

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Орел Ольга Евгеньевна

УДК 514.745.82

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ТРАЕКТОРНЫЕ
ИНВАРИАНТЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ
ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ**

01.01.04 — геометрия и топология

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук*

Научный руководитель:
академик РАН
профессор А.Т.Фоменко

МОСКВА-1997



Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1 Основные определения и теоремы | 20 |
| 1.1 Лиувилева классификация интегрируемых гамильтоновых систем | 20 |
| 1.2 Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем | 28 |
| 1.3 Некоторые интегрируемые задачи механики | 32 |
| 1.4 Римановы поверхности и нелинейные уравнения | 36 |
| 2 Несопряженность задач Эйлера и Якоби | 40 |
| 2.1 Различные эквивалентности задач Эйлера и Якоби | 40 |
| 2.2 Построение точного инварианта для задач Эйлера и Якоби | 45 |
| 2.3 Теорема о несопряженности | 48 |
| 3 Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит | 52 |
| 3.1 Критерий траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем | 52 |
| 3.2 Гладкий траекторный инвариант эллиптической особой точки | 59 |
| 3.3 Вычисление гладкого траекторного инварианта в простейшем случае. Траекторный инвариант сферического маятника | 62 |
| 3.4 Правило вычисления гладкого траекторного инварианта в общем случае | 65 |
| 3.5 Траекторный инвариант задачи Лагранжа | 69 |
| 4 Траекторная классификация интегрируемых задач Горячева–Чаплыгина и Лагранжа | 73 |
| 4.1 Сведение системы Горячева–Чаплыгина к уравнениям Абеля | 73 |
| 4.2 Топология динамической системы на базе накрытия | 79 |
| 4.3 Структура накрытия | 82 |

| | | |
|-----|--|------------|
| 4.4 | Построение инварианта Фоменко–Цишанга для случая Горячева–Чаплыгина | 84 |
| 4.5 | Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина | 89 |
| 4.6 | Траекторная классификация задач Лагранжа | 94 |
| 5 | Топологический анализ окрестности вырожденной одномерной орбиты интегрируемой гамильтоновой системы | 101 |
| 5.1 | Топология окрестности вырожденной орбиты | 101 |
| 5.2 | Структура графа на сфере и действие диффеоморфизма на графике | 103 |
| 5.3 | Теоремы о лиувиллевом инварианте | 106 |

Введение

Основы качественной теории динамических систем были заложены в работах Пуанкаре, Ляпунова и Биркгофа [8, 28, 44]. Важное направление в теории динамических систем связано с понятием грубости векторных полей, введенном в работе Андропова и Понтрягина (1937 г.). В 1958–1962 гг. Пейксото доказал плотность грубых векторных полей на поверхностях. Затем Гробман и Хартман показали, что локальная грубость является типичным свойством. В теории динамических систем важную роль играет класс векторных полей Морса–Смейла. Этот класс образует непустое открытое подмножество в классе всех полей, а его элементы являются грубыми. Эти поля в некотором смысле похожи на градиентные, они градиентно-подобны. В 1960 г. Пейксото [43] классифицировал поля Морса–Смейла на двумерных компактных многообразиях, затем в 1980 г. Уманский дал классификацию полей Морса–Смейла на трехмерных компактных многообразиях [50]. Вопрос о топологической траекторной классификации динамических систем различных типов обсуждался во многих работах, в частности, в [2, 3].

В настоящей диссертации рассматривается важный класс динамических систем — гамильтоновы системы, которым соответствуют так называемые косоградиентные потоки. Гамильтоновы системы играют важную роль во многих современных задачах физики и механики, поэтому в последнее время сильно возрос интерес к их изучению. Диссертация посвящена вопросам лиувиллевой и траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС). Интегрируемые гамильтоновы системы не являются структурно устойчивыми динамическими системами, и общие приемы и методы, разработанные для локально грубых полей, здесь не применимы. Поэтому одним из важных научных направлений является разработка новых подходов к качественному изучению интегрируемых гамильтоновых систем. Одним из основных результатов тут является теорема Лиувилля, утверждающая, что неособая компактная поверхность уровня первых интегралов интегрируемой гамильтоновой системы является несвязным объединением торов с квазипериодическими траекториями на них.

Пусть M^4 — симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система на нем, интегрируемая по Лиувиллю при помощи дополнительного интеграла F , почти всюду независимого с гамильтонианом H . Гамильтониан также часто называют энергией.

Хорошо известно, что уравнения движения твердого тела могут быть представлены в гамильтоновой форме. В работе [55] М.П. Харламов провел качественный анализ интегрируемых гамильтоновых систем, возникающих в задачах динамики твердого тела. Он описал эволюцию торов при изменении значений первых интегралов для некоторых важных примеров интегрируемых механических систем. Основы систематического подхода к изучению топологии интегрируемых гамильтоновых систем и к построению динамических аналогов теории Морса были заложены А.Т. Фоменко в [52, 53, 54], а затем развиты в работах Фоменко, Цишенга, Матвеева и Болсинова [9, 51]. В этих работах была построена теория лиувиллевой классификации¹ интегрируемых гамильтоновых систем, ограниченных на неособые компактные поверхности постоянной энергии (изоэнергетические поверхности) $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$. При этом предполагается, что система, ограниченная на Q_h^3 , удовлетворяет некоторым естественным условиям (точную формулировку см. в гл. 1). Одно из условий — условие нерезонансности, которое означает, что в Q_h^3 всюду плотны торы Лиувилля с иррациональной обмоткой. Системы, удовлетворяющие всем условиям, называются невырожденными. Отметим, что большинство известных механических систем являются невырожденными на почти всех изоэнергетических поверхностях.

Определение. Две невырожденные системы \mathbf{v} и \mathbf{v}' на поверхностях постоянной энергии Q и Q' называются лиувиллево эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, переводящий Q в Q' и сохраняющий лиувиллево слоение этих многообразий (т.е. разбиение на связные компоненты поверхностей уровня дополнительных интегралов).

В соответствии с теорией лиувиллевой классификации, каждой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе \mathbf{v} , ограниченной на поверхность уровня гамильтониана Q_h^3 , сопоставляется инвариант Фоменко–Цишенга, или меченая молекула $W^*(Q_h^3, \mathbf{v})$ — граф, описывающий лиувиллево слоение изоэнергетической поверхности Q_h^3 . При этом

¹Наряду с термином “лиувиллевая классификация” в литературе часто употребляется термин “тонкая топологическая классификация”.

ребра графа соответствуют одно параметрическим семействам неособых торов Лиувилля, а его вершины (=атомы) описывают перестройки этих торов на особых уровнях интеграла F . Молекула снабжена числовыми метками t , n и ε , описывающими правила склейки лиувиллева слоения Q_h^3 из элементарных блоков. Одним из главных результатов теории является следующее утверждение: две невырожденные интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.

Определение. Две гладкие динамические системы на многообразиях M_1 и M_2 называются *непрерывно* (соответственно, *гладко*) *траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (соответственно, диффеоморфизм) одного многообразия на другое, переводящий траектории первой системы в траектории второй с сохранением ориентации. Заметим, что преобразование не обязано сохранять время вдоль траектории.

В [10] А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко построили новый топологический инвариант для систем с двумя степенями свободы, классифицирующий невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях с точностью до *непрерывной* (по-другому, *топологической*) *траекторной эквивалентности*. В задаче траекторной классификации условие невырожденности включает еще два дополнительных условия на траекторное поведение системы. Эти условия также очень естественны, и большинство систем, возникающих в примерах, им удовлетворяют на почти всех изоэнергетических поверхностях.

Каждой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе \mathbf{v} , ограниченной на поверхность уровня гамильтониана Q_h^3 , сопоставляется *траекторный инвариант Болсинова–Фоменко* $W^{st}(Q_h^3, \mathbf{v})$, или t -молекула. Центральная теорема Болсинова–Фоменко утверждает, что две невырожденные интегрируемые системы траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их t -молекулы совпадают.

Если система нерезонансна, то лиувиллево слоение не зависит от выбора дополнительного интеграла, а полностью определяется гамильтонианом, поскольку почти все слои могут быть охарактеризованы как замыкания траекторий. Следовательно, траекторно эквивалентные системы являются лиувиллево эквивалентными. Поэтому основой инварианта W^{st} является меченая молекула W^* . Кроме меченой молекулы, t -молекула содержит некоторые дополнительные инварианты. Одним из инвариантов является *вектор вращения*, построенный на основе *функции вращения*, равной отношению частот квазипериодического движения по торам Лиувилля (точное определение см. в гл. 1).

тегралов. Эта теорема была доказана А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко в [12].

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывной траекторной эквивалентности. В работе [12] А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко на основе построенной ими теории траекторной классификации вычислили непрерывные траекторные инварианты для этих задач. В результате они обнаружили, что внутри каждой задачи динамические системы траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда эллипсоиды подобны. Кроме того, было доказано, что существует взаимно однозначное (с точностью до подобия) соответствие между тройками $(a : b : c)$ и $(A : B : C)$, сопоставляющее динамической системе Якоби непрерывно траекторно эквивалентную ей динамическую систему Эйлера. Эти результаты используют прямое аналитическое исследование функций вращения задач Эйлера и Якоби, выполненное автором настоящей работы в [35].

После доказательства непрерывной (топологической) траекторной эквивалентности систем Эйлера и Якоби возник естественный вопрос — а не являются ли они топологически сопряженными, т.е. точно эквивалентными? Напомним, что две динамические системы v и v' на многообразиях M и M' называются *топологически сопряженными (точно эквивалентными)*, если существует гомеоморфизм одного многообразия на другое, который переводит точное решение в решение (с сохранением времени).

В главе 2 эта проблема полностью решена, а именно, доказана следующая

Теорема 0.0.1 ([38, 39]) Геодезический поток любого трехосного (отличного от сферы) эллипсоида, ограниченный на любое трехмерное многообразие постоянной энергии, топологически не сопряжен никакой динамической системе Эйлера твердого тела с нулевой константой площадей.

Итак, собирая вместе всю имеющуюся информацию, получаем следующую достаточно полную картину.

Две интегрируемые задачи Эйлера (с нулевой константой площадей) и Якоби

- топологически траекторно эквивалентны (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [12]),
- гладко траекторно не эквивалентны (А.В. Болсинов [14, 15]),
- топологически не сопряжены (О.Е. Орел [38, 39]).

Тем более они не являются гладко сопряженными.

В теории динамических систем известен классический результат о траекторной эквивалентности (даже сопряженности) гиперболических векторных полей в окрестности особых точек (теорема Гробмана–Хартмана [23, 25]). Однако интегрируемые гамильтоновы векторные поля не являются гиперболическими в эллиптической особой точке: в данном случае весь спектр линеаризованного векторного поля лежит в точности на мнимой оси. Поэтому для изучения вопроса о траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических особенностей требуется применение совершенно иных методов. Общие идеи и подходы, развитые в [10], использованы в **ГЛАВЕ 3** для траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы, но рассматриваемых уже не на поверхности уровня гамильтониана, а в малой окрестности невырожденной эллиптической особенности.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$ с n степенями свободы, заданную на некотором симплектическом многообразии M^{2n} . Предположим, что система интегрируема по Лиувиллю при помощи набора n первых интегралов $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $F_1 = H$, почти всюду независимых между собой (т.е. почти во всех точках их косые градиенты линейно независимы).

Определим *пуассоново действие* группы \mathbb{R}^n на многообразии M^{2n} как действие, порожденное сдвигами вдоль интегральных траекторий полей $\text{sgrad } F_i$, $i = 1, \dots, n$. Точка $x \in M^{2n}$, в которой векторы $\text{sgrad } F_i(x)$ линейно зависимы, называется *особой*. Орбита пуассонова действия $O(x)$, проходящая через эту точку, также называется *особой*. Можно показать, что ранг матрицы $\text{sgrad } \mathbf{F}$ (или, что тоже самое, матрицы дифференциалов $D\mathbf{F}$) постоянен вдоль всей орбиты и совпадает с размерностью этой орбиты. *Рангом* орбиты $O(x)$ (любой ее точки x) назовем ранг матрицы $\text{sgrad } \mathbf{F}(O(x)) = \text{sgrad } \mathbf{F}(x)$.

Пусть x — особая точка ранга k . Через \mathcal{K} обозначим ядро $D\mathbf{F}$ в $T_x M^{2n}$, и пусть \mathcal{I} — подпространство в $T_x M^{2n}$, порожденное векторами $\text{sgrad } F_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда \mathcal{I} — максимальное изотропное подпространство \mathcal{K} относительно симплектической структуры $\omega(x)$. Следовательно, факторпространство $\mathcal{K}/\mathcal{I} = \bar{R}$ снабжено естественной симплектической структурой $\bar{\omega}$. При этом \bar{R} симплектоморфно некоторому подпространству R пространства $T_x M^{2n}$ размерности $2(n-k)$. Ограничение симплектической структуры ω на R мы обозначим той же буквой ω . Пусть S — множество симметричных билинейных форм на R . Зададим структуру

алгебры Ли на S :

$$[A, B]_{ij} = A_{ik}\omega^{kl}B_{lj} - B_{ik}\omega^{kl}A_{lj},$$

где $A = (A_{ij}) \in S$, $B = (B_{ij}) \in S$ и $\omega^{kl}\omega_{lk} = \delta_i^k$. Тогда соответствие $\psi : A \rightarrow A\omega^{-1}$ устанавливает изоморфизм между алгебрами Ли S и $sp(2(n-k), \mathbb{R})$. Пусть $G = \{G | G = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, dG(x) = 0\}$. Тогда $[d^2G_\alpha(x), d^2G_\beta(x)] = d^2\{G_\alpha, G_\beta\}(x) = 0$ при $G_\alpha, G_\beta \in G$. Это означает, что подалгебра $K_G = \{d^2G | G \in G\} \subset S$ коммутативна.

Определение. Особая точка x называется *невырожденной особой точкой* отображения момента, если подалгебра K_G является подалгеброй Картана в S . В противном случае орбита называется *вырожденной*. *Эллиптической особой точкой* называется невырожденная особая точка, в которой все матрицы подалгебры $\psi(K_G)$ имеют чисто мнимые собственные значения. Орбита пуассонова действия, все точки которой невырожденные и эллиптические, называется *эллиптической орбитой*.

Рассмотрим компактную эллиптическую орбиту пуассонова действия O ранга k . Будем считать гамильтонову систему $v = sgrad H$, а также функции F_1, \dots, F_n ограниченными на небольшую окрестность $U(O) \subset M^{2n}$ этой орбиты, не содержащую орбит меньшей размерности. Будем считать функцию H принадлежащей классу гладкости $C^2(M^{2n})$, если мы говорим о непрерывном траекторном инварианте, и классу гладкости $C^4(M^{2n})$, если мы говорим о гладком инварианте. Будем предполагать, что в окрестности орбиты O все орбиты пуассонова действия компактны. Кроме того, мы будем рассматривать только нерезонансные системы, т.е. будем считать, что торы с иррациональной обмоткой всюду плотны в окрестности O . В таком случае лиувиллево слоение (т.е. слоение на поверхности уровня первых интегралов) не зависит от выбора дополнительных интегралов F_2, \dots, F_n , а полностью определяется гамильтонианом. Поэтому лиувиллево слоение в данном случае можно определить независимым образом: скажем, что точки $x_1, x_2 \in M^{2n}$ эквивалентны, если $F(x_1) = F(x_2)$ для любого гладкого дополнительного интеграла F гамильтоновой системы. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Тогда в качестве слоения Лиувилля можно взять разбиение M^{2n} на классы эквивалентности. Лиувиллево слоение окрестности орбиты O (точками которого являются указанные классы эквивалентности) обозначим через $B(U(O))$. Типом точки пространства $B(U(O))$ назовем размерность соответствующего слоя.

Пространство $B(U(O))$ n -мерно и, очевидно, диффеоморфно образу окрестности $U(O)$ при отображении момента $F : U(O) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. В свою очередь, в соответствии с теоремой Дюффо-Молино-Элиассона [16, 24], образ отображения момента $F(U(O))$ диффеоморфен окрестности нуля множества $\{u_{k+1} \geq 0, \dots, u_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. При этом внутренние точки этой области соответствуют неособым n -мерным лиувиллевым торам, а граничные — особым орбитам меньшей размерности; точка $(0, \dots, 0)$ соответствует k -мерной эллиптической орбите O . Образ особых орбит при отображении F называется *бифуркационной диаграммой* и обозначается Σ .

На множестве неособых торов Лиувилля определена непрерывная (гладкая в случае $H \in C^4$) проективная функция вращения ρ , равная отношению частот квазипериодического движения по неособым торам Лиувилля: $\rho = (\alpha^1 : \dots : \alpha^n)$. Из невырожденности орбиты O следует, что координаты функции вращения не могут обращаться в нуль одновременно. Эта функция, однако, определена не однозначно, а с точностью до выбора базиса циклов на орбите O (см. гл. 3). По непрерывности функции ρ продолжается на всю область U . Поскольку эта функция зависит только от тора, то ее можно рассматривать как функцию, заданную на лиувиллевом слоении $B(U(O))$.

В главе 3 доказана следующая основная

Теорема 0.0.2 ([41]) *Две нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы v и v' с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в $2n$ -мерной окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ n -мерных лиувиллевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) φ сохраняет тип точек $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$,
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Как уже отмечалось, в нерезонансном случае пространства $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$ определены инвариантно относительно выбора дополнительных интегралов F_2, \dots, F_n и, следовательно, существование отображения φ определяется только гамильтонианом. Однако для практической проверки критерия траекторной эквивалентности удобнее перейти от отображений лиувиллевых слоений к отображениям, заданным на образах отображений моментов.

Следствие 0.0.1 ([41]) Две нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы \mathbf{v} и \mathbf{v}' с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторио эквивалентны в окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ некоторой n -мерной окрестности точки $y_0 = \mathbf{F}(O)$ на n -мерную окрестность точки $y'_0 = \mathbf{F}'(O')$, обладающий следующими свойствами:

- 1) φ сохраняет тип точек отображения момента;
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^*\rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Для неспециальных нерезонансных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки $O = x_0$ (орбиты ранга 0) удается построить полный гладкий траекторий инвариант. Образ отображения момента в этом случае диффеоморфен окрестности цуя угла $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, а бифуркационная диаграмма — это образы сторон угла, т.е. две кривые, выходящие трансверсально из вершины — точки $y_0 = \mathbf{F}(x_0)$. В данном случае функция вращения определена однозначно, поскольку базис циклов на 0-мерной орбите пуст. Кроме того, в данном случае проективную функцию $\rho = (\alpha^1 : \alpha^2)$ можно представить как скалярную функцию двух аргументов (H, F) . Для этого рассмотрим предел функции ρ в точке y_0 : $\rho_0 = (\alpha_0^1 : \alpha_0^2)$. В силу невырожденности хотя бы одна из частот, скажем, α_0^2 отлична от нуля. Тогда положим $\rho = \frac{\alpha^1}{\alpha^2}$ — обычная функция. В формулируемой теореме ρ именно такая функция. Неспециальность означает, что производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных l_1 и l_2 к бифуркационной диаграмме отличны от нуля. Отметим, что почти все интегрируемые гамильтоновы системы (ограниченные на окрестность эллиптической невырожденной особой точки) являются неспециальными и нерезонансными.

Теорема 0.0.3 ([41]) Полным гладким траекторий инвариантом неспециальной нерезонансной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки $O = x_0$ является тройка чисел (последние два числа определены с точностью до перестановки) $\text{Tr}(x_0) = (\rho(y_0), \text{sign}(\rho_1(y_0)), \text{sign}(\rho_2(y_0)))$, где $\rho(y_0)$ — предел функции вращения в точке y_0 , а $\rho_i(y_0)$ — производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных l_1 и l_2 к бифуркационной диаграмме.

Это означает, что

- 1) две неспециальные нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 тогда и только тогда, когда тройки $\text{Tr}(x_0)$ и $\text{Tr}(x'_0)$ совпадают;
- 2) любая тройка $\text{Tr} = (\alpha, t_1, t_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}, t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой неспециальной нерезонансной интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности эллиптической особой точки.

Еще раз отметим, что несмотря на присутствие в формулировке конкретного интеграла F , от него здесь ничего не зависит, поскольку ни предел функции вращения в особой точке, ни знаки производных не меняются при диффеоморфизмах окрестности образа отображения момента.

В главе 3 также предложено правило, с помощью которого можно определить, является ли данная конкретная интегрируемая гамильтонова система неспециальной в окрестности эллиптической особой точки и в случае положительного ответа вычислить гладкий траекторный инвариант для этой системы. В той же главе приведено два примера вычисления этого инварианта для задачи о сферическом малтике и задачи Лагранжа в динамике твердого тела.

Волчок Лагранжа — это вращающееся твердое тело, эллипсоид инерции которого является эллипсоидом вращения, а центр тяжести лежит на оси вращения. Динамическая система, описывающая движение такого тела трехпараметрическая; параметры содержат информацию о соотношении между моментами инерции тела и коэффициенте линейного потенциала. Хорошо известно, что эта задача полностью интегрируема по Лиувиллю. При выполнении некоторого соотношения между параметрами (условия Маевского) вращение волчка с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси является невырожденным положением равновесия, или эллиптической особой точкой. Траекторный инвариант Tr этой особой точки найден в зависимости от параметров системы. Тем самым в явном виде указано разбиение всех систем Лагранжа на классы траекторно эквивалентных в окрестности положений равновесия.

ГЛАВА 4 посвящена вычислению траекторного инварианта для интегрируемых случаев Лагранжа и Горячева–Чаплыгина в динамике твердого тела. Там же построен инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула) для задачи Горячева–Чаплыгина. Как было отмечено, основой траекторного инварианта W^{*t} является меченая молекула. В задачах

Лагранжа и Горячева–Чаплыгина почти все дополнительные траекториальные инварианты (кроме вектора вращения) оказываются тривиальными ввиду простоты меченой молекулы (см. [11]). Поэтому после построения инварианта W^* единственным нетривиальным моментом оказывается вычисление вектора вращения.

В проблеме глобального лиувиллева и траекторного анализа основная сложность заключается в том, чтобы в явном виде описать базис на лиувиллевом торе. Практически все теории, касающиеся топологии интегрируемых гамильтоновых систем содержат лишь локальные утверждения и теоремы существования (как, например, теорема Лиувилля). В реальных же задачах физики и механики динамические системы настолько сложны, что, как правило, “увидеть” тор, заданный, например, четырьмя уравнениями в шестимерном пространстве (как в задачах динамики твердого тела), очень непросто. Тем более сложно оказывается при построить базис циклов на торе и понять, как этот базис меняется при непрерывном движении по ребру молекулы и затем перестройке тора. Именно эта информация необходима для глобального топологического анализа систем.

Методы решения указанной проблемы различны для разных интегрируемых гамильтоновых систем. Два совершенно различных подхода продемонстрированы на примере топологического анализа задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина. В задаче Лагранжа торы Лиувилля и их перестройку можно “увидеть” в проекции на трехмерные подпространства фазового шестимерного пространства. Это позволяет в явном виде задать базис циклов на торах Лиувилля.

Случай Горячева–Чаплыгина задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, характеризуется тем, что главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 4C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Кроме того, постоянная интеграла площадей в случае Горячева–Чаплыгина равна нулю. В задаче Горячева–Чаплыгина впервые реализован подход к построению инвариантов Фоменко Цишанга и Болсинова–Фоменко, который может быть применен при топологическом анализе широкого класса динамических систем, включающего задачи Сретенского, Ковалевской, Клебша, Стеклова–Ляпунова, а также Якоби и Неймана. Все эти задачи характеризует одно очень важное свойство: они являются алгебраически интегрируемыми. В нашей задаче топологического анализа это означает, что симплектическое многообразие и “старая” динамическая система на нем конечнолистно накрывают некоторое другое

многообразие и другую, “новую”, динамическую систему определенного вида — систему уравнений Абеля (см. гл. 4). Новая система несет основную информацию о старой, но она в некотором смысле устроена проще. Идея топологического анализа этих задач заключается в том, чтобы, получив информацию о системе на базе, попытаться “поднять” ее в исходную систему.

Исследованию задач этого типа посвящены работы многих современных авторов, таких как М. Адлер, П. ван Мербеке и Э. Хорозов [1, 26], Л. Гаврилов [21, 22], М. Адин и Р. Силол [6]. В основном эти результаты очень разрознены и не содержат общих утверждений. Однако, общая идея этого подхода может быть выражена следующим образом:

- Пусть $v = s\text{grad } H$ — интегрируемая гамильтонова система на симплектическом многообразии M^4 , для которой существует отображение $G: M^4 \rightarrow N^4$ (разветвленное накрытие), переводящее эту систему в систему уравнений Абеля. Пусть $G(T)$ — образ некоторого лиувиллева тора T . Тогда базис циклов на торе $G(T)$ может быть описан в явном виде. Кроме того, эволюция базисных циклов при перестройке торов на базе накрытия описывается в терминах корней некоторого многочлена, характеризующего данную интегрируемую задачу, степени 5 или 6 с коэффициентами, зависящими от первых интегралов системы.
- Перестройки связных компонент прообразов базисных циклов в тотальном пространстве накрытия полностью описываются через перестройки их образов на базе накрытия. Эти циклы остаются негомологичными в тотальном пространстве, однако могут уже не образовывать базис.

Оказывается, аппарат теории римановых поверхностей и абелевых дифференциалов (см. [18]) дает возможность получить явные формулы для функций вращения на базе накрытия. Тем самым система в пространстве N^4 может быть полностью изучена.

Для того, чтобы “поднять” полученную информацию в исходное многообразие, необходимо изучить указанное накрытие. Это накрытие описывает следующая теорема, которую неформально можно сформулировать так (более точную формулировку см. в гл. 4):

Теорема 0.0.4 ([36])

- 1) В задаче Горячева–Чаплыгина при отображении $G: M^4 \rightarrow N^4$ лиувиллев тор двулистно накрывает свой образ.

- 2) На всех ребрах молекулы случая Горячева–Чаплыгина исследованы прообразы построенных на торах $G(T)$ базисных циклов: оказывается, в некоторых случаях прообраз базисного цикла связан и двумерно накрывает свой образ, а в других он состоит из двух компонент связности.

Случай Горячева–Чаплыгина исследовался ранее Бекливанидисом и Ван Мербске [7], а также Л. Гавриловым [19, 20] с точки зрения анализа динамических систем с комплексным временем. При таком подходе первое утверждение приведенной теоремы является следствием более общего утверждения о накрытии якобиана комплексным тором Лиувилля. В настоящей работе представлено новое доказательство теоремы о накрытии, не использующее общей теории. Следует отметить, что в свете поставленной выше проблемы описания базисных циклов на торах Лиувилля, наибольший интерес представляет именно вторая часть теоремы, впервые доказанная в данной работе, первая же часть носит вспомогательный характер. Эта теорема позволяет доказать следующую теорему (полную формулировку см. в гл. 4).

Теорема 0.0.5 ([36]) Инварианты Фоменко–Цишанга для систем Горячева–Чаплыгина полностью вычислены и дана полная лиувиллевская классификация этой задачи. Кроме того, в терминах этого инварианта описана топология лиувиллевского слоения окрестностей особых точек отображения момента.

Следствие 0.0.2 ([36]) Системы Горячева–Чаплыгина на поверхностях постоянной энергии $Q_{h_1}^1$ и $Q_{h_2}^3$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда значения h_1 и h_2 одновременно принадлежат одному из интервалов $(-1, 1)$ или $(1, +\infty)$.

Кроме того, проанализировав системы на базе накрытия и затем подняв полученную информацию на накрытие, удается найти явные формулы для функций вращения на ребрах молекул и вычислить траекторный инвариант Болсинова–Фоменко для систем Горячева–Чаплыгина, кроме векторов вращения. Как отмечалось, вектор вращения строится на основе функции вращения. Более точно, каждому ребру молекулы ставится в соответствие вектор вращения, описывающий локальные экстремумы функции вращения на этом ребре. Однако аналитическое исследование поведения функции вращения на ребре затруднено из-за сложности формул. Поэтому на последнем этапе исследование поведения функции

вращения и построение вектора вращения проводится с помощью компьютера.

Последняя часть главы содержит материал по компьютерному анализу траекторного инварианта для случаев Лагранжа и Горячева-Чаплыгина в динамике твердого тела. Вычислительные алгоритмы были предложены автором диссертации. Их компьютерная реализация и сами вычисления принадлежат Ш. Такахаси (Япония, Токийский Университет). Работа была выполнена в рамках сотрудничества между кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ и лабораторией профессора Т.Л. Куни, президента университета города Айзу (Япония). Она наглядно демонстрирует возможности компьютерных методов в интересных и сложных задачах гамильтоновой механики. Несмотря на неизбежные вычислительные погрешности, компьютерные диаграммы хорошо описывают качественную картину поведения рассматриваемых динамических систем.

Компьютерный анализ векторов вращения для задач Горячева-Чаплыгина и Лагранжа завершает построение траекторного инварианта для этих систем. Тем самым для этих задач решается проблема траекторной классификации. Основным результатом этого исследования является следующий

Экспериментальный результат ([37])

- 1) Динамические системы Горячева-Чаплыгина, ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно незэквивалентны.
- 2) Динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно незэквивалентны.

Замечание. Полученные экспериментальные результаты являются следствием монотонной зависимости вектора вращения от энергии. Расчеты, выполненные с большой компьютерной точностью, явно показывают требуемую монотонность. Строго говоря, это не гарантирует того, что здесь нет очень слабых, почти незаметных возмущений. Однако аналитический характер исследуемых функций позволяет предположить, что полученные результаты достаточно надежны.

Пусть $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система на M^4 , интегрируемая по Лиувиллю при помощи интеграла F . Рассмотрим особую точку $x \in M^4$

отображения момента, т.е. такую что $dH(x) = dF(x) = 0$. Топология лиувиллева слоения окрестности этой точки $x \in M^4$ эффективно описывается следующим образом. В $\mathbb{R}^2 \supset F(M^4)$ построим окружность γ_ϵ малого радиуса ϵ с центром в точке $y = F(x)$. Рассмотрим трехмерную поверхность $Q_\gamma^3 = F^{-1}(\gamma_\epsilon)$. Как и все многообразие M^4 , поверхность Q_γ^3 расслоена на поверхности уровня интегралов H и F , поэтому для данной поверхности может быть определен инвариант $W^*(Q_\gamma^3, v)$ (*меченая круговая молекула*), описывающий это лиувиллево слоение. Таким образом, топология лиувиллева слоения окрестности особой точки может быть за- кодирована меченой молекулой. Интересен вопрос об описании допустимых видов молекул для различных типов особых точек. Невырожденные особые точки бывают четырех типов (в зависимости от типа возникающих подалгебр Картана), которые условно называются “центр-центр”, “центр-седло”, “седло-седло” и “фокус”. В работе [13] А.В. Болсинов полностью решил задачу для наиболее простых случаев “центр-центр” и “центр-седло”, а также сильно продвинулся в исследовании топологии точки типа “центр-центр”. Эта работа завершена В.С. Матвеевым [30], который также полностью исследовал случай “фокус”.

После ответа на вопрос о топологическом типе окрестностей невырожденных особых точек встает вопрос об описании топологии вырожденных особенностей. Пусть $O(x)$ — вырожденная компактная орбита ранга 1, проходящая через некоторую точку $x \in M^4$. Тогда орбита $O(x)$ гомеоморфна окружности. Пусть $F(x) = y$ — образ орбиты при отображении момента. В ГЛАВЕ 5 полностью изучена топология четырехмерных окрестностей компактных вырожденных орбит *минимаксного типа*, т.е. таких что $F^{-1}(y) = O(x)$.

В главе 5 доказаны следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 0.0.6 ([33, 34]) Полностью описан допустимый вид инварианта Фоменко-Цишанга для компактных вырожденных орбит минимаксного типа.

Теорема 0.0.7 ([33, 34]) Доказано, что любая меченая молекула, удовлетворяющая условию теоремы 0.0.6, реализуется в качестве инварианта Фоменко-Цишанга для некоторой вырожденной одномерной орбиты минимаксного типа.

Следствие 0.0.3 ([33, 34]) Полностью описан допустимый инвариант Фоменко-Цишанга для случая, когда бифуркационная диаграмма в окрестности образа вырожденной одномерной орбиты имеет вид трех кривых, выходящих из одной точки.

В заключение дадим краткий обзор основных результатов в области топологической и траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем, полученных к настоящему моменту, и сформулируем открытые проблемы в этой области.

- Разработаны общие методы построения инварианта Фоменко–Цишанга на изоэнергетических поверхностях и круговых мечевых молекул. Отметим основную работу А.В. Болсина [13], а также работу П. Топалова [49], в которых обнаружена связь между топологией изоэнергетической поверхности в целом и числовыми метками инварианта. Кроме того, некоторые идеи вычисления лиувиллева инварианта для алгебраически интегрируемых гамильтоновых систем содержатся в работе О.Е. Орел [36]. В дальнейшем интересно было бы построение полной теории классификации алгебраически интегрируемых систем.
- В работах А.В. Болсина [13] и В.С. Матвеева [30] описаны круговые молекулы для четырех основных типов невырожденных особых точек. В работе [34] автора диссертации описан лиувиллев инвариант для вырожденных минимаксных орбит. Здесь интересен вопрос о построении инварианта для вырожденных особых орбит других типов.
- Вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых задач динамики твердого тела: задач Эйлера, Лагранжа, Горячева–Чаплыгина, Жуковского, Ковалевской, Клебша и Стеклова–Ляпунова. Некоторые из этих задач были просчитаны А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко. Самой “богатой” является работа А.А. Ошемкова [42]. Отметим также работы Л.С. Поляковой, Б.С. Кругликова, П. Топалова [49], О.Е. Орел [36] и многих студентов и аспирантов кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ.
- В работах Л.С. Поляковой, З.Т. Нгуена [32], Е.Н. Селивановой [46] и В.С. Матвеева [31] вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе, сфере, проективной плоскости и бутылке Клейна.
- Теория траекторной классификации является сравнительно новой и результатов в этой области не много. А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко в [12, 14] построили непрерывный и гладкий траекторный ин-

варианты для задач Эйлера и Якоби. Е.Н. Селиванова [47] провела траекторную классификацию лиувиллевых систем на двумерном торе. В работах О.Е. Орел и Ш. Такахаси [36, 37] построены траекторные инварианты для интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина и проведен компьютерный эксперимент по классификации этих задач. В этой области, конечно, остается обширный класс задач по построению траекторных инвариантов для примеров интегрируемых систем.

- Интересен вопрос о разработке методов вычисления траекторных инвариантов. Некоторые попытки решения этой задачи были предприняты в работах Б.С. Кругликова и П. Топалова. В частности, интересна теория траекторной классификации алгебраически интегрируемых систем, некоторые первые идеи которой заложены в работе О.Е. Орел [36].
- Проблема траекторной непрерывной и гладкой классификации окрестностей вырожденных и невырожденных особенностей решена только для простейшей эллиптической особенности в работе О.Е. Орел [40]. Аналогичная задача для всех других особенностей остается открытой.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя академика РАН А.Т. Фоменко за постановку задач и постоянное внимание к работе, д.ф.-м.н. А.В. Болсинова за многочисленные обсуждения и советы, чл.-корр. РАН В.В. Коллова, к.ф.-м.н. А.А. Ошемкова и к.ф.-м.н. Ю.Н. Федорова за полезные замечания, а также Ш. Такахаси за помощь в проведении численных расчетов.

Глава 1

Основные определения и теоремы

1.1 Лиувилева классификация интегрируемых гамильтоновых систем

Пусть на симплектическом многообразии M^4 с симплектической структурой ω задана гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом H . Предположим, что система интегрируема по Лиувиллю. Это означает, что существует дополнительный первый интеграл F , почти всюду независимый с H . Пусть h — некоторое регулярное значение отображения $H : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Рассмотрим поверхность постоянной энергии (изоэнергетическую поверхность)

$$Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}.$$

Мы всегда будем считать, что она компактная, гладкая, замкнутая и на ней фиксирована ориентация.

Определение. Интегрируемая гамильтонова система (ИГС) $v = \text{sgrad } H$ называется *нерезонансной* на изоэнергетической поверхности Q_h^3 , если в Q_h^3 всюду плотны торы Лиувилля с иррациональными обмотками.

Определение. Дополнительный интеграл F называется *морс-боттовским* на поверхности Q_h^3 , если критическое множество F на Q_h^3 есть непересекающееся объединение невырожденных в смысле теории Морса многообразий.

Из сделанных выше предположений нетрудно заключить, что любое критическое подмногообразие является либо окружностью (мы будем называть ее *невырожденной критической окружностью*), либо двумерным тором, либо бутылкой Клейна. Если критическое подмногообразие

является тором, то с топологической точки зрения в этом случае никакой перестройки торов не происходит. Как правило, в окрестности такого тора существует другой дополнительный интеграл, для которого этот тор не является критическим. Поэтому в дальнейшем мы будем включать критические торы в число торов Лиувилля. Ни в одной из изученных сегодня систем физики и механики критические бутылки Клейна не встречаются. Кроме того, при переходе к двулистным накрытиям они разворачиваются в критические торы, которые мы включили в число торов Лиувилля. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что критических бутылок Клейна нет, хотя всю теорию можно построить и для общего случая (см. [48]).

Определение. Изоэнергетическая поверхность Q_h^3 является *топологически устойчивой* для данной системы, если при малом изменении значения h энергии H топологический тип системы \mathbf{v} не меняется (т.е. система остается лиувилево эквивалентной исходной).

Предположим, что интеграл F является морс-бottовским, гамильтониан H нерезонансным на изоэнергетической поверхности, а сама поверхность Q_h^3 топологически устойчивой. Интегрируемые гамильтоновы системы, удовлетворяющие этим условиям, называются *невырожденными*.

Поскольку любая невырожденная критическая окружность является периодической траекторией, то на ней имеется естественная ориентация, заданная системой.

Определение. Две невырожденные ИГС \mathbf{v} и \mathbf{v}' на изоэнергетических поверхностях Q и Q' называются *лиувилево эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi : Q \rightarrow Q'$, переводящий лиувиллево слоение системы \mathbf{v} в лиувиллево слоение системы \mathbf{v}' с сохранением ориентаций изолированных невырожденных критических окружностей.

Опишем теперь, как строится лиувиллев инвариант Фоменко-Цишанга для невырожденной ИГС на изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Напомним, что этот инвариант классифицирует ИГС с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Из предположения компактности Q_h^3 и морс-бottовости интеграла F следует, что число критических многообразий конечно. В частности, число критических значений функции F тоже конечно. Обозначим критические значения в порядке возрастания c_1, \dots, c_N . Выберем число

$\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы отрезки $I_k = [c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, $k = 1, \dots, N$, не пересекались. Прообразы $F^{-1}(I_k)$ состоят из конечного числа связных кусков. Фиксируем некоторое критическое значение c и обозначим через Q_c^3 некоторую связную компоненту прообраза $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Край подмногообразия Q_c^3 состоит из конечного числа торов Лиувилля. Обозначим через L_c множество $Q_c^3 \cap F^{-1}(c)$. Будем говорить, что L_c есть *связный критический уровень*, отвечающий критическому значению c , или просто будем называть L_c *особым слоем*. Подмногообразие Q_c^3 будем называть *регулярной окрестностью особого слоя*. В работе [9] было показано, что если L_c не является критической окружностью, то на Q_c^3 однозначно (с точностью до изотопии) можно построить ориентированное расслоение Зейферта $\pi : Q_c^3 \rightarrow P_c$, такое что все невырожденные критические окружности (вместе с заданной на них естественной ориентацией) являются слоями, и интеграл F постоянен на слоях.

Все особые слои этого расслоения Зейферта имеют тип $(2, 1)$ и совпадают с множеством невырожденных критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (см. [9]). Если L_c является критической окружностью, то на Q_c^3 существует структура ориентированного расслоения Зейферта расслоенного полнотория. Эта структура единственна в точности до скручиваний вдоль меридионального диска и изотопий. Таким образом, мы в обоих случаях определили на Q_c^3 однозначно (с точностью до гомеоморфизма) структуру ориентированного расслоения Зейферта $\pi : Q_c^3 \rightarrow P_c$, база которого P_c является компактной ориентируемой двумерной поверхностью с краем. Обозначим через K_c проекцию особого слоя L_c на базу P_c . Множество K_c является либо точкой (в случае, когда L_c есть невырожденная критическая окружность), либо конечным связным графом, все вершины которого имеют степень 2 или 4. Вершины степени 4 являются проекциями критических окружностей с ориентированными сепаратрисными диаграммами, а вершины степени 2 — с неориентированными. Разность $P_c \setminus K_c$ представляет собой несвязное объединение колец. Назовем кольцо *положительным*, если значение f интеграла F на нем больше критического значения c и *отрицательным*, если на нем $f < c$. Очевидно, что к каждому ребру примыкает ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо.

Определение. Пара (P, K) , где K — непустой конечный связный граф, лежащий в компактной ориентированной поверхности P , называется *атомом*, если выполнены следующие условия:

- 1) степень каждой вершины графа K равна 0, 2 или 4;

- 2) каждая связная компонента разности $P \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1)$;
- 3) все кольца $P \setminus K$ можно разбить на положительные и отрицательные так, чтобы к каждому ребру примыкало ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо.

Два атома (P, K) и (P', K') считаются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi : P \rightarrow P'$, отображающий K на K' .

Определение. Трехмерное ориентированное многообразие Зейферта Q с согласованно ориентированными слоями называется зейфертовой реализацией буквы (P, K) , если

- 1) поверхность P служит базой многообразия Q ;
- 2) ориентация многообразия Q , его слоев и базы согласованы;
- 3) все особые слои многообразия Q имеют тип $(2, 1)$, причем слой является особым тогда и только тогда, когда он проектируется в вершину степени 2 графа K .

Отметим, что зейфертова реализация Q данного атома (P, K) всегда существует и определена однозначно с точностью до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма (это следствие общих фактов из теории многообразий Зейферта).

Таким образом, каждой регулярной окрестности Q_c^3 особого слоя L_c мы однозначно (с точностью до эквивалентности) поставили в соответствие некоторый атом (P_c, K_c) , а сама регулярная окрестность Q_c^3 является однозначно определенной зейфертовой реализацией атома.

Назовем *сложностью* атома количество вершин графа K . *Типом поверхности* атома называется замкнутая поверхность, получающаяся при заклеивании всех краев поверхности P_c дисками.

В работе [9] описаны все атомы сложности 1, 2 и 3. Каждому атому малой сложности приписано некоторое имя — латинская буква с нижними числовыми индексами и верхними индексами * (звездочка). Число звездочек равно количеству вершин графа K степени 2. Так, например, атомов сложности 1 всего три. В простейшем случае график K является точкой, такой атом обозначается буквой A . Этот атом соответствует превращению тора в окружность. Во втором случае график K имеет единственную вершину степени 4. Такой атом обозначается буквой B и

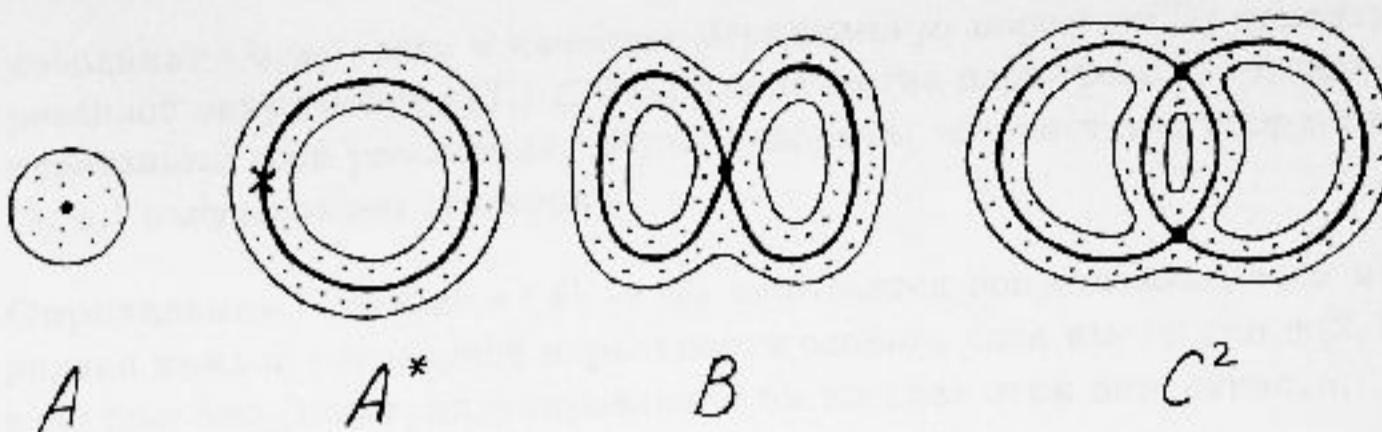


Рис. 1.

описывает перестройку двух торов в один. Наконец, последний атом содержит граф со степенью вершины 2 и обозначается A^* . Он описывает перестройку тора снова в тор через критическую окружность. Кроме этих простейших атомов, отметим еще часто встречающийся в примерах атом C_2 , описывающий перестройку двух торов в два других тора. Этот атом имеет сложность 2. Атомы A, A^*, B, C_2 изображены на рис. 1. Все эти атомы имеют тип поверхности S^2 .

Построим теперь по изоэнергетической поверхности Q_h^3 некоторый граф. Вершинами этого графа являются атомы (регулярные окрестности особых слоев), а ребрами — однопараметрические семейства торов Лиувилля, связывающие эти атомы. Полученный граф принято изображать на плоскости, обозначая вершины (атомы) соответствующими буквами из таблицы сложности.

Определение. Построенный таким образом граф называется *молекулой*, соответствующей невырожденной ИГС \mathbf{v} на изоэнергетической поверхности Q_h^3 , и обозначается $W(Q_h^3, \mathbf{v})$.

Очевидно, молекула W сохраняется при гомеоморфизмах изоэнергетических поверхностей, сохраняющих лиувиллево слоение, т.е. является лиувиллевым инвариантом. Однако этот инвариант не полон: он не различает многие неэквивалентные системы. Полученный граф еще должен быть снабжен некоторыми числовыми метками, которые мы сейчас опишем.

Пусть Q — зейфертова реализация отличного от A атома (P, K) и $\pi : Q \rightarrow P$ — проекция. Обозначим через P_0 дополнение к регулярным окрестностям вершин степени 2 графа K , через $Q_0 = \pi^{-1}(P_0)$ — дополнение к регулярным окрестностям особых слоев. Для произвольного сечения $s : P_0 \rightarrow Q_0$ выберем на каждом торе из $T_i \in \partial Q_0$ систему

координат (λ_i, μ_i) , взяв в качестве меридиана μ_i образ $s\pi(T_i)$ ориентированной окружности $\pi(T_i) \subset \partial P_0$, а в качестве параллели λ_i — ориентированный слой расслоения. Будем говорить, что системы координат (λ_i, μ_i) индуцированы сечением s .

Определение. Сечение $s : P_0 \rightarrow Q_0$ называется допустимым, если меридиан каждой регулярной окрестности особого слоя имеет тип $\pm(2, 1)$ в системе координат, индуцированной им на крае этой окрестности.

В частности, если многообразие Q не имеет особых слоев, то все сечения допустимы. Существование допустимых сечений в других случаях (т.е. когда Q имеет особые слои) следует из того, что все особые слои обязаны иметь тип $(2, 1)$.

Определение. Системы координат на крае зейфертовой реализации Q называются допустимыми, если они индуцированы некоторым допустимым сечением.

Заметим, что таким образом циклы λ_i оказываются однозначно определенными (как слои расслоения), а циклы μ_i определены неоднозначно и зависят от выбора сечения расслоения.

Определение. Система координат (μ, λ) на крае зейфертовой реализации буквы A (полнотория) называется допустимой, если λ — ориентированный меридиан полнотория, а μ — его параллель.

Как и в предыдущем случае, в случае атома A цикл λ , очевидно, определен однозначно, а цикл μ — неоднозначно.

Пусть Q_h^3 есть изоэнергетическая поверхность некоторой невырожденной ИГС. Выберем на каждом ребре молекулы по одному тору Лиувилля и разрежем поверхность Q_h^3 по всем таким торам. В результате она распадется на конечное число связных кусков. Замыкания этих кусков исчерпывают все регулярные окрестности особых слоев слоения Лиувилля. Согласно сказанному выше, эти регулярные окрестности являются зейфертовыми реализациями некоторых атомов. Ориентируем все ребра молекулы. Это равносильно тому, что мы указываем, какой край ребра первый, а какой второй (на рисунках ориентация ребра обозначается стрелкой). Рассмотрим на краях всех атомов молекулы допустимые системы координат. Тогда на каждом торе Лиувилля, вдоль которого мы разрезали изоэнергетическую поверхность, возникают два базиса в группе гомологий этого тора. Так как ребро e , в котором находится

этот тор, ориентированно, мы можем упорядочить эти базисы. Базис на первом крае ребра мы обозначим через $(\lambda^-(e), \mu^-(e))$, а второй базис — через $(\lambda^+(e), \mu^+(e))$. Тогда

$$\begin{cases} \lambda^+(e) = \alpha(e)\lambda^-(e) + \beta(e)\mu^-(e), \\ \mu^+(e) = \gamma(e)\lambda^-(e) + \delta(e)\mu^-(e), \end{cases}$$

где матрица

$$C(e) = \begin{pmatrix} \alpha(e) & \beta(e) \\ \gamma(e) & \delta(e) \end{pmatrix}$$

есть целочисленная обратимая матрица с определителем -1 . Эта матрица называется *матрицей склейки*. Конечно, матрица склейки определена неоднозначно. Она зависит от выбора допустимой системы координат и ориентации ребра. Оснащение каждого ребра e молекулы матрицей склейки $C(e)$ называется *избыточным оснащением*. Чтобы избавиться от неоднозначности, матрицы склейки на ребрах заменяют числовыми r - ε - и n -метками, которые вычисляются по этим матрицам. Эти числа уже не зависят от выбора допустимых систем координат.

Определение. r -меткой ребра e называется число

$$r(e) = \begin{cases} \bar{\alpha}(e)/|\beta(e)|, & \text{если } \beta(e) \neq 0, \\ \infty, & \text{если } \beta(e) = 0, \end{cases}$$

где $0 \leq \bar{\alpha}(e) < |\beta(e)|$ и $\bar{\alpha}(e) \equiv \alpha(e) \pmod{\beta(e)}$.

Определение. ε -меткой ребра e называется число

$$\varepsilon(e) = \begin{cases} \operatorname{sign} \beta(e), & \text{если } \beta(e) \neq 0, \\ \operatorname{sign} \alpha(e), & \text{если } \beta(e) = 0. \end{cases}$$

Ребра, на которых $r = \infty$, называются *тонкими*. Рассмотрим в нашей молекуле тонкий подграф \mathcal{G} , состоящий из всех вершин молекулы и всех ее тонких ребер. Связные компоненты графа \mathcal{G} , которые не содержат атомов A , называются *семьями*. Обозначим их через G_1, \dots, G_l . Пусть G — произвольная семья молекулы. Рассмотрим все ребра в молекуле, хотя бы одна вершина которых принадлежит этой семье. Множество всех таких ребер обозначим через I . Через $v_0(e)$ будем обозначать тот атом молекулы, из которого выходит ребро e , а через $v_1(e)$ атом, в который входит это ребро.

Определение. n -меткой семьи G называется целое число

$$n(G) = \sum_{e \in I} f(e),$$

где

$$f(e) = \begin{cases} \left[-\frac{\gamma(e)}{\alpha(e)} \right], & \text{если } e \in G, \\ \left[\frac{\alpha(e)}{\beta(e)} \right], & \text{если } e \notin G, v_0(e) \in G, v_1(e) \notin G, \\ \left[-\frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right], & \text{если } e \notin G, v_0(e) \notin G, v_1(e) \in G, \\ \left[\frac{\alpha(e)}{\beta(e)} \right] + \left[-\frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right], & \text{если } e \notin G, v_0(e) \in G, v_1(e) \in G, \end{cases}$$

Определение. Молекула $W(Q_h^3, \mathbf{v})$ с метками называется *меченой молекулой* (или *инвариантом Фоменко-Цишанга*), соответствующей невырожденной системе \mathbf{v} на изоэнергетической поверхности Q_h^3 , и обозначается $W^*(Q_h^3, \mathbf{v})$.

А.В. Болсинов, С.В. Матвеев и А.Т. Фоменко в работе [9] доказали следующую теорему о лиувиллевой классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем.

Теорема 1.1.1 Пусть \mathbf{v} — невырожденная интегрируемая гамильтонова система.

- 1) Тогда отвечающая этой системе меченая молекула W^* корректно определена, т.е. не зависит от выбора допустимых координат.
- 2) Меченая молекула является полным траекторным инвариантом невырожденной ИГС. Это означает, что две невырожденные ИГС лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.
- 3) При этом множество всех допустимых значений этих полных инвариантов явно и эффективно описано. Доказана теорема реализации, т.е. что для любого наперед заданного значения инварианта W^* обязательно существует невырожденная интегрируемая система именно с таким значением W^* .

Топология лиувиллева слоения окрестности особой точки $x \in M^4$, такой что $dH(x) = dF(x) = 0$, описывается круговой меченой молекулой $W^*(Q_\gamma^3, \mathbf{v})$, где γ — окружность достаточно малого радиуса ε вокруг точки (h, f) ($h = H(x)$, $f = F(x)$). Это трехмерное многообразие также обладает слоением Лиувилля на поверхности уровня интегралов H и F . К этому слоению применима вся теория, построенная для изоэнергетических поверхностей. Как показано в работах А.В. Болсинова и В.С. Матвеева, меченные круговые молекулы являются эффективным средством описания топологии окрестностей особых точек.

1.2 Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем

Определение. Две гладкие динамические системы \mathbf{v} и \mathbf{v}' на многообразиях M и M' называются *непрерывно (топологически) траекторно эквивалентными*, если существует гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$, переводящий траектории первой системы в траектории второй с сохранением ориентации (но без сохранения времени).

Если система нерезонансна, то лиувиллево слоение не зависит от выбора дополнительного интеграла. Следовательно, нерезонансные траекторно эквивалентные системы являются лиувиллево эквивалентными.

В работе [10] А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко построили теорию непрерывной траекторной классификации невырожденных ИГС с двумя степенями свободы, ограниченных на неособые изоэнергетические поверхности Q_h^3 . В этой теории условие невырожденности ИГС кроме морс-бottовости, нерезонансности и устойчивости включает еще дополнительные требования:

- дифференциал отображения Пуанкаре для каждой периодической траектории поля \mathbf{v} , являющейся в то же время критической окружностью интеграла F , отличен от тождественного отображения и от “минус тождественного”. Другими словами, все седловые критические окружности интеграла F являются гиперболическими траекториями потока;
- функции вращения ρ системы \mathbf{v} (см. их определение ниже) должны иметь лишь конечное число локальных минимумов, максимумов и полюсов.

В работе [10] доказана следующая

Теорема 1.2.1 *Каждой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе в канонически сопоставляется некоторый объект*

$$W^{st}(Q_h^3, \mathbf{v}) = (W^*, R, \Lambda, \tilde{\Delta} \tilde{Z} \tilde{\vartheta}),$$

называемый мечено́й t -молекулой и получающейся из классической мечено́й молекулы W^* добавлением некоторых новых меток. Этот объект является полным траекторным инвариантом невырожденных ИГС. Это означает, что две невырожденные ИГС траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные t -молекулы совпадают.

Опишем построение R -инварианта.

Определение. Пусть $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2$ — стандартные переменные действия-угол в окрестности некоторого тора Лиувилля T^2 . Согласно теореме Лиувилля на данном торе в координатах (φ_1, φ_2) векторное поле является постоянным. Числом вращения в координатах (φ_1, φ_2) (или в циклах $\gamma_1 = \{\varphi_2 = \text{const}\}$, $\gamma_2 = \{\varphi_1 = \text{const}\}$), называется отношение частот квазипериодического движения на лиувиллевом торе:

$$(1.1) \quad \rho = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{\partial H / \partial I_1}{\partial H / \partial I_2}.$$

Для дальнейшего будет полезно напомнить, что в окрестности неособого лиувиллева тора переменные действие могут быть вычислены по следующей формуле (см. [5]):

$$(1.2) \quad I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \kappa, \quad i = 1, 2,$$

где γ_1, γ_2 — базисные циклы на торах, такие что их гомотопические классы в окрестности данного тора не зависят от тора. В последней формуле через κ обозначена 1-форма, такая что $d\kappa = \omega$ в рассматриваемой окрестности.

Удалим из поверхности Q_h^3 все критические уровни функции F . В результате получим некоторый конечный набор однопараметрических семейств торов Лиувилля. Можно считать, что параметром на каждом семействе (ребре) является сама функция F . Тем самым для каждого семейства e возникает функция вращения $\rho(F, e)$. Ясно, что функции $\rho(e)$ зависят от выбора базиса на соответствующем торе Лиувилля. Чтобы

избавиться от неоднозначности, рассмотрим на каждом направленном ребре две допустимые системы координат $(\lambda^-(e), \mu^-(e))$ и $(\lambda^+(e), \mu^+(e))$ и матрицу $C(e)$ перехода от одного базиса к другому (матрицу склейки). Пусть $\rho^-(e)$ и $\rho^+(e)$ — две функции вращения на ребре, вычисленные в циклах $(\lambda^-(e), \mu^-(e))$ и $(\lambda^+(e), \mu^+(e))$ соответственно. Если $\beta(e) \neq 0$, то функция $\rho(e) = \beta(e)\rho^-(e) - \alpha(e)$ не зависит от выбора циклов $\mu^-(e), \mu^+(e)$ и определена однозначно. Нетрудно показать, что при таком определении функция $\rho(e)$ — это функция вращения, вычисленная в однозначно определенной паре циклов $(\lambda^-(e), \lambda^+(e))$. Траекторным инвариантом динамической системы на поверхности Q_h^3 является объединение векторов вращения $R(e)$, приписываемых каждому ребру e и состоящих из

- конечных критических значений функции $\rho(e)$ (ее минимумов и максимумов),
- двух пределов функции $\rho(e)$ на концах ребра,
- символов $\pm\infty$, указывающих левые и правые пресделы функции $\rho(e)$ в ее полюсах.

Все перечисленные компоненты вектора $R(e)$ последовательно выписываются при движении вдоль ребра.

Если $\beta(e) = 0$, то положим $\rho(e) = \rho^-(e)$. В этом случае функция $\rho(e)$ уже зависит от выбора базиса, но характер неоднозначности простой: при переходе к другому базису к $\rho(e)$ добавляется целое число. Вектор $R(e)$ определяется в этом случае аналогичным образом, но рассматривается уже по модулю 1. Через $R^+(e)$ (соответственно $R^-(e)$) будем обозначать вектор вращения функции $\rho^+(e)$ (соответственно $\rho^-(e)$).

Определение. ИГС называется *простой* на данной изоэнергетической поверхности Q_h^3 , если на каждом критическом уровне ее дополнительного интеграла F (внутри Q_h^3) лежит ровно одна критическая окружность функции F . В терминах молекулы W это означает, что допустимы только три простейших типа атомов: A , B и A^* .

Явное описание меченых t -молекул в общем случае довольно сложно. В работе [11] А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко построили траекторный инвариант для систем с простыми молекулами W , который оказывается намного проще инварианта для общего случая. Опишем построение t -молекулы для простых систем.

Определение. Назовем ребро e молекулы W^*

- *конечным*, если соответствующая r -метка конечна,
- *бесконечным*, если r -метка равна бесконечности, но R -вектор (данного ребра) содержит хотя бы одну конечную компоненту,
- *супербесконечным*, если $r = \infty$ и R -вектор не имеет ни одной конечной компоненты.

Определение. Разрежем молекулу по всем конечным и бесконечным ребрам. Она распадается в объединение подграфов. Назовем *радикалами* связные куски молекулы, отличные от атомов A .

Очевидно, что при разрезании каждая семья распадается в сумму некоторого числа радикалов. Однако существуют радикалы, не содержащиеся ни в одной семье.

Пусть U — произвольный радикал. Рассмотрим все ребра e в молекуле, хотя бы одна вершина которых принадлежит этому радикалу. Множество всех таких ребер обозначим через I . Через $v_0(e)$ будем обозначать тот атом молекулы, из которого выходит ребро e , а через $v_1(e)$ атом, в который входит это ребро.

Определение. *b*-меткой радикала U называется целое число

$$b(U) = \sum_{e \in I} \vartheta(e),$$

где

$$\vartheta(e) = \begin{cases} \left[-\frac{\gamma(e)}{\alpha(e)} \right], & \text{если } e \in U, \\ \left[\frac{\alpha(e)}{\beta(e)} \right], & \text{если } e \text{ конечно, } v_0(e) \in U, v_1(e) \notin U, \\ \left[-\frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right], & \text{если } e \text{ конечно, } v_0(e) \notin U, v_1(e) \in U, \\ -[-MR^-(e)], & \text{если } e \text{ бесконечно, } v_0(e) \in U, v_1(e) \notin U, \\ [MR^+(e)], & \text{если } e \text{ бесконечно, } v_0(e) \notin U, v_1(e) \in U. \end{cases}$$

Участвующие в этой формуле величины $MR^+(e)$ и $MR^-(e)$ суть средние значения конечных компонент векторов вращения $R^+(e)$ и $R^-(e)$ соответственно.

Определение. Назовем t -молекулой $W^{*t} = (W^*, R, b)$ граф W^* вместе со всеми его R -векторами и b -инвариантами (всех его радикалов). Для конечных ребер R обозначает R -вектор, а для бесконечных ребер R обозначает $R \bmod 1$.

Теорема 1.2.2 Пусть v — простая интегрируемая гамильтонова система указанного типа невырожденности.

- 1) Тогда отвечающая этой системе t -молекула W^{*t} корректно определена, т.е. не зависит от выбора допустимых координат.
- 2) t -молекула является полным траекторным инвариантом невырожденной ИГС. Это означает, что две невырожденные ИГС траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их t -молекулы совпадают.
- 3) При этом множество всех допустимых значений этих полных инвариантов явно и эффективно описано. Доказана теорема реализации, т.е. что для любого наперед заданного значения инварианта W^{*t} обязательно существует интегрируемая система именно с таким значением W^{*t} .

1.3 Некоторые интегрируемые задачи механики

Наиболее важные примеры интегрируемых гамильтоновых систем возникают в динамике твердого тела. Хорошо известно, что движение твердого тела около неподвижной точки O в системе координат $Oe_1e_2e_3$, жестко связанной с телом (e_i — главные оси инерции тела), описывается системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + P(x_3\nu_2 - x_2\nu_3), & \dot{\nu}_1 &= \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + P(x_1\nu_3 - x_3\nu_1), & \dot{\nu}_2 &= \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + P(x_2\nu_1 - x_1\nu_2), & \dot{\nu}_3 &= \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1, \end{aligned}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, направленный по вертикальной оси; P — масса тела, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор центра масс. Параметрами задачи являются также главные моменты инерции тела A_1, A_2, A_3 . Введя матрицу

$\mathcal{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, уравнения Эйлера–Пуассона можно записать в векторной форме:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}\omega = \mathcal{A}\omega \times \omega - Px \times \nu, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega. \end{cases}$$

Эти уравнения всегда имеют три интеграла:

$$H = \frac{1}{2}\langle A\omega, \omega \rangle + P\langle x, \nu \rangle \quad (\text{интеграл энергии}),$$

$$f_1 = \langle \nu, \nu \rangle \quad (\text{геометрический интеграл}),$$

$$f_2 = -\langle \mathcal{A}\omega, \nu \rangle \quad (\text{интеграл площадей}).$$

Здесь через \langle , \rangle обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^3 .

Хорошо известно, что уравнения Эйлера–Пуассона можно представить в гамильтоновой форме на орбитах коприсоединенного представления группы $E(3)$ движений трехмерного пространства в коалгебре Ли $e^*(3)$. Действительно, в пространстве $e^*(3)$ имеем скобку Пуассона–Ли

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk}s_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk}r_k.$$

Здесь координаты (s_1, s_2, s_3) сопряжены стандартному базису (s^1, s^2, s^3) в алгебре $so(3)$, а координаты (r_1, r_2, r_3) — стандартному базису в алгебре трансляций \mathbb{R}^3 . Эта структура невырождена на орбитах коприсоединенного представления $M^4 = \{\langle r, r \rangle = \text{const}, \langle s, r \rangle = \text{const}\}$. Тем самым орбита M^4 превращается в симплектическое многообразие, и на ней для произвольной функции $H \in C^\infty$ возникает гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{\partial H}{\partial s} \times s + \frac{\partial H}{\partial r} \times r, \\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial s} \times r. \end{cases}$$

Оказывается, заменой координат

$$s_i = -A_i\omega_i,$$

$$r_i = \nu_i$$

уравнения Эйлера–Пуассона на поверхности уровня $\{f_1 = \text{const}, f_2 = \text{const}\}$ сводятся к указанной гамильтоновой системе на орбите коприсоединенного представления M^4 при

$$H = \frac{1}{2}\langle s, \mathcal{A}^{-1}s \rangle + P\langle x, r \rangle.$$

При топологическом анализе систем удобно считать, что $f_1 = 1$ на орбите M^4 . Этого всегда можно добиться с помощью линейного преобразования координат, сохраняющего скобку Пуассона. Таким образом, будем считать, что гамильтонова система $\varphi = \text{sgrad } H$ задана на симплектическом многообразии M^4 , выделяемом в \mathbb{R}^6 уравнениями

$$\begin{aligned} f_1 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\ f_2 &= s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g, \end{aligned}$$

где g — некоторая константа, называемая *константой площадей*.

В общем случае указанная гамильтонова система не является интегрируемой, однако при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты у системы существует дополнительный интеграл. К таким системам, в частности, относятся задачи Эйлера, Горячева–Чаплыгина и Лагранжа.

В задаче Эйлера твердое тело вращается вокруг центра масс в поле силы тяжести. В этом случае радиус-вектор центра масс x нулевой, а система уравнений Эйлера–Пуассона принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= (B - C)s_2s_3, & \dot{r}_1 &= Bs_2r_3 - Cs_3r_2, \\ \dot{s}_2 &= (C - A)s_1s_3, & \dot{r}_2 &= Cs_3r_1 - As_1r_3, \\ \dot{s}_3 &= (A - B)s_1s_2, & \dot{r}_3 &= As_1r_2 - Bs_2r_1, \end{aligned}$$

где $A = 1/A_1$, $B = 1/A_2$, $C = 1/A_3$ — величины, обратные к главным моментам инерции тела. Гамильтониан и дополнительный интеграл в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2), \\ F &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \end{aligned}$$

Замечание. Несмотря на то, что в динамике твердого тела главные моменты инерции должны удовлетворять неравенству треугольника, уравнения Эйлера–Пуассона верны для произвольных параметров A , B , C . Поэтому, абстрагируясь от физической постановки задачи, мы будем считать, что эти параметры удовлетворяют только одному соотношению $A \leq B \leq C$.

В случае Горячева–Чаплыгина мы имеем дело с твердым телом, главные моменты инерции которого удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 4A_3$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида

инерции, т.е. $x_3 = 0$. Тогда после линейной замены координат, сохраняющей пуассонову структуру, уравнения Эйлера–Пуассона принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= 3s_2s_3, & \dot{r}_1 &= 4s_3r_2 - s_2r_3, \\ \dot{s}_2 &= -3s_1s_3 + r_3, & \dot{r}_2 &= s_1r_3 - 4s_3r_1, \\ \dot{s}_3 &= -r_2, & \dot{r}_3 &= s_2r_1 - s_1r_2.\end{aligned}$$

Гамильтониан и дополнительный интеграл в этой задаче следующие:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2) + r_1, \\ F &= s_3(s_1^2 + s_2^2) - s_1r_3,\end{aligned}$$

причем дополнительный интеграл существует только при $g = 0$.

Случай Лагранжа характеризуется тем, что $A_1 = A_2$ и $x_1 = x_2 = 0$. Это означает, что твердое тело в этом случае — это осесимметричный волчок, эллипсоид инерции которого является эллипсоидом вращения, а центр тяжести лежит на оси вращения. После линейной замены координат, сохраняющей пуассонову структуру, гамильтониан и дополнительный интеграл для случая волчка Лагранжа принимают вид ($\beta = A_3/A_1$)

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{s_3^2}{\beta} \right) + ar_3, \\ F &= s_3,\end{aligned}$$

а система Эйлера–Пуассона записывается так:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2s_3 \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) - ar_2, & \dot{r}_1 &= s_2r_3 - \frac{s_3r_2}{\beta}, \\ \dot{s}_2 &= -s_1s_3 \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) + ar_1, & \dot{r}_2 &= -s_1r_3 + \frac{s_3r_1}{\beta}, \\ \dot{s}_3 &= 0, & \dot{r}_3 &= s_1r_2 - s_2r_1.\end{aligned}$$

В диссертации задача Лагранжа исследуется в несколько более общем виде, а именно, вместо линейного потенциала ar_3 мы будем рассматривать произвольный гладкий выпуклый потенциал $V(r_3)$, описывающий, вообще говоря, негравитационное действие внешних сил. Эта задача также интегрируема с тем же дополнительным интегралом.

Другие примеры интегрируемых гамильтоновых систем появляются при изучении геодезических потоков на замкнутых многообразиях.

Рассмотрим произвольное гладкое риманово многообразие M^n . Пусть на M^n заданы локальные координаты q_1, \dots, q_n .

Определение. Геодезическим потоком риманова многообразия M^n с метрикой $ds^2 = \sum g_{ij} dq_i dq_j$ называется лагранжева система в касательном расслоении TM^n с функцией Лагранжа $L = \sum g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$.

Хорошо известно, что кокасательное расслоение T^*M^n можно естественным образом превратить в симплектическое многообразие. Отождествляя TM^n и T^*M^n при помощи римановой метрики, можно считать, что геодезический поток действует в T^*M^n . Соответствующая система оказывается гамильтоновой, причем гамильтониан H является преобразованием Лежандра функции Лагранжа L , т.е. $H = \sum \lambda_{ij} p_i p_j$, где матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$, задающая гамильтониан H , связана с матрицей $G = (g_{ij})$, задающей L , соотношением $\Lambda = G^{-1}/4$.

В задаче Якоби в качестве риманова многообразия взят двумерный эллипсоид, задаваемый в пространстве \mathbb{R}^3 уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

На этом эллипсоиде из \mathbb{R}^3 индуцируется стандартная евклидова метрика. Полученный геодезический поток этой метрики имеет дополнительный интеграл F , функционально независимый от H . Тем самым, задача Якоби является полностью интегрируемой по Лиувиллю. Отметим, что есть еще одна интерпретация задачи Якоби: это задача о точке, свободно движущейся по поверхности эллипса.

1.4 Римановы поверхности и нелинейные уравнения

Изложим вкратце некоторые факты из теории римановых поверхностей и абелевых дифференциалов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Эта теория в основном восходит к классическим работам Абеля, Якоби и Римана. Современное изложение этой теории и доказательства теорем можно найти в работах Б.А. Дубровина [18].

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность Γ в пространстве $\mathbb{C}^2(z, w)$, заданную уравнением

$$\Gamma = \{w^2 = P(z)\},$$

где $P(z)$ — многочлен n -й степени от z без кратных корней. Компактифицируем риманову поверхность Γ стандартным образом. Тогда, очевидно, поверхность Γ является замкнутым двумерным (в вещественном

смысле) ориентируемым многообразием, для которого определен род g . Нетрудно показать, что для гиперэллиптической римановой поверхности рода g степень задающего ее многочлена равна $2g + 1$ или $2g + 2$.

Из теории гомологий поверхности Γ следует, что на Γ можно выбрать базисные циклы $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ такие, что

- 1) любой цикл γ гомологичен их целочисленной линейной комбинации,
- 2) попарные индексы пересечения циклов имеют вид

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g.$$

Такой базис будет называться *каноническим*.

Определение. Дифференциал ω на римановой поверхности Γ *голоморфный*, если он локально записывается в виде $\omega = f(z) dz$, где $f(z)$ — голоморфная функция локального параметра.

В работе [18] показано, что дифференциалы вида

$$\omega_k = \frac{z^{k-1} dz}{\omega} = \frac{z^{k-1} dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad k = 1, \dots, g,$$

являются голоморфными. Кроме того, дифференциалы $\omega_1, \dots, \omega_g$ образуют базис в пространстве голоморфных дифференциалов на неособой поверхности Γ .

Римановой поверхности Γ рода g поставим в соответствие $g \times g$ -матрицы A и B , определяемые формулами

$$A = \left(\oint_{a_i} \omega_j \right), \quad B = \left(\oint_{b_i} \omega_j \right), \quad i, j = 1, \dots, g.$$

Поскольку голоморфный дифференциал замкнут на Γ , то матрицы A и B не изменятся при замене циклов на гомологичные.

Перейдем к нормированному базису голоморфных дифференциалов $\omega_1^0, \dots, \omega_g^0$ с помощью линейного преобразования

$$(1.3) \quad \omega^0 = (A^T)^{-1} \omega,$$

где через ω и ω^0 обозначены g -мерные векторы $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ и $(\omega_1^0, \dots, \omega_g^0)$. В новом базисе матрица A единичная, а матрица B симметрическая и имеет положительно определенную вещественную часть. Матрица B ,

записанная в нормированном базисе, называется *матрицей периодов римановой поверхности* Γ .

Пусть e_1, \dots, e_g — стандартный базис в пространстве \mathbb{C}^g ($e_{jk} = \delta_{jk}$). Рассмотрим векторы $e_1, \dots, e_g, 2\pi i Be_1, \dots, 2\pi i Be_g$. Нетрудно показать, что эти векторы линейно независимы над \mathbb{R} . Следовательно, факторпространства \mathbb{C}^g по решётке

$$M + 2\pi i BN, \quad M, N \in \mathbb{Z}^g,$$

является $2g$ -мерным вещественным тором

$$T^{2g} = \mathbb{C}^g / \{M + 2\pi i BN\}.$$

Определение. Тор T^{2g} называется *многообразием Якоби* (или *якобианом*) поверхности Γ и обозначается через $\text{Jac}(\Gamma)$.

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность Γ . Обозначим через $S^g\Gamma$ ее симметрическую степень (напомним, что точками многообразия $S^g\Gamma$ являются неупорядоченные наборы (P_1, \dots, P_g) , $P_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, g$).

Определение. Пусть P_0 — некоторая фиксированная точка римановой поверхности. Отображение $A: S^g\Gamma \rightarrow \text{Jac}(\Gamma)$

$$A(P) = (u_1(P), \dots, u_g(P)),$$

где

$$u_i(P) = \sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P_j} \omega_i, \quad i = 1, \dots, g,$$

называется *отображением Абеля*.

Утверждение 1.4.1 ([18]) *Отображение Абеля есть корректно определенное голоморфное отображение $\Gamma \xrightarrow{A} \text{Jac}(\Gamma)$.*

Пусть $g = 2$. Рассмотрим так называемую систему уравнений Абеля

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon \ dz_1}{\sqrt{P(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{P(z_2)}} &= a \ dt, \\ \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{P(z_1)}} + \frac{z_2 dz_2}{\sqrt{P(z_2)}} &= b \ dt, \end{aligned}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ — некоторые числа.

Утверждение 1.4.2 ([18]) При отображении Абеля $S^2\Gamma \xrightarrow{A} \text{Jac}(\Gamma)$, $(P_1 = (z_1, \sqrt{P(z_1)}), P_2 = (z_2, \sqrt{P(z_2)})) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)$, где

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \\ \zeta_2 &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{z dz}{\sqrt{P(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z dz}{\sqrt{P(z)}}\end{aligned}$$

(P_0 — фиксированная), система уравнений Абеля переходит в систему с постоянными коэффициентами

$$(1.4) \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = -b, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = a.$$

Запишем отображение Абеля в нормированном базисе:

$$\begin{aligned}\zeta_1^0 &= \int_{P_0}^{P_1} \omega_1^0 + \int_{P_0}^{P_2} \omega_1^0, \\ \zeta_2^0 &= \int_{P_0}^{P_1} \omega_2^0 + \int_{P_0}^{P_2} \omega_2^0.\end{aligned}$$

Переход от базиса дифференциалов (ω_1, ω_2) к новому базису (ω_1^0, ω_2^0) осуществляется с помощью матрицы A по формуле (1.3). Следовательно, переход $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow (\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ определяется тем же преобразованием

$$\zeta_0 = (A^{-1})^T \zeta.$$

В базисе (ζ_1^0, ζ_2^0) система (1.4) перепишется в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1^0 \\ \dot{\zeta}_2^0 \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Определение. Числом вращения динамической системы Абеля на якобиане в координатах (ζ_1^0, ζ_2^0) (или в циклах (γ_1, γ_2) , или в циклах (a_1, a_2)) называется величина

$$\rho_J = \dot{\zeta}_1^0 / \dot{\zeta}_2^0.$$

Утверждение 1.4.3 Если $a = 0$, то число вращения ρ_J вычисляется по формуле

$$\rho_J = - \oint_{a_2} \omega_1 / \oint_{a_1} \omega_1.$$

Глава 2

Несопряженность задач Эйлера и Якоби

2.1 Различные эквивалентности задач Эйлера и Якоби

Рассмотрим задачу Якоби о геодезическом потоке римановой метрики, индуцированной на двумерном эллипсоиде в пространстве \mathbb{R}^3 . При этом метрика в \mathbb{R}^3 является евклидовой, а эллипсоид вложен в \mathbb{R}^3 стандартным образом:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Здесь a, b, c — произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенству $a \leq b \leq c$.

Как было отмечено в главе 1, задача Якоби имеет также другую интерпретацию как задача о свободной частице. Кинетическая энергия частицы, свободно движущейся по эллипсоиду, есть $H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Напомним, что эта задача является гамильтоновой. Более того, она полностью интегрируема по Лиувиллю при помощи дополнительного интеграла

$$F = abc \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} + \frac{\dot{z}^2}{c} \right).$$

В дальнейшем для удобства мы иногда будем отождествлять касательное и кокасательное расслоение к эллипсоиду.

Пусть имеет место строгое неравенство $a < b < c$. Зафиксируем некоторый уровень энергии $h > 0$. Уравнение $H = h$ выделяет окружность в каждой касательной плоскости к эллипсоиду. Поэтому в качестве изоэнергетической поверхности мы получаем расслоение над эллипсоидом со слоем окружность, гомеоморфное трехмерному проективному пространству \mathbb{RP}^3 . Заметим, что все уровни энергии эквивалентны (ди-

намические системы отличаются лишь изменением масштаба времени). Поэтому можно считать, что $\hbar = 1$.

В работе [12] А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко вычислили меченую молекулу для задачи Якоби при $a < b < c$ на изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = 1\}$.

Теорема 2.1.1 ([12]) *Инвариант Фоменко-Цишанга $W^*(Q^3, v)$ имеет следующий вид: молекула изображена на рис. 2. Все r -метки равны нулю, все ε -метки равны 1, метка p на семье C_2 равна ± 2 в зависимости от ориентации изоэнергетической поверхности \mathbb{RP}^3 .*

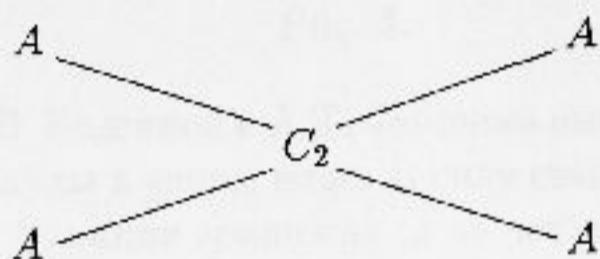


Рис. 2.

В проекции на конфигурационное пространство (эллипсоид) соответствующую эволюцию торов можно описать следующим образом. При $f < a$ прообраз $F^{-1}(f)$ пуст. При $f = a$ в прообразе появляются две критические окружности — эллипс $y^2/b + z^2/c = 1$ в сечении эллипсоида плоскостью $\{x = 0\}$, пробегаемый в двух противоположных направлениях. При $a < f < b$ два тора проектируются в пояс вокруг этого эллипса, причем траектории пробегают в противоположных направлениях. При $f = b$ появляются две выделенные замкнутые траектории — эллипс $x^2/a + z^2/c = 1$ в сечении эллипсоида плоскостью $\{y = 0\}$, пробегаемый в двух противоположных направлениях. Все остальные траектории заметают эллипсоид всюду плотно. На этом уровне происходит перестройка двух лиувиллевых торов в два других тора. При дальнейшем увеличении значения f интеграла F два тора проектируются в пояс вокруг эллипса $x^2/a + y^2/b = 1$. Затем при $f = c$ эти торы превращаются в критические окружности — эллипс $x^2/a + y^2/b = 1$ в сечении эллипсоида плоскостью $\{z = 0\}$, пробегаемый в двух противоположных направлениях, — и исчезают с поверхности уровня интеграла F при дальнейшем его увеличении. Описанная эволюция торов изображена на рис. 3.

В работе [12] также был построен траекторный инвариант для этой задачи. Хотя соответствующая гамильтонова система и не является простой, поскольку она содержит атом C_2 сложности 2, в силу симметрии задачи траекторные инварианты, кроме вектора вращения, оказываются

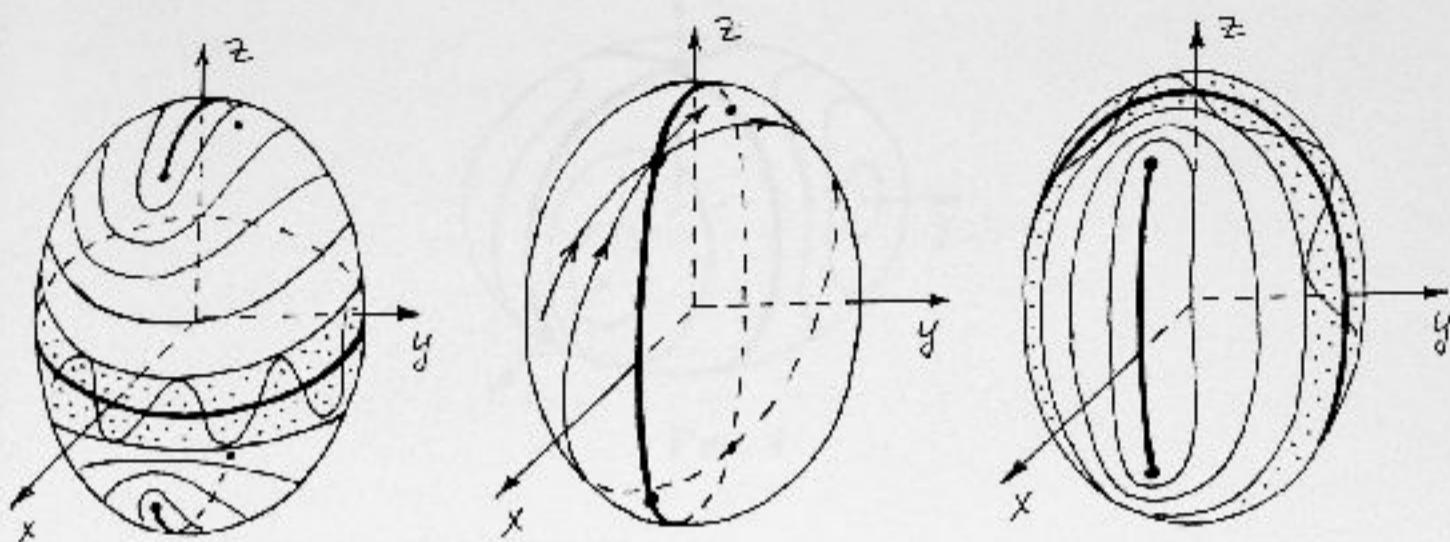


Рис. 3.

тривиальными. А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко выписали функции вращения на ребрах молекулы в явном виде. В силу симметрии задачи мы фактически имеем две функции вращения (а не четыре) на ребрах $a < f < b$ и $b < f < c$. Теми же авторами была доказана монотонность обеих функций вращения. Тем самым каждый из векторов вращения состоит из двух компонент — пределов функций вращения при стремлении f к значениям a , b и c . Более точно, доказана следующая

Теорема 2.1.2 ([12]) На ребрах $a < f < b$ вектор вращения имеет вид $R = (+\infty, k(a, b, c))$, где

$$k(a, b, c) = \pi \left(\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{u(c-a)(b-a)}{a(u+b)(u+c)}} \frac{du}{u+a} \right)^{-1}.$$

На ребрах $b < f < c$ вектор вращения имеет вид $R = (-\infty, l(a, b, c))$, где

$$l(a, b, c) = -\pi \left(\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{u(c-a)(c-b)}{c(u+b)(u+a)}} \frac{du}{u+c} \right)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь задачу Эйлера о вращении твердого тела вокруг центра масс (с нулевой константой площадей). Параметрами задачи являются три главные моменты инерции твердого тела $1/A, 1/B, 1/C$ ($A \leq B \leq C$). Эта задача подробно описана в главе 1. Как было показано, задача Эйлера может быть рассмотрена как гамильтонова на многообразии $M^4 = \{f_1 = 1, f_2 = 0\}$, где $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, $f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3$. Эта задача также является полностью интегрируемой по Лиувиллю с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2)$$

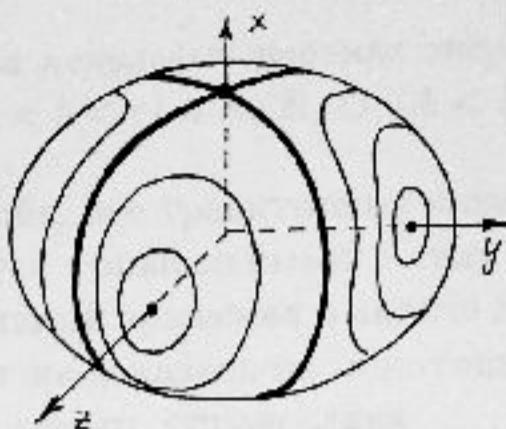


Рис. 4.

и дополнительным интегралом

$$F = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Пусть $A < B < C$. Зафиксируем некоторый уровень энергии $H = h$. Тогда изоэнергетическая поверхность $Q_h^3 = \{H = h\}$ гомеоморфна касательному расслоению единичных векторов (r_1, r_2, r_3) над эллипсоидом $As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2 = 2h$, т.е. проективному пространству \mathbb{RP}^3 . Как и в задаче Якоби, все изоэнергетические поверхности эквивалентны.

Опишем эволюцию торов при изменении значения дополнительного интеграла F . При $f < 2h/C$ сфера $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = f$ и эллипсоид $H = h$ не пересекаются, и торов в прообразе точки (h, f) нет. При $f = 2h/C$ сфера впервые касается эллипса. В этот момент на поверхности уровня интегралов H и F появляются две критические окружности, “висящие” над точками $(0, 0, \pm\sqrt{2h/C})$. При $2h/C < f < 2h/B$ сфера и эллипсоид пересекаются по двум окружностям, что соответствует двум торам в фазовом пространстве. При $f = 2h/B$ сфера вновь касается эллипса в двух точках и в то же время сфера и эллипсоид пересекаются по четырем дугам. В этот момент происходит перестройка двух торов в другие два. При $2h/B < f < 2h/C$ сфера и эллипсоид пересекаются по двум окружностям, соответствующим двум торам. При $f = 2h/A$ мы опять имеем касание по двум точкам, что соответствует двум невырожденным критическим окружностям в фазовом пространстве. Линии пересечения сферы и эллипса при различных значениях дополнительного интеграла изображены на рис. 4.

В работе [12] был вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для задачи Эйлера при $A < B < C$. Оказалось, что этот инвариант в точности совпадает с инвариантом Фоменко–Цишанга для задачи Якоби, описанном в теореме 2.1.1. Таким образом, верна

Теорема 2.1.3 ([12]) Интегрируемые задачи Эйлера и Якоби лиувил-

лево эквивалентны на ненулевых уровнях энергии для любых значений параметров a, b, c ($a < b < c$) и A, B, C ($A < B < C$).

Как и в задаче Якоби, все траекторные инварианты, кроме векторов вращения, оказываются тривиальными в силу симметрии задачи. Явные формулы для функций вращения в задаче Якоби приведены в книге В.В. Козлова [27]. Там же доказана их монотонность и найдены пределы на концах ребер. Тем самым, справедлива

Теорема 2.1.4 ([12]) На ребрах $2h/C < f < 2h/B$ вектор вращения имеет вид $R = (+\infty, K(a, b, c))$, где

$$K(A, B, C) = \frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}}.$$

На ребрах $2h/B < f < 2h/A$ вектор вращения записывается в виде $R = (-\infty, L(a, b, c))$, где

$$L(A, B, C) = -\frac{C}{\sqrt{(C-A)(C-B)}}.$$

Анализ векторов вращения позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2.1.5 ([12])

1) Динамические системы Якоби с наборами параметров a, b, c ($a < b < c$) и a', b', c' ($a' < b' < c'$) траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$(k(a, b, c), l(a, b, c)) = (k(a', b', c'), l(a', b', c')).$$

Это возможно тогда и только тогда, когда эллипсоиды подобны, т.е. $a : b : c = a' : b' : c'$.

2) Динамические системы Якоби с наборами параметров A, B, C ($A < B < C$) и A', B', C' ($A' < B' < C'$) траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$(K(A, B, C), L(A, B, C)) = (K(A', B', C'), L(A', B', C')).$$

Это возможно тогда и только тогда, когда эллипсоиды подобны, т.е. $A : B : C = A' : B' : C'$.

3) Динамическая система Якоби с параметрами a, b, c ($a < b < c$) траекторно эквивалентна динамической системе Эйлера с параметрами A, B, C ($A < B < C$) тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$(2.1) \quad (k(a, b, c), l(a, b, c)) = (K(A, B, C), L(A, B, C)).$$

Существует взаимно однозначное (с точностью до подобия) соответствие между тройками $a : b : c$ и $A : B : C$, сопоставляющее динамической системе Якоби непрерывно траекторно эквивалентную ей динамическую систему Эйлера.

При доказательстве этой теоремы используется прямое аналитическое исследование векторов вращения задач Эйлера и Якоби, выполненное автором настоящей диссертации в [35].

2.2 Построение точного инварианта для задач Эйлера и Якоби

После доказательства непрерывной траекторной эквивалентности задач Эйлера и Якоби возникает вопрос об их сопряженности. Быть может, существует непрерывная замена координат, переводящая точное решение задачи Якоби в точное решение задачи Эйлера. В диссертации предлагается подход к решению этой задачи, основанный на сравнении некоторых "точных" инвариантов динамических систем Эйлера и Якоби. Чтобы проверить, являются ли две динамические системы топологически сопряженными, нужно сравнить эти инварианты. Для этого предлагается добавить к инвариантам W^{*i} периоды трех замкнутых особых траекторий (невырожденных одномерных орбит).

Замечание. Полученный точный инвариант не полон. У задач Эйлера и Якоби много замкнутых траекторий (лежащих на резонансных торах), и полный точный инвариант включает в себя по крайней мере все периоды этих траекторий. Поэтому для доказательства сопряженности этих задач по-видимому пришлось бы строить замену координат в явном виде. Однако сравнение указанных инвариантов оказывается достаточным для доказательства несопряженности задач Эйлера и Якоби.

Обозначим указанные периоды через t_1, t_2, t_3 для задачи Якоби и через T_1, T_2, T_3 для задачи Эйлера. Для того, чтобы исключить зависимость периодов от значений гамильтонианов, будем рассматривать инварианты t_1, t_2, t_3 и T_1, T_2, T_3 с точностью до пропорциональности.

Итак, топологические классы сопряженности систем Якоби и Эйлера со строго различными полуосами определяются наборами инвариантов, заведомо включающими в себя следующие четыре инварианта:

$$(2.2) \quad i(a, b, c) = (k, l, t_1 : t_2 : t_3)(a, b, c)$$

и

$$(2.3) \quad I(A, B, C) = (K, L, T_1 : T_2 : T_3)(A, B, C)$$

соответственно.

Найдем периоды для задачи Якоби о геодезических на эллипсоидах. Напомним, что указанные три периодические траектории в этом случае соответствуют эллипсам в сечениях эллипсоида плоскостями $\{z = 0\}$, $\{x = 0\}$ (устойчивые траектории) и $\{y = 0\}$ (неустойчивая траектория). Поскольку на геодезических параметр натурален, то отношение периодов обращения по этим орбитам равно отношению длин соответствующих эллипсов, т.е.

$$t_1 : t_2 : t_3 = t(a, b) : t(a, c) : t(b, c),$$

где

$$t(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t} dt.$$

Теперь рассмотрим общий случай $a \leq b \leq c$ и попытаемся обобщить полученный инвариант (2.2) на случай эллипсоидов вращения.

При $a = b = c$ мы имеем сферу. Геодезические на ней — это большие окружности. Все они замкнуты, и периоды обращения по ним одинаковы. Поэтому формально положим $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 1 : 1$. Траекторные инварианты в этом случае теряют смысл, и формально можно положить $(k, l) = (\infty, -\infty)$. Заметим, что формально построенная четверка $(\infty, -\infty, 1 : 1 : 1)$ есть предел инварианта (2.2) при $a : b : c \rightarrow 1 : 1 : 1$.

Пусть теперь совпадают только две полуоси эллипсоида. Для определенности будем считать, что $a = b < c$. Тогда система имеет одну устойчивую периодическую траекторию — окружность в сечении эллипсоида плоскостью $\{z = 0\}$. Поведение близких к ней геодезических качественно ничем не отличается от поведения геодезических в окрестности устойчивых периодических траекторий для эллипса с различными полуосами. Поэтому корректно определены инварианты системы $i(a, a, c)$ и $t(a, a)$ — предел функции вращения и период вдоль геодезической. Картина меняется лишь при подходе к большому эллипсу с квадратами полуосей a, c , вращением которого был получен эллипсоид. В

пределе мы имеем целое семейство замкнутых геодезических — эллипсов (a, c) в сечениях эллипсоида плоскостями, проходящими через ось Oz . Для них определен период $t(a, c)$, а инвариант $k(a, a, c)$ теряет смысл. Как и для сферы, формально полагаем $k(a, a, c) = \infty$. Легко видеть, что четверка $(\infty, l(a, a, c), t(a, a) : t(a, c) : t(a, c))$ получена из (2.2) предельным переходом при $a : b \rightarrow 1 : 1$. Аналогичным образом поступаем в случае $a < b = c$. Итак, мы доопределили четверку (2.2) по непрерывности для всех $a \leq b \leq c$. Теперь числа k и l могут принимать бесконечные значения.

Перейдем к построению инвариантов для задач Эйлера. Периодические траектории этой системы соответствуют точкам касания сферы $\{F = f\}$ и эллипсоида $\{H = h\}$. При фиксированном значении гамильтониана сфера и эллипсоид касаются при трех значениях дополнительного интеграла: $f = 2h/A$, $f = 2h/B$ и $f = 2h/C$. В этом случае z -координаты соответствующих точек касания записываются следующим образом: $(-\sqrt{2h/A}, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{2h/B}, 0)$, $(0, 0, \pm\sqrt{2h/C})$, а динамическая система примет вид

$$\begin{cases} \dot{r}_2 = \mp\sqrt{2hA}r_3 \\ \dot{r}_3 = \pm\sqrt{2hA}r_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}_1 = \pm\sqrt{2hB}r_3 \\ \dot{r}_3 = \mp\sqrt{2hB}r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}_1 = \mp\sqrt{2hC}r_2 \\ \dot{r}_2 = \pm\sqrt{2hC}r_1 \end{cases}$$

соответственно (уравнения с нулевой правой частью пропущены). Во всех трех случаях движение по замкнутым орбитам представляет собой равномерное движение по окружностям с периодами $2\pi/\sqrt{2hA}$, $2\pi/\sqrt{2hB}$ и $2\pi/\sqrt{2hC}$. Отметим, что первый и третий случаи соответствуют вращениям твердого тела вокруг его максимальной и минимальной осей инерции, а второй — неустойчивому вращению вокруг средней оси инерции. Таким образом, имеем

$$T_1 : T_2 : T_3 = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Аналогично тому, как это было сделано для задачи Якоби, можно продолжить инвариант (2.3) по непрерывности на случай $A \leq B \leq C$.

Таким образом, верна следующая

Лемма 2.2.1 *Если задача Эйлера с параметрами $a \leq b \leq c$ топологически сопряжена задаче Якоби с параметрами $A \leq B \leq C$, то частасрки (2.2) и (2.3) у этих систем совпадают.*

2.3 Теорема о несопряженности

Теорема 2.3.1 Геодезический поток любого трехосного (отличного от сферы) эллипсоида, ограниченный на любое трехмерное многообразие постоянной энергии, топологически не сопряжен никакой динамической системе Эйлера твердого тела (при нулевой константе площадей).

Доказательство. Поскольку задача Якоби является трехпараметрической, то сопоставляя каждому трехосному эллипсоиду четыре числа по формуле (2.2), мы получим гладкое отображение трехмерного множества всех трехосных эллипсоидов в четырехмерное евклидово пространство. Однако можно проверить, что пропорциональные тройки задают в этом пространстве одну и ту же точку. Итак, мы получаем некоторую 2-поверхность J^2 в \mathbb{R}^4 . Поступая по той же схеме для случая Эйлера, мы также получаем некоторую 2-поверхность E^2 в том же четырехмерном пространстве \mathbb{R}^4 . Чтобы доказать топологическую несопряженность задач Эйлера и Якоби, достаточно убедиться, что эти две двумерные поверхности не пересекаются в \mathbb{R}^4 . После некоторых аналитических преобразований эта задача сводится к вопросу о пересечении кривых на плоскости.

Действительно, предположим, что поверхности J^2 и E^2 пересекаются в некоторой точке, которой соответствуют значения параметров $a : b : c$ и $A : B : C$. Это означает, что выполнено равенство (2.1) и, кроме того,

$$(2.4) \quad t(a, b) : t(a, c) : t(b, c) = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Подставляя в формулу (2.1) вместо A , B и C их выражения через a , b и c из формулы (2.4) и полагая $a = 1$ (поскольку, как уже отмечалось, параметры a , b и c определены с точностью до пропорциональности), мы сводим вопрос о пересечении поверхностей к вопросу разрешимости системы двух уравнений

$$(2.5) \quad \begin{aligned} k(1, b, c) &= K(A(b, c), B(b, c), C(b, c)) \\ l(1, b, c) &= L(A(b, c), B(b, c), C(b, c)), \end{aligned}$$

где

$$K = \left(\frac{t^2(b, c)}{t^2(1, b)} - 1 \right)^{-1/2} \left(\frac{t^2(b, c)}{t^2(1, c)} - 1 \right)^{-1/2},$$

$$L = - \left(1 - \frac{t^2(1, b)}{t^2(b, c)} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{t^2(1, b)}{t^2(b, c)} \right)^{-1/2}.$$

Каждое из уравнений системы (2.5) задает, вообще говоря, семейство гладких кривых в области $1 \leq b \leq c$ плоскости $\mathbb{R}^2(b, c)$, причем легко проверить, что прямая $b = 1$ удовлетворяет первому уравнению, а прямая $b = c$ — второму. Компьютерный эксперимент показал, что множество решений каждого из уравнений исчерпывается двумя этими прямыми. Таким образом, точка $(b, c) = (1, 1)$ является единственным решением системы уравнений (2.5). Эта точка отвечает случаю $a = b = c$ (в задаче Якоби) и случаю $A = B = C$ (в задаче Эйлера), т.е. в обеих задачах мы получаем сферу. Легко видеть, что в этом случае обе динамические системы просто совпадают.

Аналитическое исследование количества решений каждого из уравнений оказывается довольно сложным, и строго (т.е. без использования компьютера) удается доказать лишь неравенство $\frac{l}{k} < \frac{L}{K}$ при условии $(b, c) \neq (1, 1)$. Этого, очевидно, достаточно для доказательства неразрешимости системы (2.5) и, следовательно, несопряженности задач Эйлера и Якоби.

Оценим каждое из отношений $\frac{l}{k}$ и $\frac{L}{K}$. Всюду в оценках считаем, что $(b, c) \neq (1, 1)$.

(1) Явную формулу для отношения $\frac{l}{k}$ можно получить из явных формул для k и l . Поскольку

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{(u+b)(u+c)}} \frac{du}{u+1} > \int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{(u+b)(u+1)}} \frac{du}{u+c},$$

имеем

$$(2.6) \quad \frac{l}{k} < -\sqrt{\frac{c(b-1)}{c-b}}.$$

(2) Отношение $\frac{L}{K}$ дается формулой

$$\frac{L}{K} = -\frac{t(b, c)}{t(1, b)} \sqrt{\frac{t^2(b, c) - t^2(1, c)}{t^2(1, c) - t^2(1, b)}}.$$

Обозначим через $t'(\alpha, \beta)$ значение производной функции t по одному из сомножителей (нетрудно проверить, что $\partial t(\alpha, \beta)/\partial \alpha = \partial t(\alpha, \beta)/\partial \beta$). Тогда

$$\sqrt{\frac{t(b, c) - t(1, c)}{t(1, c) - t(1, b)}} = \sqrt{\frac{(b-1)t'(\vartheta_1, c)}{(c-b)t'(1, \vartheta_2)}},$$

где $\vartheta_1 \in (1, b)$, $\vartheta_2 \in (b, c)$. Поскольку $t'(\vartheta_1, c) < t'(1, \vartheta_2)$, то все это выражение строго меньше $\sqrt{\frac{b-1}{c-b}}$.

Осталось оценить второй сомножитель, равный

$$\frac{t(b, c)}{t(1, b)} \sqrt{\frac{t(b, c) + t(1, c)}{t(1, c) + t(1, b)}}.$$

Продифференцировав его по b , получаем, что он достигает наибольшего значения при $b = 1$. Так как $t(1, 1) = 2\pi$, то верна следующая оценка:

$$(2.7) \quad \frac{L}{K} > -\frac{t(1, c)}{2\pi} \sqrt{\frac{2t(1, c)}{t(1, c) + 2\pi}} \sqrt{\frac{b-1}{c-b}}.$$

Сравнивая (2.6) и (2.7), получаем, что неравенство $\frac{l}{k} < \frac{L}{K}$ будет следовать из неравенства

$$\frac{t(1, c)}{2\pi} \sqrt{\frac{2t(1, c)}{t(1, c) + 2\pi}} < \sqrt{c},$$

или, по-другому, обозначая для краткости $t(c) = t(1, c)$,

$$(2.8) \quad t(c)(2t^2(c) - 4\pi^2c) - 8\pi^3c < 0.$$

Для того, чтобы доказать это неравенство, воспользуемся разложением $t(c)$ в ряд по c

$$t(c) = 2\pi\sqrt{c} \left(1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{c} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(2n-3)!!}{2^n(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^n \right).$$

Отбрасывая члены ряда, начиная с четвертого, получаем оценку при $c > 1$

$$t(c) < \frac{\pi}{16}\sqrt{c} \left(21 + 14\frac{1}{c} - 3\frac{1}{c^2} \right).$$

Если выражение $2t^2(c) - 4\pi^2c$ в формуле (2.8) меньше нуля, то все доказано. Если же оно больше нуля, то верна оценка

$$(2.9) \quad \begin{aligned} t(c)(2t^2(c) - 4\pi^2c) - 8\pi^3c &< \frac{\pi}{16}\sqrt{c} \left(21 + 14\frac{1}{c} - 3\frac{1}{c^2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\pi^2}{128}c \left(21 + 14\frac{1}{c} - 3\frac{1}{c^2} \right)^2 - 4\pi^2c \right) - 8\pi^3c. \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы доказать неравенство (2.8), достаточно проверить, что многочлен в правой части (2.9) от переменной \sqrt{c} меньше нуля в области $\sqrt{c} > 1$. Старший коэффициент при $c^{3/2}$, как нетрудно проверить, меньше нуля. Поэтому неравенство верно по крайней мере для достаточно больших c . Оценку многочлена при всех $c > 1$ нетрудно провести, выписав этот многочлен в явном виде и воспользовавшись элементарными тождествами вида $\sqrt{c} > 1$ и $c - 2\sqrt{c} + 1 > 0$. Теорема доказана.

Глава 3

Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит

3.1 Критерий траекторной эквивалентно- сти интегрируемых гамильтоновых си- стем

Пусть $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система с n степенями свободы, заданная на $2n$ -мерном симплектическом многообразии M^{2n} . Предположим, что эта система полностью интегрируема по Лиувиллю при помощи набора почти всюду независимых интегралов $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$, где $F_1 = H$. Рассмотрим особую (невырожденную) эллиптическую орбиту пуассонова действия O ранга k . Будем считать гамильтонову систему $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$, а также функции F_1, \dots, F_n ограниченными на небольшую окрестность $U(O) \subset M^{2n}$ этой орбиты, не содержащую орбит меньшей размерности. Пусть $H \in C^2(M^{2n})$, если речь идет о непрерывном траекторном инварианте, и $H \in C^4(M^{2n})$, если речь идет о гладком инварианте. Будем предполагать, что в окрестности орбиты O все орбиты пуассонова действия компактны. Кроме того, мы будем рассматривать только нерезонансные системы.

Рассмотрим слоение Лиувилля $B(U(O))$ окрестности орбиты O . Типом точки пространства $B(U(O))$ называется размерность соответствующего слоя. Пространство $B(U(O))$ n -мерно и диффеоморфно образу окрестности $U(O)$ при отображении момента $\mathbf{F} : U(O) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ при “правильном” выборе дополнительных интегралов. В свою очередь, в соответствии с теоремой Дюфо–Молино–Элиассо-

на [16, 24], образ отображения момента $\mathbf{F}(U(O))$ диффеоморфен окрестности нуля множества $\{u_{k+1} \geq 0, \dots, u_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. При этом внутренние точки этой области соответствуют неособым n -мерным лиувиллевым торам, а граничные — особым орбитам меньшей размерности; точка $(0, \dots, 0)$ соответствует k -мерной эллиптической орбите O .

Определение. Пусть (s_i, φ_i) — стандартные переменные действие-угол в окрестности некоторого тора Лиувилля T^n . Согласно теореме Лиувилля на данном торе в координатах (φ_i) векторное поле является постоянным. Числом вращения в координатах (φ_i) (или в циклах $\gamma_i = \{\varphi_j = \text{const}, j \neq i\}$), называется проективный вектор частот квазипериодического движения на лиувиллевом торе:

$$\rho = (\dot{\varphi}_1 : \dot{\varphi}_2 : \dots : \dot{\varphi}_n).$$

Из невырожденности орбиты O следует, что координаты числа вращения не могут обращаться в нуль одновременно.

Число вращения на торе, очевидно, определено неоднозначно и зависит от выбора базиса (γ_i) . Однако существуют правила, позволяющие частично избавиться от этой неоднозначности. В окрестности эллиптической особой орбиты эти циклы следует выбирать следующим образом:

- циклы должны непрерывно зависеть от тора;
- каждый цикл γ_i должен стягиваться в точку при приближении к i -му $(n-1)$ -мерному листу бифуркационной диаграммы (образу множества $\{u_i = 0\}$).

Таким образом, мы однозначно (с точностью до изотопии) определили циклы $\gamma_i, i = k+1, \dots, n$. Выбор циклов $\gamma_i, i = 1, \dots, k$, неоднозначен, он полностью определяется выбором базиса циклов на орбите O .

Рассматривая все семейство неособых торов Лиувилля в окрестности эллиптической орбиты, получаем на этом семействе функцию вращения $\rho(T)$. Как будет показано ниже, эта функция непрерывная при $H \in C^2$ и гладкая при $H \in C^4$. По непрерывности функция ρ может быть продолжена и на особые орбиты пуассонова действия. Поскольку эта функция зависит только от тора, то ее можно рассматривать как функцию, заданную на слоении Лиувилля $B(U(O))$.

Теорема 3.1.1 (критерий траекторной эквивалентности) Две нерезонансные ИГС \mathbf{v} и \mathbf{v}' с p степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в $2n$ -мерной окрестности эллиптических орбит

O и O' тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм (диффеоморфизм) φ n -мерных лиувиллевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$, обладающий следующими свойствами:

- 1) φ сохраняет тип точек $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$,
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^*\rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Теорема 3.1.2 ([16, 24])

- 1) Пусть \mathbf{v} — гамильтонова система с n степенями свободы, интегрируемая при помощи интегралов $\mathbf{F} \in C^2$. Пусть O — эллиптическая орбита пуассонова действия ранга k . Тогда в некоторой окрестности U орбиты O (U гомеоморфна $\mathbb{R}^n \times T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$) существуют канонические координаты $(p_1, \dots, p_n, q_1 \bmod 2\pi, \dots, q_k \bmod 2\pi, q_{k+1}, \dots, q_n)$, такие что $p_i(O) = q_j(O) = 0$ при $i = 1, \dots, n$, $j = k+1, \dots, n$, а интегралы F_i имеют вид

$$F_i = F_i(u_1, \dots, u_n),$$

где $u_i = p_i$ при $i = 1, \dots, k$, $u_i = p_i^2 + q_i^2$ при $i = k+1, \dots, n$. При этом якобиан отображения $\det DF/Du$ отличен от нуля в точке $(0, \dots, 0)$.

- 2) Пусть в пространстве $M^{2n} = \mathbb{R}^n \times T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ с координатами $(p_1, \dots, p_n, q_1 \bmod 2\pi, \dots, q_k \bmod 2\pi, q_{k+1}, \dots, q_n)$ задана симплектическая структура $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Тогда произвольная гладкая функция $H(\mathbf{u}) = H(u_1, \dots, u_n)$, где $u_i = p_i$ при $i = 1, \dots, k$, $u_i = p_i^2 + q_i^2$ при $i = k+1, \dots, n$, задает интегрируемую гамильтонову систему на M^{2n} . Орбита $(0, \dots, 0) \times T^k \times (0, \dots, 0)$ будет эллиптической орбитой этой системы при $dH(0, \dots, 0) \neq 0$.

Эта теорема впервые была доказана Рюссманном в [45] в аналитическом случае для случая двух степеней свободы, затем Вей обобщил этот результат на произвольное число n степеней свободы [56]. Элиассон сообщает в [24], что теорема 3.1.2 есть параметризованная версия его общей теоремы. Полное доказательство, полученное иными методами, можно найти в работе Дюфо и Молино [16].

Следствие 3.1.1 *Множество ростков ИГС в окрестностях эллиптических орбит ранга k находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ростков функций $H(\mathbf{u})$ от n переменных, заданных в окрестности нуля области $\{u_{k+1} \geq 0, \dots, u_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$, с отличным от нуля дифференциалом $dH(0, \dots, 0)$.*

Описанные в лемме канонические координаты (p_i, q_i) назовем *правильными*. Для произвольной ИГС рассмотрим правильные координаты в окрестности эллиптической орбиты. Тогда гамильтонова система в новых координатах принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{p}_i &= 0, & \dot{q}_i &= H_{u_i}(\mathbf{u}), & i &= 1, \dots, k, \\ \dot{p}_i &= -2q_i H_{u_i}(\mathbf{u}), & \dot{q}_i &= 2p_i H_{u_i}(\mathbf{u}), & i &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Траектории системы находятся в явном виде:

$$p_i = u_i, \quad q_i = H_{u_i}(\mathbf{u})t + C_i \mod 2\pi$$

при $i = 1, \dots, k$,

$$p_i = \sqrt{u_i} \cos(2H_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i), \quad q_i = \sqrt{u_i} \sin(2H_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i)$$

при $i = k+1, \dots, n$. Здесь C_i и D_i — некоторые постоянные, зависящие от выбора начальной точки. Это означает, что движение по тору $\{\mathbf{u} = \text{const}\}$ раскладывается в сумму равномерных движений по окружностям $S_i = \{u_j = \text{const}, j \neq i\}$ с частотами $H_{u_i}(\mathbf{u})$ при $i = 1, \dots, k$ и $2H_{u_i}(\mathbf{u})$ при $i = k+1, \dots, n$ соответственно. Число вращения на торе равно отношению этих частот:

$$(3.2) \quad \rho(\mathbf{u}) = H_{u_1}(\mathbf{u}) : \dots : H_{u_k}(\mathbf{u}) : 2H_{u_{k+1}}(\mathbf{u}) : \dots : 2H_{u_n}(\mathbf{u}).$$

В силу условия $dH(0, \dots, 0) \neq 0$, все компоненты этого вектора не обращаются в нуль одновременно.

Замечание. Мы предположили, что функция H принадлежит классу гладкости C^2 . Это означает, что она принадлежит классу гладкости C^1 по переменным u_i , а функция вращения принадлежит классу C^0 . Если же функция H принадлежит классу гладкости C^4 , то функция вращения оказывается C^1 -гладкой. Только в последнем случае имеет смысл говорить о гладкой эквивалентности.

Доказательство теоремы. В одну сторону доказательство очевидно: траекторный гомеоморфизм (диффеоморфизм) ИГС в окрестностях эллиптических орбит индуцирует гомеоморфизм (диффеоморфизм) лиувиллевых слоений, сохраняющий функцию вращения.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$ и $\mathbf{v}' = \text{sgrad } H'$ — две нерезонансные ИГС. Ограничим их на окрестности $U(O)$ и $U'(O')$ соответствующих эллиптических орбит O и O' . Пусть существует указанный в условии гомеоморфизм (диффеоморфизм) лиувиллевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$. Докажем, что этот гомеоморфизм (диффеоморфизм) продолжается до траекторного гомеоморфизма (диффеоморфизма) окрестностей $U(O)$ и $U'(O')$. Для этого в обеих системах перейдем к правильным координатам (p_i, q_i) и (p'_i, q'_i) . Как и раньше, обозначим $u_i = p_i$, $u'_i = p'_i$ при $i = 1, \dots, k$, $u_i = p_i^2 + q_i^2$, $u'_i = (p'_i)^2 + (q'_i)^2$ при $i = k+1, \dots, n$. Из теоремы 3.1.2 следует, что лиувиллевы слоения $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$ диффеоморфны соответственно окрестностям нулей областей $W = \{u_i \geq 0, i = k+1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$ и $W' = \{u'_i \geq 0, i = k+1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ индуцирует гомеоморфизм (диффеоморфизм) областей W и W' , который мы обозначим той же буквой φ .

Будем считать, что при гомеоморфизме φ гиперплоскости $\{u_i = 0\}$ переходят в соответствующие гиперплоскости $\{u'_i = 0\}$ при $i = k+1, \dots, n$. В противном случае нужно перенумеровать координаты. Пусть $\mathbf{u}' = \varphi(\mathbf{u})$. Построим следующее отображение окрестностей $U(O)$ и $U'(O')$:

$$\begin{aligned} p'_i &= u'_i, & q'_i &= q_i, & i &= 1, \dots, k, \\ p'_i &= p_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}}, & q'_i &= q_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}}, & i &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно, что такое отображение взаимно однозначно. Покажем, что оно дает траекторный гомеоморфизм (диффеоморфизм). Действительно, сделаем замену времени:

$$t' = \frac{H_{u_i}(\mathbf{u})}{H'_{u'_i}(\mathbf{u}')} t.$$

Здесь коэффициент при t не зависит от номера i , так как проективные векторы вращения совпадают в данной точке. При такой замене траектории переходят в траектории:

$$\begin{aligned} p_i &= u_i & \mapsto p'_i &= u'_i, \\ q_i &= H_{u_i}(\mathbf{u})t + C_i \pmod{2\pi} & \mapsto q'_i &= H'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + C_i \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} p_i = \sqrt{u_i} \cos(2H_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i) &\mapsto p'_i = \sqrt{u'_i} \cos(2H'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + D_i), \\ q_i = \sqrt{u_i} \sin(2H_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i) &\mapsto q'_i = \sqrt{u'_i} \sin(2H'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + D_i) \end{aligned}$$

при $i = k+1, \dots, n$.

Непрерывность замены $(p_i, q_i) \mapsto (p'_i, q'_i)$ очевидна. Проверим ее гладкость для гладкого отображения φ . Легко видеть, что при $i = 1, \dots, k$ функции p'_i и q'_i непрерывно дифференцируемы по всем переменным p_j и q_j . Проверим непрерывность частных производных p'_i и q'_i при $i = k+1, \dots, n$. Для этого нам потребуется следующая

Лемма 3.1.1 При $i = k+1, \dots, n$ имеют место равенства $u'_i = u_i \psi_i(\mathbf{u})$, где $\psi_i(\mathbf{u})$ — функции, непрерывные в области $W = \{u_i \geq 0, i = k+1, \dots, n\}$ и непрерывно дифференцируемые в $W \cap \{u_i > 0\}$. При этом $\psi_i(0, \dots, 0) \neq 0$, $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ и $u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ стремятся к нулю при $u_i \rightarrow 0$ для всех $j = k+1, \dots, n$.

Доказательство. Положим $\psi_i = \frac{u'_i}{u_i}$ в области W . Функция ψ_i непрерывно дифференцируема в этой области, так как u'_i непрерывно дифференцируема. По определению производной $\left. \frac{u'_i}{u_i} \right|_{\mathbf{u}} \rightarrow \left. \frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}^0}$ при $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, 0, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0)$. Следовательно, функция ψ_i продолжается по непрерывности во всю область W . По условию отображение φ является диффеоморфизмом в окрестности нуля. Поскольку гиперплоскость $\{u_i = 0\}$ переходит в гиперплоскость $\{u'_i = 0\}$ при $i = k+1, \dots, n$, то матрица Якоби отображения φ в нуле имеет вид

$$D\varphi = \begin{pmatrix} * & ** \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

где $*$ и $**$ — некоторые $k \times k$ - и $k \times (n-k)$ -матрицы соответственно, 0 — нулевая $(n-k) \times k$ -матрица, а A — диагональная матрица с элементами $(\psi_i(0, \dots, 0))$ на диагонали. Из условия невырожденности матрицы Якоби в нуле следует, что $(\psi_i(0, \dots, 0)) \neq 0$ для всех i .

Чтобы доказать последнее утверждение леммы, продифференцируем u'_i по u_i : $\left. \frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}} = \psi_i(\mathbf{u}) + u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i}(\mathbf{u})$. Так как $\left. \frac{u'_i}{u_i} \right|_{\mathbf{u}} \rightarrow \left. \frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}^0}$ при $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, 0, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0)$, то $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$. Условия $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ и

$u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$ для $j \neq i$ следуют из того, что $\frac{\partial u'_i}{\partial u_j}$ при $j \neq i$ обращается в ноль на гиперплоскости $\{u_i = 0\}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим для определенности функцию $p'_i = p_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}} = p_i \sqrt{\psi_i}$, $i = k+1, \dots, n$. В соответствии с леммой 3.1.1 она непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным всюду за исключением, быть может, гиперплоскости $\{u_i = 0\}$. Найдем пределы частных производных p'_i по всем переменным на этой гиперплоскости:

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} = \sqrt{\psi_i} + \frac{p_i^2 (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{\sqrt{\psi_i}}.$$

Поскольку $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$ и $\psi_i(0, \dots, 0) \neq 0$, то второе слагаемое стремится к нулю при приближении к гиперплоскости, а первое непрерывно. Аналогично

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p'_i}{\partial q_i} \right| &= \left| \frac{p_i q_i (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leqslant \frac{u_i (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{2 \sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0, \\ \left| \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \right| &= \left| \frac{p_i p_j (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leqslant \frac{(u_i + u_j) (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{2 \sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0, \\ \left| \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} \right| &= \left| \frac{p_i q_j (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leqslant \frac{(u_i + u_j) (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{2 \sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, все частные производные p'_i по p_i, q_i существуют и непрерывны в окрестности нуля. Аналогичное утверждение верно для q'_i . Кроме того, матрица Якоби в нуле имеет диагональный вид и все ее диагональные элементы отличны от нуля. Это доказывает, что построенное отображение $(p_i, q_i) \mapsto (p'_i, q'_i)$ является диффеоморфизмом. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, в нерезонансном случае пространства $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$ определены инвариантно относительно выбора дополнительных интегралов F_2, \dots, F_n и, следовательно, существование отображения φ определяется только гамильтонианом. Однако для практической проверки критерия траекторной эквивалентности удобнее перейти от отображений лиувиллевых слоений к отображениям, заданным на образах отображений моментов.

Следствие 3.1.2 Две нерезонансные ИГС \mathbf{v} и \mathbf{v}' с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ некоторой n -мерной окрестности точки $y_0 = \mathbf{F}(O)$ на n -мерную окрестность точки $y'_0 = \mathbf{F}'(O')$, обладающий следующими свойствами:

- 1) φ сохраняет тип точек отображения момента;
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

3.2 Гладкий траекторный инвариант эллиптической особой точки

Доказанная теорема упрощает задачу классификации ИГС в окрестности положения равновесия, однако в реальных физических задачах проверить существование требуемого преобразования, сохраняющего функцию вращения, достаточно сложно. Поэтому возникает желание построить легко вычислимый траекторный инвариант, классифицирующий ИГС в окрестности эллиптической орбиты. Очевидно, предел функции вращения при стремлении к орбите O является траекторным инвариантом, однако он не полон. Удаётся построить лишь удобно вычислимый полный гладкий траекторный инвариант, причем результат является содержательным лишь в случае ИГС с двумя степенями свободы. Кроме того, наиболее интересной является проблема о сравнении систем (с траекторной точки зрения) в окрестности эллиптической особой точки, или в окрестности положения равновесия. Именно этот результат мы и формулируем.

Рассмотрим нерезонансную ИГС на многообразии M^4 и ограничим ее на окрестность эллиптической особой точки x_0 — эллиптической орбиты ранга 0. Введем правильные координаты (p_1, p_2, q_1, q_2) в окрестности точки x_0 . Пусть, как и раньше, $u_i = p_i^2 + q_i^2$. Рассмотрим проективный вектор вращения $\rho(u_1, u_2) = (H_{u_1} : H_{u_2})$ в этой окрестности. Пусть, для определенности, $H_{u_2}(0, 0)$ отлично от нуля. Тогда можно считать, что ρ — это обычная функция, равная $\frac{H_{u_1}}{H_{u_2}}$.

Определение. ИГС называется *неспециальной* в эллиптической особой

точке, если

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_1} \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \Big|_{(0,0)} \neq 0.$$

Поясним, почему этот случай является общим. В соответствии со следствием 3.1.1, множество ростков ИГС в окрестностях эллиптических особых точек находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ростков функций $H(u_1, u_2)$ от двух переменных, заданных в окрестности нуля, с отличным от нуля дифференциалом $dH(0,0)$. Для произвольной функции H такого вида выпишем явный вид дифференциала функции вращения:

$$(3.3) \quad d\rho(u_1, u_2) = \left(\frac{H_{u_1 u_1} H_{u_2} - H_{u_1} H_{u_1 u_2}}{H_{u_2}^2}, \frac{H_{u_1 u_2} H_{u_2} - H_{u_1} H_{u_2 u_2}}{H_{u_2}^2} \right).$$

Условия $\frac{\partial \rho}{\partial u_1} \Big|_{(0,0)} \neq 0, \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \Big|_{(0,0)} \neq 0$ эквивалентны следующим:

$$\frac{H_{u_1}}{H_{u_2}} \Big|_{(0,0)} \neq \frac{H_{u_1 u_1}}{H_{u_1 u_2}} \Big|_{(0,0)}, \quad \frac{H_{u_2}}{H_{u_2}} \Big|_{(0,0)} \neq \frac{H_{u_1 u_2}}{H_{u_2 u_2}} \Big|_{(0,0)}.$$

Очевидно, что это случай общего положения. Добавим, что все реальные физические задачи (в частности, задачи динамики твердого тела) являются гладкими и почти все они неспециальные.

Теорема 3.2.1 Полным гладким траекторным инвариантом неспециальной перезонансной ИГС с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки $O = x_0$ является тройка чисел (последние два числа определены с точностью до перестановки) $\text{Tr}(x_0) = (\rho(y_0), \text{sign}(\rho_1(y_0)), \text{sign}(\rho_2(y_0)))$, где $\rho(y_0)$ — предел функции вращения в точке y_0 , а $\rho_i(y_0)$ — производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных l_1 и l_2 к бифуркационной диаграмме (рис. 5). Это означает, что

- 1) две неспециальные ИГС с двумя степенями свободы траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 тогда и только тогда, когда тройки $\text{Tr}(x_0)$ и $\text{Tr}(x'_0)$ совпадают,
- 2) любая тройка $\text{Tr} = (\alpha, t_1, t_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}, t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой неспециальной ИГС в окрестности эллиптической особой точки.

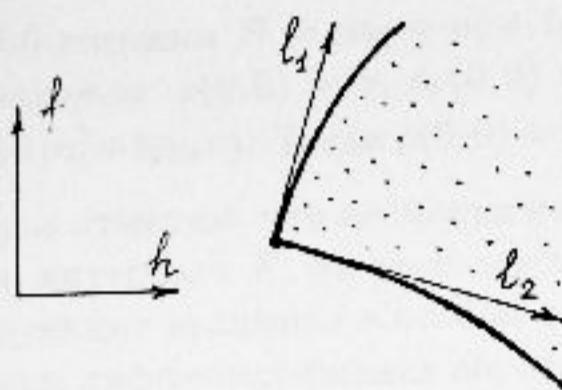


Рис. 5.

Доказательство. Пусть даны две ИГС \mathbf{v} и \mathbf{v}' . Если эти системы гладко траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 , то по теореме 3.1.1 существует диффеоморфизм φ областей $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ и $\{u'_1 \geq 0, u'_2 \geq 0\}$, сохраняющий функцию вращения. Поэтому $\rho(0,0) = \rho'(0,0)$, и знаки производных функций вращения по соответствующим координатам совпадают. В частности, если одна из них неспециальна в особой точке, то и вторая неспециальна. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть у двух ИГС, неспециальных в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 , совпадают траекторные инварианты: $\text{Tr}(x_0) = \text{Tr}(x'_0)$. Рассмотрим линейное преобразование φ_0

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial\rho)/(\partial u_1)(0,0) & 0 \\ (\partial\rho')/(\partial u'_1)(0,0) & (\partial\rho)/(\partial u_2)(0,0) \\ 0 & (\partial\rho')/(\partial u'_2)(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

переводящее область $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ в область $\{u'_1 \geq 0, u'_2 \geq 0\}$. Легко проверить, что $\varphi_0^*\rho' = \rho + o(u_1, u_2)$. Добавляя к этому преобразованию нелинейные члены $\varphi(u_1, u_2) = \varphi_0(u_1, u_2) + o(u_1, u_2)$ в классе C^1 , нетрудно добиться равенства $\varphi^*\rho' = \rho$. Здесь можно воспользоваться, например, аналогами теоремы о выпрямлении.

Докажем теперь, что любой инвариант (α, t_1, t_2) , $t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой неспециальной ИГС в окрестности эллиптической особой точки. По теореме 3.1.2 произвольная функция $H(u_1, u_2)$, где $dH(0,0) \neq 0$, задает ИГС в области $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Требуется подобрать такую функцию H , чтобы для функции вращения были выполнены следующие соотношения:

$$\rho(0,0) = \alpha, \quad \text{sign } \frac{\partial\rho}{\partial u_1}(0,0) = t_1, \quad \text{sign } \frac{\partial\rho}{\partial u_2}(0,0) = t_2.$$

Для $\alpha \neq 0$ положим $H = \alpha u_1 + u_2 + t_1 u_1^2 - \alpha t_2 u_2^2$. Тогда из формул (3.2) и (3.3) находим: $\rho(0, 0) = \alpha$, $d\rho(0, 0) = (2t_1, 2\alpha^2 t_2)$. Для $\alpha = 0$ полагаем $H = u_2 + t_1 u_1^2 + t_2 u_1 u_2$. Тогда $\rho(0, 0) = 0$, $d\rho = (2t_1, t_2)$. Теорема доказана.

Еще раз отметим, что несмотря на присутствие в формулировке конкретного интеграла F , от него здесь ничего не зависит, поскольку ни предел функции вращения в особой точке, ни знаки производных не меняются при диффеоморфизмах образа отображения момента.

3.3 Вычисление гладкого траекторного инварианта в простейшем случае. Траекторный инвариант сферического маятника

Пусть гладкая интегрируемая гамильтонова система

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2,$$

задана в окрестности начала координат $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ пространства \mathbb{R}^4 . Гамильтониан $H(p, q) \in C^4(\mathbb{R}^4)$ и дополнительный интеграл $F(p, q)$ будем считать известными. Пусть известно также, что точка x_0 является невырожденной эллиптической особой точкой системы. Предъявим правило, следуя которому можно ответить на вопрос, находится ли эта система в общем положении в точке x_0 , и в случае положительного ответа вычислить для нее траекторный инвариант.

Напомним, что в соответствии с теоремой 3.1.2 существуют правильные канонические координаты (p, q) , в которых функции H и F принимают следующий вид:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1 u + \frac{1}{2}\alpha_2 v + \frac{1}{4}a_{11}u^2 + \frac{1}{2}a_{12}uv + \frac{1}{4}a_{22}v^2 + \dots, \\ F &= \frac{1}{2}\beta_1 u + \frac{1}{2}\beta_2 v + \frac{1}{4}b_{11}u^2 + \frac{1}{2}b_{12}uv + \frac{1}{4}b_{22}v^2 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$u = p_1^2 + q_1^2, \quad v = p_2^2 + q_2^2.$$

Из этого представления и из формулы 3.3 для дифференциала функции вращения видно, что нам требуется найти нормальную форму Биркгофа степени 4 с точностью до членов степени 5. Для этого нужно просто воспользоваться правилом Биркгофа [8] приведения гамильтониана к нормальной форме.

Замечание. В теореме Биркгофа требуется, чтобы частоты системы α_1, α_2 не удовлетворяли ни одному резонансному соотношению порядка 4 и меньше. В противном случае правило перестает работать. В нашем случае ситуация иная. Мы знаем, что система интегрируема, и имеем в своем распоряжении дополнительный интеграл. Более того, имеет место неравенство $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Рассматривая линейные комбинации H и F , можно построить функцию с любыми частотами. Поэтому в нашей задаче проблемы резонансов не возникает.

Продемонстрируем работу этого правила на примере сферического маятника. Задача о движении сферического маятника в поле силы тяжести является простой и в то же время показательной задачей на вычисление траекторного инварианта в эллиптической особой точке, которая, как показано в [17], совпадает с нижним устойчивым положением равновесия системы.

Пусть материальная точка движется по сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в поле силы тяжести (ускорение свободного падения считается равным 1). Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - x_3,$$

где v — вектор скорости точки. В окрестности точки $(0, 0, -1)$ на сфере в качестве локальных координат можно взять координаты x_1, x_2 . Тогда $x_3 = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, а функция Лагранжа приобретает вид

$$L = \frac{1 - x_2^2}{2(1 - x_1^2 - x_2^2)} v^2 + \frac{x_1 x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2} v_1 v_2 + \frac{1 - x_1^2}{2(1 - x_1^2 - x_2^2)} v_2^2 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Перейдем к канонической системе координат — координатам-импульсам (y_1, y_2, x_1, x_2) — при помощи преобразования Лежандра. Тогда функция Лагранжа преобразуется в энергию системы (гамильтониан)

$$\begin{aligned} H = & \frac{1 - x_1^2}{2} y_1^2 - x_1 x_2 y_1 y_2 + \frac{1 - x_2^2}{2} y_2^2 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = -1 + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \\ & + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}(y_1 x_1 + y_2 x_2)^2 + \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка. Отсюда получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\rho(x_0) = 1$. Получившаяся ИГС с двумя степенями свободы имеет дополнительный интеграл — угловой момент

$$F = v_1 x_2 - v_2 x_1 = y_1 x_2 - y_2 x_1 + \dots$$

На первый взгляд кажется, что квадратичная часть гамильтониана уже приведена к нормальному виду. Однако это не так: дополнительный интеграл F не имеет в этих координатах нормальной формы. Это произошло потому, что частоты системы удовлетворяют резонансному соотношению 2-го порядка $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Чтобы правильно выбрать координаты, приведем функцию F также к нормальному виду. Сделаем замену:

$$y_1 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}.$$

Функции H и F в новых координатах принимают вид

$$\begin{aligned} H = & -1 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{2}(p_1 q_2 + p_2 q_1)^2 \\ & + \frac{1}{32}((q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)^2 + \dots, \\ F = & \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2). \end{aligned}$$

Заметим, что функции H и F не содержат кубической части, т.е. оказываются приведенными к нормальной форме третьего порядка.

Далее, в соответствии с правилом Биркгофа, следует привести наши функции к нормальной форме 4-й степени. Однако в нашей задаче этого можно не делать. Из правила Биркгофа следует, что нужные коэффициенты a_{11} , a_{12} и a_{22} можно определить уже сейчас. Для этого перейдем к комплексным координатам: $z_l = p_l + iq_l$. Известно (Биркгоф), что коэффициент при $z_1^2 \bar{z}_1^2$ равен $\frac{1}{4}a_{11}$, коэффициент при $z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2$ равен $\frac{1}{2}a_{12}$, а коэффициент при $z_2^2 \bar{z}_2^2$ равен $\frac{1}{4}a_{22}$. В нашем случае получаем

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{8}, \quad a_{12} = -\frac{1}{4},$$

откуда, используя формулу (3.3) немедленно находим знаки производной функции ρ по направлениям касательных к бифуркационной диаграмме: $\text{sign}(\rho_1) = +$, $\text{sign}(\rho_2) = -$. Итак, мы доказали следующее

Утверждение 3.3.1 Гладкий траекторный инвариант сферического маятника в особой точке равен $(1, +, -)$.

3.4 Правило вычисления гладкого траекторного инварианта в общем случае

Пусть в пространстве \mathbb{R}^4 в окрестности начала координат $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ задана произвольная симплектическая структура $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $\omega_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^4)$, и функция $H(x) \in C^4(\mathbb{R}^4)$. Предположим, что гамильтонова система

$$\dot{x} = \text{sgrad } H$$

интегрируется в этой окрестности при помощи дополнительного интеграла F , и точка x_0 является эллиптической особой точкой системы. Как и раньше, требуется предъявить правило, отвечающее на вопрос, находится ли эта система в общем положении в точке x_0 , и в случае положительного ответа вычисляющее для нее траекторный инвариант.

В случае произвольной симплектической структуры правило Биркгофа не применимо. Можно попытаться построить сначала канонические координаты, а затем воспользоваться предыдущей схемой. В некоторых задачах это действительно можно сделать. В общем случае найти канонические координаты очень непросто. Однако заметим, что нам и не нужны в точности канонические, а затем правильные координаты. Ведь для вычисления траекторного инварианта нужны только начальные коэффициенты ряда (3.4) при первых и вторых степенях переменных u и v . Поэтому достаточно найти лишь приближение правильных координат с точностью до членов второго порядка. Попытаемся реализовать эту идею в виде следующего правила.

Шаг 1. Построение первого приближения правильных координат.

Лемма 3.4.1 *Существует линейное преобразование от координат (x_1, x_2, x_3, x_4) к координатам (s_1, t_1, s_2, t_2) , единственное с точностью до поворота в плоскостях (s_i, t_i) и такое что новые координаты являются первым приближением правильных координат (p, q) :*

$$p_i = s_i + \text{члены более высокого порядка},$$

$$q_i = t_i + \underset{\epsilon}{\text{члены более высокого порядка.}}$$

Доказательство. Найдем собственные значения матрицы A линеаризованной системы $\dot{x} = \text{sgrad } H$ и матрицы B линеаризованной системы $\dot{x} = \text{sgrad } F$ и сделаем линейную замену переменных $(x) \rightarrow (\tilde{s}, \tilde{t})$, приво-

дящую матрицы A и B к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта замена определена однозначно с точностью до поворотов и растяжений в плоскостях $(\tilde{s}_i, \tilde{t}_i)$. Коэффициенты растяжения легко найти из требования, чтобы гамильтониан и дополнительный интеграл в новых координатах (s_i, t_i) имели вид

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \frac{1}{2}\alpha_1(s_1^2 + t_1^2) + \frac{1}{2}\alpha_2(s_2^2 + t_2^2) + \dots, \\ F(s, t) &= \frac{1}{2}\beta_1(s_1^2 + t_1^2) + \frac{1}{2}\beta_2(s_2^2 + t_2^2) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку правильные координаты (p, q) определены также с точностью до поворота, получаем требуемое утверждение.

Заметим, что симплектическая структура в особой точке x_0 в новых координатах имеет вид

$$\omega(x_0) = ds_1 \wedge dt_1 + ds_2 \wedge dt_2.$$

Одновременно с первым приближением мы получили предел функции вращения в особой точке x_0 :

$$\rho(x_0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Далее нам будет удобно работать в комплексных координатах $z_l = s_l + it_l$. Введем обозначения, удобные для дальнейшего. Пусть построено k -е приближение правильных координат, где k равно 1 или 2. Тогда функции H и F с точностью до членов порядка $k+3$ запишем в виде

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha_1 z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{m,n} D_{mn}^H z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} + \dots, \\ F &= \frac{1}{2}\beta_1 z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{2}\beta_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{m,n} D_{mn}^F z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} + \dots, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем (m_1, m_2, n_1, n_2) , удовлетворяющим $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = k+2$. Здесь $D_{m_1 m_2 n_1 n_2}^H, D_{m_1 m_2 n_1 n_2}^F$ — некоторые коэффици-

енты. Симплектическую структуру запишем в виде

$$\begin{aligned}\omega = & \frac{i}{2} \left(1 + \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \right) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \frac{i}{2} \left(1 + \right. \\ & \left. + \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \right) dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_1 \wedge dz_2 + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_2 \wedge d\bar{z}_1 + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + \dots\end{aligned}$$

Здесь суммирование ведется по всем $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = k$, $d_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ — некоторые коэффициенты. Заметим, что в силу вещественности формы $\bar{d}_{mn}^{12} = -d_{nm}^{12}$, $d_{mn}^{1\bar{1}} = d_{nm}^{1\bar{1}}$, $\bar{d}_{mn}^{1\bar{2}} = d_{nm}^{2\bar{1}}$, $\bar{d}_{mn}^{2\bar{2}} = d_{nm}^{2\bar{2}}$.

Шаг 2. Построение второго приближения правильных координат.

Лемма 3.4.2 *Существует единственная замена координат вида*

$$(3.5) \quad z_l = w_l + \sum_{m,n} C_{mn}^l w_1^{m_1} w_2^{m_2} \bar{w}_1^{n_1} \bar{w}_2^{n_2},$$

такая что координаты $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$ являются вторым приближением правильных координат. Суммирование здесь производится по всем (m, n) , удовлетворяющим $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2$.

Доказательство. Сделаем указанную в условии леммы замену с некоторыми (пока неизвестными) коэффициентами C_{mn}^l . Подставив эту замену в выражения для H и F , получаем, что коэффициенты квадратичной части остались прежними, а коэффициенты кубической части изменились. Поскольку мы хотим избавиться от кубической части в гамильтониане и дополнительном интеграле, приравняем коэффициенты при кубических членах к нулю. Имеем следующую систему линейных уравнений на коэффициенты C_{mn}^l :

$$\begin{aligned}(3.6) \quad & \frac{1}{2} \alpha_1 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1-1, m_2}^1 + C_{m_1, m_2, n_1-1, n_2}^1) \\ & + \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1, m_2-1}^2 + C_{m_1, m_2, n_1, n_2-1}^2) + D_{m_1 m_2 n_1 n_2}^H = 0, \\ & \frac{1}{2} \beta_1 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1-1, m_2}^1 + C_{m_1, m_2, n_1-1, n_2}^1) \\ & + \frac{1}{2} \beta_2 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1, m_2-1}^2 + C_{m_1, m_2, n_1, n_2-1}^2) + D_{m_1 m_2 n_1 n_2}^F = 0\end{aligned}$$

для каждой четверки (m_1, m_2, n_1, n_2) , удовлетворяющей равенству $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3$. Члены с отрицательными индексами по определению считаются равными нулю. Аналогично приравниваем к нулю линейные члены в симплектической структуре:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} (m_1 + 1)C_{m_1+1, m_2, n_1, n_2}^1 + (n_1 + 1)\bar{C}_{n_1+1, n_2, m_1, m_2}^1 + d_{m_1 m_2 n_1 n_2}^{1\bar{1}} &= 0, \\ (n_1 + 1)C_{m_1, m_2, n_1+1, n_2}^2 - (n_2 + 1)C_{m_1, m_2, n_1, n_2+1}^1 + d_{m_1 m_2 n_1 n_2}^{12} &= 0, \\ (m_2 + 1)C_{m_1, m_2+1, n_1, n_2}^1 + (n_1 + 1)\bar{C}_{n_1, n_2, m_1, m_2}^2 + d_{m_1 m_2 n_1 n_2}^{2\bar{1}} &= 0, \\ (m_2 + 1)C_{m_1, m_2+1, n_1, n_2}^2 + (n_2 + 1)\bar{C}_{n_1, n_2+1, m_1, m_2}^2 + d_{m_1 m_2 n_1 n_2}^{2\bar{2}} &= 0 \end{aligned}$$

для каждого набора индексов $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 1$.

Система уравнений (3.6)+(3.7) должна быть разрешимой, поскольку правильные координаты всегда существуют. Чтобы ответить на вопрос, сколько она имеет решений, найдем пространство решений однородной системы. Из системы (3.6) получаем:

$$\begin{aligned} C_{2000}^1 + \bar{C}_{1010}^1 &= 0, & C_{1100}^1 + \bar{C}_{1001}^1 &= 0, \\ C_{0200}^2 + \bar{C}_{0101}^2 &= 0, & C_{1100}^2 + \bar{C}_{0110}^2 &= 0, \end{aligned}$$

а все остальные коэффициенты равны нулю. Подставив эти выражения в систему (3.7), получаем, что и эти коэффициенты также равны нулю. Итак, однородная система уравнений имеет только нулевые решения. Следовательно, решение неоднородной системы единственное. Имея единственность, мы можем утверждать, что с помощью такой замены мы действительно получили второе приближение правильных координат. Утверждение доказано.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов.

Лемма 3.4.3 Коэффициенты a_{ij} нормальной формы H могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha_1 d_{1010}^{1\bar{1}} + 4D_{2020}^H, & a_{22} &= -\alpha_2 d_{0101}^{2\bar{2}} + 4D_{0202}^H, \\ a_{12} &= -\alpha_1 d_{0101}^{1\bar{1}} - \alpha_2 d_{1010}^{2\bar{2}} + 2D_{1111}^H. \end{aligned}$$

Доказательство. Сделаем замену вида (3.5), полагая $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3$, и попытаемся избавиться от квадратичных членов в симплектической структуре. Обнулим коэффициенты при $w_1 \bar{w}_1$ и $w_2 \bar{w}_2$ в членах $dw_1 \wedge d\bar{w}_1$ и $dw_2 \wedge d\bar{w}_2$. Получаем:

$$\begin{aligned} 2(C_{2010}^1 + \bar{C}_{2010}^1) &= -d_{1010}^{1\bar{1}}, & C_{1101}^1 + \bar{C}_{1101}^1 &= -d_{0101}^{1\bar{1}}, \\ 2(C_{0201}^2 + \bar{C}_{0201}^2) &= -d_{0101}^{2\bar{2}}, & C_{1110}^2 + \bar{C}_{1110}^2 &= -d_{1010}^{2\bar{2}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты при $w_1^2 \bar{w}_1^2$, $w_2^2 \bar{w}_2^2$ и $w_1 w_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2$ в гамильтониане после замены приобретают вид

$$\frac{1}{2} \alpha_1 (\bar{C}_{2010}^1 + C_{2010}^1) + D_{2020}^H, \quad \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{0201}^2 + C_{0201}^2) + D_{0202}^H,$$

$$\frac{1}{2} \alpha_1 (C_{1101}^1 + C_{1101}^1) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{1110}^2 + C_{1110}^2) + D_{1111}^H$$

соответственно. Поскольку искомые числа $\frac{1}{4}a_{11}$, $\frac{1}{2}a_{12}$ и $\frac{1}{4}a_{22}$ суть коэффициенты при $w_1^2 \bar{w}_1^2$, $w_1 w_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2$ и $w_2^2 \bar{w}_2^2$ в гамильтониане, получаем утверждение.

3.5 Траекторный инвариант задачи Лагранжа

Рассмотрим задачу о волчке Лагранжа. Динамика случая Лагранжа хорошо изучена еще в работах классиков; лиувиллев и траекторный инварианты для этой задачи построены в работах [42, 37]. Хорошо известно, что при $g^2 - 4a > 0$ (условие Маевского) вращение волчка вокруг вертикальной оси является невырожденным положением равновесия, отвечающим эллиптической особой точке. В системе координат (s, r) эта точка имеет координаты $(0, 0, g, 0, 0, 1)$.

Вычислим гладкий траекторный инвариант в окрестности этой точки. Отметим, что в фазовом пространстве M^4 можно ввести канонические координаты — углы Эйлера и соответствующие им импульсы. Однако, в рассматриваемой точке эти координаты вырождаются. Поэтому в малой окрестности этой точки в качестве локальных координат на M^4 мы вынуждены взять координаты (s_1, s_2, r_1, r_2) . Тогда другие две координаты выражаются через них следующим образом:

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}, \quad s_3 = \frac{g - s_1 r_1 - s_2 r_2}{\sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}}.$$

Вычисляя матрицу линеаризованной системы, находим собственные значения $\pm i\alpha_1$ и $\pm i\alpha_2$, где

$$\alpha_1 = \frac{g + \sqrt{g^2 - 4a}}{2} - \frac{g}{\beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{g - \sqrt{g^2 - 4a}}{2} + \frac{g}{\beta}.$$

С помощью линейной замены

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(lv_1 + ku_2), & r_1 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(v_1 + u_2), \\ s_2 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(lu_1 + kv_2), & r_2 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(u_1 + v_2), \end{aligned}$$

где

$$k = \frac{g - \sqrt{g^2 - 4a}}{2}, \quad l = \frac{g + \sqrt{g^2 - 4a}}{2},$$

перейдем к первому приближению (u_1, u_2, v_1, v_2) правильных координат. Эти координаты являются, как нетрудно проверить, также и вторым приближением правильных координат. Подставляя эту замену в выражение для функции H , находим

$$\begin{aligned} D_{2020} &= \frac{k^2}{2\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{8(g^2 - 4a)}, \\ D_{0202} &= \frac{l^2}{2\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{8(g^2 - 4a)}, \\ D_{1111} &= \frac{g^2 + 4a}{4\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{2(g^2 - 4a)}. \end{aligned}$$

Симплектическая структура дает

$$\begin{aligned} d_{1010}^{1\bar{1}} &= \frac{4l - 3g}{2(g^2 - 4a)}, & d_{0101}^{2\bar{2}} &= \frac{-4k + 3g}{2(g^2 - 4a)}, \\ d_{0101}^{1\bar{1}} &= -d_{1010}^{2\bar{2}} = -\frac{g}{2(g^2 - 4a)}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью леммы 3.4.3 находим коэффициенты a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3a - gl}{2(g^2 - 4a)} + \frac{1}{2\beta}, & a_{22} &= \frac{3a - gk}{2(g^2 - 4a)} + \frac{1}{2\beta}, \\ a_{12} &= \frac{g^2 - 2a}{2(g^2 - 4a)} - \frac{1}{2\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3.5.1 Гладкий траекторный инвариант эллиптической особых точки $(0, 0, g, 0, 0, 1)$ в задаче Лагранжа равен $(\rho_0, \text{sign}_1, \text{sign}_2)$, где

$$\rho_0 = \frac{(g + \sqrt{g^2 - 4a}) - 2g/\beta}{-g + \sqrt{g^2 - 4a} + 2g/\beta},$$

$$\begin{aligned}\text{sign}_1 &= \text{sign} \left(g^3 + 2ag + (g^2 - 8a)\sqrt{g^2 - 4a} \right. \\ &\quad \left. + \beta(-g^3 + ag + (5a - g^2)\sqrt{g^2 - 4a}) \right), \\ \text{sign}_2 &= \text{sign} \left(g^3 + 2ag - (g^2 - 8a)\sqrt{g^2 - 4a} \right. \\ &\quad \left. + \beta(-g^3 + ag - (5a - g^2)\sqrt{g^2 - 4a}) \right).\end{aligned}$$

Итак, множество систем Лагранжа, неспециальных в эллиптической особой точке, — это множество P меры 1 в области $D = \{\beta > 0, g^2 - 4a > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Действительно, специальные системы целиком лежат на двух гиперповерхностиах $\{\text{sign}_1 = 0\} \cup \{\text{sign}_2 = 0\}$ и образуют поэтому множество меры нуль. Кроме того, область P оказывается расслоенной на двумерные поверхности уровня $\{\rho = \text{const}\}$ и рассеченной на три области постоянства знаков $(\text{sign}_1, \text{sign}_2)$. Тем самым, все системы Лагранжа разбиваются на классы траекторно эквивалентных систем, представляющие собой двумерные области в D .

Попытаемся понять, как выглядят области траекторной эквивалентности в \mathbb{R}^3 . Предположим, что $g \geq 0$. Случай $g \leq 0$ абсолютно симметричен этому и рассматривается аналогично.

Пусть сначала $g = 0$. Тогда, очевидно, $a < 0$. Имеем: $\rho = 1$, $\text{sign}_1 = \text{sign}(8 - 5\beta)$, $\text{sign}_2 = \text{sign}(-8 + 5\beta)$. Ответ в этом случае можно сформулировать так. Специальные системы соответствуют значениям параметров $g = 0$, $a < 0$, $\beta = -8/5$. Все остальные системы при $g = 0$, $a < 0$, $\beta \neq -8/5$ являются неспециальными и гладко траекторно эквивалентными, значение траекторного инварианта в этом случае есть $\text{Tr} = (1, +, -)$.

Пусть теперь $g > 0$. Тогда можно вынести множитель g^3 из-под знака sign , введя новую переменную $x = a/g^2$. Имеем:

$$\rho_0 = \frac{\beta(1 + \sqrt{1 - 4x}) - 2}{\beta(-1 + \sqrt{1 - 4x}) + 2},$$

$$\begin{aligned}\text{sign}_1 &= \text{sign} \left(1 + 2x + (1 - 8x)\sqrt{1 - 4x} + \beta(x - 1 + (5x - 1)\sqrt{1 - 4x}) \right), \\ \text{sign}_2 &= \text{sign} \left(1 + 2x - (1 - 8x)\sqrt{1 - 4x} + \beta(x - 1 - (5x - 1)\sqrt{1 - 4x}) \right).\end{aligned}$$

Тем самым задача стала двумерной: все функции зависят только от двух переменных β и $x = a/g^2$ с областью определения $\{\beta > 0, x < 1/4\}$. Выражения для sign_1 и sign_2 можно еще упростить, сокращая на

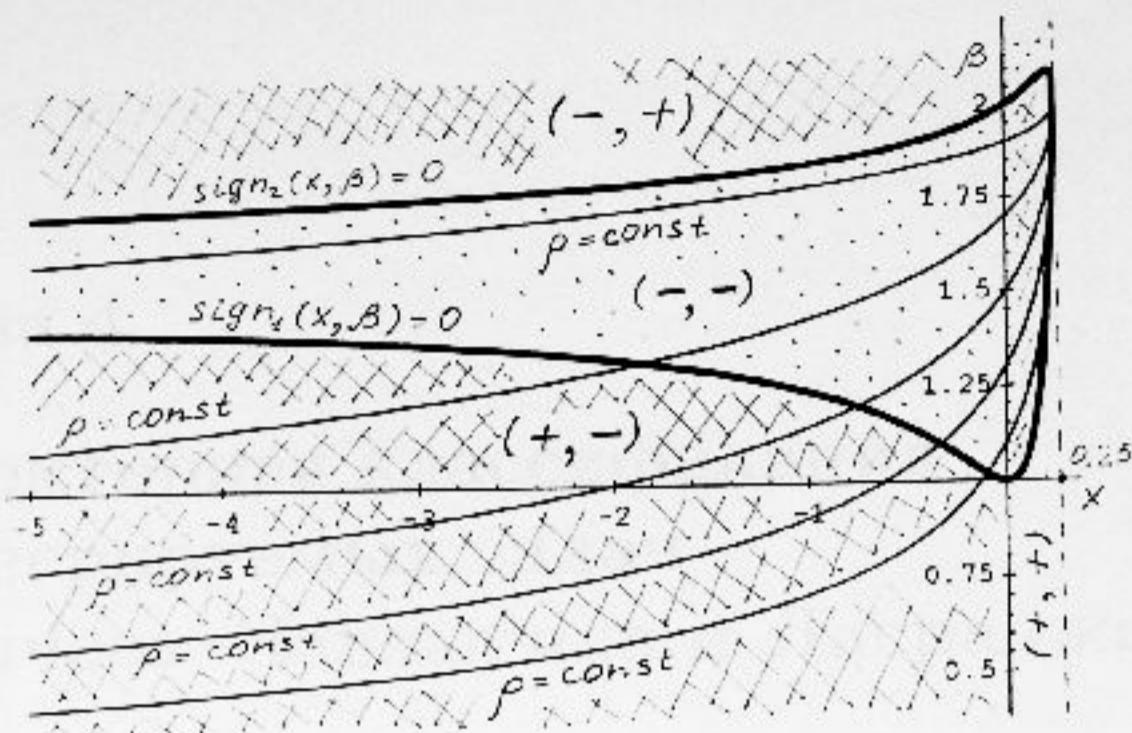


Рис. 6.

множители $1 \pm \sqrt{1-4x}$:

$$\text{sign}_1 = \text{sign}\left(7 - 16x - 5\sqrt{1-4x} + \beta(10x - 4 + 2\sqrt{1-4x})\right),$$

$$\text{sign}_2 = \begin{cases} \text{sign}\left(7 - 16x + 5\sqrt{1-4x} + \beta(10x - 4 - 2\sqrt{1-4x})\right), & x > 0, \\ -\text{sign}\left(7 - 16x + 5\sqrt{1-4x} + \beta(10x - 4 - 2\sqrt{1-4x})\right), & x < 0, \end{cases}$$

Для того, чтобы найти области постоянства знаков sign_1 и sign_2 , построим кривые $\text{sign}_1(x, \beta) = 0$ и $\text{sign}_2(x, \beta) = 0$.

Поскольку выражение $4 - 10x \pm 2\sqrt{1-4x}$ всегда больше нуля, получаем

$$\text{sign}_1 > 0 \iff \beta < \frac{7 - 16x - 5\sqrt{1-4x}}{4 - 10x - 2\sqrt{1-4x}},$$

$$\text{sign}_2 > 0 \iff \begin{cases} \beta < \frac{7 - 16x + 5\sqrt{1-4x}}{4 - 10x + 2\sqrt{1-4x}} & \text{при } x > 0, \\ \beta > \frac{7 - 16x + 5\sqrt{1-4x}}{4 - 10x + 2\sqrt{1-4x}} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

Области постоянства знаков sign_1 и sign_2 выделены на рис. 6 в координатах (x, β) . Там же построены линии уровня функции ρ .

Глава 4

Траекторная классификация интегрируемых задач Горячева–Чаплыгина и Лагранжа

4.1 Сведение системы Горячева–Чаплыгина к уравнениям Абеля

В первой части этой главы мы рассматриваем динамическую систему задачи Горячева–Чаплыгина в динамике твердого тела. Этот интегрируемый случай и соответствующая динамическая система подробно описаны в главе 1. Напомним только, что система Горячева–Чаплыгина $\dot{\mathbf{v}} = \text{sggrad } H$ задана на симплектическом многообразии M^4 , выделяемом в $\mathbb{R}^5(s, r)$ уравнениями

$$\begin{aligned}f_1 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\f_2 &= s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0.\end{aligned}$$

Переменные (s, r) называются переменными Эйлера–Пуассона.

Гамильтониан и дополнительный интеграл в этой задаче следующие:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2) + r_1, \\F &= s_3(s_1^2 + s_2^2) - s_1r_3.\end{aligned}$$

Для изучения топологии этой системы применяется новый метод, разработанный автором диссертации. Он заключается в следующем. Исходное многообразие M^4 накрывает (конечнолистно и разветвленно) некоторое другое многообразие N^4 , а исходная система накрывает некоторую новую динамическую систему на N^4 . Эта система устроена намного проще чем исходная, и топология особенностей этой системы

может быть легко изучена. Тем самым изучение топологии особенностей на M^4 разбивается на три этапа: изучение системы на N^4 , исследование накрытия и, наконец, описание топологии лиувиллева слоения в M^4 .

Замечание. Некоторые идеи этого метода содержатся в работах Л. Гаврилова [21, 22], М. Адин и Р. Силола [6]. Однако авторы этих работ, не знакомые с теорией лиувиллевой и траекторной классификации ИГС, не смогли довести свои исследования до конца.

Анализ динамических систем начинается обычно с построения образа отображения момента и бифуркационной диаграммы. Это необходимо для того, чтобы очертить область значений гамильтониана и дополнительного интеграла. Кроме того, по виду бифуркационной диаграммы можно составить грубое представление о возможных перестройках торов и, следовательно, о молекулах системы.

Уравнения бифуркационной диаграммы для случая Горячева–Чаплыгина имеют следующий вид [42, 55]:

$$\begin{aligned} & \{f = 0, \quad h > -1\}, \\ & \left\{h = \frac{3}{2}t^2 \pm 1, \quad f = t^3\right\}, \end{aligned}$$

где h, f — значения интегралов H и F .

Образ отображения момента и бифуркационная диаграмма изображены на рис. 7. В работе [42] был проведен детальный анализ перестроек торов в задаче Горячева–Чаплыгина. Приведем основные результаты этого исследования. Образ отображения момента F есть область $\{h \geq 3/2f^{2/3} - 1\}$. При этом прообразы точек кривой $\{h = 3/2f^{2/3} - 1\} \setminus \{(-1, 0)\}$ — это критические минимаксные окружности, здесь происходит “рождение” торов. Прообраз каждой точки области $D_1 = \{3/2f^{2/3} - 1 < h < 3/2f^{2/3} + 1, f \neq 0\}$ — это лиувиллев тор. На интервале $\{f = 0, -1 < h < 1\}$ мы наблюдаем перестройку тора снова в тор, обозначаемую буквой A^* . На кривой $\{h = 3/2f^{2/3} + 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ один лиувиллев тор перестраивается в два (атом B), и уже прообразом каждой точки области $D_2 = \{h > 3/2f^{2/3} + 1, f \neq 0\}$ является объединение двух торов Лиувилля. При подходе к лучу $\{f = 0, h > 1\}$ по области $\{f > 0\}$ или $\{f < 0\}$ происходит исчезновение одного из торов и рождение нового (два атома A), другой же тор свободно “проходит” этот луч, оставаясь неособым.

В [42] также были вычислены молекулы для случая Горячева–Чаплыгина. Оказалось, что перестройки торов имеют качественное различие

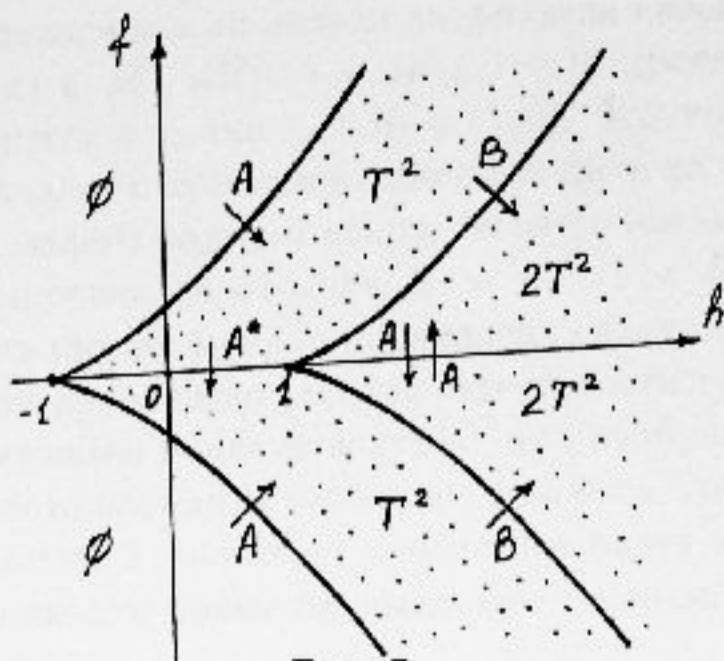


Рис. 7.

на многообразиях $Q_{h_1}^3$ и $Q_{h_2}^3$, при h_1 и h_2 , принадлежащих интервалам $(-1, 1)$ (первая зона) и $(1, +\infty)$ (вторая зона) соответственно, а при h_1 и h_2 из одной зоны перестройки качественно не различаются. В первом случае молекула имеет вид, изображенный на рис. 8а, а во втором — на рис. 8б (римские цифры на рисунке нумеруют ребра молекул). Обратим внимание на то, что при отображении момента торам с ребра I в плоскости (h, f) соответствуют точки из области D_1 , а торам с ребер II и III — точки из области D_2 . Грубый анализ показывает, что системы Горячева-Чаплыгина не являются лиувилево эквивалентными (и тем более траекторно эквивалентными) на трехмерных изоэнергетических поверхностях, для которых значения энергий лежат в разных зонах.

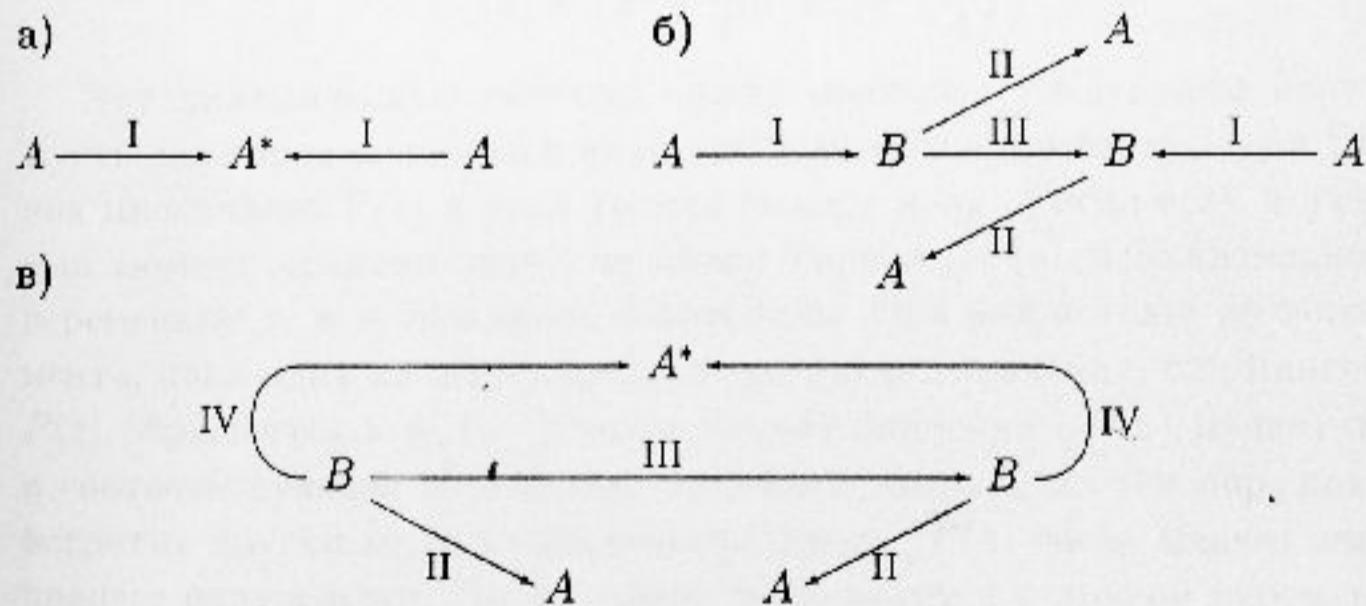


Рис. 8.

Интересен топологический анализ лиувиллева слоения окрестностей особых точек $x_1, x_2 \in M^4$, $dH(x_i) = dF(x_i) = 0$, проектирующихся при отображении момента в точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Круговая молекула для точки $(-1, 0)$ совпадает с молекулой, изображенной на рис. 8б, поскольку дуга окружности малого радиуса вокруг этой точки может быть непрерывно продеформирована в отрезок $H = h$, $-1 < h < 1$. При этом деформация, очевидно, не меняет лиувиллева слоения. Круговая молекула, описывающая лиувиллево слоение окрестности точки $(1, 0)$, уже не сводится к построенным ранее молекулам, она изображена на рис. 8в.

Для построения инварианта Фоменко–Циппинга для этой задачи (т.е. для вычисления меток в молекуле) необходим более тонкий анализ системы. Для этого введем новые переменные — переменные Абеля [27]:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= s_3, \\ z_1 z_2 &= -\frac{1}{4}(s_1^2 + s_2^2). \end{aligned}$$

Тогда на каждом фиксированном уровне $\{H = h, F = f\}$ первых интегралов динамическая система Горячева–Чаплыгина перейдет в систему уравнений Абеля:

$$(4.2) \quad \dot{z}_1 = \frac{2\sqrt{P(z_1)}}{z_1 - z_2}, \quad \dot{z}_2 = \frac{2\sqrt{P(z_2)}}{z_1 - z_2},$$

где

$$\begin{aligned} P(z) &= -P_+(z)P_-(z), \\ P_+(z) &= \left(z^3 - \frac{1}{2}(h \pm 1)z - \frac{f}{4} \right). \end{aligned}$$

Эту динамическую систему нужно понимать следующим образом. Пусть для определенности в начальный момент времени $z_1 > z_2$ и значения многочлена $P(z)$ в этих точках больше нуля. Тогда если в начальный момент времени значения обоих корней $\sqrt{P(z)}$ положительно, то переменные z_1 и z_2 начинают возрастать. Они возрастают до того момента, пока одна из переменных не достигнет значения, где многочлен $P(z)$ обращается в нуль. В этот момент значение $\sqrt{P(z)}$ меняет знак, и соответствующая переменная начинает убывать до тех пор, пока не встретит другой корень многочлена. Здесь $\sqrt{P(z)}$ снова меняет знак, и процесс повторяется. То же самое происходит и с другой переменной. Таким образом, лиувиллев тор при такой замене отображается на декартово произведение отрезков $[p_i, q_i] \times [p_j, q_j]$, где p_i, q_i, p_j, q_j — различные простые корни многочлена $P(z)$, и $P(z) > 0$ внутри этих отрезков.

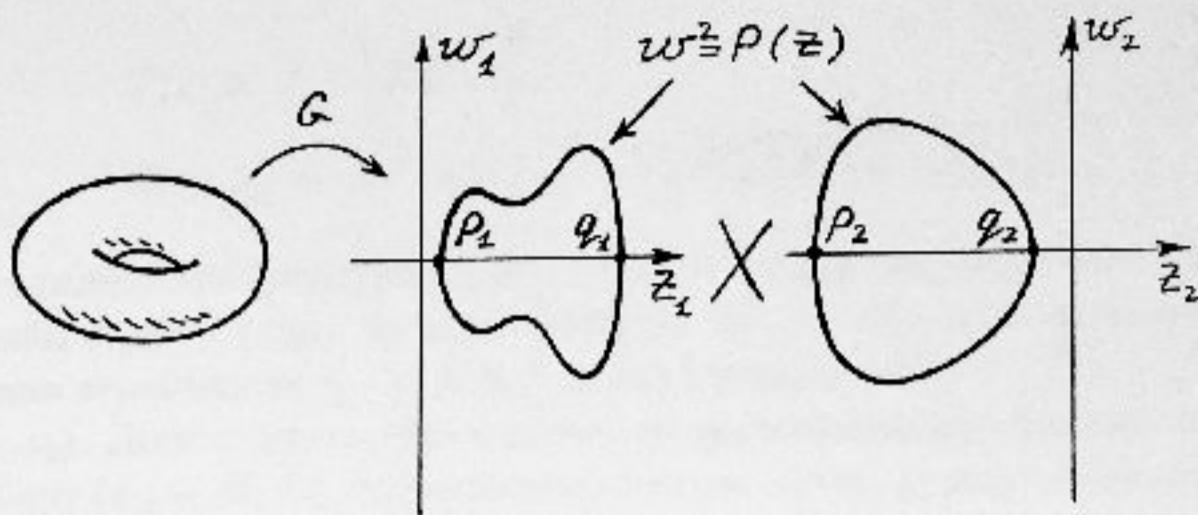


Рис. 9.

Отметим, что такая замена координат не является регулярной: она вырождается по крайней мере в тех точках, где многочлен $P(z)$ обращается в нуль. Однако если мы будем считать, что точка лиувиллева тора отображается в точку на поверхности $\{w_1^2 = P(z_1)\} \times \{w_2^2 = P(z_2)\}$, то в окрестности корней многочлена $P(z)$ можно ввести новую локальную координату $w = \sqrt{P(z)}$. Нетрудно проверить, что система уравнений Абеля уже не будет иметь особенностей в тех точках, где $P(z) = 0$, а образом лиувиллева тора T_L будет произведение T_J двух окружностей

$$\{w_i^2 = P(z_i), z_i \in [p_i, q_i]\} \subset \mathbb{R}^2(z, w), \quad i = 1, 2$$

(рис. 9).

Оказывается, замена переменных $(s, r) \rightarrow (z_1, w_1, z_2, w_2, H, F)$, где $\{w_i^2 = P(z_i)\}$, уже регулярна всюду, за исключением, быть может, точек кратных корней многочлена. Этот результат может быть получен непосредственно из следующей теоремы, доказанной автором настоящей диссертации в [36].

Теорема 4.1.1 *Формулы обратного перехода от координат z_1, z_2, H, F к координатам $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3$ имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \frac{z_1 T(z_2) - z_2 T(z_1)}{S(z_1, z_2)}, & s_2 &= -2 \frac{z_1 \sqrt{P(z_2)} + z_2 \sqrt{P(z_1)}}{S(z_1, z_2)}, \\ s_3 &= z_1 + z_2, & r_1 &= -2 \frac{T(z_1) - T(z_2)}{z_1 - z_2}, \\ r_2 &= -2 \frac{\sqrt{P(z_1)} + \sqrt{P(z_2)}}{z_1 - z_2}, & r_3 &= 2 \frac{S(z_1, z_2)}{z_1 - z_2}, \end{aligned}$$

здесь

$$T(z) = z^3 - \frac{1}{2}Hz - \frac{F}{4},$$

$$S(z_1, z_2) = \sqrt{2T(z_1)T(z_2) - 2\sqrt{P(z_1)P(z_2)} - \frac{1}{2}z_1z_2}.$$

Замечание. Эти формулы надо понимать следующим образом. Для того чтобы задать точку на многообразии M^4 , необходимо фиксировать значения переменных z_1, z_2, H и F , а также знаки корней $\sqrt{P(z_1)}, \sqrt{P(z_2)}$ и $S(z_1, z_2)$. Легко понять, что в случае общего положения фиксированному набору (z_1, z_2, H, F) соответствует восемь точек на многообразии M^4 .

Доказательство. При выводе обратных формул будем использовать

- систему уравнений Эйлера–Пуассона для случая Горячева–Чаплыгина,
- прямые формулы, выражающие переменные z_1, z_2 и интегралы H, F через переменные Эйлера–Пуассона, а также соотношения $f_1 = 1, f_2 = 0$,
- систему уравнений Абеля.

Выражение переменной r_1 через переменные Абеля легко получить, воспользовавшись заменой (4.1) и выражением для гамильтониана:

$$r_1 = H - \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2) = H - 2(z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2) = 2 \frac{T(z_2) - T(z_1)}{z_1 - z_2},$$

где

$$T(z) = z^3 - \frac{1}{2}Hz - \frac{F}{4}.$$

Из уравнений Эйлера–Пуассона находим

$$r_2 = -s_3.$$

Поскольку $s_3 = z_1 + z_2$, то складывая почленно уравнения системы уравнений Абеля (4.2), получаем

$$r_2 = -2 \frac{\sqrt{P(z_1)} + \sqrt{P(z_2)}}{z_1 - z_2}.$$

Переменная r_3 связана с переменными r_1 и r_2 равенством $f_1 = 1$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} r_3 &= \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} = \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \sqrt{\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2 - [T(z_1) - T(z_2)]^2 - [\sqrt{P(z_1)} + \sqrt{P(z_2)}]^2} = \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \sqrt{2T(z_1)T(z_2) - 2\sqrt{P(z_1)P(z_2)} - \frac{1}{2}z_1z_2}. \end{aligned}$$

Перейдем к выводу формул для переменных s_1, s_2, s_3 . Из формул замены переменных (4.1) и выражения для дополнительного интеграла F находим

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-F + s_3(s_1^2 + s_2^2)}{r_3} = \frac{-[F + 4z_1z_2(z_1 + z_2)](z_1 - z_2)}{2S(z_1, z_2)} = \\ &= 2 \frac{z_1T(z_2) - z_2T(z_1)}{S(z_1, z_2)}, \\ s_2 &= \sqrt{-4z_1z_2 - s_1^2} = -2 \frac{z_1\sqrt{P(z_2)} + z_2\sqrt{P(z_1)}}{S(z_1, z_2)}, \\ s_3 &= z_1 + z_2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы в действительности имеем не замену координат на торе, а накрытие: исходное многообразие M^4 конечнолистно разветвленно накрывает некоторое другое многообразие N^4 . Это накрытие мы обозначим буквой G . При этом исходная динамическая система накрывает систему уравнений Абеля (здесь, очевидно, опущены уравнения $\dot{F} = 0, \dot{H} = 0$). Наша ближайшая цель — изучить систему уравнений Абеля и многообразие N^4 .

4.2 Топология динамической системы на базе накрытия

Изучим расположение отрезков, на которых функция $P(z)$ положительна (будем называть их p -отрезками), и их перестройку при изменении значения f интеграла F на уровне $\{H = h\}$. Для этого построим в плоскости (z, y) два графика $y = y_{\pm}(z) = z^3 - 1/2(h \pm 1)z$.

Если точки $(z_0, y_+(z_0))$ и $(z_0, y_-(z_0))$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $y = f/4$, то значение многочлена $P(z)$ положительно, а если в одной, то отрицательно. На рис. 10 выделены p -отрезки при

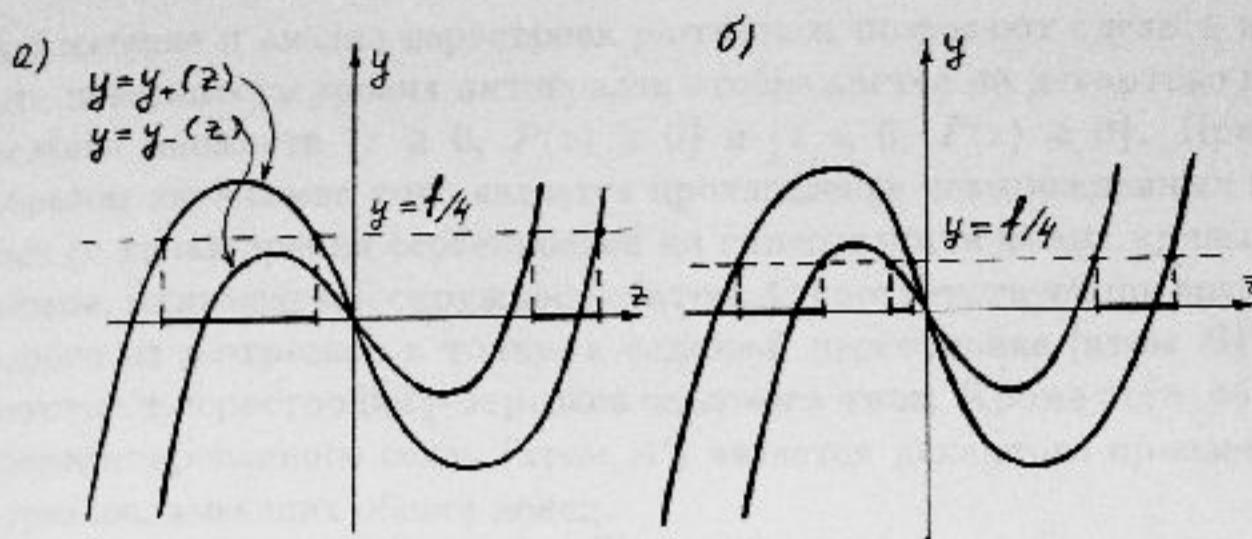


Рис. 10.

разных значениях f . При тех значениях f , при которых прямая $y = f/4$ касается графика $y = y_+(z)$, один из p -отрезков вырождается в точку, а в случае касания прямой $y = f/4$ графика $y = y_-(z)$ происходит перестройка p -отрезков седлового типа. Легко понять, что условия касания прямой $y = f/4$ кривых $y = y_{\pm}(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} z^3 - \frac{1}{2}(h \pm 1)z &= \frac{f}{4}, \\ 3z^2 - \frac{1}{2}(h \pm 1) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$h = 6z^2 \mp 1, \quad f = -8z^3.$$

Кроме того, вырождение отрезков в точку или их перестройку мы можем также наблюдать на уровне $f = 0$. Легко видеть, что уравнения кривых бифуркационной диаграммы совпадают с уравнениями, связывающими h и f на тех гиперэллиптических поверхностях, где происходит перестройка p -отрезков.

Замечание. В работах [6, 21, 22] изучались отдельные интегрируемые гамильтоновы системы, сводящиеся к уравнениям Абеля с некоторым многочленом $P(z)$. Оказалось, что во всех задачах бифуркационная диаграмма совпадает с множеством всех значений (h, f) , при которых многочлен $P(z)$ имеет кратный корень. Только что мы установили, что это же утверждение верно и для задачи Горячева–Чаплыгина.

Выясним теперь, какая поверхность является образом поверхности уровня $\{H = h, F = f\}$ при отображении G . Из формул (4.1) следует, что координаты z_1 и z_2 образа должны быть разного знака. Это

наблюдение и анализ перестроек p -отрезков позволяют сделать вывод, что поверхность уровня интегралов отображается на декартово произведение множеств $\{z \geq 0, P(z) \geq 0\}$ и $\{z \leq 0, P(z) \geq 0\}$. При этом образом лиувиллева тора является произведение невырожденных неособых (с точки зрения особенностей на гиперэллиптических кривых) отрезков, минимаксной окружности (атом A) соответствует превращению одного из p -отрезков в точку, а седловой перестройке (атом B) соответствует перестройка p -отрезков седлового типа. Кроме того, образом неориентированного седла (атом A^*) является декартово произведение отрезков, имеющих общий конец.

Пусть $T_L^I(H, F)$, $T_L^{II}(H, F)$, $T_L^{III}(H, F)$ — лиувиллевы торы, лежащие на уровне $\{H = h, F = f\}$ и принадлежащие ребрам I, II, III соответственно. Обозначим через u_1, u_2, u_3 ($u_1 < u_2 < u_3$) корни уравнения $y_+(z) = f/4$, а через v_1, v_2, v_3 ($v_1 < v_2 < v_3$) корни уравнения $y_-(z) = f/4$. Кроме того, если уравнение $y_-(z) = f/4$ имеет единственный корень, обозначим его через v . Предыдущие рассуждения показывают, что тор T_L^{III} при отображении G проектируется на тор T_j^{III} , который в локальных координатах записывается в виде произведения отрезков $[u_1, v_1] \times [v_3, u_3]$, тор T_L^{II} — на тор T_j^{II} , в локальных координатах представляющий собой произведение $[v_i, u_i] \times [v_j, u_j]$ (где $(i, j) = (2, 3)$ при $f > 0$, $(i, j) = (1, 2)$ при $f < 0$), тор T_L^I — на тор T_j^I , являющийся в локальных координатах произведением $[u_1, u_2] \times [v, u_3]$.

Рассмотрим область $\{f \geq 0\}$ (поскольку система симметрична относительно замены f на $-f$, все выводы могут быть перенесены на область $\{f \leq 0\}$). При $h > 3/2f^{2/3} + 1$ определим циклы

$$a_1 = \{w^2 = P(z_1), z_1 \in [v, u_3]\} \times \{\text{pt}\}$$

и

$$a_2 = \{\text{pt}\} \times \{w^2 = P(z_2), z_2 \in [u_1, u_2]\}.$$

При $h < 3/2f^{2/3} + 1$ цикл $a_1 = \{w^2 = P(z_1), z_1 \in [v_3, u_3]\} \times \{\text{pt}\}$ сохраняется, а цикл a_2 распадается на два:

$$a'_2 = \{\text{pt}\} \times \{w^2 = P(z_2), z_2 \in [u_1, v_1]\}$$

и

$$a''_2 = \{\text{pt}\} \times \{w^2 = P(z_2), z_2 \in [v_2, u_2]\}.$$

Образ изоэнергетической поверхности Q_h^3 , $h > 1$, в глобальных и локальных координатах изображен на рис. 11.

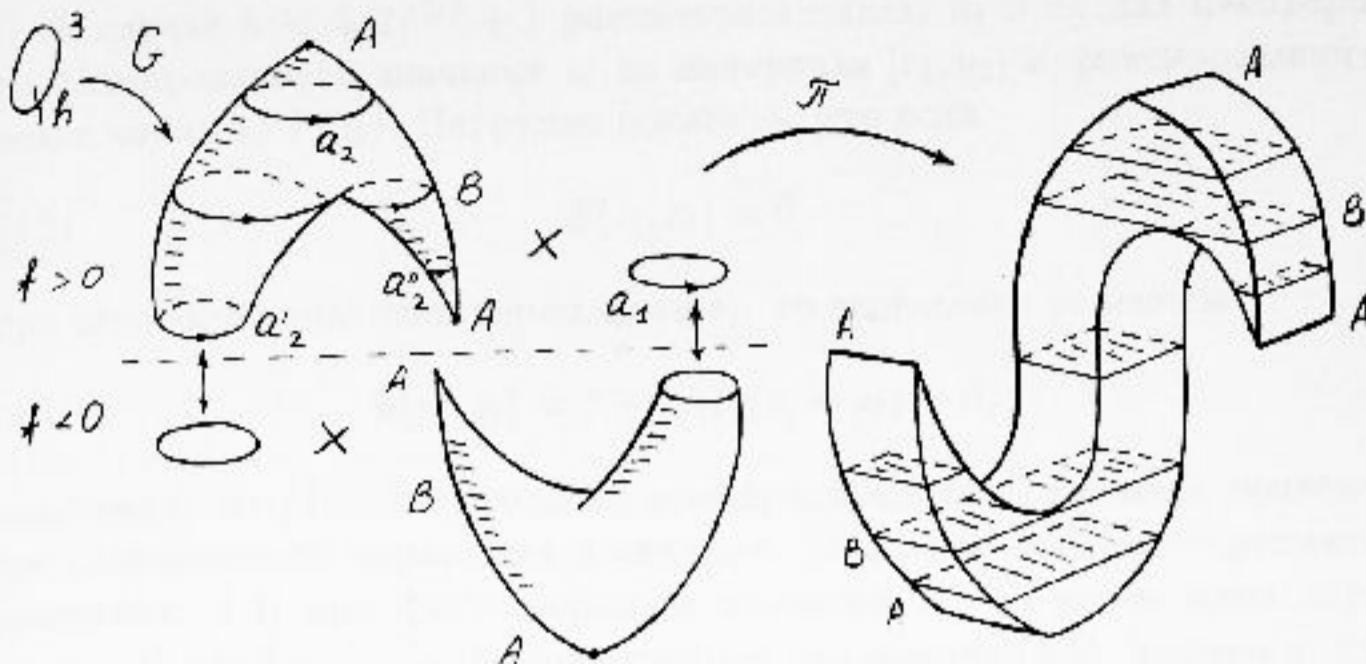


Рис. 11.

4.3 Структура накрытия

Найдем связь между торами Лиувилля T_L и их проекциями T_J . Пусть циклы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_2, \gamma''_2$ — прообразы циклов a_1, a_2, a'_2, a''_2 на лиувиллевых торах.

Теорема 4.3.1 Накрытие $T_L \rightarrow T_J$ двулистно. Кривые $\gamma_1, \gamma'_2, \gamma''_2$ связны и двулистно накрывают свои образы, а кривая γ_2 несвязна, и каждая ее связная компонента однолистно накрывает свой образ.

Доказательство. Чтобы выяснить, как накрываются циклы a_i , обойдем их, начиная с произвольной точки. Воспользовавшись формулами обратного перехода к координатам Эйлера Пуассона на лиувиллевом торе, выясним, как эти координаты изменятся, когда мы вернемся в ту же точку на торе T_J . Легко понять, что следить нужно за изменением знака радикала $S(z_1, z_2)$: если при однократном обходе по какому-либо циклу a_i он изменился, то прообраз этого цикла двулистно накрывает образ, если же нет, то цикл имеет два прообраза, однолистно накрывающих его. Докажем, что при $h < 3/2f^{2/3} + 1$ на каждом из циклов a'_2 и a''_2 радикал меняет знак один раз, а при $h > 3/2f^{2/3} + 1$ на цикле a_2 для разных значений координат z_1 радикал либо вообще не меняет знак, либо меняет его двукратно. Тем самым часть леммы, относящаяся к циклам a_2, a'_2, a''_2 , будет доказана.

В случае $h < 3/2f^{2/3} + 1$ рассмотрим циклы a'_2 и a''_2 для некоторого фиксированного значения z_1 из интервала $[v_3, u_3]$ и фиксированного знака корня из $P(z_1)$. Нетрудно показать, что если

$$(4.3) \quad S(z_1, z_2) = 0$$

при некотором значении переменной z_2 , то выполнено равенство

$$(4.4) \quad \Phi(z_1, z_2) = f + 4z_1 z_2 (z_1 + z_2) = 0,$$

полученное из (4.3) некоторыми преобразованиями, включая возвведение подкоренного выражения в квадрат. При этом если z_2 — решение уравнения (4.4) при фиксированном значении z_1 , то ровно одна пара $(z_2, w(z_2))$ или $(z_2, -w(z_2))$ удовлетворяет уравнению (4.3), причем кратности корней этих уравнений совпадают. Уравнение (4.4) при фиксированном z_1 имеет не больше двух действительных корней. Если нам удастся доказать, что оно имеет ровно два корня, причем один из них принадлежит отрезку $[u_1, v_1]$, а другой отрезку $[v_2, u_2]$, то мы докажем требуемое утверждение для циклов a'_2, a''_2 . Действительно, мы получим, что на каждом из циклов a'_2 и a''_2 радикал $S(z_1, z_2)$ меняет знак ровно в одной точке $(z_2, w(z_2))$ или $(z_2, -w(z_2))$. Значит, при обходе по этому циклу, знак радикала меняется.

Пусть $z_1 = u_3$. Тогда значение $z_2 = u_i, i = 1, 2$, удовлетворяет уравнению (4.4). Действительно, поскольку имеет место равенство

$$(f + 4z_1 z_2 (z_1 + z_2))(z_1 - z_2) = z_2 T(z_1) - z_1 T(z_2)$$

и

$$T(u_i) = \frac{1}{2}u_i,$$

то

$$\Phi(u_i, u_j) = 0.$$

Нетрудно проверить, что при $z_1 \in (v_3, u_3)$ имеем $\Phi(u_1) > 0, \Phi(v_1) < 0$, поэтому на отрезке $[u_1, v_1]$ есть ровно один корень уравнения (4.4). Аналогичное утверждение справедливо для отрезка $[v_2, u_2]$.

Точно также, рассматривая уравнение (4.4) в области $h > 3/2f^{2/3} + 1$, находим, что $\Phi(u_1) > 0$ и $\Phi(u_2) > 0$. Поэтому на отрезке $[u_1, u_2]$ оно либо не имеет корней, либо имеет два корня. Следовательно, радикал не меняет знак после обхода по циклу a_2 . Утверждение леммы доказано для циклов a_2, a'_2, a''_2 . Для цикла a_1 доказательство аналогично. Теорема доказана.

4.4 Построение инварианта Фоменко–Цишанга для случая Горячева–Чаплыгина

В этом параграфе мы проведем лиувиллеву и траекторную классификацию случая Горячева–Чаплыгина, построив соответствующие инварианты для изознергетических поверхностей Q_h^3 при различных значениях h гамильтониана H . Напомним, что основная идея состоит в том, чтобы “поднять” информацию о динамической системе с базы накрытия в totальное пространство. Структура динамической системы на базе нам известна, и, кроме того, теорема 4.3.1 полностью описывает накрытие G . Это позволяет доказать следующую теорему о лиувиллевом инварианте.

- Теорема 4.4.1**
- 1) Для значений энергии из интервала $(1, +\infty)$ (молекула имеет вид, изображенный на рис. 8а) t -метка равна нулю на ребрах I и равна $1/2$ на ребрах II и III. Кроме того, n -метка равна -1 на семье B , ε -метки равны 1 на всех ребрах.
 - 2) Для значений энергии из интервала $(-1, 1)$ (молекула имеет вид, изображенный на рис. 8б) t -метки на всех ребрах равны нулю, n -метка равна 0 или -1 (в зависимости от ориентации поверхности Q_h^3) на семье A^* , ε -метки равны 1 на всех ребрах.
 - 3) Круговая молекула для точки $(1, 0) \in \mathbb{R}^2(h, f)$ изображена на рис. 8в. Метки t на всех ребрах равны $1/2$, n -метки на всех семьях равны -2 , ε -метки равны 1 на ребрах II и III и равны -1 на ребрах IV.

Доказательство. При вычислении меток воспользуемся алгоритмом, изложенным в [9]. Рассмотрим сначала многообразие Q , соответствующее уровню энергии $h > 1$ (рис. 8б). Будем двигаться по молекуле $W(Q_h^3)$ от верхнего атома A к нижнему. Перестройку торов на накрытии Q_h^3 можно описать с помощью простой схемы. Для удобства введем векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ в плоскости \mathbb{R}^2 , и пусть всюду далее m и n обозначают целые числа. Тогда схема примет следующий вид:

Атом A .

Рождению лиувиллева тора T_L из окружности $S^1 = \gamma_1 = \mathbb{R}/\{2ne_2\}$ соответствует рождение тора T_J из окружности $S^1 = a_1 = \mathbb{R}/\{ne_2\}$.

Ребро I.

Лиувиллеву тору $T_L = \mathbb{R}^2/\{2me_1 + 2ne_2\}$ соответствует тор $T_J = T_L/\{ne_2\} = \mathbb{R}^2/\{2me_1 + ne_2\}$, причем циклы $\gamma_1 = \{x = 0\}$ (связный),

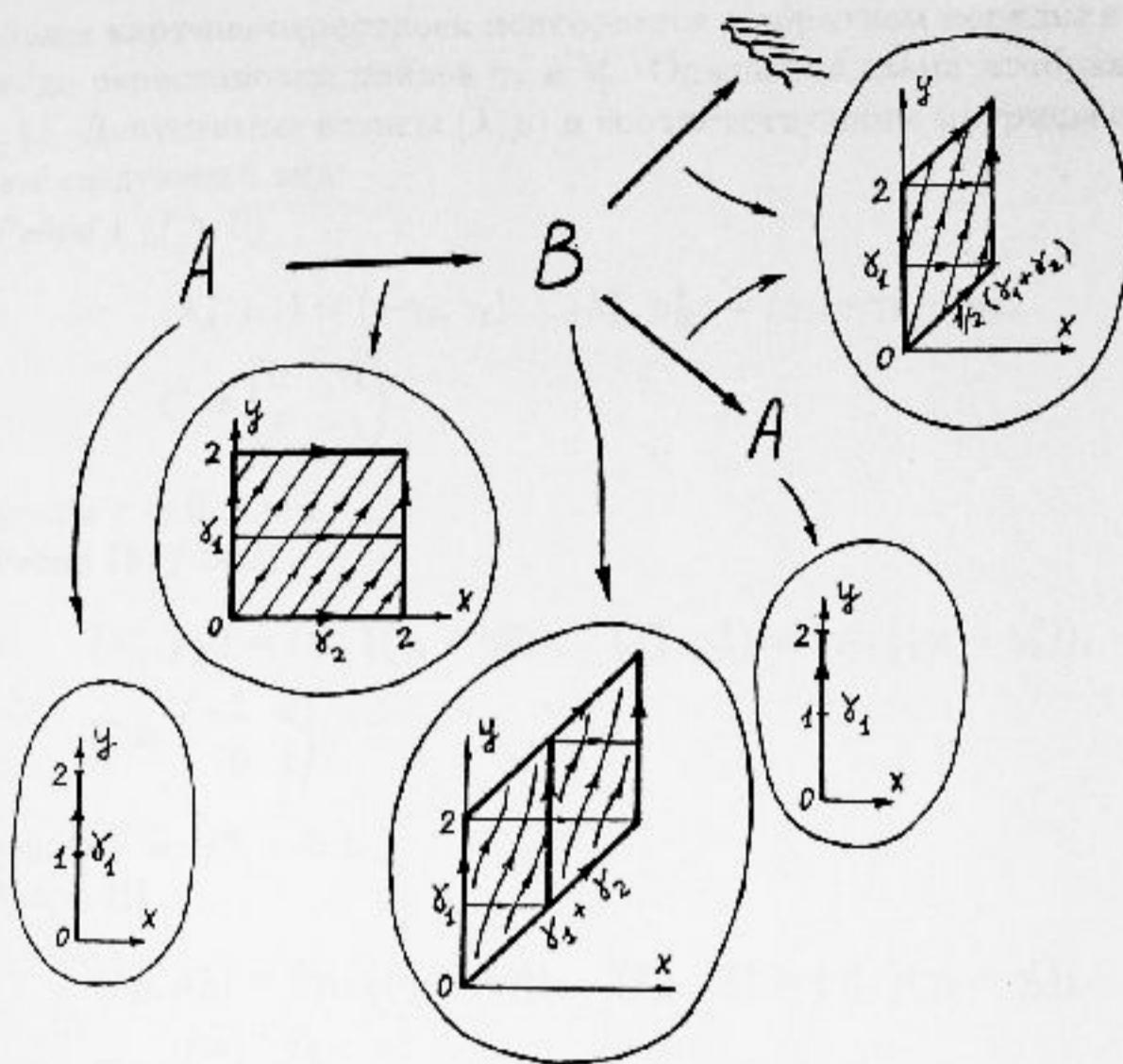


Рис. 12.

$\gamma_2 = \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$ (несвязный) при отображении G накрывают связные циклы $a_1 = \{x = 0\}$, $a_2 = \{y = 0\}$.

Атом B .

Отождествление точек (m, y) и $(m + 1, y + 1)$ в торе T_L .

Ребро II.

Лиувиллеву тору $T_L = \mathbb{R}^2 / \{n(e_1 - e_2) + 2me_2\}$ и связным циклам $\gamma_1 = \{x = 0\}$, $\gamma_2'' = \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$ на нем соответствует тор $T_J = T_L / \{ne_2\} = \mathbb{R}^2 / \{me_1 + ne_2\}$ и циклы $a_1 = \{x = 0\}$, $a_2'' = \{y = 0\}$.

Ребро III.

Лиувиллеву тору $T_L = \mathbb{R}^2 / \{n(e_1 + e_2) + 2me_2\}$ и связным циклам $\gamma_1 = \{x = 0\}$, $\gamma_2' = \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$ на нем соответствует тор $T_J = T_L / \{ne_2\} = \mathbb{R}^2 / \{me_1 + ne_2\}$ и циклы $a_1 = \{x = 0\}$, $a_2' = \{y = 0\}$.

Атом A .

Торы T_L и T_J вырождаются в окружность $S^1 = \gamma_1 = a_1 = \mathbb{R} / \{ne_2\}$.

Далее картина перестроек повторяется в обратном порядке с точностью до перестановки циклов γ_1 и γ'_2 . Описанная схема изображена на рис. 12. Допустимые базисы (λ, μ) и соответствующие матрицы склейки имеют следующий вид:

Ребро I ($f > 0$)

$$(\lambda_A^-, \mu_A^-) = (-\gamma_2, \gamma_1), \quad (\lambda_B^+, \mu_B^+) = (\gamma_1, -\gamma_1 - \gamma_2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $r = 0, \varepsilon = 1$.

Ребро II ($f > 0$)

$$(\lambda_B^-, \mu_B^-) = (\gamma_1, \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma''_2)), \quad (\lambda_A^+, \mu_A^+) = (\gamma''_2, \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma''_2)),$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $r = 1/2, \varepsilon = 1$.

Ребро III

$$(\lambda_B^-, \mu_B^-) = (\gamma_1, \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma'_2)), \quad (\lambda_B^+, \mu_B^+) = (\gamma'_2, \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma'_2)),$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $r = 1/2, \varepsilon = 1$.

Аналогично можно выписать матрицы склейки и для ребер I и II при $f < 0$.

Перейдем к подсчету n -меток. Поскольку среди r -меток нет бесконечных, то семьями в молекуле являются атомы B . По формуле, приведенной в главе 1, находим $n = -1$.

Рисунок 13 иллюстрирует перестройку торов T_L и выбор циклов λ^\perp на них. На этом рисунке изображено погружение торов в \mathbb{R}^3 . Для наглядности торы рассечены вдоль окружностей, совмещающихся при погружении. При этом обратная склейка на рисунке производится “на крест”, т.е. внутренняя правая окружность склеивается с внешней левой и внутренняя левая — с внешней правой. Двулистное накрытие $G : T_L \rightarrow T_J$ на рисунке есть просто проекция на “внешнюю” часть тора. Таким образом, этот рисунок наглядно демонстрирует, как поднимается информация о перестройках с базы на лиувиллевы торы.

Пусть теперь $h < 1$. Тогда имеем следующую схему.

Атом A .

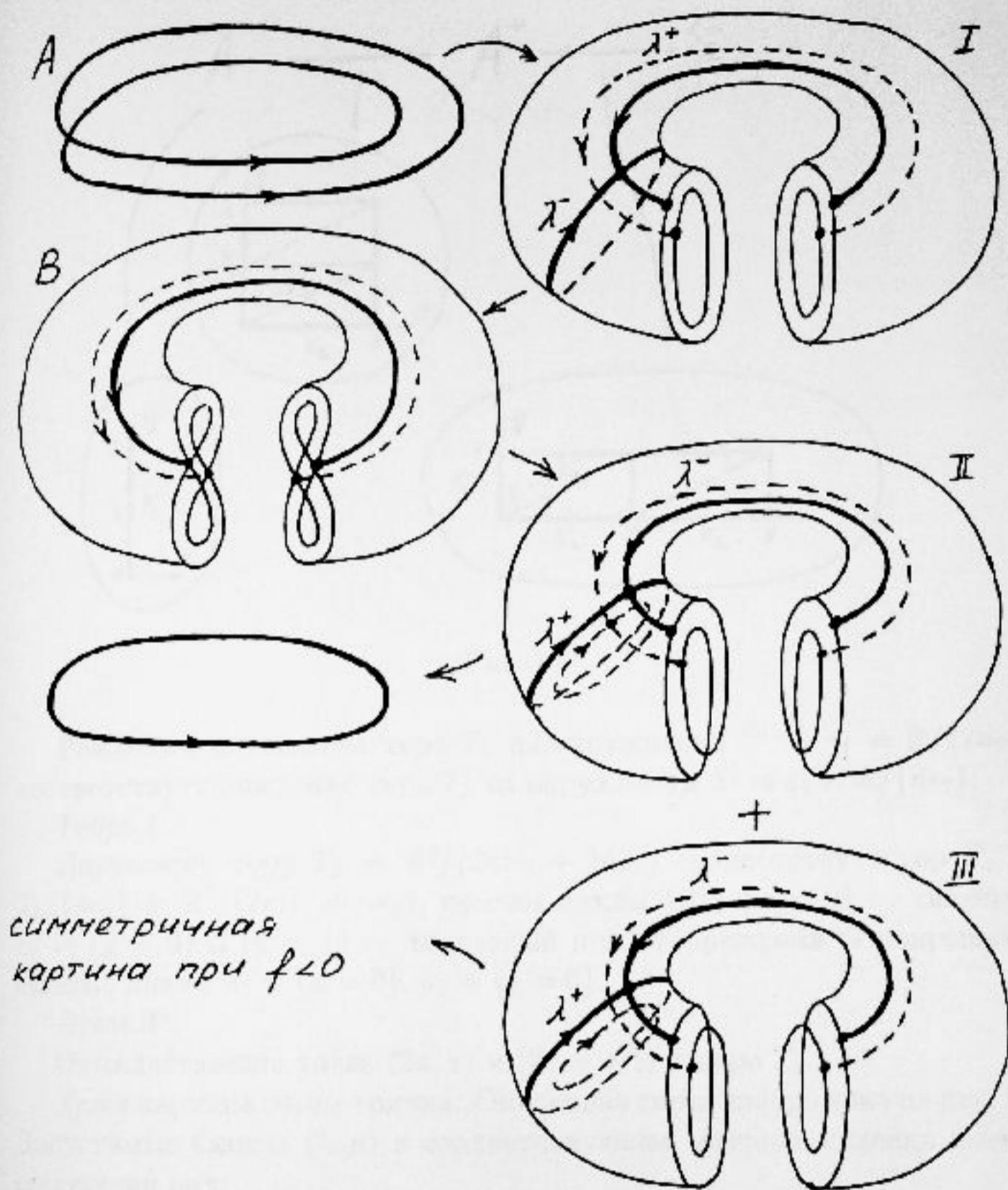


Рис. 13.

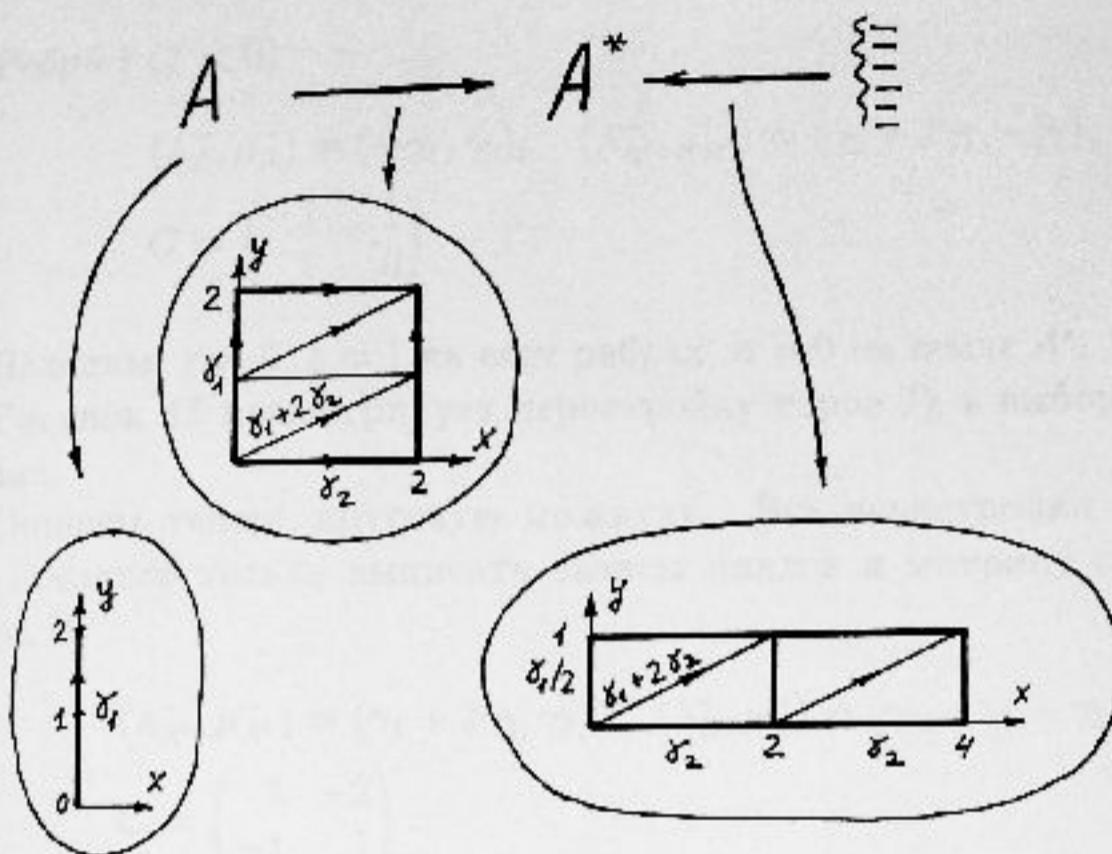


Рис. 14.

Рождению лиувиллева тора T_L из окружности $S^1 = \gamma_1 = \mathbb{R}/\{2ne_2\}$ соответствует рождение тора T_J из окружности $S^1 = a_1 = \mathbb{R}/\{ne_2\}$.

Ребро I.

Лиувиллеву тору $T_L = \mathbb{R}^2/\{2me_1 + 2ne_2\}$ соответствует тор $T_J = T_L/\{ne_2\} = \mathbb{R}^2/\{2me_1 + ne_2\}$, причем циклы $\gamma_1 = \{x = 0\}$ — связный, $\gamma_2 = \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$ — несвязный при отображении G накрывают связные циклы $a_1 = \{x = 0\}$, $a_2 = \{y = 0\}$.

Атом A^* .

Отождествление точек $(2x, x)$ и $(2x, x + 1)$ в торе T_L .

Далее картина симметрична. Описанная схема изображена на рис. 14. Допустимые базисы (λ, μ) и соответствующая матрица склейки имеют следующий вид:

Ребро I ($f > 0$)

$$(\lambda_A^-, \mu_A^-) = (-\gamma_2, \gamma_1), \quad (\lambda_{A^*}^+, \mu_{A^*}^+) = (2\gamma_2 + \gamma_1, -\gamma_2),$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ребро I ($f < 0$)

$$(\lambda_A^-, \mu_A^-) = (-\gamma_1, \gamma_2), \quad (\lambda_{A^*}^+, \mu_{A^*}^+) = (\gamma_2 + 2\gamma_1, -\gamma_1),$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим: $r = 0, \varepsilon = 1$ на всех ребрах, $n = 0$ на семье A^* .

Рисунок 15 иллюстрирует перестройку торов T_L и выбор циклов λ^\pm на них.

Опишем теперь круговую молекулу. Все перестройки уже описаны, остается только выписать базисы циклов и матрицу склейки для ребра IV:

$$(\lambda_{A^*}^-, \mu_{A^*}^-) = (\gamma_1 + 2\gamma_2, \gamma_2), \quad (\lambda_B^+, \mu_B^+) = (\gamma_1, -\gamma_1 - \gamma_2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая матрица записывается аналогично. Находим $n = -2$ на семье A^* , $n = -2$ на семье B , $r = 1/2$, $\varepsilon = -1$ на ребре IV.

На рис. 16 изображен прообраз точки $(h, f) = (1, 0)$. Это два тора, слепленных вдоль параллели и меридиана, обозначенных на рисунке как критическое множество. На рис. 17 показан выбор циклов λ^\pm на ребре IV.

Следствие 4.4.1 Системы Горячева–Чаплыгина на поверхностях постоянной энергии $Q_{h_1}^3$ и $Q_{h_2}^3$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда значения h_1 и h_2 одновременно принадлежат одному из интервалов $(-1, 1)$ или $(1, +\infty)$.

4.5 Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина

Перейдем к вычислению траекторного инварианта $W^{*t}(Q_h^3, \mathbf{v})$. Поскольку молекулы в случае Горячева–Чаплыгина содержат только атомы вида A , A^* и B , то к этому случаю применима теория траекторной классификации простых систем, построенная в [11]. Согласно этой теории, траекторный инвариант W^{*t} состоит из трех компонент: $W^{*t} = (W^*, R, b)$, где W^* — меченая молекула, R — набор векторов вращения, а b — некоторый числовой инвариант. b -инвариант не несет в данном случае никакой дополнительной информации о траекторном поведении системы,

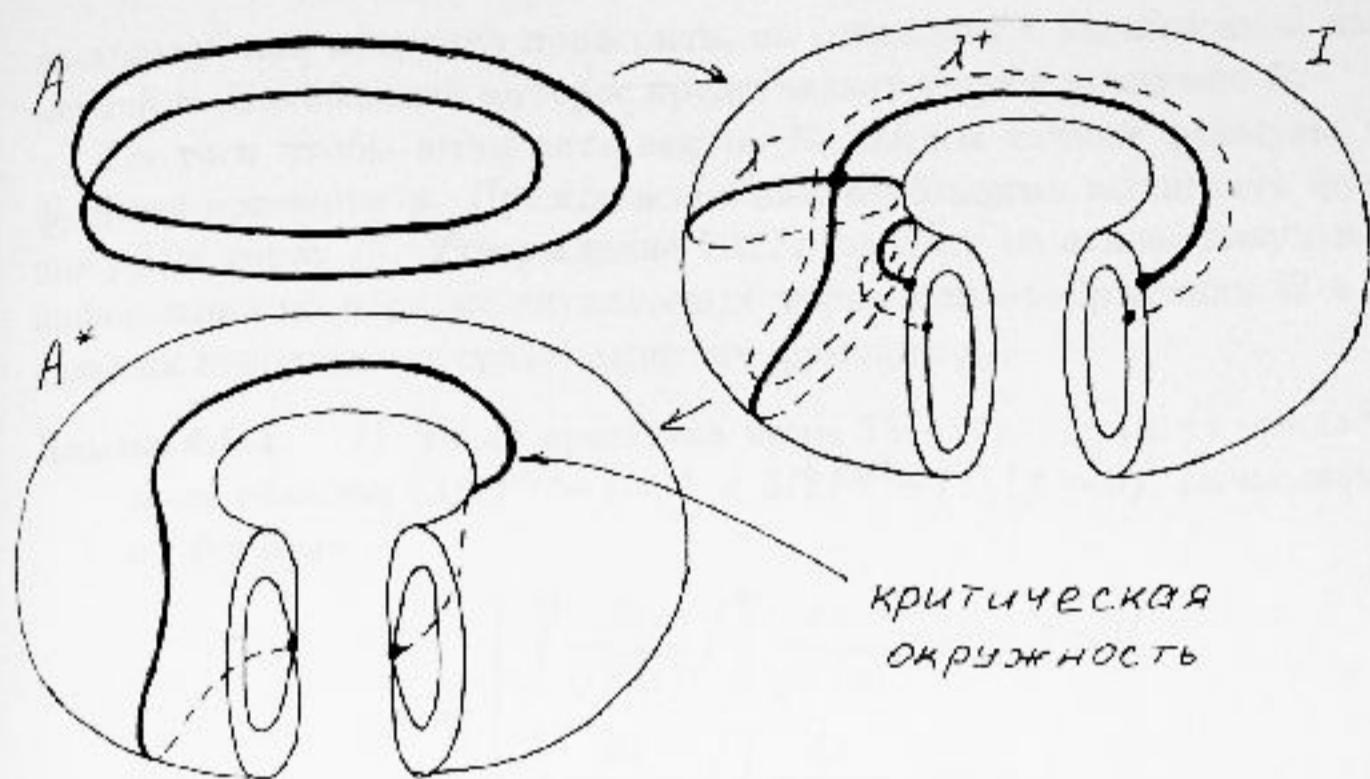


Рис. 15.

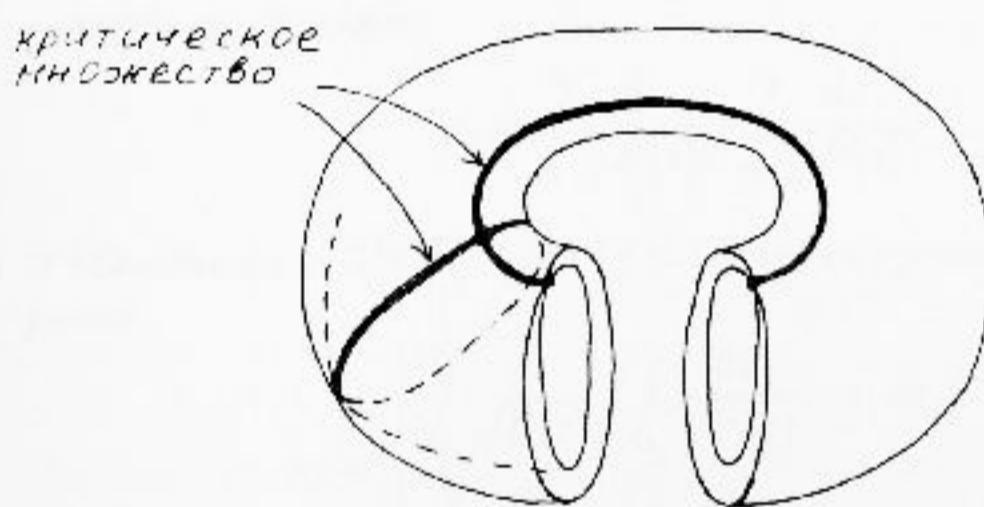


Рис. 16.

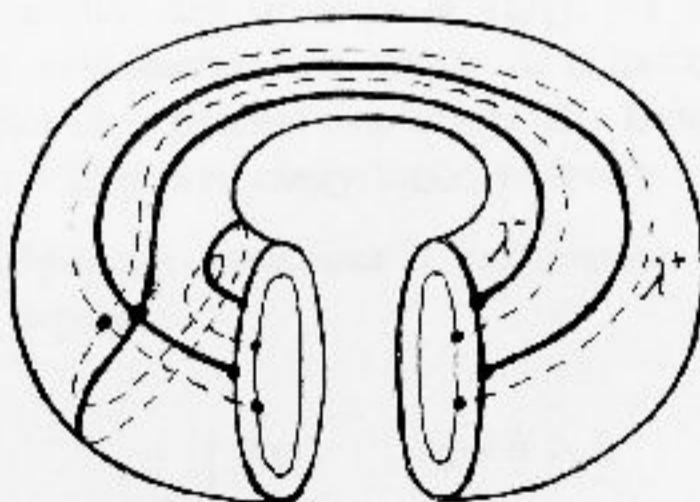


Рис. 17.

поскольку, как нетрудно проверить, он совпадает с вычисленной нами меткой n . Наибольший интерес представляет вектор вращения R .

Для того чтобы вычислить вектор R , найдем точные формулы для функции вращения ρ . Прежде всего нам необходимо вычислить функции ρ_J на торах T_J . Утверждение 1.4.3 позволяет на основе полученной информации об образах лиувиллевых торов при отображении G в локальных координатах сразу выписать функции ρ_J .

Лемма 4.5.1 1) Число вращения тора $T_J^I(h, f)$, где (h, f) принадлежит области $\{3/2f^{2/3}-1 < h < 3/2f^{2/3}+1\} \setminus \{f = 0\}$, вычисляется по формуле

$$\rho_J = \begin{cases} \int_{v_1}^{u_2} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \Big/ \int_v^{u_3} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, & \text{если } f > 0, \\ \int_{u_2}^{v_3} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \Big/ \int_{u_1}^v \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, & \text{если } f < 0. \end{cases}$$

2) В области $\{h > 3/2f^{2/3}+1\}$ число вращения тора $T_J^{III}(h, f)$ вычисляется по формуле

$$\rho_J = \int_{v_1}^{u_1} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \Big/ \int_{v_3}^{u_3} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}.$$

3) В области $\{h > 3/2f^{2/3}+1\} \setminus \{f = 0\}$ число вращения тора $T_J^{II}(h, f)$ равно

$$\rho_J = \begin{cases} \int_{v_2}^{u_2} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \Big/ \int_{v_3}^{u_3} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, & \text{если } f > 0, \\ \int_{u_2}^{v_2} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \Big/ \int_{u_1}^{v_1} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, & \text{если } f < 0. \end{cases}$$

Как было показано, для молекул $W^*(Q_h^3)$, $-1 < h < 1$, на ребре I цикл γ_2 является исчезающим на атоме A , а цикл $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ является критической седловой окружностью атома A^* . Используя двулистность накрытия G , легко доказать следующую теорему.

Теорема 4.5.1 Функция вращения ρ для случая Горячева–Чаплыгина вычисляется по формуле

1) на ребре I

$$\rho = \begin{cases} 2\rho_J & \text{при } h > 1, \\ \frac{\rho_J}{\rho_J - 1} & \text{при } -1 < h < 1, \end{cases}$$

2) на ребрах II, III

$$\rho = \rho_J.$$

Аналитически анализировать функцию вращения, заданную в таком виде, достаточно сложно. Поэтому анализ проводился при помощи компьютера. Линии уровня функции вращения ρ_J на ребрах I и II изображены на рис. 18. С помощью теории гиперэллиптических функций можно показать, что значения функций ρ на ребрах II и III отличаются на константу и поэтому линии уровня функции ρ на ребре III такие же, как и на ребре II. Из рисунка видно, что почти всюду функция вращения монотонна, за исключением небольшого участка $h \in (1, h_0)$, $h_0 \approx 1.2$, где возникает локальный экстремум на ребре I. На основе теоретического и компьютерного анализа можно сделать вывод, что вектора вращения на ребрах I, II и III имеют следующий вид:

$$R_{II} = (\infty, 0), \quad R_{III} = (\infty, 2),$$

$$R_I = \begin{cases} (\infty, 2R) & \text{при } h > h_0, \\ (\infty, 2R_t, 2R) & \text{при } 1 < h \leq h_0, \\ (\infty, \frac{2R}{R-1}) & \text{при } h \leq 1, \end{cases}$$

где график функции $R(h)$ построен на рис. 19, а R_t — небольшое возмущение, соответствующее локальному экстремуму функции вращения.

Ранее был сделан вывод, что системы, ограниченные на две различные поверхности уровня гамильтониана, траекторно неэквивалентны, если значение гамильтониана принадлежит разным зонам $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. Теперь мы можем ответить на вопрос, эквивалентны ли системы из одной зоны. Из рис. 19 видно, что зависимость R от h строго монотонная. Это означает, что траекторный инвариант $W^u(Q_h^3, \mathbf{v})$ для систем Горячева–Чаплыгина, соответствующих разным уровням h энергии, различен (он различается только вектором вращения для систем, лежащих в одной зоне). Таким образом, мы получили следующий

Экспериментальный результат. Динамические системы Горячева–Чаплыгина, ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.

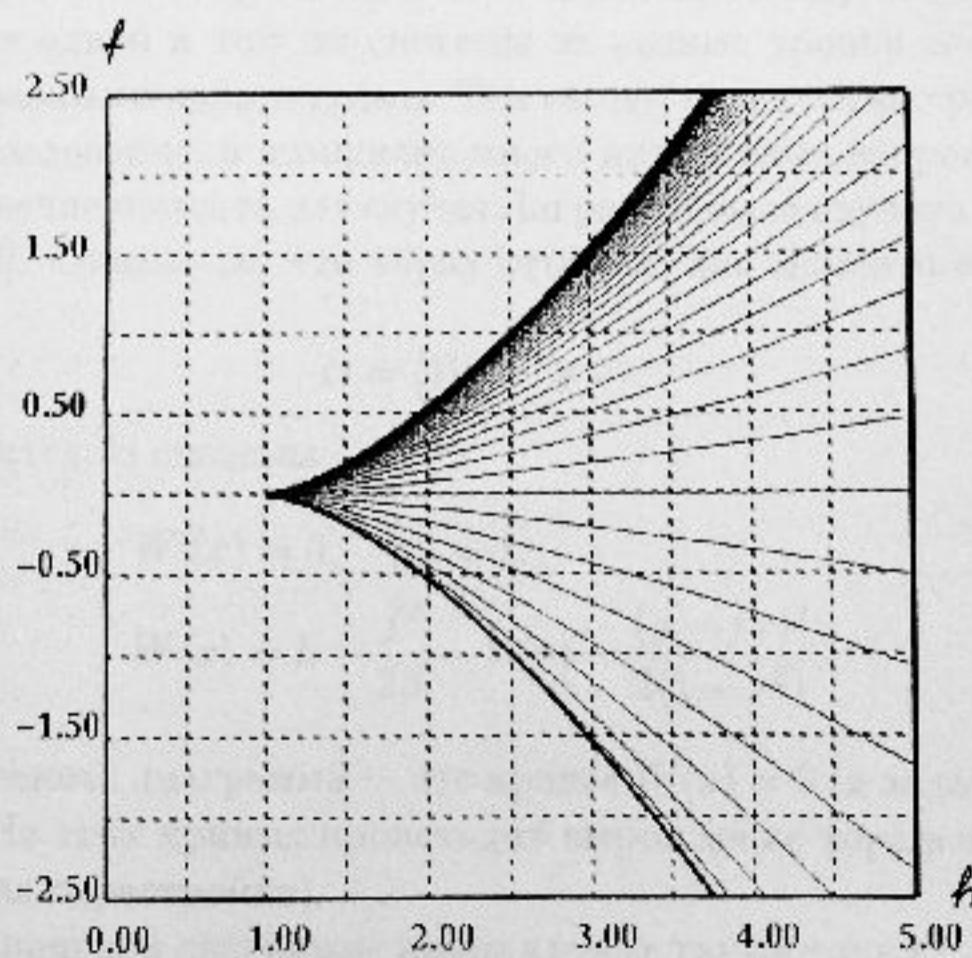
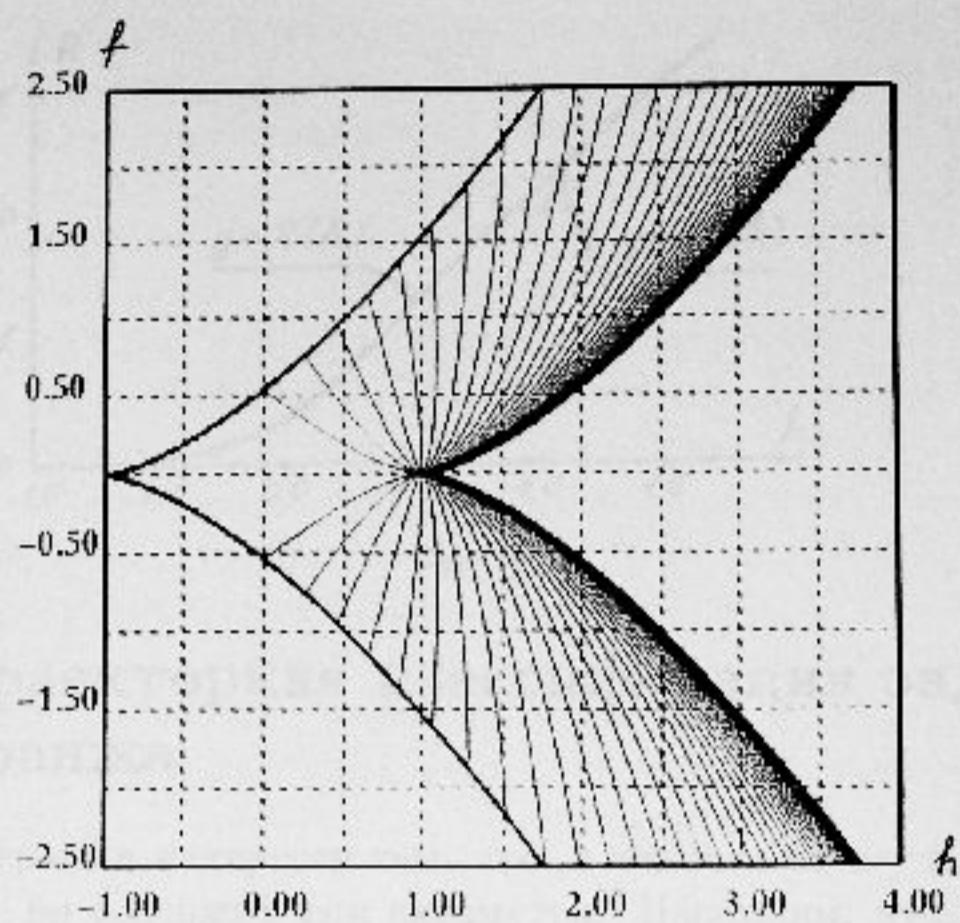


Рис. 18.

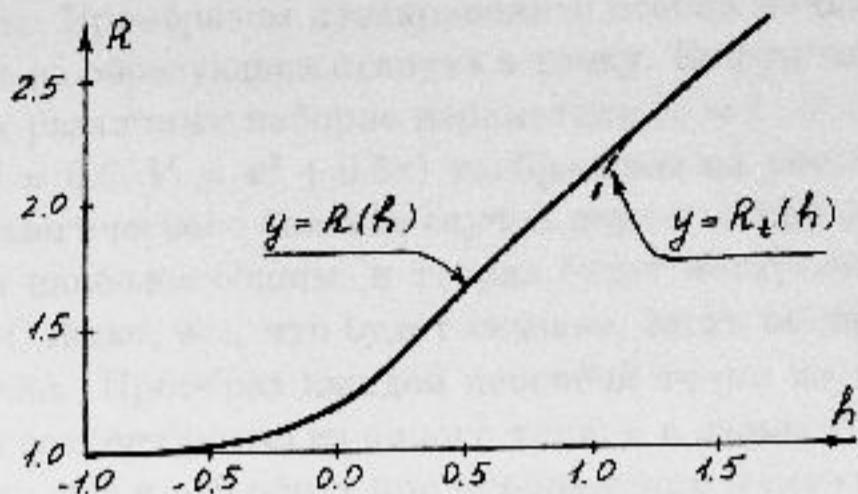


Рис. 19.

4.6 Траекторная классификация задач Лагранжа

Случай Лагранжа интересен тем, что, в отличие от случая Горячева Чаплыгина, он содержит три параметра. Напомним, что его параметрами являются постоянная площадей g , параметр β и гладкая выпуклая функция $V(x)$. Поэтому мы можем сравнивать между собой не только ограничения одной и той же системы на разные уровни энергии, но и системы с разными параметрами. Тем самым существенно расширяется область исследования, и возникает много интересных вопросов.

Отображение момента для случая Лагранжа было изучено А.А. Ошемковым в [42]. Оказалось, что образ отображения момента есть множество

$$D = \{W(x) \geq 0\},$$

где x находится из системы

$$W'(x) = 0, \quad |x| < 1,$$

$$W(x) = h - \frac{f^2}{2\beta} - V(x) - \frac{(g - fx)^2}{2(1 - x^2)},$$

а бифуркационная диаграмма — это кривая $W(x) = 0$ (x задается той же системой). На этих кривых происходит вырождение тора в окружность (минимаксная перестройка).

Бифуркационной диаграмме принадлежат также точки $P_1 = (g^2/2\beta + V(1), g)$ и $P_2 = (g^2/2\beta + V(-1), -g)$. При некоторых значениях параметров эти точки или одна из них лежат на кривой $W(x) = 0$, и тогда их прообраз в M^4 состоит из одной точки. При других параметрах они изо-

лированы. Прообразом изолированной особой точки будет тор, в котором одна из образующих сжата в точку. Бифуркационные диаграммы для двух различных наборов параметров ($g = 1, \beta = 0.5, V(x) = x + 1$ и $g = 1, \beta = 0.5, V = x^2 + 0.5x$) изображены на рис. 20, 21. С точки зрения топологического анализа случай двух изолированных особых точек является наиболее общим, и теория будет построена именно для этого случая. Однако, все, что будет сказано, легко обобщается и на остальные случаи. Прообраз каждой неособой точки из образа отображения момента состоит ровно из одного тора, и в дальнейшем будет удобно не различать тор и его образ при отображении момента.

Молекула для случая Лагранжа имеет простейший вид $A - A$. Хорошо известна лиувилева классификация этого случая. Результат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим три области на оси h : $\{h_0 < h < g^2/2\beta + v_l\}$, $\{g^2/2\beta + v_l < h < g^2/2\beta + v_r\}$ и $\{g^2/2\beta + v_r < h < \infty\}$, где h_0 — наименьшее значение H из области значений отображения момента, $v_l = \min(V(1), V(-1))$, $v_r = \max(V(1), V(-1))$ (некоторые области могут быть пустыми). Рассмотрим две гамильтоновы системы $\mathbf{v}_1 = \text{sgrad } H_1$ и $\mathbf{v}_2 = \text{sgrad } H_2$, где $H_i = H_i(\beta_i, V_i)$, $i = 1, 2$, на многообразиях $M_i^4 = \{f_1 = 1, f_2 = g_i\}$ соответственно.

Теорема 4.6.1 ([42]) *Две системы Лагранжа \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , ограниченные соответственно на 3-многообразиях $Q_{h_1}^3$ и $Q_{h_2}^3$, лиувилево эквивалентны тогда и только тогда, когда значения h_1 и h_2 лежат в одной области.*

Чтобы провести траекторный анализ случая Лагранжа, необходимо вычислить функцию вращения $\rho(h, f)$ и найти ее локальные экстремумы и пределы на концах ребер при всех фиксированных значениях гамильтониана H . Для вычисления функции вращения мы на этот раз воспользуемся явной формулой (1.1).

Лиувиллев тор хорошо виден в проекции многообразия M^4 в пространство $\mathbb{R}^3(r)$. При этом проекция тора представляет собой цилиндр $\{a \leq r_3 \leq b\}$ на сфере $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, где $a, b \leq 1$ — нули функции $W(r_3)$, а сама функция W строго больше нуля в интервале (a, b) . Это наглядное представление мотивирует выбор циклов на нем:

$$\gamma_1 = \{r_3^t = c\}, \quad \gamma_2 = \{s_2 = 0, s_1 > 0\}.$$

Отсюда легко понять, как циклы γ_1 и γ_2 меняются при движении по ребру молекулы. Оказывается, что при приближении к бифуркационной диаграмме цикл γ_1 превращается в критическую окружность, а цикл γ_2 вырождается в точку. Отметим также, что цикл γ_1 определен глобально

и гладко во всей области, а цикл γ_2 претерпевает резкую перестройку при переходе через кривые

$$(4.5) \quad h - \frac{f^2}{2\beta} - V\left(\frac{g}{f}\right) = 0, \quad |f| > g,$$

выходящие из точек P_1 и P_2 . Это не удивительно: детальный топологический анализ окрестности изолированной особой точки типа "фокус" (к этому типу относятся точки P_1 и P_2 , если они изолированы), выполненный В.С. Матвеевым [30], показывает, что при обходе вокруг этой точки цикл γ_1 не изменяется, а цикл γ_2 преобразуется в цикл $\gamma_2 \pm \gamma_1$ (в зависимости от направления обхода). Отсюда вытекает невозможность глобального выбора пары циклов на всех торах системы одновременно. Однозначно можно выбрать пару циклов только в односвязной области, т.е. в D без двух разрезов, выходящих из особых точек. При первоначальном выборе циклов роль разрезов выполняли кривые (4.5). Поскольку мы интересуемся поведением системы на изоэнергетических поверхностях, то более разумным оказывается следующий выбор циклов:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{r_3 = c\}, \\ \gamma_2 &= \begin{cases} \gamma + \gamma_1 & \text{при } \frac{g^2}{2\beta} + V(1) < h < \frac{f^2}{2\beta} + V\left(\frac{g}{f}\right), \quad f > g, \\ \gamma - \gamma_1 & \text{при } \frac{g^2}{2\beta} + V(-1) < h < \frac{f^2}{2\beta} + V\left(\frac{g}{f}\right), \quad f < -g, \\ \gamma & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma = \{s_2 = 0, s_1 > 0\}.$$

Прямым вычислением из формулы (1.2) получаем выражения для переменных действия:

$$\begin{aligned} I_1 &= F, \\ I_2 &= \begin{cases} I + F - g & \text{при } h > \frac{g^2}{2\beta} + V(1), \quad f > g, \\ I - F - g & \text{при } h > \frac{g^2}{2\beta} + V(-1), \quad f < -g, \\ I & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$(4.6) \quad I = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{(2H - F^2/\beta - 2V(x))(1 - x^2) - (g - Fx)^2}}{1 - x^2} dx.$$

В последней формуле a и b — два последовательных нуля функции $W(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, причем $W(x) > 0$ внутри отрезка $[a, b]$.

Замечание. При таком определении переменная I_2 является гладкой во всей области D значения отображения момента с удаленными вертикальными разрезами $\{h = g^2/(2\beta) + V(1), f > 1\}$ и $\{h = g^2/(2\beta) + V(-1), f < -1\}$. Переменные действия ранее были получены Аксененковой в [4] в виде $I_1 = F, I_2 = I$, где функция I определяется формулой (4.6). В таком случае переменная I_2 оказывается только непрерывной, но не гладкой.

Формула (1.1) дает выражение для функции вращения, которое после очевидных преобразований может быть приведено к виду $\rho = -(\partial I_2)(\partial F)$.

Эта функция является гладкой в области D без вертикальных разрезов, а на границе разрезов она изменяется скачком на единицу. Линии уровня функции вращения построены на рис. 20, 21 для двух различных наборов параметров ($g = 1, \beta = 0.5, V(x) = x + 1$ и $g = 1, \beta = 0.5, V = x^2 + 0.5x$). Там же для этих параметров изображен вектор вращения R как функция от h . Это совокупность двух, трех или четырех отдельных графиков, представляющих собой эволюцию локальных максимумов и минимумов и пределов функции ρ на бифуркационной диаграмме при изменении значений h . Эксперимент проводился для нескольких наборов параметров (порядка десяти), включая два рассмотренных примера. Для них были построены соответствующие графики $R(h)$. Во всех случаях справедлив следующий

Экспериментальный результат. Для рассмотренных примеров динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторио неэквивалентны.

Для произвольных наборов параметров ответ на этот вопрос неизвестен. Можно лишь сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 4.6.1 *Динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров с линейным или квадратичным потенциалом, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторио неэквивалентны.*

Интересен вопрос о том, эквивалентны ли между собой системы Лагранжа с различными параметрами. Смоделировать эту задачу на компьютере можно следующим образом. Пусть для простоты потенциал

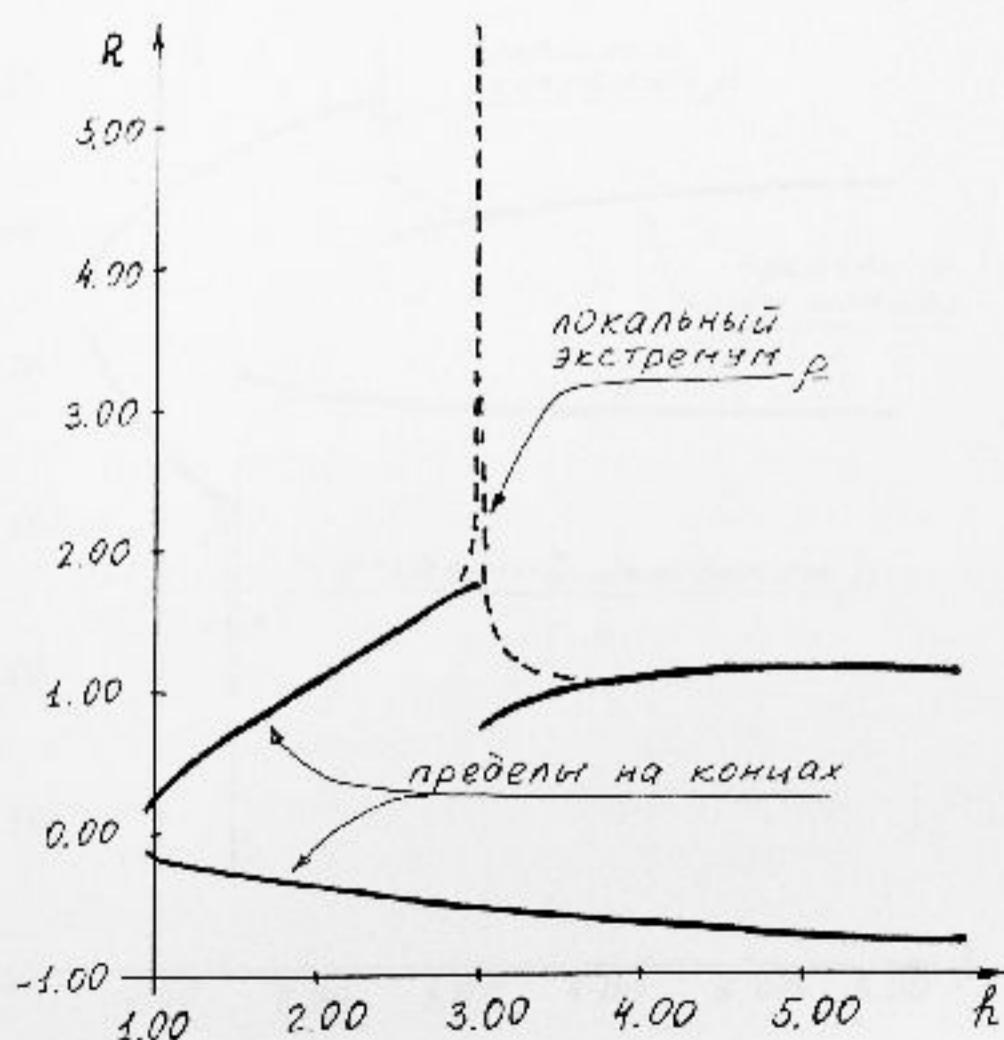
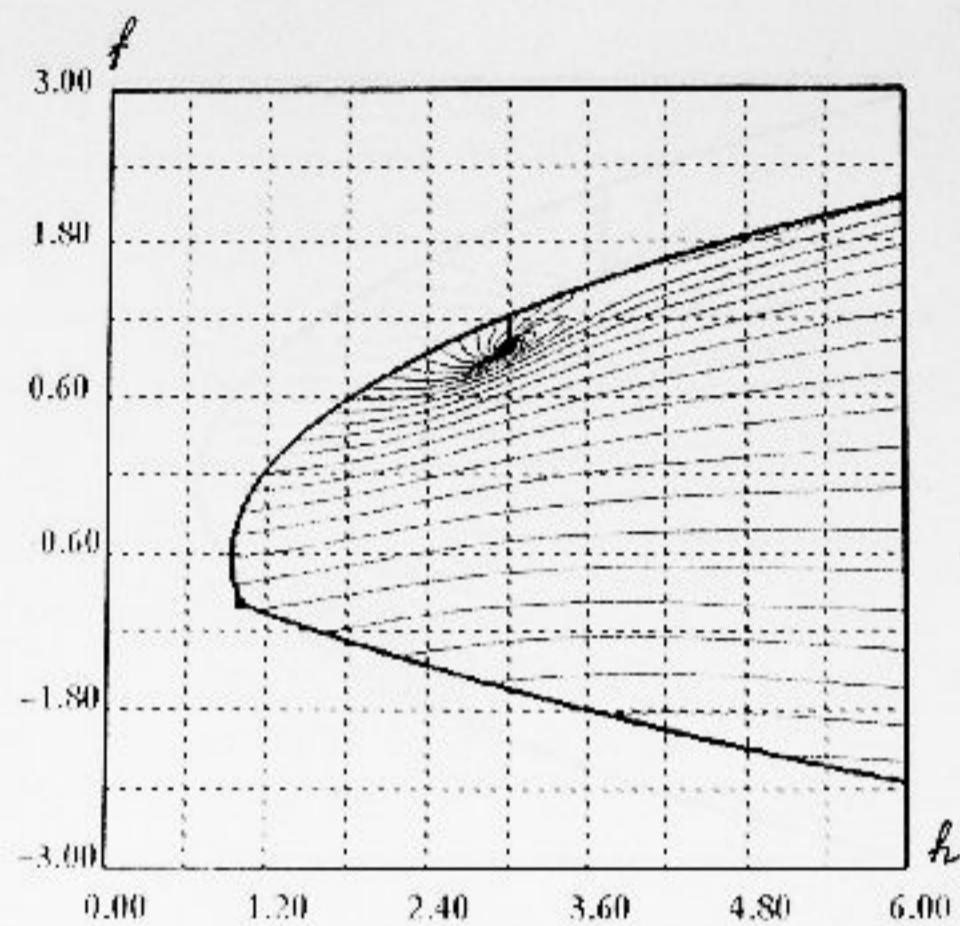


Рис. 20.

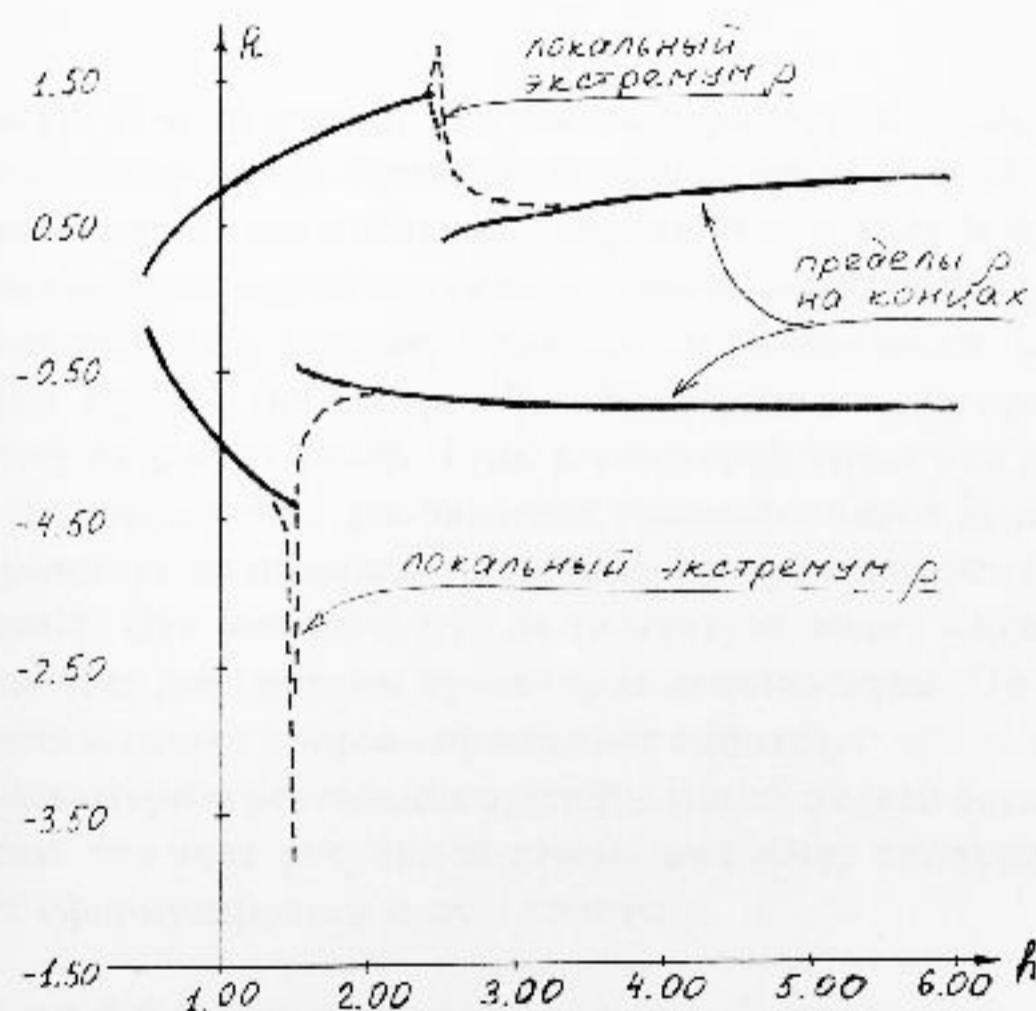
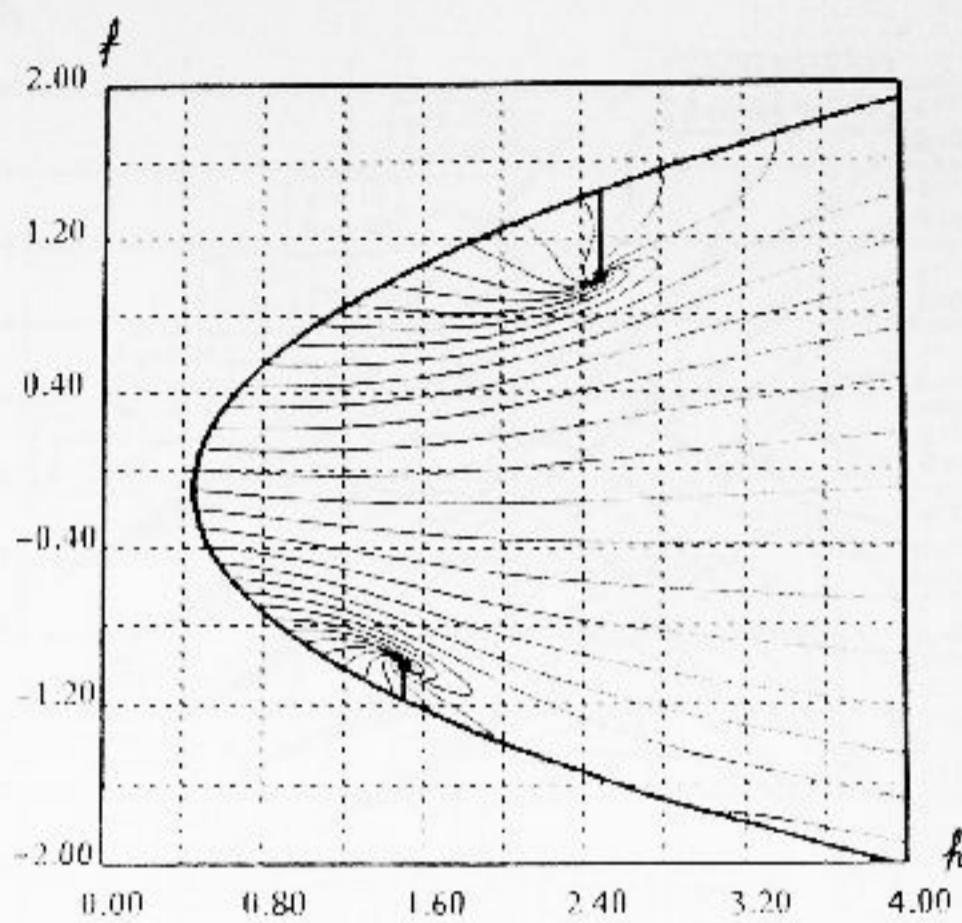


Рис. 21.

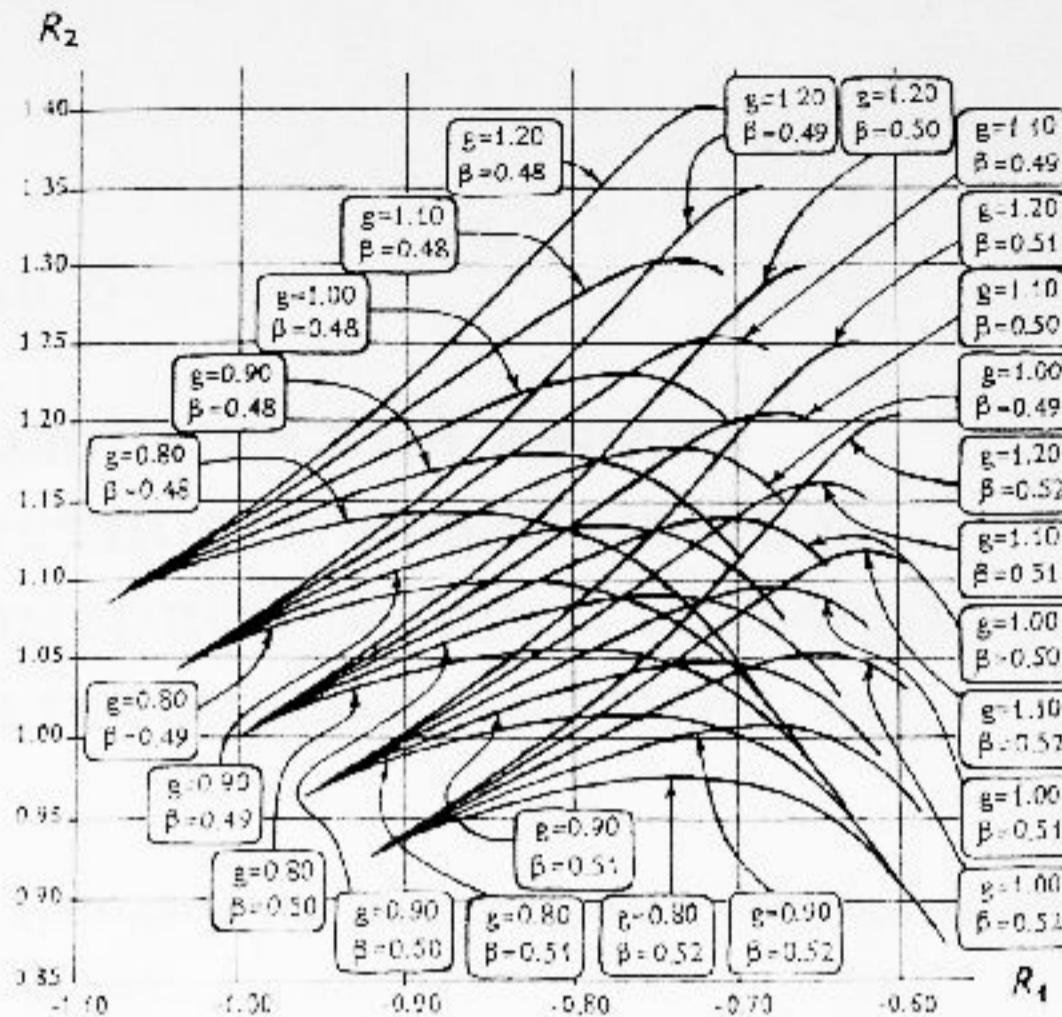


Рис. 22.

линеен ($V(x) = x$) и даны два набора параметров (g_1, β_1) и (g_2, β_2) , соответствующие гамильтонианы обозначим через H_1 и H_2 . В обоих случаях рассмотрим зону больших энергий, т.е. луч $h_i \geq h_0$, на котором функция вращения становится монотонной. В плоскости (R_1, R_2) мы можем построить две кривые, заданные параметрически: $(R_1(h_1), R_2(h_1))$ и $(R_1(h_2), R_2(h_2))$. Здесь через R_1 и R_2 обозначены два предела функции вращения на концах ребер. Если в некоторой точке эти кривые пересеклись, то существуют два значения гамильтонианов h_1 и h_2 , для которых траекторные инварианты данных систем с разными параметрами совпадают. Это означает, что на соответствующих изоэнергетических поверхностях две системы траекторно эквивалентны. Точно также, самопресекающаяся кривая опровергает гипотезу.

Компьютерная реализация представленной модели показана на рис. 22. Отметим, что этот рисунок подтверждает нашу гипотезу, а также позволяет сформулировать новую гипотезу.

Гипотеза 4.6.2 Динамические системы Лагранжа, отвечающие двум разным наборам параметров с линейным потенциалом, непрерывно траекторно эквивалентны не более, чем на одном уровне энергии.

Глава 5

Топологический анализ окрестности вырожденной одномерной орбиты интегрируемой гамильтоновой системы

5.1 Топология окрестности вырожденной орбиты

Пусть M^4 — симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система на этом многообразии с гладким гамильтонианом H , интегрируемая по Лиувиллю при помощи гладкого боттовского интеграла F . Пусть O — вырожденная компактная одномерная орбита пуассонова действия, $F(O) = y_0$ — образ орбиты при отображении момента. В настоящей главе исследуются вырожденные орбиты минимаксного типа, т.е. такие что $F^{-1}(y_0) = O$. Образ окрестности орбиты O выглядит на бифуркационной диаграмме так, как изображено на рис. 23.

В $\mathbb{R}^2 \supset F(M^4)$ рассмотрим шар $B_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(y, y_0) \leq \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε с центром в точке y_0 . Будем считать, что в прообразе этого шара $F^{-1}(B_\varepsilon)$ все неособые поверхности уровня интегралов H и F компактны. Рассмотрим трехмерную поверхность $Q_\varepsilon^3 = F^{-1}(S_\varepsilon)$, являющуюся прообразом границы этого шара. Поверхность Q_ε^3 расслоена на поверхности уровня интеграла $f_\varepsilon : Q_\varepsilon^3 \rightarrow S_\varepsilon$, $f_\varepsilon(x) = F(x)$, поэтому для данной поверхности определен топологический инвариант Фоменко-Цицанга $W^*(Q_\varepsilon^3, v)$.

А.В. Болсинов в работе [13] показал, что при малых ε изоэнергетическая поверхность Q_ε^3 диффеоморфна $S^2 \times S^1$. При этом если разрезать поверхность $Q_\varepsilon^3 = S^2 \times S^1$ по сфере $S^2 \times \{0 \bmod 2\pi\}$, то на получившемся



Рис. 23.

цилиндре $S^2 \times [0, 2\pi]$ можно ввести координаты (x, t) , $x \in S^2$, $t \in [0, 2\pi]$, так что $f_\varepsilon(x, t) = g(x)$, где g — некоторая функция Морса на S^2 .

Рассмотрим сферу $S^2 \times \{0 \bmod 2\pi\}$. Орбиты пуассонова действия пересекают S^2 по некоторым кривым. Будем называть эти кривые *следами орбит* на S^2 . Очевидно, что следы лиувиллевых торов гомеоморфны S^1 , а следами критических окружностей являются точки. Более того, если окружность является минимаксной, то точка изолирована, а если седловой, то точка является вершиной некоторого графа на сфере, ребра которого — следы двумерных орбит. В каждой вершине графа сходятся ровно четыре ребра. Таким образом, прообраз $F^{-1}(\Sigma \cap S_\varepsilon)$, где через Σ обозначена бифуркационная диаграмма, — это (несвязный) граф Γ на сфере S^2 . Связные компоненты графа Γ тоже будем называть графиками и обозначать Γ_i , графиками считаются и изолированные точки. В наших обозначениях имеем $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$. По-другому, на сфере S^2 возникает слоение на связные компоненты поверхностей уровня функции g , индуцированное лиувиллевым слоением Q_ε^3 . Полученное слоение также будем называть *лиувиллевым*.

В [13] показано, что изоэнергетическая поверхность Q_ε^3 получается умножением S^2 на отрезок $[0, 2\pi]$ и склейкой этого цилиндра по некоторому диффеоморфизму σ граничных сфер. При этом диффеоморфизм σ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) σ сохраняет ориентацию (т.е. $\deg \sigma = 1$);
- 2) σ сохраняет функцию g ;
- 3) прообраз шара B_ε при отображении момента F есть подмножество $D^3 \times S^1 \subset M^4$, поэтому σ продолжается до диффеоморфизма $\hat{\sigma}$ граничных шаров $D^3 \times \{0\} \rightarrow D^3 \times \{2\pi\}$, причем $\hat{\sigma}$ переводит в себя сферы $S_\rho = D^3 \cap Q_\rho^3$, где $0 < \rho \leq \varepsilon$.

Наша ближайшая задача — описать все морсовские функции g на сфере и диффеоморфизмы σ , удовлетворяющие свойствам 1)–3).

5.2 Структура графа на сфере и действие диффеоморфизма на графике

Определение. Гранью δ связного графа Γ_i назовем связную компоненту дополнения $S^2 \setminus \Gamma_i$. Разность $\partial\delta = \bar{\delta} \setminus \delta$ назовем границей грани δ . У тривиального одноточечного графа ровно одна одноточечная граница.

Графы Γ_i — это связные компоненты критических уровней функции g . Очевидно, что границы графов попарно связаны семействами однопараметрических неособых окружностей. Такие пары границ будем называть *смежными*. Лиувиллево слоение S^2 на линии уровня функции g можно закодировать с помощью молекул, вершинами (=атомами) которой являются графы Γ_i , а ребрами — семейства неособых окружностей. Так как при разрезании по любому циклу сфера распадается на две несвязные компоненты, то и молекула распадается на два несвязных куска при разрезании по любому ребру. Поэтому справедлива

Лемма 5.2.1 *Молекула, описывающая лиувиллево слоение сферы S^2 на линии уровня функции g , является деревом.*

Каждому связному графу Γ_i соответствует ровно один атом V , однако атому V может отвечать сразу несколько графов Γ_i , переходящих друг в друга при диффеоморфизме σ . Структурно можно представлять себе молекулу как дерево графа Γ , у которого отождествлены некоторые вершины Γ_i . Одновременно отождествляются и все ребра, выходящие из отождествленных вершин, все концы этих ребер и так далее. Таким образом, верна

Лемма 5.2.2 *Круговая молекула $W(Q_\varepsilon^3, \mathbf{v})$ является деревом.*

В дальнейшем будет удобно рассматривать дискретное действие группы Σ , порожденной σ , на множестве вершин, ребер и граней. Действие какого-либо элемента Σ на ребре (границе) будет называться *тривиальным*, если оно переводит это ребро (границу) в себя. При этом ребро (границу) будет называться *инвариантным*. Заметим, что действие не обязательно тривиально на множестве точек ребра (границы). Будем говорить, что элемент Σ действует на

графе Γ (или Γ_i) *тривиально*, если он тривиально действует на множестве всех вершин, граней и ребер графа.

Поскольку Σ действует на конечном множестве, то все орбиты действия этой группы замкнуты. Поэтому для границы ∂b любой грани b можно определить пару чисел $r_{\partial b} = (m, \varphi)_{\partial b}$ следующим образом. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — наименьшее натуральное число такое, что грань b (и, следовательно, ее граница ∂b) инвариантна относительно действия σ^m . Ориентация на S^2 определяет ориентацию на b . Обойдем b вдоль границы ∂b в положительном направлении и запомнем все ребра, принадлежащие ∂b , в том порядке, в каком они встречаются: r_1, \dots, r_n . Пусть ребро r_1 перешло в ребро r_k при действии σ^m . Тогда положим $\varphi = 2\pi(k-1)/n$. Таким образом, для каждой границы ∂b однозначно определена пара чисел $r_{\partial b} = (m, \varphi)_{\partial b}$.

Лемма 5.2.3 *Пусть диффеоморфизм σ переводит некоторый граф Γ_i в себя, причем действие σ на этом графе нетривиально. Пусть μ — число инвариантных граней, ν — число инвариантных вершин графа Γ_i . Тогда имеет место равенство $\mu + \nu = 2$. При этом пары r для всех границ будут следующими:*

- 1) при $\nu = 1$ для инвариантной границы $r = (1, \pi)$, а для всех остальных $r = (2, 0)$;
- 2) при $\nu = 2$ для всех границ $r = (2, 0)$;
- 3) при $\nu = 0$ для двух инвариантных границ пары r равны $(1, \varphi_0)$ и $(1, 2\pi - \varphi_0)$, где $\varphi_0 \neq 0$, а для оставшихся границ $r = (m, 0)$, где $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (n\varphi/2\pi) \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Докажем равенство $\mu + \nu = 2$. Неравенство $\mu + \nu \geq 1$ следует из того, что диффеоморфизм σ сферы S^2 в себя со степенью отображения 1 имеет неподвижную точку [29].

Пусть сначала $\nu \geq 1$. В инвариантной вершине сходятся ровно четыре ребра. Так как следы минимальных (максимальных) окружностей переходят в следы минимальных (максимальных) окружностей при действии σ , то σ^2 переводит каждое ребро, выходящее из инвариантной вершины, в себя. Очевидно, что σ^2 действует на графике Γ_i тривиально. Это означает, что дифференциал $d\sigma(p)$ есть поворот на угол π . Рассмотрим шар $B_\varepsilon(p)$, содержащий точки сферы, удаленные от p не более чем на ε . Диффеоморфизм σ может не переводить этот шар в себя. Однако можно построить новый диффеоморфизм σ' , совпадающий с σ в $S^2 \setminus B_{2\varepsilon}(p)$,

отличающийся от σ не более чем на $o(\varepsilon)$ внутри шара $B_{2\varepsilon}(p)$ и переводящий шар $B_\varepsilon(p)$ в себя. Тогда $S^2 \setminus \overline{B_\varepsilon(p)}$ — компакт, гомеоморфный диску и переходящий в себя при диффеоморфизме σ' . По теореме Брауэра внутри компакта существует неподвижная точка x отображения σ' . Если ε достаточно мало, то, очевидно, $x \notin B_{2\varepsilon}(p)$. Значит, x является неподвижной точкой и для диффеоморфизма σ , причем x отлична от p . Если x совпадает с вершиной, то $\nu \geq 2$, если x лежит внутри грани, то $\mu \geq 1$. На ребро эта точка не попадает, поскольку диффеоморфизм обязан сохранять направления возрастания и убывания функции g и, с другой стороны, по условию его действие нетривиально на графе.

Пусть теперь $\mu \geq 1$, и пусть δ — инвариантная грань. Рассмотрим след тора α , целиком лежащий в δ достаточно близко к ее границе. Диффеоморфизм σ сохраняет морсовскую функцию g и значит переводит этот след в себя. Пусть δ' — область на сфере, ограниченная α и целиком лежащая в δ . Тогда $\sigma(\delta') = \delta'$ и $\sigma(S^2 \setminus \delta') = S^2 \setminus \delta'$. Множество $S^2 \setminus \delta'$ гомеоморфно замкнутому диску, поэтому σ имеет неподвижную точку в $S^2 \setminus \delta'$. Так как σ по условию действует на графике, а значит и на границе $\partial\delta$ нетривиально, то в $\delta \setminus \delta'$ нет неподвижных точек. Отсюда можно сделать вывод, что неподвижная точка лежит в $S^2 \setminus \delta$. Эта точка либо лежит внутри грани, и тогда эта грань является инвариантной, либо является инвариантной вершиной графа. Следовательно, $\mu + \nu \geq 2$.

Из доказанного нетрудно вывести, что дискретное действие σ на множестве вершин, ребер и граней графа Γ ; сопряжено повороту. Поэтому $\mu + \nu = 2$. Используя этот факт, легко вычислить пары r для всех границ. Лемма доказана.

Лемма 5.2.4 Для любых смежных границ $\partial\delta_1$ и $\partial\delta_2$ пары $r_{\partial\delta_1}$ и $r_{\partial\delta_2}$ связаны следующим образом: $m_1 = m_2$, $\varphi_1 = (2\pi - \varphi_2) \bmod 2\pi$.

Доказательство. Если граница $\partial\delta_1$ переходит в себя под действием σ^{m_1} , то и смежная граница $\partial\delta_2$ переходит в себя под действием того же диффеоморфизма σ^{m_1} . Следовательно, $m_2 \leq m_1$. Под действием σ^{m_2} граница $\partial\delta_2$ переходит в себя и, следовательно, $\partial\delta_1$ переходит в себя. Получаем обратное неравенство $m_1 \leq m_2$. Следовательно, $m_1 = m_2$.

Докажем второе равенство. Диффеоморфизм σ переводит в себя грани $\partial\delta_1$ и $\partial\delta_2$. Так же как и в лемме 5.2.3, доказывается существование неподвижных точек в областях $S^2 \setminus \delta_1$ и $S^2 \setminus \delta_2$. Диффеоморфизм σ^{m_1} продолжается до диффеоморфизма шара D^3 в себя, причем σ^{m_1} переводит в себя каждую сферу S_ρ^2 , $0 < \rho \leq \varepsilon$. На каждой сфере имеем график Γ_ρ , гомеоморфный Γ и непрерывно зависящий от ρ . Поскольку пары r

принимают только дискретные значения, то на каждом семействе $\partial\delta_{i,\rho}$ пары $r\delta_{i,\rho}$ постоянна. Рассмотрим малую окрестность нуля в D^3 . В этой окрестности диффеоморфизм имеет вид $\sigma^{m_1}(x) = A^{m_1}x + o(x)$, где A — матрица Якоби. Можно пренебречь членом $o(x)$ и рассматривать вблизи нуля диффеоморфизм σ^{m_1} как просто линейное преобразование. Рассмотрим сферу S_ρ^2 внутри этой окрестности и кривые $\partial\delta_{1,\rho}, \partial\delta_{2,\rho}$ на ней. Если $\varphi_1 \neq 0$ или $\varphi_2 \neq 0$, то неподвижные точки расположены в направлении собственного вектора преобразования A^{m_1} . Так как кривые $\partial\delta_{1,\rho}$ и $\partial\delta_{2,\rho}$ переходят в себя при σ^{m_1} , то у преобразования A^{m_1} есть инвариантное подпространство — плоскость. Так как существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что σ^{km_1} переводит вершины границы $\partial\delta_{1,\rho}$ в себя, то $A^{km_1} = E$, т.е. A^{m_1} в некотором, быть может, неевклидовом, базисе есть поворот на угол φ вокруг неподвижной оси. Но тогда $\varphi_1 = \varphi = 2\pi - \varphi_2$ или $\varphi_2 = \varphi = 2\pi - \varphi_1$ (равенство $\varphi_1 = (2\pi - \varphi_2) \bmod 2\pi$ обусловлено различной ориентацией смежных границ). Лемма доказана.

Из двух этих лемм вытекает

Следствие 5.2.1 *Дискретное действие диффеоморфизма σ на графе Γ сопряжено повороту.*

Таким образом, существует глобальное расслоение Зейферта поверхности Q_ε^3 над сферой S^2 , причем особые слои этого расслоения проектируются в “полюса” вращения σ и имеют тип $(\varphi/(2\pi), m)$ и $(1 - \varphi/(2\pi), m)$.

5.3 Теоремы о лиувиллевом инварианте

Теорема 5.3.1 *Меченая круговая молекула $W^*(Q_\varepsilon^3, v)$, описывающая лиувиллево слоение вырожденной компактной одномерной орбиты, имеет вид дерева; общее число звездочек на всех атомах не превосходит 2. Все атомы имеют тип поверхности S^2 . На всех ребрах, соединяющих атомы, отличные от A , r -метка равна ∞ . Далее возможен один из четырех вариантов:*

- 1) в простейшем случае молекула имеет вид $A - A$;
- 2) если молекула не содержит ни одной звездочки, то либо на всех ребрах $A \rightarrow V_i$ r -метка равна нулю, либо существуют ровно два ребра, для которых $r \neq 0$, причем для одного из них $r = p/q$, а для другого $r = 1 - p/q$ (рис. 24a);

- 3) если молекула содержит одну звездочку, то существует ровно одно ребро $A - V_i$ для которого $r = 1/2$, на всех остальных ребрах $A - V_i$ r -метка равна нулю (рис. 24б);
- 4) если молекула содержит две звездочки, то на всех ребрах $A - V_i$ r -метка равна нулю (рис. 24в).

Метки ϵ на всех ребрах равны 1. Кроме того, в тех случаях, когда в молекуле все метки r равны 0 или ∞ , метка p равна нулю. В остальных случаях p -метка равна -1.

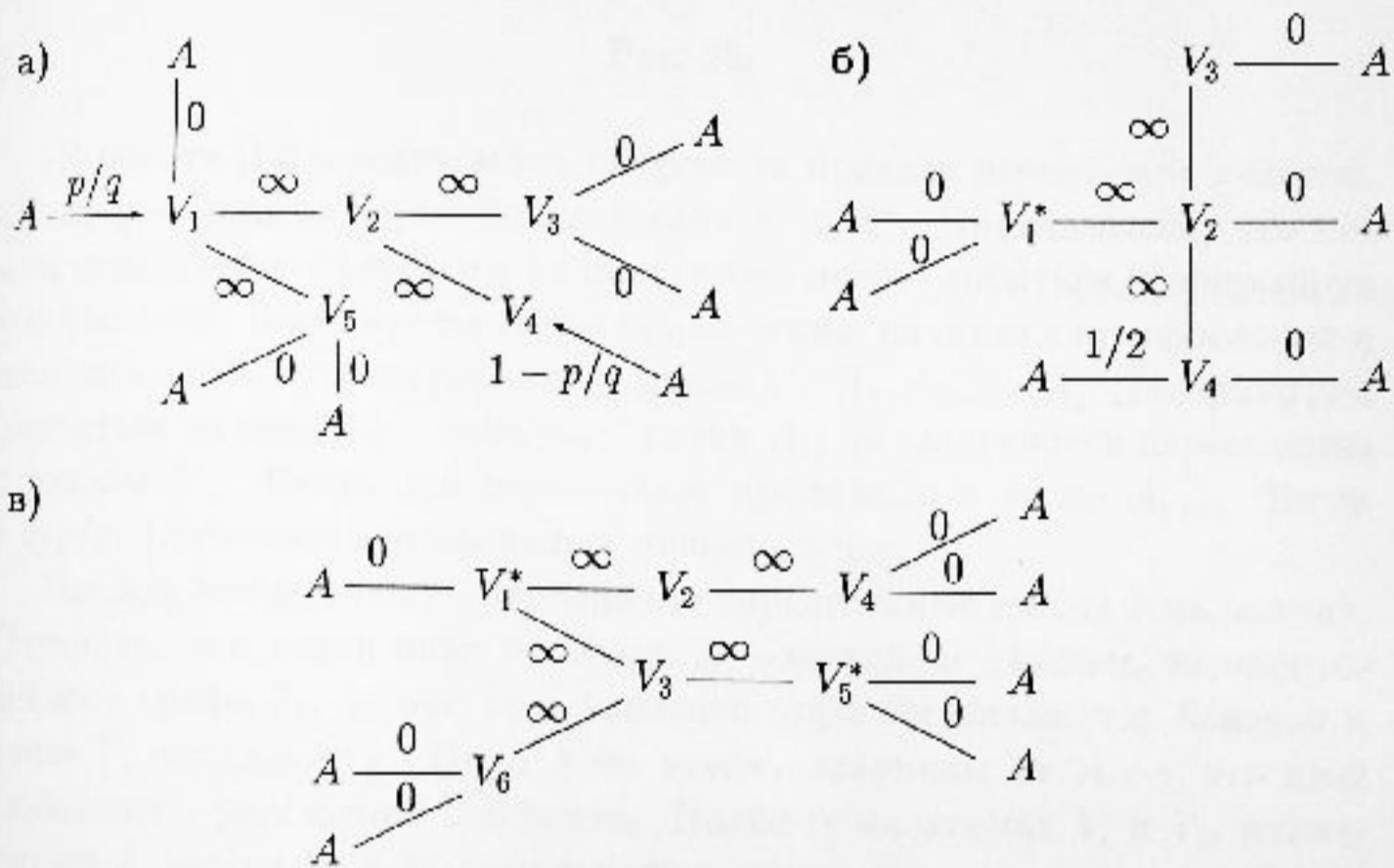


Рис. 24.

Замечание. Ориентация ребер указана там, где она существенна.

Доказательство. Каждая звездочка в молекуле соответствует инвариантной вершине нетривиального графа при нетривиальном действии σ на вершинах графа Γ . Так как при нетривиальном действии σ существуют ровно две неподвижные точки, то и звездочек не может быть больше двух. По лемме 5.2.2 молекула имеет вид дерева. Утверждение о типе поверхности очевидно: фактор графа Γ , вложенного в сферу S^2 , по действию σ дает сферический граф.

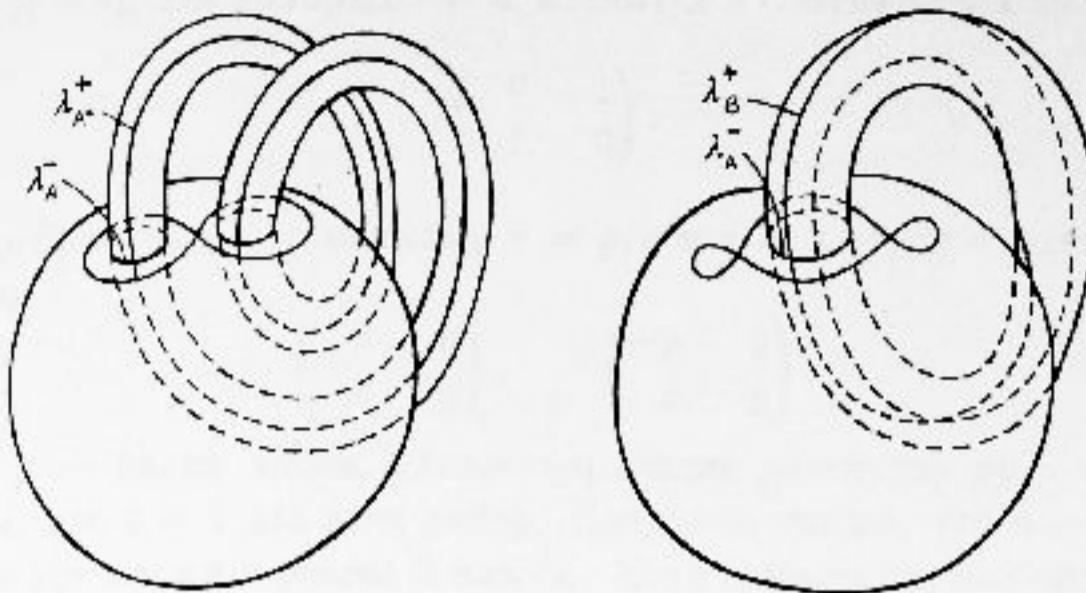


Рис. 25.

В работе [13] предлагается следующее правило вычисления r -меток. Пусть q — индекс пересечения циклов λ^- и λ^+ . Предположим, что циклы пересекаются ровно в q точках (этого можно добиться, деформируя один из них). Занумеруем точки пересечения, начиная с произвольной и двигаясь вдоль ориентированного цикла λ^- : A_1, A_2, \dots, A_q . Теперь будем двигаться по циклу λ^+ , начиная с точки A_1 , до следующего пересечения с циклом λ^- . Пусть это пересечение произошло в точке A_{p+1} . Тогда $r = p/q$. Применим это правило в нашем случае.

Прежде всего, опишем однозначно определенные циклы λ на атомах. Очевидно, что такой цикл на атоме A , возникшем, скажем, из одноточечного графа Γ_i , — это след близкого тора Лиувилля, т.е. близкая к точке Γ_i окружность. Цикл λ на атоме, отличном от A , — это слой глобального расслоения Зейферта. Поэтому на атомах V_i и V_j , отличных от A , циклы λ^- и λ^+ гомологичны; следовательно, на ребрах $V_i - V_j$ имеем $r = \infty$. На ребрах $A \rightarrow V_i$, применяя указанное правило, получаем $r = \varphi/(2\pi)$, где φ — вторая координата пары p , соответствующей атому A (рис. 25). В силу леммы 5.2.3 отсюда следует часть теоремы, относящаяся к r -меткам.

Вычислим теперь метки ε и n . Для этого выпишем все матрицы перехода от одной системы допустимых координат к другой на граничных торах. Один из возможных вариантов следующий: каждому ребру $V_i - V_j$ (где V_i, V_j отличны от A) сопоставляется матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ребрам $A - V_i$, для которых $r = 0$, ставится в соответствие матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, ребрам $A - V_i$ с метками $r = p/q$ и $r = 1 - p/q$ соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p & q \\ x & -y \end{pmatrix},$$

где x и y — целые числа, удовлетворяющие равенству $py - qx = -1$. Находим, что $\varepsilon = 1$ для всех ребер. Получаем также, что $n = 0$, если в молекуле все метки r равны 0 или ∞ . Если в молекуле нет звездочек и существуют значения r , отличные от 0 и ∞ , то

$$n = \left[\frac{y}{q} \right] + \left[-\frac{y}{q} \right] = -1.$$

Если в молекуле ровно одна звездочка, то ребру $A \rightarrow V_i$ с меткой $r = 1/2$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, метка n равна -1 . Теорема доказана.

Теорема 5.3.2 Любая молекула, удовлетворяющая условию теоремы 5.3.1 и не содержащая двух звездочек на одном атоме, реализуется как некоторая круговая молекула для окрестности вырожденной компактной одномерной орбиты O минимаксного типа. Молекула, содержащая атом вида V^{**} , не реализуется.

Доказательство. Наша цель — построить симплектическое многообразие M^4 и гамильтонову систему $\mathbf{v} = s\text{grad } H$, интегрируемую при помощи дополнительного интеграла F . При этом на M^4 должна существовать вырожденная одномерная орбита O пуассонова действия, такая что $F^{-1}(F(O)) = O$, причем круговая молекула для этой орбиты должна описываться молекулой, удовлетворяющей условию теоремы.

Шаг 1. На данном этапе нам удобно будет работать не со сферой S^2 , а с плоскостью \mathbb{R}^2 , к которой добавлена бесконечно удаленная точка: $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. По данной молекуле, удовлетворяющей условию теоремы, научимся реализовывать некоторый граф на плоскости.

Пусть сначала молекула не имеет звездочек, и существует два ненулевых значения r : $r = p/q$ и $r = 1 - p/q$. В молекуле выбираем единственную (так как молекула — дерево) цепочку, соединяющую атомы A , на ребрах которых стоят метки $r \neq 0$. Пусть эта цепочка имеет вид, как на рис. 26.



Рис. 26.

Пусть $\partial_{V_1}^1$ — граница атома V_1 , по которой происходит склейка $A \rightarrow V_1$, а $\partial_{V_1}^2$ — граница, по которой склеиваются атомы V_1 и V_2 . Рассмотрим ту реализацию атома V_1 на плоскости, при которой граница $\partial_{V_1}^2$ является внешней, а граница $\partial_{V_1}^1$ охватывает точку $(0, 0)$. Далее, для атома V_2 пусть $\partial_{V_2}^1$ — та граница атома V_2 , которой соответствует ребро $V_1 - V_2$, а $\partial_{V_2}^2$ — та граница, которой соответствует ребро $V_2 - V_3$. Реализуем атом V_i на плоскости так, чтобы внутри $\partial_{V_i}^1$ находился атом V_{i-1} , а граница $\partial_{V_i}^2$ была внешней. Продолжаем это построение вдоль всей цепочки до атома V_k включительно. После этого последовательно реализуем атомы $V_i \neq A$, $i > k$, соединенные ребрами с уже построенными атомами, причем границы, которым соответствует склейка атомов, должны быть смежными. Далее реализуем все атомы A , кроме тех двух, которые принадлежат цепочке. Атом A , связанный с V_1 , реализуем в начале координат, а атом A , связанный с V_k , пока реализовывать не будем. Пусть K — граф на плоскости, являющийся объединением всех графов, вложенных в реализованные атомы. Многозначное отображение $z \rightarrow z^{1/q}$ плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ в себя переводит построенный граф K в некоторый граф Γ . Это несвязный граф, в каждой вершине графа сходятся ровно четыре ребра, кроме того, он переходит в себя при повороте плоскости на угол $\varphi = 2\pi r/q$. В том случае, если $r = 0$ для всех ребер $A - V_i$, цепочку выбираем произвольным образом. Построение графа Γ до преобразования плоскости аналогично, преобразование плоскости в данном случае делать не надо, и угол φ считается равным нулю. Пример реализации молекулы показан на рис. 27.

Пусть молекула имеет одну звездочку. Тогда выбираем цепочку, соединяющую атом V^* с атомом A , на ребре которого стоит метка $r = 1/2$ (рис. 28). Реализацию графа, соответствующего молекуле, начинаем с атома V^* , причем атом V^* реализуем на плоскости так, чтобы звездочка

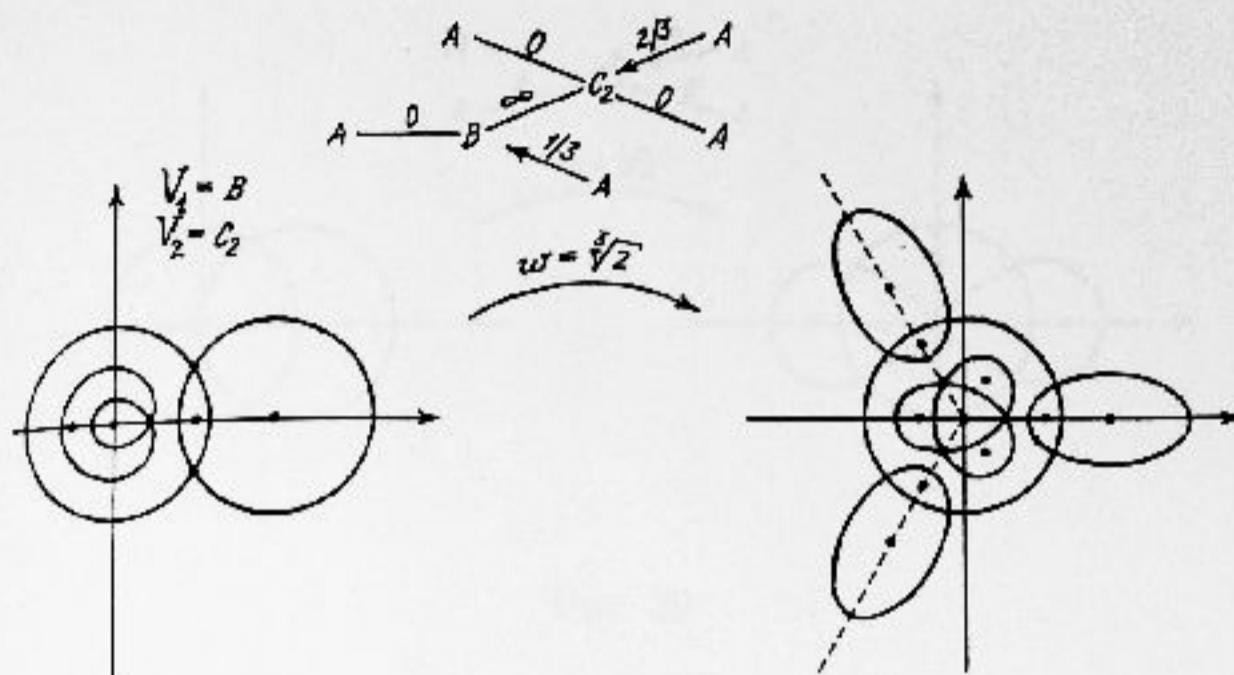


Рис. 27.

попала в начало координат, а граница, соответствующая ребру $V^* - V_1$, была внешней. Далее производим построение графа по алгоритму, описанному ранее. Преобразование $z \rightarrow \sqrt{z}$ переводит этот граф в граф Γ , инвариантный относительно поворота на угол $\varphi = \pi$ (рис. 29).

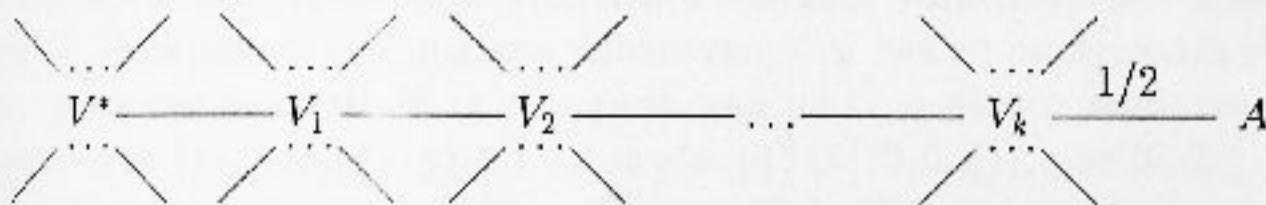


Рис. 28.

Если молекула имеет две звездочки на разных атомах, то выбираем цепочку, связывающую атомы V_1^* и V_2^* , разрываем ее в любом месте и две части молекулы реализуем по предыдущему алгоритму в виде графов Γ' и Γ'' на разных экземплярах плоскости \mathbb{R}^2 .

Сожмем теперь построенный граф Γ так, чтобы он целиком помещался в круге $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Так же поступим с графиками Γ' и Γ'' .

Шаг 2. Пусть мы имеем один граф Γ . Построим морсовскую функцию g в области D так, чтобы граф Γ совпадал с прообразом всех критических значений функции g . Кроме того, g должна быть инвариантна относительно поворота плоскости на угол φ и удовлетворять условию

$$g(x, y) > 1, \quad (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2 \leq 1 \quad \forall (x, y) \in D,$$

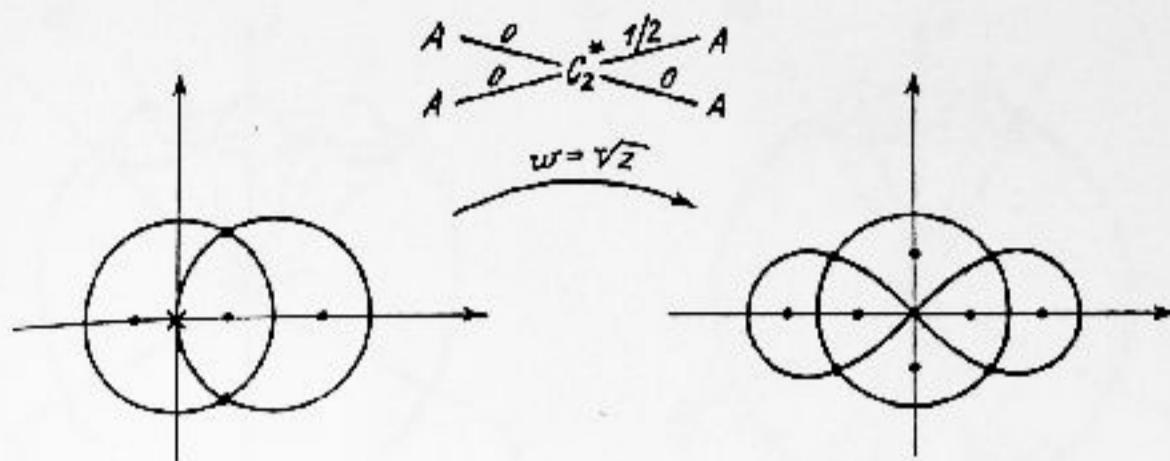


Рис. 29.

где символами g_1 и g_2 обозначены частные производные функции g по первому и второму аргументам.

В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим поверхность G , заданную уравнением $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, и достроим ее до гладкой замкнутой поверхности \tilde{G} , гомеоморфной сфере и инвариантной относительно поворота вокруг оси z на угол φ . Поверхность \tilde{G} должна охватывать точку $(0, 0, 0)$ и прямые, проходящие через начало координат, должны пересекать ее трансверсально. Последнее условие, очевидно, выполнено для поверхности G . Поверхность \tilde{G} должна удовлетворять также следующим условиям: функция высоты $H = z$ морсовская на \tilde{G} и имеет особенности на множестве $\{(x, y, z) | (x, y) \in \Gamma, z = g(x, y)\} \cup \{(0, 0, \xi)\}$, где $(0, 0, \xi)$ — самая нижняя точка поверхности \tilde{G} (рис. 30а). Из теории Морса следует, что такая поверхность существует.

Каждой точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ поставим в соответствие число $t > 0$, такое что точка $(x/t, y/t, z/t)$ лежит на поверхности \tilde{G} . Положим также $t(0, 0, 0) = 0$. То смыслу t играет роль расстояния r до начала координат. Как и r , t является функцией, непрерывной в \mathbb{R}^3 и гладкой в $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Некоторого пояснения требует лишь факт гладкости t в конусе с вершиной $(0, 0, 0)$, пронизывающем поверхность G . Здесь t определяется из уравнения

$$\Phi(x, y, z, t) = g(x/t, y/t) - z/t = 0.$$

По теореме о неявной функции для установления гладкости t достаточно показать, что производная Φ по t отлична от нуля. Дифференцируя по

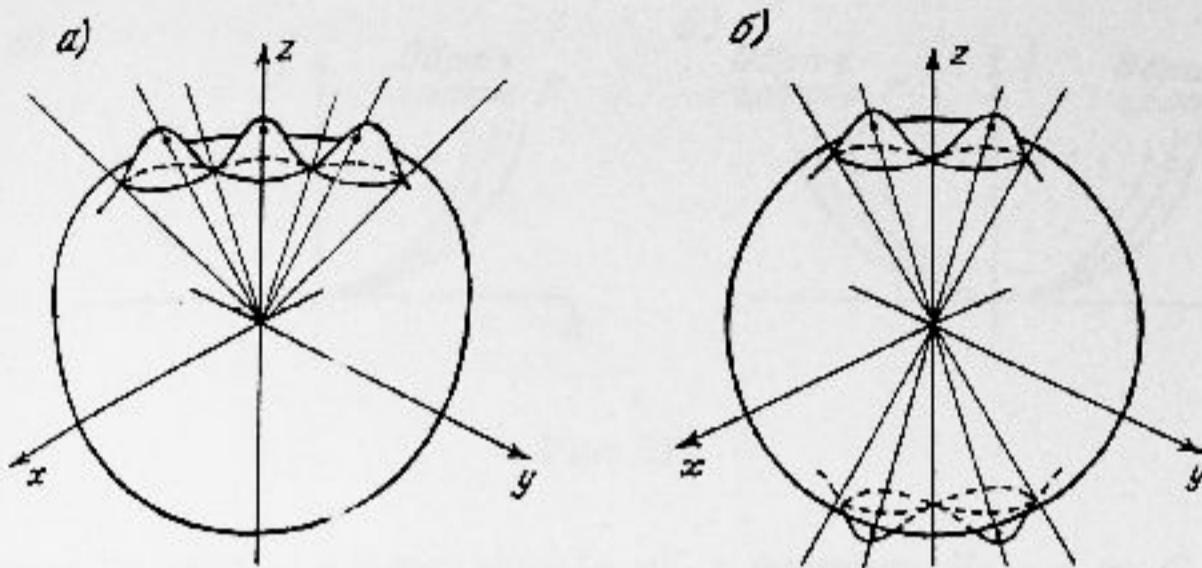


Рис. 30.

t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= g_1\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)\left(\frac{-x}{t^2}\right) + g_2\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)\left(\frac{-y}{t^2}\right) + \frac{z}{t^2} = \frac{1}{t}\left(g - \left(\frac{x}{t}\right)g_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{y}{t}\right)g_2\right) \geqslant \frac{1}{t}\left(g - \sqrt{(x/t)^2 + (y/t)^2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\right) > \frac{1}{t}(1 - 1 \cdot 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, производная $\partial\Phi/\partial t$ всюду положительна, что доказывает гладкость функции $l(x, y, z)$.

Положим $S_1 = \tilde{G}$, $S_t = \{(tx, ty, tz) \mid (x, y, z) \in S_1, t \in [0, 1]\}$, $D^3 = \cup_{t \in [0, 1]} S_t$. Зададим на D^3 функции $H = z$, $F = \exp(-1/t^2)$. Гладкость функции $F(x, y, z)$ в $D^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ вытекает из гладкости экспоненты и функции $t(x, y, z)$. Точка $(0, 0, 0)$ соответствует значение $t = 0$, а $\exp(-1/t^2)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $t = 0$. Поэтому $F(x, y, z)$ — гладкая в D^3 функция.

Если мы имеем два графа Γ' и Γ'' , то построим две морсовские функции g' и g'' на D с особенностями на графах Γ' и Γ'' соответственно. Эти функции должны быть инвариантны относительно поворота плоскости на угол π и должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} (g'_1(x, y))^2 + (g'_{2'}(x, y))^2 &\leq 1, \quad g'(x, y) > 1 \quad \forall (x, y) \in D, \\ (g''_1(x, y))^2 + (g''_{2''}(x, y))^2 &\leq 1, \quad g''(x, y) < -1 \quad \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Имеем две поверхности в \mathbb{R}^3 : $G'(x, y) = \{z = g'(x, y), (x, y) \in D\}$, $G''(x, y) = \{z = g''(x, y), (x, y) \in D\}$. Склейм теперь эти поверхности при помощи цилиндра так, чтобы получилась поверхность \tilde{G} , гомеоморфная сфере. Как и раньше, \tilde{G} охватывает точку $(0, 0, 0)$, переходит в себя при

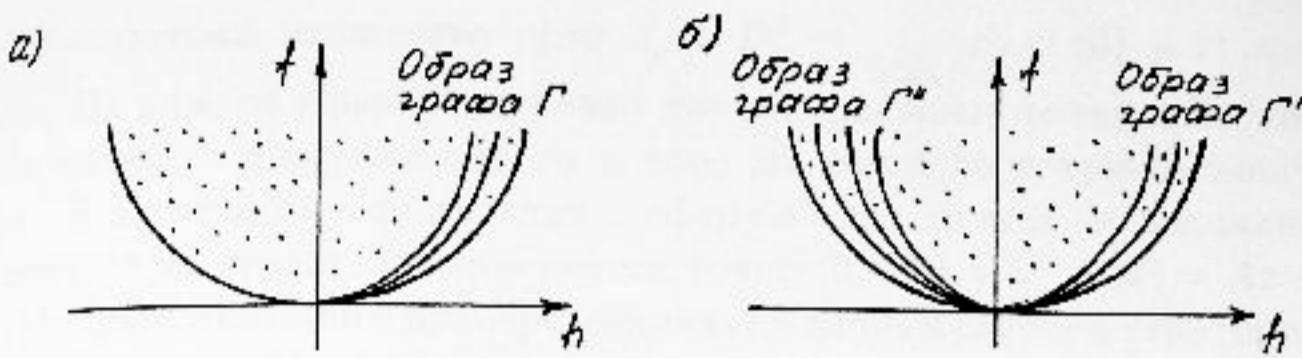


Рис. 31.

повороте на угол φ в плоскости (x, y) , и функция $H = z$ на \tilde{G} имеет морсовскую особенность на графах Γ' и Γ'' (рис. 30б). Далее построение сфер $S(1)$, шара D^3 и функций H и F на нем аналогичны.

Рассмотрим цилиндр $C = D^3 \times [0, 2\pi]$ и зададим на нем дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge d\psi$, где ψ — координата на $[0, 2\pi]$. На C определим функции, как выше, т.е. положим $H = z$, $F = \exp(-1/t^2)$. Склейм теперь основания цилиндра по диффеоморфизму σ , являющемуся поворотом D^3 вокруг оси z на угол φ . Результат склейки и есть искомое многообразие M^4 . Форма ω инвариантна относительно поворота в плоскости (x, y) , поэтому она определена глобально. Очевидно, что построенные функции коммутируют: $\{H, F\} = 0$. Для пары функций H и F окружность $(0, 0, 0) \times S^1$ является вырожденной одномерной орбитой пуассонова действия. Прообраз σ при отображении момента — это в точности $(\Gamma \cup \{(0, 0, \xi)\}) \times S^1$ (или $(\Gamma' \cup \Gamma'') \times S^1$). Круговая молекула для вырожденной орбиты имеет вид, указанный в условии теоремы. Бифуркационная диаграмма в нашем случае представлена на рис. 31а, б. Заметим, что бифуркационные диаграммы построены для описанной в тексте реализации молекулы. При другой реализации бифуркационная диаграмма может измениться.

Докажем теперь, что молекулы, содержащие атом вида V^{**} , не реализуются. Для этого вернемся к построению шара D^3 такого, что $M^4 \approx D^3 \times S^1$ в окрестности орбиты. В [13] показано, что при условии $dF(x_0) = 0$, $dH(x_0) \neq 0$ существует каноническая система координат (p_1, p_2, q_1, q_2) в окрестности точки x_0 в M^4 , такая что $H = p_1$, $F = F(p_1, p_2, q_2)$. В этом случае q_1 параметризует орбиту, и $D^3 = \{q_1 = 0\} \cap F^{-1}\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(y, y_0) \leq \varepsilon\}$, где $y_0 = F(O)$. Тогда D^3 — “шар” в пространстве (p_1, p_2, q_2) , и функции H и F на D^3 задаются теми же формулами $H = p_1$, $F = F(p_1, p_2, q_2)$. Очевидно, что на D^3 имеем $\text{grad } H \neq 0$.

Допустим, что нам удалось реализовать молекулу, содержащую атом

V**. Рассмотрим множество сфер $S_\rho : D^3 = \bigcup_{0 < \rho \leq \varepsilon} S_\rho \cup \{0\}$ и графы на них. На каждой сфере есть ровно две неподвижные точки действия σ , эти точки — вершины одного и того же связного нетривиального графа. В касательных плоскостях к сфере в этих точках $d\sigma$ выглядит как поворот на угол τ . В окрестности точки $(0, 0, 0)$ в D^3 $\sigma(x) = Ax + \varphi(x)$. Матрица линейного преобразования A в данном случае в некоторой системе координат $\{x, y, z\}$ приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На сферах S_ρ , где ρ близко к нулю, неподвижные точки лежат в направлении собственного вектора z . Функция H принимает постоянные значения на каждой связной компоненте графа Γ , поэтому H имеет одинаковые значения в неподвижных точках. Отсюда получаем $\partial H / \partial z(0, 0, 0) = 0$. На каждой сфере S_ρ в касательных плоскостях Π в неподвижных точках имеем $dH|_\Pi = 0$. При $\rho \rightarrow 0$ эти плоскости сходятся к плоскости (x, y) . Следовательно, $\partial H / \partial x(0, 0, 0) = \partial H / \partial y(0, 0, 0) = 0$. Мы получили противоречие с тем, что $\text{grad } H \neq 0$ на D^3 . Теорема доказана.

Следствие 5.3.1 *Если бифуркационная диаграмма в окрестности образа вырожденной одномерной орбиты имеет вид трех кривых, выходящих из одной точки, то молекула содержит ровно один атом V , отличный от A . Атом V имеет тип поверхности S^2 и содержит не более одной звездочки. Возможные варианты расстановки меток описаны в теореме 5.3.1, п. 2), 3).*

Доказательство. Рассмотрим на сфере $S_\varepsilon^2 \times \{0 \bmod 2\pi\}$ граф $\Gamma = S_\varepsilon^2 \cap F^{-1}(\Sigma \cap \gamma)$. Докажем, что граф Γ содержит ровно одну нетривиальную связную компоненту. Действительно, морсовская функция $g(x) = f_\varepsilon(x, t) = F|_{Q_\varepsilon^3}$ на сфере имеет ровно три критических значения, причем два из них отвечают минимумам и максимумам функции g , т.е. являются образами только тривиальных компонент графа. Все нетривиальные компоненты отображаются в одну точку — третье критическое значение. Так как морсовская функция не может принимать одинаковых значений на смежных границах графа Γ , то нетривиальная компонента только одна. Следовательно, молекула содержит ровно один атом V , отличный от A . Остальные утверждения следуют непосредственно из теорем 5.3.1, 5.3.2. Следствие доказано.

Библиография

- [1] Adler M., van Moerbeke P. The Kowalewski and Henon–Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs// Comm. Math. Phys. 1988. **113**, 4. 659–700.
- [2] Андронов А.А., Леонтьевич Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [3] Аносов Д.В., Аронсон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.Э. Гладкие динамические системы. II// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: ВИНИТИ. 1985. 151–242.
- [4] Аксененкова И.М. Канонические переменные угол–действие в задаче о волчке Лагранжа// Вестник МГУ. Сер. мат. 1981, вып. 1. 86–90.
- [5] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [6] Audin M., Silhol E. Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski// Compositio Math. 1993. **87**. 153–229.
- [7] Bechirianidis C., van Moerbeke P. The Goryachev–Chaplygin top and the Toda lattice// Commun. Math. Phys. 1987. **110**. 317–324.
- [8] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
- [9] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности// УМН. 1990. **45**, вып. 2. 49–78.
- [10] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации I, II// Матем. сб. 1994. **185**, вып. 4, 5. 27–80, 27–78.

- [11] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем на трехмерных поверхностях постоянной энергии// ДАН. 1993. **332**, вып. 5. 553–555.
- [12] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела// Функц. анализ и прил. 1995. **29**, вып. 3.
- [13] Bolsinov A.V. Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant// Adv. in Sov. Math. 1991. **6**. 147–184.
- [14] Болсинов А.В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Матем. сб. 1995. **186**, вып. 1. 3–28.
- [15] Болсинов А.В., Dullin H. О случае Эйлера в динамике твердого тела и задаче Якоби// Регул. и хаотич. динамика. 1997. **2**, вып. 1. 13–25.
- [16] Dufour J.P. and Molino P. Compactification d'action de \mathbb{R}^n et variables action-angle avec singularités// MSRI Publ. 1990. **20**. 129–136.
- [17] Duistermaat J.J. On global action-angle coordinates// Comm. on Pure and Appl. Math. 1980. **33**. 687–706.
- [18] Дубровин Б.А. Тета-функции и нелинейные уравнения// УМН. 1981. **36**, вып. 2. 10–80.
- [19] Gavrilov L.N. Explicit solutions of the Gorjatchev-Tchaplygin top// Докл. Болгарской академии наук. 1987. **40**, вып. 4. 19–22.
- [20] Gavrilov L.N. On the geometry of the Gorjatchev-Tchaplygin top// Докл. Болгарской академии наук. 1987. **40**, вып. 9. 33–36.
- [21] Gavrilov L. Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hénon-Heiles system// Physica D. 1989. **34**. 223–239.
- [22] Gavrilov L., Ouazzani-Jamil M., and Caboz R. Bifurcation diagrams and Fomenko's surgery on Liouville tori of the Kolossoff potential $U = \rho + (1/\rho) - k \cos \varphi$ // Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 26. 1993. 545–564.
- [23] Гробман Д.М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. 1959. **128**, вып. 5. 880–881.

- [24] Eliasson L.H. Normal form for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case// Comm. Math. Helv. 1990. **65**. 4–35.
- [25] Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations// Proc. Amer. Math. Soc. 1960. **11**. 610–620.
- [26] Horozov E., van Moerbeke P. The full geometry of Kowalewski's top and (1, 2)-abelian surfaces// Comm. Pure and Appl. Math. 1989. **42**, 1. 357–407.
- [27] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: изд-во МГУ, 1980.
- [28] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения// М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [29] Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972.
- [30] Матвеев В.С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус// Матем. сб. 1996. **187**, вып. 4. 29–58.
- [31] Матвеев В.С. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе и бутылке Клейна// Регул. и хаотич. динамика. 1997. **2**, вып. 1. 96–102.
- [32] Nguen Z.T., Polyakova L.S. A topological classification of integrable geodesic flows of the two-dimensional torus// Journ. Nonlinear Sciences. 1992. **6**. 85–108.
- [33] Орел О.Е. Топологический анализ окрестности вырожденной одномерной орбиты пуассоновского действия абелевой группы на симплектическом четырехмерном многообразии// УМН. 1993. **48**, вып. 6. 165–166.
- [34] Орел О.Е. Исследование окрестности вырожденной одномерной орбиты пуассоновского действия абелевой группы на четырехмерном многообразии. М., Наука. 1994. Сборник статей института им. В.А. Стеклова, Т. 205. 113–130.

- [35] Орел О.Е. Топологические свойства функции вращения в интегрируемых задачах Эйлера и Якоби// Вестник МГУ. Сер. мат. 1996. вып. 1. 24–32.
- [36] Орел О.Е. Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация случая Горячева–Чаплыгина// Матем. сб. 1995. **186**, вып. 2. 105–128.
- [37] Орел О.Е., Такахashi H. Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа// Матем. сб. 1996. **187**, вып. 1. 95–112.
- [38] Орел О.Е. Интегрируемые задачи Эйлера и Якоби топологически не сопряжены// Доклады РАН. 1997. **354**, вып. 3. 307–309.
- [39] Орел О.Е. О несопряженности случая Эйлера вращения твердого тела и задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде// Мат. заметки. 1997. **61**, вып. 2. 212–258.
- [40] Orel O.E. Orbital classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom in a neighborhood of equilibrium// in: *Topology and Applications*. International Topological Conference Dedicated to P.S.Aleksandrov's 100th Birthday, pp. 199–200, Moscow, 1996.
- [41] Орел О.Е. Критерий траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит. Траекторный инвариант задачи Лагранжа// Матем. сб. 1997. **188**, вып. 7. 139–160.
- [42] Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equation// Adv. in Sov. Math. 1991. **6**. 67–146.
- [43] Peixoto M.M. On the classification of flows of 2-manifolds// Dynamical Systems. Proc. Symp. Univ. of Bahia. New York London: Acad. Press. 1973. 389–419.
- [44] Пуанкаре А. Избранные труды. I, II// М.: Наука, 1972.
- [45] Rüssmann H. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung// Math. Ann. 1964. **154**. 285–300.

- [46] Селиванова Е.Н. Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности// Матем. сб. 1992. **183**, вып. 4. 69–86.
- [47] Селиванова Е.Н. Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе// Матем. сб. 1995. **186**, вып. 10. 141–160.
- [48] Топалов П. Включение бутылок Клейна в теорию топологической классификации гамильтоновых систем// УМН. 1994. **49**, вып. 1. 227–228.
- [49] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Ципанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела// Матем. сб. 1996. **187**, вып. 3. 143–160.
- [50] Уманский Я.Л. Схема трехмерной динамической системы Морса–Смейла без замкнутых траекторий// ДАН СССР. 1976. **230**, вып. 6. 1286–1289.
- [51] Фоменко А.Т., Ципанга Х. Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. **54**, вып. 3. 546–575.
- [52] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем и препятствия к интегрируемости// Известия АН СССР. Сер. мат. 1986. **50**, вып. 6. 1276–1307.
- [53] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем// ДАН СССР. 1986. **287**, вып. 6. 1071–1075.
- [54] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функцион. анализ и его прил. 1988. **22**, вып. 4. 38–51.
- [55] Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [56] Vey J. Sur certaines systèmes dynamiques séparables// Amer. J. Math. 1978. **100**. 591–614.