МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

им.В.А.СТЕКЛОВА.

Отдел топологии.

На правах рукописи.

НОВИКОВА ИРИНА СЕРГЕЕВНА.

УДК 517.

МИНИМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИСОЕДИНЕННОГО ДЕЙСТВИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ.

01.01.04.-геометрия и топология.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научные руководители:
Доктор физико-математических наук
А.Т.ФОМЕНКО,
Доктор физико-математических наук
А.А.МАЛЫШЕВ.

Москва 1990.

ВВЕДЕНИЕ

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Проблема построения глобально-минимальных поверхностей конического типа в $\mathbb{R}^n$ (т.е. являющихся конусом над некоторыми гладкими подмногообразиями в эвклидовой сфере) возникла в связи со знаменитой проблемой С.Н.Бернштейна [1] . Многомерный аналог этой проблемы был решен в замечательной работе Бомбьери, де Джиорджи, Джусти [2] . Оказалось, что проблема Берштейна тесно связана с проблемой построения конусов, объем которых минимален в классе всех поверхностей с той же границей. При этом понятие поверхности и ее границы в современной теории минимальных прверхностей конкретизируется по-разному в зависимости от постановки задачи на минимум. Наиболее популярны два подхода: 1) минимальные поверхности рассматриваются как потоки (эта точка зрения восходит к де Раму и Федереру [20]), 2) Минимальные поверхности рассматриваются как измеримые компактные множества данного гомологического типа, минимизирующие меру Хаусдорфа (эта точка зрения восходит к классической теории меры и к работам Райфенберга по теории минимальных поверхностей [19]).

Важный класс минимальных поверхностей образуют поверхности, инвариантные по отношению к действию некоторой группы Ли, т.е. поверхности, обладающие достаточно большой группой симметрий. Условие "симметричности" накладывает определенные ограничения нае минимальные поверхности, что позволяет достаточно полно описать класс таких поверхностей (см. работы Сяна, Лоусона [4],[3]). В частности, в работах Сяна, Лоусона, А.Т.Фоменко, А.Тырина (см. [4] ,[3],[9]) была дана классификация глобально-минимальноных инвариантных конусов коразмерности один в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом Лаусон и Сян описали большую часть таких конусов, после чего А.Т.Фоменко и А.Тырин завершили классификацию, рассмотрев оставшиеся случаи , за исключением конуса над $S^1 \times S^5$, изученного в работе [17].

Хотя в работе Лоусона, Сяна [3] дан список всех возможных связанных компактных подгрупп $SO(n)$, главные орбиты действия которых на $\mathbb{R}^n$ имеют коразмерность три, конусы над ними (имеющие коразмерность два) не классифицированы. Случай минимальных конусов коразмерности более чем два еще более сложен.

Как известно со времён Сяна и Лоусона [3] , G -инвариантные минимальные конусы могут изучаться методами дифференциальной геометрии на пространстве орбит действия группы G . Например, такая редукция описана в работе Сяна [7] , посвященной сферической проблеме Н.С.Берштейна.

Классическая проблема Н.С.Берштейна сформулирована так: Будет ли решение следующего уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 0, \; u(x^1, \dots x^n) \subset C^2(\mathbb{R}^n)$$

обязательно линейной функцией?

Как известно, положительный ответ в случае $n \leq 7$ получен в совокупности работ Н.С.Берштейна [I] , Флеминга [I0] , де Джиорджи [I2] , Саймонса [II] , Альмгрена [I5] , а отрицательный в случае $n \geqslant 8$ – в известной работе Бомбьери, де Джиорджи, Джусти [2] .

Черн [I3] предложил следующую задачу, названную сферической проблемой Берштейна:

Будет ли минимальное вложение дифференцируемой $(n-1)$ - мерной сферы в евклидову сферу $S^n(1)$ обязательно экватором?

В случае $n=3$ Альмгрен и Калаби [14][15] получили положительный ответ еще до общей постановки задачи.

В работе Сяна [7] с помощью теории, построенной в работах [3][4] задача редуцируется на пространство орбит действия подгруппы G на сфере, где G действует через соответствующее представление. (Например $G = O(2)\times O(2)$, $\rho = \rho_2 \otimes \rho_2'$ для $S^4(1)$). Пространство орбит является сферической лункой, на нем задача формируется в терминах дифференциальных уравнений и методами теории DY строится для каждого n = 4,5,6, 7, 8, 10,12,14 бесконечная серия различных минимальных вложений S^{n-1} в $S^n(1)$, не являющихся экваторами. Отметим, что выбор G не обязательно однозначен, и если возможно подобрать две подходящих подгруппы для одного n, то им соответствуют различные серии вложений. Например, для n = 5,6 описано по две серии. Позднее появилась работа П.Томтера [6], где данная проблема решена для всех четных n.

В завершающей работе Сяна, Стирлинга [7 (3)] показано, что конус над каждым таким вложением является минимальной гиперповерхностью в $\mathbb{R}^{n+1}$, а также показано, что для каждой размерности ($18 \leq n \leq 100$, и некоторые другие n) существует хотя бы одно вложение S^{n-1} в $S^n(1)$, конус над которым устойчив.

Рассмотрим стандартную евклидову сферу $S^{N-1}(1)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, отождествленном с алгеброй Ли G. При этом евклидова метрика совпадает с классической метрикой Киллинга. Рассмотрим специальный класс многообразий в евклидовой сфере, являющихся орбитами общего положения присоединенного представления группы $\exp G$ на G.

В этом случае аналог проблемы, рассмотренной Сяном выглядит так: описать все локально минимальные и устойчивые орбиты.

Этот вопрос тесно связан с проблемой минимальных конусов над орбитами.

В диссертации решается задача обнаружения глобального минимальных поверхностей конического типа и большой коразмерности, лежащих в алгебре Ли G компактной группы Ли $\exp G$, инвариантных относительно присоединенного представления этой группы на своей алгебре Ли G, естественно отождествленной с $\mathbb{R}^N$. Как выяснилось, эту задачу, поставленную А.Т.Фоменко в [8],[6] удается решить для всех классических компактных групп Ли. При этом оказалось, что решение указанной вариационной задачи теснейшим образом связано с достаточно глубокими свойствами систем корней соответствующих групп Ли.

Существуют три понятия минимальности конуса. Конусы могут быть локально-минимальными, устойчивыми и глобально-минимальными. Точные определения будут приведены в § I гл.I.

Пусть G – простая классическая алгебра Ли.

Пусть A – локально-минимальная орбита общего положения присоединенного действия группы $\exp G$ и CA – конус над орбитой, образованной радиусами, соединяющими начало координат с точками орбиты. Оказывается, минимальность конуса относительно любого из трех указанных понятий определяется системой корней алгебры G. Сформулируем основной результат диссертации:

Теорема : I) В алгебре G существует и единственна локально-минимальная орбита общего положения A (и конус над ней локально-минимален).

2) Эта орбита имеет максимальный объем в классе орбит общего положения.

3) Для каждой серии простых классических групп Ли $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ начиная с некоторого n_0 конус CA является глобально-минимальным. Это n_0 не превышает соответственно $n = 37$, $n = 35$, $n = 17$.

4) При малых n (а именно $n \leq 4$, $n \leq 3$, $n \leq 8$ для групп $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ соответственно) конус CA неустойчив, а следовательно, не глобально минимален. При остальных n конус устойчив.

Оценки п.3 Теоремы явно не оптимальны, поэтому потребовалось выявить также и устойчивые конусы, чтобы исключить из дальнейших поисков глобально-минимальных конусов хотя бы неустойчивые. Таким образом, первая часть диссертации посвящена доказательству существования глобально-минимальных конусов данного типа. Далее последуют оценки, ограничивающие сверху размерности, в которых глобальная минимальность конусов не доказана и где следует продолжать их поиски. Вторая часть диссертации посвящена поиску неустойчивых конусов.

Следует отметить некоторые другие результаты, полученные в этом направлении.

Иванов А.О. построил 8 серий примеров глобально-минимальных конусов коразмерности два в $\mathbb{R}^N$ с границей, инвариантной относительно действия некоторой подгруппы $G \subset SO(N)$ (см. [22], [23]).Например, если группа $G = SO(k+1) \times SO(3)$ действует в $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^5$ со стационарной подгруппой $H = SO(k) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то конус над орбитой максимального объема в сфере $S^{k+5}(1)$ будет глобально-минимален при $k \geqslant 52$, Грань К = 5I может быть понижена, однако это упирается в серьезные вычислительные трудности, встречающиеся всем, имеющим дело с конусами коразмерности выше единицы.

Не ясно пока, можно ли найти точные критические значения, отделяющие глобально-минимальные конусы, в случаях, когда коразмерность конусов два (как в случае примеров А.О.Иванов) или выше (например, как в основной теореме данной диссертации), используя метод Сяна, Лоусона, хотя он и привел к успеху в случае конусов коразмерности один.

Если заменить условие глобальной минимальности конуса условием устойчивости (объем не уменьшается при малых деформациях с закрепленной вершиной конуса), то возникает некоторое упрощение. А.О.Иванов доказал следующее утверждение:

Теорема [24]. Пусть $\tilde{f}$ - функция объема орбит на пространстве орбит $W \subset \mathbb{R}^n$, однородная по радиусу со степенью однородности d, f - ограничение $\tilde{f}$ на сферу $S^{n-1}(1)$. Пусть $a \in S^{n-1}(1)$ - точка максимума f на сфере. Рассмотрим конус CA над орбитой A, соответствующей точке a. Если

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}\Big|_a < \frac{f(a)}{4}(d+1)^2,$$

то конус устойчив.

θ - Угловое расстояние, измеряемое на $S^{n-1}(1)$ от a.

Говоря о минимальных конусах, нельзя не сказать о результатах Г.Лоулора [16], ученика Ф.Моргана. Им был доказан достаточный критерий глобальной минимальности конусов. Кроме общего критерия для конусов, Г.Лоулор изложил в ней свои результаты в некоторых частных задачах : I) завершено доказательство так называемой "Угловой гипотезы" Ф.Моргана относительно минималь- ности суммы двух плоскостей, 2) построен пример минимального конуса над неориентированной поверхностью; 3) дана классифи - кация конусов над произведением двух или более сфер, освещен ряд других вопросов.

Эти результаты очень интересны, но их изложение требует много места, т.е. например изложение общего критерия нуждается в некоторых предварительных описаниях, а изложение других ре- зультатов Г.Лоулора невозможно без рассказа об истории каждо- го вопроса. Поэтому интересующимся лучше прочесть диссертацию Г.Лоулора [16], написанную простым и ясным языком.

§ I. Основные определения и обозначения

Прежде всего необходимо напомнить определения основных понятий, используемых ниже в I главе диссертации.

Определение I. Многообразие G называется группой Ли, если оно является группой, причем отображения φ и ψ являются гладкими:

$$\varphi : G \to G, \text{ где } \varphi(g) = g^{-1}$$
$$\psi : G \times G \to G, \text{ где } \psi(gh) = gh$$

Определение 2. Алгеброй Ли называется линейное прост- ранство V в котором задана кососимметрическая билинейная операция $[\,,\,]$, если для элементов V выполняется тождест- во Якоби

$$[\xi,[\eta,\zeta]] + [\eta,[\zeta,\xi]] + [\zeta,[\xi,\eta]] = 0$$

В диссертации рассматриваются только матричные группы - группы преобразований.

Утверждение I.

Для групп преобразований (являющихся группами Ли) касательное пространство в единице группы будет являтьсл алгеброй Ли, относительно коммутирования матриц. Напомним важнейшие матричные группы (и их алгебры Ли).

1) $SL(n,\mathbb{R}) = \{A(n\times n), \det A = 1\}$

$sl(n,\mathbb{R}) = T_e\, SL(n,\mathbb{R}) = \{B(n\times n), \operatorname{Sp} B = 0\}$

2) $SO(n,\mathbb{C}) = \{A(n\times n), AA^T = 1, \det A = 1\}$

$so(n,\mathbb{C}) = \{B(n\times n), B + B^T = 0\}$

3) $U(n) = \{A(n\times n), AA^* = 1\}$

$u(n) = \{B(n\times n), B + B^* = 0\}$

4) $SU(n) = \{A(n\times n), AA^* = 1, \det A = 1\}$

$su(n) = \{B(n\times n), B + B^* = 0, \operatorname{Sp} B = 0\}$

5) $SO(p,q) = \{A(n\times n), AGA^T = G, \det A = 1\}$

$so(p,q) = \{B(n\times n), BG + GB^T = 0\}$

где G - псевдоевклидова метрика.

6) $U(p,q) = \{A(n\times n), AGA^* = G\}$

$u(p,q) = \{B(n\times n), BG + GB^* = 0\}$

За подробным изложением можно обратиться к классическим учебникам.

Существует и обратное утверждение, которое мы тоже приводим без доказательства.

Утверждение 2. Рассмотрим алгебру Ли G. Тогда $V = \exp G$ будет являться группой Ли.

Эти два утверждения позволяют однозначно сопоставлять алгебры и группы Ли.

Рассмотрим естественное действие группы Ли $\exp G$ на своей алгебре G, как группы линейных преобразований, обозначаемых $Ad_g G : G \to G$

$$g \in \exp G$$
$$X \in G$$
$$Ad_g X = g X g^{-1}$$

Дифференциал этого преобразования в точке $E \in \exp G$ имеет вид:

$$ad_x : G \mapsto G$$
$$ad_x Y = [X, Y] = XY - YX$$

где $X, Y \in G$

Определение: Соответствие $g \mapsto Ad_g$ называется присоединенным действием группы Ли, а $X \mapsto ad_X$ присоединенным представлением алгебры Ли.

Определение: Билинейная форма $(X,Y) = \mathrm{Spur}\ ad_x\ ad_Y$ называется формой Киллинга.

Для каждой конкретной группы форма (X,Y) приобретает конкретный вид. Например, в случае $G = sl(n,\mathbb{C})$

$$(X,Y) = \operatorname{Spur} XY$$

Эта форма определяет вещественнозначное скалярное произведение $\langle X,Y\rangle = \operatorname{Re}(X,Y)$. Форма Киллинга инвариантна относительно преобразований Ad_g, т.е.

$$(Ad_g X, Ad_g Y) = (X,Y),\ g \in \exp G;\ X,Y \in G$$

<u>Определение</u>. Алгебра Ли G (и ее группа Ли) называется <u>полупростой</u>, если форма Киллинга невырождена на G. Рассмотрим в полупростой алгебре G элемент X.

$$\operatorname{Ann} X = \{Y,\ ad_Y X = [X,Y] = 0\}$$

$\operatorname{Ann} X$ - подалгебра в G.

<u>Определение</u>. Y - регулярный элемент в G, если размерность $\operatorname{Ann} X$ минимальная. Остальные элементы алгебры называются сингулярными. Если X - регулярный элемент, то его $\operatorname{Ann} X$ называется <u>картановской подалгеброй.</u>

Картановская подалгебра может быть определена и как максимальная коммутативная подалгебра в G.

Любые две Картановские подалгебры T_1 и T_2 сопряжены в G, т.е. существует такой элемент $g \in \exp G$, что $g T_2 g^{-1} = T_1$.

<u>Определение</u>. Линейная функция $\alpha(h)$ на картановской подалгебре H в полупростой алгебре Ли G называется <u>корнем</u>, если существует такой элемент $E_\alpha \in G$, $E_\alpha \neq 0$, что $[h, E_\alpha] = \alpha(h) \cdot E_\alpha$

для любого $h \in H$.

Иначе говоря, должен существовать вектор $E_\alpha \in G$, являющийся собственным для всех операторов вида $ad\,h : G \to G$. При этом корень α является собственным числом $\alpha(h)$, определённым на множестве векторов $h \in H$

<u>Теорема</u> $\sum = \{\alpha\}$ – набор корней полупростой алгебры G.

G_α – собственное пространство, соответствующее корню α, тогда

$$G = H + \sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha ,$$

G_α называются корневыми подпространствами.

Системы корней играют важную роль в изучении алгебр Ли.

Свойства системы корней

I) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

$$[G_\alpha, G_\beta] = G_{\alpha+\beta}, \text{ т.е.}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} \cdot E_{\alpha+\beta}$$

2) $\alpha + \beta \neq 0$

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0$$

3) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \neq 0$

<u>Определение</u> : I) Корень $\alpha \in \sum$ называется <u>положительным</u>, если $\alpha > 0$, т.е. если $\alpha(H_i) = 0$ при $i = 1, \dots, k$ и $\alpha(H_{k+1}) > 0$.

Другими словами, первая ненулевая координата корня в базисе $\{H_i\}$ должна быть больше нуля.

2) Положительный корень называется <u>простым</u>, если его нельзя представить в виде суммы двух других положительных корней.

<u>Утверждение</u>.

В картановской подалгебре H полупростой алгебры Ли существует базис из простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$

r - ранг алнебры.

<u>Определение</u>. Алгебра Ли G называется <u>простой</u>, если в ней нет <u>идеалов</u>, I, т.е. таких подпространств, что $[I,G]\subset I$. Если алгебра Ли группы Ли проста, то эта группа Ли называется <u>простой</u>

<u>Утверждение</u>.

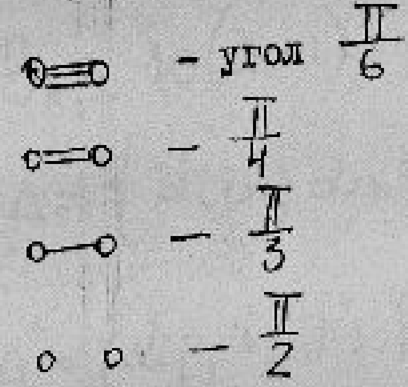
Простая алгебра Ли является полупростой, т.е. форма Киллинга на ней не невырождена.

Полупростая алгебра Ли разлагается в сумму попарно коммутирующих простых подалгебр:

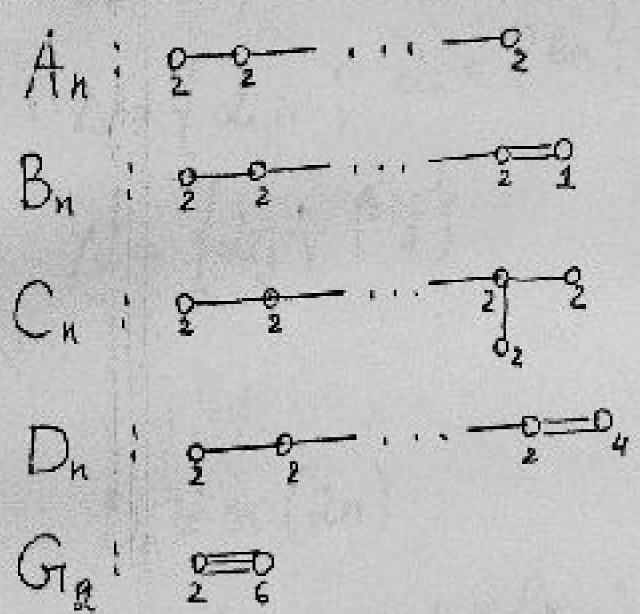
$$G = \oplus I_i, \quad [I_i, I_i] \neq 0$$
$$[I_i, I_e] = 0, \; i \neq e.$$

<u>Утверждение</u>. Простая алгебра Ли определяется с точностью до изоморфизма, заданием системы корней в своей картановской подалгебре. Опишем системы корней простых групп.

Знак $\circ$ соответствует простому корню, между двумя корнями, в зависимости от угла между ними, проведем определенное число отрезков:



Известно несколько серий простых алгебр Ли, они обозначены буквами:



Системы корней серии групп E_n и F_n мы не приводим, поскольку они не рассматриваются в дальнейшем. Цифра под корнем обозначает длину корня.

Что означают эти графы в конкретных случаях?

1) $A_n = sl(n, \mathbb{C})$

Простые корни: $\Delta = \{\alpha_{i,i+1} = e_i - e_{i+1}\}$

Положительные корни: $\Delta^+ = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j,\ i<j\}$

2) $B_n = so(2n+1)$

$$\Delta = \{\alpha_{i,i+1};\ \alpha_n = e_n\}$$

$$\Delta^+ = \{\alpha_{ij},\ i<j;\ \beta_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \ldots + 2\alpha_n;\ a_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_n\}$$

3) $C_n = sp(n)$

$$\Delta = \{\alpha_{i,i+1};\ \alpha_n = 2e_n\}$$

$$\Delta^+ = \{\alpha_{ij};\ \beta_{ij}\}$$

4) $D_n = so(2n)$

$$\Delta = \{\alpha_{i,i+1};\ \alpha_n = e_{n-1} + e_n\}$$

$$\Delta^+ = \{\alpha_{ij};\ \beta_{ij} = e_i + e_j\}$$

5) G_2

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2\}$$

Определение вещественная алгебра Ли G называется компактная если ее форма Киллинга отрицательно определена.

Определение. Вещественная подалгебра G_0 полупростой алгебры Ли G называется вещественной формой, если отображение комплексного расширения является изоморфизмом

$$G_0^{\mathbb{C}} = G_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq G .$$

Определение G_0 называется компактной вещественной формой алгебры G, если G_0 – компактная вещественная алгебра.

Утверждение. Стандартное вложение подалгебры $su(n)$ в алгебру $sl(n,\mathbb{C})$ совпадает с каноническим вложением компактной формы G_u в G .

Рассмотрим опять присоединенное представление группы $\exp G$

$$\exp G \mapsto Ad_{\exp a} : G \to G$$

Пусть $X \in G, \quad Ad_g X = gXg^{-1}$

Определение. Назовем орбитой элемента $X \in G$

$$A = O(X) = \{gXg^{-1}, g \in \exp G\}$$

Утверждение. 1) $X \in G$ – регулярный элемент тогда и только тогда, когда

$$\dim O(X) + \dim H = \dim G$$

2) Зафиксируем H.

Каждая орбита $O(X)$ обязательно пересечет ее, то есть

$$G = \bigcup_{X \in H} O(X) .$$

Орбиты, состоящие из регулярных элементов назовем орбитами общего положения.

Утверждение 1) $X \in G$, $O(X)$ – орбита, $T_X O(X)$ – касательное пространство к орбите в точке X. Тогда

$$T_X O(X) = \{[X,Y], Y \in G\}$$

2) $\mathrm{Ann}\,X$ ортогонален $T_x O(X)$.

$\mathrm{Ann}\,X \oplus T_x O(X) = G$

Теперь сопоставим группу Ли алгебре Ли. Для группы Ли рассмотрим присоединенное действие группы Ли, на себе

$$Ad_g g_0 = g g_0 g^{-1};\ g, g_0 \in \exp G$$

Аналогично

$$O(g_0) = \{ g g_0 g^{-1};\ g \in \exp G \} -$$

орбиты присоединенного представления. Рассмотрим в $\exp G$ подгруппу $T = \exp H$. Напомним, что в случае матричных групп

$$\exp X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

Утверждение: $T = \exp H$, где H - картановская подалгебра компактной алгебры G.

1) T диффеоморфна тору T^z, где z - ранг G и T является максимальной коммутативной подгруппой.

2) Все максимальные торы сопряжены.

3) Каждая орбита $O(g_0)$ обязательно пересечот максимальный тор T (зафиксированный).

Определение N - называется нормализатором тора T в группе $\exp G$,

если $N = \{ g \in \exp G;\ g T g^{-1} \subset T \}$

Рассмотрим фактор группу N/T. Она конечна.

Определение $\Phi = N/T$ назовем группой Вейля.

Число элементов группы Вейля равно числу пересечений орбиты общего положения с максимальным тором в группе (в алгебре - с картановской подалгеброй).

Если два элемента максимального тора сопряжены, то они передается друг в друга преобразованиями из группы Вейля. Это же утверждение верно и для алгебры Ли.

Таким образам можно тор разбить на части, взаимно непересекающиеся, переходящие друг в друга под действием преобразований из группы Вейля, и составляющие в сумме весь тор (то же верно и для подалгебры Картана в алгебре Ли). Эти области назовем <u>камерами Вейля</u> (как в группе, так и в алгебре). Камеры Вейля характеризуются тем, что все регулярные орбиты в группе их пересекают, причем только по одному разу. То есть камера Вейля есть пространство регулярных орбит присоединенного представления в алгебре Ли.

Рассмотрим алгебру Ли,в ней орбиту А. Назовем конусом СА над орбитой А конус, образованный лучами, идущими из начала координат в точки орбиты. Определим функцию объема таким образом: $v(CA_R)$- объем той части СА, которая заключена в шаре радиуса R.

Относительно объема существует три определения минимальности конуса.

<u>Определение</u> . Рассмотрим вариации конуса:

I) с малой амплитудой и с малым носителем

2) с малой амплитудой и с любым носителем ,(не смещая вершины конуса).

3) с любой амплитудой и с любым носителем.

Если объем конуса минимален по отношению к таким вариациям, назовем конус

I) локально-минимальным

2) устойчивым

3) глобально минимальным.

Кроме определения минимальности конуса, для доказательства глобальной минимальности нам потребуется определение т. наз. формы калибровки. Поскольку мы будем рассматривать редукцию задачи на пространство орбит, при которой конус проецируется в луч (одномерное пространство) в камере Вейля, нам необходимо определить I- форму.

В общем случае k форма калибровки вводится для k- мерного подмногообразия.

<u>Определение</u>. Замкнутую I- форму ω^1 ,заданную на камере Вейля W мы будем называть формой калибровки для геодезической $\rho(t)=th$, если выполнены 2 условия:

I) $|\omega^1(a)| \leq |a|$ для любого касательного вектора a,

2) если a - касательный вектор к геодезической $\rho(t)$, то $|\omega^1(a)|=|a|$.

Длина вектора в этом определении рассматривается в смысле метрики $ds^2=v^2dl^2$.

Приведем список, используемых обозначений:

I) $H\subset G$ - подалгебра Картана,

2) Σ - система корней, Σ^+- система положительных корней, W - камере Вейля ,

3) $\alpha\in H^*$ - корень, $h(\alpha)$- вектор из H такой, что $(h_\alpha, h)=\alpha(h)$ для любого $h\in H$.

4) $k=\dim H$, $\dim G=k+N$,

5) $S^{k-1}\subset H^k$ - сфера единичного радиуса.

6) $v: H\to R$ - функция объема, $v(h)$ - N- мерный объем орбиты $O(h)$. N- размерность орбиты общего положения.

Очевидно, что конус CA над орбитой A является инвариантным относительно присоединенного действия группы Ли $\exp G$. Поэтому решение задачи можно свести к некоторой задаче на пространстве орбит, используя общие утверждения, полученные в рамках так называемой эквивариантной задачи Плато [3,4,5]). Здесь мы напомним (без доказательства) следующие важные утверждения

Предложение I [3,4].

Пусть $h_0 \in H$ - регулярный элемент, $A = O(h_0)$ - его орбита,

I) конус CA является локально минимальным тогда и только тогда, когда отрезок, соединяющий точку h_0 с нулем (т.е. проекция конуса на пространство орбит), является геодезической на подалгебре Картана H в смысле метрики $ds^2 = v^2 \cdot dl^2$, где dl^2 - евклидова метрика, задаваемая формой Киллинга;

2) конус CA является устойчивым по отношению к малым вариациям, не смещающим вершину конуса и его основание $A = O(h_0)$ тогда и только тогда, когда на геодезической $\gamma(t) = t h_0$ нет сопряженных точек;

3) конус CA является глобально минимальным тогда и только тогда, когда геодезическая $\gamma(t)$ является кратчайшей среди кривых, соединяющих точку h_0 с границей камеры Вейля;

4) M^n - однородное пространство, $G \subset Iso(M)$, $V^k \subset M^n$ - подмнообразие, V^k - минимально в M^n относительно метрики dl^2, тогда и только тогда, когда V/G минимально в M/G относительно индуцированной на M/G метрики $ds^2 = v^2 \cdot dl^2$, v - функция объема орбит.

Утверждения этого предложения дают возможность редуцировать задачу на пространство орбит.

§ 2. Пусть G – компактная полупростая группа Ли, действующая на своей алгебре Ли G. Евклидова матрика на G задана стандартной формой Киллинга. Пусть $A = O(x) \subset G$ – орбита присоединенного представления общего положения. Конусом CA над орбитой мы будем называть конус с вершиной в нуле, образованный лучами, проходящими через точки A.

Задача состоит в нахождении локально минимальных конусов и исследовании их на устойчивость и глобальную минимальность.

С помощью теории Лоусона и Яна (предложение 1) задача редуцируется на пространстве орбит, т.е. на Картановскую подалгебру H^n. Из однородности задачи следует, что можно рассматривать ограничение задачи на $S^{n-1}(1) \subset H^n$.

Отрезок, соединяющий точку h_0, $|h_0| = 1$ с нулем, является геодезической в смысле метрики $ds^2 = v^2 dl^2$ тогда и только тогда, когда точка h_0 является точкой экстремума функции v, ограниченной на сферу $S^{n-1}(1)$ (см. гл. П, § 2, лемма 6).

<u>Предложение 2</u>. Функция объема имеет следующий явный вид: $v(h) = c \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha^2(h)$;

где C – некоторая константа, не зависящая от орбиты.

Покажем, что в камере Вейля существует единственная точка h_0, $|h_0| = 1$, являющаяся экстремумом функции $v|_{S^{n-1}(1)}$. Докажем для этого более общее утверждение, которое можно будет использовать в других ситуациях, например, в случае, когда $G = H + V$ – симметрическое разложение полупростой алгебры Ли, H действует на V и рассматриваются конусы над орбитами этого действия.

Лемма I. Пусть на линейном евклидовом k - мерном пространстве L задана функция вида $f(x)=\prod_{i=1}^{s}\alpha_i(x)$, где $\alpha_i \in L^*$ - линейные функции (некоторые из них могут совпадать). Сфера $S^{k-1}\subset L$ разбивается гиперплоскостями $\{\alpha_i=0\}$ на некоторые "многоугольники". Утверждается, что в каждом таком многоугольнике существует и притом единственная критическая точка (минимум или максимум) функции $f/_{S^{k-1}}$.

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольный " многоугольник" Q, высекаемый гиперплоскостями $\{\alpha_i=0\}$ на сфере S^{k-1}. Отметим, что в случае конусов присоединенного действия таким "многоугольником" является пересечение сферы с камерой Вейля. Ясно, что на границе Q функция f обращается в нуль, а внутри имеет постоянный знак. Поэтому критическая точка (минимум или максимум) внутри Q существует. Пусть для определенности $f>0$ внутри Q. Можно без ограничения общности считать, что $\alpha_i(x)>0$ для всех точек, лежащих внутри Q. Утверждение леммы будем доказывать для функции $\ln f$. Покажем для этого, что на любой дуге большого круга $\gamma(t)$ существует не более одного критического значения функции $g(t)=\ln f(\gamma(t))$. Подсчитаем для этого вторую производную функции $g(t)$.

$$\frac{d^2g}{dt^2}=\frac{d}{dt}\sum\frac{\alpha_i(\dot\gamma)}{\alpha_i(\gamma)}=\sum\frac{\alpha_i(\ddot\gamma)}{\alpha_i(\gamma)}-\sum\frac{\alpha_i^2(\dot\gamma)}{\alpha_i^2(\gamma)}$$

Заметим теперь, что для дуг большого круга $\ddot\gamma=-\gamma$, поэтому

$$\frac{d^2g}{dt^2}=-\sum_{i=1}^{s}1-\sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha_i^2(\dot\gamma)}{\alpha_i^2(\gamma)}<0$$

Итак, функция $g(t)$ строго выпукла вверх, поэтому имеет не более одной критической точки. То же самое будет, следовательно, справедливо и для функций $f, \ln f$ на S^{k-1}. Действительно, предположив существование двух критических точек, мы сразу придем к противоречию, соединив их дугой большого круга. Лемма доказана.

Из явного вида функции объема и доказанной леммы вытекает

Теорема I. I) Существует единственная орбита общего положения присоединенного представления, конус над которой локально минимален.

2) Объём этой орбиты максимален в классе орбит общего положения.

§ 3

Исследования устойчивости и глобальной минимальности конусов CA связано с довольно громоздкими вычислениями, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только классические компактные группы Ли.

Теорема 2.

Начиная с некоторого числа $n \in N$, не превышающего n_0, конус CA присоединенного действия групп Ли $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ является глобально минимальным ($n_0 = 37$, $n_0 = 35$, $n_0 = 17$ соответственно).

Исследование глобальной минимальности мы будет проводить с помощью так называемых форм калибровки [5] (определение см. в § I).

<u>Предложение 3</u> [5]. Если форма калибровки ω' существует, то геодезическая $\rho(t)=t h_0$ является кратчайшей.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ – произвольная кривая, соединяющая h_0 с нулем. Рассмотрим замкнутый контур Γ, образованный кривыми $\gamma(t)$ и $\rho(t)$. Имеем

$$\oint_\Gamma \omega' = \int_\rho \omega' + \int_{-\gamma} \omega' = -\int_0^1 |\omega'(\dot\gamma)|dt + \int_0^1 |\dot\rho|dt = l(\rho) + \int_0^1 \omega'(\dot\gamma)dt$$

Следовательно

$$l(\rho) = -\int_0^1 |\omega'(\dot\gamma)dt \le \int_0^1 |\dot\gamma|dt = l(\gamma)$$

Предложение доказано. Отметим, кстати, что на границе камеры Вейля метрика ds^2 образается в нуль, поэтому в случае существования формы калибровки ω', геодезическая является кратчайшей в смысле метрики ds^2 среди кривых, соединяющих точку h_0 с границей камеры Вейля. В этом случае в силу предложения I конус над орбитой $A=O(h_0)$ является глобально минимальным.

Итак, наша задача состоит в построении формы калибровки. Форму калибровки ω' мы будем искать в виде df, где f – некоторая гладкая функция. В терминах f и евклидовой метрики dl^2 условия на форму калибровки можно переформулировать следующим образом:

1) $|\mathrm{grad}\, f(x)| \le v(x)$

2) в точках геодезической th_0 вектор $\mathrm{grad}\, f$ является касательным, т.е. сонаправлен с вектором h_0, и

$|\mathrm{grad}\, f(th_0)| = v(th_0)$, где v – функция объема.

Функцию f поэтому естественно выбирать так, чтобы она обращалась в нуль вместе с градиентом на границе камеры Вейля, чтобы она была однородной функцией степени $N+1$, т.е. $f(tx)=t^{N+1}\cdot f(x)$, и точка h_0 являлась точкой максимума ограничения f на сферу S^{n-1}.

Пусть $r=r(h)$ - расстояние от точки $h\in H$ до нуля, $\varphi=\varphi(h)$ - угол между векторами h и h_0. Положим

$$f(h)=\begin{cases} C_1 r^{N+1}\cos^p C_2\varphi & \text{, при } C_2\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{; при } C_2\varphi>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

где p, C_1, C_2 - некоторые константы. Константа должна быть достаточно большой для того, чтобы носитель функции f целиком содержался в камере Вейля. Подсчитаем $|\operatorname{grad} f|$.

$$\operatorname{grad} f = C_1(N+1)r^N\cdot\cos^p C_2\varphi\operatorname{grad} r + C_1 r^N p C_2\sin C_2\varphi\cdot\cos^{p-1}C_2\varphi\cdot\operatorname{grad}\varphi$$

Ясно, что $\operatorname{grad} r(h)$ - вектор сонаправленный с h и имеющий единичную длину, $\operatorname{grad}\varphi(h)$ - вектор ортогональный вектору h и имеющий длину $\frac{1}{r}$. Поэтому

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{C_1^2(N+1)^2 r^{2N}\cos^{2p}C_2\varphi + C_1^2 r^{2N}p^2C_2^2\sin^2 C_2\varphi\cos^{2p-2}C_2\varphi}$$

Это выражение сильно упрощается, если положить $pC_2=N+1$, что мы и сделаем, тогда

$$|\operatorname{grad} f| = C_1(N+1)r^N\cos^{p-1}C_2\varphi$$

Посмотрим, чему равен $|\operatorname{grad} f|$ в точках геодезической th_0:

$$|\operatorname{grad} f| = C_1(N+1)r^N$$

так как $\varphi(th_0)=0$. Напомним, что должно выполняться условие $|\mathrm{grad}\, f(th_0)| = v(th_0)$, поэтому $C_1 = \frac{v(h_0)}{N+1}$.

Итак, форму калибровки удобно выбрать в виде $\omega' = df$, где

$$f(h) = \begin{cases} \frac{v(h_0)}{N+1} r^{N+1} \cos^p \frac{N+1}{p} \varphi, & \text{при } \varphi \le \frac{p\pi}{2(N+1)} \\ 0, & \text{при } \varphi > \frac{p\pi}{2(N+1)} \end{cases}$$

Мы будем для простоты и определенности считать, что $p=2$, хотя такой выбор p не оптимален, и все оценки, которые мы получим ниже, могут быть улучшены.

§4. Итак, условия на форму калибровки ω' в точках геодезической $\varphi(t)$ выполнены автоматически, и нам остается проверить первое условие на форму калибровки:

$$|\mathrm{grad}\, f| = v(h_0) r^N \cos^{\frac{N+1}{2}} \varphi \le v(h) \qquad (\mathrm{I})$$

(говоря точнее, нам нужно выяснить при каких условиях на ранг алгебры G эта оценка выполняется). Преобразуем это неравенство. Очевидно, что это неравенство достаточно рассматривать на сфере $S^{n-1} \subset H^n$, поскольку обе функции являются однородными степени N. Проверку неравенства мы будем проводить на геодезических $\gamma(t)$ (т.е. дугах больших окружностей), выходящих из точки $h_0 \in S^{n-1}$. Если t - натуральный параметр на $\gamma(t)$, то $t=\varphi$. По построению в точке h_0, т.е. при $t=0$ - значения функций $|\mathrm{grad} f|$ и v совпадают, а производные обращаются в нуль. Поэтому мы можем оценивать не сами функции, а их вторые производные по параметру t. Здесь опять удобнее будет перейти от функций к их логарифмам. Итак, нам достаточно проверить, что

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\ln|\operatorname{grad} f|\right| \le \left|\frac{d^2}{dt^2}\ln v\right|$$

тогда справедливым будет и неравенство (I). Проведем вычисления.

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln|\operatorname{grad} f| = \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(v(h_0)\cdot\cos\frac{N+1}{2}t\right) = -\frac{(N+1)^2}{4\cos^2\frac{N+1}{2}t}$$

Далее

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln v(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\alpha_i(\dot\gamma)}{\alpha_i(\gamma)}\right) =$$

$$= \sum\frac{\alpha_i(\ddot\gamma)}{\alpha_i(\gamma)} - \sum\frac{\alpha_i^2(\dot\gamma)}{\alpha_i^2(\gamma)} = -N - \sum\frac{\alpha_i^2(\dot\gamma)}{\alpha_i^2(\gamma)}$$

Поскольку $\ddot\gamma = -\gamma$ (суммирование происходит по всем корням $\alpha\in\Sigma^+$). Рассмотрим на сфере S^{n-1} билинейную симметрическую форму $\tilde B(a,b)$, где $a, b\in T_\gamma S^{n-1}$, заданную формулой

$$\tilde B(a,b) = -\sum\frac{\alpha(a)\cdot\alpha(\beta)}{\alpha^2(\gamma)}$$

Эта форма является ограничением на сферу аналогичной формы $B(a,b)$, заданной на всей камере Вейля, и являющейся гессианом функции объема $v(h)$ (в декартовых координатах). Действительно, как нетрудно проверить $B(a,b) = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\ln v$,

где через $\frac{\partial}{\partial a}$ обозначена производная вдоль постоянного векторного поля, определенного вектором $\vec a$.

Нам достаточно доказать, таким образом, что

$$N+\|\tilde{B}\| \le \frac{(N+1)^2}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{N+1}{2}t}$$

Или, еще более огрубляя оценки.

$$N+\|\tilde{B}\| \le \frac{(N+1)^2}{4}$$

На самом деле, мы покажем, что норма B имеет порядок nN в точках близких к h. Здесь следует сделать еще одно важное замечание. Функция f и форма калибровки ω' являются финитными и их носитель совпадает с множеством точек $h\in H$, для которых $\varphi(h)\le\frac{\pi}{N+1}$. Прежде всего нам необходимо убедиться в том, что носитель целиком содержится в камере Вейля, а затем проверять неравенства в точках носителя. Нетрудно подсчитать, что для точек, находящихся в "центре" камеры Вейля расстояние до стенок камеры имеет порядок $(nN)^{-\frac{1}{2}}$ (см. Лемма 4, § 5). А если для h_0 расстояние до ближайшей стенки имеет порядок $(nN)^{-\frac{1}{2}}$, то при достаточно больших n и N носитель формы калибровки ω' целиком содержится в W, поскольку $(nN)^{-\frac{1}{2}} \geqslant \pi/N+1$. Следующее утверждение показывает связь нормы билинейной формы B с расстоянием от точки h до ближайшей стенки камеры Вейля.

Лемма 2. Пусть $\varepsilon=\min\alpha(h)$, где $\alpha\in\Sigma^+$ — положительные корни. Тогда $C_1\varepsilon^{-2}\le\|B\|\le C_2\varepsilon^{-2}$

где $$\|B\|=\max_{|a|=1}\sum\frac{\alpha^2(a)}{\alpha^2(h)}$$

где C_1, C_2 - константы, не зависящие от типа алгебры Ли и ее размерности.

Доказательство леммы.

Пусть $|a|=1$. Подсчитаем $B(a,a)=-\sum \frac{\alpha^2(a)}{\alpha^2(\gamma)}$

Разобьем сумму на несколько сумм, группируя корни по их высоте.

$$\sum_{\alpha} \frac{\alpha^2(a)}{\alpha^2(h)} = 2\left(\sum_{[1]} + \sum_{[2]} + \dots\right)$$

Двойка перед скобкой возникла из-за того, что суммы в правой части берутся только по положительным корням. Знак $[p]$ под суммой означает, что суммирование идет по корням высоты p. Очевидно, что для корня α высоты p справедлива оценка

$\alpha(h) \geqslant p\varepsilon$, поэтому

$$B(a,a) \leq 2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{[1]}\alpha^2(a) + \frac{1}{(2\varepsilon)^2}\sum_{[2]}\alpha^2(a)\dots\right)$$

Оценим $\sum \alpha^2(a)$, где суммирование проводится по всем положительным корням высоты p. Эта сумма очень похожа на сумму квадратов коэффициентов Фурье. В данном случае, однако, корни не образуют ортонормированную систему, тем не менее справедливы соотношения:

$$\sum_{\alpha}\alpha^2(a) = \sum_{\alpha}(a,h_\alpha)^2 = \sum_{\alpha}\Big(\sum_i (a,(h_\alpha,e_i),e_i)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{ij}(a,e_i)(a,e_j)c_{ij} = \sum_{ij} c_{ij}\, a_i a_j = c(a,a)$$

где $c_{ij}=\sum (h_\alpha,e_i)(h_\alpha,e_j)$, $a_i=(a,e_i)$ – координаты вектора a в базисе $\{e_i\}$, где $\{e_i\}$ – стандартный ортонормированный базис в подалгебре Картана H. Нетрудно проверить, что для классических серий алгебр Ли $\|c\|\leq 4$.

Таким образом, $\|B\| \leq \frac{2|a|^2}{\varepsilon^2} + \frac{4|a|^2}{(2\varepsilon)^2} + \ldots \leq \frac{4|a|^2}{\varepsilon^2}\sum\frac{1}{n^2} \leq \frac{c}{n^2}$

где $c = 4\sum\frac{1}{n^2}$. Итак, $\|B\| \leq c/\varepsilon^2$. Оценка в обратную сторону почти очевидна: $B(a,a) \geq 2\frac{\alpha^2(a)}{\alpha^2(h)}$

для любого $\alpha \in \sum^+$. Выбирая теперь в качестве α вектор $\frac{h_\alpha}{|h_\alpha|}$, получаем $|B(a,a)| \geq 2\frac{|h_\alpha|^2}{\alpha^2(h_\alpha)}$

для любого корня α. Таким образом, $\|B\| \geq 2/\varepsilon^2$ поскольку $|h_\alpha| \geq 1$ для любого корня в классическом случае. На самом деле эту оценку можно переписать несколько иначе

$$\|B\| \geq 2/\rho(h)$$

где $\rho(h)$ - расстояние до ближайшей стенки камеры Вейля, т.к. расстояние до стенки $\{\alpha = 0\}$ равно $\alpha(h)/|h_\alpha|$. Лемма доказана.

§ 5.

Оценим теперь норму гессиана B в критической точке $h_0 \in H$. Оказывается, имеет место следующее замечательное утверждение.

Лемма 3. В точке экстремума h_0 функции объема $v/_{S^{n-1}}$ имеет место оценка

$$\|B\| \leq 2nN$$

где $n=\dim H$, $N=\dim G-n$ - размерность орбиты общего положения.

Доказательство леммы состоит из довольно громоздких вычислений, которые проводятся для каждой классической серии.

Доказательство леммы 3.

Все преобразования и вычисления мы проводим в одной фиксированной точке h_0. Эта точка - максимум функции объема на сфере $S^{n-1}\subset H$.

Прежде всего укажем соотношения, которым должна удовлетворять данная точка.

Пусть $x_1 \dots x_n$ декартовы координаты в H. Мы рассматриваем стандартный базис, т.е. такой, что $\alpha(h)=x_i \pm x_j$, $\alpha(h)=x_i$ или $\alpha(h)=2x_i$, где α - корень. (Вместо $SU(n)$ здесь удобнее рассматривать $U(n)$).

Итак, h_0 - точка экстремума на сфере S^{n-1}, поэтому

(ж) $\operatorname{grad} f(h_0)=\lambda h_0$, λ - множитель Лагранжа

$$f(h)=\ln v(h)=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\ln(\alpha(h))$$

Найдем λ, умножив равенство (ж) скалярно на h_0

$$(h_0,\operatorname{grad} f(h_0))=\lambda(h_0,h_0)=\lambda$$

$$\sum_\alpha (h_0,\operatorname{grad}|_{h_0}\ln(\alpha(h)))=\lambda$$

Легко проверить, что $(h_0,\operatorname{grad}|_{h_0}\ln(\alpha(h)))=1$. Поэтому

$$\lambda=\frac{1}{2}(\dim G-\operatorname{rk} G)=\frac{1}{2}\dim O$$

где O - орбита общего положения. Запишем теперь тождество (ж) в координатах $x_1,\dots,x_n$ отдельно для каждой серии алгебр.

Таблица I

$SU(n)$ $\quad \sum \frac{1}{x_i - x_j} = \lambda x_i$

$SO(2n)$ $\quad \sum \left(\frac{1}{x_i - x_j} + \frac{1}{x_i + x_j} \right) = \lambda x_i$

$SO(2n+1)$, $Sp(n)$ $\quad \sum \left(\frac{1}{x_i - x_j} + \frac{1}{x_i + x_j} \right) + \frac{1}{x_i} = \lambda x_i$

Обозначим через H матрицу гессиана v

$$H = (H_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Явный вид

$SU(n)$ $\quad H_{ij} = \frac{1}{(x_i - x_j)^2}, \; i \neq j; \quad H_{ii} = -\sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^2}$

$SO(2n)$ $\quad H_{ij} = \frac{1}{(x_i - x_j)^2} - \frac{1}{(x_i + x_j)^2} \; (i \neq j)$

$$H_{ii} = -\sum_{k \neq i} \left(\frac{1}{(x_i - x_k)^2} + \frac{1}{(x_i + x_k)^2} \right)$$

$SO(2n+1)$ $\quad H_{ij} = \frac{1}{(x_i - x_j)^2} - \frac{1}{(x_i + x_j)^2}, \; i \neq j;$

$Sp(n)$ $\quad H_{ii} = -\sum_{k \neq i} \left(\frac{1}{(x_i - x_k)^2} + \frac{1}{(x_i + x_k)^2} \right) - \frac{1}{x_i^2}$

Табл.2.

Наша задача: оценим норму гессиана, или, что то же самое, оценить снизу минимальное собственное значение.

Случай $SU(n)$

Соотношения из табл.I перепишем в виде

$$\sum_{k\neq i} \frac{1}{x_i - x_k} = \lambda x_i$$

Вычтем из i - го j - е соотношение и разделим на $(x_i - x_j)$

$$(\mathrm{I}) \quad -d = \sum_{k\neq i,j} \frac{1}{(x_i-x_k)(x_j-x_k)} - \frac{2}{(x_i-x_j)^2}$$

Просуммируем (I) по $i \neq j$

Обозначим

$$\ell = \sum_{i\neq j} \frac{-2}{(x_i-x_j)^2}$$

$$-d(n-1) = \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} \frac{1}{(x_i-x_k)(x_j-x_k)} + \ell$$

$$(1-n)d = \sum_{k\neq i} \frac{1}{(x_i-x_k)} \cdot \sum_{k\neq i,j} \frac{1}{(x_j-x_k)} + \ell =$$

$$= \sum_{k\neq i} \frac{1}{(x_i-x_k)} \left(-dx_k - \frac{1}{x_i-x_j}\right) + \ell =$$

$$= \sum_{k\neq i} \frac{-dx_k}{x_i-x_k} - \sum_{k\neq i} \frac{1}{(x_i-x_k)^2} + \ell =$$

$$= d\left(\sum_{k\neq i} \frac{x_i - x_k - x_i}{(x_i-x_k)}\right) + \ell + \frac{\ell}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ell + d\left(\sum_{k\neq i}\left(1 - \frac{x_i}{x_i-x_k}\right)\right) = \frac{3}{2}\ell + d(n-1) -$$

$$-\frac{dx_i\, dx_i}{4} = \frac{3}{2}\ell - \frac{d^2 x_i^2}{4} + d(n-1)$$

(II) $2(1-n)d=\frac{3}{2}\ell-\frac{d^2x_i^2}{4}$

Рассмотрим матрицу

$$M_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{x_i-x_j}\,; & i\neq j\\ -\frac{dx_i}{2}\,; & i=j\end{cases}$$

Вычислим $2H_{ij}-MM^T$

$$2h_{ij}-\sum_k m_{ik}m_{jk}=\frac{2}{(x_i-x_j)^2}-\sum_{k\neq i,j}\frac{1}{(x_i-x_k)(x_j-x_k)}+$$

$$+\frac{dx_i}{x_i-x_j}+\frac{dx_j}{x_i-x_j}=d-d=0\quad(\text{из I})$$

$$2h_{ii}-\sum_k m_{ik}m_{ik}=\sum_{k\neq i}\frac{2-1}{(x_i-x_k)^2}-\frac{dx_i^2}{4}=$$

$$=\frac{3}{2}\ell-\frac{d^2x_i^2}{2}=2(1-n)d+\frac{dx_i^2}{4}-\frac{dx_i^2}{4}=$$

$$=+2(1-n)d\quad(\text{из II})$$

Следовательно $H=\frac{1}{2}MM^T+(1-n)d\cdot E.$

MM^T положительно определена $\Rightarrow \operatorname{Spec} H\geqslant(1-n)d$

Рассмотрим случай $SO(2n)$.

Соотношения из табл.I перепишем в виде

$$\sum_{k\neq i}\frac{2x_i}{x_i^2-x_k^2}=\lambda x_i$$

Вычтем из i - го j - е соотношение и разделим на $(x_i - x_j)$

$$(\mathrm{I})\quad \sum_{k\neq ij} \frac{-2(x_i x_j)}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} - \sum_{k\neq ij}\frac{2x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} + \frac{2}{(x_i-x_j)^2} = d$$

Сложим i - е и j - е соотношения и разделим на $(x_i + x_j)$

$$(2)\quad \sum_{k\neq ij} \frac{2x_i x_j}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} - \sum_{k\neq ij}\frac{2x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} + \frac{2}{(x_i+x_j)^2} = d$$

Теперь, вычитая из 2-го соотношения I-е получаем

$$2H_{ij} = \sum_{k\neq ij} m_{ik} m_{jk}$$

где $m_{ik} = \dfrac{2x_i}{x_i^2 - x_k^2}$

Положим $m_{ii} = d x_i$

Имеем $m_{ii} m_{ji} + m_{ij} m_{jj} = 0$

Поэтому $2H_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{ik} m_{jk}$

Далее сложим (2) и (I)

$$2d = 2\left(\frac{1}{(x_i-x_j)^2} + \frac{1}{(x_i+x_j)^2}\right) - \sum_{k\neq ij}\frac{4x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)}$$

Просуммируем по $j \neq i$

$$2d(n-1) = -2H_{ii} - \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} \frac{4x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)}$$

Преобразуем двойную сумму, изменив порядок суммирования

$$2d(n-1) = -2H_{ii} - 2d(n-1) - 2d + \sum_k m_{ik}^2$$

Итак, мы получили соотношения

$$2H_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}$$

$$2H_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2 - 4d(n-1) - 2d$$

Рассмотрим матрицу $M = (m_{ij})$ Мы показали сейчас, что

$$H = \frac{1}{2} MM^T - d(2n-1)\cdot E$$

Но матрица MM^T " не отрицательна", т.е. $MM^T(x,x) \geqslant 0$

Отсюда следует, что для наименьшего собственного значения μ матрицы H имеется оценка

$$\mu \geqslant -\lambda(2n-1) = (1-2n)d$$

Случай $SO(2n+1)$ и $Sp(n)$.

Соотношения из табл.I перепишем в виде

$$\sum_{k\neq i} \frac{2x_i}{(x_i^2-x_k^2)} + \frac{1}{x_i} = \lambda x_i$$

Вычтем из i - го j - е соотношение и разделим на $(x_i - x_j)$

$$(\mathrm{I})\ \sum_k \frac{-2x_i x_j}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} - \sum_k \frac{2x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} + \frac{2}{(x_i-x_j)^2} - \frac{1}{x_i x_j} = d$$

Сложим i - е и j - е соотношения и разделим на (x_i+x_j)

$$(2)\ \sum_k \frac{2x_i x_j}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} - \sum_k \frac{2x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} + \frac{2}{(x_i-x_j)^2} + \frac{1}{x_i x_j} = d$$

Теперь, вычитая из 2-го соотношения I-е, получаем

$$2H_{ij} = \frac{2}{(x_i-x_j)^2} - \frac{2}{(x_i+x_j)^2} = \sum_k \frac{4x_i x_j}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)} + \frac{2}{x_i x_j} =$$

$$= \sum m_{ik} m_{jk} + \frac{2}{x_i x_j}$$

где $m_{ij} = \dfrac{2x_i}{x_i^2-x_j^2}$

Положим $m_{ii} = -dx_i + \dfrac{1}{x_i}$. Тогда $m_{ii} m_{ji} + m_{ij} m_{jj} = \dfrac{2}{x_i x_j}$

Поэтому $2H_{ij} = \sum m_{ik} m_{jk}$

Сложим теперь (2) и (I)

$$2d = 2\left(\frac{1}{(x_i-x_j)^2} + \frac{1}{(x_i+x_j)^2}\right) - \sum \frac{4x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)}$$

Просуммируем по $j \neq i$.

$$(3)\ \ 2d(n-1) = -2H_{ii} - \frac{2}{x_i^2} - \sum_{j\neq i}\sum_k \frac{4x_k^2}{(x_i^2-x_k^2)(x_j^2-x_k^2)}$$

Преобразуем двойную сумму, изменив порядок суммирования.

Итак, мы получили соотношения

$$2H_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{jk}$$

$$2H_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2 - 4d(n-1) - d - d$$

Рассмотрим матрицу $M = (m_{ij})$. Мы показали сейчас, что

$$H = \frac{1}{2} M M^T - (2d(n-1) + d) \cdot E$$

Отсюда наименьшего собственного значения μ матрицы H имеется оценка

$$\mu \geqslant -2d(n-1) - d = (1-2n)d$$

Подводя итог, мы можем заключить, что для всех классических случаев имеет место оценка

$$\mu \geqslant nN, \quad |\mu| \leq nN$$

где N - размерность орбиты общего положения, $n = \mathrm{rk}\, G$

Лемма доказана.

Теперь мы перейдем к заключительной части доказательства.

§ 5

<u>Лемма 4</u>. $\varepsilon_0 = \min(\Pi_\alpha, h_0)$, $\Pi_\alpha = \{\alpha = 0\}$

если $b = \mathrm{const}$, то

$$\varepsilon_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{bNn+1}}$$

- расстояние от h_0 до ближайшей стенки камеры Вейля.

Доказательство

Из леммы 3

$$\left|\frac{d^2}{d\varphi^2}\ln v\right| \le nN$$

где $v = \prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+}(h_\alpha, \gamma(\varphi))$ - объемы орбиты,

φ - угол от h до h_0, $\gamma(\varphi)$ соответствующая дуга большого круга.

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\ln v = 2\left(-\sum\frac{\alpha^2(\dot\gamma)}{\alpha^2(\gamma)} + \sum\frac{\alpha(\ddot\gamma)}{\alpha(\gamma)}\right) =$$

$$= -2\sum\frac{\alpha^2(\dot\gamma)}{\alpha^2(\gamma)} - N$$

Тогда для α такого, что $(h_\alpha,\gamma)=\varepsilon_0$

заведомо

$$\frac{(h_\alpha,\dot\gamma)^2}{(h_\alpha,\gamma)^2} = \frac{\alpha^2(\dot\gamma)}{\alpha^2(\gamma)} \le \ln N$$

$$\frac{\cos^2(\widehat{h_\alpha,\dot\gamma})}{\cos^2(\widehat{h_\alpha,\gamma})} \le \ln N \quad (\text{рис } 3)$$

(рис.3)

Выберем $\dot\gamma$ в плоскости (γ , h_α) (см. рис.3)

$$\cos^2(\widehat{h_\alpha,\dot\gamma}) = 1 - \cos^2(\widehat{h_\alpha,\gamma}).$$

$\cos^2(\widehat{h_\alpha,\gamma})$ - малая величина,

$$\cos^2(\widehat{h_\alpha, \gamma}) \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \le \ln N \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0^2} \le \ln N+1$$

$$\varepsilon_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\ln N+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln N}}$$

Доказательство окончено.

Тем самым, расстояние от h_0 до ближайшей стенки камеры порядка $\frac{1}{\sqrt{\ln N}} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln^3}}$, а радиус области определения формы калибровки $\frac{1}{N+1} \sim \frac{1}{n^2}$, т.е. порядок уменьшения этой области определения выше, чем порядок приближения стенок камеры Вейля к h_0.

Лемма 5. При достаточно больших n и N носитель формы калибровки ω' целиком содержится в камере Вейля W, причем для любой точки $h \in S^{n-1}$, попавшей в носитель, выполнена оценка $1/\alpha^2(h) < 2nN$.

Доказательство. Напомним, что $h \in H$ принадлежит носителю формы ω' тогда и только тогда, когда $\varphi(h) \le \frac{\pi}{N+1}$ (φ - угол между векторами h и h_0). В силу однородности достаточно доказать утверждение леммы на сфере S^{n-1}. Пусть $\rho(x,y)$ - евклидово расстояние между точками x, y, $\rho(x, \Pi_\alpha)$ - расстояние от точки x до плоскости $\Pi_\alpha = \{\alpha = 0\}$.

Легко видеть, что $\rho(h, h_0) < \varphi(h)$ для точек $h \in S^{n-1}$. Тогда из неравенства треугольника для точек $h \in S^{n-1}$, попавших в носитель, мы имеем

$$\rho(h, \Pi_\alpha) \geq \rho(h_0, \Pi_\alpha) - \rho(h, h_0) \geq \frac{1}{\sqrt{\ln N}} - \frac{\pi}{N+1}$$

Мы воспользовались тем, что $\|B\| \geq \frac{2}{\rho^2(h_0, \Pi_\alpha)}$

для любого корня α и $\|B\| < 2nN$ в точке h_0 (леммы 2.3). Размерность орбиты общего положения N имеет порядок n^2, поэтому при достаточно больших n и N

$$\frac{1}{\sqrt{nN}} - \frac{\pi}{N+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2nN}}$$

Следовательно

$$\rho(h, \Pi_\alpha) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2nN}}$$

для точек $h \in S^{n-1}$, попавших в носитель формы ω^1. Таким образом, носитель целиком содержится в камере Вэйля. Далее

$$\rho(h, \Pi_\alpha) = \frac{\alpha(h)}{|h_\alpha|}, \text{ поэтому } \frac{1}{\alpha^2(h)} = \frac{1}{|h_\alpha|^2 \rho^2(h, \Pi_\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho^2(h, \Pi_\alpha)} \leqslant 2nN$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать требуемую оценку

$$N + \|B\| \leqslant \frac{(N+1)^2}{4} \tag{2}$$

где $\|B\|$ рассматривается в точках носителя формы ω^1.

Действительно, $\|B\| \leqslant \frac{C_2}{\mathcal{E}^2} = \frac{C_2}{\min\limits_{\alpha} \alpha^2(h)} \leqslant 2C_2 Nn$

(леммы 4,3).

Поэтому при больших n и N

$$N + 2nNC_2 \leqslant \frac{(N+1)^2}{4}$$

и оценка (2) становится справедливой.

Итак, мы показали, что в точках носителя формы справедлива оценка (I). В дополнении к носителю эта оценка очевидна, поскольку $|\operatorname{grad} f| = 0$. Таким образом, в больших размерностях существует калибровка $\omega \Rightarrow$ геодезический отрезок $\rho(t)=th_0,\ t\in[0,1]$ (проекция конуса CA на пространство орбит) является кратчайшим в классе кривых, соединяющих h_0 с границей камеры Вейля, а конус CA, следовательно, является глобально минимальным.

Теперь необходимо как-то оценить, с какой размерности конусы будут заведомо глобально минимальны. Из доказательства вытекает, что необходимо для этого выполнение двух неравенств:

(I) $\dfrac{1}{\sqrt{nN}} + \dfrac{\pi}{N+1} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2nN}}$ — это условие попадания носителя формы калибровки в камеру Вейля.

(2) $N + 2c_2 nN \leqslant (N+1)^2/4$

где
$$n = \operatorname{rk} G$$
$$N = \dim O(x)$$
$$c_2 = 4\sum \frac{1}{n^2} \leqslant 8$$

Это основное неравенство, выражающее условие на форму калибровки.

Для
$SU(n)$ $N=(n+1)n$
$SO(2n)$ $N=2n(n+1)$
$SO(2n+1)$ и
$Sp(n)$ $N=2n(n+2)$

Первое неравенство менее сильное, оно заменяется приближенно на $N/n \geqslant 16$. Второе неравенство заменяется на $N/n \geqslant 37$.

Отсюда

$$n \geqslant 36$$
$$n \geqslant 18$$
$$n \geqslant 17$$

соответственно.

Поэтому, начиная с $n_0 = 36$, $n_0 = 35$, $n_0 = 17$, для серий групп $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ соответственно, конус заведомо будет глобально минимален.

Тем самым теорема 2 доказана

П гл. § I. Основные определения и понятия

Теперь необходимо выяснить, какие, собственно, из оставшихся конусов можно заведомо исключить из сферы дальнейших поисков глобально-минимальных конусов.

Заведомо не будут глобально минимальными неустойчивые конусы.

Теорема 3. При малых n (а именно $n \leq 4$, $n \leq 3$, $n \leq 8$ для групп $SU(n)$, $Sp(N)$, $SO(n)$ соответственно) конус CA над локально-минимальной орбитой общего положения будет неустойчив. При остальных n конус устойчив. Как известно, конус CA неустойчив, если на геодезической $\rho(t)$ (проекции конуса на W) будут существовать сопряженные точки. Прежде всего напомним определения основных понятий, необходимых во П гл.

Определение. Говорят, что задана операция ковариантного дифференцирования. Тензора любого типа, если в любой системе координат $z^1 \ldots z^n(x)$ задан набор функций

$$\Gamma^k_{pq}(z) = -\frac{\partial x^i}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial z^q} \cdot \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x_j}$$

при замене координат $z = z(z')$ преобразующихся по формуле

$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\right).$$

Γ^k_{pq} называются <u>символами Кристофеля</u>. Операцию ковариантного дифференцирования называют <u>дифференциально-геометрической связностью</u>.

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{j j_2 \dots j_q}\Gamma^{j}_{j_1 k} - \dots -$$

$$+ T^{i i_2 \dots i_p}_{(j)}\Gamma^{i_1}_{i k} + \dots$$

<u>Определение</u>

$$-R^i_{qke} = \frac{\partial \Gamma^i_{qe}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^e} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{qe} - \Gamma^i_{pe}\Gamma^p_{qk}$$

называется <u>тензором Римана</u> или римановой кривизной.

<u>Определение</u> векторное поле T <u>параллельно</u> вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ (<u>ковариантно-постоянно</u>) на отрезке $a \le t \le b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению вектора скорости кривой равна нулю.

$$\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T = 0, \quad a \le t \le b$$

$$\xi^k = \frac{dx^k}{dt}$$

<u>Определение</u> . <u>Параллельным переносом</u> вектора T^i_p из точки $P = (x_0^1, \dots x_0^n)$ в точку $Q = (x_1^1, \dots, x_1^n)$

вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $t = [0,1]$, называется векторное поле T^i заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль этой кривой : $\xi^k \nabla_k T^i = 0$

Определение $x^i = x^i(t)$ называется геодезической , если ее вектор скорости $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль нее самой

$$\nabla_T(T) = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^j_{ki} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0$$

Определение. Векторное поле ξ вдоль геодезической γ называется Якобиевым , если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi = 0$ и обращается в нуль на концах кривой.

$$(J\xi)^i = \nabla^2_{\dot{x}} \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R^i_{jkl}$$

Определение Точки P и Q сопряжены вдоль геодезической γ , если существует ненулевое якобиево поле ξ вдоль γ ; $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$

§ 2. Тензор кривизны

Пусть f - положительная функция на $\mathbb{R}^n$, однородная степени d , a^0 - точка максимума f на сфере $S^{n-1}(1)$.

$$ds^2 = f(a_1, \dots a_n) * \sum da_i^2$$ - метрика на $\mathbb{R}^n$

Лемма 6 .

$\rho(t) = t\sqrt{a^0}$ - геодезическая метрики ds^2.

Доказательство.

$$\overline{a^\circ} = (a_1^\circ, \ldots a_n^\circ)$$

По условию $\dfrac{df}{da_i} = \lambda a_i;\ \lambda = const$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2f}\left(\delta^i_j f_k + \delta^i_k f_j - \delta_{ik} f_j\right)$$

Простое вычисление показывает, что $X(t)\cdot\overline{a^\circ}$, где $X(t)$ - решение уравнения $\dot{X}\cdot X^{d/2} = const$, является решением уравнения геодезических.

Более того, для любого вектора $\overline{b}$ векторное поле $\overline{b}\cdot\overline{X}(t)^{d/2}$ - параллельно вдоль этой геодезической.

Лемма 7. Вдоль геодезической $\gamma(t)$ имеет равенство

$$\tilde{P}_{ie} = R_{iq,ke} V^k V^q = \frac{\lambda^2}{2}\left((2-d) f_e a_i + f_{ie} a^2 - df\,\delta_{ie}\right)$$

где $R_{iq,ke}$ - тензор Римана,

(V^k) - вектор скорости геодезической.

Доказательство.

Мы будем для удобства пользоваться как нижними индексами a_i, так и верхними a^i, т.к. метрика позволяет не различать их.

Для $R_{iqke} = g_{i\alpha} R^\alpha_{q,ke}$ воспользуемся следующей формулой:

$$R_{iq,ke} = \frac{1}{2} g_{i\alpha}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 g_{ie}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i \partial x^e} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^e \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{qe}}{\partial x^i \partial x^k}\right)}_{\mathrm{I}} +$$

$$\underbrace{+ g_{mp}\left(\Gamma_{qk}^{m}\Gamma_{ie}^{p} - \Gamma_{qe}^{m}\Gamma_{ik}^{p}\right)}_{\text{II}}$$

Напомним, что

$$f_{;i}a^{i} = df$$

$$f_{ij}a^{i} = (d-1)f_{j}$$

$$g_{ij} = f\delta_{ij}$$

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2f}\left(\delta_{j}^{i}f_{k} + \delta_{k}^{i}f_{j} - \delta_{kj}f_{i}\right)$$

$$\text{II} = g_{mp}\left(\Gamma_{iq}^{m}\cdot\Gamma_{ke}^{p} - \Gamma_{qe}^{m}\cdot\Gamma_{ik}^{p}\right) = f\left(\Gamma_{qk}^{p}\cdot\Gamma_{ie}^{p} - \Gamma_{qe}^{p}\cdot\Gamma_{ik}^{p}\right)^{*}$$

$$f\Gamma_{qk}^{p}\cdot\Gamma_{ie}^{p}V^{q}V^{k} = f\Gamma_{ie}^{p}\left(\Gamma_{qk}^{p}V^{q}V^{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma_{ie}^{p}\cdot\lambda^{2}\left(\delta_{q}^{p}f_{k} + \delta_{k}^{p}f_{k} - \delta_{kq}f_{p}\right)a^{q}a^{k} =$$

$$= \frac{\lambda^{2}}{2}\Gamma_{ie}^{p}\left(da^{p}f + dfa^{p} - a^{2}f_{e}\right) = \frac{\lambda^{2}}{2}\Gamma_{ie}^{p}\left(2dfa^{p} - a^{2}f_{p}\right)$$

$$f\Gamma_{qe}^{p}\Gamma_{ik}^{p}V^{q}V^{k} = f\left(\Gamma_{qe}^{p}V^{q}\right)\left(\Gamma_{ik}^{p}V^{k}\right) =$$

$$= \frac{\lambda^{2}}{4f}\left(\delta_{q}^{p}f_{e} + \delta_{e}^{p}f_{q} - \delta_{qe}f_{p}\right)a^{q}\cdot\left(\delta_{i}^{p}f_{k} + \delta_{k}^{p}f_{i} - \delta_{ki}f_{p}\right)a^{k} =$$

$$= \frac{\lambda^{2}}{4f}\left(f_{e}a^{p} + df\delta_{e}^{p} - f_{p}a^{e}\right)\left(f_{i}a^{p} + df\delta_{ip} - f_{p}a^{i}\right)$$

Собирая вместе получаем:

$$\underline{\mathrm{II}} \cdot v^{\ell} v^{k} = \frac{\lambda^2}{4f}\Big[3dff_{\ell} a^{i} + 3dff_{i} a^{\ell} - 3f_{\ell} f_{i} a^{2} - 3d^{2} f^{2} \delta_{i\ell} + $$
$$+ \delta_{i\ell} a^{2} (f_{p})^{2} - a^{i} a^{\ell} (f_{p})^{2}\Big]$$

$$\underline{\mathrm{I}} \cdot v^{k} v^{q} = \frac{\lambda^2}{2}\left(\delta_{i\ell}\, d(d-1) f + f_{i\ell} d^{2} - (d-1) f_{\ell} a^{i} - (d-1) f_{i} a^{2}\right)$$

Окончательно получаем

$$\tilde{F}_{i\ell} = \frac{\lambda^2}{4f}\left[2(d+2) f_{\ell} a^{i} - d(d+2) f \delta_{i\ell} + 2 f_{i\ell} a^{2} - \frac{4}{f} f_{\ell} f_{i} a^{2} + \delta_{i\ell} \frac{a^{2}(f_{\ell})^{2}}{f}\right]$$

Из условия на точку $\bar{a}$, $f_{\ell} = \hat{\lambda} a_{\ell} \Rightarrow f_{\ell} a^{\ell} = \hat{\lambda} a^{2} = d f$

Упростим выражение:

1) $2[d+2] f_{\ell} a^{i} - \frac{4}{f} f_{i} f_{\ell} = 2(d+2)\lambda a^{\ell} a^{i} - \frac{4}{f} d a^{i} a^{\ell} \frac{df}{d} =$

$= (2(d+2) - 4d) d a^{i} a^{\ell} = 2(2-d) f_{\ell} a^{i}$

2) $\delta_{i\ell}\left(\frac{a^{2}}{f}(f_{p})^{2} - d(d+2) f\right) = \delta_{i\ell}\left(\frac{d}{d} d^{2} a^{2} - (d+2) d a^{2}\right) =$

$= -2df\delta_{i\ell}$

$$\tilde{F}_{i\ell} = \frac{\lambda^2}{4}\left(2(2-d) f_{\ell} a^{i} - 2d f \delta_{i\ell} + f_{i\ell} a^{2}\right)$$

Лемма доказана.

§ 3. Уравнение Якоби

Изучим теперь уравнение Якоби.

Пусть, как и раньше, a^0 – точка экстремума f на сфере $S^{n-1}(1)$, т.е. $(a^0)^2 = 1$, $f_i = \lambda a^i$

Обозначим через P_{ie} матрицу $P_{ie} = 2\bar{P}_{ie}/\lambda^2$

Пусть $y_1, \dots y_n$ – собственные векторы матрицы P_{ie} с нормой I (В метрике $ds^2 = f\,dl^2$, где dl^2 – евклидова метрика), то есть $ds^2(y_i) = f\cdot dl^2(y_i) = 1$.

$y_1 = v$ – вектор скорости геодезической $g(t)$ в точке a^0.

$$g(t) = x(t)\cdot a^0$$

(см. лемму 6)

$$\|g(t)\| = |\dot{x}|\cdot\|a\|_{евкл}\cdot x^{d/2}\cdot f(a)^{1/2} = \dot{x}\cdot x^{d/2}\,Vol(a) = 1 \Rightarrow$$

$$x(t) = (At+A)^{1/m+1}, \text{ где } m = d/2, \quad A = \frac{m+1}{Vol\,a}$$

Пусть $\mu_1 \dots \mu_n$ собственные значения $P_{ie}(a^0)$

Ортонормированные поля ($P_{ie}(a^0)$ – симметричная) имеют вид $\bar{y}_i\cdot Y(t)$. Тогда $\|y_i\|^2_{евкл}\cdot Y^2 x^d f(a) = 1$, но

$$\|y\|^2_{евкл}\cdot f(a) = 1 \Rightarrow Y = x^{d/2} = (At+A)^{-\frac{m}{m+1}}$$

В базисе $\bar{y}_i\cdot Y(t)$ уравнение Якоби имеет вид (см. I8).
Из нашего выбора $y_1 \dots y_n$ следует, что $a^i_j = 0$ при $i \neq j$

$$\tilde{P}_{ie}(\rho(t)) = \frac{\lambda^2}{2} X^d P_{ie}(\bar{a}_0)$$

$$\tilde{a}_j^i = \frac{\lambda^2}{2} X^d \cdot Y^2 \cdot \mu_i \cdot \|y_i\|^2_{евкл} = \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\mu}_i \cdot f(a)$$

$$v^i = \lambda X(t) \cdot a^i \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\dot{X}}{X} = \frac{A}{(m+1)(At+A)} = \frac{1}{(t+1)(m+1)}$$

Следовательно

$$\tilde{a}_j^i = -\frac{\tilde{\mu}_i}{2(m+1)^2(t+1)^2 f(a)} = \frac{C}{(At+B)^2}$$

Как известно, решение уравнения $\ddot{\varphi} + \frac{C\varphi}{(At+B)} = 0$

имеет сопряженные точки $\Leftrightarrow$ $\frac{4C}{A^2} > 1$. (см. [9])

в нашем случае $C = -\tilde{\mu}_i$

$$A^2 = 2(m+1)^2 f(a)$$

Таким образом получаем:

Лемма 8. На геодезической $\rho(t)$ существуют сопряженные точки $\Leftrightarrow$ когда хотя бы одного собственного значения матрицы $P_{ie}(a)$ выполнено неравенство

$$\frac{-2\tilde{\mu}_i}{(m+1)^2 f(a)} > 1 ;$$

$2m = d$ степень однородности f . Мы изучали случай, когда f - однородная функция степени d .

§ 4

Таким образом изучение уравнения Якоби сводится к исследованию спектра матрицы

$$P_{il} = \left((2-d) f_l a^i + f_{il} a^2 - d f \delta_{il}\right)$$

Лемма 9 $y_1 \ldots y_n$ - ортогональны и им соответствуют отрицательные собственные значения.

Кроме того $y_1 \ldots y_n$ являются также собственными векторами гессиана (f_{il}).

Доказательство

Ортогональность следует из симметричности P_{il}.

$$(2-d) f_l a^i y^l_k = 0, \text{ т.к } f_l = \lambda a_l, \ k > 1 \Rightarrow$$

собственные векторы P_{il} и f_{il} совпадают.

Отрицательность следует из того, что (f_{il}), ограниченная на касательную гиперплоскость к сфере в точке a^0, отрицательно определена (a^0 - точка максимума).

Доказательство окончено.

Таким образом необходимо найти наименьшее отрицательное значение матрицы (f_{il}). (Наибольшее по модулю).

Сделаем еще упрощение

$$b_i = f_i / f; \quad b_{il} = (f_i / f)_l$$

Имеем в точке: $b_i = \lambda a^i$

$$f_i a^i = d f = f b_i a^i = f \lambda a_i a^i = f \lambda \Rightarrow \lambda = d$$

$$b_i = d a_i$$

$$f_{il} = f_l b_i + f b_{il} = f (b_l b_i + b_{il})$$

$$P_{il} = f\left[(2-d)\,d\,a_l a_i + b_i b_l + b_{il} - d\delta_{il}\right) = f(2d\,a_i a_l - d\delta_{il} + b_{il})$$

Таким образом нам необходимо оценить спектр матрицы

$$b_{il} = (\ln f)_{il}$$

для $\tilde{\mu}_i$ - собственного значения P_{il}

и μ_i - соответствующего собственного значения b_{il} будет соотношение $\tilde{\mu}_i = f(\mu_i - d)$

Но оценки на спектр матрицы $(\ln v)_{il}$ получены в § 4 части I

$$SU(n) \qquad \mu \geq (1-n)\,d$$

$$SO(2n) \qquad \mu \geq (1-2n)\,d$$

$$\begin{matrix} SO(2n+1) \\ Sp(n) \end{matrix} \qquad \mu \geq (1-2n)\,d$$

Таким образом оценки на спектр матрицы P_{il} таковы:

$$SU(n): \quad \tilde{\mu} \geq f\left((1-n)d - d\right) = -fnd$$

$$SO(n): \quad \tilde{\mu} \geq f\left((1-2\left[\tfrac{n}{2}\right])d - d\right) = -2fd\left[\tfrac{n}{2}\right]$$

$$Sp(n): \quad \tilde{\mu} \geq f\left((1-2n)d - d\right) = -2fnd$$

$[k]$ - целая часть числа .

Прдставим полученные значения в неравенство

$$\frac{-2\tilde{\mu}}{(m+1)^2 f} > 1$$

$SU(n)$:

$$d = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1)$$

$$\frac{-2fn \cdot 2n(n-1)}{\left(\frac{2n(n-1)}{2}+1\right)^2 f} > 1; \quad (6-n)n^3 - 7n^2 + 2n - 1 > 0$$

$n = 4 : 2.64 - 7.16 + 24.1 =$

$= (8-7).16 + 7 < 0$ – есть сопряженные точки

$n = 5 : (6-5).125 - 7.25 + 9 =$

$= (5-7).25 + 9 > 0$ – нет сопряженных точек

$SO(2n)$: $\quad d = 2 \cdot \frac{4}{2} n(n-1) = 4n(n-1)$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot fn \cdot 4n(n-1)}{(2n(n-1)+1)^2 f} > 1.$$

Решая неравенство, получим критическое значение $n = 4$;

$SO(2n+1)$
$Sp(n)$:

$$d = 4n(n-1) + 4n = 4n^2$$

$$\frac{2 \cdot 2 f_n \cdot 4n^2}{(2n^2+1)^2 f} > 1.$$

Решая неравенство, получим критическое значение $n = 3$;

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По-видимому, можно все оценки п.3 Теоремы уточнить и указать с какой размерности точно отделяются глобально-минимальные конусы присоединенного действия. Не ясно, будут ли в данной ситуации конусы, являющиеся устойчивыми, но не глобально-минимальными, или же все устойчивые конусы автоматически являются минимизирующими площадь?

Вполне возможно, что метод, позволяющий классифицировать эквивариальные конусы коразмерности один, в случае больших коразмерностей не будет эффективен, т.е. не приведет к точным значениям. Во всяком случае диссертант является не единственным человеком, использовавшим этот метод, и вынужденный ограничиться грубыми оценками (см.23).

На данный момент возникает такая картина:

Найдены для каждой серии классических групп Ли два числа n_0 и n_1.

при $n \leq n_1$ - конусы неустойчивы

при $n \geqslant n_0$ - конусы ГМ

при $n_1 < n < n_0$ - конусы устойчивы, но об их ГМ - ти ничего пока нельзя сказать, кроме того, что грань n_0 заведомо можно опустить.

Можно заметить, что случай G_2 известен.
Конус размерности 13 (H^2 - двумерная картановская подалгебра, орбита двенадцатимерна), коразмерности 1. Конус неустойчив, как видно из теоремы классификации эквивариантных конусов коразм.1. [9].

рис 1

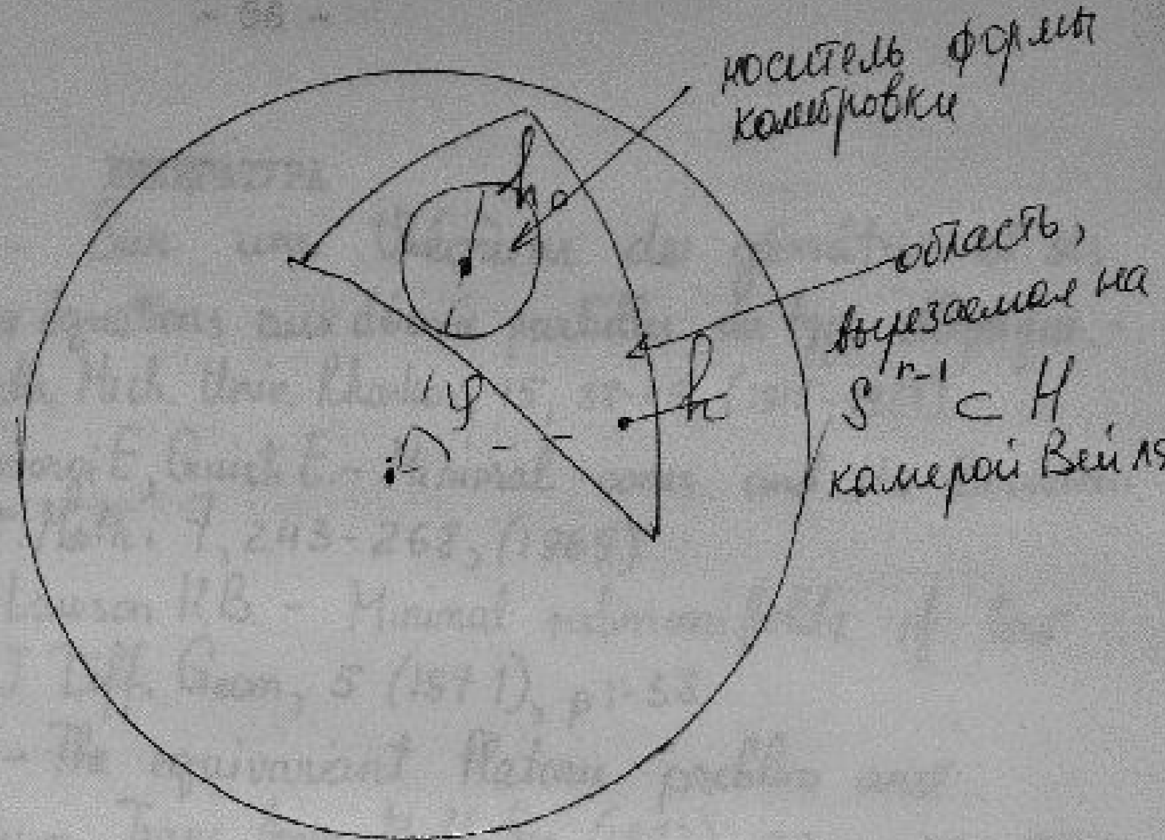
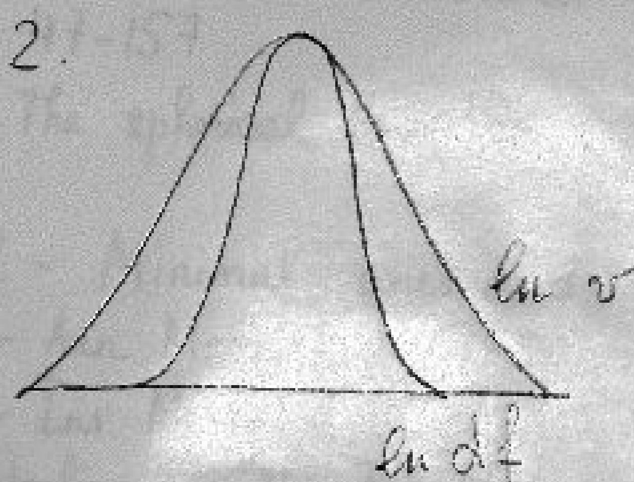

носитель формы калибровки
h_0
область, вырезаемая на
$S^{n-1} \subset H$
камерой Вейля
h
φ

рис 2.


$\ln v$
$\ln df$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein N. - Sur une théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivée partielles du type elliptique. - Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov, 15, 38-45 (1915-1917)

2. Bombieri E, DeGiorgi E, Guisti E. - Minimal cones and the Bernstein problem. - Invent. Math. 7, 243-268, (1969)

3. Hsiang W-Y, Lawson H.B. - Minimal submanifolds of low cohomogeneity. - J. Diff. Geom, 5 (1971), p1-38

4. Lawson H.B. - The equivariant Plateau problem and interior regularity. - Trans. Amer. Math. Soc, (1972) 173, p231-249

5. Harvey R, Lawson H.B. - Calibrated Geometries, Acta Math, 148 (1982), p. 47-157

6. Tomter P. - The spherical Bernstein problem in even dimensions. to appear

7. Hsiang W.-Y. - Minimal cones and the spherical Bernstein problem, I. - Ann Math, v.118 (1983), N1
II. - Inv. Math, v74 (1983), N3
Hsiang W.-Y, Sterling I - III - Inv. Math, v.85 (1986), N2.

8. Дао Чонг Тхи, А.Т.Фоменко - Минимальные поверхности и проблема Плато - М., 1987.

9. А.Т.Фоменко - Вариационные методы в топологии - М.: Наука, 1982.

10. Fleming W. - Flat chaines over a finite coefficient group. - Trans. Amer. Math. Soc, 121 (1966), N1, p160-186.

11. Simons J. - Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. Math, 88 (1968), p.62-105.

12. DeGiorgi E. - Una estensione del teorema di Bernstein, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, v.19 (1965), p.79-85

13. Chern S.S. - Diff. Geom; its past and its future; - Congress internation des Mathématiciens, 1970, 1971, 1, p 41-53

14. Calabi E. - Minimal immersiones of surfaces in euclidian spheres, J.Diff. Geom. -(1967), v1, N2, p 111 - 125

15. Almgren F.J. - Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, - Ann. Math. 84(1966), N3, p.277-293

16. Lawlor G. - A sufficient criterion for a cone to be area minimising - a Dissertation for the degree of dr.ph. - Stanford Univ, department of Math.

17. Simoes P. - On a class of minimal cones in $\mathbb{R}^n$ - AMS Bull, 80(1974), p488-489

18. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.

19. Reifenberg E.R. - On the analyticity of minimal surfaces, Ann. Math, 80 (1964), N1, p.15-21

20. Federer H. - Geometric measure theory. - Berlin: Springer, 1969

21. Балинская И.С. - Минимальные конусы, присоединенного действия компактных групп Ли , МН , 1986, т.41, вып.6, стр.165-166.

22. Иванов А.О. - Глобально-минимальные симм. поверхн. в евклидовом пространстве - Геом . Дифф. ур. и мех-ка, -М.: Избр. МГИ, 1986.

23. Иванов А.О. - Минимальные конусы большой коразмерности. Новое в глобальном анализе - Избр. Воронежского университета, 1987.

24. Иванов А.О. Достаточное условие устойчивости симм. конусов любой коразмерности в евкл. простр. - Труды сем по вект. и тенз. анализу.

25. Балинская И.С. - Объемы орбит гладких действий компактных групп Ли, Новое в глобальном анализе, 1986, изд. Воронеж. унив.

26. Балинская И.С. - Минимальные конусы присоединенного действия групп Ли- Труды сем. вект. тенз ~~Ан~~ М, МГУ, 1988, вып. 23, стр. II-I7.

27. Балинская И.С. - Глобальная минимальность конусов присоед. действ. классич. групп Ли - Труды сем по вект и тенл. анализу, (в печати).

28. Балинская И.С. - Объёмы орбит гладких действий групп Ли, изд МГУ, 1986, с.49-51.

29. Балинская И.С. - Minimal cones of the adjoined action of classical Lee groups, - Тезисы XIII Международной топологической конференции, Баку, 1987г, стр.

СОДЕРЖАНИЕ.