Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514.7

Никонов Игорь Михайлович

Характеристические классы аппроксимативно конечных алгебр

01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Профессор, доктор физико-математических наук
$\boxed{\text{Ю. П. Соловьёв}}$

Москва 2003

Введение

Характеристические классы возникают в качестве гомологических инвариантов при изучении различного рода структур на геометрическом объекте. Исследование и использование таких инвариантов стоит в ряду основных задач алгебраической топологии. Впрочем, в самой алгебраической топологии под характеристическими классами чаще всего понимают классы векторных расслоений. За семьдесят лет, прошедших после доклада Е. Штифеля на знаменитой Московской топологической конференции в 1935 году — точки отсчёта своей истории, теория характеристических классов пережила свою зрелость, дав множество приложений, касающихся классификации многообразий, и оставив след в теории кобордизмов, теории индекса и, конечно же, K-теории, пока неожиданно она вновь не оказалась в самом центре современной математической жизни в связи с развитием некоммутативной геометрии.

Появление конструкции некоммутативных характеристических классов в начале 80-х гг. прошлого века стало одним из первых крупных достижений зарождающейся некоммутативной геометрии. Из многочисленных определений характеристических классов векторных расслоений наиболее полезной оказался дифференциально-геометрический подход Черна-Вейля, который допускал простую переформулировку на языке алгебры с заменой геометрических объектов (многообразие, расслоение) на алгебраические (соответственно, алгебра функций, проективный модуль сечений расслоения). Первая конструкция в духе такого подхода была предложена А. Конном в связи с его исследованиями C^*-динамических систем. Характеристические классы, построенные Конном, принимали значения в когомологиях алгебры Ли векторных полей, задающих динамическую систему и не покрывали классический случай. Развитие идей Конна нашло своё выражение в конструкции А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьёва, Ю.Й. Жураева и, в полной общности, в конструкции М. Каруби. Обе конструкции различаются в определении некоммутативных дифференциальных форм, в чьих когомологиях должны лежать характеристические классы. Определение характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва исходит из того, что аналогом векторных полей на многообразии в некоммутативном случае может служить алгебра Ли дифференцирований на алгебре "функций", далее формы де Рама, как и в дифференциальной геометрии, определяются как кососимметричные полилинейные функции на некоммутативных векторных полях. Конструкция Каруби опирается на достаточно размытое понятие дифференциального исчисления. Носителем характеристических классов в этом случае являются когомологии абелинизации дифференциального исчисления.

Может показаться удивительным, что за двадцать лет существования некоммутативных характеристических классов накопилось не так много методов и самих примеров их вычисления (см. [16]). Настоящая диссертация вслед за работой [6] призвана заполнить этот пробел. С этой целью для изучения выбран класс аппроксимативно конечных C^*-алгебр, определённый О. Браттели в 1972 году. Этот класс алгебр является довольно многочисленным и содержит многие (хотя и не все) примеры и контрпримеры к различным утверждениям теории C^*-алгебр. Определяемые как прямые пределы конечномерных C^*-алгебр, эти алгебры близки к полупростым алгебрам, чьё изучение начато в работе [6]. Среди других фактов, свидетельствующих в пользу выбора аппроксимативно конечных алгебр, является удобное комбинаторное описание (с помощью диаграмм Браттели) и наличие полной классификации, полученной Эллиоттом.

Перейдём к изложению содержания диссертации, состоящей из четырёх глав.

Первая глава посвящена описанию основной используемой в работе конструкции — конструкции некоммутативных характеристических классов. Содержание этой главы, в целом, является известным (см. [2, 12, 16, 19, 22]), за исключением параграфа 1.3, где строится отображение характеристических классов Каруби в характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва, и последнего параграфа главы, в котором доказывается единственность характеристических классов.

В первом параграфе вводится понятие дифференциального исчисления (определение 1.1), которое в некоммутативной геометрии служит аналогом форм де Рама. Далее приводятся примеры двух известных семейств дифференциальных исчислений (примеры 1.1-1.4). Первым среди них является универсальное дифференциальное исчисление (пример 1.1), подтверждающее предложением 1.1 свои права на такое название. Завершается параграф предложением 1.3, в котором показано, как морфизмы связывают между собой введённые ранее дифференциальные исчисления.

Второй параграф содержит описание конструкции характеристических классов Каруби, изложению которого (см. [22]) мы следуем. Эта конструкция, по-существу, повторяет известные в дифференциальной геометрии построения Черна-Вейля: от связности (определение 1.3) через понятие кривизны (определение 1.4) с помощью следа (определение 1.5) мы приходим к определению характеристических классов (определение 1.6). Ввиду той особой роли, которую играет последнее определение в настоящей работе, теорема 1.8 и вспомогательные утверждения о корректности и существовании характеристических классов даны с доказательством. В параграф включены предложения 1.9, 1.10, описывающие некоторые простые свойства определённых характеристических классов $c_n(E, \Omega^*)$: аддитивность и приведённость по первому аргументу и функториальность по второму. Последнее свойство позволяет закрепить доминирующую роль за универсальными характеристическими классами (предложение 1.11 и определение 1.7). В замечании 1.4, завершающем параграф 1.2, вводится нулевой характеристический класс $c_0(E, \Omega^*)$.

В параграфе 1.3 мы рассматриваем альтернативную конструкцию характеристических классов, предложенную Мищенко А. С., Соловьёвым Ю. П. и Жураевым Ю. Й. в [2, 3, 4]. Её построение (см. определения 1.8, 1.9, 1.10, 1.11) развёртывается параллельно рассуждениям предыдущего параграфа, и на каждом этапе мы устанавливаем связь между этими двумя конструкциями. На уровне связности и кривизны эта связь заключена в предложении 1.16, где строится биекция между связностями (кривизнами) в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва и связностями (кривизнами) Каруби для дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$; на уровне цепных комплексов, в чьих когомологиях лежат характеристические классы — в лемме 1.18. Установленное соответствие позволяет доказать корректность определения 1.11 (теорема 1.14) и построить отображение, переводящее характеристические классы Каруби в классы Жураева-Мищенко-Соловьёва (теорема 1.19).

Основной целью параграфа 1.4 является построение отображения периодичности S, понижающего порядок универсального характеристического класса на единицу. Для этого мы определяем хохшильдовы и приведённые циклические гомологии ассоциативной алгебры с единицей (определения 1.13, 1.14), строим операторы S, B, I, образующие последовательность Конна, и доказываем её точность (теорема 1.25). Далее приводится прямое доказательство теоремы Каруби (теорема 1.26), позволяющей перенести оператор периодичности S на универсальные характеристические классы (предложение 1.28). В доказательстве этих теорем мы следуем Конну [16]. Итогом параграфа 1.4 является предложение 1.29, которое осуществляет вторую редукцию в изучении характеристических классов — сведение старших классов к младшим (первая редукция заключалась в переходе от произвольного дифференциального исчисления к универсальному).

Завершающий первую главу параграф 1.5 содержит утверждения, касающиеся единственности характеристических классов (теоремы 1.35, 1.37). При этом характеристические классы (определения 1.16, 1.17) трактуются как естественные преобразования из K-функтора в когомологический функтор, сопоставляющий алгебре её циклические гомологии (определение 1.15), либо, во втором случае, когомологии абелинизации зафиксированного дифференциального исчисления. Теорема 1.35 утверждает, что характер Конна-Черна (пример 1.8) является единственным характером со значениями в циклических гомологиях алгебры. Согласно второй теореме (теорема 1.37), для дифференциальных исчислений на алгебре нельзя определить другие характеристические классы, кроме введённых в параграфе 1.2 классов Каруби.

Вторая глава открывает последовательность вычислительных глав, в которых основные усилия направлены на выяснение того, чему равны характеристические классы, определённые в первой главе для той или иной конкретной алгебры. При этом в качестве главного ставится вопрос о том, насколько сильным инвариантом являются характеристические классы, в связи с чем универсальные классы, как наиболее сильные (согласно следствию 1.11), оказываются в центре нашего внимания. В главе 2 рассматриваются конечномерные полупростые ассоциативные унитальные алгебры.

В первом параграфе главы мы находим точный ответ на вопрос о том, когда универсальные характеристические классы конечнопорождённого проективного модуля равны нулю (теорема 2.1). Оказывается, что универсальные характеристические классы осуществляют мономорфизм приведённой K-теории алгебры по модулю кручения в когомологиии $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$. Тем удивительней, для других дифференциальных исчислений, определённых в параграфе 1.1, равно как и для характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва ответом служит тождественный нуль (предложение 2.5). Заметим, что тривиальность характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва для комплексных полупростых алгебр была доказана в работе [6]. Завершает параграф пример 2.1 дифференциального исчисления групповой алгебры диэдральной группы $\mathbb{C}[D_n]$, не являющегося центральным, в котором, однако, все характеристические классы тривиальны.

Второй параграф главы посвящён рассмотрению случая, когда характеристика поля не равна нулю. Хотя все построения предыдущей главы проводились в предположении, что характеристика основного поля равна нулю, при ненулевой характеристике поля также возможно с некоторыми ограничениями определить характеристические классы конечнопорождённого проективного модуля. Эти ограничения касаются размерности определяемых классов: она должна быть меньше, чем характеристика поля. Пример 2.2 показывает, что при нарушении этого условия выбор связности начинает оказывать влияние на характеристический класс, так что определение 1.6 становится некорректным. Мы рассматриваем характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ в "стабильной"размерности $2n < \operatorname{char} \Bbbk$ и доказываем теоремы, аналогичные теоремам параграфа 2.1. Как и ранее, универсальные характеристические классы оказываются в определённом смысле мономорфными (теорема 2.6). Новой по сравнению со случаем нулевой характеристики является необходимость учитывать индексы алгебр с делением (определение 2.1), отвечающих простым компонентам изучаемой алгебры A, и рассматривать только регулярную часть алгебры и модуля. Характеристические классы, соответствующие другим дифференциальным исчислениям, неожиданно оказываются не равными нулю тождественно (предложения 2.8, 2.9).

Начиная с третьей главы в игру вступает топология. С этого момента мы имеем дело с банаховыми алгебрами (точнее говоря, с C^*-алгебрами) и рассматриваем конструкции главы 1 в рамках категории банаховых пространств, учитывая топологию алгебры. Замена категории никак не влияет на определения и факты развитой теории и производится автоматически. В главе 3 изучаются универсальные характеристические классы аппроксимативно конечных C^*-алгебр.

Открывающий главу параграф касается общей теории характеристических классов C^*-алгебр. Следуя [14], мы вводим понятие аменабельной алгебры (определение 3.2). С точки зрения теории характеристических классов, аменабельные алгебры выделяются тем, что отображение периодичности S из параграфа 1.4 является изоморфизмом (теорема 3.2) и, таким образом, все универсальные характеристические классы совпадают между собой. Далее мы приводим без доказательства фундаментальный результат Конна и Хаагерупа (теорема 3.1), который заключается в том, что класс аменабельных C^*-алгебр совпадает с классом ядерных C^*-алгебр. Это означает, что аменабельных алгебр очень много. В частности, все аппроксимативно конечные или же коммутативные алгебры аменабельны. В примере 3.1 мы рассматриваем последний случай и показываем, что единственным инвариантом, который доставляют характеристические классы проективного модуля над коммутативной C^*-алгеброй, является размерность соответствующего ему по теореме Серра-Суона векторного расслоения.

В параграфе 3.2 мы определяем аппроксимативно конечные алгебры, или AF-алгебры (определение 3.6) и описываем распространённый комбинаторный способ задания AF-алгебр — диаграммы Браттели (определение 3.7). Завершают параграф несколько примеров аппроксимативно конечных алгебр. Материал этого параграфа взят нами из [7, 15].

Параграф 3.3 открывает пример вычисления K-группы с помощью теоремы о непрерывности K-функтора (пример 3.5). Далее следуют два основных результата K-теории аппроксимативно конечных алгебр: классификационная теорема Эллиотта (теорема 3.11), которая утверждает, что AF-алгебра однозначно восстанавливается по своей K-группе, рассматриваемой вместе с естественным частичным порядком на ней; и теорема Хандельмана-Шена-Эффроса (теорема 3.9), которая описывает класс частично упорядоченных групп, получающихся как K-группы AF-алгебр. В качестве иллюстрации к классификационной теореме мы показываем в предложении 3.8, как свойство простоты алгебры выражается на уровне её K-группы. В примере 3.6 для каждого иррационального числа θ на отрезке $[0,1]$ строится алгебра A_θ с K-группой $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$, которая используется в следующей главе.

Главный результат главы заключён в параграфе 3.4. Это теорема 3.11, в которой вычисляются универсальные характеристические классы аппроксимативно конечной алгебры. В отличие от конечномерной ситуации главы 2 в случае AF-алгебр у характера Конна-Черна появляется ядро — бесконечно малая часть $K_{inf}(A)$ группы $K_0(A)$ (определение 3.10). В качестве следствия к теореме мы показываем, что характеристические классы Каруби и Жураева-Мищенко-Соловьёва бесконечномерной алгебры Клиффорда, а также алгебры A_θ из примера 3.6 равны нулю (пример 3.9). Вторым следствием является факт, что проективные модули над унитализацией групповой алгебры компактной топологической группы различаются с помощью универсальных характеристических классов (пример 3.10).

В последней главе работы рассматриваются характеристические классы алгебр фон Неймана. Появляющиеся при этом теоремы оказываются очень похожими на теоремы главы 2. Утверждения из общей теории алгебр фон Неймана, довольно многочисленные в главе 4, приводятся без доказательства, мы отсылаем читателя к [18].

Параграф 4.1 включает некоторые известные факты из теории операторных алгебр и начинается определением алгебры фон Неймана (определение 4.2). Затем определяются типы алгебр фон Неймана (определение 4.4), для чего вводится понятие следа (определение 4.3). Далее мы формулируем структурные теоремы об алгебрах фон Неймана (теоремы 4.1, 4.2, 4.3). Завершают параграф несколько утверждений (теоремы 4.4, 4.5 и утверждение 4.6), касающихся гиперфинитного фактора $\mathcal{R}$ типа II_1(определение 4.7). В примере 4.1, где мы следуем [7], строится вложение в гиперфинитный фактор алгебры Клиффорда и AF-алгебры A_θ.

Основное содержание параграфа 4.2 составляют теоремы 4.9 и 4.11, в которых вычисляется K-группа алгебр фон Неймана. Этот результат, без сомнения, известный каждому специалисту в теории операторных алгебр, почему-то не нашёл своего отражения в доступной литературе, поэтому мы его доказываем, в значительной степени опираясь на [18]. Во втором параграфе также определяется понятие операторного следа (определение 4.10), который используется при вычислении K-теории конечных алгебр фон Неймана.

Третий, и заключительный параграф главы несёт в себе теоремы о характеристических классах алгебр фон Неймана. Универсальные характеристические классы описываются теоремами 4.13 (для случая факторов) и 4.15. Заметим, что при доказательстве используется вложение AF-алгебры A_θ в гиперфинитный фактор, построенное в примере 4.1. Теорема 4.17 покрывает случай характеристических классов, отвечающих другим дифференциальным исчислениям, определённым в параграфе 1.1, а также характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва. Результат схож с тем, что дают теоремы 2.1 и 2.5: характер Конна-Черна инъективен, а классы Жураева-Мищенко-Соловьёва (топологически) равны нулю.

Автор выражает сожаление в связи с безвременной кончиной своего научного руководителя профессора Юрия Петровича Соловьёва, вдохновляющее влияние которого при написании данной работы невозможно переоценить. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений во главе с академиком А. Т. Фоменко за творческий климат, сложившийся на кафедре, и поддержку.

Оглавление

Глава 1

Основные определения

В первой главе мы даём определение характеристических классов, которые являются объектом изучения в данной работе. В изложении конструкции характеристических классов, занимающем параграфы 1.1 и 1.2, мы следуем работе М. Каруби [22]. Универсальным характеристическим классам, определяемым в конце параграфа 1.2, отводится центральная роль в последующих, вычислительных главах. В пункте 1.3 разбирается другая конструкция, принадлежащая А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёву и Ю. Й. Жураеву, и анализируется её связь с построениями параграфа 1.2. Параграф 1.4 посвящён теореме Каруби, связывающей его конструкцию характеристических классов с циклическими гомологиями. Основным следствием этой теоремы оказывается периодичность универсальных характеристических классов. В параграфе 1.5, завершающем данную главу, мы показываем, что никаких других классов, кроме классов Каруби, не существует.

1.1 Дифференциальные исчисления

Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$ характеристики нуль.

Введём понятие, которое в настоящее время играет в некоммутативной геометрии роль обычных дифференциальных форм де Рама.

Определение 1.1. *Дифференциальным исчислением* над алгеброй A называется дифференциальная градуированная алгебра $\Omega^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n$, такая что $\Omega^0 = A$.

Видно, что определение предъявляет к дифференциальному исчислению самые умеренные требования, что позволяет применять его в самом широком контексте. Однако из-за этого у подавляющего большинства алгебр, с которыми приходится иметь дело, обнаруживается слишком много дифференциальных исчислений, так что выбор наиболее подходящего из них становится проблемой. Другой особенностью определения, отчасти вытекающей из его всеобщности, является неконструктивность, и это соображение упрощает ситуацию. На сегодняшний день известны, по сути, всего две конструкции дифференциальных исчислений (см. [19]), не требующих от алгебры A никаких специальных свойств: универсальное исчисление и комплекс Кошуля, строящийся на основе дифференцирований алгебры. Начнём с универсального исчисления, которое, в основном, и будет использоваться ниже.

Пример 1.1. *(универсальное дифференциальное исчисление)* Рассмотрим градуированное линейное пространство $\Omega^*_{univ}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n_{univ}(A)$:

$$\Omega^n_{univ}(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}, \quad \text{где } \bar{A} = A/\Bbbk 1.$$

Для элементов пространства $\Omega^n_{univ}(A)$ мы будем использовать следующее распространённое обозначение

$$a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n \text{ или же } a_0 da_1 \dots da_n.$$

Формулы для умножения и дифференциала d_u имеют следующий вид

$$d_u(a_0 da_1 \dots da_n) = 1\, da_0 da_1 \dots da_n, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} a_0 da_1 \dots da_n \cdot b_0 db_1 \dots db_m = a_0 da_1 \dots d(a_n b_0) db_1 \dots db_m + \\ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} a_0 da_1 \dots da_{k-1} d(a_k a_{k+1}) da_{k+2} \dots da_n db_0 \dots db_m + \\ (-1)^n a_0 a_1 da_2 \dots da_n db_0 \dots db_m. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Заметим, что выражение для умножения получается формальным применением тождества Лейбница.

Дифференциальное исчисление $\Omega^*_{univ}(A)$ с точностью до изоморфизма характеризуется следующим универсальным свойством:

Предложение 1.1. *Пусть (Ω^*, d) – некоторое дифференциальное исчисление над алгеброй A. Тогда существует единственный морфизм дифференциальных исчислений $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*$, т.е. гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр, такой что отображение $\psi_0 : \Omega^0_{univ}(A) \to \Omega^0$ есть тождественное отображение алгебры $A = \Omega^0_{univ}(A) = \Omega^0$.*

Доказательство. Определим линейное отображение $\widetilde{\psi} : A^{\otimes n+1} \to \Omega^n$ формулой
$$\widetilde{\psi}\,(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \dots da_n.$$
Так как $d1 = 0$, то $\widetilde{\psi}(a) = 0$, если в элементе $a = a_0 \otimes a_1 \otimes a_n$ один из множителей a_i, $i = 1, \dots, n$, равен 1. Поэтому отображение $\widetilde{\psi}$ пропускается через отображение $\psi : \ A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \to \Omega^n$. Остаётся проверить, что определённое таким образом $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*$ является гомоморфизмом дифференциальных алгебр. Но это немедленно следует из (1.1), (1.2) и тождества Лейбница. Условие $\psi_0 = \mathrm{id}_A$ очевидно выполнено. □

Замечание 1.1. Универсальное дифференциальное исчисление $\Omega^*_{univ}(A)$ можно определить иным способом. Для каждого натурального числа n рассмотрим отображения $m_i : A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n}$, $i = 1, \dots, n$, заданные формулой
$$m_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n,$$
и положим
$$\Omega^0_u(A) = A, \quad \Omega^n_u(A) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker m_i.$$
Произведение
$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \cdot b_0 \otimes \cdots \otimes b_m = a_0 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes \cdots \otimes b_m \tag{1.3}$$
и дифференциал
$$\begin{aligned} d(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n + \\ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n + \\ (-1)^n a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$
определяют на $\Omega^*_u(A) = \bigoplus_n \Omega^n_u(A)$ структуру дифференциальной градуированной алгебры. Отображения $\varphi : \Omega^*_u(A) \to \Omega^*_{univ}(A)$ и $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*_u(A)$,
$$\varphi(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \dots da_n,$$
$$\psi(a_0 da_1 \dots da_n) = a_0 \cdot (1 \otimes a_1 - a_1 \otimes 1) \cdot \ldots \cdot (1 \otimes a_n - a_n \otimes 1),$$
являются взаимно обратными гомоморфизмами дифференциальных алгебр, поэтому $\Omega^*_{univ}(A)$ и $\Omega^*_u(A)$ изоморфны.

Кроме $\Omega^*_{univ}(A)$, существуют и другие дифференциальные исчисления, обладающие тем или иным универсальным свойством [19]. Приведём ещё один пример подобного исчисления.

Определение 1.2. Назовём дифференциальное исчисление Ω^* *центральным*, если для каждого элемента $c \in \mathcal{Z}(A)$ из центра алгебры A и произвольной формы $\omega \in \Omega$ коммутатор $[c, \omega] = c\omega - \omega c$ равен нулю.

Пример 1.2. *(универсальное центральное исчисление)* Определим дифференциальное исчисление $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ как д.г.а., получающуюся при факторизации $\Omega^*_{univ}(A)$ по дифференциальному идеалу, порождённому коммутаторами с элементами центра алгебры A:

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) = \Omega^*_{univ}(A)/I, \quad I = ([c, \omega],\ d[c, \omega]),\ c \in \mathcal{Z}(A),\ \omega \in \Omega^*_{univ}(A).$$

Из предложения 1.1 непосредственно следует

Предложение 1.2. *Пусть* (Ω^*, d) *– некоторое центральное дифференциальное исчисление над алгеброй* A*. Тогда существует единственный морфизм дифференциальных исчислений* $\psi : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \to \Omega^*$*.* □

Вторая серия известных дифференциальных исчислений определяется с помощью дифференцирований алгебры A. Эти исчисления, как будет показано в разделе 1.3, находятся в тесной связи с характеристическими классами Жураева-Мищенко-Соловьёва.

Пример 1.3. (дифференциальное исчисление $\Omega(D, A)$) Обозначим буквой D множество дифференцирований $\mathrm{Der}\,(A)$ алгебры A, т.е. совокупность линейных отображений $X : A \to A$ со свойством Лейбница

$$X(ab) = a\,X(b) + X(a)b$$

для всех $a, b \in A$. Тогда D есть алгебра Ли относительно коммутатора дифференцирований, а алгебра A оказывается модулем над этой алгеброй Ли. Рассмотрим соответствующий коцепной комплекс Кошуля [13] $\Omega^*(D, A) = \bigoplus_n \Omega^n(D, A)$, где $\Omega^0(D, A) = A$ и

$$\Omega^n(D, A) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\,(\Lambda^n_{\Bbbk} D, A) -$$

пространство всех кососимметричных n-линейных отображений из D в A.

Дифференциал формы $\omega \in \Omega^n(D, A)$ имеет вид

$$(d\omega)(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) = \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i \left(\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_{n+1}) \right) + \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega \left([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n \right). \quad (1.5)$$

Тождество Лейбница позволяет ввести согласованное умножение на комплексе $\Omega^*(D, A)$:

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{m+n}) = \\ \frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)})\, \eta(X_{\sigma(m+1)}, \dots, X_{\sigma(m+n)}), \quad (1.6)$$

где $\omega \in \Omega^m(D, A)$, $\eta \in \Omega^n(D, A)$. Операция умножения и дифференциал делают $\Omega^*(D, A)$ дифференциальной градуированной алгеброй [5, 13], которая, очевидно, является дифференциальным исчислением.

Рассмотрим ещё один пример дифференциального исчисления, связанного с алгеброй Ли $\mathrm{Der}\,(A)$.

Пример 1.4. Пусть, как и в примере выше, D есть множество дифференцирований алгебры A, а $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — центр алгебры A. Тогда D является $\mathcal{Z}$-модулем относительно естественного действия

$$(zX)(a) = z \cdot X(a) \quad \text{для всех } z \in \mathcal{Z},\ a \in A,\ X \in D.$$

Рассмотрим градуированное векторное подпространство $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) = \bigoplus_n \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A)$ в $\Omega^*(D, A)$,

$$\Omega^0_{\mathcal{Z}}(D, A) = A, \quad \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, A),$$

состоящее из $\mathcal{Z}$-полилинейных кососимметрических отображений из D в A, т.е. из форм $\omega \in \Omega^n(D, A)$, удовлетворяющих тождеству

$$\omega(X_1, \dots, zX_i, \dots, X_n) = z \cdot \omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

при всех $z \in \mathcal{Z}$, $X_1, \dots, X_n \in D$, $1 \le i \le n$. В работе [2] показано, что $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ является дифференциальной подалгеброй в $\Omega^*(D, A)$, и поэтому оно также представляет собой дифференциальное исчисление.

Замечание 1.2. Возьмём в качестве алгебры A алгебру гладких функций $C^\infty(M)$ на многообразии M. Тогда $\mathcal{Z}(A) = C^\infty(M), \mathrm{Der}\,(A) = Vect^\infty(M)$. Среди четырёх перечисленных выше дифференциальных исчислений только $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$ дают ожидаемую алгебру форм де Рама $\Omega^*_{dR}(M)$ (см. [19]). Для $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$ этот факт также установлен в работе [2].

Покажем совпадение $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ и $\Omega^*_{dR}(M)$. Согласно свойству универсальности кэлеровых дифференциалов, которые в данном случае образуют пространство $\Omega^1_{dR}(M)$, получаем равенство $\Omega^1_{\mathcal{Z}}(A) = \Omega^1_{dR}(M) = \Omega^1_{\mathcal{Z}}(D,A)$. Далее, дифференцирование тождества $f\,dg = dg\,f$ в $\Omega^1_{\mathcal{Z}}(A)$ для произвольной пары функций $f, g \in A$ даёт соотношение

$$df\,dg = -dg\,df.$$

Благодаря этому существует гомоморфизм $\phi : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$, тождественный на 0-формах. С другой стороны, в силу универсальности определён гомоморфизм $\pi : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$. Поскольку оба дифференциальных исчисления в нашем случае порождаются 0-формами, то композиции $\pi \circ \phi$ и $\phi \circ \pi$ суть тождественные отображения, так что $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ изоморфно $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) = \Omega^*_{dR}(M)$.

Универсальное дифференциальное исчисление оказывается отличным от форм де Рама. Как показывает замечание 1.1, её n-формы, лежащие в $\Omega^n_{univ}(A)$, можно (с точностью до пополнения) отождествить с функциями на пространстве

$$M^{\times(n+1)} = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_i \in M,\ i = 0, \dots, n\},$$

обнуляющимися на диагоналях $x_i = x_{i+1},\ i = 0, \dots, n$.

Предложение 1.3. *Определённые в примерах 1.1-1.4 дифференциальные исчисления связаны между собой последовательностью морфизмов*

$$\Omega^*_{univ}(A) \xrightarrow{\pi_1} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \xrightarrow{\pi_2} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \overset{j}{\hookrightarrow} \Omega^*(D,A),$$

где $\pi_1,\ \pi_2$ *проекции, а* j *— вложение.*

Доказательство. Существование и единственность отображений π_1 и π_2 следует из универсальных свойств исчислений $\Omega^*_{univ}(A)$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$. Существование вложения j обеспечивается самим определением дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$. □

1.2 Конструкция Каруби

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, Ω^* — некоторое дифференциальное исчисление над A и E — конечнопорождённый проективный правый A-модуль.

Следуя [22], определим понятие связности.

Определение 1.3. *Ковариантным дифференцированием*, или *связностью* на модуле E называется $\Bbbk$-линейное отображение $\nabla : E \to E \otimes_A \Omega^1$, обладающее свойством

$$\nabla(sa) = \nabla s \cdot a + s \otimes da \tag{1.7}$$

для всех $s \in E,\ a \in A$.

Из тождества (1.7) немедленно вытекает

Предложение 1.4. *Пусть $\nabla,\ \nabla'$ — две связности на модуле E. Тогда $\nabla - \nabla' \in \mathrm{Hom}_A(E, E \otimes_A \Omega^1)$. Обратно, если $\phi \in \mathrm{Hom}_A(E, E \otimes_A \Omega^1)$ есть некоторый A-линейный гомоморфизм, то отображение $\nabla + \phi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(E, E \otimes_A \Omega^1)$ является связностью. Таким образом, связности образуют аффинное пространство.* □

Пример 1.5 (связности на свободном модуле). Пусть $E = A^{\oplus n}$ — свободный модуль, элементы которого суть столбцы высоты n. Из тождества Лейбница для дифференциала d в Ω^* следует, что отображение $\nabla_0 = d^{\oplus n}$, задаваемое формулой

$$\nabla_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 \\ \dots \\ da_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in A^{\oplus n},$$

является связностью. Тогда произвольная связность на $A^{\oplus n}$ имеет вид $\nabla = \nabla_0 + \phi,\ \phi \in \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus n}, A^{\oplus n} \otimes_A \Omega^1)$. Отображение ϕ относительно естественных базисов в $A^{\oplus n}$ и $A^{\oplus n} \otimes \Omega^1 = (\Omega^1)^{\oplus n}$ задаётся матрицей $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n,\ \gamma_{ij} \in \Omega^1$. Отсюда получаем формулу для связности ∇:

$$\nabla \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 \\ \dots \\ da_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in A^{\oplus n},$$

или, в матричной форме, $\nabla a = da + \Gamma a$.

Пример 1.6 (грассманова связность). На любом конечнопорождённом проективном модуле E, который оператор проектирования $p \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus n})$, $p^2 = p$ выделяет как прямое слагаемое $E = \mathrm{Im}\, p$ в свободном модуле $A^{\oplus n}$, можно задать *грассманову связность* ∇_G с помощью следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\nabla_G} & E \otimes_A \Omega^1 \\ \downarrow & & \uparrow p \otimes \mathrm{id} \\ A^{\oplus n} & \xrightarrow{d^{\oplus n}} & (\Omega^1)^{\oplus n} = A^{\oplus n} \otimes_A \Omega^1 \end{array} \tag{1.8}$$

Поэтому на проективном модуле всегда существует связность. Более того, оказывается верно и обратное.

Предложение 1.5 (см. [23]). *Пусть E — конечнопорождённый правый A-модуль. Модуль E проективен тогда и только тогда, когда для любого дифференциального исчисления Ω^* на A существует связность $\nabla : E \to E \otimes_A \Omega^1$.*

Доказательство. Наличие у проективного модуля грассмановой связности показывает необходимость.

Пускай теперь для каждого дифференциального исчисления на модуле E существует связность. Возьмём связность ∇ на универсальном дифференциальном исчислении и рассмотрим точную последовательность правых A-модулей

$$0 \longrightarrow E \otimes_A \Omega^1_{univ}(A) \xrightarrow{j} E \otimes_{\Bbbk} A \xrightarrow{m} E \longrightarrow 0,$$

где $j(s \otimes a\, db) = sa \otimes b - sab \otimes 1$, $m(s \otimes a) = sa$, $s \in E$, $a, b \in A$. Из тождества Лейбница (1.7) следует, что отображение

$$q : E \to E \otimes_{\Bbbk} A, \quad q(s) = s \otimes 1 + j \circ \nabla(s), \quad s \in E$$

является морфизмом правых A-модулей. Действительно,

$$\begin{aligned} q(sa) = sa \otimes 1 + j \circ \nabla(sa) = sa \otimes 1 + j \circ (\nabla s \cdot a + s \otimes da) = \\ sa \otimes 1 + j \circ \nabla(s) \cdot a + s \otimes a - sa \otimes 1 = (s \otimes 1 + j \circ \nabla(s))a = q(s)a. \end{aligned}$$

Кроме того, $m \circ q = \mathrm{id}_E$, поэтому модуль E изоморфен прямому слагаемому в свободном модуле $E \otimes_{\Bbbk} A$, выделяемому проектором $p = q \circ m$. □

Каждую связность ∇ можно однозначно продолжить до отображения

$$\nabla : E \otimes_A \Omega^* \to E \otimes_A \Omega^{*+1}$$

с помощью формулы

$$\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s)\,\omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in E,\ \omega \in \Omega^*$. Полученное отображение будет удовлетворять тождеству Лейбница

$$\nabla(\phi\omega) = \nabla\phi \cdot \omega + (-1)^{|\phi|}\phi \cdot d\omega, \quad \phi \in E \otimes_A \Omega^*,\ \omega \in \Omega^*. \tag{1.9}$$

Теперь мы можем ввести понятие кривизны.

Определение 1.4. Отображение $R = \nabla^2 : E \otimes_A \Omega^* \to E \otimes_A \Omega^{*+2}$ называется *кривизной* связности ∇.

Предложение 1.6. *Пусть E является конечнопорождённым проективным правым A-модулем, Ω^* есть некоторое дифференциальное исчисление на A, а ∇ — некоторая связность на E. Тогда*

1. *линейное пространство $E \otimes_A \Omega^*$ с естественным действием Ω^* справа оказывается конечнопорождённым проективным правым Ω^*-модулем;*

2. *отображение кривизны $R = \nabla^2$ связности ∇ является эндоморфизмом правого Ω^*-модуля $E \otimes_A \Omega^*$, т.е. для всех $\phi \in E \otimes_A \Omega^*$, $\omega \in \Omega^*$ выполняется соотношение*

$$R(\phi\omega) = R(\phi)\omega.$$

Доказательство. Так как E есть конечнопорождённый проективный модуль, то найдётся A-модуль F, такой что $E \oplus F = A^{\oplus n}$ для некоторого натурального n. Тогда имеется равенство Ω^*-модулей

$$(E \otimes_A \Omega^*) \oplus (F \otimes_A \Omega^*) \;=\; (E \oplus F) \otimes_A \Omega^* \;=\; A^{\oplus n} \otimes_A \Omega^* \;=\; (\Omega^*)^{\oplus n},$$

откуда следует проективность и конечнопорождённость модуля $E \otimes_A \Omega^*$.

Пусть $\phi \in E \otimes_A \Omega^*$ и $\omega \in \Omega^*$. Из тождества Лейбница (1.9) получаем

$$\begin{aligned}R(\phi\omega) = \nabla \circ \nabla(\phi\omega) = \nabla\left(\nabla\phi \cdot \omega + (-1)^{|\phi|}\phi \cdot d\omega\right) = \\ \nabla^2\phi \cdot \omega + (-1)^{|\nabla\phi|}\nabla\phi \cdot d\omega + (-1)^{|\phi|}\nabla\phi \cdot d\omega + (-1)^{|\phi|}(-1)^{|\phi|}\phi \cdot d^2\omega = \\ \nabla^2\phi \cdot \omega = R(\phi)\omega,\end{aligned}$$

учитывая, что $|\nabla\phi| = |\phi| + 1$ и $d^2 = 0$. $\square$

В качестве следствия из предложения получаем, что любая степень R^n отображения кривизны тоже является эндоморфизмом Ω^*-модуля $E \otimes_A \Omega^*$, который повышает градуировку на $2n$.

Для определения характеристических классов нам понадобится понятие следа.

Пусть A есть некоторая ассоциативная алгебра с единицей, E — конечнопорождённый проективный правый A-модуль, выделяемый в свободном модуле $A^{\oplus n}$ как прямое слагаемое: $E \oplus F = A^{\oplus n}$, и $\phi \in \mathrm{End}_A(E)$ — эндоморфизм модуля E. Дополним ϕ нулём до эндоморфизма свободного модуля $\bar{\phi} = \phi \oplus 0 \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus n})$, который в каноническом базисе задаётся матрицей $\Phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$\bar{\phi} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. *Следом* отображения ϕ называется элемент

$$\mathrm{Tr}\,(\phi) = \mathrm{Tr}\,(\Phi) + [A, A] \in \widetilde{A},$$

где $\mathrm{Tr}\,(\Phi) = \sum_{i=1}^n \phi_{ii}$ — обычный матричный след, а пространство $\widetilde{A} = A/[A, A]$ получается из A факторизацией по линейному пространству, порождённому коммутаторами.

Предложение 1.7. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, E — её конечнопорождённый проективный правый модуль и $\phi \in \mathrm{End}_A(E)$. Тогда*

1. *след $\mathrm{Tr}\,(\phi)$ корректно определён, т.е. не зависит от способа вложения модуля E как прямого слагаемого в свободный модуль;*

2. *если F также является конечнопорождённым проективным A-модулем и $\psi \in \mathrm{End}_A(F)$, то для следа отображения $\phi \oplus \psi \in \mathrm{End}_A(E \oplus F)$ выполнено соотношение*

$$\mathrm{Tr}\,(\phi \oplus \psi) = \mathrm{Tr}\,(\phi) + \mathrm{Tr}\,(\psi).$$

Доказательство. Пусть $E \oplus F = A^{\oplus n}$ и $E \oplus G = A^{\oplus m}$ — два вложения E на прямое слагаемое свободного модуля. Продолжения нулём $\bar{\phi}_1 = \phi \oplus 0_F$ и $\bar{\phi}_2 = \phi \oplus 0_G$ эндоморфизма ϕ на $A^{\oplus n}$ и $A^{\oplus m}$ соответственно можно задать матрицами Φ_1 размера $n \times n$ и Φ_2 размера $m \times m$. Рассмотрим отображения

$\bar{\phi}_1' = \bar{\phi} \oplus 0_{A^{\oplus m}}$ и $\bar{\phi}_2' = 0_{A^{\oplus n}} \oplus \bar{\phi}_2$ в $\mathrm{End}_A(A^{\oplus(n+m)})$. Отображениям $\bar{\phi}_1'$ и $\bar{\phi}_2'$ соответствуют матрицы $\Phi_1' = \Phi_1 \oplus 0_m$ и $\Phi_2' = 0_n \oplus \Phi_2$. Поэтому

$$\mathrm{Tr}\,(\Phi_1) = \mathrm{Tr}\,(\Phi_1'), \quad \mathrm{Tr}\,(\Phi_2) = \mathrm{Tr}\,(\Phi_2').$$

С другой стороны, рассмотрим автоморфизм u на $A^{\oplus(n+m)} = E \oplus F \oplus E \oplus G$, заданный формулой

$$u(e_1 \oplus f \oplus e_2 \oplus g) = e_2 \oplus f \oplus e_1 \oplus g, \quad e_1, e_2 \in E,\ f \in F,\ g \in G.$$

Тогда $\bar{\phi}_1' = u\bar{\phi}_2' u^{-1}$, или, в матричном виде, $\Phi_1' = U\Phi_2' U^{-1}$.

Покажем, что

$$\mathrm{Tr}\,(ST) - \mathrm{Tr}\,(TS) \in [A, A]$$

для произвольных матриц S и T размера $l \times l$, $l = n + m$. Пусть $S = (s_{ij})_{i,j=1}^l$, $T = (t_{ij})_{i,j=1}^l$. Тогда

$$\mathrm{Tr}\,(ST) - \mathrm{Tr}\,(TS) = \sum_{i=1}^{l} [(ST)_{ii} - (TS)_{ii}] = \sum_{i.j=1}^{l} (s_{ij}t_{ji} - t_{ij}s_{ji}) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{l} [s_{ij}, t_{ji}] \in [A, A].$$

Положим теперь $S = U,\ T = \Phi_2' U^{-1}$. Тогда имеем

$$\mathrm{Tr}\,(\Phi_1') - \mathrm{Tr}\,(\Phi_2') = \mathrm{Tr}\,(ST) - \mathrm{Tr}\,(TS) \in [A, A],$$

что доказывает первую часть утверждения.

Пусть E, F суть проективные конечнопорождённые правые A-модули и $\phi \in \mathrm{End}_A(E)$, $\psi \in \mathrm{End}_A(F)$. Пусть $E \oplus G = A^{\oplus n}$ и $F \oplus G' = A^{\oplus m}$ — представления модулей в качестве прямых слагаемых и Φ, Ψ —матрицы операторов $\bar{\phi} = \phi \oplus 0_G \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus n})$, $\bar{\psi} = \psi \oplus 0_{G'} \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus m})$ соответственно. Рассмотрим вложение $E \oplus F$ в $A^{\oplus(n+m)} = E \oplus G \oplus F \oplus G'$ на первый и третий слагаемые. Тогда матрица R продолженного нулём эндоморфизма $\bar{\rho} = \phi \oplus 0_G \oplus \psi \oplus 0_{G'}$ будет иметь блочный вид в базисе, соответствующем разложению $A^{\oplus(n+m)} = A^{\oplus n} \oplus A^{\oplus m}$:

$$R = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\mathrm{Tr}\,(\phi \oplus \psi) \equiv \mathrm{Tr}\,(R) = \mathrm{Tr}\,(\Phi) + \mathrm{Tr}\,(\Psi) \equiv \mathrm{Tr}\,(\phi) + \mathrm{Tr}\,(\psi).$$

$\square$

Следуюшая теорема завершает конструкцию характеристических классов Каруби.

Теорема 1.8 (Каруби [22]). *Пусть E есть конечнопорождённый проективный правый модуль ассоциативной алгебры с единицей A, Ω^* — дифференциальное исчисление на A. Пусть ∇ есть связность на E и R — соответствующее ей отображение кривизны. Тогда для любого натурального n*

1. *элемент $\mathrm{Tr}\,(R^n) \in \widetilde{\Omega}^{2n}$ является коциклом в комплексе $\widetilde{\Omega}^* = \Omega^*/[\Omega^*,\Omega^*]$, получающемся из Ω^* факторизацией по линейному пространству $[\Omega^*,\Omega^*]$, порождённому градуированными коммутаторами;*

2. *класс когомологий $[\mathrm{Tr}\,(R^n)] \in H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$ не зависит от выбора связности.*

Доказательство. Проверим утверждения теоремы для свободного модуля $E = A^{\oplus m}$. Тогда, как было показано в примере 1.5, любая связность на E имеет вид $\nabla = d+\Gamma$, $\Gamma \in M_m(\Omega^1)$. Найдём выражение для кривизны $R = \nabla^2$:

$$R(\varphi) = (d+\Gamma)(d\varphi + \Gamma\varphi) = \Gamma d\varphi + d(\Gamma\varphi) + \Gamma^2\varphi = \\ \Gamma d\varphi + d\Gamma\cdot\varphi - \Gamma d\varphi + \Gamma^2\varphi = (d\Gamma + \Gamma^2)\varphi$$

для всех $\varphi \in E\otimes_A \Omega = (\Omega^*)^{\oplus m}$. Таким образом, отображение R представляет умножение на матрицу $d\Gamma + \Gamma^2 \in M_m(\Omega^2)$ и $\mathrm{Tr}\,(R^n) = \mathrm{Tr}\,\big((d\Gamma+\Gamma^2)^n\big)$. Так как

$$dR = d(d\Gamma + \Gamma^2) = d\Gamma\cdot\Gamma - \Gamma\cdot d\Gamma = R\Gamma - \Gamma R,$$

то получаем

$$d\mathrm{Tr}\,(R^n) = \mathrm{Tr}\,(d(R^n)) = \mathrm{Tr}\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} R^i\cdot dR\cdot R^{n-1-i}\right) = \\ \mathrm{Tr}\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} R^i(R\Gamma - \Gamma R)R^{n-1-i}\right) = \mathrm{Tr}\,(R^n\Gamma - \Gamma R^n) = 0,$$

т.е. элемент $\mathrm{Tr}\,(R^n)$ является коциклом для каждого n. Для доказательства того, что $\mathrm{Tr}\,(R^n)$ на самом деле является кограницей, воспользуемся следующим трюком Каруби.

Введём в рассмотрение алгебру полиномов от одной переменной $B = \Bbbk[t]$ и пусть $L^* = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathrm{Der}\,(B), B) = B \otimes_{\Bbbk} \Lambda^*(dt)$. Тогда $L^* = L^0 \oplus L^1$ и $d(P(t)) = P'(t)dt$ для каждого $P(t) \in \Bbbk[t]$. Определим отображение $H_0 : L^* \to \Bbbk$ формулой $H_0(P(t)dt) = \int_0^1 P(t)dt,\ H_0(P(t)) = 0$. Несложно показать, что H_0 является стягивающей гомотопией алгебры L^* на $\Bbbk$:

$$(dH_0 + H_0 d)(P(t)) = P(1) - P(0), \tag{1.10}$$
$$(dH_0 + H_0 d)(P(t)dt) = 0.$$

Рассмотрим алгебру $A[t] = A \otimes \Bbbk[t]$. Тогда дифференциальная градуированная алгебра $\Omega^* \otimes L^*$ является дифференциальным исчислением на $A[t]$. Положим $H = \mathrm{id}_\Omega \otimes H_0 : \Omega^* \otimes L^* \to \Omega^*$. Тогда из (1.10) вытекает тождество

$$(dH + Hd)x = x(1) - x(0), \quad x \in \Omega^* \otimes L^*,$$

где выражение $x(\lambda)$, $\lambda \in \Bbbk$, на элементе $\omega \otimes P(t)$ равно $P(\lambda)\omega$ и, если $x = \omega \otimes P(t)dt$, то $x(\lambda) = 0$.

Так как L^* коммутативна, то $(\Omega^* \otimes L^*)^\sim = \widetilde{\Omega}^* \otimes L^*$. При этом H определяет отображение $\widetilde{H} : \widetilde{\Omega}^* \otimes L^* \to \widetilde{\Omega}^*$ с аналогичным свойством

$$(d\widetilde{H} + \widetilde{H}d)x = x(1) - x(0), \quad x \in \widetilde{\Omega}^* \otimes L^*.$$

Если x есть коцикл комплекса $\widetilde{\Omega}^* \otimes L^*$, то $x(1) - x(0) = (d\widetilde{H} + \widetilde{H}d)x = d\widetilde{H}(x)$ — кограница в $\widetilde{\Omega}^*$.

Напомним, что даны свободный модуль $E = A^{\oplus m}$ и связность $\nabla = d + \Gamma$. Тогда $\nabla_t = d + \Gamma t$ является связностью на свободном модуле $A[t]^{\oplus m}$ и её кривизна равна $R_t = d\Gamma t + \Gamma^2 t^2 - \Gamma dt$. В силу доказанного ранее элемент $\mathrm{Tr}\,(R_t^n) \in \Omega^* \otimes L^*$ является коциклом. Поэтому кограницей будет элемент

$$\mathrm{Tr}\,(R_t^n)(1) - \mathrm{Tr}\,(R_t^n)(0) = \mathrm{Tr}\,\left((R_t(1))^n\right) - \mathrm{Tr}\,\left((R_t(0))^n\right) = \\ \mathrm{Tr}\,\left((d\Gamma + \Gamma^2)^n\right) - \mathrm{Tr}\,(0^n) = \mathrm{Tr}\,(R^n),$$

так как

$$R_t(1) = \left(d\Gamma t + \Gamma^2 t^2 - \Gamma dt\right)(1) = d\Gamma + \Gamma^2,$$
$$R_t(0) = \left(d\Gamma t + \Gamma^2 t^2 - \Gamma dt\right)(0) = 0.$$

Перейдём к случаю проективного модуля и докажем для начала коцикличность для грассмановой связности. Пусть $E = \mathrm{Im}\,P$ — образ проектора P в свободном модуле $A^{\oplus m}$. Действие проектора P на элементах

$A^{\oplus m}$, рассматриваемых как столбцы высоты m, заключается в умножении слева на матрицу размера $m \times m$ с элементами из A, которую мы будем обозначать той же буквой $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{m}$. Мы можем отождествить Ω^*-модуль $E \otimes_A \Omega^*$ с прямым слагаемым в $A^{\oplus m} \otimes_A \Omega^* = (\Omega^*)^{\oplus m}$, выделяемым проектором P, т.е. умножением слева на ту же матрицу P.

Согласно (1.8), грассманова связность есть композиция $\nabla_G = Pd$. Тогда для любых $s \in E,\ \omega \in \Omega^*$

$$\nabla_G(s \otimes_A \omega) = Pds \otimes_A \omega + s \otimes_A d\omega = P(ds \otimes_A \omega + s \otimes_A d\omega) = Pd(s \otimes_A \omega),$$

откуда

$$R_G(s \otimes_A \omega) = Pd(Pd(s \otimes_A \omega)) = P(dP)d(s \otimes_A \omega) + P^2 d^2(s \otimes_A \omega) =$$
$$P(dP)d(Ps \otimes_A \omega) = P(dP)^2(s \otimes_A \omega) + P(dP)Pd(s \otimes_A \omega) = P(dP)^2(s \otimes_A \omega),$$

так как $P(dP)P = 0$ ввиду тождества

$$P(dP)P = P(d(P^2))P = P^2(dP)P + P(dP)P^2 = 2P(dP)P.$$

Таким образом, оператор грассмановой кривизны есть умножение слева на матрицу $P(dP)^2 \in M_n(\Omega^2)$, а оператор R_G^n — на матрицу

$$[P(dP)^2]^n = P(dP)^{2n} \in M_n(\Omega^{2n}),$$

поскольку

$$(dP)^2 P = dP(d(PP) - PdP) = (dP)^2 - (d(PP) - PdP)dP = P(dP)^2. \tag{1.11}$$

Покажем, что $d\mathrm{Tr}\,(R_G^n) = 0$:

$$d\mathrm{Tr}\,(R_G^2) = d\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n}) = \mathrm{Tr}\,(dP)^{2n+1} = \mathrm{Tr}\,(d(P^2)(dP)^{2n}) =$$
$$\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n+1}) + \mathrm{Tr}\,(dP \cdot P(dP)^{2n}) = 0,$$

так как

$$\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n+1}) = \mathrm{Tr}\,(P^2(dP)^{2n+1}) = \mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n+1}P) =$$
$$\mathrm{Tr}\,(P(dP)P(dP)^{2n}) = \mathrm{Tr}\,(0) = 0,$$

где во втором равенстве мы воспользовались цикличностью следа, а в третьем — тождеством (1.11), и, подобным образом,

$$\operatorname{Tr}(dP\cdot P(dP)^{2n}) = \operatorname{Tr}(dP\cdot P^2(dP)^{2n}) = \operatorname{Tr}(dP\cdot P(dP)^{2n}P) = \\ \operatorname{Tr}(P(dP)P(dP)^{2n}) = \operatorname{Tr}(0) = 0.$$

Рассмотрим на модуле E две связности ∇_1 и ∇_2. Если $E\oplus F = A^{\oplus m}$, то грассманова связность ∇' на F дополняет ∇_1 и ∇_2 до связностей $\bar{\nabla}_i = \nabla_i \oplus \nabla'$, $i = 1, 2$ на свободном модуле $A^{\oplus m}$. Кривизна $\bar{R}_i = \bar{\nabla}_i^2$ в данном случае тоже представляется в виде прямой суммы $R_i \oplus R'$. Поэтому в силу аддитивности следа $\operatorname{Tr}(\bar{R}_i^n) = \operatorname{Tr}(R_i^n) + \operatorname{Tr}(R'^n)$, откуда $\operatorname{Tr}(R_1^n) - \operatorname{Tr}(R_2^n) = \operatorname{Tr}(\bar{R}_1^n) - \operatorname{Tr}(\bar{R}_2^n)$ — кограница как разность двух кограничных элементов. Кроме того, выбор грассмановой связности в качестве ∇_1 немедленно даёт коцикличность связности ∇_2. Таким образом, теорема полностью доказана. □

Определение 1.6 (см. [22]). *Характеристическими классами* конечнопорождённого проективного модуля E со значениями в дифференциальном исчислении Ω^* называются элементы $c_n(E, \Omega^*) = [\operatorname{Tr} R^n] \in H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$.

Замечание 1.3. Доказательство теоремы 1.8 даёт следующую широко применяемую при вычислениях формулу для характеристических классов модуля, заданного проектором P:

$$c_n(\operatorname{Im} P, \Omega^*) = \left[\operatorname{Tr}\left(P(dP)^{2n}\right)\right]. \tag{1.12}$$

Рассмотрим простейшие свойства характеристических классов Каруби.

Предложение 1.9. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, Ω^* — дифференциальное исчисление на ней. Тогда*

1. *для любых конечнопорождённых проективных правых модулей E и F $c_n(E\oplus F, \Omega^*) = c_n(E, \Omega^*) + c_n(F, \Omega^*)$;*

2. *$c_n(A^{\oplus m}, \Omega^*) = 0$ для любого n и m.*

Доказательство. 1. Если $\nabla_1 : E \to E\otimes_A \Omega^1$, $\nabla_2 : F \to F\otimes_A \Omega^1$ — связности, то $\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2$ — связность на $E\oplus F$. Тогда $R = \nabla^2 = R_1 \oplus R_2$, где $R_i = \nabla_i^2$. Точно так же $R^n = R_1^n \oplus R_2^n$, поэтому из аддитивности следа (предложение 1.7) получаем равенство

$$\operatorname{Tr}(R^n) = \operatorname{Tr}(R_1^n) + \operatorname{Tr}(R_2^n),$$

откуда $c_n(E \oplus F, \Omega^*) = c_n(E, \Omega^*) + c_n(F, \Omega^*)$.

2. В силу предыдущего пункта достаточно проверить обнуление характеристических классов у регулярного модуля A. В качестве связности в этом случае можно взять дифференциал d комплекса Ω^*. Тогда $R = d^2 = 0$, так что $c_n(A, \Omega^*) = 0$ при всех n и для всех Ω^*. □

Предложение 1.10. *Пусть A есть ассоциативная алгебра с единицей, E — конечнопорождённый проективный модуль на A. Пусть Ω_1^*, Ω_2^* — дифференциальные исчисления на A и $\phi : \Omega_1^* \to \Omega_2^*$ — морфизм дифференциальных исчислений. Тогда для любого n*

$$c_n(E, \Omega_2^*) = \phi_* c_n(E, \Omega_1^*),$$

где отображение $\phi_* : H^*(\widetilde{\Omega}_1^*) \to H^*(\widetilde{\Omega}_2^*)$ индуцировано ϕ.

Доказательство. Если E выделяется проектором $P \in M_m(A)$ в свободном модуле $A^{\oplus m}$, то $c_n(E, \Omega_i^*) = \left[\operatorname{Tr}\left(P(dP)^{2n}\right)\right] \in H^{2n}(\widetilde{\Omega}_i^*)$. Поскольку ϕ является гомоморфизмом дифференциальных алгебр, то

$$\phi\left(P(dP)^{2n}\right) = P(dP)^{2n},$$

откуда, переходя к факторкомплексам $\widetilde{\Omega}_i^*$ и затем к их когомологиям, получаем искомое равенство $c_n(E, \Omega_2^*) = \phi_* c_n(E, \Omega_1^*)$. □

Следствие 1.11. *Пусть A есть ассоциативная алгебра с единицей, E — конечнопорождённый проективный модуль на A, Ω^* — дифференциальное исчисление на A. Тогда для любого n*

$$c_n(E, \Omega^*) = \psi_* c_n(E, \Omega^*_{univ}(A)),$$

где $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*$ — единственный морфизм дифференциальных исчислений. Следовательно, равенство $c_n(E, \Omega^*_{univ}(A)) = 0$ влечёт равенство $c_n(E, \Omega^*) = 0$ для каждого дифференциального исчисления Ω^*. □

Определение 1.7. Характеристические классы конечнопорождённого проективного модуля E над ассоциативной алгеброй с единицей A с коэффициентами в универсальном дифференциальном исчислении $\Omega^*_{univ}(A)$ называются *универсальными характеристическими классами* модуля E и будут обозначаться в дальнейшем $c_n(E) = c_n(E, \Omega^*_{univ}(A))$.

Утверждение 1.11, таким образом, показывает, что среди всех характеристических классов универсальные являются максимальным инвариантом проективных модулей. В силу этого соображения в последующем мы сосредоточим основное внимание на универсальных характеристических классах.

Замечание 1.4. Формула $c_n(E,\Omega^*) = \left[\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n})\right]$ вдохновляет нас на следующее определение. Пусть E — конечнопорождённый проективный A-модуль. Определим нулевой характеристический класс модуля E $c_0(E) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{id}_E) \in A/\left([A,A]+\Bbbk 1\right)$. Класс c_0 аддитивен ($c_0(E\oplus F) = c_0(E)+c_0(F)$) и приведён ($c_0(A)=0$), очевидно, не зависит от выбора связности и от дифференциального исчисления. На самом деле, несложно показать, что

$$c_0(E) \in \bar{H}^0(\widetilde{\Omega}^*) = H^0(\widetilde{\Omega}^*)/\Bbbk 1 \subset A/\left([A,A]+\Bbbk 1\right)$$

для каждого дифференциального исчисления Ω, так что можно считать $c_0(E) = c_0(E,\Omega^*)$ для любого Ω^*.

1.3 Характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва

В середине 80-х годов прошлого века были предложены две различные конструкции, обобщающие характеристические классы Чженя-Вейля на случай некоммутативных алгебр и их проективных модулей. Одну из них, принадлежащую Каруби, мы описали в предыдущем параграфе. Другая конструкция возникла в серии совместных работ [3, 4], [2] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва и Ю. Й. Жураева. Нашей ближайшей целью будет установление связи между характеристическими классами Каруби и Жураева-Мищенко-Соловьёва. Напомним вкратце основные элементы конструкции, принадлежащей последним трём авторам (см. также [6]).

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр, $D = \mathrm{Der}\,(A)$ — множество дифференцирований на A. Тогда, как было указано в разделе 1.1, D является алгеброй Ли и $\mathcal{Z}$-модулем, а $\mathcal{Z}$ — инвариантная относительно действия D центральная подалгебра в A. Зафиксируем некоторый конечнопорождённый проективный правый A-модуль E.

Определение 1.8. *Связностью в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва* на модуле E называется произвольное $\Bbbk$-линейное отображение

$$\nabla : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,E),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$\nabla_X(sa) = \nabla_X(s)a + sX(a) \quad \text{для любых } s\in E,\ a\in A,\ X\in D,$$

где $\nabla_X(s) = \nabla(s)(X)$.

Предложение 1.12. *На любом конечнопорождённом проективном модуле существует связность в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва.*

Определение 1.9. *Кривизной в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва* связности ∇ на модуле E называется билинейное отображение Θ из D в $\mathrm{End}_{\Bbbk}(E)$, определённое формулой

$$\Theta(X,Y)(s) = \nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s), \quad X,Y \in D,\ s \in E.$$

Заметим, что кривизна Θ $\mathcal{Z}$-линейна и кососимметрична и потому лежит в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\left(\Lambda^2_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{End}_{\Bbbk}(E)\right)$. Кроме того, равенство

$$\begin{gathered}\Theta(X,Y)(sa) = \nabla_X\nabla_Y(sa) - \nabla_Y\nabla_X(sa) - \nabla_{[X,Y]}(sa) = \\ \nabla_X(\nabla_Y(s)a + sY(a)) - \nabla_Y(\nabla_X(s)a + sX(a)) - \nabla_{[X,Y]}(s)a - s[X,Y](a) = \\ (\nabla_X\nabla_Y(s))a + \nabla_Y(s)\cdot X(a) + \nabla_X(s)\cdot Y(a) + s\cdot(XY)(a) - \\ (\nabla_Y\nabla_X(s))a - \nabla_X(s)\cdot Y(a) - \nabla_Y(s)\cdot X(a) - s\cdot(YX)(a) - \\ \nabla_{[X,Y]}(s)a - s\cdot(XY-YX)(a) = \\ (\nabla_X\nabla_Y(s))a - (\nabla_Y\nabla_X(s))a - \nabla_{[X,Y]}(s)a = \Theta(X,Y)(s)a\end{gathered}$$

при всех $s \in E,\ a \in A,\ X,Y \in D$ показывает, что Θ является элементом пространства $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^2_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{End}_A(E))$.

Конструкция характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва по сравнению с конструкцией Каруби имеет дополнительный параметр — следовой модуль.

Определение 1.10. Линейное пространство V называется *следовым модулем*, если V является модулем над $\mathcal{Z}$ и D, причём

$$(zX)(v) = z\cdot X(v), \quad X(z\cdot v) = X(z)\cdot v + z\cdot X(v)$$

для всех $X \in D,\ z \in \mathcal{Z},\ v \in V$, и кроме того, имеется линейное отображение (*след*) $\tau : A \to V$, являющееся гомоморфизмом $\mathcal{Z}$- и D-модулей и удовлетворяющее сотношению

$$\tau(ab) = \tau(ba) \quad \text{для любых } a,b \in A.$$

Каждая алгебра обладает хотя бы одним следовым модулем (см. пример 1.7 ниже).

Как и обычный след, следовой модуль (V,τ) можно использовать для вычисления инвариантов эндоморфизмов проективных модулей. Более точно, справедливо утверждение.

Предложение 1.13. *Пусть (V, τ) есть следовой модуль. Тогда существует расширение следа τ до семейства отображений $\bar{\tau}_E : \mathrm{End}_A(E) \to V$, E — конечнопорождённый проективный A-модуль, такого что*

1. *(линейность) для каждого конечного проективного модуля E $\bar{\tau}_E$ является $\Bbbk$-линейным отображением;*

2. *(коммутативность) для любых конечных проективных A-модулей E, F и любых морфизмов $\phi \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_A(F, E)$ $\bar{\tau}_E(\psi\phi) = \bar{\tau}_F(\phi\psi)$;*

3. *(аддитивность) для любых конечных проективных A-модулей E, F и любых морфизмов $\phi \in \mathrm{End}_A(E)$, $\psi \in \mathrm{End}_A(F)$ $\bar{\tau}_{E\oplus F}(\phi \oplus \psi) = \bar{\tau}_E(\phi) + \bar{\tau}_F(\psi)$;*

4. *(нормировка) для $E = A$ отображение $\bar{\tau}_A : \mathrm{End}_A(A) = A \to V$ совпадает с τ.*

Итак, пускай имеются конечнопорождённый проективный A-модуль E, на котором выбрана некоторая связность в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва ∇ с кривизной Θ, и следовой модуль V со следом τ. Приступим к построению характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва.

Рассмотрим градуированное линейное пространство

$$\Omega^*(D, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Lambda^n_{\Bbbk} D, V).$$

Дифференциал, задаваемый формулой (1.5), определяет на $\Omega^*(D, V)$ структуру комплекса. В $\Omega^*(D, V)$ можно выделить подпространство

$$\Omega_{\mathcal{Z}}(D, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, V),$$

которое, на самом деле, есть подкомплекс (см. [2, 6]).

Рассмотрим также пространство

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{End}_A(E)),$$

которое вместе с умножением (1.6) является градуированной алгеброй. Тогда $\Theta \in \Omega^2_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E))$. След $\bar{\tau}_E : \mathrm{End}_A(E) \to V$ индуцирует линейное отображение

$$(\bar{\tau}_E)_* : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V).$$

Определим элемент $\sigma_n(E,\nabla) \in \Omega^{2n}_{\mathcal{Z}}(D,V)$ равенством

$$\sigma_n(E,\nabla) = (\bar{\tau}_E)_*(\Theta^n).$$

Теорема 1.14. *Для каждого натурального n справедливы утверждения*

1. *элемент $\sigma_n(E,\nabla)$ является коциклом в комплексе $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,V)$;*
2. *класс когомологий $[\sigma_n(E,\nabla)] \in H^{2n}(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,V))$ не зависит от выбора связности ∇.*

Определение 1.11. Элемент $Ch_n(E,V) = [\sigma_n(E,\nabla)]$ группы $2n$-мерных когомологий комплекса $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,V)$ называется *n-ым характеристическим классом Жураева-Мищенко-Соловьёва* модуля E с коэффициентами в модуле следов V.

Как видно из вышеизложенного, теория характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва во многом параллельна теории Каруби. В оставшейся части параграфа мы выявим связи, которые имеются между этими двумя конструкциями. При этом мы получим доказательство сформулированных в начале этого параграфа предложений и теорем.

Лемма 1.15. *Для любого конечнопорождённого проективного A-модуля E имеют место следующие изоморфизмы линейных пространств*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,E)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E\otimes_A \Omega^1_{\mathcal{Z}}(D,A)),\\ \Psi_* : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) &\simeq \mathrm{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}(E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)),\end{aligned}$$

причём Ψ_* является гомоморфизмом градуированных алгебр.

Доказательство. Определим Φ как композицию изоморфизмов

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,E)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(D, E\otimes_A A)) \simeq\\ &\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E\otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,A)) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E\otimes_A \Omega^1_{\mathcal{Z}}(D,A)),\end{aligned}$$

а Ψ_* — как композицию

$$\begin{gathered}
\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) = \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{End}_A(E)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{Hom}_A(E, E)) \simeq \\
\mathrm{Hom}_A(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D \otimes_{\mathcal{Z}} E, E) \simeq \mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E)) = \\
\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E \otimes_A A)) \simeq \mathrm{Hom}_A(E, E \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, A)) = \\
\mathrm{Hom}_A(E, E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)) \simeq \\
\mathrm{Hom}_A\left(E, \mathrm{Hom}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A), E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)\big)\right) \simeq \\
\mathrm{Hom}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}(E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A), E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)) = \\
\mathrm{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}(E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)).
\end{gathered}$$

Покажем, что Ψ_* — гомоморфизм. Для этого посмотрим на конкретный вид этого отображения. Пусть $\phi \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E))$, $s \in E$, $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Тогда $\Psi_*(\phi)$ является эндоморфизмом модуля $E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, повышающим градуировку на n, и, отождествляя пространства

$$E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) = E \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, A) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E),$$

имеем для всех $X_1, \dots, X_{m+n} \in D$

$$\begin{gathered}
\left[\Psi_*(\phi)(s \otimes \omega)\right](X_1, \dots, X_{m+n}) = \\
\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left[\phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)})\right](s) \cdot \\
\omega(X_{\sigma(m+1)}, \dots, X_{\sigma(m+1)}). \quad (1.13)
\end{gathered}$$

В частности,

$$\left[\Psi_*(\phi)(s \otimes 1)\right](X_1, \dots, X_m) = \left[\phi(X_1, \dots, X_m)\right](s).$$

Пусть $\phi_1 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E))$, $\phi_2 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E))$. Проверку достаточно производить на элементах вида $s \otimes_A 1 \in E \otimes_A \Omega^0_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Пусть $\Psi_*(\phi_2)(s \otimes 1) = \sum_i s_i \otimes \omega_i$, $s_i \in E$, $\omega_i \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Тогда для любых

$X_1, \dots, X_{m+n} \in D$

$$[\Psi_*(\phi_1)\Psi_*(\phi_2)(s \otimes 1)](X_1, \dots, X_{m+n}) =$$
$$\sum_i [\Psi_*(\phi_1)(s_i \otimes \omega_i)](X_1, \dots, X_{m+n}) =$$
$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left(\phi_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)})\right)(s_i) \cdot$$
$$\omega_i(X_{\sigma(m+1)}, \dots, X_{\sigma(m+n)}) =$$
$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left(\phi_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)})\right)$$
$$\left(\sum_i s_i \cdot \omega_i(X_{\sigma(m+1)}, \dots, X_{\sigma(m+n)})\right) =$$
$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left(\phi_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)})\right)$$
$$\left([\phi_2(X_{\sigma(m+1)}, \dots, X_{\sigma(m+n)})](s)\right) =$$
$$[(\phi_1\phi_2)(X_1, \dots, X_{m+n})](s) = [\Psi_*(\phi_1\phi_2)(s \otimes 1)](X_1, \dots, X_{m+n}).$$

Следовательно, $\Psi_*(\phi_1)\Psi_*(\phi_2) = \Psi_*(\phi_1\phi_2)$, так что Ψ_* — гомоморфизм. □

Покажем теперь, как соотносятся только что введённые определения связности и кривизны с понятиями связности и кривизны в конструкции Каруби.

Предложение 1.16. *Для любого конечного проективного A-модуля E выполнены следующие утверждения*

1. *изоморфизм Φ из леммы 1.15 устанавливает биекцию между связностями в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва и связностями Каруби в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$;*

2. *изоморфизм Ψ_2 устанавливает биекцию между кривизнами в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва и кривизнами Каруби в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. При этом, если ∇ есть некоторая ЖМС-связность и Θ — её кривизна, то $\Psi_2(\Theta)$ есть удвоенная кривизна связности Каруби $\Phi(\nabla)$ (ср.* [5, § III.5]*).*

Доказательство. 1. Пусть ∇ — ЖМС-связность на E и пусть $\widehat{\nabla} = \Phi(\nabla)$. Тогда для любых $s \in E, a \in A, X \in D$

$$\widehat{\nabla}(sa)(X) = \nabla_X(sa) = \nabla_X(s)a + sX(a) = \nabla_X(s)a + s \cdot da(X) = \\ (\widehat{\nabla}(s)a)(X) + (s \otimes_A da)(X),$$

т.е. отображение $\widehat{\nabla}$ удовлетворяет тождеству Лейбница и, таким образом, является связностью.

Обратно, пусть $\widehat{\nabla}$ — связность Каруби и $\nabla = \Phi^{-1}(\widehat{\nabla})$. Тогда

$$\nabla_X(sa) = \widehat{\nabla}(sa)(X) = \left(\widehat{\nabla}(s)a + s \otimes_A da\right)(X) = \nabla_X(s)a + sX(a),$$

следовательно, ∇ — связность в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва.

2. Пусть ∇ — ЖМС-связность, Θ — её кривизна, а $\widehat{\nabla} = \Phi(\nabla)$ — соответствующая ей связность Каруби.

Пусть $s \in E$ и $\widehat{\nabla}(s) = \sum_i s_i \otimes \omega_i$, где $s_i \in E$, $\omega_i \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(D, \Bbbk)$. Тогда для любых $X, Y \in D$

$$\nabla_X \nabla_Y(s) = \nabla_X(\widehat{\nabla}(s)(Y)) = \nabla_X\left(\sum_i s_i \omega_i(Y)\right) = \sum_i \nabla_X(s_i)\omega_i(Y) = \\ \sum_i (\widehat{\nabla}(s_i))(X)\omega_i(Y) = \sum_i (\widehat{\nabla}(s_i) \otimes \omega_i)(X, Y).$$

Аналогично,

$$\nabla_Y \nabla_X(s) = \sum_i (\widehat{\nabla}(s_i) \otimes \omega_i)(Y, X),$$

так что

$$\nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_X(s) = 2\sum_i (\widehat{\nabla}(s_i) \wedge \omega_i)(Y, X). \tag{1.14}$$

С другой стороны, так как $\omega_i(Y) \in \Bbbk$, то $X(\omega_i(Y)) = 0$. Аналогично, $Y(\omega_i(X)) = 0$, и мы получаем равенство

$$\nabla_{[X,Y]}(s) = \sum_i s_i \omega_i([X, Y]) = \\ \sum_i s_i \left(-2(d\omega_i)(X, Y) + X(\omega_i(Y)) + Y(\omega_i(X))\right) = \\ -2\sum_i (s_i \otimes d\omega_i)(X, Y). \tag{1.15}$$

Вычитая из равенства (1.14) равенство (1.15), получим

$$(\psi_2(\Theta)(s))(X,Y) = (\Theta(X,Y))(s) = \nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s) =$$
$$2\sum_i(\widehat{\nabla}(s_i)\wedge\omega_i)(X,Y) + 2\sum_i(s_i\otimes d\omega_i)(X,Y) =$$
$$2\sum_i(\widehat{\nabla}(s_i)\wedge\omega_i + s_i\otimes d\omega_i)(X,Y) = 2\sum_i(\widehat{\nabla}(s_i\otimes\omega_i))(X,Y) =$$
$$2(\widehat{\nabla}\circ\widehat{\nabla}(s))(X,Y).$$

Следовательно, $\psi_2(\Theta) = 2\widehat{\nabla}^2$ — удвоенная кривизна связности $\widehat{\nabla}$, и Ψ_2, таким образом, устанавливает биекцию между кривизнами в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва и кривизнами Каруби. □

Предложение 1.12 есть прямое следствие только что доказанного утверждения.

Связь между конструкциями Каруби и Жураева-Мищенко-Соловьёва осуществляется с помощью двух объектов: с одной стороны, дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$, введённого в примере 1.4, с другой — универсального следового модуля.

Пример 1.7 (универсальный следовой модуль). Рассмотрим пространство $\widetilde{A} = A/[A,A]$. Поскольку для любых $a,b\in A,\ z\in\mathcal{Z},\ X\in D$

$$z[a,b] = [za,b]\in[A,A],\quad X[a,b] = [X(a),b] + [a,X(b)]\in[A,A],$$

то $[A,A]$ является $\mathcal{Z}$- и D-подмодулем в A и, следовательно, на $\widetilde{A}$ имеются естественные согласованные между собой структуры $\mathcal{Z}$- и D-модуля. При этом естественная проекция $\pi: A\to\widetilde{A}$ является $\mathcal{Z}$- и D-гомоморфизмом, который по определению на коммутаторах равен нулю. Поэтому π есть след, а $\widetilde{A}$ — следовой модуль. Оказывается, что $\widetilde{A}$ универсален в следующем смысле.

Предложение 1.17. *Пусть V есть следовой модуль со следом $\tau: A\to V$. Тогда существует единственный морфизм $\mathcal{Z}$- и D-модулей $\rho:\widetilde{A}\to V$, такой что $\tau = \rho\circ\pi$.*

Доказательство. Для каждого $\widetilde{a} = a + [A,A]\in\widetilde{A}$ положим $\rho(\widetilde{a}) = \tau(a)$. Так как $\tau([a,b]) = 0$ для любых $a,b\in A$, то ρ корректно определён. Тогда ρ — морфизм, обладающий всеми свойствами из формулировки предложения. Единственность такого морфизма следует из сюръективности проекции π. □

Доказательство предложения 1.13. Пусть $\rho : \widetilde{A} \to V$ — морфизм из предложения 1.17. Положим $\bar{\tau} = \rho \circ \mathrm{Tr}$. Тогда $\bar{\tau}$ удовлетворяет всем требованиям в формулировке предложения. $\square$

Лемма 1.18. *Следующая диаграмма, состоящая из отображений градуированных линейных пространств, коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}(E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & \widetilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \\ \uparrow \Psi_* & & \downarrow \widetilde{\pi}_* \\ \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) & \xrightarrow{(\bar{\pi}_E)_*} & \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A}) \end{array},$$

где $\widetilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D,A) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)/[\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A), \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)]$, $(\widetilde{A}, \pi)$ *— универсальный следовой модуль,* $\widetilde{\pi}_*$ *— отображение, индуцированное проекцией* $\pi_* : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A})$, *а* Ψ_* *— изоморфизм из леммы 1.15. При этом* $\widetilde{\pi}_*$ *— цепное отображение.*

Доказательство. Если $\omega_1 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(D,A)$, $\omega_2 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D,A)$, то для любых $X_1, \ldots, X_{m+n} \in D$

$$[\omega_1, \omega_2](X_1, \ldots, X_{m+n}) =$$
$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left\{ \omega_1(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}) \omega_2(X_{\sigma(m+1)}, \ldots, X_{\sigma(m+n)}) - \right.$$
$$\left. (-1)^{mn} \omega_2(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \omega_1(X_{\sigma(n+1)}, \ldots, X_{\sigma(m+n)}) \right\} =$$
$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \left([\omega_1(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}), \omega_2(X_{\sigma(m+1)}, \ldots, X_{\sigma(m+n)})] \right)$$
$$\in [A, A].$$

Следовательно, отображение $\widetilde{\pi}_*$ корректно определено. $\widetilde{\pi}_*$ есть цепное отображение, так как таковым является π_*.

Пусть $\phi \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E))$ и $X_1, \ldots, X_n \in D$. Тогда

$$[(\bar{\pi}_E)_*(\phi)](X_1, \ldots, X_n) = \bar{\pi}_E \left(\phi(X_1, \ldots, X_n) \right) = \mathrm{Tr} \left(\phi(X_1, \ldots, X_n) \right),$$

поскольку $\bar{\pi}_E : \mathrm{End}_A(E) \to \widetilde{A}$ есть обычный операторный след. Отождествляя E с образом некоторого проектора $P \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus l})$ в свободном модуле с базисом e_i, $i = 1, \ldots, l$, получим

$$[(\bar{\pi}_E)_*(\phi)](X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{l} \phi_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \mod [A, A],$$

где элементы $\phi_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \in A$ определены равенствами

$$[\phi(X_1, \ldots, X_n)](Pe_i) = \sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \phi_{ji}(X_1, \ldots, X_n)$$

для всех $1 \leq i \leq l$.

С другой стороны, модуль $E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ выделяется в свободном модуле $A^{\oplus l} \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ проектором $P \otimes \mathrm{id}$. Тогда

$$\mathrm{Tr}\,(\Psi_*(\phi)) = \sum_{i=1}^{l} \phi'_{ii} \mod [\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A), \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)],$$

где для каждого $1 \leq i \leq l$

$$[\Psi_*(\phi)]\,((P \otimes 1)(e_i \otimes 1)) = \sum_{j=1}^{l} e_j \otimes \phi'_{ji}, \quad \phi'_{ji} \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A),$$

и таким образом,

$$[\tilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr}\,(\Psi_*(\phi))](X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{l} \phi'_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \mod [A, A].$$

Но из определения отображения Ψ_* следует, что для каждого $1 \leq i \leq l$

$$\sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \phi'_{ji}(X_1, \ldots, X_n) = [\Psi_*(\phi)\,(Pe_i \otimes 1)](X_1, \ldots, X_l) =$$

$$[\phi(X_1, \ldots, X_l)](Pe_i) = \sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \phi_{ji}(X_1, \ldots, X_n)$$

и потому $\phi'_{ii}(X_1, \ldots, X_n) = \phi_{ii}(X_1, \ldots, X_n)$. Следовательно,

$$[\tilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr}\,(\Psi_*(\phi))](X_1, \ldots, X_n) = [(\bar{\pi}_E)_*(\phi)](X_1, \ldots, X_n).$$

Так как выбор ϕ и $X_1 \ldots, X_n$ произволен, то $(\bar{\pi}_E)_* = \widetilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr} \circ \Psi_*$. $\square$

Замечание 1.5. Отображение $\widetilde{\pi}_*$ — изоморфизм, если A коммутативна или D является конечнопорождённым проективным $\mathcal{Z}$-модулем.

Доказательство теоремы 1.14. Пусть ∇ есть некоторая связность в смысле Жураева-Мищенко-Соловьёва на модуле E и Θ — её кривизна. Рассмотрим соответствующую ей связность Каруби $\widehat{\nabla}$ с кривизной $R = \widehat{\nabla}^2$. Тогда по лемме 1.15 $2R = \Psi_*(\Theta)$. Поскольку Ψ_* является гомоморфизмом алгебр, то для любого n $\Psi_*(\Theta^n) = 2^n R^n$.

Отображение следа τ следового модуля (V, τ), согласно предложению 1.17, раскладывается в композизию $\tau = \rho \circ \pi$. Следовательно, отображение $(\bar{\tau}_E)_* : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)$ тоже представляется в виде композиции цепных отображений:

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \mathrm{End}_A(E)) \xrightarrow{(\bar{\pi}_E)_*} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A}) \xrightarrow{\rho_*} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V).$$

Тогда, применяя лемму 1.18, получаем равенство

$$\sigma_n(E, \nabla) = 2^n \rho_* \widetilde{\pi}_*(R^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь утверждения доказываемой теоремы легко выводятся из аналогичной теоремы 1.8. Действительно, $\sigma_n(E, \nabla)$ является коциклом как образ коцикла $2^n R^n$ при цепном отображении $\rho_* \widetilde{\pi}_*$. При этом когомологический класс $[\sigma_n(E, \nabla)] \in H^{2n}(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V))$ не зависит от выбора связности, поскольку от её выбора не зависит уже класс $[R^n] \in \widetilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что, помимо доказательства теоремы 1.14, мы получили следующий результат.

Теорема 1.19. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, $D = \mathrm{Der}\,(A)$ — алгебра Ли её дифференцирований, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр. Пусть даны также конечнопорождённый проективный правый A-модуль E и следовой модуль (V, τ). Тогда характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва $Ch_n(E, V)$ модуля E с коэффициентами в следовом модуле V и характеристические классы $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A))$ модуля E с коэффициентами в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ связаны соотношением*

$$Ch_n(E, V) = 2^n \rho_* \widetilde{\pi}_*(c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A))),$$

где $\widetilde{\pi}_* : H^*(\widetilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D, A)) \to H^*(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A}))$ — отображение из леммы 1.18, взятое на уровне когомологий, а $\rho_* : H^*(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A})) \to H^*(\Omega^* \mathcal{Z}(D, V))$ индуцировано каноническим отображением $\rho : \widetilde{A} \to V$ из универсального следового модуля. $\square$

Следствие 1.20. *Для каждого следового модуля* (V, τ) *определено отображение*
$$\Pi = \rho_* \widetilde{\pi}_* \psi_* : H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \to H^*(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)),$$
где $\psi_* : H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \to H^*(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \widetilde{A}))$ *индуцировано морфизмом дифференциальных исчислений* $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$*, которое переводит универсальные характеристические классы Каруби в характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва.* □

Замечание 1.6. Конструкция характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва имеет следующее обобщение (см. [2, 6]). Пусть D обозначает не множество всех дифференцирований $\mathrm{Der}\,(A)$ алгебры A, как ранее, а некоторую подалгебру Ли в $\mathrm{Der}\,(A)$. Аналогично, возьмём в качестве $\mathcal{Z}$ некоторую подалгебру в центре $\mathcal{Z}(A)$ алгебры A. Потребуем, чтобы пара $(D, \mathcal{Z})$ была совместимой, т.е. D являлось $\mathcal{Z}$-модулем, а $\mathcal{Z}$ было замкнуто в $\mathcal{Z}(A)$ относительно действия D. Тогда все конструкции и теоремы этого параграфа переносятся на этот случай безо всяких изменений.

1.4 Циклические гомологии и теорема Каруби

Середина 80-х годов, когда появились конструкции характеристических классов проективных модулей, стала временем рождения и развития теории циклических (ко)гомологий, которое традиционно связывают с именами А. Конна, Б. Цыгана, Лодэ, Квиллена. Каруби был первым, кто заметил связь между своей конструкцией характеристических классов и циклическими гомологиями. Важным проявлением этой связи является оператор периодичности S, действующий на когомологиях $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ абелинизации универсального дифференциального исчисления, который переводит каждый характеристический класс в класс меньшим номером. Это обстоятельство существенно облегчает работу с универсальными характеристическими классами.

Целью настоящего пункта является доказательство теоремы Конна о точности последовательности, носящей его имя, и теоремы Каруби.

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей и $\Omega^*_{univ}(A)$ — её универсальное дифференциальное исчисление. Введём в рассмотрение операторы Хохшильда и Каруби.

Определение 1.12. *Оператор Хохшильда* на пространстве $\Omega^*_{univ}(A)$ определяется как семейство отображений $b_{n+1} : \Omega^{n+1}_{univ}(A) \to \Omega^n_{univ}(A)$,

$$b_{n+1}(\omega da) = (-1)^n(\omega a - a\omega) = (-1)^\omega[\omega, a], \quad \omega \in \Omega^n_{univ}(A),\ a \in A. \tag{1.16}$$

Циклическим оператором Каруби называется каждое из отображений $\sigma_n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^n_{univ}(A)$,

$$\sigma_n(\omega da) = (-1)^\omega da \cdot \omega, \quad \omega \in \Omega^{n-1}_{univ}(A),\ a \in A. \tag{1.17}$$

Рассмотрим простейшие коммутационные свойства операторов Хохшильда и Каруби.

Предложение 1.21. *Для каждого n выполнено*

1. $b_n b_{n+1} = 0$, *т.е. оператор Хохшильда b является дифференциалом;*
2. $1 - \sigma_n = b_{n+1}d + db_n$, *и таким образом,* $[\sigma, d] = [\sigma, b] = 0$;
3. $1 - \sigma_n^n = -b_{n+1}\sigma_{n+1}^n d$.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega^{n-1}_{univ}(A),\ a, b \in A$. Тогда

$$\begin{aligned} b_n b_{n+1}(\omega da db) = b_n\left((-1)^n(\omega da \cdot b - b\omega da)\right) = \\ b_n\left((-1)^n(\omega d(ab) - \omega a db - b\omega da)\right) = \\ (-1)^{n+n-1}\left(\omega ab - ab\omega - \omega ab + b\omega a - b\omega a + ab\omega\right) = 0, \end{aligned}$$

что доказывает первую часть предложения.

Пусть $\omega = a_0 da_1 \dots da_n \in \Omega^n_{univ}(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} b_{n+1}d(\omega) = b_{n+1}(da_0 \dots da_{n-1}da_n) = \\ (-1)^n da_0 \dots da_{n-1}a_n + (-1)^{n+1}a_n da_0 \dots da_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} db_n(\omega) = (-1)^{n-1}d(a_0 da_1 \dots da_{n-1}a_n - a_n a_0 da_1 \dots da_{n-1}) = \\ (-1)^{n-1}da_0 \dots da_{n-1}a_n + a_0 da_1 \dots da_{n-1}da_n + (-1)^n d(a_n a_0) \dots da_{n-1} = \\ \omega + (-1)^{n-1}da_0 \dots da_{n-1}a_n + (-1)^n da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1} + \\ (-1)^n da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$(b_{n+1}d + db_n)\omega = \omega + (-1)^n da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1} = (1 - \sigma_n)\omega.$$

Рассматривая действие оператора σ_n^n на элементе $\omega = a_0da_1\dots da_n$, получим равенство

$$\sigma_n^n\omega = (-1)^{n(n-1)}da_1\dots da_n\,a_0 = da_1\dots da_n\,a_0.$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}(b_{n+1}\sigma_{n+1}^n d)\omega = b_{n+1}\sigma_{n+1}^n(da_0\dots da_n) = \\ (-1)^{n\cdot n}b_{n+1}(da_1\dots da_n da_0) = (-1)^{n+n}(da_1\dots da_n a_0 - a_0da_1\dots da_n) = \\ -\omega + \sigma_n^n\omega,\end{gathered}$$

что даёт последнее равенство предложения. □

Определение 1.13. Гомологии $HH_*(A)$ комплекса $(\Omega^*_{univ}(A), b)$ называются *хохшильдовыми гомологиями* алгебры A.

Из предложения 1.21 вытекает, что подпространство $\mathrm{Im}\,(1-\sigma)+\mathrm{Im}\,d \subset \Omega^*_{univ}(A)$ является подкомплексом в $(\Omega^*_{univ}(A), b)$. Действительно, для любой формы $\omega \in \Omega^*_{univ}(A)$ имеем

$$b((1-\sigma)\omega) = (1-\sigma)(b\omega), \quad b(d\omega) = d(-b\omega) + (1-\sigma)\omega.$$

Тогда мы можем дать следующее определение.

Определение 1.14. *Приведёнными циклическими гомологиями* алгебры A называются гомологии $\overline{HC}_*(A)$ факторкомплекса

$$\bar{C}^\lambda_* = \Omega^*_{univ}(A)/(\mathrm{Im}\,(1-\sigma) + \mathrm{Im}\,d) \quad \text{с дифференциалом } b.$$

Замечание 1.7. Согласно определению универсального дифференциального исчисления, данному в примере 1.1, факторпространство $\Omega^n_{univ}(A)/\mathrm{Im}\,d$ можно отождествить с $\bar{A}^{\otimes(n+1)}$. Рассмотрим на этом пространстве оператор циклической перестановки $t_n : \bar{A}^{\otimes(n+1)} \to \bar{A}^{\otimes(n+1)}$:

$$t_n(\bar{a}_0 \otimes \dots \otimes \bar{a}_{n-1} \otimes \bar{a}_n) = (-1)^n \bar{a}_n \otimes \bar{a}_0 \otimes \dots \otimes \bar{a}_{n-1},$$

или, в обозначениях примера 1.1,

$$t_n\,(a_0da_1\dots da_n + \mathrm{Im}\,d) = a_nda_0\dots da_{n-1} + \mathrm{Im}\,d.$$

С другой стороны, по определению σ_n имеем

$$\begin{gathered}\sigma_n(a_0da_1\dots da_n) = (-1)^{n-1}da_n\cdot a_0da_1\dots da_{n-1} = \\ (-1)^n a_nda_0\dots da_{n-1} + (-1)^{n-1}d\,(a_na_0da_1\dots da_{n-1})\,.\end{gathered}$$

Так как $[\sigma, d] = 0$, то σ_n определяет оператор на пространстве $\Omega^n_{univ}(A)/\operatorname{Im} d$, совпадающий в силу предыдущего равенства с t_n. Следовательно, приведённый циклический комплекс $\bar{C}^\lambda_*$ изоморфен комплексу $(\bar{A}^{\otimes(n+1)}/\operatorname{Im}(1-t_n))_n$ с дифференциалом Хохщильда

$$b(\bar{a}_0 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \bar{a}_0 \otimes \cdots \otimes \overline{a_i a}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n + \\ (-1)^n \overline{a_n a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}.$$

Такое определение циклических гомологий совпадает с первоначальным определением Конна.

Введём еще два оператора:

$$N_n = 1 + \sigma_n + \cdots + \sigma_n^n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^n_{univ}(A), \tag{1.18}$$

$$B_n = dN_n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^{n+1}_{univ}(A). \tag{1.19}$$

Из коммутационных соотношений, указанных в предложении 1.21, непосредственно вытекает

Предложение 1.22. *Имеются тождества*

1. $bB + Bb = 0$;

2. $Bd = dB = (1-\sigma)B = B(1-\sigma) = 0$;

3. $B^2 = 0$. □

Пусть $\varepsilon : A \to \Bbbk$ — произвольное линейное отображение, т.ч. $\varepsilon(1) = 1$. Определим оператор стягивающей гомотопии $\mu_n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^{n-1}_{univ}(A)$ для дифференциала d:

$$\mu_n(a_0 da_1 \dots da_n) = \varepsilon(a_0)(a_1 - \varepsilon(a_1)1) da_2 \dots da_n. \tag{1.20}$$

Предложение 1.23. *Пусть* $\omega \in \Omega^n_{univ}(A)$. *Тогда*

1. $(\mu_{n+1} d + d\mu_n)\omega = \omega$;

2. $\mu_{n+1} B\omega - (n+1)\omega = d(-\mu_n N_n \omega) + (1-\sigma)(\beta_n \omega)$, *где*

$$\beta_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\sigma_n^i : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^n_{univ}(A).$$

Доказательство. Пусть $\omega = a_0 da_1 \dots da_n$. Тогда

$$d\mu_n(\omega) = d(\varepsilon(a_0)(a_1 - \varepsilon(a_1)1)da_2 \dots da_n) = \varepsilon(a_0)da_1 \dots da_n,$$
$$\mu_{n+1}d(\omega) = \mu_{n+1}(da_0 \dots da_n) = \varepsilon(1)\cdot(a_0 - \varepsilon(a_0)1)da_1 \dots da_n = \omega - \varepsilon(a_0)da_1 \dots da_n,$$

так что

$$(\mu_{n+1}d + d\mu_n)\omega = \omega.$$

Взяв композицию доказанного тождества с N_n и воспользовавшись соотношением

$$N_n = \sum_{i=0}^{n} \sigma_n^i = (n+1)\mathrm{id} - \sum_{i=1}^{n}(1-\sigma_n^i) = (n+1)\mathrm{id} - (1-\sigma_n)\beta_n,$$

мы получим второе утверждение предложения. □

Следствие 1.24. $\ker B = \mathrm{Im}\, d + \mathrm{Im}\,(1-\sigma)$.

Доказательство. Включение $\ker B \supset \mathrm{Im}\, d + \mathrm{Im}\,(1-\sigma)$ следует из предложения 1.22. Обратное включение есть следствие второго равенства предложения 1.23. □

Теперь мы можем определить оператор периодичности S как композицию

$$S_n = \mu_{n-1}N_{n-1}b : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^{n-2}_{univ}(A). \tag{1.21}$$

Сформулируем одну из двух основных теорем этого пункта.

Теорема 1.25 (Конн)**.** *Пусть A есть произвольная ассоциативная алгебра с единицей. Тогда*

1. *отображение $B_n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^{n+1}_{univ}(A)$ задаёт корректное отображение $B : \overline{HC}_n(A) \to HH_{n+1}(A)$;*

2. *отображение $S_n : \Omega^n_{univ}(A) \to \Omega^{n-2}_{univ}(A)$ определяет отображение $S : \overline{HC}_n(A) \to \overline{HC}_{n-2}(A)$;*

3. *операторы B, S и естественная проекция $I : HH_n(A) \to \overline{HC}_n(A)$ образуют точную последовательность (последовательность Конна)*

$$\overline{HC}_{n+2}(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_n(A) \xrightarrow{B} HH_{n+1}(A) \xrightarrow{I} \overline{HC}_{n+1}(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{n-1}(A)$$

Доказательство. 1. Из следствия 1.24 вытекает, что B определяет инъективное отображение из $\bar{C}_*^\lambda$ в $\Omega_{univ}^{*+1}(A)$. Так как $Bb = b(-B)$, то B — цепное и индуцирует отображение в гомологиях.

2. Покажем в первую очередь, что

$$S(\operatorname{Im}(1-\sigma) + \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} d) \subset \operatorname{Im}(1-\sigma) + \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} d.$$

Если $\xi = b\eta$, то $S\xi = \mu N bb\eta = 0$. Предположим теперь, что $\xi = d\eta,\ \eta \in \Omega_{univ}^{n-1}(A)$. Тогда

$$N_{n-1} b\xi = N_{n-1} bd\eta = bdN_{n-1}\eta = bB\eta = -Bb\eta.$$

Из предложения 1.23 следует, что при $\xi = d\eta$

$$S\xi = -\mu_{n-1} Bb\eta = -(n-1)b\eta + d\eta_1 + (1-\sigma)\eta_2 \in \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} d + \operatorname{Im}(1-\sigma),$$

где $\eta_1 = \mu_{n-2} N_{n-2} b\eta,\ \eta_2 = -\beta_{n-2} b\eta$.

Если же, наконец, $\xi = (1-\sigma)\eta$, то $\xi = bd\eta + db\eta$, и можно воспользоваться предыдущими рассуждениями. Следовательно, S определяет отображение из $\bar{C}_*^\lambda / \operatorname{Im} b$ в $\bar{C}_{*-2}^\lambda / \operatorname{Im} b$.

Покажем, что S переводит циклы в циклы. Пусть $\xi \in \Omega_{univ}^n(A)$ является циклическим циклом, т.е. $b\xi = d\eta_1 + (1-\sigma)\eta_2$ для некоторых $\eta_1,\ \eta_2$. Проверим, что $S\xi$ также есть цикл. Для этого достаточно показать, что $B(bS\xi) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} BS\xi = (N_{n-2} d)(\mu_{n-1} N_{n-1} b)\xi = N_{n-2}(d\mu_{n-1}) N_{n-1} b\xi = \\ N_{n-2}(\mathrm{id} - \mu_n d) N_{n-1} b\xi = N_{n-2} N_{n-1} b\xi + N_{n-2}\mu_n Bb\xi = \\ N_{n-2} N_{n-1} b\xi + 0 = b(N_{n-2} N_{n-1}\xi) = (n-1) bN_{n-1}\xi, \end{aligned} \tag{1.22}$$

так как $Bb\xi = B(d\eta_1 + (1-\sigma)\eta_2) = 0$, согласно предложению 1.22, и $b\sigma N_{n-1} = bN_{n-1}$ в силу тождества

$$b(1-\sigma_n) N_{n-1} = b(1-\sigma_n) \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n^i = b(1-\sigma_n^n) = -bb\sigma_{n+1}^n d = 0.$$

Следовательно,

$$B(bS\xi) = -b(BS\xi) = -(n-1) bbN_{n-1}\xi = 0,$$

т.е. $S\xi$ — цикл.

Таким образом, оператор S определяет отображение приведённых циклических гомологий.

3а. $\operatorname{Im} S = \ker B$. Включение $\operatorname{Im} S \subset \ker B$ следует из формулы (1.22). Обратно, пусть класс гомологий элемента $\xi \in \bar{C}_n^\lambda$ переходит в нуль при отображении B, т.е. $B\xi = b\eta$ для некоторого $\eta \in \Omega_{univ}^{n+2}(A)$. Так как $(1-\sigma)B = 0$, то

$$N_{n+1}b\eta = N_{n+1}B\xi = ((n+2)\mathrm{id} - \beta_{n+1}(1-\sigma_{n+1}))\, B\xi = (n+2)B\xi,$$

откуда

$$S\eta = (n+2)\mu_{n+1}B\xi = (n+2)(n+1)\xi + d\omega_1 + (1-\sigma)\omega_2,$$

где $\omega_1 = -(n+2)\mu_n N_n\xi,\ \omega_2 = (n+2)\beta_n\xi$. Следовательно,

$$[\xi] = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[S\eta] \in \overline{HC}_n(A).$$

3б. $\operatorname{Im} B = \ker I$. Так как $B = dN$, то $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} d \subset \ker I$ по определению комплекса $\bar{C}_*^\lambda$. Пусть $\xi \in \Omega_{univ}^n(A),\ b\xi = 0$ такое, что $I[\xi] = 0$. Значит,

$$\xi = d\eta_1 + (1-\sigma)\eta_2 + b\eta_3 = d(\eta_1 + b\eta_2) + b(d\eta_2 + \eta_3).$$

Так как класс гомологий определён с точностью до границы, то можно считать, что ξ имеет вид $\xi = d\eta$. Тогда $d\xi = 0$ и, таким образом, $(1-\sigma)\xi = (bd+db)\xi = 0$, т.е. $\sigma\xi = \xi$. Следовательно,

$$(n+1)\xi = \sum_{i=0}^{n} \sigma^i\xi = N_n\xi = N_n d\eta = B\eta.$$

Тогда $\xi = B(\frac{1}{n+1}\eta) \in \operatorname{Im} B$, и мы получаем обратное включение $\ker I \subset \operatorname{Im} B$.

3в. $\operatorname{Im} I = \ker S$. Пусть $\xi \in \Omega_{univ}^*(A)$ — хохшильдов цикл, т.е. $b\xi = 0$. Тогда $SI[\xi] = [S\xi] = [\mu N b\xi] = 0$. Поэтому $\operatorname{Im} I \subset \ker S$.

Пусть теперь дан циклический коцикл $\xi \in \Omega_{univ}^n(A)$, $b\xi \in \operatorname{Im} d + \operatorname{Im}(1-\sigma)$, такой что $S[\xi] = 0$. Тогда $S\xi = b\eta_1 + d\eta_2$, откуда $BS\xi = Bb\eta_1$. Тогда из равенства (1.22) имеем

$$(n-1)N_{n-1}b\xi = BS\xi = Bb\eta_1 = bdN_{n-2}\eta_1.$$

Следовательно,

$$n(n-1)b\xi = (n-1)(N_{n-1}b\xi + (1-\sigma_{n-1})\beta_{n-1}b\xi) = \\ b\left(dN_{n-2}\eta_1 + (n-1)(1-\sigma)\beta_{n-1}\xi\right),$$

так что элемент $\xi' = \xi - \frac{1}{n}dN_{n-2}\eta_1 - \frac{1}{n(n-1)}(1-\sigma)\beta_{n-1}\xi \in \Omega^n_{univ}(A)$ является хохшильдовым циклом ($b\xi' = 0$). Тогда $[\xi] = I[\xi']$. Таким образом, $\ker S \subset \mathrm{Im}\, I$. □

Основная теорема данного пункта, теорема Каруби (см. [22]), даёт описание пространства когомологий $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$, в котором находятся универсальные характеристические классы, основанное на точной последовательности Конна. Точная формулировка этого результата такова.

Теорема 1.26 (Каруби)**.** *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Тогда имеется естественный изоморфизм*

$$H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \simeq \ker B = \mathrm{Im}\, S \subset \overline{HC}_*(A).$$

Доказательство. Согласно определению операторов Хохшильда и Каруби, пространство коммутаторов $[\Omega^*_{univ}(A), \Omega^*_{univ}(A)]$ и пространство $\mathrm{Im}\,(1-\sigma) + \mathrm{Im}\, b$ совпадают. Следовательно, пространства $\bar{C}^\lambda_*/\mathrm{Im}\, b$ и $\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)/\mathrm{Im}\, d$ оба равны $\Omega^*_{univ}(A)/(\mathrm{Im}\, b + \mathrm{Im}\, d)$.

Пусть $\omega \in \Omega^n_{univ}(A)$ есть коцикл комплекса $\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)$, т.е.

$$d\omega = b\eta_1 + (1-\sigma)\eta_2.$$

Покажем, что $B\omega \in \mathrm{Im}\, b$, тогда в силу инъективности B, отображающего циклические цепи в хохшильдовы, ω будет являться представителем класса циклических гомологий и $B[\omega] = 0$. Действительно,

$$B\omega = N_n d\omega = N_n(b\eta_1 + (1-\sigma_{n+1})\eta_2) = bN_n\eta_1 + (1-\sigma^{n+1}_{n+1})\eta_2 = \\ b\eta_1 - b\sigma^{n+1}_{n+2}d\eta_2 = b(\eta_1 - \sigma^{n+1}_{n+2}d\eta_2).$$

Обратно, пусть дан элемент $\omega \in \Omega^n_{univ}(A)$, такой что $B\omega = b\eta$. Тогда

$$(n+1)d\omega = (N_n + (1-\sigma)\beta_n)d\omega = B\omega + (1-\sigma)\beta_n\omega = b\eta + (1-\sigma)\beta_n\omega,$$

следовательно, $d\omega \in \mathrm{Im}\, b + \mathrm{Im}\,(1-\sigma)$, т.е. ω — коцикл.

Таким образом, подпространства $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ и $\ker B$ в $\Omega^*_{univ}(A)/(\mathrm{Im}\, b + \mathrm{Im}\, d)$ совпадают. □

Следствие 1.27. *На пространстве* $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ *определён оператор периодичности Конна* $S: H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \to H^{*-2}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$. □

Из всех свойств отображения S в теории характеристических классов наиболее полезным оказывается следующее.

Предложение 1.28. *Пусть* E *есть конечнопорождённый проективный правый* A*-модуль,* $c_n(E)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *— его универсальные характеристические классы и* S *есть оператор периодичности. Тогда* $Sc_n(E) = n\, c_{n-1}(E)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть модуль E задается проектором P, так что $c_n(E)$ есть когомологический класс элемента $\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n})$. Тогда

$$b\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n}) = -\mathrm{Tr}\,([P(dP)^{2n-1}, P]) = -\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}P) +$$
$$\mathrm{Tr}\,(P^2(dP)^{2n-1}) = \mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}),$$
$$\sigma\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}) = \mathrm{Tr}\,(dP \cdot P(dP)^{2n-2}) = \mathrm{Tr}\,((dP)^{2n-1}) - \mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}),$$
$$\sigma\mathrm{Tr}\,((dP)^{2n-1}) = \mathrm{Tr}\,(dP)^{2n-1},$$

откуда

$$N_{2n-1}\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}) = \sum_{i=0}^{2n-1} \sigma^i \mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-1}) = n\mathrm{Tr}\,(dP)^{2n-1}.$$

Наконец,

$$\mu\mathrm{Tr}\,(n(dP)^{2n-1}) = n\mathrm{Tr}\,(P(dP)^{2n-2}) - d\mathrm{Tr}\,\left(n\varepsilon(P)P(dP)^{2n-3}\right),$$

так что $Sc_n(E) = nc_{n-1}(E)$. □

Следствие 1.29. *Пусть* E *есть конечнопорождённый проективный правый* A*-модуль и пусть* $c_{n_0}(E) \neq 0$ *для некоторого* $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда* $c_n(E) \neq 0$ *для всех* $n > n_0$. □

Последнее утверждение в дальнейшем будет применяться очень часто.

1.5 Характеристические классы с точки зрения функтора

В этом пункте мы обращаем внимание на категорное описание характеристических классов как серии естественных преобразований между

K-функтором и функтором циклических гомологий и показываем, что других характеристических классов в этом смысле не имеется.

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$. Пусть $\mathcal{P}(A)$ обозначает множество классов эквивалентности конечнопорождённых проективных A-модулей. Операция суммы $E, F \to E \oplus F$ задаёт на $\mathcal{P}(A)$ структуру моноида (коммутативной полугруппы с единицей). Напомним, что группа $K(A)$ алгебры A определяется как множество пар (E, F), $E, F \in \mathcal{P}(A)$, факторизованное по отношению эквивалентности

$$(E, F) \sim (E', F') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, G \in \mathcal{P}(A) : \; E \oplus F' \oplus G \simeq E' \oplus F \oplus G.$$

Множество $K(A)$ с операцией сложения

$$(E, F) + (E', F') = (E \oplus E', F \oplus F'), \quad E, E', F, F' \in \mathcal{P}(A)$$

становится коммутативной группой. Группа $K(A)$ является симметризацией полугруппы $\mathcal{P}(A)$, т.е. любой гомоморфизм $f : \mathcal{P}(A) \to G$ в абелеву группу G однозначно представляется в виде композиции $f = f' \circ s$, где $f' : K(A) \to G$ — гомоморфизм групп, а $s : \mathcal{P}(A) \to K(A)$ — каноническое отображение. Приведённой K-группой алгебры A называется группа

$$\widetilde{K}(A) = \operatorname{Coker}(K(\eta) : K(\Bbbk) \to K(A)),$$

где $K(\eta)$ индуцировано вложением единицы $\eta : \Bbbk \to A, \ \lambda \to \lambda 1$.

Из универсального свойства группы $K(A)$ и предложения 1.9 следует, что характеристические классы $c_n(\,\cdot, \Omega^*)$, введённые в параграфе 1.2, однозначно определяют гомоморфизмы $c_n(\,\cdot, \Omega) : \widetilde{K}(A) \to H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$, для которых мы используем то же обозначение.

Следующее предложение описывает некоторые свойства группы $K(A)$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Его доказательство можно найти в книге [8].

Предложение 1.30. *Пусть A_1, A_2 — ассоциативные алгебры с единицей. Тогда*

1. $K(A_1 \oplus A_2) = K(A_1) \oplus K(A_2)$;

2. $K(M_n(A_1)) = K(A_1)$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$;

3. $K(\Bbbk) = \mathbb{Z}$. $\square$

Дадим определение (неприведённых) циклических гомологий алгебры A. Рассмотрим циклический оператор t_n, действующий на пространстве $A^{\otimes(n+1)}$,

$$t_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n) = (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \qquad a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes(n+1)},$$

и обозначим $C_n^\lambda = A^{\otimes(n+1)}/\mathrm{Im}\,(1-t_n)$. Оказывается, что хохшильдов дифференциал $b : A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$,

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1},$$

допускает корректное действие на C_*^λ (см. [24]). Поэтому можно дать следующее определение (ср. замечание 1.7).

Определение 1.15. Гомологии $HC_*(A)$ комплекса (C_*^λ, b) называются *циклическими гомологиями* алгебры A.

Связь между приведёнными и неприведёнными циклическими гомологиями описывается следующим утверждением (см. [24]).

Предложение 1.31. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей и $\eta : \Bbbk \to A$ — вложение единицы алгебры. Тогда*

$$\overline{HC}_*(A) = \mathrm{Coker}\,(\eta_* : HC_*(\Bbbk) \to HC_*(A)).$$

С другой стороны, $HC_*(A) = \overline{HC}_*(A \oplus \Bbbk)$. □

Циклические гомологии обладают рядом свойств, сближающих их с K-группой алгебры.

Предложение 1.32 (см. [24])**.** *Пусть $A_1,\ A_2$ — ассоциативные алгебры с единицей. Тогда*

1. *$HC_*(A_1 \oplus A_2) = HC_*(A_1) \oplus HC_*(A_2)$;*
2. *для каждого $r \in \mathbb{N}$ отображение $\mathrm{Tr} : M_r(A_1)^{\otimes n} \to A_1^{\otimes n}$, определённое формулой*

$$\mathrm{Tr}\,((m_0 \otimes a_0) \otimes \cdots \otimes (m_n \otimes a_n)) = \mathrm{Tr}\,(m_0 m_1 \ldots m_n) a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots a_n$$

для всех $m_0 \otimes a_0, \ldots, m_n \otimes a_n \in M_r(\Bbbk) \otimes A_1 = M_r(A_1)$, индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{T}r_* : HC_*(M_r(A_1)) \simeq HC_*(A_1);$$

3. $HC_n(\Bbbk) = \begin{cases} \Bbbk, & n = 2k \quad \textit{чётно}; \\ 0, & n = 2k+1 \quad \textit{нечётно}. \end{cases}$ □

Заметим (см. [24],[8]), что соответствия $A \mapsto K(A)$ и $A \mapsto HC_n(A)$ представляют собой (ковариантные) функторы из категории ассоциативных унитальных алгебр в категорию абелевых групп (последний, на самом деле,— в категорию $\Bbbk$-линейных пространств). Тогда мы можем дать такое определение характеристического класса.

Определение 1.16. *Характеристическим классом степени n* называется естественное преобразование $c : \mathbf{K} \to \mathbf{HC_n}$ функторов из категории $\mathbf{A}lg_{\Bbbk}$ алгебр над полем $\Bbbk$ в категорию абелевых групп.

Оправданием определения, которое было дано только что, служит следующий пример.

Пример 1.8 (характер Конна-Черна). Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Рассмотрим произвольный конечнопорождённый проективный модуль E на ней. Пусть этот модуль определяется проектором $P = (p_{ij}) \in M_r(A)$. Возьмём элемент $\phi_n(P) \in A^{\otimes(2n+1)}$,

$$\phi_n(P) = \mathrm{Tr}\,(P^{\oplus(2n+1)}) = \sum_{i_0,\ldots,i_n=1}^{r} p_{i_0 i_1} \otimes p_{i_1 i_2} \otimes \cdots \otimes p_{i_{n-1} i_n} \otimes p_{i_n i_0}.$$

Справедливо утверждение, аналогичное теоремам 1.8, 1.14.

Теорема 1.33. *Пусть E — конечнопорождённый проективный A-модуль и пусть $E \simeq \mathrm{Im}\, P \subset A^{\oplus r}$ для некоторого проектора $P \in M_r(A)$. Тогда*

1. *элемент $\phi_n(P)$ является циклическим $2n$-циклом;*
2. *класс когомологий $[\phi_n(P)] \in HC_{2n}(A)$ не зависит от выбора проектора P.* □

Элемент $ch_n(E) = [\phi_n(P)] \in HC_{2n}(A)$ называется *n-ым характеристическим классом Конна-Черна.* Отображение ch_n оказывается аддитивным (см. [24]), т.е. $ch_n(E \oplus F) = ch_n(E) + ch_n(F)$ для любых конечных проективных модулей E, F, и таким образом, индуцирует гомоморфизм

$$ch_n : K(A) \to HC_{2n}(A),$$

который называется *характером Конна-Черна.* Естественность отображения ch_n следует из определения, так что характер Конна-Черна даёт серию характеристических классов чётных порядков.

Замечание 1.8. Из естественности характера Конна-Черна, определения приведённой K-группы и предложения 1.31 следует, что имеется отображение $\overline{ch}_n : \widetilde{K}(A) \to \overline{HC}_{2n}(A)$, дополняющее до коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \xrightarrow{ch_n} & HC_{2n}(A) \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow \pi_{HC} \\ \widetilde{K}(A) & \xrightarrow{\overline{ch}_n} & \overline{HC}_{2n}(A) \end{array},$$

где π_K, π_{HC} — естественные проекции. Отображение $\overline{ch}_n$ называется *приведённым характером Конна-Черна.* Из его определения следует, что кограничение приведённого характера Конна-Черна на подпространство $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ совпадает с n-ым универсальным характеристическим классом Каруби. В дальнейшем мы не будем делать различия между этими двумя понятиями.

При доказательстве теоремы 1.35 мы будем использовать Морита-инвариантность характера Конна-Черна, которая выражается следующим утверждением.

Предложение 1.34. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Тогда*

1. *для любого натурального r коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K(M_r(A)) & \simeq & K(A) \\ ch_* \downarrow & & \downarrow ch_* \\ HC_*(M_r(A)) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_*} & HC_*(A) \end{array},$$

где горизонтальные стрелки существуют благодаря предложениям 1.30, 1.32;

2. *отображение $ch_n : K(\Bbbk) \to HC_{2n}(\Bbbk)$ есть мономорфизм при каждом $n \in \mathbb{N}$.* □

Сформулируем один из двух главных результатов этого параграфа.

Теорема 1.35. *Пусть c есть характеристический класс порядка n. Тогда $c = 0$, если n нечётно, и $c = \lambda\, ch_k$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, если $n = 2k$ чётно.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $U = \Bbbk^2$, являющуюся суммой двух экземпляров одномерной алгебры $\Bbbk$, и пусть e_1, e_2 — стандартный базис алгебры U. Из предложений 1.30 и 1.32 следует, что

$$K(U) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad HC_n(U) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1; \\ \Bbbk \oplus \Bbbk, & n = 2k. \end{cases}$$

Кроме того, согласно второму пункту предложения 1.34 и первому утверждению предложений 1.30, 1.32, ch_k отображает $K(U)$ на решётку полного ранга в $HC_{2k}(U)$.

Пусть c есть некоторый характеристический класс порядка n. Тогда найдутся $\lambda, \mu \in \Bbbk$, такие что $c(e_1) = \lambda\, ch_k(e_1) + \mu\, ch_k(e_2)$. Здесь $n = 2k$ и мы полагаем $ch_k = 0$ для полуцелого k.

Пусть теперь A есть некоторая алгебра над полем $\Bbbk$ и $p \in A$, $p^2 = p$ есть проектор. Он определяет проективный подмодуль $E = \operatorname{Im} p$ в свободном регулярном модуле A. Отображение

$$\phi : U \to A,\ \phi(e_1) = p,\ \phi(e_2) = 1 - p$$

задает гомоморфизм алгебры U в A. В силу естественности

$$\begin{aligned} c(E) = \phi_* c(e_1) = \phi_*(\lambda\, ch_k(e_1) + \mu\, ch_k(e_2)) = \\ \lambda\phi_*(ch_k(e_1)) + \mu\phi_*(ch_k(e_2)) = \lambda\, ch_k(p) + \mu\, ch_k(1-p) = \\ (\lambda - \mu) ch_k(E) + \mu\, ch_k(A). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Покажем, что коэффициент μ равен нулю (когда n чётно). Пусть $B = M_2(\Bbbk)$ и $B = E_1 \oplus E_2$ — разложение на неприводимые модули. Тогда по свойству аддитивности $c(B) = c(E_1) + c(E_2)$, откуда

$$\begin{aligned} \lambda ch_k(B) = (\lambda - \mu) ch_k(B) + \mu ch_k(B) = c(B) = c(E_1) + c(E_2) = \\ (\lambda - \mu) ch_k(E_1) + \mu ch_k(B) + (\lambda - \mu) ch_k(E_2) + \mu ch_k(B) = \\ (\lambda + \mu) ch_k(B), \end{aligned}$$

так что $\mu = 0$, поскольку $ch_k(B) \neq 0$ по предложению 1.34.

Таким образом, уравнение (1.23) переписывается в виде

$$c(p) = \lambda ch_k(p) \tag{1.24}$$

для произвольной алгебры A и её проектора p.

Пускай теперь проективный модуль E задаётся проектором $p \in M_r(A),\ r > 1$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : A \to M_r(A)$,

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}, \quad a \in A.$$

Гомоморфизм ψ индуцирует отображение $\psi_\otimes : A^{\otimes(n+1)} \to M_r(A)^{\otimes(n+1)}$, композиция которого с отображением Tr из предложения 1.32 равна

$$\mathrm{Tr} \circ \psi_\otimes(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \mathrm{Tr}\,((1_r \otimes a_0) \otimes \dots \otimes (1_r \otimes a_n)) = \\ \mathrm{Tr}\,(1_r) a_0 \otimes \dots \otimes a_n = r \cdot a_0 \otimes \dots \otimes a_n$$

для любого $a_0 \otimes \dots \otimes a_n \in A^{\otimes(n+1)}$, так что $\mathrm{Tr} \circ \phi_\otimes = r\,\mathrm{id}$. Следовательно, $\mathrm{Tr}_* \circ \psi_* = r\,\mathrm{id} : HC_*(A) \to HC_*(A)$. Кроме того, $\psi_*(E) = rF$, где $F = \mathrm{Im}\, p \subset M_r(A)$. Поэтому, в соответствии с (1.24),

$$r\, c(E) = \mathrm{Tr}_* \psi_* c(E) = r \mathrm{Tr}_*(c(F)) = r\lambda \mathrm{Tr}_*(ch_k(p)) = r\lambda\, ch_k(E),$$

где последнее равенство вытекает из предложения 1.34. Следовательно, $c(E) = \lambda ch_k(E)$ для любого $E \in K(A)$ и для любой алгебры A. ☐

Рассмотрим приведённую версию доказанного утверждения.

Определение 1.17. Назовём *характеристическим классом степени n с коэффициентами в дифференциальных исчислениях алгебры* естественное преобразование $c : \widetilde{\mathbf{K}} \to \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbf{n}}$, где приведённый K-функтор $\widetilde{\mathbf{K}} : A \to \widetilde{K}(A)$ и функтор $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbf{n}} : \Omega^* \to H^n(\Omega^*/[\Omega^*, \Omega^*])$ рассматриваются как функторы из категории с объектами (A, Ω^*), A — унитальная ассоциативная алгебра над полем $\Bbbk$, Ω^* — дифференциальное исчисление на A, и естественными морфизмами.

Замечание 1.9. Предложения 1.9 и 1.10 показывают, что классы Каруби являются характеристическими классами в только что определённом смысле.

Сформулируем вспомогательное предложение, аналогичное предложению 1.34.

Предложение 1.36. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Тогда для любого натурального r коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{K}(M_r(A)) & \simeq & \widetilde{K}(A) \\ \overline{ch}_* \downarrow & & \downarrow \overline{ch}_* \\ \overline{HC}_*(M_r(A)) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_*} & \overline{HC}_*(A) \end{array}$$

□

Теорема 1.37. *Любой n-мерный характеристический класс $\bar{c}$ с коэффициентами в дифференциальных исчислениях алгебры имеет вид $\bar{c} = \lambda\, c_{n/2}(\,\cdot, \cdot)$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, где $c_{n/2}(\,\cdot, \cdot)$ — характеристический класс Каруби, определённый в параграфе 1.2.*

Доказательство. Характеристический класс с коэффициентами в дифференциальных исчислениях $\bar{c}$ определяется значениями на универсальных дифференциальных исчислениях. Теорема Каруби 1.26 утверждает, что

$$H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) = \ker(B : \overline{HC}_*(A) \to HH_{*+1}(A)).$$

Так как последовательность Конна естественна, то и вложение $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \subset \overline{HC}_*(A)$ является естественным. Поэтому $\bar{c}$ задаёт естественное преобразование $\bar{c} : \widetilde{K}(A) \to \overline{HC}_n(A)$. Остаётся лишь повторить рассуждения теоремы 1.35, заменяя предложение 1.34 на 1.36 и учитывая тот факт, что для $U = \Bbbk \oplus \Bbbk$

$$\widetilde{K}(U) = \mathbb{Z}, \quad \overline{HC}_n(U) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1; \\ \Bbbk, & n = 2k, \end{cases}$$

и $\overline{ch}_n : \widetilde{K}(U) \to \overline{HC}_{2n}(U)$ — мономорфизм, согласно предложению 1.31 и рассуждениям предыдущей теоремы. □

Глава 2

Конечномерные полупростые алгебры

В этой главе, равно как и в следующих за ней главах 3, 4 теория характеристических классов, описанная выше, рассматривается применительно к конкретным классам алгебр. Ниже изучаются характеристические классы конечномерных полупростых алгебр. В этом случае удаётся получить полную классификацию характеристических классов проективных модулей (теорема 2.1 и предложение 2.5). Во втором параграфе аналогичные результаты получены для полупростых алгебр над полем ненулевой характеристики (теорема 2.6, предложения 2.8, 2.9).

2.1 Случай $\operatorname{char} \Bbbk = 0$

С этого момента мы будем считать, что A является конечномерной полупростой алгеброй над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики, тогда по структурной теореме Веддебарна-Артина она представляется в виде прямой суммы матричных алгебр: $A = \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(F_i)$, где F_i — алгебра с делением над $\Bbbk$. Нас будет интересовать вопрос о существовании нетривиальных характеристических классов её конечнопорождённых проективных модулей. В силу полупростоты алгебры A любой её конечнопорождённый модуль E проективен и имеет вид $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$, где для каждого i μ_i — целое неотрицательное число, а $E_i = F_i^{n_i}$ — неприводимый модуль, соответствующий i-той матричной компоненте. Ответ на поставленный вопрос даёт следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(F_i)$ *— полупростая алгебра,* $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ *— конечномерный* A*-модуль. Тогда, если модуль* E *пропорционален свободному* ($E = \lambda A$), *т.е. существует, вообще говоря, рациональное число* λ, *такое что* $\mu_i = \lambda n_i$, $i = 1, \ldots, N$, *то все характеристические классы* $c_n(E)$ *равны нулю. В противном случае,* $c_n(E) \neq 0$ *для всех* n.

Доказательство. 1. Пусть E пропорционален свободному модулю. Это означает, что существует натуральное k, такое что модуль kE изоморфен свободному модулю, скажем, lA. Тогда в силу аддитивности характеристических классов

$$k\, c_n(E) = c_n(kE) = c_n(lA) = l\, c_n(A) = l\, 0 = 0,$$

откуда $c_n(E) = 0$ для любого n.

2. Пусть E не пропорционален свободному. Тогда найдётся пара индексов $i,\ j$, например, $i = 1,\ j = 2$, таких что $\mu_i n_j \neq \mu_j n_i$. Благодаря предложению 1.29 достаточно показать, что нетривиален нулевой характеристический класс

$$c_0(E) = \mathrm{Tr}\,(P) \in \widetilde{A} = A/([A, A] + \Bbbk 1),$$

где $P \in M_r(A)$ — проектор, определяющий проективный модуль, изоморфный E. В качестве P в данном случае можно взять элемент $\bigoplus_{i=1}^{N} (e_{11}^{(i)})^{\oplus \mu_i}$, где $e_{kl}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, $k, l = 1, \ldots, n_i$ суть матричные единицы алгебры A.

Рассмотрим функционал $\tau : A \to \Bbbk$, заданный формулой

$$\tau(a) = n_2 \mathrm{Tr}\,_1(a_1) - n_1 \mathrm{Tr}\,_2(a_2), \quad a = \sum_{i=1}^{N} a_i \in A,$$

где $\mathrm{Tr}\,_i : M_{n_i}(F_i) \to \Bbbk$ есть композиция обычного матричного следа $\mathrm{Tr} : M_{n_i}(F_i) \to F_i$ и отображения нормированного следа $tr_i : F_i \to \Bbbk$, $tr_i(1) = 1$, конечного расширения F_i поля $\Bbbk$. Тогда $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a, b \in A$, согласно свойству цикличности следа. Кроме того,

$$\tau(1) = n_2 \mathrm{Tr}\,(1_{n_1}) - n_1 \mathrm{Tr}\,(1_{n_2}) = n_2 n_1 - n_1 n_2 = 0.$$

Следовательно, τ определяет отображение $\widetilde{\tau} : \widetilde{A} \to \Bbbk$. Посмотрим, чему равно значение $\widetilde{\tau}$ на элементе $c_0(E)$:

$$\widetilde{\tau}(c_0(E)) = \tau\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i e_{11}^{(i)}\right) = n_2 \mathrm{Tr}\,_1(\mu_1 e_{11}^{(1)}) - n_1 \mathrm{Tr}\,_2(\mu_2 e_{11}^{(2)}) =$$

$$n_2\mu_1 - n_1\mu_2 \neq 0.$$

Таким образом, характеристический класс $c_0(E)$ не равен нулю в $\widetilde{A}$, а значит и все остальные характеристические классы модуля E отличны от нуля. □

Повторение рассуждений первой части теоремы в случае простой алгебры немедленно приводит к такому результату.

Следствие 2.2. *Если A — простая конечномерная алгебра, т.е. $A = M_n(F)$, где F — конечномерное тело над $\Bbbk$, то для любого конечнопорождённого модуля E и любого дифференциального исчисления Ω^* все характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ равны нулю.* □

Прямым следствием теоремы 2.1 является также следующее

Предложение 2.3. *Пусть G – конечная группа, $A = \Bbbk[G]$ её групповая алгебра над полем $\Bbbk$ характеристики 0. Тогда любой конечномерный A-модуль, не являющийся свободным, имеет нетривиальные универсальные характеристические классы.*

Доказательство. По теореме Машке алгебра A является полупростой. Она содержит одномерный неприводимый модуль $E_1 = \Bbbk \sum_{g\in G} g \subset A$, соответствующий тривиальному представлению группы G. Кратность представления E_1 в разложении регулярного представления на неприводимые равна $\dim_{\Bbbk} E_1 = 1$. Поэтому, если модуль $E = \sum_i \mu_i E_i$ пропорционален свободному, т.е. $E = \lambda A$, то $\lambda = \mu_1$ – целое неотрицательное число и E является свободным модулем. Следовательно, любой несвободный модуль не пропорционален свободному и, согласно доказанной выше теореме, имеет нетривиальные характеристические классы. □

Замечание 2.1. Первый пример ненулевого характеристического класса для групповой алгебры был построен в работе [10].

Теперь рассмотрим характеристические классы для других дифференциальных исчислений, определённых в параграфе 1.1. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, которое, впрочем, представляет самостоятельный интерес.

Предложение 2.4. *Пусть A_1, A_2 — ассоциативные алгебры с единицей и $A = A_1 \oplus A_2$. Пусть даны также Ω^* — центральное дифференциальное исчисление на алгебре A и E — конечнопорождённый проективный A-модуль. Тогда*

1. *Ω^* раскладывается в прямую суммы дифференциальных градуированных алгебр $\Omega^* = \Omega_1^* \oplus \Omega_2^*$, где Ω_i^* есть дифференциальное исчисление на алгебре A_i;*

2. *модуль E представляется в виде прямой суммы $E = E_1 \oplus E_2$, где E_i есть конечный проективный A_i-модуль;*

3. *$c_n(E, \Omega^*) = c_n(E_1, \Omega_1^*) + c_n(E_2, \Omega_2^*)$ при всех n.*

Доказательство. Обозначим e_k — единицу подалгебры A_k в A. Тогда

$$e_k \in \mathcal{Z}(A), \ e_1 + e_2 = 1, \ e_k e_l = \delta_{kl} e_k. \tag{2.1}$$

Положим $\Omega_k^* = e_k \Omega^*$, $k = 1, 2$. Из (2.1) следует, что как линейное пространство $\Omega^* = \Omega_1^* \oplus \Omega_2^*$. Из центральности исчисления Ω^* вытекает, что Ω_k^* является градуированной подалгеброй. Кроме того, в силу той же центральности,

$$de_1 = d(e_1 e_1) = e_1 de_1 + de_1 e_1 = e_1^2 de_1 + de_1 e_1^2 = 2e_1(de_1)e_1 = 0,$$

аналогично, $de_2 = 0$, так что Ω_1^* и Ω_2^* суть дифференциальные подалгебры. То, что Ω_k^* есть дифференциальное исчисление на A_k, следует из равенства $e_k A = A_k$.

Положим $E_k = E e_k$. Тогда, как и ранее, $E = E_1 \oplus E_2$. Так как $e_1 e_2 = 0$, то $E_1 A_2 = 0$, аналогично, $E_2 A_1 = 0$. Поэтому E_k есть A_k-модуль. Проективность и конечнопорождённость модуля E_k есть очевидное следствие аналогичных свойств модуля E.

Пусть модуль E задаётся проектором $P \in M_r(A)$. Тогда $P = P_1 + P_2$, где $P_k \in M_r(A_k)$ также является проектором. Заметим, что $E_k \simeq \operatorname{Im} P_k$. Так как $\omega_1 \omega_2 = 0$ для любых $\omega_1 \in \Omega_1^*$, $\omega_2 \in \Omega_2^*$, то $P(dP)^{2n} = P_1(dP_1)^{2n} + P_2(dP_2)^{2n}$. С другой стороны, имеем разложение комплексов

$$\widetilde{\Omega}^* = \Omega^*/[\Omega^*, \Omega^*] = \Omega_1^*/[\Omega_1^*, \Omega_1^*] \oplus \Omega_2^*/[\Omega_2^*, \Omega_2^*] = \widetilde{\Omega}_1^* \oplus \widetilde{\Omega}_2^*,$$

так что $H^*(\widetilde{\Omega}^*) = H^*(\widetilde{\Omega}_1^*) \oplus H^*(\widetilde{\Omega}_2^*)$. Следовательно, по формуле 1.12 получаем

$$c_n(E, \Omega^*) = [P(dP)^{2n}] = [P_1(dP_1)^{2n}] + [P_2(dP_2)^{2n}] = \\ c_n(E_1, \Omega_1^*) + c_n(E_2, \Omega_2^*).$$

$\square$

Предложение 2.5. *Пусть A — конечномерная полупростая алгебра и Ω^* — одно из дифференциальных исчислений $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$, $\Omega^*(D, A)$ или $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Тогда для любого конечнопорождённого модуля E характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ равны нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Как следствие, все характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва тривиальны.*

Доказательство. В силу предложений 1.3, 1.10 и теоремы 1.19 достаточно показать, что $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) = 0$ для любого конечного проективного модуля E и любого n.

Пусть $A = \bigoplus_{k=1}^{N} A_k$, $A_k = M_{n_k}(F_k)$ — разложение алгебры A в прямую сумму простых алгебр и $E = \bigoplus_{k=1}^{N} E_k$ — соответствующее разложение модуля E. Поскольку $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ есть центральное дифференциальное исчисление, то по предложению 2.4

$$c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) = \sum_{k=1}^{N} c_n(E_k, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k)).$$

Но $c_n(E_k, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k)) = 0$ при всех k, согласно следствию 2.2. Следовательно, $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) = 0$. $\square$

Замечание 2.2. Предложение 2.5 обобщает результат диссертации [6] о тривиальности характеристических классов Жураева-Мищенко-Соловьёва конечномерных комплексных полупростых алгебр на случай произвольных полей нулевой характеристики.

Пример 2.1. Центральные дифференциальные исчисления могут не исчерпывать множество всех дифференциальных исчислений, в которых все характеристические классы тривиальны. Возьмём, например, в качестве алгебры A групповую алгебру $\mathbb{C}[D_n]$ диэдральной группы

$$D_n = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$$

и дифференциальное исчисление Вороновича $\Omega^*_W(A)$ на ней (см. [9]). Это исчисление определяется следующим образом:

$$\Omega^n_W(A) = A \otimes \Lambda^n \Gamma_{inv},$$

где Γ_{inv} — линейное пространство, имеющее базис $\omega_g, e \neq g \in D_n$, и произведение с дифференциалом задаются формулами

$$\begin{aligned} \omega_h g &= g(\omega_{hg} - \omega_g), & dg &= g\omega_g, \\ \omega_g \omega_h &= -\omega_h \omega_g, & d\omega_g &= 0 \end{aligned}$$

для любых $g, h \in D_n$. Оно не является центральным, так как, например,

$$\left[\sum_{g\in D_n} g, \omega_h\right] = \sum_{g\in D_n} g(\omega_h + \omega_g - \omega_{hg}) \neq 0,$$

если $h \neq e$.

Пусть τ — неприводимое представление алгебры A и χ — его характер. Тогда τ входит в регулярное представление с кратностью $\dim\tau = \chi(e)$ и соответствующая изотипическая компонента выделяется с помощью центрального проектора

$$p_\tau = \lambda \sum_{g\in D_n} \chi(g^{-1})g,$$

где $\lambda = \dim\tau|D_n|^{-1}$ — нормирующий множитель (см. [1, Глава 10]). Следовательно, грассманова кривизна в данном случае имеет вид

$$R_\tau = p_\tau(dp_\tau)^2 = \frac{1}{2}\lambda^3 \sum_{g,h,k\in D_n} (\chi(k^{-1})\chi(kh^{-1})\chi(hg^{-1}) - \\ \chi(h^{-1})\chi(hk^{-1})\chi(kg^{-1}))g\,\omega_h \wedge \omega_k.$$

Группа D_n имеет одномерные и двумерные неприводимые представления (см. [9]). Если представление τ одномерно, т.е. τ — характер, то для любых $g, h, k \in D_n$ имеем

$$\chi(k^{-1})\chi(kh^{-1})\chi(hg^{-1}) = \chi(k)^{-1}\chi(k)\chi(h)^{-1}\chi(h)\chi(g)^{-1} = \chi(g)^{-1},$$

откуда

$$R_\tau = \frac{1}{2}\lambda^3 \sum_{g,h,k\in D_n} (\chi(g)^{-1} - \chi(g)^{-1})g\,\omega_h \wedge \omega_k = 0.$$

Следовательно, все характеристические классы одномерных представлений равны 0.

Предположим теперь, что τ — двумерное представление. Тогда в некотором базисе матрицы генераторов имеют вид

$$\tau(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon^k & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = e^{2\pi m/n}, 1 \leq m \leq n-1$ и $\varepsilon \neq -1$. Следовательно, для любого $1 \leq l \leq n$

$$\chi(a^l) = 2\cos(l\theta), \quad \chi(a^l b) = 0,$$

где $\varepsilon = e^{\theta}$. Отсюда видно, что произведение

$$\chi(k^{-1})\chi(kh^{-1})\chi(hg^{-1})$$

может быть не равно 0, только когда $g = a^r, h = a^s, k = a^t$ для некоторых r, s, t. В этом случае

$$\chi(k^{-1})\chi(kh^{-1})\chi(hg^{-1}) = 8\cos t\theta\,\cos(t-s)\theta\,\cos(s-r)\theta = \\ 4\cos(s-t)\theta\,[\cos(s+t-r)\theta + \cos(r-s+t)\theta]\,,$$

так что

$$R_\tau = 2\sum_{r,s,t=1}^{n} \cos(s-t)\theta\,[\cos(s+t-r)\theta + \cos(r-s+t)\theta \\ -\cos(t+s-r)\theta - \cos(r-t+s)\theta]\,a^r\omega_{a^s}\wedge\omega_{a^t} = \\ 2\sum_{r,s,t=1}^{n} \cos(s-t)\theta\cdot 2\sin r\theta\,\sin(s-t)\theta\,a^r\omega_{a^s}\wedge\omega_{a^t} = \\ 2\sum_{r,s,t=1}^{n} \sin r\theta\,\sin 2(s-t)\theta\,a^r\omega_{a^s}\wedge\omega_{a^t}.$$

Квадрат кривизны равен

$$R_\tau^2 = 4\sum_{r,r',s,s',t,t'=1}^{n} \sin r\theta\,\sin r'\theta\,\sin 2(s-t)\theta\,\sin 2(s'-t')\theta\cdot \\ a^{r+r'}(\omega_{a^{s+r'}} - \omega_{a^{r'}})(\omega_{a^{t+r'}} - \omega_{a^{r'}})\omega_{a^{s'}}\omega_{a^{t'}} = \\ \sum_{r,r',s,s',t,t'=1}^{n} C_{r,r',s,s',t,t'}\,a^{r+r'}\omega_{a^{s+r'}}\omega_{a^{t+r'}}\omega_{a^{s'}}\omega_{a^{t'}} - \\ \sum_{r,r',s,s',t,t'=1}^{n} C_{r,r',s,s',t,t'}\,a^{r+r'}\omega_{a^{r'}}\omega_{a^{t+r'}}\omega_{a^{s'}}\omega_{a^{t'}} - \\ \sum_{r,r',s,s',t,t'=1}^{n} C_{r,r',s,s',t,t'}\,a^{r+r'}\omega_{a^{s+r'}}\omega_{a^{r'}}\omega_{a^{s'}}\omega_{a^{t'}} = \\ S_1 - S_2 - S_3,$$

где

$$C_{r,r',s,s',t,t'} = 4\sin r\theta\,\sin r'\theta\,\sin 2(s-t)\theta\,\sin 2(s'-t')\theta = \\ 2\sin r\theta\,\sin r'\theta\,(\cos 2(s-t-s'+t')\theta - \cos 2(s-t+s'-t')\theta).$$

В силу тождества $\sum_{s=1}^n \sin 2(s-t)\theta = 0$ сумма S_2 равна 0. Аналогично, $S_3 = 0$. Наконец,

$$S_1 = \sum_{r,r',s,s',t,t'=1}^{n} C_{r,r',s,s',t,t'} a^{r+r'} \omega_{a^s}\omega_{a^t}\omega_{a^{s'}}\omega_{a^{t'}} = 0,$$

так как функция $\cos 2(s-t-s'+t')\theta$, входящая в последнюю формулу для коэффициента $C_{r,r',s,s',t,t'}$, симметрична по паре индексов (s,t'), а $\cos 2(s-t+s'-t')\theta$ — по паре индексов (s,s'). Следовательно, $R_\tau^2 = 0$, и все характеристические классы модуля $E_\tau = \dim\tau\cdot\tau$ с коэффициентами в исчислении Вороновича равны нулю, начиная со второго.

Покажем, что $c_1(E_\tau, \Omega_W^*(A)) = 0$. Коммутатор 1-форм $g\omega_h$ и ω_k равен

$$[g\,\omega_h, \omega_k] = g\,\omega_h \wedge \omega_k - g\,\omega_h \wedge \omega_{kg} - g\,\omega_g \wedge \omega_h,$$

причём последнее слагаемое есть кограница $d(g\,\omega_h)$. Поэтому с точностью до коммутаторов и кограниц грассманова кривизна равна

$$\begin{aligned} R_\tau \equiv \frac{2}{n}\sum_{r,s,t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \sin r\theta\, \sin 2(s-t)\theta\, a^r \omega_{a^s} \wedge \omega_{a^t (a^r)^l} = \\ \frac{2}{n}\sum_{r,s,t=1}^{n} \sin r\theta \left(\sum_{l=1}^{n} \sin 2(rl+s-t)\theta\right) a^r \omega_{a^s} \wedge \omega_{a^t} = 0, \end{aligned}$$

так как если $r\theta = \pi$ или 2π, то $\sin r\theta = 0$, в противном случае

$$\sum_{l=1}^{n} \sin 2(rl+s-t)\theta = 0.$$

Таким образом, класс элемента R_τ в $H^2(\widetilde{\Omega}_W^*(A))$, т.е. характеристический класс $c_1(E_\tau, \Omega_W^*(A))$ есть 0.

Значит,

$$c_n(\tau, \Omega_W^*(A)) = (\dim\tau)^{-1} c_n(E_\tau, \Omega_W^*(A)) = 0$$

для всех натуральных n и всех неприводимых представлений τ, и поэтому все характеристические классы с коэффициентами в дифференциальном исчислении Вороновича $\Omega_W^*(A)$ равны нулю.

2.2 Случай $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 0$: стабильные характеристические классы

В пределах данного параграфа и только здесь предполагается, что основное поле имеет ненулевую характеристику $\mathrm{char}\,\Bbbk = p \neq 0$.

Все конструкции, рассмотренные в параграфах 1.1,1.2, без изменений переносятся на случай ненулевой характеристики основного поля $\Bbbk$. Единственное препятствие для построения теории характеристических классов при $\mathrm{char}\,\Bbbk = p \neq 0$ возникает при доказательстве независимости классов от выбора связности. Доказательство Каруби для n-го характеристического класса сводится к тождеству

$$(d\Gamma + \Gamma^2)^n \equiv d\left(n\int_0^1 \Gamma(d\Gamma \cdot t + \Gamma^2 t^2)^{n-1} dt\right) \mod [\Omega^*_{univ}(A), \Omega^*_{univ}(A)]$$

и, таким образом, предполагает возможность деления на числа $2, 3, \ldots, 2n-1$. Тем не менее в "стабильном"случае $2n < p$ элементы $c_n(E, \Omega^*)$ корректно определены и имеет смысл говорить о характеристических классах в малых размерностях. Заметим, что рассуждения теорем 1.25, 1.26 остаются корректными в размерности меньшей характеристики поля. Поэтому, как и в предыдущем параграфе, можно проводить редукцию к младшим характеристическим классам.

Следующий пример показывает, что ограничение на размерность является существенным.

Пример 2.2. Рассмотрим поле из трёх элементов $\Bbbk = \mathbb{F}_3$ и алгебру матриц $A = M_2(\Bbbk)$ с матричными единицами $e_{ij},\ i, j = 1, 2$. Пусть $E = A$ — свободный модуль. Тогда $\nabla_0 = d : A \to \Omega^1_{univ}(A)$ есть связность на E с нулевой кривизной и, следовательно, нулевыми характеристическими классами. С другой стороны, рассмотрим связность $\nabla = d + \Gamma$, где $\Gamma = e_{11}de_{11} + e_{21}de_{12}$, и покажем, что второй характеристический класс свободного модуля, вычисленный по формуле (1.12), отличен от нуля.

Из равенств $d\Gamma = (de_{11})^2 + de_{21}de_{12}$ и

$$\begin{aligned}\Gamma^2 = e_{11}de_{11}e_{11}de_{11} + e_{11}de_{11}e_{21}de_{12} + e_{21}de_{12}e_{11}de_{11} + e_{21}de_{12}e_{21}de_{12} =\\ 0 - e_{11}de_{21}de_{12} - e_{22}de_{11}de_{11} + (e_{21}de_{11}de_{12} - e_{22}de_{21}de_{12}) =\\ - de_{21}de_{12} - e_{22}de_{11}de_{11} + e_{21}de_{11}de_{12}\end{aligned}$$

получаем выражение для кривизны связности ∇:

$$R = e_{11}de_{11}de_{11} + e_{21}e_{11}de_{12} = e_{11}de_{11}de_{11}e_{11} + e_{21}de_{11}de_{11}e_{12}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тождествами $de_{12} = e_{11}de_{12} + de_{11}e_{12}$ и

$$e_{21}de_{11}e_{12} = e_{21}e_{11}de_{11}e_{11}e_{12} = e_{21}0e_{12} = 0.$$

Следовательно,

$$R^2 = e_{11}(de_{11})^2e_{11}e_{11}(de_{11})^2e_{11} + e_{11}(de_{11})^2e_{11}e_{21}(de_{11})^2e_{12} + \\ e_{21}(de_{11})^2e_{12}e_{11}(de_{11})^2e_{11} + e_{21}(de_{11})^2e_{12}e_{21}(de_{11})^2e_{11} = \\ e_{11}(de_{11})^2e_{11}(de_{11})^2e_{11} + e_{21}(de_{11})^2e_{11}(de_{11})^2e_{12} = \\ e_{11}(de_{11})^4e_{11} + e_{21}(de_{11})^4e_{12}.$$

Заметим, что $e_{21}(de_{11})^4e_{12} = e_{11}(de_{11})^4e_{11} + [e_{21}(de_{11})^4e_{11}, e_{12}]$, поэтому достаточно проверить, что элемент $e_{11}(de_{11})^4$ не является кограницей в $\widetilde{\Omega}^4_{univ}(A)$. Воспользуемся представлением $\Omega^*_{univ}(A)$ как подпространства в тензорной алгебры $TA = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{\otimes(n+1)}$ (см. замечание 1.1). Вложение $\Omega^*_{univ}(A) \to TA$ является гомоморфизмом дифференциальных алгебр, отображающим $e_{11}(de_{11})^4$ в элемент

$$e_{11} \otimes e_{22} \otimes e_{11} \otimes e_{22} \otimes e_{11}. \qquad (2.2)$$

Достаточно показать, что этот элемент не является кограницей в комплексе $\widetilde{TA} = TA/[TA, TA]$. Из формулы (1.3) для произведения в TA следует, что пространство $[TA, TA]^n$ порождено коммутаторами двух типов: во-первых, формами, у которых не совпадают концы

$$e_{i_0j_0} \otimes \cdots \otimes e_{i_nj_n} = [e_{i_0i_0}, e_{i_0j_0} \otimes \cdots \otimes e_{i_nj_n}] \text{ при } i_0 \neq j_n;$$

во-вторых, суммами вида

$$e_{pj_0} \otimes \cdots \otimes e_{i_lj_l} \otimes e_{i_{l+1}j_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_np} + \\ (-1)^{l(n-l)} e_{qj_{l+1}} \otimes e_{i_{l+2}j_{l+2}} \otimes \cdots \otimes e_{i_nj_0} \otimes e_{i_1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_lq} = \\ [e_{pj_0} \otimes e_{i_1j_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_lq}, e_{qj_l} \otimes e_{i_{l+1}j_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_np}].$$

Следовательно, $\widetilde{TA}$ можно отождествить со множеством линейных комбинаций форм

$$(j_0i_1|j_1i_2|\dots|j_{n-1}i_n) = e_{pj_0} \otimes e_{i_1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-1}j_{n-1}} \otimes e_{i_np}$$

(с точностью до коммутаторов форма не зависит от выбора p), которые связаны между собой циклическими соотношениями

$$(j_0i_1|j_1i_2|\dots|j_{n-1}i_n) = (-1)^{n-1}(j_1i_2|\dots|j_{n-1}i_n|j_0i_1).$$

Учитывая, что в формуле дифференциала (1.4) первый и последний члены образуют коммутатор дифференцируемой формы с элементом $1 \otimes 1$ и что $1 = \sum_{k=1}^{2} e_{kk}$, мы получаем такое выражение для d в новых обозначениях

$$d(i_1 j_1|\ldots|i_n j_n) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \sum_{k=1}^{2} (i_1 j_1|\ldots|i_l k|k j_l|\ldots|i_n j_n). \qquad (2.3)$$

Заметим, что "цикличные"элементы вида $(i_0 i_1|i_1 i_2|\ldots|i_{n-1} i_0)$ выделяются как прямое слагаемое $\widetilde{TA}_{cycl}$ в $\widetilde{TA}$. Мы будем использовать для них сокращённое обозначение $(i_0 i_1 \ldots i_{n-1})$, в частности, элемент (2.2) будет записываться как (1212). Кроме того, из формулы (2.3) следует, что $\widetilde{TA}_{cycl}$ выделяется прямым слагаемым как подкомплекс.

В размерности 3 пространство $\widetilde{TA}^3_{cycl}$ линейно порождается четырьмя формами: (111), (112), (122), (222). Посмотрим, какие граничные формы они могут дать:

$$d(111) = d(11|11|11) =$$

$$\sum_{k=1,2} (-(1k|k1|11|11) + (11|1k|k1|11) - (11|11|1k|k1)) =$$

$$3 \sum_{k=1,2} (11k1) = 0;$$

$$d(112) = \sum_{k=1,2} ((1k12) - (11k2) + (112k)) = (1212) + (1112);$$

$$d(122) = \sum_{k=1,2} ((1k22) - (12k2) + (122k)) = -(1212) + (1222);$$

$$d(222) = 3 \sum_{k=1,2} (22k2) = 0.$$

Отсюда ясно, что элемент (1212) не может быть кограницей, и следовательно, второй характеристический класс свободного модуля, вычисленный по связности ∇, нетривиален. □

Вернёмся к общему случаю конечномерных полупростых алгебр. Теорема Веддебарна-Артина остаётся справедливой и для поля простой характеристики, значит, как и ранее, любая полупростая алгебра A представима в виде суммы $A = \bigoplus_{k=1}^{N} A_k,\ A_k = M_{n_k}(F_k)$, где F_k — алгебра с делением над полем $\Bbbk$. Точно так же любой конечнопорождённый A-модуль E проективен и разлагается в прямую сумму простых модулей $E = \bigoplus_{k=1}^{N} \mu_k E_k,\ E_k = F_k^{n_k}$.

Определение 2.1. Пусть F — конечномерная алгебра с делением над полем $\Bbbk$. Тогда $F \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk} = M_d(\bar{\Bbbk})$, где $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Число d называется *индексом* алгебры с делением F и обозначается $\mathrm{ind}\,(F)$.

Когда $\mathrm{char}\,(\Bbbk) = p \neq 0$, алгебра A распадается по отношению к индексу в прямую сумму двух подалгебр:

$$A = A_{deg} \oplus A_{reg}, \qquad A_{deg} = \bigoplus_{k:\ p\,|\,\mathrm{ind}\,(F_k)} A_k, \quad A_{reg} = \bigoplus_{k:\ p\nmid \mathrm{ind}\,(F_k)} A_k,$$

которые мы соответственно называем *вырожденной* и *невырожденной частью* алгебры A. Аналогично, имеем разложение $E = E_{deg} \oplus E_{reg}$ для A-модуля E.

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 2.1, для случая поля простой характеристики.

Теорема 2.6. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда, если невырожденная часть модуля E пропорциональна невырожденной части регулярного модуля A :*

$$E_{red} \equiv \lambda A_{red} \mod p \quad \text{для некоторого } \lambda \in \mathbb{Z}_p,$$

то все характеристические классы $c_n(E)$, $2n < p$ равны нулю. В противном случае, $c_n(E) \neq 0$ для всех $n \leq \frac{p-1}{2}$.

Доказательство. Доказательство того, что из условия $E_{reg} \equiv \lambda A_{reg}$ следует равенство нулю всех характеристических классов, ничем не отличается от случая нулевой характеристики поля.

Пусть $E_{reg} \not\equiv A_{reg}$. Предположим сначала, что поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Тогда $F_k = \Bbbk$ для всех k и $A_{reg} = A$, $E_{reg} = E$. В этом случае мы можем повторить рассуждения теоремы 2.1.

Рассмотрим случай незамкнутого поля. Пусть $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Обозначим $\bar{A} = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$ — расширение алгебры A в новом поле. Тогда по определению индекса алгебры с делением $\bar{A} = \bigoplus_{k=1}^{N} M_{\nu_k n_k}(\bar{\Bbbk})$, где $\nu_k = \mathrm{ind}\,(F_k)$. Аналогично, $\bar{E} = E \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk} = \bigoplus_{k=1}^{N} \mu_k \nu_k E'_k$, где $E'_k = \bar{\Bbbk}^{\nu_k n_k}$. Из определения универсального дифференциального исчисления следует, что $\Omega^*_{univ}(\bar{A}|\bar{\Bbbk}) = \Omega^*_{univ}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и, таким образом, $H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(\bar{A}|\bar{\Bbbk})) = H^*(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A)) \otimes \bar{\Bbbk}$. С другой стороны, если $E \simeq \mathrm{Im}\, P$ для некоторого проектора $P \in M_r(A)$, то $\bar{E} \simeq \mathrm{Im}\,(P \otimes 1)$, где $P \otimes 1 \in$

$M_r(\bar{A}) = M_r(A) \otimes \bar{\Bbbk}$. Поэтому $c_n(\bar{E}, \Omega^*_{univ}(\bar{A}|\bar{\Bbbk})) = c_n(E, \Omega^*_{univ}(A)) \otimes 1$. В частности, условия $c_n(\bar{E}, \Omega^*_{univ}(\bar{A}|\bar{\Bbbk})) = 0$ и $c_n(E, \Omega^*_{univ}(A)) = 0$ равносильны. Отсюда для каждого $n < \frac{p}{2}$ получаем цепь эквивалентностей

$$\begin{aligned} c_n(E, \Omega^*_{univ}(A)) = 0 \Leftrightarrow c_n(\bar{E}, \Omega^*_{univ}(\bar{A}|\bar{\Bbbk})) = 0 \Leftrightarrow \\ \exists\lambda: \ \bar{E} \equiv \lambda\bar{A} \mod p \Leftrightarrow \exists\lambda: \ \nu_k\mu_k \equiv \lambda\nu_k n_k, \ k = 1, \dots, N \Leftrightarrow \\ \exists\lambda: \ \mu_k \equiv \lambda n_k \text{ для всех } k: \ p \nmid \nu_k \Leftrightarrow \exists\lambda: \ E_{reg} \equiv \lambda A_{reg}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.3. В отличие от случая $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, простая конечномерная алгебра может иметь нетривиальные характеристические классы. Например, если E есть неприводимый модуль алгебры $A = M_p(\Bbbk)$, то условие $_n(E) = 0$ эквивалентно равенству $1 \equiv \lambda p \mod p$ для некоторого λ, которое, очевидно, не может быть выполнено. Поэтому стабильные характеристические классы модуля E отличны от нуля.

Заметим, что по теореме Веддерберна всякое конечное тело коммутативно и, стало быть, имеет индекс 1. Поэтому, если основное поле конечно, то $A_{reg} = A$ и мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2.7. *Пусть $\Bbbk = \mathbb{F}_q$, $q = p^l$ — поле Галуа. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда, если модуль E пропорционален свободному: $E \equiv \lambda A \mod p$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}_p$, то все характеристические классы $c_n(E)$ равны нулю. В противном случае, $c_n(E) \neq 0$ для всех $n \leq \frac{p-1}{2}$.* □

Для характеристических классов дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ имеем такое утверждение.

Предложение 2.8. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда, если существует k, такое что $p|n_k$, $p \nmid \operatorname{ind}(F_k)$ и $p \nmid \mu_k$, то все характеристические классы $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A))$, $2n < p$ не равны нулю. В противном случае, $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) = 0$ для всех натуральных $n \leq \frac{p-1}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Так как центр алгебры $\bar{A} = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$ равен $\mathcal{Z}(\bar{A}) = \mathcal{Z}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$, то $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar{A}|\bar{\Bbbk}) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и $c_n(\bar{E}, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar{A})) = c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) \otimes 1$ для любого n, так что всё сводится к случаю алгебраически замкнутого поля.

Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $A = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\Bbbk)$. В этом случае доказываемое утверждение следует из предложения 2.4, теоремы 2.6 и того факта, что для простой алгебры $A_k = M_{n_k}(\Bbbk)$ выполнено $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k) = \Omega^*_{univ}(A_k)$. $\square$

Утверждение, касающееся характеристических классов дифференциальных исчислений $\Omega^*(D, A)$, $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, звучит так.

Предложение 2.9. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль и Ω^* — одно из дифференциальных исчислений $\Omega^*(D, A)$ или $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Тогда, если существует k, такое что $p | n_k$, $p \nmid \operatorname{ind}(F_k)$ и $p \nmid \mu_k$, то первый характеристический класс $c_1(E, \Omega^*)$ не равен нулю. В противном случае, $c_n(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)) = 0$ для всех натуральных $n \leq \frac{p-1}{2}$.*

Доказательство. Вторая часть предложения об обнулении характеристических классов следует из предложений 1.3 и 2.8.

Пускай, напротив, существует индекс k, удовлетворяющий условиям предложения. Пусть $\bar{\Bbbk}$ снова обозначает алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$ и $\bar{A} = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$. Тождества $\operatorname{Der}(\bar{A}) = \operatorname{Der}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$, $\mathcal{Z}(\bar{A}) = \mathcal{Z}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и, следовательно, $\Omega^*(\bar{D}, \bar{A}) = \Omega^*(D, A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar{D}, \bar{A}) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) \otimes \bar{\Bbbk}$ позволяют свести ситуацию к случаю алгебраически замкнутого поля.

Итак, пусть $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, так что $A = \bigoplus_{i=1}^N A_i$, $A_i = M_{n_i}(\Bbbk)$. Естественная проекция алгебры $p_k : A \to A_k$ является гомоморфизмом унитальных алгебр. Поскольку $\operatorname{Der}(A) = \bigoplus_{i=1}^N \operatorname{Der}(A_i)$, то проекция p_k продолжается до гомоморфизмов $(p_k)_* : \Omega^*(D, A) \to \Omega^*(D_k, A_k)$ и $(p_k)_* : \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D_k, A_k)$ дифференциальных алгебр. Поэтому, вспоминая об естественности характеристических классов, мы можем ещё более упростить ситуацию и считать $A = M_n(\Bbbk)$, $p \,|\, n$ и $E = \bigoplus_{i=1}^{\mu} \Bbbk^n$, $p \nmid \mu$. Тогда $D = \operatorname{Der}(A) = \mathfrak{sl}_n$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) = \Omega^*(D, A)$. В силу аддитивности характеристических классов достаточно показать, что $c_1(E_0, \Omega^*(D, A)) \neq 0$ для простого модуля $E_0 = \Bbbk^n$. Модуль E_0 можно отождествить с образом проектора $e_{11} \in A$, где e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ — обозначение для матричных единиц алгебры A. Тогда

$$c_1(E_0, \Omega^*(D, A)) = [\operatorname{Tr}(e_{11} de_{11} de_{11})] \in H^2(\Omega^*(D, \Bbbk)).$$

Обозначим $\partial_{ij} = \operatorname{ad}_{e_{ij}} \in D$ — внутреннее дифференцирование алгебры A. Рассмотрим элемент $\rho = 2 \sum_{j \neq 1} \partial_{1j} \wedge \partial_{j1} \in \Lambda^2 D$. Тогда для любого

$\omega \in \Omega^1(D, \Bbbk)$

$$(d\omega)(\rho) = \sum_{j\neq 1} \omega\left([\partial_{1j}, \partial_{j1}]\right) = \sum_{j\neq 1} \omega\left(\partial_{11} - \partial_{jj}\right) =$$

$$\omega\left((n-1)\partial_{11} - \sum_{j\neq 1} \partial_{jj}\right) = -\omega\left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{jj}\right) = -\omega\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ad}_{\,e_{jj}}\right) = \\ -\omega(\mathrm{ad}_{\,1}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{Tr}\,(e_{11}de_{11}de_{11})(\rho) = \\ \sum_{j\neq 1} \mathrm{Tr}\,\left(e_{11}[e_{1j}, e_{11}][e_{j1}, e_{11}] - e_{11}[e_{j1}, e_{11}][e_{1j}, e_{11}]\right) = \\ \sum_{j\neq 1} \mathrm{Tr}\,\left(-e_{11}e_{1j}e_{j1} + e_{11}e_{j1}e_{1j}\right) = -(n-1)\mathrm{Tr}\,(e_{11}) = 1.$$

Таким образом, элемент $\mathrm{Tr}\,(e_{11}de_{11}de_{11})$ не является кограницей в $\Omega^*(D, \Bbbk)$, т.е. характеристический класс $c_1(E_0, \Omega^*(D, A))$ не равен нулю. $\square$

Следствие 2.10. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(F_i)$ *— полупростая алгебра,* $\widetilde{A} = A/[A, A]$ *— универсальный следовой модуль и* $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ *— конечномерный* A*-модуль. Если существует* k*, такое что* $p|n_k$, $p \nmid \mathrm{ind}\,(F_k)$ *и* $p \nmid \mu_k$*, то первый характеристический класс Жураева-Мищенко-Соловьёва* $Ch_1(E, \widetilde{A})$ *не равен нулю. В противном случае,* $Ch_n(E, \widetilde{A}) = 0$ *для всех натуральных* $n \leq \frac{p-1}{2}$*.* $\square$

Замечание 2.4. Предыдущее утверждение показывает, что группа когомологий $H^2(\mathfrak{sl}_n, \Bbbk)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ не равна нулю, когда характеристика поля p делит n. Можно показать, что в этом случае $H^2(\mathfrak{sl}_n, \Bbbk) = \Bbbk$. Заметим, что если характеристика поля нулевая, то $H^2(\mathfrak{sl}_n, \Bbbk) = 0$.

Глава 3

Аппроксимативно конечные алгебры

Начиная с этой главы мы рассматриваем алгебры с дополнительной, топологической структурой, а именно, C^*-алгебры. В этой главе изучаются универсальные характеристические классы аппроксимативно конечных алгебр (или, сокращённо, AF-алгебр). Главу открывает параграф, посвящённый аменабельным C^*-алгебрам, которые характеризуются тем свойством, что отображение периодичности S для них оказывается изоморфизмом (теорема 3.2). Это позволяет ограничиться изучением нулевого характеристического класса, что и производится в параграфе 3.4 для C^*-алгебр, являющихся прямым пределом конечномерных алгебр, т.е. аппроксимативно конечных алгебр. Основным результатом этого параграфа, как и всей главы является теорема 3.11, дающая полное описание характера Конна-Черна для этого класса алгебр. Пункт 3.4 предваряют параграфы 3.2 и 3.3, в которых приводится определение аппроксимативно конечных алгебр и некоторые известные утверждения, касающиеся K-теории алгебр этого типа. Основным источником здесь нам служит [7].

3.1 Ядерные и аменабельные C^*-алгебры

Основное поле здесь и всюду далее — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть A — банахова алгебра с единицей, т.е. на унитальной алгебре A

имеется полная норма $\|\cdot\|$, такая что

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \quad \text{для любых } a, b \in A.$$

Теория характеристических классов, которая учитывала бы топологию алгебры A, получается простым повторением конструкций первой главы с заменой объектов линейной алгебры на соответствующие объекты категории полных нормированных пространств. То есть все отображения предполагаются непрерывными отображениями банаховых пространств, а тензорные произведения рассматриваются как проективные произведения банаховых пространств. Несложно убедиться в том, что все возникающие в главе 1 отображения ограничены, так что такое перенесение конструкций будет корректно. В частности, определены (топологические) гомологии Хохшильда алгебры A. Ниже нам потребуется обобщение этого понятия.

Пусть дан банахов бимодуль над алгеброй A, т.е. некоторое банахово пространство E вместе с ограниченными билинейными отображениями $m_l : A \times E \to E$, $m_r : E \times A \to E$, которые задают на E структуру алгебраического A-бимодуля. Рассмотрим комплекс

$$E \xleftarrow{b} E\widehat{\otimes}A \xleftarrow{b} E\widehat{\otimes}A\widehat{\otimes}A \xleftarrow{b} \dots$$

с дифференциалом b, определённым равенством

$$\begin{aligned} b(e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = ea_1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n + \\ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + \\ (-1)^n a_n e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

для всех $e \in E,\ a_1, \dots, a_n \in A$.

Определение 3.1. Гомологии $HH_*(A, E)$ комплекса $(E\widehat{\otimes}A^{\widehat{\otimes}n}, b)$ называются *гомологиями Хохшильда* алгебры A с коэффициентами в банаховом бимодуле E.

Замечание 3.1. Если $E = A$, то мы получаем хохшильдовы гомологии из определения 1.13.

По отношению к хохшильдовым гомологиям с коэффициентами естественно выделяется следующий класс алгебр.

Определение 3.2. Банахова алгебра A с единицей называется *аменабельной алгеброй*, если для каждого банахова A-бимодуля X

1. пространство $HH_0(A, X)$ является хаусдорфовым;
2. $HH_n(A, X) = 0$ для всех $n \geq 1$.

Замечание 3.2. Изначальное определение аменабельной банаховой алгебры, которое можно найти, например, в монографии [14], отличается от данного выше, однако эквивалентно ему (см. теорему VII.2.17 в [14]).

Напомним определение C^*-алгебры (см. [7]).

Определение 3.3. Пусть A есть ассоциативная *-алгебра. *C^*-нормой* на алгебре A называется любая норма p на A, такая что

$$p(ab) \leq p(a)p(b), \quad p(a^*) = p(a), \quad p(a^*a) = p(a)^2$$

для любых $a, b \in A$. Если алгебра A является полной относительно некоторой фиксированной C^*-нормы p, то она называется *C^*-алгеброй.*

В случае, когда A есть C^*-алгебра, свойство аменабельности оказывается эквивалентным другому замечательному свойству — ядерности.

Определение 3.4. C^*-алгебра A называется *ядерной*, если для произвольной C^*-алгебры B на алгебраическом тензорном произведении $A \otimes B$ (которое является *-алгеброй) имеется единственная C^*-норма.

Замечание 3.3. Класс ядерных C^*-алгебр обладает рядом хороших свойств (см. [7]). Любая конечномерная или коммутативная C^* алгебра ядерна. Любой идеал и факторалгебра ядерной алгебры ядерны. Множество ядерных алгебр замкнуто относительно расширения. Прямой предел ядерных алгебр (см. определение 3.5) — также ядерная алгебра.

Следующей теоремой мы обязаны Конну [17] и Хаагерупу [21].

Теорема 3.1. *Пусть A — C^*-алгебра. Тогда A — аменабельна $\iff$ A — ядерная.* $\square$

Соединяя вместе результаты теорем 1.25, 1.26, 3.1, мы получим следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть A есть ядерная C^*-алгебра. Тогда все отображения*

$$A/\overline{[A, A]} = HH_0(A) \xrightarrow{I} HC_0(A) \xleftarrow{S^n} HC_{2n}(A),$$
$$A/(\overline{[A, A]} + \mathbb{C}\,1) = \overline{HH}_0(A) \xrightarrow{I} \overline{HC}_0(A) \xleftarrow{S^n} \overline{HC}_{2n}(A) \hookleftarrow H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$$

суть изоморфизмы полных преднормированных пространств и все пространства хаусдорфовы, а значит банаховы. □

Замечание 3.4. Сопряжённое пространство к $A/\overline{[A,A]}$ отождествляется с пространством *функционалов типа следа*, т.е. таких функционалов $\tau : A \to \mathbb{C}$, что $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in A$. Таким образом, характер Черна в случае, когда алгебра является аменабельной, показывает, какие проективные модули можно различить с помощью следов.

Пример 3.1 (характеристические классы коммутативных C^*-алгебр). Пусть A — сепарабельная коммутативная C^*-алгебра с единицей. Тогда $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X. По теореме Такесаки (см. [7]) алгебра A ядерна, и мы можем применить теорему 3.2. Так как A коммутативна, то $HH_0(A) = A$. Посмотрим, чему равен нулевой характеристический класс конечнопорождённого проективного модуля E. По теореме Серра-Суона, $E = \Gamma(\xi)$ — модуль сечений некоторого локально тривиального векторного расслоения ξ. Тогда $ch_0(E) = \mathrm{Tr}\,(\xi)$ является локально постоянной функцией, принимающей значения в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, которая равна размерности слоя расслоения в конкретной точке. Предположим, что X связно. Тогда $ch_0(E) = \dim \xi$ — постоянная функция. В этом случае приведённый характер Черна $\overline{ch}_0(E)$ нулевой, следовательно, все универсальные характеристические классы, а вместе с ними и все харклассы Каруби и Жураева-Мищенко-Соловьёва, равны нулю.

Замечание 3.5. Если $A = C^\infty(M, \mathbb{C})$ — алгебра Фреше гладких функций на многообразии M, то, как показал Конн [16], группа гомологий $H^n(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus_{k\geq 0} H^{n-2k}(M, \mathbb{C})$. При этом n-й универсальный характеристический класс проективного модуля $E = \Gamma(\xi)$ совпадает с точностью до скалярного множителя с суммой первых n членов обычного характера Черна расслоения ξ.

3.2 Определение аппроксимативно конечных алгебр

Напомним определение прямого предела последовательности C^*-алгебр (см. [7]). Пусть дана последовательность C^*-алгебр $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $*$-гомоморфизмов $\phi_n : A_n \to A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество A', состоящее из последовательностей $a = (a_n)$ в $\prod_{n=1}^\infty A_n$, таких что $a_{n+1} = \phi_n(a_n)$ для всех n, начиная с некоторого натурального числа N. A' является *-подалгеброй в $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Функционал $p : A' \to \mathbb{R}_+$,

$$p(a) = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|, \quad a = (a_n) \in A',$$

есть C^*-преднорма на A'. Пусть $B = p^{-1}(0) \subset A'$. Тогда B — идеал и p определяет C^*-норму $\bar{p}$ на факторалгебре A'/B.

Определение 3.5. Пополнение A *-алгебры A'/B относительно $\bar{p}$ является C^*-алгеброй и называется *прямым пределом* последовательности C^*-алгебр (A_n, ϕ_n). Общепринятое обозначение для прямого предела — $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Замечание 3.6. Мы будем использовать обозначение $\phi^l : A_l \to A$ для канонического *-гомоморфизма, отображающего элемент $a \in A_l$ в последовательность $(\psi_{ln}(a))$, где

$$\psi_{ln} : A_l \to A_n, \quad \psi_{ln} = \begin{cases} \phi_{n-1} \dots \phi_{l+1}\phi_l, & l < n; \\ \mathrm{id}_{A_l}, & l = n; \\ 0, & l > n. \end{cases}$$

Из определения следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\phi_n} & A_{n+1} \\ & \phi_n \searrow & \downarrow \phi_{n+1} \\ & & A \end{array} \quad .$$

Определение 3.6. *Аппроксимативно конечной алгеброй* (или *AF-алгеброй*) называется C^*-алгебра, которая является прямым пределом последовательности конечномерных C^*-алгебр.

Замечание 3.7. Пусть $A = \lim_n A_n$, где A_n — конечномерная C^*-алгебра для каждого n. Обозначим $A'_n = \phi^n(A_n) \subset A$. Тогда A'_n является конечномерной C^*-подалгеброй в A, $A'_n \subset A'_{n+1}$ и $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n}$ — замыкание возрастающего семейства конечномерных алгебр. Последовательность алгебр (A'_n) с отображениями включения является прямой и $A = \lim_{n\to\infty} A'_n$. Поэтому можно считать, что AF-алгебра A является пределом последовательности, в которой все отображения мономорфны, т.е. являются вложениями.

Воспользуемся следующим простым утверждением (см. [15]) для получения более конкретного комбинаторного описания AF-алгебры как прямого предела конечномерных подалгебр.

Предложение 3.3. *1. Пусть A — конечномерная C^*-алгебра. Тогда*

$$A = M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_k}, \quad M_{n_i} = M_{n_i}(\mathbb{C}),$$

для некоторых $k,\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$;

2. Пусть $A = \bigoplus_{k=1}^{N} M_{n_k}$, $B = \bigoplus_{l=1}^{N'} M_{n'_l}$ — конечномерные C^* алгебры и $\phi : A \to B$ инъективный унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда существует базис $e_{ij}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, $i, j = 1, \ldots, n_k$ алгебры A и базис $f_{ij}^{(l)}$, $l = 1, \ldots, N'$, $i, j = 1, \ldots, n'_l$ алгебры B, а также неотрицательные целые числа $[kl]$, $k = 1, \ldots, N$, $l = 1, \ldots, N'$, такие что

$$\phi(e_{ij}^{(k)}) = \sum_{l=1}^{N'} \sum_{p=1}^{[kl]} f^{(l)}_{d_{kl}+pn_k+i, d_k+pn_k+j}, \quad k = 1, \ldots, N,\ i, j = 1, \ldots, n_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} [kl] = n'_l, \quad l = 1, \ldots, N',$$

где $d_{kl} = \sum_{s=1}^{k-1} [sl]$. Иными словами, с точностью до замены координат гомоморфизм ϕ определён кратностями вложения $[kl]$ k-той матричной компоненты алгебры A в l-тую компоненту алгебры B.
$\square$

Пусть $A = \overline{\bigcup_p A_p}$, $A_p = \bigoplus_{k=1}^{n_p} M_{[p,k]}$, — унитальная AF-алгебра, причём гомоморфизмы $\phi_p : A_p \to A_{p+1}$ сохраняют единицу. Тогда прямую систему (A_p, ϕ_p) можно задать с помощью графа $D(A)$, построенного следующим образом. Вершины графа $D(A)$ индексируются множеством пар (p, k), $p \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n_p$. Рёбра могут соединять только пару вершин вида (p, k), $(p + 1, l)$, причём количество рёбер, соединяющих эти две вершины, равно кратности вложения $[p, k; p + 1, l]$ соответствующих матричных компонент при отображении $\phi_p : A_p \to A_{p+1}$. Вершина (p, k) помечена числом $[p, k]$, равным размеру соответствующей матричной компоненты. Утверждение 3.3 показывает, что помеченный граф $D(A)$ полностью определяет прямую систему (A_n, ϕ_n) и, таким образом, алгебру A.

Определение 3.7. Помеченный граф $D(A)$ называется *диаграммой Браттели* алгебры A.

Заметим, что алгебра может описываться несколькими диаграммами.

Приведём несколько примеров AF-алгебр, заданных диаграммами Браттели.

Пример 3.2 (конечномерная AF-алгебра). Пусть алгебра $A = \bigoplus_{k=1}^{N} M_{n_k}$ — конечномерная C^*-алгебра. Тогда A можно представить в виде прямого предела последовательности (A_n, ϕ_n), $A_n = A, \phi_n = \mathrm{id}_A$. Диаграмма $D(A)$ имеет вид

$$\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \dots & n_N \\ | & | & & | \\ n_1 & n_2 & \dots & n_N \\ | & | & & | \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}.$$

Пример 3.3 (равномерно гиперфинитные алгебры). Прямой предел последовательности конечномерных простых C^* алгебр называется *равномерно гиперфинитной алгеброй*, или же *UHF-алгеброй*. Пусть A — унитальная UHF-алгебра. Тогда $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$, A_n — конечномерная простая алгебра, т.е., как следует из предложения 3.3, $A_n = M_{q_n}$. Пусть $s_n = [n-1, n], n > 1$ — кратность вложения A_{n-1} в A_n и $s_1 = q_1$. Тогда легко увидеть, что $q_n = s_1 s_2 \dots s_n$. В результате получаем диаграмму

$$\begin{array}{c} s_1 \\ |\dots| \\ s_1 s_2 \\ |\dots| \\ s_1 s_2 s_3 \\ \dots \end{array}.$$

Мы будем использовать для UHF-алгебры A с такой диаграммой обозначение M_s, $s = (s_n)_{n=1}^{\infty}$. В частном случае, когда все s_n равны 2, мы получаем бесконечномерную алгебру Клиффорда $\mathbb{C}\,l$, поскольку $Cl_{2n} = M_{2^n}$.

Пример 3.4. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ | & / & | \\ 2 & & 1 \\ | & / & | \\ 3 & & 1 \\ | & / & | \\ \dots & & \dots \end{array}.$$

AF-алгебра, которая ей соответствует, есть $\widetilde{K(H)}$ — унитализация алгебры компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве.

Следующее утверждение (см. [15])показывает, что любой идеал в AF-алгебре сам является AF-алгеброй.

Утверждение 3.4. *Пусть* $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ *— унитальная AF-алгебра и* $I \lhd A$ *— идеал. Обозначим* $I_n = I \cap A_n$*. Тогда* $I = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n}$*.* $\square$

Замечание 3.8. Предыдущее утверждение предоставляет комбинаторное описание идеалов в аппроксимативно конечной алгебре. Именно, пространство I_p является идеалом в $A_p = \bigoplus_{k=1}^{n_p} M_{[p,k]}$, следовательно, $I_p = \bigoplus_{k \in J_p} M_{[p,k]}$, $J_p \subset \{1, \ldots, n_p\}$. Тогда идеалу I можно сопоставить полную поддиаграмму D_I в диаграмме Браттели $D(A)$, вершины которой составляют множество $\Lambda = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{(p,k) \,|\, k \in J_p\}$. При этом диаграмма D_I будет обладать следующими свойствами:

1. из $k \in J_p$ и $[p, k; p+1, l] > 0$ следует, что $l \in J_{p+1}$;

2. если для всех l, таких что $[p, k; p+1, l] > 0$, выполнено $l \in J_{p+1}$, то $k \in J_p$.

Обратно, любая поддиаграмма, обладающая перечисленными выше свойствами, определяет некоторый идеал в A. Соответствие $I \mapsto D_I$ является биекцией (см. [15]).

3.3 K-теория AF-алгебр

Вычисление K-группы AF-алгебры не представляет труда в виду следующих двух фактов (см. [7, теоремы 7.2.4 и 7.3.12]).

Утверждение 3.5. *Пусть* $A = \bigoplus_{k=1}^{N} M_{n_k}$ *— конечномерная* C^**-алгебра. Тогда* $K_0(A) = \mathbb{Z}^N$*.* $\square$

Теорема 3.6 (непрерывность K-функтора)**.** *Пусть* (A_n, ϕ_n) *— прямая последовательность* C^**-алгебр и* $A = \lim_{n \to \infty} A_n$*. Тогда* $K_0(A) = \lim_{n\to\infty} K_0(A_n)$ *— прямой предел последовательности групп* $(K_0(A_n), (\phi_n)_*)$*.* $\square$

Пример 3.5. Пусть $A = \overline{\bigcup_{n=1} A_n}$, $A_n = M_{q_n}$ — равномерно гиперфинитная алгебра из примера 3.3. Тогда группа $K_0(A)$ является пределом последовательности групп

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{s_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{s_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{s_3} \mathbb{Z} \to \ldots$$

и, таким образом, изоморфна $\mathbb{Z}(s)$, где группа $\mathbb{Z}(s)$ состоит из рациональных чисел вида

$$\frac{m}{q_n} = \frac{m}{s_1 \ldots s_n}, \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

В частности, K-группа бесконечномерной алгебры Клиффорда равна группе двоично-рациональных чисел: $K_0(\mathbb{C}\,l) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Замечание 3.9. Пусть A — унитальная AF-алгебра. Обозначим $K_0(A)^+$ — множество классов стабильной эквивалентности конечных проективных модулей над A. Тогда $K_0(A)^+$ является конусом в $K_0(A)$. Частичный порядок, определяемый положительным конусом $K_0(A)^+$, задаёт на $K_0(A)$ структуру частично упорядоченной группы.

Основным результатом K-теории аппроксимативно конечных алгебр является классификационная теорема Эллиотта [7, теорема 7.2.10].

Теорема 3.7. *Пусть A, B — унитальные AF-алгебры и $\tau : K_0(A) \to K_0(B)$ — изоморфизм порядковых групп, являющийся унитальным, т.е. $\tau[1_A] = [1_B]$. Тогда существует *-изоморфизм $\phi : A \to B$, такой что $\phi_* = \tau$.* □

Таким образом, (унитальные) AF-алгебры однозначно задаются своей K-теорией. Следовательно, любые свойства AF-алгебры A проявляются тем или иным образом в группе $K_0(A)$. Примером может служить следующее предложение.

Предложение 3.8. *Пусть A — унитальная AF-алгебра. Тогда A — простая $\Longleftrightarrow$ для любых $\alpha \in K_0(A)^+,\ \alpha \neq 0,\ \beta \in K_0(A)$ найдётся $n \in \mathbb{N}$, такое что $\beta \leq n\alpha$.*

Доказательство. Из комбинаторного описания идеалов, данного в замечании 3.8, вытекает следующий критерий простоты алгебры (см. [15]): A проста тогда и только тогда, когда для каждой вершины (p, k) в диаграмме Браттели $D(A)$ найдётся $q \geq p$, такое что любая вершина $(q, l),\ l \in \{1, \ldots, n_q\}$ соединена с (p, k) монотонно возрастающим путём в $D(A)$.

Пусть $A = \overline{\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p}$ — простая алгебра, $\alpha \in K_0(A)^+$, $\beta \in K_0(A)$. Достаточно рассмотреть случай $\beta = [1_A],\ \alpha = [e_{(pk)}]$, где $e_{(pk)}$ — единица компоненты $M_(pk)$ в алгебре $A_p \subset A$. Так как A проста, то существует $q > p$, удовлетворяющее условию предыдущего абзаца. Это значит, что $M_{(pk)}$ вкладывается во все матричные компоненты алгебры A_q, так что кратность вложения $[p, k; q, l] \geq 1$ при всех $l \in \{1, \ldots, n_q\}$. Тогда индуцированное вложением отображение K-групп $(\phi_{pq})_* : K(A_p) \to K(A_q)$ переводит класс $[e_{(pk)}]$ в $\sum_{l=1}^{n_q}[q,l]^{-1}[p,k;q,l]\cdot[e_{(ql)}]$. Пусть $N=\max\{[q,1],\dots,[q,n_q]\}$. Тогда

$$N[e_{(pk)}]=N\sum_{l=1}^{n_q}[q,l]^{-1}[p,k;q,l]\cdot[e_{(ql)}]\geq\sum_{l=1}^{n_q}[q,l]^{-1}N[e_{(ql)}]\geq \sum_{l=1}^{n_q}[e_{(ql)}]=[1_A].$$

Пусть выполнено условие в правой части утверждения. Рассмотрим произвольный ненулевой идеал $I\lhd A$. Тогда I соответствует непустая поддиаграмма D_I. Пусть $(p,k)\in D_I$. Положим $\alpha=[e_{(pk)}]$, $\beta=[1_A]$. Тогда найдётся n, такое что $\gamma=n\alpha-\beta\geq 0$ в $K_0(A)$. Так как $K_0(A)=\lim_{n\to\infty}K_0(A_n)$, то можно считать, что $\gamma\in K_0(A_q)^+,\ q>p$. Тогда имеем неравенство

$$\gamma=n\sum_{l=1}^{n_q}[p,k;q,l]\cdot[e_{(ql)}]-\sum_{l=1}^{n_q}[q,l]\cdot[e_{(ql)}]= \sum_{l=1}^{n_q}\left([p,k;q,l]-[q,l]\right)[e_{(ql)}]\geq 0,$$

откуда $[p,k;q,l]>0$. Следовательно, все вершины (q,l), $l=1,\dots,n_q$ лежат в D_I. Это значит, что $I_q=A_q$, так что $1\in I$. Тогда $I=A$, так как I — идеал. Таким образом, A не имеет нетривиальных собственных идеалов, т.е. A проста. □

Определение 3.8. Пусть G — частично упорядоченная группа. Элемент $u\in G^+$ называется *порядковой единицей* группы G, если для каждого $g\in G^+$ существует $n\in\mathbb{N}$, такое что $g\leq nu$.

Таким образом, критерий простоты алгебры в предложении 3.8 может быть сформулирован так: каждый положительный элемент K-группы является порядковой единицей.

Вопрос о том, какие частично упорядоченные абелевы группы могут быть реализованы как $K_0(A)$ для некоторой AF-алгебры A, был решён Эффросом, Хандельманом и Шеном.

Определение 3.9. Счётная частично упорядоченная группа G называется *группой Рисса*, если

1. из $nx \in G^+$, $n \geq 1$ следует, что $x \in G^+$.

2. для любых x_1, x_2, y_1, y_2, таких что $x_i \leq y_j$ при всех i и j, существует элемент $z \in G$, такой что $x_i \leq z \leq y_j$ при всех i и j.

Имеем следующую теорему [20].

Теорема 3.9. *Если A — унитальная AF-алгебра, то $K_0(A)$ — группа Рисса, обладающая порядковой единицей. Обратно, если G — группа Рисса, имеющая порядковую единицу* $\mathbf{u}$, *то существует унитальная AF-алгебра A, чья K-группа $K_0(A)$ изоморфна G как порядковая группа, причём* $\mathbf{u}$ *при этом изоморфизме соответствует классу $[1_A]$ единичного проектора алгебры A.* □

AF-алгебра из следующего примера понадобится нам в главе 4 при рассмотрении алгебр фон Неймана.

Пример 3.6. Возьмём произвольное иррациональное число $\theta \in (0,1)$. Рассмотрим абелеву группу

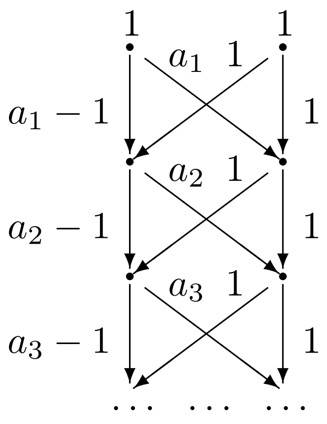
$$G_\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \{m + n\theta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

с порядком, индуцируемым вложением $G_\theta \subset \mathbb{R}$. Тогда G_θ — группа Рисса с порядковой единицей 1. Поэтому существует единственная с точностью до изоморфизма AF-алгебра A_θ, такая что $K_0(A_\theta) = G_\theta$. Приведём явную конструкцию алгебры A_θ.

Рассмотрим разложение числа θ в цепную дробь:

$$\theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad a_n \in \mathbb{N},$$

и определим $A_\theta = \lim_n A_n$ как AF-алгебру, соответствующую диаграмме Браттели



Тогда $K_0(A_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и отображение $(\phi_n)_* : K_0(A_n) \to K_0(A_{n+1})$ задаётся матрицей в каноническом базисе

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n - 1 & 1 \\ a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $T_n \in GL(2, \mathbb{Z})$, то $(\phi_n)_*$ — изоморфизм при всех n, так что $K_0(A_\theta) = \lim_n K_0(A_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Выделим теперь элементы, принадлежащие положительному конусу $K_0(A_\theta)^+$. Изоморфизм

$$\psi_n = (\phi_{n*})^{-1}\phi_*^1 = (\phi_{n-1})_* \ldots \phi_{1*} : K_0(A_1) \to K_0(A_n)$$

в канонических координатах (x_1, y_1) и (x_n, y_n) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = S_n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad S_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

где $S_n = T_{n-1} \ldots T_2 T_1$, $S_1 = I$. Заметим, что $A_n = M_{p_n+q_n}(\mathbb{C}) \oplus M_{r_n+s_n}(\mathbb{C})$. Так как $K_0(A_\theta)^+ = \bigcup_n K_0(A_n)^+$, то при отождествлении $K_0(A_\theta)$ и $K_0(A_1)$ с помощью изоморфизма ϕ_*^1 положительный конус $K_0(A_\theta)^+$ перейдёт в $\bigcup_{n=1}^\infty (\psi_{n*})^{-1} K_0(A_n)^+$. Множество $(\psi_{n*})^{-1} K_0(A_n)^+$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} p_n x_1 + q_n y_1 \geq 0, \\ r_n x_1 + q_n y_1 \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В силу равенства $S_{n+1} = T_n S_n$ имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (a_n - 1)p_n + r_n = a_n p_n + (r_n - p_n), & q_{n+1} &= a_n q_n + (s_n - q_n), \\ r_{n+1} &= a_n p_n + r_n, & s_{n+1} &= a_n q_n + s_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

с начальными условиями $p_1 = 1$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$, $s_1 = 1$. Покажем, что $r_n = p_n + p_{n-1}$ при $n > 1$. Равенство $r_2 = a_1 = (a_1 - 1) + 1 = p_2 + p_1$ составляет базу индукции. Пусть $r_n = p_n + p_{n-1}$. Тогда

$$r_{n+1} = a_n p_n + r_n = a_n p_n + (r_n - p_n) + p_n = p_{n+1} + p_n.$$

Следовательно, равенство $r_n = p_n + p_{n-1}$ имеет место при всех n. Аналогично, $r_n = q_n + q_{n-1}$, $n > 1$. Отсюда следует, что формулы (3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_n p_n + p_{n-1}, & p_1 &= 1, & p_2 &= a_1 - 1, \\ q_{n+1} &= a_n q_n + q_{n-1}, & q_1 &= 0, & q_2 &= 1, \\ r_n &= p_n + p_{n-1}, & s_n &= q_n + q_{n-1}. \end{aligned}$$

Известные формулы из теории цепных дробей показывают:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 - 1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}} = \theta'_{n-1} = \frac{1}{\theta_{n-1}} - 1,$$

где

$$\theta_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}.$$

Поэтому неравенства (3.1) эквивалентны паре неравенств

$$\begin{cases} y_1 + \theta'_n x_1 \geq 0, \\ y_1 + \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \theta'_n = \frac{1}{\theta} - 1$, то также $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{\theta} - 1$. Следовательно, в пределе оба неравенства дают одно условие $y_1 + (\frac{1}{\theta} - 1)x_1 \geq 0$. Заметим, что на прямой $y_1 + (\frac{1}{\theta} - 1)x_1 = 0$ лежит только одна точка с целочисленными координатами — $(0,0)$. Поэтому

$$(\phi^1_*)^{-1} K_0(A_\theta)^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, \theta y + (1-\theta)x \geq 0 \right\}.$$

Рассмотрим гомоморфизм абелевых групп $\rho : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = (1-\theta)x + \theta y$. Тогда $\rho(1_A) = \rho(1,1) = 1$ и порядок на $K_0(A_\theta)$ совпадает с порядком, индуцированным вложением ρ. Поэтому мы можем считать, что $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ с естественным порядком, т.е. $K_0(A_\theta) = G_\theta$.

3.4 Характеристические классы AF-алгебр

Основное свойство AF-алгебр, позволяющее полностью описать её характеристические классы, заключено в следующем утверждении (см. [7, теорема 6.3.11]).

Теорема 3.10. *Все AF-алгебры принадлежат классу сепарабельных ядерных C^*-алгебр.* □

Определение 3.10. Пусть дана некоторая AF-алгебра A. Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *бесконечно малым*, если $1+n\alpha \in K_0^+(A)$ для всех целых n. Бесконечно малые элементы образуют подгруппу $K_{inf}(A)$ в $K_0(A)$.

Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *приближённо скалярным*, если для любого натурального n существуют рациональное число p и натуральное l, такие что $pl \in \mathbb{Z}$ и $l(1 \pm n(\alpha - r \cdot 1)) \geq 0$. Приближённо скалярные элементы также образуют подгруппу, которую мы будем обозначать $K_{as}(A)$. Образ $K_{as}(A)$ при проекции на $\widetilde{K}_0(A)$ будет обозначаться $\widetilde{K}_{as}(A)$. Смысл введённых понятий станет ясен ниже.

Пример 3.7. Пусть $A = \widetilde{K(H)}$ — алгебра компактных операторов с добавленной единицей из примера 3.4. Тогда $K_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Конус положительных элементов вычисляется точно так же,как и в примере 3.6 и равен $K_0(A)^+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, x \geq 0\big\}$. Тогда множество бесконечно малых элементов есть $K_{inf}(A) = \{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{Z}\}$. Оно порождается классами эквивалентности конечномерных проекторов $p \in K(H) \subset A$. Заметим, что для любого функционала $\tau \in A^*$ типа следа, т.е. обладающего свойством $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a, b \in A$, и конечного проектора $p \in K(H)$ $\tau(p) = 0$. Подгруппа $K_{as}(A)$ в данном случае совпадает со всей группой $K_0(A)$.

Пример 3.8. Пусть $A = A_\theta,\ \theta \in [0, 1]\backslash\mathbb{Q}$ — алгебра из примера 3.6. Тогда $K_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $K_{inf}(A) = \{0\}$ и $K_{as}(A) = K_0(A)$.

Сформулируем основной результат этой главы.

Теорема 3.11. *Пусть A есть некоторая унитальная AF-алгебра и $ch_n : K_0(A) \to HC_{2n}(A)$ есть её характер Черна. Тогда для каждого $n \geq 0$*

1. $\ker ch_n = K_{inf}(A)$*;*

2. *линейное пространство, порождённое* $\operatorname{Im} ch_n$*, плотно в* $HC_{2n}(A)$*.*

Приведённый характер $\overline{ch}_n : \widetilde{K}_0(A) \to H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$ в этом случае обладает аналогичными свойствами

1'. $\ker \overline{ch}_n = \widetilde{K}_{as}(A)$*;*

2'. *линейное пространство, порождённое* $\operatorname{Im} \overline{ch}_n$*, плотно в* $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$*.*

Доказательство. Согласно теореме 3.10 достаточно рассмотреть только случай $n = 0$, т.е. убедиться в том, что отображение

$$\mathrm{Tr}\ : K_0(A) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} A/\overline{[A, A]}$$

обладает нужными свойствами.

Пусть $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$ — плотное семейство конечномерных подалгебр. Тогда имеем $K_0(A) = \lim K_0(A_n)$. Обозначим $\phi_n : K_0(A_n) \to K_0(A)$ — отображение, индуцированное вложением $A_n \to A$.

Рассмотрим отображения следа $\mathrm{Tr}_n : K_0(A_n) \to A_n/[A_n, A_n]$. Легко увидеть, что след Tr_n инъективен и порождённое его образом линейное пространство совпадает со всем $\widetilde{A}_n = A_n/[A_n, A_n]$.

Введём на множествах $K_0(A)$ и $K_0(A_n)$ ряд норм: "алгебраические"и "топологические"(со штрихом)

$$\begin{aligned}
&\|\cdot\|_n, \quad \|\alpha\|_n = \inf\left\{r \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists l \in \mathbb{N} : \ \frac{l}{r} \in \mathbb{Z},\ l \pm \frac{l}{r}\alpha \in K_0^+(A_n)\right\},\\
&\|\cdot\|_\infty, \quad \|\alpha\|_\infty = \inf\left\{r \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists l \in \mathbb{N} : \ \frac{l}{r} \in \mathbb{Z},\ l \pm \frac{l}{r}\alpha \in K_0^+(A)\right\},\\
&\|\cdot\|'_n, \quad \|\alpha\|'_n = \|\mathrm{Tr}_n(\alpha)\|_{\widetilde{A}_n},\\
&\|\cdot\|'_\infty, \quad \|\alpha\|'_\infty = \|\mathrm{Tr}\,(\alpha)\|_{\widetilde{A}},
\end{aligned}$$

где $\alpha \in K_0(A)$. Заметим, что $\alpha \in K_{inf}(A) \Leftrightarrow \|\alpha\|_\infty = 0$, а $S(A)$ является замыканием в $K_0(A)$ множества скаляров $\lambda\cdot 1$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$.

Покажем, что $\|\cdot\|_\infty = \lim_n \|\cdot\|_n = \lim_n \|\cdot\|'_n = \|\cdot\|'_\infty$. Тогда, в силу хаусдорфовости $HC_n(A)$,

$$\ker \mathrm{Tr} = \{\alpha \in K_0(A) \mid \|\alpha\|'_\infty = 0\} = \{\alpha \in K_0(A) \mid \|\alpha\|_\infty = 0\} = K_{inf}(A),$$

что доказывает первую часть теоремы.

1. Проверим равенство $\|\cdot\|_\infty = \lim_n \|\cdot\|_n$. Пусть $\alpha \in K_0(A_n)$. Если $l + lr\alpha \in K_0^+(A_n)$, $r \in \mathbb{Q}$, то $l + lr\phi_n(\alpha) = \phi_n(l + lr\alpha) \in K_0^+(A)$, так как $\phi_n(K_0^+(A_n)) \subset K_0^+(A)$. Поэтому $\|\alpha\|_\infty \equiv \|\phi_n(\alpha)\|_\infty \le \|\alpha\|_n$, откуда $\|\cdot\|_\infty \le \lim \|\cdot\|_n$.

Обратно, пусть $\alpha \in K_0(A)$ и $l \pm lr\alpha \ge 0$, $r \in \mathbb{Q}^+$. Тогда найдётся натуральное число n и элементы $\alpha_n \in K_0(A_n)$, $\beta_n^\pm \in K_0^+(A_n)$, такие что $\phi_n(\alpha_n) = \alpha$, $\phi_n(\beta_n^\pm) = l \pm lr\alpha$. Так как $\phi_n(l \pm lr\alpha_n) = \phi_n(\beta_n^\pm)$, то существует $m \ge n$, т.ч. элементы $\alpha_m = \phi_{nm}(\alpha_n) \in K_0(A_m)$ и $\beta_m^\pm = \phi_{nm}(\beta_n^\pm) \in K_0^+(A_m)$ связаны соотношением $1 \pm r\alpha_m = \beta_m^\pm$. Тогда $\|\alpha_m\|_m \le r^{-1}$, так что $\lim_m \|\alpha\|_m = \lim_m \|\phi_{nm}(\alpha_n)\|_m \le r^{-1}$. Отсюда следует обратное неравенство $\|\cdot\|_\infty \ge \lim_n \|\cdot\|_n$.

2. Рассмотрим конечномерную алгебру A_n. Тогда $A_n = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C})$. Пусть $a = \sum_k a_k$, $a_k \in M_{n_k}(\mathbb{C})$, есть некоторый элемент из A_n. C^*-норма

a равна $\|a\| = \max_k \rho(a_k^* a_k)$, где $\rho(\cdot)$ — спектральный радиус. Пускай $\pi_n : A_n \to \widetilde{A}_n = A_n/[A_n, A_n]$ — естественная проекция.

Лемма 3.12. *Пусть $A = M_m(\mathbb{C})$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма на ней и $\pi : A \to \widetilde{A} = A/[A, A]$ проекция. Тогда для любого $a \in A$ $\|\pi(a)\|_{\widetilde{A}} = \frac{1}{m}|\mathrm{Tr}\,(a)|$.*

Доказательство леммы. Пусть $a \in A$. Ясно, что для элемента $a' = m^{-1}\mathrm{Tr}\,(a) \cdot 1_A$ выполнено $a - a' \in [A, A]$, так что $\|\pi(A)\|_{\widetilde{A}} \leq \|a'\| = m^{-1}|\mathrm{Tr}\,(A)|$. В силу компактности существует $b \in A$, т.ч. $b - a \in [A, A]$, $\|b\| = \|\pi(a)\|_{\widetilde{A}}$. Покажем, что $b = a'$. В жордановом базисе элемент b распадается в сумму жордановых клеток $b = \bigoplus_{k=1}^n J_{n_k}(\lambda_k)$. Тогда $\|b\|^2$ равно максимальному собственному значению матрицы b^*b. Так как $b^*b \geq 0$, то

$$\|b\|^2 \geq \frac{1}{m}\mathrm{Tr}\,(b^*b) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^N (|\lambda_k|^2 + n_k - 1) \geq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2 \geq \frac{1}{m^2}\left|\sum_{k=1}^N \lambda_k\right|^2 = \frac{1}{m^2}|\mathrm{Tr}\,(b)|^2 = \frac{1}{m^2}|\mathrm{Tr}\,(a)|^2 = \|a'\|^2, \quad (3.3)$$

с другой стороны, $\|b\| \leq \|a'\|$. Следовательно, $\|b\| = \|a'\|$ и все неравенства в формуле (3.3) являются равенствами. Из второго неравенства в (3.3) получаем, что все n_k равны 0, т.е. b — диагональная матрица. Обращение в равенство третьего неравенства (Коши-Буняковского) означает, что вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и $(1, \dots, 1)$ пропорциональны, иначе говоря, $b = \lambda \cdot 1_A$, где $\lambda = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}\,(a)$. Таким образом, $a' = b$ и $\|\pi(a)\|_{\widetilde{A}} = \|a'\| = m^{-1}|\mathrm{Tr}\,(a)|$. $\square$

Из леммы следует, что $\|\pi_n(a)\|_{\widetilde{A}_n} = \max_k n_k^{-1}|\mathrm{Tr}\,(a_k)|$. Пусть $\alpha \in K_0(A_n)$. Тогда $\alpha = \sum \mu_k p_k$, где $\mu_k \in \mathbb{Z}$ и $p_k = [e_{11}^{(k)}]$ — класс стабильной эквивалентности матричной единицы $e_{11}^{(k)} \in M_{n_k}$, поскольку $K_0(A_n) = \mathbb{Z}p_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}p_N$ и $K_0^+(A_n) = \mathbb{N}p_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}p_N$. В результате применения следа получаем элемент $\mathrm{Tr}\,_n(\alpha) = \sum_k \mu_k \pi_n(e_{11}^{(k)})$, откуда

$$\|\alpha\|_n' = \left\|\sum_k \mu_k \mathrm{Tr}\,_n(p_k)\right\|_{\widetilde{A}_n} = \left\|\sum_k \mu_k \pi_n(e_{11}^{(k)})\right\|_{\widetilde{A}_n} = \max_{k=1,\dots,N} \frac{1}{n_k}\left|\mathrm{Tr}\,(\mu_k e_{11}^{(k)})\right| = \max_{k=1,\dots,N}\left|\frac{\mu_k}{n_k}\right|.$$

С другой стороны, имеем цепь эквивалентных условий:

$$l(1 \pm r\alpha) = \sum_k l(n_k \pm r\mu_k)p_k \geq 0 \Leftrightarrow n_k \pm r\mu_k \geq 0 \text{ и } lr\mu_k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$|r^{-1}| \geq \max_k \frac{|\mu_k|}{n_k} \text{ и } lr\mu_k \in \mathbb{Z}.$$

Условие целочисленности можно снять подходящим выбором $l \in \mathbb{N}$. Поэтому получаем равенство

$$\|\alpha\|_n = \max_{k=1,\ldots,N} \left|\frac{\mu_k}{n_k}\right| = \|\alpha\|'_n.$$

Переход к пределу даёт второе доказываемое тождество $\lim_n \|\cdot\|_n = \lim_n \|\cdot\|'_n$.

3. Пусть $x \in A_n$ для некоторого n. Так как $\bigcup_n A_n$ плотно в A, то $\bigcup_n [A_n, A_n]$ плотно в $[A, A]$. Поэтому

$$\|x\|_{\widetilde{A}} = \inf_{y \in [A,A]} \|x+y\|_A = \inf_{y \in [A_m, A_m],\ m \geq n} \|x+y\|_A =$$

$$\inf_{y \in [A_m, A_m],\ m \geq n} \|x+y\|_{A_m} = \inf_{m \geq n} \|x\|_{\widetilde{A}_m} = \lim_{m \to \infty} \|x\|_{\widetilde{A}_m},$$

где третье равенство следует из изометричности вложения $A_m \hookrightarrow A$, а четвёртое вытекает из изометричности гомоморфизма $A_n \hookrightarrow A_m$ и вложения $[A_n, A_n] \subset [A_m, A_m]$, в силу чего последовательность $\|x\|_{\widetilde{A}_m}$ монотонно убывает. Таким образом, оказывается справедливым последнее равенство для норм $\|\cdot\|'_\infty = \lim_n \|\cdot\|'_n$.

Для завершения доказательства остаётся показать плотность пространства, порождённого образом отображения Tr. Но это следует плотности пространства $\bigcup_n \widetilde{A}_n$ в $\widetilde{A}$ и того факта, что для конечномерной алгебры $A_n = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C})$ образ Tr_n есть решётка максимального ранга в $\widetilde{A}_n = \mathbb{C}^N$ и, таким образом, содержит некоторый базис пространства $\widetilde{A}_n$. □

Пример 3.9. Пусть A есть алгебра $\widetilde{K(H)}$, или равномерно гиперфинитная алгебра M_s, или A_θ. В любом случае имеем $K_{as}(A) = K_0(A)$, так что приведённый характер Черна, а значит, и все характеристические классы Каруби и Жураева-Мищенко-Соловьёва тривиальны. Из второго утверждения теоремы следует, что $\overline{HC}_0(A) = 0$, так что $A/\overline{[A,A]} = HC_0(A) = \mathbb{C}$. Согласно замечанию 3.4, предыдущее равенство означает, что на алгебре A имеется единственный нормированный след τ, который индуцирует вложение $K_0(A)$ в $\mathbb{R}$. Поскольку при этом классы проекторов переходят в положительные вещественные числа и алгебра A линейно порождается проекторами, то τ — положительный функционал на A. Этот факт будет использован в главе 4 (см. пример 4.1).

Пример 3.10. Пусть G — компактная группа. Тогда её C^*-групповая алгебра $C(G)$ является AF-алгеброй, поскольку содержит плотное семейство конечномерных подалгебр, составленных из матричных элементов неприводимых представлений. В этом случае $K_0(C(G))$ совпадает с кольцом представлений $R(G)$. Рассмотрим унитализацию $A = \widetilde{C(G)}$. Тогда A — унитальная AF-алгебра и $K_0(A) = K_0(C(G)) \oplus \mathbb{Z}$, так что $\widetilde{K}_0(A) = K_0(C(G))$. Так как в $K_0(A)$ нет приближённо скалярных элементов, отличных от нуля, (приведённый) характер Черна инъективен, т.е. различает все проективные модули. Этот результат есть переформулировка известного утверждения о том, что представление компактной группы однозначно определяется своим характером.

Глава 4

Алгебры фон Неймана

В этой главе мы рассматриваем такой класс C^*-алгебр, как алгебры фон Неймана, или операторные алгебры. Теория алгебр фон Неймана, в отличие от общей теории C^*-алгебр, оказывается более простой. В первом параграфе мы перечисляем некоторые факты из теории операторных алгебр, включая классификацию алгебр фон Неймана и две структурные теоремы, касающиеся дискретных операторных алгебр. Третья группа результатов, излагаемых в этом параграфе, описывает основные свойства гиперфинитного фактора типа II_1. Второй параграф посвящён вычислению K-теории операторных алгебр (теоремы 4.9 и 4.11). Поведение характеристических классов алгебр фон Неймана, разбираемое в параграфе 4.3, во многом похоже на случай полупростых алгебр из главы 2. Аналогом теоремы 2.1 об универсальных характеристических классах здесь служат теоремы 4.13 и 4.15, предложению 2.5 соответствует теорема 4.17.

4.1 Классификация алгебр фон Неймана

Напомним некоторые факты из теории алгебр фон Неймана.

Определение 4.1. Пусть ch — гильбертово пространство и $\mathcal{L}(H)$ — алгебра ограниченных линейных операторов на ch. Топология на $\mathcal{L}(H)$, определяемая системой полунорм $\|\cdot\|_x,\ \|T\|_x = \|Tx\|, \quad x \in \mathrm{ch}$, называется *сильной топологией.* Система полунорм $\|\cdot\|_{x,y},\ x, y \in \mathrm{ch},\ \|T\|_{x,y} = |<Tx, y>|$ задаёт *слабую* топологию на $\mathcal{L}(H)$.

Пусть $A \subset \mathcal{L}(H)$ — *-подалгебра. *Коммутантом* алгебры A называется множество

$$A' = \{a \in \mathcal{L}(H) \,|\, ab = ba \text{ для всех } b \in A\}.$$

Коммутант A' является *-подалгеброй в $\mathcal{L}(H)$.

Определение 4.2. *-алгебра $A \subset \mathcal{L}(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. A слабо замкнута;

2. A сильно замкнута.

Если A содержит единичный оператор 1_H, то перечисленным выше условиям эквивалентно следующее

3. A совпадает со своим бикоммутантом $A'' = (A')'$.

Определение 4.3. Пусть A — алгебра фон Неймана. *Следом* на множестве положительных элементов A^+ алгебры A называется отображение $\phi : A^+ \to [0, +\infty]$, обладающее такими свойствами:

1. для любых $a, b \in A^+$ $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$;

2. $\phi(\lambda a) = \lambda\, \phi(a)$ для любого $a \in A^+$ и $\lambda \in [0, +\infty)$;

3. если $a \in A^+$ и $u \in U(A)$ — унитарный элемент, то $\phi(uau^{-1}) = \phi(a)$.

След называется

верным, если равенство $\phi(a) = 0$ влечёт $a = 0$;

конечным, если $\phi(a) < +\infty$ для всех $a \in A^+$;

полуконечным, если для любого $a \in A^+$

$$\phi(a) = \sup\{\phi(b) \,|\, b \in A^+,\ b \leq a,\ \phi(b) < \infty\};$$

нормальным, если для любой возрастающей направленности (a_α) в A^+, имеющей точную верхнюю грань $a = sup_\alpha a_\alpha \in A^+$, $\phi(a) = \sup_\alpha \phi(a_\alpha)$.

Определение 4.4. Алгебра фон Неймана A называется *конечной (полуконечной)*, если для любого $a \in A^+$, $a \neq 0$ существует конечный (полуконечный) нормальный след ϕ на A^+, такой что $\phi(a) \neq 0$. Если единственным нормальным конечным (полуконечным) следом на A^+ является тождественное отображение в 0, то алгебра A называется *собственно бесконечной* (соотв. *типа* III).

Алгебра фон Неймана A называется *дискретной* или *типа* I, если она изоморфна алгебре фон Неймана B, коммутант которой B' коммутативен. Алгебра A называется *непрерывной*, если для любого проектора p из центра алгебры A алгебра pAp не является дискретной. Дискретная алгебра фон Неймана является полуконечной.

Говорят, что алгебра фон Неймана A имеет *тип* II_1, если она непрерывна и конечна, и *тип* II_∞, если она собственно бесконечна, полуконечна и непрерывна.

Замечательной особенностью теории алгебр фон Неймана оказывается наличие ряда структурных теорем.

Теорема 4.1 (см. [18]). *Пусть A есть алгебра фон Неймана. Тогда имеем разложение*

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4,$$

где A_1 — алгебра фон Неймана типа I*, A_2 имеет тип* II_1*, A_3 — тип* II_∞*, A_4 — тип* III. □

Теорема 4.2 (см. [18]). *Пусть A — алгебра фон Неймана типа* I. *Тогда A представима в виде произведения алгебр фон Неймана*

$$A = \prod_i B_i \otimes \mathcal{L}(H_i),$$

где B_i — абелева алгебра фон Неймана и кардинальные числа $n_i = \dim \mathrm{ch}_i$ все различны. При этом произведение $A_f = \prod_{i:\ n_i<\infty} B_i \otimes \mathcal{L}(H_i)$ является конечной алгеброй типа I*, а $A_\infty = \prod_{i:\ n_i \geq \infty} B_i \otimes \mathcal{L}(H_i)$ есть собственно бесконечная дискретная алгебра фон Неймана.* □

Определение 4.5. Алгебра фон Неймана A относится к *типу* I_n, $n < \infty$, если она изоморфна $B \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, B — абелева алгебра фон Неймана, и к *типу* I_∞, если $A \simeq B \otimes \mathcal{L}(H)$, где B коммутативна и $\dim \mathrm{ch} = \infty$.

Теорема 4.3 (см. [18]). *Пусть A — коммутативная алгебра фон Неймана. Тогда существует локально компактное пространство Z, положительная мера ν на Z с носителем Z и *-изоморфизм алгебр*

$$\psi : L^\infty_{\mathbb{C}}(Z, \nu) \to A,$$

где $L^\infty_{\mathbb{C}}(Z,\nu)$ есть алгебра существенно ограниченных комплекснозначных функций на Z. $\square$

Важным частным случаем алгебр фон Неймана являются факторы.

Определение 4.6. Алгебра фон Неймана A называется *фактором*, если её центр $\mathcal{Z}(A)$ состоит лишь из скаляров $\mathbb{C}\,1$.

Замечание 4.1. Из теорем 4.1, 4.2 следует, что фактор относится к одному из типов I_n, I_∞, II_1, II_∞, III. Фактор типа I изоморфен $\mathcal{L}(H)$.

Заметим, что множество конечных дискретных факторов является вполне упорядоченным (так как изоморфно $\mathbb{N}$). В частности, имеется минимальный фактор типа I — одномерная алгебра $\mathbb{C}$. Оказывается, что среди факторов типа II_1также есть в некотором смысле минимальный фактор.

Определение 4.7. Конечный непрерывный фактор называется *гиперфинитным фактором*, если он порождается как алгебра фон Неймана возрастающим семейством конечномерных *-подалгебр.

Теорема 4.4 (см. [18]). *Любые два гиперфинитные фактора изоморфны.* $\square$

Таким образом, имеется не более одного гиперфинитного фактора, который в дальнейшем мы будем обозначать как $\mathcal{R}$. Следующий пример показывает, что гиперфинитный фактор существует (ср. [7, теорема 6.2.5]).

Пример 4.1. Пусть A есть либо UHF-алгебра, либо алгебра A_θ из примера 3.6. В любом случае, A проста по предложению 3.8 и обладает единственным функционалом типа следа $\tau : A \to \mathbb{C}$, таким что $\tau(1) = 1$ (см. пример 3.9). Рассмотрим соответствующее τ представление Гельфанда-Наймарка-Сигала. Иными словами, мы рассматриваем на A полуторалинейную форму $<,>_\tau$, $< a, b >_\tau = \tau(a^*b)$, $a, b \in A$. Она неотрицательная и даже положительно определена в силу простоты A. Действительно, множество $N_\tau = \{a \in A \,|\, \tau(a^*a) = 0\}$ является левым идеалом в A, а значит и правым идеалом, поскольку τ — функционал типа следа. Так как $1 \notin N_\tau$, то N_τ — собственный идеал, следовательно, $N_\tau = 0$. Пополнение H_τ пространства A относительно формы $<,>_\tau$ является гильбертовым пространством и умножение в A индуцирует действие ρ_τ алгебры A на H_τ. В силу простоты алгебры ρ_τ является точным представлением, поэтому мы будем отождествлять алгебры A и $\rho_\tau(A)$. По теореме Рисса существует элемент $x \in H_\tau, \|x\| = 1$, такой что $\tau(a) =< ax, x >$ для всех $a \in A$.

Пусть M есть сильное замыкание алгебры $\rho_\tau(A) \subset \mathcal{L}(H_\tau)$. Тогда M — бесконечномерная алгебра фон Неймана и $\omega : M \to \mathbb{C}$, $\omega(b) = < bx, x >$, $b \in M$ есть конечный нормальный след на M в смысле определения 4.3. Покажем, что ω — верный след. Пусть $b \in M^+$ и $\omega(b) = 0$. Тогда $cx = 0$, где $c = b^{1/2}$. Тогда для любого самосопряжённого элемента $a \in A$

$$\|cax\|^2 =< cax, cax >= \omega(a^*c^*ca) = \omega(acca) = \omega(caac) =< acx, acx >= 0.$$

Отсюда по линейности получаем, что $cax = 0$ для любого $a \in A$. Так как множество $\{ax \,|\, a \in A\}$ плотно в H_τ, то $c = 0$, следовательно, $b = 0$. Из верности следа получаем, что M — конечная алгебра фон Неймана.

Пусть $\mathcal{Z}(M)$ — центр алгебры M и $p \in \mathcal{Z}(M)$, $p \neq 0$ — центральный проектор. Тогда $\omega'(b) = \omega(pb)$, $b \in M$ является конечным нормальным следом на M. След ω', ограниченный на A, пропорционален τ, так как τ — единственный (нормированный) след на A. Тогда из сильной непрерывности ω' и ω следует, что $\omega' = \lambda\omega$ на M. Так как $\omega'(p) = \omega(p^2) = \omega(p) \neq 0$, то $\lambda = 1$. Следовательно, $\omega(1-p) = \omega'(1-p) = \omega(p(1-p)) = 0$, откуда $1-p = 0$ и $p = 1$. Так как алгебра фон Неймана $\mathcal{Z}(M)$ порождается своими проекторами (см. [18]), то $\mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}\,1$, т.е. M — (конечный) фактор. M — бесконечномерно, значит, является непрерывным конечным фактором. Наконец, фактор M гиперфинитный, так как порождается возрастающим семейством конечномерных подалгебр, определяющих AF-алгебру A.

В монографии [18] доказывается следующее полезное свойство гиперфинитного фактора.

Теорема 4.5. *Пусть A — алгебра фон Неймана типа II_1. Тогда существует (унитальное) вложение гиперфинитного фактора $\mathcal{R}$ в A.* □

Последняя теорема вместе с нижеследующим утверждением характеризует $\mathcal{R}$ как минимальный конечный непрерывный фактор.

Утверждение 4.6 (см. [18])**.** *Любой подфактор гиперфинитного фактора является гиперфинитным фактором.* □

4.2 K-теория алгебр фон Неймана

Конус положительных элементов C^*-алгебры определяет частичный порядок $\leq$, однако для целей K-теории более подходит следующее более инвариантное определение.

Определение 4.8. Пусть A — C^*-алгебра и $p, q \in A$ — проекторы. Проекторы p и q называются *эквивалентными по Мюррею-фон Нейману*, если существует $u \in A$, такое что $p = u^*u,\ q = uu^*$. Для эквивалентных проекторов используется обозначение $p \sim q$. Отношение $p \prec q$ означает, что существует проектор $p' \sim p$, такой что $p' \leq q$.

Следующее утверждение будет использовано ниже в теореме 4.11.

Утверждение 4.7 (см. [18])**.** *Пусть p, q — проекторы в алгебре фон Неймана A. Тогда существует центральный проектор $g \in \mathcal{Z}(A)$, такой что $pg \prec qg$ и $q(1-g) \prec p(1-g)$.* □

Определение 4.9. Пусть A — алгебра фон Неймана и $p \in A$ называется *конечным(собственно бесконечным)*, если алгебра $A_p = pAp$ является конечной (собственно бесконечной).

Замечание 4.2. Пусть A — конечная алгебра фон Неймана. Из определения конечной алгебры следует, что любая подалгебра в A является конечной. Таким образом, любой проектор в A является конечным.

Пусть p — проектор в некоторой алгебре фон Неймана B. Согласно теореме о разложении 4.1, применённой к алгебре $B_p = pBp$, проектор p является собственно бесконечным тогда и только тогда, когда не существует ненулевого проектора g из центра алгебры B_p, такого что gB_pg — конечная алгебра фон Неймана.

Перейдём к рассмотрению K-теории алгебр фон Неймана. В силу структурной теоремы 4.1 и предложения 1.30, достаточно рассматривать случай, когда алгебра относится к некоторому определённому типу. Разберём сначала случай собственно бесконечных алгебр фон Неймана (типы I_∞, II_∞, III). Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Утверждение 4.8 (см. [18])**.** *Пусть p — собственно бесконечный проектор в алгебре фон Неймана A. Тогда существуют проекторы $p_1, p_2 \in A$, такие что $p_1 \sim p,\ p_2 \sim p$ и $p_1 + p_2 = p$.* □

Теорема 4.9. *Пусть A — собственно бесконечная алгебра фон Неймана. Тогда $K_0(A) = 0$.*

Доказательство. Так как алгебра $M_n(A)$ также является собственно бесконечной, то достаточно проверить, что любой проектор в A стабильно эквивалентен нулю. Итак, пусть $p \in A$ — проектор. Рассмотрим проектор $1 \oplus p \in M_2(A)$ и положим $B = M_2(A)_{1\oplus p}$. Покажем, что проектор $1 \oplus p$

собственно бесконечен. Предположим, что это не так. Тогда, согласно замечанию 4.2, существует ненулевой проектор

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}(B) \subset M_2(A),$$

такой что gBg — конечная алгебра фон Неймана. Проектор g коммутирует с элементами вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$, $x \in A$. Следовательно, $b = c = 0$ и $a \in \mathcal{Z}(A)$ — центральный проектор в A. Алгебра $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in aAa \right\} \subset gBg$ — конечная по замечанию 4.2. Следовательно, алгебра aAa является конечной. Но A — собственно бесконечная алгебра, так что $a = 0$. Таким образом, g имеет вид $g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Коммутирование проектора g с элементом $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$ даёт равенство $dp = pd = 0$. Остаётся заметить, что $g \in B$, так что

$$g = (1 \oplus p) g (1 \oplus p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & pdp \end{pmatrix} = 0,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $1 \oplus p$ — собственно бесконечный проектор. Воспользуемся предложением 4.8 — и получим, что

$$1 \oplus p = q_1 \oplus q_2, \quad q_1 \sim q_2 \sim 1 \oplus p,$$

где $q_1, q_2 \in M_2(A)$. Тогда имеем равенство в $K_0(M_2(A)) = K_0(A)$

$$[1 \oplus p] = [q_1 \oplus q_2] = [q_1] + [q_2] = 2[1 \oplus p],$$

откуда $[1 \oplus p] = 0$ и $[p] = -[1]$ для любого проектора $p \in A$. Повторяя предыдущие рассуждения для случая $p = 0$, мы получим, что $[1] = [0] = 0$. Следовательно, для любого проектора p выполнено $[p] = 0$, поэтому $K_0(A) = 0$. $\square$

Пусть теперь A есть конечная алгебра фон Неймана. Ключом к вычислению группы $K_0(A)$ является понятие операторного следа. Пусть $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}(A)$ — подалгебра фон Неймана в центре алгебры A. Тогда по теореме 4.3 $\mathcal{Z} \simeq L^\infty(Z, \nu)$ для некоторых Z и ν. Обозначим $\widehat{\mathcal{Z}}^+$ множество измеримых функций из Z в $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Определение 4.10. *Следом, ассоциированным с алгеброй* $\mathcal{Z}$, или $\mathcal{Z}$-*следом* на A^+ называется отображение $\Phi : A^+ \to \widehat{\mathcal{Z}}^+$, такое что

1. $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ для любых $a, b \in A^+$;

2. $\Phi(za) = z\Phi(a)$ для любого $a \in A^+$ и $z \in \mathcal{Z}^+$;

3. $\Phi(uau^{-1}) = \Phi(a)$, если $a \in A^+$ и $u \in U(A)$ — унитарный элемент.

Замечание 4.3. Понятия конечного, полуконечного, нормального и верного $\mathcal{Z}$-следа вводятся так же, как и в определении 4.3.

Теорема 4.10 (см. [18]). *Пусть A — конечная алгебра фон Неймана и $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр. Тогда существует единственный нормальный $\mathcal{Z}$-след τ на A^+, такой что $\tau(z) = z$ для любого $z \in \mathcal{Z}^+$. След τ является конечным и верным.* $\square$

Определение 4.11. След τ из теоремы 4.10 называется *каноническим* $\mathcal{Z}$-*следом* конечной алгебры A.

Замечание 4.4. Канонический след τ продолжается по линейности до отображения $\tau : A \to \mathcal{Z}$, обладающего свойствами

1. $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in A$;

2. $\tau(za) = z\tau(a)$ для всех $a \in A,\ z \in \mathcal{Z}$.

Сформулируем вторую основную теорему этого параграфа.

Пусть A — конечная алгебра фон Неймана. Пусть $A = A_0 \times \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_0 имеет тип II_1, A_n — тип I_n,— её разложение по типам и $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ — соответствующее разложение её центра. Пусть $\tau : A \to \mathcal{Z}$ — её канонический $\mathcal{Z}$-след. Отождествим, согласно теореме 4.3, $\mathcal{Z}_n$ с $L^\infty_{\mathbb{C}}(Z_n, \nu_n)$, а $\mathcal{Z}$ с $L^\infty_{\mathbb{C}}(\coprod_{n=0}^{\infty} Z_n, \coprod_{n=0}^{\infty} \nu_n)$.

Теорема 4.11. *Канонический след τ индуцирует изоморфизм $K_0(A)$ на подмножество*

$$M = \left\{ f \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\coprod_{n=0}^{\infty} Z_n, \coprod_{n=0}^{\infty} \nu_n) \,\middle|\, f(x) \in F_n \text{ для всех } x \in Z_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

в $\mathcal{Z}$, где $F_0 = \mathbb{R},\ F_n = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\},\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1. Проверим, что отображение $\tau_* : K_0(A) \to \mathcal{Z}$, индуцированное следом τ, инъективно. Поскольку для любого натурального n тензорное произведение A на $M_n(\mathbb{C})$ сохраняет разложение по типам и не меняет центра алгебры, а канонический след на $M_n(A)$, в силу его единственности, равен $\frac{1}{n}\tau \circ \mathrm{Tr}$, где Tr — обычный матричный след, то достаточно проверить, что два проектора $p, q \in A$, такие что $\tau(p) = \tau(q)$, стабильно эквивалентны. Согласно предложению 4.7 существует проектор $g \in \mathcal{Z}$, такой что $pg \prec qg$, $q(1-g) \prec p(1-g)$. Так как

$$\tau(gp) = g\tau(p) = g\tau(q) = \tau(gq),$$

аналогично, $\tau(q(1-g)) = \tau(p(1-g))$, то можно рассматривать только случай, когда $p \prec q$. По определению отношения порядка $\prec$, существует проектор p', такой что $p \sim p' \leq q$, т.е. $p = u^*u$, $p' = uu^*$ для некоторого $u \in A$ и $r = q - p' \in A^+$. Тогда

$$\tau(p') = \tau(uu^*) = \tau(u^*u) = \tau(p) = \tau(q),$$

откуда $\tau(r) = \tau(q) - \tau(p') = 0$. Так как τ — верный след, то $r = 0$ и $p' = q$. Следовательно, p и q эквивалентны, а значит, и стабильно эквивалентны.

2. Проверим сюръективность. Мы покажем, что любая функция $f \in M$, $f \geq 0$, $\|f\| \leq 1$ является образом некоторого проектора $p \in A$. В силу разложения $f = (f_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ достаточно для каждого n построить проектор $p_n \in A_n$, такой что $\tau(p_n) = f_n$.

Рассмотрим сначала случай $n > 0$. Тогда $A_n = M_n(\mathbb{C}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(Z_n, \nu_n)$. Согласно определению множества M функция f_n имеет вид

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \chi_{Y_k}, \quad Y_k \subset Z_n, \ \coprod_{k=0}^{n} Y_k = Z_n.$$

Пусть $q_k \in M_n(\mathbb{C})$, $0 \leq k \leq n$ — проектор ранга k. Рассмотрим проектор

$$p_n = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot \chi_{Y_k}.$$

Так как канонический след на A_n имеет вид $\tau = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}$, то

$$\tau(p_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0} \mathrm{Tr}\,(q_k) \chi_{Y_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \chi_{Y_k} = f_n,$$

т.е. p_n — искомый проектор.

Пусть теперь $n = 0$ и $f_0 \in L^\infty_{\mathbb{R}}(Z_0, \nu_0)$, такая что $0 \le f \le 1$. Пусть $(g_l)_{l=1}^\infty$ — монотонно возрастающая последовательность измеримых функций на Z_0, таких что для каждого l и $x \in Z_0$ $g_l(x) \in \{0, 2^{-l}, \dots, 2^l \cdot 2^{-l} = 1\}$ и $\lim_{l\to\infty} g_l = f_0$. Согласно теореме 4.5 в A_0 вкладывается гиперфинитный фактор $\mathcal{R}$. В свою очередь в $\mathcal{R}$ есть плотная C^*-подалгебра, изоморфная $\mathbb{C}\,l$ (см. пример 4.1). Пусть $\mathcal{P} = (p_\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap [0,1]$ — семейство проекторов в $\mathbb{C}\,l$, такое что $\tau(p_\lambda) = \lambda$ и $p_\lambda < p_\mu$ при $\lambda < \mu$. Такое семейство легко построить индуктивно, исходя из определения $\mathbb{C}\,l$ как предела возрастающей последовательности матричных алгебр. По аналогии с предыдущим пунктом, имеем $g_l = \sum_{s=1}^{n_l} \lambda_{ls} \chi_{Y_{ls}}$. Положим $q_l = \sum_{s=1}^{n_l} p_{\lambda_{ls}} \chi_{Y_{ls}} \in A_0$, тогда $\tau(q_l) = g_l$ и $(q_l)_{l=1}^\infty$ — возрастающая последовательность проекторов. Пусть $p = \lim_{l\to\infty} q_l$ относительно сильной сходимости. Тогда в силу нормальности канонического следа τ получаем

$$\tau(p) = \lim_{l\to\infty} \tau(q_l) = \lim_{l\to\infty} g_l = f_0.$$

Таким образом, множество $M_1 = M \cap \mathcal{Z}_1^+$, где $\mathcal{Z}_1^+$ — положительная часть единичного шара в $\mathcal{Z}$, лежит в образе следа τ_*. Так как M аддитивно порождается множеством M_1, то $M \subset \operatorname{Im} \tau_*$.

3. Проверим, наконец, что для любого $\alpha \in K_0(A)$ выполнено $\tau_*(\alpha) \in M$. Достаточно рассмотреть случай, когда $A = A_n = M_n(\mathbb{C}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(Z, \nu)$ и $\alpha = [p]$, $p \in A$ — проектор. Алгебру A можно отождествить с алгеброй существенно ограниченных функций на Z, принимающих значения в матрицах $n \times n$. При этом отождествлении канонический след τ вычисляется как $\tau(a) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr} \circ a, a \in L^\infty_{M_n(\mathbb{C})}(Z, \nu)$, где Tr — обыкновенный матричный след на $M_n(\mathbb{C})$, а проектор p представляется как измеримое поле проекторов в $M_n(\mathbb{C})$ на Z. Так как след проектора равен его рангу, т.е. есть целое число, то для почти всех $x \in Z$ $\mathrm{Tr}\,(p(x)) \in \mathbb{Z}$, следовательно, $\tau(p) \in M$. □

Следствие 4.12. *Пусть A — фактор. Тогда*

$$K_0(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ — собственно бесконечный фактор}, \\ \mathbb{Z}, & A \text{ — фактор типа } \mathrm{I}_n, \\ \mathbb{R}, & A \text{ — фактор типа } \mathrm{II}_1. \end{cases}$$

□

4.3 Характеристические классы алгебр фон Неймана

Теперь, когда известна K-теория алгебр фон Неймана, вычисление соответствующих характеристических классов не представляет труда. Рассмотрим сперва случай, когда алгебра является фактором.

Теорема 4.13. *Пусть A есть некоторый фактор. Тогда*

1. *характер Черна $ch_n : K_0(A) \to HC_{2n}(A)$ инъективен;*

2. *приведённый характер Черна $\overline{ch}_n : \widetilde{K}_0(A) \to \overline{HC}_{2n}(A)$ равен нулю.*

Доказательство. Достаточно рассматривать только конечные факторы I_n, II_1, поскольку бесконечные факторы I_∞, II_∞, III имеют тривиальную K-теорию. Случай I_n разобран выше (см. теорему 2.1). Поэтому перейдём сразу к факторам типа II_1.

Итак пусть A — непрерывный конечный фактор. Канонический след τ осуществляет биективное отображение $K_0(M)$ на $\mathbb{R}$. Так как τ, являясь следом, пропускается через отображение $ch_0 : A \to A/[A, A]$, то нулевой характер Черна, а стало быть, в силу периодичности Конна, и все остальные инъективны. Первая часть теоремы доказана.

Заметим, что вложение гиперфинитного фактора $\mathcal{R}$ в A индуцирует изоморфизм их K-групп. Поэтому можно считать, что $A = \mathcal{R}$. Пусть $\alpha \in K_0(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$. Покажем, что $\overline{ch}_n(\alpha) = 0$. Предположим, что $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Тогда (ср. с теоремой 2.1)

$$\overline{ch_n}(\alpha) = \frac{r}{s}\overline{ch}_n(1) = \frac{r}{s}0 = 0.$$

Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Можно считать, что $\alpha \in [0, 1]$, поскольку $\overline{ch}_n(1) = 0$. Рассмотрим AF-алгебру A_α, построенную в примере 3.6. Тогда имеется вложение $j : A_\alpha \hookrightarrow \mathcal{R}$ на сильно плотную подалгебру (см. пример 4.1). Так как на A_θ имеется единственный след, который совпадает с ограничением канонического следа на $\mathcal{R}$, то отображение $j_* : K_0(A_\alpha) \to K_0(\mathcal{R})$ является вложением $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \hookrightarrow \mathbb{R}$. Таким образом, элемент α есть образ некоторого элемента $\alpha' \in K_0(A_\alpha)$. Тогда, в силу естественности приведённого характера Черна $\overline{ch}_n(\alpha) = j_*\overline{ch}_n(\alpha')$. Но приведённый характер Черна на A_α тождественно равен нулю по теореме 3.11 и примеру 3.9. Следовательно, $\overline{ch}_n(\alpha) = 0$. Таким образом, $\overline{ch}_n$ — тождественный нуль для любого n. $\square$

Следствие 4.14. *Пусть A является фактором. Тогда для любого дифференциального исчисления Ω^* и любого проективного конечнопорождённого модуля E характеристический класс $c_n(E, \Omega^*)$ равен нулю. Характеристические классы Жураева-Мищенко-Соловьёва также все равны нулю.* $\square$

Перейдём к общему случаю.

Определение 4.12. Пусть A — конечная алгебра фон Неймана. Назовём элемент $\alpha \in K_0(A)$ *скалярным*, если образ α при действии канонического следа есть скалярный оператор. Множество всех скалярных элементов обозначим как $K_{sc}(A)$.

Сформулируем центральную теорему этой главы.

Теорема 4.15. *Пусть A — алгебра фон Неймана. Тогда*

1. *характер Черна $ch_n : K_0(A) \to HC_{2n}(A)$ инъективен;*
2. $\ker \left\{ \overline{ch}_n : K_0(A) \to \overline{HC}_{2n}(A) \right\} = K_{sc}(A)$.

Доказательство. В силу предложений 1.30, 1.32 и теорем 4.1, 4.9 можно ограничиться рассмотрением случая, когда A конечна.

Пусть $\alpha \in K_0(A),\ \alpha \neq 0$. По теореме 4.11 $\tau(\alpha) \neq 0$ в $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$, где τ — канонический $\mathcal{Z}$-след. По теореме Хана-Банаха существует непрерывный функционал $\phi \in \mathcal{Z}^*$, такой что $\phi(\tau(\alpha)) \neq 0$. Отображение $\phi \circ \tau$ является следом на A, поэтому представляется в виде композиции

$$\phi \circ \tau = \widetilde{\phi} \circ ch_0, \quad ch_0 : A \to HC_0(A) = A/[A, A], \quad \widetilde{\phi} : A/[A, A] \to \mathbb{C}\,.$$

Следовательно, $ch_0(\alpha) \neq 0$. Таким образом, ch_0, а вместе с ним и все $ch_n,\ n \in \mathbb{N}$, суть инъективные отображения. Отсюда также следует, что $\ker \overline{ch}_n \subset Sc(A)$. Покажем обратное включение.

Пусть $\alpha \in Sc(A)$. Если A не является непрерывной, т.е. её разложение содержит блоки типа I_n, то, как следует из теоремы 4.11, $\tau(\alpha) = \lambda 1$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$. Отсюда получаем

$$\overline{ch}_n(\alpha) = \lambda \overline{ch}_n(1) = 0.$$

Предположим, что A непрерывна. Тогда по теореме 4.5 имеется вложение $j : \mathcal{R} \to A$ гиперфинитного фактора в A, которое, как нетрудно заметить, отображает $K_0(\mathcal{R})$ на $K_{sc}(A)$. Остаётся воспользоваться естественностью приведённого характера Черна и теоремой 4.13. $\square$

Посмотрим, как обстоит дело с неуниверсальными характеристическими классами. Нам пригодится следующая лемма.

Лемма 4.16. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей и Ω^* — центральное дифференциальное исчисление на A. Пусть E — проективный конечнопорождённый модуль, определяемый проектором $p \in A$, лежащим в центре алгебры. Тогда для всех n $c_n(E, \Omega^*) = 0$.*

Доказательство. Вычисляя характеристический класс с помощью грассмановой связности, получим равенство

$$c_n(E, \Omega^*) = [p(dp)^{2n}] = [p^2 dp(dp)^{2n-1}] = [pdp\, p(dp)^{2n-1}] = 0,$$

где мы воспользовались центральностью проектора p и тождеством $pdp\, p = 0$. □

Теорема 4.17. *Пусть A — алгебра фон Неймана, Ω^* — (банахово) центральное дифференциальное исчисление на A. Тогда для любого $\alpha \in K_0(A)$ $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = 0$, где $\| \cdot \|$ — индуцированная (полу)норма на пространстве $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$.*

Доказательство. Можно считать, что A — конечная алгебра и $\alpha = [p]$, где $p \in A$ — проектор. Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A) \simeq L^\infty_{\mathbb{C}}(Z, \nu)$ — центр алгебры A и $\tau : A \to \mathcal{Z}$ — канонический $\mathcal{Z}$-след.

Возьмём произвольное натуральное число N. Так как $f = \tau(p) \in M_1$, где

$$M_1 = \{f \in M \mid f(x) \in [0, 1] \text{ для почти всех } x \in Z\}$$

(см. теорему 4.11), то для почти всех $x \in Z$ имеем $Nf(x) \in [0, N]$. Пусть $Y_k = f^{-1}[k, N]$, $k = 1, \ldots, N$ и $g_k = \chi_{Y_k} \in \mathcal{Z}$. Пусть $f_1 = Nf - \sum_{k=1}^N g_k$. Тогда $g_k, f_1 \in M_1$, поэтому $f_1 = \tau(p_1)$, p_1 — проектор в A, а g_k, $k = 1, \ldots, N$, — центральные проекторы в A. Разложению $Nf = \sum_{k=1}^N g_k + f_1$ соответствует разложение

$$N\alpha = \sum_{k=1}^{n} [g_k] + [p_1].$$

Тогда

$$Nc_n(\alpha, \Omega^*) = c_n(N\alpha, \Omega^*) = \sum_{k=1}^{N} c_n(g_k, \Omega^*) + c_n(p_1, \Omega^*) = c_n(p_1, \Omega^*)$$

в силу предыдущей леммы. Так как $\|p_1\| \leq 1$, то $\|p_1^{\otimes 2n+1}\| \leq 1$ в $A^{\otimes 2n+1}$. Следовательно, $\|p_1(dp_1)^{2n}\| \leq 1$ в $\Omega^{2n}_{univ}(A)$ и, наконец, $\|c_n(p_1)\| \leq 1$ в $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{univ}(A))$. Пусть $C = \|\psi\|$ есть норма канонического морфизма $\psi : \Omega^*_{univ}(A) \to \Omega^*$. Тогда получаем неравенство

$$N\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = \|c_n(N\alpha, \Omega^*)\| = \|c_n(p_1, \Omega^*)\| = \|\psi_* c_n(p_1)\| \leq C \cdot 1 = C,$$

откуда $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| \leq \frac{C}{N}$. Так как выбор N произволен, то $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = 0$, что и требовалось доказать. □

Замечание 4.5. Если пространство когомологий $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$ является хаусдорфовым, то из доказанной теоремы следует, что $c_n(\alpha, \Omega^*) = 0$ для всех $\alpha \in K_0(A)$.

Следствие 4.18. *Пусть A — алгебра фон Неймана. Тогда для любого $\alpha \in K_0(A)$ и любого n характеристический класс Жураева-Мищенко-Соловьёва не отделим от нуля в топологии, определяемой индуцированной нормой, т.е. $\|Ch_n(\alpha)\| = 0$.* □

Литература

[1] Винберг Э. Б. Лекции по алгебре. М.: МЦНМО, 1995. — 150 с.

[2] Жураев Ю. Й. Характеристические классы модулей над некоммутативными алгебрами. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1987.

[3] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K-теории. Тираспольский симпозиум по общей топологии и её приложениям. Кишинёв: Штиинца. — 1985. — С. 91–92

[4] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K-теории. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 1986. — N 1. — С. 75–76

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.1. М.: Наука. — 1981. — 344с.

[6] Корнеева Е. В. Характеристические классы в некоммутативной дифференциальной геометрии. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, МГУ, 2003.

[7] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал. — 1997. — 336 с.

[8] Милнор Дж. Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1974. — 246 с.

[9] Никонов И. М. Дифференциальные исчисления Вороновича диэдральных групп. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 2002. — N 6. — С. 10–14

[10] Никонов И. М. Пример нетривиального характеристического класса групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_3]$. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 2002. — N 4. — С. 58–60

[11] Никонов И. М. Ядро характера Каруби для полупростых алгебр. // Деп. в ВИНИТИ N 1896-B2003 от 31.10.2003

[12] Попеленский Ф. Ю., Соловьёв Ю. П. О конструкциях характеристических классов в некоммутативной геометрии.

[13] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984. — 272 с.

[14] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986. — 287 с.

[15] Bratteli O. Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — 171. — С. 195–234

[16] Connes A. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994. — 662 c.

[17] Connes A. On the cohomology of operator algebras. // J. Functional Anal. — 1978. — 28, N. 2 — C. 248–253.

[18] Dixmier J. Von Neumann algebras. Amsterdam: North–Holland Publishing Company, 1981. — 383 c.

[19] Dubois-Violette M. Lectures on graded differential algebras and noncommutative geometry. math.QA/9912017

[20] Effros E. G., Handelman D. E., Shen C.-L. Dimension groups and their affine representations. // Amer. J. Math. — 1980. — 102, N. 2 — C. 385–407

[21] Haagerup U. All nuclear C^*-algebras are amenable. // Invent. Math. — 1983. — 74, N. 2 — c. 305–319.

[22] Karoubi M. K-théorie et cohomologies cycliques. Astérisque, Paris, 1987—149.

[23] Landi G. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. hep-th/9701078

[24] Loday J.-L. Cyclic homology. Grunlehren der mathematischen Wissenschaften, 301. — Berlin: Springer-Verlag. — 1992. — 455 c.