

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 517.938.5+514.762

Новиков Дмитрий Вячеславович
Топология особенностей
интегрируемых гамильтоновых систем
с некомпактными поверхностями уровня

01.01.04 — геометрия и топология
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
Академик РАН А. Т. Фоменко,
Проф. А. А. Ошемков

Москва — 2013

Оглавление

Введение	3
1 Случай Соколова на $e(3)$	22
1.1 Введение	22
1.2 Бифуркационные значения гамильтониана	23
1.3 Топология изоэнергетической поверхности	28
1.4 Бифуркационная диаграмма отображения момента	35
1.5 Индексы критических точек	48
1.6 Доказательство полноты векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$.	55
1.7 Топология совместной поверхности уровня H и K	59
1.8 Перестройки	65
2 Случай Соколова на $so(3, 1)$	68
2.1 Введение	68
2.2 Бифуркационные значения гамильтониана	68
2.3 Топология изоэнергетической поверхности	71
2.4 Бифуркационная диаграмма отображения момента	75
2.5 Неполнота поля $\text{sgrad } H$	82
2.6 Индексы критических точек	84

2.7 Топология совместной поверхности уровня H и K 84

Литература **102**

Введение

Описание работы

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена исследованию топологических особенностей интегрируемого случая В. В. Соколова (далее – случай Соколова) на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$. Это гамильтонова система с двумя степенями свободы. Указанные случаи отличаются от большинства известных систем тем, что совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла являются некомпактными, а в случае $so(3, 1)$, кроме того, поток гамильтониана является неполным.

Как известно, основы теории топологической классификации были заложены А. Т. Фоменко в работах [1], [2], [3], [4], [5] и других. Указанный новый подход в изучении интегрируемых систем, предложенный А. Т. Фоменко, был затем продолжен А. Т. Фоменко и Х. Цишангом, см., например, работу А. Т. Фоменко и Х. Цишанга [6]. Ими был открыт топологический инвариант интегрируемых систем (именуемый инвариантом Фоменко-Цишанга). Это граф с числовыми метками, являющийся полным инвариантом таких систем: две системы лиувиллево эквивалентны, если и только если графы

Фоменко-Цишанга совпадают. Далее школа А. Т. Фоменко разработала методы вычисления меченых молекул, см., например, работу А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко [7]. Бифуркационные диаграммы многих важных интегрируемых систем были вычислены М. П. Харламовым в книге [8]. В серии работ А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [9], А. А. Ошемкова [10], П. Е. Рябова [11] и других были найдены классифицирующие инварианты для многих конкретных физических и механических интегрируемых систем. Как правило, в таких системах совместные поверхности уровня интегралов компактны. Результаты теории топологической классификации, полученные школой А. Т. Фоменко, подробно изложены А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко в книге [12].

Однако теория топологической классификации некомпактных систем до сих пор не разработана, например, нет конечного списка атомов данной сложности (даже само понятие сложности в некомпактном случае пока что не определено). Мы надеемся, что результаты настоящей диссертации смогут быть полезны при построении такой теории.

При анализе некомпактных систем приходится сталкиваться с проблемой полноты полей. Полнота является существенным условием в Теореме Ливилля, в компактном случае она получается автоматически. В отсутствие полноты (а в случае Соколова на $so(3, 1)$ так и происходит) связные компоненты совместной поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла не обязательно являются торами, цилиндрами или плоскостями. Аналогичная ситуация наблюдается в случае комплексных гамильтоновых систем с неполными потоками в работе Т. А. Лепского [13].

Заметим, что даже тогда, когда потоки полны, доказательство этого факта может быть нетривиально. Для доказательства полноты нет общих методов, например, критерий того, когда однородное квадратичное поле в \mathbb{R}^2 является полным, появился совсем недавно (см. работу [14]). Автору неизвестны работы, где приводятся критерии полноты для полиномиальных векторных полей степени ≥ 2 . Среди работ, посвященных доказательству полноты потоков, отметим диссертацию А. Ю. Москвина [15], в которой исследуется полнота потоков интегралов, полученных методом Садэтова.

Другим препятствием при анализе некомпактных систем является то, что в некомпактном случае могут быть некритические бифуркационные значения (например, так оказывается в изучаемом случае Соколова на $e(3)$). Соответственно для построения бифуркационной диаграммы недостаточно найти критические точки и их образы. Необходимо изучать, как устроена совместная поверхность уровня.

Сама общая задача определить и классифицировать некомпактные перестройки (по аналогии с компактной классификацией), в рамках которой в настоящей работе проводится исследование случая Соколова, поставлена А. Т. Фоменко.

Цели исследования

Диссертационная работа преследует следующие основные цели:

1. Исследование топологии случая Соколова на $e(3)$.
2. Исследование топологии случая Соколова на $so(3, 1)$.

Методы исследования

При исследовании применяются методы теории топологической классификации интегрируемых систем, разработанной А. Т. Фоменко и его школой, а также методы топологического анализа, разработанные М. П. Харламовым. Кроме того, используются дифференциально-геометрические методы, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и линейной алгебры.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

1. для случая Соколова на $e(3)$

- описана топология изоэнергетической поверхности гамильтониана (см. Теорему 2);
- найдены бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. Утверждение 1.2.3), и отображения момента (см. Теорему 5);
- вычислены индексы критических точек (см. Утверждение 1.5.1);
- описаны совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. Теорему 6);
- доказана полнота полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$, что является важным условием в теореме Лиувилля (см. параграф 1.6).

2. для случая Соколова на $\text{so}(3, 1)$

- описана топология изоэнергетической поверхности гамильтониана (см. Теорему 7);
- найдены бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. Утверждение 2.2), и отображения момента (см. Теорему 8);
- найдены индексы критических точек (см. Утверждение 2.6.1);
- описаны совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. Теорему 9);
- доказано, что поток векторного поля, отвечающего гамильтониану, неполон (см. параграф 2.5).

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение. Предложены методы доказательства полноты полиномиальных векторных полей, анализа топологии гамильтоновых систем с некомпактными поверхностями уровня, в том числе в случае неполноты потоков. Описанные примеры систем с некомпактными особенностями могут быть полезны для построения теории некомпактных особенностей.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы докладывались

- на конференции «Александровские чтения» (Москва, с 30 мая по 02 июня 2006 г.);

- на конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, с 17 по 27 апреля 2006 г.);
- на международной конференции «Differential and Functional Differential Equations 2008» (Москва, с 17 по 24 августа 2008 г.);
- на семинаре в Университете г. Бохум (Германия, май 2008 г.);
- на конференции «Ломоносов» (Москва, с 11 по 15 апреля 2011 г.);
- на семинаре имени В. В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого и проф. А. В. Карапетяна (Москва, 23 октября 2013 г.);
- неоднократно на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А. Т. Фоменко и проф. А. С. Мищенко (мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ [16], [17], [18], [19], [20], из них 2 в изданиях по перечню ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и двух глав. Текст диссертации изложен на 106 страницах. Список литературы содержит 32 наименования.

Содержание работы

Во **Введении** приводится постановка задачи, кратко излагаются необходимые понятия, дается обзор полученных результатов.

Глава 1 состоит из 8 параграфов и содержит исследование случая Соколова на $e(3)$.

В первом параграфе кратко излагаются полученные в **Главе 1** результаты.

Во втором параграфе находятся бифуркационные значения гамильтониана. Основным результатом параграфа – следующее

Утверждение 1.2.3 *Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $e(3)$ (при $\varkappa = 0$) являются следующими кривыми на плоскости (g, h) :*

1. $h = 0, g \in \mathbb{R}$;
2. $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R}$;
3. $h = -\frac{1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R}$,

причем точки вида 1–2 являются критическими значениями, а точки вида 3 – некритическими бифуркационными значениями.

Третий параграф посвящен исследованию топологического типа изоэнергетической поверхности уровня гамильтониана. Доказывается следующая

Теорема 2 *Топология изоэнергетической поверхности уровня $Q_{g,h}^3$ случая Соколова на $e(3)$ при регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационным значениям гамильтониана H , (g, h) имеет следующий тип:*

1. $2\mathbb{R}^3$ при $h < -\frac{1}{4\alpha}$;
2. Двумерный диск с тремя дырками, умноженный на \mathbb{R} , при $h > -\frac{1}{4\alpha}$,

$$h \neq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, h \neq 0.$$

В четвертом параграфе находится бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова на $e(3)$. В нем доказана следующая

Теорема 5 Бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на $e(3)$ состоит из следующих кривых:

1) луча $k = -h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$,

при этом в прообразе получаются 2 критические окружности;

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h$, $h \in \mathbb{R}$,

при этом в прообразе 2 критические прямые;

3) отрезка $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$,

при $h < -\frac{1}{4\alpha}$ в прообразе будут 4 критические прямые, а при $h > -\frac{1}{4\alpha}$ -

2 критические окружности;

4) луча $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

Причем типы (1–3) являются критическими значениями, а тип 4 – некритическими бифуркационными значениями.

Пятый параграф посвящен вычислению индексов критических точек. Его результатом является следующее

Утверждение 1.5.1 Индексы критических точек случая Соколова на $e(3)$ имеют следующий тип:

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 2;

2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h > -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 1;

3. Прообразы кривой $k = -h + \alpha g^2$, $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ имеют индекс 2;

4. Прообразы кривой $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ имеют индекс 2.

В шестом параграфе доказывается полнота векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$.

В седьмом параграфе исследуется топологический тип совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K . Его основной результат – следующая

Теорема 6 При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K для случая Соколова на $e(3)$ имеет следующий тип:

1. Пустое множество над верхней границей бифуркационной диаграммы;
2. Два цилиндра под параболой $k = -\alpha h^2 - h$;
3. Четыре цилиндра над параболой $k = -\alpha h^2 - h$, но под лучом $k = -h$;
4. Два тора над лучом $k = -h$, но под лучом $k = -h + \alpha g^2$.

Восьмой параграф посвящен описанию перестроек случая Соколова на $e(3)$.

Глава 2 посвящена исследованию случая Соколова на $so(3, 1)$ и состоит из семи параграфов.

В первом параграфе кратко излагаются полученные в **Главе 2** результаты.

Во втором параграфе находятся бифуркационные значения гамильтониана. Основной результат – следующее

Утверждение 2.2.3 Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $so(3, 1)$ (при $\varkappa < 0$) являются следующими кривыми на плоскости (g, h) :

1. $h = 0, g \in \mathbb{R}$;
2. $h = \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, g \in \mathbb{R}$,

причем эти точки являются критическими значениями.

В третьем параграфе находится топологический тип изоэнергетической поверхности уровня гамильтониана. Доказана следующая

Теорема 7 Изоэнергетическая поверхность $Q_{g,h}^3$ для гамильтониана случая Соколова на $\mathfrak{so}(3,1)$, $h \neq 0$, $h \neq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$, диффеоморфна открытому двумерному диску с 3 дырками.

Четвертый параграф посвящен нахождению бифуркационной диаграммы отображения момента. В нем доказана следующая

Теорема 8 Бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на $\mathfrak{so}(3,1)$ состоит из следующих кусков:

1) куска параболы $k = \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,

при этом в прообразе получаются 2 критические окружности $(0, S_2, 0, Q_1, 0, Q_3)$.

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h \in \mathbb{R}$,

при этом в прообразе 2 критические прямые $(S_1, 0, 0, 0, Q_2, Q_3)$.

3) отрезка $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,

при этом в прообразе будут 2 критические окружности $(S_1, S_2, S_3, 0, Q_2, \frac{q}{2\alpha})$.

4) изолированной особой точки $h = k = 0$.

В пятом параграфе доказано, что гамильтоново векторное поле случая Соколова на $\mathfrak{so}(3,1)$ неполно.

В шестом параграфе находятся индексы критических точек. Доказано следующее

Утверждение 2.6.1 Индексы критических точек случая Соколова на $\mathfrak{so}(3,1)$ имеют следующий тип:

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 2;
2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h > -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 1;
3. Прообразы кривой $k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$, $h > \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$

имеют индекс 2;

4. Прообразы кривой $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$

имеют индекс 2.

В седьмом параграфе найден топологический тип совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K . Доказана следующая

Теорема 9 При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ имеет следующий тип:

1. Пустое множество при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$, пустое множество при $k > \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, пустое множество при $k > \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$;
2. Две двумерные сферы с четырьмя проколами каждая при $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$ при $g \neq 0$;
3. Два двумерных тора при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $k < \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$.

Основные понятия и определения

Определение 1. Симплектическое многообразие (M, ω) – это гладкое $2n$ -мерное многообразие M с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой ω , называемой симплектической формой.

Определение 2. Для любой гладкой функции H на симплектическом мно-

гообразии (M, ω) векторное поле косоградиент функции H (обозначается $\text{sgrad } H$) определяется из следующего соотношения:

$$v(H) = \omega(v, \text{sgrad } H),$$

где v – произвольное векторное поле на M .

Определение 3. Динамическая система на симплектическом многообразии M размерности $2n$, соответствующая векторному полю $\text{sgrad } H$, называется гамильтоновой системой с гамильтонианом H и n степенями свободы. В локальных координатах (x^1, \dots, x^{2n}) на M она имеет вид

$$\dot{x}^i = (\text{sgrad} H)^i = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j},$$

где ω^{-1} – матрица, обратная к матрице симплектической формы ω .

Определение 4. Скобкой Пуассона называется билинейная кососимметрическая операция на пространстве гладких функций на M , определяемая следующей формулой:

$$\{f, g\} = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Гамильтонова система в терминах скобки Пуассона может быть записана следующим образом:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}.$$

Определение 5. Функция F называется (первым) интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом H , если F постоянна вдоль интегральных траекторий этой системы.

Ясно, что F — первый интеграл тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$

Определение 6. Гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} называется интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n на M^{2n} таких, что:

1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы системы;

2) f_1, \dots, f_n функционально независимы на M^{2n} , то есть почти всюду на M^{2n} их градиенты линейно независимы (точки, в которых градиенты линейно зависимы, называются особыми);

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ для любых i и j от 1 до n ;

4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны для всех i от 1 до n , т. е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Теорема 1. (Лиувилля) Пусть $v = \text{sgrad } H$ — интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} с интегралами f_1, \dots, f_n . Тогда неособая (то есть не содержащая особых точек) связная компонента совместной поверхности уровня интегралов f_1, \dots, f_n диффеоморфна $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где T^k — k -мерный тор.

Определение 7. Отображением момента для интегрируемой гамильтоновой системы с интегралами f_1, \dots, f_n называется отображение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Определение 8. Пусть $F: X \rightarrow Y$ — дифференцируемое отображение многообразий. Отображение называется локально-тривиальным над точкой $y_0 \in Y$, если существует такая окрестность U точки y_0 в Y , что $F^{-1}(U)$ диффеоморфно $F^{-1}(y_0) \times U$, и этот диффеоморфизм φ замыкает диаграмму

(p_2 – проекция на второй сомножитель)

$$\begin{array}{ccc}
 F^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & F^{-1}(y_0) \times U \\
 \downarrow F & & \swarrow p_2 \\
 U & &
 \end{array}$$

Определение 9. Бифуркационным множеством, или бифуркационной диаграммой, Σ отображения F называется множество бифуркационных значений, то есть тех точек $y \in Y$, над которыми F не является локально-тривиальным.

Определение 10. Точка $x \in X$ называется критической для отображения F , если ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. Критическими значениями называют образы критических точек при отображении F .

Замечание 1. Критические значения принадлежат бифуркационной диаграмме.

Доказательство. Действительно, если точка $x \in X$ – критическая для отображения F , то по определению ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. С другой стороны, если отображение F локально-тривиально над точкой $y = F(x)$, то F равно $p_2 \circ \varphi$ в некой окрестности точки x . Но $p_2 \circ \varphi$ – отображение постоянного ранга, равного размерности Y . В критической же точке x ранг F меньше, чем размерность Y . □

Определение 11. Изоэнергетической поверхностью Q^3 гамильтоновой системы с двумя степенями свободы называется поверхность уровня гамильтониана H .

Определение 12. Слоение на M , образованное связными компонентами совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n , называется слоением Лиувилля, соответствующим этой системе.

Пусть \mathfrak{g} – конечномерная алгебра Ли с базисом e_1, \dots, e_n , а \mathfrak{g}^* – соответствующая коалгебра с дуальным базисом $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$, то есть $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$. Пусть x_1, \dots, x_n – аффинные координаты на \mathfrak{g}^* , соответствующие базису e_1, \dots, e_n , а c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли \mathfrak{g} : $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$.

Определение 13. Скобка Пуассона-Ли на пространстве \mathfrak{g}^* задается следующей формулой:

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f и g – гладкие функции на \mathfrak{g}^* .

Определение 14. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на \mathfrak{g}^* , где H – гладкая функция (гамильтониан) на \mathfrak{g}^* , называются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли \mathfrak{g}^* .

Они часто встречаются в механике и физике. Например, различные задачи о движении твердого тела задаются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $\mathfrak{e}(3)^*$.

Определение 15. Функции, принадлежащие ядру скобки Пуассона-Ли, называются функциями Казимира.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона-Ли на пространстве \mathbb{R}^6 :

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} S_k,$$

где S_i и R_i – компоненты трехмерных векторов S и R , ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$, а \varkappa – произвольное действительное число. При $\varkappa > 0$ ($\varkappa = 1$) получаем, что скобка соответствует алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, при $\varkappa = 0$ – алгебре Ли $\mathfrak{e}(3)$, а при $\varkappa < 0$ ($\varkappa = -1$) – алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$. Функции Казимира:

$$f_1 = \varkappa S^2 + R^2, \quad f_2 = \langle S, R \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^3 .

Классические интегрируемые случаи на этом семействе алгебр Ли включают случаи Эйлера:

$$H = \langle AS, S \rangle,$$

$$K = \langle S, S \rangle,$$

Лагранжа:

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2) + \alpha R_3,$$

$$K = S_3,$$

Ковалевской:

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 2S_3^2) + \alpha R_1,$$

$$K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right)^2 + \varkappa \alpha^2 \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right) + (S_1 S_2 - \alpha R_2)^2.$$

Здесь A – постоянная симметричная матрица, α, β – произвольные действительные параметры.

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = \langle AS, S \rangle + \langle b, S \times R \rangle,$$

где A – постоянная симметричная матрица, $b \neq 0$ – постоянный вектор, \times – векторное произведение. Подобные гамильтонианы могут представлять интерес, например, в рамках модели Пуанкаре-Жуковского, описывающей движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вихревой жидкостью, см. работу А. Пуанкаре [21]. Другие возможные приложения квадратичных гамильтонианов обсуждаются в книге А. В. Борисова и И. С. Мамаева [22].

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым и В. В. Соколовым в работах [23, 24, 25]. Случай Соколова:

$$H_1 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1,$$

$$K_1 = Q_3(\varkappa S^2 - R^2) - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha\right) Q_3^2, \text{ где } Q = S \times R.$$

Случай Борисова-Мамаева:

$$H_2 = \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha}\right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1,$$

$$K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 S^2 + 4\alpha S_2(S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2 R^2, \text{ где } Q = S \times R.$$

Можно считать, что \varkappa равно 1, -1 или 0. Действительно, замена $R' = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa|}} R$ и $\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\varkappa|}}$, при $\varkappa \neq 0$, приводит нас к этому случаю.

Как известно (см., например, книгу В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [26]), ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиты общего положения коприсоединенного представления соответствующей группы Ли задает гамильтонову систему на $M_{c,g}^4 = \{(S, R) \mid f_1(S, R) = c, f_2(S, R) = g\}, c \neq 0$. В нашем случае можно считать, что $c = \pm 1$. Действительно, замена $S = \sqrt{|c|}S', R = \sqrt{|c|}R'$ приводит нас к этому случаю, при этом векторное поле $sgrad H$ просто умножается на $\sqrt{|c|}^3$. Здесь существенно, что гамильтониан является однородным. Поэтому в этой работе мы считаем, что $c = 1$.

Кроме того, следуя работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27], без ограничения общности можно полагать, что $g \geq 0$, поскольку при замене

$$(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \rightarrow (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$$

f_1, H, K сохраняются, f_2 меняет знак.

Далее можно считать, что $\alpha > 0$, так как замена $S_1 \rightarrow -S_1, R_1 \rightarrow -R_1, \alpha \rightarrow -\alpha$ приводит нас к этому случаю.

Как и в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27], при $\varkappa > 0$ можно исследовать только случай $0 < \alpha \leq \sqrt{\varkappa}$, так как при замене $S_1 \leftrightarrow S_2, R_1 \leftrightarrow R_2, \alpha \rightarrow \frac{\varkappa}{\alpha}$ инварианты f_1, f_2 сохраняются, а гамильтониан и дополнительный интеграл меняют знак (что не влияет на топологию).

Под изучением системы мы понимаем исследование слоения Лиувилля, слоями которого являются связные компоненты поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла. Слоение Лиувилля случая Борисова-Мамаева на $e(3)$ исследовано в работе П. Е. Рябова [11], где указанный случай назван случаем Соколова. Лиувиллево слоение интегрируемой системы Соколова на алгебре Ли $so(4)$ описано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигат-

дуста [27], а также в работах Г. Хагигатдуста [28] и [29]. В настоящей работе мы будем изучать строение интегрируемого случая Соколова на оставшихся в указанном семействе некомпактных алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность А. Т. Фоменко и А. А. Ошемкову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь. Кроме того, хотелось бы выразить признательность М. П. Харламову за ценные обсуждения и поддержку. Без помощи указанных людей эта работа никогда бы не была написана.

Глава 1

Случай Соколова на $e(3)$

1.1 Введение

В этой главе мы будем изучать строение интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$. Оказывается, что в исследуемом случае связные компоненты совместных поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла могут быть торами или цилиндрами. Мы опишем топологию изоэнергетической поверхности гамильтониана (см. Теорему 2), бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. Утверждение 1.2.3), и отображения момента (см. Теорему 5), индексы критических точек (см. Утверждение 1.5.1), а также совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. Теорему 6) для случая Соколова на $e(3)$. Отметим также и то, что нам удалось доказать полноту полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$, что является важным условием в теореме Лиувилля (см. параграф 1.6).

Изучаемый случай характерен тем, что, в отличие от большинства известных случаев, на бифуркационной диаграмме кроме критических значений

будут и некритические бифуркационные значения. Кроме того, большой интерес представляет и анализ перестроек случая Соколова на $e(3)$, который мы тоже проводим (см. параграф 1.8).

В настоящей главе также исследовано, что происходит при ретракции с $so(4)$ на $e(3)$ с бифуркационной диаграммой для отображения, заданного гамильтонианом (см. параграф 1.2), и для отображения момента (см. параграф 1.4). Оказывается, что в этих двух случаях бифуркационные диаграммы являются пересечением бифуркационных диаграмм, полученных при помощи предельного перехода, с образом соответствующего отображения (см. Замечания 3 и 5).

1.2 Бифуркационные значения гамильтониана

Бифуркационные значения гамильтониана – значения, являющиеся бифуркационными для отображения $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$. Критическими точками гамильтониана являются те точки, где косо́й градиент гамильтониана равен нулю.

Выпишем явно поле $sgrad H$:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + \varkappa S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 R_3 + \varkappa S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 R_2\right) + R_1^2 + R_2^2 - \\ & & & - \varkappa S_1^2 - \varkappa S_2^2. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при $\varkappa = 1$ (случай $so(4)^*$) мы получим в точности

формулы (5) из работы А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27].

Приравняв нулю $sgrad H$, получаем следующее

Утверждение 1.2.1. *Для произвольного $\varkappa \neq -\alpha^2$ критические точки гамильтониана образуют следующие двупараметрические семейства. При этом $sgrad K$ в этих точках тоже равен нулю.*

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \frac{2\varkappa}{\alpha}R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm\sqrt{\varkappa}S_1, \frac{2\varkappa}{\alpha}S_1, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$.

Замечание 2. *Утверждение 1.2.1 – это обобщение Предложения 1 из статьи А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27].*

Выпишем отдельно приведенные выше семейства для случая $e(3)^*$ ($\varkappa = 0$):

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, 0, 0)$;
- 4) $(S_1, 0, S_3, 0, 0, 0)$;

Мы изучаем систему на $M_{1,g}^4$, поэтому надо добавить еще условия $f_1 = 1$, $f_2 = g$.

Рассмотрим, что будет происходить при ретракции $so(4)^*$ к $e(3)^*$, то есть переходе к пределу при $\varkappa \rightarrow +0$. Нам понадобится переформулировать Предложение 2 из работы А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27] для случая произвольного $\varkappa > 0$.

Утверждение 1.2.2. Для любого $\varkappa > 0$ критические точки гамильтониана на $M_{1,g}^4$ перечислены ниже:

1) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}$ имеются 4 точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \text{ где } \varkappa S_3^2 + R_3^2 = 1, S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = k = 0$;

2) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}$ имеются 4 точки вида

$$(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{\varkappa}{\alpha} S_2, \frac{g}{S_2}, 0), \text{ где } S_2^2 = \frac{1}{2\varkappa} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}}$$

$$\text{при этом } h = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \text{ и } k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\varkappa g^2);$$

3) при всех $g > \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\varkappa + 4\alpha^2}$ имеются 4 точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \sqrt{\varkappa} S_2, \sqrt{\varkappa} S_3), \text{ где } S_2^2 = \frac{1 - 2\sqrt{\varkappa}g}{4\alpha^2} \text{ и } S_3^2 = \frac{g(2\varkappa + 4\alpha^2) - \sqrt{\varkappa}}{4\sqrt{\varkappa}\alpha^2},$$

$$\text{при этом } h = -\frac{1}{4\alpha}(1 - 2\sqrt{\varkappa}g) \text{ и } k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\varkappa g^2);$$

4) при всех $0 \leq g \leq \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}$ имеются 4 точки вида

$$(S_1, 0, 0, \frac{g}{S_1}, \frac{\alpha}{2\varkappa S_1} - \alpha S_1, 0), \text{ где } S_1^2 = \frac{1}{2\varkappa} \pm \sqrt{\frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\varkappa(\varkappa + \alpha^2)'}}$$

$$\text{при этом } h = \frac{-\sqrt{\varkappa} \mp \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \text{ и } k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2);$$

5) при $g > \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varkappa}(\alpha^2 + 2\varkappa)}$ имеются 4 точки вида:

$$(S_1, 0, S_3, \sqrt{\varkappa} S_1, \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1, \sqrt{\varkappa} S_3), \text{ где } S_1^2 = \frac{\alpha^2(1 - 2\varkappa g)}{4\varkappa^2} \text{ и } S_3^2 = \frac{g\sqrt{\varkappa}(2\alpha^2 + 4\varkappa) - \alpha^2}{4\varkappa^2},$$

$$\text{при этом } h = \frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 2\sqrt{\varkappa}g) \text{ и } k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2).$$

Посмотрим теперь, что происходит с этими точками при предельном переходе $\varkappa \rightarrow +0$.

1) эта серия критических точек сохраняется, $\lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\varkappa} = +\infty$, поэтому для любого $g \geq 0$ получаем 2 критических точки вида $(0, 0, \pm g, 0, 0, \pm 1)$, при этом

$h = k = 0$;

$$2) \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\varkappa} + \sqrt{\frac{\alpha^2(1-4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}} = +\infty, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{1}{2\varkappa} - \sqrt{\frac{\alpha^2(1-4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}} = \frac{4\alpha^2 g^2 + 1}{4\alpha^2},$$

$$\lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha + \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} = +\infty, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha - \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha},$$

это означает, что для любого $g \geq 0$ будут 2 критических точки вида

$$(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2}, \frac{g}{S_2}, 0),$$

где $S_2^2 = \frac{4\alpha^2 g^2 + 1}{4\alpha^2}$, при этом $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ и $k = \frac{1}{4\alpha}$;

$$3) \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\varkappa + 4\alpha^2} = 0, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{1 - 2\sqrt{\varkappa}g}{4\alpha^2} = \frac{1}{4\alpha^2}, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{g(2\varkappa + 4\alpha^2) - \sqrt{\varkappa}}{4\sqrt{\varkappa}\alpha^2} = +\infty,$$

поэтому при $g > 0$ мы получаем некритические бифуркационные значения $h = -\frac{1}{4\alpha}, k = \frac{1}{4\alpha}$;

$$4) \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{-\sqrt{\varkappa} \mp \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1-4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} = \mp\infty, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1-4\varkappa g^2) = -\infty,$$

здесь нет точек бифуркации;

$$5) \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1-2\sqrt{\varkappa}g) = +\infty, \lim_{\varkappa \rightarrow +0} \frac{\alpha}{4\varkappa}(1-4\varkappa g^2) = -\infty,$$

поэтому здесь тоже нет точек бифуркации.

Итак, на основании предельного перехода мы получили некий список значений, подозрительных на бифуркационные. Оказывается, что полученные значения действительно являются бифуркационными и других бифуркационных значений нет, как показывает следующее

Утверждение 1.2.3. *Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $e(3)$ (при $\varkappa = 0$) являются следующими кривыми на плоскости (g, h) :*

1. $h = 0, g \in \mathbb{R}$;

$$2. h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R};$$

$$3. h = -\frac{1}{4\alpha}, g \in \mathbb{R},$$

причем точки вида 1 – 2 являются критическими значениями, а точки вида 3 – некритическими бифуркационными значениями.

Доказательство. Во-первых, докажем, что критические точки имеют указанный выше вид. Из $\{S_3, H\} = -2\alpha S_1 S_2 = 0$ следует, что $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$. Рассматривая два этих случая и приравнивая $\text{sgrad } H$ нулю, мы и получаем приведенные выше 4 серии. Добавляя условия $f_1 = 1, f_2 = g$, получаем серии (1) и (2).

То, что точки вида 3 являются бифуркационными значениями, следует из Теоремы 2, где показано, что при переходе через точки вида 3 меняется топологический тип изоэнергетической поверхности. \square

Замечание 3. Бифуркационная диаграмма отображения, заданного гамильтонианом H и интегралом площадей f_2 , совпадает с пересечением бифуркационной диаграммы, полученной с помощью ретракции с $\text{so}(4)$, с образом отображения, заданного гамильтонианом и интегралом площадей.

На Рисунке 1.1 представлены бифуркационные значения гамильтониана. Сплошными линиями показаны критические значения, пунктиром – некритические бифуркационные значения.

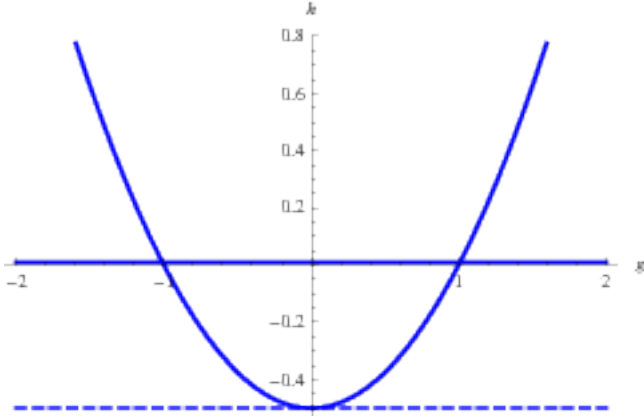


Рис. 1.1: Бифуркационные значения гамильтониана

1.3 Топология изоэнергетической поверхности

Будем теперь искать топологию изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3 = \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g, H(S, R) = h\}$, то есть для случая Соколова при регулярных значениях (g, h) , т. е. (g, h) не принадлежащих бифуркационной диаграмме. Фиксируем значение вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$ и рассмотрим относительно R систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ S_2 R_1 - S_1 R_2 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 - h. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Она задает прямую l в пространстве $\mathbb{R}^3(R)$, если векторы (S_1, S_2, S_3) и $(S_2, -S_1, 0)$ линейно независимы. А они зависимы только, если $S_1 = S_2 = 0$. В этом случае $h = 0$. Но точка прямая $h = 0$ всегда принадлежит бифуркационной диаграмме. Прямая l пересекает сферу $R^2 = 1 - \varkappa S^2$ не более чем в двух точках. Множество точек S , для которых существует пересечение, есть образ поверхности $Q_{g,h}^3$ при проекции. Обозначим его через $P_{g,h}^3$. Прямая l пересекает сферу тогда и только тогда, когда

$$(\rho(0, l))^2 \leq 1 - \varkappa S^2. \quad (1.3.2)$$

$$(\rho(0, l))^2 = \frac{g^2}{S^2} + \frac{(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2}{S_1^2 + S_2^2} \leq 1 - \varkappa S^2, \quad (1.3.3)$$

где $\rho(0, l)$ – расстояние от прямой l до начала координат, причем равенство соответствует случаю, когда прямая пересекается со сферой по одной точке, а строгое неравенство – по двум.

Следовательно, множество $P_{g,h}^3$ задается неравенством

$$S^2(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2 + (\varkappa S^4 - S^2 + g^2)(S_1^2 + S_2^2) \leq 0. \quad (1.3.4)$$

Обозначим

$$v = \alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h, \quad u = S_1^2 + S_2^2, \quad z = S_3^2.$$

В новых переменных неравенство (1.3.4) перепишется в виде:

$$\varkappa u z^2 + (2\varkappa u^2 - u + v^2)z + u(v^2 + g^2 + \varkappa u^2 - u) \leq 0. \quad (1.3.5)$$

Теперь подставляем $\varkappa = 0$.

Неравенство (1.3.5) превращается в следующее:

$$(v^2 - u)z + u(v^2 - u + g^2) \leq 0. \quad (1.3.6)$$

Если $v^2 - u > 0$, то $z = u = 0$, откуда $S = 0$.

Посмотрим, что будет, когда $v^2 - u = 0$. В этом случае получаем $u g^2 = 0$.

Если $g \neq 0$, то получаем $u = v = 0$, откуда $S_1 = S_2 = 0$ и $h = 0$. Мы уже знаем, что прямая $h = 0$ принадлежит бифуркационной диаграмме, но оказывается, что эта прямая не влияет на тип $Q_{g,h}^3$. То есть тип $Q_{g,h}^3$ для точек (g, h) , лежащих в одной камере относительно двух других кривых, совпадает, независимо от знака h в этих точках. Дальше считаем, что $v^2 - u < 0$.

Поскольку $z, u \geq 0$, то проекция множества точек (v, u, z) , удовлетворяющих (1.3.6), на плоскость (v, u) задается следующим неравенством:

$$v^2 - u < 0 \quad (1.3.7)$$

При этом если $v^2 - u + g^2 \leq 0$, то $z \geq 0$, если $v^2 - u + g^2 > 0$, то $z \geq \frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}$.

Вернемся теперь к переменным S_1, S_2 и посмотрим, как неравенство (1.3.7) переписывается в них:

$$S_1^2 + S_2^2 > (\alpha S_2^2 - h)^2. \quad (1.3.8)$$

То есть проекция $\pi_{S_1, S_2}(P_{g,h}^3)$ множества $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_1, S_2) задается неравенством:

$$S_1^2 > (\alpha S_2^2 - h)^2 - S_2^2. \quad (1.3.9)$$

Заметим, что если (S_1, S_2) – решение системы неравенств (1.3.9), то и $(-S_1, S_2)$, $(S_1, -S_2)$, $(-S_1, -S_2)$ – тоже решения. Поэтому достаточно рассматривать $S_1, S_2 \geq 0$.

Обозначим $x = S_2^2$, $y = S_1^2$. Тогда в координатах (x, y) область, заданная неравенством (1.3.9), ограничена графиком функции $y = (\alpha x - h)^2 - x$. Причем если $y \geq (\alpha x - h)^2 - x + g^2$, то $z \geq 0$, если же $(\alpha x - h)^2 - x < y < (\alpha x - h)^2 - x + g^2$, то $z \geq \frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}$.

Дискриминант трехчлена $y_1 = (\alpha x - h)^2 - x$ равен $4\alpha h + 1$. Дискриминант трехчлена $y_2 = (\alpha x - h)^2 - x + g^2$ равен $4\alpha h + 1 - 4g^2$. Мы получили уже известные нам бифуркационные значения. Произведение корней первого трехчлена положительно, сумма корней равна $2\alpha h + 1$.

Возможны следующие существенно различные расположения графиков (и соответственно разные типы $Q_{g,h}^3$):

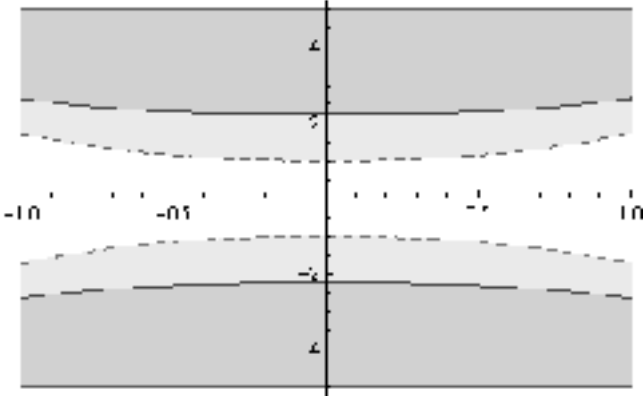


Рис. 1.2: Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) при $h < -\frac{1}{4\alpha}$

1. $h < -\frac{1}{4\alpha}$. Оба дискриминанта отрицательны. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на Рисунке 1.2. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся 2 луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

$P_{g,h}^3$ диффеоморфно несвязному объединению двух полупространств. Для получения $Q_{g,h}^3$ нам нужно склеить два экземпляра $P_{g,h}^3$ по их границе. При склеивании двух полупространств по границе получается \mathbb{R}^3 , поэтому $Q_{g,h}^3$ диффеоморфно $2\mathbb{R}^3$.

2. $-\frac{1}{4\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$. Дискриминант трехчлена y_1 положителен, а трехчлена y_2 отрицателен. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на Рисунке 1.3. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся 2 луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

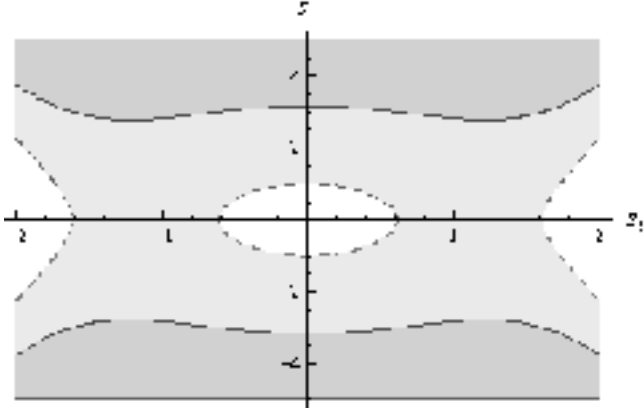


Рис. 1.3: Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) при $-\frac{1}{4\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$

Можно убедиться, что $P_{g,h}^3$ в данном случае диффеоморфно $\mathbb{R}^3(S_1, S_2, S_3)$ с выброшенной трубчатой окрестностью координатного креста $0S_2S_3$. При склейке двух экземпляров $P_{g,h}^3$ мы получим двумерный диск с тремя дырками, умноженный на \mathbb{R} . Чтобы понять это, надо разбить $P_{g,h}^3$ на части, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси $0S_2$. Сначала это будет плоскость без диска, затем две полуплоскости, после этого опять плоскость без диска. При склейке двух плоскостей без диска получается тоже плоскость без диска, которую можно рассматривать как цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. При склейке двух полуплоскостей получаются две плоскости, которые можно рассматривать как цилиндр без двух прямых, параллельных оси. В итоге мы получаем цилиндр, умноженный на интервал, из которого выкинули две прямые, параллельные оси цилиндра, или открытый диск с тремя дырками, умноженный на \mathbb{R} .

3. $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) представлена на Рисунке 1.4. При этом над областью, закрашенной светлым, находятся 2 луча $|S_3| \geq \sqrt{-\frac{u(v^2 - u + g^2)}{v^2 - u}}$, над областью, закрашенной темным, находится прямая $S_3 \in \mathbb{R}$, над незакрашенной областью находится пустое множество.

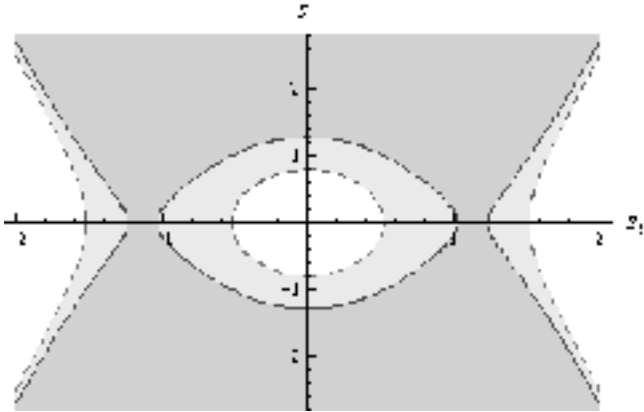


Рис. 1.4: Проекция $P_{g,h}^3$ на плоскость (S_2, S_1) при $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$

Диффеоморфизмом можно превратить $P_{g,h}^3$ в прямое произведение фигуры, изображенной на Рисунке 1.5, на \mathbb{R} . При склейке двух фигур, изображенных на Рисунке 1.5, по границе, обозначенной пунктирной линией, получается двумерный тор T^2 с выколотыми двумя точками. Чтобы понять это, нужно начать склеивать две фигуры по радиусам, обозначенным пунктирными стрелками на Рисунке 1.5. При обходе окружности будут склеиваться отрезки по двум точкам и получаться окружности, кроме случая, когда радиусы являются вертикальными лучами, изображенными сплошными линиями. При склейке этих лучей по одной точке будет получаться прямая, то есть окружность без точки. В итоге получаем тор с выколотыми двумя точками. Чтобы окончательно получить $Q_{g,h}^3$, нужно еще умножить полученный тор без двух точек на прямую. Покажем, что полученное многообразие диффеоморфно диску с тремя дырками, умноженному на \mathbb{R} , то есть $Q_{g,h}^3$ из предыдущего пункта. Будем рассматривать тор как сферу с ручкой. Тор без одной точки – это сфера без точки с ручкой, или плоскость с ручкой. При утолщении

плоскости с ручкой мы получим диск с двумя дырками (все открытое). Но у нас утолщенный тор с двумя выброшенными точками, что то же самое, что и диск с тремя дырками, умноженный на \mathbb{R} .

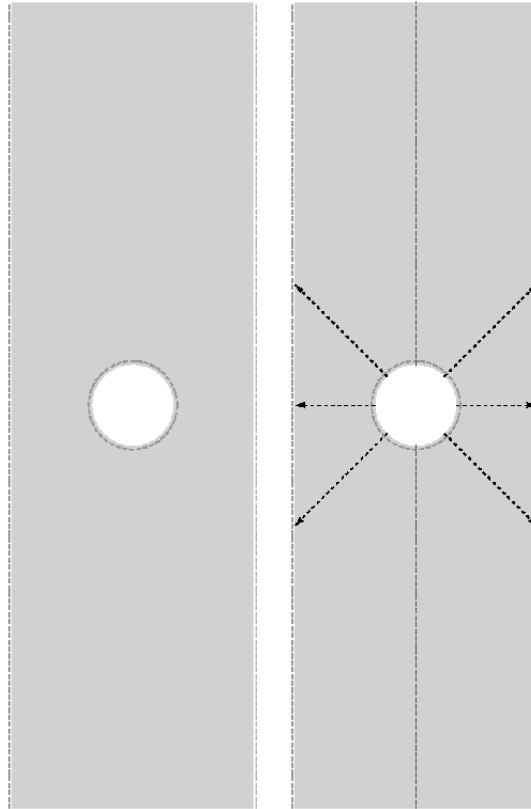


Рис. 1.5: Фигура из прямого произведения

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Топология изоэнергетической поверхности уровня $Q_{g,h}^3$ при регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационным значениям гамильтониана H , (g, h) имеет следующий тип:*

1. $2\mathbb{R}^3$ при $h < -\frac{1}{4\alpha}$;
 2. Двумерный диск с тремя дырками, умноженный на \mathbb{R} , при $h > -\frac{1}{4\alpha}$,
- $h \neq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, $h \neq 0$.

1.4 Бифуркационная диаграмма отображения момента

Рассмотрим теперь отображение момента для случая Соколова $H \times K: \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Точка (S, R) будет критической тогда и только тогда, когда $sgrad H$ и $sgrad K$ будут линейно зависимыми. Удобно перейти от переменных S и R к переменным S и Q . Аналогично тому, как это сделано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27], можно показать, что при $S \neq 0$ это будет диффеоморфизм $M_{1,g}^4$ на свой образ. Поэтому бифуркационную диаграмму можно искать в переменных (S, Q) . При этом скобка переписется следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = q \epsilon_{ijk} S_k, \quad \text{где } q = \varkappa S^2 - R^2 = 2\varkappa S^2 - 1.$$

Мы также будем использовать следующее полезное тождество:

$$Q^2 = S^2 R^2 - g^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2, \quad \varkappa \neq 0.$$

При $\varkappa = 0$ это тождество выглядит так:

$$Q^2 = S^2 - g^2.$$

Обозначим $2\alpha Q_3 - q$ через A , $q + 2\frac{\varkappa}{\alpha} Q_3$ через B .

Найдем координаты $sgrad H$ и $sgrad K$:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{Q_1, H\} &= S_2 A, \\
\{Q_2, H\} &= S_1 B, \\
\{Q_3, H\} &= -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right), \\
\{S_1, K\} &= Q_2 A, \\
\{S_2, K\} &= Q_1 B, \\
\{S_3, K\} &= -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) Q_1 Q_2, \\
\{Q_1, K\} &= \left[2\frac{\varkappa}{\alpha}(S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q S_2\right] A, \\
\{Q_2, K\} &= \left[2\alpha(S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + q S_1\right] B, \\
\{Q_3, K\} &= 4\varkappa Q_3(S_1 Q_2 - S_2 Q_1) - 2q(\alpha S_2 Q_1 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2).
\end{aligned}$$

Нам понадобится переформулировать *Теорему 2* и *Теорему 3* из работы А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27] для произвольного $\varkappa > 0$.

Теорема 3. При $g = 0$ и $\varkappa > 0$ бифуркационная диаграмма состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 (касающихся в начале координат) и двух горизонтальных отрезков U и L (касающихся соответствующих парабол в их вершинах):

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h; \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \right\}, \\
P_2 &= \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{-\sqrt{\varkappa} + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \right\}, \\
U &= \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\varkappa} \right\}, \\
L &= \left\{ (h, k) \mid k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}; \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\alpha^2 + \varkappa}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2\varkappa} \right\}.
\end{aligned}$$

Теорема 4. При $g > 0$, $\varkappa > 0$ и $\alpha \geq \sqrt{\varkappa}$ бифуркационная диаграмма имеет один из трех видов (a), (b), (c).

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left\{ k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2; \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \right\}, \\
 P_2 &= \left\{ k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}; \varkappa(2\alpha h + 1)^2 \leq (\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2) \right\}, \\
 U &= \left\{ k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \right\}, \\
 L &= \left\{ k = -\frac{\alpha(1 - 4\varkappa g^2)}{4\varkappa}; \frac{-\sqrt{\varkappa} - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\sqrt{\varkappa}\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2\varkappa} \right\}, \\
 E_1 &= \left\{ k = -(1 - 2\sqrt{\varkappa}g)h; -\frac{\sqrt{\varkappa}g}{\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha g}{\sqrt{\varkappa}} \right\}, \\
 E_2 &= \left\{ k = -(1 + 2\sqrt{\varkappa}g)h; h_1 \leq h \leq h_2 \right\},
 \end{aligned}$$

где для h_1 и h_2 , задающих концы отрезка E_2 , возможны следующие три случая:

$$\begin{aligned}
 (a) \text{ если } 0 < g \leq \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\varkappa + 4\alpha^2}, \text{ то } h_1 &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\varkappa}}g \text{ и } h_2 = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\alpha}g, \\
 (b) \text{ если } \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\varkappa + 4\alpha^2} \leq g \leq \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varkappa}(\alpha^2 + 2\varkappa)}, \text{ то } h_1 &= -\frac{1 - 2\sqrt{\varkappa}g}{4\alpha} \text{ и } h_2 = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\alpha}g. \\
 (c) \text{ если } \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varkappa}(\alpha^2 + 2\varkappa)} < g < \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}, \text{ то } h_1 &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\varkappa}}g \text{ и } h_2 = \frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 2\sqrt{\varkappa}g),
 \end{aligned}$$

Замечание 4. В работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27] указанная Теорема 4 сформулирована для $0 < \alpha \leq 1$ и $\varkappa = 1$. При подстановке произвольного $\varkappa > 0$ условие $0 < \alpha \leq 1$ перейдет в условие $0 < \alpha \leq \sqrt{\varkappa}$. Однако при предельном переходе $\varkappa \rightarrow +0$ условие $0 < \alpha \leq \sqrt{\varkappa}$ нарушается, поэтому нам нужно было переформулировать эту теорему для $\alpha \geq \sqrt{\varkappa}$, для этого нужно сделать замены $\alpha' = \frac{\varkappa}{\alpha}$, $h' = -h$, $k' = -k$ и $g' = g$. При этом $P_1 \leftrightarrow P_2$, $U \leftrightarrow L$, $E_1 \leftrightarrow E_1$, а вид E_2 изменится.

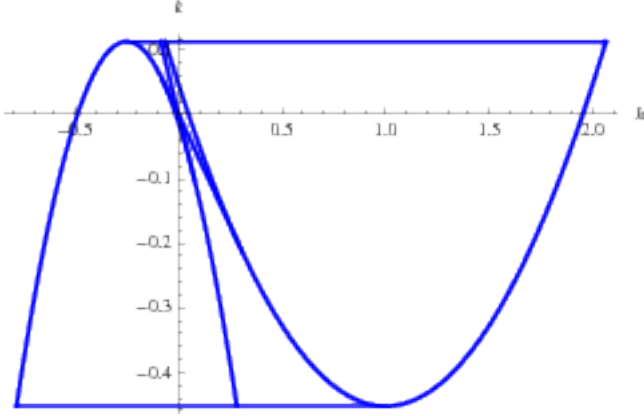


Рис. 1.6: Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая $\mathfrak{so}(4)$, соответствующая случаю (b)

На Рисунке 1.6 изображена бифуркационная диаграмма для случая Соколова на $\mathfrak{so}(4)$, соответствующая случаю (b) в Теореме.

В пределе при $\varkappa \rightarrow +0$ мы получаем при $g = 0$ следующее:

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = -h; h \geq -\frac{1}{4\alpha} \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; h \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; h \geq -\frac{1}{2\alpha} \right\}.$$

Отрезок L пропадает, так как уходит на бесконечность.

При $g > 0$, $\varkappa > 0$ и $\alpha \geq \sqrt{\varkappa}$ в пределе при $\varkappa \rightarrow +0$ имеем:

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = -h + \alpha g^2; h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha} \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; h \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; h \geq -\frac{1}{2\alpha} \right\},$$

$$E_1 = \left\{ (h, k) \mid k = -h; h \geq 0 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (h, k) \mid k = -h; -\frac{1}{4\alpha} \leq h \leq 0, \right\}.$$

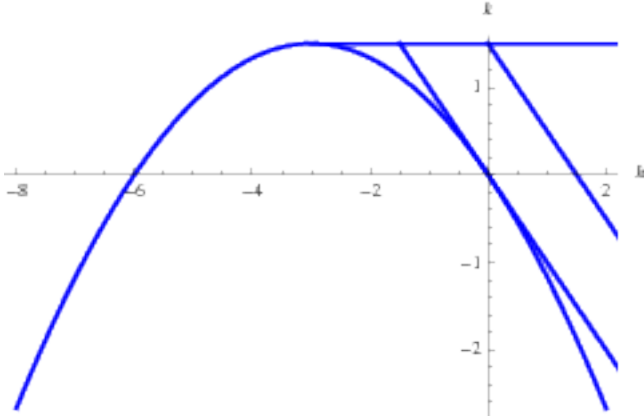


Рис. 1.7: Бифуркационная диаграмма отображения момента, полученная при ретракции

Здесь отрезок L тоже ушел на бесконечность, а в E_2 при предельном переходе возникает случай (b).

Заметим, что E_1 и E_2 можно объединить в один луч

$$E = \left\{ (h, k) \mid k = -h; h \geq -\frac{1}{4\alpha} \right\}.$$

Основываясь на ретракции, мы ожидаем, что бифуркационная диаграмма будет состоять из множеств P_1 , P_2 , U , E (см. Рисунок 1.7)

Сначала мы перечислим случаи линейной зависимости $sgrad H$ и $sgrad K$ при $\varkappa = 0$, когда соответствующие куски бифуркационной диаграммы отображения момента являются частями кривых порядка не выше 2, причем то, что в этих случаях косые градиенты линейно зависимы, будет проверено непосредственно. Затем будет показано, что все возможности, когда косые градиенты линейно зависимы, сводятся к этим или же приводят к точке $(0, 0)$.

1) $S_1 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_2 = S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0$. При этом матрица, составленная из косых градиентов, приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_1 & 0 & S_2 A & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 \\ 0 & Q_1 B & 0 & S_2 AB & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 B \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $sgrad H$ и $sgrad K$ в этом случае линейно зависимы, так как они просто пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, равным B .

Легко проверить, что зависимость h и k на данном куске бифуркационной диаграммы выражается следующим образом:

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2. \quad (1.4.1)$$

Найдем теперь критические точки и область изменения h . Рассмотрим следующую систему, задающую критические точки:

$$\begin{cases} S_2 R_2 = g, \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h, \\ \varkappa S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Она имеет решение при фиксированном S_2 в том и только том случае, когда

$$\frac{g^2}{S_2^2} + \frac{(h - \alpha S_2^2)^2}{S_2^2} \leq 1 - \varkappa S_2^2. \quad (1.4.3)$$

В случае строгого неравенства имеем 2 точки и 1 точку в прообразе при проекции критических точек на (1.4.3) в случае равенства.

Обозначим S_2^2 через y . Тогда неравенство (1.4.3) перепишется следующим образом:

$$(\alpha^2 + \varkappa)y^2 - (2\alpha h + 1)y + g^2 + h^2 \leq 0. \quad (1.4.4)$$

Неравенство (1.4.4) имеет неотрицательные решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = (2\alpha h + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \varkappa)(g^2 + h^2) \geq 0, \\ 2\alpha h + 1 \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Здесь мы учли, что $\alpha^2 + \varkappa > 0$ в нашем случае (при $\varkappa = 0$).

Из системы неравенств (1.4.5) следует, что область изменения h при $\varkappa = 0$ имеет вид:

$$h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}. \quad (1.4.6)$$

Заметим, что мы получили ровно то же, что и при ретракции с $\mathfrak{so}(4)^*$.

Таким образом, соответствующий кусок бифуркационной диаграммы задается системой (1.4.1), (1.4.6). Чтобы понять, что же представляют собой критические точки, заметим, что нужно склеить 2 экземпляра одномерных многообразий (1.4.3), отвечающих всевозможным S , по границе (там, где в неравенстве (1.4.3) имеет место равенство). Легко видеть, что в нашем случае множество точек из (1.4.3) является объединением двух отрезков. Поскольку при склейке двух отрезков по их границе (по двум точкам) получается окружность, то мы получаем, что критические точки образуют 2 окружности (см. Рисунок 1.8).

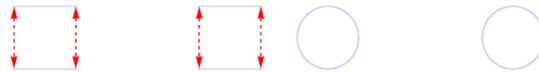


Рис. 1.8: Склейка двух отрезков

2) $S_2 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_1 = S_2R_3 - S_3R_2 = 0$. Матрица косых градиентов переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & 0 & 0 & 0 & S_1B & -2\frac{\varkappa}{\alpha}S_1Q_2 \\ Q_2A & 0 & 0 & 0 & -S_1BA & 2\frac{\varkappa}{\alpha}S_1Q_2A \end{pmatrix}.$$

При этом k на этом куске бифуркационной диаграммы выражается через h следующим образом:

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha}g^2. \quad (1.4.7)$$

Аналогично первому пункту получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_1R_1 = g, \\ -\frac{\varkappa}{\alpha}S_1^2 + S_1R_2 = h, \\ \varkappa S_1^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

Она имеет решение при фиксированном S_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^2}{S_1^2} + \frac{(h + \frac{\varkappa}{\alpha}S_1^2)^2}{S_1^2} \leq 1 - \varkappa S_1^2. \quad (1.4.9)$$

Обозначим S_1^2 через x . Нужно, чтобы следующее неравенство имело неотрицательные решения:

$$-\varkappa \frac{\alpha^2 + \varkappa}{\alpha^2}x^2 + (1 - \frac{2\varkappa h}{\alpha})x - (g^2 + h^2) \geq 0. \quad (1.4.10)$$

При $\varkappa = 0$ имеем:

$$S_1^2 - (g^2 + h^2) \geq 0. \quad (1.4.11)$$

Оно имеет решение при любом $h \in \mathbb{R}$. Это значит, что мы имеем 2 критические прямые.

Тот же результат был получен и при ретракции (при $\varkappa \rightarrow +0$).

3) $Q_1 = 0$, $A = 2\alpha Q_3 - q = 0$. В этом случае $sgrad K = 0$.

$$k = \frac{1}{4\alpha}(1 - 4\kappa g^2)$$

При $\kappa = 0$ имеем: $q = -1$, откуда $Q_3 = -\frac{1}{2\alpha}$. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2, \\ S_2 Q_2 - \frac{1}{2\alpha} S_3 = 0. \end{cases}$$

Выясним, в каких пределах меняется h .

$$h = \alpha S_2^2 + Q_3 = \alpha S_2^2 - \frac{1}{2\alpha}, \text{ откуда } h \geq -\frac{1}{2\alpha}.$$

Далее $S_3 = 2\alpha S_2 Q_2$. Из первого уравнения: $Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2$.
 Отсюда $S_2^2 = \frac{Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + g^2 - S_1^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2} \leq \frac{Q_2^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + g^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2} = \frac{1}{4\alpha^2} \left(1 + \frac{4g^2\alpha^2}{1 + 4\alpha^2 Q_2^2}\right) \leq \frac{1 + 4g^2\alpha^2}{4\alpha^2}$

Очевидно, что эти значения достигаются, так же, как и все промежуточные. Это значит, что $S_2^2 \in \left[0; \frac{1+4g^2\alpha^2}{4\alpha^2}\right]$. Отсюда $h \in \left[-\frac{1}{2\alpha}; \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha^2}\right]$.

Заметим, что это не совсем то, что получилось при ретракции. Там было $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{2\alpha}$. Объясняется это следующим образом. Горизонтальный отрезок U в случае $so(4)$ шел от вершины параболы $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$, направленной ветвями вниз, до дальней точки пересечения с параболой $\frac{\kappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$, направленной ветвями вверх. При предельном переходе вторая парабола вырождается в луч $k = -h + \alpha g^2$. При этом дальняя точка пересечения горизонтального отрезка с ней уходит на бесконечность, а ближняя точка как раз стремится к $\frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Поэтому то, что мы получили не луч $h \geq -\frac{1}{2\alpha}$, а отрезок $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.

Выясним, какое многообразие образуют критические точки. При $h > -\frac{1}{2\alpha}$ можно выбрать S_2 двумя способами: со знаком $+$ и со знаком $-$. При выбранном S_2 для S_1 и Q_2 имеем следующее соотношение:

$$S_1^2 + (4\alpha^2 S_2^2 - 1)Q_2^2 = g^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - S_2^2.$$

$4\alpha^2 S_2^2 - 1 = 4\alpha h + 1$. Заметим, что правая часть всегда неотрицательна: $g^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - S_2^2 = g^2 - \frac{4\alpha h + 1}{4\alpha^2} \geq 0$, т.к. $h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.

При $4\alpha h + 1 > 0$ это соотношение задает эллипс, топологически окружность, а при $4\alpha h + 1 < 0$ – гиперболу, топологически 2 прямые. С учетом возможности выбора S_2 двумя способами получаем, что критические точки при $h > -\frac{1}{4\alpha}$ образуют 2 окружности, а при $h < -\frac{1}{4\alpha} - 4$ прямые.

$$4) Q_2 = 0, B = q + 2\frac{\varkappa}{\alpha}Q_3 = 0.$$

$$k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2)$$

Это решение не существует при $\varkappa = 0$.

5)

$$\begin{cases} (2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 = S_1 S_2 A, \\ S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0, \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Переписываем первое уравнение с учетом второго:

$$\begin{cases} 2\alpha(S_2 S_3 Q_1 - S_1 S_2 Q_3) = 0, \\ S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0 \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение можно поделить на S_2 , так как $S_2 \neq 0$ (иначе из второго уравнения $Q_1 = 0$ или $Q_2 = 0$).

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} S_3 Q_1 - S_1 Q_3 = 0, \\ S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0 \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения S_3 , из второго — Q_2 и подставляя в тождество $\langle S, Q \rangle = 0$, получаем:

$$S_2^2 = Q_1^2 + Q_3^2. \quad (1.4.12)$$

Отсюда $k = -h$ и $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

Из первого уравнения $S_1^2 S_2^2 = Q_1^2 Q_2^2$. Подставляем в него $S_2^2 = Q_1^2 + Q_3^2$:

$$S_1^2 (Q_1^2 + Q_3^2) = Q_1^2 Q_2^2. \quad (1.4.13)$$

Далее из второго уравнения $S_1^2 Q_3^2 = S_3^2 Q_1^2$. Подставляем это в (1.4.13):

$$Q_1^2 (S_1^2 + S_3^2 - Q_2^2) = 0. \quad (1.4.14)$$

$Q_1 \neq 0$, значит,

$$Q_2^2 = S_1^2 + S_3^2. \quad (1.4.15)$$

Теперь воспользуемся тождеством $S^2 = Q^2 - g^2$. Подставляя в него (1.4.12) и (1.4.15), мы получим $g = 0$. При этом $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$. Ровно то же самое получается при подстановке $g = 0$ и случае (1), то есть ничего нового этот случай нам не дает.

б) Теперь докажем, что мы перечислили все нетривиальные случаи, когда косые градиенты H и K линейно зависимы. Остальные (тривиальные) случаи

линейной зависимости приводят к точке $(0, 0)$. Обозначим через Δ_{ij} миноры 2×6 матрицы $\begin{pmatrix} sgrad H \\ sgrad K \end{pmatrix}$.

Приравняв миноры Δ_{13} и Δ_{23} к нулю, получаем следующее: из $\Delta_{13} = 0$ следует, что $Q_2[(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 - S_1 S_2 A] = 0$, а из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $Q_1(S_1 S_2 + Q_1 Q_2) = 0$.

Мы получили следующую альтернативу: либо Q_1 или Q_2 равно 0, либо выполнено 5). Разберемся теперь с тем, что происходит, когда Q_1 или Q_2 равно 0.

I. $Q_1 = 0, A \neq 0$ (случай $Q_1 = 0, A = 0$ разобран в 3). Из Δ_{34} следует, что $S_1 S_2 = 0$ Рассмотрим различные случаи:

1) $S_1 = 0, S_3 \neq 0$ ($S_1 = S_3 = 0$ соответствует случаю 1 в теореме). В этом случае ненулевым может быть только минор Δ_{14} . $Q_3 = -S_2 R_1, Q_2 = S_3 R_1$.

$$\begin{aligned} \Delta_{14} &= \begin{vmatrix} 2\alpha S_2 S_3 - Q_2 & S_2 A \\ \alpha Q_2 A & -S_2 A \end{vmatrix} = -S_2 A(2\alpha S_2 S_3 - Q_2 + Q_2 A) = \\ &= -S_2 A(2\alpha S_2 S_3 - Q_2 + Q_2(2\alpha Q_3 + 1)) = -2\alpha S_2 A(S_2 S_3 + Q_2 Q_3). \end{aligned}$$

По условию, $A \neq 0$, значит, либо $S_2 = 0$, либо $S_2 S_3 + Q_2 Q_3 = 0$.

a) $S_2 = 0$, тогда $Q_3 = 0$ и $h = k = 0$.

b) $S_2 S_3 + Q_2 Q_3 = 0$. Здесь удобнее вернуться к переменным (S, R) . $Q_3 = -S_2 R_1, Q_2 = S_3 R_1$, так как $S_1 = 0$. $S_2 S_3 + Q_2 Q_3 = S_2 S_3 - S_2 S_3 R_1^2 = S_2 S_3(1 - R_1^2)$. $S_3 \neq 0$, случай $S_2 = 0$ разобран в п. (а), поэтому $R_1^2 = 1$, откуда $R_2 = R_3 = 0$. При этом $g = 0$, и $k = -h$, то есть мы получаем случай 5 в теореме.

2) $S_2 = 0, S_3 \neq 0$ ($S_2 = S_3 = 0$ соответствуют случаю 2 в теореме)

Из тождества $S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0$ и условия $S_3 \neq 0$ следует, что

$Q_3 = 0$. Получаем, что $h = k = 0$.

II. $Q_2 = 0$. Из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $S_1 S_2 Q_1 = 0$. Последовательно рассмотрим ряд случаев.

1) $Q_1 = 0$. $\Delta_{34} = 2\alpha S_1 S_2^2 A$. Но случаи $Q_1 = S_1 = 0$, $Q_1 = S_2 = 0$, $Q_1 = A = 0$ уже разобраны выше.

2) $S_2 = 0$. $\Delta_{25} = 2\alpha Q_1 (S_1 Q_3 - S_3 Q_1)$. Но $Q_1 \neq 0$ (случай $Q_1 = S_2 = 0$ разобран выше), поэтому $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = 0$. Перейдем к переменным (S, R) . $Q_1 = -S_3 R_2$, $Q_3 = S_1 R_2$, так как $S_2 = 0$. $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = S_1^2 R_2 + S_3^2 R_2 = (S_1^2 + S_3^2) R_2$. Либо $R_2 = 0$, либо $S = 0$. В обоих случаях $h = k = 0$.

3) $S_1 = 0$, $\Delta_{12} = -2\alpha S_2 S_3 Q_1$ должен быть равен нулю. Но случай $S_1 = S_3 = 0$ соответствует п. 1 теоремы, а случаи $Q_1 = S_1 = 0$, $Q_2 = S_2 = 0$ были разобраны выше.

Случай бифуркационных некритических точек будет разобран ниже в параграфе 1.7.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 5. *Рассмотрим $M_{1,g}^4$, $g \in \mathbb{R}$. Тогда*

При $\varkappa = 0$ бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из следующих кривых:

$$1) \text{ луча } k = -h + \alpha g^2, \quad h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha},$$

при этом в прообразе получаются 2 критические окружности;

$$2) \text{ параболы } k = -\alpha h^2 - h, \quad h \in \mathbb{R},$$

при этом в прообразе 2 критические прямые;

$$3) \text{ отрезка } k = \frac{1}{4\alpha}, \quad -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha},$$

при $h < -\frac{1}{4\alpha}$ в прообразе будут 4 критические прямые, а при $h > -\frac{1}{4\alpha}$

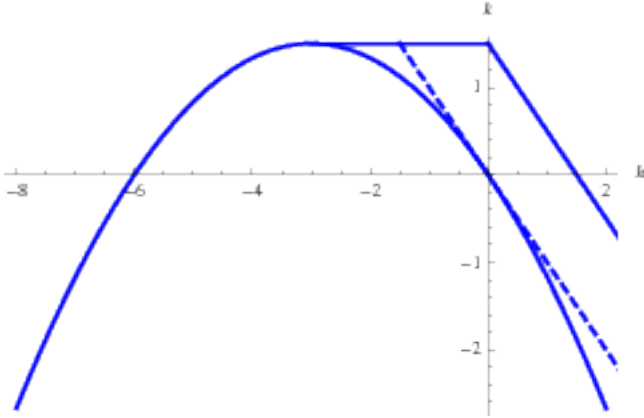


Рис. 1.9: Бифуркационная диаграмма отображения момента

– 2 критические окружности;

4) луча $k = -h$, $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

Причем типы (1 – 3) являются критическими значениями, а тип 4 – некритическими бифуркационными значениями.

Замечание 5. При $\varkappa = 0$ бифуркационная диаграмма отображения момента совпадает с пересечением бифуркационной диаграммы, полученной с помощью ретракции с $\mathfrak{so}(4)$, с образом отображения момента.

На Рисунке 1.9 изображена бифуркационная диаграмма отображения момента. При этом сплошными линиями показаны критические значения, а пунктирной линией – некритические бифуркационные значения.

1.5 Индексы критических точек

Будем по-прежнему работать в координатах (S, Q) . В этих координатах $M_{1,g}^4$ является поверхностью уровня функций $f_1 = \langle S, Q \rangle = 0$, $f_2 = S^2 - Q^2 = g^2$. Векторы $\text{grad } H$, $\text{grad } f_1$, $\text{grad } f_2$ имеют следующий вид:

$$\text{grad } H = (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1),$$

$$\text{grad } f_1 = (Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3),$$

$$\text{grad } f_2 = (2S_1, 2S_2, 2S_3, -2Q_1, -2Q_2, -2Q_3).$$

Матрицы вторых частных производных G_K , G_H и G_{f_2} функций K , H и f_2 имеют следующий вид:

$$G_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

$$G_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{f_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления индексов критических точек нужно сделать следующее:

1. Находим зависимость $\text{grad } K$, $\text{grad } H$, $\text{grad } f_1$ и $\text{grad } f_2$ в критической точке. Пусть $\text{grad } K = A(S, Q)\text{grad } H + B(S, Q)\text{grad } f_1 + C(S, Q)\text{grad } f_2$.
2. Составляем матрицу $G = G_K - A(S, Q)G_H - B(S, Q)G_{f_1} - C(S, Q)G_{f_2}$.
3. Находим базис e_1, e_2, e_3 в касательном пространстве в критической точке. Для этого надо найти 3 линейно независимых вектора, ортогональных векторам $\text{grad } H$, $\text{grad } f_1$ и $\text{grad } f_2$ в смысле скалярного произведения в объемлющем \mathbb{R}^6 .
4. Вычисляем матрицу формы \tilde{G} — ограничения формы G на пространство, натянутое на e_1, e_2, e_3 .
5. Одним из собственных значений матрицы \tilde{G} будет 0. Нужно найти знаки двух других собственных значений матрицы \tilde{G} . Число ее отрицательных собственных значений и будет индексом критической точки.
6. Поскольку в нашем случае матрица \tilde{G} будет 3×3 матрицей, то уравнение на ее собственные числа будет иметь следующий вид:

$$\lambda^3 - \text{tr } \tilde{G}\lambda^2 + \Delta\lambda + \det \tilde{G},$$

где $\Delta = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$ — сумма главных миноров матрицы \tilde{G} .

У нас одним из собственных чисел матрицы \tilde{G} является 0, следовательно, $\det \tilde{G} = 0$, а значит, для определения оставшихся собственных чисел у нас есть следующее уравнение:

$$\lambda^2 - \text{tr} \tilde{G} \lambda + \Delta = 0$$

Это означает, что для определения знаков собственных чисел достаточно определить знаки $\text{tr} \tilde{G}$ и Δ . Если $\Delta < 0$, то корни будут разных знаков и индекс будет равен 1; если $\Delta > 0$, $\text{tr} \tilde{G} < 0$, то оба корня будут отрицательными, индекс равен 2; если $\Delta > 0$, $\text{tr} \tilde{G} > 0$, то оба корня будут положительными, индекс равен 0.

1. Рассмотрим точки, находящиеся на параболe $k = -\alpha h^2 - h$. Это точки, где $S_2 = S_3 = Q_1 = 0$, а S_1, Q_2, Q_3 удовлетворяют условиям: $h = Q_3$, $S_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = g^2$. Как мы уже выяснили, эти критические точки образуют 2 критические прямые. Мы имеем следующую зависимость между $\text{grad} K$ и $\text{grad} H$:

$$\text{grad} K = -(2\alpha h + 1)\text{grad} H = -(2\alpha Q_3 + 1)\text{grad} H$$

Матрица $G = G_K + (2\alpha Q_3 + 1)G_H$ будет иметь следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha(2\alpha Q_3 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

Нам нужно найти знаки собственных чисел этой матрицы, ограниченной на касательную плоскость к $Q_{g,h}^3$ в критических точках.

Учитывая условия на критические точки, мы получаем следующее:

$$\begin{aligned}\text{grad } H &= (0, 0, 0, 0, 0, 1), \\ \text{grad } f_1 &= (0, Q_2, Q_3, S_1, 0, 0), \\ \text{grad } f_2 &= (2S_1, 0, 0, 0, -2Q_2, -2Q_3).\end{aligned}$$

В качестве базиса в касательной плоскости к критическим точкам можно взять следующие векторы:

$$\begin{aligned}e_1 &= (0, Q_3, -Q_2, 0, 0, 0), \\ e_2 &= (0, S_1, 0, -Q_2, 0, 0), \\ e_3 &= (Q_2, 0, 0, 0, S_1, 0).\end{aligned}$$

Матрица ограничения формы G на касательное пространство, порожденное векторами e_1 , e_2 и e_3 , имеет следующий вид:

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} 2Q_3^2(2\alpha Q_3 + 1) & 2S_1Q_3(2\alpha Q_3 + 1) & 0 \\ 2S_1Q_3(2\alpha Q_3 + 1) & -2Q_2^2 + 2(1 + 2\alpha Q_3)S_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что 0 действительно является ее собственным числом.

$$\text{tr } \tilde{G} = 2\alpha (-Q_2^2 + (1 + 2\alpha Q_3)(Q_3^2 + S_1^2)), \quad \Delta \tilde{G} = -4\alpha^2 Q_2^2 Q_3^2 (1 + 2\alpha Q_3).$$

Если $2\alpha Q_3 + 1 > 0$, т.е. $h > -\frac{1}{2\alpha}$, то $\Delta < 0$, следовательно, индекс равен 1.

Если же $2\alpha Q_3 + 1 < 0$, то $\text{tr } \tilde{G} < 0$ и $\Delta > 0$, следовательно, индекс равен 2.

2. Рассмотрим теперь точки на луче $k = -h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Зависимость градиентов имеет следующий вид:

$$\text{grad } K = 2\alpha \text{grad } f_2 - \text{grad } H$$

Матрица квадратичной формы $G = G_K + G_H - 2\alpha G_{f_2}$ будет следующей:

$$G = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Критические точки удовлетворяют следующим условиям: $S_1 = S_3 = Q_2 = 0$. Градиенты в критических точках имеют следующий вид:

$$\text{grad } H = (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1),$$

$$\text{grad } f_1 = (Q_1, 0, Q_3, 0, S_2, 0),$$

$$\text{grad } f_2 = (0, 2S_2, 0, -2Q_1, 0, -2Q_3).$$

Базис в касательном пространстве можно выбрать следующим образом:

$$e_1 = (Q_3, 0, -Q_1, 0, 0, 0),$$

$$e_2 = (S_2, 0, 0, 0, -Q_1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, S_2, 0, -Q_3, 0).$$

Ограничение G на касательное пространство, порожденное векторами e_1, e_2, e_3 , имеет следующий вид:

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} -Q_1^2 - Q_3^2 & -S_2Q_3 & S_2Q_1 \\ -S_2Q_3 & Q_1^2 - S_2^2 & Q_1Q_3 \\ S_2Q_1 & Q_1Q_3 & Q_3^2 - S_2^2 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что матрица \tilde{G} действительно вырожденная, то есть одним из ее собственных чисел будет 0.

Найдем сумму главных миноров:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\alpha^2 ((Q_1^2 - S_2^2)(Q_3^2 - S_2^2) - Q_1^2Q_3^2 - (Q_1^2 + Q_3^2)(Q_3^2 - S_2^2) - S_2^2Q_1^2 - (Q_1^2 + Q_3^2)(Q_1^2 - S_2^2) - S_2^2Q_3^2) \\ &= 4\alpha^2 ((Q_1^2 + Q_3^2 + S_2^2)(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2)) = 4\alpha^2 g^2(Q_1^2 + Q_3^2 + S_2^2) > 0. \end{aligned}$$

$\text{tr } \tilde{G} = -4\alpha S_2^2 < 0$. Это значит, что индекс равен 2.

3. Рассмотрим точки, лежащие на отрезке $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq -\frac{1}{4\alpha}$. На них $\text{grad } K = 0$. Эти точки удовлетворяют условиям: $Q_1 = 0$, $Q_3 = -\frac{1}{2\alpha}$, $S_3 = 2\alpha S_2 Q_2$.

С учетом этого градиенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{grad } H &= (0, 2\alpha S_2, 0, 0, 0, 1), \\ \text{grad } f_1 &= (0, Q_2, -\frac{1}{2\alpha}, S_1, S_2, 2\alpha S_2 Q_2), \\ \text{grad } f_2 &= (2S_1, 2S_2, 4\alpha S_2 Q_2, 0, -2Q_2, \frac{1}{\alpha}). \end{aligned}$$

Поэтому в качестве базисных в касательном пространстве можно выбрать следующие векторы:

$$\begin{aligned} e_1 &= (Q_2, 0, 0, -S_2, S_1, 0), \\ e_2 &= (-4\alpha^2 S_2 Q_2, 0, 2\alpha S_1, 1, 0, 0), \end{aligned}$$

$$e_3 = (0, -S_1, 0, Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2, 0, 2\alpha S_1 S_2).$$

Получаем, что матрица \tilde{G} имеет следующий вид:

$$\tilde{G} = 2\alpha \begin{pmatrix} -S_2^2 & S_2 & S_2(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) \\ S_2 & -1 & -(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) \\ S_2(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) & -(Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2) & -4\alpha^2 S_1^2 S_2^2 - (Q_2 - 4\alpha^2 S_2^2 Q_2)^2 \end{pmatrix}.$$

У нее

$$\text{tr } \tilde{G} = 2\alpha (-1 - (1 + 4\alpha^2 S_1^2) S_2^2 - Q_2^2 (1 - 4\alpha^2 S_2^2)^2) < 0,$$

$$\Delta = 16\alpha^4 S_1^2 S_2^2 (1 + S_2^2) > 0,$$

это означает, что индекс равен 2.

Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение 1.5.1. *Индексы критических точек имеют следующий тип:*

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 2;
2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h > -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 1;
3. Прообразы кривой $k = -h + \alpha g^2$, $h > \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ имеют индекс 2;
4. Прообразы кривой $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ имеют индекс 2.

1.6 Доказательство полноты векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$

Мы будем рассматривать векторные поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в координатах (S, Q) .

Приведем координатное представление этих полей для случая е(3) ($\varkappa = 0$):

$$\text{sgrad } H = (2\alpha S_2 S_3 - Q_2, Q_1, -2\alpha S_1 S_2, (2\alpha Q_3 + 1)S_2, -S_1, -2\alpha S_2 Q_1),$$

$$sgrad K = (Q_2(2\alpha Q_3 + 1), -Q_1, -2\alpha Q_1 Q_2, -(2\alpha Q_3 + 1)S_2, -2\alpha(S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + S_1, 2\alpha S_2 Q_3)$$

Определение 16. *Непрерывная функция называется собственной, если прообраз любого компакта является компактом.*

Для доказательства полноты векторного поля $sgrad H$ нам понадобится следующая

Лемма 1.6.1. *(см. работу У. Гордона [30]) Пусть ξ – непрерывное векторное поле на гладком многообразии M . Тогда ξ полно, если на M существует гладкая функция E , собственная непрерывная функция f и константы a , b , такие что для всех $x \in M$ выполнены следующие условия:*

1. $|\xi(E(x))| \leq a|E(x)|$,
2. $|f(x)| \leq b|E(x)|$.

Для доказательства полноты $sgrad K$ нам понадобится следующее классическое

Утверждение 1.6.1. *(см., например, книгу А. Ф. Филиппова [31]) Пусть дана система $y'(x) = f(y, x)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$. Если f непрерывна и при всех (x, y) удовлетворяет условию $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$, где функции a и b непрерывны, то для любого начального условия (x_0, y_0) существует глобальное решение задачи Коши.*

Следствие 1.6.1. *Если f непрерывна и линейна по y , то векторное поле $f(y, x)$ полно.*

Возьмем $f = E = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$. Очевидно, эта функция является собственной.

$$\begin{aligned}
|\text{sgrad } H(f)| &= |(sgrad H)^1 \frac{\partial f}{\partial S_1} + (sgrad H)^2 \frac{\partial f}{\partial S_2} + (sgrad H)^3 \frac{\partial f}{\partial S_3} + (sgrad H)^4 \frac{\partial f}{\partial Q_1} + \\
&+ (sgrad H)^5 \frac{\partial f}{\partial Q_2} + (sgrad H)^6 \frac{\partial f}{\partial Q_3}| = |(2\alpha S_2 S_3 - Q_2) \cdot 2S_1 + Q_1 \cdot 2S_2 - \\
&- 2\alpha S_1 S_2 \cdot 2S_3 + (2\alpha Q_3 + 1)S_2 \cdot 2Q_1 - S_1 \cdot 2Q_2 - 2\alpha S_2 Q_1 \cdot 2Q_3| = \\
&= |2(2\alpha S_1 S_2 S_3 - S_1 Q_2 + S_2 Q_1 - 2\alpha S_1 S_2 S_3 + 2\alpha S_2 Q_1 Q_3 + S_2 Q_1 - S_1 Q_2 - \\
&- 2\alpha S_2 Q_1 Q_3)| = 4|S_2 Q_1 - S_1 Q_2| \leq 2(S_1^2 + S_2^2 + Q_1^2 + Q_2^2) \leq 2(S_1^2 + S_2^2 + \\
&+ S_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 2f.
\end{aligned}$$

Сначала мы докажем, что $S_2(t)$, $Q_1(t)$, $Q_3(t)$ являются непрерывными функциями времени, определенными для любого момента времени, а потом для оставшихся переменных S_1 , S_3 , Q_2 применим следствие.

Обозначим $2\alpha Q_3 + 1$ через \tilde{Q}_3 , $2\alpha h + 1$ через \tilde{h} .

$$\dot{\tilde{Q}}_3 = 2\alpha \dot{Q}_3 = 4\alpha^2 S_2 Q_1.$$

$$h = \alpha S_2^2 + Q_3, \quad \tilde{h} = 2\alpha h + 1 = 2\alpha^2 S_2^2 + \tilde{Q}_3.$$

В новых координатах имеем:

$$\text{sgrad } K = (Q_2 \tilde{Q}_3, -Q_1, -2\alpha Q_1 Q_2, -S_2 \tilde{Q}_3, S_1 \tilde{Q}_3 - 2\alpha S_3 Q_1, 4\alpha^2 S_2 Q_1)$$

$$\begin{cases} \dot{S}_2 = -Q_1 \\ \dot{Q}_1 = -S_2 \tilde{Q}_3 \\ \dot{\tilde{Q}}_3 = 4\alpha^2 S_2 Q_1 \end{cases}$$

$$\ddot{S}_2 = -\dot{Q}_1 = S_2 \tilde{Q}_3 = S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2).$$

$$\ddot{S}_2 \dot{S}_2 = S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) \dot{S}_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{d \dot{S}_2^2}{dt} \frac{1}{2} &= \frac{d}{dt} \int S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) dS_2, \\ \dot{S}_2 &= \pm \sqrt{2 \int S_2(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2) dS_2 + C_1}, \\ \dot{S}_2 &= \pm \sqrt{-\frac{(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2)^2}{4\alpha} + C}, \\ \int \frac{dS_2}{\sqrt{-\frac{(\tilde{h} - 2\alpha^2 S_2^2)^2}{4\alpha} + C}} &= \pm t + D,\end{aligned}$$

Мы видим, что в числителе стоит корень из многочлена четвертой степени, имеющего различные корни при $\tilde{h} \neq 0$ и $C \neq 0$. Как известно (см., например, книгу А. Гурвица и Р. Куранта [32]), решение такого уравнения выражается через эллиптические функции. Оно существует для любого момента времени и является непрерывно дифференцируемым и периодическим.

$Q_3(t) = h - \alpha S_2^2(t)$, поэтому Q_3 тоже является непрерывной функцией, определенной для любого момента времени.

$Q_1(t) = -\dot{S}_2(t)$, значит, Q_1 – непрерывная всюду определенная функция.

Функции S_1 , S_3 и Q_2 удовлетворяют следующему линейному обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \tilde{Q}_3 Q_2 \\ \dot{S}_3 = -2\alpha Q_1 Q_2 \\ \dot{Q}_2 = \tilde{Q}_3 S_1 - 2\alpha Q_1 S_3 \end{cases}$$

Правая часть является непрерывной по t , следовательно, S_1 , S_3 и Q_2 существуют при любом моменте времени. Это означает, что поле $sgrad K$ является полным.

1.7 Топология совместной поверхности уровня H и K

При изучении топологии совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K мы будем использовать теорему Лиувилля (см. Теорему 1). Отметим, что полнота векторных полей $sgrad H$ и $sgrad K$ является существенным условием в этой теореме. В случае двух степеней свободы и полноты указанных векторных полей теорема Лиувилля утверждает, что связные регулярные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла диффеоморфны двумерному тору, цилиндру или плоскости.

Теорема 6. *При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K имеет следующий тип (см. Рисунок 1.10):*

1. Пустое множество в камере 1;
2. Два цилиндра в камере 2 (под параболой);
3. Четыре цилиндра в камерах 3 и 4 (над параболой, но под лучом $k = -h$);
4. Два тора в камере 5 (над лучом $k = -h$, но под лучом $k = -h + \alpha g^2$).

Доказательство. 1. Покажем, что камере 1 соответствует пустое множество.

Камера 1 ограничена кривыми $k = \frac{1}{4\alpha}$, $k = -h + \alpha g^2$ и $k = -\alpha h^2 - h$.

Докажем, что $k \leq \frac{1}{4\alpha}$.

$$\alpha k = -\alpha Q_3 - \alpha^2(Q_1^2 + Q_3^2) \leq -\alpha Q_3 - \alpha^2 Q_3^2 = -(\alpha Q_3 + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Докажем, что $k \leq -h + \alpha g^2$.

$$k + h - \alpha g^2 = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2) + \alpha S_2^2 + Q_3 - \alpha g^2 = \alpha(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2 - g^2) = \alpha(Q_2^2 - S_1^2 - S_3^2) = \alpha((S_3 R_1 - S_1 R_3)^2 - S_1^2 - S_3^2) = \alpha(S_3^2 R_1^2 - 2S_1 S_3 R_1 R_3 +$$

$$S_1^2 R_3^2 - S_1^2 - S_3^2 = -\alpha \left((1 - R_3^2) S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2) S_3^2 \right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $Q^2 = S^2 R^2 - g$ и $R^2 = 1$.

Покажем, что $(1 - R_3^2) S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2) S_3^2$ не меньше, чем

$(\sqrt{1 - R_3^2} S_1 \pm \sqrt{1 - R_1^2} S_3)^2$ (нужно выбрать знак, противоположный знаку $S_1 S_3$) и, значит, неотрицательно.

Пусть для определенности $S_1 S_3 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sqrt{1 - R_3^2} S_1 - \sqrt{1 - R_1^2} S_3)^2 &= (1 - R_3^2) S_1^2 - 2\sqrt{(1 - R_1^2)(1 - R_3^2)} S_1 S_3 + (1 - R_1^2) S_3^2 = \\ &= (1 - R_3^2) S_1^2 - 2\sqrt{1 - R_1^2 - R_3^2 + R_1^2 R_3^2} S_1 S_3 + (1 - R_1^2) S_3^2 = \\ &= (1 - R_3^2) S_1^2 - 2\sqrt{R_2^2 + R_1^2 R_3^2} S_1 S_3 + (1 - R_1^2) S_3^2 \leq \\ &\leq (1 - R_3^2) S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2) S_3^2, \end{aligned}$$

так как $-\sqrt{R_2^2 + R_1^2 R_3^2} \leq -|R_1 R_3| \leq R_1 R_3$.

Если же $S_1 S_3 < 0$, то

$$(1 - R_3^2) S_1^2 + 2S_1 S_3 R_1 R_3 + (1 - R_1^2) S_3^2 \geq (\sqrt{1 - R_3^2} S_1 + \sqrt{1 - R_1^2} S_3)^2 \geq 0.$$

Покажем, что $k \leq -\alpha h^2 - h$ при $h \leq -\frac{1}{2\alpha}$.

$k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2) \leq -Q_3 - \alpha Q_3^2 \leq -h - \alpha h^2$, так как $Q_3 = h - \alpha S_2^2 \leq h \leq -\frac{1}{2\alpha}$, а функция $x - \alpha x^2$ возрастает при $x \leq -\frac{1}{2\alpha}$, $\alpha > 0$.

2. Мы имеем следующую систему, задающую $M_{h,k}^2$:

$$\begin{cases} h = \alpha S_2^2 + Q_3, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Из второго уравнения имеем:

$$0 \leq \alpha Q_1^2 = -(Q_3 + \alpha Q_3^2 + k), \quad (1.7.2)$$

откуда

$$\alpha Q_3^2 + Q_3 + k \leq 0 \quad (1.7.3)$$

Если в формуле (1.7.3) строгое неравенство, то получаем два значения для Q_1 , отличающихся знаком, если же в формуле (1.7.3) равенство, то $Q_1 = 0$.

Выразив Q_3 из первого уравнения системы (2.7.2) и подставив в неравенство (1.7.3), получаем:

$$(h - \alpha S_2^2) + \alpha(h - \alpha S_2^2)^2 + k \leq 0, \quad (1.7.4)$$

или

$$h - \alpha S_2^2 + \alpha h^2 - 2\alpha^2 h S_2^2 + \alpha^3 S_2^4 + k \leq 0. \quad (1.7.5)$$

Обозначим S_2^2 через x .

Тогда неравенство (1.7.5) переписется так:

$$\alpha^3 x^2 - \alpha(2\alpha h + 1)x + k + \alpha h^2 + h \leq 0. \quad (1.7.6)$$

Дискриминант уравнения

$$\alpha^3 x^2 - \alpha(2\alpha h + 1)x + k + \alpha h^2 + h = 0, \quad (1.7.7)$$

соответствующего неравенству (1.7.6), равный $\alpha^2(1 - 4\alpha k)$, неотрицателен.

Если $k + \alpha h^2 + h < 0$, то корни уравнения (1.7.7) имеют разные знаки. Это означает, что $|S_2| \leq C(h, k)$, причем, если $|S_2| < C(h, k)$, то для Q_1 имеем два значения, различающиеся знаком. Если же $|S_2| = C(h, k)$, то $Q_1 = 0$. Это означает, что проекция совместной поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла на плоскость (S_2, Q_1) является окружностью.

Если $k + \alpha h^2 + h > 0$, то $0 < C_1(h, k) \leq |S_2| \leq C_2(h, k)$. Это означает, что проекция $M_{h,k}^2$ на плоскость (S_2, Q_1) является двумя окружностями.

Фиксируем $S_2, Q_1, S_2 \neq 0$ (заметим, что S_2 может равняться нулю только при $k < -\alpha h^2 - h$). Тогда система (2.7.2) переписется так:

$$\begin{cases} Q_3 = h - \alpha S_2^2, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ Q_2 = -\frac{S_1 Q_1 + S_3 Q_3}{S_2}, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Выразив из первого уравнения системы (1.7.8) Q_3 , затем из третьего уравнения Q_2 , мы получим одно уравнение на S_1 и S_3 . Оно задает нам слой над точкой (S_2, Q_1) . Подставим в четвертое уравнение системы (1.7.8) выражения для Q_2 и Q_3 :

$$Q_1^2 + \frac{(S_1 Q_1 + S_3 Q_3)^2}{S_2^2} + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2,$$

$$S_2^2 Q_1^2 + S_1^2 Q_1^2 + 2S_1 S_3 Q_1 Q_3 + S_3^2 Q_3^2 + S_2^2 Q_3^2 = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2) S_2^2,$$

$$(Q_1^2 - S_2^2) S_1^2 + 2Q_1 Q_3 S_1 S_3 + (Q_3^2 - S_3^2) S_3^2 = (S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2 - g^2) S_2^2,$$

Правая часть равна $(\frac{h+k}{\alpha} - g^2) S_2^2 < 0$, так как $k < -h - \alpha g^2$ (это мы доказали в п.1).

Рассмотрим левую часть как квадратичную форму относительно переменных S_1 и S_3 . Матрица квадратичной формы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} Q_1^2 - S_2^2 & Q_1 Q_3 \\ Q_1 Q_3 & Q_3^2 - S_2^2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы равен $S_2^2(S_2^2 - Q_1^2 - Q_3^2) = S_2^2(\frac{h+k}{\alpha})$. След матрицы квадратичной формы равен $Q_1^2 + Q_3^2 - 2S_2^2 = -\frac{k+h}{\alpha} - S_2^2$.

Если $k > -h$, то определитель положителен, а след отрицателен, и уравнение задает эллипс, то есть топологически окружность. Если же $k < -h$, то уравнение задает гиперболу, то есть топологически две прямые.

При $S_2 = 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} h = Q_3, \\ k = -Q_3 - \alpha(Q_1^2 + Q_3^2), \\ S_1 Q_1 + S_3 Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_3^2 - g^2. \end{cases} \quad (1.7.9)$$

$$S_3 = -\frac{S_1 Q_1}{h}.$$

$$-\frac{k+h}{\alpha} + Q_2^2 = S_1^2 + \frac{S_1^2 Q_1^2}{h^2} - g^2.$$

$$Q_1^2 = -\frac{k + \alpha h^2 + h}{\alpha}.$$

В итоге получаем:

$$Q_2^2 + \frac{k+h}{\alpha h^2} S_1^2 = \frac{k+h - \alpha g^2}{\alpha}$$

Правая часть меньше 0, так как $k < -h + \alpha g^2$.

$k + h < 0$, так как $k < -\alpha h^2 - h$ (S_2 может равняться нулю только при $k < -\alpha h^2 - h$).

Уравнение задает гиперболу, то есть топологически две прямые.

В итоге, мы получаем следующее.

При $k < -\alpha h^2 - h$ мы имеем расслоение над окружностью со слоем две прямые. Учитывая то, что совместная поверхность уровня является ориентированной, мы получаем, что это может быть либо цилиндр, либо два цилиндра. Но число связных компонент равно в этом случае двум, так как совместная поверхность уровня на куске параболы $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$ представляет собой две критические прямые индекса 2. Поэтому в этом случае $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $2C^2$.

При $-\alpha h^2 - h < k < -h$ у нас расслоение над двумя окружностями со слоем две прямые. Учитывая ориентированность $M_{h,k}^2$, а также то, что при $k = \frac{1}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h < \frac{1}{4\alpha}$ совместная поверхность уровня является четырьмя критическими прямыми индекса 2, мы получаем, что $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $4C^2$.

Наконец при $k > -h$ мы имеем расслоение над двумя окружностями со слоем окружность. Из-за ориентируемости $M_{h,k}^2$ и того, что при $k = \frac{1}{4\alpha}$, $\frac{1}{4\alpha} < h \leq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ совместная поверхность уровня является двумя критическими окружностями индекса 2, $M_{h,k}^2$ диффеоморфно $2T^2$.

Мы видим, что помимо критических значений бифуркационной диаграмме также принадлежит и луч $k = -h$ ($h \geq -\frac{1}{4\alpha}$), так как топология совместной поверхности уровня меняется при переходе через этот луч.

□

На Рисунке 1.10 представлено расположение камер, отвечающих разным совместным поверхностям уровня H и K . Номера камер соответствуют номерам в Теореме 6.

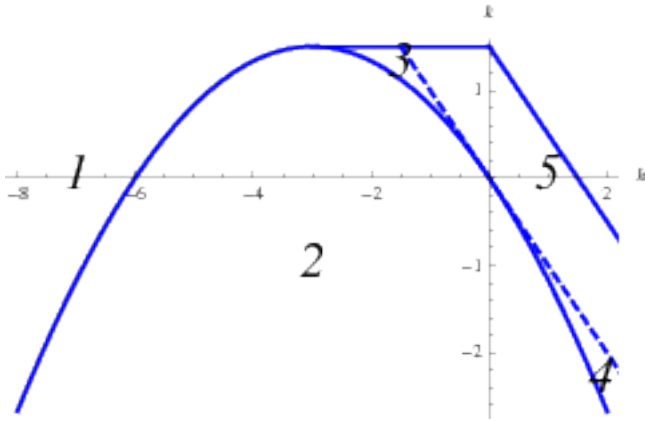


Рис. 1.10: Расположение камер, отвечающих разным совместным поверхностям уровня H и K

1.8 Перестройки

Мы опишем перестройки торов и цилиндров Лиувилля изучаемого случая Соколова.

1. На границе бифуркационной диаграммы возникает перестройки вида $\emptyset \rightsquigarrow T^2$ или $\emptyset \rightsquigarrow C^2$ (рождение тора и цилиндра соответственно). Первая из них обозначается обычно A (см. книгу А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [12]), вторая же получается из A заменой окружности на прямую (вместо тора $T^2 = S^1 \times S^1$ здесь будет цилиндр $C^2 = S^1 \times R^1$, вместо критической окружности – критическая прямая). Обозначим вторую перестройку $\overset{\circ}{A}$. Как это принято в компактной теории, число перед буквой, означающей перестройку, будет означать, что одновременно происходит несколько бифуркаций такого рода.

2. В изучаемой системе встречается еще один аналог хорошо известной перестройки B ($T^2 \rightsquigarrow 2T^2$). Перестройку B можно описать так (см. книгу А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [12]): исходная окружность перетягивается, возникает перемычка, получается восьмерка, которая затем распадается на

две окружности. Вся эта картинка умножается на окружность. У нас же картинка будет умножаться на прямую, а не на окружность. Мы получим новую перестройку $C^2 \rightsquigarrow 2C^2$, которую обозначим $\overset{\circ}{B}$.

3. В интегрируемом случае Соколова присутствует некомпактная перестройка, для которой нет компактного аналога. Это перестройка без критических точек. Тор перестраивается в два цилиндра. Перестройку можно описать следующим образом. Рассмотрим функцию функцию f , заданную неявно в виде

$$(x + cy)^2 + (1 - c^2)y^2 = 1.$$

Легко видеть, что если $c^2 < 1$, то линией уровня f будет гипербола, то есть топологически две прямые. При $|c| = 1$ линией уровня будут две параллельные прямые. При $c^2 > 1$ линией уровня будет эллипс, то есть топологически окружность. Критических точек у функции f нет. Описанная перестройка (две прямые переходят в окружность) происходит без критических точек. Умножаем описанную перестройку „две прямые \rightsquigarrow окружность“ на окружность. В результате получаем перестройку $T^2 \rightsquigarrow 2C^2$, которую обозначим S .

На Рисунке 1.11 представлены перестройки торов и цилиндров Лиувилля для случая Соколова

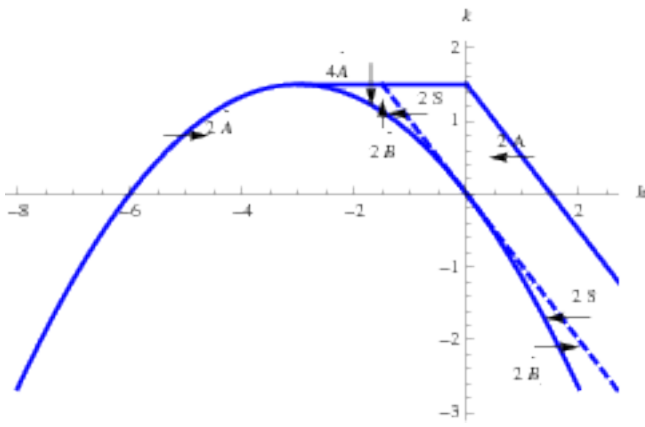


Рис. 1.11: Перестройки торов и цилиндров Лиувилля

Глава 2

Случай Соколова на $so(3, 1)$

2.1 Введение

В этой главе мы исследуем слоение Лиувилля случая Соколова на $so(3, 1)$. Описана топология изоэнергетической поверхности гамильтониана (см. Теорему 7), бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. Утверждение 2.2), и отображения момента (см. Теорему 8), индексы критических точек (см. Утверждение 2.6.1), а также совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. Теорему 9). Также было доказано, что поток векторного поля, отвечающего гамильтониану, неполон (см. параграф 2.5).

2.2 Бифуркационные значения гамильтониана

Бифуркационные значения гамильтониана – значения, являющиеся бифуркационными для отображения $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$. Критическими точками гамильтониана являются те точки, где косой градиент гамильтониана равен нулю.

Выпишем явно поле $\text{sgrad } H$:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + \varkappa S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 R_3 + \varkappa S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 R_2\right) + R_1^2 + R_2^2 - \\ & & & - \varkappa S_1^2 - \varkappa S_2^2. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при $\varkappa = 1$ (случай $\text{so}(4)^*$) мы получим в точности формулы (5) из работы А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27].

Приравняв нулю $\text{sgrad } H$, получаем следующее

Утверждение 2.2.1. *Для произвольного $\varkappa \neq -\alpha^2$ критические точки гамильтониана образуют следующие двупараметрические семейства. При этом $\text{sgrad } K$ в этих точках тоже равен нулю.*

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_2, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \frac{2\varkappa}{\alpha} R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm\sqrt{\varkappa}S_1, \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1, \pm\sqrt{\varkappa}S_3)$ при $\varkappa \geq 0$.

Замечание 6. *Утверждение 2.2.1 – это обобщение Предложения 1 из статьи А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27].*

Мы изучаем систему на $M_{1,g}^4$, поэтому надо добавить еще условия $f_1 = 1$, $f_2 = g$.

Утверждение 2.2.2. Для любого $\varkappa < 0$ критические точки гамильтониана на $M_{1,g}^4$ перечислены ниже:

1) при всех $g \in \mathbb{R}$ имеются 4 точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \text{ где } \varkappa S_3^2 + R_3^2 = 1, S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = k = 0$;

2) при всех $g \in \mathbb{R}$ имеются 2 точки вида

$$(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{\varkappa}{\alpha} S_2, \frac{g}{S_2}, 0), \text{ где } S_2^2 = \frac{1}{2\varkappa} + \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}}$$

$$\text{при этом } h = \frac{\alpha - \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \text{ и } k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}.$$

Известно, что в некомпактном случае помимо критических бифуркационных значений могут быть не критические (см. пример в Главе 1). Но в нашем случае выполнено

Утверждение 2.2.3. Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $so(3, 1)$ (при $\varkappa < 0$) являются следующими кривыми на плоскости (g, h) :

1. $h = 0, g \in \mathbb{R}$;

$$2. h = \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, g \in \mathbb{R},$$

причем эти точки являются критическими значениями.

На Рисунке 2.1 представлены бифуркационные значения гамильтониана.

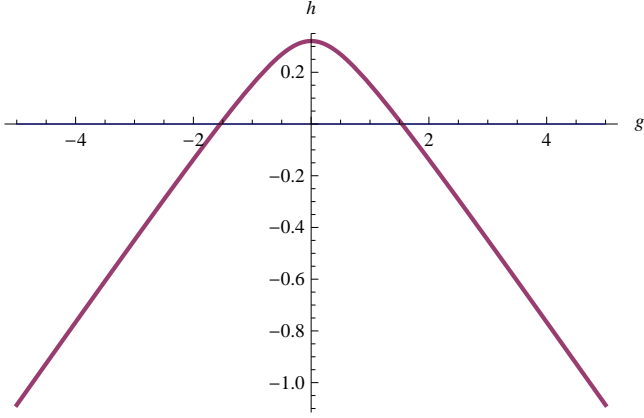


Рис. 2.1: Бифуркационные значения гамильтониана

2.3 Топология изоэнергетической поверхности

Теперь исследуем топологию изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ при различных значениях g и h . Обозначим через D_k^2 открытый двумерный диск с k дырками.

Теорема 7. *Изоэнергетическая поверхность $Q_{g,h}^3$ для гамильтониана случая Соколова на $\mathfrak{so}(3,1)$ ($\varkappa < 0$), $h \neq 0$, $h \neq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$, диффеоморфна $D_3^2 \times \mathbb{R}$.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\varkappa = -1$. Фиксируем значение вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$ и рассмотрим относительно R систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ S_2 R_1 - S_1 R_2 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 - h. \end{cases}$$

Она задает прямую l в пространстве $\mathbb{R}^3(R)$, если векторы (S_1, S_2, S_3) и $(S_2, -S_1, 0)$ линейно независимы. А они зависимы только, если $S_1 = S_2 = 0$. В этом случае $h = 0$. Но значение $h = 0$ всегда является критическим (см. Утверждение 2.2.3). Прямая l пересекает сферу $R^2 = 1 - \varkappa S^2$ не более чем в двух точ-

ках. Множество точек S , для которых существует пересечение, есть образ поверхности $Q_{g,h}^3$ при проекции $(S, R) \mapsto S$. Обозначим его через $P_{g,h}^3 \subset \mathbb{R}^3(S)$. Прямая l пересекает сферу тогда и только тогда, когда

$$(\rho(0, l))^2 \leq 1 - \varkappa S^2,$$

где $\rho(0, l)$ — расстояние от прямой l до начала координат, причем равенство соответствует случаю, когда прямая пересекается со сферой по одной точке, а строгое неравенство — по двум.

Вычисляя $\rho(0, l)$, получаем:

$$(\rho(0, l))^2 = \frac{g^2}{S^2} + \frac{(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2}{S_1^2 + S_2^2} \leq 1 - \varkappa S^2.$$

Следовательно, множество $P_{g,h}^3$ задается неравенством

$$S^2(\alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2 + (\varkappa S^4 - S^2 + g^2)(S_1^2 + S_2^2) \leq 0. \quad (2.3.1)$$

Обозначим

$$v = \alpha S_2^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 - h, \quad u = S_1^2 + S_2^2, \quad z = S_3^2.$$

В новых переменных u, v, z неравенство (2.3.1) представится в виде:

$$\varkappa u z^2 + (2\varkappa u^2 - u + v^2)z + u(v^2 + g^2 + \varkappa u^2 - u) \leq 0. \quad (2.3.2)$$

Теперь подставляем $\varkappa = -1$. Тогда квадратичное по z неравенство (2.3.2) переписывается следующим образом:

$$u z^2 + (2u^2 + u - v^2)z + u(u^2 + u - v^2 - g^2) \geq 0. \quad (2.3.3)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $u = 0$. Поскольку $u = S_1^2 + S_2^2$, то из равенства u нулю следует, что $S_1 = S_2 = 0$, откуда в свою очередь следует,

что $h = 0$. Но, как мы уже знаем, значение $h = 0$ является критическим (см. Теорему 1). При этом также оказывается, что сама прямая $h = 0$ не влияет на топологию $Q_{g,h}^3$, то есть при проходе на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ через прямую $h = 0$, не пересекая ветви гиперболы $h = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$, топологический тип $Q_{g,h}^3$ не меняется. Такая же ситуация наблюдалась и на $so(4)$ (см. работу А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27]), и на $e(3)$ (см. Главу 1). Далее считаем, что $u > 0$.

Найдем дискриминант D уравнения

$$uz^2 + (2u^2 + u - v^2)z + u(u^2 + u - v^2 - g^2) = 0, \quad (2.3.4)$$

соответствующего тому случаю, когда в неравенстве (2.3.3) стоит равенство:

$$D = (2u^2 + u - v^2)^2 - 4u^2(u^2 + u - v^2 - g^2) = (v^2 - u)^2 + 4u^2g^2 > 0.$$

Мы видим, что уравнение (2.3.4) всегда имеет корни z_1, z_2 . Поскольку $z \geq 0$, то нужно вычислить, когда неравенство (2.3.3) имеет неотрицательные решения. Заметим, что для ненулевых корней знаки однозначно определяются знаками суммы и произведения корней.

Разбирая все варианты, получаем, что образ $P_{g,h}^3$ при проекции на плоскость S_1, S_2 состоит из всех точек (S_1, S_2) , таких, что $(S_1, S_2) \neq (0, 0)$. Прообразом любой внутренней точки $(S_1, S_2) \in \pi(P_{g,h}^3)$ при проекции $\pi: P^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(S_1, S_2)$ является прямая или же дополнение к интервалу $(-\sqrt{z_+(S_1, S_2)}, \sqrt{z_+(S_1, S_2)})$ в зависимости от знака $u^2 + u - v^2 - g^2$ (если знак “+”, то — прямая, если “−”, то — дополнение к интервалу), где $z_+(S_1, S_2)$ — единственный положительный корень уравнения (2.3.4) (при $u^2 + u - v^2 - g^2 < 0$).

Нам осталось определить при различных регулярных (g, h) вид области на плоскости $\mathbb{R}^2(S_1, S_2)$, задаваемой неравенством $u^2 + u - v^2 - g^2 < 0$. В переменных S оно переписывается следующим образом:

$$(S_1^2 + S_2^2)^2 + S_1^2 + S_2^2 - \left(\frac{1}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 - h\right)^2 - g^2 \leq 0.$$

Переписывая последнее неравенство относительно переменной S_1 , получаем неравенство:

$$\frac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2} S_1^4 + \left(1 + \frac{2h}{\alpha}\right) S_1^2 + (1 - \alpha^2) S_2^4 + (1 + 2\alpha h) S_2^2 - g^2 - h^2 \leq 0,$$

которое эквивалентно следующему:

$$-\alpha \left(\sqrt{\left(S_2^2 + \frac{1 + 2\alpha h}{2(1 - \alpha^2)}\right)^2 + \frac{4g^2 + 1}{4(\alpha^2 - 1)} + \frac{\alpha + 2h}{2(\alpha^2 - 1)}} \right) \leq S_1^2, \quad (2.3.5)$$

$$S_1^2 \leq \alpha \left(\sqrt{\left(S_2^2 + \frac{1 + 2\alpha h}{2(1 - \alpha^2)}\right)^2 + \frac{4g^2 + 1}{4(\alpha^2 - 1)} - \frac{\alpha + 2h}{2(\alpha^2 - 1)}} \right). \quad (2.3.6)$$

Заметим, что левая часть всегда меньше нуля. Правая часть будет больше нуля при всех S_2 тогда и только тогда, когда $h < -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$. Если $h > -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$, то правая часть будет положительна при $|S_2| > \text{const}$, const зависит от g и h . В случае $h = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$ правая часть будет больше нуля при $S_2 \neq 0$ и равна нулю при $S_2 = 0$. $P_{g,h}^3$ будет иметь следующий тип:

1) при $h \neq 0$ и $h < -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$ имеем пространство $\mathbb{R}^3(S)$ с вырезанными из него «однополостным гиперболоидом» и прямой $S_1 = S_2 = 0$, при $h = 0$ эта прямая «вклеивается»;

2) при $h \neq 0$ и $h > -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$ имеем пространство $\mathbb{R}^3(S)$ с

вырезанными из него «двуполостным гиперboloидом» и прямой $S_1 = S_2 = 0$, при $h = 0$ эта прямая «вклеивается».

Для получения изоэнергетической поверхности необходимо склеить два экземпляра многообразий $P_{g,h}^3$, описанных выше, по их границе. Теорема доказана. \square

2.4 Бифуркационная диаграмма отображения момента

Рассмотрим теперь отображение момента для случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ $H \times K: \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Точка (S, R) будет критической тогда и только тогда, когда $sgrad H$ и $sgrad K$ будут линейно зависимыми. Удобно перейти от переменных S и R к переменным S и Q . Аналогично тому, как это сделано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [27], можно показать, что при $S \neq 0$ это будет диффеоморфизм $M_{1,g}^4$ на свой образ. Поэтому бифуркационную диаграмму можно искать в переменных (S, Q) . При этом скобка переписывается следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = q \epsilon_{ijk} S_k, \quad \text{где } q = \varkappa S^2 - R^2 = 2\varkappa S^2 - 1.$$

Мы также будем использовать следующее полезное тождество:

$$Q^2 = S^2 R^2 - g^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2, \quad \varkappa \neq 0.$$

Теорема 8. *Рассмотрим $M_{1,g}^4$, $g \in \mathbb{R}$. Тогда*

при $\varkappa < 0$ критические значения отображения момента состоят из следующих кусков:

1) куски параболы $k = \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$, $h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,

при этом в прообразе получаются 2 критические окружности $(0, S_2, 0, Q_1, 0, Q_3)$.

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h \in \mathbb{R}$,

при этом в прообразе 2 критические прямые $(S_1, 0, 0, 0, Q_2, Q_3)$.

3) отрезка $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,

при этом в прообразе будут 2 критические окружности $(S_1, S_2, S_3, 0, Q_2, \frac{q}{2\alpha})$.

4) изолированной особой точки $h = k = 0$.

Доказательство. Обозначим $2\alpha Q_3 - q$ через A , $q + 2\frac{\varkappa}{\alpha}Q_3$ через B .

Выпишем координаты $sgrad H$ и $sgrad K$:

$$\{S_1, H\} = 2\alpha S_2 S_3 - Q_2,$$

$$\{S_2, H\} = \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1,$$

$$\{S_3, H\} = -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2,$$

$$\{Q_1, H\} = S_2 A,$$

$$\{Q_2, H\} = S_1 B,$$

$$\{Q_3, H\} = -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right),$$

$$\{S_1, K\} = Q_2 A,$$

$$\{S_2, K\} = Q_1 B,$$

$$\{S_3, K\} = -2\left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha\right) Q_1 Q_2,$$

$$\{Q_1, K\} = [2\frac{\varkappa}{\alpha}(S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q S_2] A,$$

$$\{Q_2, K\} = [2\alpha(S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + q S_1] B,$$

$$\{Q_3, K\} = 4\varkappa Q_3(S_1 Q_2 - S_2 Q_1) - 2q\left(\alpha S_2 Q_1 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2\right).$$

Сначала мы перечислим случаи линейной зависимости $sgrad H$ и $sgrad K$ при $\varkappa < 0$, когда соответствующие куски бифуркационной диаграммы отображения момента являются частями кривых порядка не выше 2, причем то, что в этих случаях косые градиенты линейно зависимы, будет проверено непосредственно. Затем будет показано, что все возможности, когда косые градиенты линейно зависимы, сводятся к этим или же приводят к точке $(0, 0)$.

1) $S_1 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_2 = S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0$. При этом матрица, составленная из косых градиентов, приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_1 & 0 & S_2 A & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 \\ 0 & Q_1 B & 0 & S_2 AB & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 B \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $sgrad H$ и $sgrad K$ в этом случае линейно зависимы, так как они просто пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, равным B .

Легко проверить, что зависимость h и k на данном куске бифуркационной диаграммы выражается следующим образом:

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2. \quad (2.4.1)$$

Найдем теперь критические точки и область изменения h . Рассмотрим следующую систему, задающую критические точки:

$$\begin{cases} S_2 R_2 = g, \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h, \\ \varkappa S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Она имеет решение при фиксированном S_2 в том и только том случае, когда

$$\frac{g^2}{S_2^2} + \frac{(h - \alpha S_2^2)^2}{S_2^2} \leq 1 - \varkappa S_2^2. \quad (2.4.3)$$

В случае строгого неравенства имеем 2 точки и 1 точку в прообразе при проекции критических точек на (2.4.3) в случае равенства.

Обозначим S_2^2 через y . Тогда неравенство (2.4.3) перепишется следующим образом:

$$(\alpha^2 + \varkappa)y^2 - (2\alpha h + 1)y + g^2 + h^2 \leq 0. \quad (2.4.4)$$

Неравенство (2.4.4) имеет неотрицательные решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = (2\alpha h + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \varkappa)(g^2 + h^2) \geq 0, \\ 2\alpha h + 1 \geq 0. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Здесь мы учли, что $\alpha^2 + \varkappa > 0$.

Из системы неравенств (2.4.5) следует, что область изменения h при $\varkappa < 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \\ h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \end{array} \right. \\ h \geq -\frac{1}{2\alpha}. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Но $\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} < -\frac{1}{2\alpha}$ при $\alpha^2 + \varkappa > 0$, поэтому система (2.4.6) равносильна неравенству $h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$. Получаем две критические окружности.

2) $S_2 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_1 = S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0$. Матрица косых градиентов перепишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & 0 & 0 & 0 & S_1 B & -2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 \\ Q_2 A & 0 & 0 & 0 & -S_1 B A & 2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 A \end{pmatrix}.$$

При этом k на этом куске бифуркационной диаграммы выражается через h следующим образом:

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2. \quad (2.4.7)$$

Аналогично первому пункту получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 = g, \\ -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 = h, \\ \varkappa S_1^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Она имеет решение при фиксированном S_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^2}{S_1^2} + \frac{(h + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2)^2}{S_1^2} \leq 1 - \varkappa S_1^2. \quad (2.4.9)$$

Обозначим S_1^2 через x . Нужно, чтобы следующее неравенство имело неотрицательные решения:

$$-\varkappa \frac{\alpha^2 + \varkappa}{\alpha^2} x^2 + (1 - \frac{2\varkappa h}{\alpha}) x - (g^2 + h^2) \geq 0. \quad (2.4.10)$$

При $\varkappa < 0$ дискриминант соответствующего уравнения положителен, поэтому неравенство (2.4.10) имеет решение при любом $h \in \mathbb{R}$.

Это значит, что мы имеем 2 критические прямые.

3) $Q_1 = 0$, $A = 2\alpha Q_3 - q = 0$. В этом случае $sgrad K = 0$.

$$k = \frac{1}{4\alpha} (1 - 4\varkappa g^2)$$

Ниже (см. доказательство Теоремы 9) будет показано, что в критические точки образуют при этом две критические окружности.

$$4) Q_2 = 0, B = q + 2\frac{\varkappa}{\alpha}Q_3 = 0.$$

$$k = -\frac{\alpha}{4\varkappa}(1 - 4\varkappa g^2) > \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}.$$

Это решение не существует при $\varkappa < 0$, так как образ отображения момента на плоскости $R^2(h, k)$ не лежит выше прямой $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$ (это будет показано ниже, см. доказательство Теоремы 2.7).

5)

$$\begin{cases} (2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 = S_1 S_2 A, \\ (\frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1)Q_2 = S_1 S_2 B, \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

6) Теперь докажем, что мы перечислили все нетривиальные случаи, когда косые градиенты H и K линейно зависимы. Остальные (тривиальные) случаи линейной зависимости приводят к точке $(0, 0)$. Обозначим через Δ_{ij} миноры 2×6 матрицы $\begin{pmatrix} sgrad H \\ sgrad K \end{pmatrix}$.

Приравняв миноры Δ_{13} и Δ_{23} к нулю, получаем следующее: из $\Delta_{13} = 0$ следует, что $Q_2[(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 - S_1 S_2 A] = 0$, а из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $Q_1[(\frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1)Q_2 - S_1 S_2 B] = 0$.

Мы получили следующую альтернативу: либо Q_1 или Q_2 равно 0, либо выполнено 5). Разберемся теперь с тем, что происходит, когда Q_1 или Q_2 равно 0.

I. $Q_1 = 0, A \neq 0$ (случай $Q_1 = A = 0$ разобран выше). Из $\Delta_{13} = 0$ следует, что $S_1 S_2 Q_2 = 0$ Рассмотрим различные случаи:

1) $S_1 = 0, S_3 \neq 0$ (случай $S_1 = S_3 = 0$ разобран выше). В этом случае

ненулевым может быть только минор Δ_{14} . $Q_3 = -S_2R_1$, $Q_2 = S_3R_1$.

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} 2\alpha S_2 S_3 - Q_2 & S_2 A \\ Q_2 A & (\frac{2\alpha}{\alpha}(S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q) S_2 A \end{vmatrix}$$

2) $S_2 = 0$, $S_3 \neq 0$, $S_1 \neq 0$ (случаи $S_1 = Q_1 = 0$ и $S_2 = S_3 = 0$ разобраны выше).

Из тождества $S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0$ и условия $S_3 \neq 0$ следует, что $Q_3 = 0$. Из равенства нулю минора Δ_{14} следует, что $Q_2 = 0$, далее из $\Delta_{25} = 0$ следует, что $B = 0$. Но случай $Q_2 = B = 0$ разобран выше.

3) $Q_1 = 0$, тогда $\Delta_{34} = -2(\frac{\alpha}{\alpha} + \alpha)S_1 S_2^2 AB = 0$. Но случаи $S_1 = Q_1 = 0$, $S_2 = Q_1 = 0$, $Q_1 = A = 0$ уже разобраны выше.

II. $Q_2 = 0$, $Q_1 \neq 0$, $B \neq 0$ (случаи $Q_1 = Q_2 = 0$ и $Q_2 = B = 0$ разобраны выше). Из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $S_1 S_2 = 0$. Последовательно рассмотрим ряд случаев:

1) $S_2 = 0$, тогда $\Delta_{25} = 2\alpha Q_1(S_1 Q_3 - S_3 Q_1) = 0$, откуда $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = 0$. Перейдем к переменным (S, R) : $Q_1 = -S_3 R_2$, $Q_3 = S_1 R_2$, так как $S_2 = 0$. $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = S_1^2 R_2 + S_3^2 R_2 = (S_1^2 + S_3^2)R_2$. Либо $R_2 = 0$, либо $S = 0$. В обоих случаях $h = k = 0$.

2) $S_1 = 0$, тогда $\Delta_{12} = 2\alpha S_2 S_3 Q_1 B = 0$, откуда $S_2 = 0$ или $S_3 = 0$. Но случаи $S_1 = S_3 = 0$ и $S_2 = S_3 = 0$ были разобраны выше.

□

На Рисунке 2.2 изображена бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$.

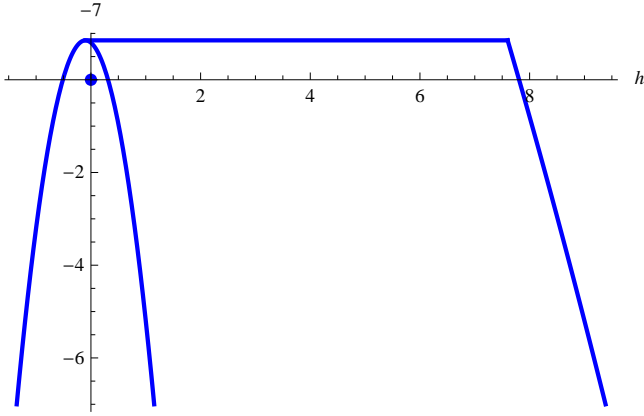


Рис. 2.2: Бифуркационная диаграмма отображения момента

Как и в случае с бифуркационными значениями гамильтониана, оказывается, что бифуркационные значения отображения момента в случае Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ совпадают с критическими (см. параграф 2.7).

2.5 Неполнота поля $\text{sgrad } H$

Мы покажем, что критические траектории, являющиеся прямыми, неполны, что означает, что теорему Лиувилля применять нельзя.

Поле $\text{sgrad } H$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\kappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2, \\ \{Q_1, H\} &= S_2 A, \\ \{Q_2, H\} &= S_1 B, \\ \{Q_3, H\} &= -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right). \end{aligned}$$

Подставив в него $S_2 = S_3 = Q_1 = 0$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -Q_2, \\ \dot{Q}_2 = S_1 B = S_1(q + \frac{2\kappa}{\alpha} Q_3) = S_1(2\kappa S_1^2 - 1 + \frac{2\kappa}{\alpha} Q_3), \\ \dot{Q}_3 = -\frac{2\kappa}{\alpha} S_1 Q_2. \end{cases}$$

Выразив Q_3 из условия $h = -\frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 + Q_3$ и подставив во второе уравнение, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -Q_2, \\ \dot{Q}_2 = S_1 \left(2\kappa S_1^2 - 1 + \frac{2\kappa}{\alpha} (h + \frac{\kappa}{\alpha} S_1^2) \right) = S_1 \left(2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) - 1 + \frac{2\kappa}{\alpha} h \right). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Из системы (2.5.1) получаем дифференциальное уравнение на S_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{S}_1 &= -\dot{Q}_2 = S_1 \left(-2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) + 1 - \frac{2\kappa}{\alpha} h \right), \\ \ddot{S}_1 \dot{S}_1 &= S_1 \left(-2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) + 1 - \frac{2\kappa}{\alpha} h \right) \dot{S}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{S}_1^2}{2} &= \frac{d}{dt} \int S_1 \left(-2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) + 1 - \frac{2\kappa}{\alpha} h \right) dS_1, \\ \dot{S}_1 &= \pm \sqrt{2 \int S_1 \left(-2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) + 1 - \frac{2\kappa}{\alpha} h \right) dS_1 + C_1}, \\ \dot{S}_1 &= \pm \sqrt{\frac{\left(-2\frac{\kappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \kappa) + 1 - \frac{2\kappa}{\alpha} h \right)^2}{-2\frac{\kappa}{\alpha^2} (\alpha^2 + \kappa)} + C}, \end{aligned}$$

Видно, что при $\kappa < 0$ производная S_1 асимптотически растет квадратично, поэтому траектория не является полной.

2.6 Индексы критических точек

Аналогично тому, как это сделано для случая $e(3)$, можно доказать следующее

Утверждение 2.6.1. *Индексы критических точек имеют следующий тип:*

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h < -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 2;
2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h > -\frac{1}{2\alpha}$ имеют индекс 1;
3. Прообразы кривой $k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$, $h > \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$

имеют индекс 2;

4. Прообразы кривой $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$

имеют индекс 2.

2.7 Топология совместной поверхности уровня H и K

Обозначим через S_k^2 двумерную сферу с k проколами.

Теорема 9. *При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K , обозначаемая $M_{h,k}^2$ имеет следующий тип: 1. Пустое множество при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$, пустое множество при $k > \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, пустое множество при $k > \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$;*

2. $2S_4^2$ при $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$ при $g \neq 0$;

3. $2T^2$ при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $k < \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$.

Доказательство. Мы будем использовать следующее

Утверждение 2.7.1. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ дан эллипс с центром в начале координат, заданный уравнением $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, где $b^2 - 4ac < 0$, $ad > 0$, и эллипс, заданный уравнением $px^2 + qy^2 = r$, где $p, q, r > 0$. Тогда указанные эллипсы пересекаются тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$((b^2 - 4ac)r + 2d(aq + cp))^2 \leq 4d^2 ((aq - cp)^2 + b^2pq), \quad (2.7.1)$$

при этом если правая часть равна нулю, то эллипсы совпадают, если неравенство в (2.7.1) строгое, то эллипсы пересекаются по четырем различным точкам, а в случае равенства и ненулевой правой части (2.7.1) – касаются по двум точкам.

Доказательство. Параметризуем эллипс следующим образом: $x = \sqrt{\frac{r}{p}} \cos \varphi$, $y = \sqrt{\frac{r}{q}} \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Подставляя параметризованные значения в уравнение первой кривой, получаем:

$$\frac{ar}{p} \cos^2 \varphi + \frac{br}{\sqrt{pq}} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{cr}{q} \sin^2 \varphi = d.$$

Переходя в тригонометрических функциях к двойному аргументу, имеем:

$$\frac{ar}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \frac{br}{2\sqrt{pq}} \sin 2\varphi + \frac{cr}{2q}(1 - \cos 2\varphi) = d,$$

$$\left(\frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right) \cos 2\varphi + \frac{b}{\sqrt{pq}} \sin 2\varphi = \frac{2d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}.$$

Как известно, функция $A \sin t + B \cos t$ принимает значения от $-\sqrt{A^2 + B^2}$ до $\sqrt{A^2 + B^2}$, причем для внутренних точек данного отрезка существует два различных прообраза на $[0, 2\pi)$, а для точек $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ существует один

прообраз на $[0, 2\pi)$. Поэтому для того, чтобы пересечение двух кривых существовало, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right)^2 &\leq \left(\frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right)^2 + \frac{b^2}{pq}, \\ \frac{4d^2}{r^2} + \frac{a^2}{p^2} + \frac{c^2}{q^2} - \frac{4ad}{pr} - 4\frac{cd}{qr} + \frac{2ac}{pq} &\leq \frac{a^2}{p^2} - \frac{2ac}{pq} + \frac{c^2}{q^2} + \frac{b^2}{pq}, \\ \frac{4d}{r}\left(\frac{d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right) &\leq \frac{b^2 - 4ac}{pq}, \\ 4d^2pq - 4d(aq + cp)r &\leq (b^2 - 4ac)r^2 \\ (b^2 - 4ac)r^2 + 4d(aq + cp)r - 4d^2pq &\geq 0. \end{aligned}$$

Дискриминант D соответствующего уравнения равен $16d^2(aq+cp)^2 + 16d^2pq(b^2 - 4ac) = 16d^2(a^2q^2 + 2acpq + c^2p^2 + b^2pq - 4acpq) = 16d^2(a^2q^2 - 2acpq + c^2p^2 + b^2pq) = 16d^2((aq - cp)^2 + b^2pq) \geq 0$. Учитывая, что $b^2 - 4ac < 0$, получаем:

$$\frac{-4d(aq + cp) + 4|d|\sqrt{(aq - cp)^2 + b^2pq}}{2(b^2 - 4ac)} \leq r \leq \frac{-4d(aq + cp) - 4|d|\sqrt{(aq - cp)^2 + b^2pq}}{2(b^2 - 4ac)},$$

или

$$\left((b^2 - 4ac)r + 2d(aq + cp)\right)^2 \leq 4d^2 \left((aq - cp)^2 + b^2pq\right).$$

□

Следствие 2.7.1. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b \geq a > 0$) и окружность $x^2 + y^2 = R^2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $a^2 \leq R^2 \leq b^2$, причем если $a^2 = R^2 = b^2$, то кривые совпадают, если оба неравенства строгие, то точек пересечения четыре, иначе – две.

Мы имеем следующую систему, задающую $M_{h,k}^2$:

$$\begin{cases} h = -\frac{\varkappa}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 + Q_3, \\ k = Q_3q - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2^2 + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha\right)Q_3^2, \\ S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2, \\ q = 2\varkappa(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - 1. \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Будем рассматривать проекцию $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$.

Из последнего уравнения системы (2.7.2) следует, что $q \leq -1$. Разберем сначала случай, когда $q = -1$.

Из пятого уравнения системы (2.7.2) следует, что $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, а из четвертого, что $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ и $g = 0$. Это особая точка ранга 0. Далее считаем, что $q < -1$.

Из первого уравнения системы (2.7.2) следует, что $h \geq Q_3$. Разберем случай $Q_3 = h$.

Из первого уравнения системы (2.7.2) следует, что $S_1 = S_2 = 0$. Отсюда и из третьего уравнения $S_3Q_3 = 0$, $S_3 \neq 0$, иначе $q = -1$, поэтому $h = Q_3 = 0$, получили точки ранга 0. Далее считаем, что $Q_3 < h$.

Из второго и четвертого уравнений можно выразить Q_1 и Q_2 .

$$\begin{cases} \alpha Q_1^2 - \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2^2 = Q_3q - k + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha\right)Q_3^2, \\ Q_1^2 + Q_2^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2 - Q_3^2. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Применив следствие, получим следующую систему неравенств на Q_3 и q ,

для которых существуют Q_1 и Q_2 , удовлетворяющие системе (2.7.3):

$$\begin{cases} (\varkappa Q_3 + \frac{\alpha q}{2})^2 \geq k\varkappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\varkappa g^2, \\ (\alpha Q_3 - \frac{q}{2})^2 \leq \frac{1}{4} - \varkappa g^2 - \alpha k. \end{cases} \quad (2.7.4)$$

Из второго неравенства следует, что для существования решения необходимо, чтобы

$$k \leq \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}, \quad (2.7.5)$$

откуда $k\varkappa\alpha \geq \frac{\varkappa - 4\varkappa^2 g^2}{4} \geq \frac{4\alpha^2\varkappa g^2 - \alpha^2}{4}$, то есть правая часть первого неравенства в системе (2.7.4) неотрицательна.

Первое неравенство задает на плоскости (Q_3, q) точки, не находящиеся между парой параллельных прямых

$$q = \frac{2}{\alpha} \left(-\varkappa Q_3 \pm \sqrt{k\varkappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\varkappa g^2} \right) \quad (2.7.6)$$

Будем для краткости называть эти прямые «сплошными» (они будут обозначаться на рисунках сплошными линиями).

Второе неравенство задает на плоскости (Q_3, q) точки между парой параллельных прямых

$$q = 2 \left(\alpha Q_3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \varkappa g^2 - \alpha k} \right). \quad (2.7.7)$$

Будем называть эти прямые «пунктирными», на рисунках они будут обозначаться пунктирными линиями.

Система (2.7.4) задает на плоскости (Q_3, q) две полосы, граница каждой из которых состоит из двух параллельных лучей и отрезка, причем внутренним точкам соответствуют 4 точки (Q_1, Q_2) , удовлетворяющие системе (2.7.3), граничным точкам (за исключением угловых) – 2, а угловым точкам – 1.

Иными словами, для существования решения системы (2.7.3) необходимо и достаточно, чтобы (Q_3, q) лежали вне «сплошных» и внутри «пунктирных» прямых.

Пусть $Q_3 \neq 0$. Тогда выразим S_3 из третьего уравнения и подставим в пятое. Получим:

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= \frac{q+1}{2\kappa}, \\ S_1^2 + S_2^2 + \frac{(S_1Q_1 + S_2Q_2)^2}{Q_3^2} &= \frac{q+1}{2\kappa}, \\ (Q_1^2 + Q_3^2)S_1^2 + 2Q_1Q_2S_1S_2 + (Q_2^2 + Q_3^2)S_2^2 &= \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $Q_3 \neq 0$ существование решений системы уравнений, составленной из первого, третьего и пятого уравнений системы (2.7.2), эквивалентно существованию решений у следующей системы:

$$\begin{cases} -\frac{\kappa}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 = h - Q_3, \\ (Q_1^2 + Q_3^2)S_1^2 + 2Q_1Q_2S_1S_2 + (Q_2^2 + Q_3^2)S_2^2 = \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}. \end{cases} \quad (2.7.8)$$

Применяем Утверждение 2.7.1. Здесь $a = Q_1^2 + Q_3^2$, $b = 2Q_1Q_2$, $c = Q_2^2 + Q_3^2$, $d = \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}$, $p = -\frac{\kappa}{\alpha}$, $q = \alpha$, $r = h - Q_3$.

$$b^2 - 4ac = 4Q_1^2Q_2^2 - 4(Q_1^2 + Q_3^2)(Q_2^2 + Q_3^2) = -4Q_3^2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = -4Q_3^2\left(\frac{1-q^2}{4\kappa} - g^2\right) < 0,$$

$ad > 0$, поэтому условия Утверждения 2.7.1 выполнены.

$$aq + cp = (Q_1^2 + Q_3^2)\alpha + (Q_2^2 + Q_3^2)\frac{-\kappa}{\alpha} = \alpha Q_1^2 - \frac{\kappa}{\alpha}Q_2^2 + \left(\alpha - \frac{\kappa}{\alpha}\right)Q_3^2 = Q_3q - k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
r(b^2 - 4ac) + 2d(aq + cp) &= (Q_3 - h)4Q_3^2\left(\frac{1 - q^2}{4\kappa} - g^2\right) + \frac{Q_3^2(q + 1)}{\kappa}(Q_3q - k) = \\
&= \frac{Q_3^2}{\kappa} \left((Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\kappa g^2) + (q + 1)(Q_3q - k) \right).
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

$$aq - cp = (Q_1^2 + Q_3^2)\alpha - (Q_2^2 + Q_3^2)\frac{\varkappa}{\alpha} = \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2^2 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right)Q_3^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
(aq - cp)^2 + b^2pq &= \alpha^2Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right)^2Q_3^4 + 2\kappa Q_1^2Q_2^2 + 2(\alpha^2 + \kappa)Q_1^2Q_3^2 + \\
&+ 2\frac{\alpha^2\varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^2Q_3^2 - 4\kappa Q_1^2Q_2^2 = \\
&= \alpha^2Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right)^2Q_3^4 - 2\kappa Q_1^2Q_2^2 + \\
&+ 2(\alpha^2 + \kappa)Q_1^2Q_3^2 + 2\frac{\alpha^2\varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^2Q_3^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q_3q - k)^2 &= \left(\alpha Q_1 - \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2 + \left(\alpha - \frac{\varkappa}{\alpha}\right)Q_3\right)^2 = \\
&= \alpha^2Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^4 + \left(\alpha - \frac{\varkappa}{\alpha}\right)^2Q_3^4 - 2\kappa Q_1^2Q_2^2 + 2(\alpha^2 - \varkappa)Q_1^2Q_3^2 + \\
&+ 2\frac{-\alpha^2\varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^2Q_3^2 = \alpha^2Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right)^2Q_3^4 - 2\kappa Q_1^2Q_2^2 + \\
&+ 2(\alpha^2 + \kappa)Q_1^2Q_3^2 + 2\frac{\alpha^2\varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2}Q_2^2Q_3^2 - 4\kappa Q_3^4 - 4\kappa Q_1^2Q_3^2 - 4\kappa Q_2^2Q_3^2 = \\
&= (aq - cp)^2 + b^2pq - 4\kappa Q_3^2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = \\
&= (aq - cp)^2 + b^2pq - 4\kappa Q_3^2\left(\frac{1 - q^2}{4\kappa} - g^2\right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$(ap - cq)^2 + b^2pq = (Q_3q - k)^2 + Q_3^2(1 - q^2 - 4\kappa g^2).$$

Неравенство (2.7.1) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{Q_3^2}{\varkappa^2} ((Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\varkappa g^2) + (q + 1)(Q_3 q - k))^2 \leq \\ & \leq \frac{Q_3^4}{\varkappa^2} (q + 1)^2 ((Q_3 q - k)^2 + Q_3^2(1 - q^2 - 4\varkappa g^2)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (Q_3 - h)^2(1 - q^2 - 4\varkappa g^2)^2 + 2(Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\varkappa g^2)(q + 1)(Q_3 q - k) + \\ & + (q + 1)^2(Q_3 q - k)^2 \leq (q + 1)^2(Q_3 q - k)^2 + (q + 1)^2 Q_3^2(1 - q^2 - 4\varkappa g^2). \end{aligned}$$

Уничтожив одинаковое слагаемое $(q + 1)^2(Q_3 q - k)^2$ в правой и левой частях, а также сократив на $(1 - q^2 - 4\varkappa g^2) = 4\varkappa(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) < 0$ и перенеся все в правую часть, получаем:

$$(Q_3 - h)^2(1 - q^2 - 4\varkappa g^2) + 2(Q_3 - h)(q + 1)(Q_3 q - k) - (q + 1)^2 Q_3^2 \geq 0. \quad (2.7.10)$$

Обозначим $h - Q_3$ через x , $q + 1$ через y . Тогда $q = y - 1$, $1 - q^2 = -y^2 + 2y$, неравенство (2.7.10) переписывается в новых переменных так:

$$x^2(-y^2 + 2y - 4\varkappa g^2) + 2xy(Q_3(y - 1) - k) - y^2 Q_3^2 \geq 0. \quad (2.7.11)$$

Сгруппируем (2.7.11) по степеням y :

$$(2xQ_3 - Q_3^2 - x^2)y^2 - 2x(x - k - Q_3)y - 4\varkappa g^2 x^2 \geq 0. \quad (2.7.12)$$

Заметим, что $2xQ_3 - Q_3^2 - x^2 = 2(h - Q_3)Q_3 - Q_3^2 - (h - Q_3)^2 = -h^2$,
 $x - k - Q_3 = -h - k$.

Неравенство (2.7.12) поэтому можно переписать в следующем виде:

$$h^2 y^2 - 2(h - Q_3)(h + k)y + 4\varkappa g^2 (h - Q_3)^2 \leq 0,$$

откуда

$$\frac{(h-Q_3) \left(h+k-\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2} \right)}{h^2} \leq y \leq \frac{(h-Q_3) \left(h+k+\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2} \right)}{h^2}. \quad (2.7.13)$$

Но $y = q + 1 < 0$, а правая часть неравенств (2.7.13) неотрицательна, поэтому окончательно получаем систему

$$\frac{(h-Q_3) \left(h+k-\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2} \right)}{h^2} \leq y < 0.$$

Итак, множество точек на плоскости (Q_3, q) , при которых система (2.7.8) имеет решение, имеет вид угла (с внутренностью) между лучами $q = -1$, $Q_3 \leq h$ и

$$q + 1 = \frac{\left(-(h+k) + \sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2} \right) (Q_3 - h)}{h^2}, \quad Q_3 \leq h, \quad (2.7.14)$$

пересекающимися в точке $(h, -1)$. Последний луч назовем «точечным», он будет обозначаться на рисунках точечными линиями. При этом внутренним точкам угла соответствуют 4 точки (S_1, S_2) , удовлетворяющие системе (2.7.8), «точечному» лучу – 2 точки.

$$\text{Заметим, что } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - k + \sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2}}{h^2} = \begin{cases} \infty, & \text{если } k \leq 0; \\ -\frac{2\kappa g^2}{k}, & \text{если } k > 0. \end{cases}$$

Поэтому при $h = 0$ и $k \leq 0$ «точечный» луч станет вертикальным лучом $q \leq -1$, $Q_3 = 0$, а при $h = 0$, $k > 0$, «точечный» луч будет иметь вид $q + 1 = -\frac{2\kappa g^2}{k} Q_3$.

Посмотрим, когда «точечный» луч проходит через точку пересечения нижней «пунктирной» и нижней «сплошной» прямой. Обозначим точку их пересечения (Q_3^*, q^*) . Для этого уравнение «точечной» прямой должно совпадать

с уравнением прямой, проходящей через точки $(h, -1)$ и (Q_3^*, q^*) . Уравнение этой прямой:

$$\frac{q+1}{-1-q^*} = \frac{Q_3-h}{h-Q_3^*},$$

или

$$q+1 = -\frac{q^*+1}{h-Q_3^*}(Q_3-h). \quad (2.7.15)$$

Приравнивая коэффициенты при Q_3-h в (2.7.14) и (2.7.15), получаем следующее уравнение:

$$\frac{-h-k+\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2}}{h^2} = -\frac{q^*+1}{h-Q_3^*},$$

откуда

$$(h-Q_3^*)(-h-k+\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2}) = -h^2(q^*+1).$$

После переноса слагаемого с корнем в левую часть, а остальных слагаемых в правую и возведения обеих частей в квадрат получаем:

$$(h-Q_3^*)^2((h+k)^2-4\kappa g^2 h^2) = (h-Q_3^*)^2(h+k)^2-2(h-Q_3^*)(h+k)h^2(1+q^*)+h^4(1+q^*)^2,$$

откуда

$$-4\kappa(h-Q_3^*)^2 g^2 h^2 = -2(h-Q_3^*)(h+k)h^2(1+q^*)+h^4(1+q^*)^2.$$

Пусть $h \neq 0$. Сократим последнее уравнение на h^2 :

$$-4\kappa(h-Q_3^*)^2 g^2 = -2(h-Q_3^*)(h+k)(1+q^*)+h^2(1+q^*)^2. \quad (2.7.16)$$

Обозначим $h-Q_3^*$ через x^* , уравнение (2.7.16) переписется так:

$$-4\kappa(x^*)^2 g^2 = -2x^*(x^*+Q_3^*+k)(1+q^*)+(x^*+Q_3^*)^2(1+q^*)^2,$$

или

$$(4\kappa g^2 - 2(1 + q^*) + (1 + q^*)^2)(x^*)^2 - 2x^*(1 + q^*)(Q_3^* + k - Q_3(1 + q^*)) + Q_3^2(1 + q^*)^2 = 0.$$

Сгруппируем последнее уравнение по степеням x^* :

$$(4\kappa g^2 - 2q^* + (q^*)^2)(x^*)^2 - 2x^*(1 + q^*)(k - Q_3q^*) + (Q_3^*)^2(1 + q^*)^2 = 0.$$

Необходимо отметить, что при $Q_3 = Q_3^*$ и $q = q^*$ система (2.7.3) имеет единственное решение $Q_1 = Q_2 = 0$. Поэтому $k - Q_3^*q^* = (\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha)(Q_3^*)^2$ и $\frac{1 - (q^*)^2}{4\kappa} - g^2 - (Q_3^*)^2 = 0$, откуда

$$-4\kappa(Q_3^*)^2(x^*)^2 - 2x^*(1 + q^*)(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha)(Q_3^*)^2 + (Q_3^*)^2(1 + q^*)^2 = 0.$$

Так как $Q_3^* \neq 0$ по предположению, то получаем следующее уравнение:

$$-4\kappa(x^*)^2 - 2x^*(1 + q^*)(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha) + (1 + q^*)^2 = 0. \quad (2.7.17)$$

Q_3^* и q^* находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} q^* = 2 \left(\alpha Q_3^* - \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k} \right), \\ q^* = \frac{2}{\alpha} \left(-\kappa Q_3^* - \sqrt{k\kappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\kappa g^2} \right). \end{cases} \quad (2.7.18)$$

Рассмотрим дискриминант уравнения (2.7.17), который обозначим D :

$$\frac{D}{4} = (1 + q^*)^2 \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha \right)^2 + 4\kappa(1 + q^*)^2 = (1 + q^*)^2 \left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha \right)^2.$$

$$x_1^* = h_1 - Q_3^* = \frac{(1 + q^*)(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha) + (1 + q^*)(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha)}{-4\kappa} = \frac{1 + q^*}{-2\alpha}, \text{ откуда } h_1 = -\frac{1}{2\alpha} - Q_3^* + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k} + Q_3^* = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k}.$$

Заметим, что точка (h_1, k) лежит на правой ветви параболы $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$.

$$x_2^* = h_2 - Q_3^* = \frac{(1+q^*)(\frac{z}{\alpha} - \alpha) - (1+q^*)(\frac{z}{\alpha} + \alpha)}{-4z} = \frac{(1+q^*)\alpha}{2z}, \text{ откуда}$$

$$h_2 = \frac{\alpha}{2z} - Q_3^* - \frac{1}{z}\sqrt{kz\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2zg^2} + Q_3^* = \frac{\alpha}{2z} - \frac{1}{z}\sqrt{kz\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2zg^2}.$$

Заметим, что точка (h_2, k) лежит на куске параболы $k = \frac{z}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$.

Итак, мы получили, что «точечный» луч и нижние «пунктирная» и «сплошная» прямые проходят через одну точку только при значениях параметров h и k , лежащих на кусках парабол, составляющих часть бифуркационной диаграммы.

Аналогично можно показать, что «точечный» луч имеет больший угол наклона, чем прямая, соединяющая точки $(h, -1)$ и (Q_3^*, q^*) , при значениях параметров h и k , лежащих в области под кусками парабол на бифуркационной диаграмме, и больший угол наклона при значениях параметров h и k вне данной области.

Посмотрим, как расположены «сплошные» и «пунктирные» прямые, а также «точечный» луч относительно друг друга.

Во-первых, они все имеют неотрицательные коэффициенты наклона, так как $2\alpha > 0$, $\frac{-2z}{\alpha} > 0$, $\frac{-h-k + \sqrt{(h+k)^2 - 4zg^2h^2}}{h^2} \geq 0$.

Заметим, что $\frac{-h-k + \sqrt{(h+k)^2 - 4zg^2h^2}}{h^2} < 2\alpha$ тогда и только тогда, когда $k > -\alpha h^2 - h - \frac{z}{\alpha}g^2$. Поэтому «точечный» луч имеет меньший угол наклона при значениях параметров h и k над параболой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{z}{\alpha}g^2$ и больший угол наклона при значениях h и k под данной параболой, чем «пунктирные» прямые.

Заметим, что $\frac{-h-k + \sqrt{(h+k)^2 - 4zg^2h^2}}{h^2} < \frac{-2z}{\alpha}$ тогда и только тогда, когда $k > \frac{z}{\alpha}h^2 - h - \alpha g^2$. Поэтому «точечный» луч имеет меньший угол наклона при значениях параметров h и k , лежащих над параболой

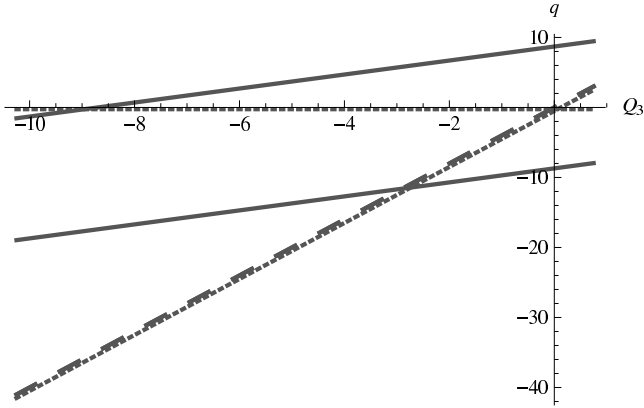


Рис. 2.3: Случай 2

$k = -\alpha h^2 - h = \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$, и больший угол наклона при значениях параметров h и k под данной параболой, чем «сплошные» прямые.

В зависимости от значения параметров возможны следующие случаи:

1. При $k > \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$ система (2.7.3) не имеет решений в силу (2.7.5), поэтому $M_{h,k}^2$ пусто.

2. При $k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$ две параллельные «пунктирные» прямые

$q = 2 \left(\alpha Q_3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \varkappa g^2 - \alpha k} \right)$ сливаются в одну прямую $q = 2\alpha Q_3$. При

этом при h не из отрезка $\left[-\frac{1}{2\alpha}; \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} \right]$ «точечный» луч пересекает «пунктирную» прямую между «сплошными» прямыми, а внутри отрезка – ниже «сплошных» прямых (см. Рис. 2.3). Это означает, что $M_{h,k}^2$ в первом случае пусто, а во втором представляет собой 2 критических окружности.

3. При $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$ угол и полоса не пересекаются (см. Рис. 2.4), поэтому $M_{h,k}^2$ пусто.

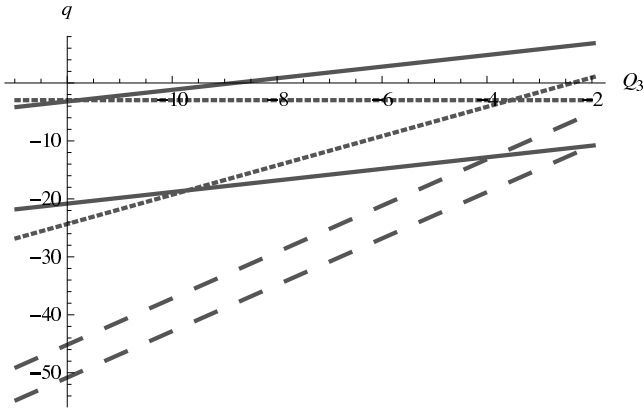


Рис. 2.4: Случай 3

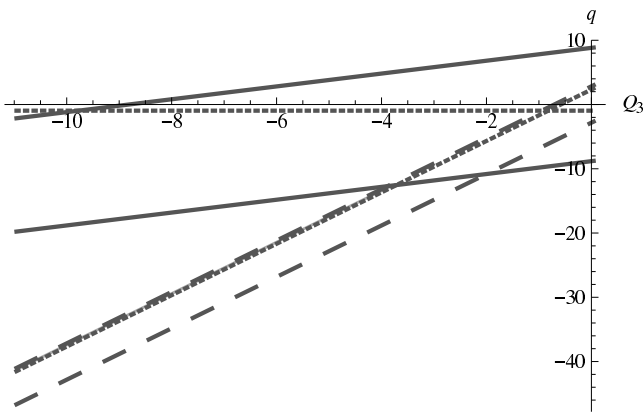


Рис. 2.5: Случай 4

4. При $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$ угол и полоса имеют общую сторону (см. Рис. 2.7). В этом случае мы получаем луч, над внутренней точкой луча находятся 4 точки при проекции $M_{h,k}^2$ на плоскость (Q_3, q) , а над вершиной -2 . Таким образом, $M_{h,k}^2$ состоит их двух критических прямых.

5. При $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$ и $(h, k) \neq (0, 0)$ угол и полоса пересекаются так, как показано на Рис. 2.6, проекцией $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$ является закрашенное множество. При этом над внутренними точками находится 16

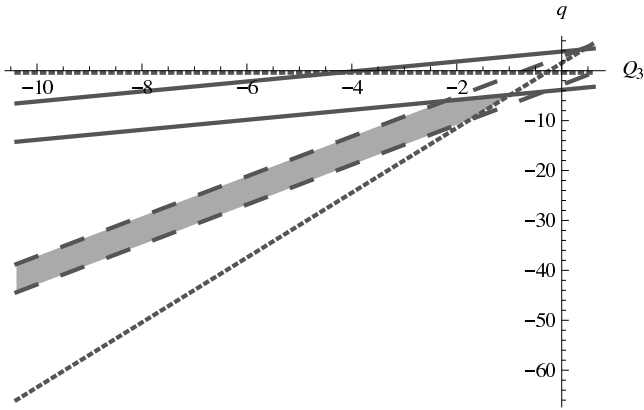


Рис. 2.6: Случай 5

точек, над сторонами -8 , над вершинами -4 . Чтобы получить тип $M_{h,k}^2$ в этом случае, необходимо склеить 16 экземпляров закрашенного множества по соответствующим сторонам. Можно убедиться, что в этом случае получится $2S_4^2$.

6. При $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$ и $h > -\frac{1}{2\alpha}$ «точечный» луч совпадает с нижней «пунктирной» прямой, как показано на Рис. 2.7. Закрашено множество, являющееся образом проекции $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$. Над внутренними точками находятся 16 точек, над внутренними точками верхнего «сплошного» отрезка -4 , над внутренними точками верхнего «пунктирного» луча -4 точки, над внутренними точками нижнего луча -2 , над угловыми точками 2 (на верхней) и 1 (на нижней). В этом случае $M_{h,k}^2$ является особой поверхностью и представляет собой две пары цилиндров, склеенных по образующей (одна пара представляет собой «восьмерку», умноженную на прямую).

7. При $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}$ и $k < \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$ множество проекции

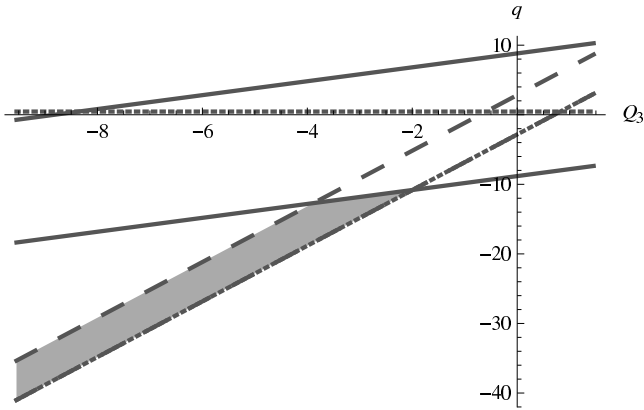


Рис. 2.7: Случай 6

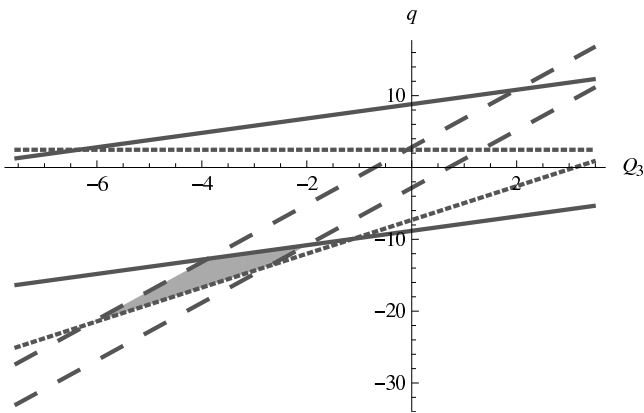


Рис. 2.8: Случай 7

представляем собой четырехугольник, изображенный на Рис. 2.8. Над внутренними точками находятся 16 точек, над сторонами – 8, над вершинами – 4. Склеив 16 закрасенных четырехугольников по соответствующим сторонам, получаем $2T^2$.

8. При $k = \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$ точка $(h, -1)$ находится на нижней «сплошной» прямой справа от «пунктирных» прямых, а угол наклона «точечного» луча и «сплошных» прямых совпадает, то есть «точечный» луч является подмножеством нижней «сплошной» прямой. Образом проекции является отрезок,

на внутренних точках которого находится 4 точки, а над концевыми – 2, откуда $M_{h,k}^2$ представляет собой 2 критические окружности.

9. При $k > \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$ точка $(h, -1)$ находится справа от «пунктирных» прямых и между «сплошными» прямыми. При этом угол наклона у «сплошной» прямой больше, чем у «точечного» луча. Поэтому угол и полоса не пересекаются, то есть $M_{h,k}^2$ пусто в этом случае. \square

,

Литература

- [1] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1989. Т. 44, № 1(265). С. 145–173. [3](#)
- [2] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1071–1075. [3](#)
- [3] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 6. С. 1276–1307. [3](#)
- [4] Фоменко А.Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 4. С. 747–779. [3](#)
- [5] Фоменко А.Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, № 4. С. 23–35. [3](#)

- [6] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР. 1986. Т. 294, № 2. С. 283–287. [3](#)
- [7] Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 3–42. [4](#)
- [8] Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988. [4](#)
- [9] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Функц. анализ и его прил. 1995. Т. 29, № 3. С. 1–15. [4](#)
- [10] Ошемков А.А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1993. Т. 25. С. 23–109. [4](#)
- [11] Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134, № 2. С. 207–226. [4](#), [20](#)
- [12] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: РХД, 1999. С. т. 1, 2. [4](#), [65](#)

- [13] Лепский Т.А. Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтоном малой степени // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 10. С. 109–136. [4](#)
- [14] Bromberg S., Medina A. A note on the completeness of homogeneous quadratic vector fields on the plane // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2005. Т. 6, № 2. С. 181–185. [5](#)
- [15] Москвин А.Ю. Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем, диссертация на соискание звания кандидата физико-математических наук. 2010. [5](#)
- [16] Новиков Д.В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 127–160. [8](#)
- [17] Новиков Д.В. Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3, 1)$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4. С. 62–64. [8](#)
- [18] Новиков Д.В. Топология новых интегрируемых случаев на алгебрах Ли $so(4)$, $so(3, 1)$, and $e(3)$ // Тезисы международной конференции по дифференциальным и функциональным дифференциальным уравнениям (DFDE). Москва, 2008. С. 110–111. [8](#)
- [19] Новиков Д.В. Топологические особенности новых интегрируемых случаев // Тезисы конференции «Александровские чтения». Москва, 2006. [8](#)

- [20] Новиков Д.В. Топологический анализ интегрируемого случая Соколова // Материалы конференции «Ломоносов-2011». Москва, 2011. 8
- [21] H. Poincare // Bull. Astr. 1910. Т. 27. С. 321–356. 19
- [22] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: РХД, 2005. С. 576. 19
- [23] Борисов А.В., Мамаев И.С., В.В. Соколов. Новый интегрируемый случай на $so(4)$ // Доклады РАН. 2001. Т. 381, № 5. С. 614–615. 19
- [24] Соколов В.В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 602–605. 19
- [25] Соколов В.В. // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 129, № 1. С. 31–37. 19
- [26] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Факториал и изд-во Просперус Удмуртского ун-та, 1995. 20
- [27] Хагигатдуст Г., Ошемков А.А. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 6. С. 119–142. 20, 21, 24, 35, 36, 37, 69, 73, 75
- [28] Хагигатдуст Г. Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтоновых на алгебре $so(4)$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005. № 6. С. 3–10. 21

- [29] Хагигатдуст Г. Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 599–602. [21](#)
- [30] Gordon W. On the Completeness of Hamiltonian Vector Fields // Proceedings of the American Mathematical Society. 1970. Т. 26, № 2. С. 329–331. [56](#)
- [31] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва: УРСС, 2010. [56](#)
- [32] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. Москва: Наука, 1968. [58](#)