее будем обозначать такое отношение как  $G = \bigcup G_i$ ) и выполняются следующие условия:

1) графы  $G_i$  не имеют общих ребер и любая пара графов  $G_i, G_j$  имеет не более одной общей вершины.

2) Если рассмотреть граф  $H$  с вершинами, являющимися графами  $G_1, \dots, G_n$  и ребром между двумя вершинами, если соответствующие графы имеют общую вершину, то граф  $H$  будет деревом, то есть, связным и не имеет циклов и петель. Граф  $H$  назовем *графом разбиения*.

**Определение 4.7.** Граф будем называть *атомарным*, если не существует его разбиения на два или более графов.

Заметим, что если у графа есть разбиение на  $n > 2$  графов, то с помощью объединения составляющих разбиение графов в два графа (например, граф, являющийся листом графа разбиения, и объединение всех остальных графов) можно получить разбиение исходного графа на два.

Для того, чтобы найти графы, являющиеся атомарными, понадобится ряд лемм.

**Лемма 4.8.** Если атомарный граф имеет более одного ребра, то он не имеет вершин степени 1.

**Лемма 4.9.** Пусть  $G$  — связный граф и его вершины  $u, v$  не соединены ребром. Тогда для графа  $G'$ , получающегося из графа  $G$  добавлением ребра  $(uv)$ , верно неравенство  $\alpha(G') \geq 2 \alpha(G)$ .

*Доказательство.* В самом деле, на каждое реберное покрытие  $E$  графа  $G$  можно привести два уникальных покрытия графа  $G'$ :  $E$  и  $E \cup \{(uv)\}$ .  $\square$

**Лемма 4.10.** Пусть  $G$  — связный граф,  $a, b$  — вершины из графа  $G$ . Тогда для графа  $G'$ , получающегося из графа  $G$  добавлением вершины  $v$  и ребер  $(av)$  и  $(bv)$  верно неравенство  $\alpha(G') \geq 3 \alpha(G)$ .

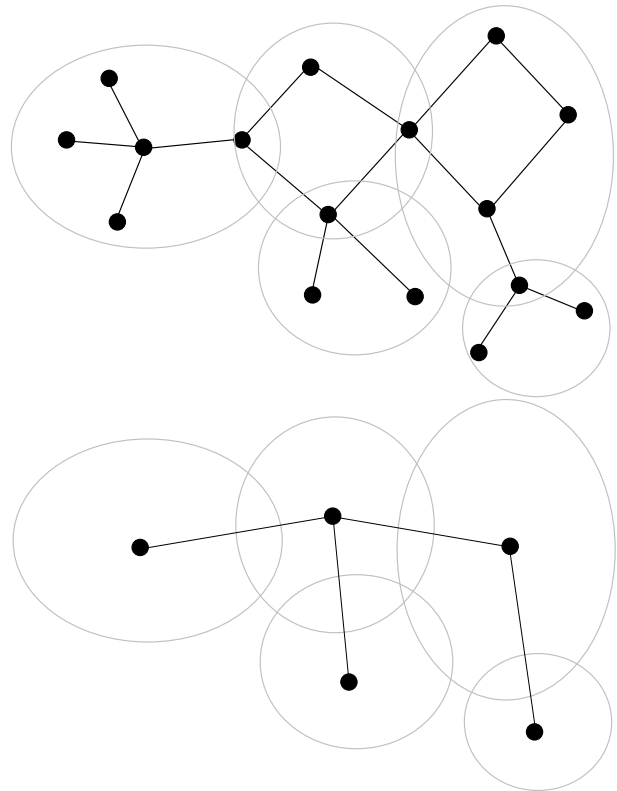


Рис. 11: Пример разбиения графа (сверху) и графа этого разбиения (снизу)

*Доказательство.* В самом деле, на каждое реберное покрытие  $E$  графа  $G$  можно привести три уникальных покрытия графа  $G'$ :  $E \cup \{(av)\}$ ,  $E \cup \{(bv)\}$  и  $E \cup \{(av), (bv)\}$ .  $\square$

**Лемма 4.11.** Пусть  $G$  — связный граф,  $k \geq 2$  — натуральное число,  $v_0, v_{k+1}$  — вершины из графа  $G$ . Тогда для графа  $G'$ , получающегося из графа  $G$  добавлением вершин  $v_1, \dots, v_k$  и ребер  $(v_i v_{i+1})$  верно неравенство  $\alpha(G') \geq 5 \alpha(G)$ .

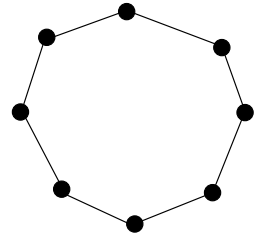
*Доказательство.* Будем обозначать множество ребер  $\{(v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$  как  $E_k$ . Заметим, что  $E_k$  не пусто, так как  $k \geq 2$ .

На каждое реберное покрытие  $E$  графа  $G$  можно привести пять уникальных покрытий графа  $G'$ :  $E \cup E_k$ ,  $E \cup E_k \cup \{(v_0 v_1)\}$ ,  $E \cup E_k \cup \{(v_k v_{k+1})\}$ ,  $E \cup E_k \cup \{(v_0 v_1), (v_k v_{k+1})\}$  и  $E \cup (E_k \setminus \{(v_1 v_2)\}) \cup \{(v_0 v_1), (v_k v_{k+1})\}$ .  $\square$

Эти леммы позволяют нам делать утверждения следующего рода: пусть нам известен подграф двудольного графа, и число реберных покрытий такого графа больше  $\frac{x}{2}$ , тогда если граф имеет не более  $x$  реберных покрытий, то остальная часть графа состоит из висячих вершин и инцидентных им ребер.

Для доказательства следующего утверждения нам понадобится теорема из [1]:

**Теорема 4.12.** Количество реберных покрытий  $n$ -угольника при четном  $n$  равно  $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ , где  $F_i$  —  $i$ -е число Фибоначчи. Такие числа называются числами Лукаса.



В общем же случае количество реберных покрытий можно найти, например, перебрав все подмножества множества ребер и выбрав из них те, которые будут являться покрытиями.

**Утверждение 4.13.** Существует ровно семь различных двудольных атомарных графов с числом реберных покрытий не больше 67.

*Доказательство.* Граф с одним ребром, очевидно, атомарный. По предыдущим леммам любой другой атомарный граф не имеет вершин степени 1. Так как граф двудольный, то все его циклы имеют четную длину. Пусть  $X$  — цикл максимальной длины в графе, а  $\ell$  — его длина.

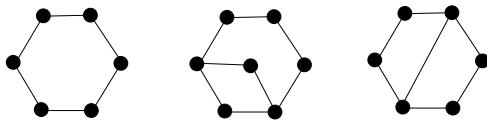
Пусть  $\ell \geq 10$ , тогда  $\alpha(X) \geq 123 > 67$ , значит,  $\ell < 10$ .

Пусть  $\ell = 8$ , тогда  $\alpha(X) = 47 > \frac{67}{2}$ , значит, по вышеприведенным леммам, в графе не может быть дополнительных ребер и вершин.

Пусть  $\ell = 6$ , тогда  $\alpha(X) = 18 > \frac{67}{5}$ , значит, по вышеприведенным леммам, в графе может быть не более одной дополнительной вершины степени два или одного дополнительного ребра. В обоих случаях дополнительные элементы можно расположить единственным образом, так как граф двудольный. Также граф может состоять из одного цикла.

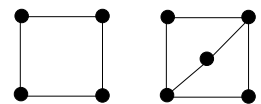
Пусть  $\ell = 4$ , тогда  $\alpha(X) = 7$ . При этом длина любого дополнительного к нему пути не больше двух, иначе существует цикл большей длины. Если такого пути нет, то это просто цикл. Если такой путь есть, то, если он один, то конфигурация графа единственна и число реберных покрытий такого графа равно 25, по предыдущим леммам еще одного дополнительного пути в графе быть не может.  $\square$

Перед доказательством этой леммы алгоритм, о котором речь пойдет ниже, был запущен на небольшом числе атомарных графов и были выявлены несколько возможных чисел, для которых не существует двудольного графа с таким количеством реберных покрытий. Из них число 67 было выбрано, как дающее максимальный набор атомарных графов, позволяющий провести машинный перебор за разумное время. К сожалению, сложность поиска всех атомарных графов с числом реберных покрытий меньше некоторого числа  $n$  такими методами очень быстро растет с увеличением  $n$ , как и сложность перебора, о котором пойдет речь в дальнейшем. Так, уже для следующего подозрительного числа нужно принять к рассмотрению еще один атомарный граф (полный двудольный граф с долями из четырех и двух вершин), при этом нужно рассмотреть два случая различных выделенных вершин.



## 4.2 Основные результаты

Теперь мы готовы к доказательству утверждения, на котором базируется алгоритм:



**Утверждение 4.14.** *Любой граф с выделенной вершиной можно получить из атомарных графов с выделенной вершиной с помощью двух операций:*

- 1) склейки двух графов по выделенной вершине;
- 2) склейки атомарного графа с выделенной вершиной с несколькими графами с выделенной вершиной, при этом другие графы с выделенной вершиной склеиваются с различными вершинами атомарного графа (кроме выделенной). Некоторые вершины атомарного графа могут оставаться свободными.

*Доказательство.* Будем доказывать утверждение по индукции по числу ребер графа. База индукции очевидна, граф, состоящий из двух вершин и ребра между ними атомарный.

Пусть мы можем получить вышеописанным способом любой граф с выделенной вершиной и меньше, чем с  $n$  ребрами. Рассмотрим произвольный граф с выделенной вершиной и  $n$  ребрами. Если граф атомарный, то возьмем его. Пусть граф не является атомарным, рассмотрим его произвольное разбиение. Возможны два случая:

1) выделенная вершина принадлежит двум графам (она не может принадлежать трем, так как тогда граф разбиения имел бы цикл). Тогда эта вершина разбивает граф разбиения на две или более связных компоненты. Можно объединить их в две группы, пересекающиеся только по выделенной вершине. Таким образом, мы получили два графа с менее, чем  $n$  ребрами, из которых склейкой по выделенной вершине получается исходный граф. Значит, мы можем склеить выбранный граф из атомарных описанными выше операциями.

2) выделенная вершина принадлежит одному атомарному графу. Тогда этот граф разбивает граф разбиения на две или более связных компоненты, каждая из которых прикрепляется к атомарному графу и имеет меньше, чем  $n$  ребер. Значит, мы можем склеить выбранный граф из атомарных описанными выше операциями.  $\square$

Следующее утверждение позволит нам существенно ограничить перебор:

**Утверждение 4.15.** Пусть графы  $G_1$  и  $G_2$  не имеют общих ребер, но, возможно, имеют общие вершины. Тогда  $\alpha(G_1 \cup G_2) \geq \alpha(G_1) \times \alpha(G_2)$ .

*Доказательство.* В объединении двух любых реберных покрытий графов  $G_1$  и  $G_2$  соответственно, для любой вершины найдется ребро, инцидентное ей, следовательно, такое объединение является реберным покрытием для объединения графов.  $\square$

Таким образом, получаем следующий алгоритм. Пусть мы хотим найти графы, у которых число реберных покрытий не выше некоторого заранее заданного значения  $N$ . Будем хранить множество, состоящее из пар  $(\alpha(G), \beta(G))$  (можно хранить также  $s(G)$ , но это не является необходимым). Вначале в множестве будет лишь одна пара  $(0, 1)$ , соответствующая графу, состоящему из одной вершины. Также будем хранить все атомарные графы с выделенной вершиной.

Проведем несколько итераций следующих операций (критерий остановки зависит от поставленной задачи, определим его позднее):

1) рассмотрим все пары пар  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$  таких, что  $\alpha_1 \alpha_2 \leq N$ , для них рассмотрим склейку соответствующих графов по выделенной вершине и добавим новую пару чисел, формула для вычисления которой была найдена в утверждении 4.4 в множество (если такой пары еще нет и  $\alpha \leq N$ ).

2) рассмотрим все атомарные графы с выделенной вершиной. Для каждого такого графа рассмотрим все наборы пар чисел из множества такие, что произведение количества их реберных покрытий, умноженное на количество покрытий атомарного графа не больше  $N$ . Для каждого такого набора чисел рассмотрим склейку соответствующих графов с выделенной вершиной с атомарным, полученные с помощью леммы 4.5 пары чисел добавим в множество (если они еще не там). При этом, хотя нам и нужна информация о внутренней структуре атомарного графа, необходимая информация о графах, которые мы к нему приклеиваем, сводится к имеющейся у нас паре чисел  $(\alpha, \beta)$ .

Для доказательства того, что граф с заданным количеством разбиений существует, достаточно того, что через несколько итераций алгоритма в множестве пар будет пара с заданным значением  $\alpha$ . Для доказательства того, что из данных атомарных графов нельзя построить граф с заданным значением  $\alpha$  нужно повторять операции 1 и 2, описанные в алгоритме, до тех пор, пока они добавляют новые элементы ко множеству пар. После некоторой итерации операции 1 и 2 перестанут добавлять новые пары, так как количество возможных пар конечно. Тогда если среди элементов множества пар нет пары с заданным  $\alpha$ , то связный граф с таким количеством реберных покрытий нельзя построить из выбранных атомарных графов.

Если в качестве выбранных атомарных графов рассматривались все двудольные атомарные графы с числом реберных покрытий, не больших заданного числа, то связного двудольного графа с заданным числом реберных покрытий не существует. Если же не существует разложения выбранного числа на множители, для каждого из которых такой связный граф существует, то граф с таким количеством реберных покрытий нельзя составить из нескольких связных компонент.

Алгоритм был реализован на языках C#, C++, Java и Q независимо и дал одинаковые результаты для реализаций. В приложении А приведен полный текст программы на языке Java. При помощи данной программы был получен следующий результат:

**Теорема 4.16.** *Для любого натурального числа от 1 до 1000 включительно кроме, возможно, 19, 37, 41, 59, 67, 82, 97, 149, 197, 223, 257, 291, 379 существует двудольный граф с таким количеством реберных покрытий. Двудольный граф не может иметь 19, 37, 41, 59 или 67 реберных покрытий.*

Используя этот же алгоритм, но другой набор атомарных графов, а именно, граф, состоящий из одного ребра, можно получить все возможные количества реберных покрытий деревьев. Последовательность чисел, для которых нет дерева с таким количеством реберных покрытий можно описать в следующем утверждении.



**Теорема 4.17.** *У дерева не может быть*

19 37 41 57 59 67 79 82 97 111 131 149 177 179 197 201 205 223 237 251 257  
269 271 277 283 291 311 331 379 397 443 449 457 461 469 553 577 587 591 603  
617 649 677 679 711 733 737 758 771 797 811 829 839 849 877 881 911 985 991

*или*

*993 реберных покрытия. Для любого натурального числа  $n \leq 1000$  не из этого списка существует дерево с таким количеством реберных покрытий.*

**Задача 4.18.** *Существует ли натуральное число  $n$  такое, что не существует дерева с таким количеством реберных покрытий, но существует лес?*

## 5 Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты работы и возможные дальнейшие пути исследования.

В главе 2 были найдены отношения Штейнера и отношение Штейнера-Громова для пространства компактов в евклидовом пространстве. Также были найдены суботношения Штейнера степеней 3 и 4. Возможными путями для продолжения исследований в том же направлении видятся следующие задачи:

- Поиск отношений Штейнера и Штейнера-Громова для пространств компактов в банаховых пространствах
- Поиск суботношения Штейнера и суботношений Штейнера более высоких степеней с помощью описанной операции увеличения размерности, проверка гипотезы о минимальности этих суботношений

В главе 3 были найдены ограничения на суботношение Штейнера для выпуклых пятиточечных множеств на плоскости, а так же для четырехточечных множеств в пространстве, была показана неверность гипотезы о том, что суботношение Штейнера для плоскости равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Идеи, использованные в этой главе можно попытаться перенести на случай большего количества точек и для проверки гипотезы о том, что суботношение Штейнера не меньше  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  для всех конечных выпуклых множеств.

В главе 4 была разработана теория, позволяющая машинным перебором доказать невозможность существования двудольного графа, имеющего 19, 37, 41, 59 или 67 реберных покрытий. Дальнейшие исследования могут включать в себя следующие задачи

- Поиск продолжения данной последовательности
- Существует ли натуральное число  $n$  такое, что не существует дерева с таким количеством реберных покрытий, но существует лес?
- Существует ли натуральное число  $n$  такое, что не существует двудольного планарного графа, имеющего такое количество реберных покрытий, но существует двудольный непланарный граф с таким количеством покрытий?
- Существует ли составное натуральное число  $n$  такое, что не существует двудольного планарного графа, имеющего такое количество реберных покрытий?

## Список публикаций по теме диссертации

- [Ssr5] З. Н. Овсянников *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырех точек в пространстве*, *Фундамент. и прикл. матем.*, 18 (2013), стр. 167–179
- [GHSub] З. Н. Овсянников *Отношения Штейнера, Штейнера–Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа*, *Фундаментальная и прикладная математика*, 18(2013), выпуск 2, стр. 157–165
- [ShPaths] З.Н.Овсянников, *Количество реберных покрытий двудольных графов или кратчайших с фиксированными концами в пространстве компактов в  $\mathbb{R}^n$* , *Доклады Академии Наук*, 466(2016), выпуск 4, стр. 402–405

## Список литературы

- [1] C. C. Blackburn, K. Lund, S. Schlicker, P. Sigmon, A. Zupan *A Missing Prime Configuration in the Hausdorff Metric Geometry*, *J. Geom*, 92 (2009), pp 28-59
- [2] K. Lund, P. Sigmon, and S. Schlicker, *Fibonacci sequences in the space of compact sets*, *Involve* 1 (2008), pp 197–215.
- [3] F. Memoli, G. Sapiro *Comparing Point Clouds*, Eurographics Symposium on Geometry Processing (2004)
- [4] K. Honigs, *Missing edge coverings of bipartite graphs and the geometry of the Hausdorff metric*, *Journal of Geometry*, 2013.
- [5] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, *Steiner Minimal Trees*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16, pp 1–29, 1968
- [6] H. O. Pollak, *Some remarks on the Steiner problem*, *J. Combin. Theory Ser. A* 24 (1978), pp 278–295
- [7] D. Z. Du, F. K. Hwang, E. Y. Yao *The steiner ratio conjecture is true for five points*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 38 (1985), pp 230-240
- [8] J. H. Rubinstein, D. A. Thomas *A variational approach to the Steiner network problem*, *Annals of Operations Research* 33 (1991), pp 481-499
- [9] P. O. De Wet *Geometric Steiner minimal trees*, Ph.D. thesis, Univ. of South Africa, Pretoria 2008
- [10] D. Kirszenblat *The Steiner ratio conjecture for eight points*, M. Thesis, Uni. Melbourne, 2014
- [11] Е. И. Степанова *Суботношение Штейнера евклидовой плоскости*, дипломная работа, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2012

- [12] А. С. Пахомова *Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера-Громова*, Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. - 2014. - № 1. - С. 17-25
- [13] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin *The Steiner Ratio Gilbert–Pollak Conjecture Is Still Open*, Algorithmica, 62 (2012), issue 1, pp 630-632
- [14] А. О. Иванов, А. А. Тужилин *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, том 203, номер 5, стр. 65–118
- [15] П. А. Бородин *Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве*, Матем. заметки, 2010, том 87, выпуск 4, стр. 514–518
- [16] J. Henrikson *Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric* MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 1999
- [17] Б. Б. Беднов, П. А. Бородин *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения*, Матем. сб., 205 (2014), выпуск 3, стр. 3–20
- [18] А. Ю. Еремин *Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства*, Матем. сб., 204 (2013). выпуск 9, стр. 51–72
- [19] О. В. Рублева *Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, 2, стр. 8–11
- [20] Garey M. R., Graham R. L. and Johnson D. S. *Some NP-complete geometric problems*, Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., 1976, pp. 10–22
- [21] Melzak Z. A. *On the problem of Steiner*, Canad. Math. Bull., 1960, vol. 4, pp. 143–148.
- [22] Hwang F. K. *A linear time algorithm for full Steiner trees*, Oper. Res. Letter, 1986, vol. 5, pp. 235–237
- [23] Shamos M. I. *Computational Geometry*, Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978
- [24] D. Z. Du, W. D. Smith *Disproofs of Generalized Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner Ratio in Three or More Dimensions*, J. of Comb. Th. Series A, 74 (1996), pp. 115–130
- [25] F. K. Hwang *On Steiner minimal trees with rectilinear distance*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 30 (1976), pp 104–114

## А Исходный код программы, реализующей поиск возможного количества реберных покрытий двудольного графа

```
import com.google.common.cache.*;
import com.google.common.collect.ImmutableList;
import com.google.common.collect.Lists;
import com.google.common.collect.Sets;

import java.util.ArrayList;
import java.util.Arrays;
import java.util.List;
import java.util.Set;
import java.util.concurrent.ExecutionException;
import java.util.concurrent.TimeUnit;

public class Proofer {
    // 0 means no edge, 1 means maybe an edge
    // 2 means an edge
    private static int numberOfEdgeCoverings(
        int[][] bipartiteAdjacencyMatrix) {
        if (bipartiteAdjacencyMatrix.length == 0) {
            return 1;
        }
        for (int[] row : bipartiteAdjacencyMatrix) {
            boolean hasEdge = false;
            for (int edge : row) {
                if (edge > 0) {
                    hasEdge = true;
                    break;
                }
            }
            if (!hasEdge) {
                return 0;
            }
        }
        for (int i = 0; i <
            bipartiteAdjacencyMatrix[0].length; i++) {
            boolean hasEdge = false;
            for (int[] row : bipartiteAdjacencyMatrix) {
                if (row[i] > 0) {
                    hasEdge = true;
                    break;
                }
            }
            if (!hasEdge) {
                return 0;
            }
        }
    }
}
```

```

int row = 0, column = 0;
boolean hasVariableEdge = false;
for (int i = 0; i <
    bipartiteAdjacencyMatrix.length; i++) {
    for (int j = 0;
        j < bipartiteAdjacencyMatrix[i].length;
        j++) {
        if (bipartiteAdjacencyMatrix[i][j] == 1) {
            row = i;
            column = j;
            hasVariableEdge = true;
            break;
        }
    }
    if (hasVariableEdge) break;
}
if (!hasVariableEdge) {
    return 1;
}

bipartiteAdjacencyMatrix[row][column] = 2;
int coverings =
    numberOfEdgeCoverings(bipartiteAdjacencyMatrix);
bipartiteAdjacencyMatrix[row][column] = 0;
coverings +=
    numberOfEdgeCoverings(bipartiteAdjacencyMatrix);
bipartiteAdjacencyMatrix[row][column] = 1;
return coverings;
}

private static int[][][] getSubset(int[][] matrix,
    Boolean[] includeVertex) {
    int rows = 0, cols = 0;
    for (int i = 0; i < includeVertex.length; i++) {
        if (includeVertex[i]) {
            if (i < matrix.length) {
                rows++;
            } else {
                cols++;
            }
        }
    }
    if ((rows == 0) ^ (cols == 0)) {
        return new int[1][1]; // effectively same
    }
    int[][][] result = new int[rows][cols];
    int row = 0;
    for (int i = 0; i < matrix.length; i++) {
        int col = 0;
        for (int j = 0; j < matrix[i].length; j++) {
            if (includeVertex[i] &&
                includeVertex[matrix.length + j]) {

```

```

        result[row][col++] = matrix[i][j];
    }
}
if (includeVertex[i]) {
    row++;
}
}
return result;
}

private static class AtomicGraph {
    private final int[][] bipartiteAdjacencyMatrix;
    private LoadingCache<List<Boolean>, Integer> cache
        = CacheBuilder.newBuilder().maximumSize(40)
            .expireAfterAccess(100, TimeUnit.MINUTES)
            .build(
                new CacheLoader<List<Boolean>, Integer>() {
                    @Override
                    public Integer load(List<Boolean> key)
                        throws Exception {
                        return numberOfEdgeCoverings(
                            getSubset(
                                bipartiteAdjacencyMatrix,
                                key.toArray(new Boolean[key.size()]));
                            });
                }
            );

    public AtomicGraph(
        int[][] bipartiteAdjacencyMatrix) {
        this.bipartiteAdjacencyMatrix =
            bipartiteAdjacencyMatrix;
    }

    public int getNumberOfVertices() {
        return bipartiteAdjacencyMatrix.length +
            bipartiteAdjacencyMatrix[0].length;
    }

    public int getAlpha() throws ExecutionException {
        Boolean[] a = new Boolean[getNumberOfVertices()];
        Arrays.fill(a, true);
        return cache.get(Lists.newArrayList(a));
    }

    public AlphaBeta glue(List<AlphaBeta> graphs)
        throws ExecutionException {
        List<Boolean> array =
            new ArrayList<>(getNumberOfVertices());
        for (int i = 0; i < getNumberOfVertices(); i++) {
            array.add(false);
        }
        array.set(0, false);
    }
}

```

```

        int beta = recursion(array, graphs, 1);
        array.set(0, true);
        int alpha = recursion(array, graphs, 1);
        return new AlphaBeta(alpha, beta);
    }

    private int recursion(List<Boolean> array,
                          List<AlphaBeta> graphs,
                          int index)
        throws ExecutionException {
        if (index == graphs.size() + 1) {
            return cache.get(array);
        }
        array.set(index, true);
        int result = recursion(array, graphs, index + 1)
            * (graphs.get(index - 1).alpha
              + graphs.get(index - 1).beta);
        array.set(index, false);
        return result
            + recursion(array, graphs, index + 1)
            * graphs.get(index - 1).alpha;
    }
}

private static class AlphaBeta {
    public final int alpha;
    public final int beta;

    public AlphaBeta(int alpha, int beta) {
        this.alpha = alpha;
        this.beta = beta;
    }

    @Override
    public boolean equals(Object o) {
        if (this == o) return true;
        if (o == null || getClass() != o.getClass())
            return false;

        AlphaBeta alphaBeta = (AlphaBeta) o;
        return alpha == alphaBeta.alpha
            && beta == alphaBeta.beta;
    }

    @Override
    public int hashCode() {
        return 1001 * alpha + beta;
    }

    @Override
    public String toString() {
        return "AlphaBeta{" +

```



```

        "alpha=" + alpha +
        ", beta=" + beta +
        '}' ;
    }
}

private static List<List<AlphaBeta>> getAvailableSets(
    int maxAlpha, int numpoints, Set<AlphaBeta> set) {
    List<List<AlphaBeta>> result = Lists.newArrayList();
    List<AlphaBeta> fitting = Lists.newArrayList();
    for (AlphaBeta value : set) {
        if (value.alpha <= maxAlpha) {
            fitting.add(value);
        }
    }
    if (numpoints == 1) {
        for (AlphaBeta value : fitting) {
            result.add(ImmutableList.of(value));
        }
        return result;
    }
    for (AlphaBeta value : fitting) {
        int newMaxAlpha = value.alpha == 0 ?
            maxAlpha :
            Math.min(maxAlpha / value.alpha,
                maxAlpha - value.alpha);
        List<List<AlphaBeta>> other =
            getAvailableSets(newMaxAlpha,
                numpoints - 1, set);
        for (List<AlphaBeta> list : other) {
            result.add(ImmutableList.<AlphaBeta>builder()
                .add(value).addAll(list).build());
        }
    }
    return result;
}

private static Set<AlphaBeta> update(
    Set<AtomicGraph> atomicGraphs,
    Set<AlphaBeta> alphaBetas,
    int maxValue) throws ExecutionException {
    //glue two graphs
    Set<AlphaBeta> newGraphs = Sets.newHashSet(alphaBetas);
    for (AlphaBeta left : alphaBetas) {
        if (left.beta == 0) continue;
        for (AlphaBeta right : alphaBetas) {
            if (right.beta == 0) continue;
            int beta = left.beta * right.beta;
            int alpha = (left.alpha + left.beta)
                * (right.alpha + right.beta) - beta;
            if (alpha <= maxValue) {
                newGraphs.add(new AlphaBeta(alpha, beta));
            }
        }
    }
}

```

```

        }
    }
}
//glue some graphs to atomic graph
for (AtomicGraph graph : atomicGraphs) {
    int maxAlpha = Math.min(
        maxValue / graph.getAlpha(),
        maxValue - graph.getAlpha());
    for (List<AlphaBeta> list : getAvailableSets(
        maxAlpha,
        graph.getNumberOfVertices() - 1,
        alphaBetas)) {
        AlphaBeta result = graph.glue(list);
        if (result.alpha < maxValue) {
            newGraphs.add(result);
        }
    }
}

return newGraphs;
}

private static Set<Integer> prove(
    Set<AtomicGraph> graphs, int maxAlpha,
    int maxSteps) throws ExecutionException {
    Set<Integer> possibilities = Sets.newTreeSet();
    for (int i = 1; i < maxAlpha; i++) {
        possibilities.add(i);
    }
    Set<AlphaBeta> set = Sets.newHashSet(
        new AlphaBeta(0, 1));
    Set<AlphaBeta> newSet = set;
    int steps = 0;
    do {
        set = newSet;
        newSet = update(graphs, set, maxAlpha);
        steps++;
    }
    while ((newSet.size() != set.size())
        && (maxSteps < 0 || steps < maxSteps));
    for (AlphaBeta value : set) {
        possibilities.remove(value.alpha);
    }
    return possibilities;
}

public static void main(String[] args) throws ExecutionException {
    Set<AtomicGraph> ag = Sets.newHashSet();
    ag.add(new AtomicGraph(new int[][]{new int[] {1}}));
    ag.add(new AtomicGraph(new int[][]{new int[] {1, 1},
        new int[] {1, 1}}));
}

```

```

ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 1, 1},
    new int [] {1, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 1},
    new int [] {1, 1}, new int [] {1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 0, 1},
    new int [] {1, 1, 0}, new int [] {0, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 1, 1},
    new int [] {1, 1, 0}, new int [] {0, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 0, 1},
    new int [] {1, 1, 0}, new int [] {0, 1, 1},
    new int [] {0, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {new int [] {1, 0, 1},
    new int [] {1, 0, 1}, new int [] {1, 1, 0},
    new int [] {0, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {
    new int [] {1, 0, 1, 1}, new int [] {1, 1, 0, 0},
    new int [] {0, 1, 1, 1}}));
ag.add(new AtomicGraph(new int [][] {
    new int [] {1, 0, 0, 1}, new int [] {1, 1, 0, 0},
    new int [] {0, 1, 1, 0},
    new int [] {0, 0, 1, 1}}));
Set<Integer> result = prove(ag, 68, -1);
System.out.println(result);

result = prove(ag, 1000, 12);
System.out.println(result);
}
}

```