

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.938.5+515.164.15

Ошемков Андрей Александрович

**Топология особенностей интегрируемых
гамильтоновых систем**

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
академик РАН, профессор
Фоменко Анатолий Тимофеевич

Москва — 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Особенности интегрируемых гамильтоновых систем . . .	26
1.1. Топологический анализ интегрируемых гамильтоновых систем . . .	26
1.2. Невырожденные особенности	31
1.3. Почти прямые произведения	34
Глава 2. Классификация седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем	38
2.1. Атомы и f -графы	39
2.2. Обзор известных результатов о седловых особенностях	46
2.3. Построение инварианта	51
2.4. Доказательство теоремы классификации	59
2.5. Алгоритм перечисления седловых особенностей	71
2.6. Сомножители минимальной модели	76
2.7. Случай особенностей сложности 1	79
2.8. Пример особенности, не являющейся почти прямым произведением . .	94
Глава 3. Классификация потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях	100
3.1. Классификация потоков Морса	100
3.2. Сравнение некоторых известных инвариантов	111
3.3. Классификация потоков Морса–Смейла	124
3.4. Кодирование и перечисление потоков	143
Глава 4. Топология множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы	161
4.1. Особенности интегрируемой гамильтоновой системы как особенности набора сечений комплексного расслоения	161
4.2. Топологические свойства комплекса особенностей для систем с двумя степенями свободы	167

Глава 5. Примеры вычисления инвариантов интегрируемых систем	174
5.1. Интегрируемый случай Соколова на $so(4)$	174
5.2. Задача двух центров на сфере	200
5.3. Многомерный волчок Эйлера–Манакова	238
Список литературы	255

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация является исследованием в области топологии интегрируемых систем. В ней разрабатываются новые методы изучения особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, которые затем применяются для классификации некоторых типов особенностей, изучения их полулокальных и глобальных свойств, а также для исследования топологии нескольких конкретных интегрируемых систем.

Хорошо известно, что топологические свойства интегрируемой гамильтоновой системы тесно связаны со структурой особенностей соответствующего ей отображения момента. Прообразы регулярных значений этого отображения являются инвариантными многообразиями системы, диффеоморфными фактору \mathbb{R}^n по некоторой решетке. Например, если фазовое пространство системы компактно, то, как следует из классической теоремы Лиувилля, такие инвариантные многообразия диффеоморфны n -мерным торами (называемым торами Лиувилля), на которых траектории системы являются условно периодическими.

Если рассматривать прообразы всех точек при отображении момента, то соответствующее слоение на фазовом пространстве системы (называемое слоением Лиувилля) имеет особенности. Кроме торов Лиувилля у него имеются слои, содержащие особые точки отображения момента. Слоение Лиувилля в окрестности этих особых слоев устроено более сложно как с топологической точки зрения, так и с точки зрения динамики.

Локальная классификация невырожденных особенностей для интегрируемых гамильтоновых систем хорошо известна. А именно, тип особенности полностью определяется количеством ее гиперболических, эллиптических и фокусных компонент. Однако для описания топологии конкретной интегрируемой системы необходимо исследовать структуру особенности не в малой окрестности особой точки, а в окрестности всего особого слоя, содержащего эту точку. Иногда такое исследование особенности называют полулокальным.

В диссертации рассматриваются различные задачи, связанные с полулокальной и глобальной топологией интегрируемых систем, которые активно исследовались в течение последних 20–25 лет.

Глава 1 носит вспомогательный характер. В ней содержатся основные определения, описаны некоторые методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, а также изложены классические результаты.

В главе 2 решается задача классификации гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем.

Глава 3 посвящена классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных многообразиях с точностью до гомеоморфизма, сохраняющего траектории потока.

В главе 4 изучаются глобальные (алгебро-топологические) свойства множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы.

В главе 5 разработанные методы исследования топологии интегрируемых систем применяются к нескольким конкретным примерам (интегрируемый случай Соколова на $so(4)$, задача двух центров на сфере, многомерное твердое тело).

Замечание о нумерации: каждая глава n диссертации разбита на разделы ($n.1, n.2, \dots$), а некоторые разделы $n.m$ дополнительно разбиты на подразделы ($n.m.1, n.m.2, \dots$), которые в тексте обычно также называются разделами; определения, рисунки, теоремы и т. п. занумерованы в тексте диссертации по порядку (без ссылок на главы и разделы).

Перейдем к более подробному описанию содержания и целей диссертации, а также истории вопросов, затронутых в ней.

В главе 2 рассматриваются невырожденные особенности ранга 0, имеющие только гиперболические компоненты. Одна из основных целей данной главы — получить полулокальную классификацию таких особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Более точно, задача классификации рассматривается для чисто гиперболических особенностей ранга 0, которые удовлетворяют условию нерасщепляемости (см. определение 9) и для которых инвариантные окрестности состоят из компактных

слоев. Особенности, удовлетворяющие этим условиям, мы называем *седловыми особенностями*.

Отметим, что с гиперболические особенности обладают более сложной топологической структурой по сравнению с другими типами особенностей. Например, классификация число эллиптических особенностей тривиальна, а структура фокусной особенности в случае двух степеней свободы однозначно определяется ее сложностью (т.е. количеством особых точек на слое). Классификация гиперболических особенностей ранга 0 уже в случае двух степеней свободы нетривиальна даже для сложности 1 (имеется 4 различных особенности такого типа).

В случае одной степени свободы классификация седловых особенностей эквивалентна (полулокальной) классификации особенностей функций Морса на двумерном многообразии. Удобный язык для описания таких особенностей был предложен в работе А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко [9], где для этого было введено понятие *атома*. Описание различных подходов к определению атомов и их классификации содержится в книге [12] (см. также раздел 2.1).

Первые результаты о полулокальной классификации седловых особенностей для большего числа степеней свободы были получены в работах Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [29]. Они показали, что в случае двух степеней свободы седловые особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны, и в результате получили полный список, состоящий из четырех попарно неэквивалентных особенностей.

Имеется другой естественный инвариант седловой особенности (в случае двух степеней свободы), называемый “круговой молекулой”. Смысл этого инварианта в том, что он полностью описывает топологию слоения Лиувилля на трехмерной границе инвариантной окрестности особого слоя в терминах особенностей с одной степенью свободы.

Круговые молекулы для всех четырех особенностей сложности 1 были вычислены А. В. Болсиновым в работе [72]. Все они различны, и поэтому также дают классификацию особенностей сложности 1 для систем с двумя степенями свободы. В той же работе А. В. Болсиновым была получена полулокальная классификация особенностей сложности 2 для систем с двумя степенями свободы. Оказалось, что

для особенностей сложности 2 топология особого слоя уже не является полным топологическим инвариантом. Поэтому А. В. Болсинов ввел еще один инвариант седловой особенности, называемый “ l -типом”, и в результате получил полный список особенностей сложности 2 для систем с двумя степенями свободы, состоящий из 39 особенностей. Круговые молекулы для всех 39 особенностей сложности 2 были построены В. С. Матвеевым [33]. Как и в случае сложности 1, оказалось, что все они различны.

Случай особенностей сложности 1 для трех степеней свободы исследован В. В. Калашниковым [24]. Он использует подход, основанный на разложении особенностей в почти прямое произведение, предложенный Н. Т. Зунгом [121] (см. также теорему 3). В работе [24] сформулирована теорема о том, что количество особенностей сложности 1 для случая трех степеней свободы равно 32, и приведен их список. Как было потом выяснено, в этом списке имеются ошибки (отметим, что рассуждения, использованные В. В. Калашниковым, правильны, а ошибки в списке, вероятно, возникли на последнем этапе доказательства, который сводится к перебору и в работе не приведен). Правильный список седловых особенностей сложности 1 для трех степеней свободы приведен в работе автора [48] (см. также таблицу 1 в разделе 2.7).

Отметим также обобщение упомянутого выше результата Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского, полученное в работе [24] для систем с любым числом степеней свободы: особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны.

Для систем с двумя степенями свободы ни топология особого слоя, ни l -тип особенности уже не являются полными инвариантами (даже для особенностей сложности 2). Как было показано В. С. Матвеевым [34] (см. также [73]), пара {топология особого слоя, l -тип} (этот инвариант называется *C - l -типом* особенности) однозначно определяет седловую особенность с точностью до полулокальной Лиувиллевой эквивалентности в случае двух степеней свободы. Отметим, что *C - l -тип* особенности можно рассматривать и в случае любого числа степеней свободы, но неизвестно, будет ли этот инвариант полным для систем с числом степеней свободы больше двух.

Отметим также, что круговая молекула, которая является полным инвариантом для особенностей сложности 1 и 2, в общем случае таковым не является. Примеры неэквивалентных особенностей с одинаковыми круговыми молекулами были построены А. В. Грабежным (см. раздел 7.3 в обзоре [74]). Простейший из них имеет сложность 4.

Одним из важных результатов о полулокальной структуре седловых особенностей любой сложности является теорема Н. Т. Зунга [121] о разложении любой такой особенности в почти прямое произведение атомов (см. теорему 3). Для задачи классификации важен вопрос о единственности такого разложения. Н. Т. Зунг вводит понятие минимальной модели (см. определение 15) особенности (которую он также называет ее “канонической моделью”) и доказывает утверждение о том, что для каждой особенности существует единственная минимальная модель [121, Proposition 7.4]. Несмотря на то, что это утверждение сформулировано им для особенностей произвольного типа и ранга и в такой общности неверно (см. обсуждение в конце раздела 2.2), для седловых особенностей ранга 0 утверждение о единственности минимальной модели (и его доказательство, приведенное в работе [121]) верно. Это утверждение следует также из результатов диссертации (см. предложение 5).

Отметим, что язык почти прямых произведений очень удобен для описания списков особенностей и особенностей конкретных систем. Однако теорема Зунга не позволяет непосредственно получить список особенностей данного типа и данной сложности, поскольку не дает ответа на вопрос о том, как устроены сомножители почти прямого произведения и действие группы на них.

Задача полулокальной классификации седловых особенностей произвольной сложности и для произвольного числа степеней свободы решена в главе 2 (см. также [46]). А именно, каждой невырожденной седловой особенности ранга 0 сопоставляется комбинаторный объект (f_n -граф), являющийся графом с дополнительной структурой в виде раскраски ребер и ориентации некоторых ребер (см. определение 16). Это сопоставление становится однозначным, если рассматривать f_n -графы с точностью до применения к ним двух простых операций, называемых изменением ориентации и переворачиванием (см. определение 19). Тем самым задача полуло-

кальной классификации седловых особенностей ранга 0 сводится к задаче перечисления f_n -графов.

Один из основных результатов главы 2 — теорема 7 (теорема классификации), утверждающая, что седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n -графы эквивалентны (при этом любой связный f_n -граф соответствует некоторой седловой особенности).

Доказательство теоремы 7 основано на том, что построенное соответствие между невырожденными седловыми особенностями ранга 0 и f_n -графами является естественным в следующем смысле: операция прямого произведения простейших особенностей (атомов) соответствует операции произведения f -графов (см. определение 22), а факторизация прямых произведений особенностей по свободному покомпонентному действию конечной группы соответствует аналогичной факторизации f_n -графов. В силу теоремы Зунга все особенности, удовлетворяющие условию нерасщепляемости, могут быть получены из атомов при помощи этих двух операций.

Опишем кратко структуру главы 2.

В разделе 2.1 вводится понятие f -графа (это f_n -граф при $n = 1$), с помощью которого решается задача классификации седловых особенностей для систем с одной степенью свободы (т. е. атомов). В разделе 2.2 приводится обзор известных ранее результатов о классификации седловых особенностей. В разделе 2.3 описано построение инварианта (f_n -графа). Раздел 2.4 посвящен доказательству теоремы классификации.

В разделе 2.5 дана другая интерпретация построенного инварианта (на языке наборов перестановок, удовлетворяющих некоторым условиям коммутирования) и описан алгоритм, позволяющий получить список седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы (в случае двух степеней свободы похожий алгоритм был предложен автором в совместной работе с В. С. Матвеевым [35]). Некоторые результаты вычислений по разработанным алгоритмам для особенностей малой сложности и малого числа степеней свободы приведены в предложениях 8 и 13. Отметим, что программа, реализующая указанный алгоритм, выда-

ет, конечно, не только количество, но и список особенностей. В частности, в разделе 2.7 приведен список из 32 особенностей сложности 1 для трех степеней свободы.

В разделе 2.6 исследуются вопросы, связанные с описанием сомножителей минимальной модели седловой особенности. В частности, доказано, что если атом V является сомножителем минимальной модели для седловой особенности сложности k интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, то его сложность $|V|$ удовлетворяет неравенству $|V| \leq k2^{2k}$ и является делителем числа $k2^{n-1}$ (теорема 9; см. также [44]).

Отметим также следующий результат, полученный в разделе 2.6 (теорема 10): если атом является сомножителем минимальной модели для некоторой особенности сложности k , то он также является сомножителем минимальной модели для некоторой особенности с числом степеней свободы $n = 2k + 1$ (в том числе, возможно, меньшей сложности). Это утверждение обобщает результат В. В. Калашникова [24] (на случай любой сложности) о том, что сомножителями минимальной модели особенности сложности 1 (для любого числа степеней свободы) могут быть лишь четыре атома B, D_1, C_2, P_4 (которые “появляются” при классификации особенностей с тремя степенями свободы).

В разделе 2.7 более подробно исследованы особенности сложности 1. Доказано, что в этом случае в каждом классе эквивалентности f_n -графов сложности 1 можно однозначно выбрать “простой” f_n -граф (см. определение 24 и предложение 9). Это позволяет упростить формулировку теоремы классификации для особенностей сложности 1, заменив в ней “эквивалентность” f_n -графов на “изоморфность” (см. теорему 11).

Еще один эффект, обнаруженный для особенностей сложности 1, заключается в том, что перестановки, соответствующие данному f_n -графу сложности 1, задают на множестве его вершин структуру аффинного пространства (над полем \mathbb{Z}_2) и набор аффинных преобразований (см. предложение 11). Это позволяет переформулировать теорему классификации для особенностей сложности 1 в алгебраических терминах (см. теорему 13) и упростить алгоритм их перечисления (результат вычислений для малого числа степеней свободы приведен в предложении 13). В част-

ности, таким образом получен список особенностей сложности 1 для трех степеней свободы (см. таблицу 1 в разделе 2.7.4).

Следует отметить, что для всех известных автору примеров интегрируемых гамильтоновых систем, возникающих в механике, физике, геометрии, условие нерасщепляемости выполнено (отметим также, что для невырожденных особенностей сложности 1 условие нерасщепляемости выполнено по определению). Поэтому рассмотрение такого класса особенностей и составление их списков вполне оправдано. Однако с теоретической точки зрения вопрос о существовании и структуре особенностей, не удовлетворяющих условию нерасщепляемости, также представляет интерес.

В разделе 2.8 приведен пример особенности, не являющейся особенностью типа почти прямого произведения (и, в частности, не удовлетворяющей условию нерасщепляемости). При построении этого примера мы явным образом описываем 4-мерное симплектическое многообразие и пару коммутирующих функций на нем. Доказательство того, что построенная особенность не является особенностью типа почти прямого произведения (предложение 14) основано на том, что ее особый слой устроен иначе, чем особые слои почти прямых произведений. А именно, особый слой (как и в стандартной ситуации) имеет структуру двумерного комплекса, в котором точки ранга r образуют r -мерные клетки. Для особенностей типа почти прямого произведения двумерные клетки являются “четырёхугольниками” (поскольку каждая из них тоже есть почти прямое произведение), а в построенном примере это не так.

В главе 3 рассматривается задача классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных многообразиях с точностью до гомеоморфизма, сохраняющего траектории потока.

Вопросы, связанные с качественным исследованием динамических систем на двумерных многообразиях (в частности, классификация таких систем) обсуждались многими авторами. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работах А. А. Андропова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера (см. [1], [27], [28], [31], а также [2], [3], [50], [100] об истории вопроса). В этих работах исследовались векторные поля достаточно общего вида. В дальнейшем С. Смейл [53], [54]

выделил класс потоков (названных впоследствии *потоками Морса–Смейла*), которые на двумерном многообразии, с одной стороны, являются типичными, а с другой стороны, имеют достаточно простое качественное описание.

В работе [105] М. Пейксото ввел понятие “различающего графа”, сопоставляемого произвольному потоку Морса–Смейла, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом, классифицирующим потоки Морса–Смейла на двумерных многообразиях с точностью до траекторной топологической эквивалентности (точные определения и описание инварианта Пейксото см. в разделах 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1). В работе [105] доказана теорема реализации для таких графов и тем самым, как утверждает М. Пейксото, “задача классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях сводится к задаче классификации различающих графов”.

Однако инвариант, предъявленный М. Пейксото, имеет сложное описание. Поэтому трудно реализовать алгоритм сравнения двух таких графов или, например, алгоритм их перечисления для малого количества вершин. Более того, описанный М. Пейксото “различающий граф” является полным траекторным топологическим инвариантом на самом деле лишь для потоков Морса–Смейла без предельных циклов (иногда такие потоки называют *потоками Морса*). Утверждение о том, что классы эквивалентности потоков Морса–Смейла находятся во взаимно-однозначном соответствии с различающими графами в самой работе [105] не доказывается, но приводится ссылка на работу [107], где, как говорит М. Пейксото, “с точностью до обозначений доказана содержательная часть этого утверждения”. Однако все рассуждения в работе [107] проводятся для достаточно близких потоков и некоторые из них становятся неверными, если отбросить это условие. Для потоков Морса–Смейла с предельными циклами различающий граф Пейксото является инвариантом, но не полным, т. е. существуют траекторно топологически не эквивалентные потоки с одинаковым различающим графом (см. пример 8 и предшествующее ему обсуждение в разделе 3.3.1).

Позже появились другие описания инварианта Пейксото или похожих инвариантов. Так, например, Г. Флейтас в работе [82] описал некоторый инвариант для потоков Морса на двумерных многообразиях. Подход Г. Флейтаса отличается от

подхода М. Пейксото, а предъявленный в работе [82] инвариант существенно проще, чем инвариант Пейксото (см. раздел 3.2.2). В работе К. Вонга [119] также предъявляется более простой чем у М. Пейксото инвариант для потоков Морса–Смейла на ориентируемых двумерных многообразиях. Но поскольку К. Вонг строит свой инвариант на основе работы М. Пейксото, этот новый инвариант также является полным инвариантом лишь для потоков Морса. Теорема 4.14 работы [119], утверждающая, что этот инвариант классифицирует потоки Морса–Смейла общего вида на двумерных многообразиях, неверна (в работе [119] она не доказывается).

Отметим, что позже предлагались и другие формы полных инвариантов для потоков Морса (см., например, [99], [108], а также недавний обзор этой тематики [21]), но мы ограничимся рассмотрением и сравнением упомянутых выше инвариантов Пейксото, Флейтаса и Вонга. Кратко сформулируем сказанное выше об этих инвариантах:

1) инвариант Пейксото, построенный для произвольных потоков Морса–Смейла на произвольных поверхностях, является полным траекторным топологическим инвариантом на множестве потоков Морса;

2) инвариант Флейтаса является полным траекторным топологическим инвариантом для потоков Морса на произвольных поверхностях;

3) инвариант Вонга, построенный для произвольных потоков Морса–Смейла на ориентируемых поверхностях, является полным траекторным топологическим инвариантом для потоков Морса на ориентируемых поверхностях.

Одна из целей главы 3 — дать аккуратное описание полного траекторного топологического инварианта, классифицирующего произвольные потоки Морса–Смейла на произвольных двумерных многообразиях.

Поясним еще одну цель, которая ставилась при написании главы 3.

В работах А. Т. Фоменко [62], [61] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже, достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко [9], где были введены понятия *атомов* и *молекул*. Разработанный подход, терминология, система обозначений оказались удобными для классификации не только

интегрируемых гамильтоновых систем, но и других естественных геометрических объектов. В главе 3 классификация потоков Морса–Смейла также проводится в терминах атомов и молекул. Сначала классифицируются каким-то образом достаточно простые объекты (мы называем их *v-атомами*), затем описываются правила “склейки” более сложных объектов (*v-молекулы*) из этих *v*-атомов, и, наконец, классифицируются *v*-молекулы. Отметим, что для траекторной классификации потоков Морса достаточно *v*-атомов (см. определение 36 и лемму 23), а *v*-молекулы нужны для классификации потоков Морса–Смейла (см. определение 39 и теоремы 18, 19).

Таким образом, вторая цель главы 3 — продемонстрировать, как указанный подход может быть применен к решению задачи траекторной топологической классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях. Отметим, что некоторые идеи, используемые в главе 3, были реализованы также в работе [76], но в другой форме.

Опишем кратко структуру главы 3

В разделе 3.1 строится инвариант для потоков Морса (*трехцветный граф*; см. определение 28), представляющий из себя граф, все вершины которого имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Два трехцветных графа считаются *изоморфными*, если они изоморфны как графы с сохранением раскраски. Цвета обозначаются буквами *s*, *t*, *u*, а циклы, на которые распадается трехцветный граф после выбрасывания всех ребер одного цвета, называются *tu-циклами*, *su-циклами* и *st-циклами*.

После этого описывается процедура сопоставления каждому потоку Морса (отличному от *простейшего*, т. е. не имеющего седел) некоторого трехцветного графа. Сепаратрисы потока разрезают поверхность на “четыреугольники”, каждый из которых затем разрезается еще одной траекторией, идущей из источника в сток, на два треугольника. Стороны каждого из полученных треугольников имеют тип *s* (траектория из источника в седло), *u* (траектория из седла в сток) и *t* (траектория из источника в сток). Трехцветный граф, сопоставляемый потоку, можно рассматривать как граф, двойственный этому разбиению на треугольники, с естественной раскраской.

Далее в разделе 3.1 доказывается, что трехцветный граф является полным топологическим инвариантом для задачи траекторной классификации потоков Морса (теорема 14). Затем доказывается, что допустимыми инвариантами являются в точности трехцветные графы с su -циклами длины 4 (теорема 15) и вычисляются топологические инварианты поверхности в терминах трехцветных графов (теорема 16).

В разделе 3.2 дано описание других траекторных топологических инвариантов (Пейксото, Флейтаса, Вонга) для потоков Морса и, в частности, их выражение через трехцветный граф. Кроме того, здесь описана связь между классификацией потоков Морса и классификацией функций Морса на двумерных поверхностях (раздел 3.2.4).

Раздел 3.3 посвящен классификации потоков Морса–Смейла. Сначала обсуждается конструкция Пейксото и, в частности, приведен пример, показывающий, что различающий граф Пейксото не является полным топологическим инвариантом для потоков Морса–Смейла (раздел 3.3.1). Далее строится инвариант (v -молекула), классифицирующий потоки Морса–Смейла с точностью до траекторной топологической эквивалентности (разделы 3.3.2 и 3.3.3), после чего (в разделе 3.3.4) доказываются три утверждения, аналогичные приведенным выше утверждениям о потоках Морса: теорема классификации 3.23, утверждающая, что v -молекула является полным топологическим инвариантом; теорема реализации 3.24 о том, что любая v -молекула является допустимой; теорема 3.25, описывающая топологию поверхности через характеристики соответствующей v -молекулы.

В разделе 3.4 описан один из возможных способов составления списка для построенных в данной работе инвариантов. Для этого описывается представление трехцветных графов и v -молекул в виде простого кода (строчки символов некоторого алфавита) и алгоритм перечисления этих кодов. В качестве примера реализации этого алгоритма в разделе 3.4.3 приведен полный список этих кодов (а также соответствующих трехцветных графов и v -молекул) для потоков Морса с не более чем двумя седловыми точками (15 потоков) и для потоков Морса–Смейла с не более чем тремя критическими элементами (36 потоков).

Отметим, что материал главы 3 опубликован в совместной работе автора с В. В. Шарко [49]. При этом разделы 3.1.5, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.3.2 содержат результа-

ты, в получении которых влияние В. В. Шарко было определяющим, а результаты, содержащиеся в остальных разделах (и основные идеи, используемые в главе 3), принадлежат автору.

В главе 4 обсуждаются некоторые “глобальные” свойства интегрируемых гамильтоновых систем и их особенностей.

Вопрос о том как “классифицировать” системы на данном фазовом пространстве с точностью до лиувиллевой эквивалентности (т. е. получить “список” таких систем) в общем случае не решен. Перечислим некоторые результаты, полученные в этом направлении.

В случае одной степени свободы классификация гамильтоновых систем с невырожденными особенностями эквивалентна классификации функций Морса с точностью до послыйного гомеоморфизма. Существуют различные описания такой классификации. Например, подробное изложение решения этой задачи на языке атомов и молекул дано А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко в книге [12]. Отметим также, что в случае одной степени свободы имеется классификация не только с точностью до гомеоморфизма (лиувиллева эквивалентность), но и с точностью до симплектоморфизма. Полный список симплектических инвариантов был получен в работах Ж.-П. Дюфура, П. Молино, А. Туле [80], [115].

Для случая двух степеней свободы А. Т. Фоменко и Х. Цишангом [63] построен полный топологический инвариант, решающий задачу классификации (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на трехмерных изоэнергетических поверхностях.

Имеется также полное описание интегрируемых гамильтоновых систем (для любого числа степеней свободы) в случае, когда соответствующее гамильтоново действие есть действие тора. Первые результаты в этом направлении были получены в работах М. Атьи [71], В. Гийемина, С. Стернберга [83], а классификация в случае действия тора (даже с точностью до симплектоморфизма) была получена Т. Дельзантом [79]. Отметим, что в случае действия тора все особенности системы являются эллиптическими.

Случай двух степеней свободы, когда система имеет только эллиптические и фокусные особенности (т. е. не имеет седловых особенностей) был исследован в работах

Н. К. Леунг, М. Симингтон [90], [112]. Они получили список все возможных компактных фазовых пространств для этой ситуации и описали базы соответствующих слоений Лиувилля.

Отметим также еще один результат о системах с любым числом степеней свободы, принадлежащий Н. Т. Зунгу [123]. Он вводит понятие “характеристического класса Чжэня” для интегрируемой гамильтоновой системы и доказывает, что этот инвариант является полным инвариантом систем, рассматриваемых с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Следует отметить, что инвариант, предложенный Н. Т. Зунгом, является полезным инструментом при сравнении двух систем, но не дает ответа на вопрос о том, как описать класс возможных систем, например, на данном конкретном фазовом пространстве.

В главе 4 мы рассматриваем множество всех особых точек интегрируемой гамильтоновой системы как комплекс в фазовом пространстве (*комплекс особенностей*). В случае, когда фазовое пространство компактно, а все особенности системы невырождены, этот комплекс можно представить в виде объединения погруженных трансверсально пересекающихся симплектических подмногообразий. В главе 4 изучаются некоторые свойства этих подмногообразий для систем с двумя степенями свободы.

Сначала в разделе 4.1.1 описывается классическая конструкция, связанная с геометрической интерпретацией классов Чжэня комплексного векторного расслоения. А именно, если набор сечений $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ комплексного расслоения E ранга k над компактной базой удовлетворяет некоторым естественным условиям “общего положения”, то его цикл вырождения D_j (определяемый точками, в которых первые j сечений набора зависимы) двойствен по Пуанкаре классу Чжэня $c_{k+1-j}(E)$.

Мы применяем эту конструкцию к множеству особенностей интегрируемой гамильтоновой системы. В качестве расслоения рассматривается касательное расслоение к фазовому пространству, на котором вводится почти комплексная структура, согласованная с симплектической формой. В разделе 4.1.2, показано, что такая процедура корректна, поскольку множество почти комплексных структур, согласованных с симплектической формой, определено однозначно с точностью до гомотопии, а зависимость коммутирующих гамильтоновых векторных полей над \mathbb{R} эквивалент-

на их зависимости над \mathbb{C} . Отметим, что набор сечений $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ даже для систем с невырожденными особенностями может не быть общим и, вообще говоря, не может быть сделан общим малым возмущением в классе коммутирующих гамильтоновых векторных полей.

В разделе 4.1.3 мы рассматриваем систему с двумя степенями свободы на компактном многообразии M^4 и с невырожденными особенностями. В этой ситуации роль цикла вырождения играет множество \overline{K}_1 , являющееся замыканием множества особых точек ранга 1. Оно является объединением замкнутых двумерных подмногообразий, погруженных в фазовое пространство M^4 . Ориентируя подходящим образом эти двумерные подмногообразия мы получаем некоторый класс гомологий $[\overline{K}_1]$ в $H_2(M^4, \mathbb{Z})$ и доказываем, что он двойствен по Пуанкаре первому классу Чженя $c_1(M^4) \in H^2(M^4)$ (см. теорему 24).

В разделе 4.2 исследуются некоторые другие свойства комплекса K , образованного особыми точками интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. В частности, в разделе 4.2.1 доказано, что любое двумерное подмногообразие, входящее в состав комплекса особенностей K и заполненное гиперболическими особыми точками, имеет тривиальное нормальное расслоение в M^4 (см. теорему 25), а также получены некоторые соотношения на топологические характеристики подмногообразий, образующих комплекс K (см. теорему 26).

В качестве примера использования полученных ограничений на классы гомологий двумерных подмногообразий, образующих комплекс особенностей K , в разделе 4.2.2 дано описание всех систем с невырожденными особенностями на комплексной проективной плоскости: это почти торические слоения с базой D_k^2 (двумерный диск, граница которого имеет k “углов” и внутри которого имеется $3 - k$ “узлов”, соответствующих фокусным особенностям), где $k = 0, 1, 2, 3$.

Глава 5 диссертации посвящена применению различных методов топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем к нескольким конкретным системам.

Имеется множество работ (как классических, так и современных), в которых исследуются различные топологические свойства интегрируемых систем, возникающих в геометрии, механике, математической физике. Новый этап в развитии это-

го направления начался примерно в 1970-80-х годах после работ Ю. Мозера [98], С. Смейла [55], Я. В. Татарина [58], [59], М. П. Харламова [67].

В настоящее время исследование интегрируемых систем проводится различными методами (топологический анализ, аналитическое исследование решений, алгебраические конструкции, компьютерное моделирование). Мы используем в основном методы “теории топологической классификации”. Этот подход был предложен А. Т. Фоменко [61], [62] и разработан в дальнейшем совместно с Х. Цишангом, С. В. Матвеевым, А. В. Болсиновым (см. [63], [9], [16], [11]). Позже эта теория была подробно изложена в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [12]. В частности, там определяются инварианты, описывающие топологию особенностей и изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (молекулы или инварианты Фоменко–Цишанга), а также приведено множество примеров систем, исследованных методами теории топологической классификации (см. также [68], [41], [42], [104], [103], [87], [10], [38], [120], [52], [39], [23]).

Глава 5 состоит из трех разделов 5.1, 5.2, 5.3, в которых исследуется топология трех различных систем. Выбор примеров, рассматриваемых в главе 5, был отчасти мотивирован тем, чтобы продемонстрировать применение различных методов, применяемых при топологическом анализе интегрируемых систем. (например, когда гамильтоновы поля неполны или когда система обладает бигамильтоновой структурой).

В разделе 5.1 главы 5 исследуется один из интегрируемых случаев уравнений Эйлера на семействе шестимерных алгебр Ли (содержащем $so(4)$, $so(3, 1)$, $e(3)$), обнаруженных сравнительно недавно А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым, В. В. Соколовым в работах [14], [56], [57] (см. также [15]). В разделе 5.1 мы рассматриваем один из них (на алгебре Ли $so(4)$), который обычно называют “случаем Соколова”.

Гамильтонианы всех этих случаев — квадратичные функции на алгебре Ли, а интегралы — полиномы степени 4. Алгебраические свойства этих интегрируемых случаев пока не очень понятны, хотя похоже, что имеются качественные отличия от известных ранее случаев интегрируемости (например, от случая Ковалевской, где дополнительный интеграл также имеет степень 4). Поэтому представляет интерес исследование этих интегрируемых случаев с топологической точки зрения.

В работах [64], [65] Г. Хагигатдуст исследовал топологию изоэнергетических поверхностей для случая Соколова, т. е. совместных поверхностей уровня инвариантов алгебры Ли $so(4)$ и гамильтониана. В разделе 5.1 описано построение бифуркационных диаграмм отображения момента (теоремы 29 и 30 — результаты, полученные совместно с Г. Хагигатдустом), после чего изложены результаты автора: найдены типы критических точек ранга 0 (теорема 31), определены перестройки торов Лиувилля (теорема 32), а также вычислены инварианты Фоменко (теорема 33). Тем самым получена классификация изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

В разделе 5.2 главы 5 исследуется задача двух центров на двумерной сфере.

Впервые вопрос о гравитационных взаимодействиях в пространствах постоянной кривизны был поставлен Н. И. Лобачевским, который изучал обобщения закона притяжения для пространства постоянной отрицательной кривизны.

Лобачевский пишет [30, стр. 159]: “. . . в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r , от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой Геометрии нашел я поверхность шара $\pi(e^r - e^{-r})^2$, и такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы. . . Впрочем, пусть это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительнее доводов. . .”

Лобачевский рассуждает здесь не о потенциале, а о силе, но первообразная функции $\frac{1}{(e^r - e^{-r})^2}$, выписанной Лобачевским, есть (с точностью до коэффициента) $\operatorname{cth} r$. Именно такой потенциал рассматривается в настоящее время, как правильное обобщение ньютоновского потенциала $\frac{1}{r}$ для пространства Лобачевского (см., например, [77], [25], [89]).

В дальнейшем различные задачи механики на пространствах постоянной кривизны рассматривались многими авторами. Еще в XIX веке В. Киллинг [88] изучал движение точки в поле, создаваемом ньютоновским потенциалом на трехмер-

ной сфере и трехмерном пространстве Лобачевского, а также динамику n -мерного твердого тела на пространствах постоянной кривизны. Отметим также работы Н. Е. Жуковского [22] о движении псевдосферической (“плоской”) пластинки на плоскости Лобачевского и Э. Шредингера [70] о квантовом аналоге задачи Кеплера на трехмерной сфере. Закон притяжения и законы Кеплера в пространствах постоянной кривизны неоднократно переоткрывались и обобщались уже в недавнее время многими авторами (см. [84], [110], [77], [89], [25], [116]).

Топология задачи о движении точки по двумерной сфере (со стандартной метрикой постоянной положительной кривизны) в поле, создаваемом двумя “ньютоновскими” центрами (т. е. с потенциалами, пропорциональными $\text{ctg } r$, где r — расстояние до центра) исследована в разделе 5.2. В частности, для этой задачи найдены инварианты Фоменко–Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувилевых слоений на изоэнергетических поверхностях системы.

Гамильтоновы поля, задающие эту систему не полны. Однако можно провести регуляризацию и после этого применить общую теорию. Используемая процедура регуляризации подробно описана в разделе 5.2.3 (см. теорему 34). Используя накрытие сферы тором (разветвленное в особых точках системы), мы, фактически, сводим задачу вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга для исходной системы к задаче вычисления этих инвариантов для системы на торе, которая существенно проще в силу разделения переменных. Основным моментом в вычислении инвариантов является построение допустимых систем координат, описанное в разделе 5.2.7. Ответ в виде списка инвариантов Фоменко–Цишанга для рассматриваемой задачи (при различных значениях параметров системы) приведен в теореме 37.

Материал раздела 5.2 содержит результаты, опубликованные автором в совместной работе с Т. Г. Возмищевой [17]. Теорема 34 (о регуляризации), теорема 35 (о боттовости) и построение допустимых систем координат для всех случаев (раздел 5.2.7) принадлежат автору. Некоторые из остальных результатов получены Т. Г. Возмищевой или совместно, что более точно отмечено в тексте раздела 5.2.

В разделе 5.3 главы 5 рассматривается система, описывающая динамику многомерного твердого тела (волчок Эйлера–Манакова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$). В частности, на этом примере продемонстрированы некоторые методы топологического анализа

интегрируемых систем в многомерном случае. Кроме того при исследовании этой системы существенно используется тот факт, что она обладает бигамильтоновой структурой.

Отметим, что интегрируемость многих систем, возникающих в механике, геометрии, математической физике, тесно связана с их бигамильтоновостью. Основы такого подхода были заложены в работе Ф. Магри [93], после чего он развивался многими авторами (см. [5], [6], [78], [19], [94], [111]). Было обнаружено, что многие классические интегрируемые системы обладают бигамильтоновой структурой, и, наоборот, использование бигамильтоновой “технологии” помогло обнаружить много новых интересных примеров интегрируемых систем (см. [13], [85], [92], [109], [101], [102]).

Использование бигамильтонова подхода помогает и при изучении особенностей интегрируемых систем (особенно в многомерном случае, когда прямые вычисления бывают чрезвычайно сложны). Основная идея заключается в том, что структура особенностей бигамильтоновой системы определяется особенностями соответствующего пучка согласованных скобок. Поэтому, например, для линейных скобок Пуассона многие вопросы о топологической структуре особенностей соответствующей системы можно переформулировать на достаточно простом алгебраическом языке и получить ответ в тех же простых терминах.

Сначала мы описываем общие понятия и факты, связанные с бигамильтоновыми системами (раздел 5.3.1). Затем (в разделе 5.3.2) приводится описание рассматриваемой системы (многомерное твердое тело).

Далее мы доказываем некоторые факты об особенностях достаточно произвольных бигамильтоновых систем (накладываемые ограничения перечислены в разделе 5.3.3), из которых затем выводятся соответствующие результаты для рассматриваемой системы.

В разделе 5.3.4 получено описание множества всех особых точек бигамильтоновой системы в терминах множества особенностей соответствующего пучка скобок Пуассона (теорема 41) и описание множества особенностей рассматриваемой системы (теоремы 42 и 43).

В разделе 5.3.5 исследуются положения равновесия, для которых получено описание в общем случае (теорема 44) и для многомерного твердого тела (теорема 45).

Кроме того, доказано достаточное условие невырожденности для рассматриваемой системы (теорема 47).

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации

- Решена задача полулокальной классификации чисто гиперболических особенностей ранга 0 для интегрируемых гамильтоновых систем с любым числом степеней свободы. В частности, построен новый топологический инвариант (f_n -граф), решающий эту задачу, описан алгоритм, реализующий перечисление указанных инвариантов, эффективность этого алгоритма продемонстрирована на примере составления списков особенностей малой сложности.
- Для чисто гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем с любым числом степеней свободы построен алгоритм нахождения сомножителей минимальной модели по f_n -графу, а также получена оценка для сложности атомов, являющихся сомножителями минимальной модели особенности произвольной сложности, не зависящая от числа степеней свободы, что обобщает известный ранее результат об особенностях сложности 1.
- Описаны гомологические свойства комплекса особенностей для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. В частности, доказано, что циклы, заданные особыми точками интегрируемой гамильтоновой системы фиксированного ранга, двойственны по Пуанкаре соответствующим классам Чженя касательного расслоения фазового пространства. Также доказано, что подмногообразия, заполненные гиперболическими особенностями, имеют тривиальное нормальное расслоение в фазовом пространстве системы. В качестве следствия получено описание всех систем с невырожденными особенностями на комплексной проективной плоскости.
- Предъявлен новый топологический инвариант, классифицирующий потоки Морса–Смейла на двумерных поверхностях. В частности, получен список таких потоков для малой сложности.
- Проведен топологический анализ интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$. В частности, вычислены инварианты Фоменко для этой интегрируемой системы.

- Исследована топология задачи двух центров на двумерной сфере. В частности, вычислены соответствующие инварианты Фоменко–Цишанга. Тем самым на этом примере продемонстрирована возможность применения теории топологической классификации к интегрируемым системам, гамильтоновы потоки которых не являются полными.
- Для интегрируемых систем, обладающих бигамильтоновой структурой, получено описание в алгебраических терминах множества особенностей ранга 0 и условие их невырожденности. В частности, на основе этих результатов получено описание особенностей многомерной интегрируемой системы, описывающей динамику n -мерного твердого тела.

Результаты диссертации неоднократно излагались на семинаре «Современные геометрические методы» и Кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ, а также на научно-исследовательских семинарах в различных зарубежных научных центрах (Токио, Лейпциг, Бохум, Бремен, Бонн, Йена, Белград, Лафборо). Кроме того, были сделаны доклады на следующих международных конференциях:

- International conference dedicated to the 90th anniversary of L. S. Pontryagin (1998, Москва).
- Symposium dedicated to 150th anniversary of birthday of Sofia V. Kovalevskaya (2000, Санкт-Петербург).
- International conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii (2001, Москва).
- International conference «Contemporary Geometry and Related Topics» (2002, Белград).
- International conference «Classical Problems in the Rigid Body Dynamics» (2004, Донецк).
- The 3rd Seminar on Geometry & Topology (2004, Табриз).
- International conference «Alexandrov Readings» dedicated to 110th anniversary of birthday of P. S. Alexandrov (2006, Москва).

- International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems» (2008, Белград).
- International conference «Modern problems of mathematics, mechanics and their applications» dedicated to the 70th anniversary of rector of MSU acad. V. A. Sadovnichy (2009, Москва).

Автор благодарен своему научному консультанту академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постоянное внимание к работе и поддержку, всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за исключительно теплую и дружескую атмосферу, способствующую успешной работе, а также лично Алексею Викторовичу Болсинову за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в диссертации.

Глава 1. ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В этой главе содержится краткое описание необходимых для дальнейшего определений и результатов, связанных с интегрируемыми гамильтоновыми системами и их особенностями. (подробнее см., например, в книге [12] и обзоре [74]).

1.1. Топологический анализ интегрируемых гамильтоновых систем

1.1.1. Интегрируемые гамильтоновы системы

Симплектическое многообразие (M, ω) — это гладкое $2n$ -мерное многообразие M с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой ω , которая называется *симплектической формой* (или *симплектической структурой*).

Любая гладкая функция H на симплектическом многообразии (M, ω) задает на нем векторное поле, называемое *косым градиентом* функции H (обозначение: $\text{sgrad } H$). Это поле двойственно дифференциалу функции H относительно симплектической формы ω .

Если поле $\text{sgrad } H$ является полным на M , то оно задает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\Phi_H^t: M \rightarrow M$, являющихся сдвигами на время t вдоль траекторий поля $\text{sgrad } H$ (*гамильтонов поток*). Эта динамическая система называется *гамильтоновой системой с гамильтонианом H на фазовом пространстве M* . Если $\dim M = 2n$, то говорят, что гамильтонова система имеет n *степеней свободы*. В локальных координатах (x^1, \dots, x^{2n}) гамильтонова система задается уравнениями $\dot{x}^i = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$, где ω^{-1} — матрица, обратная к матрице симплектической формы ω .

Для симплектического многообразия (M, ω) можно задать билинейную кососимметрическую операцию на пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на M по формуле $\{f, g\} = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$. Эта операция называется *скобкой Пуассона* и задает струк-

туру алгебры Ли на $C^\infty(M)$. В терминах скобки Пуассона гамильтонова система с гамильтонианом H записывается в виде $\dot{x}^i = \{x^i, H\}$.

Функция F на фазовом пространстве M называется *первым интегралом* (или просто *интегралом*) гамильтоновой системы с гамильтонианом H , если F постоянна вдоль траекторий системы (т. е. вдоль траекторий векторного поля $v = \text{sgrad } H$). Это означает, что $v(F) = 0$. В терминах скобки Пуассона это условие переписывается следующим образом: $\{F, H\} = 0$.

Если скобка Пуассона двух функций тождественно равна нулю, то говорят, что функции *коммутируют* (относительно данной скобки Пуассона). Таким образом, интегралы гамильтоновой системы — это в точности функции, коммутирующие с ее гамильтонианом.

Определение 1. Гамильтонова система на $2n$ -мерном симплектическом многообразии (M, ω) (т. е. система с n степенями свободы) называется *интегрируемой по Лиувиллю* (или просто *интегрируемой*), если для нее существует n попарно коммутирующих функционально независимых интегралов F_1, \dots, F_n , для которых соответствующие векторные поля $\text{sgrad } F_i$ полны на M .

Отметим, что условие полноты векторных полей на многообразии M автоматически выполнено, если M компактно.

Функциональная независимость интегралов F_1, \dots, F_n означает, что для почти всех точек $x \in M$ дифференциалы функций $dF_1(x), \dots, dF_n(x)$ в точке x линейно независимы. Точки, в которых интегралы зависимы, называются *особыми точками* системы.

Смысл определения 1 проясняет следующая классическая теорема.

Теорема 1 (Теорема Лиувилля). Пусть $v = \text{sgrad } H$ — интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) с интегралами F_1, \dots, F_n . Пусть \mathcal{L} — неособая (т. е. не содержащая особых точек) связная компонента совместной поверхности уровня интегралов F_1, \dots, F_n . Тогда \mathcal{L} диффеоморфно прямому произведению k -мерного тора T^k и \mathbb{R}^{n-k} .

Более того, если многообразие \mathcal{L} компактно, то оно диффеоморфно n -мерному тору T^n , и некоторая окрестность U этого тора диффеоморфна прямому произведению T^n и n -мерного диска D^n , причем существуют координаты s_1, \dots, s_n на

диске D^n и угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на торе T^n , в которых симплектическая структура ω на U имеет вид $\sum_{i=1}^n ds_i \wedge d\varphi_i$, а гамильтонова система записывается в виде $\dot{s}_i = 0$, $\dot{\varphi}_i = c_i(s_1, \dots, s_n)$.

Торы T^n , описанные в теореме 1, называются *торами Лиувилля* (или *лиувиллевыми торами*). Координаты s_1, \dots, s_n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ называются координатами *действие-угол*.

Замечание 1. Хотя выбор интегралов для конкретной гамильтоновой системы неоднозначен, обычно мы будем считать, что они фиксированы. Более того, как правило, мы не будем выделять гамильтониан среди набора интегралов. Таким образом, говоря об интегрируемой гамильтоновой системе, мы будем иметь в виду набор данных $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, подразумевая, что гамильтониан H есть некоторая функция от F_1, \dots, F_n .

Отметим, что выбор гамильтониана важен, если интересоваться динамикой на инвариантных многообразиях системы. Однако мы будем рассматривать лишь топологические свойства слоения, порождаемого этими инвариантными многообразиями, и игнорировать динамику на них (см. определение 4).

С любой интегрируемой гамильтоновой системой $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ связано следующее действие коммутативной группы \mathbb{R}^n на фазовом пространстве M , порожденное гамильтоновыми потоками первых интегралов.

Определение 2. Любой элемент $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ группы \mathbb{R}^n задает диффеоморфизм $\Phi_{F_\lambda}^1 : M \rightarrow M$, являющийся сдвигом на 1 вдоль траекторий косого градиента функции $F_\lambda = \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n$. Поскольку векторные поля $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ коммутируют и полны на M , отображение $\lambda \mapsto \Phi_{F_\lambda}^1$ является гомоморфизмом $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Diff } M$ и, следовательно, определяет действие группы \mathbb{R}^n на многообразии M . Мы будем называть это действие *гамильтоновым действием*¹ группы \mathbb{R}^n , порожденным функциями F_1, \dots, F_n (или соответствующим интегрируемой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$).

¹По-видимому, здесь нет единой терминологии. В различных работах это действие называют как “гамильтоновым”, так и “пуассоновым”.

Как видно из этого определения, интегрируемая гамильтонова система $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ однозначно определяет соответствующее гамильтоново действие группы \mathbb{R}^n . Переход от гамильтонова действия группы \mathbb{R}^n на симплектическом многообразии (M, ω) к интегрируемой гамильтоновой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ эквивалентен выбору базиса в \mathbb{R}^n (если, конечно, нам не важен выбор гамильтониана; см. замечание 1). В этом смысле понятия интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы и гамильтонова действия группы \mathbb{R}^n эквивалентны.

Интегрируемой гамильтоновой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ соответствует отображение $\mathbf{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Оно называется *отображением момента*.

1.1.2. Слоение Лиувилля

Основным объектом исследования при изучении топологии интегрируемых гамильтоновых систем является слоение (с особенностями), определяемое следующим образом.

Определение 3. Слоение на фазовом пространстве M интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, образованное связными компонентами прообразов $\mathbf{F}^{-1}(y)$ при отображении момента (т. е. связными компонентами совместных поверхностей уровня первых интегралов F_1, \dots, F_n), называется *слоением Лиувилля*, соответствующим этой системе.

Обозначим множество критических точек отображения момента \mathbf{F} через $K = \{x \in M \mid \text{rk } d\mathbf{F}(x) < n\}$. Множество критических значений $\Sigma = \mathbf{F}(K)$ (образ множества K при отображении \mathbf{F}) называется *бифуркационной диаграммой* отображения момента \mathbf{F} .

Слои слоения Лиувилля, не содержащие критических точек отображения момента, называются *регулярными*. Все остальные слои называются *особыми* (или *сингулярными*).

По теореме Лиувилля все компактные регулярные слои являются торами Лиувилля. Если точка y в образе отображения момента движется по гладкой кривой, не пересекая бифуркационную диаграмму Σ , то торы Лиувилля в ее прообразе глад-

ко трансформируются. Если же точка y пересекает Σ , то происходит некоторая бифуркация этих торов.

1.1.3. Типы эквивалентности

Основная задача при топологическом (качественном) исследовании интегрируемой гамильтоновой системы состоит в том, чтобы описать топологию соответствующего слоения Лиувилля. Теорема Лиувилля дает полный ответ на этот вопрос в окрестности лиувиллевых торов, но не содержит почти никакой информации о структуре слоения Лиувилля в окрестности особых слоев.

Чтобы “классифицировать” интегрируемые гамильтоновы системы в каком-нибудь смысле, необходимо определить для них некоторое отношение эквивалентности.

Определение 4. Две интегрируемые гамильтоновы системы на U_1 and U_2 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\Psi: U_1 \rightarrow U_2$, отображающий каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2 .

Рассматривая другие классы отображений Ψ , мы получим другие отношения эквивалентности. Например, можно заменить “гомеоморфизм” в определении 4 на “диффеоморфизм” или “симплектоморфизм” (см. [74]).

Кроме того, можно по-разному выбирать множества U_1 и U_2 в определении 4. При изучении “глобальных” свойств интегрируемых систем в качестве такого множества естественно рассматривать все фазовое пространство или изоэнергетическую поверхность системы (т. е. поверхность уровня гамильтониана). Например, для изоэнергетических поверхностей имеется полный топологический инвариант (решающий задачу классификации в этом случае), построенный в работе [63].

Выбирая в качестве множеств U_1 и U_2 окрестности особых точек или окрестности особых слоев соответствующих слоений Лиувилля, мы, фактически, говорим об “эквивалентности особенностей” интегрируемых систем. Более точно, *локальная* и *полулокальная* классификации особенностей интегрируемых гамильтоновых систем означают их классификацию относительно следующих отношений эквивалентности.

Определение 5. Пусть x_1 и x_2 — критические точки отображений момента для интегрируемых гамильтоновых систем на (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) соответственно, а $L_1 \ni x_1$ и $L_2 \ni x_2$ — особые слои соответствующих слоений Лиувилля. Будем говорить, что эти *особенности локально* (соотв. *полулокально*) *лиувиллево эквивалентны*, если существуют такие окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 (соотв. слоев L_1 и L_2), что системы на U_1 и U_2 лиувиллево эквивалентны, причем отображение Ψ из определения 4 отображает точку x_1 в точку x_2 (соотв. слой L_1 в слой L_2).

Как и в определении 4, здесь можно определять другие отношения эквивалентности, рассматривая различные классы отображений Ψ . Мы рассматриваем классификацию особенностей только с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Поэтому в дальнейшем мы иногда будем называть “лиувиллеву эквивалентность” просто “эквивалентностью”.

1.2. Невырожденные особенности

Критические точки отображения момента \mathbf{F} , соответствующего интегрируемой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, являются ее особыми точками. Если $\text{rk } d\mathbf{F}(x) = r$, то говорят, что x является *особой точкой ранга r* (или *особой точкой коранга $n-r$*). Это условие равносильно тому, что орбита \mathcal{O}_x соответствующего гамильтонова действия группы \mathbb{R}^n , проходящая через точку x , имеет размерность r .

Ясно, что каждый регулярный слой слоения Лиувилля для интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы является n -мерной орбитой соответствующего гамильтонова действия. Особый слой L может быть объединением нескольких орбит (разных размерностей). Если $r = \min_{x \in L} \dim \mathcal{O}_x$, то говорят, что L является *особенностью ранга r* (*коранга $n-r$*).

Как обычно, чтобы говорить о классификации особенностей, необходимо выделить некоторый класс “особенностей общего положения”. Напомним сначала определение невырожденности для особенностей ранга 0 (см. [12], [74]).

Пусть $x \in M$ — особая точка ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, т.е. $dF_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для каждой функции F_i можно определить линейный оператор $A_{F_i}: T_x M \rightarrow T_x M$ по формуле

$A_{F_i} = \omega^{-1} d^2 F_i(x)$. Этот оператор является линейризацией векторного поля $\text{sgrad } F_i$ в точке x и может быть интерпретирован как элемент алгебры Ли $\text{sp}(T_x M)$ (т.е. алгебры Ли группы линейных симплектических преобразований касательного пространства $T_x M$).

Легко проверяется, что если $\{F_i, F_j\} = 0$, то $[A_{F_i}, A_{F_j}] = 0$. Поскольку интегралы F_1, \dots, F_n попарно коммутируют, мы получаем, что каждая особая точка x ранга 0 задает коммутативную подалгебру \mathfrak{h}_x в $\text{sp}(T_x M)$ порожденную операторами A_{F_1}, \dots, A_{F_n} .

Определение 6. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга 0 называется *невыврожденной*, если \mathfrak{h}_x является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\text{sp}(T_x M)$.

Определение 6 можно также переформулировать следующим образом.

Определение 6'. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга 0 называется *невыврожденной*, если билинейные формы $d^2 F_1(x), \dots, d^2 F_n(x)$ линейно независимы и существует линейная комбинация $\lambda_1 d^2 F_1(x) + \dots + \lambda_n d^2 F_n(x)$, для которой корни ее “характеристического многочлена”

$$\chi(t) = \det \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i d^2 F_i(x) - t \cdot \omega \right) \quad (1)$$

попарно различны.

Теперь сформулируем определение невырожденности в общем случае.

Пусть $x \in M$ — особая точка ранга r интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$. Тогда орбита \mathcal{O}_x соответствующего гамильтонова действия, проходящая через точку x , имеет размерность r .

Рассмотрим следующие два линейных подпространства в касательном пространстве $T_x M$: подпространство $L_x = T_x \mathcal{O}_x$ (порожденное косыми градиентами функций F_1, \dots, F_n в точке x) и его косо-ортогональное дополнение L'_x . Поскольку функции F_1, \dots, F_n коммутируют, L_x есть ядро ограничения симплектической структуры ω на L'_x . Отсюда следует, что ω индуцирует симплектическую форму $\tilde{\omega}$ на факторпространстве L'_x/L_x .

Размерность стабилизатора St_x точки x (при гамильтоновом действии, порожденном функциями F_1, \dots, F_n) равна $n-r$. Связная компонента единицы группы St_x изоморфна \mathbb{R}^{n-r} и ее действие на M порождает действие на $T_x M$ линейными сим-

плектическими преобразованиями. Поскольку L_x и L'_x инвариантны относительно этого действия, мы получаем симплектическое (относительно формы $\tilde{\omega}$) действие группы $\text{St}_x = \mathbb{R}^{n-r}$ на пространстве L'_x/L_x размерности $2(n-r)$.

Таким образом, после описанной редукции ситуация становится аналогичной случаю особенностей ранга 0. В частности, мы получаем коммутативную подалгебру $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ в алгебре Ли $\text{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$.

Определение 7. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга r называется *невыврожденной*, если $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\text{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$.

Особый слой L слоения Лиувилля \mathcal{L} будем называть *невыврожденным*, если все его точки являются невырожденными.

Для невырожденных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем задача локальной классификации решена (даже с точностью до симплектической эквивалентности). Ответ содержится в следующей теореме (см. [81], [117], [96], [124]).

Теорема 2 (теорема Элиассона). Пусть x — невырожденная особая точка ранга r интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$. Тогда в некоторой окрестности точки $x \in M$ существуют симплектические координаты $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ и интегралы $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n$ (задающие то же слоение Лиувилля, что и интегралы F_1, \dots, F_n) такие, что функции $\tilde{F}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ при $i = 1, \dots, r$ задаются формулой

$$\tilde{F}_i = p_i,$$

а при $i > r$ — одной из следующих формул:

- (1) $\tilde{F}_i = p_i^2 + q_i^2$ (эллиптический случай),
- (2) $\tilde{F}_i = p_i q_i$ (гиперболический случай),
- (3) $\begin{aligned} \tilde{F}_i &= p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \\ \tilde{F}_{i+1} &= p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \end{aligned}$ (случай фокус-фокус).

Из теоремы Элиассона следует, что локальная структура невырожденной особенности однозначно характеризуется ее рангом r и *типом*, т.е. тройкой чисел (m_1, m_2, m_3) , равных количеству эллиптических, гиперболических и фокусных компонент соответственно. (Отметим, что в случае двух степеней свободы особые точки

ранга ноль называются также точками типа центр-центр, центр-седло, седло-седло, фокус-фокус для типов $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно.)

Задача полулокальной классификации особенностей гораздо сложнее. Даже “малые” окрестности особых слоев могут иметь сложную топологию и не задаются однозначно простыми числовыми характеристиками (такими как ранг, количество особых точек на слое и т. п.).

1.3. Почти прямые произведения

Опишем теперь некоторый метод, позволяющий конструировать “сложные” особенности из “простых”.

Пусть $(M^{2k}, \omega, F_1, \dots, F_k)$ и $(\tilde{M}^{2l}, \tilde{\omega}, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_l)$ — интегрируемые гамильтоновы системы. Рассмотрим прямое произведение $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$. Интегралы F_i, \tilde{F}_j и 2-формы $\omega, \tilde{\omega}$ естественным образом поднимаются на многообразии $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$ (сохраним для них прежние обозначения). В результате мы получаем новую интегрируемую систему (с $k + l$ степенями свободы)

$$(M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}, \omega + \tilde{\omega}, F_1, \dots, F_k, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_l).$$

Точка $(x, \tilde{x}) \in M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$ является особой точкой системы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек x, \tilde{x} является особой. Более того, особая точка (x, \tilde{x}) является невырожденной тогда и только тогда, когда x и \tilde{x} являются невырожденными (или неособыми), причем ранг особой точки (x, \tilde{x}) равен сумме рангов точек x и \tilde{x} .

Интегрируемая гамильтонова система, полученная описанным способом, называется *прямым произведением*. Аналогичным образом эту операцию можно определить для произвольного числа сомножителей.

Особенность интегрируемой гамильтоновой системы, рассматриваемая с локальной (соотв. полулокальной) точки зрения, называется *особенностью типа прямого произведения*, если она локально (соотв. полулокально) эквивалентна прямому произведению систем на некоторых окрестностях соответствующих точек (соотв. слоев).

Из теоремы Лиувилля следует, что любую интегрируемую гамильтонову систему с n степенями свободы в окрестности тора Лиувилля можно рассматривать как прямое произведение n тривиальных систем с одной степенью свободы. Теорема Элиассона говорит о том, что локально каждая невырожденная особенность может быть разложена в прямое произведение базисных невырожденных особенностей (двумерных и четырехмерных).

Как было доказано Н. Т. Зунгом (см. теорему 3), аналогичное описание топологии невырожденных особенностей существует и в полулокальном случае. Это описание дается в терминах “почти прямых произведений”, которые определяются следующим образом.

Рассмотрим особенность $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, являющуюся прямым произведением особенностей, и действия ρ_1, \dots, ρ_m конечной группы G на ее сомножителях, удовлетворяющие следующим условиям:

- каждое отображение $\rho_i(g): W_i \rightarrow W_i$ является симплектоморфизмом, сохраняющим функции, которые определяют слоение Лиувилля на W_i ;
- действие ρ группы G на $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, заданное формулой $\rho(g)(x_1, \dots, x_m) = (\rho_1(g)(x_1), \dots, \rho_m(g)(x_m))$, свободно.

Факторизуя пространство $U = W_1 \times \cdots \times W_m$ по действию ρ группы G , мы получаем гладкое многообразие U/G , причем симплектическая структура и коммутирующие функции, определяющие слоение Лиувилля, переносятся естественным образом с U на U/G .

Определение 8. Особенности вида $(W_1 \times \cdots \times W_m)/G$ называются *почти прямыми произведениями*. Особенности, лиувиллево эквивалентные почти прямым произведениям, будем называть *особенностями типа почти прямого произведения*.

Оказывается, что все невырожденные особенности, удовлетворяющие некоторому естественному “условию нерасщепляемости”, лиувиллево эквивалентны почти прямым произведениям простейших (двумерных и четырехмерных) особенностей.

Далее мы будем в основном рассматривать гиперболические особенности ранга 0. Поэтому сформулируем здесь “условие нерасщепляемости” (определение 9) и “теорему о разложении” (теорема 3) лишь для этого случая (соответствующие определения и формулировки в общем случае см. в [121], [12], [74, раздел 4.3]).

Пусть L — невырожденная гиперболическая особенность ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы. Это означает, что все особые точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, лежащие на слое L , являются гиперболическими особыми точками ранга 0 (будем предполагать, что число особых точек конечно; см. раздел 1.5). Рассмотрим “локальную бифуркационную диаграмму” для точки $x^{(j)}$, т. е. бифуркационную диаграмму отображения момента \mathbf{F} , ограниченного на малую окрестность точки $x^{(j)}$. Она имеет стандартный вид, поскольку в силу теоремы Элиассона она задается уравнением $\tilde{F}_1^{(j)} \cdot \dots \cdot \tilde{F}_n^{(j)} = 0$, где $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ можно рассматривать как координаты в окрестности образа точки $x^{(j)}$ при отображении момента \mathbf{F} . Ясно, что \mathbf{F} отображает все точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ в одну и ту же точку. Однако локальные бифуркационные диаграммы для точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, вообще говоря, могут быть различны. “Условие нерасщепляемости” заключается в том, чтобы они были в точности одни и те же для всех точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$. Более точно это условие можно сформулировать следующим образом.

Определение 9. Будем говорить, что невырожденная гиперболическая особенность ранга 0 для системы с n степенями свободы удовлетворяет *условию нерасщепляемости*, если для некоторой окрестности U особого слоя L бифуркационная диаграмма отображения момента $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть переведена некоторым диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в объединение координатных гиперплоскостей.

Отметим, что для всех известных нам примеров интегрируемых гамильтоновых систем, возникающих в механике и физике, условие нерасщепляемости выполнено. “Искусственный” пример системы, для которой это условие не выполнено, можно построить уже в случае двух степеней свободы (см. раздел 2.8). (

Теперь мы можем сформулировать “теорему о разложении” (отметим еще раз, что мы приводим формулировку не для произвольных невырожденных особенностей, а лишь для гиперболических особенностей ранга 0).

Теорема 3 (Н. Т. Зунг [121]). *Любая невырожденная гиперболическая особенность ранга 0 (для системы с n степенями свободы), удовлетворяющая условию нерасщепляемости, полулокально эквивалентна почти прямому произведению гиперболических особенностей систем с одной степенью свободы.*

Сформулируем еще один результат для систем с двумя степенями свободы, который, формально говоря, следует из “общей” теоремы Зунга о разложении, но был получен гораздо раньше и, фактически, являлся одним из источников развития теории топологической классификации, в рамках которой, в частности, была получена и теорема Зунга.

Определение 10. Пусть (M^4, ω, H, F) — интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, а $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ — ее неособая изоэнергетическая поверхность. Интеграл F называется *боттовским* на Q_h^3 , если его критические точки (как функции на Q_h) образуют подмногообразия, а ограничение F на малую трансверсальную площадку к этим подмногообразиям является функцией Морса.

Не сложно понять, что условие боттовости интеграла эквивалентно тому, что критические точки интеграла F на Q_h являются для рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы невырожденными особыми точками ранга 1 (в смысле определения def-nondeg) — эллиптическими или гиперболическими.

Теорема 4 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [63]). *Пусть F — боттовский интеграл на компактной неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Слоение Лиувилля в окрестности критического уровня интеграла F в Q_h^3 имеет один из следующих видов (с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности):*

- 1) $A \times S^1$, где A — эллиптическая особенность системы с одной степенью свободы;
- 2) $V \times S^1$, где V — гиперболическая особенность системы с одной степенью свободы;
- 3) $(V \times S^1)/\mathbb{Z}_2$, где инволюция τ , определяющая действие группы \mathbb{Z}_2 , имеет неподвижные точки только в некоторых особых точках ранга 0 на V и действует как сдвиг на S^1 .

Перечисленные в теореме 4 три типа слоения Лиувилля (на трехмерных кусках изоэнергетической поверхности) иногда называют *3-атомами* (в отличие от “двухмерных” атомов, которые подробно обсуждаются в разделе 2.1).

Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ СЕДЛОВЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассматриваются невырожденные особенности ранга 0, имеющие только гиперболические компоненты. Основная цель — получить полулокальную классификацию таких особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Опишем более точно класс особенностей, для которых решается задача классификации:

- 1) рассматриваемый особый слой невырожден и содержит лишь конечное число особых точек ранга 0, причем все они чисто гиперболические;
- 2) в некоторой окрестности рассматриваемого особого слоя все слои слоения Лиувилля компактны;
- 3) рассматриваемая особенность удовлетворяет условию нерасщепляемости (см. определение 9).

В силу теоремы Зунга о разложении (теорема 3) особенность, удовлетворяющую условию 3), можно рассматривать как почти прямое произведение двумерных особенностей. Именно это свойство особенности мы будем использовать, и можно было бы потребовать его выполнения вместо условия 3). Однако при исследовании конкретных систем удобнее проверять условие 3). Особенности, для которых выполнены условия 1)–3), будем называть *седловыми особенностями*.

Ясно, что имеется бесконечное число неэквивалентных седловых особенностей. Поскольку n (число степеней свободы) и k (сложность, т. е. количество особых точек ранга 0 на слое) являются инвариантами седловой особенности относительно лиувиллевой эквивалентности, имеет смысл говорить о классификации особенностей для данной пары чисел n и k . Тем самым бесконечный “список” всех особенностей можно разбить на конечные части.

Задача полулокальной классификации седловых особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности может быть сформулирована следующим образом:

описать алгоритм, позволяющий для данных n и k получить полный список неэквивалентных седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы.

Отметим, что кроме алгоритма необходим “простой язык” для описания самих списков особенностей, а также особенностей конкретных систем. Представление особенностей в виде почти прямых произведений достаточно удобно для такого описания. Однако теорема о разложении не дает ответа на вопрос о том, как получить список особенностей данного типа и данной сложности.

2.1. Атомы и f -графы

2.1.1. Атомы как особенности систем с одной степенью свободы

Простейшими седловыми особенностями являются особенности систем с одной степенью свободы. Все такие системы являются интегрируемыми по определению и задаются просто функцией (гамильтонианом H) на симплектическом многообразии (M^2, ω) . Слоями соответствующего слоения Лиувилля являются связные компоненты линий уровня гамильтониана H .

Особые точки системы (M^2, ω, H) — это критические точки функции H . Их невырожденность (как особых точек системы) означает невырожденность второго дифференциала функции H в этих точках.

Определение 11. Класс полулокальной лиувиллевой эквивалентности невырожденной особенности для системы с одной степенью свободы называется *атомом*.

Представителей класса эквивалентности мы также будем называть *атомами*. Иными словами, атом можно рассматривать как гамильтонову систему (V, ω, H) с особенностью, где H — функция Морса с одним критическим значением 0, а $V = H^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ — (замкнутая) связная окрестность особого слоя.

Очевидно, что для систем с одной степенью свободы существует лишь одна эллиптическая особенность (с точностью до лиувиллевой эквивалентности). Все остальные невырожденные особенности являются *седловыми атомами*. Для крат-

кости будем называть их просто *атомами*. Количество седловых точек на особом слое (они также называются *вершинами атома*) называется *сложностью атома*.

Пример 1. На рис. 1 и рис. 2 изображены все атомы сложности 1 и 2 соответственно. Они изображены в виде пары (V, L) , где L — особый слой. Очевидно, что пара (V, L) однозначно определяет атом как класс полулокальной лиувиллевой эквивалентности.

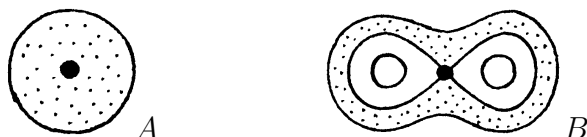


Рис. 1: Эллиптический атом A и седловой атом B сложности 1

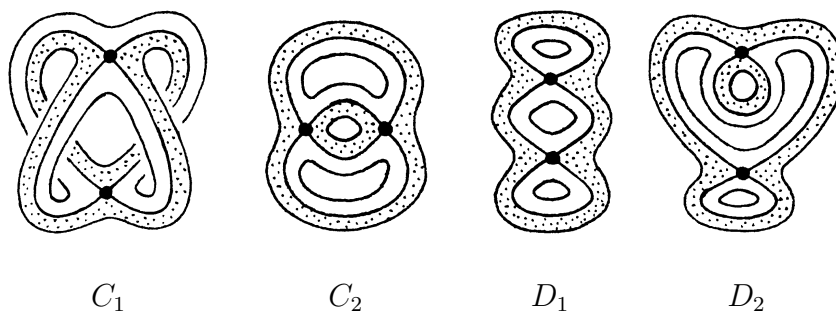


Рис. 2: Список атомов сложности 2

2.1.2. Функции Морса и f -графы.

В работе [43] рассматривалась задача классификации функций Морса на замкнутых двумерных поверхностях, имеющих единственный седловой критический уровень, с точностью до послынного гомеоморфизма. Как легко понять, для ориентируемых поверхностей эта задача эквивалентна задаче полулокальной классификации седловых особенностей систем с одной степенью свободы, т. е. атомов (определение 11).

В работе [43] было введено понятие f -графа и построен инвариант, решающий указанную задачу классификации (как для ориентируемых, так и для неориентируемых поверхностей). Кроме того, в работе [43] было описано соответствие между f -графами и подгруппами конечного индекса в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Обобщение этой конструкции на многомерный случай содержится в разделе 2.4.

Поскольку при классификации особенностей интегрируемых систем нас интересует только ориентируемый случай, общую конструкцию можно упростить. Приведем некоторые определения и результаты из [43] с учетом этих упрощений.

Определение 12. Конечный граф Γ , некоторые из ребер которого ориентированы, называется *f-графом*, если все его вершины имеют степень 3 и в окрестности каждой вершины он имеет следующую структуру: среди трех ребер, инцидентных вершине, имеется одно неориентированное, одно входящее и одно выходящее (при этом одно и то же ориентированное ребро может быть одновременно входящим и выходящим для некоторой вершины, т. е. граф Γ может иметь ориентированные петли).

Из определения *f*-графа следует, что его ориентированные ребра образуют непесекающиеся циклы, а каждое неориентированное ребро соединяет пару различных вершин. *Сложностью* *f*-графа называется число его неориентированных ребер. Очевидно, любой *f*-граф сложности k имеет $2k$ вершин и $3k$ ребер.

Замечание 2. Определение *f*-графа, данное в работе [43], отличается от определения 12, поскольку при изучении гамильтоновых систем нам достаточно рассматривать только ориентируемый случай. В исходном определении из работы [43] ребра *f*-графа были снабжены метками ± 1 . Такой объект (*f*-граф с метками) также рассматривается в диссертации (в разделе 3.2.4) в связи с классификацией потоков Морса на поверхностях и назван там *меченым f-графом*.

Рассмотрим седловую особенность гамильтоновой системы с одной степенью свободы, т. е. гамильтонову систему (V, ω, H) , где H — функция Морса с одним критическим значением 0, а $V = H^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ — замкнутая связная окрестность особого слоя. Опишем конструкцию, сопоставляющую этой седловой особенности некоторый связный *f*-граф Γ .

Рассмотрим уровень $H^{-1}(-\varepsilon)$ как набор циклов, ориентированных потоком $\text{sgrad } H$. Рассмотрим также сепаратрисы векторного поля $\text{grad } H$ (относительно любой метрики), начинающиеся на этих циклах и входящие в седловые точки на особом слое $L = H^{-1}(0)$. Вершинами *f*-графа Γ будут концы сепаратрис, лежащие на уровне $H^{-1}(-\varepsilon)$. Каждая пара сепаратрис, входящих в одну и ту же особую точку,

образует неориентированное ребро f -графа Γ . Ориентированными ребрами будут отрезки циклов $H^{-1}(-\varepsilon)$ между вершинами.

Определение 13. Будем говорить, что построенный f -граф Γ *соответствует* гамильтоновой системе (V, ω, H) (или седловой особенности, заданной этой системой).

Подчеркнем, что f -граф Γ , соответствующий атому (V, ω, H) , не предполагается вложенным в V , а является абстрактным графом, удовлетворяющим условиям определения 12.

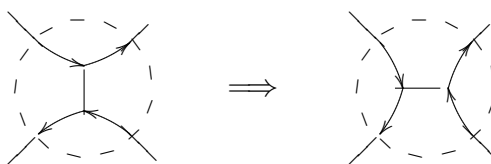
Два f -графа считаются *одинаковыми* (или *изоморфными*), если существует биекция множества вершин одного f -графа на множество вершин другого, при которой неориентированные ребра переходят в неориентированные, а ориентированные — в ориентированные с сохранением ориентации.

Если f -графы Γ и Γ' , соответствующие гамильтоновым системам (V, ω, H) и (V', ω', H') , одинаковы, то эти системы эквивалентны. Обратное утверждение “почти верно”. А именно, если система (V', ω', H') эквивалентна системе (V, ω, H) , то соответствующий ей f -граф Γ' совпадает с одним из четырех f -графов, соответствующих четырем системам $(V, \pm\omega, \pm H)$.

Это приводит к следующему определению.

Определение 14. Два f -графа Γ и Γ' называются *эквивалентными*, если Γ' можно получить из Γ , применяя одну из следующих двух операций (или их композицию):

- *изменение ориентации f -графа*, т. е. изменение ориентации у всех его ориентированных ребер;
- *переворачивание f -графа*, т. е. замена окрестностей всех его неориентированных ребер по правилу



Отметим, что изменение ориентации f -графа соответствует изменению знака у ω , а операция переворачивания — изменению знака у H и у ω . Обе операции, очевидно, являются инволюциями.

Пример 2. На рис. 3 изображены все f -графы сложности 1 и 2. Они соответствуют атомам B, C_1, C_2, D_1, D_2 , приведенным на рис. 1 и 2. При этом f -графы сложности 1 переходят друг в друга при операции переворачивания. Два из пяти f -графов сложности 2 (они соответствуют атому D_1) также переходят друг в друга при переворачивании, а остальные три при переворачивании не меняются. Отметим, что минимальная сложность f -графа, который не переходит в себя при изменении ориентации, равна 4.

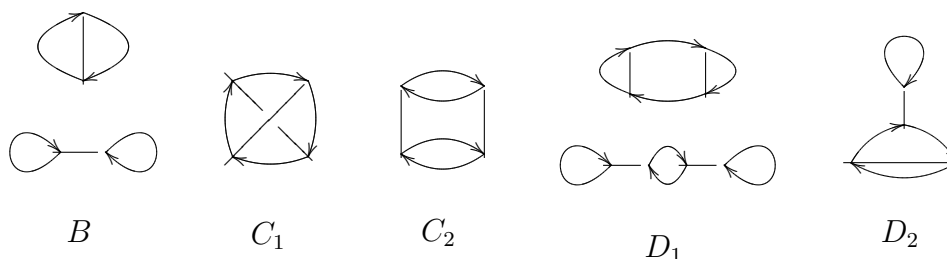


Рис. 3: Список f -графов сложности 1 и 2

Теперь соответствие между седловыми особенностями гамильтоновых систем с одной степенью свободы и f -графами можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 5 ([43]). *Седловые особенности гамильтоновых систем с одной степенью свободы полулокально лувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им f -графы. При этом любой связный f -граф соответствует некоторой седловой особенности.*

Теорема 5 означает, что связный f -граф, рассматриваемый с точностью до переворачивания и изменения ориентации, является полным инвариантом для задачи классификации атомов. Поскольку f -граф является комбинаторным объектом, можно предъявить простой алгоритм для составления списка всех f -графов данной сложности k . Приведем один из возможных способов алгебраического описания f -графов, который удобен для их перечисления с помощью компьютера.

Пусть Γ — f -граф сложности k . Рассмотрим некоторую нумерацию его вершин $1, 2, \dots, 2k$. Тогда ориентированные ребра f -графа Γ задают перестановку $\mu_\Gamma \in S_{2k}$ (где S_m — симметрическая группа степени m), которая переводит i в j , если существует ориентированное ребро, идущее из вершины с номером i в вершину с номером j . Аналогично, неориентированные ребра задают перестановку $\tau_\Gamma \in S_{2k}$,

переставляющую местами i и j , если существует неориентированное ребро, соединяющее вершины с номерами i и j .

По паре перестановок $\tau_\Gamma, \mu_\Gamma \in S_{2k}$ исходный f -граф Γ однозначно восстанавливается. А именно, в качестве множества вершин рассмотрим множество $\{1, 2, \dots, 2k\}$, неориентированные ребра задаются (неупорядоченными) парами $\{i, \tau_\Gamma(i)\}$, а ориентированные ребра — упорядоченными парами $\{i, \mu_\Gamma(i)\}$, где $i = 1, 2, \dots, 2k$. Очевидно, что эта процедура (построение f -графа по паре перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$) корректно определена, если перестановка τ “разбивает вершины на пары”, т. е. является инволюцией без неподвижных точек.

Итак, каждая пара перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$, для которой τ — инволюция без неподвижных точек, однозначно задает некоторый f -граф $\Gamma(\tau, \mu)$. При этом различные пары могут задавать одинаковые f -графы, поскольку перенумерация вершин не влияет на топологию f -графа. Любую перенумерацию можно рассматривать как сопряжение пары перестановок τ, μ при помощи некоторой перестановки $g \in S_{2k}$, т. е. как замену перестановок τ, μ на $g\tau g^{-1}, g\mu g^{-1}$. Получаем следующее простое утверждение.

Предложение 1. *Два f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ и $\Gamma(\tau', \mu')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\tau' = g\tau g^{-1}$ и $\mu' = g\mu g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in S_{2k}$.*

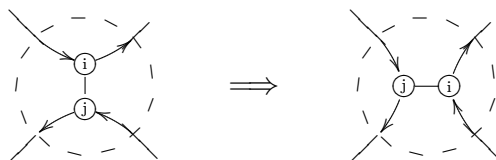
Очевидно, что все перестановки, являющиеся инволюциями без неподвижных точек, сопряжены. Поэтому нумерацию вершин можно выбрать так, чтобы перестановка τ приняла некоторый стандартный вид τ^* . Будем считать, что $\tau^*(2i - 1) = 2i$ и $\tau^*(2i) = 2i - 1$, где $i = 1, \dots, k$. Зафиксировав таким образом перестановку τ , получаем, что каждая перестановка $\mu \in S_{2k}$ однозначно задает некоторый f -граф $\Gamma(\mu) = \Gamma(\tau^*, \mu)$. Следующее утверждение также легко проверяется.

Предложение 2. *Два f -графа $\Gamma(\mu)$ и $\Gamma(\mu')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mu' = g\mu g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in Z_{\tau^*}$, где Z_{τ^*} — централизатор перестановки τ^* в группе S_{2k} .*

Предложение 2 означает, что f -графы сложности k “нумеруются” орбитами действия группы Z_{τ^*} сопряжениями на S_{2k} . Поскольку нас интересуют не сами f -

графы, а атомы, которые им соответствуют, необходимо еще провести факторизацию по операциям изменения ориентации и переворачивания.

Легко понять, что при изменении ориентации f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ получается f -граф $\Gamma(\tau, \mu^{-1})$, а при переворачивании f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ — f -граф $\Gamma(\tau, \tau\mu)$. Здесь мы считаем, что при операции переворачивания соответствие между “старыми” и “новыми” вершинами f -графа устанавливается следующим образом:



т. е. для каждого ориентированного ребра сохраняется номер вершины, являющейся его началом.

Таким образом, для перестановки μ имеются еще две операции (кроме сопряжений элементами из Z_{τ^*}), не меняющие f -граф $\Gamma(\mu) = \Gamma(\tau^*, \mu)$: замена μ на μ^{-1} и замена μ на $\tau^*\mu$. Легко проверить, что обе эти операции коммутируют с любым сопряжением (элементом из Z_{τ^*}), а их коммутатор переводит μ в $\tau^*\mu\tau^*$, т. е. является сопряжением перестановкой τ^* . В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Перестановки μ и μ' из S_{2k} задают эквивалентные f -графы (а значит, в силу теоремы 5, и одинаковые атомы) тогда и только тогда, когда либо $\mu' = g\mu^{\pm 1}g^{-1}$, либо $\mu' = g\tau^*\mu^{\pm 1}g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in Z_{\tau^*}$, где Z_{τ^*} — центральный идеал перестановки τ^* в группе S_{2k} .*

Как видно из теорем 5 и 6, описание особенностей при помощи f -графов (или перестановок) позволяет легко составлять списки атомов (т. е. седловых особенностей для систем с одной степенью свободы). При увеличении сложности их количество растет довольно быстро. Приведем следующий результат, полученный с помощью компьютера.

Предложение 3. *Для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ количество (седловых) атомов сложности k равно соответственно 1, 4, 10, 58, 322, 3044, 33917.*

2.2. Обзор известных результатов о седловых особенностях

Начиная с двух степеней свободы классификация седловых особенностей сильно усложняется. Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении (см. также [12] и [74, раздел 5.2]).

2.2.1. Две степени свободы, сложность 1

Первые результаты о полулокальной классификации седловых особенностей были получены в работах Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [29], где рассматривались особенности сложности 1 для систем с двумя степенями свободы.

Ясно, что топология особого слоя является инвариантом особенности. Особый слой представляет из себя двумерный комплекс, клетками которого являются орбиты гамильтонова действия. В случае особенностей сложности 1 особый слой содержит одну 0-мерную клетку (особая точка), четыре 1-мерные клетки и четыре 2-мерные. При этом каждая 2-мерная клетка является “четырёхугольником”, т. е. ее граница разбита на четыре отрезка, внутренность каждого из которых гомеоморфно отображается на 1-мерную клетку при характеристическом отображении.

Л. М. Лерман и Я. Л. Уманский показали, что в случае двух степеней свободы седловые особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны. Исследовав все возможные варианты, они получили полный список, состоящий из четырех попарно неэквивалентных особенностей.

Имеется другой естественный инвариант седловой особенности (в случае двух степеней свободы), называемый “круговой молекулой”. Этот инвариант можно кратко описать следующим образом (подробнее см. в [121], [12], [74]). Пусть образ особого слоя при отображении момента \mathbf{F} есть точка $P \in \mathbb{R}^2$. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки P состоит из двух гладких кривых, трансверсально пересекающихся в точке P , которые можно считать координатными линиями (см. определение 9). Рассмотрим маленькую окружность γ с центром в точке P и ее прообраз

при отображении момента. *Круговая молекула* — это инвариант, описывающий топологию слоения Лиувилля в трехмерном многообразии $\mathbf{F}^{-1}(\gamma)$.

Круговые молекулы для всех четырех особенностей сложности 1 были вычислены в работе А. В. Болсинова [72]. Как оказалось, все они различны, и поэтому также дают классификацию особенностей сложности 1 для систем с двумя степенями свободы.

В силу теоремы о разложении каждая из четырех особенностей сложности 1 может быть представлена в виде почти прямого произведения атомов. Оказывается, для этого достаточно использовать лишь атомы сложности 1 и 2 (см. рис. 1 и рис. 2). Ответ получается следующий:

$$B \times B, \quad (B \times C_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (B \times D_1)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_2 \times C_2)/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2). \quad (2)$$

Здесь \mathbb{Z}_2 действует на сомножителях как центральная симметрия, а $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (в последнем случае) действует следующим образом: одна образующая действует на первом сомножителе как центральная симметрия, а на втором — как инволюция, оставляющая вершины атома на месте; вторая образующая, наоборот, действует на первом сомножителе как инволюция, а на втором — как центральная симметрия.

Описание четырех особенностей сложности 1 с помощью инварианта, построенного в данной работе (см. раздел 2.3), приведено на рис. 5.

2.2.2. Две степени свободы, сложность 2

Полулокальная классификация особенностей сложности 2 для систем с двумя степенями свободы была получена А. В. Болсиновым в работе [72]. Он получил их полный список, состоящий из 39 особенностей.

Оказалось, что для особенностей сложности 2 топология особого слоя уже не является полным топологическим инвариантом, т. е. некоторые из 39 попарно неэквивалентных особенностей имеют гомеоморфные особые слои. Поэтому в работе [72] был введен еще один инвариант седловой особенности, называемый “ l -типом”. Как уже отмечалось (см. предыдущий раздел), бифуркационная диаграмма в окрестности образа особого слоя состоит из двух трансверсально пересекающихся кривых γ_1 и γ_2 . Для каждой из этих кривых критические точки отображения момента в

ее прообразе образуют двумерное симплектическое подмногообразие. Слоение Лиувилля исходной системы индуцирует на этих подмногообразиях слоение, которое можно рассматривать как слоение Лиувилля для системы с одной степенью свободы. При этом особые точки ранга 0 исходной системы будут седловыми особыми точками для индуцированных слоений. Таким образом, мы получаем два атома V_1 и V_2 , соответствующие кривым γ_1 и γ_2 (см. определение 11). Эта пара атомов (V_1, V_2) называется *l-типом* особенности (см. также [12]). (Отметим, что атомы V_1, V_2 , задающие *l*-тип особенности, могут быть несвязными, т. е., строго говоря, они являются наборами атомов.)

Круговые молекулы для всех 39 особенностей сложности 2 были построены В. С. Матвеевым в работе [33] (см. также [73]). Как и в случае сложности 1, оказалось, что все они различны. Поэтому для седловых особенностей сложности 2 круговая молекула является полным инвариантом полулокальной эквивалентности.

Представление 39 особенностей сложности 2 в виде почти прямых произведений атомов было получено в работе В. В. Корнеева [26] (см. также [74, табл. 4]). Отметим, что для некоторых из 39 особенностей порядок группы, по которой необходимо проводить факторизацию прямого произведения, равен 8, причем эта группа не обязательно коммутативна.

2.2.3. Три степени свободы, сложность 1

Этот случай был исследован В. В. Калашниковым [24]. Он использует подход, основанный на разложении особенностей в почти прямое произведение (отметим, что классификация особенностей сложности 1 и 2 для систем с двумя степенями свободы, описанная в разделах 2.2 и 2.3, была получена без использования теоремы о разложении).

В работе [24] сформулирована теорема о том, что количество особенностей сложности 1 для случая трех степеней свободы равно 32, и приведен их список. Список особенностей, составленный В. В. Калашниковым, содержит 32 особенности, представленные в виде почти прямых произведений атомов (см. также [12] и [74, табл. 5]). Как выяснилось недавно, в этом списке пропущены некоторые особенности, а неко-

торые из почти прямых произведений, указанных в списке, на самом деле задают эквивалентные особенности.

Правильный список седловых особенностей сложности 1 для трех степеней свободы можно получить, используя подход, предлагаемый в данной работе. Для особенностей сложности 1 общая конструкция (изложенная в §3) упрощается. Кроме того, как оказалось, особенности сложности 1 обладают интересными алгебраическими свойствами. Результаты, связанные с исследованием особенностей сложности 1 (для любого числа степеней свободы), и, в частности, их список для трех степеней свободы будут опубликованы автором отдельно.

Отметим, что рассуждения, использованные в работе [24], правильны, но доказательство теоремы о классификации сводится к некоторому перебору, который в работе не приведен. По-видимому, ошибки в списке возникли именно на этом последнем этапе доказательства.

2.2.4. Общий случай

Приведем некоторые результаты более общего характера, чем классификация особенностей данной сложности и данного типа.

1) Для систем с двумя степенями свободы ни топология особого слоя, ни l -тип особенности не являются полными инвариантами (уже для особенностей сложности 2). Однако, оказывается, что пара {топология особого слоя, l -тип} (этот инвариант называется также C - l -типом особенности) однозначно определяет седловую особенность с точностью до полулокальной эквивалентности. Этот факт был доказан В. С. Матвеевым [34] (см. также [73]).

Отметим, что C - l -тип особенности можно рассматривать и в случае любого числа степеней свободы. Неизвестно, будет ли этот инвариант полным для систем с числом степеней свободы больше двух.

Отметим также, что круговая молекула, которая является полным инвариантом для особенностей сложности 1 и 2, в общем случае таковым не является. Примеры неэквивалентных особенностей с одинаковыми круговыми молекулами были построены А. В. Грабежным (см. [74, раздел 7.3]). Простейший из них имеет сложность 4.

2) Несколько полезных утверждений об особенностях сложности 1 было доказано В. В. Калашниковым [24] для любого числа степеней свободы.

Приведем одно из них: *особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны.*

3) Одним из важных результатов о полулокальной структуре особенности безусловно является теорема Н. Т. Зунга о разложении любой седловой особенности в почти прямое произведение атомов (теорема 3). Задача классификации тесно связана с вопросом о единственности такого разложения. Очевидно, что любую особенность можно представить в виде почти прямого произведения атомов различными способами, поскольку каждый атом V можно представить как фактор другого атома \tilde{V} по действию конечной группы. Поэтому естественным является вопрос о существовании некоторого “канонического” представления особенности в виде почти прямого произведения.

В работе [121] Н. Т. Зунг вводит понятие “минимальной модели” особенности (он также называет ее “канонической моделью”).

Определение 15. *Минимальная модель* — это такое почти прямое произведение атомов $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$, что каждый (нетривиальный) элемент группы G действует нетривиально не менее чем на двух компонентах произведения $V_1 \times \cdots \times V_n$.

Как легко понять, любое почти прямое произведение атомов сводится к минимальной модели. Действительно, если некоторая подгруппа G_i группы G действует нетривиально лишь на одном сомножителе V_i , то она действует на нем свободно, и мы можем заменить сомножитель V_i на V_i/G_i , а группу G на G/G_i . Поступая так со всеми сомножителями, мы получим в результате минимальную модель.

Далее Н. Т. Зунг доказывает утверждение о том, что для каждой особенности существует единственная минимальная модель [121, Proposition 7.4]. Это утверждение было сформулировано в работе [121] для особенностей произвольного типа и ранга. В такой общности оно заведомо неверно (контрпример легко строится уже для особенностей ранга 1; см. [74, раздел 5.1]). В варианте работы [121], появившемся позднее в электронном архиве препринтов (см. [arXiv:math.DS/0106013v1](https://arxiv.org/abs/math/0106013v1)), некоторые ошибки в формулировках и доказательствах были отмечены в подстрочных примечаниях.

Тем не менее, для седловых особенностей ранга 0 утверждение о единственности минимальной модели (и его доказательство в работе [121]) верно. Отметим, что это утверждение следует также из результатов данной работы (см. предложение 5).

2.3. Построение инварианта

В этом разделе мы определяем инвариант седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем для любого числа степеней свободы. Он является обобщением инварианта (описанного в разделе 2.1) для систем с одной степенью свободы.

Как было показано в разделе 2.1, каждому f -графу сложности k соответствует пара перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$, причем τ является инволюцией без неподвижных точек. Перестановки τ, μ определены с точностью до сопряжения в S_{2k} (предложение 1), но эта неоднозначность связана лишь с нумерацией вершин f -графа. Если же рассматривать τ, μ как перестановки на самом множестве вершин соответствующего f -графа (без нумерации), то они определены однозначно структурой этого f -графа. Чтобы различать эти две ситуации, мы будем обозначать перестановки из S_{2k} через τ, μ (как и выше), а аналогичные перестановки на множестве вершин f -графа (без нумерации) — через $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}$.

Определение 16. Пусть Θ — конечный граф, множество ребер которого разбито на n непересекающихся семейств, причем некоторые из ребер ориентированы. Будем называть такой граф f -графом степени n или f_n -графом, если для него выполнены следующие условия:

- (a) каждый из n подграфов графа Θ , образованных ребрами одного семейства и всеми вершинами, является f -графом (обозначим эти f -графы через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, а соответствующие им пары перестановок через $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_n, \boldsymbol{\mu}_n$);
- (b) перестановки из разных пар коммутируют, т. е. для любых $i \neq j$

$$\boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\tau}_j \boldsymbol{\tau}_i, \quad \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\tau}_i, \quad \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\mu}_i; \quad (3)$$

- (c) действие группы \mathbb{Z}_2^n на множестве вершин графа Θ , порожденное перестановками $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_n$, свободно, т. е. любая комбинация перестановок $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_n$ (которые коммутируют в силу условия (b)) является инволюцией без неподвижных точек.

Набор из n перестановок, порождающих свободное действие группы \mathbb{Z}_2^n , будем для краткости называть *базисным* (или говорить, что эти n перестановок являются *базисными*).

Разбиение ребер f_n -графа на семейства мы также будем называть *раскраской*, а о ребрах, принадлежащих одному и тому же семейству, будем говорить как о ребрах одного *цвета*.

Отметим, что в определении f_n -графа мы не предполагаем, что нумерация семейств фиксирована. Иными словами, говоря, что два f_n -графа “одинаковы” (или “изоморфны”), мы имеем в виду следующее.

Определение 17. *Морфизмом f_n -графа Θ в f_n -граф Θ' называется отображение множества вершин графа Θ в множество вершин графа Θ' , при котором ребра одного графа переходят в ребра другого (неориентированные — в неориентированные, а ориентированные — в ориентированные с сохранением ориентации) так, что образы ребер из одного семейства f_n -графа Θ принадлежат одному семейству f_n -графа Θ' . В частности, морфизм, являющийся биекцией, будем называть *изоморфизмом*, а изоморфизм f_n -графа на себя — *автоморфизмом*.*

С топологической точки зрения, морфизм f_n -графов можно рассматривать как накрытие, которое согласовано с их структурой (т. е. с раскраской и ориентацией ребер). Поэтому морфизмы f_n -графов мы также будем называть *накрытиями*.

Из условия (с) определения 16 следует, что любой f_n -граф имеет $2^n k$ вершин. Число k будем называть *сложностью f_n -графа*. Из условия (а) ясно, что каждый из f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ имеет сложность $2^{n-1}k$, т. е. каждое семейство ребер графа Θ содержит $2^{n-1}k$ неориентированных и $2^n k$ ориентированных ребер. Степень каждой вершины графа Θ равна $3n$. Очевидно, что f_n -графы при $n = 1$ являются обычными f -графами (в смысле определения 12).

Замечание 3. Условия, накладываемые на граф Θ в определении 16, можно описать в геометрических терминах следующим образом. Множество всех неориентированных ребер f_n -графа сложности k можно рассматривать как k экземпляров одномерного остова n -мерного куба, где все ребра одного семейства параллельны. Ориентированные ребра каждого семейства образуют непересекающиеся циклы так, что выполнено условие (b) определения 16. Геометрически это условие означает, что

“сдвиг” всех вершин f -графа Γ_i вдоль ориентированных ребер j -го семейства, а также аналогичный “сдвиг” вдоль неориентированных ребер j -го семейства, где $i \neq j$, являются автоморфизмами f -графа Γ_i .

Теперь, как и в случае одной степени свободы, мы сопоставим каждой седловой особенности интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы некоторый f_n -граф. Это сопоставление можно провести аналогично тому, как это делалось для случая одной степени свободы (см. раздел 2.1), т. е. с помощью сепаратрис градиентных потоков для интегралов системы. Однако при таком подходе возникают некоторые технические трудности, связанные с выбором метрики. Мы опишем другой способ построения f_n -графа по данной седловой особенности, не задавая его вложение в фазовое пространство, а определяя для него множество вершин и множество ребер.

Рассмотрим седловую особенность $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ сложности k , где W — окрестность особого слоя L , содержащего особые точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ ранга 0. Пусть точка $P \in \mathbb{R}^n$ — образ особого слоя L при отображении момента \mathbf{F} , заданном интегралами F_1, \dots, F_n . Поскольку для рассматриваемой особенности выполнено условие нерасщепляемости (см. определение 9), бифуркационная диаграмма в некоторой окрестности точки P состоит из n гиперповерхностей, разбивающих эту окрестность на 2^n областей (будем называть их *камерами*) точно так же, как n координатных гиперплоскостей разбивают окрестность начала координат.

Выберем одну из 2^n камер Q . Отметим, что процесс построения f_n -графа (описанный ниже) для данной седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ зависит от выбора камеры, но в остальном определен однозначно.

Шаг 1. Определим множество вершин f_n -графа Θ , соответствующего рассматриваемой седловой особенности.

По теореме Элиассона для каждой точки $x^{(j)}$ в некоторой ее окрестности $O^{(j)}$ можно выбрать симплектические координаты $q_1^{(j)}, \dots, q_n^{(j)}, p_1^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}$ и заменить интегралы $(F_1, \dots, F_n) \mapsto (\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)})$ так, что $\tilde{F}_i^{(j)} = p_i^{(j)} \cdot q_i^{(j)}$. После этой замены локальная бифуркационная диаграмма для точки $x^{(j)}$ будет образована координатными гиперплоскостями. При этом функции $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ можно выбрать так, что камера Q соответствует области отрицательных значений всех этих функций. То-

гда прообраз камеры Q при отображении момента есть множество $\Delta^{(j)}$, заданное в окрестности $O^{(j)}$ неравенствами

$$\tilde{F}_1^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_n^{(j)} < 0. \quad (4)$$

Отметим, что для каждой особой точки $x^{(j)}$ имеется естественное соответствие между функциями $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ и n ребрами на границе камеры Q , которые являются прообразами координатных полуосей при диффеоморфизме $(F_1, \dots, F_n) \mapsto (\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)})$. Используя это соответствие, мы будем считать, что нумерации функций $\tilde{F}_i^{(j)}$ для всех особых точек слоя $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ согласованы (т. е. функции $\tilde{F}_i^{(j)}$ и $\tilde{F}_i^{(j')}$ соответствуют одному и тому же ребру камеры Q).

Пусть окрестность $O^{(j)}$ в координатах $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ имеет вид $(-\varepsilon, \varepsilon)^{2n}$. Тогда $\Delta^{(j)}$ имеет 2^n связных компонент, каждая из которых также является $2n$ -мерным (открытым) кубом. Таким образом, множество Π всех связных компонент подмножеств $\Delta^{(j)}$ для всех особых точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ состоит из $2^n k$ элементов. Рассмотрим множество Π как множество вершин f_n -графа Θ .

Шаг 2. Опишем теперь множество неориентированных ребер f_n -графа Θ .

Каждая вершина $v \in \Pi$ (т. е. связная компонента множества $\Delta^{(j)}$) соответствует прямому произведению $Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}$, где $Y_i^{(j)}$ — один из двух квадратов $(-\varepsilon, 0) \times (0, \varepsilon)$ или $(0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0)$ на плоскости с координатами $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ (см. рис. 4). Каждое неориентированное ребро, принадлежащее i -му семейству f_n -графа Θ , соединяет пару вершин следующего вида:

$$\begin{aligned} Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_{i-1}^{(j)} \times ((-\varepsilon, 0) \times (0, \varepsilon)) \times Y_{i+1}^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}, \\ Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_{i-1}^{(j)} \times ((0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0)) \times Y_{i+1}^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Осталось задать ориентированные ребра f_n -графа Θ . Для этого напомним сначала операцию сдвига вдоль орбиты, введенную в работе [121].

Пусть γ_i — одномерная орбита гамильтонова действия, заданная потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$ в окрестности особой точки $x^{(j)}$ и идущая из точки $x^{(j)}$ в точку $x^{(j')}$. Тогда для любой одномерной орбиты γ_m , которая в окрестности точки $x^{(j)}$ задана потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j)}$, где $m \neq i$, можно определить сдвиг этой орбиты вдоль орбиты γ_i . Действительно, из теоремы 3 следует, что имеется двумерная орбита гамильтонова действия (лежащая в особом слое L), которая является произведением орбит γ_i

и γ_m . Поэтому можно определить сдвиг орбиты γ_m вдоль орбиты γ_i как сторону “квадрата” $\gamma_i \times \gamma_m$, противоположную стороне γ_m .

Поскольку для рассматриваемой особенности выполнено условие нерасщепляемости, операция сдвига вдоль орбиты γ_i каждой орбите, заданной потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j)}$ в окрестности точки $x^{(j)}$, однозначно сопоставляет одну из орбит, заданных потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j')}$ в окрестности точки $x^{(j')}$ (где $m \neq i$). В окрестности особой точки $x^{(j')}$ имеется две входящие (вдоль оси $p_m^{(j')}$) и две выходящие (вдоль оси $q_m^{(j')}$) одномерные орбиты, заданные потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j')}$ (см. рис. 4). Поэтому для каждого $m \neq i$ орбита γ_i действует на соответствующих орбитах одним из двух возможных способов, отличающихся на центральную симметрию.

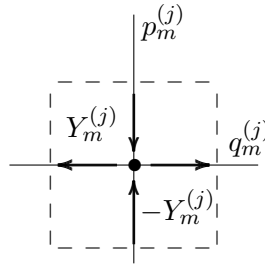


Рис. 4: Квадраты $Y_m^{(j)}$ и одномерные орбиты γ_m на поверхности $V_m^{(j)}$

Рассмотрим теперь вершину $v \in \Pi$, заданную в виде произведения квадратов $Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ нам надо определить ориентированное ребро (для i -го семейства f_n -графа Θ), выходящее из вершины v . Для этого достаточно сопоставить каждому квадрату $Y_m^{(j)}$ один из двух квадратов $\pm Y_m^{(j')}$. При $m \neq i$ описанная операция сдвига орбит вдоль орбиты γ_i естественным образом индуцирует требуемое соответствие $Y_m^{(j)} \mapsto \pm Y_m^{(j')}$. При $m = i$ соответствие задается так: квадрат $Y_i^{(j)}$, замыкание которого содержит начало орбиты γ_i , переходит в тот из двух квадратов $\pm Y_i^{(j')}$, замыкание которого содержит конец орбиты γ_i .

Определение 18. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ — седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, а Q — одна из камер в окрестности образа особого слоя при отображении момента. Будем говорить, что f_n -граф Θ , построение которого описано выше (шаги 1–3), *соответствует седловой особенности* $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q .

Будем также говорить, что f_n -граф *соответствует особенности*, если он соответствует ей при выборе одной из камер.

Замечание 4. Каждой одномерной орбите γ_m соответствует квадрат $Y_m^{(j)}$, замыкание которого содержит ее начало (см. рис. 4). Любую n -мерную орбиту, лежащую в особом слое, можно рассматривать как произведение некоторых одномерных орбит $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Таким образом, имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между произведениями квадратов $Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}$ и n -мерными орбитами, лежащими в особом слое. Это означает, что множество вершин построенного f_n -графа можно рассматривать также как множество n -мерных орбит, лежащих в особом слое.

При $n = 1$, когда имеется лишь одна функция $F_1 = H$, выбор камеры означает выбор одного из двух интервалов, разделенных критическим значением функции H . Поэтому в этом случае можно устранить неоднозначность, выбирая, например, тот интервал, где значения функции H меньше критического (что и было сделано в определении 13). Таким образом, определение 13, фактически, является частным случаем определения 18. Однако, говоря об f -графе, соответствующем атому (V, ω, H) , мы (как и выше) будем подразумевать тот из двух f -графов, который соответствует седловой особенности (V, ω, H) при выборе камеры $H < 0$.

Отметим, что для особенностей сложности 1 (при любом n) камеру можно выбрать однозначно, т. е. независимо от набора интегралов, задающих данную особенность.

В общем случае мы не можем выбрать камеру для данной особенности каким-то “каноническим” образом. Кроме того, при построении f_n -графа использовалась симплектическая структура (для определения ориентации на одномерных орбитах). Изучим, как меняется f_n -граф, соответствующий седловой особенности, при изменении симплектической структуры и при замене камеры.

Лемма 1. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ — седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, а Θ — f_n -граф, соответствующий ей при выборе камеры Q . Пусть ω' — симплектическая структура на W , относительно которой функции F_1, \dots, F_n также попарно коммутируют. Тогда f_n -граф Θ' , соответствующий седловой особенности $(W, \omega', F_1, \dots, F_n)$ при выборе той же

камеры Q , можно получить из f_n -графа Θ , изменяя ориентацию на всех ориентированных ребрах некоторых его семейств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение вершин (шаг 1) и определение неориентированных ребер (шаг 2) в процессе построения f_n -графа, соответствующего особенности, не зависят от симплектической структуры. При определении ориентированных ребер (шаг 3) симплектическая структура используется лишь для задания ориентации на них. При этом, фактически, использовалась не сама симплектическая структура, а ориентация одномерных орбит гамильтонова действия при помощи потоков $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$. Более того, ориентация на ребрах i -го семейства f_n -графа задается ориентацией одномерных орбит, соответствующих функциям $\tilde{F}_i^{(j)}$.

Изменение ориентации на одной одномерной орбите γ_i приводит к изменению ориентации на всех одномерных орбитах, которые можно получить из γ_i , сдвигая ее вдоль некоторых орбит. Поэтому из связности особого слоя (и теоремы 3) следует, что изменение ориентации на одной орбите γ_i влечет изменение ориентации на всех орбитах, соответствующих функциям $\tilde{F}_i^{(j)}$, а значит, и на всех ребрах i -го семейства f_n -графа. \square

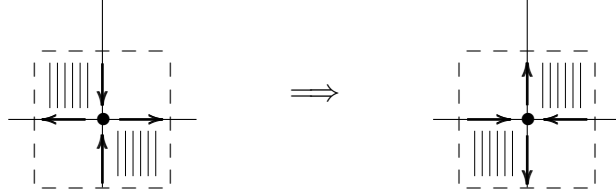
Лемма 2. Пусть Θ — f_n -граф, соответствующий седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q , а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы, образованные семействами его ребер. Тогда f_n -граф Θ' , соответствующий той же седловой особенности при выборе камеры Q' , которая имеет общую $(n-1)$ -мерную грань с камерой Q , можно получить из f_n -графа Θ , применяя к одному из f -графов Γ_i композицию операций переворачивания и изменения ориентации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для каждой точки $x^{(j)}$ выбраны нужные координаты $q_1^{(j)}, \dots, q_n^{(j)}, p_1^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}$ и интегралы $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$, соответствующие камере Q (см. шаг 1 построения f_n -графа). Пусть камера Q' граничит с камерой Q по i -й $(n-1)$ -мерной грани, т. е. прообраз камеры Q' при отображении момента задается в окрестности точки $x^{(j)}$ неравенствами

$$\tilde{F}_1^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_{i-1}^{(j)} < 0, \quad \tilde{F}_i^{(j)} > 0, \quad \tilde{F}_{i+1}^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_n^{(j)} < 0.$$

Для того, чтобы прообраз камеры Q' был задан неравенствами вида (4), достаточно изменить знак у функции $\tilde{F}_i^{(j)} = p_i^{(j)} \cdot q_i^{(j)}$. Это можно сделать с помощью заме-

ны координат $(q_i^{(j)}, p_i^{(j)}) \mapsto \pm(p_i^{(j)}, -q_i^{(j)})$, сохраняющей симплектическую структуру. В результате в окрестности каждой точки $x^{(j)}$ пара квадратов $\pm Y_i^{(j)}$ и ориентации одномерных орбит, заданные потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$, изменятся следующим образом (см. также рис. 4):



Согласно определению ориентированных ребер (шаг 3 построения f_n -графа) такое преобразование приводит к переворачиванию и изменению ориентации (см. определение 14) f -графа Γ_i , образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ . \square

Ясно, что выбор камеры и симплектической структуры не влияет на класс ливиллевой эквивалентности седловой особенности. Поскольку при изменении камеры или симплектической структуры f_n -граф, соответствующий особенности, меняется так, как описано в леммах 1 и 2, естественно ввести следующее отношение эквивалентности для f_n -графов.

Определение 19. Два f_n -графа Θ и Θ' называются *эквивалентными*, если Θ' можно получить из Θ , применяя следующие операции:

- изменение ориентации любого из f -графов Γ_i ,
- переворачивание любого из f -графов Γ_i ,

где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы, образованные n семействами ребер f_n -графа Θ .

Операции, указанные в определении 19, могут быть описаны на языке перестановок следующим образом. Пусть f_n -граф задан набором перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$. Это означает, что τ_1, \dots, τ_n образуют базисный набор (т. е. порождают свободное действие группы \mathbb{Z}_2^n), и выполнены условия коммутирования (3). Тогда операции из определения 19 означают замену μ_i на μ_i^{-1} и замену μ_i на $\tau_i \mu_i$ соответственно.

Теперь мы можем сформулировать теорему классификации. Ее доказательство приведено в разделе 2.4.

Теорема 7. *Две седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы локально ливиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n -графы эквивалентны. При этом любой связанный f_n -граф соответствует некоторой седловой особенности.*

2.4. Доказательство теоремы классификации

Изложим кратко план доказательства.

1) Сначала мы определяем “морфизмы” особенностей (определение 20). Затем для каждого морфизма особенностей строится соответствующий ему морфизм f_n -графов (см. определения 17 и 21). Это соответствие согласовано с операцией композиции (лемма 3). Отсюда следует первая часть теоремы 7, т.е. утверждение об эквивалентности f_n -графов, соответствующих эквивалентным особенностям.

2) Далее мы рассматриваем случай особенностей, являющихся прямыми произведениями. Для f -графов также можно определить операцию “умножения” (определение 22). Тогда любой f_n -граф, соответствующий особенности типа прямого произведения, можно представить в виде произведения f -графов (лемма 4). Используя эту конструкцию и теорему 5, мы доказываем утверждение теоремы 7 для прямых произведений (см. лемму 5).

3) Для любого f_n -графа Θ мы строим “минимальное накрытие” $\bar{\Theta}$ (определение 23), являющееся аналогом минимальной модели для особенностей (определение 15). После этого мы доказываем, что если f_n -граф Θ соответствует особенности W , то его минимальное накрытие $\bar{\Theta}$ соответствует любой минимальной модели U/G этой особенности (лемма 9). Это позволяет свести общий случай к уже исследованному случаю прямых произведений (лемма 10).

В частности из этой конструкции легко следует утверждение о единственности минимальной модели (предложение 5).

4) Последнее утверждение теоремы 7 (о реализуемости любого связного f_n -графа как инварианта некоторой особенности) также доказывается с помощью перехода к накрытиям.

Приступим теперь к реализации этого плана.

Определение 20. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ — седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем. Отображение $\Phi : W \rightarrow W'$ назовем *морфизмом особенностей*, если $\Phi^*(\omega') = \omega$ и $\Phi^*(F'_i) = F_i$.

Отметим, что из условия $\Phi^*(\omega') = \omega$ следует, что любой морфизм особенностей является локальным диффеоморфизмом, т. е. задает некоторое накрытие.

Пусть $\Phi : (W, \omega, F_1, \dots, F_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ — некоторый морфизм особенностей. Поскольку $\Phi^*(F'_i) = F_i$, бифуркационные диаграммы для этих особенностей совпадают. Выберем одну и ту же камеру Q для обеих особенностей и рассмотрим соответствующие им f_n -графы Θ и Θ' .

Покажем, что морфизм Φ естественным образом “индуцирует” морфизм f_n -графов $\Theta \rightarrow \Theta'$. Это следует из определения вершин и ребер f_n -графа, соответствующего особенности (см. описание процесса построения f_n -графа перед определением 18). Действительно, n двумерных координатных поверхностей $V_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, n$), соответствующих парам координат $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ в окрестности особой точки $x^{(j)}$, инвариантно определяются самим слоением Лиувилля, поскольку они состоят из точек ранга 1 (в силу теоремы Элиассона точки разного ранга локально не эквивалентны). Координатные оси $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ также определены однозначно как одномерные орбиты, содержащие в своем замыкании особые точки ранга 0. Таким образом, морфизм Φ отображает квадраты $Y_i^{(j)}$ одной системы в такие же квадраты другой. Это означает, что отображение Φ задает отображение $\hat{\Phi}$ вершин f_n -графа Θ в вершины f_n -графа Θ' . То, что $\hat{\Phi}$ является морфизмом f_n -графов, также следует из процесса построения f_n -графа, соответствующего особенности (см. шаг 2 и шаг 3).

Определение 21. Пусть $\Phi : (W, \omega, F_1, \dots, F_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ — морфизм седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, а Q — камера (одна и та же для обеих особенностей) в окрестности образа особых слоев. Будем говорить, что построенный выше морфизм f_n -графов $\hat{\Phi} : \Theta \rightarrow \Theta'$ *индуцирован морфизмом Φ* при выборе камеры Q .

Следующее утверждение сразу следует из процесса построения индуцированного морфизма.

Лемма 3. Если $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ — композиция морфизмов седловых особенностей, то для индуцированных морфизмов соответствующих f_n -графов (при выборе некоторой общей камеры Q) верно равенство $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 \circ \hat{\Phi}_2$. Кроме того, тождественный морфизм любой особенности индуцирует тождественный морфизм соответствующего f_n -графа.

Утверждение о том, что эквивалентным особенностям соответствуют эквивалентные f_n -графы, теперь можно доказать стандартным методом.

Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ — лиувиллево эквивалентные особенности интегрируемых гамильтоновых систем, $\Psi : W \rightarrow W'$ — диффеоморфизм, устанавливающий эту эквивалентность (см. определение 4), а Θ и Θ' — соответствующие f_n -графы.

Рассмотрим особенность $(W, \Psi^*\omega', \Psi^*F'_1, \dots, \Psi^*F'_n)$. Согласно лемме 1 соответствующий этой особенности f_n -граф $\tilde{\Theta}$ эквивалентен f_n -графу Θ . Ясно, что $\Psi : (W, \Psi^*\omega', \Psi^*F'_1, \dots, \Psi^*F'_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ — морфизм особенностей, для которого существует обратный. По лемме 3 индуцированный морфизм соответствующих f_n -графов $\hat{\Psi} : \tilde{\Theta} \rightarrow \Theta'$ является изоморфизмом.

Итак, первое утверждение теоремы 7 доказано.

Для доказательства обратного утверждения (об эквивалентности особенностей, которым соответствуют эквивалентные f_n -графы) рассмотрим сначала случай особенностей типа прямого произведения.

Для f -графов (любой степени) можно определить естественную операцию “умножения”. Ее результатом является одномерный остов прямого произведения f -графов, рассматриваемых как одномерные комплексы. Ясно, что каждое ребро этого одномерного остова соответствует некоторому ребру одного из сомножителей. Это определяет типы ребер (ориентированное или нет) и их раскраску. Легко понять, что в результате получается f -граф, степень которого равна сумме степеней сомножителей.

Мы будем использовать эту операцию для перемножения обычных f -графов (т. е. f -графов степени 1). Дадим ее формальное определение для этого случая на языке перестановок.

Определение 22. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы. Для каждого из f -графов Γ_i определены перестановки τ_{Γ_i} и μ_{Γ_i} на множестве его вершин Π_i . Произведением f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ называется f_n -граф Θ с множеством вершин $\Pi = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n$, для которого перестановки $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$, определяющие его структуру, имеют вид

$$\tau_i(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \tau_{\Gamma_i}(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\mu_i(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \mu_{\Gamma_i}(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n),$$

где $u_i \in \Pi_i$ ($i = 1, \dots, n$). Произведение f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ будем обозначать через $\Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$.

Отметим, что для седловой особенности, являющейся прямым произведением атомов $(V_1, \omega_1, F_1), \dots, (V_n, \omega_n, F_n)$, бифуркационная диаграмма отображения момента $\mathbf{F} : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданного интегралами F_1, \dots, F_n , является объединением координатных гиперплоскостей. Поэтому в этом случае камеру Q , используемую для построения соответствующего f_n -графа, можно однозначно задать условиями $F_1 < 0, \dots, F_n < 0$.

Следующее утверждение показывает, что операция прямого произведения атомов и операция произведения f -графов согласованы относительно соответствия $\{\text{седловые особенности}\} \rightarrow \{f_n\text{-графы}\}$, введенного в определении 18.

Лемма 4. Пусть U — седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, которая является прямым произведением атомов $(V_1, \omega_1, F_1), \dots, (V_n, \omega_n, F_n)$. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы, соответствующие этим атомам (в смысле определения 13). Тогда f_n -граф соответствующий особенности U при выборе камеры, заданной условиями $F_1 < 0, \dots, F_n < 0$, является произведением f -графов $\Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операция сдвига вдоль одномерной орбиты гамильтонова действия, описанная в шаге 3 процесса построения f_n -графа по данной особенности, в случае прямого произведения атомов действует “тождественно”. Поэтому, осуществляя шаги 1–3, мы получим f_n -граф, описанный в определении 22. \square

Докажем теперь утверждение теоремы 7 для прямых произведений атомов.

Лемма 5. *Две седловые особенности, являющиеся прямыми произведениями атомов, полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n -графы эквивалентны. При этом любой связный f_n -граф, являющийся произведением f -графов, соответствует некоторой особенности, являющейся прямым произведением атомов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть две седловые особенности U и U' , являющиеся прямыми произведениями атомов, полулокально эквивалентны. Тогда они являются прямыми произведениями одних и тех же атомов (рассматриваемых с точностью до лиувиллевой эквивалентности). Действительно, из теоремы Элиассона следует, что множество особых точек ранга ≤ 1 в окрестности особого слоя седловой особенности представляет собой объединение двумерных подмногообразий, трансверсально пересекающихся в особых точках ранга 0. Таким образом, сомножители прямого произведения однозначно (с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности) определены как n таких подмногообразий, трансверсально пересекающиеся в некоторой особой точке ранга 0.

Аналогично, если связный f_n -граф Θ является произведением некоторых f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, то каждый из сомножителей Γ_i однозначно определен как связная компонента подграфа, образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ .

Учитывая эти два замечания, получаем, что доказываемое утверждение сводится к случаю одной степени свободы, т. е. следует из теоремы 5. \square

Для того, чтобы обобщить лемму 5 на случай произвольных седловых особенностей, нужно перейти от прямых произведений к почти прямым произведениям (в силу теоремы 3 это и есть общий случай).

Сначала упростим формулировку доказываемого утверждения. Мы должны доказать следующее: *если особенностям соответствуют эквивалентные f_n -графы, то они эквивалентны.* Здесь можно заменить “эквивалентные f_n -графы” на “один и тот же f_n -граф”. Действительно, в леммах 1 и 2 было показано, при изменении камеры или симплектической структуры f_n -граф, соответствующий особенности, заменяется на эквивалентный. Докажем, что любой f_n -граф, эквивалентный данному, может быть получен таким образом.

Лемма 6. Пусть Θ — f_n -граф, соответствующий седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q . Если Θ' — f_n -граф, эквивалентный Θ , то существуют симплектическая структура ω' на W и камера Q' такие, что f_n -граф Θ' соответствует особенности $(W, \omega', F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы, образованные семействами ребер f_n -графа Θ . Из доказательства леммы 2 ясно, что выбирая подходящим образом камеру, мы можем реализовать переворачивание любого из них. Осталось доказать, что симплектическую структуру ω можно изменить так, чтобы изменилась ориентация ровно одного из f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Представим рассматриваемую особенность в виде почти прямого произведения U/G (см. определение 8), где $U = (V_1, \omega_1, H_1) \times \dots \times (V_n, \omega_n, H_n)$. Изменяя знак у любой из форм ω_i , мы изменяем ориентацию соответствующих одномерных орбит гамильтонова действия, а значит и ориентацию одного из f -графов Γ_i (см. доказательство леммы 1). \square

Итак, после замены (если необходимо) симплектической структуры и камеры для одной из особенностей доказываемое утверждение можно переформулировать следующим образом: *если особенностям $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ соответствует один и тот же f_n -граф Θ , то они эквивалентны.*

Для того, чтобы доказать это утверждение, мы будем использовать представление особенностей в виде минимальной модели (см. определение 15) и аналогичное представление f_n -графов с помощью “минимального накрытия”, определяемого ниже.

Как уже отмечалось, морфизмы f_n -графов можно рассматривать как накрытия, сохраняющие ориентацию и раскраску ребер. Говоря о *регулярном* накрытии (или просто о действии группы на f_n -графе), мы всегда будем подразумевать, что группа действует автоморфизмами f_n -графа, т. е. при действии любого элемента группы ориентация ребер сохраняется и ребра одного цвета переходят в ребра одного цвета.

Определение 23. Накрытие f_n -графа Θ связным f_n -графом Θ' , являющимся произведением f -графов, будем называть *минимальным накрытием*, если не существует связного f_n -графа Θ'' , который также является произведением f -графов и

накрывает f_n -граф Θ , и для которого существует морфизм $\Theta' \rightarrow \Theta''$, не являющийся изоморфизмом.

Иными словами, если рассматривать существование морфизма между f_n -графами как отношение частичного порядка, то минимальное накрытие задается минимальным элементом среди всех связных f_n -графов, являющихся произведениями f -графов и накрывающих данный f_n -граф Θ . Как будет показано ниже (см. предложение 4), для любого связного f_n -графа Θ такой минимальный элемент существует и единственен. Прежде чем доказывать это утверждение, введем следующие обозначения.

Путь в связном f_n -графе Θ можно задавать начальной вершиной и последовательностью символов из набора $\{a_1, b_1, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, b_n^{-1}\}$, где a_i означает движение вдоль неориентированного ребра i -го семейства, а b_i и b_i^{-1} означают движения вдоль ориентированного ребра i -го семейства в направлении, заданном ориентацией, и в противоположном направлении соответственно.

Замечание 5. “Путь” в графе можно понимать как в топологическом, так и в комбинаторном смысле (т. е. как непрерывный образ отрезка или как последовательность ребер). Каждому комбинаторному пути естественным образом соответствует непрерывный путь, если ввести параметризацию на ребрах и считать, что движение вдоль ребра задано этой параметризацией. Далее, говоря о путях, заданных последовательностью ребер, мы понимаем под этим именно такой непрерывный путь.

Последовательности символов из набора $\{a_1, b_1, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, b_n^{-1}\}$ будем называть *словами*. При этом слово будем называть *несократимым*, если оно не содержит двухсимвольных фрагментов вида $a_i a_i$, $b_i b_i^{-1}$, $b_i^{-1} b_i$. Ясно, что любой путь в связном f_n -графе (с началом и концом в вершинах) однозначно с точностью до гомотопии задается начальной вершиной и некоторым несократимым словом.

Таким образом, если v_0 — некоторая фиксированная вершина связного f_n -графа Θ , то фундаментальную группу $\pi_1(\Theta, v_0)$ можно рассматривать как группу, в которой элементами являются несократимые слова, а операция умножения заключается в приписывании одного слова к другому и последовательном сокращении фрагментов вида $a_i a_i$, $b_i b_i^{-1}$, $b_i^{-1} b_i$ (при этом пустое слово соответствует единичному элементу).

Любое (связное) накрытие задается подгруппой в фундаментальной группе базы. В частности, любой морфизм связных f_n -графов $\varphi : \Theta' \rightarrow \Theta$ задается подгруппой в $\pi_1(\Theta, v_0)$. Эта подгруппа имеет вид $\varphi_*(\pi_1(\Theta', v'_0))$, где $v'_0 \in \varphi^{-1}v_0$, причем разным прообразам точки v_0 соответствуют сопряженные подгруппы. (По поводу свойств накрытий см., например, [69].)

Рассмотрим в фундаментальной группе f_n -графа $\pi_1(\Theta, v_0)$ подгруппу H_{Θ, v_0} , порожденную всеми коммутаторами вида

$$a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, \quad b_i b_j b_i^{-1} b_j^{-1}, \quad a_i b_j a_i^{-1} b_j^{-1}, \quad b_i a_j b_i^{-1} a_j^{-1} \quad (i \neq j)$$

и всеми сопряженными им элементами. Из определения f_n -графа следует, что такая подгруппа корректно определена. Более того, для любого морфизма связных f_n -графов $\varphi : \Theta' \rightarrow \Theta$ имеем $\varphi_*(H_{\Theta', v'_0}) = H_{\Theta, v_0}$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Если связный f_n -граф Θ' накрывает f_n -граф Θ (т. е. существует морфизм $\Theta' \rightarrow \Theta$), то подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$, соответствующая этому накрытию, содержит подгруппу H_{Θ, v_0} .*

Замечание 6. Любая подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$ определяет некоторое накрытие f_n -графа. При этом раскраска и ориентация ребер естественным образом переносятся с базы Θ на накрывающий граф. Поэтому окрестность каждой вершины накрывающего графа устроена так же, как окрестность вершины любого f_n -графа, т. е. можно считать, что для накрывающего графа всегда выполнено условие (а) определения 16. Легко показать, что условие (b) определения 16 выполнено тогда и только тогда, когда накрытие определяется подгруппой, содержащей H_{Θ, v_0} , а условие (с) всегда выполнено, если выполнено условие (b).

Таким образом, если в определении f_n -графа не требовать его конечности, то верно и обратное утверждение к лемме 7: *для любой подгруппы, содержащей H_{Θ, v_0} , соответствующий накрывающий граф является f_n -графом.* В частности, накрытие, определяемое подгруппой H_{Θ, v_0} , является “универсальным” (бесконечным) f_n -графом, накрывающим любой f_n -граф. Отметим, что при $n = 1$ “универсальный” f -граф является просто деревом, поскольку в этом случае подгруппа H_{Θ, v_0} тривиальна.

Выделим теперь среди накрытий, описанных в лемме 7, накрытия, являющиеся произведениями f -графов.

Назовем *одноцветным циклом* любой замкнутый путь в f_n -графе, заданный последовательностью символов из набора $\{a_i, b_i, b_i^{-1}\}$ при некотором фиксированном $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим в фундаментальной группе f_n -графа $\pi_1(\Theta, v_0)$ подгруппу G_{Θ, v_0} , порожденную всеми элементами группы H_{Θ, v_0} , а также всеми одноцветными циклами и всеми сопряженными им элементами.

Лемма 8. *Если связный f_n -граф Θ' , накрывающий f_n -граф Θ , является произведением f -графов, то подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$, соответствующая этому накрытию, содержится в подгруппе G_{Θ, v_0} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta' = \Gamma'_1 \odot \dots \odot \Gamma'_n$ и $\varphi : \Theta' \rightarrow \Theta$ — накрытие. Фиксируем некоторые вершины $v_0 \in \Theta$ и $v'_0 \in \Theta'$, для которых $\varphi(v'_0) = v_0$. Утверждение леммы означает, что образ любого замкнутого пути γ с началом в v'_0 содержится в G_{Θ, v_0} .

Пусть путь γ задается словом w в $\pi_1(\Theta', v'_0)$. Если $w = w_1 c_i c_j w_2$, где w_1 и w_2 — некоторые слова, $c_j \in \{a_j, b_j, b_j^{-1}\}$, $c_i \in \{a_i, b_i, b_i^{-1}\}$ и $i \neq j$, то

$$w = w_1 c_i c_j w_2 = w_1 c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1} w_1^{-1} w_1 c_j c_i w_2 = h w_1 c_j c_i w_2,$$

где $h \in H_{\Theta', v'_0}$. Действуя таким образом, мы можем переставлять в слове w любые соседние символы, соответствующие ребрам разного цвета. Поэтому слово w можно представить в виде

$$w = h \nu_1 \dots \nu_n, \tag{5}$$

где $h \in H_{\Theta', v'_0}$, а каждое из слов ν_i составлено из символов a_i, b_i, b_i^{-1} .

Получаем, что слово $\nu_1 \dots \nu_n$ задает замкнутый путь в $\Theta' = \Gamma'_1 \odot \dots \odot \Gamma'_n$. Из определения произведения f -графов и того, что каждое из слов ν_i содержит лишь символы a_i, b_i, b_i^{-1} , следует, что каждое из слов ν_i задает замкнутый путь в Θ' , т. е. является одноцветным циклом.

Образ пути γ при отображении φ задается тем же самым словом w в $\pi_1(\Theta, v_0)$. При этом φ переводит H_{Θ', v'_0} в H_{Θ, v_0} , а одноцветные циклы в одноцветные циклы. Значит, образ γ при отображении φ лежит в G_{Θ, v_0} . \square

Леммы 7 и 8 показывают, что все накрытия данного f_n -графа Θ произведениями f -графов задаются подгруппами в $\pi_1(\Theta, v_0)$, расположенными “между” H_{Θ, v_0} и G_{Θ, v_0} . Для одного крайнего случая мы получаем “универсальный” f_n -граф (см. замечание 6). Докажем, что другой крайний случай дает минимальное накрытие.

Предложение 4. *Для любого f_n -графа Θ существует единственное минимальное накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$. Это накрытие является регулярным и задается подгруппой G_{Θ, v_0} в $\pi_1(\Theta, v_0)$. При этом f_n -граф $\bar{\Theta}$ изоморфен произведению $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$, где Γ_i^0 — связная компонента f -графа Γ_i , образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что f_n -граф $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ покрывает Θ . Пусть вершина v_0 в f_n -графе Θ соответствует вершине (u_1, \dots, u_n) в произведении f -графов, где u_i — вершина в f -графе Γ_i^0 (см. определение 22).

Существование накрытия $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0 \rightarrow \Theta$ эквивалентно следующему: если слово w задает замкнутый путь в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ с началом в (u_1, \dots, u_n) , то это же слово w задает замкнутый путь в Θ с началом в v_0 . Это утверждение можно доказать, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 8. Представив слово w в виде (5), получаем, что замкнутость соответствующего пути в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ означает замкнутость каждого из (одноцветных) путей, соответствующих словам ν_1, \dots, ν_n . Замкнутость пути, соответствующего слову ν_i , с началом u_i в Γ_i^0 , очевидно, эквивалентна замкнутости пути, соответствующего слову ν_i , с началом v_0 в Γ_i , т. е. в Θ .

Мы доказали, что накрытие $\varphi : \Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0 \rightarrow \Theta$ существует. В силу леммы 8 имеем $\varphi_*(\pi_1(\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0)) \subset G_{\Theta, v_0}$. Для проверки обратного включения надо доказать следующее: если слово w задает элемент из подгруппы G_{Θ, v_0} в $\pi_1(\Theta, v_0)$, то это же слово w задает замкнутый путь в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ с началом в (u_1, \dots, u_n) . Доказательство этого утверждения для образующих группы G_{Θ, v_0} легко следует из определения 22.

Таким образом, мы доказали, что накрывающий f_n -граф $\bar{\Theta}$, соответствующий подгруппе G_{Θ, v_0} , имеет вид $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$.

По определению подгруппа G_{Θ, v_0} является нормальной в $\pi_1(\Theta, v_0)$. Поэтому соответствующее ей накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ регулярно.

Из леммы 8 следует, что если связный f_n -граф Θ' покрывает f_n -граф Θ и является произведением f -графов, то существует накрытие $\Theta' \rightarrow \bar{\Theta}$. Это означает, что $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ — единственное минимальное накрытие. \square

Покажем теперь, что переход к минимальному накрытию для f_n -графов соответствует переходу к минимальной модели (см. определение 15) для седловых особенностей.

Лемма 9. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ — седловая особенность и U — ее минимальная модель. Если f_n -граф Θ соответствует особенности W , то его минимальное накрытие $\bar{\Theta}$ соответствует особенности U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что f_n -граф $\tilde{\Theta}$, соответствующий особенности $U = V_1 \times \dots \times V_n$, является произведением f -графов $\Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$, где Γ_i соответствует атому V_i . Накрытие $\Phi : U \rightarrow W$ регулярно и задается свободным покомпонентным действием ρ некоторой конечной группы G на U (определение 8). Действие ρ индуцирует действие $\hat{\rho}$ группы G на $\tilde{\Theta}$ (см. определение 21), которое задает регулярное накрытие $\hat{\Phi} : \tilde{\Theta} \rightarrow \Theta$.

Из лемм 7 и 8 следует, что $H_{\Theta, v_0} \subset \hat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \subset G_{\Theta, v_0}$, где $\hat{\Phi}(\tilde{v}_0) = v_0$. Предположим, что $\hat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \neq G_{\Theta, v_0}$. Тогда, поскольку подгруппа G_{Θ, v_0} порождена всеми элементами из H_{Θ, v_0} и одноцветными циклами, существует одноцветный цикл $\nu \in G_{\Theta, v_0} \setminus \hat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0))$ (пусть ν имеет цвет i).

Ясно, что при действии фундаментальной группы f_n -графа на накрытии, являющемся произведением f -графов, любой одноцветный цикл действует тождественно на всех сомножителях другого цвета. Поэтому для элемента $g \in G$, соответствующего одноцветному циклу ν при каноническом изоморфизме $\pi_1(\Theta, v_0) / \hat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \rightarrow G$, действие автоморфизма $\hat{\rho}(g)$ является тождественным на всех Γ_j при $j \neq i$ и нетривиальным на Γ_i .

Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 5, получаем, что действие морфизма $\rho(g)$ на прямом произведении U является тождественным для всех атомов V_j при $j \neq i$ и нетривиальным для V_i . Это противоречит тому, что U — минимальная модель. Значит, $\hat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) = G_{\Theta, v_0}$. В силу предложения 4 это означает, что $\tilde{\Theta} = \bar{\Theta}$. \square

Перейдем, наконец, к почти прямым произведениям.

Лемма 10. Пусть U/G и U'/G' — седловые особенности, являющиеся минимальными моделями, такие, что им соответствует один и тот же f_n -граф Θ . Тогда группы G и G' изоморфны и существует диффеоморфизм $\Psi : U \rightarrow U'$, который задает лувиллеву эквивалентность прямых произведений U и U' и сопрягает действия группы $G = G'$ на них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 9 следует, что обоим прямым произведениям $U = (V_1, \omega_1, H_1) \times \cdots \times (V_n, \omega_n, H_n)$ и $U' = (V'_1, \omega'_1, H'_1) \times \cdots \times (V'_n, \omega'_n, H'_n)$ соответствует один и тот же f_n -граф $\bar{\Theta} = \Gamma_1 \odot \cdots \odot \Gamma_n$, являющийся минимальным накрытием для Θ . В силу леммы 5 особенности U и U' эквивалентны. Более того, используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 5, можно считать, что атомам (V_i, ω_i, H_i) и (V'_i, ω'_i, H'_i) соответствует один и тот же f -граф Γ_i .

Из процесса построения индуцированного морфизма (см. определение 21) и предложения 4 следует, что действие ρ группы G на U и действие ρ' группы G' на U' индуцируют одно и то же действие $\hat{\rho} = \hat{\rho}'$ группы $\pi_1(\Theta, v_0)/G_{\Theta, v_0}$ на $\bar{\Theta}$. В частности, группы G и G' изоморфны и их действия на атомах (V_i, ω_i, H_i) и (V'_i, ω'_i, H'_i) индуцируют одно и то же действие на f -графе Γ_i .

Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать следующее утверждение для атомов (а потом определить диффеоморфизм $\Psi : U \rightarrow U'$ покомпонентно): *если действия ρ и ρ' конечной группы G на атомах (V, ω, H) и (V', ω', H') индуцируют одно и то же действие $\hat{\rho} = \hat{\rho}'$ на f -графе Γ (соответствующем обоим атомам), то существует диффеоморфизм $\psi : V \rightarrow V'$ такой, что $\psi^*(H') = H$ и $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi$ для любого $g \in G$.*

Можно считать, что на вершинах атома (т. е. особых точках) диффеоморфизм ψ уже определен. Введем на атомах метрики, инвариантные относительно рассматриваемых действий. Тогда можно определить ψ и на сепаратрисах. Сепаратрисы разрезают каждый из атомов на “шестиугольные” области. Ясно, что ψ можно продолжить на эти области так, что условие $\psi^*(H') = H$ будет выполнено.

Рассмотрим одну из шестиугольных областей D в атоме V . Поскольку отображение ψ уже задано на сепаратрисах, аналогичная шестиугольная область D' , в которую должна перейти область D при отображении ψ , однозначно определена.

Если отображение $\psi : D \rightarrow D'$ уже задано, то для любой области $\rho(g)D$ отображение ψ однозначно определено из условия $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi$.

Так как группа G конечна, то $\rho(g)D \neq D$ для любого нетривиального элемента g группы G . Поэтому мы можем продолжить ψ на все области вида $\rho(g)D$. Действуя таким образом, мы продолжим ψ на весь атом V . Рассматриваемые шестиугольные области можно считать “стандартными”, что позволяет строить ψ на каждом шаге так, что конечное отображение $\psi : V \rightarrow V'$ будет диффеоморфизмом. \square

Отметим, что для бесконечных групп утверждение о сопряженности действий на атомах, индуцирующих одинаковые действия на f -графах, вообще говоря, неверно. Например, для любого атома (V, ω, H) тождественное отображение и сдвиг вдоль траекторий $\text{sgrad } H$ индуцируют тождественный автоморфизм на соответствующем f -графе, но, очевидно, не могут быть сопряжены никаким диффеоморфизмом.

Из леммы 10 сразу следует утверждение о единственности минимальной модели для седловых особенностей (см. комментарий в конце раздела 2.3).

Предложение 5. *Минимальная модель U/G для седловой особенности определена однозначно с точностью до лувиллевого эквивалентности, сопрягающей действия групп.*

Для завершения доказательства теоремы 7 осталось показать, что любой связный f_n -граф Θ соответствует некоторой седловой особенности. Это легко сделать при помощи накрытий. Действительно, минимальное накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ задается свободным действием группы $G = \pi_1(\Theta, v_0)/G_{\Theta, v_0}$ на $\bar{\Theta}$. По лемме 5 существует прямое произведение $U = V_1 \times \cdots \times V_n$, которому соответствует f_n -граф $\bar{\Theta}$. При этом атомы V_i можно выбрать так, что на них определено действие группы G , соответствующее действию группы G на $\bar{\Theta}$. Тогда f_n -граф Θ соответствует особенности $W = U/G$.

Теорема 7 полностью доказана.

2.5. Алгоритм перечисления седловых особенностей

Как и в случае одной степени свободы, можно задавать f_n -графы перестановками. Из определения 16 следует, что каждый f_n -граф Θ однозначно определяется

набором перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$ на множестве его вершин, где τ_1, \dots, τ_n являются базисными и выполнены условия коммутирования (3). Для алгоритма перечисления f_n -графов сложности k удобнее другое (эквивалентное) описание с помощью перестановок, являющихся элементами симметрической группы S_{2^nk} .

Если на множестве вершин фиксирована нумерация, то любой набор перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n \in S_{2^nk}$, где τ_1, \dots, τ_n — базисные и выполнены условия (3), задает некоторый f_n -граф сложности k . Перенумерация вершин означает сопряжение перестановок τ_i, μ_i элементом группы S_{2^nk} . Кроме того, мы не предполагаем, что нумерация семейств в f_n -графе фиксирована (см. определение 17). Получаем следующее простое утверждение.

Предложение 6. *Два f_n -графа Θ и Θ' , заданные наборами перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$ и $\tau'_1, \mu'_1, \dots, \tau'_n, \mu'_n$ соответственно, изоморфны тогда и только тогда, когда существуют $\sigma \in S_n$ и $g \in S_{2^nk}$, для которых*

$$\tau'_i = g\tau_{\sigma(i)}g^{-1} \quad \text{и} \quad \mu'_i = g\mu_{\sigma(i)}g^{-1}$$

при всех $i = 1, \dots, n$. □

Замечание 7. Чтобы составить список попарно неизоморфных f_n -графов сложности k , достаточно выписать все наборы $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n \in S_{2^nk}$, для которых τ_1, \dots, τ_n — базисные, а μ_1, \dots, μ_n удовлетворяют условиям коммутирования (3), и затем убрать “лишние” наборы, учитывая предложение 6. Отметим, что алгоритм, основанный на непосредственном применении предложения 6, требует очень большого количества операций. Действительно, для проверки изоморфности двух f_n -графов Θ и Θ' нужно сравнить соответствующие перестановки для всех $\sigma \in S_n$ и $g \in S_{2^nk}$, т. е. рассмотреть $n!(2^nk)!$ вариантов. Ниже описан один из способов сократить этот перебор до $n!2^{nk}k!$ вариантов (например, при $n = 3$ и $k = 2$ это означает уменьшение более чем в 10^{11} раз).

Поскольку все базисные наборы перестановок в S_{2^nk} сопряжены, можно рассматривать только те нумерации вершин f_n -графа, для которых базисные перестановки τ_1, \dots, τ_n имеют некоторый стандартный вид $\tau_1^*, \dots, \tau_n^* \in S_{2^nk}$. После того как набор базисных перестановок τ_i^* фиксирован, любой набор перестановок $\mu_1, \dots, \mu_n \in S_{2^nk}$, удовлетворяющий условиям (3), задает некоторый f_n -граф $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ (и любой f_n -граф сложности k задается таким образом).

Обозначим через T подгруппу в S_{2^nk} , порожденную перестановками $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$, а через Z_T — ее централизатор в S_{2^nk} , т. е. множество перестановок из S_{2^nk} , коммутирующих со всеми перестановками $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$. Отметим, что группа T изоморфна \mathbb{Z}_2^n , а группа Z_T изоморфна полупрямому произведению $(\mathbb{Z}_2^n)^k \rtimes S_k$.

Поскольку базисный набор фиксирован, мы должны рассматривать только те перенумерации вершин, которые сохраняют набор перестановок $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$ (но могут менять местами перестановки τ_i^*). Любая такая перенумерация задается перестановкой $g \in S_{2^nk}$, для которой существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что

$$g\tau_i^*g^{-1} = \tau_{\sigma(i)}^* \quad (6)$$

при всех $i = 1, \dots, n$ (см. предложение 6). Очевидно, множество всех перестановок, удовлетворяющих условию (6), образует подгруппу в S_{2^nk} . Обозначим ее через H_T .

Замечание 8. Определенные выше подгруппы $T \subset Z_T \subset H_T$ группы S_{2^nk} имеют простой геометрический смысл. Как уже отмечалось (см. замечание 3), неориентированные ребра f_n -графа сложности k образуют k экземпляров одномерного остова n -мерного куба, где все ребра одного семейства параллельны. Группа T действует на каждом кубе как группа симметрий относительно координатных подпространств (любой размерности). При этом каждый элемент группы T действует одинаково на всех k экземплярах этих кубов (и переводит каждый куб в себя). Элементы группы Z_T действуют на множестве этих кубов аналогичным образом, т. е. сохраняют “направление” ребер, но они могут действовать на разных кубах по-разному и могут переставлять кубы. Наконец, элементы группы H_T могут переставлять и “вращать” эти k кубов, но переводят параллельные ребра в параллельные.

Соответствие $g \mapsto \sigma$, определяемое соотношением (6), задает эпиморфизм $\lambda : H_T \rightarrow S_n$, ядром которого является подгруппа Z_T . Иначе говоря, λ есть действие группы H_T на множестве перестановок $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$, а ядром неэффективности этого действия является подгруппа Z_T . Для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ выберем элемент h_σ в группе H_T , для которого $\lambda(h_\sigma) = \sigma$, т. е.

$$h_\sigma\tau_i^*h_\sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i)}^* \quad \text{при всех } i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Ясно, что этот выбор неоднозначен. Один из явных способов зафиксировать элементы h_σ приведен в замечании 9.

Следующее утверждение — обобщение предложение 2 для n степеней свободы.

Предложение 7. Два f_n -графа $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют $\sigma \in S_n$ и $h \in Z_T \subset S_{2^nk}$, для которых $\mu'_i = hh_\sigma^{-1}\mu_{\sigma(i)}h_\sigma h^{-1}$ при всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu'_i = (hh_\sigma^{-1})\mu_{\sigma(i)}(hh_\sigma^{-1})^{-1}$, где $h \in Z_T$, а h_σ удовлетворяет соотношениям (7). Применяя то же сопряжение к перестановкам τ_i^* , получаем

$$(hh_\sigma^{-1})\tau_{\sigma(i)}^*(hh_\sigma^{-1})^{-1} = h(h_\sigma^{-1}\tau_{\sigma(i)}^*h_\sigma)h^{-1} = h\tau_i^*h^{-1} = \tau_i^*.$$

В силу предложения 6 это означает, что f_n -графы $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны.

Наоборот, пусть f_n -графы $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны. Тогда из предложения 6 следует, что для некоторого $g \in S_{2^nk}$ выполнено

$$\tau_i^* = g\tau_{\sigma(i)}^*g^{-1} \quad \text{и} \quad \mu'_i = g\mu_{\sigma(i)}g^{-1}.$$

Подставляя выражение для $\tau_{\sigma(i)}^*$ из (7) в первое из этих равенств, получаем, что $gh_\sigma \in Z_T$, т.е. g имеет вид hh_σ^{-1} , где $h \in Z_T$. \square

Замечание 9. Перестановки $h_\sigma \in H_T$ можно выбрать так, что соответствие $\sigma \mapsto h_\sigma$ задает гомоморфизм $S_n \rightarrow H_T$, т.е. группа H_T изоморфна полупрямому произведению $Z_T \rtimes S_n$. Это можно сделать, например, следующим образом. Каждый элемент N множества $\{1, \dots, 2^nk\}$ (множество номеров вершин f_n -графа) будем записывать в виде пары $(m; \bar{\alpha})$, где $m = \lfloor \frac{N-1}{2^n} \rfloor + 1$, а $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор из 0 и 1, являющийся двоичной записью числа $N - 2^n \lfloor \frac{N-1}{2^n} \rfloor$. Определим перестановки τ_i^* и h_σ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_i^* : (m; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (m; \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1 \pmod{2}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), \\ h_\sigma : (m; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (m; \alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Легко проверяется, что тогда соотношение (7) выполнено, причем соответствие $\sigma \mapsto h_\sigma$ задает гомоморфизм, являющийся (правым) обратным к λ .

Согласно теореме 7, для того чтобы описать седловые особенности в терминах перестановок, нужно выписать условия эквивалентности f_n -графов $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$, т.е. добавить к сопряжениям, указанным в предложении 7, операции, соответствующие переворачиваниям и изменениям ориентации f -графов, об-

разованных семействами ребер этих f_n -графов (см. определение 19). В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Два f_n -графа $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие $\sigma \in S_n$ и $h \in Z_T$, что для каждого $i = 1, \dots, n$ либо $\mu'_i = hh_\sigma^{-1}\mu_{\sigma(i)}^{\pm 1}h_\sigma h^{-1}$, либо $\mu'_i = hh_\sigma^{-1}\tau_{\sigma(i)}^*\mu_{\sigma(i)}^{\pm 1}h_\sigma h^{-1}$.*

Итак, действуя по схеме, изложенной в этом разделе, список особенностей сложности k для систем с n степенями свободы можно получить следующим образом:

- 1) фиксируем перестановки τ_i^* и h_σ из S_{2nk} (например, определяем их формулами (8));
- 2) строим список наборов (μ_1, \dots, μ_n) , где μ_i удовлетворяют условиям коммутирования (3);
- 3) применяя теорему 8, устраним из полученного списка лишние наборы, оставляя лишь попарно неэквивалентные.

Приведем результат вычислений по этому алгоритму в случае двух степеней свободы для особенностей малой сложности.

Предложение 8. *Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы количество попарно неэквивалентных седловых особенностей сложности $k = 1, 2, 3$ равно соответственно 4, 39, 147.*

Отметим, что программа, реализующая указанный алгоритм, выдает не только количество, но и список особенностей. Для сложности 1 и 2 эти списки, конечно, совпадают с известными ранее (см. разделы 2.2 и 2.3).

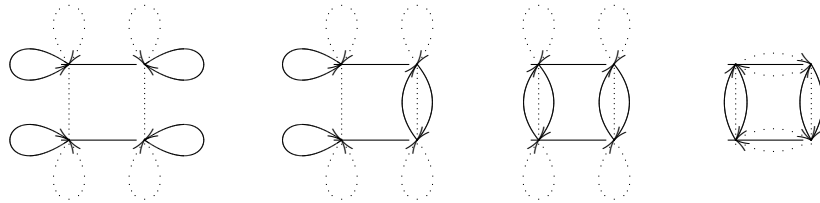


Рис. 5: Список f_2 -графов, соответствующих особенностям сложности 1

Например, для особенностей сложности 1 получаем список из четырех f_n -графов ($n = 2$), изображенных на рис. 5. В частности, для каждой из этих особенностей видны сомножители ее минимальной модели (см. (2), а также предложение 4 и лемму 9).

2.6. Сомножители минимальной модели

Поскольку f_n -граф является полным инвариантом седловой особенности с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности (теорема 7), он, в частности, содержит информацию о ее минимальной модели. Для конкретного f_n -графа процедура восстановления сомножителей минимальной модели следует из предложения 4 и леммы 9. А именно: если Θ — f_n -граф, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — f -графы, каждый из которых образован всеми ребрами одного цвета f_n -графа Θ , то

- 1) для каждого $i = 1, \dots, n$ все связные компоненты f -графа Γ_i изоморфны некоторому f -графу Γ_i^0 ,
- 2) атомы V_1, \dots, V_n , соответствующие f -графам $\Gamma_1^0, \dots, \Gamma_n^0$, являются сомножителями минимальной модели для особенности, соответствующей f_n -графу Θ .

Исследуем теперь следующий вопрос: *какие сомножители минимальной модели могут получиться в результате применения этой процедуры при фиксированных k (сложность особенности) и n (число степеней свободы)?*

Обозначим через $\mathcal{A}_{k,n}$ множество атомов, которые могут быть сомножителями минимальной модели для седловой особенности сложности k интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы (в частности, $\mathcal{A}_{k,1}$ — это просто множество всех атомов сложности k). Введем также следующие обозначения: $|V|$ — сложность атома V , а sV — несвязное объединение s экземпляров атома V .

Теорема 9. *Если $V \in \mathcal{A}_{k,n}$, то*

- 1) $|V| \leq k2^{2k}$,
- 2) $|V|$ является делителем числа $k2^{n-1}$,
- 3) существует свободное действие группы \mathbb{Z}_2^{n-1} на sV , где $s \cdot |V| = k2^{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ — f -граф, соответствующий атому V , а Θ — f_n -граф, соответствующий особенности, для которой V является одним из сомножителей ее минимальной модели $(V_1 \times \dots \times V_n)/G$. Пусть, $V = V_j$. Перестановки, заданные ребрами f_n -графа Θ , обозначим через $\tau_1, \dots, \tau_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ (см. определение 16).

В силу предложения 4 и леммы 9, все связные компоненты f -графа Γ_j (подграфа f_n -графа Θ , образованного всеми ребрами цвета j) изоморфны f -графу Γ . Поскольку сложность f -графа Γ_j равна $k2^{n-1}$, отсюда следуют второе и третье

утверждения теоремы (действие группы \mathbb{Z}_2^{n-1} на sV порождается перестановками $\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_n$).

Докажем первое утверждение. Неориентированные ребра f_n -графа сложности k образуют k экземпляров одномерного остова n -мерного куба. Рассмотрим вершины f_n -графа Θ как наборы вида $(m; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где m — номер куба, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_2^n$, а действие перестановки τ_i на вершину $(m; \bar{\alpha})$ есть замена α_i на $\alpha_i + 1 \pmod{2}$. Обозначим через $N^{m,\varepsilon}$ гипергрань в кубе с номером m , заданную уравнением $\alpha_j = \varepsilon$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Рассмотрим проекцию π множества вершин f_n -графа Θ на \mathbb{Z}_2^{n-1} , “отождествляющую” все эти гиперграни: $(m; \bar{\alpha}) \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$.

В силу условия (b) определения 16 все вершины гиперграни $N^{m,\varepsilon}$ под действием перестановки μ_j переходят в вершины одной и той же гиперграни $N^{m',\varepsilon'}$, причем $\pi(\mu_j(m; \bar{\alpha})) = \pi(m; \bar{\alpha}) + \xi^{m,\varepsilon}$, где $\xi^{m,\varepsilon} \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$ зависит только от гиперграни $N^{m,\varepsilon}$, в которой лежит вершина $(m; \bar{\alpha})$. Отсюда следует, что если вершины $(m_0; \bar{\alpha})$ и $(m_0; \bar{\alpha}')$ лежат в пересечении связной компоненты f -графа Γ_j и некоторой гиперграни N^{m_0,ε_0} , то $\pi(m_0; \bar{\alpha}') - \pi(m_0; \bar{\alpha})$ является линейной комбинацией элементов $\xi^{m,\varepsilon} \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$ (здесь мы рассматриваем \mathbb{Z}_2^{n-1} как линейное пространство над \mathbb{Z}_2). Количество таких линейных комбинаций равно 2^{2k} , количество гиперграней N^{m_0,ε_0} равно $2k$. Поэтому количество вершин f -графа Γ , соответствующего атому V , не превосходит $2k \cdot 2^{2k}$ (и равно $2|V|$). \square

Как было замечено В. В. Калашниковым [24] (см. также предложение 10 в разделе 2.7), множества $\mathcal{A}_{1,n}$ одинаковы при всех $n \geq 3$: они состоят из четырех атомов B, D_1, C_2, P_4 (см. рис. 1 и рис. 2, а также рис. 6 ниже), т. е. для особенностей сложности 1 все возможные сомножители их минимальных моделей “появляются” при перечислении особенностей с числом степеней свободы $n = 3$.

Следующее утверждение показывает, что тот же эффект имеет место для любой сложности: все атомы, являющиеся сомножителями минимальных моделей для особенностей сложности k , возникают при классификации особенностей с числом степеней свободы $n = 2k + 1$ (в том числе, возможно, меньшей сложности).

Теорема 10. Если $n \geq 2k + 1$, то $\mathcal{A}_{k,n} \subset \bigcup_{l=1}^k \mathcal{A}_{l,2k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим f_n -граф Θ , соответствующий особенности, для которой $V \in \mathcal{A}_{k,n}$ является j -м сомножителем ее минимальной модели. Пусть Γ_j^0 —

связная компонента f -графа Γ_j (она изоморфна f -графу Γ , соответствующему атому V). Обозначим через Q множество тех n -мерных кубов (образованных неориентированными ребрами f_n -графа Θ), которые имеют непустое пересечение с Γ_j^0 . Пусть количество таких кубов равно l (очевидно, $l \leq k$).

Действуя так же, как и при доказательстве первого утверждения теоремы 9, можно считать, что для любой вершины $(m; \bar{\alpha})$, принадлежащей f -графу Γ_j^0 , вектор $\pi(m; \bar{\alpha})$ есть линейная комбинация векторов $\xi^{m,\varepsilon} \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, а m принадлежит множеству номеров кубов из Q . Рассмотрим подпространство P в \mathbb{Z}_2^{n-1} , порожденное этими $2l$ векторами $\xi^{m,\varepsilon}$, и выберем в нем базис η_1, \dots, η_r (очевидно, $r \leq 2l$).

Опишем теперь построение f_{r+1} -графа Θ' , у которого связные компоненты подграфа, образованного всеми ребрами цвета $r+1$, изоморфны f -графу Γ . Определим множество Π вершин графа Θ' как пересечение множества $\pi^{-1}(P)$ с множеством вершин кубов из Q . Множество Π является подмножеством множества вершин f_n -графа Θ и инвариантно относительно действия на нем перестановок τ_j и μ_j . Значит, эта пара перестановок задает на множестве Π структуру f -графа. Поэтому мы можем определить ребра f_{r+1} -графа Θ' цвета $r+1$ как ребра f_n -графа Θ цвета j (соединяющие вершины из Π). Далее, все ориентированные ребра f_{r+1} -графа Θ' цветов $1, \dots, r$ определим как петли, а неориентированные ребра цветов $1, \dots, r$ зададим следующим образом: вершины $(m; \bar{\alpha})$ и $(m; \bar{\alpha}')$ из Π соединены неориентированным ребром цвета $i \in \{1, \dots, r\}$, если они лежат в одной и той же гиперграни $N^{m,\varepsilon}$ (f_n -графа Θ) и $\pi(m; \bar{\alpha}') - \pi(m; \bar{\alpha}) = \eta_i$.

Построенный f_{r+1} -граф Θ' является связным и имеет сложность l . Его ребра цвета $r+1$ образуют f -граф, связные компоненты которого изоморфны Γ . Это означает, что атом V является сомножителем минимальной модели для особенности, соответствующей f_{r+1} -графу Θ' , т. е. $V \in \mathcal{A}_{l,r+1}$, где $l \leq k$ и $r \leq 2l$. Кроме того, $\mathcal{A}_{k,n} \subset \mathcal{A}_{k,n+1}$ для любых k, n , поскольку умножение любой седловой особенности на атом B увеличивает число степеней свободы на 1, но не меняет сложность. \square

Следующее утверждение, очевидно, эквивалентно теореме 10.

Следствие 1. Если $n \geq 2k + 1$, то $\mathcal{A}_{k,n} \subset \bigcup_{l=1}^k \mathcal{A}_{l,2l+1}$.

Отметим, что, вообще говоря, $\mathcal{A}_{i,2i+1}$ не содержится в $\mathcal{A}_{j,2j+1}$ при $i < j$. Например, атом D_2 принадлежит множеству $\mathcal{A}_{2,5}$, но не принадлежит $\mathcal{A}_{3,7}$. Действительно, рассматривая прямые произведения $D_2 \times B \times \cdots \times B$, получаем, что $D_2 \in \mathcal{A}_{2,n}$ для любого n . С другой стороны, поскольку группа симметрий атома D_2 тривиальна, любое почти прямое произведение вида $(D_2 \times V_1 \times \cdots \times V_n)/G$ есть прямое произведение D_2 и $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$, т. е. имеет четную сложность.

2.7. Случай особенностей сложности 1

В случае сложности 1 условия, накладываемые на рассматриваемые особенности, и описание инварианта можно упростить.

Во-первых, очевидно, что “условие нерасщепляемости” автоматически выполнено для гиперболических особенностей сложности 1 (см. определение 9).

Во-вторых, в каждом классе эквивалентности f_n -графов сложности 1 можно однозначно выбрать “простой” f_n -граф (см. определение 24 и предложение 9. Для простого f_n -графа соответствующие ему перестановки μ_1, \dots, μ_n являются инволюциями (лемма 11). Отсюда, в частности, следует, что для особенностей сложности 1 теорему 7 можно упростить, заменив в ней “эквивалентность” f_n -графов на “изоморфность” (см. теорему 11). Еще одним следствием является описание сомножителей минимальной модели для особенностей сложности 1 (предложения 10 и 12).

В-третьих, перестановки τ_1, \dots, τ_n , соответствующие f_n -графу сложности 1, задают на множестве его вершин структуру аффинного пространства, относительно которой перестановки μ_1, \dots, μ_n также являются аффинными преобразованиями (следствие 2 и предложение 11. Это позволяет переформулировать теорему классификации для особенностей сложности 1 в алгебраических терминах (теоремы `refcompl1-theor3` и 13) и упростить алгоритм их перечисления (результат вычислений для малой сложности приведен в предложении 13).

Перейдем теперь к точным формулировкам и доказательствам указанных утверждений.

2.7.1. Простые f_n -графы

Пусть Θ — f_n -граф сложности 1, определяемый набором перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$ на множестве его вершин. Из условия (с) определения 16 следует, что неориентированные ребра f_n -графа Θ образуют подграф, изоморфный 1-мерному остову n -мерного куба, где ребра каждого из n цветов параллельны, т. е. инволюцию τ_i ($i = 1, \dots, n$) можно рассматривать как сдвиг каждой вершины вдоль неориентированного ребра цвета i .

Определение 24. Будем говорить, что f_n -граф Θ сложности 1 является *простым*, если для каждого $i = 1, \dots, n$ любые две вершины, соединенные ориентированным ребром цвета i , лежат в одной и той же гипергранни куба, перпендикулярной неориентированным ребрам цвета i .

Лемма 11. Если Θ — простой f_n -граф сложности 1, то каждая из соответствующих ему перестановок μ_1, \dots, μ_n является инволюцией (или тождественной перестановкой).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — вершины f_n -графа Θ , соединенные ориентированным ребром цвета i , т. е. $\mathbf{b} = \mu_i(\mathbf{a})$. Так как Θ — простой f_n -граф, то существует путь, идущий из \mathbf{a} в \mathbf{b} и состоящий из неориентированных ребер, цвет которых отличен от i , т. е. $\mathbf{b} = \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k}(\mathbf{a})$, где $j_1, \dots, j_k \neq i$. Получаем

$$\mu_i(\mathbf{b}) = \mu_i \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k}(\mathbf{a}) = \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k} \mu_i(\mathbf{a}) = \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k}(\mathbf{b}) = \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k} \tau_{j_1} \dots \tau_{j_k}(\mathbf{a}) = \mathbf{a},$$

поскольку μ_i коммутирует с инволюциями $\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}$. □

Предложение 9. Среди f_n -графов, эквивалентных данному f_n -графу Θ сложности 1, существует ровно один (с точностью до изоморфизма) простой f_n -граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N — одна из двух гиперграней, перпендикулярных всем неориентированным ребрам цвета i . Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 11, получаем, что перестановка μ_i переводит все вершины, лежащие в гипергранни N , либо в гипергрань N , либо в параллельную ей гипергрань N' . Таким образом, заменяя, если необходимо, μ_i на $\tau_i \mu_i$, мы получаем f_n -граф, эквивалентный Θ , для которого условие простоты выполнено для ребер цвета i . Поступая так для каждого $i = 1, \dots, n$, получим простой f_n -граф, эквивалентный Θ .

Докажем теперь, что эквивалентные простые f_n -графы изоморфны. Согласно определению 19 переход к эквивалентному f_n -графу состоит из последовательности операций, каждая из которых является заменой перестановки μ_i либо на μ_i^{-1} , либо на $\tau_i\mu_i$. Учитывая, что τ_i и μ_i инволюции (лемма 11), получаем, что имеется всего три варианта применения этих операций: замена μ_i на $\tau_i\mu_i$, на $\mu_i\tau_i$ или на $\tau_i\mu_i\tau_i$. Первые два варианта нарушают свойство простоты f_n -графа, а последняя приводит к изоморфному f_n -графу (изоморфизм осуществляется перестановкой τ_i). \square

Замечание 10. Существование канонического представителя (простого f_n -графа) среди эквивалентных f_n -графов сложности 1, связано с тем, что для особенностей сложности 1 камеру в образе отображения момента можно выбрать некоторым каноническим образом, учитывая, что l -тип особенности сложности 1 однозначно определен (определение l -типа см. в [9, 73], а также в разделе 2.2).

Из предложения 9 следует, что для особенностей сложности 1 общую теорему 7 можно уточнить следующим образом.

Теорема 11. *Две седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы локально мувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им простые f_n -графы изоморфны. При этом любой простой f_n -граф соответствует некоторой седловой особенности сложности 1.* \square

Таким образом, задача классификации седловых особенностей сложности 1 эквивалентна задаче перечисления простых f_n -графов.

Еще один удобный способ описания особенностей интегрируемых гамильтоновых систем основан на теореме Н. Т. Зунга о представлении особенностей в виде почти прямых произведений (теорема 3; см. также [121, 12, 74]). Используя предложение 9 и результаты из разделов 2.3, 2.4, легко доказать следующее утверждение (содержащееся также в работе В. В. Калашникова [24]).

Предложение 10. *Для седловой особенности сложности 1 сомножителями в ее минимальной модели могут быть только атомы B , C_2 , D_1 , P_4 (соответствующие им f -графы см. на рис. 6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим седловую особенность сложности 1 и соответствующий ей простой f_n -граф Θ . Сомножители минимальной модели данной особенности задаются f -графами (т. е. f_1 -графами), которые являются связными компонентами подграфов, образованных ребрами одного цвета f_n -графа Θ (см. предложение 4 и лемму 9). Поскольку f_n -граф Θ является простым, каждый такой f -граф Γ_i задается парой перестановок τ_i, μ_i , где τ_i — инволюция, а μ_i — инволюция или тождественная перестановка. Это означает, что ориентированные ребра f -графа Γ_i образуют либо петли, либо циклы длины 2.

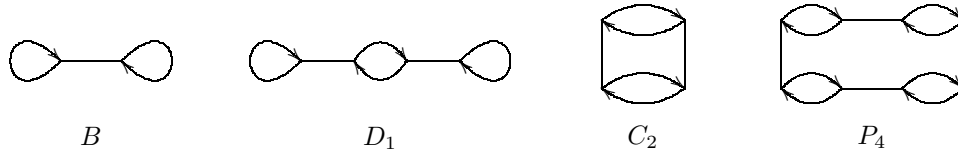


Рис. 6: Образующие минимальной модели для особенностей сложности 1

Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 11, показывают, что каждая перестановка $\tau_i \mu_i \tau_i \mu_i$ является инволюцией или тождественной перестановкой (если рассмотреть $\tau_i \mu_i \tau_i \mu_i$ как новые перестановки μ'_i , то для них, очевидно, выполнены условия леммы 11).

Перебирая все варианты получаем следующее: f -граф Γ_i может иметь либо только две петли (атом B), либо две петли и один цикл длины 2 (атом D_1), либо два цикла длины 2 (атом C_2), либо четыре цикла длины 2 (атом P_4). \square

2.7.2. Алгебраическое описание особенностей сложности 1

Дадим еще одну интерпретацию f_n -графов сложности 1, удобную для их перечисления.

Набор инволюций τ_1, \dots, τ_n задает на множестве вершин f_n -графа Θ структуру n -мерного аффинного пространства над полем \mathbb{Z}_2 . Действительно, если \mathbf{a} и \mathbf{b} — вершины f_n -графа Θ , то $\mathbf{b} = \tau_1^{\varepsilon_1} \dots \tau_n^{\varepsilon_n}(\mathbf{a})$, где набор из нулей и единиц $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ однозначно определен. Тем самым каждой паре вершин \mathbf{a}, \mathbf{b} сопоставляется элемент $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}_2^n$, который можно рассматривать как “вектор, соединяющий \mathbf{a} и \mathbf{b} ”. Будем записывать это соответствие в виде $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \vec{\mathbf{v}}$ или $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \vec{\mathbf{v}}$. Множество вершин f_n -графа Θ с указанной структурой аффинного пространства обозначим через \mathbb{A}^n .

(Здесь и далее мы обозначаем элементы аффинного пространства \mathbb{A}^n , т. е. вершины f_n -графа, через $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$, а элементы линейного пространства \mathbb{Z}_2^n , ассоциированного с \mathbb{A}^n , через $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \dots$)

Перестановки τ_1, \dots, τ_n являются образующими подгруппы сдвигов в группе $\text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$ биективных аффинных преобразований пространства \mathbb{A}^n . Оказывается, перестановки μ_1, \dots, μ_n также являются аффинными преобразованиями пространства \mathbb{A}^n . Это вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма 12. *Пусть L — $(n - 1)$ -мерное подпространство в \mathbb{Z}_2^n . Если отображение $R : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ коммутирует со всеми сдвигами на элементы подпространства L , то R является аффинным преобразованием, причем его дифференциал $T = dR$ действует на L тождественно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению отображение R является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n$ и $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}_2^n$ выполнено соотношение

$$R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{v}}) = R(\mathbf{a}) + T\vec{\mathbf{v}},$$

где T — линейный оператор на \mathbb{Z}_2^n . Рассмотрим в \mathbb{Z}_2^n элемент $\vec{\mathbf{e}} \notin L$. Любой элемент $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}_2^n$ имеет вид $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_L + \lambda\vec{\mathbf{e}}$, где $\vec{\mathbf{v}}_L \in L$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_2$. Учитывая, что R коммутирует со сдвигом на $\vec{\mathbf{v}}_L$, получаем

$$R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{v}}) = R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{v}}_L + \lambda\vec{\mathbf{e}}) = R(\mathbf{a} + \lambda\vec{\mathbf{e}}) + \vec{\mathbf{v}}_L = R(\mathbf{a}) + \lambda(R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a})) + \vec{\mathbf{v}}_L,$$

где последнее равенство, очевидно, верно при $\lambda \in \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$. Проверим, что $R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a})$ не зависит от $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n$. Действительно, если $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \vec{\mathbf{w}} = \mathbf{a} + \vec{\mathbf{w}}_L + \mu\vec{\mathbf{e}}$, где $\vec{\mathbf{w}}_L \in L$ и $\mu \in \mathbb{Z}_2$, то

$$\begin{aligned} R(\mathbf{b} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{b}) &= R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{w}}_L + \mu\vec{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{w}}_L + \mu\vec{\mathbf{e}}) = \\ &= R(\mathbf{a} + (\mu + 1)\vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a} + \mu\vec{\mathbf{e}}) = R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Полагая $T\vec{\mathbf{e}} = R(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{e}}) - R(\mathbf{a})$ и $T\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ для любого $\vec{\mathbf{v}} \in L$, получаем требуемое утверждение. \square

Следствие 2. *Каждая перестановка μ_i ($i = 1, \dots, n$) является невырожденным аффинным преобразованием $Q_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$.* \square

Таким образом, каждому f_n -графу Θ сложности 1 сопоставлен набор аффинных преобразований $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n \in \text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(A1) P_1, \dots, P_n образуют базис в подгруппе сдвигов группы $\text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$;

(A2) Q_1, \dots, Q_n попарно коммутируют;

(A3) $P_i Q_j = Q_j P_i$ при $i \neq j$.

Если рассматривать такие наборы с точностью до сопряжения в группе $\text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$ и перенумерации базисных элементов, то указанное соответствие будет взаимно-однозначным. Точнее, верно следующее утверждение (ср. предложение 6).

Предложение 11. *Наборы аффинных преобразований $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ и $P'_1, \dots, P'_n, Q'_1, \dots, Q'_n$, удовлетворяющие условиям (A1)–(A3), задают изоморфные f_n -графы Θ и Θ' сложности 1 тогда и только тогда, когда существуют $\sigma \in S_n$ и $g \in \text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$, для которых*

$$P'_i = g P_{\sigma(i)} g^{-1} \quad \text{и} \quad Q'_i = g Q_{\sigma(i)} g^{-1}$$

при всех $i = 1, \dots, n$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что любое отображение $g : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$, переводящее набор базисных сдвигов P_1, \dots, P_n в некоторый набор базисных сдвигов, является аффинным преобразованием. \square

2.7.3. Матричная форма инварианта

Зафиксируем набор P_1, \dots, P_n и выберем базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в \mathbb{Z}_2^n , в котором каждое преобразование $P_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ является сдвигом на вектор \vec{e}_i . Тогда любой f_n -граф сложности 1 задается набором преобразований $Q_1, \dots, Q_n \in \text{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих условиям (A2) и (A3).

Компоненты элемента $\vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ обозначим через v^1, \dots, v^n . Обозначим через L_i подпространство в \mathbb{Z}_2^n , состоящее из векторов \vec{v} , для которых $v^i = 0$. Если $\vec{v} \in L_i$, то будем говорить, что \vec{v} перпендикулярен \vec{e}_i , и писать $\vec{v} \perp \vec{e}_i$.

Зафиксируем некоторую вершину $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{A}^n$. Каждое подпространство L_i определяет пару параллельных аффинных подпространств $N_i \ni \mathbf{a}_0$ и $N'_i \not\ni \mathbf{a}_0$. Следующее утверждение показывает, что преобразование Q_i , ограниченное на каждое из аффинных подпространств N_i и N'_i , является сдвигом.

Лемма 13. Пусть Q_1, \dots, Q_n удовлетворяют условиям (A2) и (A3), где P_1, \dots, P_n — сдвиги на базисные векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ соответственно. Тогда для каждого Q_i ($i = 1, \dots, n$) существуют $\vec{y}_i, \vec{z}_i \in \mathbb{Z}_2^n$ такие, что

$$Q_i(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \vec{y}_i, \text{ если } \mathbf{a} \in N_i, \quad \text{и} \quad Q_i(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \vec{z}_i, \text{ если } \mathbf{a} \in N'_i. \quad (9)$$

В частности, $dQ_i : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ имеет вид $dQ_i(\vec{v}) = \vec{v} + \mathbf{v}^i \vec{t}_i$, где $\vec{t}_i = \vec{y}_i + \vec{z}_i$ и $\mathbf{t}_i^i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q_i(\mathbf{a}_0) - \mathbf{a}_0 = \vec{y}_i$ и $Q_i(\mathbf{a}_0 + \vec{e}_i) - (\mathbf{a}_0 + \vec{e}_i) = \vec{z}_i$. Тогда формулы (9) следуют из того, что Q_i коммутирует с любым сдвигом на \vec{e}_j при $j \neq i$. Равенство $\mathbf{t}_i^i = 0$ следует из того, что dQ_i — невырожденный оператор. \square

Таким образом, каждый f_n -граф Θ сложности 1 задается набором векторов $\vec{y}_1, \vec{z}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{z}_n \in \mathbb{Z}_2^n$, определенных формулами (9). Ясно, что условие простоты f_n -графа Θ эквивалентно тому, что $\mathbf{y}_i \perp \vec{e}_i$ и $\mathbf{z}_i \perp \vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$). Это означает, что для простого f_n -графа каждый из векторов \vec{y}_i, \vec{z}_i задает сдвиг в соответствующей ему гиперграни куба (рассматриваемой как аффинное подпространство в \mathbb{A}^n).

Каждая пара векторов \vec{y}_i, \vec{z}_i определяет соответствующую перестановку μ_i на множестве вершин f_n -графа Θ и тем самым задает один из сомножителей в минимальной модели особенности, соответствующей этому f_n -графу. Из доказательства предложения 10 вытекает, что этот сомножитель может быть описан следующим образом в терминах векторов \vec{y}_i, \vec{z}_i .

Предложение 12. Пусть набор векторов $\vec{y}_1, \vec{z}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{z}_n \in \mathbb{Z}_2^n$ задает простой f_n -граф Θ сложности 1. Тогда i -й сомножитель в соответствующей минимальной модели есть

- 1) атом B , если $\vec{y}_i = \vec{z}_i = \vec{0}$,
- 2) атом C_2 , если $\vec{y}_i = \vec{z}_i \neq \vec{0}$,
- 3) атом D_1 , если $\vec{y}_i = \vec{0}, \vec{z}_i \neq \vec{0}$ или $\vec{y}_i \neq \vec{0}, \vec{z}_i = \vec{0}$,
- 4) атом P_4 , если $\vec{y}_i \neq \vec{0}, \vec{z}_i \neq \vec{0}$ и $\vec{y}_i \neq \vec{z}_i$. \square

Набор векторов $\vec{y}_1, \vec{z}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{z}_n$, задающих структуру f_n -графа, не произволен. Эти векторы должны удовлетворять условию “коммутирования”, т. е. условию, эквивалентному условию (A2) для соответствующих им преобразований Q_1, \dots, Q_n . Найдем вид этого условия в координатной форме.

Лемма 14. Пусть $\vec{y}_1, \vec{z}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{z}_n \in \mathbb{Z}_2^n$. Набор аффинных преобразований $Q_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ ($i = 1, \dots, n$), заданных формулами (9), удовлетворяет условию (A2) тогда и только тогда, когда для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{y}_j^i(\vec{y}_i + \vec{z}_i) = \mathbf{z}_j^i(\vec{y}_i + \vec{z}_i) = \mathbf{y}_i^j(\vec{y}_j + \vec{z}_j) = \mathbf{z}_i^j(\vec{y}_j + \vec{z}_j). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{A}^n$ и $\vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$. Формулы (9) можно переписать в следующем виде:

$$Q_i(\mathbf{a}_0 + \vec{v}) = \mathbf{a}_0 + \vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i.$$

Применяя преобразование $Q_j Q_i$ к произвольной точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \vec{v} \in \mathbb{A}^n$, получаем

$$\begin{aligned} Q_j Q_i(\mathbf{a}_0 + \vec{v}) &= Q_j(\mathbf{a}_0 + \vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i) = \\ &= \mathbf{a}_0 + \vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i + ((\vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i)^j + 1)\vec{y}_j + (\vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i)^j\vec{z}_j = \\ &= \mathbf{a}_0 + \vec{v} + (\mathbf{v}^i + 1)\vec{y}_i + \mathbf{v}^i\vec{z}_i + (\mathbf{v}^j + (\mathbf{v}^i + 1)\mathbf{y}_i^j + \mathbf{v}^i\mathbf{z}_i^j + 1)\vec{y}_j + (\mathbf{v}^j + (\mathbf{v}^i + 1)\mathbf{y}_i^j + \mathbf{v}^i\mathbf{z}_i^j)\vec{z}_j. \end{aligned}$$

Приравнивая полученное выражение к аналогичному выражению для $Q_i Q_j(\mathbf{a}_0 + \vec{v})$, получим соотношение

$$((\mathbf{v}^j + 1)\mathbf{y}_j^i + \mathbf{v}^j\mathbf{z}_j^i)(\vec{y}_i + \vec{z}_i) = ((\mathbf{v}^i + 1)\mathbf{y}_i^j + \mathbf{v}^i\mathbf{z}_i^j)(\vec{y}_j + \vec{z}_j),$$

которое верно для любого вектора \vec{v} . Рассматривая все возможные значения $\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j \in \mathbb{Z}_2$, получаем равенства (10). \square

Замечание 11. Пару векторов $\vec{y}_i, \vec{z}_i \in \mathbb{Z}_2^n$ можно рассмотреть как “векторное поле” ξ_i на \mathbb{A}^n , заданное соответствующими сдвигами на паре параллельных гиперграней куба (т.е. на паре аффинных подпространств в \mathbb{A}^n). Если определить стандартными формулами производную полинома вдоль векторного поля и коммутатор векторных полей на \mathbb{A}^n , то соотношения (10) эквивалентны тому, что поля ξ_i и ξ_j коммутируют.

Переформулируем теперь теорему 11, описывающую классификацию седловых особенностей сложности 1, в терминах векторов \vec{y}_i, \vec{z}_i .

Как и выше, рассмотрим аффинное пространство \mathbb{A}^n , в котором фиксирована “система координат” (элемент $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{A}^n$ и базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{Z}_2^n$), как множество

вершин графа. Неориентированные ребра цвета i соединяют вершины \mathbf{a} и $\mathbf{a} + \vec{\mathbf{e}}_i$, а ориентированные ребра цвета i идут из \mathbf{a} в $Q_i(\mathbf{a})$, где Q_i определено формулами (9). Из лемм 13 и 14 следует, что если $\vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1, \dots, \vec{\mathbf{y}}_n, \vec{\mathbf{z}}_n$ удовлетворяют соотношениям (10), то мы получим некоторый f_n -граф сложности 1. Рассмотрим $(n \times n)$ -матрицы \mathbf{y} и \mathbf{z} , столбцами которых являются $\vec{\mathbf{y}}_1, \dots, \vec{\mathbf{y}}_n$ и $\vec{\mathbf{z}}_1, \dots, \vec{\mathbf{z}}_n$ соответственно, и обозначим построенный f_n -граф через $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Из определения 24 очевидно, что f_n -граф $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ является простым тогда и только тогда, когда все диагональные элементы матриц \mathbf{y} и \mathbf{z} равны нулю.

Теорема 12. 1) Каждая пара $(n \times n)$ -матриц \mathbf{y}, \mathbf{z} , элементы которых $y_i^j, z_i^j \in \mathbb{Z}_2$ удовлетворяют условиям (10) и соотношениям $y_i^i = z_i^i = 0$, задает седловую особенность сложности 1, соответствующую f_n -графу $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, причем любая седловая особенность сложности 1 задается таким образом.

2) Две седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы локально ливиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда пару матриц \mathbf{y}, \mathbf{z} , задающую одну особенность, можно получить из аналогичной пары матриц, задающей другую особенность, применяя следующие операции:

(i) сопряжение матриц \mathbf{y} и \mathbf{z} при помощи некоторой матрицы перестановки;

(ii) замена столбца $\vec{\mathbf{y}}_i$ в матрице \mathbf{y} на $\vec{\mathbf{z}}_i$ и замена столбца $\vec{\mathbf{z}}_i$ в матрице \mathbf{z} на $\vec{\mathbf{y}}_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из теоремы 11 и определения f_n -графа $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Второе утверждение следует из предложения 11. Операция (i) соответствует перенумерации базисных элементов $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$, а операция (ii) — замене вершины $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{A}^n$ на вершину $\mathbf{a}_0 + \vec{\mathbf{e}}_i$. \square

Применяя операции (i) и (ii) из теоремы 12, можно привести матрицы \mathbf{y} и \mathbf{z} к некоторому “простому” виду, чтобы сократить перебор при составлении списка седловых особенностей сложности 1. Для описания этого вида удобнее использовать матрицу $\mathbf{t} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ вместо одной из матриц \mathbf{y}, \mathbf{z} (ясно, что пары матриц \mathbf{y}, \mathbf{z} и \mathbf{t}, \mathbf{y} однозначно определяют друг друга).

Лемма 15. Пусть элементы матриц \mathbf{y}, \mathbf{z} удовлетворяют условиям (10) и соотношениям $\mathbf{y}_i^i = \mathbf{z}_i^i = 0$. Тогда, применяя операцию (i), матрицы $\mathbf{t} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ и \mathbf{y} можно привести к следующему виду:

$$\mathbf{t} = \begin{array}{c|ccc|c} \overbrace{0}^{k_0} & \overbrace{T_1}^{k_1} & \cdots & \overbrace{T_m}^{k_m} \\ \hline 0 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{y} = \begin{array}{c|cc|c} \overbrace{U}^{k_0} & \overbrace{V}^{k_1} & \cdots & \overbrace{W_m}^{k_m} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline \end{array} & \ddots & \\ \hline & 0 & & \begin{array}{c|c} & W_m \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}, \quad (11)$$

где $1 \leq k_0 \leq n$, каждая из матриц T_1, \dots, T_m состоит из одинаковых ненулевых столбцов, матрица U — любая с нулями на диагонали, матрица V — любая, а каждая из матриц W_1, \dots, W_m — симметричная с нулями на диагонали (в частности, если $k_0 = n$, то $\mathbf{t} = 0$ и $\mathbf{y} = U$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матриц \mathbf{t}, \mathbf{y} условия (10), очевидно, можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{t}_j^i \vec{\mathbf{t}}_i = 0, \quad \mathbf{y}_j^i \vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{y}_i^j \vec{\mathbf{t}}_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Первое из соотношений (12) означает в точности следующее: для любого $i = 1, \dots, n$ матрица \mathbf{t} имеет либо нулевой i -й столбец, либо нулевую i -ю строку. Перенумеруем базисные векторы $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$ (т.е. применим операцию (i)) так, чтобы первые k_0 столбцов матрицы \mathbf{t} были нулевыми, а все остальные $n - k_0$ столбцов — ненулевыми. Тогда последние $n - k_0$ строк матрицы \mathbf{t} будут нулевыми. Группируя ненулевые столбцы, получаем требуемый вид для матрицы \mathbf{t} .

Докажем, что в результате матрица \mathbf{y} также примет требуемый вид. Рассматривая второе из соотношений (12), получаем следующие варианты. Если $i, j \leq k_0$, то соотношение выполнено, т.е. на матрицу U нет никаких условий кроме $\mathbf{y}_i^i = 0$. Если $i \leq k_0$, а $j > k_0$, то $\mathbf{y}_i^j = 0$, так как $\vec{\mathbf{t}}_i = 0$, а $\vec{\mathbf{t}}_j \neq 0$. Это означает, что левый нижний блок матрицы \mathbf{y} нулевой. Наконец, если $i, j > k_0$, то $\vec{\mathbf{t}}_i$ и $\vec{\mathbf{t}}_j$ — ненулевые векторы. Поэтому в случае $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}_j$ получаем $\mathbf{y}_j^i = \mathbf{y}_i^j = 0$, а в случае $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_j$ получаем $\mathbf{y}_j^i = \mathbf{y}_i^j$. \square

Из леммы 15 следует, что теорема 12 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 13. 1) Каждая пара матриц \mathbf{t}, \mathbf{y} вида (11) задает седловую особенность сложности 1, соответствующую f_n -графу $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{y} + \mathbf{t})$, причем любая седловая особенность сложности 1 задается таким образом.

2) Две седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы локально ливиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда пару матриц \mathbf{t}, \mathbf{y} вида (11), задающую одну особенность, можно получить из аналогичной пары матриц, задающей другую особенность, применяя следующие операции:

- (i') сопряжение матриц \mathbf{t} и \mathbf{y} при помощи некоторой матрицы перестановки;
- (ii') замена столбца \vec{y}_i в матрице \mathbf{y} на $\vec{y}_i + \vec{t}_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n$. \square

Теорема 13 показывает, что имеется взаимно однозначное соответствие между седловыми особенностями сложности 1 и классами эквивалентности пар матриц \mathbf{t}, \mathbf{y} вида (11) относительно операций (i') и (ii'). Отметим, что выбрать некоторый “канонический” представитель в каждом таком классе эквивалентности вряд ли возможно. Например, следующее утверждение показывает, что в случае $\mathbf{t} = 0$ эта задача эквивалентна нахождению некоторой “канонической” нумерации вершин произвольного графа.

Следствие 3. Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы количество седловых особенностей сложности 1, для которых множителями минимальной модели являются лишь атомы B и C_2 , равно количеству всех ориентированных графов с n вершинами без петель и кратных ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 12 рассматриваемые особенности соответствуют случаю $\mathbf{t} = 0$. Поэтому каждая из таких особенностей задается лишь матрицей \mathbf{y} . Более того, из леммы 15 следует, что в этом случае $\mathbf{y} = U$, где U — любая матрица с нулями на диагонали, причем операция (ii') ее не меняет. Матрицу U можно рассматривать как матрицу смежности некоторого графа, а операцию (i') — как перенумерацию его вершин. \square

Отметим также противоположный случай, когда матрица \mathbf{t} имеет максимальное число ненулевых столбцов.

Следствие 4. *Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы количество седловых особенностей сложности 1, для которых сомножителями минимальной модели являются один атом B и $n - 1$ атомов P_4 , равно количеству всех неориентированных графов без петель и кратных ребер, число вершин которых равно $n - 1$, причем ни одна из вершин не является изолированной.*

Доказательство. Из предложения 12 следует, что для рассматриваемых особенностей матрицы \mathbf{t} и \mathbf{y} имеют ровно один нулевой столбец. Если такие матрицы имеют вид (11), то $k_0 = 1$ и $m = 1$. Отсюда получаем, что $U = 0$, а T_1 — матрица размера $1 \times (n - 1)$, все элементы которой равны 1. Учитывая операцию (ii'), можно считать, что $V = 0$. Таким образом, каждая особенность указанного вида задается симметричной $(n - 1) \times (n - 1)$ -матрицей W_1 с нулями на диагонали и без нулевых столбцов. Такую матрицу можно рассматривать как матрицу смежности неориентированного графа. \square

Используя теорему 12, легко предъяснить алгоритм перечисления седловых особенностей сложности 1 для данного числа степеней свободы n : необходимо перебрать все пары матриц \mathbf{t}, \mathbf{y} вида (11), а затем устранить из полученного списка лишние пары, применяя операции (i') и (ii'). В следующем утверждении указано количество таких особенностей для малых значений n , полученное при реализации этого алгоритма на компьютере.

Предложение 13. *Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы количество попарно неэквивалентных седловых особенностей сложности 1 при $n = 1, 2, 3, 4$ равно 1, 4, 32, 622 соответственно.* \square

Результатом работы алгоритма является, конечно, не количество, а список особенностей сложности 1. Для $n = 1$ это атом B (см. рис. 1). Описания четырех особенностей для $n = 2$ в виде комплекса, круговых молекул и почти прямых произведений приведены в [12, т. 2, теоремы 9.5, 9.6], а соответствующие f_2 -графы на рис. 5. Случай $n = 3$ рассмотрен в следующем разделе.

Для матрицы \mathbf{t}_{II} имеем 8 вариантов:

$B \ B \ D_1$	$B \ B \ P_4$	$B \ C_2 \ D_1$	$B \ C_2 \ P_4$
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 1 0 0 0
$C_2 \ B \ D_1$	$C_2 \ B \ P_4$	$C_2 \ C_2 \ D_1$	$C_2 \ C_2 \ P_4$
0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 1 0 0 0	0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 1 0 1 0 0 0

Для матрицы \mathbf{t}_{III} получаем следующие 6 вариантов:

$B \ B \ D_1$	$B \ C_2 \ D_1$	$C_2 \ C_2 \ D_1$	$B \ B \ P_4$	$B \ C_2 \ P_4$	$C_2 \ C_2 \ P_4$
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 1 1 0 0 0 0 0 0	0 1 1 1 0 0 0 0 0

Для матрицы \mathbf{t}_{IV} существует всего 2 варианта (это соответствует двум неориентированным графам с двумя вершинами; ср. следствие 4):

$B \ D_1 \ D_1$	$B \ P_4 \ P_4$
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 1 0

Таким образом, всего имеется 32 седловых особенности сложности 1. Для каждой пары матриц \mathbf{t} , \mathbf{y} из этого списка можно построить соответствующий f_3 -граф $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ и минимальную модель особенности (согласно процедуре построения минимальной модели особенности по ее f_n -графу, описанной в предложении 4 и лемме 9).

В таблице 1 для описанных выше 32 особенностей указаны их минимальные модели. Отметим, что аналогичный список был получен В.В. Калашниковым в работе [24], но приведенная там таблица содержит ошибки. Общее количество особенностей, перечисленных В.В. Калашниковым также равно 32, но 7 особенностей в таблице из работы [24] встречаются по два раза, а 7 особенностей пропущены.

Приведем номера одинаковых особенностей из таблицы В. В. Калашникова:

$$\text{№6} = \text{№8}, \quad \text{№10} = \text{№16}, \quad \text{№11} = \text{№13}, \quad \text{№20} = \text{№23},$$

$$\text{№24} = \text{№27}, \quad \text{№25} = \text{№28}, \quad \text{№26} = \text{№30}.$$

Таблица 1: Седловые особенности сложности 1 для трех степеней свободы

№	МНОЖИТЕЛИ	ДЕЙСТВИЕ	ГРУППА
1	$B \times B \times B$	(id, id, id)	$\{e\}$
2	$C_2 \times B \times C_2$	$(\alpha, \text{id}, \alpha\beta), (\alpha\beta, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3	$B \times B \times D_1$	$(\alpha, \text{id}, \alpha)$	\mathbb{Z}_2
4	$B \times B \times C_2$	$(\alpha, \text{id}, \alpha)$	\mathbb{Z}_2
5	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \text{id}, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
6	$D_1 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \text{id}, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
7	$B \times C_2 \times C_2$	$(\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
8	$B \times B \times D_1$	(α, α, α)	\mathbb{Z}_2
9	$D_1 \times D_1 \times B$	$(\alpha, \text{id}, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
10	$B \times D_1 \times C_2$	$(\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
11	$C_2 \times D_1 \times B$	$(\alpha, \text{id}, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
12	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \text{id}, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
13	$B \times B \times P_4$	$(\text{id}, \alpha, \gamma^2\beta), (\alpha, \text{id}, \beta)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
14	$B \times C_2 \times C_2$	$(\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
15	$C_2 \times C_2 \times B$	$(\alpha, \text{id}, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
16	$B \times B \times P_4$	$(\alpha, \alpha, \gamma^2\beta), (\alpha, \text{id}, \beta)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
17	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta), (\alpha\beta, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
18	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
19	$P_4 \times P_4 \times B$	$(\beta, \gamma\beta, \alpha), (\gamma^2\beta, \gamma\beta, \text{id}), (\gamma\beta, \beta, \alpha), (\gamma\beta, \gamma^2\beta, \text{id})$	G_{16}
20	$C_2 \times C_2 \times P_4$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha\beta, \beta), (\alpha\beta, \text{id}, \gamma^2\beta)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
21	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
22	$C_2 \times C_2 \times B$	$(\alpha, \alpha\beta, \alpha), (\alpha\beta, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
23	$B \times B \times C_2$	(α, α, α)	\mathbb{Z}_2
24	$D_1 \times C_2 \times B$	$(\alpha, \alpha\beta, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
25	$P_4 \times C_2 \times B$	$(\beta, \alpha\beta, \text{id}), (\gamma^2\beta, \text{id}, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
26	$P_4 \times C_2 \times B$	$(\beta, \alpha\beta, \alpha), (\gamma^2\beta, \text{id}, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
27	$C_2 \times C_2 \times D_1$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
28	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha\beta, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
29	$P_4 \times B \times C_2$	$(\beta, \alpha, \alpha\beta), (\gamma^2\beta, \text{id}, \alpha\beta), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
30	$C_2 \times C_2 \times P_4$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\alpha\beta, \alpha, \text{id}), (\text{id}, \alpha\beta, \beta), (\alpha\beta, \text{id}, \gamma^2\beta)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
31	$C_2 \times C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta, \text{id}), (\text{id}, \alpha, \alpha\beta), (\alpha\beta, \text{id}, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
32	$C_2 \times C_2 \times B$	$(\alpha, \alpha\beta, \alpha), (\text{id}, \alpha, \alpha)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

В таблице 1 сохранены нумерация и обозначения из работы [24], но вместо особенностей с номерами 8, 13, 16, 23, 27, 28, 30 указаны 7 новых.

2.8. Пример особенности, не являющейся почти прямым произведением

В предыдущих разделах главы 2 мы рассматривали особенности, удовлетворяющие условию нерасщепляемости (определение 9). Именно для них строился инвариант (f_n -граф) и решалась задача классификации. Напомним, что по теореме Зунга (теорема 3) такие особенности представляются в виде почти прямых произведений.

В этом разделе приведен пример особенности, не являющейся особенностью типа почти прямого произведения (и, в частности, не удовлетворяющей условию нерасщепляемости). Отметим, что некоторые примеры особенностей, не удовлетворяющих условию нерасщепляемости, приведены в книге [12], но они имеют другой характер. Особенность, пример которой приведен в этом разделе, является чисто гиперболической особенностью ранга 0 (в отличие от примеров из книги ВФ), т.е. особенностью именно такого типа, который рассматривался в предыдущих разделах этой главы.

Перейдем к построению примера. Для этого опишем явно 4-мерное симплектическое многообразие и пару коммутирующих функций на нем.

Опишем сначала некоторый вспомогательный объект. Рассмотрим невырожденную седловую особенность, соответствующую атому B (см. рис. 1). Будем считать атом B подмножеством плоскости с координатами q, p , где симплектическая структура имеет вид $dp \wedge dq$, а $f(q, p)$ — соответствующий гамильтониан, особый уровень которого (восьмерка) задается уравнением $f(q, p) = 0$. Рассмотрим на атоме B замкнутую гладкую дифференциальную форму $\alpha = Q(q, p)dq + P(q, p)dp$, удовлетворяющую следующим свойствам:

- 1) $Q \frac{\partial f}{\partial p} - P \frac{\partial f}{\partial q} = \alpha(\text{sgrad } f) > 0$ всюду за исключением особой точки S ;
- 2) $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha = 1$, где γ_1 и γ_2 — “ребра” особого слоя, т.е. две петли восьмерки (в частности, форма α является целочисленной).

Иными словами, вместо формы α мы можем рассмотреть многозначную гладкую функцию $g(q, p)$ такую, что $dg = \alpha$ и “значение” g в вершине восьмерки является целым числом. Легко видеть, что такая функция (или, эквивалентно, такая форма α) существует.

Рассмотрим теперь три таких объекта, т.е. три экземпляра таких особенностей B_1, B_2, B_3 с особыми точками S_1, S_2, S_3 , гамильтонианами $f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), f_3(q_3, p_3)$ и 1-формами $\alpha_1(q_1, p_1), \alpha_2(q_2, p_2), \alpha_3(q_3, p_3)$ (или многозначными функциями $g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), g_3(q_3, p_3)$) соответственно. Построим из них особенность типа прямого произведения $M^6 = B_1 \times B_2 \times B_3$ с симплектической структурой $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3$ и тремя коммутирующими функциями $f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), f_3(q_3, p_3)$.

Для завершения построения требуемой невырожденной особенности с двумя степенями свободы мы фактически проведем редукцию этой интегрируемой системы по интегралу $f_1 + f_2 + f_3$. Более точно, конструкция состоит в следующем. Рассмотрим в M^6 подмножество X^4 , задаваемое двумя уравнениями:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \quad g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Так как формы $dg_i = \alpha_i$ целочисленны, мы получим некоторое замкнутое четырехмерное подмножество в M^6 .

Лемма 16. *Подмножество X^4 — гладкое четырехмерное симплектическое подмногообразие в M^6 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что X^4 гладкое подмногообразие, достаточно проверить, что 1-формы $df_1 + df_2 + df_3$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ линейно независимы всюду на X^4 . Действительно, из условий $\alpha_i(\text{sgrad } f_i) > 0$ на $B_i \setminus S_i$ (где $i = 1, 2, 3$) следует, что эти две формы зависимы только в точке $S_1 \times S_2 \times S_3$, но эта точка не принадлежит множеству X_4 .

Докажем, что подмногообразие X^4 симплектическое. Касательное пространство в любой его точке есть косоортогональное дополнение к двумерному подпространству, порожденному векторами $\text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3$ и $\text{sgrad } g_1 + g_2 + g_3$. Значит, его симплектичность эквивалентна симплектичности этого двумерного подпространства, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению условия $\omega(\text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3, \text{sgrad } g_1 + g_2 + g_3) \neq 0$. Вычисляя, получаем

$$\omega(\text{sgrad } g_1 + g_2 + g_3, \text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3) = \alpha_1(\text{sgrad } f_1) + \alpha_2(\text{sgrad } f_2) + \alpha_3(\text{sgrad } f_3) > 0.$$

□

Лемма 17. *Ограничения функций f_1, f_2, f_3 на подмногообразии X^4 коммутируют относительно симплектической структуры $\tilde{\omega} = \omega|_{X^4}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ограничения функций f_1, f_2, f_3 на X^4 через $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$. Ясно, что $\text{sgrad } \tilde{f}_i$ (относительно $\tilde{\omega}$) есть проекция вектора $\text{sgrad } f_i$ на касательное пространство к X^4 вдоль его косоортогонального дополнения, т.е. вдоль двумерного подпространства, порожденного векторами $\text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3$ и $\text{sgrad } g_1 + g_2 + g_3$. Но, фактически, эта проекция есть проекция лишь вдоль $\text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3$ и ее можно записать следующим образом:

$$\text{sgrad } \tilde{f}_i = \text{sgrad } f_i - \frac{\alpha_i(\text{sgrad } f_i)}{\alpha_1(\text{sgrad } f_1) + \alpha_2(\text{sgrad } f_2) + \alpha_3(\text{sgrad } f_3)} \text{sgrad}(f_1 + f_2 + f_3) \quad (13)$$

Действительно, легко проверяется, что указанный вектор косоортогонален векторам $\text{sgrad } f_1 + f_2 + f_3$ и $\text{sgrad } g_1 + g_2 + g_3$, поскольку $\{g_i, f_i\} = \alpha_i(\text{sgrad } f_i)$ и $\{g_i, f_i\} = 0$ при $i \neq j$.

Из явной формулы (13) для $\text{sgrad } \tilde{f}_i$ очевидно, что $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ коммутируют относительно $\tilde{\omega}$. □

Итак, мы построили интегрируемую гамильтонову систему на четырехмерном симплектическом многообразии X^4 (в качестве интегралов возьмем, например, \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2).

Из формулы (13) следует, что \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 зависимы в точности в тех точках из X^4 , в которых зависимы функции f_1, f_2, f_3 . Поэтому множество критических точек отображения момента $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ состоит из трех двумерных подмногообразий в X^4 , задаваемых уравнениями $q_i = p_i = 0$. Каждое из этих подмногообразий дает прямую на бифуркационной диаграмме: $\tilde{f}_1 = 0$, $\tilde{f}_2 = 0$, $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = 0$ (см. рис. 8 (а)).

Также из формулы (13) следует, что особый слой в прообразе точки пересечения трех прямых бифуркационной диаграммы содержит 6 особых точек ранга 0. Они имеют вид

$$(a_1, S_2, S_3), \quad (b_1, S_2, S_3), \quad (S_1, a_2, S_3), \quad (S_1, b_2, S_3), \quad (S_1, S_2, a_3), \quad (S_1, S_2, b_3),$$

где a_i и b_i — точки на соответствующей восьмерке (заданной уравнением $f_i = 0$), в которых $g_i = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$. Из невырожденности исходной особенности и соображений трансверсальности следует, что все эти 6 точек невырождены и имеют тип седло-седло.

Предложение 14. *Невырожденная особенность $(X^4, \tilde{\omega}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ типа седло-седло не является особенностью типа почти прямого произведения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим топологию особого слоя $L_{\text{red}} \subset X^4$ построенной редуцированной системы. Как и в стандартной ситуации, он имеет структуру двумерного комплекса, в котором k -мерные клетки образованы критическими точками ранга k . Для особенностей типа почти прямого произведения все двумерные клетки являются “четыреугольниками”, поскольку каждая из них также должна быть (почти) прямым произведением. Покажем, что в построенном примере это не так.

Действительно, особый слой L_{red} можно рассмотреть как подмножество трехмерного особого слоя L исходной системы на M^6 , выделяемое условием $g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$. Этот особый слой L является прямым произведением трех восьмерок, т.е. он склеен из шести трехмерных кубов, каждый из которых можно рассматривать как прямое произведение трех ребер графа восьмерки (по одному из каждого экземпляра атома B).

Рассмотрим один из этих кубов и обозначим соответствующие ребра через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. По построению, функция g_i монотонно возрастает на ребре γ_i , принимая все значения от 0 до 1. Поэтому можно рассматривать g_i как координату на γ_i , а тройку (g_1, g_2, g_3) — как стандартную систему координат на единичном кубе. Двумерные клетки слоя L_{red} получаются в результате пересечения каждого куба с “гиперплоскостями” $g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$. Внутри куба $\gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ это уравнение выделяет два треугольника и один шестиугольник (а не четырехугольники).

Таким образом, особый слой L_{red} склеен из 8 шестиугольников и 16 треугольников (поскольку всего восемь кубов). Значит, построенная особенность не является особенностью типа почти прямого произведения. \square

На рис. 7(а) изображен особый слой L_{red} в виде “развертки”. Отождествляя ребра, отмеченные одинаковыми буквами, мы получим двумерный комплекс, гомеоморфный особому слою L_{red} (каждое его ребро имеет кратность 4).

Ясно, что “развертку” особого слоя можно изобразить многими способами. Если склеивать листы, продолжающие друг друга, то можно представить особый

слой как погружение некоторой гладкой двумерной поверхности. Оказывается, что при таком представлении шестиугольники склеиваются с шестиугольниками, а треугольники с треугольниками. Склейка шестиугольников дает двумерную поверхность с эйлеровой характеристикой $\chi = -4$, а склейка треугольников — две сферы.

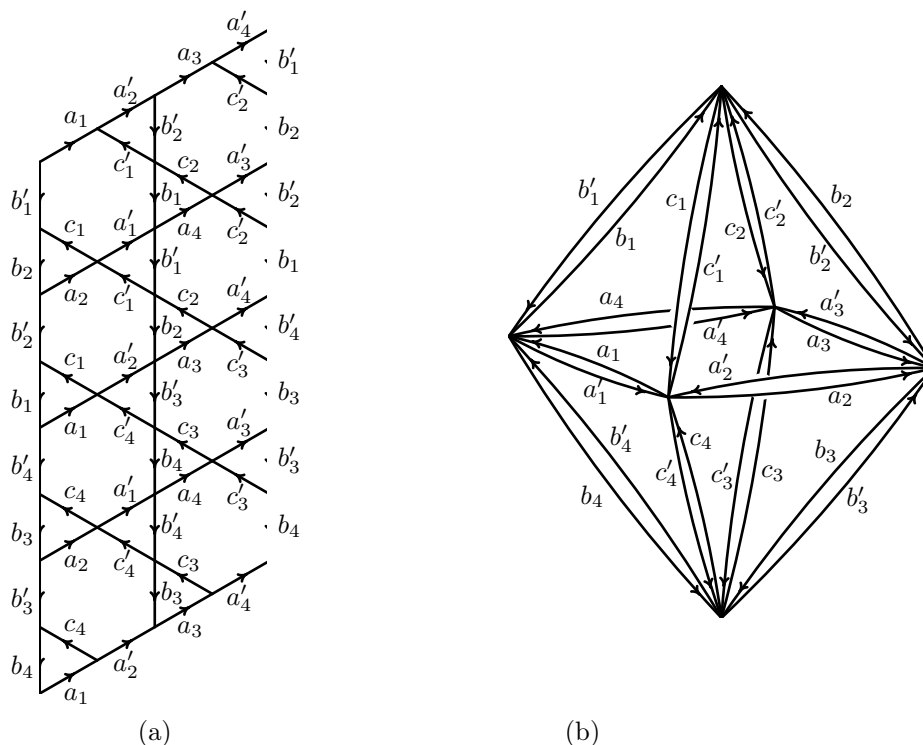


Рис. 7: Особый слой для редуцированной системы

Итак, комплекс L_{red} можно также описать следующим образом (см. рис. 7(b)). Его 1-остов имеет 6 вершин (0-клетки) и 24 ребра (1-клетки), которые можно представлять как вершины и (ориентированные) ребра октаэдра (т.е. каждое ребро октаэдра удвоено). Все 16 треугольных 2-клеток приклеены к 1-остову вдоль 16 ориентированных циклов длины 3 (т.е. каждая треугольная 2-клетка соответствует ориентированной грани октаэдра). Каждая из 8 шестиугольных 2-клеток также соответствует одной из граней октаэдра, но приклеивается к шести ее ориентированным ребрам так, что каждые два соседних ребра имеют различную ориентацию относительно ориентации на границе шестиугольника.

Как уже отмечалось, бифуркационная диаграмма отображения момента $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ состоит из трех прямых (см. рис. 8 (a)), пересекающихся в одной точке, что отражает невыполнение условия нерасщепляемости.

На рис. 8 (b) изображена круговая молекула, соответствующая точке пересечения трех прямых. Все бифуркации лиувиллевых торов имеют тип B .

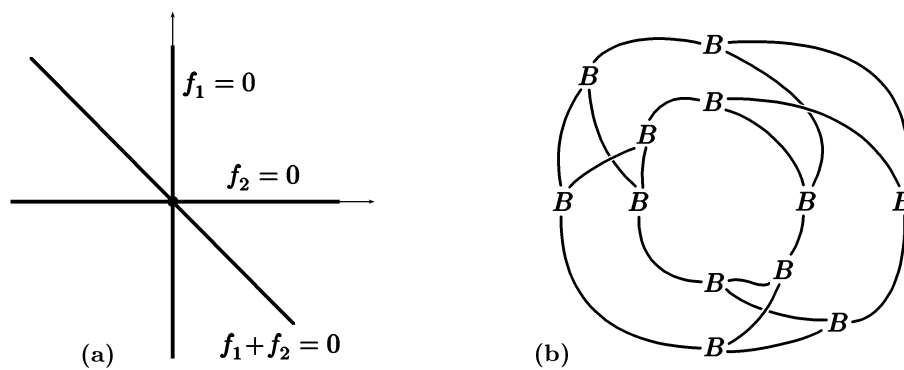


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма и круговая молекула для редуцированной системы

Глава 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТОКОВ МОРСА–СМЕЙЛА НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В этой главе рассматривается задача топологической траекторной классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных поверхностях. Важные результаты в этом направлении были получены М. Пейксото и его школой (см. [105], [106], [107], [82], [119]). Однако в этих работах имеются неточности (см. пример 8, замечания 20 и 21, а также обзор главы 3 во Введении). Подчеркнем, что несмотря на указанные неточности принципиально важный факт о сведении классификации потоков Морса–Смейла к комбинаторной задаче безусловно доказан в указанных работах М. Пейксото.

Кроме исправления указанных неточностей мы описываем новый более простой инвариант, классифицирующий потоки Морса–Смейла.

Материал этой главы был опубликован в совместной работе автора с В. В. Шарко [49]. Разделы 3.1.5, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.3.2 содержат результаты, в получении которых влияние В. В. Шарко было определяющим (это утверждение о согласованной ориентации st -циклов и tu -циклов, описание и сравнение инвариантов Пейксото, Флейтаса и Вонга, а также описание v -атомов и утверждения об их свойствах). Результаты, содержащиеся в остальных разделах, а также основные идеи работы принадлежат автору.

3.1. Классификация потоков Морса

В этом разделе описано построение нового траекторного топологического инварианта, классифицирующего потоки Морса–Смейла без периодических траекторий.

3.1.1. Основные определения

Мы рассматриваем только гладкие векторные поля (потоки) на замкнутых двумерных многообразиях (поверхностях). Напомним некоторые определения (подробнее см., например, в [50]).

Определение 25. Векторные поля v_1 на поверхности M_1 и v_2 на поверхности M_2 называются *топологически траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий траектории векторного поля v_1 в траектории поля v_2 с сохранением ориентации на траекториях.

Разумеется, задача классификации всех гладких векторных полей на поверхности представляется необозримой, если не накладывать никаких дополнительных ограничений на характер особенностей. Даже локальная задача классификации весьма нетривиальна, не говоря уже о классификации на поверхности в целом. Поэтому естественно решать задачу классификации в некотором классе типичных векторных полей. В качестве такого класса обычно рассматривают так называемые грубые векторные поля.

Определение 26. Векторное поле v на многообразии M называется *грубым*, если при малом возмущении поля v топологическое поведение его траекторий не меняется, т. е. после возмущения поле топологически траекторно эквивалентно исходному.

Замечание 12. Строго говоря, в определении грубости векторного поля надо указывать, в каком классе производится возмущение. Как уже было сказано, мы рассматриваем только гладкие векторные поля, т. е. поля класса C^1 . Отметим также, что в этом случае можно не делать различия между векторными полями и потоками. В дальнейшем эти термины употребляются как синонимы.

Согласно теореме Пейксото, на компактном двумерном многообразии грубыми векторными полями являются в точности поля Морса–Смейла (см. [106], [107], [54]). Этот класс полей был впервые рассмотрен в работе [53] для многообразий произвольной размерности. Для двумерных поверхностей можно определить поля Морса–Смейла следующим образом.

Определение 27. Векторное поле v на замкнутой двумерной поверхности называется *полем Морса–Смейла*, если

- 1) v имеет конечное число особых точек и периодических траекторий, причем все они гиперболические;
- 2) не существует траекторий, идущих из седла в седло;
- 3) для каждой траектории поля v ее α -предельное и ω -предельное множества являются либо особой точкой, либо периодической траекторией (предельным циклом).

Важным этапом при траекторной классификации потоков Морса–Смейла на поверхностях является классификация потоков Морса–Смейла без периодических траекторий. Мы будем называть такие потоки *потоками Морса*.

Замечание 13. Потоки Морса имеют также другое естественное описание. Это в точности градиенто-подобные потоки без сепаратрис, идущих из седла в седло [113]. Здесь поток называется *градиенто-подобным*, если он топологически траекторно эквивалентен потоку $\text{grad } f$ для некоторой функции f и некоторой римановой метрики g_{ij} на многообразии M . См. также замечание 16.

Замечание 14. Имеется ровно один (с точностью до топологической траекторной эквивалентности) поток Морса без седловых особых точек на связной замкнутой поверхности. Это — векторное поле v на сфере S^2 , которое можно описать следующим образом: $v = \text{grad } f$, где метрика на сфере индуцирована стандартным вложением в трехмерное евклидово пространство, а функция f есть ограничение некоторой линейной функции (иногда такой поток называют северо-южным). Все потоки, топологически траекторно эквивалентные описанному потоку, будем называть *простейшими*. Если многообразие M несвязно, то (для краткости) фраза “поток Морса на M отличен от простейшего” будет означать, что поток не является простейшим ни на одной из компонент связности многообразия M .

3.1.2. Построение инварианта

Опишем теперь некоторый инвариант, траекторно классифицирующий потоки Морса на двумерных поверхностях.

Определение 28. Граф Γ назовем *трехцветным графом*, если все его вершины имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Цвета будем обозначать буквами s, t, u . Два трехцветных графа назовем *изоморфными*, если они изоморфны с сохранением раскраски (т. е. при изоморфизме ребра помеченные буквами s, t, u переходят в ребра помеченные теми же буквами). Для краткости будем называть эти ребра *s-ребрами*, *t-ребрами* и *u-ребрами*.

Опишем процедуру сопоставления каждому потоку Морса (отличному от простейшего) некоторого трехцветного графа.

Пусть v — поток Морса на поверхности M , имеющий хотя бы одну седловую особую точку. Разрезая M вдоль всех сепаратрис потока v , мы разобьем поверхность на канонические области, имеющие вид, изображенный на рис. 9(a). Каждая такая область (после разрезания) представляет собой четырехугольник, вершины которого — особые точки поля v (один источник, один сток и два седла), а стороны — сепаратрисы поля v . При этом в многообразии M четырехугольник может “вырождаться”, т. е. разные стороны этого четырехугольника могут соответствовать одной и той же сепаратрисе (рис. 9(b)).

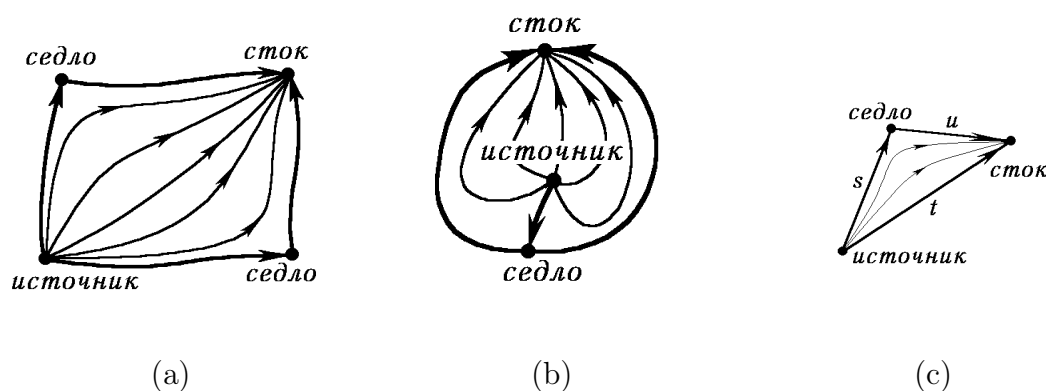


Рис. 9: Разбиение на треугольники

Как вырожденные, так и невырожденные четырехугольники будем называть *каноническими четырехугольниками*. Все остальные траектории поля v , расположенные в таком четырехугольнике, “начинаются” в вершине-источнике и “заканчиваются” в вершине-стоке. Зафиксируем в каждом четырехугольнике одну из таких траекторий. Вместе с сепаратрисами они разбивают многообразие M на треугольники. При этом стороны одного треугольника уже не могут быть “склеены” между

собой в многообразии M . Это легко следует из того, что стороны каждого треугольника образованы тремя траекториями разных типов: траектория, идущая из источника в седло, траектория, идущая из седла в сток, и траектория, идущая из источника в сток. Будем называть такие траектории соответственно s -траекториями, u -траекториями и t -траекториями (рис. 9(с)). Отметим, что t -траектории определены неоднозначно.

Построим трехцветный граф T , соответствующий полученному разбиению M на треугольники следующим образом:

- 1) вершины графа T взаимно-однозначно соответствуют треугольникам;
- 2) если два треугольника имеют общую сторону, образованную s -траекторией, t -траекторией или u -траекторией, то соединим соответствующие этим треугольникам вершины графа T ребром с меткой s , t или u соответственно.

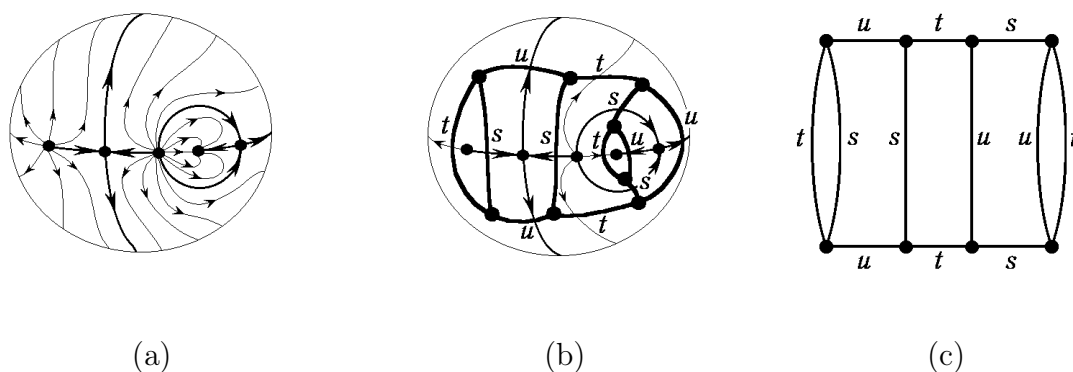


Рис. 10: Построение трехцветного графа

Пример 3. На рис. 10 показан пример построения трехцветного графа по потоку Морса на двумерной сфере. В данном примере поток имеет два источника, два седла и два стока (на рисунке один из стоков расположен на “задней” невидимой стороне сферы). На рис. 10(a) изображены траектории самого векторного поля, причем жирными линиями выделены сепаратрисы. На рис. 10(b) от векторного поля остались лишь сепаратрисы (s -траектории и u -траектории) и траектории, разделяющие канонические четырехугольники на треугольники (t -траектории). Жирными линиями на рис. 10(b) изображен трехцветный граф. На рис. 10(c) построенный трехцветный граф изображен как абстрактный (не вложенный в поверхность) граф.

Лемма 18. *При описанном выше сопоставлении трехцветного графа потоку Морса*

- 1) *результат не зависит от выбора t -траекторий в каждом каноническом четырехугольнике;*
- 2) *топологически траекторно эквивалентным потокам Морса сопоставляются изоморфные трехцветные графы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно. Далее, пусть h — го-меоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 . Так как h переводит канонические четырехугольники потока v_1 в канонические четырехугольники потока v_2 (в частности, сепаратрисы потока v_1 — в сепаратрисы потока v_2), то, учитывая первое утверждение леммы, можно предполагать, что h переводит треугольники одного потока в треугольники другого потока. □

3.1.3. Теорема классификации

Утверждение леммы 18 означает, что мы построили некоторый топологический траекторный инвариант потоков Морса на двумерных поверхностях. Трехцветный граф, соответствующий потоку v , будем обозначать $T(v)$. Следующая теорема показывает, что построенный инвариант является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса на поверхностях.

Теорема 14. *Два потока Морса v_1 и v_2 (отличные от простейшего) на двумерных поверхностях M_1 и M_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им трехцветные графы $T(v_1)$ и $T(v_2)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема уже доказана (лемма 18). Предположим теперь, что трехцветные графы $T(v_1)$ и $T(v_2)$ изоморфны. Этот изоморфизм индуцирует биекцию между треугольниками многообразия M_1 и треугольниками многообразия M_2 . В силу определения графа $T(v)$, эта биекция согласована с пересечениями треугольников: если два треугольника многообразия M_1 имеют общую сторону (общую вершину), то соответствующие два треугольника многообразия M_2

также имеют общую сторону (общую вершину) того же типа. Напомним, что, по построению, вершинами каждого треугольника являются источник, седло и сток, что и определяет тип каждой вершины и каждой стороны. Таким образом имеющаяся биекция между треугольниками однозначно определяет биекцию между вершинами треугольников, т. е. между особыми точками потока v_1 и особыми точками потока v_2 , причем эти биекции согласованы.

Гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 , строится следующим образом:

- 1) в особых точках потока v_1 отображение h определено указанной биекцией;
- 2) отображение h продолжается на сепаратрисы потока v_1 так, чтобы каждая из них гомеоморфно отображалась в соответствующую сепаратрису потока v_2 ;
- 3) для каждого канонического четырехугольника (рис. 9(а)) потока v_1 отображение h , заданное на его границе (и отображающее ее в границу некоторого канонического четырехугольника потока v_2) продолжается на весь канонический четырехугольник так, чтобы это был гомеоморфизм, переводящий траектории в траектории.

Существование требуемого продолжения на последнем шаге можно доказать стандартными методами (см., например, [31], [107]). □

3.1.4. Реализация инвариантов

Рассмотрим произвольный трехцветный граф T . Очевидно, если выбросить из графа T все ребра какого-нибудь одного цвета, то он распадется в несвязное объединение циклов, образованных ребрами других двух цветов. Циклы, получающиеся в результате выбрасывания s -ребер (соответственно t -ребер, u -ребер), будем называть tu -циклами (соответственно su -циклами, st -циклами).

Следующая теорема описывает множество допустимых инвариантов $T(v)$ (т. е. множество значений инварианта T).

Теорема 15. *Трехцветный граф T соответствует некоторому потоку Морса v на двумерной поверхности тогда и только тогда, когда все его su -циклы имеют длину 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хотя трехцветный граф $T(v)$, сопоставляемый потоку Морса v на поверхности M , строится как абстрактный граф, его можно естественным образом вложить в поверхность M как граф, двойственный графу, ребрами которого являются s -траектории, t -траектории и u -траектории (см. пример на рис. 10). При таком вложении граф $T(v)$ разбивает поверхность M на односвязные области, в каждой из которых находится ровно одна особая точка потока v . При этом граница каждой такой области является su -циклом, st -циклом или tu -циклом графа $T(v)$, т. е. состоит из $2k$ ребер графа $T(v)$ ровно двух цветов, где $2k$ — количество треугольников, для которых данная особая точка является вершиной. Ясно, что su -циклы ограничивают седла, st -циклы ограничивают источники, а tu -циклы ограничивают стоки. На рис. 11 изображено вложение графа $T(v)$ в окрестности седла, источника и стока (жирные траектории опять изображают сепаратрисы, а пунктирные — t -траектории).

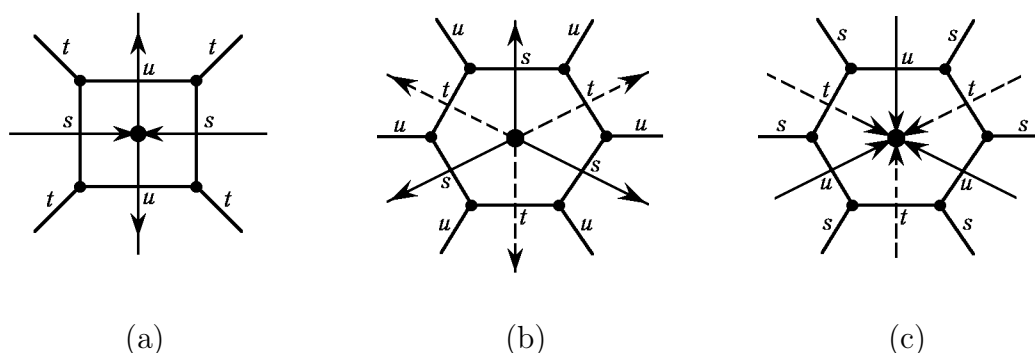


Рис. 11: Окрестности седла, источника и стока

Из этого замечания сразу следует необходимость условия на длины su -циклов графа $T(v)$, поскольку каждая седловая особая точка потока Морса v является вершиной ровно четырех треугольников. Докажем теперь достаточность этого условия.

Опишем сначала некоторый “стандартный” треугольник с заданным на нем потоком требуемого вида. Для этого рассмотрим векторное поле v_0 на плоскости, которое в декартовых координатах (x, y) записывается так: $v_0 = (\sin \pi x, \sin \pi y)$. Легко проверить, что поле v_0 является полем Морса. Его особые точки — это в точности все точки целочисленной решетки плоскости (x, y) , причем точки с двумя четными координатами — источники, точки с двумя нечетными координатами — стоки, а точки с координатами разной четности — седла потока, определяемого полем v_0 . Се-

паратрисы поля v_0 направлены вдоль прямых параллельных координатным осям. В качестве t -траекторий можно взять соответствующие диагонали квадратов, на которые сепаратрисы разбивают плоскость. Сепаратрисы и t -траектории разбивают плоскость на “одинаковые” стандартные треугольники.

Рассмотрим теперь некоторый трехцветный граф T , все su -циклы которого имеют длину 4, и построим поверхность M с потоком Морса v так, чтобы граф T был инвариантом этого потока. Для этого возьмем стандартные треугольники (в количестве равном количеству вершин графа T) и склеим их в соответствии с метками, стоящими на ребрах графа T : если две вершины графа T соединены ребром с меткой s , t или u , то треугольники, соответствующие этим вершинам, склеиваем вдоль сторон, образованных соответственно s -траекториями, t -траекториями или u -траекториями.

После всех склеек мы получим некоторое многообразие M с потоком v . Во всех точках кроме источников и стоков построенный поток будет гладким относительно гладкой структуры, заданной на склеиваемых треугольниках. В источниках и стоках надо “сгладить” многообразие M так, чтобы поток стал гладким. Для рассматриваемых стандартных треугольников эту процедуру можно описать следующим образом. Рассмотрим некоторый источник построенного потока v (случай стока рассматривается аналогично). Пусть эта точка является вершиной $2k$ треугольников (отметим, что при $k = 4$ поток будет гладким в окрестности этого источника). На стандартном треугольнике заданы декартовы координаты (x, y) . Введем на нем (в окрестности источника) новые координаты (r, φ) по формулам:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = r \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = r \sin \varphi \end{cases}$$

В координатах (r, φ) векторное поле v_0 на стандартном треугольнике имеет вид $\dot{r} = \pi r$, $\dot{\varphi} = 0$. Такой же вид имеет линейное векторное поле с матрицей $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ на плоскости в полярных координатах. Рассмотрим стандартный треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Отображение $(r, \varphi) \mapsto (r, 4\varphi/k)$ переводит окрестность $r < \varepsilon$ вершины $(0, 0)$ этого треугольника в сектор $0 \leq \psi \leq \pi/k$, $\rho < \varepsilon$ на плоскости с полярными координатами (ρ, ψ) . Определив аналогичным образом отображение на всех $2k$ треугольниках, примыкающих к рассматриваемому источнику, получим

гомеоморфизм окрестности источника в многообразии M на двумерный диск. Зададим таким образом гладкую структуру на многообразии M в окрестности всех источников и стоков. Легко проверяется, что в результате мы получим гладкое многообразие M , на котором поток v будет потоком Морса.

Очевидно, что трехцветный граф для построенного потока Морса v на многообразии M есть в точности исходный граф T . \square

Мы доказали, что трехцветные графы с su -циклами длины 4 находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса (имеющих седловые особые точки). В частности, по трехцветному графу $T(v)$ можно определить топологический тип двумерного многообразия M , на котором задан поток v . Следующая теорема показывает, как это сделать явно, и тем самым описывает множество допустимых инвариантов $T(v)$ для любого заданного двумерного многообразия M .

Для произвольного трехцветного графа T обозначим через $m_0(T)$, $m_1(T)$ и $m_2(T)$ соответственно количество его st -циклов, su -циклов и tu -циклов.

Теорема 16. Пусть $T(v)$ — инвариант потока Морса v , заданного на поверхности M . Тогда

1) эйлерова характеристика поверхности M равна

$$\chi(M) = m_0(T(v)) - m_1(T(v)) + m_2(T(v))$$

2) поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда граф $T(v)$ (без учета раскраски) не имеет циклов нечетной длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассуждения, приведенного в начале доказательства теоремы 15, получаем, что число источников, число седел и число стоков потока v равны соответственно $m_0(T(v))$, $m_1(T(v))$ и $m_2(T(v))$. Отсюда сразу следует утверждение (1) теоремы, поскольку это просто формула для суммы индексов особых точек поля v .

Докажем теперь утверждение (2). Поверхность M , на которой задан рассматриваемый поток Морса v , ориентируема тогда и только тогда, когда все треугольники, на которые она разбита сепаратрисами и t -траекториями, можно согласованно ориентировать. Ориентацию каждого канонического треугольника можно задавать,

выбирая один из двух возможных циклических порядков его вершин: “источник”–“седло”–“сток” или “сток”–“седло”–“источник”. Будем считать, что треугольнику приписана метка $(+1)$ в первом случае и метка (-1) — во втором случае. Легко понять, что ориентации двух треугольников, имеющих общую сторону, будут согласованы тогда и только тогда, когда им приписаны разные метки. Поскольку между треугольниками поверхности M и вершинами графа $T(v)$ фиксирована некоторая биекция, условие ориентируемости рассматриваемой поверхности M можно сформулировать следующим образом: поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда вершинам графа $T(v)$ можно приписать метки (± 1) таким образом, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, имели разные метки. Назовем такую расстановку меток в вершинах графа *правильной*.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать следующую лемму.

Лемма 19. *Для произвольного графа Γ следующие два условия эквивалентны:*

- 1) *граф Γ не имеет циклов нечетной длины;*
- 2) *существует правильная расстановка меток (± 1) в вершинах графа Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из (2) следует (1), очевидно, так как в вершинах цикла нечетной длины нельзя правильно расставить метки (± 1) . Обратно, если граф Γ не имеет циклов нечетной длины, то правильно расставить метки в его вершинах можно следующим образом: возьмем некоторую вершину V_0 и поставим в ней метку $(+1)$; для любой другой вершины V_i рассмотрим какой-нибудь путь из вершины V_0 в вершину V_i и поставим в ней метку $(+1)$, если этот путь четной длины, и метку (-1) , если он нечетной длины. □

Тем самым теорема 16 также доказана. □

3.1.5. Ориентируемый случай

При классификации потоков Морса–Смейла (с периодическими траекториями) мы будем выбирать некоторые ориентации на всех st -циклах и tu -циклах трехцветных графов. В общем случае нет никакого естественного способа выбрать эти ориентации. Однако для трехцветных графов, соответствующих ориентируемым поверх-

ностям, эти ориентации можно выбрать согласованно в смысле следующего определения.

Определение 29. Будем говорить, что ориентации st -циклов и tu -циклов трехцветного графа T *согласованы*, если они индуцируют одну и ту же ориентацию на каждом su -цикле.

Лемма 20. *Согласованно ориентировать все st -циклы и tu -циклы связного трехцветного графа T можно тогда и только тогда, когда граф T не имеет циклов нечетной длины. При этом для таких графов существуют ровно две согласованные ориентации, получающиеся друг из друга изменением ориентаций на всех циклах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все st -циклы и tu -циклы трехцветного графа T согласованно ориентированы. В частности, задана ориентация на всех s -ребрах графа T . Припишем начальным вершинам s -ребер метки (-1) , а конечным вершинам s -ребер — метки $(+1)$. Легко понять, что эта расстановка меток будет правильной, а значит, по лемме 19, граф T не имеет циклов нечетной длины.

Обратно, пусть граф T не имеет циклов нечетной длины. Тогда, рассматривая правильную расстановку меток в вершинах графа T , ориентируем s -ребра от вершины с меткой (-1) к вершине с меткой $(+1)$, а u -ребра — от вершины с меткой $(+1)$ к вершине с меткой (-1) . Эти ориентации s -ребер и u -ребер, очевидно, индуцируют согласованные ориентации всех st -циклов и tu -циклов.

Второе утверждение леммы очевидно, так как согласованные ориентации однозначно определены, если задана ориентация хотя бы одного s -ребра. \square

3.2. Сравнение некоторых известных инвариантов

Для траекторной классификации потоков Морса можно использовать упомянутые во введении инвариант Пейксото, инвариант Флейтаса или (для ориентируемых поверхностей) инвариант Вонга. В этом разделе мы кратко опишем эти инварианты и проведем их сравнение.

Все потоки Морса без седловых особых точек топологически траекторно эквивалентны (замечание 14). Поэтому при описании инвариантов в этом разделе мы рассматриваем только потоки Морса, имеющие седловые особые точки.

3.2.1. Инвариант Пейксото

Инвариант, предложенный М. Пейксото в работе [105], можно описать следующим образом.

Как уже отмечалось при построении инварианта $T(v)$ в разделе 3.1, поверхность M после разрезания ее по сепаратрисам рассматриваемого потока v распадается на канонические четырехугольники. Иначе говоря, поток Морса v определяет естественное клеточное разбиение двумерного многообразия M . Нульмерные клетки этого разбиения — особые точки потока v , одномерные клетки — замыкания сепаратрис, двумерные клетки — замыкания канонических четырехугольников (в многообразии M). Для того, чтобы описать поток v с точностью до топологической траекторной эквивалентности, достаточно предъявить одномерный остов рассмотренного клеточного разбиения и указать, каким образом к нему приклеиваются двумерные клетки (на которых поток уже задан). По существу, это и есть инвариант Пейксото для потоков Морса.

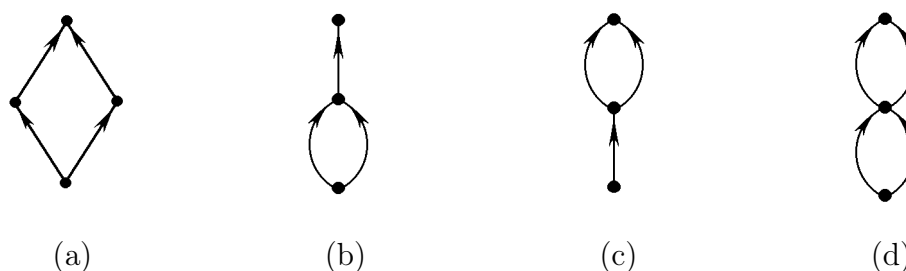


Рис. 12: Выделенные подграфы в различающем графе Пейксото

Более точно, инвариант Пейксото, который он называет *различающим графом*, есть граф с ориентированными ребрами, вершины которого расположены на трех уровнях так, что каждое ребро направлено либо от вершины первого уровня к вершине второго уровня, либо от вершины второго уровня к вершине третьего уровня, причем для каждой вершины второго уровня имеется ровно два входящих в нее ребра и ровно два выходящих из нее ребра (вершины первого, второго и третьего

уровней соответствуют источникам, седлам и стокам). Кроме того, в этом графе выделены некоторые подграфы четырех типов (они изображены на рис. 12), так что выполнены некоторые специальные условия (заметим, что к каждому выделенному подграфу однозначно приклеивается канонический четырехугольник, так чтобы ориентации на ребрах подграфа и сторонах четырехугольника были согласованы).

Мы не будем приводить здесь список этих условий. В работе [105] они выписаны явно и их формулировка занимает достаточно много места. Смысл этих условий проясняет теорема реализации (теорема 5.1 работы [105]), доказательство которой и составляет основное содержание статьи [105]. Эта теорема показывает, что все вместе эти условия равносильны следующему: если приклеить канонические четырехугольники ко всем выделенным подграфам, то должно получиться замкнутое двумерное многообразие.

Пример 4. На рис. 13 показано, как выглядит инвариант Пейксото для потока Морса, рассмотренного в примере 3. В данном случае различающий граф состоит из шести вершин (по две на каждом уровне) и восьми ребер (см. рис. 13(a)), и в нем выделено 4 подграфа (см. рис. 13(b)). Если приклеить 4 канонических четырехугольника к этим подграфам, то получится поток на сфере, изображенный на рис. 10(a).

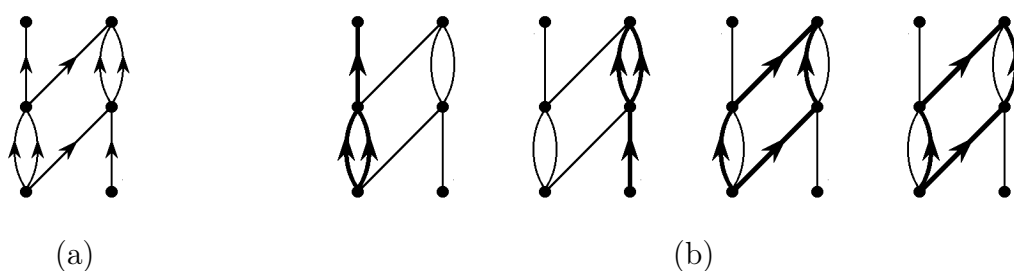


Рис. 13: Пример построения инварианта Пейксото

Инвариант Пейксото и трехцветный граф, введенный в разделе 3.1, выражаются друг через друга, поскольку они являются полными топологическими траекторными инвариантами потоков Морса. Опишем построение различающего графа Пейксото, соответствующего данному трехцветному графу.

Пусть T — трехцветный граф, являющийся инвариантом некоторого потока Морса. Различающий граф, соответствующий графу T строится следующим образом:

1) каждому st -циклу графа T поставим в соответствие вершину первого уровня различающего графа, каждому su -циклу — вершину второго уровня, а каждому tu -циклу — вершина третьего уровня;

2) для каждого s -ребра (u -ребра) графа T , соединим ребром те вершины различающего графа, которые соответствуют st -циклу (tu -циклу) и su -циклу, содержащим данное s -ребро (u -ребро);

3) каждому t -ребру графа T сопоставим выделенный подграф построенного различающего графа, четыре (три) ребра которого соответствуют четырем (трем) ребрам графа T , пересекающимся с данным t -ребром.

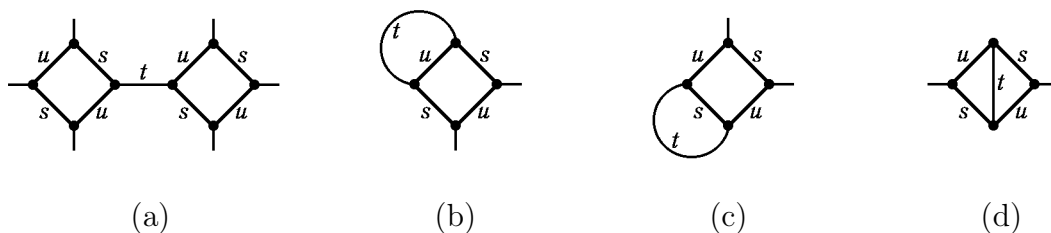


Рис. 14: Построение различающего графа по трехцветному графу

На рис. 14 изображены все возможные “окрестности” t -ребра в трехцветном графе T , являющемся инвариантом некоторого потока Морса. Четыре варианта (a)–(d) на рис. 14 соответствуют четырем типам подграфов (a)–(d) на рис. 12. Отметим, что, в силу утверждения (2) теоремы 16, случай (d) возникает только на неориентируемых поверхностях.

3.2.2. Инвариант Флейтаса

Опишем теперь инвариант Флейтаса для потоков Морса, предложенный в работе [82]. Рассмотрим вокруг каждого источника маленькую окружность, трансверсальную потоку, и отметим на ней точки пересечения с сепаратрисами. После этого припишем всем точкам на всех окружностях некоторые метки, причем тем точкам, для которых соответствующие им сепаратрисы входят в одно и то же седло, припишем одинаковые метки. Кроме того для каждой пары точек с одинаковыми

метками указывается “спин”. Спин изображается стрелками, показывающими направление движения вдоль окружностей в окрестности каждой отмеченной точки. Эти стрелки расставляются так, что, если некоторую пару точек с одинаковыми метками “сдвинуть” вдоль стрелок и выпустить из полученных точек траектории потока, то эти траектории после прохождения “возле седловой точки” пойдут “в одну сторону”(см. рис. 15). Если для некоторой пары точек с одинаковыми метками изменить направления обеих стрелок на противоположные, то, по определению, они будут изображать тот же спин для этой пары точек.



Рис. 15: Определение инварианта Флейтаса

Таким образом, инвариант Флейтаса для потока Морса (он называет его “циклические распределения раскрашенных точек”) — это набор окружностей, на которых указаны точки с метками (каждая метка встречается ровно два раза), и для каждой пары точек с одинаковыми метками указан спин. Два таких набора считаются одинаковыми, если существует гомеоморфизм, отображающий окружности одного набора в окружности другого набора с сохранением меток и спинов.

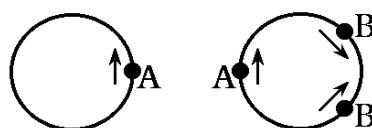


Рис. 16: Пример построения инварианта Флейтаса

Пример 5. На рис. 16 показано, как выглядит инвариант Флейтаса для потока Морса, рассмотренного в примере 3. В данном случае инвариант состоит из двух окружностей (соответствующих двум источникам), на которых расположены две пары точек (соответствующие двум седлам) с метками A и B и спинами, указанными стрелками.

Очевидно, что инвариант Флейтаса является инвариантом потоков Морса, т. е. топологически траекторно эквивалентным потокам Морса сопоставляются одинаковые в указанном выше смысле наборы окружностей с метками и спинами. Теорема 1с работы [82] утверждает, что он является полным топологическим инвариантом.

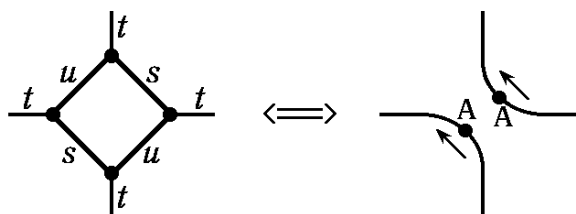


Рис. 17: Соответствие между инвариантом Флейтаса и трехцветным графом

Соответствие между инвариантами Флейтаса и трехцветными графами можно кратко описать следующим образом: окружностям инварианта Флейтаса соответствуют st -циклы трехцветного графа, парам точек с одинаковыми метками соответствуют su -циклы, а спин определяется tu -циклами. На рис. 17 показаны “элементарные” фрагменты трехцветного графа и инварианта Флейтаса. Любой трехцветный граф с su -циклами длины 4 и любой инвариант Флейтаса являются объединением таких фрагментов. Если все элементарные фрагменты данного трехцветного графа $T(v)$ заменить в соответствии с рис. 17 на элементарные фрагменты инварианта Флейтаса, то получится инвариант Флейтаса потока v , и наоборот.

3.2.3. Инвариант Вонга

Еще один инвариант для потоков Морса, но лишь на ориентируемых поверхностях, был предложен в работе К. Вонга [119]. Подход К. Вонга близок к тому подходу, который используется в разделе 3.1 для построения трехцветного графа. Он рассматривает граф, двойственный графу, составленному из сепаратрис потока. Те же рассуждения, что и при построении трехцветного графа показывают, что этот граф есть объединение циклов длины 4 (вокруг каждого седла), ребра которых раскрашены в два цвета s и u так, что противоположные ребра имеют одинаковый цвет. Кроме того, учитывая ориентацию многообразия, можно ориентировать реб-

ра этого графа так, что ориентация каждого цикла длины 4 будет согласована с ориентацией четырехугольника, границей которого является этот цикл.

Таким образом инвариант Вонга (“раскрашенный двойственный граф”) есть граф с вершинами степени 4, ребра которого раскрашены в два цвета s и u и ориентированы так, что граф есть объединение 4-циклов вида $s-u-s-u$, а ориентация ребер согласованно задает ориентацию на всех циклах из s -ребер, циклах из u -ребер и 4-циклах. При этом считается, что два таких графа изоморфны, если существует гомеоморфизм одного графа в другой, сохраняющий раскраску и либо сохраняющий, либо обращающий ориентацию всех ребер.

Пример 6. На рис. 18 показано, как выглядит инвариант Вонга для потока Морса, рассмотренного в примере 3 (см. рис.10(a)). Аналогично рис. 10(b) и 10(c) на рис. 18(a) показано вложение графа Вонга в сферу, на которой задан поток, а на рис. 18(b) этот граф изображен как абстрактный граф с ориентированными и раскрашенными ребрами.

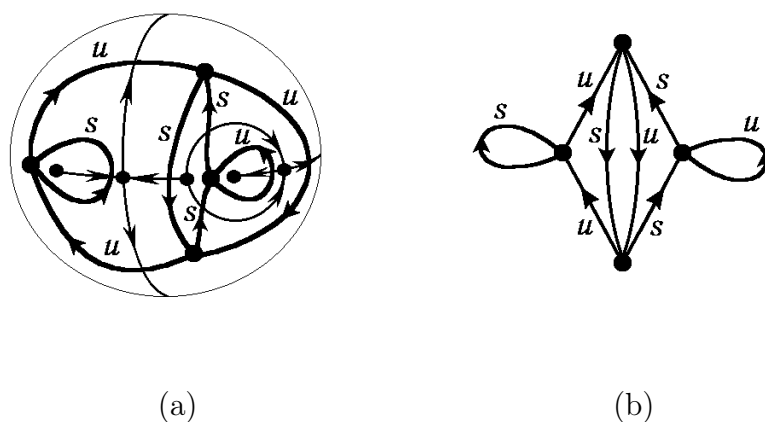


Рис. 18: Пример построения инварианта Вонга

Ясно, что мы можем рассматривать граф Вонга как граф, полученный из трехцветного графа стягиванием каждого его t -ребра в точку и заданием ориентации на ребрах su -циклов. В общем случае нельзя однозначно осуществить обратную операцию, т. е. восстановить трехцветный граф после стягивания t -ребер. Но поскольку К. Вонг рассматривает лишь ориентируемые многообразия, это можно сделать, используя описанную выше ориентацию ребер. На рис. 19 изображено, как можно

выразить один инвариант через другой, заменяя фрагменты трехцветного графа на соответствующие фрагменты графа Вонга и наоборот.

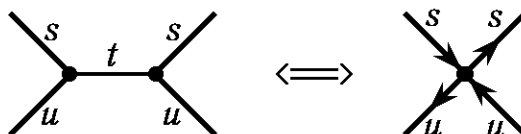


Рис. 19: Соответствие между инвариантом Вонга и трехцветным графом

3.2.4. Классификация a -функций и меченые f -графы

Опишем еще один топологический инвариант, который был введен в работе [43] для классификации функций на двумерных многообразиях, но имеет ту же природу, что и рассмотренные выше инварианты потоков Морса.

Напомним некоторые определения.

Определение 30. Гладкие функции f_1 и f_2 , заданные соответственно на двумерных поверхностях M_1 и M_2 , называются *сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, что $f_2 \circ h = f_1$.

Определение 31. Гладкие функции f_1, f_2 , заданные соответственно на двумерных поверхностях M_1, M_2 , будем называть *топологически послойно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий связные компоненты линий уровня функции f_1 в связные компоненты линий уровня функции f_2 .

В работе [43] решалась задача классификации функций Морса с тремя критическими значениями на замкнутых двумерных многообразиях с точностью до топологической послойной эквивалентности.

В двумерном случае гладкая функция f является функцией Морса, если окрестности каждой критической точки она записывается в некоторых координатах как $f = x^2 + y^2$ (точка минимума), $f = -x^2 - y^2$ (точка максимума) или $f = -x^2 + y^2$ (седловая точка).

Определение 32. Функцию Морса f на двумерной поверхности M будем называть *a -функцией*, если f имеет ровно три критических значения: $-1, 0$ и 1 .

Легко видеть, что для a -функции f на связной поверхности M множество $f^{-1}(-1)$ есть в точности множество точек минимума, множество $f^{-1}(1)$ есть в точности множество точек максимума, а множество $f^{-1}(0)$ связно и содержит все седловые критические точки.

Замечание 15. Отметим, что для a -функций сопряженность и топологическая послойная эквивалентность это почти одно и то же, а именно: если a -функции f_1 и f_2 топологически послойно эквивалентны, то f_1 сопряжена либо f_2 , либо $-f_2$.

Опишем инвариант, классифицирующий a -функции с точностью до сопряжения (это f -граф из раздела 2.1.2, но снабженный метками ± 1 ; ср. определение 12).

Определение 33. Конечный связный граф γ назовем *меченым f -графом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все вершины графа γ имеют степень 3;
- 2) некоторые из ребер графа γ ориентированы, причем к каждой вершине графа γ примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее;
- 3) каждому неориентированному ребру графа γ приписана метка ± 1 .

Как уже отмечалось (см. замечание 2), в работе [43] меченый f -граф назывался просто f -графом. Здесь мы изменили терминологию, поскольку более удобно использовать “просто f -графы” для описания особенностей интегрируемых систем.

Как и для обычных f -графов, ориентированные ребра меченого f -графа образуют непересекающиеся (ориентированные) циклы. Кроме того, к каждой вершине такого цикла примыкает ровно одно неориентированное ребро.

Определение 34. Назовем два меченых f -графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить в результате выполнения нескольких операций следующего вида: изменение ориентации всех ребер какого-то цикла и одновременное изменение меток (на противоположные) на всех неориентированных ребрах, инцидентных этому циклу. При этом, если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется.

Классы эквивалентности меченых f -графов относительно данного определения назовем *f -инвариантами*.

Каждой a -функции можно сопоставить f -инвариант следующим образом. Рассмотрим линии уровня $f^{-1}(-1/2)$ некоторой a -функции f на поверхности M . Фиксируя на поверхности некоторую метрику, рассмотрим устойчивые сепаратрисы потока $\text{grad } f$, начинающиеся на окружностях $f^{-1}(-1/2)$. Каждая пара сепаратрис, входящих в одну седловую точку, будет образовывать неориентированное ребро меченого f -графа γ . Вершинами графа γ будут концы сепаратрис, лежащие на окружностях $f^{-1}(-1/2)$. Фиксировав произвольным образом ориентацию на каждой такой окружности, мы получим ориентированные ребра графа γ (ориентированные дуги окружностей между концами сепаратрис). Для завершения построения меченого f -графа осталось лишь расставить метки на неориентированных ребрах. Это делается по следующему правилу: рассмотрим маленькую окрестность пары сепаратрис, образующих неориентированное ребро, в поверхности M ; это прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на окружностях $f^{-1}(-1/2)$ и поэтому ориентированы; если эти стороны индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то метка равна $+1$, а если разные, то метка равна -1 .

Мы построили по данной a -функции некоторый меченый f -граф. В процессе построения мы произвольным образом фиксировали ориентации на окружностях $f^{-1}(-1/2)$. Однако легко понять, что при выборе других ориентаций мы получим эквивалентный меченый f -граф. Кроме того мы фиксировали некоторую метрику на поверхности, но можно показать, что от выбора этой метрики построенный меченый f -граф не зависит (см. также теорему 17).

В работе [43] доказано, что f -инвариант классифицирует a -функции с точностью до сопряжения (а значит, фактически, и с точностью до топологической эквивалентности — см. замечание 15)

Хотя f -инвариант был введен в связи с задачей классификации функций на поверхностях, оказалось, что этот инвариант “эквивалентен” описанным выше инвариантам, т. е., в частности, траекторно классифицирует потоки Морса на поверхностях.

Проще всего описать биекцию между f -инвариантами и инвариантами Флейтаса. Если ориентировать произвольным образом каждую окружность инварианта Флейтаса и соединить точки с одинаковыми метками неориентированным ребром, то

мы получим граф, удовлетворяющий условиям 1) и 2) из определения меченого f -графа. Метка ± 1 на каждом неориентированном ребре полученного графа ставится в соответствии со стрелками (изображающими спин для пары точек, являющихся концами данного ребра) и выбранной ориентацией окружностей: если направление одной из этих стрелок совпадает с выбранным направлением на соответствующей окружности, а направление другой стрелки — не совпадает, то метка на данном ребре равна $+1$, иначе метка равна -1 . Ясно, что при другом выборе ориентаций на окружностях инварианта Флейтаса мы получим эквивалентный меченый f -граф, т. е. описанная процедура однозначно сопоставляет каждому инварианту Флейтаса некоторый f -инвариант. Обратное отображение также очевидно. Описанное соответствие поясняется на рис. 20.

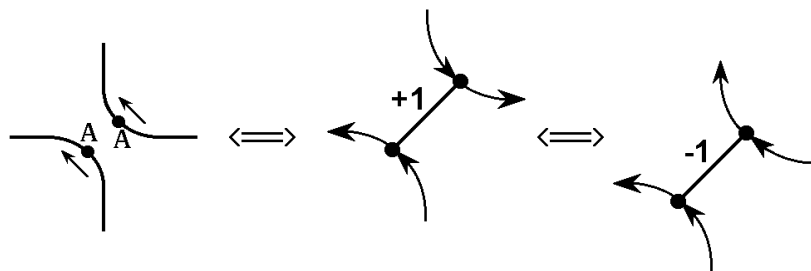


Рис. 20: Соответствие между инвариантом Флейтаса и f -инвариантом

Пример 7. На рис. 21 показано, как выглядит f -инвариант для потока Морса, рассмотренного в примере 3. Данный меченый f -граф является одним из возможных изображений соответствующего f -инварианта. Отметим, что метка на ребре, концы которого лежат на одном и том же ориентированном цикле, не зависит от ориентации ребер, а метку на другом ребре можно сделать равной -1 , изменяя ориентацию одного из циклов.

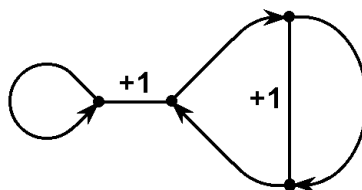


Рис. 21: Пример построения f -инварианта

Описанная выше конструкция показывает, что полные топологические инварианты для a -функций и для потоков Морса одинаковы. В частности, это означает, что между классами сопряженности a -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса существует естественная биекция. Это есть отражение результата, принадлежащего К. Р. Мейеру. Прежде, чем его сформулировать, сделаем следующее замечание.

Замечание 16. Каждой функции Морса f на поверхности M с римановой метрикой g_{ij} соответствует градиентный поток $v = \text{grad } f$. Однако, изменяя метрику мы можем получить градиентный поток топологически траекторно не эквивалентный исходному (в частности, этот поток может вообще не являться потоком Морса). И обратно, если на поверхности задан поток Морса, то с точностью до топологической траекторной эквивалентности (см. замечание 13) его можно различными способами (в зависимости от выбора метрики) представить в виде градиентного потока некоторой функции Морса. При этом различные функции, соответствующие этому потоку, вполне могут оказаться топологически послойно не эквивалентными. Таким образом, соответствие между функциями Морса и потоками Морса существенным образом зависит от метрики.

Как показывает следующая теорема, для того чтобы устранить зависимость от метрики, достаточно вместо произвольных функций Морса рассмотреть a -функции.

Теорема 17. Пусть M — замкнутая двумерная поверхность. Зададим на M некоторую риманову метрику g_{ij} .

1) Операция сопоставления a -функции ее градиентного потока (относительно метрики g_{ij}) устанавливает естественную биекцию между классами сопряженности a -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса.

2) Эта биекция не зависит от выбора метрики g_{ij} .

Замечание 17. Теорема 17 фактически содержится в работе К. Р. Мейера [97]. На самом деле там сформулирована не эта теорема, а более общее утверждение аналогичного характера о потоках Морса–Смейла. Однако это общее утверждение

неверно (см. замечание 21), а приведенное доказательство проходит именно для случая потоков Морса.

Замечание 18. Утверждение теоремы 17 по-существу следует из доказанной в работе [43] теоремы классификации a -функций и описанного выше взаимно-однозначного соответствия между f -инвариантами и инвариантами Флейтаса (а значит, и другими инвариантами, классифицирующими потоки Морса). Действительно, как легко понять, это соответствие устроено так, что a -функции f и потоку $\text{grad } f$ сопоставляются одинаковые f -инварианты. Этим и задается биекция между классами сопряженности a -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса.

Замечание 19. Если поверхность M , на которой задан поток Морса (или a -функция), является ориентированной, и мы рассматриваем гомеоморфизмы поверхностей, сохраняющие ориентацию, то определение f -инварианта в этом случае можно упростить. Неоднозначность представления f -инварианта в виде меченого f -графа возникала из-за неоднозначности выбора ориентаций на окружностях, ограничивающих диски в поверхности. Если поверхность ориентирована, то, выбирая ориентации на окружностях в соответствии с ориентациями дисков, мы получим меченый f -граф, все метки которого равны $+1$. Поэтому полным топологическим траекторным инвариантом потоков Морса на ориентированных поверхностях (относительно гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию) является просто f -граф (без меток).

Как показано в этом разделе, существует много (эквивалентных) полных топологических траекторных инвариантов для потоков Морса на поверхностях. Тот или иной инвариант может оказаться более удобным при решении различных задач. Например, используя трехцветные графы или меченые f -графы, легко описать алгоритмы сравнения и перечисления потоков Морса (а также потоков Морса–Смейла), что будет сделано в разделе 3.4. Отметим, что в ориентируемом случае описанные инварианты являются различными “представлениями” атомов, определенных в разделе 2.1.1.

Наша дальнейшая задача — классифицировать потоки Морса–Смейла на двумерных поверхностях. Основная идея: проводить классификацию в два этапа. Пер-

вый этап — описанная выше классификация потоков Морса, играющих в дальнейшем роль “атомов”, из которых “склеиваются” произвольные потоки Морса–Смейла. Второй этап — описание правил склейки для атомов и построение “молекул”. Этот подход будет реализован в следующем разделе.

3.3. Классификация потоков Морса–Смейла

Прежде чем переходить к построению инварианта, траекторно классифицирующего потоки Морса–Смейла произвольного вида на двумерных поверхностях, обсудим другой подход.

3.3.1. Конструкция Пейксото

М. Пейксото [105] обобщает понятие различающего графа на случай потоков Морса–Смейла следующим образом. В качестве вершин первого и третьего уровней добавляются соответственно отталкивающие и притягивающие предельные циклы. Кроме сепаратрис появляются некоторые новые ребра (соединяющие вершины первого и третьего уровней), которые можно описать следующим образом. Выбросим из многообразия все предельные циклы потока и рассмотрим те из получившихся связных компонент, которые не содержат седловых точек. Каждая такая компонента состоит из траекторий, имеющих одно и то же α -предельное и одно и то же ω -предельное множества. Для каждой такой компоненты соединим ребром пару вершин (первого и третьего уровней), соответствующих этим предельным множествам.

Отметим, что для потока Морса, имеющего седловые точки, описанное правило построения различающего графа дает в точности граф из сепаратрис. Только в случае простейшего потока Морса (см. замечание 14) мы получим граф, состоящий из двух вершин (первого и третьего уровней), соединенных одним ребром. Для потоков Морса–Смейла с периодическими траекториями такие ребра уже являются типичными.

Далее, аналогично тому, как это делалось для потоков Морса, М. Пейксото описывает типы выделенных подграфов и формулирует условия, которым должны удо-

влетворять выделенные подграфы различающего графа потока. Всего получается 45 типов подграфов (36 с вершинами второго уровня и еще 9 без них) и около 10 условий. Кроме того, для вершин первого и третьего уровня теперь надо указывать, чему они соответствуют: особой точке или предельному циклу одного из двух типов (с ориентируемой или неориентируемой окрестностью).

Мы не будем описывать все типы подграфов и условия (тем более, что они не сформулированы в работе [105] полностью). Эти условия накладываются таким образом, чтобы после склеивания канонических областей (аналог канонических четырехугольников, возникавших в случае потоков Морса) в соответствии с выделенными подграфами различающего графа, получилось замкнутое двумерное многообразие. Ясно, что это требование накладывает сильные ограничения на различающий граф, откуда и возникают все условия.

Напротив, мы хотим показать, что существуют топологически траекторно не эквивалентные потоки Морса–Смейла с одинаковыми различающими графами, т. е. вопрос заключается не в реализуемости данного различающего графа, а в однозначности этой реализации.

Поясним причину неоднозначности реализации различающего графа. Фактически, алгоритм построения различающего графа для потока Морса–Смейла заключается в следующем: мы разрезаем поверхность по периодическим траекториям (запомянув, какие из получившихся компонент границы были между собой склеены), стягиваем каждую граничную окружность в точку, затем строим различающий граф для получившегося потока Морса (возможно, на несвязном многообразии), и, наконец, склеиваем между собой те вершины различающего графа, которые соответствуют одному и тому же предельному циклу (до разрезания). При такой процедуре теряется часть информации о потоке, поэтому мы не можем восстановить его однозначно.

Действительно, рассмотрим ситуацию, возникающую при попытке осуществить обратную операцию. Используя различающий граф (в частности, его выделенные подграфы), мы можем восстановить поток на многообразии, получающемся из исходного при выбрасывании всех предельных циклов, а также указать, какие “граничные” компоненты этого многообразия примыкают к одному и тому же предель-

ному циклу. Однако, например, для предельного цикла, окрестность которого есть кольцо, существует четыре (в общем случае, попарно не эквивалентных) возможности “склеить” эти компоненты в окрестности данного цикла: существует два способа склейки самих компонент, для каждого из которых можно выбрать одно из двух возможных направлений потока на предельном цикле. При этом топология полученной поверхности может зависеть только от способа склейки. Поэтому, даже если мы знаем, каким образом надо произвести склейку (например, из соображений ориентируемости), все равно необходима информация о том, в какую сторону был направлен поток на данном предельном цикле.

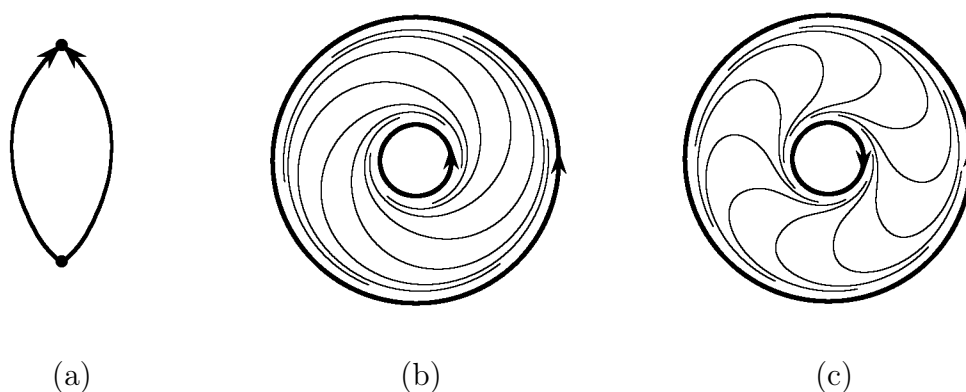


Рис. 22: Не эквивалентные потоки с одинаковым различающим графом Пейксото

Пример 8. Простейший пример различающего графа, для которого существуют два топологически траекторно не эквивалентных потока, приведен на рис. 22(a). Эти потоки можно описать следующим образом. Рассмотрим на кольце K два потока, траектории которых изображены на рис. 22(b) и рис. 22(c). Для каждого из этих потоков внутренняя граничная окружность кольца является отталкивающим предельным циклом, а внешняя — притягивающим. При этом никаких других критических элементов поток не имеет. Как легко понять, потоки, изображенные на рис. 22(b) и рис. 22(c), топологически траекторно не эквивалентны. Действительно, если бы существовал гомеоморфизм, переводящий траектории одного потока в траектории другого, то при этом гомеоморфизме предельные циклы одного потока отображались бы в предельные циклы другого потока, причем с сохранением ориентации на этих циклах, индуцированной потоком. Но это невозможно, потому что для одного потока эти циклы представляют один и тот же элемент в группе целочисленных гомологий кольца $H_1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а для другого — противоположные.

Для каждого из двух рассмотренных потоков на кольце можно построить аналогичный поток на торе, склеив два экземпляра кольца с одинаковыми потоками по границе. В результате получим два топологически траекторно не эквивалентных потока Морса–Смейла на двумерном торе, каждому из которых соответствует различающийся граф Пейксото, изображенный на рис. 22(a).

Замечание 20. Аналогичная ошибка содержится в работе [119]. При классификации потоков Морса–Смейла с предельными циклами К. Вонг тоже действует так, как описано выше: разрезаем поверхность по предельным циклам; для каждого получившегося куска рассматриваем “раскрашенный двойственный граф” (см. описание инварианта Вонга в разделе 3.2); описываем спаривание циклов “раскрашенных двойственных графов”. Информация о спаривании циклов позволяет однозначно склеить поверхность, поскольку К. Вонг рассматривает только ориентируемые многообразия, но не определяет поток в окрестности склеек. Иными словами, инвариант Вонга, как и инвариант Пейксото, не меняется, если изменить поток лишь в маленькой окрестности какого-нибудь предельного цикла так, чтобы на этом цикле направление потока изменилось на противоположное.

Замечание 21. В работе [97] сформулирована теорема о биекции между классами сопряженности ξ -функций (аналог a -функций для потоков Морса–Смейла) и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса–Смейла. Более точно, для потоков Морса–Смейла на многообразиях произвольной размерности доказано, что из топологической траекторной эквивалентности потоков следует сопряженность ξ -функций (если значения этих ξ -функций одинаковы на соответствующих критических элементах потоков). Кроме того утверждается, что для двумерных многообразий верно и обратное, т. е. сопряженность ξ -функций влечет топологическую траекторную эквивалентность соответствующих потоков. Эти утверждения можно переформулировать следующим образом: для потока Морса–Смейла на многообразии произвольной размерности ξ -функция является топологическим траекторным инвариантом, а в двумерном случае этот инвариант является полным. Однако утверждение о том, что в двумерном случае инвариант является полным, неверно. При его доказательстве К. Р. Мейер ссылается на работу [107], откуда возникает та же ошибка, что и в работах М. Пейксото и К. Вонга.

Таким образом, траекторная классификация потоков Морса–Смейла и послонная классификация ξ -функций являются разными задачами (хотя эти задачи эквивалентны в случае потоков Морса — см. теорему 17).

Замечание 22. Отметим, что в работах [27], [28] введено понятие “схемы потока” для потоков на двумерной сфере. Для потоков Морса–Смейла эта “схема потока” аналогична различающему графу Пейксото. В общем случае описание “схемы потока” достаточно громоздко, поскольку она определяется для потоков более общего вида, чем потоки Морса–Смейла. Тем не менее “схема потока” является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков рассматриваемого вида, в частности, потокам из примера 8 соответствуют разные схемы.

3.3.2. Описание v -атомов

Как уже говорилось, для построения инварианта потока Морса–Смейла мы будем использовать идею молекулы [9].

Замечание 23. Ниже мы говорим о потоке Морса–Смейла на двумерном многообразии N с границей, предполагая, что поток трансверсален границе в каждой ее точке. Отметим, что в данной ситуации всегда можно считать, что N вложено в некоторое многообразие M (без границы) так, что рассматриваемый поток есть ограничение некоторого потока Морса–Смейла, заданного на M . Топологическая траекторная эквивалентность таких потоков определяется очевидным образом.

Определение 35. Пусть N — связное компактное двумерное многообразие с границей, на котором задан поток Морса–Смейла v , трансверсальный границе в каждой ее точке. Назовем N *элементарной областью*, если выполнено одно из следующих условий:

1) N содержит единственный критический элемент поля v , который есть либо источник, либо сток, либо предельный цикл;

2) все критические элементы поля v в N являются седловыми точками, причем имеется хотя бы одна седловая точка.

В последнем случае будем называть элементарную область *седловой* элементарной областью.

Определение 36. Будем говорить, что две элементарные области *эквивалентны*, если потоки, заданные на них топологически траекторно эквивалентны. Классы эквивалентности элементарных областей назовем *v -атомами*. В частности, классы эквивалентности седловых элементарных областей — *седловыми v -атомами*. Назовем *сложностью* седлового v -атома количество седловых особых точек в соответствующей ему элементарной области.

Не сложно привести список всех не седловых v -атомов. Они отличаются только типом самого критического элемента и топологией его окрестности. То, что других отличий нет, следует, по существу, из результатов работы [1] (см. также [106], [107]). Сформулируем соответствующее утверждение в следующем виде.

Лемма 21. *Существует ровно 6 не седловых v -атомов. Соответствующие им элементарные области N можно описать следующим образом:*

- 1) N есть диск, содержащий единственный критический элемент поля v , который есть источник (сток);
- 2) N есть кольцо, содержащее единственный критический элемент поля v , который есть отталкивающий (притягивающий) предельный цикл;
- 3) N есть лист Мёбиуса, содержащий единственный критический элемент поля v , который есть отталкивающий (притягивающий) предельный цикл.

Оба v -атома из п. 1) леммы 21 (диск с источником и диск со стоком) будем обозначать буквой A . Остальные четыре v -атома (кольцо или лист Мёбиуса с отталкивающим или притягивающим циклом) обозначим буквой S . Элементарные области, соответствующие v -атомам A (v -атомам S) будем называть элементарными областями типа A (типа S).

Опишем теперь процедуру разбиения замкнутой поверхности с потоком Морса–Смейла на элементарные области.

Определение 37. Для поверхности M с заданным на ней потоком Морса–Смейла v назовем набор гладко вложенных в нее окружностей *разрезающим*, если эти окружности попарно не пересекаются и разбивают M на элементарные области, так что для каждой окружности хотя бы одна из прилегающих к ней элементарных областей не является седловой.

Лемма 22. Пусть v — поток Морса–Смейла на поверхности M . Тогда

- 1) в поверхности M существует разрезающий набор окружностей;
- 2) для любых двух разрезающих наборов окружностей существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, переводящий один набор в другой и отображающий каждую траекторию потока в себя с сохранением направления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим достаточно маленькие окрестности всех источников, стоков и предельных циклов, граничные окружности которых трансверсальны потоку v . Очевидно, этот набор граничных окружностей разбивает M на элементарные области и, возможно, некоторое количество колец, на которых поток не имеет критических элементов, а все траектории идут с одной граничной окружности кольца на другую (здесь используется то, что v является потоком Морса–Смейла — свойство (3) из определения 27). Выбрасывая для каждого такого кольца граничную окружность, в точках которой поток направлен внутрь кольца, получим разрезающий набор. Первое утверждение леммы доказано. Обозначим окружности построенного разрезающего набора R_1, \dots, R_l .

Докажем второе утверждение леммы. Пусть дан произвольный разрезающий набор окружностей $P_1, \dots, P_{l'}$. Уменьшая окрестности, которые мы выбирали при построении набора R_1, \dots, R_l , можно считать, что окружности $P_1, \dots, P_{l'}$ не пересекаются ни с одной из этих окрестностей.

Рассмотрим окружность P_i с угловой координатой $\varphi \pmod{2\pi}$ на ней. В силу определения 37, по крайней мере одна из двух элементарных областей, прилегающих к окружности P_i , не является седловой. Пусть, для определенности, эта элементарная область содержит сток или притягивающий цикл (случай источника или отталкивающего цикла аналогичен). Тогда этот критический элемент есть ω -предельное множество для всех траекторий потока, пересекающих окружность P_i . Отсюда следует, что каждая точка φ окружности P_i при сдвиге вдоль соответствующей траектории потока v на некоторое положительное время $\tau(\varphi)$ попадает на некоторую окружность R_i (одну и ту же для всех φ). При этом функция $\tau(\varphi)$ будет непрерывной (и даже гладкой), так как окружности P_i и R_i трансверсальны потоку. Таким образом, окружности P_i и R_i ограничивают в многообразии M кольцо, на котором траектории потока v идут с граничной окружности P_i на граничную окружность R_i .

Из приведенного рассуждения ясно, что окружности R_1, \dots, R_l взаимно-однозначно соответствуют окружностям $P_1, \dots, P_{l'}$ (в частности, $l = l'$), и для каждого $i = 1, \dots, l$ существует гомеоморфизм $h_i: M \rightarrow M$, который является тождественным вне некоторой окрестности кольца, ограниченного окружностями P_i и R_i , отображает окружность P_i в окружность R_i и переводит каждую траекторию потока v в себя с сохранением направления. Композиция $h_1 \circ \dots \circ h_l$ переводит набор P_1, \dots, P_l в набор R_1, \dots, R_l .

Для двух произвольных разрезающих наборов достаточно рассмотреть аналогичные гомеоморфизмы переводящие каждый из этих наборов в подходящий набор R_1, \dots, R_l , а затем взять их композицию. \square

Утверждение (2) леммы 22 означает, в частности, что элементарные области, на которые разбивается поверхность M , с точностью до эквивалентности не зависят от выбора разрезающего набора. Таким образом, каждому потоку Морса–Смейла однозначно ставится в соответствие некоторый набор v -атомов.

Следствие 5. *Указанная операция сопоставления произвольному потоку Морса–Смейла набора v -атомов является топологическим траекторным инвариантом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: M_1 \rightarrow M_2$ — гомеоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 . Он переводит некоторый разрезающий набор для потока v_1 в набор окружностей на поверхности M_2 . Этот набор окружностей не обязан быть разрезающим для потока v_2 по той причине, что образы окружностей при гомеоморфизме h могут быть не трансверсальными траекториям потока v_2 (и вообще не гладкими). Однако они, очевидно, пересекают каждую траекторию ровно в одной точке. Сгладив образы окружностей так, чтобы они стали трансверсальны потоку v_2 , получим разрезающий набор для потока v_2 . Применяя теперь утверждение (2) леммы 22 к построенному и исходному разрезающим наборам потока v_2 , получаем требуемый результат. \square

Замечание 24. Очевидно, набор v -атомов, определяемый произвольным разрезающим набором окружностей, не является в общем случае полным топологическим траекторным инвариантом (например, обоим потокам, описанным в примере 8,

соответствуют одни и те же два v -атома типа S). Кроме того, поскольку v -атом определяется как класс эквивалентности элементарных областей, пока не ясно, насколько интересен такой инвариант. Например, сам класс эквивалентности потока Морса–Смейла является его топологическим траекторным инвариантом (и, очевидно, полным), но такой инвариант никак не помогает эффективно решить задачу классификации.

На самом деле, как показано ниже, используя результаты разделов 3.1 и 3.2, можно получить “эффективную” классификацию седловых v -атомов (классификация не седловых v -атомов уже описана в лемме 21). Оказывается, что для потоков Морса набор v -атомов, определяемый произвольным разрезающим набором окружностей, является полным топологическим траекторным инвариантом. Поскольку в этом случае нет ни одного v -атома типа S , классификация седловых v -атомов эквивалентна траекторной классификации потоков Морса на связных поверхностях. Это можно сформулировать в следующем виде.

Лемма 23. *Пусть v — поток Морса на связной поверхности M , отличный от простейшего и имеющий k источников и стоков. Тогда*

- 1) *набор v -атомов, сопоставляемый потоку v , состоит ровно из одного седлового v -атома $Z(v)$ и k штук v -атомов типа A ;*
- 2) *поток v однозначно (с точностью до топологической траекторной эквивалентности) восстанавливается по v -атому $Z(v)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно, так как вырезание маленьких дисков, содержащих стоки и источники, из поверхности M не нарушает ее связности.

Доказательство второго утверждения сводится к следующему. Поверхность M с потоком v получается в результате “приклеивания” элементарных областей типа A по всем граничным окружностям элементарной области, соответствующей v -атому $Z(v)$. Надо показать, что это “приклеивание” определено однозначно с точностью до топологической траекторной эквивалентности. Более точно, надо показать, что любой гомеоморфизм f границы элементарной области типа A на себя продолжается до такого гомеоморфизма всей этой элементарной области на себя, который переводит траектории в траектории с сохранением направления. Ясно, что такое

продолжение всегда существует. Например, можно продолжать f внутрь диска так, чтобы сохранялся параметр на траекториях. \square

Из доказанной леммы следует, что для классификации седловых v -атомов можно использовать любой из инвариантов, рассмотренных в разделах 3.1 и 3.2. Мы будем считать, что каждому седловому v -атому V сопоставлен трехцветный граф $T(V)$.

3.3.3. Построение v -молекулы

Рассмотрим теперь произвольный поток Морса–Смейла v на поверхности M . Согласно следствию 5, ему соответствует однозначно определенный набор v -атомов. Чтобы восстановить поверхность M с потоком v , нужно склеить элементарные области, соответствующие v -атомам этого набора по граничным окружностям. Каждая склейка двух областей по двум граничным компонентам (окружностям) S_1 и S_2 однозначно определяется гомеоморфизмом $f: S_1 \rightarrow S_2$, причем гомотопные гомеоморфизмы дают одинаковый в смысле топологической траекторной эквивалентности результат (см., например, [107]). Поскольку с точностью до гомотопии существует ровно два различных гомеоморфизма окружности в окружность, то с точностью до топологической траекторной эквивалентности для каждой склейки существует не более двух возможностей.

Замечание 25. Говоря о склейке элементарных областей (т. е. многообразий с границей, на которых задан поток), мы, естественно, подразумеваем, что после склейки получается гладкое многообразие с гладким потоком. Не сложно показать, что для произвольного гомеоморфизма граничных компонент этого можно достичь, либо изменяя гладкую структуру, либо заменяя потоки на траекторно эквивалентные в некоторых маленьких окрестностях этих граничных компонент.

Если на граничных компонентах склеиваемых областей фиксирована некоторая ориентация, то выбор одной из двух возможных склеек можно задавать меткой ± 1 для каждой пары отождествляемых при склейке окружностей: $(+1)$ означает, что ориентации при отождествлении согласованы, а (-1) — что, не согласованы.

Таким образом, для однозначного описания всех склеек необходимо задать ориентации на граничных окружностях элементарных областей. Можно считать, что на

границе элементарной области типа S (кольцо или лист Мёбиуса) ориентация индуцирована потоком на содержащемся в этой области предельном цикле. На границе элементарной области типа A (диск) ориентацию можно задать произвольно, так как для этой области существует гомеоморфизм, переводящий траектории в траектории и обращающий ориентацию на границе диска. Осталось задать ориентации на граничных окружностях седловых элементарных областей.

Каждая седловая элементарная область определяет v -атом, которому соответствует некоторый трехцветный граф. Мы предполагаем, что задача классификации седловых v -атомов (или, что то же самое, потоков Морса) уже решена, т. е. имеется список всех связных трехцветных графов (с количеством вершин, не превосходящим некоторого числа K). Поэтому можно считать, что в этом списке трехцветные графы перечислены с указанием некоторой ориентации на всех st -циклах и tu -циклах.

Замечание 26. В дальнейшем, говоря о некотором седловом v -атоме V , мы всегда будем подразумевать, что это v -атом из известного списка V_1, V_2, \dots , в котором седловые v -атомы представлены в виде трехцветных графов $T(V_i)$, т. е. V_i — это некоторая буква, обозначающая седловый v -атом, а $T(V_i)$ — это соответствующий ему связный трехцветный граф, у которого ориентации на всех st -циклах и tu -циклах были выбраны каким-то образом (после чего он был занесен в список) и больше не меняются. При этом будем предполагать, что для трехцветных графов, не имеющих циклов нечетной длины (т. е. соответствующих ориентируемым поверхностям — см. теорему 16), ориентации st -циклов и tu -циклов выбраны согласованно в смысле определения 29.

Конечно, перечислить седловые v -атомы (связные трехцветные графы) можно множеством способов. Мы лишь предполагаем, что список составлен и фиксирован. В разделе 3.4 будет указан алгоритм, позволяющий некоторым стандартным способом ориентировать все st -циклы и tu -циклы данного трехцветного графа T (см. замечание 31). Этот алгоритм не является “естественным” в каком-то инвариантном смысле, но позволяет выбрать все ориентации однозначно с точностью до изоморфизма графа T .

Опишем теперь, как мы будем задавать ориентацию на граничных окружностях седловых элементарных областей. Трехцветный граф, соответствующий седловой

элементарной области, определен однозначно (по существу, это есть утверждение (1) леммы 18). Рассуждая точно так же, как при доказательстве первой части теоремы 15, можно считать, что трехцветный граф вложен в седловую элементарную область как граф, двойственный графу, составленному из сепаратрис потока и t -траекторий. При этом вложении st -циклы будут соответствовать граничным окружностям элементарной области, в точках которых поток направлен внутрь области, а tu -циклы — граничным окружностям, в точках которых поток направлен наружу (см. рис. 11). Ясно, что задание ориентации на каком-либо st -цикле или tu -цикле вложенного трехцветного графа однозначно определяет ориентацию на соответствующей этому циклу граничной окружности (и наоборот).

Определение 38. Пусть \tilde{T} — трехцветный граф, вложенный указанным выше образом в седловую элементарную область N , который изоморфен трехцветному графу T из списка. Произвольный изоморфизм $f: \tilde{T} \rightarrow T$ назовем *параметризацией* седловой элементарной области N . Ясно, что любая параметризация определяет ориентации всех st -циклов и tu -циклов графа \tilde{T} , поскольку на соответствующих циклах графа T ориентация задана. После этого однозначно определяются ориентации всех граничных окружностей элементарной области N . Будем говорить, что ориентации на граничных окружностях, полученные в результате описанной процедуры, *индуцированы* параметризацией f . Кроме того, параметризация, естественно, определяет биекцию множества граничных окружностей области N на множество st -циклов и tu -циклов графа T .

Замечание 27. Ясно, что различные параметризации седловой элементарной области определяют, вообще говоря, различные ориентации ее граничных окружностей. Можно сказать, что группа $G(T)$ автоморфизмов трехцветного графа T действует на множестве ориентаций граничных окружностей, индуцированных некоторой параметризацией: каждый автоморфизм $g \in G(T)$ переводит ориентации, индуцированные параметризацией f , в ориентации, индуцированные параметризацией $g \circ f$. Это действие транзитивное и ядро его есть подгруппа $G_0(T)$ группы $G(T)$, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих ориентации всех st -циклов и tu -циклов графа T . Таким образом, имеется естественная биекция между множеством всех ориентаций граничных окружностей, индуцированных некоторой параметризацией,

и множеством смежных классов $G(T)/G_0(T)$. В частности, количество различных возможностей при таком способе ориентирования граничных окружностей равно индексу подгруппы $G_0(T)$ в группе $G(T)$.

Замечание 28. Если при траекторной классификации потоков Морса–Смейла ограничиться рассмотрением ориентированных многообразий и гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, то для произвольной (ориентированной) седловой элементарной области можно канонически ориентировать все ее граничные окружности. Например, можно выбирать на окружностях ориентацию таким образом, чтобы ориентация репера (w, v) , где w — касательный вектор к окружности, задающий ориентацию на ней, а v — внутренняя нормаль, совпадала с ориентацией касательной плоскости в данной точке. При такой ориентации граничных окружностей ориентируемой седловой элементарной области мы получим либо ориентацию, соответствующую определению 38, либо противоположную (одновременно на всех окружностях), поскольку у трехцветного графа (из списка), соответствующего ориентируемой элементарной области, st -циклы и tu -циклы ориентированы согласованно (см. замечание 26). Легко показать, что в ориентируемом случае подгруппа $G_0(T)$ либо совпадает со всей группой $G(T)$, либо является подгруппой индекса 2.

Теперь мы можем дать описание инварианта, классифицирующего потоки Морса–Смейла.

Определение 39. Назовем v -молекулой граф W , у которого все ребра ориентированы, а каждой вершине поставлен в соответствие либо v -атом A , либо v -атом S , либо некоторый седловой v -атом из имеющегося списка V_1, V_2, \dots (будем называть вершины графа W соответственно A -вершинами, S -вершинами и седловыми вершинами), причем выполнены следующие условия:

- 1) каждая A -вершина графа W имеет степень 1;
- 2) каждая S -вершина графа W имеет степень 1 или 2, причем, если степень равна 2, то оба ребра одновременно либо входят в эту вершину, либо выходят из нее;
- 3) для каждой седловой вершины графа W , которой соответствует некоторый v -атом V_i , фиксирована произвольная биекция множества ребер, инцидентных этой вершине, на множество st -циклов и tu -циклов трехцветного графа $T(V_i)$ из списка, причем ребра, соответствующие st -циклам, входят в вершину, а ребра, соответствующие

ющие tu -циклам, выходят из нее (назовем эту биекцию *параметризацией* данной седловой вершины);

4) ни одно ребро графа W не соединяет две седловые вершины;

5) если ребро графа W соединяет две вершины, ни одна из которых не является A -вершиной, то на этом ребре стоит метка ± 1 .

Определение 40. Пусть v — поток Морса–Смейла на многообразии M . Будем говорить, что v -молекула есть v -молекула потока v (и обозначать ее $W(v)$), если она построена в результате описанной ниже процедуры.

- (1) Рассматривая некоторый разрезающий набор для потока v на многообразии M , получаем разбиение M на элементарные области. Эти области будут соответствовать вершинам графа $W(v)$, которые мы обозначим соответствующими буквами A , S или V_1, V_2, \dots из имеющегося списка седловых v -атомов.
- (2) Для каждой окружности из данного разрезающего набора проведем ребро, соединяющее те две вершины, для которых соответствующие им элементарные области граничат по этой окружности, после чего ориентируем это ребро в соответствии с направлением потока v в точках рассматриваемой окружности (в точках окружности поток трансверсален ей, т. е. направлен из одной элементарной области в другую). В результате получим граф $W(v)$.
- (3) В соответствии с предыдущим пунктом, для каждой седловой вершины V_i построенного графа имеется биекция между ребрами, инцидентными этой вершине, и граничными окружностями соответствующей ей седловой элементарной области. Фиксируя (произвольную) параметризацию этой элементарной области, получаем параметризацию вершины V_i .
- (4) Граничные окружности всех элементарных областей, кроме областей типа A , ориентированы: для седловых элементарных областей ориентации индуцированы выбранными на предыдущем шаге параметризациями, а на границах областей типа S ориентации заданы направлением потока на их предельных циклах. Это определяет две ориентации на каждой окружности рассматриваемого разрезающего набора, разделяющей области, отличные от областей типа A . Если эти ориентации совпадают, то поставим на соответствующем ребре построенного графа $W(v)$ метку $(+1)$, а если не совпадают, то (-1) .

Для того, чтобы учесть неоднозначность, присутствующую в п. (3) изложенного правила построения v -молекулы $W(v)$, введем следующим образом отношение эквивалентности на множестве v -молекул.

Определение 41. Пусть V_i — седловая вершина v -молекулы W (в частности, для вершины V_i задана некоторая параметризация φ_i — см. п. (3) определения 39). Рассмотрим произвольный автоморфизм g трехцветного графа $T(V_i)$ (вообще говоря, не сохраняющий имеющиеся ориентации его st -циклов и tu -циклов — см. замечание 27). Пусть λ и μ — такие два st -цикла или два tu -цикла графа $T(V_i)$, что автоморфизм g переводит цикл λ в цикл μ (без учета их ориентаций). Тогда скажем, что ориентация цикла λ (*не*) *сохраняется* при автоморфизме g , если ориентации циклов $g(\lambda)$ и μ (*не*) согласованы. Назовем *перепараметризацией* вершины V_i операцию следующего вида: заменяем параметризацию φ_i вершины V_i на параметризацию $g \circ \varphi_i$ и изменяем метки на противоположные на тех ребрах e_1, \dots, e_l , инцидентных вершине V_i , для которых ориентации циклов $\varphi_i(e_1), \dots, \varphi_i(e_l)$ не сохраняются при автоморфизме g . При этом, если какое-то из этих ребер e_j было без метки, то оно и остается без метки.

Определение 42. Две v -молекулы W и W' назовем *изоморфными*, если после некоторых перепараметризаций их седловых вершин они будут изоморфны как графы с сохранением обозначений вершин, ориентаций ребер, меток и параметризаций седловых вершин (сохранение параметризации седловых вершин при изоморфизме графов означает следующее: если изоморфизм $h: W \rightarrow W'$ переводит вершину V с параметризацией φ в вершину V' с параметризацией φ' , то $\varphi = \varphi' \circ h$).

3.3.4. Теоремы классификации и реализация инвариантов

Следующие утверждения показывают, что задача траекторной классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях эквивалентна классификации v -молекул с точностью до изоморфизма.

Теорема 18. *Два потока Морса–Смейла v и v' на двумерных поверхностях M и M' топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что v -молекулы топологически траекторно эквивалентных потоков изоморфны. Пусть $h: M \rightarrow M'$ — гомеоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v и v' . Поскольку на любом многообразии все разрезающие наборы эквивалентны (утверждение (2) леммы 22), можно считать, что разрезающие наборы, используемые при построении v -молекул $W(v)$ и $W(v')$, переводятся друг в друга гомеоморфизмом h . Действуя в соответствии с п. (1) и п. (2) из определения 40, построим графы $W(v)$ и $W(v')$ с ориентированными ребрами. Гомеоморфизм h очевидным образом определяет отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$, являющееся изоморфизмом графов с сохранением ориентации на ребрах. Выбирая теперь произвольные параметризации седловых элементарных областей, построим полностью v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$.

Пусть f_i и f'_i — параметризации седловых элементарных областей, соответствующих некоторой вершине V_i графа $W(v)$ и вершине $V'_i = \tilde{h}(V_i)$ графа $W(v')$. Здесь также можно считать, что трехцветные графы, вложенные в эти седловые элементарные области, переводятся друг в друга гомеоморфизмом h . Тогда $g_i = f'_i \circ h \circ f_i^{-1}$ есть автоморфизм трехцветного графа $T_i = T(V_i) = T(V'_i)$, где T_i — граф из списка. Сделаем перепараметризацию вершины V_i с помощью автоморфизма g_i графа T_i . Легко понять, что после аналогичных перепараметризаций всех седловых вершин v -молекулы $W(v)$ отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$ будет изоморфизмом, сохраняющим обозначения вершин, ориентации ребер, метки и параметризации седловых вершин, т. е. v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть v и v' — два таких потока Морса–Смейла на многообразиях соответственно M и M' , что v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны. Очевидно, что любую перепараметризацию некоторой вершины v -молекулы $W(v)$, определяемую автоморфизмом g соответствующего трехцветного графа, можно рассматривать как результат замены параметризации f соответствующей ей седловой элементарной области на параметризацию $g \circ f$. Поскольку каждая параметризация f произвольно выбирается при построении v -молекулы $W(v)$, будем считать, что v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ были построены таким образом, что существует отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$, являющееся изоморфизмом графов, сохраняющим обозначения вершин, ориентации ребер, метки и

параметризации седловых вершин. Необходимо доказать, что в этом случае существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий траектории потока v в траектории потока v' .

Поскольку \tilde{h} сохраняет обозначения седловых вершин и их параметризации, для седловой элементарной области N_i , соответствующей вершине V_i графа $W(v)$, и седловой элементарной области N'_i , соответствующей вершине $\tilde{h}(V_i)$ графа $W(v')$, существует гомеоморфизм $h_i: N_i \rightarrow N'_i$, переводящий траектории потока v в траектории потока v' и “совпадающий” с отображением \tilde{h} на множестве граничных окружностей (т. е. для любого ребра e , инцидентного вершине V_i , граничная окружность области N_i , соответствующая этому ребру, переходит при гомеоморфизме h_i в граничную окружность области N'_i , соответствующую ребру $\tilde{h}(e)$). Поскольку в v -молекуле не бывает ребер, соединяющих седловые вершины, можно считать, что требуемый гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$ уже определен на седловых элементарных областях формулой $h|_{N_i} = h_i$, в частности, он определен на окружностях разрезающего набора, являющихся граничными для какой-либо седловой области.

Определим гомеоморфизм h на всех остальных окружностях разрезающего набора многообразия M так, чтобы они переходили в соответствующие (при отображении \tilde{h}) окружности разрезающего набора многообразия M' с согласованием ориентаций, индуцированных на них предельными циклами в примыкающих элементарных областях типа S . Это возможно, так как изоморфизм $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$ сохраняет метки на ребрах. Для окружности разрезающего набора, разделяющей две области типа A (такая ситуация возникает лишь для простейшего потока, описанного в замечании 14), определим гомеоморфизм h на этой окружности произвольно.

Теперь гомеоморфизм h определен на всех окружностях разрезающего набора и на всех седловых элементарных областях. Чтобы полностью построить гомеоморфизм h , необходимо для каждой элементарной области типа A или типа S продолжить его с границы на всю область. При этом для элементарных областей типа S гомеоморфизм, заданный на граничных окружностях, согласован с их ориентациями, индуцированными ориентациями предельных циклов. В этой ситуации существование требуемого продолжения доказано в [107]. \square

Теорема 19. *Для любой v -молекулы W существует такой поток Морса–Смейла v на двумерной поверхности M , что W изоморфна $W(v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемый поток Морса–Смейла v легко построить, используя структуру v -молекулы W . Действительно, чтобы получить поверхность M с потоком, необходимо лишь склеить элементарные области, соответствующие вершинам v -молекулы W , по граничным окружностям. Ориентации на граничных окружностях заданы параметризацией седловых вершин и направлением потока на предельных циклах, а правила склейки определяются метками ± 1 на ребрах v -молекулы W . \square

Теорема 19 утверждает, что любая v -молекула является допустимой. Приведем еще один результат, описывающий множество v -молекул, являющихся допустимыми для многообразия данного топологического типа.

Теорема 20. *Пусть $W(v)$ — v -молекула потока Морса–Смейла v , заданного на поверхности M . Тогда*

1) *эйлерова характеристика поверхности M равна*

$$\chi(M) = (\text{количество } v\text{-атомов } A) - \sum_i c(V_i),$$

где через $c(V)$ обозначена сложность v -атома V , а суммирование происходит по всем седловым вершинам v -молекулы $W(v)$;

2) *поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда все v -атомы, соответствующие вершинам v -молекулы $W(v)$, ориентируемы, и для каждого цикла в графе $W(v)$ (без учета ориентаций ребер) произведение всех меток, стоящих на ребрах этого цикла, равно $(-1)^k$, где k — количество седловых вершин на этом цикле (каждая вершина считается столько раз, сколько раз цикл проходит через нее).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть просто формула для суммы индексов особых точек поля v .

Докажем второе утверждение. Пусть C — некоторый цикл в графе $W(v)$. Этот цикл разбивается седловыми вершинами на отрезки, каждому из которых в поверхности M соответствует кольцо, склеенное из нескольких элементарных областей типа S . Рассмотрим одно из таких колец K . Его граница есть пара окружно-

стей, являющихся граничными окружностями некоторых седловых элементарных областей. Поэтому на границе кольца K фиксирована ориентация, индуцированная параметризациями этих элементарных областей (выбранными при построении v -молекулы $W(v)$). Легко понять, что произведение меток (± 1) , стоящих на ребрах рассматриваемого отрезка цикла C , равно $(+1)$, если ориентации граничных окружностей кольца K одинаковы (т. е. эти окружности изотопны в кольце K с сохранением ориентации), и равно (-1) , если они противоположны.

Напомним, что для ориентируемых седловых элементарных областей мы всегда выбираем на границе ориентацию, индуцированную ориентацией самой области (см. замечание 28). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 24. *Пусть P_1, \dots, P_m — двумерные ориентированные поверхности с краем, причем на граничных окружностях задана индуцированная ориентация. Рассмотрим поверхность M , склеенную из этих поверхностей по некоторым диффеоморфизмам их граничных окружностей. Изобразим эту склейку в виде графа Γ с вершинами p_1, \dots, p_m , где вершина p_i соответствует поверхности P_i , а каждой склейке P_i с P_j соответствует ребро, соединяющее p_i с p_j , на котором стоит метка $(+1)$, если эта склейка сохраняет ориентации склеиваемых окружностей, или (-1) , если не сохраняет.*

Поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда для любого цикла C графа Γ произведение меток на ребрах цикла C равно $(-1)^{l(C)}$, где $l(C)$ — длина цикла C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда ориентации на склеиваемых поверхностях P_1, \dots, P_m можно изменить так, чтобы они стали согласованы после склейки. Согласованность ориентаций означает, что все метки на ребрах графа Γ равны (-1) . Изменению ориентации поверхности P_i соответствует изменение меток на противоположные на всех ребрах графа Γ , инцидентных вершине p_i . При выполнении такой операции произведение меток на ребрах произвольного цикла графа Γ не меняется. Поэтому, если поверхность M ориентируема, то требуемое условие выполнено.

Для доказательства утверждения в обратную сторону рассмотрим следующую одномерную коцепь α на графе Γ с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 :

$$\alpha(e) = \begin{cases} 0, & \text{если метка на ребре } e \text{ равна } (-1) \\ 1, & \text{если метка на ребре } e \text{ равна } (+1) \end{cases}$$

Очевидно, что условие

$$(\text{произведение меток на ребрах цикла } C) = (-1)^{l(C)}$$

равносильно условию $\alpha(C) = 0$. Так как это условие выполнено для любого цикла C , то коцепь α точна: $\alpha = \delta(\beta)$. При изменении ориентаций всех поверхностей P_i , для которых $\beta(p_i) = 1$, все метки на ребрах графа Γ станут равны (-1) . \square

Тем самым и теорема 20 полностью доказана. \square

3.4. Кодирование и перечисление потоков

Для построенных в разделах 3.1 и 3.3 инвариантов (трехцветных графов и v -молекул) легко описать алгоритмы сравнения и перечисления. Один из возможных способов сделать это излагается в данном разделе.

3.4.1. Кодирование и перечисление потоков Морса

В силу теоремы 15, трехцветные графы, у которых длины всех su -циклов равны 4 (и только они), являются инвариантами потоков Морса. В этом разделе мы рассматриваем только такие трехцветные графы. Поэтому в дальнейшем “трехцветный граф” означает “трехцветный граф, у которого длины всех su -циклов равны 4”.

Мы хотим “записать” каждый трехцветный граф в виде строчки символов некоторого алфавита. Из описания алгоритма будет ясно, что количество символов в алфавите, необходимое для кодирования трехцветного графа T есть число $m_1(T)$ (количество su -циклов графа T). Мы будем считать, что символы нашего алфавита — это цифры. Этого заведомо достаточно для описания различных примеров и составления начальной части списка трехцветных графов (см. таблицу 2 в разделе 3.4.3).

Определим сначала, какой вид может иметь строчка цифр, сопоставленная трехцветному графу в качестве кода.

Определение 43. Назовем *допустимой строчкой сложности* N строчку символов вида

$$(0 X_1^{(1)} \dots X_{l_1}^{(1)} 0 X_1^{(2)} \dots X_{l_2}^{(2)} 0 \dots 0 X_1^{(m)} \dots X_{l_m}^{(m)}),$$

где $X_i^{(j)}$ — символы из набора $A_N = \{1, 1', \bar{1}, \bar{1}', \dots, N, N'\bar{N}, \bar{N}'\}$, причем для каждого $K \in \{1, \dots, N\}$ ровно один из пары символов K, \bar{K} и ровно один из пары символов K', \bar{K}' встречаются в этой строчке (в частности, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = 2N$). Часть допустимой строчки вида $0 X_1^{(j)} \dots X_{l_j}^{(j)}$ назовем ее *отрезком*, а число $l_j \geq 0$ — *длиной* этого отрезка. При этом будем предполагать, что все отрезки нулевой длины расположены в начале допустимой строчки (например, $(00011')$ — допустимая строчка сложности 1, состоящая из двух отрезков длины 0 и одного отрезка длины 2).

Про допустимую строчку сложности $N \geq 1$ будем говорить, что она *распадается*, если множество ее отрезков можно разбить на два таких непересекающихся подмножества, что каждая пара символов, соответствующих одной и той же цифре, содержится в одном из этих подмножеств. Все допустимые строчки сложности 0, состоящие из нескольких отрезков, по определению считаем *распадающимися*.

Нераспадающиеся строчки сложности $N \geq 1$ будут соответствовать связным трехцветным графам с $4N$ вершинами, а каждый отрезок нулевой длины — связной компоненте многообразия, на которой поток является простейшим (см. замечание 14). Поэтому при кодировании потоков Морса на связных поверхностях можно было бы вообще не рассматривать распадающиеся строчки (в частности, строчки сложности 0 из нескольких отрезков). Однако аналогичный подход будет использован и для кодирования потоков Морса–Смейла, где приходится рассматривать уже произвольные строчки.

Изложим теперь схему, по которой мы будем действовать при классификации трехцветных графов.

(i) Сначала описывается алгоритм, который позволяет по данному трехцветному графу T с $4N$ вершинами построить некоторую допустимую строчку $\tilde{C}(T)$ сложности N . Эта строчка строится неоднозначно, так как в процессе построения мы произвольным образом выбираем некоторые ребра трехцветного графа и ориентации

на них. Но, если для каждого неоднозначного выбора рассмотреть все возможности, то можно построить все строчки $\tilde{C}_i(T)$, соответствующие данному трехцветному графу T . Их будет конечное число, и по каждой из них трехцветный граф T восстанавливается однозначно.

(ii) Далее определяется алгоритм сравнения любых двух допустимых строчек. Применяя этот алгоритм, мы можем из любых двух строчек выбрать ту, которая “меньше” другой. Таким образом, на множестве всех допустимых строчек вводится отношение порядка.

(iii) После этого мы определяем код $C(T)$, сопоставляемый трехцветному графу T , как минимальную строчку из всех $\tilde{C}_i(T)$. При этом мы описываем операции над строчками, при помощи которых можно построить минимальную строчку $C(T)$ по данной произвольной строчке $\tilde{C}_i(T)$.

Если пункты (i), (ii), (iii) реализованы, то алгоритм сравнения двух трехцветных графов T_1 и T_2 можно описать следующим образом: строим (неоднозначно) строчки $\tilde{C}(T_1)$ и $\tilde{C}(T_2)$ (п. (i)), находим соответствующие им минимальные строчки $C(T_1)$ и $C(T_2)$ (п. (iii)), сравниваем эти строчки (п. (ii)). Алгоритм перечисления трехцветных графов можно реализовать так: выписываем все допустимые строчки сложности N , после чего для каждой из них находим соответствующую минимальную строчку, из которых уже формируем список (выбрасывая распадающиеся строчки). В результате получаем упорядоченный список всех связных трехцветных графов с $4N$ вершинами (т. е. список всех потоков Морса с N седловыми точками).

Итак, пусть T — некоторый трехцветный граф. Опишем алгоритм построения некоторой допустимой строчки $\tilde{C}(T)$ сложности $N = m_1(T)$, состоящей из $m_0(T)$ отрезков.

Определение 44. (Описание алгоритма)

- (1) Занумеруем все su -циклы цифрами $1, 2, \dots, N$ и выберем в каждом su -цикле некоторую вершину (произвольно). Будем называть такие вершины *отмеченными*. После этого введем следующие обозначения для ориентированных s -ребер графа T : ориентированное s -ребро, началом которого является какая-либо из отмеченных вершин, обозначим символом K , соответствующим номеру su -цикла, содержащего эту вершину; ориентированное s -ребро, противоположное ребру K

в su -цикле и задающее на нем ту же ориентацию, обозначим K' ; ориентированные s -ребра, отличающиеся от ребер K и K' ориентацией обозначим соответственно \bar{K} и \bar{K}' (см. рис. 23, где отмеченные вершины обведены кружком). В результате каждое ориентированное s -ребро графа T будет обозначено некоторым символом из набора A_N .

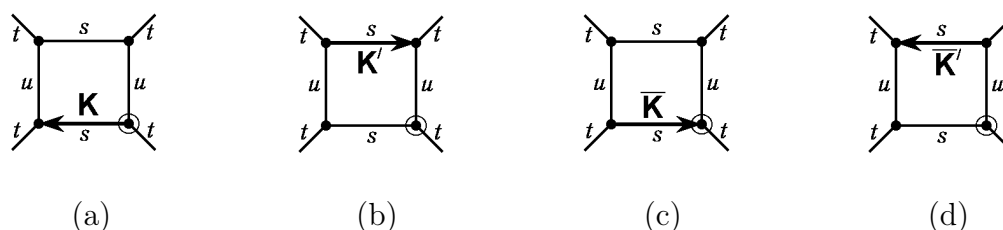


Рис. 23: Определение кода для трехцветного графа

- (2) Для каждого st -цикла выберем на нем ориентацию и некоторое начальное s -ребро (произвольно). После этого для каждого st -цикла строится отрезок строки $\tilde{C}(T)$ следующим образом: будем идти вдоль данного st -цикла по s -ребрам (начиная с выбранного s -ребра и в выбранном направлении), записывая последовательно обозначения соответствующих s -ребер, ориентированных направлением движения по st -циклу. Приписывая символ 0 в начале каждой из построенных последовательностей символов, получаем строки вида $0 X_1 X_2 \dots X_l$, где $X_i \in A_N$, а $2l$ — длина соответствующего st -цикла.
- (3) Упорядочим все st -циклы (произвольно) и запишем в этом порядке соответствующие последовательности вида $0 X_1 X_2 \dots X_l$, построенные на предыдущем шаге. Очевидно, полученная строка $\tilde{C}(T)$ является допустимой. Она состоит из $m_0(T)$ отрезков и имеет сложность $m_1(T)$.

Пример 9. На рис. 24 показан процесс выписывания строки $\tilde{C}(T)$ для трехцветного графа T , соответствующего потоку, описанному в примере 3 (см. рис. 10(c)). Этот граф имеет два st -цикла и два su -цикла. Поэтому соответствующая строка $\tilde{C}(T)$ должна состоять из двух отрезков и иметь сложность 2. Отмеченные вершины обведены кружком, рядом указаны номера содержащих их su -циклов; в каждом st -цикле выделено ориентированное s -ребро, задающее на нем направление и “начало отсчета”, после этого однозначно выписываются два отрез-

ка $0\ 1$ и $0\ \bar{1}'\ 2'\ 2$, соответствующие двум st -циклам рассматриваемого графа T ; окончательный результат — строчка $\tilde{C}(T) = (0\ 1\ 0\ \bar{1}'\ 2'\ 2)$.

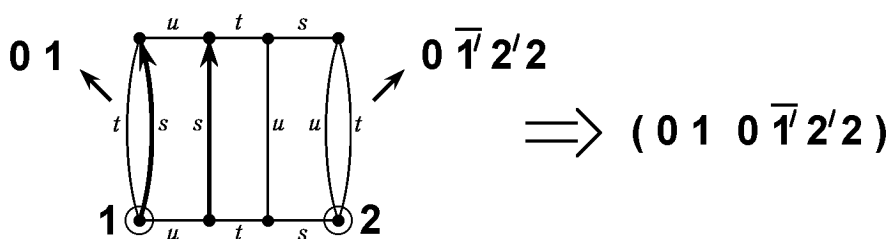


Рис. 24: Пример выписывания кода для трехцветного графа

Покажем теперь, как восстановить трехцветный граф T по построенной строчке $\tilde{C}(T)$.

Лемма 25. *Для любой допустимой строчки C без отрезков нулевой длины существует единственный (с точностью до изоморфизма) трехцветный граф T , для которого $C = \tilde{C}(T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C — некоторая допустимая строчка сложности N . Рассмотрим N циклов длины 4, у каждого из которых одна пара противоположных сторон — цвета s , а другая — цвета u . Пусть эти циклы занумерованы цифрами $1, 2, \dots, N$, и в каждом из них одна из вершин отмечена. Тогда точно так же, как в п. (1) определения 44, каждому ориентированному ребру цвета s в цикле с номером K однозначно сопоставляется обозначение X вида K, K', \bar{K} или \bar{K}' (см. рис. 23).

В результате каждому символу строчки C отличному от нуля ставится в соответствие некоторое ориентированное ребро цвета s в рассматриваемом наборе циклов.

Построим трехцветный граф T , в котором рассматриваемые циклы будут su -циклами, следующим образом: для каждого отличного от нуля символа X в строчке C соединим ребром цвета t конец ребра, соответствующего этому символу, и начало ребра, соответствующего следующему за X символу в строчке C . При этом, если X последний символ в отрезке строчки C , то будем считать, что следующий за ним символ — это первый отличный от нуля символ данного отрезка. Легко понять, что в результате получится некоторый трехцветный граф T . Из описанного процесса построения графа T ясно также, как надо выбрать все необходимые нумерации и ориентации его элементов, чтобы получить исходную строчку C как $\tilde{C}(T)$.

Докажем единственность построенного графа T . Пусть алгоритм (из определения 44) сопоставляет одну и ту же строчку C двум трехцветным графам T_1 и T_2 (при некоторых ориентациях и нумерациях их циклов). Тогда существует отображение $F: T_1 \rightarrow T_2$, устанавливающее их изоморфизм. Действительно, отображение, переводящее su -циклы графа T_1 в su -циклы графа T_2 с теми же номерами, так чтобы отмеченные вершины графа T_1 переходили в отмеченные вершины графа T_2 , очевидно, продолжается до отображения всего графа T_1 и является изоморфизмом. \square

Определим правило сравнения двух допустимых строчек. Оно задает отношение порядка на множестве всех допустимых строчек, которое мы будем обозначать “ $<$ ”.

Определение 45. Пусть C_1 и C_2 — некоторые допустимые строчки.

- (1) Если сложность строчки C_1 меньше сложности строчки C_2 , то $C_1 < C_2$.
- (2) Если сложности C_1 и C_2 равны, то они сравниваются лексикографически, т. е. $(a_1, a_2, \dots) < (b_1, b_2, \dots)$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_{i-1}) = (b_1, \dots, b_{i-1})$ и $a_i < b_i$ для некоторого $i \geq 1$, где символы, из которых состоят допустимые строчки, упорядочены следующим образом:

$$0 < 1 < \bar{1} < 1' < \bar{1}' < 2 < \bar{2} < 2' < \bar{2}' < \dots < K < \bar{K} < K' < \bar{K}' < \dots$$

Определение 46. Кодом $C(T)$ трехцветного графа T называется строчка, являющаяся наименьшей среди всех допустимых строчек, которые можно сопоставить графу T , действуя по алгоритму, описанному в определении 44.

Замечание 29. Конечно, для того, чтобы сформулировать определение 46, годится любое отношение порядка на множестве допустимых строчек. Указанное правило сравнения допустимых строчек удобно тем, что коды потоков Морса будут обладать некоторыми “естественными” свойствами. Например, коды, соответствующие потокам Морса на ориентируемых поверхностях, характеризуются тем, что не содержат символов с чертой (см. лемму 28).

Каждому потоку Морса v , отличному от простейшего, соответствует трехцветный граф $T(v)$, которому мы сопоставили код $C(T(v))$. Будем считать, что каждой компоненте многообразия, на которой поток v является простейшим, соответствует в допустимой строчке отрезок нулевой длины (в частности, простейшему потоку сопоставлен код (0)). Тогда можно говорить о коде $C(v)$ потока Морса v .

Из леммы 25 следует, что все множество допустимых строчек разбивается на классы эквивалентности (строчки C_1 и C_2 эквивалентны, если им соответствуют топологически траекторно эквивалентные потоки Морса). С этой точки зрения код $C(T)$ есть просто минимальный элемент в соответствующем классе эквивалентности относительно введенного выше отношения порядка.

Опишем явно операции над допустимыми строчками, при помощи которых можно любые две эквивалентные строчки перевести друг в друга (в частности, любую допустимую строчку — в эквивалентную ей минимальную).

Лемма 26. *Две допустимые строчки эквивалентны тогда и только тогда, когда одну из другой можно получить выполняя следующие операции.*

- (1) *Во всей строчке все символы вида $1, 1', \bar{1}, \bar{1}', \dots, N, N', \bar{N}, \bar{N}'$ заменяем символами $\sigma(1), \sigma(1)', \overline{\sigma(1)}, \overline{\sigma(1)', \dots, \sigma(N), \sigma(N)', \overline{\sigma(N)}, \overline{\sigma(N)'}$ соответственно, где σ — некоторая перестановка.*
- (2) *Для некоторой цифры $K \in \{1, 2, \dots, N\}$ заменяем*
 - а) *символы K, K', \bar{K}, \bar{K}' на символы K', K, \bar{K}', \bar{K} ,*
или
 - б) *символы K, K', \bar{K}, \bar{K}' на символы \bar{K}, \bar{K}', K, K'*
соответственно.
- (3) *Для некоторого отрезка $0 X_1 X_2 \dots X_l$ заменяем его*
 - а) *на отрезок $0 X_{p+1} X_{p+2} \dots X_l X_1 \dots X_p$, где $1 \leq p \leq l - 1$*
или
 - б) *на отрезок $0 \bar{X}_l \bar{X}_{l-1} \dots \bar{X}_1$, где $X_i \in A_N$, причем (по определению полагаем)*
$$\bar{\bar{K}} = K \text{ и } \bar{\bar{K}'} = K'.$$
- (4) *Переставляем отрезки строчки произвольным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные в формулировке леммы операции соответствуют тем действиям алгоритма, описанного в определении 44, которые определены неоднозначно. Операция (1) соответствует перенумерации su -циклов, операции (2а) и (2б) — изменению выбора отмеченной вершины в su -цикле с номером K на шаге (1) алгоритма, операции (3а) и (3б) — выбору (ориентированного) начального s -ребра на шаге (2) алгоритма, операция (4) — шагу (3). \square

Пример 10. Строчка $\tilde{C}(T) = (0 \ 1 \ 0 \ \bar{1}' \ 2' \ 2)$, построенная в примере 9, не является минимальной в своем классе эквивалентности. Ее можно перевести в минимальную при помощи следующих операций из леммы 26:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T) = (0 \ 1 \ 0 \ \bar{1}' \ 2' \ 2) &\xrightarrow{(3b)} (0 \ 1 \ 0 \ \bar{2} \ \bar{2}' \ 1') \xrightarrow{(2b)} \\ &\xrightarrow{(2b)} (0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2' \ 1') \xrightarrow{(3a)} (0 \ 1 \ 0 \ 1' \ 2 \ 2') = C(T) \end{aligned}$$

Теорема 21. Код $C(v)$ является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса, т. е. потоки Морса v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $C(v_1) = C(v_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 14 и леммы 25. \square

Список кодов для потоков Морса сложности ≤ 2 приведен в разделе 3.4.3 (см. таблицу 2).

3.4.2. Кодирование и перечисление потоков Морса–Смейла

Код для потоков Морса–Смейла общего вида можно построить, добавив к коду, построенному в предыдущем разделе, некоторую дополнительную информацию.

Рассмотрим сначала поток Морса–Смейла v , все предельные циклы которого являются отталкивающими. Если разрезать многообразие M , на котором задан поток v , по предельным циклам, а затем стянуть в точку каждую компоненту разреза, то мы получим поток Морса \tilde{v} на многообразии \tilde{M} . Этому потоку соответствует код $C(\tilde{v})$. Отметим, что многообразие \tilde{M} может быть несвязно, даже если многообразие M было связно.

На языке v -молекул эта операция описывается следующим образом: v -атомы $(\dots \leftarrow S \rightarrow \dots)$ заменяются на пары v -атомов $(\dots \leftarrow A \ A \rightarrow \dots)$, а v -атомы $(S \rightarrow \dots)$ — на v -атомы $(A \rightarrow \dots)$. При этом уничтожаются все имевшиеся на ребрах v -молекулы метки (± 1) . Для того чтобы восстановить исходную v -молекулу, нужно указать, каким из v -атомов A в полученной v -молекуле $W(\tilde{v})$ соответствуют v -атомы S в v -молекуле $W(v)$, а также указать, какие метки стояли на ребрах, инцидентных этим v -атомам S .

Из построения кода для потока Морса ясно, что v -атомы $(A \rightarrow \dots)$ в v -молекуле $W(\tilde{v})$ взаимно-однозначно соответствуют символам 0 в коде $C(\tilde{v})$. Поэтому необходимую информацию о v -атомах S в v -молекуле $W(v)$ можно приписать каким-либо образом символам 0 в строчке $C(\tilde{v})$ (см. ниже определение 49).

Если поток Морса–Смейла v имеет притягивающие предельные циклы, то на языке v -молекул ситуация полностью аналогична той, которая описана выше. Однако соответствие между притягивающими циклами и элементами кода $C(\tilde{v})$ не такое явное, как для отталкивающих циклов. Дело в том, что мы строили код потока Морса, рассматривая s -ребра соответствующего трехцветного графа, т. е., по существу, используя лишь информацию о том, как “взаимодействуют” источники и седла потока. Если же при построении кода потока Морса использовать u -ребра вместо s -ребер, то символам 0 будут соответствовать притягивающие предельные циклы потока, поскольку замена s -ребер на u -ребра соответствует замене потока v на поток $-v$.

Таким образом, при построении кода v -молекулы удобно использовать сразу оба класса допустимых строчек (т. е. построенных с использованием s -ребер и u -ребер). Из теоремы 21 следует, что коды, построенные этими двумя способами, выражаются друг через друга. Опишем это соответствие в явном виде.

Определение 47. Пусть допустимая строчка C_1 построена по алгоритму, описанному в определении 44, для некоторого трехцветного графа T . Допустимую строчку C_2 назовем *двойственной* к строчке C_1 , если ее можно построить следующим образом: занумеруем su -циклы и выберем отмеченные вершины точно так же, как и при построении строчки C_1 ; далее будем действовать согласно алгоритму из определения 44, но рассматривая везде u -ребра вместо s -ребер. Кроме того, если строчка C_1 имеет отрезки нулевой длины, то по определению полагаем, что двойственная строчка C_2 имеет столько же отрезков нулевой длины.

Замечание 30. Ясно, что отношение двойственности симметрично. Поэтому можно говорить о двойственных допустимых строчках. Отметим, что отношение двойственности не сохраняется при замене допустимых строчек на эквивалентные. В частности, коды, соответствующие двойственным строчкам, не обязаны быть двойственными.

Для каждого ориентированного s -ребра трехцветного графа T определено *следующее за ним* ориентированное s -ребро в соответствующем st -цикле. Если фиксировать нумерацию su -циклов графа T и выбор отмеченных вершин в них, то это соответствие однозначно определяет отображение $A_N \rightarrow A_N$. Таким образом, для каждой допустимой строчки C определена некоторая биекция $R_C: A_N \rightarrow A_N$. Сформулируем это в виде следующего определения.

Определение 48. Каждой допустимой строчке C сложности N сопоставим операцию $R_C: A_N \rightarrow A_N$, действующую по следующим правилам:

- 1) если символ $X \in A_N$ содержится в строчке C , то $R_C(X)$ есть символ, следующий за X в строчке C (при этом мы считаем, что за последним символом отрезка следует его первый отличный от нуля символ);
- 2) если символ $X \in A_N$ не содержится в строчке C , то $R_C(X) = \overline{R_C^{-1}(\overline{X})}$, где, как и раньше, мы полагаем по определению $\overline{\overline{X}} = X$, т. е. в этом случае $\overline{R_C(X)}$ есть символ, предшествующий символу \overline{X} (который в силу определения 43 обязан содержаться в строчке C , если X не содержится в ней).

Как легко понять, задание операции R_C определяет саму строчку C с точностью до применения операций (3) и (4) из леммы 26. Из определения 47 следует, что строчка, двойственная к данной строчке C_1 тоже определена с точностью до применения операций (3) и (4) из леммы 26. Поэтому, для того чтобы описать правило построения некоторой допустимой строчки C_2 , двойственной к строчке C_1 , достаточно описать связь между операциями R_{C_1} и R_{C_2} .

Лемма 27. Пусть C_2 — допустимая строчка, двойственная к допустимой строчке C_1 сложности N . Тогда $R_{C_2} = \psi \circ R_{C_1} \circ \varphi$, где операции $\varphi, \psi: A_N \rightarrow A_N$ определяются следующим образом:

$$\varphi : K \mapsto K', \quad K' \mapsto K, \quad \overline{K} \mapsto \overline{K}, \quad \overline{K'} \mapsto \overline{K'}$$

$$\psi : K \mapsto K, \quad K' \mapsto K', \quad \overline{K} \mapsto \overline{K'}, \quad \overline{K'} \mapsto \overline{K}$$

для любого $K \in \{1, \dots, N\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геометрически операции φ и ψ означают следующее: если $X \in A_N$ есть обозначение ориентированного ребра в некотором su -цикле, то $\varphi(X)$ — обозначение другого ребра с тем же концом, а $\psi(X)$ — обозначение другого ребра с тем же началом, что и у ребра X (см. рис. 25(a,b)).

Отсюда сразу следует утверждение леммы — см. рис. 25(c), где $Y = \varphi(X)$, а $R_{C_2}(X) = \psi(R_{C_1}(Y))$. \square

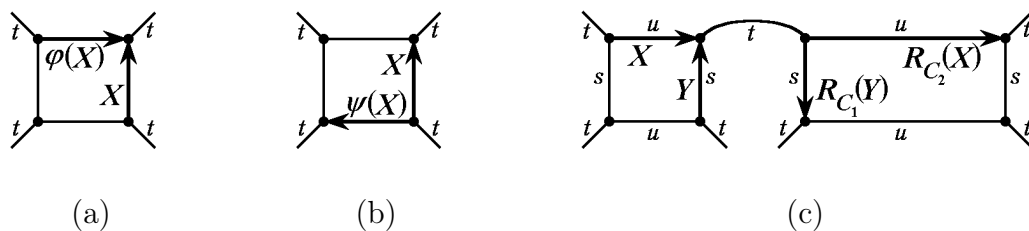


Рис. 25: Соответствие между двойственными строчками

Используя лемму 27, не сложно описать алгоритм построения некоторой строчки, двойственной к данной строчке. Например, строчку \tilde{C} , минимальную среди всех строчек, двойственных к данной строчке C , можно построить следующим образом. Сначала выписываем отрезки нулевой длины (столько, сколько их содержится в строчке C). Затем начинаем выписывать отрезки с символами из A_N : первый символ первого отрезка есть 1, следующий за ним символ есть $R_{\tilde{C}}(1)$, и т. д. пока не получим опять символ 1. Начиная выписывать следующий отрезок, среди всех таких символов X , для которых ни X , ни \bar{X} еще не использовались, выбираем наименьший — он будет первым символом отрезка. Если на каком-то шаге уже нельзя выбрать такой символ (это означает, что мы использовали $2N$ символов), то минимальная двойственная строчка построена.

Пример 11. Рассмотрим описанный алгоритм на примере кода $C = (0 \ 1 \ 0 \ 1' \ 2 \ 2')$ из примера 10: выписывая первый отрезок

$$1 \xrightarrow{\varphi} 1' \xrightarrow{R_C} 2 \xrightarrow{\psi} 2 \quad 2 \xrightarrow{\varphi} 2' \xrightarrow{R_C} 1' \xrightarrow{\psi} 1' \quad 1' \xrightarrow{\varphi} 1 \xrightarrow{R_C} 1 \xrightarrow{\psi} 1,$$

получаем $0 \ 1 \ 2 \ 1'$; выписывая второй отрезок

$$2' \xrightarrow{\varphi} 2 \xrightarrow{R_C} 2' \xrightarrow{\psi} 2',$$

получаем $\tilde{C} = (0 \ 1 \ 2 \ 1' \ 0 \ 2')$. Отметим, что \tilde{C} является минимальной двойственной к C строчкой, но не является минимальной строчкой в своем классе эквивалентности (которой в данном случае является исходная строчка C).

Замечание 31. Для каждого трехцветного графа T однозначно определен код $C(T)$, для которого также однозначно строится минимальная двойственная строчка \tilde{C} . Используя эти строчки C и \tilde{C} , можно задавать ориентации st -циклов и

tu -циклов графа T . Действительно, каждый отрезок допустимой строчки есть последовательность ориентированных ребер графа T (s -ребер для строчки C и u -ребер для строчки \tilde{C}), принадлежащих одному циклу и задающих на нем одну и ту же ориентацию. В дальнейшем мы будем предполагать, что для трехцветного графа T из списка отрезки соответствующего ему кода C задают ориентацию st -циклов, а отрезки минимальной двойственной к коду C строчки \tilde{C} задают ориентацию, противоположную ориентации tu -циклов.

Докажем, что в ориентируемом случае описанное правило определяет согласованные ориентации циклов графа T в смысле определения 29.

Лемма 28. *Пусть трехцветный граф T — есть инвариант потока Морса v на связной поверхности M . Код $C(T)$ не содержит символов с чертой тогда и только тогда, когда поверхность M ориентируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону верно даже более общее утверждение. А именно: если некоторая строчка $\tilde{C}(T)$ не содержит символов с чертой, то поверхность ориентируема. Действительно, используя ориентацию s -ребер графа T , соответствующую строчке $\tilde{C}(T)$, легко указать правильную (см. лемму 19) расстановку меток в вершинах графа T : $+1$ в началах всех s -ребер и -1 в концах.

Докажем теперь утверждение в другую сторону: если код $C(T)$ содержит символы с чертой, то поверхность M не ориентируема.

Пусть s -ребра графа T ориентированы в соответствии с кодом $C(T)$. Для каждого st -цикла графа T имеется пересекающийся с ним su -цикл с минимальным номером. В этом su -цикле есть отмеченная вершина (назовем ее *минимальной* отмеченной вершиной для данного st -цикла). Как легко понять, если номер этой вершины отличен от 1, то она не принадлежит данному st -циклу (иначе поверхность M была бы несвязной). Из определения кода также легко следует, что первый символ с чертой в строчке $C(T)$ не может иметь вид \bar{K} . Пусть \bar{K}' — первый символ с чертой в строчке $C(T)$. Для любого s -ребра в st -цикле, содержащем \bar{K}' , или в более раннем st -цикле рассмотрим путь вида $s-t-s-t-\dots-s-t-s-u$ от начала этого ребра до минимальной отмеченной вершины V для рассматриваемого st -цикла. Он, очевидно, четной длины. Вершина V также является началом некоторого s -ребра, поскольку \bar{K}' — первый символ с чертой в строчке $C(T)$. Будем повторять процедуру пока не

прийдем к началу ребра 1. Таким образом можно построить путь четной длины от начала ребра $\overline{K'}$ до начала ребра 1. Аналогично строится путь четной длины от начала ребра K до начала ребра 1. Объединение этих путей и u -ребра, соединяющего начало ребра $\overline{K'}$ и начало ребра K , есть цикл нечетной длины. \square

Из лемм 27 и 28 следует, что для ориентируемой поверхности правило, описанное в замечании 31, определяет согласованные ориентации циклов графа T (см. также замечания 26, 28).

Опишем теперь построение кода для данной v -молекулы W .

Рассматривая множество всех трехцветных графов, соответствующих седловым вершинам v -молекулы W , как один (возможно, несвязный) трехцветный граф T , занумеруем его su -циклы и выберем отмеченные вершины. Действуя по алгоритму из определения 44, построим допустимую строчку C_1 (используя s -ребра графа T) и двойственную ей строчку C_2 (используя u -ребра графа T). Далее, занумеруем (произвольно) все ребра v -молекулы W , соединяющие не седловые вершины: e_1, \dots, e_p ($p \geq 0$). Припишем в начале каждой из строчек C_1 и C_2 по p отрезков нулевой длины и будем считать, что отрезку, стоящему на i -м месте ($1 \leq i \leq p$), соответствует ребро e_i .

В результате мы получим пару двойственных строчек C_1, C_2 , причем каждому символу 0 в строчке C_1 соответствует некоторое ребро v -молекулы W , начало которого есть A -вершина или S -вершина, а каждому символу 0 в строчке C_2 соответствует ребро v -молекулы W , конец которого есть A -вершина или S -вершина. Чтобы построенная пара строчек C_1, C_2 однозначно определяла исходную v -молекулу W , осталось лишь указать тип вершины и метку (± 1) для каждого символа 0. Сделаем это следующим образом: 1) если метка на ребре равна (-1) , то вместо соответствующего символа 0 напишем $\tilde{0}$; 2) занумеровав все S -вершины, поставим индексы у символов 0 и $\tilde{0}$, равные номеру соответствующей S -вершины (символы 0, соответствующие A -вершинам, остаются без индексов).

Упорядочим новые символы вида 0_m и $\tilde{0}_m$ следующим образом:

$$0 < 0_1 < \tilde{0}_1 < 0_2 < \tilde{0}_2 \cdots < 1 < \bar{1} < 1' < \bar{1}' < \dots$$

Каждую полученную пару строчек C_1, C_2 рассмотрим как одну “длинную” строчку $D = (C_1)(C_2)$. Такие строчки можно сравнивать, используя определение 45.

Определение 49. Кодом $D(W)$ v -молекулы W называется строчка, являющаяся наименьшей среди всех строчек, которые можно сопоставить v -молекуле W , действуя по описанному выше алгоритму.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе для потоков Морса, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 22. Код $D(v)$ является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса–Смейла, т. е. потоки Морса–Смейла v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $D(v_1) = D(v_2)$.

Список кодов для потоков Морса–Смейла с ≤ 3 критическими элементами приведен в разделе 3.4.3 (см. таблицу 3).

3.4.3. Список потоков малой сложности

В таблице 2 приведен список всех потоков Морса с количеством седловых точек ≤ 2 на связных двумерных многообразиях.

Таблица 2: Список потоков Морса с числом седел ≤ 2

№	Код $C(v)$	Код $D(v)$	$-v$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	M^2
1	(0)	(0) (0)	1	[1, 0, 1]	S^2
2	(0 1 0 1)	(0 1 0 1') (0 1 1')	3	[2, 1, 1]	S^2
3	(0 1 1)	(0 1 1') (0 1 0 1')	2	[1, 1, 2]	S^2
4	(0 1 $\bar{1}$)	(0 1 $\bar{1}'$) (0 1 $\bar{1}'$)	4	[1, 1, 1]	$\mathbb{R}P^2$
5	(0 1 0 1 2 0 2)	(0 1 0 1' 2 0 2') (0 1 2 2' 1')	8	[3, 2, 1]	S^2
6	(0 1 0 1 2 2)	(0 1 0 1' 2 2') (0 1 2 1' 0 2')	6	[2, 2, 2]	S^2
7	(0 1 0 1 2 $\bar{2}$)	(0 1 0 1' 2 $\bar{2}'$) (0 1 2 $\bar{2}'$ 1')	9	[2, 2, 1]	$\mathbb{R}P^2$
8	(0 1 1 2 2)	(0 1 1' 2 2') (0 1 2 0 1' 0 2')	5	[1, 2, 3]	S^2
9	(0 1 1 2 $\bar{2}$)	(0 1 1' 2 $\bar{2}'$) (0 1 2 $\bar{2}'$ 0 1')	7	[1, 2, 2]	$\mathbb{R}P^2$
10	(0 1 $\bar{1}$ 2 $\bar{2}$)	(0 1 $\bar{1}'$ 2 $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{1}'$ 2 $\bar{2}'$)	10	[1, 2, 1]	K^2
11	(0 1 2 0 1 2)	(0 1 2 0 1' 2') (0 1 2' 0 1' 2)	11	[2, 2, 2]	S^2
12	(0 1 2 0 1 $\bar{2}$)	(0 1 2 0 1' $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}$ $\bar{1}'$ 2')	15	[2, 2, 1]	$\mathbb{R}P^2$
13	(0 1 2 1 2)	(0 1 2 1' 2') (0 1 2' 1' 2)	13	[1, 2, 1]	T^2
14	(0 1 2 1 $\bar{2}$)	(0 1 2 1' $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}$ $\bar{1}'$ $\bar{2}'$)	14	[1, 2, 1]	K^2
15	(0 1 2 $\bar{1}$ $\bar{2}$)	(0 1 2 $\bar{1}'$ $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}'$ 0 1' 2)	12	[1, 2, 2]	$\mathbb{R}P^2$

В первой колонке указан номер потока Морса. Все коды $C(v)$ можно упорядочить в соответствии с определением 45. Поэтому этот номер можно рассматривать как порядковый номер потока в списке “всех” потоков Морса.

Во второй колонке указан код $C(v)$ потока v . Как легко понять, символ вида K' или \bar{K}' в допустимой строчке, являющейся кодом некоторого потока Морса, всегда встречается после соответствующего символа K . Поэтому (для простоты) штрихи во второй колонке не проставлены.

В третьей колонке указан код $D(v)$ для данного потока Морса (рассматриваемого как поток Морса–Смейла общего вида). Отметим, что эта колонка приведена лишь для удобства вычисления различных характеристик потока, поскольку для потоков Морса код $D(v)$ однозначно вычисляется по своей “левой части” $C(v)$.

В остальных колонках таблицы 2 приведены некоторые характеристики потока v , которые, конечно, вычисляются по коду $C(v)$. В четвертой колонке указан номер кода (из этой же таблицы) для потока $-v$. Этот код $C(-v)$ есть минимальная допустимая строчка, эквивалентная “правой части” кода $D(v)$. В пятой колонке указано количество критических элементов потока v в виде $[m_0, m_1, m_2]$, где m_0, m_1, m_2 — число источников, седловых точек и стоков потока v соответственно. В последней колонке указан топологический тип многообразия M , на котором задан поток v (сфера S^2 , тор T^2 , проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$, бутылка Клейна K^2).

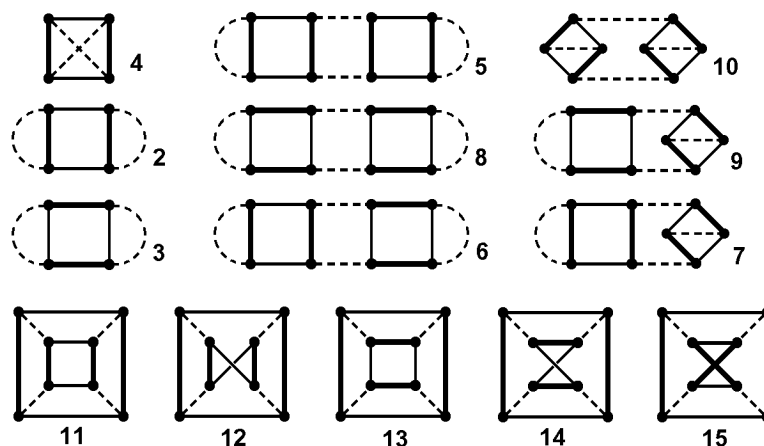


Рис. 26: Список трехцветных графов для потоков Морса с 1 и 2 седлами

На рис. 26 нарисованы соответствующие трехцветные графы. Жирными, тонкими и пунктирными линиями изображены соответственно s -ребра, u -ребра и t -ребра. Рядом с каждым графом указан его номер из таблицы 2.

Таблица 3: Потoki Морса–Смейла с числом критических элементов ≤ 3

№	Код $D(v)$	$-v$	$[(\cdot, \cdot, \cdot), \cdot, (\cdot, \cdot, \cdot)]$	M^2
1	$(0)(0)$	1	$[[1, 0, 0], 0, [1, 0, 0]]$	S^2
2	$(0)(0_1)$	3	$[[1, 0, 0], 0, [0, 0, 1]]$	$\mathbb{R}P^2$
3	$(0_1)(0)$	2	$[[0, 0, 1], 0, [1, 0, 0]]$	$\mathbb{R}P^2$
4	$(0_1)(0_1)$	4	$[[0, 0, 1], 0, [0, 0, 1]]$	K^2
5	$(0_1 0_1)(0_2 0_2)$	5	$[[0, 1, 0], 0, [0, 1, 0]]$	T^2
6	$(0_1 \tilde{0}_1)(0_2 \tilde{0}_2)$	6	$[[0, 1, 0], 0, [0, 1, 0]]$	K^2
7	$(\tilde{0}_1)(\tilde{0}_2)$	7	$[[0, 0, 1], 0, [0, 0, 1]]$	K^2
8	$(\tilde{0}_1 \tilde{0}_1)(\tilde{0}_2 \tilde{0}_2)$	8	$[[0, 1, 0], 0, [0, 1, 0]]$	T^2
9	$(0 0)(0_1 0_1)$	16	$[[2, 0, 0], 0, [0, 1, 0]]$	S^2
10	$(0 0_1)(0_2 0_2)$	17	$[[1, 0, 1], 0, [0, 1, 0]]$	$\mathbb{R}P^2$
11	$(0 \tilde{0}_1)(0_2 \tilde{0}_2)$	20	$[[1, 0, 1], 0, [0, 1, 0]]$	$\mathbb{R}P^2$
12	$(0 1 1)(0_1 1 0_1 1)$	24	$[[1, 0, 0], 1, [0, 1, 0]]$	K^2
13	$(0 1 1)(0_1 1 \tilde{0}_1 1)$	26	$[[1, 0, 0], 1, [0, 1, 0]]$	T^2
14	$(0 1 \bar{1})(0 1 \bar{1})$	14	$[[1, 0, 0], 1, [1, 0, 0]]$	$\mathbb{R}P^2$
15	$(0 1 \bar{1})(0_1 1 \bar{1})$	31	$[[1, 0, 0], 1, [0, 0, 1]]$	K^2
16	$(0_1 0_1)(0 0)$	9	$[[0, 1, 0], 0, [2, 0, 0]]$	S^2
17	$(0_1 0_1)(0 0_2)$	10	$[[0, 1, 0], 0, [1, 0, 1]]$	$\mathbb{R}P^2$
18	$(0_1 0_1)(0_2 0_3)$	22	$[[0, 1, 0], 0, [0, 0, 2]]$	K^2
19	$(0_1 0_1 1 \bar{1})(0_2 0_2 1 \bar{1})$	19	$[[0, 1, 0], 1, [0, 1, 0]]$	N^2
20	$(0_1 \tilde{0}_1)(0 \tilde{0}_2)$	11	$[[0, 1, 0], 0, [1, 0, 1]]$	$\mathbb{R}P^2$
21	$(0_1 \tilde{0}_1)(0_2 \tilde{0}_3)$	23	$[[0, 1, 0], 0, [0, 0, 2]]$	K^2
22	$(0_1 0_2)(0_3 0_3)$	18	$[[0, 0, 2], 0, [0, 1, 0]]$	K^2
23	$(0_1 \tilde{0}_2)(0_3 \tilde{0}_3)$	21	$[[0, 0, 2], 0, [0, 1, 0]]$	K^2
24	$(0_1 1 0_1 1)(0 1 1)$	12	$[[0, 1, 0], 1, [1, 0, 0]]$	K^2
25	$(0_1 1 0_1 1)(0_2 1 1)$	28	$[[0, 1, 0], 1, [0, 0, 1]]$	N^2
26	$(0_1 1 \tilde{0}_1 1)(0 1 1)$	13	$[[0, 1, 0], 1, [1, 0, 0]]$	T^2
27	$(0_1 1 \tilde{0}_1 1)(0_2 1 1)$	29	$[[0, 1, 0], 1, [0, 0, 1]]$	N^2
28	$(0_1 1 1)(0_2 1 0_2 1)$	25	$[[0, 0, 1], 1, [0, 1, 0]]$	N^2
29	$(0_1 1 1)(0_2 1 \tilde{0}_2 1)$	27	$[[0, 0, 1], 1, [0, 1, 0]]$	N^2
30	$(0_1 1 1)(\tilde{0}_2 1 \tilde{0}_2 1)$	36	$[[0, 0, 1], 1, [0, 1, 0]]$	N^2
31	$(0_1 1 \bar{1})(0 1 \bar{1})$	15	$[[0, 0, 1], 1, [1, 0, 0]]$	K^2
32	$(0_1 1 \bar{1})(0_2 1 \bar{1})$	32	$[[0, 0, 1], 1, [0, 0, 1]]$	N^2
33	$(\tilde{0}_1 0_1 1 \bar{1})(\tilde{0}_2 0_2 1 \bar{1})$	33	$[[0, 1, 0], 1, [0, 1, 0]]$	N^2
34	$(\tilde{0}_1 \tilde{0}_1)(\tilde{0}_2 \tilde{0}_3)$	35	$[[0, 1, 0], 0, [0, 0, 2]]$	K^2
35	$(\tilde{0}_1 \tilde{0}_2)(\tilde{0}_3 \tilde{0}_3)$	34	$[[0, 0, 2], 0, [0, 1, 0]]$	K^2
36	$(0_1 1 0_1 1)(\tilde{0}_2 1 1)$	30	$[[0, 1, 0], 1, [0, 0, 1]]$	N^2

В таблице 3 приведен список всех потоков Морса–Смейла с числом критических элементов ≤ 3 на связных двумерных многообразиях. Эта таблица устроена аналогично таблице 2. В четвертой колонке указано количество критических элементов потока v в виде $[(m_0, k_0, l_0), m_1, (m_2, k_2, l_2)]$, где m_0, m_1, m_2 — число источников, число седловых точек, число стоков потока v , через k_0 и l_0 обозначены соответственно число отталкивающих предельных циклов с ориентируемой и с неориентируемой окрестностью, через k_2, l_2 — аналогичные числа для притягивающих предельных циклов. Через N^2 в пятой колонке обозначено двумерное многообразие с эйлеровой характеристикой -1 (связная сумма трех проективных плоскостей). Отметим, что пересечение таблицы 2 и таблицы 3 состоит лишь из простейшего потока (номер **1** в обеих таблицах) и еще одного потока (**4** в таблице 2 и **14** в таблице 3).

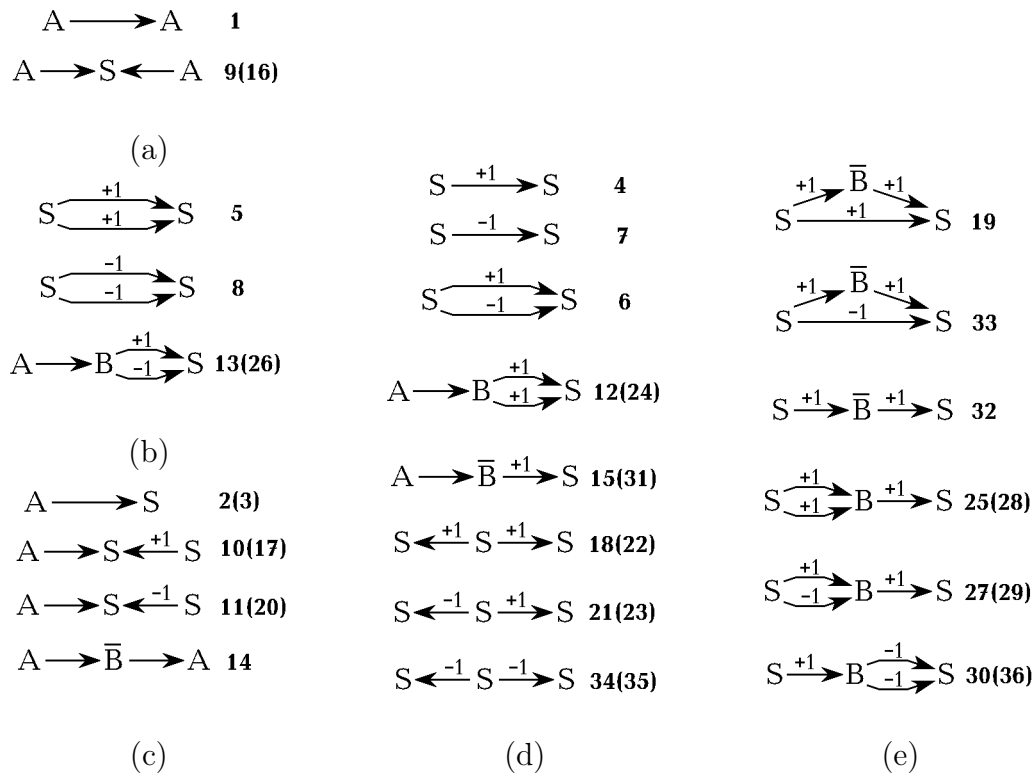


Рис. 27: Список v -молекул для потоков Морса–Смейла с числом критических элементов ≤ 3

Для всех кодов, перечисленных в таблице 3, на рис. 27 изображены v -молекулы. На рис. 27(a,b,c,d,e) нарисованы v -молекулы для многообразий $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2, K^2, N^2$ соответственно. В этих v -молекулах встречаются только три седловых v -атома, имеющие номера **2, 3, 4** в таблице 2. При изображении v -молекул v -атомы с номерами

2 и **3** (они отличаются лишь направлением потока) обозначены буквой B , а v -атом с номером **4** обозначен через \bar{B} . Для потоков v и $-v$ нарисована одна v -молекула (соответствующая потоку v). Если изменить ориентацию всех ребер этой v -молекулы, то получится v -молекула, соответствующая потоку $-v$ (на рис. 27 ее номер из таблицы 3 указан в скобках).

Глава 4. ТОПОЛОГИЯ МНОЖЕСТВА ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе мы рассматриваем множество особенностей интегрируемой гамильтоновой системы “в целом”, т. е. как подмножество в фазовом пространстве, состоящее из всех особых точек системы. Мы предполагаем, что фазовое пространство компактно, а все особенности системы невырождены. В этом случае множество особых точек системы имеет достаточно хорошую структуру, а именно, может быть представлено в виде объединения погруженных симплектических подмногообразий. В этой главе мы изучаем некоторые свойства этих подмногообразий для систем с двумя степенями свободы.

4.1. Особенности интегрируемой гамильтоновой системы как особенности набора сечений комплексного расслоения

Напомним сначала классический результат о геометрической интерпретации классов Чженя комплексного векторного расслоения, следуя книге [20] (где эта теорема называется формулой Гаусса–Бонне).

4.1.1. Формула Гаусса–Бонне для комплексных векторных расслоений

Пусть M — компактное ориентированное многообразие, $E \rightarrow M$ — комплексное векторное расслоение ранга k , а $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ — набор глобальных гладких сечений расслоения E . Определим *множество вырождения* $D_j(\mathbf{s})$ как множество точек $x \in M$, в которых s_1, \dots, s_j линейно зависимы, т. е.

$$D_j(\mathbf{s}) = \{x \mid s_1(x) \wedge \dots \wedge s_j(x) = 0\}.$$

Набор сечений назовем *общим*, если для каждого j сечение s_{j+1} трансверсально пересекает подпространство в пространстве расслоения E , порожденное сечения-

ми s_1, \dots, s_j , так что $D_{j+1}(\mathbf{s})$ вне $D_j(\mathbf{s})$ является подмногообразием коразмерности $2(k-j)$, и если, кроме того, интегрирование по $D_{j+1}(\mathbf{s}) \setminus D_j(\mathbf{s})$ определяет замкнутый поток. В этом случае на гладком многообразии $D_j \setminus D_{j-1}$ можно задать ориентацию. В окрестности точки $x_0 \in D_j \setminus D_{j-1}$ дополним набор сечений $e_1 = s_1, \dots, e_{j-1} = s_{j-1}$ до репера в E и напомним

$$s_j(x) = \sum_l f_l(x) \cdot e_l(x).$$

Множество D_j в окрестности точки x_0 является аналитическим подмножеством $\{f_j = \dots = f_k = 0\}$. Пусть Φ_j — такая ориентация на D_j (в окрестности точки x_0), что форма

$$\Phi_j \wedge \frac{i}{2}(df_j \wedge \bar{f}_j) \wedge \dots \wedge \frac{i}{2}(df_k \wedge \bar{f}_k) \quad (14)$$

положительна относительно заданной ориентации на M . Подмножество D_j вместе с ориентацией Φ_j на $D_j \setminus D_{j-1}$ представляет цикл в гомологиях, который называется *циклом вырождения* сечений \mathbf{s} .

Теорема 23. ([20]; формула Гаусса–Бонне) *Для общего набора сечений \mathbf{s} класса Чженя $c_r(E)$ двойствен по Пуанкаре циклу вырождения D_{k-r+1} сечений \mathbf{s} .*

4.1.2. Применение конструкции к интегрируемым гамильтоновым системам

Описанная выше конструкция устанавливает связь между множеством вырождения сечений комплексного векторного расслоения и классами Чженя этого расслоения. Для того чтобы применить ее к множеству особенностей интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, нужно ввести комплексную структуру на слоях касательного расслоения TM . Для симплектического многообразия это всегда можно сделать, причем однозначно с точностью до гомотопии (см. утверждение 1). После этого векторные поля $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ можно рассматривать как сечения комплексного векторного расслоения. При этом нас интересует зависимость этих сечений над \mathbb{R} , а не над \mathbb{C} , но оказывается, что для интегрируемой гамильтоновой системы это одно и то же (см. утверждение 2).

Прежде чем сформулировать необходимые утверждения, напомним следующее определение (см., например, [95]).

Определение 50. Почти комплексная структура на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) (т. е. тензорное поле J типа $(1, 1)$, удовлетворяющее в каждой точке $x \in M^{2n}$ условию $J_x^2 = -\text{id}_x$) называется *согласованной* с симплектической структурой ω , если билинейная форма $\langle u, v \rangle$ на касательных векторах к многообразию M^{2n} , определенная равенством $\langle u, v \rangle = \omega(u, Jv)$, является симметричной и положительно определенной (т. е. является римановой метрикой на M^{2n}).

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [95].

Утверждение 1. *Для любого симплектического многообразия существует почти комплексная структура, согласованная с симплектической структурой, причем множество таких почти комплексных структур стягиваемо.* \square

Таким образом, касательное расслоение к симплектическому многообразию можно рассматривать как комплексное расслоение, считая, что на нем задана какая-то почти комплексная структура, согласованная с симплектической формой. При этом классы Чженя этого расслоения не зависят от выбора почти комплексной структуры, так как множество таких структур стягиваемо. В дальнейшем, говоря о классах Чженя симплектического многообразия мы будем предполагать, что его касательное расслоение снабжено некоторой почти комплексной структурой, согласованной с симплектической формой.

Докажем теперь следующее простое утверждение.

Утверждение 2. *Пусть (V, ω) — вещественное линейное симплектическое пространство, а J — (постоянная) комплексная структура на V , согласованная с формой ω , т. е. оператор $J : V \rightarrow V$ удовлетворяет условиям $J^2 = -\text{id}$ и $\omega(v, Jv) > 0$ для любого ненулевого вектора $v \in V$. Рассмотрим набор векторов $U = \{u_1, \dots, u_l\}$ в пространстве V . Обозначим через $\text{rk}_{\mathbb{R}} U$ ранг системы векторов u_1, \dots, u_l , а через $\text{rk}_{\mathbb{C}} U$ — ранг этой системы векторов в пространстве V , рассматриваемом как комплексное пространство (относительно комплексной структуры J).*

Тогда если линейная оболочка L системы векторов u_1, \dots, u_l является изотропным подпространством в V (т. е. $\omega|_L \equiv 0$), то $\text{rk}_{\mathbb{R}} U = \text{rk}_{\mathbb{C}} U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ранг системы векторов U совпадает с размерностью их линейной оболочки L , т. е. $\text{rk}_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} L$. Далее, ранг системы векторов U в “комплексном” пространстве V совпадает с комплексной размерностью их линейной оболочки \tilde{L} , где \tilde{L} можно рассматривать как вещественное подпространство в пространстве V , натянутое на вектора $u_1, \dots, u_k, Ju_1, \dots, Ju_k$, т. е.

$$\text{rk}_{\mathbb{C}} U = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{L} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \tilde{L}.$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что $\tilde{L} = L \oplus J(L)$, что, очевидно, равносильно условию $L \cap J(L) = \{0\}$.

Предположим, что существует ненулевой вектор v , лежащий в пересечении $L \cap J(L)$. Тогда вектор Jv также принадлежит пересечению $L \cap J(L)$, так как $J^2(L) = L$. В частности, мы видим, что вектора v и Jv принадлежат изотропному подпространству L . Но это невозможно в силу условия $\omega(v, Jv) > 0$. \square

Итак, утверждения 1 и 2 позволяют применить конструкцию, описанную в предыдущем разделе, к набору коммутирующих векторных полей на симплектическом многообразии. Отметим, что даже для систем с невырожденными особенностями набор сечений $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$, вообще говоря, не является общим. В нашей ситуации роль цикла вырождения будет играть множество, являющееся замыканием множества особых точек фиксированного ранга.

4.1.3. Множество особенностей и классы Чженя

Для интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ обозначим через K_r множество всех ее особых точек ранга r . Из явного вида функций, указанных в теореме Элиассона (теорема 2), следует, что в случае, когда все особенности системы невырождены, множество K_r обладает следующим свойством.

Предложение 15. *Пусть все особые точки интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ невырождены. Тогда для каждого $r = 0, 1, \dots, n-1$ множество \overline{K}_r (замыкание множества особых точек ранга r) можно представить в виде набора погруженных связных симплектических подмногообразий размерности $2r$.* \square

Далее мы будем рассматривать гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. В этом случае невырожденными особенностями системы могут быть точки типа центр-центр, центр-седло, седло-седло, фокус-фокус (т. е. точки ранга 0, образующие множество K_0) и эллиптические или гиперболические точки ранга 1 (образующие множество K_1). При этом точки ранга 1 заполняют одномерные орбиты соответствующего гамильтонова действия, которые мы также будем называть эллиптическими или гиперболическими.

Переформулируем более подробно предложение 15 для случая двух степеней свободы.

Предложение 16. Пусть все особые точки интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, F_1, F_2) невырождены, а фазовое пространство M^4 компактно. Тогда множество K всех особых точек системы (т. е. объединение K_0 и K_1) можно представить в виде

$$K = (P_1 \cup \dots \cup P_l) \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_m) \cup (T_1 \cup \dots \cup T_s),$$

где T_1, \dots, T_s — изолированные особые точки типа фокус-фокус, а $P_1, \dots, P_l, Q_1, \dots, Q_m$ — замкнутые двумерные погруженные симплектические подмногообразия в M^4 , обладающие следующими свойствами:

- 1) все эллиптические одномерные орбиты содержатся в $\bigcup_{i=1}^l P_i$, все гиперболические одномерные орбиты содержатся в $\bigcup_{j=1}^m Q_j$;
- 2) все пересечения подмногообразий P_i, Q_j (в том числе их самопересечения) трансверсальны и происходят только в особых точках ранга 0, причем пересечения вида $P_i \cap P_j$ содержат только особые точки типа центр-центр, пересечения вида $P_i \cap Q_j$ содержат только особые точки типа центр-седло, пересечения вида $Q_i \cap Q_j$ содержат только особые точки типа седло-седло. \square

Таким образом, в случае двух степеней свободы множество особенностей интегрируемой гамильтоновой системы состоит из некоторого числа изолированных точек типа фокус-фокус и множества \overline{K}_1 , являющегося объединением замкнутых двумерных подмногообразий, погруженных в фазовое пространство M^4 . Будем называть множество \overline{K}_1 комплексом особенностей.

Зададим на подмногообразиях, образующих комплекс особенностей, ориентацию с помощью симплектической формы ω следующим образом: будем считать,

что ориентация на подмногообразиях P_i , заполненных эллиптическими орбитами, определяется формой ω , а на подмногообразиях Q_j , заполненных гиперболическими орбитами, формой $(-\omega)$. Подмногообразия P_i, Q_j , ориентированные указанным образом, реализуют некоторые двумерные классы целочисленных гомологий многообразия M^4 . Обозначим их через $[P_i], [Q_j] \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$. Обозначим сумму всех этих классов через $[\overline{K}_1]$:

$$[\overline{K}_1] = [P_1] + \dots + [P_l] + [Q_1] + \dots + [Q_m] \in H_2(M^4, \mathbb{Z}).$$

Ориентацию на многообразии M^4 зададим 4-формой $\omega \wedge \omega$.

Применяя теорему Элиассона, можно проверить, что выбранная ориентация на подмногообразиях P_i, Q_j соответствует правилу, заданному формулой (14).

Теорема 24. *Пусть все особенности интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, F_1, F_2) невырождены, а фазовое пространство M^4 компактно. Тогда класс $[\overline{K}_1] \in H_2(M^4, \omega)$ двойствен по Пуанкаре первому классу Чженя $c_1(M^4) \in H^2(M^4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно построить общий набор сечений s_1, s_2 касательного расслоения TM^4 , для которых цикл вырождения, определяемый множеством $D_2 = \{x \mid s_1(x) \wedge s_2(x) = 0\}$ будет совпадать с множеством \overline{K}_1 .

Если положить $s_i = \text{sgrad } F_i$, то этот набор сечений, вообще говоря, может не быть общим. Это связано с тем, что в этом случае мы имеем лишь включение $D_2 \setminus D_1 \subset K_1$ вместо необходимого равенства $D_2 \setminus D_1 = K_1$. Равенство означает, что сечение $s_1 = \text{sgrad } F_1$ зануляется лишь в точках из K_0 , но это не всегда так. Более того, не сложно привести пример системы, когда любая линейная комбинация $\lambda_1 \text{sgrad } F_1 + \lambda_2 \text{sgrad } F_2$ будет иметь нули вне множества K_0 .

Тем не менее, можно построить сечение s_1 , которое имеет нули в точности в точках из K_0 , например, следующим образом. Рассмотрим “комплексную” линейную комбинацию косых градиентов $\text{sgrad } F_i$. Например, положим $s_1 = \text{sgrad } F_1 + J \text{sgrad } F_2$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве утверждения 2, получаем, что условие $s_1(x) = 0$ равносильно условию $\text{sgrad } F_1(x) = \text{sgrad } F_2(x) = 0$, т. е. сечение s_1 не равно нулю вне K_0 . Условие транс-

версальности (общности) для указанного сечения s_1 равносильно невырожденности оператора линеаризации поля s_1 в особой точке ранга 0. Эту невырожденность можно проверить, используя симплектические координаты из теоремы Элиассона, в которых функции F_1 и F_2 имеют простой вид.

В качестве второго сечения s_2 можно взять, например, некоторую линейную комбинацию $\text{sgrad } F_1$ и $\text{sgrad } F_2$ с вещественными коэффициентами. Ясно, что тогда $D_2 \setminus D_1 = K_1$. Условие трансверсальности также следует из невырожденности особых точек (ранга 1), что можно проверить явным вычислением, используя координаты из теоремы Элиассона. \square

Замечание 32. Теорему 24 можно обобщить, ослабив условие невырожденности гамильтонова действия. А именно, можно допустить существование у гамильтонова действия, так называемых, простейших вырожденных одномерных орбит (см. [29]). В этом случае некоторые из двумерных подмногообразий, образующих комплекс особенностей, будут заполнены одномерными орбитами разных типов (как эллиптическими, так и гиперболическими). Однако указанное выше правило ориентации этих подмногообразий применимо и в этом случае. Иными словами, ориентация на всем подмногообразии будет корректно определена, если в точках, принадлежащих эллиптическим орбитам задавать ее формой ω , а в точках, принадлежащих гиперболическим орбитам — формой $(-\omega)$.

4.2. Топологические свойства комплекса особенностей для систем с двумя степенями свободы

Изучим теперь некоторые свойства двумерных подмногообразий, образующих комплекс особенностей.

4.2.1. Индексы пересечения

Рассмотрим погруженные подмногообразия Q_j , заполненные гиперболическими орбитами гамильтонова действия.

Теорема 25. Пусть все особые точки интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, F_1, F_2) невырождены. Любое подмногообразие Q_j (входящее в состав комплекса особенностей K и заполненное гиперболическими особыми точками ранга 1) имеет тривиальное нормальное расслоение в многообразии M^4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Q_j является симплектическим подмногообразием в (M^4, ω) (см. предложения 15 и 16), можно считать, что в каждой точке $x \in Q_j$ слой нормального расслоения к подмногообразию Q_j в M^4 является косоортогональным (относительно формы ω) дополнением к касательному пространству $T_x Q_j$.

Пусть $x \in Q_j$ — особая точка ранга 1. Тогда существует линейная комбинация интегралов $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, для которой $dF(x) = 0$, причем такая линейная комбинация определена однозначно с точностью умножения на ненулевую константу. Рассматривая линейризацию векторного поля $\text{sgrad } F$ в точке x , получаем оператор A_x , принадлежащий алгебре Ли $\text{sp}(T_x M^4)$ группы симплектической преобразований касательного пространства $T_x M^4$. Поскольку x — невырожденная особая точка ранга 1, этот оператор имеет два нулевых и два ненулевых, противоположных по знаку собственных значения. Гиперболичность точки x означает, что эти ненулевые собственные значения вещественны. Поэтому им соответствуют два одномерных собственных подпространства.

Из определения оператора A_x следует, что эти собственные подпространства лежат в косоортогональном дополнении к $T_x Q_j$. Действительно, касательное пространство $T_x Q_j$ является симплектическим, инвариантно относительно оператора A_x и содержит собственный вектор соответствующий нулевому собственному значению (вектор, касательный к одномерной орбите, проходящей через x). Из этих условий следует, что касательное пространство $T_x Q_j$ соответствует паре нулевых собственных значений оператора A_x , но для любого оператора из $\text{sp}(T_x M^4)$ подпространства, соответствующие двум его собственным значениям λ и μ таким, что $\lambda + \mu \neq 0$, косоортогональны.

Итак, в каждом слое нормального расслоения к подмногообразию Q_j в многообразии M^4 имеются два одномерных подпространства. На всем многообразии Q_j они образуют одно или два одномерных подрасслоения (двумерного) нормально-

го расслоения. Рассматривая подходящее накрытие $\pi : \tilde{Q}_j \rightarrow Q_j$, можно добиться того, чтобы одномерные расслоения над \tilde{Q}_j , индуцированные имеющимися двумя одномерными расслоениями (или одним одномерным расслоением) над Q_j при помощи отображения π , были ориентируемы (см., например, [36]). Тогда двумерное расслоение над \tilde{Q}_j , индуцированное нормальным расслоением над Q_j при помощи того же накрытия π , будет тривиально, так как оно ориентируемо и обладает всюду ненулевым сечением. Отсюда следует, что и исходное расслоение тривиально. \square

Сформулируем теперь некоторые утверждения об индексах пересечения подмногообразий P_i, Q_j . Точнее, мы будем рассматривать индексы пересечения соответствующих классов гомологий $[P_i], [Q_j] \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$ относительно формы пересечения $H_2(M^4, \mathbb{Z}) \times H_2(M^4, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Будем обозначать индекс пересечения классов гомологий $\alpha, \beta \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$ через $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$. Обозначим также число точек самопересечения (погруженных) подмногообразий P_i, Q_j через n_{P_i}, n_{Q_j} соответственно. Кроме того будем обозначать эйлерову характеристику многообразия X через $\chi(X)$.

Теорема 26. Пусть $K = (P_1 \cup \dots \cup P_l) \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_m) \cup (T_1 \cup \dots \cup T_s)$ — множество особенностей интегрируемой гамильтоновой системы на компактном симплектическом многообразии (M^4, ω) (в обозначениях предложения 16). Для индексов пересечения классов гомологий $[P_i], [Q_j]$ выполнены следующие соотношения:

- 1) $[P_i] \cdot [P_j] \geq 0$, $[P_i] \cdot [Q_j] \leq 0$, $[Q_i] \cdot [Q_j] \geq 0$;
- 2) $[K] \cdot [P_i] = \chi(P_i) + [P_i] \cdot [P_i] - 2n_{P_i}$;
- 3) $[K] \cdot [Q_j] = -\chi(Q_j)$;
- 4) $\chi(P_1) + \dots + \chi(P_l) - \chi(Q_1) - \dots - \chi(Q_m) = 2(\chi(M^4) - s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Требуемые неравенства следуют из того, что для каждого из рассматриваемых случаев знак пересечения соответствующих подмногообразий в любой точке их пересечения такой, какой нужно. Рассмотрим, например, пересечение подмногообразий P_i и P_j (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Согласно предложению 16 подмногообразия P_i и P_j трансверсально пересекаются в некоторых точках типа центр-центр. Рассмотрим касательные пространства к подмногообразиям P_i и P_j в точке x их пересечения как подпространства простран-

ства $T_x M^4$. Очевидно, эти подпространства инвариантны относительно гамильтонова действия. Они отвечают различным парам ненулевых собственных значений операторов из картановской подалгебры, соответствующей рассматриваемой особой точке x ранга 0. Отсюда ясно, что эти подпространства косоортогональны относительно формы ω (это следует и из теоремы Элиассона).

(Локальный) индекс пересечения подмногообразий P_i и P_j в точке x можно определить следующим образом. Выберем в подпространствах $T_x P_i$ и $T_x P_j$ пары векторов e_1, e_2 и e_3, e_4 соответственно, которые задают положительные ориентации в этих подпространствах (т. е. для векторов e_1, e_2, e_3, e_4 должны быть выполнены условия $\omega(e_1, e_2) > 0$ и $\omega(e_3, e_4) > 0$, так как ориентации на подмногообразиях P_i и P_j задаются формой ω). Тогда индекс пересечения подмногообразий P_i и P_j в точке x равен знаку выражения $\omega \wedge \omega(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega \wedge \omega(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \omega(e_1, e_2)\omega(e_3, e_4) - \omega(e_1, e_3)\omega(e_2, e_4) + \omega(e_1, e_4)\omega(e_2, e_3) = \\ &= \omega(e_1, e_2)\omega(e_3, e_4), \end{aligned}$$

так как вектора e_1, e_2 косоортогональны векторам e_3, e_4 . Последнее выражение положительно в силу выбора векторов e_1, e_2, e_3, e_4 , следовательно в каждой точке пересечения подмногообразий P_i и P_j знак равен $+1$. Складывая эти знаки по всем точкам пересечения получим требуемое неравенство.

Докажем утверждение 2). Предположим сначала, что $n_{P_i} = 0$. Тогда доказываемое равенство можно записать следующим образом:

$$\chi(P_i) = [P_i] \cdot ([P_1] + \dots + [P_{i-1}] + [P_{i+1}] + \dots + [P_l] + [Q_1] + \dots + [Q_m]).$$

Эйлерову характеристику $\chi(P_i)$ многообразия P_i можно рассматривать как сумму индексов особых точек векторного поля, направленного вдоль одномерных орбит. Рассмотрим в качестве такого поля v линейную комбинацию полей $\text{sgrad } F_1$ и $\text{sgrad } F_2$, которая зануляется лишь на конечном числе (замкнутых) одномерных орбит, лежащих в P_i . Существование такой линейной комбинации следует из невырожденности особых точек ранга 0 и компактности подмногообразий P_i .

Итак, векторное поле v равно нулю в особых точках ранга 0 и, возможно, на некоторых одномерных орбитах (при этом оно может обращаться в нуль только на всей орбите сразу). Тогда нули поля v , расположенные на одномерных орбитах, не будут

давать вклад в эйлерову характеристику. Остается лишь заметить, что фактически в доказываемом равенстве слева и справа суммируются одни и те же числа (равные ± 1), которые “занумерованы” особыми точками ранга 0, содержащимися в многообразии P_i . Действительно, каждая особая точка типа центр-центр, лежащая на многообразии P_i , дает вклад $(+1)$ в правую часть равенства как точка пересечения с некоторым подмногообразием $P_{i'}$ и одновременно дает вклад $(+1)$ в левую часть равенства как эллиптическая особая точка векторного поля v . Точки типа седло-центр, лежащие на многообразии P_i , аналогичным образом прибавляют по (-1) к каждой из частей равенства. Точек типа седло-седло многообразии P_i содержать не может (см. предложение 16).

В случае, когда $n_{P_i} \neq 0$, каждой точке самопересечения соответствуют две эллиптические особые точки векторного поля v , и тем самым каждая точка самопересечения добавляет два раза по $(+1)$ в левую часть равенства.

Равенство 3) доказывается аналогично с учетом того, что в данном случае нормальное расслоение тривиально, откуда следует равенство $[Q_j] \cdot [Q_j] = 2n_{Q_j}$

Равенство 4) можно доказать следующим образом. Просуммировав все равенства 2) и 3), после простых преобразований получаем, что равенство 4) сводится к утверждению о том, что эйлерова характеристика многообразия M^4 равна

$$|\text{центр-центр}| + |\text{седло-седло}| + |\text{фокус-фокус}| - |\text{седло-центр}| ,$$

где через $|*|$ обозначено количество особых точек данного типа на всем многообразии M^4 . Последнее утверждение можно доказать, построив векторное поле на M^4 (имеющее особенности только в точках ранга 0), для которого индексы точек типа центр-центр, седло-седло и фокус-фокус равны $+1$, а индексы точек типа седло-центр равны -1 . В качестве такого поля можно взять поле $\text{sgrad } F_1 + J \text{sgrad } F_2$, построенное при доказательстве теоремы 24. \square

Замечание 33. Из доказательства утверждения 4) теоремы 26 видно, что его можно переформулировать следующим образом: класс Эйлера касательного расслоения TM^4 (или класс Чженя $c_2(M^4)$) двойствен по Пуанкаре 0-циклу $[K_0]$, образованному особыми точками ранга 0, которым приписаны знаки в соответствии с их типом (-1 точкам типа седло-седло и $+1$ остальным).

4.2.2. Системы с невырожденными особенностями на $\mathbb{C}P^2$

В работах [90] и [112] исследовались слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы без гиперболических особенностей. Такие слоения называются почти торическими слоениями. В этих работах были описаны все возможные тотальные пространства таких слоений (почти торические четырехмерные многообразия) и базы соответствующих им почти торических слоений. В частности, было показано, что для $\mathbb{C}P^2$ имеется всего четыре возможности: базой почти торического слоения является двумерный диск, граница которого имеет k “углов” ($k = 0, 1, 2, 3$) и внутри которого имеется $3 - k$ “узлов”, соответствующих фокусным особенностям. Обозначим такую базу через D_k^2 .

Рассмотрим $\mathbb{C}P^2$ как 4-мерное симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой ω_0 (индуцированной имеющейся комплексной структурой). Из теоремы 25 следует, что у интегрируемой гамильтоновой системы на $(\mathbb{C}P^2, \omega_0)$ с невырожденными особенностями не может быть гиперболических особенностей. Действительно, любое подмногообразие Q_j имеет тривиальное нормальное расслоение и реализует нетривиальный цикл в гомологиях фазового пространства. Но в $\mathbb{C}P^2$ таких подмногообразий не существует, поскольку для $\mathbb{C}P^2$ форма пересечения, определенная на двумерных гомологиях, положительно определена (если γ — образующая в $H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$, то $\gamma \circ \gamma = 1$).

Аналогичным образом можно показать, что интегрируемая гамильтонова система на $(\mathbb{C}P^2, \omega_0)$ не может иметь фокусные особенности сложности больше 1. Действительно, особый слой фокусной особенности сложности больше 1 содержит вложенную лагранжеву сферу (см. [12], [74]). Индекс самопересечения лагранжевой сферы равен 2 (поскольку ее окрестность симплектоморфна кокасательному расслоению; см. [95]), но таких подмногообразий в $\mathbb{C}P^2$ также не существует. Действительно, если лагранжева сфера реализует цикл $k\gamma$ в $H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$, то $(k\gamma) \circ (k\gamma) = k^2 \neq 2$.

Учитывая эти замечания и классификацию почти торических слоений из работ [90] и [112], получаем следующее утверждение.

Теорема 27. *Существует ровно четыре типа интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на симплектическом многообразии $(\mathbb{C}P^2, \omega_0)$. Соответствующие им слоения Лиувилля являются почти торическими слоениями с базой D_k^2 , где $k = 0, 1, 2, 3$.* □

Глава 5. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Различные интегрируемые системы, возникающие в геометрии, механике, математической физике, исследовались с топологической точки зрения многими авторами. Один из наиболее разработанных подходов к исследованию топологии интегрируемых гамильтоновых систем подробно изложен в книге [12]. В частности, там определяются инварианты, описывающие топологию особенностей и изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (молекулы или инварианты Фоменко–Цишанга).

В этой главе исследована топология нескольких конкретных интегрируемых систем. Каждый из выбранных примеров обладает некоторыми специфическими особенностями, что позволяет продемонстрировать применение различных методов, применяемых при топологическом анализе интегрируемых систем.

В разделе 5.1 рассматривается так называемый случай Соколова. Этот интегрируемый случай был обнаружен сравнительно недавно. Система задана на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $so(4)$, ее гамильтониан квадратичен, а дополнительный интеграл имеет степень 4.

В разделе 5.2 исследуется задача двух центров на двумерной сфере. Гамильтонионы поля, задающие эту систему не полны. Однако можно провести регуляризацию и после этого применить общую теорию.

В разделе 5.3 рассматривается система, описывающая многомерное твердое тело (волчок Эйлера–Манакова). При ее исследовании существенно используется тот факт, что она обладает бигамильтоновой структурой. Применяемый подход может быть использован для исследования топологии других бигамильтоновых систем.

5.1. Интегрируемый случай Соколова на $so(4)$

Новые интегрируемые случаи для уравнений Эйлера на семействе шестимерных алгебр Ли (содержащем $so(4)$, $so(3, 1)$, $e(3)$) с квадратичным гамильтонианом и ин-

тегралом четвертой степени были обнаружены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым, В. В. Соколовым в работах [14], [56], [57] (см. также [15]). В этом разделе мы рассматриваем один из этих случаев, который будем называть “случаем Соколова”.

В работах [64], [65] Г. Хагигатдуст исследовал топологию изоэнергетических поверхностей для интегрируемых случаев Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, т. е. совместных поверхностей уровня инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ и гамильтониана для этих случаев. В частности, им были вычислены индексы критических точек гамильтониана (как функции на 4-мерных орбитах алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$), а также описан топологический тип изоэнергетических поверхностей для всех значений энергии и параметров, задающих орбиту (см. рис. 28).

В разделах 5.1.1 и 5.1.2 мы излагаем некоторые необходимые для дальнейшего результаты, полученные Г. Хагигатдустом (и опубликованные в совместной работе с автором [66]). Результаты автора изложены в разделе 5.1.3: найдены типы критических точек ранга 0 (теорема 31), определены перестройки торов Лиувилля (теорема 32), а также вычислены инварианты Фоменко (см. таблицу 4 в теореме 33). Тем самым получена классификация изоэнергетических поверхностей для этого случая с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (см. рис. 32).

5.1.1. Основные определения и описание системы

Пусть \mathfrak{g} — конечномерная алгебра Ли, а \mathfrak{g}^* — соответствующая коалгебра (пространство линейных функций на \mathfrak{g}). Рассмотрим базис e_1, \dots, e_n в алгебре \mathfrak{g} . Пусть c_{ij}^k — структурные константы алгебры \mathfrak{g} в этом базисе:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Рассмотрим линейные координаты x_1, \dots, x_n на \mathfrak{g}^* , соответствующие базису e_1, \dots, e_n .

Определение 51. Скобка Пуассона на пространстве \mathfrak{g}^* , заданная формулой

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f, g — гладкие функции на \mathfrak{g}^* , называется *скобкой Ли–Пуассона* для алгебры Ли \mathfrak{g} .

Определение 52. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на \mathfrak{g}^* , где H — гладкая функция на \mathfrak{g}^* , называются *уравнениями Эйлера* для алгебры Ли \mathfrak{g} .

Хорошо известно (см., например, [60]), что динамическая система, задаваемая уравнениями Эйлера, является гамильтоновой (с гамильтонианом H) на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли \mathfrak{g} . Многие динамические системы, описывающие задачи механики и физики, могут быть записаны в виде уравнений Эйлера для некоторой алгебры Ли. Например, различные задачи о движении твердого тела описываются уравнениями Эйлера для алгебры Ли $\mathfrak{e}(3)$ (см. [60], [12], [15]).

Рассмотрим на пространстве $\mathfrak{so}(4)^*$, двойственном к алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, линейные координаты $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$, в которых скобка Ли–Пуассона имеет вид

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} S_k. \quad (15)$$

где ϵ_{ijk} — знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$. Координаты (S_1, S_2, S_3) и (R_1, R_2, R_3) удобно рассматривать как компоненты двух трехмерных векторов \mathbf{S} и \mathbf{R} .

Уравнения Эйлера на $\mathfrak{so}(4)^*$ с гамильтонианом H имеют вид

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}.$$

Скобка (15) обладает двумя функциями Казимира

$$f_1 = \mathbf{S}^2 + \mathbf{R}^2, \quad f_2 = \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle,$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^3 (в частности, \mathbf{S}^2 и \mathbf{R}^2 — скалярные квадраты векторов \mathbf{S} и \mathbf{R}). Функции f_1 и f_2 коммутируют относительно скобки Ли–Пуассона (15) со всеми функциями, их совместные поверхности уровня

$$M_{c,g} = \{(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \mid f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = c, f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g\}$$

являются орбитами коприсоединенного представления. Ограничение скобки (15) на $M_{c,g}$ невырождено, т. е. задает на орбитах симплектическую структуру. При выполнении условия $2|g| < |c|$ эти орбиты являются 4-мерными подмногообразиями

в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, диффеоморфными произведению двумерных сфер $S^2 \times S^2$, а в случае $2|g| = |c|$ (особые орбиты) они диффеоморфны двумерной сфере S^2 .

Мы будем исследовать интегрируемый случай Соколова для уравнений Эйлера на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$. Гамильтониан H и дополнительный интеграл K для этого случая имеют следующий вид [56]:

$$H = \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \quad (16)$$

$$K = (S_1 R_2 - S_2 R_1)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2) - \alpha(S_2 R_3 - S_3 R_2)^2 + \frac{1}{\alpha}(S_3 R_1 - S_1 R_3)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)(S_1 R_2 - S_2 R_1)^2. \quad (17)$$

Замечание 34. При умножении всех координат на некоторую константу $(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \lambda(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ орбиты $M_{c,g}$ переходят в орбиты $M_{\lambda^2 c, \lambda^2 g}$. Поскольку гамильтониан (16) и интеграл (17) рассматриваемой системы — однородные функции координат, при этом преобразовании они также умножаются на константу. Таким образом, случай произвольного c сводится к случаю $c = 1$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь орбиты $M_{1,g}$. Более того, без ограничения общности можно предполагать, что $g \geq 0$, поскольку, например, при замене координат $(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \rightarrow (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$ инвариант f_1 , гамильтониан H и интеграл K сохраняются, а инвариант f_2 меняет знак.

Аналогичным образом можно уменьшить количество рассматриваемых случаев для параметра α . При замене $S_1 \rightarrow -S_1$, $R_1 \rightarrow -R_1$ и $\alpha \rightarrow -\alpha$, а также при замене $S_1 \leftrightarrow S_2$, $R_1 \leftrightarrow R_2$ и $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ инварианты f_1 и f_2 сохраняются, а гамильтониан H и интеграл K лишь меняют знак (что не влияет на топологию рассматриваемой системы).

Итак, в дальнейшем мы будем предполагать, что параметры рассматриваемой интегрируемой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) на орбитах $M_{c,g}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c = 1, \quad 0 \leq g < \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Важной характеристикой интегрируемой гамильтоновой системы является топология поверхностей уровня ее гамильтониана. Они называются *изоэнергетическими поверхностями*.

Если система задана уравнениями Эйлера для алгебры Ли $so(4)$, то ее изоэнергетические поверхности зависят от значения гамильтониана h и от параметров, задающих орбиту. Таким образом, в нашем случае изоэнергетические поверхности $Q_{g,h}^3$ — это совместные поверхности уровня инвариантов f_1, f_2 алгебры Ли $so(4)$ и гамильтониана (16), заданных на пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, т. е.

$$Q_{g,h}^3 = \{(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \mid f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = 1, f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g, H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = h\}.$$

В работах [64], [65] (см. также [66]) доказана следующая теорема, описывающая топологию изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ гамильтониана (16) при различных значениях параметров g и h .

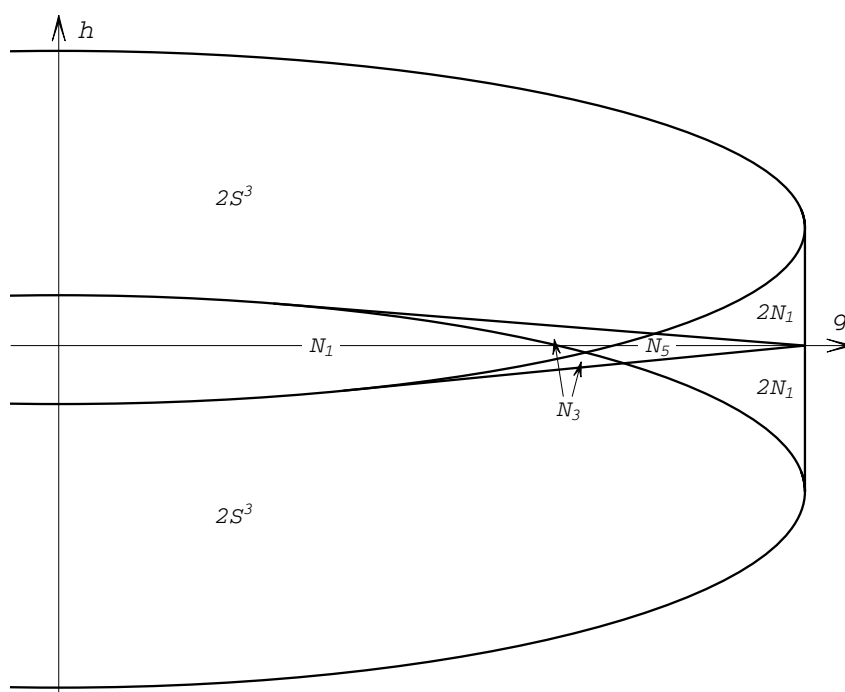


Рис. 28: Топологический тип изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$

Теорема 28. *Связные компоненты изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ гамильтониана (16) при различных значениях g и h гомеоморфны либо трехмерной сфере S^3 , либо связной сумме нескольких экземпляров многообразия $S^1 \times S^2$. Более точно, различным областям на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$, указанным на рис. 28, соответствуют следующие многообразия $Q_{g,h}^3$:*

$$2S^3, \quad N_1, \quad 2N_1, \quad N_3, \quad N_5,$$

где $N_k = \#_{1}^k S^1 \times S^2$.

□

Замечание 35. На рис. 28 изображена лишь полуплоскость $g \geq 0$, поскольку системы на орбитах $M_{1,g}$ и $M_{1,-g}$ одинаковы (см. замечание 34), т. е. набор областей в полуплоскости $g \leq 0$ симметричен указанному относительно оси h . Кроме того, приведенный рисунок соответствует случаю $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ исчезает одна из областей с изоэнергетической поверхностью N_3 на рис. 28 (см. также рис. 32, содержащий более подробную информацию о топологии рассматриваемой системы).

Топология изоэнергетических поверхностей гамильтоновой системы зависит лишь от ее гамильтониана. Более полную информацию о топологии интегрируемой гамильтоновой системы можно получить исследуя соответствующее ей слоение Лиувилля (определение 3) на фазовом пространстве системы.

Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы имеется полный топологический инвариант, классифицирующий изоэнергетические поверхности (с боттовскими интегралами) с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Этот инвариант, впервые описанный в [63], называется *инвариантом Фоменко–Цишанга* или *меченой молекулой* (см. также [12]). Он представляет собой граф (называемый “молекулой”), вершины которого (“атомы”) соответствуют особым слоям слоения Лиувилля, а ребра — однопараметрическим семействам регулярных слоев (т. е. торов Лиувилля). При этом ребра и некоторые вершины молекулы снабжены числовыми метками. Эти метки содержат информацию о склейке однопараметрических семейств торов Лиувилля в окрестности особых слоев.

Молекулу без меток иногда называют *инвариантом Фоменко*. Этот инвариант классифицирует изоэнергетические поверхности с точностью до *грубой лиувиллевой эквивалентности* (см. [62], [12]), для которой допустимой операцией является разрезание изоэнергетической поверхности по тору Лиувилля и склейка полученных граничных торов по некоторому диффеоморфизму.

Для исследования топологии интегрируемой гамильтоновой системы (в частности, для вычисления ее инвариантов Фоменко) полезно сначала найти критические точки отображения момента и построить бифуркационную диаграмму (это сделано в разделе 5.1.2). После этого необходимо исследовать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента и построить соответствующие молекулы (см. раздел 5.1.3).

5.1.2. Бифуркационные диаграммы отображения момента для случая Соколова

Рассматриваемая система является гамильтоновой на 4-мерных многообразиях $M_{1,g}$. Для каждого значения параметра g гамильтониан и дополнительный интеграл системы являются ограничениями функций (16) и (17) на соответствующее многообразие $M_{1,g}$. Мы будем обозначать эти ограничения также через H и K (как и исходные функции в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$). Соответствующее семейство отображений момента имеет вид

$$\Phi_g : M_{1,g} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k), \quad x \mapsto (H(x), K(x)). \quad (18)$$

Таким образом, отображение Φ_g зависит от параметра g , задающего орбиту, а также от параметра α .

Ясно, что для рассматриваемой системы критические точки отображения момента Φ_g имеют ранг 0 или 1. Опишем сначала критические точки ранга 0 (они соответствуют положениям равновесия системы).

Предложение 17. *Множество всех критических точек ранга 0 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) является объединением следующих (двупараметрических) семейств в пространстве $\mathfrak{so}(4)^* = \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$:*

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm S_2, \pm S_3)$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - S_1^2 - \frac{2}{\alpha} R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm S_1, \frac{2}{\alpha} S_1, \pm S_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты векторного поля $\text{sgrad } H$ относительно скобки Ли–Пуассона (15) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 R_3 + S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{1}{\alpha} S_1 R_2\right) + \\ & & & + R_1^2 + R_2^2 - S_1^2 - S_2^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда сразу видно, что в любой критической точке ранга 0 либо $S_1 = 0$, либо $S_2 = 0$. Приравнивая к нулю оставшиеся координаты и перебирая все возможные варианты, получаем указанные 5 случаев. После этого легко проверяется, что в указанных точках $\text{sgrad } K$ также равен нулю. \square

В предложении 17 множество всех критических точек ранга 0 рассматривается как подмножество во всем пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$. Каждое из указанных пяти семейств, пересекаясь с конкретной орбитой $M_{1,g}$, дает положения равновесия соответствующей интегрируемой системы на орбите. Учитывая уравнения, задающие орбиту, для каждого значения g получаем множество критических точек ранга 0 на орбите $M_{1,g}$ и их образы при отображении момента Φ_g . Ответ приведен в следующем утверждении.

Предложение 18. *Критические точки ранга 0 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) на орбите $M_{1,g}$ перечислены ниже в виде пяти серий, соответствующих пяти семействам из предложения 17, причем для каждой точки x из этого списка указаны значение гамильтониана $h = H(x)$ и значение интеграла $k = K(x)$:*

1) при всех $0 \leq g < \frac{1}{2}$ имеется 4 точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \quad \text{где} \quad S_3^2 + R_3^2 = 1, \quad S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = 0$ и $k = 0$;

2) при всех $0 \leq g < \frac{1}{2}$ имеется 4 точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{S_2}{\alpha}, \frac{g}{S_2}, 0\right), \quad \text{где} \quad S_2^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1-4g^2)}{4(\alpha^2+1)}},$$

при этом $h = \frac{\alpha \pm \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2}$ и $k = \frac{1}{4\alpha}(1-4g^2)$;

3) при $g > \frac{1}{2+4\alpha^2}$ имеются 4 точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, S_2, S_3), \quad \text{где} \quad S_2^2 = \frac{1}{4\alpha^2}(1-2g) \quad \text{и} \quad S_3^2 = \frac{g(2+4\alpha^2)-1}{4\alpha^2},$$

при этом $h = -\frac{1}{4\alpha}(1-2g)$ и $k = \frac{1}{4\alpha}(1-4g^2)$;

4) при всех $0 \leq g < \frac{1}{2}$ имеется 4 точки вида

$$\left(S_1, 0, 0, \frac{g}{S_1}, \frac{\alpha}{2S_1} - \alpha S_1, 0\right), \quad \text{где} \quad S_1^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4g^2}{4(\alpha^2+1)}},$$

при этом $h = \frac{-1 \mp \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha}$ и $k = -\frac{\alpha}{4}(1-4g^2)$;

5) при $g > \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4}$ имеются 4 точки вида

$$\left(S_1, 0, S_3, S_1, \frac{2}{\alpha}S_1, S_3\right), \quad \text{где} \quad S_1^2 = \frac{\alpha^2}{4}(1-2g) \quad \text{и} \quad S_3^2 = \frac{g(2\alpha^2+4) - \alpha^2}{4},$$

при этом $h = \frac{\alpha}{4}(1-2g)$ и $k = -\frac{\alpha}{4}(1-4g^2)$. \square

Рассмотрим теперь критические точки ранга 1.

Кривые, составляющие бифуркационную диаграмму отображения момента, являются образами критических точек ранга 1. В этих точках косые градиенты $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ линейно зависимы, но хотя бы один из них не равен нулю. Отметим, что бифуркационную диаграмму для рассматриваемой системы можно построить и не выписывая явные формулы для критических точек ранга 1 (см. лемму 32 ниже), но этого недостаточно для нахождения перестроек торov Лиувилля. Поэтому мы приведем здесь явное описание этих точек.

Выражение для $\text{sgrad } K$ в координатах \mathbf{S}, \mathbf{R} достаточно громоздко. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, введем следующие обозначения:

$$Q_1 = S_2R_3 - S_3R_2, \quad Q_2 = S_3R_1 - S_1R_3, \quad Q_3 = S_1R_2 - S_2R_1, \quad (20)$$

$$q = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2. \quad (21)$$

Если рассматривать (Q_1, Q_2, Q_3) как координаты вектора \mathbf{Q} , то $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \times \mathbf{R}$ (где \times — векторное произведение), а $q = \mathbf{S}^2 - \mathbf{R}^2$.

Используя эти обозначения, гамильтониан (16) и интеграл (17) можно записать в следующем виде:

$$H = \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + Q_3, \quad (22)$$

$$K = Q_3q - \alpha Q_1^2 + \frac{1}{\alpha} Q_2^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) Q_3^2. \quad (23)$$

В “переменных” (\mathbf{S}, \mathbf{Q}) гамильтониан и интеграл имеют простой вид, однако на всем пространстве $\text{so}(4)^*$ их нельзя рассматривать как систему координат, поскольку имеется очевидное соотношение $\langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle \equiv 0$. Тем не менее, оказывается, что это не мешает использовать их как координаты при исследовании особенностей отображения момента. Сформулируем необходимые утверждения.

Пусть $\phi : \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ — отображение, заданное формулами (20). При этом отображении каждая орбита $M_{1,g}$ переходит в некоторое множество

$\phi(M_{1,g}) \subset \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$. Поскольку гамильтониан H и интеграл K выражаются через \mathbf{S} и \mathbf{Q} (см. формулы (22) и (23)), отображение момента (18) можно представить как композицию $\Phi_g = \Psi_g \circ \phi$, где

$$\Psi_g : \phi(M_{1,g}) \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$$

задается формулами (22), (23).

Лемма 29. *При $g \neq 0$ ограничение отображения ϕ на орбиту $M_{1,g}$ является диффеоморфизмом на образ $\phi(M_{1,g})$. В частности, множества критических значений отображений Φ_g и Ψ_g совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{S} \neq 0$, то, зная $\mathbf{S} \times \mathbf{R}$ и $\langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle$, мы однозначно определяем \mathbf{R} . Поэтому ограничение отображения ϕ на любую орбиту $M_{1,g}$, где $g \neq 0$, является взаимно-однозначным.

Далее, дифференциал отображения ϕ (как отображения всего пространства $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$) в каждой точке (\mathbf{S}, \mathbf{R}) , где $\mathbf{S} \neq 0$, имеет одномерное ядро, натянутое на вектор $(0, \mathbf{S})$. Но этот вектор не лежит в касательном пространстве к орбите, так как производная инварианта f_2 вдоль этого вектора равна $\mathbf{S}^2 \neq 0$. \square

Следующие два утверждения также легко проверяются непосредственным вычислением.

Лемма 30. *Скобки функций $S_1, S_2, S_3, Q_1, Q_2, Q_3$ имеют следующий вид:*

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q S_k. \quad (24)$$

\square

Лемма 31. *Образ орбиты $M_{1,g}$ при отображении ϕ задается в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ следующими уравнениями:*

$$\langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle = 0, \quad \mathbf{S}^2(1 - \mathbf{S}^2) - \mathbf{Q}^2 = g^2. \quad (25)$$

\square

Таким образом, лемма 29 показывает, что (при $g \neq 0$) мы можем рассматривать функции H и K как функции от \mathbf{S}, \mathbf{Q} . При этом множество точек, где эти функции зависимы надо будет искать не на $M_{1,g}$, а на многообразии $\phi(M_{1,g})$, заданном уравнениями (25), а образы этих точек при отображении Ψ_g дадут требуемую бифуркационную диаграмму. Это существенно упрощает все дальнейшие вычисления.

Перейдем теперь к описанию множества критических точек.

Вычисления удобно проводить в переменных \mathbf{S}, \mathbf{Q} . Заметим, что мы можем это делать в любой точке, где $\mathbf{S} \neq 0$ (в условии леммы 29 было $g \neq 0$, но приведенное там доказательство годится и при выполнении более слабого условия $\mathbf{S} \neq 0$). Легко проверяется, что в точках (\mathbf{S}, \mathbf{R}) , где $\mathbf{S} = 0$, $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ (вычисленные в координатах \mathbf{S}, \mathbf{R}) пропорциональны. Поэтому все такие точки являются критическими.

Далее можно предполагать, что $\mathbf{S} \neq 0$ и работать с переменными \mathbf{S}, \mathbf{Q} . Используя соотношения (24), легко выписать скобки функций S_i, Q_j с гамильтонианом (22) и интегралом (23). Получаем

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 - Q_2, & \{S_1, K\} &= Q_2(2\alpha Q_3 - q), \\ \{S_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, & \{S_2, K\} &= \frac{Q_1}{\alpha}(\alpha q + 2Q_3), \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{S_3, K\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) Q_1 Q_2, \\ \{Q_1, H\} &= S_2(2\alpha Q_3 - q), & \{Q_1, K\} &= \frac{2\alpha Q_3 - q}{\alpha}(S_2(\alpha q + 2Q_3) - 2S_3 Q_2), \\ \{Q_2, H\} &= \frac{S_1}{\alpha}(\alpha q + 2Q_3), & \{Q_2, K\} &= \frac{\alpha q + 2Q_3}{\alpha}(S_1(q - 2\alpha Q_3) + 2\alpha S_3 Q_1), \\ \{Q_3, H\} &= -\frac{2S_1 Q_2}{\alpha} - 2\alpha S_2 Q_1, & \{Q_3, K\} &= \frac{2S_1 Q_2}{\alpha}(2\alpha Q_3 - q) - 2S_2 Q_1(\alpha q + 2Q_3). \end{aligned}$$

Если рассматривать выписанные выражения как координаты двух 6-мерных векторов, то надо найти те точки (\mathbf{S}, \mathbf{Q}) , в которых они зависимы. Это можно сделать, приравнявая к нулю все миноры 2×6 -матрицы, составленной из координат этих векторов. Ответ приведен в следующем утверждении. При этом, хотя сами вычисления удобнее проводить в переменных \mathbf{S}, \mathbf{Q} , мы выписываем уравнения на критические точки в исходных переменных \mathbf{S}, \mathbf{R} .

Предложение 19. *Множество всех точек, где косые градиенты гамильтониана (16) и интеграла (17) зависимы, является объединением (четырёхпараметрических) семейств, задаваемых следующими уравнениями в пространстве $\text{so}(4)^* = \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$:*

$$(A1) \quad S_1 = 0, \quad S_3 = 0;$$

$$(A2) \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0;$$

$$(B1) \quad S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0, \quad S_1 R_2 - S_2 R_1 = \frac{1}{2\alpha}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2);$$

$$(B2) \quad S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0, \quad S_1 R_2 - S_2 R_1 = -\frac{\alpha}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2);$$

$$(C1) \quad R_1 - S_1 = \alpha(S_2 - R_2),$$

$$(1 + \alpha^2)S_1S_2(S_2 - R_2) - S_3R_3(S_1 - \alpha S_2) + S_3^2(S_1 - \alpha R_2) = 0;$$

$$(C2) \quad R_1 + S_1 = \alpha(S_2 + R_2),$$

$$(1 + \alpha^2)S_1S_2(S_2 + R_2) + S_3R_3(S_1 + \alpha S_2) + S_3^2(S_1 - \alpha R_2) = 0. \quad \square$$

Пересечение каждого из семейств критических точек, выписанных в предложении 19, с орбитой $M_{1,g}$ дает некоторое множество критических точек отображения момента Φ_g . Образ каждого из этих множеств при отображении Φ_g есть некоторая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, которая является частью соответствующей бифуркационной диаграммы $\Sigma_{h,k}$.

Для того, чтобы найти эти кривые, нужно в каждом из случаев, перечисленных в предложении 19, сделать следующее: добавить к двум уравнениям, задающим соответствующее семейство, еще четыре уравнения

$$f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = 1, \quad f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g, \quad H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = h, \quad K(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = k, \quad (26)$$

а затем исключить переменные $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ из полученной системы уравнений. Приведем ответ.

Предложение 20. *Для семейств критических точек, перечисленных в предложении 19, их образы при отображении момента Φ_g содержатся в кривых, задаваемых следующими уравнениями на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:*

$$(A1) \quad k = \frac{1}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2; \quad (B1) \quad k = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{4} - g^2\right); \quad (C1) \quad k = -(1 - 2g)h;$$

$$(A2) \quad k = -\alpha h^2 - h - \frac{1}{\alpha}g^2; \quad (B2) \quad k = -\alpha\left(\frac{1}{4} - g^2\right); \quad (C2) \quad k = -(1 + 2g)h. \quad \square$$

Отметим, что бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,k}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ содержат лишь части кривых, указанных в предложении 20. Перейдем к точному описанию бифуркационных диаграмм при различных значениях g и α .

Для того, чтобы построить бифуркационную диаграмму отображения момента Φ_g , нам нужно найти образы критических точек, лежащих на орбите $M_{1,g}$, при отображении Φ_g . Все критические точки перечислены в предложении 19. Их образы содержатся в кривых, описанных в предложении 20. Таким образом, для каждого из семейств, указанных в предложении 19, нужно описать те значения (g, h, k) ,

для которых соответствующая система из шести уравнений (два уравнения, задающие семейство, и уравнения (26)) имеет решение относительно неизвестных $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$. Следующее утверждение позволяет упростить вычисления при решении этой задачи.

Лемма 32. *Каждая периодическая траектория векторного поля $\text{sgrad } H$ пересекает хотя бы одну из двух гиперплоскостей $S_1 = 0, S_2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую периодическую траекторию и координату S_3 как функцию на ней. Зависимость S_3 от времени задается уравнением $\dot{S}_3 = \{S_3, H\} = -2(\alpha + \frac{1}{\alpha})S_1S_2$. Для периодической функции $S_3(t)$ всегда существует t_0 , для которого $\dot{S}_3(t_0) = 0$. Тогда для этой траектории получаем $S_1(t_0) = 0$ или $S_2(t_0) = 0$. \square

Отметим, что доказанное утверждение справедливо, в частности, для неподвижных точек потока, задаваемого $\text{sgrad } H$, т.е. каждая особая точка векторного поля $\text{sgrad } H$ лежит в гиперплоскости $S_1 = 0$ или в гиперплоскости $S_2 = 0$ (что, впрочем, видно и из списка, приведенного в предложении 17).

Учитывая лемму 32, мы можем строить бифуркационные диаграммы, находя образы не всех критических точек, а лишь тех, для которых $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$.

Рассмотрим сначала случай $g = 0$. Как оказалось, в этом случае вычисления для построения бифуркационной диаграммы $\Sigma_{h,k}$ отображения момента Φ_0 и вид самой бифуркационной диаграммы проще, чем в общем случае.

Теорема 29. *При $g = 0$ бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ имеет вид, указанный на рис. 29. Она состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 (касающихся в начале координат) и двух горизонтальных отрезков U и L (касающихся соответствующих парабол в их вершинах):*

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{h^2}{\alpha} - h; \frac{\alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \right\}, \\
 P_2 &= \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; \frac{-1 - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \right\}, \\
 U &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \right\}, \\
 L &= \left\{ (h, k) \mid k = -\frac{\alpha}{4}; \frac{-1 - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

\square

Теперь рассмотрим произвольное значение g . При $g \neq 0$ появляются еще два отрезка, причем их расположение зависит от значений g и α .

Теорема 30. При $g > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ имеет один из трех видов (а), (б), (в), указанных на рис. 30. Во всех случаях она состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 , двух горизонтальных отрезков U и L (касающихся соответствующих парабол в их вершинах) и двух отрезков E_1 и E_2 (каждый из которых лежит на одной из двух общих касательных к параболам, причем концы отрезка E_1 — это точки касания, а концы отрезка E_2 — либо точки касания, либо точки пересечения с отрезками U и L). Эти бифуркационные кривые задаются формулами

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ k = \frac{h^2}{\alpha} - h + \alpha g^2; \frac{\alpha - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \right\}, \\ P_2 &= \left\{ k = -\alpha h^2 - h - \frac{g^2}{\alpha}; \frac{-1 - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{-1 + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \right\}, \\ U &= \left\{ k = \frac{1-4g^2}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \right\}, \\ L &= \left\{ k = -\frac{\alpha(1-4g^2)}{4}; \frac{-1 - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2} \right\}, \\ E_1 &= \left\{ k = -(1-2g)h; -\frac{g}{\alpha} \leq h \leq \alpha g \right\}, \\ E_2 &= \left\{ k = -(1+2g)h; h_1 \leq h \leq h_2 \right\}, \end{aligned}$$

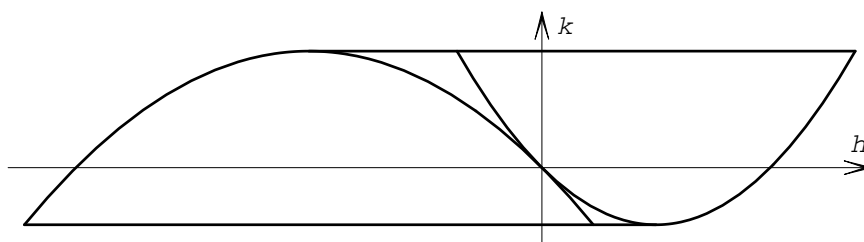
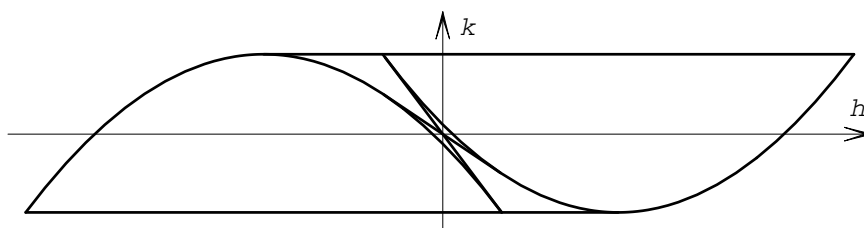
где для h_1 и h_2 , задающих концы отрезка E_2 , возможны следующие три случая (соответствующие трем диаграммам на рис. 30):

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & \text{если } 0 < g \leq \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4}, \quad \text{то } h_1 = -\alpha g \quad \text{и } h_2 = \frac{g}{\alpha}, \\ \text{(б)} \quad & \text{если } \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4} < g \leq \frac{1}{2 + 4\alpha^2}, \quad \text{то } h_1 = -\alpha g \quad \text{и } h_2 = \frac{\alpha(1-2g)}{4}, \\ \text{(в)} \quad & \text{если } \frac{1}{2 + 4\alpha^2} < g < \frac{1}{2}, \quad \text{то } h_1 = -\frac{1-2g}{4\alpha} \quad \text{и } h_2 = \frac{\alpha(1-2g)}{4}. \end{aligned}$$

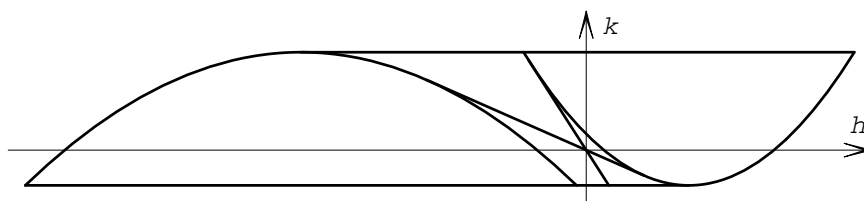
□

Доказательство теорем 29 и 30 проводится прямым вычислением с учетом леммы 32 (см. также доказательство предложения 21).

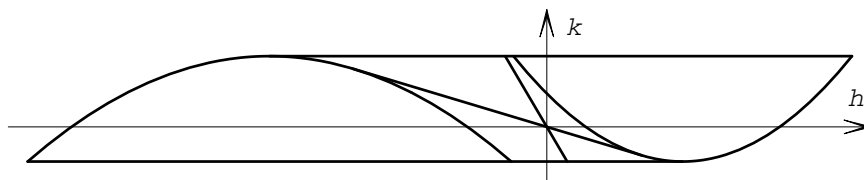
Замечание 36. Все диаграммы (на рис. 29 и 30) изображены для $0 < \alpha \leq 1$ и $g \geq 0$. Как было указано выше (см. замечание 34 в п. 1.2), при замене g на $-g$ диаграмма вообще не меняется, а случай произвольного α сводится к описанным

Рис. 29: Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ при $g = 0$ 

$$(a) \quad 0 < g \leq \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4}$$



$$(b) \quad \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4} < g \leq \frac{1}{2+4\alpha^2}$$



$$(c) \quad \frac{1}{2+4\alpha^2} < g < \frac{1}{2}$$

Рис. 30: Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,k}$ при различных значениях $g \neq 0$

в теореме 30. А именно, при замене α на $-\alpha$ или $\frac{1}{\alpha}$ соответствующая диаграмма получается из исходной поворотом на 180° . В частности, при $\alpha = 1$ диаграммы симметричны относительно начала координат.

5.1.3. Топологические инварианты для случая Соколова

Для вычисления инвариантов Фоменко рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы необходимо исследовать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Один из удобных способов получения

информации об этих перестройках заключается в рассмотрении точек ранга 0, поскольку в окрестности точки ранга 0 перестройки торов можно определить, зная тип этой особой точки.

Для рассматриваемой интегрируемой системы все критические точки ранга 0 на произвольной орбите $M_{1,g}$ перечислены в предложении 18 в виде пяти серий. В следующем утверждении для каждой из этих серий дано описание типов особых точек.

Теорема 31. *Критические точки ранга 0 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) на орбите $M_{1,g}$ имеют следующий тип (нумерация соответствует предложению 18):*

1) 4 точки в прообразе точки пересечения отрезков E_1 и E_2 имеют тип седло-седло при $g \neq 0$ (при $g = 0$ они вырождены);

2) 2 точки в прообразе правой точки параболы P_1 (для верхнего знака в формулах из предложения 18) имеют тип центр-центр; 2 точки в прообразе левой точки параболы P_1 (для нижнего знака в тех же формулах) являются невырожденными при $g \neq \frac{1}{2+4\alpha^2}$, причем они имеют тип центр-седло при $g < \frac{1}{2+4\alpha^2}$ (т. е. в случаях (а) и (б) из теоремы 30) и тип центр-центр при $g > \frac{1}{2+4\alpha^2}$ (т. е. в случае (с) из теоремы 30);

3) 4 точки в прообразе точки пересечения отрезков E_2 и U (случай (с) из теоремы 30) имеют тип центр-седло);

4) 2 точки в прообразе левой точки параболы P_2 (для верхнего знака в формулах из предложения 18) имеют тип центр-центр; 2 точки в прообразе правой точки параболы P_2 (для нижнего знака в тех же формулах) являются невырожденными при $g \neq \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4}$, причем они имеют тип центр-седло при $g < \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4}$ (т. е. в случае (а) из теоремы 30) и тип центр-центр при $g > \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+4}$ (т. е. в случаях (б) и (с) из теоремы 30);

5) 4 точки в прообразе точки пересечения отрезков E_2 и L (случаи (б) и (с) из теоремы 30) имеют тип центр-седло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема вычислений для определения типа особой точки следует из определения 6'. Рассмотрим, например, случай 1), т. е. точку вида $x = (0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$.

Выписав матрицы операторов A_H и A_K (линеаризации векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в точке x), легко проверить, что они линейно зависимы только если $S_3 = 0$ или $S_3 = \pm R_3$. При этом точки, для которых $S_3 = \pm R_3$, лежат на особых (двумерных) орбитах алгебры, которые мы не рассматриваем.

Далее, вычисляя собственные значения матрицы A_H , получаем $S_3 + R_3$, $S_3 - R_3$, $-S_3 + R_3$, $-S_3 - R_3$. Если $S_3 \neq 0$, $R_3 \neq 0$ и $S_3 \neq \pm R_3$, то эти собственные значения попарно различны и вещественны, т. е. в случае $g \neq 0$ рассматриваемая точка имеет тип седло-седло.

При $g = 0$ получаем либо $S_3 = 0$, либо $R_3 = 0$. В обоих случаях особая точка является вырожденной: при $S_3 = 0$ матрицы A_H и A_K линейно зависимы, а при $R_3 = 0$ любая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_K$ имеет лишь два различных собственных значения $\pm S_3(\lambda - \mu S_3^2)$ кратности 2.

Аналогичным образом рассматриваются случаи 2)–5). □

Для “типичной” точки бифуркационной диаграммы $(h, k) \in \Sigma_{h,k}$ множество критических точек в ее прообразе при отображении момента Φ_g является набором окружностей. Информация о количестве этих окружностей помогает определить тип перестройки торов Лиувилля при данном критическом значении отображения момента.

Соответствие между бифуркационными кривыми и множествами критических точек в их прообразах описано в предложениях 19 и 20. В следующем утверждении дается ответ на вопрос о количестве критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых.

Предложение 21. Пусть (h, k) — точка бифуркационной диаграммы, прообраз которой при отображении Φ_g не содержит точек ранга 0 (т. е. любая точка кроме граничных точек парабол P_1, P_2 и точек пересечения отрезков U, L, E_1, E_2).

1) Если точка (h, k) лежит на одной из парабол P_1, P_2 , или на отрезке U между концами параболы P_1 , или на отрезке L между концами параболы P_2 , то ее прообраз содержит ровно 2 критические окружности.

2) Если точка (h, k) является внутренней точкой одного из отрезков E_1, E_2 или внутренней точкой одного из отрезков U, L , но не лежит между концами со-

ответствующей параболы, то ее прообраз содержит ровно 4 критические окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно каждую из бифуркационных кривых P_1, P_2, U, L, E_1, E_2 .

1) Пусть точка (h, k) принадлежит параболе P_1 . Согласно предложениям 19 и 20 критические точки, лежащие в ее прообразе при отображении момента Φ_g , задаются системой уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_3 = 0 \\ S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_2 R_2 = g \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h \end{cases}$$

Если $S_2 = 0$, то из этих уравнений следует, что $g = 0$ и $h = 0$ (а значит и $k = 0$). Прообраз точки $(0, 0)$ при отображении Φ_0 содержит критические точки ранга 0. Поскольку мы не рассматриваем такие точки, то дальше предполагаем, что $S_2 \neq 0$. В этом случае R_1 и R_2 однозначно выражаются из последних двух уравнений. Подставляя их в третье уравнение системы, получаем

$$R_3^2 = 1 + 2\alpha h - (1 + \alpha^2)S_2^2 - \frac{g^2 + h^2}{S_2^2}. \quad (27)$$

Рассматривая выражение в правой части как функцию от S_2 , легко получаем, что для всех значений h из интервала $\left(\frac{\alpha - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2}, \frac{\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2}\right)$ эта функция положительна ровно на двух интервалах (для других значений h она отрицательно при всех S_2). Это означает, что прообраз каждой внутренней точки параболы P_1 содержит ровно две критические окружности.

Случай параболы P_2 исследуется совершенно аналогично.

2) Рассмотрим отрезок U . Критические точки, лежащие в его прообразе, удовлетворяют условиям (B1) из предложения 19. Видно, что точки, для которых $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, не удовлетворяют этим условиям. Поэтому мы можем в этом случае использовать для вычислений переменные \mathbf{S}, \mathbf{Q} (см. лемму 29).

Уравнения, задающие критические точки в прообразе точки (h, k) отрезка U при отображении момента Φ_g , имеют следующий вид в переменных \mathbf{S}, \mathbf{Q} (см. предложе-

ние 19, лемму 25 и формулу (22)):

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ 2\alpha Q_3 = 2\mathbf{S}^2 - 1 \\ \langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle = 0 \\ \mathbf{S}^2(1 - \mathbf{S}^2) - \mathbf{Q}^2 = g^2 \\ \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + Q_3 = h \end{cases}$$

Упрощая последние два уравнения с помощью второго уравнения системы и подставляя выражения для \mathbf{S} и \mathbf{Q} , перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - \alpha Q_3 = \frac{1}{2} \\ S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0 \\ Q_2^2 + (1 + \alpha^2) Q_3^2 = \frac{1}{4} - g^2 \\ S_3^2 + (1 + \alpha^2) S_2^2 = \frac{1}{2} + \alpha h \end{cases}$$

Из четвертого уравнения видно, что если $Q_2 = Q_3 = 0$, то $g^2 = \frac{1}{4}$, что соответствует особым орбитам. Поэтому можно считать, что $Q_2 \neq 0$ или $Q_3 \neq 0$, и, учитывая третье уравнение, положить $S_2 = \lambda Q_3$ и $S_3 = -\lambda Q_2$, где λ — некоторый параметр. Подставляя эти выражения вместо S_2 и S_3 в уравнения системы, после простых преобразований получим следующие соотношения:

$$Q_1 = 0, \quad S_2 = \lambda Q_3, \quad S_3 = -\lambda Q_2, \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{4\alpha h + 2}{1 - 4g^2}}, \quad (28)$$

$$S_1^2 = \frac{2\alpha^2(2\alpha h + 1)}{1 - 4g^2} Q_3^2 + \alpha Q_3 - \alpha h, \quad Q_2^2 = -(1 + \alpha^2) Q_3^2 + \frac{1}{4} - g^2. \quad (29)$$

При каждом значении переменной Q_3 , для которого правые части уравнений (29) неотрицательны, мы можем выразить S_1 и Q_2 из уравнений (29), а затем остальные переменные — из уравнений (28). При этом, если правые части положительны, то имеется 4 способа выбрать знаки при вычислении S_1 и Q_2 , и всегда имеется 2 варианта выбора знака у λ . Таким образом, если рассматривать правые части уравнений (29) как функции от переменной Q_3 , то количество критических окружностей в прообразе данной точки (h, k) при отображении момента Φ_g полностью определяется взаимным расположением интервалов, на которых эти функции неотрицательны. Например, если отрезок, на котором неотрицательна вторая функция,

целиком содержится в интервале, на котором неотрицательна первая функция, то получаем 4 окружности (так как еще можно двумя способами выбрать знак у λ). Разбирая все возможные варианты, получаем ответ.

Критические точки в прообразе отрезка L исследуются аналогично.

3) Теперь рассмотрим отрезок E_1 . Используя предложения 19 и 20, выпишем систему уравнений, задающую множество критических точек в прообразе некоторой точки (h, k) отрезка E_1 при отображении момента Φ_g :

$$\begin{cases} R_1 - S_1 = \alpha(S_2 - R_2) \\ (1 + \alpha^2)S_1S_2(S_2 - R_2) - S_3R_3(S_1 - \alpha S_2) + S_3^2(S_1 - \alpha R_2) = 0 \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g \\ \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha}S_1^2 + S_1R_2 - S_2R_1 = h \end{cases}$$

Из трех уравнений, которые линейно зависят от R_1, R_2, R_3 , можно выразить эти переменные через S_1, S_2, S_3 и подставить в оставшиеся два уравнения. Далее, из полученных двух уравнений можно выразить квадраты переменных S_1, S_2, S_3 через некоторый параметр τ . Опуская подробности, приведем окончательный вид этих выражений:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{\alpha(\alpha g - h)}{1 + \alpha^2} \left(1 + \tau - \frac{g + \alpha h}{1 - 2g} \tau^2\right), \\ S_2^2 &= \frac{g + \alpha h}{1 + \alpha^2} \left(1 + \tau - \frac{\alpha g - h}{\alpha(1 - 2g)} \tau^2\right), \\ S_3^2 &= \frac{(g + \alpha h)(g\alpha - h)}{\alpha(1 - 2g)} \tau^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, и учитывая, что R_1, R_2, R_3 однозначно выражаются через S_1, S_2, S_3 , мы получаем, что количество критических окружностей в прообразе данной точки (h, k) при отображении момента Φ_g определяется взаимным расположением интервалов, на которых правые части полученных соотношений (30) (рассматриваемые как функции от τ) положительны. Легко проверяется, что в данном случае выражение для S_3^2 всегда положительно (если (h, k) — внутренняя точка отрезка E_1), а области неотрицательности для S_1^2 и S_2^2 являются отрезками, причем один из них всегда содержится в другом. Из этого следует, что для каждой внутренней точки отрезка E_1 (кроме точки пересечения с отрезком E_2) имеется ровно 4 критические окружности в ее прообразе.

Аналогичным образом можно исследовать отрезок E_2 . □

Теперь, используя уже имеющуюся информацию о топологии рассматриваемой системы, мы можем описать все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента.

Отметим, что некоторые из приводимых ниже рассуждений корректны лишь в том случае, если особенности системы невырождены (или, в другой терминологии, если интеграл K является боттовским; см. определение 10, а также [12]). Здесь мы не проверяем боттовость интеграла K на всех изоэнергетических поверхностях. Однако, поскольку невырожденность критических точек ранга 0 доказана (теорема 31), можно утверждать, что по крайней мере в некоторых окрестностях этих точек критические окружности являются невырожденными. Более того, так как для данной интегрируемой системы все рассматриваемые функции алгебраические, отсюда следует, что почти все критические окружности невырождены.

Учитывая это замечание, мы будем использовать результаты и методы теории топологической классификации интегрируемых систем, изложенной в книге [12]. Приведем краткое описание некоторых из этих методов, позволяющих определить перестройки торов Лиувилля для рассматриваемой системы.

Во-первых, построенные бифуркационные диаграммы (теоремы 29 и 30) и информация о количестве критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых (предложение 21) позволяют определить количество торов Лиувилля в прообразах регулярных точек для каждой из областей, на которые бифуркационные кривые разбивают плоскость. Действительно, всего имеется 6 таких областей (см. рис. 30). При непрерывном изменении параметра g их границы изменяются, причем для каждой из этих 6 областей при некоторых значениях g часть ее границы содержится в границе образа всей орбиты $M_{1,g}$. Несложно показать, что количество критических окружностей в прообразах точек из этих частей границы совпадает с количеством торов Лиувилля в прообразах регулярных точек из данной области.

Во-вторых, мы знаем тип критических точек ранга 0 (теорема 31). Это позволяет определить, какие перестройки торов Лиувилля соответствуют бифуркационным кривым, примыкающим к образам точек типа центр-седло. В окрестности точки, являющейся образом точки типа центр-седло, бифуркационная диаграмма всегда имеет стандартный вид: одна бифуркационная кривая проходит через эту точку,

а другая выходит из нее. Прообраз первой кривой заполнен эллиптическими критическими окружностями, а прообраз второй — седловыми. При этом перестройку торов Лиувилля, соответствующую кривой с седловыми окружностями в прообразе, можно рассматривать как прямое произведение окружности S^1 на перестройку критических окружностей в прообразе бифуркационной кривой, проходящей через образ рассматриваемой точки типа центр-седло.

Наконец, мы можем использовать информацию о топологии изоэнергетических поверхностей (теорема 28), а также некоторые симметрии рассматриваемой системы. Например, связность изоэнергетической поверхности может накладывать ограничения на тип перестроек. Если же имеется некоторая симметрия системы, то особенности системы должны допускать эту симметрию, т. е. тоже не могут быть произвольными. Поскольку имеется список всех невырожденных особенностей малой сложности, эти соображения иногда позволяют однозначно определить тип перестройки торов Лиувилля.

В следующем утверждении описаны все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента для рассматриваемой системы. Для описания типов перестроек используются стандартные обозначения: через A обозначается перестройка $\emptyset \rightsquigarrow T^2$, через B — перестройка $T^2 \rightsquigarrow 2T^2$, а через C_2 — перестройка $2T^2 \rightsquigarrow 2T^2$ (их точное описание см. в [12]; см. также рис. 1 и рис. 2). При этом число перед обозначением перестройки указывает, что одновременно происходит несколько бифуркаций такого типа (например, $2A$ означает рождение двух торов Лиувилля).

Теорема 32. *Для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) на орбите $M_{1,g}$ все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента имеют тип A , B или C_2 . Перестройки, соответствующие различным частям бифуркационной диаграммы, указаны на рис. 31 (для случая (b) из теоремы 30).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать диаграмму, изображенную на рис. 31 (т. е. случай (b) из теоремы 30). Жирными точками на ней отмечены образы критических точек ранга 0 и вырожденных критических окружностей. Они разбивают

бифуркационные кривые на части так, что перестройки торов Лиувилля, соответствующие точкам из одной части, одинаковы.

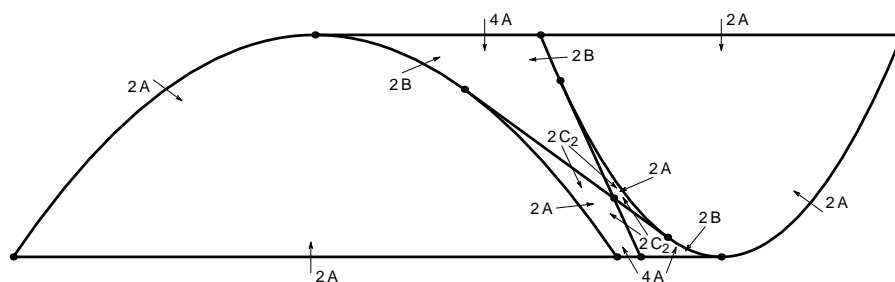


Рис. 31: Перестройки торов Лиувилля

Перестройки, соответствующие тем частям бифуркационной диаграммы, которые лежат на границе образа всей орбиты $M_{1,g}$, являются перестройками типа A . При этом их количество определяется количеством критических окружностей в прообразе, т. е., фактически, описано в предложении 21.

Далее, на рассматриваемой диаграмме имеются ровно две точки, являющиеся образами точек типа центр-седло (см. теорему 31). Рассуждения, приведенные при доказательстве предложения 21, позволяют определить не только количество критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых, но и их перестройки при движении точки вдоль бифуркационной кривой, проходящей через образ точки типа центр-седло. А именно, исследуя правые части формул (29), получаем, что перестройка торов Лиувилля, соответствующая левой верхней части параболы P_1 на рис. 31, имеет тип $2B$. Аналогичным образом получаем, что перестройка, соответствующая нижней части отрезка E_2 , имеет тип C_2 . Перестройка, соответствующая верхней части отрезка E_2 , также имеет тип C_2 . Это следует из того, что при увеличении значения g (при переходе в случай (с) из теоремы 30) верхняя точка отрезка E_2 становится образом точки типа центр-седло.

Правая крайняя точка параболы P_2 на рис. 31 является образом двух точек типа центр-центр (см. теорему 31). Поэтому перестройка торов Лиувилля, соответствующая правой нижней части параболы P_2 , имеет тип $2A$. То, что перестройка, соответствующая части параболы P_1 между точками ее касания с отрезками E_1 и E_2 , также имеет тип $2A$, опять следует из рассмотрения этой части при значениях g , соответствующих случаю (с) из теоремы 30.

Итак, перестройки определены для всех частей бифуркационной диаграммы кроме отрезка E_1 и двух дуг парабол P_1 и P_2 от вершины до точки касания с ним.

Для указанных дуг парабол ситуация следующая: здесь два тора Лиувилля перестраиваются в четыре тора Лиувилля, проходя через две критические окружности. Кроме того, у рассматриваемой системы имеется симметрия, которая меняет местами эти критические окружности. Действительно, при изменении знака у переменных S_1, S_2, R_1, R_2 все интегралы рассматриваемой системы f_1, f_2, H, K сохраняются, а окружности, задаваемые формулой (27), меняются местами. Используя список перестроек малой сложности (см. [12]), получаем, что имеется всего один вариант для перестройки, удовлетворяющей всем этим условиям. Это перестройка типа $2B$.

Аналогичные рассуждения приводят к ответу и для отрезка E_1 . В этом случае четыре тора перестраиваются в четыре тора через четыре критические окружности. Рассмотрим еще одну симметрию системы — изменение знака у переменных S_3, R_3 . Из формул (30) получаем, что указанные две симметрии меняют местами различные пары из четырех критических окружностей. Кроме того, из теоремы 28 следует, что полные прообразы точек отрезка E_1 состоят из двух связных компонент. Как и в предыдущем случае, используя список перестроек малой сложности, получаем, что лишь перестройка типа $2C_2$ удовлетворяет всем перечисленным условиям. \square

Отметим, что хотя на рис. 31 перестройки торов Лиувилля указаны лишь для случая (b) из теоремы 30, остальные перестройки (для бифуркационных диаграмм (a) и (c) на рис. 30) однозначно устанавливаются из соображений непрерывности и симметрии.

Построим теперь молекулы (или инварианты Фоменко), классифицирующие сечения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях интегрируемой системы с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Для этого нужно для каждой вертикальной прямой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ определить, что происходит со связными компонентами прообраза точки, движущейся вдоль этой прямой. Пока точка движется от одной бифуркационной кривой до другой, ее прообразом является набор торов Лиувилля, которые трансформируются, образуя однопараметрические семейства. При пересечении бифуркационной кривой происходит перестройка этих торов.

Поскольку перестройки торов Лиувилля полностью описаны в теореме 32, мы знаем атомы, из которых составлена молекула. Остается только определить, между какими атомами происходит “склейка”. Как оказалось, для рассматриваемой системы все определяется однозначно из информации о количестве связных компонент изоэнергетической поверхности (которую дает теорема 28).

Отметим, что здесь мы не вычисляем метки, которые полностью определяют слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ (и, в частности, топологию самой этой поверхности). Поэтому одна и та же молекула может соответствовать не гомеоморфным изоэнергетическим поверхностям. Если учесть имеющуюся информацию о топологическом типе изоэнергетических поверхностей рассматриваемой системы (теорема 28), то в качестве инварианта можно рассматривать пару “молекула — топологический тип $Q_{g,h}^3$ ”.

Таблица 4: Список инвариантов Фоменко для случая Соколова

№	Молекула	Q^3	№	Молекула	Q^3
1		$2S^3$	6		$S^1 \times S^2$
2		$2S^3$	7		$\#_1^3 S^1 \times S^2$
3		$2S^3$	8		$2S^1 \times S^2$
4		$S^1 \times S^2$	9		$\#_1^5 S^1 \times S^2$
5		$S^1 \times S^2$	10		$\#_1^3 S^1 \times S^2$

Теорема 33. Для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (16) и интегралом (17) полный список инвариантов Фоменко при различных значениях параметров g , α и h состоит из 6 молекул. С учетом топологии изоэнергетической поверхности, имеется ровно 10 вариантов для пары “молекула — топологический тип $Q_{g,h}^3$ ”. Они перечислены в таблице 4, а номера вариантов из таблицы указаны на рис. 32. □

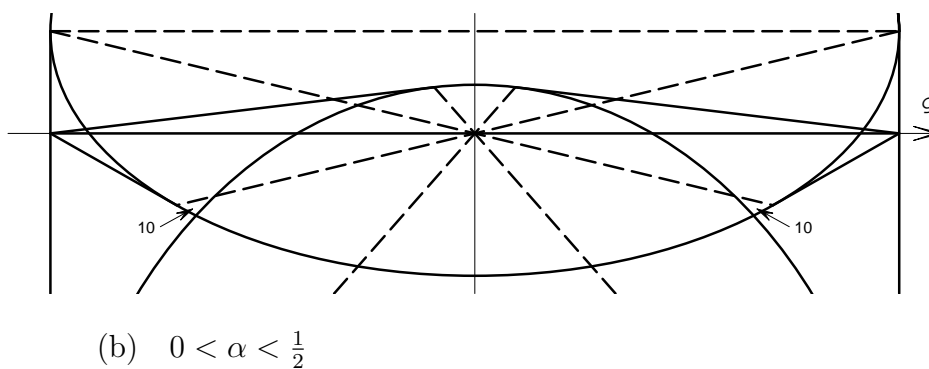
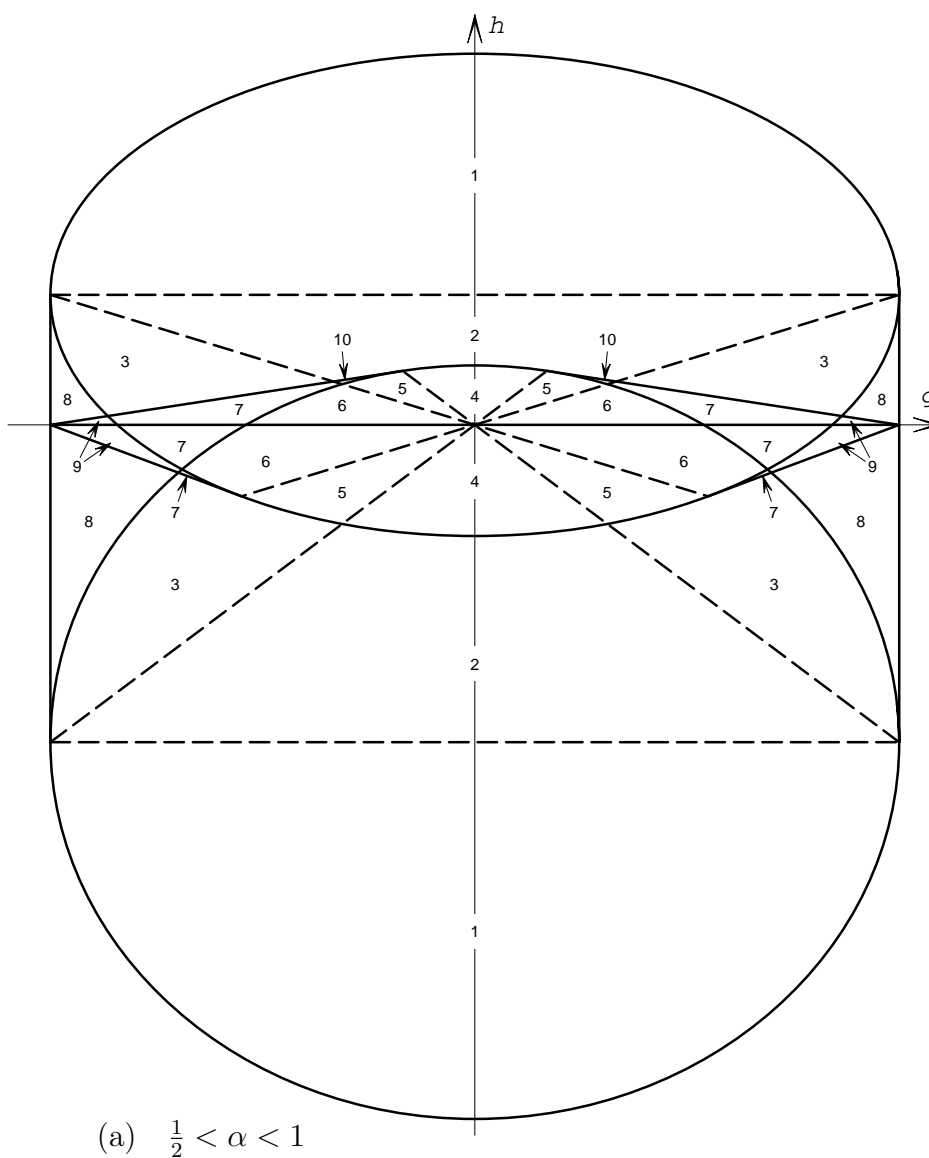


Рис. 32: Разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$

Замечание 37. Рис. 32 содержит информацию как о топологии изоэнергетических поверхностей, так и о слоении Лиувилля на них. Каждая точка на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ определяет изоэнергетическую поверхность $Q_{g,h}^3$. Переход точки из одной области в другую через сплошную кривую на рис. 32 соответствует изменению топологии изоэнергетической поверхности, а переход через пунктирную кривую — изменению слоения Лиувилля на ней (без изменения топологического типа).

5.2. Задача двух центров на сфере

В этом разделе исследуется топология задачи о движении точки по сфере (со стандартной метрикой постоянной положительной кривизны) в поле, создаваемом двумя “ньютоновскими” центрами. В частности, найдены инварианты Фоменко–Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувиллевых слоев на изоэнергетических поверхностях системы.

Результаты этого раздела были опубликованы в совместной работе автора и Т. Г. Возмищевой [17]. Описание интегралов системы в разделе 5.2.2 и построение бифуркационных диаграмм (раздел 5.2.4; см. также [118]) принадлежат Т. Г. Возмищевой. Теорема 34 (о регуляризации), теорема 35 (о боттовости) и построение допустимых систем координат для всех случаев (раздел 5.2.7) принадлежат автору. Теоремы 36 и 37 получены совместно.

5.2.1. Постановка задачи

Гамильтониан натуральной механической системы равен сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$H = T + V.$$

Мы будем рассматривать задачу о движении материальной точки по стандартной двумерной сфере в поле, создаваемом двумя неподвижными притягивающими центрами. Кинетическая энергия T в этом случае задается метрикой сферы, а потенциальная энергия V равна сумме потенциалов, создаваемых каждым из центров.

В плоском случае (для плоской метрики) в качестве потенциала, создаваемого одним притягивающим центром, рассматривается ньютоновский потенциал $V = -\frac{\gamma}{r}$, где γ — постоянный положительный коэффициент, характеризующий силу притяжения.

Аналогом ньютоновского потенциала на сфере является функция $-\gamma \operatorname{ctg} \theta$, где θ — угловая величина дуги, соединяющей точку с притягивающим центром (см., например, [88], [89]). Опишем два подхода к обобщению ньютоновского потенциала на случай искривленных пространств на примере пространств постоянной кривизны.

1. Хорошо известно, что для ньютоновского потенциала все финитные орбиты замкнуты (они являются эллипсами). Как было доказано Ж. Бертраном (1873 г.), кроме ньютоновского существует еще ровно одно центральное потенциальное поле, для которого все финитные траектории замкнуты. Это поле, создаваемое потенциалом Гука $V = kr^2$, где k — положительная константа. (Доказательство теоремы Бертрана, а также различные ее обобщения для нецентральных или непотенциальных полей можно найти, например, в книге [51].)

Для сферы и плоскости Лобачевского задача описания потенциалов, для которых все финитные траектории замкнуты, рассматривалась во многих работах (см. [84], [110], [86], [77], [25]). Оказывается, что в этом смысле для сферы аналогами ньютоновского и гуковского потенциалов $-\frac{1}{r}$ и r^2 являются функции $-\operatorname{ctg} \theta$ и $\operatorname{tg}^2 \theta$, а для плоскости Лобачевского — функции $-\operatorname{cth} \theta$ и $\operatorname{th}^2 \theta$.

2. Еще один подход к определению ньютоновского потенциала V в плоском пространстве заключается в решении уравнения Пуассона, которое для нулевой плотности материи превращается в уравнение Лапласа $\Delta V = 0$. Кроме констант существуют лишь следующие сферически симметричные решения уравнения Лапласа в n -мерном евклидовом пространстве (с точностью до умножения на константу): r^{2-n} при $n \geq 3$ и $\ln r$ при $n = 2$. Таким образом, в трехмерном евклидовом пространстве гармонической является функция $\frac{1}{r}$. Если рассматривать плоское движение под действием гравитационного потенциального поля (например, в обычной задаче Кеплера) как редукцию трехмерной задачи, то и в двумерном случае можно определять ньютоновский потенциал как $-\frac{1}{r}$.

Для n -мерной сферы (постоянной кривизны 1) и n -мерного пространства Лобачевского (постоянной кривизны -1) решениями уравнения Лапласа (инвариантными относительно вращений вокруг притягивающего центра) являются соответственно функции $(\operatorname{tg} r)^{2-n}$ и $(\operatorname{th} r)^{2-n}$ при $n \geq 3$ и функции $\ln \operatorname{tg} r$ и $\ln \operatorname{th} r$ при $n = 2$ (здесь r — это расстояние до притягивающего центра). Как и в плоском случае, для двумерной сферы можно считать, что аналог ньютоновского потенциала есть (с точностью до коэффициента) $-\operatorname{ctg} r$, т. е. гармоническая функция на трехмерной сфере.

Замечание 38. Кажется маловероятным, чтобы для произвольной метрики существовали (притягивающие) потенциалы, для которых все финитные траектории были бы замкнуты. С геометрической точки зрения интересна обратная задача: описать метрики, для которых существуют такие потенциалы.

Замечание 39. Отметим еще одну из возможных интерпретаций выражений для ньютоновских потенциалов в плоском пространстве ($1/r$), на сфере ($\operatorname{ctg} r$) и в пространстве Лобачевского ($\operatorname{cth} r$). Рассмотрим функцию r в каждом из этих пространств, равную расстоянию до притягивающего центра. Тогда легко проверяется, что функция Δr , где Δ — оператор Лапласа, совпадает (с точностью до коэффициента) с $\frac{1}{r}$ в плоском пространстве, с $\operatorname{ctg} r$ на сфере и с $\operatorname{cth} r$ в пространстве Лобачевского, причем для любой размерности.

Итак, в качестве ньютоновского потенциала на двумерной сфере мы рассматриваем функцию $\operatorname{ctg} \theta$, где θ — угловая величина дуги, соединяющей точку с притягивающим центром.

Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы (с началом в центре сферы) неподвижных притягивающих центров, а \mathbf{r} — радиус-вектор пробной частицы. Тогда потенциал задачи двух центров на сфере имеет вид

$$V = -\frac{\gamma_1}{R} \operatorname{ctg} \theta_1 - \frac{\gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \theta_2, \quad (31)$$

где R — радиус сферы, γ_1, γ_2 — положительные константы, характеризующие силу притяжения, а θ_i — угол между векторами \mathbf{r}_i и \mathbf{r} .

Обозначим притягивающие центры через P_1, P_2 , а диаметрально противоположные им точки через Q_1, Q_2 . Из формулы для потенциала V видно, что в точках P_1, P_2

этот потенциал имеет особенности типа $-\frac{1}{r}$, а в точках Q_1, Q_2 — особенности типа $\frac{1}{r}$, т. е. для ньютоновского потенциала на сфере наличие притягивающего центра приводит к появлению дополнительного отталкивающего центра (в антиподальной точке).

Отметим, что при $R \rightarrow \infty$ ньютоновский потенциал на сфере радиуса R стремится к ньютоновскому потенциалу на плоскости, если рассматривать эти потенциалы как функции расстояния r до притягивающего центра. Действительно, так как расстояние r на сфере радиуса R равно $R\theta$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} = \frac{1}{r}$$

для любого фиксированного значения r .

5.2.2. Интегралы системы

Рассмотрим сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ в \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами x, y, z . Пусть притягивающие центры P_1 и P_2 имеют координаты $(\alpha, \beta, 0)$ и $(-\alpha, \beta, 0)$, где $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$.

Опишем координаты на сфере, в которых гамильтониан задачи двух центров имеет лиувиллев вид, указанные в работе [89]. Это сфероконические координаты ξ, η , определяемые следующим образом. Рассмотрим уравнение (относительно λ)

$$\frac{x^2}{\lambda - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda + \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda} = 0.$$

Легко проверяется, что корни имеют разные знаки. Обозначая их через ξ^2 и $-\eta^2$, получаем координаты (ξ, η) , где $0 \leq \xi \leq \alpha$ и $0 \leq \eta \leq \beta$.

Координатными линиями этой системы координат являются линии пересечения сферы с двумя семействами конфокальных конусов с вершиной в центре сферы. Геометрические свойства этих линий на сфере во многом аналогичны свойствам обычных эллипсов и гипербол на плоскости. Кроме того, они являются “кеплеровскими” орбитами в задаче о движении точки по сфере в поле, создаваемом одним центром (см. [25]).

Формулы, выражающие декартовы координаты через сфероконические имеют вид

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 + \eta^2), \\y^2 &= \frac{1}{\beta^2}(\beta^2 + \xi^2)(\beta^2 - \eta^2), \\z^2 &= \frac{R^2}{\alpha^2\beta^2}\xi^2\eta^2.\end{aligned}$$

Кинетическая и потенциальные энергии, входящие в гамильтониан $H = T + V$ задачи двух центров на сфере, записываются в координатах (ξ, η) следующим образом:

$$\begin{aligned}T &= \frac{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\xi^2 + \frac{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\eta^2, \\V &= \frac{-\operatorname{sgn}(y)(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}}{R(\xi^2 + \eta^2)} + \frac{-\operatorname{sgn}(x)(\gamma_1 - \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}}{R(\xi^2 + \eta^2)}.\end{aligned}$$

где p_ξ, p_η — импульсы, соответствующие координатам ξ и η . Коэффициент γ_1 соответствует притягивающему центру P_1 с координатами $(\alpha, \beta, 0)$, а коэффициент γ_2 — притягивающему центру P_2 с координатами $(-\alpha, \beta, 0)$.

В координатах (ξ, η) система имеет лиувиллев вид, что позволяет найти дополнительный интеграл (см., например, [51]). Этот интеграл можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}L &= \frac{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)\eta^2}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\xi^2 - \frac{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)\xi^2}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\eta^2 + \\&+ \frac{\operatorname{sgn}(y)(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}\xi^2 - \operatorname{sgn}(x)(\gamma_1 - \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}\eta^2}{R(\xi^2 + \eta^2)}.\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, свойства координатных линий системы координат (ξ, η) аналогичны свойствам эллипсов и гипербол на плоскости. Например, для каждой точки координатной линии $\{\eta = \text{const}\}$ сумма расстояний (по сфере) от этой точки до притягивающих центров P_1 и P_2 , а также разность расстояний от этой точки до точек P_1 и Q_2 постоянны. Аналогичное свойство выполнено и для координатных линий $\{\xi = \text{const}\}$. Используя этот факт, можно записать гамильтониан и интеграл рассматриваемой задачи в более наглядных координатах q_1 и q_2 , где

$$q_1 = \theta_2 - \theta_1, \quad q_2 = \theta_2 + \theta_1,$$

а θ_1 и θ_2 — угловые величины дуг, соединяющих рассматриваемую точку с центрами P_1 и P_2 .

Вводя импульсы p_1 и p_2 , соответствующие координатам q_1 и q_2 , гамильтониан и интеграл можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{2(\cos q_1 - \cos \delta)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 + \frac{2(\cos \delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin q_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \sin q_2}{R(\cos q_1 - \cos q_2)},$$

$$L = \frac{2 \cos q_2 (\cos \delta - \cos q_1)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 - \frac{2 \cos q_1 (\cos \delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 +$$

$$+ \frac{\gamma_1 \sin(q_1 + q_2) + \gamma_2 \sin(q_2 - q_1)}{R(\cos q_1 - \cos q_2)},$$

где через δ обозначена угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2 .

Координаты q_1, q_2 (как и координаты ξ, η), естественно, не являются глобальными координатами на сфере (таких координат на сфере не существует). Система координат (q_1, q_2) имеет особенности в точках пересечения сферы с плоскостью, содержащей центры. В частности, точкам сферы, симметричным относительно этой плоскости, соответствуют одинаковые координаты q_1, q_2 .

Однако, если переменные разделяются, их координатные линии определены однозначно (если система не резонансна) самой системой, поскольку они ограничивают проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство. Поэтому для рассматриваемой системы любые другие “хорошие” (т. е. разделяющиеся) переменные должны иметь вид функций $\tilde{q}_1(q_1), \tilde{q}_2(q_2)$.

Опишем координаты u, v на сфере (с теми же координатными линиями), которые более удобны для вычисления топологических инвариантов системы.

Хорошо известно, что двумерную сферу можно двулистно накрыть двумерным тором с четырьмя точками ветвления. Накрытие можно выбрать так, что точками ветвления будут притягивающие центры P_1, P_2 и диаметрально противоположные им точки Q_1, Q_2 , а прообразами “эллипсов” $\{q_1 = \text{const}\}$ и $\{q_2 = \text{const}\}$ будут координатные линии (глобальных) угловых координат u, v на торе.

Это накрытие можно описать при помощи эллиптических функций Якоби (см., например, [4]). Рассмотрим отображение тора \mathbb{T}^2 с угловыми координатами u, v в пространство \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами x, y, z , задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sn}(u, k_1) \operatorname{dn}(v, k_2), \\ y &= R \operatorname{sn}(v, k_2) \operatorname{dn}(u, k_1), \\ z &= R \operatorname{cn}(u, k_1) \operatorname{cn}(v, k_2). \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $\operatorname{sn}(u, k_1), \operatorname{cn}(u, k_1), \operatorname{dn}(u, k_1)$ — функции Якоби с модулем $k_1 = \frac{\alpha}{R} = \sin \frac{\delta}{2}$, а $\operatorname{sn}(v, k_2), \operatorname{cn}(v, k_2), \operatorname{dn}(v, k_2)$ — функции Якоби с модулем $k_2 = \frac{\beta}{R} = \cos \frac{\delta}{2}$ (где, как и выше, δ — угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2). В дальнейшем, для краткости, мы не будем указывать модуль, подразумевая, что для функций Якоби от переменной u модуль равен k_1 , а для функций Якоби от переменной v модуль равен k_2 .

Используя свойства функций Якоби, легко проверить, что при отображении, задаваемом формулами (32), образ любой точки тора (u, v) есть точка на сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. При этом в каждую точку сферы (кроме точек P_1, P_2, Q_1, Q_2) отображается по две точки тора. Таким образом, отображение (32) есть двулистное накрытие $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, разветвленное в четырех точках.

Это накрытие удобно представлять следующим образом. Первые две из формул (32) задают непрерывное взаимно-однозначное отображение прямоугольника $\{|u| \leq K_1, |v| \leq K_2\}$ на круг $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$, где K_1, K_2 — полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие модулям k_1, k_2 . При этом вершины прямоугольника переходят в точки граничной окружности с координатами $(\pm\alpha, \pm\beta)$. Это отображение продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2(u, v)$ при помощи симметрий относительно сторон прямоугольника. Учитывая третью формулу (32), получаем отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

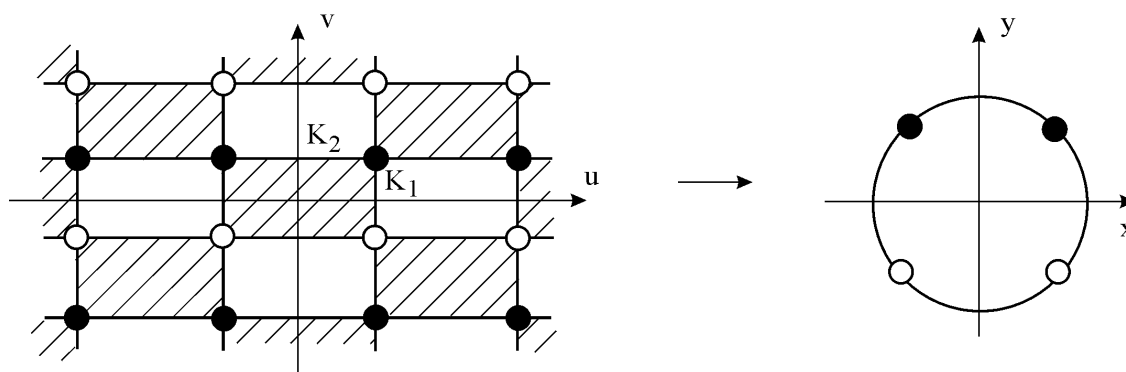


Рис. 33: Координаты u, v на сфере

На рис. 33 изображено разбиение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на прямоугольники со сторонами $2K_1, 2K_2$, каждый из которых отображается на полусферу (заштрихованные — на “верхнюю” $\{z \geq 0\}$, незаштрихованные — на “нижнюю” $\{z \leq 0\}$). При этом “черные” вершины прямоугольников отображаются в притягивающие центры P_1, P_2 , а

“белые” — в отталкивающие центры Q_1, Q_2 . Поскольку функции $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ имеют период $4K_1$, а функции $\operatorname{sn} v, \operatorname{cn} v$ — период $4K_2$, описанное отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на сферу \mathbb{S}^2 задает отображение $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, где тор \mathbb{T}^2 можно представлять как прямоугольник в плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ со сторонами $4K_1, 4K_2$ (состоящий из двух заштрихованных и двух незаштрихованных прямоугольников с общей вершиной), у которого пары противоположных сторон отождествлены при помощи сдвигов.

Центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ относительно любой из вершин прямоугольников (см. рис. 33) задает инволюцию $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ с четырьмя неподвижными точками. Фактор-пространство \mathbb{T}^2/σ есть конфигурационное пространство \mathbb{S}^2 рассматриваемой задачи. Поэтому вместо движения точки по сфере \mathbb{S}^2 можно рассматривать движение точки по тору \mathbb{T}^2 , учитывая затем действие инволюции σ . Более точно эта процедура описана в разделе 5.2.3.

Гамильтониан и интеграл в переменных u, v (т. е. описывающие движение точки по тору \mathbb{T}^2) имеют вид

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2(\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin^{\frac{\delta}{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + (\gamma_1 + \gamma_2) \cos^{\frac{\delta}{2}} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{R(\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)},$$

$$L = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v p_u^2 - \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u p_v^2}{2(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \cos^{\frac{\delta}{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}^2 v - (\gamma_1 + \gamma_2) \sin^{\frac{\delta}{2}} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn}^2 u}{R(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)},$$

где p_u, p_v — импульсы, соответствующие координатам u, v .

5.2.3. Регуляризация

Потенциал V рассматриваемой задачи имеет особенности в четырех точках на сфере (притягивающие центры P_1, P_2 и отталкивающие центры Q_1, Q_2). При этом в точках P_1, P_2 функция V стремится к $-\infty$, а в точках Q_1, Q_2 стремится к $+\infty$. Так как кинетическая энергия T всегда положительна, а полная энергия $H = T + V$ постоянна вдоль траекторий системы, отсюда следует, что частица, движущаяся по сфере в поле, создаваемом потенциалом V , никогда не попадает в точки Q_1 и Q_2 . Для точек P_1 и P_2 ситуация противоположная: для любого положения частицы на сфере можно задать такую начальную скорость, что частица за конечное время попадет в притягивающий центр. При этом скорость частицы “в момент попадания в притягивающий центр” станет бесконечно большой (поскольку $T + V = \text{const}$).

Таким образом, задача двух центров на сфере описывается гамильтоновой системой на кокасательном расслоении к двумерной сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H = T + V$, где T — квадратичная функция по импульсам (стандартная метрика на сфере), а V — функция на сфере, задаваемая формулой (31). Однако при таком подходе фазовым пространством этой системы будет не все многообразие $T^*\mathbb{S}^2$, поскольку функция V не определена в четырех точках сферы P_1, P_2, Q_1, Q_2 (а значит, функция H не определена на четырех плоскостях, являющихся слоями кокасательного расслоения $T^*\mathbb{S}^2$ над этими четырьмя точками).

Обозначим сферу \mathbb{S}^2 с четырьмя выброшенными точками P_1, P_2, Q_1, Q_2 через S_0 . Тогда фазовое пространство системы есть T^*S_0 . Как уже отмечалось выше, гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } H$ на T^*S_0 , задающее систему, не является полным. Поэтому, хотя система и обладает дополнительным интегралом L (см. раздел 5.2.2), она не является интегрируемой по Лиувиллю. Тем не менее, как будет показано ниже, после некоторой регуляризации качественное поведение системы будет таким же, как и для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем (почти все траектории являются условно-периодическими обмотками торов).

Отметим, что описанный ниже способ регуляризации системы аналогичен регуляризации, предложенной Т. Леви-Чивита для классической задачи Кеплера (см. [91]).

Рассмотрим гамильтониан H как функцию переменных (u, v, p_u, p_v) . Систему с таким гамильтонианом можно рассматривать как гамильтонову систему на кокасательном расслоении к тору \mathbb{T}^2 . Введем обозначение

$$\lambda(u, v) = \sin^2 \frac{\delta}{2} \text{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \text{cn}^2 v. \quad (33)$$

Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2\lambda(u, v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin \frac{\delta}{2} \text{sn } u \text{ dn } u + (\gamma_1 + \gamma_2) \cos \frac{\delta}{2} \text{sn } v \text{ dn } v}{R \cdot \lambda(u, v)},$$

а координаты поля $W = \text{sgrad } H$ на $T^*\mathbb{T}^2$ равны $\left(\frac{\partial H}{\partial p_u}, \frac{\partial H}{\partial p_v}, -\frac{\partial H}{\partial u}, -\frac{\partial H}{\partial v} \right)$.

В фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле W имеет особенности в точках, где $\lambda(u, v) = 0$, то есть в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$. Рассмотрим векторное поле

$\widetilde{W} = \lambda(u, v) \cdot \text{sgrad } H$. В координатах (u, v, p_u, p_v) оно имеет вид

$$\left(p_u, p_v, \sin \frac{\delta}{2} \text{cn } u \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} (2 \text{dn}^2 u - 1) - 2 \sin \frac{\delta}{2} \text{sn } u \text{dn } u \cdot h \right), \right. \\ \left. \cos \frac{\delta}{2} \text{cn } v \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} (2 \text{dn}^2 v - 1) - 2 \cos \frac{\delta}{2} \text{sn } v \text{dn } v \cdot h \right) \right), \quad (34)$$

где $h = H(u, v, p_u, p_v)$ — значение гамильтониана в точке (u, v, p_u, p_v) . Векторное поле \widetilde{W} также имеет особенности в точках $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, поскольку гамильтониан H не определен в точках, где $\lambda(u, v) = 0$. Обозначим через W_h ограничение векторного поля \widetilde{W} на изоэнергетическую поверхность $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{T}^2$. Векторное поле W_h уже не имеет особенностей (но определено лишь на трехмерной поверхности Q_h). Оно задается формулой (34) и, в частности, определено в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, лежащих на поверхности Q_h :

$$W_h(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v) = (p_u, p_v, 0, 0).$$

Ясно, что интегральные траектории поля W_h совпадают (с точностью до замены параметра) с интегральными траекториями исходного векторного поля $W = \text{sgrad } H$ на $T^*\mathbb{T}^2$, поскольку умножение поля W на функцию $\lambda(u, v)$ можно интерпретировать как замену времени $\frac{dt}{d\tau} = \lambda(u(t), v(t))$, где $(u(t), v(t), p_u(t), p_v(t))$ — траектория поля W .

С другой стороны, векторное поле W_h на поверхности Q_h совпадает с ограничением на эту поверхность некоторого гамильтонова векторного поля, определенного во всем фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$. Ясно, что такое продолжение неоднозначно. Например, в качестве такого поля можно взять поле $\text{sgrad } F_h$, где

$$F_h = \lambda(H - h) = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2} - h \left(\sin^2 \frac{\delta}{2} \text{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \text{cn}^2 v \right) - \\ - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \sin \frac{\delta}{2} \text{sn } u \text{dn } u - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \cos \frac{\delta}{2} \text{sn } v \text{dn } v. \quad (35)$$

Тогда $\text{sgrad } F_h = \lambda \text{sgrad } H + (H - h) \text{sgrad } \lambda$. Поскольку $\{F_h = 0\} = \{H = h\}$, векторное поле $\text{sgrad } F_h$ касается поверхности Q_h и совпадает на ней с полем W_h .

Интеграл L исходной системы, очевидно, является интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом F_h на поверхности $\{F_h = 0\}$. Поэтому после описанной регуляризации топологические свойства системы с гамильтонианом H на $T^*\mathbb{T}^2$ на каждой изоэнергетической поверхности Q_h будут такими же, как и для обычных интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, неособые инвариантные многообразия системы являются торами Лиувилля, а перестройки этих торов можно

описать при помощи инвариантов Фоменко–Цишанга (см. комментарий по поводу инвариантов Фоменко–Цишанга в конце раздела 5.1.1).

До сих пор мы, фактически, говорили о регуляризации системы на $T^*\mathbb{T}^2$, которая возникла из рассмотрения (разветвленного) накрытия сферы \mathbb{S}^2 тором \mathbb{T}^2 . Это накрытие определяется инволюцией $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, описанной в разделе 5.2.2. Инволюция σ естественным образом продолжается до инволюции $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$. Чтобы вернуться теперь к системе на сфере (а именно эта система является основным объектом нашего изучения), нужно учесть действие инволюции σ^* на $T^*\mathbb{T}^2$.

Поскольку инволюция $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ порождается центральной симметрией плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ относительно точки (K_1, K_2) (или любой другой вершины прямоугольников на рис. 33), в координатах (u, v, p_u, p_v) инволюция σ^* имеет вид

$$\sigma^*: (u, v, p_u, p_v) \rightarrow (2K_1 - u, 2K_2 - v, -p_u, -p_v). \quad (36)$$

Поэтому инволюция σ^* имеет ровно 4 неподвижные точки $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$. Отметим, что фактор-пространство $T^*\mathbb{T}^2/\sigma^*$ не является многообразием.

Теперь зафиксируем некоторое значение h и рассмотрим функцию F_h , задаваемую формулой (35). Легко видеть, что поверхность $\{F_h = 0\}$ инвариантна относительно инволюции σ^* и не содержит точек $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$ (непосредственным вычислением проверяется, что в этих четырех точках значения функции F_h равны $\pm \frac{\gamma_i}{R} \sin \delta$, где $i = 1, 2$). Таким образом, фактор-пространства $\{F_h = 0\}/\sigma^*$ можно рассматривать как изоэнергетические поверхности исходной системы на сфере после регуляризации.

Более того, также легко проверяется, что и векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ инвариантно относительно инволюции σ^* , что позволяет рассматривать векторное поле $w_h = W_h/\sigma^*$ как результат регуляризации исходного векторного поля $w = \text{sgrad } H$ на изоэнергетической поверхности $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$.

Итак, проведенные рассуждения приводят к следующему утверждению описывающему регуляризацию задачи двух центров на сфере, т. е. гамильтоновой системы $w = \text{sgrad } H$ на кокасательном расслоении к сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H = T + V$, где квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере радиуса R в \mathbb{R}^3 , а функция V задана формулой (31).

Теорема 34 (о регуляризации). Пусть h — регулярное значение гамильтониана H , а $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$ — соответствующая изоэнергетическая поверхность. Рассмотрим на поверхности Q_h векторное поле $w_h = \lambda \operatorname{sgrad} H$, где λ — функция (33) на сфере \mathbb{S}^2 .

Пусть $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — (разветвленное) двулистное накрытие, определяемое формулами (32), $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$ — соответствующая инволюция (36), а F_h — функция, определенная формулой (35), на кокасательном расслоении к тору $T^*\mathbb{T}^2$. Рассмотрим на поверхности $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле $W_h = \operatorname{sgrad} F_h$.

Тогда

- 1) поверхность $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ является замкнутым трехмерным многообразием, на котором инволюция σ^* действует без неподвижных точек,
- 2) векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ не имеет особенностей и инвариантно относительно инволюции σ^* ,
- 3) отображение (32) индуцирует диффеоморфизм фактор-пространства (относительно инволюции σ^*) поверхности $\{F_h = 0\}$ без точек, лежащих в четырех слоях над точками ветвления отображения f , на поверхность $\{H = h\}$, причем этот диффеоморфизм переводит векторное поле W_h в векторное поле w_h . \square

Отметим, что нерегулярные значения h гамильтониана H будут явно выписаны при построении бифуркационных диаграмм (см. раздел 5.2.4).

Отметим также, что указанную процедуру регуляризации системы можно было описать и без перехода к двулистному накрытию $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Однако, как оказалось, рассмотрение такой “накрывающей” системы сильно упрощает вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга (описанное ниже в разделах 5.2.5–5.2.8).

5.2.4. Бифуркационные диаграммы

Отображение момента для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы определяется как отображение $\mathbf{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке $x \in M$ фазового пространства системы пару чисел (h, k) , где h — значение гамильтониана H , а k — значение дополнительного интеграла K в точке x .

Точка (h, k) называется *регулярным* значением отображения момента \mathbf{F} , если ее прообраз не содержит критических точек отображения \mathbf{F} .

Назовем точку $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ *правильной*, если для некоторой окрестности U этой точки в плоскости значений отображения момента \mathbf{F} , ее прообраз $\mathbf{F}^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times F^{-1}(h, k)$, а отображение \mathbf{F} на этом прообразе есть проекция на первый сомножитель.

Отметим, что в общем случае точка (h, k) может быть правильной, но не являться регулярным значением, а также может являться регулярным значением, но не быть правильной (однако в случае, когда фазовое пространство M компактно, из регулярности следует правильность).

Бифуркационной диаграммой отображения момента называется множество точек в образе, для которых нарушается либо условие регулярности, либо условие правильности. (Иногда это множество называют также *расширенной бифуркационной диаграммой*, а бифуркационной диаграммой — образ множества критических точек; для компактного фазового пространства эти понятия совпадают.)

Для рассматриваемой задачи фазовое пространство не является компактным. Более того, некомпактны даже изоэнергетические поверхности из-за того, что гамильтониан имеет особенности (как функция на $T^*\mathbb{S}^2$). Однако мы будем исследовать топологию “регуляризованной” системы, для которой изоэнергетические поверхности уже компактны. А именно: вместо поверхности $\{H = h\}$ мы будем рассматривать поверхность $\{F_h = 0\}$ и исследовать ее слоение на поверхности уровня дополнительного интеграла. После этого, учитывая действие инволюции, мы получим описание аналогичного слоения для регуляризованной изоэнергетической поверхности исходной системы.

При этом в качестве дополнительного интеграла на поверхности $\{F_h = 0\}$ можно взять вместо функции L (см. раздел 5.2.2), которая имеет особенности, другую функцию, не имеющую особенностей. Например, в качестве такой функции можно взять функцию

$$K_h = 2L + \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u - \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v}{\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v} F_h.$$

Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} K_h = & \frac{p_u^2 - p_v^2}{2} + h \left(\cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v - \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u \right) - \\ & - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v. \end{aligned} \quad (37)$$

Следующее утверждение проверяется прямым вычислением.

Лемма 33. Пусть F_h и K_h — функции на $T^*\mathbb{T}^2$, заданные соответственно формулами (35) и (37). Тогда

$$1) \{F_h, K_h\} \equiv 0,$$

2) множество $\{F_h = 0, K_h = k\}$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} p_u^2 &= 2h \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{R} \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + k, \\ p_v^2 &= 2h \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v + \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{R} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v - k, \end{aligned} \quad (38)$$

3) при диффеоморфизме, описанном в п. 3) теоремы 34, точки множества $\{F_h = 0, K_h = 2l\}$ переходят в точки множества $\{H = h, L = l\}$. \square

Таким образом, построение бифуркационной диаграммы отображения момента для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере можно провести следующим образом. Для каждого значения h найти критические точки функции K_h , ограниченной на поверхность $\{F_h = 0\}$, а затем объединить полученные критические значения в кривые с параметром h на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Второе утверждение леммы, фактически, означает, что эти критические значения соответствуют “кратным корням” функций стоящих в правых частях уравнений (38). Находя те пары (h, l) (где $k = 2l$), для которых такие корни существуют, получаем ответ.

Бифуркационные диаграммы изображены на рис. 34. Верхняя диаграмма — для случая $0 < \delta < \pi/2$. При $\delta > \pi/2$ качественный вид бифуркационной диаграммы такой же, но особые точки (т. е. точки касания и точки пересечения бифуркационных кривых) могут быть расположены по-разному в зависимости от соотношения величин $\cos \delta$ и γ_1/γ_2 . Два примера бифуркационных диаграмм для случая $\delta > \pi/2$ приведены на рис. 34 внизу. Как будет ясно из дальнейшего, для исследования топологии рассматриваемой системы на некоторой изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{H = h\}$ существенным является лишь взаимное расположение вертикальной прямой $\{h = \text{const}\}$ и особых точек бифуркационной диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, l)$. Используя приведенные ниже явные формулы, несложно проверить, что всего возможно 12 вариантов такого расположения. Они соответствуют изоэнергетическим поверхностям с различными инвариантами Фоменко–Цишанга (см. теоре-

мы 36 и 37). Вертикальные прямые h_i ($1 \leq i \leq 12$) указаны на рис. 34. При этом здесь (и всюду в дальнейшем) предполагается, что $\gamma_1 > \gamma_2$.

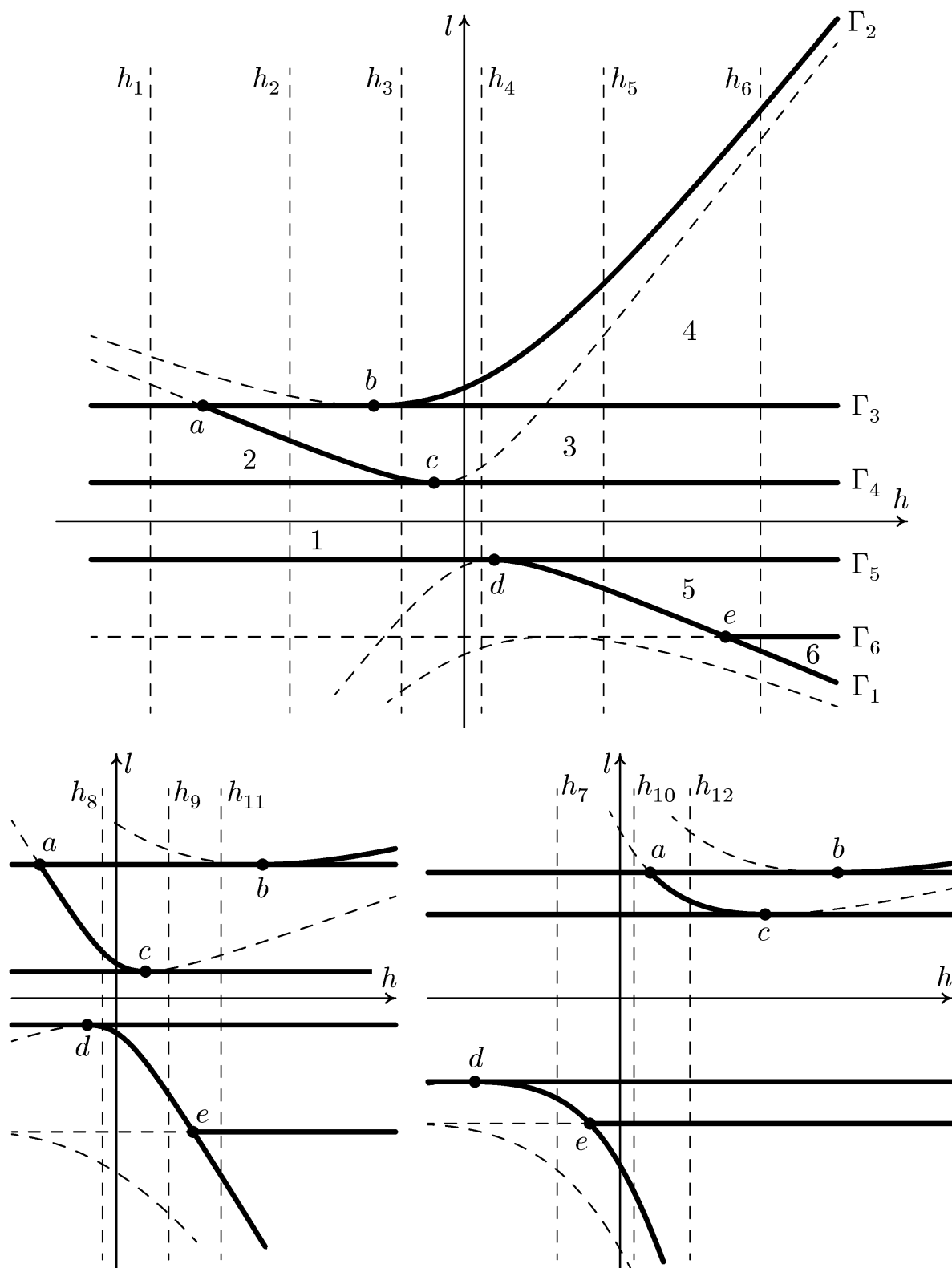


Рис. 34: Бифуркационные диаграммы

Уравнения бифуркационных кривых:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : (2l - h \cos \delta)^2 - h^2 &= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{R^2}, & \Gamma_3 : l &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta, & \Gamma_5 : l &= -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta, \\ \Gamma_2 : (2l - h \cos \delta)^2 - h^2 &= \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}{R^2}, & \Gamma_4 : l &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta, & \Gamma_6 : l &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta. \end{aligned}$$

Точки касания гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_4 и Γ_5 имеют координаты

$$c = \left(-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta \right), \quad d = \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta \right).$$

Точка касания гиперболы Γ_2 с прямой Γ_3 имеет координаты

$$b = \left(-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right).$$

Точки пересечения гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_3 и Γ_6 имеют координаты

$$\begin{aligned} a &= \left(-\frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cos \delta + 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{R \sin \delta}, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right), \\ e &= \left(\frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cos \delta + 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{R \sin \delta}, -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right). \end{aligned}$$

Последним двум точкам соответствуют два нерегулярных значения h гамильтониана. Остальные значения гамильтониана регулярны.

Бифуркационное множество разбивает образ отображения момента на области так, что при движении точки внутри такой области торы Лиувилля в прообразе этой точки не испытывают бифуркаций. Таким образом, каждой области соответствует определенное число торов Лиувилля. Эти числа можно определить, исследуя функции (38) (это сделано в разделе 5.2.6). На рис. 34 номера областей отмечены цифрами 1–6. Как показано в разделе 5.2.6 (см. рис. 35 и рис. 36, на которых номера 1–6 соответствуют номерам областей на рис. 34), для областей 1, 3, 5 в прообразах точек лежит один тор, а для областей 2, 4, 6 — два тора.

5.2.5. Боттовость интеграла

Как было отмечено выше, инварианты Фоменко–Цишанга определены для изоэнергетических поверхностей, на которых дополнительный интеграл является боттовским. Для произвольных интегрируемых систем проверка боттовости дополнительного интеграла обычно нетривиальна. Однако для систем, в которых переменные разделяются (как в рассматриваемой задаче) вычисления значительно упрощаются.

В рассматриваемой задаче проверка боттовости интеграла, фактически, сводится к проверке невырожденности критических точек функций (от одной переменной), определяемых правыми частями формул (38). Вычисляя, получаем следующее утверждение.

Теорема 35. *Дополнительный интеграл K_h является боттовским на всех неособых изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$ кроме тех, для которых h является абсциссой одной из точек касания бифуркационных кривых.* \square

Таким образом, для изоэнергетических поверхностей Q_h^3 рассматриваемой системы, где h не является абсциссой какой-либо из точек касания или пересечения бифуркационных кривых, определены инварианты Фоменко–Цишанга (их вычислению посвящена оставшаяся часть раздела 5.2). Согласно теореме 4 слоение Лиувилля в окрестностях критических уровней интеграла K_h описывается некоторыми 3-атомами.

Как будет показано ниже, для формулировки ответа (списка инвариантов Фоменко–Цишанга) нам понадобятся лишь следующие четыре 3-атома: A , B , C_2 (которые являются прямыми произведениями двумерных атомов, изображенных на рис. 1 и 2, на окружность S^1 и обозначаются теми же буквами) и $A^* = (B \times S^1)/\mathbb{Z}_2$.

Эти 3-атомы описывают бифуркации торов Лиувилля при прохождении критического значения интеграла: 3-атому A соответствует рождение или исчезновение тора, 3-атому B — распад одного тора на два, или слияние двух торов в один, 3-атому A^* — перестройка одного тора в один тор, 3-атому C_2 — перестройка двух торов в два тора.

5.2.6. Области возможности движения

Исследование топологии натуральных механических систем удобно проводить при помощи проекции на конфигурационное пространство. Каждый тор Лиувилля при этом проектируется в некоторую область, которая называется *областью возможности движения* (для значений h и k гамильтониана H и интеграла K , определяющих данный тор).

Рассмотрим сначала проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство \mathbb{T}^2 , т. е. для “накрывающей системы”.

Каждый такой тор задается в $T^*\mathbb{T}^2$ уравнениями (38) с некоторыми константами h и k , т. е. уравнениями вида

$$p_u^2 = f(u), \quad p_v^2 = g(v).$$

Так как f и g — функции от разных переменных, проекция тора Лиувилля есть некоторая область на торе \mathbb{T}^2 , ограниченная линиями вида $\{u = \text{const}\}$ и $\{v = \text{const}\}$. При этом в каждую внутреннюю точку (u, v) этой области проектируется по 4 точки $(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)}) \in T^*\mathbb{T}^2$, а на границе области эти точки попарно склеиваются в 2 точки или 1 точку.

Таким образом, вид проекции тора Лиувилля, задаваемого константами h и k , полностью определяется знаками выражений $f(u)$ и $g(v)$ из формул (38) и одинаков для всех точек (h, k) , лежащих в одной и той же области, на которые бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$ на 6 областей, отмеченных цифрами на рис. 34 (здесь $k = 2l$; см. лемму 33). Определяя знаки выражений $f(u)$ и $g(v)$ для каждой из этих областей, получаем следующие проекции торов Лиувилля (см. рис. 35).

На рис. 35 тор \mathbb{T}^2 изображается в виде прямоугольника, состоящего из четырех прямоугольников плоскости с координатами (u, v) (см. рис. 33). При этом черные и белые вершины имеют тот же смысл, что и на рис. 33, а заштрихованным прямоугольникам на рис. 33 соответствуют левый нижний и правый верхний прямоугольники на рис. 35. Заштрихованные области на рис. 35 изображают проекции торов Лиувилля.

В некоторые из заштрихованных областей на рис. 35 проектируются сразу несколько торов Лиувилля. В каждом из 6 случаев их количество однозначно определяется видом проекции. Действительно, 4 точки $(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)})$, проектирующиеся во внутреннюю точку (u, v) заштрихованной области, при подходе этой точке к границе области склеиваются следующим образом: на горизонтальных от-

резках точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с точкой $(u, v, \sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$, а точка $(u, v, -\sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с точкой $(u, v, -\sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$; на вертикальных отрезках точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, -\sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$, а точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, -\sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$. Отсюда получаем, что в область на рис. 35 (1) проектируется 1 тор, в каждую из двух областей на рис. 35 (2) и рис. 35 (5) — тоже по 1 тору, в область на рис. 35 (3) — 2 тора, и в каждую из двух областей на рис. 35 (4) и рис. 35 (6) — по 2 тора.

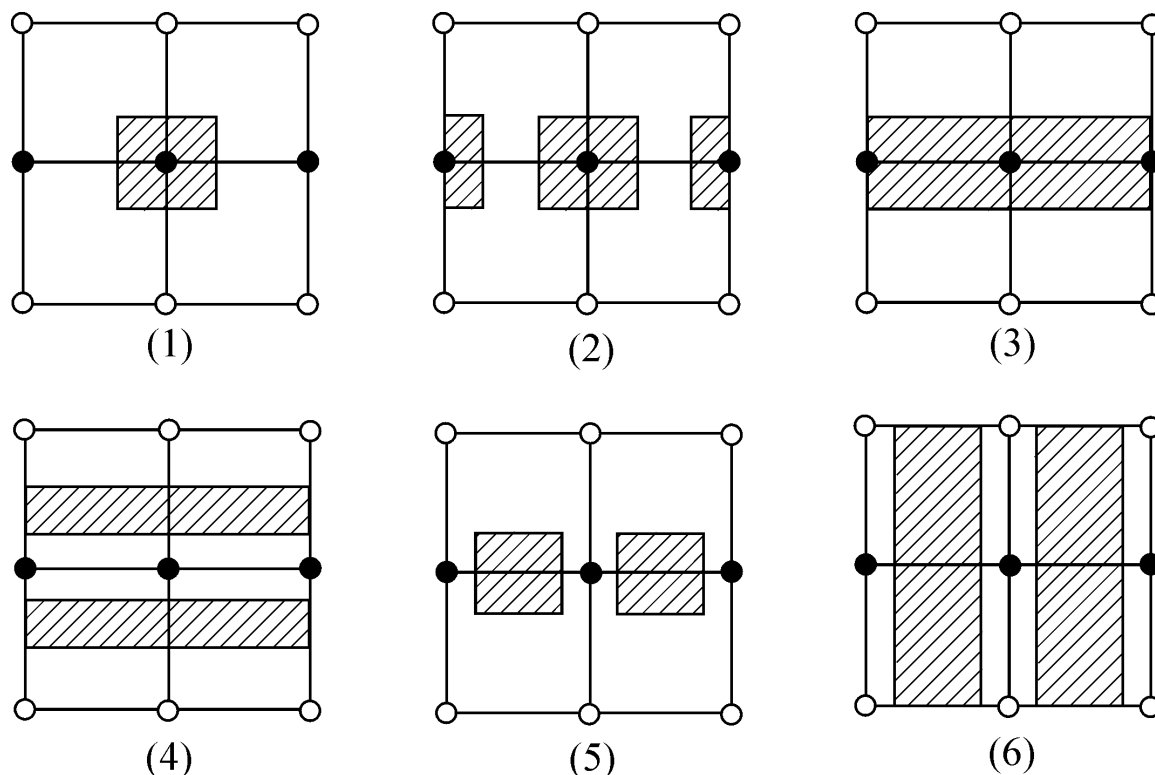


Рис. 35: Проекция торов Лиувилля на \mathbb{T}^2

Перестройки торов Лиувилля при переходе точки (h, k) через бифуркационные кривые также можно определить, рассматривая перестройки соответствующих областей возможности движения, изображенных на рис. 35. После этого уже можно вычислить инварианты Фоменко–Цишанга, описывающие слоение Лиувилля на поверхностях $\{F_h = 0\}$ при различных значениях h .

Напомним, что наша основная цель — исследование топологии системы на $T^*\mathbb{S}^2$, а не на $T^*\mathbb{T}^2$, т. е. на поверхностях $\{F_h = 0\}/\sigma^*$. (Вычисления для этого случая более сложные и подробно описаны ниже в разделах 5.2.7 и 5.2.8.) Поэтому для “системы на торе \mathbb{T}^2 ” приведем лишь ответ.

Теорема 36 (Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков [17]). Для системы с гамильтонианом F_h на $T^*\mathbb{T}^2$ полный список инвариантов Фоменко–Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на поверхностях $\{F_h = 0\}$ (при различных значениях параметров $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ и h), состоит из 12 молекул, перечисленных в таблице 5 (номер i в таблице соответствует прямой h_i на рис. 34). \square

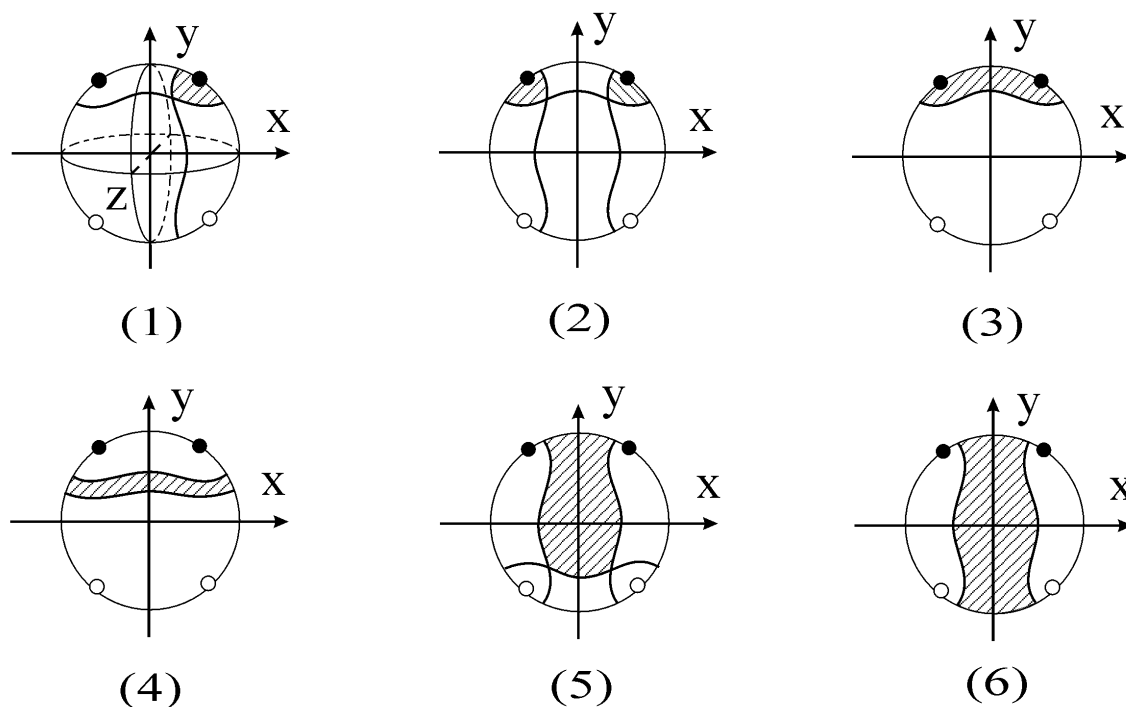


Рис. 36: Проекция торов Лиувилля на S^2

Области возможности движения для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере получаются из областей возможности движения, изображенных на рис. 35, в результате факторизации их по действию инволюции $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Они приведены на рис. 36 (номера 1–6 на рис. 36 соответствуют номерам областей на рис. 34). Количество торов Лиувилля для каждого из шести случаев, соответствующих шести областям на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, можно установить, учитывая как действует инволюция $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$ (см. формулу (36)). В результате получаем, что в случаях 1, 2, 3, 5 на рис. 36 в каждую из областей (дисков) проектируется по одному тору Лиувилля, а в случаях 4 и 6 в каждую из областей (колец) проектируется по два тора. Отметим, что в случаях 4 и 6 проекции траекторий, лежащих на одном торе, при изменении направления на них переходят в проекции траекторий, лежащих на втором торе, который проектируется в то же кольцо.

Таблица 5: Список инвариантов для системы на покрывающем торе

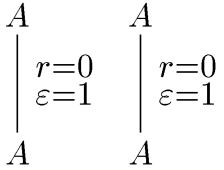
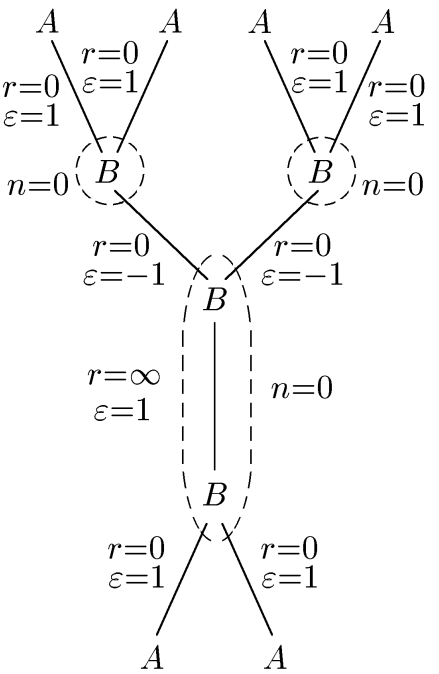
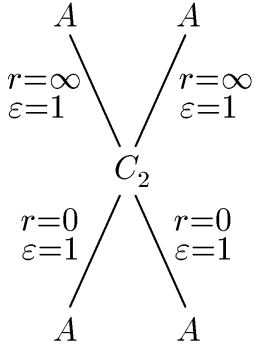
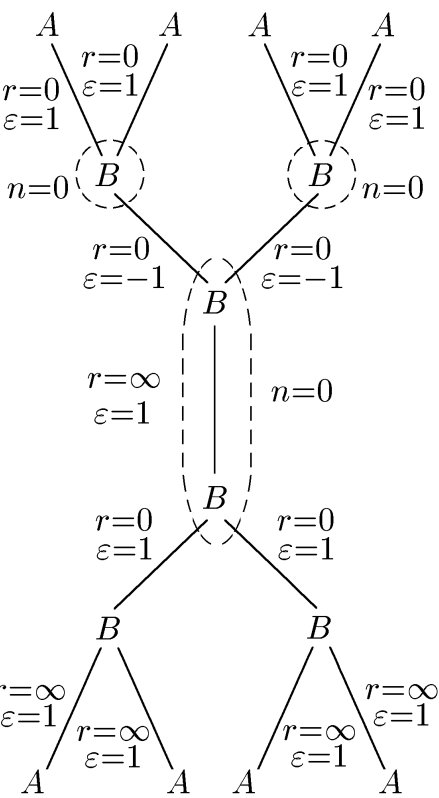
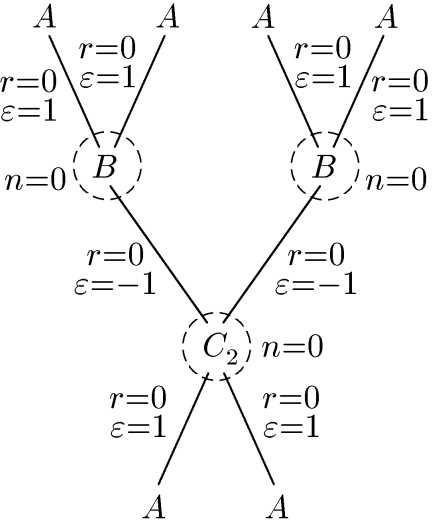
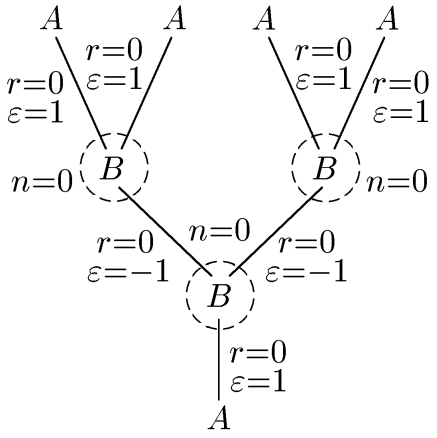
N	Молекула (изоэнергетическая)	N	Молекула (изоэнергетическая)
1		5	
2		6	
3			
4			

Таблица 5: Список инвариантов для системы на накрывающем торе (продолжение)

N	Молекула (изоэнергетическая)	N	Молекула (изоэнергетическая)
7		10	
8		11	
9		12	

5.2.7. Построение допустимых систем координат

Для того, чтобы вычислить инварианты Фоменко–Цишанга (меченые молекулы), описывающие топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$, необходимо сделать следующее:

1) определить тип перестроек торов Лиувилля в прообразе точки (h, k) , движущейся вдоль прямой $\{h = \text{const}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, при пересечении этой точкой бифуркационной диаграммы;

2) описать склейки граничных торов Лиувилля для прообразов отрезков вида $\{|k - k_1| \leq \varepsilon\}$, $\{|k - k_2| \leq \varepsilon\}$, лежащих на прямой $\{h = \text{const}\}$, где значения k_1, k_2 соответствуют двум последовательным бифуркациям (т. е. для пары 3-атомов молекулы, соединенных ребром).

Для описания склеек граничных торов Лиувилля нужно специальным образом выбрать на них базисные циклы (построить *допустимые системы координат*) и после этого выписать матрицы склейки в этих базисах. Общее правило для выбора таких циклов описано в [12]. При вычислениях, проводимых ниже, в каждом конкретном случае будет сформулировано нужное условие на эти циклы.

Ясно, что для построения молекул, соответствующих произвольным значениям h , достаточно описать бифуркации и допустимые системы координат для каждой бифуркационной кривой, т. е. для всех возможных переходов $i \rightarrow j$ (из области с номером i в область с номером j) через некоторую бифуркационную кривую. При этом будем считать, что мы всегда переходим из “нижней” области в “верхнюю” (это корректно, так как в рассматриваемом случае бифуркационные кривые не имеют вертикальных касательных; см. рис. 34). Из рис. 34 видно, что всего возникает 12 вариантов:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2, & \quad 2 \rightarrow 3, & \quad 3 \rightarrow 4, & \quad 1 \rightarrow 3, & \quad 5 \rightarrow 1, & \quad 6 \rightarrow 5, \\ \emptyset \rightarrow 1, & \quad 2 \rightarrow \emptyset, & \quad 3 \rightarrow \emptyset, & \quad 4 \rightarrow \emptyset, & \quad \emptyset \rightarrow 5, & \quad \emptyset \rightarrow 6, \end{aligned}$$

где через \emptyset обозначена область, состоящая из точек с пустым прообразом.

Проекции торов Лиувилля, изображенные на рис. 35, имеют простой вид (грубо говоря, при этих проекциях торы “складываются” по двум или четырем циклам,

превращаясь в “прямоугольные” области). Кроме того их перестройки также хорошо описываются в терминах этих проекций. Однако, для того чтобы описать допустимые системы координат на каком-либо торе, его удобно “развернуть”, превратив в плоский прямоугольник (соответственно в два или четыре раза больший, чем проекция). После этого надо еще учесть действие инволюции σ^* на этой “развертке”, чтобы получить уже изображение тора Лиувилля для рассматриваемой системы на сфере.

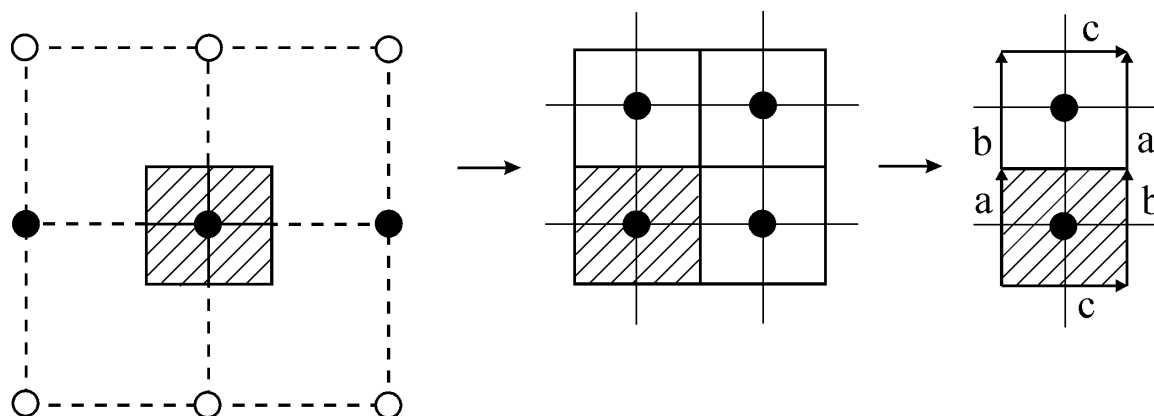


Рис. 37: “Разворачивание” и факторизация торов Лиувилля

На рис. 37 изображена описанная процедура для случая (1) из рис. 35. Сначала мы “разворачиваем” тор, получая из 4 маленьких прямоугольников, наложенных друг на друга, один прямоугольник, в 4 раза больший. При этом будем считать, что положение одного из маленьких прямоугольников не изменилось (он на рисунке заштрихован), т. е. что для него по-прежнему горизонтальная ось есть ось u , а вертикальная — ось v . Пусть этот прямоугольник состоит из точек, для которых $p_u, p_v \geq 0$.

Таким образом, после первого шага тор изображен в виде большого прямоугольника, противоположные стороны которого отождествляются при помощи сдвигов, параллельных осям. На втором шаге мы факторизуем этот тор по инволюции σ^* . Здесь надо учесть, что мы рассматриваем именно инволюцию σ^* , а не σ . Поэтому надо рассмотреть не просто центральную симметрию относительно центра заштрихованного прямоугольника, а ее композицию с центральной симметрией относительно центра большого прямоугольника (которая соответствует замене (p_u, p_v)

на $(-p_u, -p_v)$. Получаем, что инволюция σ^* на данном торе есть сдвиг на вектор, совпадающий с диагональю заштрихованного прямоугольника.

Таким образом, тор Лиувилля для системы на сфере изображается в виде прямоугольника (состоящего из двух маленьких прямоугольников), стороны которого склеиваются так, как показано на рис. 37 (надо отождествить стороны, отмеченные одинаковыми буквами).

Аналогичным образом (в виде *разверток*) мы будем изображать торы Лиувилля и для остальных случаев (2)–(6) из рис. 35. Здесь нужно отметить, что мы изображаем развертки торов Лиувилля *после* факторизации по инволюции σ^* . При этом в заштрихованную часть на развертке при факторизации попадают те точки, для которых $p_u, p_v > 0$. Единственный случай, где при таком подходе возникает неоднозначность, — это случай (5) на рис. 35. Здесь предполагается, что в заштрихованную часть развертки при факторизации попадают те точки, удовлетворяющие условию $p_u, p_v > 0$, которые проектировались в *левый* (заштрихованный) прямоугольник на рис. 35 (5). Кроме того, для всех разверток кроме случаев (1) и (2) стороны прямоугольников отождествляются горизонтальными и вертикальными сдвигами, а для случаев (1) и (2) — так, как показано на рис. 37. Эти соглашения всегда будут использоваться в дальнейшем при изображении допустимых систем координат на развертках торов Лиувилля.

Сделаем еще одно замечание. Для каждого из граничных торов 3-атомов базисные циклы λ, μ допустимой системы координат должны быть подходящим образом ориентированы. Если считать, что ориентация в фазовом пространстве гамильтоновой системы задается формой $\omega \wedge \omega$ (где ω — симплектическая структура), а ориентация на изоэнергетических поверхностях определяется “нормалью” $\text{grad } H$ (относительно какой-нибудь метрики), то на торах Лиувилля возникает естественная ориентация, определяемая “нормалью” $\text{grad } K$.

При описанном выше способе изображения торов Лиувилля эту ориентацию на развертках можно определить следующим образом: *ориентацию, задаваемую на заштрихованном прямоугольнике развертки тора координатами u, v , будем считать положительной*. Ясно, что тем самым ориентация определена на всех торах.

Далее, на граничных торах 3-атома будем выбирать базисные циклы λ, μ таким образом, чтобы на “верхних” торах они задавали положительную ориентацию, а на “нижних” — отрицательную (напомним, что в данной задаче мы всегда рассматриваем бифуркации при переходе из “нижней” области бифуркационной диаграммы в “верхнюю”). Пару циклов на каждом верхнем торе 3-атома будем обозначать (λ^-, μ^-) , а на каждом нижнем торе — (λ^+, μ^+) .

Теперь перейдем к описанию допустимых систем координат для перечисленных 12 случаев.

Случаи вида $i \rightarrow \emptyset$ или $\emptyset \rightarrow i$. Эти бифуркации соответствуют 3-атому A . У этого 3-атома только один граничный тор, который либо стягивается на осевую окружность, либо, наоборот, рождается из нее в процессе бифуркации. При проекции на конфигурационное пространство эта окружность проектируется в вертикальный или горизонтальный отрезок. Эти две возможности соответствуют тому, что при подходе точки к граничной бифуркационной кривой либо функция $f(u)$, либо функция $g(v)$ стремится к нулю (см. раздел 5.2.6). Определяя, какая из этих двух возможностей реализуется, получаем, что в случаях $\emptyset \rightarrow 1, \emptyset \rightarrow 5, \emptyset \rightarrow 6$ критические окружности проектируются в вертикальные отрезки, а в случаях $2 \rightarrow \emptyset, 3 \rightarrow \emptyset, 4 \rightarrow \emptyset$ — в горизонтальные.

Правило выбора цикла λ для 3-атома A следующее: этот цикл должен стягиваться в точку при стягивании тора на ось полнотория (3-атома A). Дополнительный цикл μ выбирается так, чтобы при этом стягивании тора его направление стремилось к направлению потока $\text{sgrad } H$ на критической окружности (и чтобы пара λ, μ была правильно ориентирована — см. выше). Отметим, что цикл μ определен неоднозначно.

Отсюда, учитывая правило выбора ориентации и то, что для заштрихованного прямоугольника $p_u, p_v \geq 0$, получаем допустимые системы координат на граничном торе 3-атома A для всех 6 случаев $\emptyset \rightarrow 1, \emptyset \rightarrow 5, \emptyset \rightarrow 6$ и $2 \rightarrow \emptyset, 3 \rightarrow \emptyset, 4 \rightarrow \emptyset$. Ответ приведен на рис. 38.

Напомним, что для первых двух перестроек, изображенных на рис. 38, склейки прямоугольников производятся так, как показано на рис. 37. Поэтому, в частности,

изображение цикла λ на рис. 38 для перестройки $\emptyset \rightarrow 1$ получается в виде двух кусков.

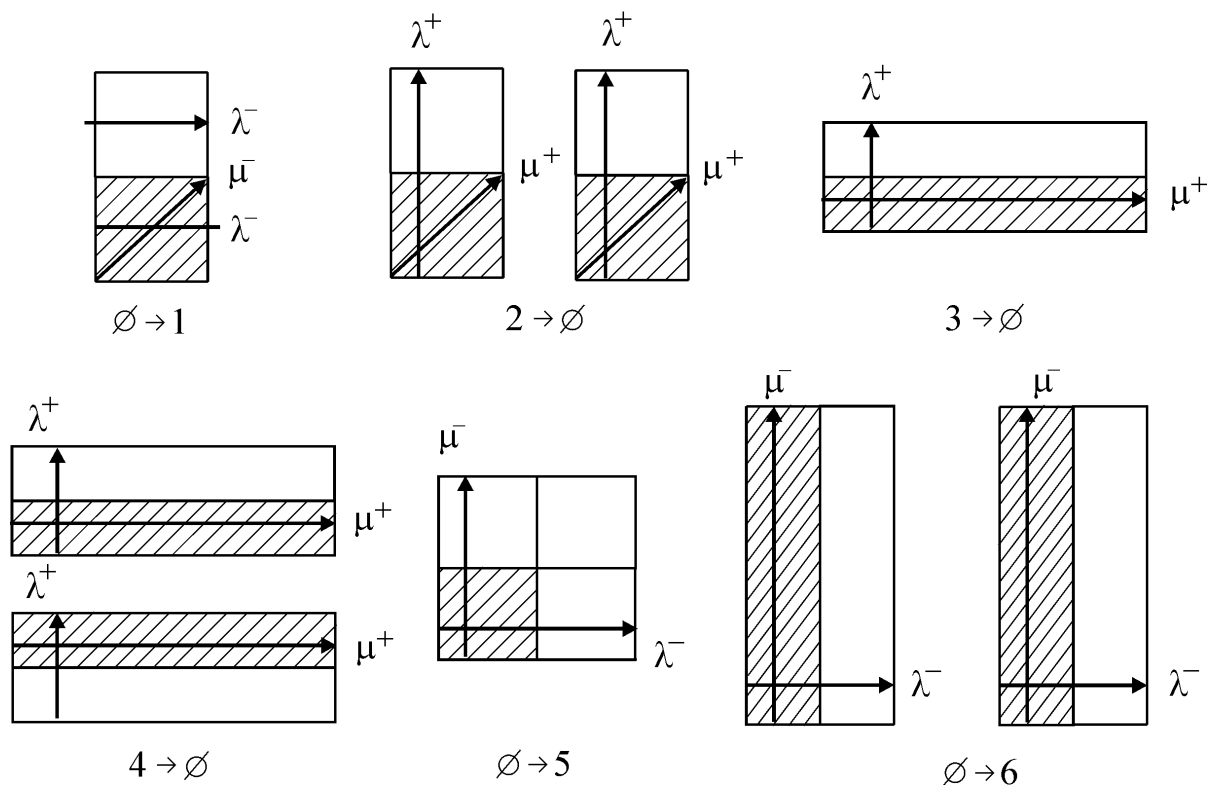


Рис. 38: Допустимые системы координат на 3-атомах A

Случай $1 \rightarrow 2$. В этом случае происходит следующее: один тор (который был в области 1) не изменяется, но появляется второй тор. Это происходит точно так же, как и при перестройке $\emptyset \rightarrow 1$, описанной выше (см. рис. 38).

Случай $2 \rightarrow 3$. В этом случае два тора перестраиваются в один. Эта бифуркация описывается 3-атомом B .

Правило выбора циклов для 3-атома B следующее: если рассматривать 3-атом B как (тривиальное) расслоение на окружности над окрестностью восьмерки, то циклы λ должны совпадать со слоем этого расслоения и быть сонаправленными потоку на критической окружности, а циклы μ должны ограничивать некоторую двумерную поверхность, являющуюся трансверсальным сечением этого расслоения. Кроме того, как и выше остается условие правильной ориентации базиса λ, μ .

Аналогично предыдущему устанавливается, что критическая окружность проектируется в вертикальный отрезок. Поэтому в качестве слоев можно взять вертикальные отрезки.

Тогда циклы μ , высекаемые на трех граничных торах 3-атома B глобальным сечением расслоения, можно представить следующим образом. Если рассматривать на торах Лиувилля циклы $a = \{u = \text{const}\}$ и $b = \{v = \text{const}\}$, то циклы μ имеют вид $a+b$ (пока без ориентации). Указанное семейство циклов μ склеивается в глобальное сечение и при этом трансверсально слоям $\{u = \text{const}\}$. Учитывая соглашения об ориентации, получаем допустимые системы координат в рассматриваемом случае (рис. 39).

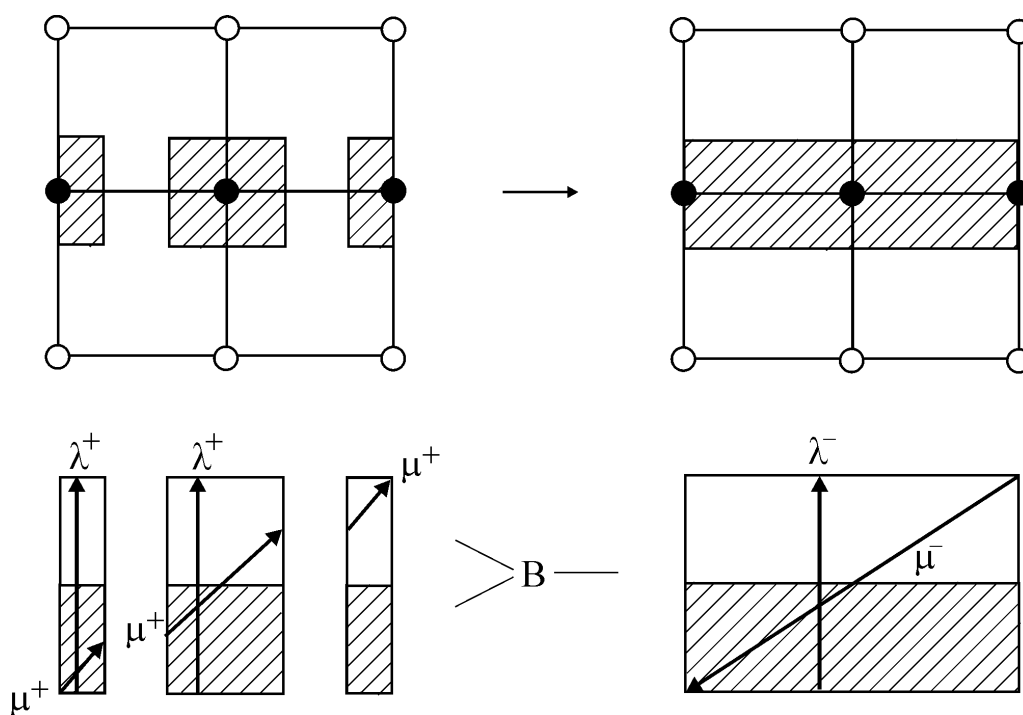


Рис. 39: Допустимая система координат на 3-атоме B (случай $2 \rightarrow 3$)

Случай $3 \rightarrow 4$. Эта бифуркация, как и в предыдущем случае, описывается 3-атомом B , но здесь, наоборот, один тор распадается на два тора.

Правило выбора циклов λ, μ в данном случае — такое же, как и для 3-атома B в случае $2 \rightarrow 3$.

Критическая окружность, очевидно, проектируется в горизонтальный отрезок. Поэтому циклы λ имеют вид $\{v = \text{const}\}$.

Каждый из заштрихованных прямоугольников на рис. 35 (3,4) изображает проекции двух торов Лиувилля (для одного прямоугольника $p_u > 0$, для другого $p_u < 0$), но при факторизации эти торы отождествляются. Поэтому можно считать, что для разверток граничных торов Лиувилля (рассматриваемого 3-атома B) заштрихованная часть, как обычно, соответствует точкам, где $p_u, p_v > 0$.

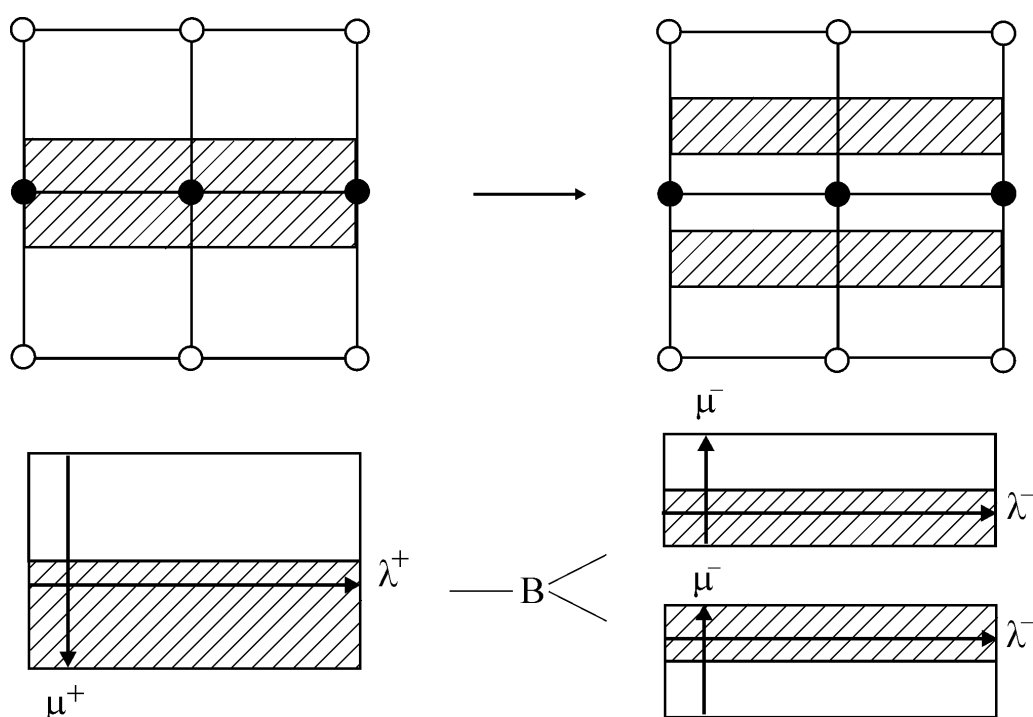


Рис. 40: Допустимая система координат на 3-атоме B (случай $3 \rightarrow 4$)

В качестве циклов μ , высекаемых глобальным сечением, можно взять циклы $\{u = \text{const}\}$.

Учитывая сформулированное выше правило выбора ориентаций на циклах λ, μ , получаем допустимые системы координат на трех граничных торах 3-атома B (см. рис. 40).

Случай $6 \rightarrow 5$. Здесь, как и в двух предыдущих случаях, перестройка двух торов в один описывается 3-атомом B . Критическая окружность проектируется в горизонтальный отрезок, поэтому циклы λ задаются условием $\{v = \text{const}\}$. Глобальное сечение можно выбрать так, что высекаемые им циклы на всех торах (циклы μ) будут изображаться вертикальными отрезками.

Как и выше, учитывая правило ориентации циклов λ, μ , получаем ответ (см. рис. 41).

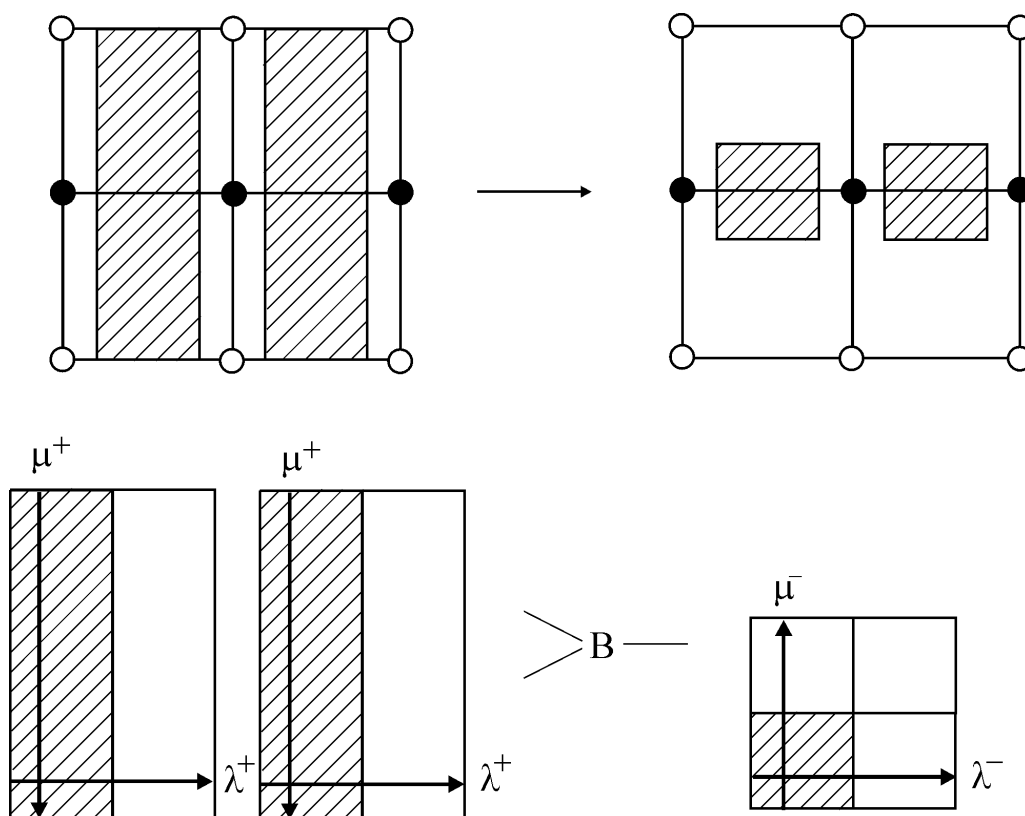


Рис. 41: Допустимая система координат на 3-атоме B (случай $6 \rightarrow 5$)

Случай $1 \rightarrow 3$. В данном случае происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая 3-атомом A^* .

На этом 3-атоме определена структура ориентированного слоения Зейферта с одним особым слоем (критическая окружность). Циклы λ в данном случае однозначно определены как слои этого слоения. Очевидно, что при изображении торов в виде разверток в качестве слоев можно рассматривать вертикальные отрезки. При этом

циклы λ ориентированы снизу вверх (так как на заштрихованной части развертки $p_u, p_v > 0$).

Один из циклов μ^+, μ^- можно выбрать произвольно (но, конечно, так, чтобы соответствующая пара циклов λ, μ образовывала базис на торе и была правильно ориентирована). Выберем цикл μ^- на верхнем торе 3-атома A^* в виде горизонтального отрезка (см. рис. 42).

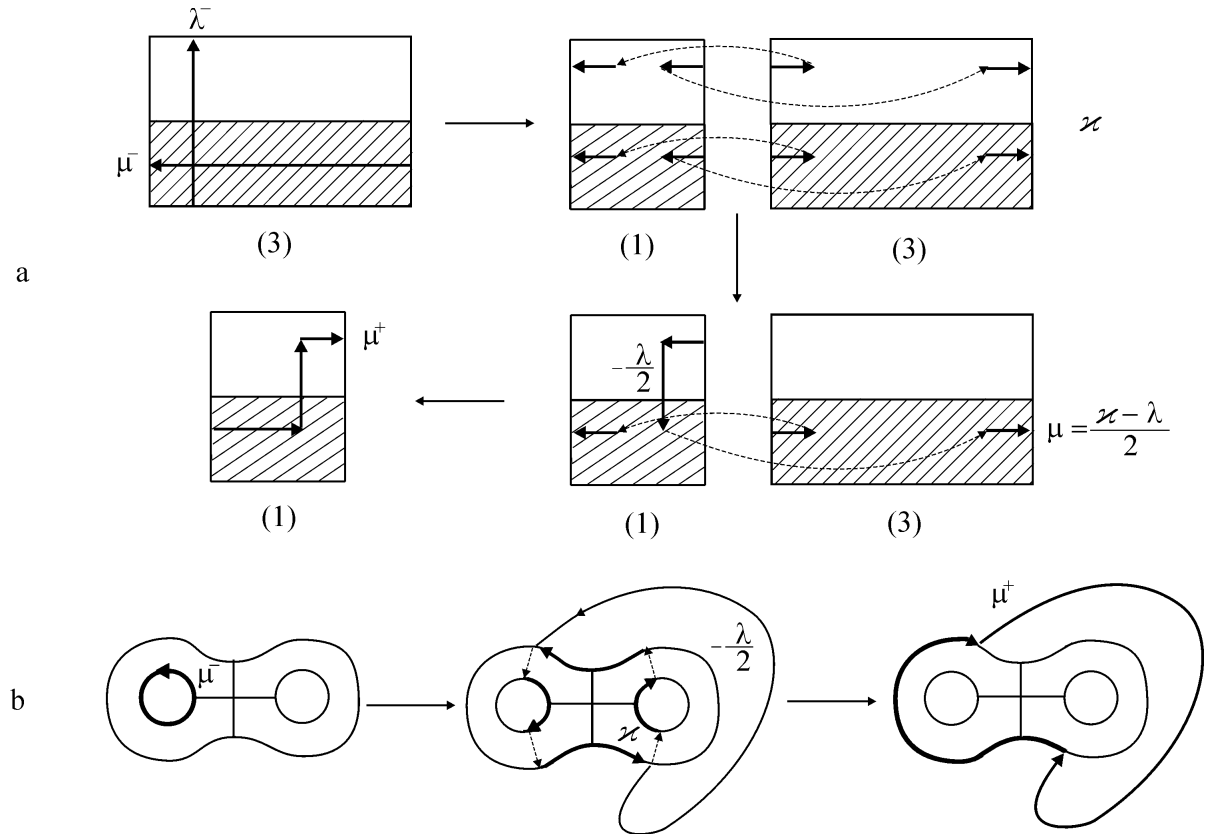


Рис. 42: Построение допустимой системы координат для 3-атома A^*

После того как цикл μ^- зафиксирован, правило выбора цикла μ^+ следующее. На границе окрестности критической окружности (особого слоя слоения Зейферта) имеются два однозначно определенных цикла: λ — слой; \varkappa — цикл, который стягивается в этой окрестности в точку. Ориентируем цикл \varkappa так, чтобы пара циклов λ, \varkappa была положительно ориентирована (напомним, что цикл λ ориентирован, так как на особом слое задано направление потоком $\text{sgrad } H$). Тогда на границе окрестности особого слоя однозначно определяется некоторый цикл μ из условия $\lambda + 2\mu = \varkappa$.

Теперь, удалив из 3-атома A^* окрестность особого слоя, нужно построить сечение слоения Зейферта (уже без особых слоев), совпадающее на верхнем торе 3-атома A^* с циклом μ^- , а на границе окрестности особого слоя — с циклом μ . Такое сечение определено однозначно и тем самым высекает некоторый цикл на втором (нижнем) торе 3-атома A^* . Ориентировав этот цикл в соответствии с правилом ориентации, получим цикл μ^+ .

Процесс построения цикла μ^+ изображен на рис. 42 (а) в виде разверток, а на рис. 42 (b) — в более наглядном виде с использованием “удвоенного” сечения слоения Зейферта (см. [12]). Пунктирные стрелки на рис. 42 (а) изображают сдвиг по направлению, трансверсальному семейству торов Лиувилля (вдоль потока $\pm \text{grad } K$); они соответствуют пунктирным частям цикла \varkappa на рис. 35 (b). Отметим также, что боковые стороны разверток на рис. 35 (а) соответствуют циклам, высекаемым сепаратрисами на граничных торах Лиувилля 3-атома A^* . При этом надо учитывать, что для развертки (3) боковые стороны склеиваются, как обычно, горизонтальными сдвигами, а для развертки (1) — так, как показано на рис. 37.

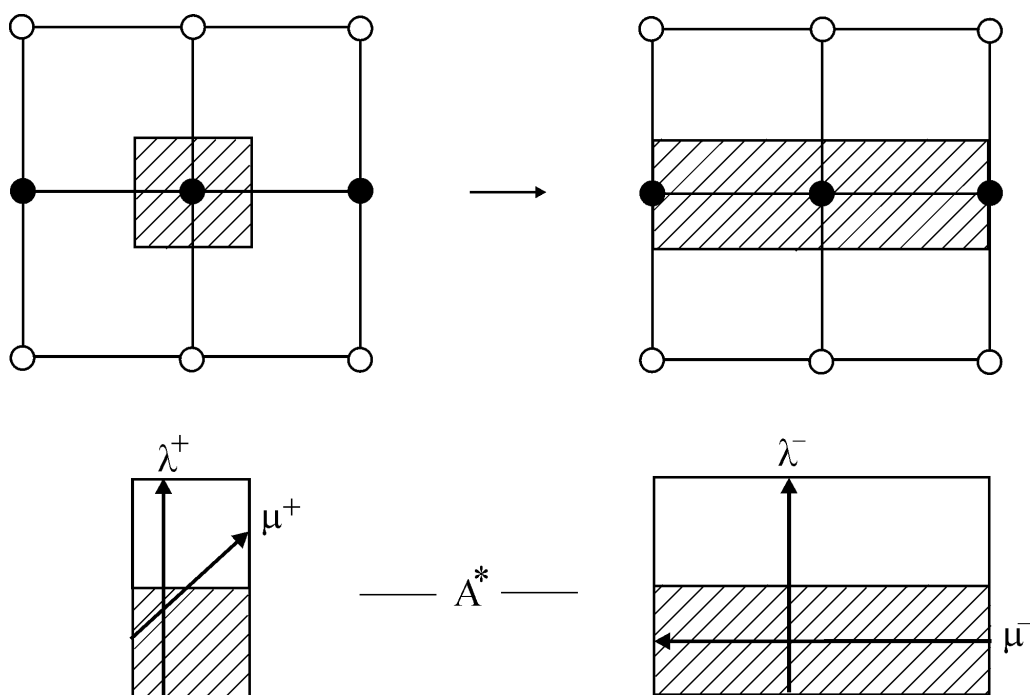


Рис. 43: Допустимая система координат на 3-атоме A^* (случай $1 \rightarrow 3$)

Окончательный ответ — допустимая система координат на 3-атоме A^* в случае $1 \rightarrow 3$ — изображен на рис. 43.

Случай $5 \rightarrow 1$. Здесь, как и в предыдущем случае, происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая 3-атомом A^* . Правило выбора циклов λ, μ и рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Поэтому приведем лишь окончательный ответ (см. рис. 44).

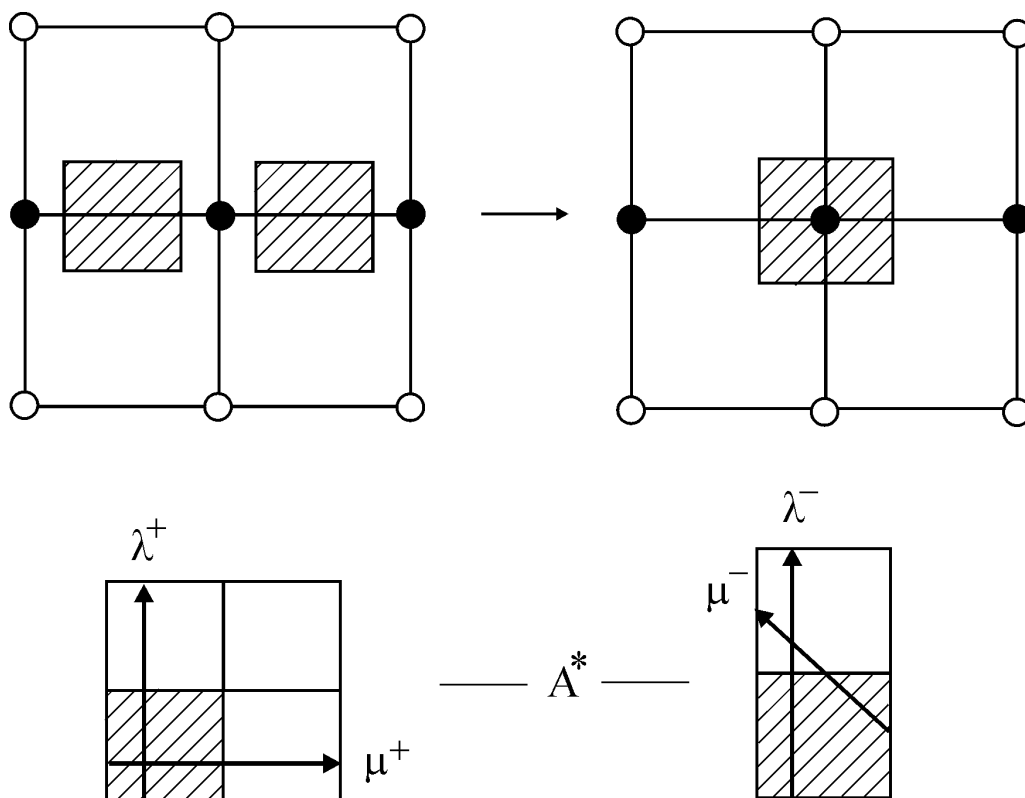


Рис. 44: Допустимая система координат на 3-атоме A^* (случай $5 \rightarrow 1$)

5.2.8. Построение молекул и вычисление меток

Итак, для всех возможных бифуркаций торов Лиувилля мы описали допустимые системы координат на граничных торах соответствующих 3-атомов. Изоэнергетическую поверхность можно представлять как результат склеек граничных торов 3-атомов. Тогда на каждом таком торе возникают две пары базисных циклов λ^-, μ^- и λ^+, μ^+ . Выражая циклы λ^+, μ^+ через циклы λ^-, μ^- получаем матрицы склейки для каждого ребра молекулы.

Пример построения молекулы изображен на рис. 45. Эта молекула соответствует прямой h_4 на рис. 34. Прямая h_4 пересекает бифуркационную диаграмму в четы-

рех точках, в которых происходят следующие перестройки: $\emptyset \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \emptyset$. Для каждого из трех однопараметрических семейств торов Лиувилля нужно взять циклы λ^-, μ^- и λ^+, μ^+ , построенные в разделе 5.2.7 (для данного примера см. рис. 38, 40, 43).

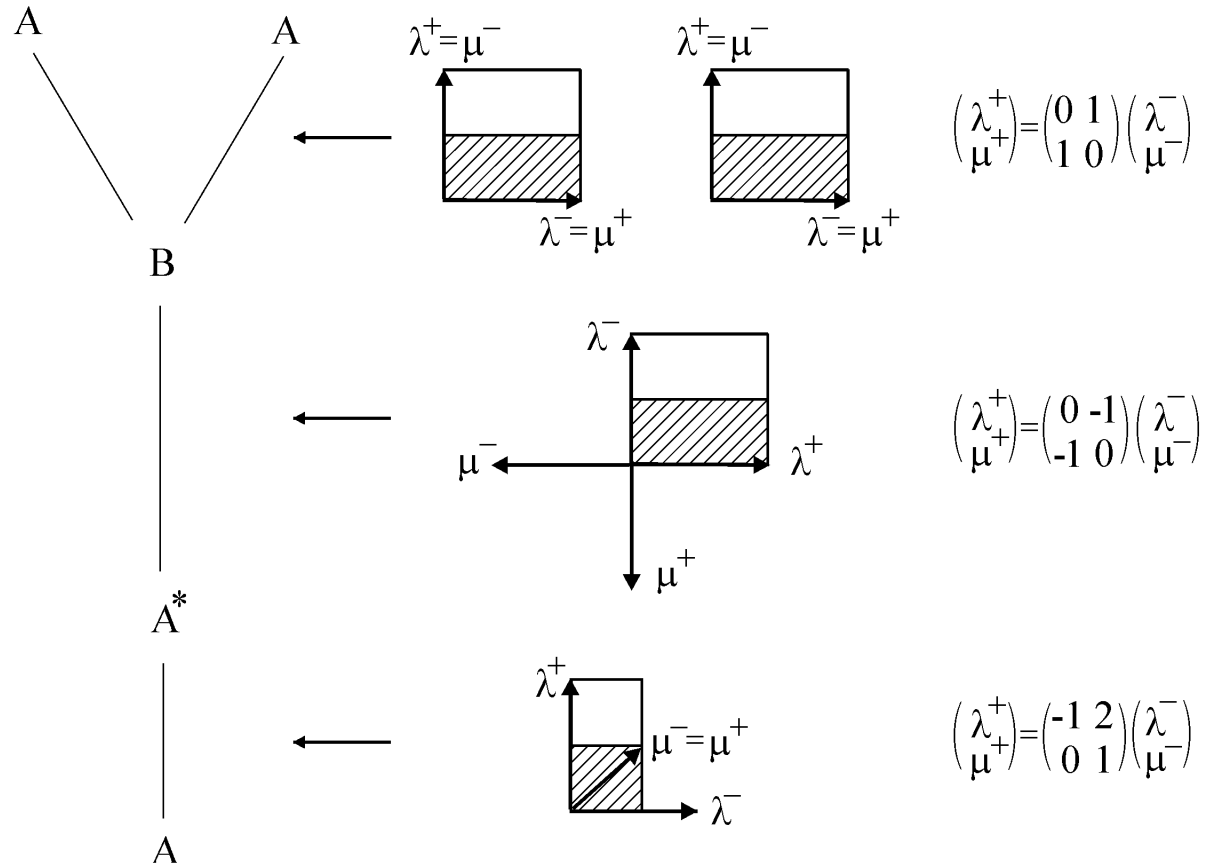


Рис. 45: Пример построения молекулы (для прямой h_4)

Аналогичным образом строятся молекулы для всех прямых h_1-h_{12} , отмеченных на рис. 34.

Молекулы с матрицами склейки полностью описывают топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях. Однако матрицы склейки определены неоднозначно (в силу неоднозначности выбора допустимых систем координат). Поэтому окончательный ответ удобно привести в виде меченых молекул (инвариантов Фоменко–Цишанга). Метки, кодирующие информацию о матрицах склейки, определены уже однозначно. Определение меток и формулы для их вычисления см. в [12].

Теорема 37 (Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков [17]). Для задачи двух центров на двумерной сфере полный список инвариантов Фоменко–Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $\{H = h\}$ (при различных значениях параметров $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ и h), состоит из 12 молекул, перечисленных в таблице 6 (номер i в таблице соответствует прямой h_i на рис. 34). \square

Для каждого из 12 случаев в таблице 6 кроме молекул с метками, приведенных во втором столбце, в третьем столбце изображены те же молекулы с матрицами склеек для допустимых систем координат, построенных в разделе 5.2.7.

Бифуркационная диаграмма для рассматриваемой задачи имеет особые точки (точки трансверсального пересечения и точки касания бифуркационных кривых). Топологию слоения Лиувилля в окрестности таких точек удобно описывать при помощи круговых молекул, которые соответствуют трехмерным поверхностям в фазовом пространстве системы, являющимся прообразами маленьких окружностей с центрами в этих особых точках (см. [12], [10]).

Напомним, что мы исследуем топологию системы, полученной в результате регуляризации задачи двух центров (см. раздел 5.2.3). В частности, топология слоения Лиувилля исследовалась отдельно на каждой изоэнергетической поверхности, а не во всем фазовом пространстве. Поэтому, строго говоря, при таком подходе круговые молекулы для рассматриваемой системы не являются обычными круговыми молекулами. Однако формально мы можем их построить аналогично тому, как это было сделано для изоэнергетических молекул.

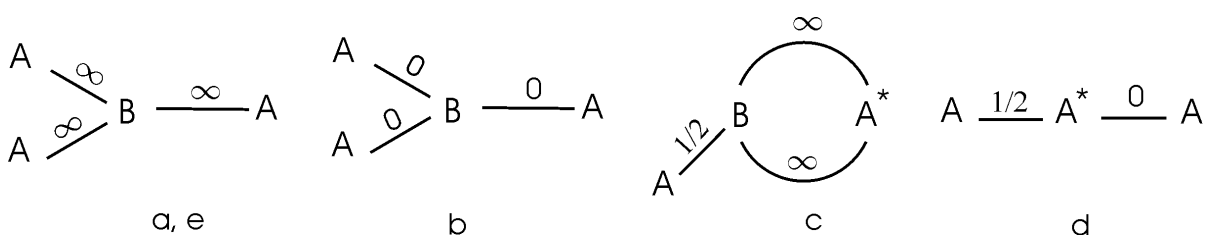


Рис. 46: Круговые молекулы особых точек бифуркационной диаграммы

Круговые молекулы (с r -метками) для всех пяти особых точек, отмеченных на рис. 34 буквами a, b, c, d, e , приведены на рис. 46. Они имеют тот же вид, что и круговые молекулы для типичных особых точек, встречающихся в классических

Таблица 6: Список инвариантов для задачи двух центров на сфере

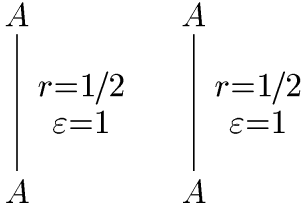
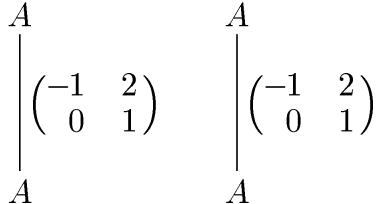
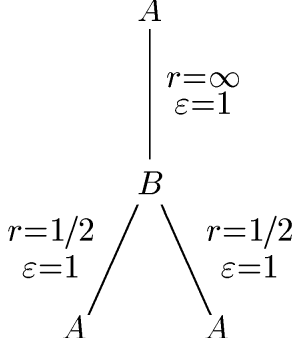
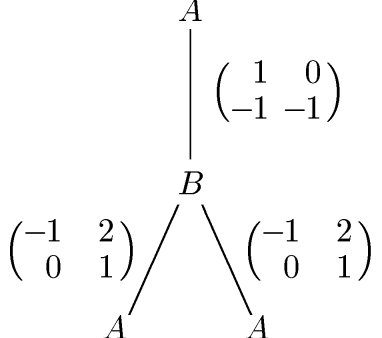
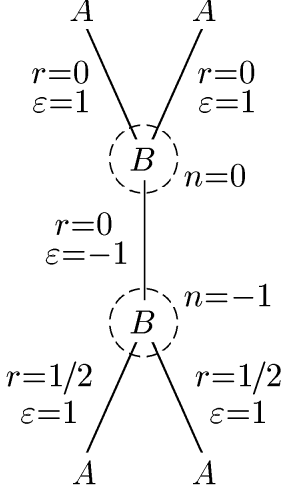
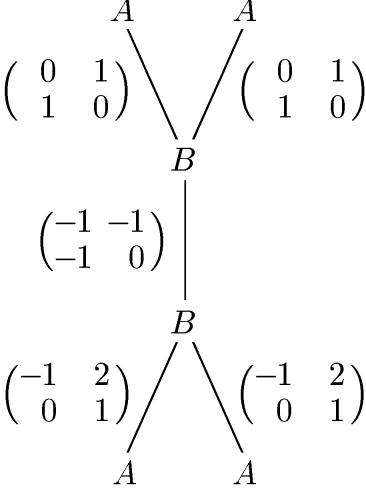
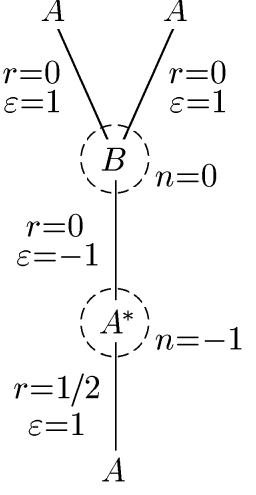
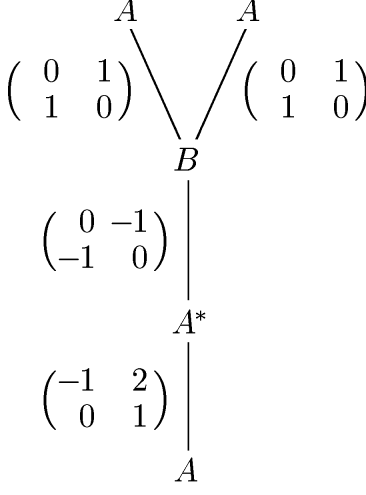
N	Молекула (изоэнергетическая)	
1		
2		
3		
4		

Таблица 6: Список инвариантов для задачи двух центров на сфере (продолжение)

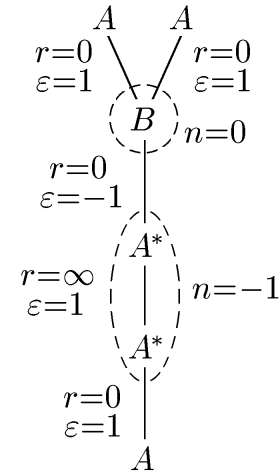
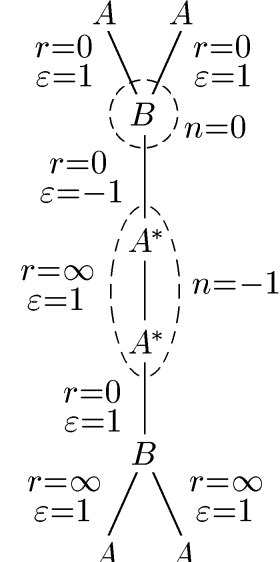
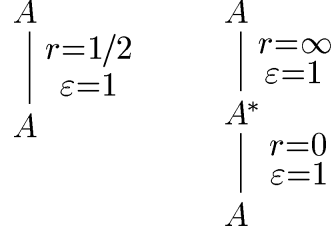
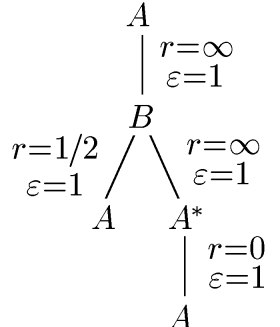
N	Молекула (изоэнергетическая)	
5		$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & A \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \setminus & / \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ & B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \Big \\ & A^* \\ & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \Big \\ & A^* \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \Big \\ & A \end{array}$
6		$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & A \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \setminus & / \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ & B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \Big \\ & A^* \\ & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \Big \\ & A^* \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \Big \\ & B \\ \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) / & \backslash \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \\ A & A \end{array} \end{array}$
7		$\begin{array}{cc} A & A \\ \Big \left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \Big \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \\ A & A^* \\ & \Big \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ & A \end{array}$
8		$\begin{array}{c} A \\ \Big \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \\ B \\ \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) / & \backslash \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \\ A & A^* \\ & \Big \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ & A \end{array}$

Таблица 6: Список инвариантов для задачи двух центров на сфере (продолжение)

N	Молекула (изоэнергетическая)	
9	$ \begin{array}{c} A \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ A^* \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ A^* \\ \quad r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A \end{array} $
10	$ \begin{array}{c} A \\ \quad r=1/2 \\ \varepsilon=1 \\ A \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ A^* \\ \quad r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \\ / \quad r=\infty \quad \backslash \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \quad A \quad \varepsilon=1 \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B \\ / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \backslash \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A \quad A \end{array} $
11	$ \begin{array}{c} A \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ A^* \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ A^* \\ \quad r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \\ / \quad r=\infty \quad \backslash \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \quad A \quad \varepsilon=1 \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B \\ / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \backslash \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A \quad A \end{array} $
12	$ \begin{array}{c} A \\ \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \\ B \\ / \quad r=1/2 \quad \backslash \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \quad A \quad \varepsilon=1 \quad A^* \\ \quad r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \\ / \quad r=\infty \quad \backslash \quad r=\infty \\ \varepsilon=1 \quad A \quad \varepsilon=1 \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B \\ / \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \backslash \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A \quad A^* \\ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B \\ / \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \backslash \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A \quad A \end{array} $

случаях интегрируемости (см. [12], [10]). Для точек a и e круговые молекулы совпадают с круговыми молекулами точек типа центр-седло, для точки b — с круговой молекулой особенности, называемой “вилка” (“pitch-fork”), а для точек c и d — с круговыми молекулами особенностей, являющихся соответственно гиперболическим и эллиптическим “удвоением периода” (“period-doubling”).

5.3. Многомерный волчок Эйлера–Манакова

В этом разделе мы исследуем некоторые свойства особенностей отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы на алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, описывающей динамику n -мерного твердого тела.

Наш подход основан на использовании свойства бигамильтоновости этой системы и одна из целей такого рассмотрения — продемонстрировать, что предлагаемый метод может быть успешно применен к различным системам, обладающим бигамильтоновой структурой.

5.3.1. Бигамильтоновы системы

Напомним сначала некоторые определения и факты о бигамильтоновых системах.

Кососимметричное тензорное поле $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{ij})$ типа $(2, 0)$ на гладком многообразии M называется *пуассоновой структурой*, если операция на $C^\infty(M)$, определенная формулой

$$\{f, g\} = \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad \text{для любых } f, g, h \in C^\infty(M).$$

В этом случае пространство гладких функций $C^\infty(M)$ имеет естественную структуру бесконечномерной алгебры Ли, и $\{, \}$ называется *скобкой Пуассона*.

Рангом пуассоновой структуры (скобки) \mathcal{A} в точке x называется ранг кососимметричной матрицы $\mathcal{A}^{ij}(x)$. Рангом пуассоновой структуры \mathcal{A} на многообразии M называется ее ранг в точке общего положения, т. е.

$$\text{rank } \mathcal{A} = \max_{x \in M} \text{rank } \mathcal{A}^{ij}(x).$$

Мы будем предполагать, что все рассматриваемые пуассоновы структуры вещественно-аналитичны и, значит, точки общего положения образуют открытое всюду плотное подмножество в M .

Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Казимира* пуассоновой структуры \mathcal{A} , если $\{f, g\} \equiv 0$ для любой гладкой функции g . Будем обозначать множество всех функций Казимира для пуассоновой структуры \mathcal{A} через $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Любая функция Казимира f характеризуется также следующим условием: $df(x) \in \text{Ker } \mathcal{A}(x)$ в каждой точке $x \in M$. Если пуассонова структура \mathcal{A} вырождена, т. е. $\text{rank } \mathcal{A} < \dim M$, то локально в окрестности точки общего положения функции Казимира всегда существуют и число функционально независимых функций Казимира равно *корангу пуассоновой структуры* $\text{corank } \mathcal{A} = \dim M - \text{rank } \mathcal{A}$, т. е. дифференциалы функций Казимира порождают ядро скобки $\mathcal{A}(x)$ в точке общего положения x .

Определение 53. Две пуассоновы структуры \mathcal{A} и \mathcal{B} называются *согласованными* если их сумма $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ (или, что то же самое, их произвольная линейная комбинация с постоянными коэффициентами) снова является пуассоновой структурой. Система называется *бигамильтоновой*, если она гамильтонова относительно двух согласованных скобок Пуассона \mathcal{A} и \mathcal{B} .

Бигамильтоновость системы дает возможность построить для нее “большой” набор коммутирующих интегралов с помощью так называемой схемы Магри–Ленара (см. [93], [94]). Изложим одну из версий этой процедуры.

Рассмотрим на многообразии M семейство (пучок) согласованных скобок Пуассона $\mathcal{P} = \{\lambda' \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \mid \lambda', \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Замечание 40. Линейные комбинации $\lambda' \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}$ удобно рассматривать с точностью до пропорциональности. Поэтому можно положить $\lambda' = 1$, но допустить,

чтобы λ могло принимать значение ∞ . Далее мы будем использовать обозначение $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ (предполагая, что $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ или $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$) и иногда писать \mathcal{A}_∞ вместо \mathcal{B} .

Предположим, что все $\mathcal{A}_\lambda \in \mathcal{P}$ вырождены, i.e. $\text{rank } \mathcal{A}_\lambda < \dim M$. Определим *ранг пучка* \mathcal{P} как

$$\text{rank } \mathcal{P} = \max_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \text{rank } \mathcal{A}_\lambda.$$

Скобки Пуассона \mathcal{A}_λ , ранг которых максимален в семействе \mathcal{P} , т. е. $\text{rank } \mathcal{A}_\lambda = \text{rank } \mathcal{P}$, будем называть *общими*. Аналогично, для любой точки $x \in M$ определим $\text{rank } \mathcal{P}(x)$ как $\max_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \text{rank } \mathcal{A}_\lambda(x)$ и будем говорить о пуассоновых структурах *общих в точке* x . (Обычно мы будем писать \mathcal{A}_μ для общей пуассоновой структуры и \mathcal{A}_λ для произвольной пуассоновой структуры из пучка.)

Следующее утверждение показывает, как построить “большой” набор коммутирующих интегралов для бигамильтоновой системы.

Предложение 22. Пусть $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ — алгебра, порожденная (относительно обычного умножения функций) функциями Казимира всех общих пуассоновых структур $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{P}$.

1) Семейство $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ коммутативно относительно любой пуассоновой структуры пучка $\mathcal{A}_\lambda \in \mathcal{P}$.

2) Если динамическая система $\dot{x} = v(x)$ гамильтонова относительно каждой общей пуассоновой структуры $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{P}$, то каждая функция из $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ является ее первым интегралом. \square

Отметим, что в предложении 22 ничего не говорится о количестве N функционально независимых интегралов в семействе $\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Напомним, что *условие полноты* для семейства $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ (которое гарантирует интегрируемость по Лиувиллю системы $\dot{x} = v(x)$ на M) выглядит следующим образом:

$$N = \frac{1}{2}(\dim M + \text{corank } \mathcal{P}).$$

Сформулируем также следующее эквивалентное определение (см. [7]).

Определение 54. Семейство \mathcal{F} коммутирующих функций на пуассоновом многообразии (M, \mathcal{A}) называется *полным*, если подпространство $d\mathcal{F}(x) \subset T_x^*M$, порожденное дифференциалами $df(x)$ всех функций $f \in \mathcal{F}$, максимально изотропно относительно \mathcal{A} для почти всех $x \in M$.

Поскольку мы хотим исследовать особенности интегрируемой бигамильтоновой системы, нас интересует множество тех точек $x \in M$, в которых условие полноты нарушается, т. е. падает размерность подпространства $d\mathcal{F}_P(x) \subset T_x M$.

Для описания этого множества (а также для проверки условия полноты всего семейства; см. [75]) полезна следующая теорема из линейной алгебры, описывающая канонический вид однопараметрического семейства (пучка) кососимметричных форм (см. [18], [114]).

Теорема 38 (теорема Жордана–Кронекера). Пусть A и B — кососимметричные билинейные формы на конечномерном комплексном векторном пространстве V . Тогда существует базис в V , в котором пучок $P = \{A + \lambda B\}$ имеет блочно-диагональный вид

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k(\lambda) \end{pmatrix}$$

с блоками $A_i(\lambda)$ следующих трех типов:

0	$\begin{matrix} \lambda_i - \lambda & 1 & & & \\ & \lambda_i - \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda_i - \lambda \end{matrix}$
$\begin{matrix} \lambda - \lambda_i & & & & \\ -1 & \lambda - \lambda_i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & \lambda - \lambda_i \end{matrix}$	0

0	$\begin{matrix} 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} -1 & & & & \\ -\lambda & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\lambda & -1 \end{matrix}$	0

жорданов блок для $\lambda_i \in \mathbb{C}$

жорданов блок для $\lambda_i = \infty$

0	$ \begin{array}{cccc} 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda \end{array} $
$ \begin{array}{cccc} -1 & & & \\ -\lambda & -1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & -\lambda \end{array} $	0

кронекеров блок

Также допускаются тривиальные (1×1) -блоки $A_i(\lambda) = (0)$.

Если $\text{rank } A_\mu = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rank } A_\lambda$, то форма A_μ является *общей*. Ясно, что почти все формы в P являются общими. Как легко видеть, особые значения λ (называемые *характеристическими числами* пучка) — это в точности те λ_i (включая $\lambda_i = \infty$), которые соответствуют жордановым блокам из разложения Жордана–Кронекера, указанного в теореме 38. *Кратность* характеристического числа λ_i определяется как сумма размеров тех жордановых блоков, в которых появляется λ_i . Ясно, что кратность здесь всегда является четным числом.

Будем говорить, что пучок $P = \{A + \lambda B\}$ (или его “жорданова” часть) *диагностируется*, если все жордановы блоки в разложении Жордана–Кронекера минимального размера, т. е. размера 2×2 .

Из теоремы Жордана–Кронекера не сложно получить следующие два утверждения.

Предложение 23. Пусть Z — подпространство в V , порожденное ядрами всех общих форм $A_\mu \in P$:

$$Z = \text{span}\{\text{Ker } A_\mu \mid A_\mu \text{ — общая форма}\}.$$

Тогда Z изотропно относительно любой формы $A_\lambda \in P$. □

Отметим, что предложение 22 сразу следует из этого чисто алгебраического факта.

Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие того, что Z *максимально изотропно*.

Предложение 24. *Следующие свойства пучка P эквивалентны:*

- 1) Z — *максимально изотропное подпространство относительно одной (выделенной) формы $A_{\lambda_0} \in P$;*
- 2) Z — *максимально изотропное подпространство относительно любой формы $A_\lambda \in P$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$;*
- 3) *разложение Жордана–Кронекера содержит только кронекеровы блоки;*
- 4) $A_\lambda \in P$ *имеет один и тот же ранг для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ (т. е. все A_λ являются общими формами).*

□

5.3.2. Описание системы

Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ как пространство кососимметричных $(n \times n)$ -матриц. Будем отождествлять $\mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{so}(n)^*$ с помощью формы Киллинга. Наряду с обычным матричным коммутатором $[X, Y] = XY - YX$ рассмотрим на $\mathfrak{so}(n)$ следующую операцию:

$$[X, Y]_C = XCY - YCX,$$

где C — некоторая симметричная матрица.

Легко проверяется, что операция $[X, Y]_C$ удовлетворяет тождеству Якоби и согласована со стандартным коммутатором в том смысле, что любая линейная комбинация $\lambda[\cdot, \cdot] + \lambda'[\cdot, \cdot]_C = [\cdot, \cdot]_{\lambda E + \lambda' C}$ также определяет структуру алгебры Ли на $\mathfrak{so}(n)$ (рассматриваемом как пространство кососимметричных матриц).

Переходя к двойственному пространству, можно сказать, что коммутаторы $[\cdot, \cdot]_{C+\lambda E}$ определяют пучок согласованных скобок Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}_{C+\lambda E}$ на $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n)^*$.

Гамильтонова система на $\mathfrak{so}(n)$, описывающая динамику n -мерного твердого тела, определяется следующим образом:

$$\dot{X} = [\phi(X), X], \quad (39)$$

где $\phi(X)$ определяется соотношением $[\phi(X), C] = [X, B]$, в котором B и C — симметричные матрицы, причем все собственные значения C различны. Можно проверить, что эта система является гамильтоновой относительно любой скобки из пучка $\{ , \}_{C+\lambda E}$ (см. [6], [60], [8]). Поэтому функции Казимира пучка $\{ , \}_{C+\lambda E}$ являются ее первыми интегралами (см. предложение 22). Можно также показать (см., например, [60], [8]), что эти функции Казимира могут быть выбраны в форме

$$\mathrm{Tr}(X(C + \lambda E)^{-1})^k,$$

и что это семейство коммутирующих функций эквивалентно (в смысле функциональной зависимости) набору интегралов

$$\mathrm{Tr}(X + \lambda C)^k,$$

найденных С. В. Манаковым [32]. Раскладывая полиномы $\mathrm{Tr}(X + \lambda C)^k$ в ряд по λ , можно получить естественный базис в этом семействе, состоящий из однородных полиномов. Не сложно проверить, что все коэффициенты при нечетных степенях X равны нулю и эта процедура дает в точности $s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{so}(n) + \mathrm{ind} \mathfrak{so}(n))$ нетривиальных коммутирующих полиномов (при этом если n четно, то вместо $\mathrm{Tr} X^n$ надо взять пфаффиан матрицы X , т. е. $\sqrt{\det X}$). Обозначим полученный набор однородных полиномов через

$$\mathcal{F}_C = \{G_1, \dots, G_s\}. \quad (40)$$

То, что построенные полиномы G_1, \dots, G_s функционально независимы,

Функциональная независимость полиномов (40) следует из общей теоремы, доказанной А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко для произвольных полупростых алгебр Ли в работе [37], где был предложен общий “метод сдвига аргумента”, позволяющий строить примеры интегрируемых систем на широком классе алгебр Ли. Для рассматриваемой системы это утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 39 (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [37]). *Пусть все собственные значения матрицы C различны. Тогда набор полиномов \mathcal{F}_C является полным коммутативным набором на $\mathfrak{so}(n)$.*

Наша цель — исследовать особенности отображения момента для интегрируемой системы (39), т. е. особенности отображения

$$\Phi_C : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbb{R}^s, \quad \Phi_C(X) = (G_1(X), \dots, G_s(X)), \quad s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{so}(n) + \text{ind } \mathfrak{so}(n)). \quad (41)$$

Мы получим описание множества особых точек для рассматриваемой системы как следствие более общей теоремы для бигамильтоновых систем, удовлетворяющим некоторым условиям общего положения и обладающим полным набором интегралов. Эти условия и критерий полноты, принадлежащий А. В. Болсинову, изложены в разделе 5.3.3.

5.3.3. Постановка задачи и критерий полноты

Рассмотрим многообразие M , на котором задан пучок $\mathcal{P} = \{\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}\}$ согласованных пуассоновых структур. Предполагая, что $\text{rank } \mathcal{P} < \dim M$, мы рассматриваем семейство $\mathcal{F}_\mathcal{P}$, порожденное функциями Казимира всех общих скобок Пуассона $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{P}$. Это семейство состоит из первых интегралов динамических систем, которые являются бигамильтоновыми относительно \mathcal{P} (см. предложение 22).

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что M и \mathcal{P} вещественно аналитичны и удовлетворяют следующим условиям.

Пусть по крайней мере для одной общей скобки, например $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, существуют глобальные функции Казимира f_1, \dots, f_k , дифференциалы которых порождают ядро скобки $\mathcal{A}(x)$ в каждой точке $x \in M$ максимального ранга, т. е.

$$\text{Ker } \mathcal{A}(x) = \text{span}\{df_1(x), \dots, df_k(x) \mid f_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})\} \quad \text{если } \text{rank } \mathcal{A}(x) = \text{rank } \mathcal{P}.$$

Более того, предполагается, что каждую из этих функций $f_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ можно “продеформировать” $f_i(x) \mapsto f_{i,\lambda}(x)$ так, чтобы $f_{i,\lambda}(x)$ были глобально определенными функциями Казимира для $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ (по крайней мере для малых λ), удовлетворяющими тому же свойству:

$$\text{Ker } \mathcal{A}_\lambda(x) = \text{span}\{df_{1,\lambda}(x), \dots, df_{k,\lambda}(x) \mid f_{i,\lambda} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_\lambda)\} \quad \text{если } \text{rank } \mathcal{A}_\lambda(x) = \text{rank } \mathcal{P}.$$

Пусть при этом функции $f_{i,\lambda}$ зависят от λ гладко. В частности, мы можем разложить их в ряд Тейлора по λ

$$f_{i,\lambda}(x) \simeq F_{i,0}(x) + \lambda F_{i,1}(x) + \lambda^2 F_{i,2}(x) + \cdots + \lambda^m F_{i,m}(x) + \dots$$

и затем взять коэффициенты $F_{i,m}$ в качестве функций, порождающих коммутативное семейство $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

Сформулированные предположения гарантируют, что в каждой точке $x \in M$ (такой, что $\text{rank } \mathcal{P} = \text{rank } \mathcal{P}(x)$) подпространство $d\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(x) = \text{span}\{df(x) \mid f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\}$, порожденное дифференциалами наших первых интегралов, совпадает с подпространством в T_x^*M , порожденным ядрами общих форм $\mathcal{A}_{\mu}(x)$.

Для семейства $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, определенного в предложении 22, из теоремы Жордана–Кронекера и предложения 24 можно вывести следующий критерий полноты.

Теорема 40 (А. В. Болсинов [75]). *Семейство $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ является полным тогда и только тогда, когда для точки общего положения $x \in M$ выполнено следующее условие “максимальности ранга”:*

$$\text{rank } \mathcal{A}_{\lambda}(x) = \text{rank } \mathcal{P} \quad \text{для всех } \lambda \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (42)$$

Рассуждения, приводящие к описанию множества особых точек, в разделе 5.3.4 существенно используют этот критерий, поскольку мы всегда будем предполагать, что рассматриваемой семейство $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ полно.

5.3.4. Множество особенностей

Рассмотрим бигамильтонову динамическую систему и алгебру $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ ее интегралов, порожденную функциями Казимира пучка скобок Пуассона $\mathcal{P} = \{\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Пусть эта алгебра полна. Тогда согласно критерию полноты (теорема 40) все скобки в пучке имеют один и тот же ранг.

Мы хотим описать критические точки для семейства $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Учитывая сделанные выше предположения, множество критических точек для семейства $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

$$K_{\mathcal{P}} = \{x \in M \mid \dim d\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(x) < \frac{1}{2}(\dim M + \text{corank } \mathcal{P})\}$$

можно описать следующим образом.

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество особых точек пуассоновой структуры \mathcal{A}_λ в M

$$S_\lambda = \{x \in M \mid \text{rank}(\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x)) < \text{rank } \mathcal{P}\}.$$

В частности, $S_\infty = \{x \in M \mid \text{rank } \mathcal{B}(x) < \text{rank } \mathcal{P}\}$. Рассмотрим также множество особых точек пучка \mathcal{P}

$$S_{\mathcal{P}} = \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} S_\lambda.$$

Во введенных обозначениях, утверждение о множестве критических точек выглядит так: $K_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}}$.

Сформулируем это также более явно.

Теорема 41. *Точка $x \in M$ является критической точкой для $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, что $x \in S_\lambda$. \square*

Обратимся теперь к системе, рассмотренной в разделе 5.3.2 (многомерное твердое тело). Мы хотим описать множество K_C кососимметричных матриц $X \in \text{so}(n)$, где дифференциалы интегралов Манакова (40) линейно зависимы, т. е. множество критических точек отображения момента (41):

$$\Phi_C : \text{so}(n) \rightarrow \mathbb{R}^s, \quad s = \frac{1}{2}(\dim \text{so}(n) + \text{ind } \text{so}(n)).$$

Применение теоремы 41 к этой ситуации дает следующий ответ.

Теорема 42. *Кососимметричная $(n \times n)$ -матрица X является критической точкой для семейства \mathcal{F}_C (или, что то же самое, для отображения момента Φ_C) тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, что $X \in S_\lambda$, где $S_\lambda \subset \text{so}(n)$ — множество особых точек для скобки $\{ , \}_{C+\lambda E}$, т. е.*

$$K_C = \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} S_\lambda. \quad \square$$

Поскольку алгебра Ли \mathfrak{g}_λ (кососимметричные матрицы с коммутатором $[,]_{C+\lambda E}$) почти все изоморфны (после комплексификации), мы можем описать множество сингулярных точек для каждой из них, используя подходящий изоморфизм с “модельной алгеброй Ли” $\text{so}(n, \mathbb{C})$. Если $C + \lambda E$ невырождена, то такой изоморфизм можно задать так:

$$X \mapsto (C + \lambda E)^{1/2} X (C + \lambda E)^{1/2},$$

где $(C + \lambda E)^{1/2}$ — симметричная матрица (вообще говоря, комплексная). Отсюда следует, что особое множество S_λ для скобки $\{ , \}_{C+\lambda E}$ имеет вид

$$S_\lambda = \text{Re}((C + \lambda E)^{1/2} \text{Sing}(C + \lambda E)^{1/2}), \quad (43)$$

где $\text{Sing} \subset \text{so}(n, \mathbb{C})$ — объединение всех сингулярных орбит алгебры Ли $\text{so}(n, \mathbb{C})$ (алгебраическое подмногообразие коразмерности 3).

Получаем, что утверждение теоремы 42 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 43. *Кососимметричная $(n \times n)$ -матрица X является критической точкой для семейства \mathcal{F}_C (или, что то же самое, для отображения момента Φ_C) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *существует такое $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, что $\det(C + \lambda E) \neq 0$ и кососимметричная матрица $(C + \lambda E)^{-1/2} X (C + \lambda E)^{-1/2}$ является сингулярным элементом в $\text{so}(n, \mathbb{C})$;*

2) *X является сингулярным ковектором в смысле алгебры Ли, определенной на пространстве кососимметричных матриц коммутатором $[,]_{C-c_i E}$, где $c_i \in \mathbb{R}$ — одно из собственных значений матрицы C .* \square

В случае $n = 4$ это описание выглядит достаточно просто, поскольку множество Sing есть просто объединение двух трансверсально пересекающихся трехмерных подпространств (они являются компонентами стандартного разложения $\text{so}(4) = \text{so}(3) \oplus \text{so}(3)$), а именно, $\text{Sing} \subset \text{so}(4, \mathbb{C})$ состоит из двух трехмерных подпространств

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & z_3 & -z_2 & z_1 \\ -z_3 & 0 & z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 & 0 & z_3 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 & z_1 \\ z_3 & 0 & -z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 & 0 & z_3 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующее утверждение.

Следствие 6. *Множество критических точек для интегралов Манакова \mathcal{F}_C при $n = 4$ имеет вид*

$$K_C = \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} (P_1^\lambda \cup P_2^\lambda),$$

где $P_i^\lambda = \text{Re}((C + \lambda E)^{1/2} P_i (C + \lambda E)^{1/2})$. \square

В частности, мы получили естественную параметризацию множества критических точек отображения момента для 4-мерного твердого тела четырьмя параметрами z_1, z_2, z_3, λ (ср. [40]).

5.3.5. Положения равновесия

Пусть, как и выше, $\mathcal{P} = \{\mathcal{A}_\lambda\}$ — пучок согласованных пуассоновых структур на многообразии M , а $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ — соответствующая алгебра, порожденная функциями Казимира общих скобок $\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{P}$ (которая предполагается полной на M).

Пусть x — точка на регулярном симплектическом листе пуассоновой структуры $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Будем говорить, что x — *положение равновесия* для $\mathcal{F}_\mathcal{P}$, если $\text{sgrad}_\mathcal{A} f(x) = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$, где через $\text{sgrad}_\mathcal{A} f(x)$ обозначен косой градиент функции f относительно пуассоновой структуры \mathcal{A} .

Теорема 44. *Точка $x \in M$ является положением равновесия для $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда ядра $\text{Ker } \mathcal{A}_\mu(x)$ всех скобок, являющихся общими в этой точке, совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ядра всех скобок (общих в точке x) совпадают, то для любой функции $f \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_\mu)$ из ядра общей скобки имеем $df(x) \in \text{Ker } \mathcal{A}_\mu(x) = \text{Ker } \mathcal{A}(x)$ и, следовательно, $\text{sgrad}_\mathcal{A} f(x) = 0$. Поскольку семейство $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ порождено функциями Казимира всех общих скобок, мы получаем, что $\text{sgrad}_\mathcal{A} f(x) = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Наоборот, если точка x является положением равновесия для $\mathcal{F}_\mathcal{P}$, то $df(x) \in \text{Ker } \mathcal{A}(x)$ для любой функции $f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$, т. е. $\text{span}\{df(x) \mid f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\} = \text{Ker } \mathcal{A}(x)$. Но поскольку семейство $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ порождено функциями Казимира всех общих скобок, это пространство содержит ядра всех общих скобок. Значит, $\text{Ker } \mathcal{A}_\mu(x) = \text{Ker } \mathcal{A}(x)$ для любой общей скобки \mathcal{A}_μ . \square

Рассмотрим теперь положения равновесия для системы (39) (многомерное твердое тело).

Пусть $X \in \text{so}(n)$ — регулярный элемент. Согласно теореме 44, кососимметричная матрица X является положением равновесия для алгебры, порожденной интегра-

лами (40) тогда и только тогда, когда ядро скобки $\{ , \} = \{ , \}_E$ совпадает с ядром скобки $\{ , \}_C$.

Ядро скобки $\{ , \}$ в точке X — это подалгебра Картана $\mathfrak{h}_X \subset \mathfrak{so}(n)$, порожденная X (т. е. централизатор элемента X в $\mathfrak{so}(n)$). Поэтому это ядро описывается уравнением

$$XY - YX = 0. \quad (44)$$

Для того, чтобы найти ядро скобки $\{ , \}_C$, можно использовать то же соображение, но надо учесть что мы всегда рассматриваем $\mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{so}(n)^*$ как пространство кососимметричных матриц, отождествляя их при помощи формы Киллинга (для алгебры кососимметричных матриц с обычным коммутатором) $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY)$, а для алгебры Ли, определенной коммутатором $[,]_C$ на пространстве кососимметричных матриц, форма Киллинга имеет вид $\langle X, Y \rangle_C = \text{Tr}(CXC Y)$. Учитывая это замечание, получаем, что ядро скобки $\{ , \}_C$ в точке X описывается условием

$$[C^{-1}XC^{-1}, Y]_C = 0,$$

которое эквивалентно следующему уравнению:

$$X Y C - C Y X = 0. \quad (45)$$

Чтобы описать положения равновесия рассматриваемой системы, нам надо найти все X , для которых множества решений уравнений (44) и (45) одинаковы (отметим, что это эквивалентно нахождению подалгебр Картана \mathfrak{h}_X , которые коммутативны и относительно коммутатора $[,]_C$ тоже).

Явные вычисления легко провести в базисе, в котором X имеет стандартный (2×2) -блоччно-диагональный вид. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 45. *Кососимметричная матрица $X \in \mathfrak{so}(n)$ является положением равновесия для алгебры \mathcal{F}_C , порожденной интегралами (40), тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, для которого C диагональна, а X*

имеет стандартный блочно-диагональный вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & & \\ -x_{12} & 0 & & & \\ & & 0 & x_{34} & \\ & & -x_{34} & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

□

Эквивалентным образом ответ, приведенный в теореме 45, можно описать так: множество положений равновесия для алгебры \mathcal{F}_C , порожденной интегралами (40), где матрица C диагональна, есть объединение стандартной блочно-диагональной подалгебры Картана

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & & \\ -x_{12} & 0 & & & \\ & & 0 & x_{34} & \\ & & -x_{34} & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, x_{i,i+1} \in \mathbb{R} \right\}$$

и всех подалгебр, полученных из \mathfrak{h}_0 сопряжением $\mathfrak{h} \mapsto P\mathfrak{h}P^{-1}$, где P — матрица перестановки.

Рассмотрим теперь вопрос о невырожденности положений равновесия.

Как было показано (теорема 44), если x — положение равновесия для семейства \mathcal{F}_P , то ядра всех скобок, являющихся общими в точке x совпадают. Обозначим это общее ядро через $Z \subset T_x^*M$. В частности, это означает, что после факторизации по Z мы получим невырожденный пучок кососимметричных форм $A_\lambda = A + \lambda B$ на T_x^*M/Z .

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $\text{sgrad}_A f$, где $A \in \mathcal{P}$ и $f \in \mathcal{F}_P$. Оно равно нулю в точке $x \in M$ и мы можем рассмотреть его линеаризацию в этой точке как линейный оператор $\mathcal{A} \cdot d^2f(x)$, действующий на касательном пространстве T_xM . Ясно, что $T_x\mathcal{O}$ инвариантно относительно этого оператора. Обозначим соответствующее ограничение через $P_f : T_x\mathcal{O} \rightarrow T_x\mathcal{O}$. Оператор P_f лежит в симплектической алгебре Ли $\text{sp}(T_x\mathcal{O}, A)$ и порождает в ней коммутативную подалгебру \mathfrak{k} .

Невырожденность положения равновесия x означает, что \mathfrak{k} является подалгеброй Картана в $\text{sp}(T_x\mathcal{O}, A)$ (см. определение 6).

Учитывая, что точка x является положением равновесия для всего семейства $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, можно показать, что \mathfrak{k} является “общей” коммутативной подалгеброй в симплектических алгебрах $\text{sp}(T_x\mathcal{O}, A + \lambda B)$. Исследование этой ситуации приводит к следующему утверждению.

Теорема 46 (А. В. Болсинов[75]). 1) Если x невырожденное положение равновесия для семейства $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, то разложение Жордана–Кронекера для пучка $\mathcal{A}_{\lambda}(x) = \mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x)$ в точке x состоит из одного тривиального $(r \times r)$ -блока (соответствующего общему ядру $Z = \text{Ker } \mathcal{A}(x) = \text{Ker } \mathcal{B}(x)$) и (2×2) -блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i + \lambda \\ -\lambda_i - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \frac{1}{2}(\dim M - \text{corank } \mathcal{A}).$$

Иными словами, пучок диагонализуем (над \mathbb{C}).

2) Пусть ранг скобки $\mathcal{A}_{\lambda}(x) = \mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x)$ падает при $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$, $q = \frac{1}{2}(\dim M - \text{corank } \mathcal{A})$, где все λ_i различны, и существует такая функция $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, что соответствующий оператор линеаризации $P_f : T_x\mathcal{O} \rightarrow T_x\mathcal{O}$ невырожден. Тогда x является невырожденным положением равновесия для $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

Применим теорему 46 к исследованию невырожденности положений равновесия системы 39 (многомерное твердое тело).

Для простоты мы рассмотрим четномерный случай $\text{so}(2n)$. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & & \\ -x_{12} & 0 & & & \\ & & 0 & x_{34} & \\ & & -x_{34} & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & c_3 & & \\ & & & c_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим для каждой пары $x_{i,i+1}, x_{j,j+1}$ следующее квадратное уравнение относительно λ :

$$\frac{x_{i,i+1}^2}{x_{j,j+1}^2} = \frac{(c_i + \lambda)(c_{i+1} + \lambda)}{(c_j + \lambda)(c_{j+1} + \lambda)}. \quad (46)$$

Обозначим его корни через λ_{ij} и λ'_{ij} .

Теорема 47. Если все $\lambda_{ij}, \lambda'_{ij}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 3, \dots, 2n - 1$) различны, то X является невырожденным положением равновесия для алгебры \mathcal{F}_C , порожденной интегралами (40).

Доказательство. Опишем сначала те значения λ , для которых ранг скобки $\{ , \}_{C+\lambda E}$ падает в точке X , т. е. для которых X является сингулярным элементом в смысле алгебры Ли \mathfrak{g}_λ , определенной коммутатором $[,]_{C+\lambda E}$ на пространстве кососимметричных матриц.

Поскольку алгебра Ли \mathfrak{g}_λ изоморфна $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ при $\lambda \neq -c_i$, рассматривая соответствующий изоморфизм, получаем, что X является сингулярным элементом для \mathfrak{g}_λ тогда и только тогда, когда матрица

$$X' = (C + \lambda E)^{-\frac{1}{2}} X (C + \lambda E)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & x'_{12} & & & \\ -x'_{12} & 0 & & & \\ & & 0 & x'_{34} & \\ & & -x'_{34} & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $x'_{i,i+1} = \frac{x_{i,i+1}}{\sqrt{(c_i + \lambda)(c_{i+1} + \lambda)}}$, является сингулярной для стандартной алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ (см. теорему 43). Сингулярность матрицы X' относительно $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ означает выполнению равенства

$$x'^2_{i,i+1} = x'^2_{j,j+1}$$

для некоторых i, j , которое эквивалентно уравнению (46). Таким образом, решения $\lambda_{ij}, \lambda'_{ij}$ уравнения (46) — это характеристические числа пучка $\{ , \}_{C+\lambda E}$ в точке равновесия X .

Поскольку все $\lambda_{ij}, \lambda'_{ij}$ различны, для того чтобы применить теорему 46, нужно указать функцию $f \in \mathcal{F}_C$, для которой соответствующий оператор линеаризации P_f невырожден на касательном пространстве к орбите \mathcal{O}_X .

Возьмем в качестве такой функции $f(Y) = \text{Tr } CY^2 \in \mathcal{F}_C$. Соответствующее ей гамильтоново поле задается уравнением

$$\dot{Y} = [df(Y), Y] = [CY + YC, Y] = [C, Y^2].$$

Линеаризация этого поля в точке X имеет вид

$$\dot{Y} = [C, YX + XY]. \quad (47)$$

Таким образом, надо показать, что оператор $Y \mapsto [C, YX + XY]$ невырожден на $T_X \mathcal{O}_X$. Поскольку C регулярно, ядро этого оператора состоит из тех матриц Y , для которых $YX + XY$ — диагональная матрица. Последнее условие эквивалентно тому, что Y принадлежит подалгебре Картана \mathfrak{h}_X , порожденной элементом X . Так как $\mathfrak{h}_X \cap T_X \mathcal{O}_X = \{0\}$, линейризованная система (47) невырождена на $T_X \mathcal{O}_X$, что и требовалось доказать. \square

Список литературы

- [1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, *“Грубые системы”*, ДАН СССР, **14**, №5 (1937), с. 247–250.
- [2] Д. В. Аносов, *“Грубые системы”*, Труды МИАН СССР, **169** (1985), с. 59–93.
- [3] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, *“Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях”*, Успехи матем. наук, **41**, №1 (1986), с. 149–169.
- [4] Ю. А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела*, М.: Наука, 1977.
- [5] А. В. Болсинов, *Согласованные скобки Пуассона и полнота семейств функций в инволюции*, Известия АН СССР, **55**, №1 (1991), с. 68–92.
- [6] А. В. Болсинов, *“Многомерные случаи Эйлера и Клебша и лиевы пучки”*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **24** (1991), с. 8–12.
- [7] А. В. Болсинов, *“Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **26** (2005), с. 87–109.
- [8] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, *“Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли”*, Матем. заметки **72**, №1 (2002), с. 11–34.
- [9] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *“Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”*, Успехи матем. наук, **45**, №2 (1990), с. 49–77.
- [10] А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко, *“Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”*, Матем. сборник, **191**, №2 (2000), с. 1–42.

- [11] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I; II”, Матем. сборник, **185**, №4 (1994), с. 27–80; **185**, №5 (1994), с. 27–78.
- [12] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [13] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [14] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай на $so(4)$ ”, ДАН, **381**, №5 (2001), с. 614–615.
- [15] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [16] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сборник, **134(176)**, №3(11) (1987), с. 375–385.
- [17] Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков, “Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере”, Матем. сборник, **193**, №8 (2002), с. 3–38.
- [18] И. М. Гельфанд, И. С. Захаревич, “Спектральная теория пучка кососимметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на S^1 ”, Функц. анализ и его прил., **23**, №2 (1989), с. 1–11.
- [19] И. З. Голубчик, В. В. Соколов, “Согласованные скобки Ли и уравнение Янга–Бакстера”, Теор. мат. физ., **146**, №2 (2006), с. 195–207.
- [20] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, М.: Мир, 1982.
- [21] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Глобальная динамика систем Морса–Смейла”, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **261** (2008), с. 115–139.

- [22] Н. Е. Жуковский, “О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы”, В кн.: *Полн. собр. соч. Т. 1*, М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937, с. 490–535.
- [23] М. Ю. Ивочкин, “Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости”, Матем. сборник, **199**, № 6 (2008), с. 85–104.
- [24] В. В. Калашников, “Простые гиперболические особенности пуассоновых действий”, В кн.: *Топологические методы в теории гамильтоновых систем* (Сборник статей под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича), М.: изд-во “Факториал”, 1998, с. 115–126.
- [25] В. В. Козлов, “О динамике в пространствах постоянной кривизны”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2 (1994), с. 28–35.
- [26] В. В. Корнеев “Представление четырехмерной особенности типа седло-седло в виде почти прямого произведения двумерных атомов. Случай сложности два”, В кн.: *Топологические методы в теории гамильтоновых систем* (Сборник статей под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича), М.: изд-во “Факториал”, 1998, с. 127–135.
- [27] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, ДАН СССР, **14**, № 5 (1937), с. 251–257.
- [28] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, ДАН СССР, **103**, № 4 (1955), с. 557–560.
- [29] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных гамильтоновых систем и пуассоновских действий \mathbb{R}^2 в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III”, Матем. сборник, **183**, № 12 (1992), с. 141–176; **184**, № 4 (1993), с. 103–138; **186**, № 10 (1995), с. 89–102.
- [30] Н. И. Лобачевский, “Новые начала геометрии с полной теорией параллельных”, В кн.: *Полн. собр. соч. Т. 2*, М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

- [31] А. Г. Майер, “О траекториях на ориентируемых поверхностях”, Матем. сборник, **12**, № 1 (1943), с. 71–84.
- [32] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, Функц. анализ и его прил., **10**, № 4 (1976), с. 93–94.
- [33] В. С. Матвеев, “Вычисление значений инварианта Фоменко для точки типа седло-седло интегрируемой гамильтоновой системы”, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **25**, ч. 1 (1993), с. 75–104.
- [34] В. С. Матвеев, “Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло”, Матем. сборник, **187**, № 4 (1996), с. 29–58.
- [35] В. С. Матвеев, А. А. Ошемков, “Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2 (1999), с. 62–65.
- [36] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы*, М.: Мир, 1979.
- [37] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, Известия АН СССР, **42**, № 2 (1978), с. 396–415.
- [38] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, Матем. сборник, **193**, № 10 (2002), с. 113–138.
- [39] П. В. Морозов, “Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи”, Матем. сборник, **198**, № 8 (2007), с. 59–82.
- [40] А. А. Ошемков, “Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$ ”, Успехи матем. наук, **42**, № 6 (1987), с. 199–200.
- [41] А. А. Ошемков, “Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **23** (1988), с. 122–132.

- [42] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **25**, ч. 2 (1993), с. 23–109.
- [43] А. А. Ошемков, “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей”, Труды Матем. инст. РАН, **205** (1994), с. 131–140.
- [44] А. А. Ошемков, “Сомножители минимальных моделей для седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем”, ДАН, **433**, № 2 (2010), с. 173–177.
- [45] А. А. Ошемков, “Топология множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы”, ДАН, **434**, № 5 (2010), с. 587–590.
- [46] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сборник, **201**, № 8 (2010), с. 63–102.
- [47] А. А. Ошемков, “Классификация интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на CP^2 ”, ДАН, **437**, № 4 (2011), с. 462–464 .
- [48] А. А. Ошемков, “Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2 (2011), с. 3–12.
- [49] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, Матем. сборник, **189**, № 8 (1998), с. 93–140.
- [50] Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, М.: Мир, 1986.
- [51] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М.: Наука, 1990.
- [52] П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, Теор. мат. физ., **134**, № 2 (2003), с. 207–226.
- [53] С. Смейл, “Неравенства Морса для динамических систем”, Сб. пер. Матем., **11**, № 4 (1967), с. 79–87.

- [54] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, Успехи матем. наук, **25**, № 1 (1970), с. 113–185.
- [55] С. Смейл, “Топология и механика”, Успехи матем. наук, **15**, № 2 (1972), с. 77–125.
- [56] В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ ”, ДАН, **394**, № 5 (2004), с. 1–4.
- [57] В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, Теор. мат. физ., **129**, № 1 (2001), с. 31–36.
- [58] Я. В. Татаринов, “К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 5 (1973), с. 70–77.
- [59] Я. В. Татаринов, “Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 6 (1974), с. 99–105.
- [60] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, М.: Факториал, 1995.
- [61] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, ДАН СССР, **287**, № 5 (1986), с. 1071–1075.
- [62] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, Известия АН СССР, **50**, № 6 (1986), с. 1276–1307.
- [63] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, Известия АН СССР, **54**, № 3 (1990), 546–575.
- [64] Г. Хагигатдуст, “Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтонианов на алгебре $so(4)$ ”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 6 (2005), с. 3–10.

- [65] Г. Хагигатдуст, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ”, ДАН, **401**, № 5 (2005), с. 599–602.
- [66] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ”, Матем. сборник, **200**, № 6 (2009), с. 119–142.
- [67] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых случаев динамики твёрдого тела”, ДАН СССР, **273**, № 6 (1983), с. 1322–1325.
- [68] *Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твёрдого тела*, Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [69] Ху Сы-цзян, *Теория гомотопий*, М.: Мир, 1964.
- [70] Э. Шрёдингер, “Метод определения квантовомеханических собственных значений и собственных функций”, В кн.: *Избранные труды по квантовой механике*, М.: Наука, 1976, с. 239–247.
- [71] M. F. Atiyah, “Convexity and commuting Hamiltonians”, Bull. London Math. Soc., **14**, № 1 (1982), p. 1–15.
- [72] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”, В кн.: *Topological classification of integrable systems* (Adv. Soviet Math., vol. 6; Edited by A. T. Fomenko), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 147–183.
- [73] A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, “Integrable Hamiltonian systems: Topological structure of saturated neighborhoods of nondegenerate singular points”, В кн.: *Tensor and vector analysis. Geometry, mechanics, and physics* (Edited by A. T. Fomenko, O. V. Manturov, V. V. Trofimov), Gordon and Breach Sci. Publ., 1998, p. 31–56.
- [74] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, В кн.: *Topological methods in the theory of integrable systems* (Edited by A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov), Cambridge Sci. Publ., 2006, p. 1–67.

- [75] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “*Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems*”, Regular and Chaotic dynamics, **14**, №4–5 (2009), p. 325–348.
- [76] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “*On classification of flows on manifolds. I*”, Methods of Functional Analysis and Topology, **2**, №2 (1996), p. 190–204 .
- [77] N. A. Chernikov, “*The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solution*”, Acta Phys. Polonica. **B23** (1992), p. 115–119.
- [78] P. A. Damianou, “*Multiple Hamiltonian structures for Toda-type systems*”, J. Math. Phys., **35**, №10 (1994), p. 5511–5541.
- [79] T. Delzant, “*Hamiltoniens périodiques et images convexe de l’application moment*”, Bull. Soc. Math. France, **116** (1988), p. 315–339.
- [80] J.-P. Dufour, P. Molino, A. Toulet, “*Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko*”, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, **318** (1994), p. 949–952.
- [81] L. H. Eliasson, “*Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case*”, Comm. Math. Helv., **65** (1990), p. 4–35.
- [82] G. Fleitas, “*Classification of gradient-like flows on dimensions two and three*”, Bol. Soc. Bras. Mat., **6** (1975), p. 155–183.
- [83] V. Guillemin, S. Sternberg, “*Convexity properties of the moment mapping*”, Invent. Math., **67**, №3 (1982), p. 491–513.
- [84] P. W. Higgs, “*Dynamical symmetries in a spherical geometry. I*”, J. Phys. A: Math. Gen., **12**, №3 (1979), p. 309–323.
- [85] A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, “*Bihamiltonian structures and Stäckel separability*”, J. Geom. Phys. **33**, №3–4 (2000), p. 210–228.
- [86] M. Ikeda, N. Katayama, “*On generalization of Bertrand’s theorem to spaces of constant curvature*”, Tensor, **38** (1982), p. 37–40.

- [87] M. P. Kharlamov, P. E. Ryabov, “*The bifurcations of the first integrals in the case of Kowalewski-Yehia*”, Regular and Chaotic dynamics, **2**, № 2 (1997), p. 25–40.
- [88] W. Killing, “*Die Mechanik in der Nicht-Euklidischen Raumformen*”, J. Reine Angew. Math., **98** (1885), p. 1–48.
- [89] V. V. Kozlov, O. A. Harin, “*Kepler’s problem in constant curvature spaces*”, Cel. Mech. and Dyn. Astr., **54** (1992), p. 393–399.
- [90] N. C. Leung, M. Symington, “*Almost toric symplectic four-manifolds*”, J. Symplectic Geom., **8**, № 2 (2010), p. 143–187.
- [91] T. Levi-Chivita, “*Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*”, Acta Math. **30** (1906), p. 305–327.
- [92] I. V. Mykytyuk, A. Panasyuk, “*Bi-Poisson structures and integrability of geodesic flows on homogeneous spaces*”, Transformation Groups **9**, № 3 (2004), p. 289–308.
- [93] F. Magri, “*A simple model of the integrable Hamiltonian equation*”, J. Math. Phys., **19**, № 5 (1978), p. 1156–1162.
- [94] F. Magri, P. Casati, G. Falqui, M. Pedroni, “*Eight lectures on integrable systems*”, В кн.: *Integrability of Nonlinear Systems*, (Lecture Notes in Physics, vol. 495; Edited by Y. Kosmann-Schwarzbach et al.), Springer, 2004, p. 209–250.
- [95] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Clarendon Press., Oxford, 1995.
- [96] E. Miranda, Nguyen Tien Zung, “*Equivariant normal form for nondegenerate singular orbits of integrable Hamiltoniansystems*”, Annales Ecole Norm. Sup., **37**, № 6 (2004), p. 819–839.
- [97] K. R. Meyer, “*Energy functions for Morse–Smale systems*”, Amer. J. Math., **90**, № 4 (1968), p. 1031–1040.
- [98] J. Moser, “*Regularization of Kepler’s problem and the averaging method on a manifold*”, Commun. Pure Appl. Math., **23** (1970), p. 609–636.

- [99] I. Nikolaev, “*Graphs and flows on surfaces*”, Ergodic Theory Dyn. Syst., **18**, № 1 (1998), p. 207–220.
- [100] I. Nikolaev, E. Zhuzhoma *Flows on 2-dimensional manifolds: an overview*, Springer, 1999.
- [101] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, “*Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras*”, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), p. 12447–12456.
- [102] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, “*Compatible Lie brackets related to elliptic curve*”, J. of Math. Phys., **47**, № 1 (2006), p. 1–14.
- [103] O. E. Orel, P. E. Ryabov, “*Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem*”, Regular and Chaotic dynamics, **3**, № 2 (1998), p. 82–91.
- [104] A. A. Oshemkov, “*Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*”, В КН.: *Topological classification of integrable systems* (Adv. Soviet Math., vol. 6; Edited by A. T. Fomenko), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 67–146.
- [105] M. M. Peixoto, “*On the classification of flows on 2-manifolds*”, В КН.: *Dynamical systems*, Academic Press, 1973, p. 389–419.
- [106] M. M. Peixoto, “*Structural stability on two-dimensional manifolds*”, Topology, 1962, **1**, № 2, p. 101–120; “*Structural stability on two-dimensional manifolds — a further remark*”, Topology, 1963, **2**, № 2, p. 179–180.
- [107] M. C. Peixoto, M. M. Peixoto, “*Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*”, Anais Acad. Brasil. Ciências, **31**, № 2 (1959), p. 135–160.
- [108] L. Plachta, “*The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces: I. Topological classification*”, Topology and its Appl., **128** (2003), p. 63–91.
- [109] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, “*Compatible Poisson structures for Lax equations: an r -matrix approach*”, Phys. Lett. A, **130**, № 8–9 (1988), p. 456–460.

- [110] J. Slawianowski, “*Bertrand systems on $SO(3, \mathbb{R})$ and $SU(2)$* ”, Bull. Acad. Pol. Sci., **28**, № 2 (1980), p. 83–94.
- [111] Yu. B. Suris, “*On the bi-Hamiltonian structure of Toda and relativistic Toda lattices*”, Physics Letters A, **180** (1993), p. 419–429.
- [112] M. Symington, “*Four dimensions from two in symplectic topology*”, В кн.: *Topology and geometry of manifolds* (Proc. Symp. Pure Math., vol. 71; Edited by G. Matic, C. McGroary), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, p. 153–208.
- [113] S. Smale, “*On gradient dynamical systems*”, Annals of Math., 1961, **74**, p. 199–206.
- [114] R. C. Thompson, “*Pencils of complex and real symmetric and skew matrices*”, Linear Algebra Appl. **147** (1991), p. 323–371.
- [115] A. Toulet, *Classification des systèmes intégrables en dimension 2*, PhD Thesis, Université Montpellier II, 1996.
- [116] C. Velpy, “*Kepler’s laws and gravitation in non-Euclidean (classical) mechanics*”, Acta Phys. Hung. A, **11**, № 1–2, (2000), p. 131–145.
- [117] J. Vey, “*Sur certain systèmes dynamiques séparables*”, Amer. J. Math., **100**, (1978), p. 591–614.
- [118] T. G. Vozmischeva, “*Classification of motions for generalization of the two center problem on a sphere*”, Cel. Mech. and Dyn. Astr. **77** (2000), p. 37–48.
- [119] X. Wang, “*The C^* -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds*”, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1990, **10**, p. 565–597.
- [120] D. V. Zotev, “*Fomenko–Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi integrable case*”, Regular and Chaotic dynamics, **5**, № 4 (2000), p. 437–458.
- [121] Nguyen Tien Zung, “*Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities*”, Compositio Math., **101** (1996), p. 179–215.
- [122] Nguyen Tien Zung, “*Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities*”, preprint, arXiv:math.DS/0106013 (2001).

- [123] Nguyen Tien Zung, “*Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, II: Topological classification*”, *Compositio Math.*, **138** (2003), p. 125–156.
- [124] Nguyen Tien Zung, “*Torus actions and integrable systems*”, В кн.: *Topological methods in the theory of integrable systems* (Edited by A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov), Cambridge Sci. Publ., 2006, p. 289–328.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(работы 1–11 входят в официальный Перечень ВАК)

1. А. А. Ошемков, “*Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей*”, Труды Математического института РАН, **205**, 131–140 (1994).
2. А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “*О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях*”, Матем. Сборник, **189**, № 8, 93–140 (1998). [Диссертанту принадлежат разделы 1.2–1.4, 2.4, 3.1, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2.]
3. В. С. Матвеев, А. А. Ошемков, “*Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло*”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2, 62–65 (1999). [Диссертанту принадлежит идея алгоритма, а также Лемма и Утверждение 2 Теоремы.]
4. Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков, “*Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере*”, Матем. Сборник, **193**, № 8, 3–38 (2002). [Диссертанту принадлежат разделы 1.1, 1.3, 2.2, 2.4.]
5. Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, “*Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$* ”, Матем. Сборник, **200**, № 6, 119–142 (2009). [Диссертанту принадлежит §3.]
6. A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “*Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems*”, Regular and Chaotic dynamics, **14**, № 4–5, 325–348 (2009). [Диссертанту принадлежат §§ 2, 3, 6–8.]
7. А. А. Ошемков, “*Сомножители минимальных моделей для седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем*”, ДАН, **433**, № 2, 173–177 (2010).
8. А. А. Ошемков, “*Топология множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы*”, ДАН, **434**, № 5, 587–590 (2010).
9. А. А. Ошемков, “*Классификация гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем*”, Матем. Сборник, **201**, № 8, 63–102 (2010).
10. А. А. Ошемков, “*Классификация интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на CP^2* ”, ДАН, **437**, № 4, 462–464 (2011).
11. А. А. Ошемков, “*Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем*”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2, 3–12 (2011).

12. A. A. Oshemkov, “*Computer examination of integrable Hamiltonian systems*”, Int. Journ. of Shape Modeling, **1**, № 1 61–75 (1995).
13. A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, *On classification of flows on manifolds. I*, Methods of Functional Analysis and Topology, **2**, № 2, 190–204 (1996). [Диссертанту принадлежит §3.]
14. А. А. Ошемков, “*О топологической структуре множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы*”, В кн.: “Топологические методы в теории гамильтоновых систем” (под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича) — Москва, Факториал, 272–287 (1998).
15. A. A. Oshemkov, “*The topology of the set of singular points for integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom*”, In book: “Proc. of the 3rd Seminar on Geometry & Topology (July 15-17, 2004, Tabriz, Iran)” — Azarbaijjan Univ. of Tarbiat Moallem, 185–204 (2004).
16. A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “*Singularities of integrable Hamiltonian systems*”, In book: “Topological methods in the theory of integrable systems” (Edited by A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov) — Cambridge Sci. Publ., 1–67 (2006). [Это обзорная статья, результаты диссертанта содержатся в разделах 5.3 и 7.8.]