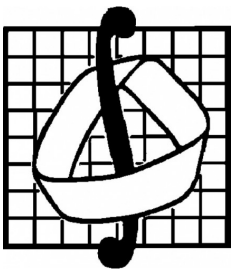
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Николаенко Станислав Сергеевич

УДК 517.938.5

Топологическая классификация интегрируемых систем типа Чаплыгина–Горячева

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН А.Т. Фоменко

Москва – 2019

Оглавление

Введение **3**

1 Основные определения и классические результаты **27**

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы 27

1.2 Слоение Лиувилля, лиувиллева эквивалентность и теорема Лиувилля 28

1.3 Отображение момента и его особые точки 29

1.3.1 Особые точки ранга 0 30

1.3.2 Особые точки ранга 1 31

1.3.3 Особые точки подмногообразий в $\mathbb{R}^n$ 31

1.4 Бифуркационная диаграмма 32

1.5 Изоэнергетические многообразия, боттовость и топологическая устойчивость . . . 32

1.6 3-атомы и 2-атомы 33

1.7 Инвариант Фоменко (молекула) 34

1.8 Инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула) 36

1.9 Траекторная эквивалентность интегрируемых систем 38

1.10 Сопряжённость динамических систем 40

1.11 Топология изоэнергетических многообразий 41

1.12 Метод булевых функций М. П. Харламова 42

1.12.1 Разделение переменных и булевы функции 43

1.12.2 Пример: геодезический поток трёхосного эллипсоида общего положения . 43

2 Семейство интегрируемых систем Чаплыгина–Горячева **48**

2.1 Постановка задачи 48

2.2 Особые точки ранга ноль 51

2.3 Бифуркационная диаграмма 59

2.4 Особые точки ранга один 79

2.5 Топология изоэнергетических многообразий 82

3 Случай Чаплыгина ($b = 0$) 89
3.1 Грубый лиувиллев анализ . . . 89
3.2 Тонкий лиувиллев анализ . . . 90
3.3 Наглядное описание топологии . . . 97
3.3.1 Параметризация I-торов . . . 98
3.3.2 Параметризация II-торов . . . 103
3.3.3 Параметризация III-торов . . . 111
3.3.4 Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга . . . 119
3.4 Применение разделения переменных к вычислению инвариантов Фоменко–Цишанга . . . 125
3.5 Лиувиллева и траекторная эквивалентность случаю Эйлера и задаче Якоби . . . 129

4 Компактный случай Горячева ($b > 0$) 148
4.1 Грубый лиувиллев анализ . . . 148
4.2 Тонкий лиувиллев анализ . . . 150
4.2.1 Доказательство леммы 4.5 . . . 160

5 Некомпактный случай Горячева ($b < 0$) 169

Заключение 179

Список литературы 181

Введение

Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертация посвящена исследованию одного классического интегрируемого случая динамики твёрдого тела.

В 1902 году С. А. Чаплыгиным [54] был обнаружен новый случай интегрируемости в задаче о движении твёрдого тела в жидкости. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, заполняет бесконечный объём, обладает однозначным потенциалом скоростей и покоится на бесконечности. При этих условиях движение твёрдого тела описывается системой шести обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Кирхгофа. В гамильтоновой форме эта система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{r} \times \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}; \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Здесь $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – трёхмерные векторы *импульсивного момента* и *импульсивной силы* в проекциях на оси, жёстко связанные с телом. Эти векторы связаны соответственно с угловой и линейной скоростью твёрдого тела преобразованием Лежандра. Гамильтониан H имеет смысл суммарной кинетической энергии тела и жидкости и записывается в переменных $\mathbf{s}$, $\mathbf{r}$ в виде положительно определённой квадратичной формы:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{As}, \mathbf{s}) + (\mathbf{Bs}, \mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{Cr}, \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – постоянные матрицы, причём в подходящей системе координат, связанной с твёрдым телом, матрица $\mathbf{A}$ диагональна, а $\mathbf{B}$ – симметрична. Физический смысл матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ связан с присоединёнными массами и моментами инерции тела в жидкости.

Вывод уравнений Кирхгофа содержтся, например, в [13].

В найденном С. А. Чаплыгиным интегрируемом случае гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + c(r_1^2 - r_2^2)), \tag{0.0.2}$$

где c – произвольная постоянная. В той же работе [54] С. А. Чаплыгиным найдено вещественное разделение переменных, позволяющее решить задачу в квадратурах.

В 1916 году Д. Н. Горячевым [17] был обнаружен новый случай интегрируемости уравнений Эйлера, описывающих движение твёрдого тела в потенциальном поле. В гамильтоновой форме уравнения Эйлера имеют такой же вид, как и уравнения (0.0.1), но в этом случае вектор $\mathbf{s}$ имеет смысл кинетического момента, а $\mathbf{r}$ – неподвижный в объемлющем пространстве единичный вектор, записанный в системе координат, жёстко связанной с телом. В интегрируемом случае, найденном Горячевым, потенциальная функция имеет вид

$$U = \frac{1}{2}\left(c(r_1^2 - r_2^2) + \frac{b}{r_3^2}\right),$$

а это означает, что гамильтониан в данном случае отличается от гамильтониана (0.0.2) лишь слагаемым $\dfrac{b}{2r_3^2}$. Таким образом, в частном случае $b = 0$ система Горячева превращается в систему Чаплыгина. Параметр c в обеих задачах можно исключить надлежащей линейной заменой переменных, поэтому случай Горячева – это однопараметрическое семейство систем, задаваемое параметром b. Мы будем называть это семейство систем системами типа Чаплыгина–Горячева и выделять три качественно различных случая: $b = 0$ (случай Чаплыгина), $b > 0$ (случай Горячева с компактными лиувиллевыми слоями) и $b < 0$ (случай Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями).

В данной работе системы типа Чаплыгина–Горячева изучаются с точки зрения теории топологической классификации невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы, созданной А. Т. Фоменко и его школой. Основы этой теории заложены в работах [48, 6, 49], а наиболее полное её изложение в современной терминологии содержится в монографии [8]. Основные результаты теории А. Т. Фоменко связаны с построением полного топологического инварианта слоения Лиувилля интегрируемой системы с двумя степенями свободы на инвариантном 3-мерном подмногообразии. Напомним, что *слоением Лиувилля*, отвечающим интегриуемой системе, называется разбиение фазового пространства на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов. В типичном (нерезонансном) случае слоение Лиувилля является важным инвариантом системы, позволяющим понять многие её качественные характеристики (такие как устойчивость особых траекторий, смена различных режимов движения и др.). Согласно классической теореме Лиувилля, в компактном случае слоение Лиувилля тривиально в окрестности почти всех слоёв, однако наличие особых слоёв делает его глобально нетривиальным. Поэтому важной составной частью топологического анализа слоения Лиувилля является описание бифуркаций регулярных слоёв через особые. Окончательный инвариант слоения Лиувилля имеет вид графа (молекулы) с числовыми метками, рёбра которого отвечают семействам регулярных слоёв, а вершины – их перестройкам (атомам).

Инварианты, построенные в теории Фоменко, были применены его учениками и другими авторами к топологическому анализу слоений Лиувилля многих классических интегрируемых систем, в частности, интегрируемых случаев в динамике твёрдого тела (А. А. Ошемков [35, 34, 33, 68], А. В. Болсинов [56], П. Й. Топалов [42], П. В. Морозов [26, 27], Н. С. Слави-

на [39] и др.), интегрируемых геодезических потоков (Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова, Е. Н. Селиванова [71, 37, 66, 28], В. В. Калашников (мл.) [18], В. С. Матвеев [64, 65]), интегрируемых биллиардов (В. В. Ведюшкина (Фокичева) [44, 14, 15, 16]). В результате выявлена топологическая эквивалентность многих интегрируемых систем, часто имеющих разное физическое происхождение.

Топологический анализ семейства интегрируемых систем Чаплыгина–Горячева был начат О. Е. Орёл и П. Е. Рябовым в работах [67, 36]. Для случая Чаплыгина ($b = 0$) [67] ими была найдена бифуркационная диаграмма отображения момента, определены топологические типы неособых изоэнергетических многообразий, исследованы бифуркации лиувиллевых торов и построен грубый лиувиллев инвариант (молекула). П. Е. Рябовым [36] был исследован случай Горячева при $b > 0$: найдено вещественное разделение переменных (дающее решение задачи в квадратурах), найдена бифуркационная диаграмма отображения момента, изучены типы особых точек отображения момента ранга 0 и 1, исследованы бифуркации торов Лиувилля.

Настоящая работа завершает решение задачи топологического анализа систем типа Чаплыгина–Горячева при всех значениях параметра $b \in \mathbb{R}$. В случае $b \geq 0$ для всех неособых топологически устойчивых уровней энергии вычисляется полный инвариант лиувиллевой эквивалентности (инвариант Фоменко–Цишанга, или меченая молекула). Кроме того, в случае $b = 0$ вычисляются инварианты траекторной эквивалентности. Как оказалось, случай Чаплыгина ($b = 0$) на всех неособых уровнях энергии топологически эквивалентен хорошо известному случаю Эйлера в динамике твёрдого тела, а при больших энергиях – также системе Якоби (геодезическому потоку трёхосного эллипсоида). Кроме того, на соответствующих уровнях энергии система Чаплыгина оказывается также траекторно эквивалентной системам Эйлера и Якоби (точную формулировку см. ниже).

Случай $b < 0$ интересен тем, что все лиувиллевы слои оказываются некомпактными. Отметим, что теория А. Т. Фоменко существенно использует компактность слоёв. Попыткам её обобщения на некомпактный случай посвящено довольно большое количество работ (см. [60, 19, 21, 20, 1]). Это направление сейчас активно разрабатывается, что связано с наличием большого числа реальных механических систем с некомпактными слоениями Лиувилля. Случай Горячева при $b < 0$ пополняет этот список. В данной работе для него выполняется грубый лиувиллев анализ, на всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии вычисляется инвариант Фоменко (молекула).

Одним из основным методов топологического анализа, используемых в данной работе, является метод булевых функций М. П. Харламова [50], позволяющий эффективно исследовать топологию слоений Лиувилля интегрируемых систем с разделяющимися переменными. При этом требуется, чтобы фазовые переменные “достаточно хорошо” выражались через переменные разделения. При этих условиях нахождение образа отображения момента, а также числа лиувиллевых слоёв в прообразе его точек сводится к анализу некоторой системы $\mathbb{Z}_2$-линейных уравнений.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. лиувиллева и топологическая траекторная классификация системы Чаплыгина ($b = 0$) на неособых уровнях энергии в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга (меченой молекулы) и Болсинова–Фоменко (t-молекулы);

2. лиувиллева классификация систем типа Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$) на неособых топологически устойчивых уровнях энергии в терминах инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы);

3. грубая лиувиллева классификация систем типа Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$) на неособых топологически устойчивых уровнях энергии в терминах инварианта Фоменко (молекулы);

4. выявление среди исследованных систем лиувиллевых и траекторных эквивалентностей с ранее изученными интегрируемыми системами.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Впервые демонстрируется применение метода булевых функций М. П. Харламова для вычисления тонких инвариантов Фоменко–Цишанга.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1) для системы Чаплыгина ($b = 0$):

- имеется 6 особых точек ранга ноль, две из которых невырождены;
- слоение Лиувилля на неособых уровнях энергии описывается инвариантами Фоменко–Цишанга (мечеными молекулами) трёх типов;
- топологический траекторный портрет на неособых уровнях энергии описывается инвариантами Болсинова–Фоменко (t-молекулами) четырёх типов;

2) для систем типа Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$):

- слоение Лиувилля на неособых топологически устойчивых уровнях энергии описывается инвариантами Фоменко–Цишанга (мечеными молекулами) трёх типов;

3) для систем типа Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$):

- при $b \in (-1, 0)$ имеется шесть, а при $b \leq -1$ – две особые точки ранга ноль, которые невырождены при $b \neq -1$ и вырождены при $b = -1$;
- бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из двух парабол, двух лучей, касающихся парабол в их вершинах, и отрезка, касающегося обеих парабол;
- слоение Лиувилля на неособых топологически устойчивых уровнях энергии (грубо) описывается инвариантами Фоменко (молекулами) семи типов;

4) при подходящих значениях энергии системы Чаплыгина и Горячева при $b > 0$ лиувиллево эквивалентны основным классическим случаям интегрируемости в динамике твёрдого тела (случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской–Яхьи, Сретенского, Жуковского, Клебша, Соколова), а также некоторым интегрируемым биллиардам (при соответствующих значениях энергии и параметров этих систем);

5) при подходящих значениях энергии система Чаплыгина топологически траекторно эквивалентна геодезическому потоку трёхосного эллипсоида, а также случаю Эйлера в динамике твёрдого тела (при соответствующих значениях энергии и параметров этих систем).

Методы исследования

В диссертации используются методы топологии, математического анализа, линейной алгебры и алгебраической геометрии. Для описания топологии лиувиллевых слоений используются методы теории топологической классификации интегрируемых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой, а также методы топологического анализа, разработанные М. П. Харламовым. Для экспериментального анализа функций вращения привлекается программный пакет “Wolfram Mathematica”.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при изучении топологии интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем. Использованные в диссертации приёмы вычисления топологических инвариантов могут быть применены при исследовании других интегрируемых случаев. Рассмотренные примеры некомпактных лиувиллевых слоений могут быть полезны для построения общей теории топологической классификации интегрируемых систем с некомпактными лиувиллевыми слоями.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

- международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (Москва, 30 мая – 4 июня, 2011);
- International Topological Conference "Alexandroff Readings" (Moscow, May 21-25, 2012);
- XVII Geometrical Seminar (Zlatibor, Serbia, Sebtember 3-8, 2012);
- XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва, 8-12 апреля 2013 г.);
- международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. С. Г. Крейна" (Воронеж, 26-31 января 2014 г.);
- XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2014» (Москва, 7-11 апреля 2014 г.);
- XIII Serbian Mathematical Congress (Vrnjačka Banja, Serbia, May 22-25, 2014);
- XVIII Geometrical Seminar (Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014);
- XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015» (Москва, 13-17 апреля 2015 г.);
- международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. С. Г. Крейна" (Воронеж, 25-31 января 2016 г.);
- 4th International Workshop "Geometry, Analysis and Probability" (Moscow, September 26 – October 1, 2016);
- 4th International Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (Barcelona, Spain, July 3-7, 2017);
- International Conference on Topology and its Applications (Nafpaktos, Greece, July 7-11, 2018);
- 5th International Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (Shanghai, China, May 6-12, 2019);
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin (Nonholonomic Mechanics, Vortex Structures and Hydrodynamics)" (Cheboksary, June 2-6, 2019);
- семинар "Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством акад. А. Т. Фоменко (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);

- семинар “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);

- семинар “Некоммутативная геометрия и топология” под руководством проф. А. С. Мищенко, проф. В. М. Мануйлова, проф. И. К. Бабенко, доц. А. А. Ирматова (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова).

Публикации автора

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах [74, 75, 76, 77, 78], пять из которых опубликованы в журналах, удовлетворяющих пункту 2.3 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 189 страницах, содержит 4 таблицы и 93 рисунка. Библиографический список содержит 94 наименования.

Содержание работы

Во **введении** формулируются цели работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

В **главе 1** даётся краткий обзор теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем А. Т. Фоменко. Приводятся определения гамильтоновой системы, интегрируемости по Лиувиллю, слоения Лиувилля, лиувиллевой эквивалентности, отображения момента, его особых точек и бифуркационной диаграммы, атома, инварианта Фоменко (молекулы), инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы), траекторной эквивалентности, инварианта Болсинова–Фоменко (t-молекулы). Даётся краткое описание метода булевых функций М.П. Харламова, а также алгоритма определения топологического типа изоэнергетического многообразия гамильтоновой системы.

Определение 0.0.1. *Гамильтонова система с n степенями свободы* – это тройка (M^{2n}, ω, H), где

- M^{2n} – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω;

- $H \in C^\infty(M^{2n})$ – функция Гамильтона (гамильтониан), порождающая гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1} dH$.

Определение 0.0.2. Гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она обладает n первыми интегралами $f_1, \ldots, f_n$, такими, что

1. $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы на M^{2n} (т.е. их дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы почти всюду на M^{2n});

2. $\{f_i, f_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ (т.е. интегралы $f_1, \ldots, f_n$ находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, порождённой симплектической структурой ω).

Замечание 0.0.1. Часто в определение интегрируемости по Лиувиллю включают требование, чтобы гамильтоновы потоки, порождённые векторными полями $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$, были полны, т. е. чтобы естественный параметр (время) на их интегральных траекториях был определён на всей числовой прямой

Определение 0.0.3. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе, называется разбиение фазового многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$, называемые *лиувиллевыми слоями*.

Определение 0.0.4. Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_1^{2n}, \omega_1, H_1)$ и $(M_2^{2n}, \omega_2, H_2)$ называются *лиувиллево* (или *топологически*) *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм M_1^{2n} на M_2^{2n}, переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы. Имеет смысл также говорить о лиувиллевой эквивалентности систем, ограниченных на некоторые инвариантные подмногообразия (например, изоэнергетические подмногообразия $\{H = const\}$).

Определение 0.0.5. Слой L слоения Лиувилля называется *регулярным*, или *неособым*, если дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы всюду на L. В противном случае слой называется *особым*.

Как следует из классической теоремы Лиувилля, слоение Лиувилля тривиально в окрестности неособого компактного слоя. Однако из-за наличия особых слоёв оно не является, вообще говоря, глобально тривиальным. В связи с этим исследование особых слоёв составляет наиболее существенную часть задачи описания глобальной топологии слоения Лиувилля.

В случае полноты гамильтоновых потоков, порождённых полями $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$, на каждом лиувиллевом слое определено гамильтоново действие группы $\mathbb{R}^n$ сдвигами вдоль интегральных траекторий этих полей. Каждый слой состоит из одной или нескольких орбит этого действия. При этом неособый слой представляет собой единственную орбиту.

Определение 0.0.6. Отображение $\mathfrak{F} = (f_1, \ldots, f_n) \colon M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением момента*.

Определение 0.0.7. Точка $P \in M^{2n}$ называется *особой*, если $\operatorname{rank} d\mathfrak{F}(P) < n$, то есть дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно зависимы в точке P. Число $\operatorname{rank} d\mathfrak{F}(P)$ называется *рангом* особой точки P. Также можно говорить о ранге особой орбиты гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^n$.

Далее рассматриваются интегрируемые системы с двумя степенями свободы.

Определение 0.0.8. *Бифуркационной диаграммой* отображения момента называется образ $\mathfrak{F}(C) \subset \mathbb{R}^2$ множества C его особых точек.

Как правило, бифуркационная диаграмма состоит из нескольких гладких дуг, разбивающих образ отображения момента на несколько областей (камер), и особых точек. Прообразы точек камер состоят из некоторого числа регулярных слоёв, в то время как прообразы точек бифуркационной диаграммы всегда содержат особые слои. Смысл бифуркационной диаграммы состоит в том, что она позволяет понять, при каких значениях первых интегралов происходят перестройки (бифуркации) регулярных слоёв.

Далее изучается топология слоения Лиувилля при фиксированном уровне энергии (т. е. фиксированном значении гамильтониана). Пусть (M^4, ω, H) – интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, и K – её дополнительный первый интеграл.

Определение 0.0.9. Подмногообразие $Q^3_h = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ называется *изоэнергетическим многообразием* (или *изоэнергетической поверхностью*).

Изоэнергетическое многообразие Q^3_h называется *неособым*, если $dH|_x \neq 0$ для любой точки $x \in Q^3_h$.

Определение 0.0.10. Интеграл K называется *функцией Ботта* на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3_h, если множество критических точек его ограничения $K|_{Q^3_h}$ представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий. Невырожденность означает, что K является функцией Морса на трансверсалях к критическим подмногообразиям во всех их точках.

В частности, если все содержащиеся в Q^3_h орбиты ранга 1 гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^2$ являются невырожденными, то это автоматически влечёт боттовость интеграла K на Q^3_h.

Определение 0.0.11. Интегрируемая система, ограниченная на изоэнергетическое многообразие Q^3_h (а также соответствующее значение энергии h), называется *топологически устойчивой*, если топология слоения Лиувилля не меняется при возмущении значения энергии h (т. е. системы на близких изоэнергетических многообразиях лиувиллево эквивалентны данной).

Всюду далее предполагается, что Q^3_h – связное неособое изоэнергетическое многообразие интегрируемой системы с боттовским дополнительным интегралом, все критические подмногообразия функции $K_{Q^3_h}$ одномерны, а система топологически устойчива на Q^3_h.

Определение 0.0.12. *3-атомом* называется малая связная инвариантная окрестность в Q^3_h особого слоя слоения Лиувилля, рассматриваемая с точностью до послойного диффеоморфизма.

Таким образом, 3-атом – это инвариант слоения Лиувилля вблизи особого слоя, описывающий бифуркацию (перестройку) регулярных слоёв. С топологической точки зрения атом представляет собой 3-мерное многообразие с краем, состоящим из некоторого числа регулярных слоёв. Как показано А. Т. Фоменко [47], имеется естественное взаимно однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами, описывающими, по определению, перестройки слоений двумерных многообразий на линии уровня функций Морса. А именно, каждый компактный 3-атом представляет собой расслоение Зейферта над некоторым компактным 2-атомом, который может содержать отмеченные точки ("звёздочки"). Примеры атомов будут приведены ниже.

Рассмотрим граф Кронрода–Риба функции K на изоэнергетическом многообразии Q^3_h, т. е. факторпространство многообразия Q^3_h по такому отношению эквивалентности: точки $x, y \in Q^3_h$ эквивалентны, если они принадлежат одному слою слоения Лиувилля. Рёбра графа отвечают однопараметрическим семействам регулярных слоёв, а вершины – особым слоям. Сопоставим теперь каждой вершине графа атом, кодирующий перестройку регулярных слоёв вблизи соответствующего особого слоя. При этом для каждой вершины подразумевается взаимно однозначное соответствие между инцидентными ей рёбрами и компонентами края соответствующего атома. Получившийся в результате граф с вершинами–атомами называется *инвариантом Фоменко*, или *молекулой*.

Определение 0.0.13. Две интегрируемые гамильтоновы системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который в окрестности каждой точки базы поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Молекула является полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности, т. е. две интегрируемые системы на изоэнергетических многообразиях грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие молекулы совпадают. В связи с этим молекулу иногда называют *грубым лиувиллевым инвариантом*, а классификацию с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности – *грубым лиувиллевым анализом*.

Если многообразие Q^3_h компактно, то чтобы снабдить молекулу полной информацией о топологии слоения Лиувилля, нужно добавить к ней некоторые числовые метки $r_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $n_k \in \mathbb{Z}$, показывающие, как именно отдельные атомы "склеиваются" вдоль рёбер молекулы. Молекула, снабжённая числовыми метками r_i, ε_i, n_k, называется *инвариантом Фоменко–Цишанга* (или *меченой молекулой*) интегрируемой системы на данном изоэнергетическом многообразии.

Теорема 0.1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [49])**.** *Две интегрируемые системы на неособых трёхмерных компактных связных изоэнергетических поверхностях лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

В силу теоремы 1.4 меченую молекулу часто называют *тонким лиувиллевым инвариантом* (противопоставляя её грубому инварианту – молекуле), а классификацию с точностью до лиувиллевой эквивалентности – *тонким лиувиллевым анализом.*

Определение 0.0.14. Две динамические системы называются *топологически (гладко) траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) между их фазовыми пространствами, переводящий ориентированные интегральные траектории первой системы в ориентированные интегральные траектории второй системы. Параметр на траекториях (время) при этом не обязан сохраняться.

Для построения полного траекторного инварианта интегрируемой системы на изоэнергетическом многообразии к меченой молекуле нужно добавить некоторые дополнительные инварианты. В результате получим *t-молекулу* (*инвариант Болсинова–Фоменко*) в топологическом случае [11, 12] и *st-молекулу* в гладком [3]. В простейшем случае t-молекула получается из меченой молекулы добавлением инвариантов двух типов: R-инвариантов на рёбрах молекулы и $\mathfrak{b}$-инвариантов на некоторых группах атомов. Более подробно об инвариантах лиувиллевой и траекторной эквивалентности см. ниже.

В **главе 2** ставится задача топологического анализа семейства интегрируемых систем типа Чаплыгина–Горячева. Для этих систем исследуются особые точки отображения момента ранга 0 и 1, находится бифуркационная диаграмма, определяются топологические типы неособых изоэнергетических многообразий.

Рассматривается семейство интегрируемых гамильтоновых систем на двойственном пространстве $e(3)^*$ к алгебре Ли $e(3)$, снабжённом стандартной скобкой Ли–Пуассона. В подходящих координатах $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3$ на $e(3)^*$ скобка Ли–Пуассона задаётся формулами

$$\{s_i, s_j\} = -\varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{s_i, r_j\} = -\varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{0.0.3}$$

где $\varepsilon_{ijk} = \dfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$, и имеет две независимые функции Казимира (т. е. такие функции, скобка которых с любой другой функцией равна нулю):

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3.$$

Гамильтонова система уравнений на $e(3)^*$ (как и на всяком пуассоновом многообразии) имеет вид:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{0.0.4}$$

где H – функция Гамильтона (гамильтониан).

Функции f_1 и f_2 являются первыми интегралами любой гамильтоновой системы на $e(3)^*$ и называются *геометрическим интегралом* и *интегралом площадей* соответственно. На 4-мерных

симплектических листах $M^4_{a,g} = \{x \in e(3)^* \mid f_1(x) = a, f_2(x) = g\}$, $a > 0$, скобка (0.0.3) определяет симплектическую структуру. При этом на $M^4_{a,g}$ гамильтонова система из определения 0.0.1 совпадает с системой (0.0.4). Ограничение тензора Пуассона на $M^4_{a,g}$ (корректно определённое в силу того, что f_1, f_2 – функции Казимира, и задаваемое матрицей, обратной к матрице симплектической формы) будем обозначать через $\mathfrak{A}$.

Рассматриваемое однопараметрическое семейство систем Чаплыгина–Горячева на $e(3)^*$ задаётся гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right).$$

На симплектическом листе $M^4_{1,g}$ эти системы имеют две степени свободы. При нулевом значении интеграла площадей (т.е. на $M^4_{1,0}$) они интегрируемы при помощи дополнительного интеграла

$$K = \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + r_3^4.$$

В семействе систем Чаплыгина–Горячева выделяется три случая:

- $b = 0$ – случай Чаплыгина;
- $b > 0$ – компактный случай Горячева;
- $b < 0$ – некомпактный случай Горячева.

Теорема 0.2 (см. теорему 2.1; П.Е. Рябов [36] ($b > 0$), С.С. Николаенко [75] ($b \le 0$))**.**

1. *Гамильтониан H имеет на многообразии $M^4_{1,0}$ следующие критические точки:*
   $P_1^{\pm\pm}(0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{-b}},0,\pm\sqrt[4]{-b})$ *при* $-1 \le b \le 0$;
   $P_2^{\pm\pm}(0,0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{b}},\pm\sqrt[4]{b})$ *при* $0 \le b \le 1$;
   $P_3^{\pm}(0,0,0,0,0,\pm 1)$ *при* $b \in \mathbb{R}$.

2. *Эти точки критические также для интеграла K, следовательно, они являются особыми точками ранга ноль отображения момента $\mathfrak{F} = (H, K)$. Других особых точек ранга ноль нет.*

3. *Точки $P_1^{\pm\pm}$ имеют тип седло-седло при $-1 < b < 0$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 0$; точки $P_2^{\pm\pm}$ имеют тип центр-центр при $0 < b < 1$ и вырождены при $b = 0$ и $b = 1$; точки $P_3^{\pm}$ имеют тип седло-седло при $b < -1$, центр-седло при $-1 < b < 1$, центр-центр при $b > 1$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 1$.*

4. *На бифуркационной диаграмме точкам $P_1^{\pm\pm}, P_2^{\pm\pm}, P_3^{\pm}$ соответствуют точки*

$$\mathfrak{F}(P_1^{\pm\pm}) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -2b\right); \quad \mathfrak{F}(P_2^{\pm\pm}) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}, 2b\right); \quad \mathfrak{F}(P_3^{\pm}) = \left(\frac{b}{2}, b^2 + 1\right).$$

Положим:

- $l_+ = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 2b\}$;
- $l_- = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = -2b\}$;
- $l = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 4bh - b^2\}$;
- $\pi_+ = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h+1)^2 - 2b\}$;
- $\pi_- = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h-1)^2 + 2b\}$.

Теорема 0.3 (см. теорему 2.2; О.Е. Орёл, П.Е. Рябов [67] ($b = 0$), П.Е. Рябов [36] ($b > 0$), С.С. Николаенко [78] ($b < 0$))**.** *Бифуркационная диаграмма отображения момента для систем типа Чаплыгина–Горячева состоит из следующих кривых на плоскости* $\mathbb{R}^2(h,k)$ *значений первых интегралов* H, K*:*

при $\underline{b = 0}$*:*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq -\frac{1}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq 0; \qquad l \text{ при } h \geq -\frac{1}{2};$$

при $\underline{0 < b < 1}$*:*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq \sqrt{b} - \frac{1}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq \frac{b}{2};$$
$$l_+ \text{ при } h \in \left[\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; \qquad l \text{ при } h \geq \frac{b+1}{2};$$

при $\underline{b \geq 1}$*:*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq \frac{b}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq \frac{b}{2}; \qquad l \text{ при } h \geq \frac{b+1}{2};$$

при $\underline{b < 0}$*:*

$$\pi_+ \text{ при } h \in \mathbb{R}; \qquad \pi_- \text{ при } h \in \mathbb{R};$$
$$l_+ \text{ при } h \geq \frac{1}{2}; \qquad l_- \text{ при } h \geq -\frac{1}{2}; \qquad l \text{ при } h \in \left[\frac{b-1}{2}, \frac{b+1}{2}\right].$$

Теорема 0.4 (см. теорему 2.8; П.Е. Рябов [36] ($b > 0$), С.С. Николаенко [75] ($b \leq 0$))**.**

1. *В случае Горячева ($b \neq 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе точек касания прямых* l, l_+, l_- *с параболами* π_+, π_- *на бифуркационной диаграмме являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.*

2. *В случае Чаплыгина ($b = 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l на бифуркационной диаграмме являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.*

Замечание 0.0.2. При $b = 0$ особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l при $h \in (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ становятся невырожденными, если в качестве дополнительного интеграла рассмотреть функцию $\sqrt{K}$.

Следствие 0.0.1. *На всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии интеграл K (или $\sqrt{K}$ при $b = 0$) является функцией Ботта.*

В **главе 3** проводится тонкий лиувиллев и траекторный анализ для случая Чаплыгина ($b = 0$). Вычисляются инварианты лиувиллевой (меченые молекулы) и топологической траекторной (t-молекулы) эквивалентности на всех неособых уровнях энергии. Устанавливается лиувиллева и траекторная эквивалентность системы Чаплыгина некоторым другим ранее изученным классическим интегрируемым системам, в частности, случаю Эйлера в динамике твёрдого тела и геодезическому потоку трёхосного эллипсоида.

В случае Чаплыгина бифуркационная диаграмма на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ разбивает образ отображения момента на три области (камеры) I, II, III (рис. 1):

$$
\begin{aligned}
&I: && h > 1/2, \quad 0 < k < (2h-1)^2;\\
&II: && h > 0, \quad (2h-1)^2 < k < (2h+1)^2;\\
&III: && -1/2 < h < 1/2, \quad 0 < k < \min\{(2h-1)^2, (2h+1)^2\}.
\end{aligned}
$$

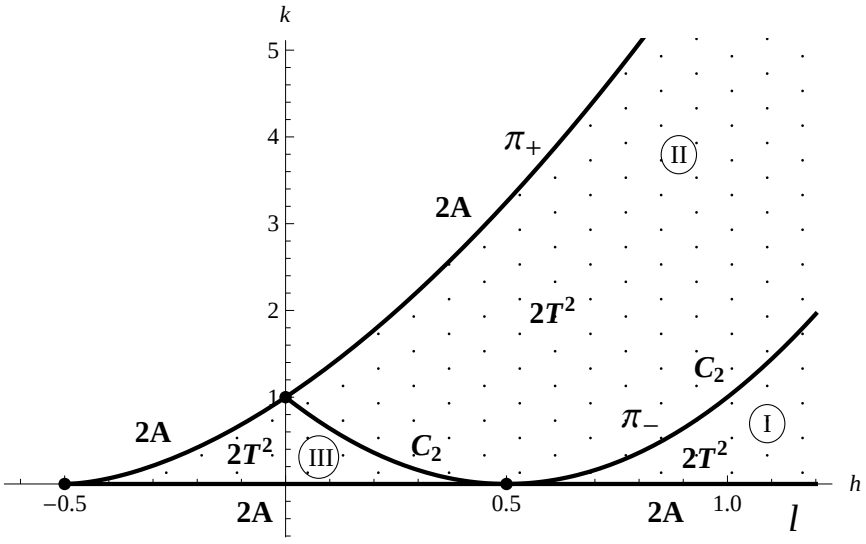


Рис. 1: Образ отображения момента, бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций для случая Чаплыгина

Можно выделить три зоны регулярных значений энергии:

$$(1) = (-1/2, 0), \quad (2) = (0, 1/2), \quad (3) = (1/2, +\infty).$$

Теорема 0.5 (О. Е. Орёл, П. Е. Рябов [67]). *Параболе π_+ и прямой l на бифуркационной диаграмме в случае Чаплыгина соответствуют бифуркации типа атома A, а параболе π_- – бифуркации типа атома C_2. Прообразы точек каждой из трёх камер I, II, III состоят из двух торов Лиувилля (рис. 1).*

Теорема 0.6 (см. теорему 3.2; [2]). *Меченые молекулы для системы Чаплыгина, отвечающие зонам энергии* $(1), (2), (3)$, *имеют вид, показанный на рисунке 3.3.*

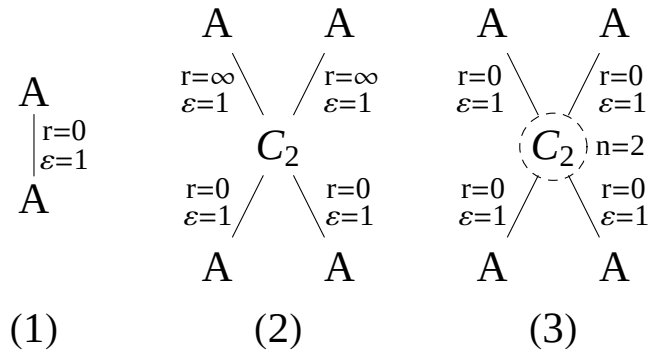


Рис. 2: Меченые молекулы для случая Чаплыгина

В работе приводятся два доказательства этой теоремы. Одно из них основано на некоторых стандартных приёмах вычисления меток (метод круговых молекул [7], формула Топалова [42]). Другое доказательство использует явную параметризацию торов Лиувилля. Также показано, как некоторые метки можно вычислить с помощью метода булевых функций М. П. Харламова.

Следствие 0.0.2.

а) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (1), *лиувиллево эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности, случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша, Соколова в динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других параметров этих систем), а также интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фокальной прямой.*

б) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2), *лиувиллево эквивалентна интегрируемым случаям Клебша и Соколова (при подходящих значениях энергии и параметров), а также геодезическому биллиарду в эллипсоидальной области, ограниченной конфокальным гиперболоидом;*

в) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (3)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемому случаю Клебша (при подходящих значениях энергии и параметров), а также геодезическому потоку двумерного эллипсоида.*

Теорема 0.7 (см. теорему 3.22; [76])**.** *Для систем Чаплыгина имеется 4 типа t-молекул, которые показаны на рисунках 3, 4, 5, 6.*

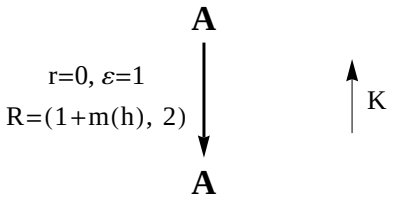


Рис. 3: t-молекула для случая Чаплыгина, зона (1)

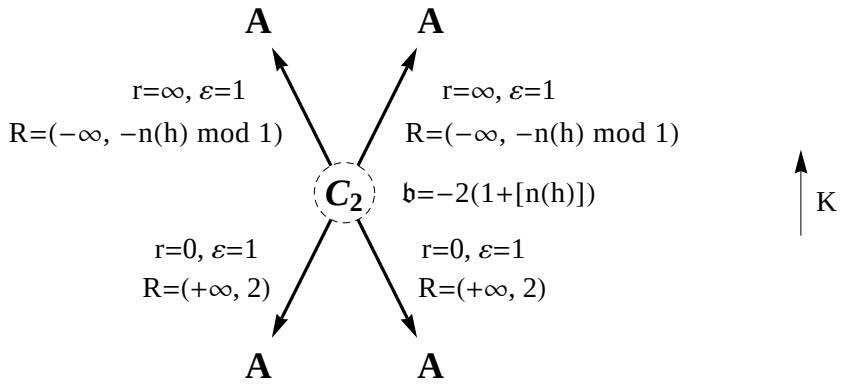


Рис. 4: t-молекула для случая Чаплыгина, зона (2)

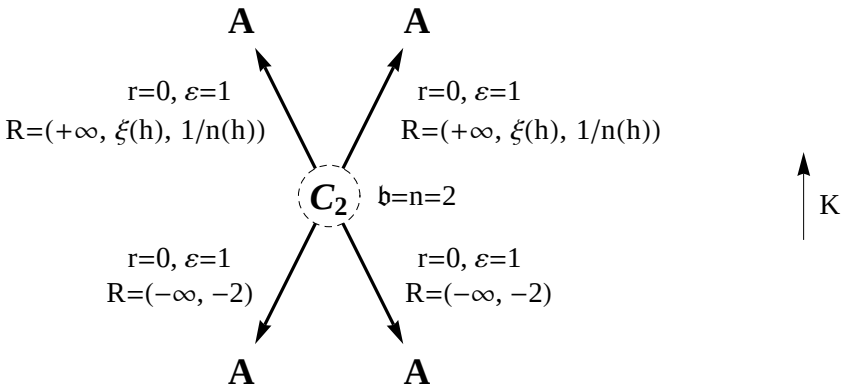


Рис. 5: t-молекула для случая Чаплыгина, зона (3) : $h < h_0$

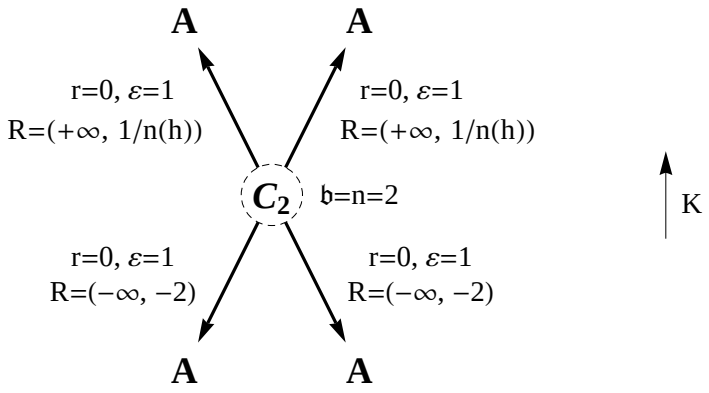


Рис. 6: t-молекула для случая Чаплыгина, зона (3) : $h \geq h_0$

Здесь

$$m(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(2h+1)t^2)}},$$
$$n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2h+1-t^2)}},$$

$h_0 > 1/2$ – *некоторая константа,* $\xi(h)$ – *локальный минимум функции вращения при* $h \in (1/2, h_0)$.

Теоремы 0.6 и 0.7 используются для доказательства более общего утверждения о различных типах эквивалентности системы Чаплыгина системам типа Эйлера, описывающим движение твёрдого тела, закреплённого в центре масс, в поле тяжести, и геодезическому потоку двумерного эллипсоида (задача Якоби). Параметрами системы Эйлера являются обратные величины A, B, C к главным моментам инерции твёрдого тела, а параметрами задачи Якоби – квадраты полуосей a, b, c эллипсоида. Как и в случае Чаплыгина, в случае Эйлера можно выделить три зоны регулярных значений энергии $(1)_E$, $(2)_E$, $(3)_E$ (номер возрастает с возрастанием энергии).

Теорема 0.8 (см. теорему 3.21; [76]). *Пусть* $v_{Ch}(h)$ *и* $v_E(A, B, C, \chi)$ – *соответственно системы Чаплыгина и Эйлера на регулярных изоэнергетических поверхностях* $\{H_{Ch} = h\}$ *и* $\{H_E = \chi\}$. *Предположим, что значения энергии* h *и* χ *принадлежат зонам с одним и тем же номером. Пусть* $v_J(a, b, c)$ – *система Якоби на ненулевом уровне энергии (тройки* (A, B, C) *и* (a, b, c) *рассматриваются с точностью до пропорциональности). Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если значение энергии* h *системы Чаплыгина* $v_{Ch}(h)$ *принадлежит зоне* (1), *то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера* $v_E(A, B, C, \chi)$ *для любых значений* A, B, C *и для любого значения энергии* χ *из зоны* $(1)_E$. *Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера* $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, *траекторно (топологически и гладко) эквивалентных системе Чаплыгина* $v_{Ch}(h)$. *Эта траекторная эквивалентность может*

быть продолжена на 4-мерные окрестности изоэнергетических многообразий. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются топологически сопряжёнными (т. е. не существует гомеоморфизма, переводящего фазовый поток системы Чаплыгина в фазовый поток системы Эйлера).

2) *Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне (2), то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C, \chi)$ для любых значений A, B, C и для любого значения энергии χ из зоны $(2)_E$. Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, топологически траекторно эквивалентных системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются гладко траекторно эквивалентными (даже в смысле C^1-гладкости) и не являются топологически сопряжёнными.*

3) *Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне (3), то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ для любых значений A, B, C (со значением энергии из зоны $(3)_E$) и системе Якоби $v_J(a, b, c)$ для любых значений a, b, c. При достаточно больших значениях h существуют единственные с точностью до пропорциональности тройки (A, B, C) и (a, b, c) такие, что система Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ топологически траекторно эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ и системе Якоби $v_J(a, b, c)$. Но эту траекторную эквивалентность нельзя сделать гладкой (даже в смысле C^1-гладкости). Кроме того, для любых троек значений система Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ не является топологически сопряжённой ни с системой Эйлера $v_E(A, B, C)$, ни с системой Якоби $v_J(a, b, c)$.*

В **главе 4** проводится тонкий лиувиллев анализ для случая Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$). На всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии вычисляются инварианты лиувиллевой эквивалентности (меченые молекулы).

Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Горячева при $0 < b < 1$ разбивает образ отображения момента на три камеры (рис. 7):

$$
\begin{aligned}
&I: && h > (b+1)/2, \quad 4bh - b^2 < k < (2h-1)^2 + 2b;\\
&II: && h > b/2, \quad (2h-1)^2 + 2b < k < (2h+1)^2 - 2b;\\
&III: && \sqrt{b} - 1/2 < h < 1/2, \quad 0 < k < \min\{(2h-1)^2 + 2b, (2h+1)^2 - 2b\}.
\end{aligned}
$$

Можно выделить четыре зоны регулярных значений энергии:

$$
(1) = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad (2) = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{b+1}{2}\right), \quad (4) = \left(\frac{b+1}{2}, +\infty\right).
$$

Теорема 0.9 (П. Е. Рябов [36]). *Дуги бифуркационной диаграммы, находящиеся внутри образа отображения момента (т.е. разделяющие камеры), отвечают седловым перестройкам*

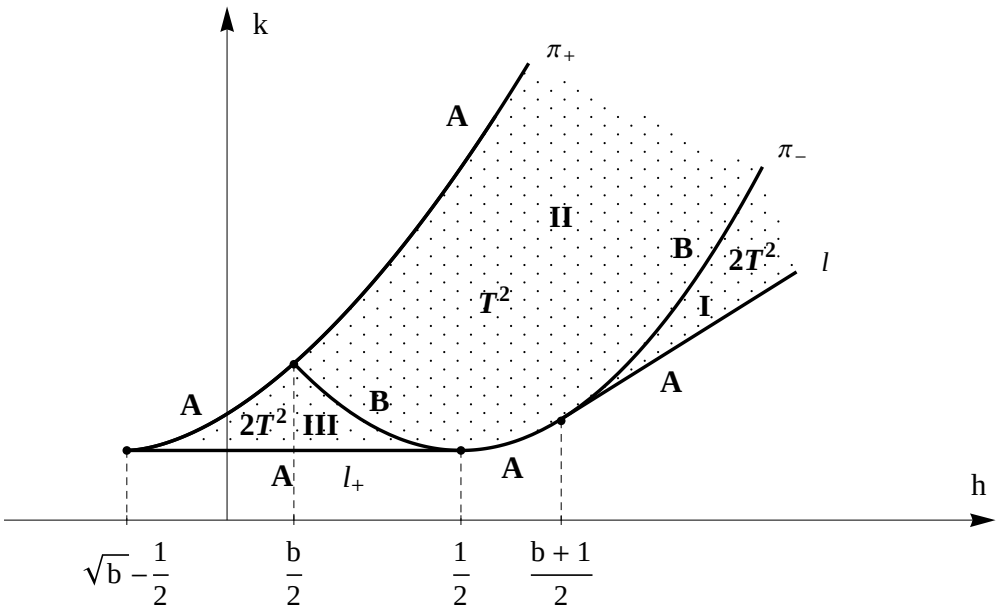


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма для случая Горячева

лиувиллевых торов типа атома B. Дуги на границе образа отображения момента соответствуют вырождению торов в окружность (т.е. отвечают атому A). Прообразы точек камер I и III состоят из двух торов Лиувилля, камеры II – из одного тора (рис. 7).

В случае $b \geq 1$ исчезают камера III и зоны энергии (1) и (2). Топология слоения Лиувилля для зон (3) и (4) при этом не меняется.

Теорема 0.10 (см. теорему 4.2; [77])**.** *Меченые молекулы в компактном случае Горячева для четырёх зон энергии* (1) – (4) *имеют вид, показанный на рисунке 8.*

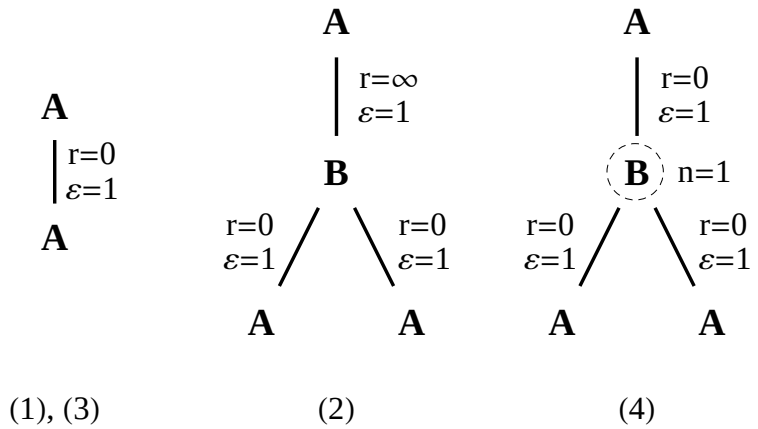


Рис. 8: Меченые молекулы для компактного случая Горячева

Следствие 0.0.3.

а) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зон (1), (3)*, лиувиллево эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности, случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша, Чаплыгина в динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других параметров), а также интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фокальной прямой.*

б) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемому случаю Жуковского (при подходящих значениях параметров), а также двум интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками: эллипсом и двумя гиперболами либо двумя эллипсами и одной ветвью гиперболы.*

в) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (4)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемым случаям Клебша, Соколова, Ковалевской–Яхьи (при подходящих значениях параметров), а также интегрируемому биллиарду в плоской области, ограниченной эллипсом.*

В **главе 5** проводится грубый лиувиллев анализ для случая Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$). Находится образ отображения момента, вычисляется количество связных компонент в прообразе его точек, а также исследуются типы бифуркаций регулярных слоёв, позволяющие построить инварианты Фоменко при фиксированных неособых топологически устойчивых значениях энергии.

Теорема 0.11 (см. теоремы 5.1, 5.2; [78])**.**

а) Образ отображения момента $\mathfrak{F}$ для случая Горячева при $b < 0$ представляет собой следующее множество:
$$\left\{k \geq (2h+1)^2 - 2b,\ h \leq \frac{b-1}{2}\right\} \cup \left\{k \geq 4bh - b^2,\ \frac{b-1}{2} < h \leq \frac{b+1}{2}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{k \geq (2h-1)^2 + 2b,\ \frac{b+1}{2} < h \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{k \geq 2b,\ h > \frac{1}{2}\right\} \text{ (рис. 9, 10).}$$

б) Прообраз любого регулярного значения отображения момента $\mathfrak{F}$ состоит из двух или четырёх цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ в зависимости от области в $\operatorname{Im}\mathfrak{F}$ (см. рис. 9, 10).

в) Бифуркации регулярных цилиндров имеют тип атомов $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}_2$, $\overline{P}_4$ и B'' (соответствие между кривыми бифуркационной диаграммы и атомами указано на рисунках 9, 10). Здесь 3-атомы $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}_2$, $\overline{P}_4$ представляют собой прямое произведение 2-атомов A, B, C_2, P_4

(рис. 1.1) и прямой $\mathbb{R}^1$, а 3-атом B'' – прямое произведение некомпактного 2-атома B'' (рис. 1.2) и окружности.

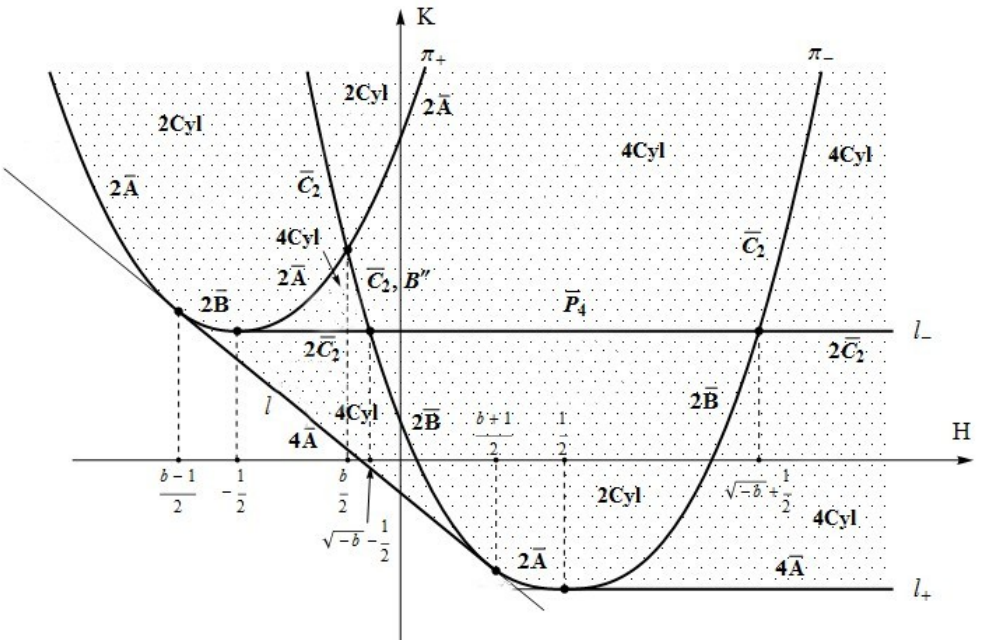


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b \in (-1, 0)$

Теорема 0.11 позволяет выписать грубые лиувиллевы инварианты на неособых топологически устойчивых уровнях энергии.

Положим

$$I_1 = \left(-\infty, \frac{b-1}{2}\right),\ I_2 = \left(\frac{b-1}{2}, \frac{\min\{-1, b\}}{2}\right),\ I_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right),$$
$$I_4 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b}\right) \text{ (в случае } -1 < b < 0),\ I_5 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1 + \min\{-2, b\}}{2}\right),$$

$$I_6 = \left(\max\left\{\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -\frac{1}{2}\right\}, \frac{b+1}{2}\right),\ I_7 = \left(\frac{b+1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$I_8 = \left(\frac{1 + \max\{-2, b\}}{2}, \frac{1}{2}\right),\ I_9 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{-b}\right),\ I_{10} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-b}, +\infty\right).$$

В зависимости от значения параметра b получаем следующие зоны неособых топологически устойчивых значений энергии:

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $-1 < b < 0$;
$I_1, I_2, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $b = -1$;
$I_1, I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $-2 < b < -1$;
$I_1, I_2, I_5, I_8, I_9, I_{10}$ при $b = -2$;
$I_1, I_2, I_5, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ при $b < -2$.

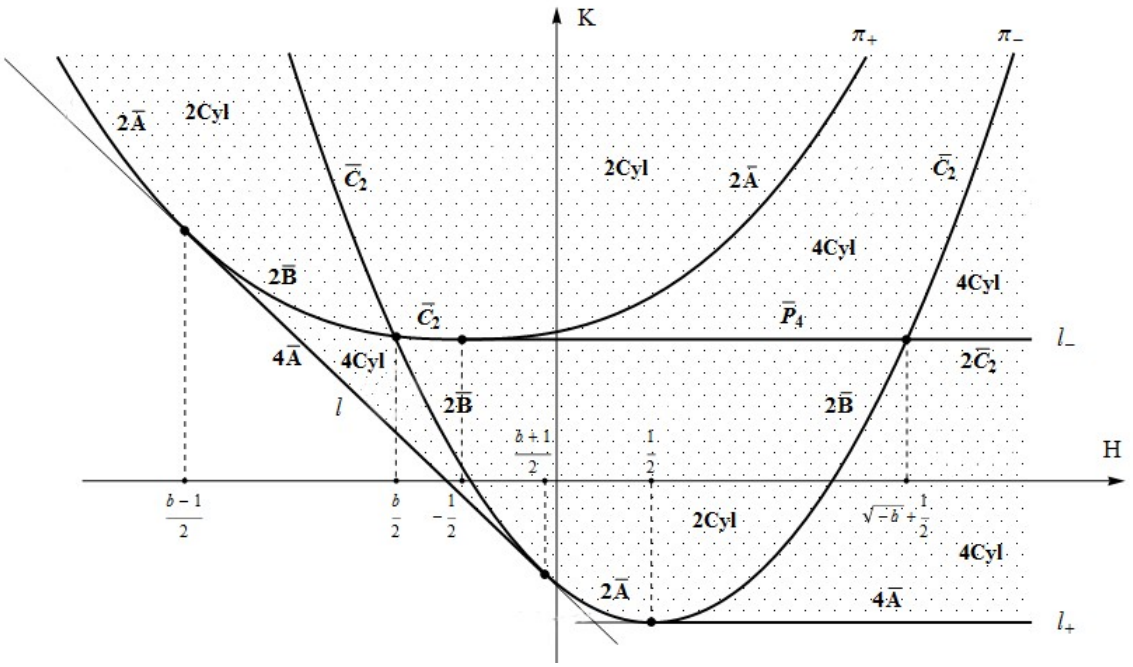


Рис. 10: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b < -1$

Следствие 0.0.4. *Слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей для случая Горячева при $b < 0$, соответствующих зонам энергии I_1–I_{10}, описываются молекулами семи типов, представленными на рисунках 11-17.*

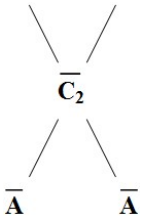


Рис. 11: Молекула для зон энергии I_1, I_7

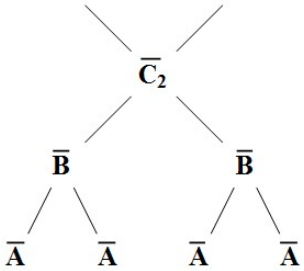


Рис. 12: Молекула для зон энергии I_2, I_5

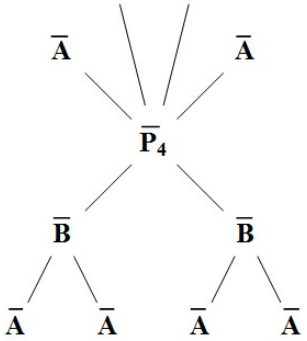


Рис. 13: Молекула для зон энергии I_6, I_9

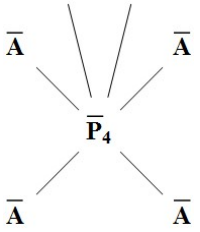


Рис. 14: Молекула для зоны энергии I_8

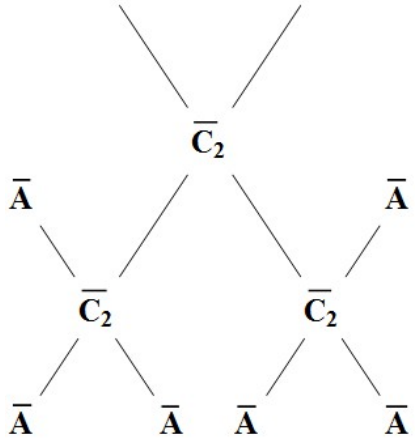


Рис. 15: Молекула для зоны энергии I_3

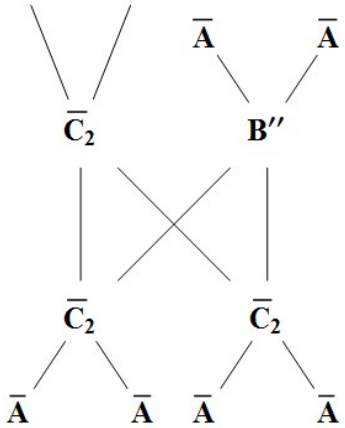


Рис. 16: Молекула для зоны энергии I_4

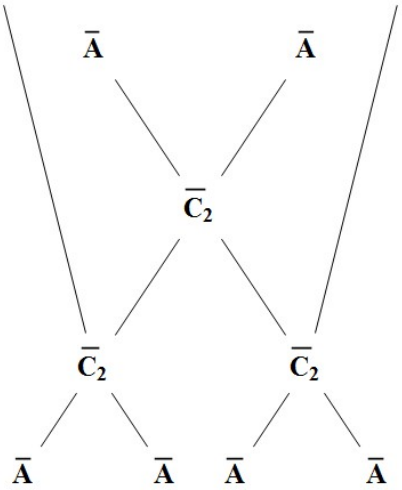


Рис. 17: Молекула для зоны энергии I_{10}

В **заключении** подводится итог полученным результатам, а также намечаются дальнейшие направления исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю академику РАН А. Т. Фоменко за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, а также за терпение и искреннее отношение.

Автор благодарит профессора Е. А. Кудрявцеву и профессора А. А. Ошемкова за многочисленные плодотворные дискуссии и полезные замечания. Автор благодарен также профессору А. В. Болсинову и assistant professor А. М. Изосимову за ряд ценных идей и комментариев.

Автор благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за тёплую, доброжелательную атмосферу, способствовавшую написанию работы.

Автор также благодарит своего учителя А. А. Амиршадяна за открытие мира математики и поддержание интереса к решению математических задач в школьные годы.

Наконец, автор благодарен своей супруге Ксении Николаенко, а также своим родителям Виктории и Сергею Николаенко за всестороннюю поддержку и помощь в течение всего времени написания диссертации.

Глава 1

Основные определения и классические результаты

В настоящей главе мы напомним основные понятия и результаты теории интегрируемых гамильтоновых систем, а также теории топологической классификации таких систем, созданной А.Т. Фоменко и его школой. Наиболее полное их изложение с современной точки зрения можно найти в [8].

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы

Определение 1.1.1. *Гамильтоновой системой с n степенями свободы* называется тройка (M^{2n}, ω, H), где

- M^{2n} – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω;
- $H \in C^\infty(M^{2n})$ – функция Гамильтона (гамильтониан), порождающая гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1} dH$.

Определение 1.1.2. Гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она обладает n первыми интегралами $f_1, \ldots, f_n$, такими, что

1. $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы на M^{2n} (т.е. их дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы почти всюду на M^{2n});
2. $\{f_i, f_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ (т.е. интегралы $f_1, \ldots, f_n$ находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, порождённой симплектической структурой ω).

Замечание 1.1.1. Часто в определении интегрируемости по Лиувиллю требуют условие *полноты* гамильтоновых потоков, порождаемых полями $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$ (полнота означает,

что естественный параметр (время) на их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой). Отметим, что в случае компактности фазового многообразия условие полноты выполнено автоматически.

Замечание 1.1.2. Так как гамильтониан H сам является первым интегралом задаваемой им гамильтоновой системы, то можно всегда полагать $f_1 = H$. В частности, в случае двух степеней свободы интегрируемость по Лиувиллю означает наличие одного дополнительного интеграла системы, функционально независимого с H.

1.2 Слоение Лиувилля, лиувиллева эквивалентность и теорема Лиувилля

Определение 1.2.1. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе, называется разбиение фазового многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$, называемые *слоями*.

Определение 1.2.2. Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_1^{2n}, \omega_1, H_1)$ и $(M_2^{2n}, \omega_2, H_2)$ называются *лиувиллево* (или *топологически*) *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм M_1^{2n} на M_2^{2n}, переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы. Имеет смысл также говорить о лиувиллевой эквивалентности систем, ограниченных на некоторые инвариантные подмногообразия (например, изоэнергетические подмногообразия $\{H = const\}$).

В типичном (нерезонансном) случае почти все слои слоения Лиувилля являются замыканиями интегральных траекторий системы. Таким образом, слоение Лиувилля является инвариантом интегрируемой системы, дающим возможность понять многие её качественные характеристики (устойчивость особых траекторий, изменение различных режимов движения и др.). Задача топологической классификации интегрируемой гамильтоновой системы подразумевает описание топологии её слоения Лиувилля.

Определение 1.2.3. Слой L слоения Лиувилля называется *регулярным*, или *неособым*, если дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы всюду на L. В противном случае слой называется *особым*.

Топологическая структура слоения Лиувилля в окрестности неособого компактного слоя описывается следующей классической теоремой.

Теорема 1.1 (Лиувилль). *Пусть T – регулярная совместная поверхность уровня первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$ вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H). Предположим, что гамильтоновы потоки, порождаемые полями* $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$, *полны. Тогда:*

1) *T – гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно гамильтоновых потоков* $\operatorname{sgrad} H$ *и* $\operatorname{sgrad} f_1, \dots, \operatorname{sgrad} f_n$*;*

2) *если T связно, то оно диффеоморфно факторпространству $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ – решётка (дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$, изоморфная $\mathbb{Z}^k$ при некотором $k \le n$); в частности, если T компактно, то оно диффеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$ (называемому* тором Лиувилля*);*

3) *слоение Лиувилля в некоторой окрестности $U(T)$ тора Лиувилля T тривиально, то есть $U(T)$ послойно диффеоморфна прямому произведению тора $\mathbb{T}^n$ и открытого диска D^n;*

4) *в окрестности $U(T) \cong \mathbb{T}^n \times D^n$ тора Лиувилля T существует система координат $s_1, \dots, s_n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (называемых переменными действие–угол) со следующими свойствами:*

   а) *$s_1, \dots, s_n$ – координаты на диске D^n, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – стандартные угловые координаты на торе $\mathbb{T}^n$, $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$;*

   б) *в переменных действие–угол симплектическая структура приобретает канонический вид: $\omega = \sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge ds_i$;*

   в) *переменные действия s_i являются функциями от первых интегралов $f_1, \dots, f_n$;*

   г) *в переменных действие–угол гамильтонов поток* $\operatorname{sgrad} H$ *выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности $U(T)$, т.е. гамильтоновы уравнения приобретают вид*

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Из теоремы Лиувилля следует, что слоение Лиувилля тривиально в окрестности неособого компактного слоя. Отметим, что имеются аналоги этого результата и для некомпактного случая (см. [60, 19, 20, 21, 1]). Однако из-за наличия особых слоёв слоение Лиувилля не является, вообще говоря, глобально тривиальным. В связи с этим исследование особых слоёв составляет наиболее существенную часть задачи описания глобальной топологии слоения Лиувилля.

Замечание 1.2.1. Вследствие теоремы Лиувилля и полноты гамильтоновых потоков, порождённых полями $\operatorname{sgrad} f_1, \dots, \operatorname{sgrad} f_n$, на каждом слое определено гамильтоново действие группы $\mathbb{R}^n$ сдвигами вдоль их интегральных траекторий. Каждый слой слоения Лиувилля состоит из одной или нескольких орбит этого действия. При этом неособый слой представляет собой единственную орбиту.

1.3 Отображение момента и его особые точки

Пусть (M^{2n}, ω, H) – интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система, и $f_1, \dots, f_n$ – её первые интегралы.

Определение 1.3.1. Отображение $\mathfrak{F} = (f_1, \ldots, f_n)\colon M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением момента*.

Определение 1.3.2. Точка $P \in M^{2n}$ называется *особой точкой* отображения момента, если $\operatorname{rank} d\mathfrak{F}(P) < n$, то есть дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно зависимы в точке P. Число $\operatorname{rank} d\mathfrak{F}(P)$ называется *рангом* особой точки P.

Замечание 1.3.1. Легко видеть, что любая орбита гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^n$ целиком состоит либо из неособых, либо из особых точек, причём во втором случае они имеют один и тот же ранг. Поэтому имеет смысл говорить о ранге не только особой точки, но и особой орбиты. Ясно также, что размерность особой орбиты равна её рангу.

Пусть $P \in M^{2n}$ – особая точка ранга k. Рассматривая вместо интегралов f_i их линейные комбинации, без ограничения общности можем считать, что $df_1 = \ldots = df_{n-k} = 0$ в точке P. Тогда линейные части $A_1, \ldots, A_{n-k}$ векторных полей $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_{n-k}$ в точке P являются корректно определёнными линейными операторами на линейном пространстве L'/L, где L – подпространство в $T_P M^{2n}$, порождённое векторами $\operatorname{sgrad} f_{n-k+1}, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$, а L' – косоортогональное дополнение к L в смысле симплектической формы ω (подробное обоснование этого факта можно найти в [8, том 1, 1.10.3]). Отметим, что $\dim L'/L = (2n-k) - k = 2(n-k)$. Отсюда следует, что операторы $A_1, \ldots, A_{n-k}$ являются элементами алгебры Ли $sp(2(n-k), \mathbb{R})$ симплектической группы $Sp(2(n-k), \mathbb{R})$.

Определение 1.3.3. Особая точка P называется *невырожденной*, если коммутативная подалгебра, порождаемая операторами $A_1, \ldots, A_{n-k}$, является картановской подалгеброй в $sp(2(n-k), \mathbb{R})$.

Замечание 1.3.2. Для операторов A_i справедлива формула $A_i = \omega^{-1} d^2 f_i|_{L'/L}$.

Замечание 1.3.3. Определение невырожденности особой точки ранга k равносильно тому, что операторы $\omega^{-1} d^2 f_i$, $i = 1, \ldots, n-k$, линейно независимы, и среди их линейных комбинаций имеется оператор с $n-k$ различными ненулевыми собственными значениями.

Всюду далее нас будут интересовать интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Поясним, что в этом случае означает понятие невырожденности особой точки. Пусть H – гамильтониан системы, K – дополнительный первый интеграл.

1.3.1 Особые точки ранга 0

В этом случае $L = \{0\}$, $L' = T_P M^4$, поэтому невырожденность особой точки P ранга ноль означает, что вторые дифференциалы $d^2 H$, $d^2 K$ линейно независимы и некоторая линейная комбинация $\lambda\omega^{-1} d^2 H + \mu\omega^{-1} d^2 K$ имеет различные ненулевые собственные значения. В зависимости от типа собственных значений различают 4 типа невырожденных особых точек ранга

ноль (которые соответствуют четырём попарно несопряжённым картановским подалгебрам в $sp(4,\mathbb{R})$):

1) случай *центр–центр* – чисто мнимые корни $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$;

2) случай *центр–седло* – два вещественных и два чисто мнимых корня $\alpha, -\alpha, i\beta, -i\beta$;

3) случай *седло–седло* – вещественные корни $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$;

4) случай *фокус–фокус* – комплексные корни $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$.

1.3.2 Особые точки ранга 1

В этом случае дифференциалы dH и dK в особой точке P связаны нетривиальным линейным соотношением $\lambda dH + \mu dK = 0$. Если, к примеру, $\mu \neq 0$, то $L =< \operatorname{sgrad} H >$ и $L' = T_P Q^3$, где $Q^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = \text{const}\}$ – изоэнергетическое многообразие. В этом случае имеем единственный оператор $A = \omega^{-1}(\lambda d^2H + \mu d^2K)$. Несложно проверить, что он имеет различные ненулевые собственные значения на пространстве L'/L в том и только в том случае, если ранг квадратичной формы $(\lambda d^2H + \mu d^2K)$ на пространстве $L' = T_P Q^3$ равен двум. Это в точности означает, что интеграл K является функцией Морса на трансверсали к данной орбите в Q^3. В зависимости от индексов инерции формы $(\lambda d^2H + \mu d^2K)\,|_{T_P Q^3}$ различают *эллиптические* и *гиперболические* невырожденные особые орбиты ранга 1.

1.3.3 Особые точки подмногообразий в $\mathbb{R}^n$

В дальнейшем нам придётся иметь дело с ситуацией, когда многообразие M^4 задано в $\mathbb{R}^6$ двумя уравнениями $f_1 = const$, $f_2 = const$, где f_1, f_2 – гладкие функции в $\mathbb{R}^6$ с линейно независимыми дифференциалами df_1, df_2. В этом случае нам понадобится техническая лемма, позволяющая находить особые точки ограничения некоторой гладкой функции на M^4, а также её второй дифференциал в особых точках.

Лемма 1.2. *Пусть $f, f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, $M^4 = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2\}$ и дифференциалы df_1, df_2 линейно независимы всюду на M^4. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *точка $x_0 \in M^4$ является особой для функции $f|_{M^4}$ в том и только том случае, если дифференциалы df, df_1, df_2 линейно зависимы (в смысле $\mathbb{R}^6$) в точке x_0, т. е. в ней выполняется соотношение $df = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;*

2) *для второго дифференциала функции $f|_{M^4}$ в особой точке x_0 (как квадратичной формы на пространстве $T_{x_0}M^4$) имеет место формула*

$$d^2(f|_{M^4}) = (d^2f - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2)|_{T_{x_0}M^4}, \tag{1.3.1}$$

где λ_1, λ_2 – коэффициенты из пункта 1).

1.4 Бифуркационная диаграмма

Пусть H и K – соответственно гамильтониан и дополнительный первый интеграл интегрируемой системы с двумя степенями свободы, $\mathfrak{F} = (H, K)$ – отображение момента.

Определение 1.4.1. *Бифуркационной диаграммой* отображения момента называется образ $\mathfrak{F}(\mathbf{C}) \subset \mathbb{R}^2$ множества $\mathbf{C}$ его особых точек.

Как правило, бифуркационная диаграмма состоит из нескольких гладких дуг, разбивающих образ отображения момента на несколько областей (камер), и особых точек. Прообразы точек камер состоят из некоторого числа регулярных слоёв, в то время как прообразы точек бифуркационной диаграммы всегда содержат особые слои. Смысл бифуркационной диаграммы состоит в том, что она позволяет понять, при каких значениях первых интегралов происходят перестройки (бифуркации) регулярных слоёв.

1.5 Изоэнергетические многообразия, боттовость и топологическая устойчивость

В дальнейшем мы будем изучать топологию слоения Лиувилля при фиксированном уровне энергии (т. е. фиксированном значении гамильтониана). Пусть (M^4, ω, H) – интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы.

Определение 1.5.1. Подмногообразие $Q^3_h = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ называется *изоэнергетическим многообразием* (или *изоэнергетической поверхностью*).

Определение 1.5.2. Изоэнергетическое многообразие Q^3_h (и соответствующее значение энергии h) называется *неособым*, если $dH|_x \neq 0$ для любой точки $x \in Q^3_h$.

Пусть K – дополнительный первый интеграл системы.

Определение 1.5.3. Интеграл K называется *функцией Ботта* на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3_h, если множество критических точек его ограничения $K|_{Q^3_h}$ представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий. Невырожденность означает, что K является функцией Морса на трансверсалях к критическим подмногообразиям во всех их точках.

В частности, если все содержащиеся в Q^3_h орбиты ранга 1 гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^2$ являются невырожденными, то это автоматически влечёт боттовость интеграла K на Q^3_h.

Определение 1.5.4. Интегрируемая система, ограниченная на изоэнергетическое многообразие Q^3_h (а также соответствующее значение энергии h), называется *топологически устойчивой*, если топология слоения Лиувилля не меняется при возмущении значения энергии h (т. е. системы на близких изоэнергетических многообразиях лиувиллево эквивалентны данной).

Определение 1.5.5. Изоэнергетическое многообразие Q^3_h (и соответствующее значение энергии h) будем называть *регулярным*, если Q^3_h – неособое, функция $K_{Q^3_h}$ – боттовский интеграл, а рассматриваемая система топологически устойчива на Q^3_h.

1.6 3-атомы и 2-атомы

Отныне будем полагать, что Q^3_h – связное регулярное изоэнергетическое многообразие интегрируемой системы, а все критические подмногообразия функции $K_{Q^3_h}$ одномерны.

Определение 1.6.1. *3-атомом* называется малая связная инвариантная окрестность в Q^3_h особого слоя слоения Лиувилля, рассматриваемая с точностью до послойного диффеоморфизма.

Таким образом, 3-атом – это инвариант слоения Лиувилля вблизи особого слоя, описывающий бифуркацию (перестройку) регулярных слоёв. С топологической точки зрения атом представляет собой 3-мерное многообразие с краем, состоящим из некоторого числа регулярных слоёв. В случае компактного 3-атома теорема А. Т. Фоменко устанавливает соответствие между 3-атомами и 2-атомами, описывающими перестройки слоений двумерных многообразий на линии уровня функций Морса. Дадим более точные определения.

Определение 1.6.2. Пусть N^2 – двумерное ориентируемое гладкое многообразие, $f \in C^\infty(N^2)$ – функция Морса. Пусть C – особый слой слоения, задаваемого функцией f на N^2, то есть связная компонента множества $\{f = const\}$, содержащая критическую точку функции f. *2-атомом* называется малая связная инвариантная окрестность особого слоя C, рассматриваемая с точностью до послойного диффеоморфизма.

Определение 1.6.3. Пусть, как и в предыдущем определении, f – функция Морса на двумерном ориентируемом многообразии, L – произвольный (особый или неособый) слой задаваемого ею слоения. Отметим на слое L конечное число точек ("звёздочек"), отличных от критических точек функции f. *2-атомом со звёздочками* называется малая связная инвариантная окрестность слоя L, рассматриваемая с точностью до послойного диффеоморфизма.

Чтобы сформулировать теорему Фоменко, введём понятие расслоения Зейферта.

Рассмотрим цилиндр $D^2 \times [0,1]$ (где D^2 – двумерный диск) и склеим его основания по диффеоморфизму, являющемуся поворотом на угол $2\pi\nu/\alpha$, где $\nu, \alpha \in \mathbb{N}$, $(\nu, \alpha) = 1$, $\alpha > 1$. В результате получим *расслоенное полноторие*, центральный слой которого называется *особым слоем типа* (α, ν). Если же склеить основания цилиндра по тождественному диффеоморфизму, то получим тривиально расслоенное полноторие.

Определение 1.6.4. Ориентируемое 3-мерное многообразие, разбитое на простые замкнутые непересекающиеся кривые (слои), называется *расслоением Зейферта*, если каждый слой имеет инвариантную окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному (тривиально или нетривиально) полноторию.

Для более подробного знакомства с расслоениями Зейферта см. [24].

Теорема 1.3 (А. Т. Фоменко [47])**.** *Любой компактный 3-атом представляет собой согласованное со слоением Лиувилля расслоение Зейферта с особыми слоями типа* $(2,1)$*, базой которого является некоторый компактный 2-атом (со звёздочками или без), причём звёздочкам соответствуют особые слои. Устанавливаемое таким образом соответствие между 3-атомами и 2-атомами (со звёздочками или без) является взаимно однозначным.*

На рисунке 1.1 изображены примеры компактных 2-атомов. 2-атом A является минимаксным, т. е. соответствует локальному минимуму или максимуму функции f, задающей слоение. Других компактных минимаксных атомов нет. В частности, изображённые на рисунке 1.1 2-атомы B, C_2, P_4 содержат лишь седловые критические точки функции f. На рисунке 1.2 изображён пример некомпактного 2-атома B'', представляющего собой окрестность невырожденной седловой особой точки. 3-атомы, отвечающие 2-атомам на рисунках 1.1, 1.2, представляют собой их прямое произведение с окружностью. Примеры атомов со звёздочками можно найти в [8], однако в нашей работе такие атомы не встречаются.

В силу описанного соответствия между 2-атомами и 3-атомами указание их размерности часто будем опускать и говорить просто “атом”, а 3-атомы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие 2-атомы.

1.7 Инвариант Фоменко (молекула)

Пусть Q^3_h – неособое изоэнергетическое многообразие с боттовским интегралом K, причём все критические подмногообразия одномерны. Рассмотрим граф Кронрода–Риба функции K на Q^3_h, т. е. факторпространство многообразия Q^3_h по следующему отношению эквивалентности: точки $x, y \in Q^3_h$ эквивалентны, если они принадлежат одной связной компоненте множества $K = const$, т. е. одному слою слоения Лиувилля. Иными словами, данный граф – база слоения Лиувилля на Q^3_h. Рёбра графа отвечают однопараметрическим семействам регулярных слоёв, а вершины – особым слоям. Сопоставим теперь каждой вершине графа атом, кодирующий

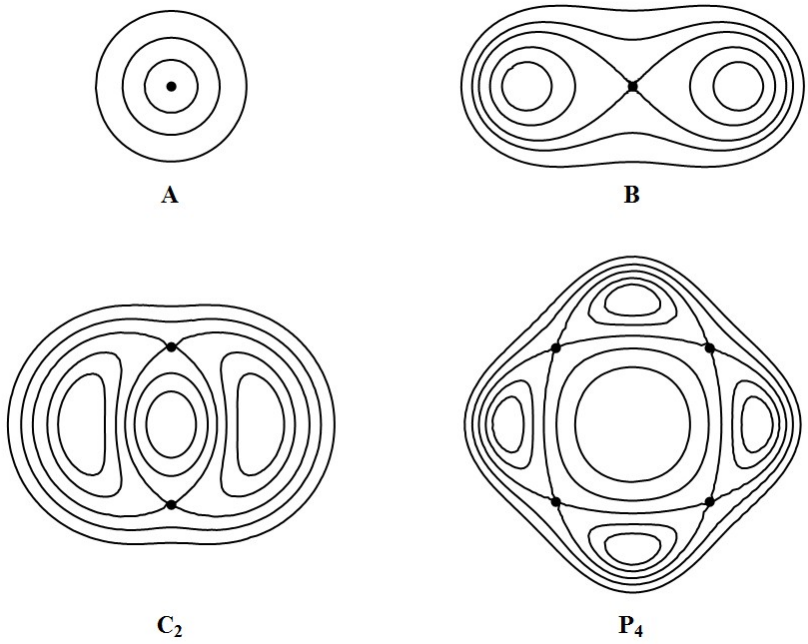


Рис. 1.1: Примеры компактных 2-атомов

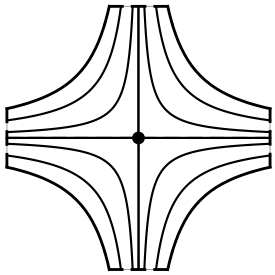


Рис. 1.2: Некомпактный 2-атом B''

перестройку регулярных слоёв вблизи соответствующего особого слоя. При этом для каждой вершины подразумевается взаимно однозначное соответствие между инцидентными ей рёбрами и компонентами края соответствующего атома. Получившийся в результате граф с вершинами–атомами называется *инвариантом Фоменко*, или *молекулой*.

Определение 1.7.1. Две интегрируемые гамильтоновы системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который в окрестности каждой точки базы поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Из определения молекулы следует, что она является полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, две интегрируемые системы, рассматриваемые на изоэнергетических многообразиях (удовлетворяющих указанным выше условиям), грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие молекулы совпадют. В связи

с этим молекулу иногда называют *грубым лиувиллевым инвариантом*, а классификацию с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности – *грубым лиувиллевым анализом.*

1.8 Инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула)

Молекула не является, однако, полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности: она показывает, из каких атомов "сшивается" слоение Лиувилля на данном изоэнергетическом многообразии Q^3_h, но не даёт информации, как именно "склеиваются" друг с другом атомы, стоящие в вершинах, соединённых рёбрами. Опишем, как снабдить молекулу полной информацией о топологии слоения Лиувилля в случае, когда многообразие Q^3_h компактно. В этом случае все регулярные слои (в частности, компоненты границ всех атомов) являются торами Лиувилля. Фиксируем произвольным образом ориентацию на многообразии Q^3_h, а также на всех рёбрах молекулы. Тогда возникнет индуцированная ориентация на всех атомах, а потому и на всех их граничных торах. Введём на граничных торах всех атомов некоторым специальным образом систему координат, соответствующую ориентации торов (критерий допустимости таких систем координат опишем чуть ниже). Два граничных тора, отвечающих одному ребру, но различным атомам молекулы, можно рассматривать как один и тот же тор в слоении Лиувилля. На этом торе, следовательно, возникают две системы координат. Рассмотрим матрицу перехода от одной из них к другой (матрицу склейки). Это целочисленная матрица с определителем, равным -1, которая определяет склеивающий граничные торы диффеоморфизм однозначно с точностью до изотопии. Для устранения произвола в выборе допустимых систем координат на граничных торах, по матрицам склейки определяются три типа чисел (меток): $r_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Метки r_i, ε_i определяются для каждого ребра молекулы, числа n_k – для некоторых групп атомов (семей).

Приведём точные определения меток. Пусть $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ – матрица склейки на ребре e_i.

Определение 1.8.1. *Рациональной меткой* r_i на ребре e_i называется:

$$r_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} \mod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определение 1.8.2. *Целочисленной меткой* ε_i на ребре e_i называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \operatorname{sign} \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определим теперь метку n_k. Если разрезать молекулу по всем рёбрам с конечной r-меткой, то она распадётся на несколько связных кусков. Назовём *семьями* те из них, которые не содержат атомов A. Рассмотрим теперь отдельную семью. Все рёбра, имеющие в ней хотя бы одну

вершину, можно разделить на 3 класса (с учётом имеющейся на них ориентации): входящие, выходящие и внутренние.

Определение 1.8.3. Сопоставим каждому ребру e_i данной семьи целое число θ_i по следующему правилу:

$$\theta_i = \begin{cases} \left[\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро,} \\ \left[-\dfrac{\delta_i}{\beta_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро,} \\ \left[-\dfrac{\gamma_i}{\alpha_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Метка n_k*,* отвечающая данной семье, определяется как сумма чисел θ_i по всем рёбрам этой семьи.

Определение 1.8.4. Молекула, снабжённая числовыми метками r_i, ε_i, n_k, называется *инвариантом Фоменко–Цишанга* (или *меченой молекулой*) интегрируемой системы на данном изоэнергетическом многообразии.

Смысл меток r_i, ε_i, n_k состоит в том, что они позволяют восстановить матрицы склейки однозначно с точностью до допустимых замен координат. Оттого меченая молекула представляет собой уже полный инвариант лиувиллевой эквивалентности.

Теорема 1.4 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [49])**.** *Две интегрируемые системы на неособых трёхмерных компактных связных изоэнергетических поверхностях лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

В силу теоремы 1.4 меченую молекулу часто называют *тонким лиувиллевым инвариантом* (противопоставляя её грубому инварианту – молекуле), а классификацию с точностью до лиувиллевой эквивалентности – *тонким лиувиллевым анализом.*

Опишем теперь формальные правила выбора базисных циклов на граничных торах атомов в случае атомов без звёздочек (только такие атомы встретятся у нас в дальнейшем). Более подробно эти правила описаны в [8].

1) Для атома A, являющегося полноторием, в качестве первого базисного цикла на его единственном граничном торе следует взять меридиан полнотория (т. е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория). В качестве второго цикла можно взять любой цикл, дополняющий первый до базиса (он будет изотопен критической окружности). При этом ориентация второго цикла определяется естественной ориентацией на критической окружности, задаваемой гамильтоновым потоком. Ориентацию первого цикла определяем ориентацией изоэнергетического многообразия (определяющей ориентацию всех атомов и их границ), требуя, чтобы выбранный базис на торе имел положительную ориентацию.

2) Для седлового атома без звёздочек (в частности, атомов B и C_2) в качестве первого базисного цикла берётся слой соответствующего тривиального расслоения Зейферта. Он изотопен

критическим окружностям и потому имеет естественную ориентацию. Вторые циклы на каждом из граничных торов должны высекаться глобальным сечением атома (как тривиального расслоения Зейферта). Ориентация на вторых базисных циклах определяется ориентацией изоэнергетического многообразия.

Замечание 1.8.1. Как видно из определения меток, они зависят от выбора ориентации изоэнергетического многообразия, а также ориентации рёбер молекулы. При изменении какой-либо из этих ориентаций метки, вообще говоря поменяются (правила изменения меток при замене ориентаций описаны в [8]). В дальнейшем, предъявляя конкретную меченую молекулу для той или иной системы, мы будем подразумевать, что ориентации изоэнергетического многообразия и рёбер молекулы некоторым образом фиксированы.

1.9 Траекторная эквивалентность интегрируемых систем

Определение 1.9.1. Две динамические системы называются *топологически (гладко) траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) между их фазовыми пространствами, переводящий ориентированные интегральные траектории первой системы в ориентированные интегральные траектории второй системы. Параметр на траекториях (время) при этом не обязан сохраняться.

В классе интегрируемых гамильтоновых систем траекторная эквивалентность является более сильным отношением эквивалентности, чем лиувиллева. Следовательно, для построения полного траекторного инварианта интегрируемой системы на изоэнергетическом многообразии к меченой молекуле нужно добавить некоторые дополнительные инварианты. В результате получим *t-молекулу* (*инвариант Болсинова–Фоменко*) в топологическом случае [11, 12] и *st-молекулу* в гладком [3].

Траекторные инварианты, добавляемые к меченой молекуле, можно разделить на два типа: рёберные (на однопараметрических семействах торов Лиувилля) и атомные.

Основным траекторным инвариантом системы является *функция вращения* $\rho(t)$, приписываемая каждому ребру молекулы (t – параметр на ребре). По определению $\rho(t) = q_1(t)/q_2(t)$, где $q_1(t), q_2(t)$ – частоты на соответствующем торе Лиувилля $T^2(t)$ (см. теорему 1.1). Это отношение частот является полным траекторным инвариантом на данном торе Лиувилля, а функция вращения – на однопараметрическом семействе торов Лиувилля. Однако функция $\rho(t)$ определена неоднозначно: она зависит от выбора параметра t, а также базисных циклов на торе $T^2(t)$. Чтобы избавиться от первой зависимости, ограничимся рассмотрением класса систем с “достаточно хорошими” функциями вращения. А именно, будем считать, что функции вращения на каждом ребре молекулы имеют конечное число локальных экстремумов и точек с бесконечными значениями. Рассмотрим функцию $\rho(t)$ на произвольном ребре и построим по ней конечную последовательность $\mathcal{R}$ вещественных чисел и символов $\pm\infty$ (для определённости можно считать,

что параметр t меняется от 0 до 1). Возьмём в качестве первого элемента последовательности $\mathcal{R}$ предел (конечный или бесконечный) функции $\rho(t)$ при $t \to +0$. Далее при изменении параметра t от 0 до 1 последовательно выпишем локальные минимумы, максимумы и бесконечные значения функции $\rho(t)$. При этом для точек с бесконечными значениями выписываются по два символа ($+\infty$ или $-\infty$), соответствующие пределам слева и справа. Последний элемент в последовательности R – предел $\rho(t)$ при $t \to 1-0$. Такая последовательность $\mathcal{R}$ называется *вектором вращения* (R-*вектором*) на данном ребре молекулы. Она позволяет восстановить функцию вращения однозначно с точностью до монотонных непрерывных замен параметра.

Покажем теперь, как избавиться от зависимости от выбора базисных циклов на торах Лиувилля. Рассмотрим на произвольном торе данного однопараметрического семейства две пары базисных циклов (λ^-, μ^-) и (λ^+, μ^+), т. е. два базиса в фундаментальной группе тора. Эти базисы отвечают двум атомам на концах соответствующего ребра молекулы, для которых данный тор является граничным. Базисы (λ^-, μ^-), (λ^+, μ^+) связаны матрицей склейки:

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}.$$

Положим $R = \beta\mathcal{R}^- - \alpha$, если $\beta \neq 0$, и $R = \mathcal{R}^- \bmod 1$, если $\beta = 0$, где $\mathcal{R}^-$ – вектор вращения, построенный в базисе (λ^-, μ^-) (в первом случае число α вычитается из каждой компоненты вектора $\beta\mathcal{R}^-$). Вектор R называется R-*инвариантом* на данном ребре молекулы. Он уже не зависит от выбора базисных циклов на торах Лиувилля и является полным инвариантом топологической траекторной эквивалентности на данном однопараметрическом семействе торов.

Атомные инварианты, описывающие траекторный портрет системы вблизи особого слоя, в общем случае определяются довольно сложно. Однако они становятся существенно проще для систем, содержащих лишь атомы с одной критической окружностью. Такие системы называются *простыми*.

Разрежем молекулу вдоль всех рёбер с конечной r-меткой (см. раздел 1.8), а также всех рёбер с бесконечной r-меткой и R-инвариантом, имеющим хотя бы одну конечную компоненту. В результате молекула распадётся на несколько связных подграфов. Те из них, которые не содержат атомов A, называются *радикалами*. Сопоставим теперь каждому ребру e_i молекулы, инцидентному с данным радикалом U, целое число $[\Theta]_i$ по следующему правилу:

$$[\Theta]_i = \begin{cases} [\alpha_i/\beta_i] & \text{если } e_i \text{ имеет конечную } r\text{-метку и выходит из радикала } U, \\ [-\delta_i/\beta_i] & \text{если } e_i \text{ имеет конечную } r\text{-метку и входит в радикал } U, \\ [M\mathcal{R}_i^+] & \text{если } e_i \text{ имеет бесконечную } r\text{-метку и входит в радикал } U, \\ -[-M\mathcal{R}_i^-] & \text{если } e_i \text{ имеет бесконечную } r\text{-метку и выходит из радикала } U, \\ -\gamma_i/\alpha_i & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро радикала } U. \end{cases}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – компоненты матрицы склейки на ребре e_i, а $M\mathcal{R}_i^-$ и $M\mathcal{R}_i^+$ – средние арифметические конечных компонент соответствующих векторов вращения $\mathcal{R}_i^-$ и $\mathcal{R}_i^+$. Число $\mathfrak{b}(U) = \sum[\Theta]_j$

называется $\mathfrak{b}$-*инвариантом* радикала U.

Замечание 1.9.1. Каждая семья (см. раздел 1.8) состоит из некоторого числа радикалов, при этом сумма их $\mathfrak{b}$-инвариантов равна метке n, соответствующей данной семье.

Определение 1.9.2. Меченая молекула, снабжённая R-инвариантами всех рёбер и $\mathfrak{b}$-инвариантами всех радикалов, называется *простой t-молекулой*, отвечающей данной простой интегрируемой системе на изоэнергетическом многообразии Q^3_h.

Теорема 1.5 (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [12])**.** *Две простые интегрируемые системы на изоэнергетических многообразиях топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их простые t-молекулы совпадают.*

Замечание 1.9.2. В действительности класс интегрируемых систем, для которых простая молекула является полным инвариантом топологической траекторной эквивалентности, несколько шире, чем класс простых систем. А именно, к ним можно добавить системы с атомами, имеющими либо одну, либо две критические окружности, но во втором случае на атоме должна существовать инволюция, сохраняющая гамильтоново поле и меняющая местами критические окружности. Это замечание пригодится нам в главе 3.

Аналог t-молекулы можно предъявить и для гладкой траекторной классификации, только он будет устроен более сложно. Впрочем, если перед нами стоит задача доказать отсутствие гладкой траекторной эквивалентности, то нам достаточно рассмотреть какой-то один дополнительный различающий инвариант. Пример такого инварианта – так называемый Λ-инвариант.

Рассмотрим функцию вращения $\rho(t)$ на некотором ребре молекулы (t – параметр на ребре). Предположим, что при $t \to t_0$ лиувиллевы торы $T^2(t)$ стремятся к особому слою и что этот особый слой содержит замкнутую гиперболическую траекторию системы. В частности, это означает, что в соответствующей вершине молекулы, инцидентной данному ребру, находится седловой атом. Пусть функция $\rho(t)$ записана в допустимом базисе, соответствующем данному седловому атому. Тогда при $t \to t_0$ для неё имеет место следующее представление ([4, раздел 5, предложение 6]):

$$\rho(t) = \Lambda \ln|t - t_0| + q(t),$$

где $q(t)$ непрерывная в точке t_0 функция. Число Λ не меняется при C^1-гладких траекторных изоморфизмах, то есть является инвариантом гладкой траекторной эквивалентности (см. [4]). Оно называется Λ-*инвариантом*.

1.10 Сопряжённость динамических систем

Определение 1.10.1. Две динамические системы (не обязательно гамильтоновы) называются *топологически (гладко) сопряжёнными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) их фазовых пространств, переводящий фазовый поток одной системы в фазовый поток другой.

Сопряжённость является самым сильным отношением эквивалентности динамических систем (она означает, что системы просто совпадают). В качестве различающего инварианта для доказательства отсутствия топологической (или гладкой) сопряжённости можно использовать время движения вдоль замкнутых особых траекторий системы.

1.11 Топология изоэнергетических многообразий

Пусть 4-мерное фазовое многообразие гамильтоновой системы с двумя степенями свободы задано в пространстве $\mathbb{R}^6$ с координатами $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ уравнениями $f_1 = 1$, $f_2 = g$ $(g \in \mathbb{R})$, где

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3, \tag{1.11.1}$$

а гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{(s_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(s_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(s_1 + \lambda_1)^2}{2A_3} + U(r_1, r_2, r_3),$$

где A_1, A_2, A_3 – положительные числа, а $U(r_1, r_2, r_3)$ – гладкая функция. Опишем алгоритмическую процедуру определения топологического типа неособых изоэнергетических многообразий таких систем (не обязательно интегрируемых). Эта процедура состоит в изучении проекции π изоэнергетического многообразия $Q^3_{g,h} = \{f_1 = 1, f_2 = g, H = h\}$ на так называемую *сферу Пуассона* $S^2_P = \{f_1 = 1\}$.

Комментарий 1. Системы такого типа обычно возникают в задачах динамики твёрдого тела. Пространство $\mathbb{R}^6(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ при этом отождествляется с двойственным пространством $e(3)^*$ группы движений 3-мерного евклидова пространства. Числа A_1, A_2, A_3 имеют смысл главных моментов инерции твёрдого тела, функция U – потенциальной, а H – полной энергии системы. Функция f_1 называется *геометрическим интегралом*, а f_2 – интегралом площадей. См. также подраздел 3.5.

Пусть $r = (r_1, r_2, r_3) \in S^2_P$ – произвольная точка на сфере Пуассона. Её прообраз $\pi^{-1}(r)$ задаётся двумя уравнениями

$$\langle s, r \rangle = g, \tag{1.11.2}$$

$$\langle A^{-1}(s + \lambda), s + \lambda \rangle = 2(h - U(r)), \tag{1.11.3}$$

где $s = (s_1, s_2, s_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, слой $\pi^{-1}(r)$ представляет собой пересечение плоскости 1.11.2 с эллипсом 1.11.3 и, следовательно, либо гомеоморфен окружности или точке, либо пуст. Причём он гомеоморфен окружности в том и только в том случае, когда $r \in Int(\pi(Q^3_{g,h}))$. Легко видеть, что расслоение, задаваемое проекцией π над множеством $Int(\pi(Q^3_{g,h}))$, эквивалентно расслоению

единичных касательных векторов. Поэтому многообразие $Q^3_{g,h}$ можно следующим образом восстановить по проекции π. Нужно взять его образ $\pi(Q^3_{g,h})$ и рассмотреть расслоение единичных касательных векторов над ним, а затем все слои над граничными точками в $\pi(Q^3_{g,h})$ стянуть в точку. В частности, верен следующий результат.

Теорема 1.6 (С. Смейл [40]). *Пусть образ $\pi(Q^3_{g,h})$ замкнут и гомеоморфен сфере с m "дырками". Тогда:*

1. *если $m = 0$, то $Q^3_{g,h}$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$;*

2. *если $m = 1$, то $Q^3_{g,h}$ гомеоморфно S^3;*

3. *если $m > 1$, то $Q^3_{g,h}$ гомеоморфно связной сумме $(m-1)$ экземпляров $S^2 \times S^1$.*

Несложно проверяется, что образ $\pi(Q^3_{g,h})$ задаётся неравенством $\varphi_g(r) \le h$, где

$$\varphi_g(r) = \frac{(g + \langle \lambda, r\rangle)^2}{2\langle Ar, r\rangle} + U(r) \text{ – приведённый потенциал,} \tag{1.11.4}$$

причём равенство, очевидно, отвечает граничным точкам в $\pi(Q^3_{g,h})$. Таким образом, изложенная процедура доставляет эффективный алгоритм описания топологии изоэнергетического многообразия $Q^3_{g,h}$.

Как отметил А. Т. Фоменко, было бы хорошо сформулировать аналог теоремы 1.6 для случая, когда образ изоэнергетического многообразия на сфере Пуассона некомпактен.

1.12 Метод булевых функций М. П. Харламова

В этом разделе мы дадим краткое описание метода булевых функций М. П. Харламова [50], позволяющего эффективно исследовать топологию слоений Лиувилля интегрируемых систем с разделяющимися переменными. При этом требуется, чтобы фазовые переменные "достаточно хорошо" выражались через переменные разделения. При этих условиях нахождение образа отображения момента, а также числа лиувиллевых слоёв в прообразе его точек сводится к анализу некоторой системы $\mathbb{Z}_2$-линейных уравнений. В случае систем с двумя степенями свободы с компактными лиувиллевыми слоями в качестве базисных циклов на торах Лиувилля удобно выбирать линии уровня переменных разделения. Тогда тип их бифуркаций выводится из анализа формул, связывающих фазовые переменные с переменными разделения. Это даёт возможность эффективно вычислять инварианты Фоменко–Цишанга, выписывая матрицы склейки в явном виде.

1.12.1 Разделение переменных и булевы функции

Пусть имеется гамильтонова система с $2n$ степенями свободы, интегрируемая при помощи интегралов $f_1, \dots, f_n$. Факт разделения переменных означает, что на каждом слое слоения Лиувилля система гамильтоновых уравнений сводится к системе вида

$$\dot{u_i} = \sqrt{P_i(u_i)}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.12.1}$$

где P_i – многочлены с коэффициентами, гладко зависящими от значений первых интегралов. Разделение переменных называется *алгебраическим* (см. [50]), если все фазовые переменные выражаются через переменные разделения u_i как рациональные функции от радикалов вида $\sqrt{u_i - \alpha_j}$ с коэффициентами, гладко зависящими от $f_1, \dots, f_n$. Здесь $\{\alpha_j\}$ – некоторый конечный набор чисел (зависящий от $f_1, \dots, f_n$), который, как правило, исчерпывается корнями многочленов P_i.

Обозначим набор всех радикалов вида $\sqrt{u_i - \alpha_j}$ через $r_1, \dots, r_m$. Положим

$$\operatorname{bsgn}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \geq 0; \\ 1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

Пусть $z_i = \operatorname{bsgn}(r_i^2)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$. Тогда нахождение образа отображения момента состоит в проверке вещественности рациональных функций, выражающих фазовые переменные через переменные разделения, что, в свою очередь, сводится к исследованию разрешимости системы $\mathbb{Z}_2$-линейных уравнений вида $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$, где A – булева $k \times m$-матрица, а $\mathbf{b}$ – булев столбец высоты k. Сложение понимается по модулю 2. Поясним, что k – это общее число мономов, входящих в рациональные функции, выражающие фазовые переменные через переменные разделения. Каждому моному отвечает $\mathbb{Z}_2$-линейное уравнение относительно переменных z_i, выражающее условие его вещественности. Аналогично можно находить число связных компонент в прообразе какого-либо значения отображения момента.

1.12.2 Пример: геодезический поток трёхосного эллипсоида общего положения

Проиллюстрируем применение метода М. П. Харламова на примере одной классической задачи, а именно, геодезического потока эллипсоида.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ эллипсоид $E^n = \{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{a_i} = 1\}$, $0 < a_1 \leq \ldots \leq a_{n+1}$. Известно, что его геодезический поток является интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой на T^*E^n, т.е. допускает n функционально независимых (почти всюду) первых интегралов в инволюции. Первое доказательство этого факта принадлежит Якоби [63] и основывается на разделении переменных в эллиптических координатах. Другой подход представлен в [25]. Таким образом, на

T^*E^n определено слоение Лиувилля, слоями которого являются связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $F_1, \ldots, F_n$. Топология слоения Лиувилля геодезического потока эллипсоида изучалась во многих работах, в частности, в [10] для $n = 2$, в [57, 58] для $n = 3$, в [73] для многомерного случая общего положения.

Рассмотрим вопрос о количестве связных компонент (торов Лиувилля) в прообразе регулярного значения отображения момента для случая общего положения ($a_1 < \ldots < a_{n+1}$), являющегося нерезонансным. Это количество уже зависит от выбора первых интегралов и вычисляется для конкретного их набора, который будет предъявлен ниже. Рассматриваемый результат не является новым (см., например, [55]). Здесь же для его решения мы демонстрируем метод булевых функций М. П. Харламова [50], по-видимому, ранее не использовавшийся для решения данной задачи.

Напомним, что эллиптическими координатами на E^n называется набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ решений уравнения $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1$ со свойством $\lambda_j \in [a_j, a_{j+1}]$. Эти координаты локально регулярны на $E^n \backslash Z$, где $Z = \{\exists j : \lambda_{j-1} = a_j = \lambda_j\}$ (в двумерном случае множество Z состоит из омбилических точек). Декартовы координаты выражаются через эллиптические следующим образом (см. [63]):

$$x_m = \pm\sqrt{\frac{a_m(a_m - \lambda_1)(a_m - \lambda_2)\ldots(a_m - \lambda_n)}{\prod_{i \neq m}(a_m - a_i)}}, \quad m = 1, \ldots, n+1. \tag{1.12.2}$$

Логарифмированием, а затем дифференцированием находим выражение для компонент вектора скорости:

$$\dot{x}_m = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_m \prod_{i=1}^{n}(a_m - \lambda_i)}{\prod_{i \neq m}(a_m - a_i)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{\lambda}_j}{\lambda_j - a_m}, \quad m = 1, \ldots, n+1. \tag{1.12.3}$$

Метрика эллипсоида в эллиптических координатах имеет на $E^n \backslash Z$ следующий вид (см. [63]):

$$ds^2 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j \prod_{k \neq j}(\lambda_k - \lambda_j)}{\prod_{k=1}^{n+1}(a_k - \lambda_j)} d\lambda_j^2.$$

Как показано в [73], эллиптические координаты удобно рассматривать на n-мерном торе $T^n = S_1^1 \times \ldots \times S_n^1$, разветвлённо накрывающем E^n. Это накрытие устроено таким образом, что множество точек ветвления отображается на Z, а каждая функция λ_j, поднятая на T^n, оказывается зависящей только от координаты на окружности S_j^1 и имеет на ней две точки минимума и две точки максимума со значениями a_j и a_{j+1} соответственно. Чтобы получить разделение переменных, введем, следуя [73], на каждой окружности S_j^1 периодическую координату q_j, такую, что

$$\frac{d\lambda_j}{dq_j} = \pm\left(\frac{(-1)^j}{\lambda_j}\prod_{k=1}^{n+1}(a_k - \lambda_j)\right)^{1/2}. \tag{1.12.4}$$

Тогда в координатах q_j метрика эллипсоида примет вид $ds^2 = \sum_{j=1}^{n} N_j(q) dq_j^2$, где

$$N_j(q) = (-1)^{j+1}\prod_{k \neq j}(\lambda_k - \lambda_j).$$

Пусть $p_j = N_j(q)\dot{q}_j$ – импульсы, отвечающие координатам q_j. Обозначим накрытие $T^n \to E^n$ через ρ. Геодезический поток, поднятый естественным образом на T^*K^n, где $K^n = T^n \backslash \rho^{-1}(Z)$, имеет гамильтониан $H = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{N_j(q)}$. Этот вид гамильтониана позволяет рассматривать поток как штеккелеву систему (см., например, [2]) и получить первые интегралы $F_1, \ldots, F_n$ из следующей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk}(q_j) F_k = f_j(q_j, p_j), \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{1.12.5}$$

где $\varphi_{jk} = \lambda_j^{k-1}(q_j)$, $f_j(q_j, p_j) = (-1)^{n-j} p_j^2$. (При этом $F_n = H$.)

Положим $D_F(x) = \sum_{k=1}^n F_k x^{k-1}$. Тогда система 1.12.5 переписывается в виде

$$p_j = \pm\sqrt{(-1)^{n-j} D_F(\lambda_j)}, \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{1.12.6}$$

что доставляет искомое разделение переменных.

Пусть значения интегралов F_k фиксированы и задают непустое множество в T^*K^n. Тогда из условия вещественности p_j следует, что многочлен $D_F(x)$ имеет $(n-1)$ вещественных корней $I_1, \ldots, I_{n-1}$, таких, что $I_k \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$. Эти корни вместе с гамильтонианом H можно взять в качестве новой системы первых интегралов. Функции I_k корректно определены и являются гладкими на множестве $T^*(E^n \backslash Z)$, которое содержит все регулярные слои слоения Лиувилля (см. [73]).

Теорема 1.7 (С. С. Николаенко [74]). *Пусть на эллипсоиде E^n общего положения задан геодезический поток, интегрируемый (как показано выше) с помощью функций $I_1, \ldots, I_{n-1}, H$. Пусть прообраз при отображения момента $(I_1, \ldots, I_{n-1}, H) : T^*(E^n \backslash Z) \to \mathbb{R}^n$ некоторой точки $(I_1^0, \ldots, I_{n-1}^0, H^0)$ состоит только из регулярных слоёв (торов Лиувилля). Тогда их число равно 2^L, где $L = \#\{j : I_{j-1} < a_j < a_{j+1} < I_j\}$ (полагаем $I_0 = -\infty$, $I_n = +\infty$).*

Доказательство. Из неравенств $a_k \le \lambda_k \le a_{k+1}$ и $\lambda_k \le I_k \le \lambda_{k+1}$ следует, что $a_k \le I_k \le a_{k+2}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Как показано в [73], поверхность $\Gamma_{I^0,H^0} = \{I_1 = I_1^0, \ldots, I_{n-1} = I_{n-1}^0, H = H^0\}$ состоит из (какого-то числа) регулярных слоев тогда и только тогда, когда $H^0 > 0$, $I_k^0 \ne a_s$ для любых k, s и $I_k^0 \ne I_i^0$ для любых $k \ne i$. Поэтому образ отображения момента содержит 2^{n-1} регулярных областей $\{I_k \in (a_i, a_{i+1})\}$, где $i = k$ или $k+1$. Точки, принадлежащие одной такой области, являются образами одного и того же числа торов Лиувилля.

Метод булевых функций М.П. Харламова [50] предполагает разделение переменных в виде системы уравнений $\dot{s}_i = \sqrt{V_{\mathbf{f}}^i(s_i)}$, где s_i – переменные разделения, а $V_{\mathbf{f}}^i(s_i)$ – многочлены одной переменной с коэффициентами, зависящими от набора $\mathbf{f}$ значений первых интегралов. При этом исходные фазовые переменные должны выражаться рациональными функциями от радикалов вида $\sqrt{s_i - e_l}$ с коэффициентами, гладко и однозначно зависящими от $\mathbf{s}$ (e_l – некоторые константы, зависящие от $\mathbf{f}$). Из условия вещественности фазовых переменных следует, что

образ проекции π поверхности уровня интегралов на пространство переменных разделения (называемый областью возможности движения) является набором параллелепипедов. Дальнейший алгоритм сводится к изучению многозначного отображения π^{-1}.

В данном случае разделения переменных в указанном виде мы не предъявляем, однако можно рассмотреть проекцию регулярной поверхности Γ_{I^0,H^0} на $\mathbb{R}^n(\lambda)$. Образом этой проекции служит параллелепипед $\{\lambda_j \in [a_j,\, a_{j+1}] \cap [I_{j-1},\, I_j],\ j = 1, \ldots, n\}$.

Выразим теперь $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ через λ. Из 1.12.4 и 1.12.6 находим выражения $\dot{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ через λ:

$$\dot{\lambda_j} = \left(\frac{(-1)^j}{\lambda_j} \prod_{k=1}^{n+1} (a_k - \lambda_j) \right)^{1/2} \frac{\pm\sqrt{(-1)^{n-j} H^0 \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_j - I_k)}}{(-1)^{j+1} \prod_{k \neq j} (\lambda_k - \lambda_j)}. \tag{1.12.7}$$

Подставив 1.12.7 в 1.12.3, получим:

$$\dot{x}_m = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i - a_m} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(T_j(\lambda) \prod_{k=1}^{n+1} \sqrt{\lambda_j - a_k} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_j - I_k} \right), \tag{1.12.8}$$

где $T_j(\lambda)$ – однозначные функции от λ.

Формулы 1.12.2 и 1.12.8 доставляют нужное выражение фазовых переменных $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ через многочлены от радикалов $r_{jk} = \sqrt{\lambda_j - a_k}$, $R_{jk} = \sqrt{\lambda_j - I_k}$ с коэффициентами, однозначно зависящими от λ. Радикалы r_{jk}, R_{jk} можно считать вещественными, вынося мнимые единицы в коэффициент.

Пусть $b_{jk} = \mathrm{bsgn}(r_{jk})$, $B_{jk} = \mathrm{bsgn}(R_{jk})$, где $\mathrm{bsgn}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \geq 0; \\ 1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ – булев знак. Ставя в соответствие каждому моному от r_{jk}, R_{jk} в 1.12.2 и 1.12.8 сумму (по mod 2) отвечающих ему булевых знаков, получаем линейное над $\mathfrak{B} = \{0, 1\}$ отображение $A : \mathfrak{B}^{n(n-1)+n(n+1)} \to \mathfrak{B}^{n+1+n(n+1)}$, зависящее от набора значений b_{jk}, B_{jk}. Компоненты A_m, A_{mj} этого отображения задаются следующим образом:

$$A_m = b_{1m} + b_{2m} + \ldots + b_{nm}; \tag{1.12.9}$$

$$A_{mj} = (b_{1m} + b_{2m} + \ldots + b_{nm}) + (b_{j1} + b_{j2} + \ldots + b_{j,n+1}) + (B_{j1} + B_{j2} + \ldots + B_{j,n-1}), \tag{1.12.10}$$

где $m = 1, \ldots, n+1,\ j = 1, \ldots, n$.

Разделим аргументы b_{jk}, B_{jk} на две группы, отнеся к первой булевы знаки радикалов, не меняющих знак вдоль траекторий, содержащихся в поверхности Γ_{I^0,H^0}, а ко второй – периодически меняющих знак вдоль этих траекторий. Теперь для каждого нефиктивного аргумента второй группы соответствующий столбец матрицы отображения A элементарными преобразованиями над строками следует привести к единичному виду, после чего исключить из матрицы этот столбец и строку, содержащую единицу. Если получившаяся в итоге матрица имеет ранг l, то число связных компонент в Γ_{I^0,H^0} равно 2^l.

Для удобства будем выполнять элементарные преобразования над выражениями 1.12.9, 1.12.10. Вычитая A_m из A_{mj} для всех m, j, получим отображение $\widetilde{A}$, имеющее $(2n+1)$ независимых компонент A_m, $\widetilde{A}_j = (b_{j1}+b_{j2}+\ldots+b_{j,n+1})+(B_{j1}+B_{j2}+\ldots+B_{j,n-1})$. Для каждого m один из радикалов $\sqrt{\lambda_{m-1}-a_m}$, $\sqrt{\lambda_m-a_m}$ меняет знак вдоль траекторий из Γ_{I^0,H^0} (первый при $I_{m-1} > a_m$, второй при $I_{m-1} < a_m$). Поэтому каждая компонента A_m содержит аргумент из второй группы, а значит, исчезает после преобразований. Заметим, что замена $\widetilde{A}_j$ на $\widetilde{A}_j + A_m$ не затрагивает переменных B_{jk}. А поскольку переменная B_{jk} встречается только в компоненте $\widetilde{A}_j$, то ранг l отображения, полученного в результате всех преобразований, равен числу компонент $\widetilde{A}_j$, не зависящих от переменных второй группы. То есть $l = \#\{j : \forall k\, \sqrt{\lambda_j - I_k}$ не меняет знак$\}$. Но условие, что $\sqrt{\lambda_j - I_k}$ не меняет знак для всех k, означает, что $I_{j-1} < a_j$ и $a_{j+1} < I_j$. Отсюда $l = \#\{j : I_{j-1} < a_j < a_{j+1} < I_j\} = L$, что и требовалось. $\square$

Глава 2

Семейство интегрируемых систем Чаплыгина–Горячева

2.1 Постановка задачи

В диссертации рассматривается семейство интегрируемых гамильтоновых систем на двойственном пространстве $e(3)^*$ к алгебре Ли $e(3)$, снабжённом стандартной скобкой Ли–Пуассона. Напомним, что в подходящих координатах $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3$ на $e(3)^*$ скобка Ли–Пуассона задаётся формулами

$$\{s_i, s_j\} = -\varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{s_i, r_j\} = -\varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{2.1.1}$$

где $\varepsilon_{ijk} = \dfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$, и имеет две независимые функции Казимира (т. е. такие функции, скобка которых с любой другой функцией равна нулю):

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \tag{2.1.2}$$

$$f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3. \tag{2.1.3}$$

Гамильтонова система уравнений на $e(3)^*$ (как и на всяком пуассоновом многообразии) имеет вид:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.1.4}$$

где H – функция Гамильтона (гамильтониан).

Функции f_1 и f_2 являются первыми интегралами любой гамильтоновой системы на $e(3)^*$ и традиционно называются *геометрическим интегралом* и *интегралом площадей* соответственно. На 4-мерных симплектических листах $M^4_{a,g} = \{x \in e(3)^* \mid f_1(x) = a, f_2(x) = g\}$, $a > 0$, скобка (2.1.1) определяет симплектическую структуру. При этом на $M^4_{a,g}$ гамильтонова система из определения 1.1.1 совпадает с системой 2.1.4. Ограничение тензора Пуассона на $M^4_{a,g}$

(корректно определённое в силу того, что f_1, f_2 – функции Казимира, и задаваемое матрицей, обратной к матрице симплектической формы) будем обозначать через $\mathfrak{A}$.

Рассматриваемое в данной работе семейство гамильтоновых систем на $e(3)^*$ задаётся гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2\right) + \frac{c}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right) + \frac{b}{2r_3^2}. \tag{2.1.5}$$

На каждом симплектическом листе $M^4_{a,g}$, $a > 0$ эти системы имеют две степени свободы. При нулевом значении интеграла площадей (т. е. на $M^4_{a,0}$) они интегрируемы при помощи дополнительного интеграла

$$F = \left(s_1^2 - s_2^2 - \frac{b(r_1^2 - r_2^2)}{a^2 r_3^2} + cr_3^2\right)^2 + 4\left(s_1 s_2 - \frac{b r_1 r_2}{a^2 r_3^2}\right)^2.$$

В дальнейшем нам будет удобнее вместо F рассматривать в качестве дополнительного интеграла функцию

$$K = \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)^2 + 2c(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + c^2 r_3^4, \tag{2.1.6}$$

связанную с H и F при условии $f_2 = 0$ соотношением

$$K = F + \frac{4b}{a^2}H - \frac{b^2}{a^4}.$$

В координатах s_i, r_i гамильтоновы уравнения 2.1.4 для функции Гамильтона (2.1.5) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= s_2 s_3 + c r_2 r_3 - \frac{b r_2}{r_3^3}, & \dot{r}_1 &= 2 r_2 s_3 - s_2 r_3,\\
\dot{s}_2 &= -s_1 s_3 + c r_1 r_3 + \frac{b r_1}{r_3^3}, & \dot{r}_2 &= s_1 r_3 - 2 r_1 s_3,\\
\dot{s}_3 &= -2 c r_1 r_2, & \dot{r}_3 &= r_1 s_2 - s_1 r_2.
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Нас будет интересовать случай $c \neq 0$, так как при $c = 0$ получаем хорошо известный интегрируемый случай Лагранжа с потенциалом специального вида. Условие $c \neq 0$ позволяет избавиться от постоянных a и c путём следующей линейной замены координат и первых интегралов:

$$\begin{aligned}
&s_i = a\sqrt{|c|}\, s_i', \quad r_i = a r_i', \quad i = 1, 2, 3;\\
&H = a^2 |c| H', \quad K = a^4 c^2 K'.
\end{aligned}$$

При этом в случае $c < 0$ следует также поменять местами переменные s_1 и s_2, а также r_1 и r_2. (Отметим, что указанная замена интегралов равносильна масштабированию параметра на интегральных траекториях соответствующих гамильтоновых потоков.) В новых обозначениях постоянные a и c исчезнут, а постоянная b заменится на b' так, что $b = a^4|c|b'$. Для удобства

записи новые обозначения будем по-прежнему употреблять без штрихов. Таким образом, для новых интегралов H и K постоянные a и c будут равны 1:

$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right), \tag{2.1.8}$$

$$K = \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + r_3^4, \tag{2.1.9}$$

а уравнения (2.1.7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 s_3 + r_2 r_3 - \frac{b r_2}{r_3^3}, & \dot{r}_1 &= 2r_2 s_3 - s_2 r_3, \\ \dot{s}_2 &= -s_1 s_3 + r_1 r_3 + \frac{b r_1}{r_3^3}, & \dot{r}_2 &= s_1 r_3 - 2r_1 s_3, \\ \dot{s}_3 &= -2r_1 r_2, & \dot{r}_3 &= r_1 s_2 - s_1 r_2. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Итак, рассматриваемое семейство систем задаётся одним параметром b. При $b = 0$ сингулярное слагаемое в гамильтониане исчезает, и он становится многочленом второй степени от переменных s_i, r_i. Этот частный случай был рассмотрен в работе С. А. Чаплыгина [54]. Более общий случай (с произвольным значением $b \in \mathbb{R}$) описан в работе Д. Н. Горячева [17]. Случай $b < 0$ интересен тем, что все слои соответствующих слоений Лиувилля оказываются некомпактными. В соответствии с вышесказанным будем выделять в семействе систем Чаплыгина–Горячева три случая:

- $b = 0$ – случай Чаплыгина;
- $b > 0$ – компактный случай Горячева;
- $b < 0$ – некомпактный случай Горячева.

Замечание 2.1.1. Рассматриваемое семейство систем Чаплыгина–Горячева не следует путать с хорошо известным в динамике твёрдого тела интегрируемым случаем Горячева–Чаплыгина с дополнительным интегралом третьей степени.

В силу постановки задачи при $b \neq 0$ переменная r_3 не должна обращаться в нуль, поэтому фазовое многообразие $M^4_{1,0}$ распадается на две связные компоненты, выделяемые условиями $r_3 > 0$ и $r_3 < 0$. Несложно видеть, что ограничения рассматриваемого семейства динамических систем на эти компоненты изоморфны. Этот изоморфизм устанавливается, например, инволюцией $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \mapsto (s_1, s_2, s_3, -r_1, -r_2, -r_3)$.

Замечание 2.1.2. Всюду далее выражения, содержащие параметр b в качестве множителя, при $b = 0$, будут предполагаться равными нулю. Например, в формуле (2.1.5) выше при $b = 0$ последнее слагаемое считаем равным нулю (поэтому, например, допустимо равенство переменной r_3 нулю).

В последующих разделах настоящей главы находятся особые точки отображения момента ранга 0 и 1 и исследуется их невырожденность, строится бифуркационная диаграмма и определяется топологический тип изоэнергетических многообразий. При $b \geq 0$ эти вопросы частично были исследованы О. Е. Орёл и П. Е. Рябовым в работах [36, 67]. Наша ближайшая цель – рассмотреть эти вопросы с общей точки зрения, сразу для всех значений параметра b.

2.2 Особые точки ранга ноль

Теорема 2.1 (П. Е. Рябов [36] ($b > 0$), С. С. Николаенко [75] ($b \leq 0$))**.**

1. *Гамильтониан H имеет на многообразии $M^4_{1,0}$ следующие критические точки:*
   $P_1^{\pm\pm}(0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{-b}},0,\pm\sqrt[4]{-b})$ *при* $-1 \leq b \leq 0$;
   $P_2^{\pm\pm}(0,0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{b}},\pm\sqrt[4]{b})$ *при* $0 \leq b \leq 1$;
   $P_3^{\pm}(0,0,0,0,0,\pm 1)$ *при* $b \in \mathbb{R}$.

2. *Эти точки критические также для интеграла K, следовательно, они являются особыми точками ранга ноль отображения момента $\mathfrak{F} = (H, K)$. Других особых точек ранга ноль, очевидно, нет.*

3. *Точки $P_1^{\pm\pm}$ имеют тип седло-седло при $-1 < b < 0$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 0$; точки $P_2^{\pm\pm}$ имеют тип центр-центр при $0 < b < 1$ и вырождены при $b = 0$ и $b = 1$; точки $P_3^{\pm}$ имеют тип седло-седло при $b < -1$, центр-седло при $-1 < b < 1$, центр-центр при $b > 1$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 1$.*

4. *На бифуркационной диаграмме точкам $P_1^{\pm\pm}, P_2^{\pm\pm}, P_3^{\pm}$ соответствуют точки*

$$\mathfrak{F}(P_1^{\pm\pm}) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -2b\right); \quad \mathfrak{F}(P_2^{\pm\pm}) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}, 2b\right); \quad \mathfrak{F}(P_3^{\pm}) = \left(\frac{b}{2}, b^2 + 1\right).$$

Замечание 2.2.1. При $b = -1$ имеем $P_1^{+\pm} = P_1^{-\pm} = P_3^{\pm}$, при $b = 1$ – $P_2^{+\pm} = P_2^{-\pm} = P_3^{\pm}$, а при $b = 0$ – $P_1^{\pm+} = P_1^{\pm-} = P_1^{\pm}(0,0,0,\pm 1,0,0)$ и $P_2^{\pm+} = P_2^{\pm-} = P_2^{\pm}(0,0,0,0,\pm 1,0)$. Таким образом, при $-1 < b < 1$ имеется шесть особых точек отображения момента ранга ноль, а при $|b| \geq 1$ – две точки.

Доказательство. Точка многообразия $M^4_{1,0}$ является критической для некоторой функции в том случае, если дифференциал этой функции в данной точке является линейной комбинацией дифференциалов df_1 и df_2. Имеем:

$$df_1 = (0,0,0,2r_1,2r_2,2r_3); \tag{2.2.1}$$

$$df_2 = (r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3); \tag{2.2.2}$$

$$dH = \left(s_1, s_2, 2s_3, r_1, -r_2, -\frac{b}{r_3^3} \right); \tag{2.2.3}$$

$$dK = \left(4s_1(\xi + r_3^2), 4s_2(\xi - r_3^2), 0, 0, 0, -\frac{4b}{r_3^3}\xi + 4r_3\eta \right), \tag{2.2.4}$$

где $\xi = s_1^2 + s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2}$, $\eta = s_1^2 - s_2^2 + r_3^2$.

Пусть в некоторой точке $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \in M^4_{1,0}$ выполнено соотношение

$$dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2.$$

Это равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} s_1 = \lambda_2 r_1; \\ s_2 = \lambda_2 r_2; \\ 2s_3 = \lambda_2 r_3; \\ r_1 = 2\lambda_1 r_1 + \lambda_2 s_1; \\ -r_2 = 2\lambda_1 r_2 + \lambda_2 s_2; \\ -\dfrac{b}{r_3^3} = 2\lambda_1 r_3 + \lambda_2 s_3. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Из первых трёх уравнений с учётом равенства $f_2 = 0$ получаем $\lambda_2 \left(r_1^2 + r_2^2 + \dfrac{r_3^2}{2} \right) = 0$. Так как $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \le r_1^2 + r_2^2 + \dfrac{r_3^2}{2} \le r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, то отсюда заключаем, что $\lambda_2 = 0$ и, следовательно, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Система 2.2.5 переписывается в виде

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda_1) r_1 = 0; \\ (1 + 2\lambda_1) r_2 = 0; \\ 2\lambda_1 r_3^4 = -b. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Возможны три случая.

1. $r_2 = 0$, $r_1 \neq 0$. Тогда $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, и из третьего уравнения находим $r_3 = \pm\sqrt[4]{-b}$, а из равенства $f_1 = 0$ $r_1 = \pm\sqrt{1 - \sqrt{-b}}$. Таким образом, получаем точки $P_1^{\pm\pm}$.
2. $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$. Тогда $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$, $r_3 = \pm\sqrt[4]{b}$, $r_2 = \pm\sqrt{1 - \sqrt{b}}$. Получаем точки $P_2^{\pm\pm}$.
3. $r_1 = r_2 = 0$. Тогда $r_3 = \pm 1$, $\lambda_1 = -\dfrac{b}{2}$. Получаем точки $P_3^{\pm}$.

Первый пункт теоремы доказан. Пункты 2 и 4 доказываются непосредственной проверкой.

Докажем пункт 3. В окрестности точек $P_3^{\pm}$, а при $b \neq 0$ также в окрестности точек $P_1^{\pm\pm}, P_2^{\pm\pm}$ в качестве локальных координат на $M^4_{1,0}$ удобно выбрать функции s_1, s_2, r_1, r_2. Тогда матрица тензора Пуассона запишется в виде

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -r_3 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса касательного пространства в точках $P_1^{\pm\pm}$, $P_2^{\pm\pm}$, $P_3^{\pm}$ возьмём векторы

$$e_1 = \left(1, 0, -\frac{r_1}{r_3}, 0, 0, 0\right); \qquad e_3 = \left(0, 0, 0, 1, 0, -\frac{r_1}{r_3}\right);$$
$$e_2 = \left(0, 1, -\frac{r_2}{r_3}, 0, 0, 0\right); \qquad e_4 = \left(0, 0, 0, 0, 1, -\frac{r_2}{r_3}\right).$$

Далее, в рассматриваемых точках имеем:

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{3b}{r_3^4} \end{pmatrix}; \quad d^2f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$d^2K = 4\begin{pmatrix} \dfrac{b}{r_3^2} + r_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{r_3^2} - r_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{5b^2}{r_3^6} + 3r_3^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе из векторов e_1, e_2, e_3, e_4 получаем:

$$d^2H|_{M^4_{1,0}} = \begin{pmatrix} \dfrac{2r_1^2}{r_3^2} + 1 & \dfrac{2r_1r_2}{r_3^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2r_1r_2}{r_3^2} & \dfrac{2r_2^2}{r_3^2} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3br_1^2}{r_3^6} + 1 & \dfrac{3br_1r_2}{r_3^6} \\ 0 & 0 & \dfrac{3br_1r_2}{r_3^6} & \dfrac{3br_2^2}{r_3^6} - 1 \end{pmatrix}; \quad d^2f_1|_{M^4_{1,0}} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r_1^2}{r_3^2} + 1 & \dfrac{r_1r_2}{r_3^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{r_1r_2}{r_3^2} & \dfrac{r_2^2}{r_3^2} + 1 \end{pmatrix};$$

$$d^2K|_{M^4_{1,0}} = 4\begin{pmatrix} \dfrac{b}{r_3^2}+r_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{r_3^2}-r_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1^2\left(\dfrac{5b^2}{r_3^8}+3\right) & r_1r_2\left(\dfrac{5b^2}{r_3^8}+3\right) \\ 0 & 0 & r_1r_2\left(\dfrac{5b^2}{r_3^8}+3\right) & r_2^2\left(\dfrac{5b^2}{r_3^8}+3\right) \end{pmatrix}.$$

Посмотрим теперь, как выглядят в точках $P_1^{\pm\pm}$, $P_2^{\pm\pm}$, $P_3^{\pm}$ в координатах s_1, s_2, r_1, r_2 матрицы операторов A_H, A_K, порождаемых линейными частями полей $\operatorname{sgrad} H$, $\operatorname{sgrad} K$.

1. В точках $P_1^{\pm\pm}(0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{-b}},0,\pm\sqrt[4]{-b})$ имеем $dH = \dfrac{1}{2}df_1$, $dK = 0$, поэтому

$$A_H|_{P_1^{\pm\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2H|_{M^4_{1,0}} - \frac{1}{2}d^2f_1|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_1^{\pm\pm}} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{-b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{-b}}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\left(\dfrac{1}{\sqrt{-b}}-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{-b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4\left(\dfrac{1}{\sqrt{-b}}-1\right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_K|_{P_1^{\pm\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2K|_{M^4_{1,0}}\right)|_{P_1^{\pm\pm}} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{-b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8(1-\sqrt{-b}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \pm 4\sqrt[4]{-b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8(1-\sqrt{-b}) & 0 \\ 0 & 2\sqrt{-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что операторы A_H и A_K линейно независимы, а порождаемая ими подалгебра в

$sp(4,\mathbb{R})$ состоит из всевозможных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2A\sqrt{-b} \\ 0 & 0 & 4B(1-\sqrt{-b}) & 0 \\ 0 & B\sqrt{-b} & 0 & 0 \\ A(2-\sqrt{-b}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения такой матрицы равны $\pm A\sqrt{2(2-\sqrt{-b})}\sqrt[4]{-b}$, $\pm 2B\sqrt{1-\sqrt{-b}}\sqrt[4]{-b}$. Они вещественны и отличны от нуля при $-1 < b < 0$, а при $b = -1$ два из них обращаются в ноль. Следовательно, точки $P_1^{\pm\pm}$ **вырождены** при $b = -1$ и имеют тип **седло-седло** при $-1 < b < 0$.

2. Аналогично, в точках $P_2^{\pm\pm}(0,0,0,0,\pm\sqrt{1-\sqrt{b}},\pm\sqrt[4]{b})$ $dH = -\frac{1}{2}df_1$, $dK = 0$, поэтому

$$A_H|_{P_2^{\pm\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2H|_{M^4_{1,0}} + \frac{1}{2}d^2f_1|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_2^{\pm\pm}} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{b}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right) \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{b}}+1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_K|_{P_2^{\pm\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2K|_{M^4_{1,0}}\right)|_{P_2^{\pm\pm}} =$$

$$= \pm\sqrt[4]{b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 4\begin{pmatrix} 2\sqrt{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8(1-\sqrt{b}) \end{pmatrix} = \pm 4\sqrt[4]{b}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8(1-\sqrt{b}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы A_H и A_K линейно независимы, а порождаемая ими подалгебра в $sp(4,\mathbb{R})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4A(1-\sqrt{b}) \\ 0 & 0 & 2B\sqrt{b} & 0 \\ 0 & -B(2-\sqrt{b}) & 0 & 0 \\ A\sqrt{b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения такой матрицы равны $\pm 2Ai\sqrt{1-\sqrt{b}}\sqrt[4]{b}$, $\pm Bi\sqrt{2(2-\sqrt{b})}\sqrt[4]{b}$. Они являются чисто мнимыми и отличны от нуля при $0 < b < 1$, а при $b = 1$ два из них обращаются в ноль. Следовательно, точки $P_2^{\pm\pm}$ **вырождены** при $b = 1$ и имеют тип **центр-центр** при $0 < b < 1$.

3. Наконец, в точках $P_3^{\pm}(0,0,0,0,0,\pm 1)$ $dH = -\dfrac{b}{2}df_1$, $dK = 2(1-b^2)df_1$, и

$$A_H|_{P_3^{\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2H|_{M^4_{1,0}} + \frac{b}{2}d^2f_1|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_3^{\pm}} =$$

$$= \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1+b & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_K|_{P_3^{\pm}} = \mathfrak{A}\left(d^2K|_{M^4_{1,0}} - 2(1-b^2)d^2f_1|_{M^4_{1,0}}\right)|_{P_3^{\pm}} =$$

$$= \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 4\begin{pmatrix} b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \pm 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-b^2 \\ 0 & 0 & -(1-b^2) & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & 0 \\ 1+b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы A_H и A_K линейно независимы, а порождаемая ими подалгебра в $sp(4,\mathbb{R})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A(1-b) \\ 0 & 0 & B(1+b) & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения такой матрицы равны $\pm A\sqrt{1-b}$, $\pm B\sqrt{-1-b}$. Первые два из них вещественны при $b < 1$, чисто мнимы при $b > 1$ и равны нулю при $b = 1$, а вторые два вещественны при $b < -1$, чисто мнимы при $b > -1$ и равны нулю при $b = -1$. Таким образом, точки $P_3^{\pm}$ имеют тип **седло-седло** при $b < 1$, **центр-седло** при $-1 < b < 1$, **центр-центр** при $b > 1$ и **вырождены** при $b = \pm 1$.

Остаётся в случае $b = 0$ исследовать на невырожденность точки $P_1^{\pm\pm} = P_1^{\pm}(0,0,0,\pm 1,0,0)$ и $P_2^{\pm\pm} = P_2^{\pm}(0,0,0,0,\pm 1,0)$. Но в этом случае для каждой из этих двух пар точек имеем $d^2K = 0$.

Поэтому $A_K|_{P_1^\pm} = \mathfrak{A}\left(d^2K|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_1^\pm} = 0$, и аналогично $A_K|_{P_2^\pm} = \mathfrak{A}\left(d^2K|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_2^\pm} = 0$. Отсюда следует, что при $b = 0$ особые точки $P_1^\pm$, $P_2^\pm$ **вырождены**.

Теорема 2.1 доказана.

□

Замечание 2.2.2. При $b = 0$ точки $P_2^\pm(0,0,0,0,\pm1,0)$ можно сделать невырожденными путём извлечения квадратного корня из интеграла K. Рассмотрим, например, точку P_2^+ (для точки P_2^- рассуждения полностью аналогичны). Функция $\sqrt{K}\Big|_{M^4_{1,0}}$ принадлежит классу C^1 в некоторой окрестности точки P_2^+ и имеет в этой точке непрерывные частные производные до второго порядка. В качестве локальных координат в окрестности точки P_2^+ возьмём функции s_1, s_3, r_1, r_3. Тогда матрица тензора Пуассона запишется следующим образом:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а соответствующий базис в $T_{P_2^+}M^4_{1,0}$ будет выглядеть так:

$$e_1 = (1,0,0,0,0,0)\,; \qquad e_3 = (0,0,0,1,0,0)\,;$$
$$e_2 = (0,0,1,0,0,0)\,; \qquad e_4 = (0,0,0,0,0,1)\,.$$

В таком базисе

$$d^2\sqrt{K}|_{M^4_{1,0}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1^2} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial s_3} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial r_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial r_3} \\ \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3\partial s_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3^2} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3\partial r_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3\partial r_3} \\ \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1\partial s_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1\partial s_3} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1^2} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1\partial r_3} \\ \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_3\partial s_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_3\partial s_3} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_3\partial r_1} & \dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_3^2} \end{pmatrix}.$$

Положим $P_{s_1,\varepsilon} = P_2^+ + \varepsilon e_1$, $P_{s_3,\varepsilon} = P_2^+ + \varepsilon e_2$, $P_{r_1,\varepsilon} = P_2^+ + \varepsilon e_3$, $P_{r_3,\varepsilon} = P_2^+ + \varepsilon e_4$ (как точки аффинного пространства $\mathbb{R}^6(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$). Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial s_1}\Big|_{P_2^+} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{K(P_{s_1,\varepsilon})} - \sqrt{K(P_2^+)}\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon^4} - 0) = 0,$$

и аналогично $\dfrac{\partial\sqrt{K}}{\partial s_3}\Big|_{P_2^+} = \dfrac{\partial\sqrt{K}}{\partial r_1}\Big|_{P_2^+} = \dfrac{\partial\sqrt{K}}{\partial r_3}\Big|_{P_2^+} = 0$, т.е. P_2^+ – критическая точка функции $\sqrt{K}\Big|_{M^4_{1,0}}$.

В любой точке, в которой $K \neq 0$,

$$d\sqrt{K} = \frac{1}{2\sqrt{K}} dK = \frac{2}{\sqrt{K}} \begin{pmatrix} s_1(s_1^2+s_2^2+r_3^2) \\ s_2(s_1^2+s_2^2-r_3^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_3(s_1^2-s_2^2+r_3^2) \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1^2}\Big|_{P_2^+} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2s_1(s_1^2+s_2^2+r_3^2)}{\sqrt{K}}\Big|_{P_{s_1,\varepsilon}} - \frac{\partial\sqrt{K}}{\partial s_1}\Big|_{P_2^+}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon^4}} - 0\right) = 2,$$

$$\frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial s_3}\Big|_{P_2^+} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2s_1(s_1^2+s_2^2+r_3^2)}{\sqrt{K}}\Big|_{P_{s_3,\varepsilon}} - \frac{\partial\sqrt{K}}{\partial s_1}\Big|_{P_2^+}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(0-0) = 0,$$

и аналогично $\dfrac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_3^2}\Big|_{P_2^+} = 2,$

$$\frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3^2}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1^2}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial r_1}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_1\partial r_3}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3\partial r_1}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial s_3\partial r_3}\Big|_{P_2^+} = \frac{\partial^2\sqrt{K}}{\partial r_1\partial r_3}\Big|_{P_2^+} = 0.$$

Таким образом,

$$A_{\sqrt{K}}|_{P_2^+} = \mathfrak{A}\left(d^2\sqrt{K}\,|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_2^+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для интеграла H в тех же локальных координатах имеем:

$$A_H|_{P_2^+} = \mathfrak{A}\left(d^2H|_{M^4_{1,0}} + \frac{1}{2}d^2f_1|_{M^4_{1,0}}\right)\Big|_{P_2^+} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, операторы A_H и $A_{\sqrt{K}}$ линейно независимы, а порождаемая ими подалгебра в $sp(4,\mathbb{R})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения такой матрицы чисто мнимые, следовательно, точка P_2^+ имеет тип **центр-центр**. Те же самые рассуждения относятся и к точке P_2^-.

2.3 Бифуркационная диаграмма

Введём следующие обозначения:

- $l_+ = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 2b\}$;
- $l_- = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = -2b\}$;
- $l = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 4bh - b^2\}$;
- $\pi_+ = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h+1)^2 - 2b\}$;
- $\pi_- = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h-1)^2 + 2b\}$.

Оказывается, при всех значениях параметра b бифуркационная диаграмма отображения момента для систем Чаплыгина–Горячева исчерпывается прямыми l_+, l_-, l и параболами π_+, π_- (либо их частями). Заметим, что в случае $b = 0$ все три прямые l_+, l_-, l совпадают.

Теорема 2.2 (О. Е. Орёл, П. Е. Рябов [67] ($b = 0$), П. Е. Рябов [36] ($b > 0$), С. С. Николаенко [78] ($b < 0$))**.** *Бифуркационная диаграмма отображения момента для систем типа Чаплыгина–Горячева состоит из следующих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$ значений первых интегралов H, K:*

при $\underline{b = 0}$ *(рис. 2.1):*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq -\frac{1}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq 0; \qquad l \text{ при } h \geq -\frac{1}{2};$$

при $\underline{0 < b < 1}$ *(рис. 2.2):*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq \sqrt{b} - \frac{1}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq \frac{b}{2};$$
$$l_+ \text{ при } h \in \left[\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; \qquad l \text{ при } h \geq \frac{b+1}{2};$$

при $\underline{b \geq 1}$ *(рис. 2.3):*

$$\pi_+ \text{ при } h \geq \frac{b}{2}; \qquad \pi_- \text{ при } h \geq \frac{b}{2}; \qquad l \text{ при } h \geq \frac{b+1}{2};$$

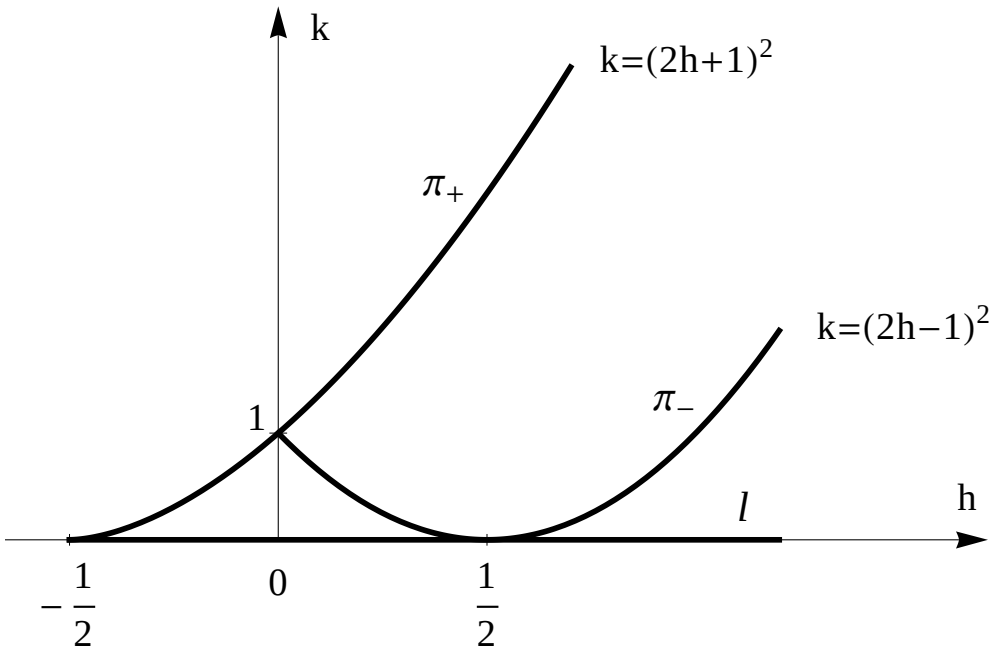


Рис. 2.1: Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Чаплыгина ($b = 0$)

при $\underline{b < 0}$ *(рис. 2.4, 2.5):*

$$\pi_+ \text{ при } h \in \mathbb{R}; \qquad \pi_- \text{ при } h \in \mathbb{R};$$
$$l_+ \text{ при } h \geq \frac{1}{2}; \qquad l_- \text{ при } h \geq -\frac{1}{2}; \qquad l \text{ при } h \in \left[\frac{b-1}{2}, \frac{b+1}{2}\right].$$

Доказательство. Пусть $P(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \in M^4_{1,0}$. То, что ранг дифференциала отображения момента $(H, K)\colon M^4_{1,0} \to \mathbb{R}^2$ в точке P меньше двух, означает, что дифференциалы функций H, K, f_1, f_2, рассматриваемых как функции на объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$, линейно зависимы в точке P. Иначе говоря, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ dH \\ dK \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2r_1 & 2r_2 & 2r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & 2s_3 & r_1 & -r_2 & -\dfrac{b}{r_3^3} \\ 4s_1(\xi + r_3^2) & 4s_2(\xi - r_3^2) & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{4b}{r_3^3}\xi + 4r_3\eta \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

меньше четырёх. Здесь, как и в формуле 2.2.4, полагаем $\xi = s_1^2 + s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2}$, $\eta = s_1^2 - s_2^2 + r_3^2$.

Доказательство проведём в несколько шагов. При этом, говоря о функциях H и K, мы будем иметь в виду их значения в точке P. То же касается и дифференциалов dH, dK, df_1, df_2. Через $M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ будем обозначать минор матрицы 2.3.1, стоящий на пересечении строк $i_1, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, \dots, j_k$.

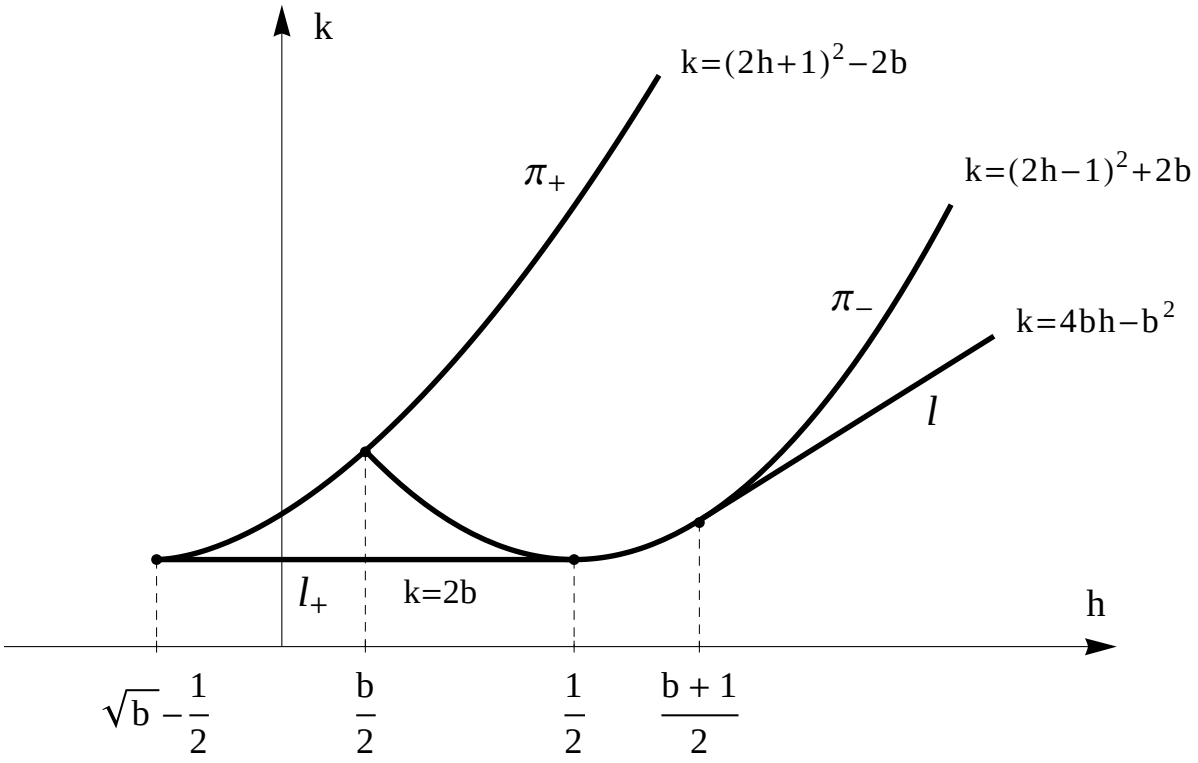


Рис. 2.2: Бифуркационная диаграмма отображения момента для компактного случая Горячева ($0 < b < 1$)

Шаг 1.

Лемма 2.3. *Пусть $dK = 0$. Тогда возможны два варианта:*

1. *$K = 2b$, $b \le 1$, при этом*

   $H \ge -\dfrac{1}{2}$ *при* $b = 0$,

   $H \in \left[\sqrt{b} - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ *при* $b \in (0, 1]$,

   $H \ge \dfrac{1}{2}$ *при* $b < 0$.

2. *$K = -2b$, $b < 0$, при этом $H \ge -\dfrac{1}{2}$.*

Доказательство. Поскольку $\dfrac{\partial K}{\partial s_1} = \dfrac{\partial K}{\partial s_2} = 0$, возможны четыре случая.

1) $\underline{s_1 = \xi - r_3^2 = 0}$, или, эквивалентно, $s_1 = 0$, $s_2^2 = r_3^2 - \dfrac{b}{r_3^2}$. Тогда $\dfrac{\partial K}{\partial r_3} = -\dfrac{4b}{r_3^3}\xi + 4r_3\eta =$

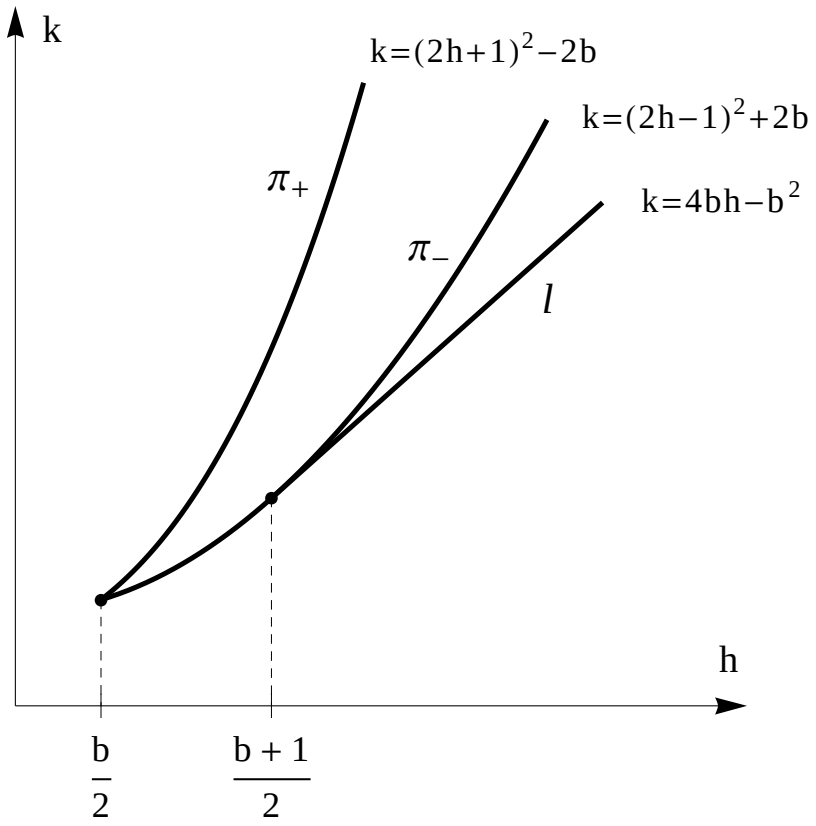


Рис. 2.3: Бифуркационная диаграмма отображения момента для компактного случая Горячева ($b \geq 1$)

$-\frac{4b}{r_3^3}r_3^2 + 4r_3\frac{b}{r_3^2} = 0$, т.е. действительно $dK = 0$. При этом

$$K = \left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)^2 + 2b = 2b,$$
$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + 1 - 2r_2^2 - r_3^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) = \frac{1}{2} + s_3^2 - r_2^2.$$

Из равенства $s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0$ в силу $s_1 = 0$ имеем $s_2^2r_2^2 = s_3^2r_3^2$. Подставляя выражение для s_2^2 через r_3^2, получаем $\left(r_3^2 - \frac{b}{r_3^2}\right)r_2^2 = s_3^2r_3^2$, откуда $\frac{br_2^2}{r_3^2} = \left(\frac{1}{2} - H\right)r_3^2$. Далее рассмотрим отдельно случаи $b = 0$ и $b \neq 0$.

При $b = 0$ имеем $s_1 = 0$, $s_2^2 = r_3^2$ и $\left(\frac{1}{2} - H\right)r_3^2 = 0$. Если $H = \frac{1}{2}$, то $s_3^2 = r_2^2$, и критическое множество состоит из двух сфер

$$\{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1,\ s_1 = 0, s_2 = \pm r_3,\ s_3 = \mp r_2\},$$

имеющих две общие точки $(0, 0, 0, \pm 1, 0, 0)$ (это точки $P_1^{\pm}$, являющиеся особыми точками ранга ноль для отображения момента, см. раздел 2.2). Если же $H \neq \frac{1}{2}$, то $s_2 = r_3 = 0$, и критическое

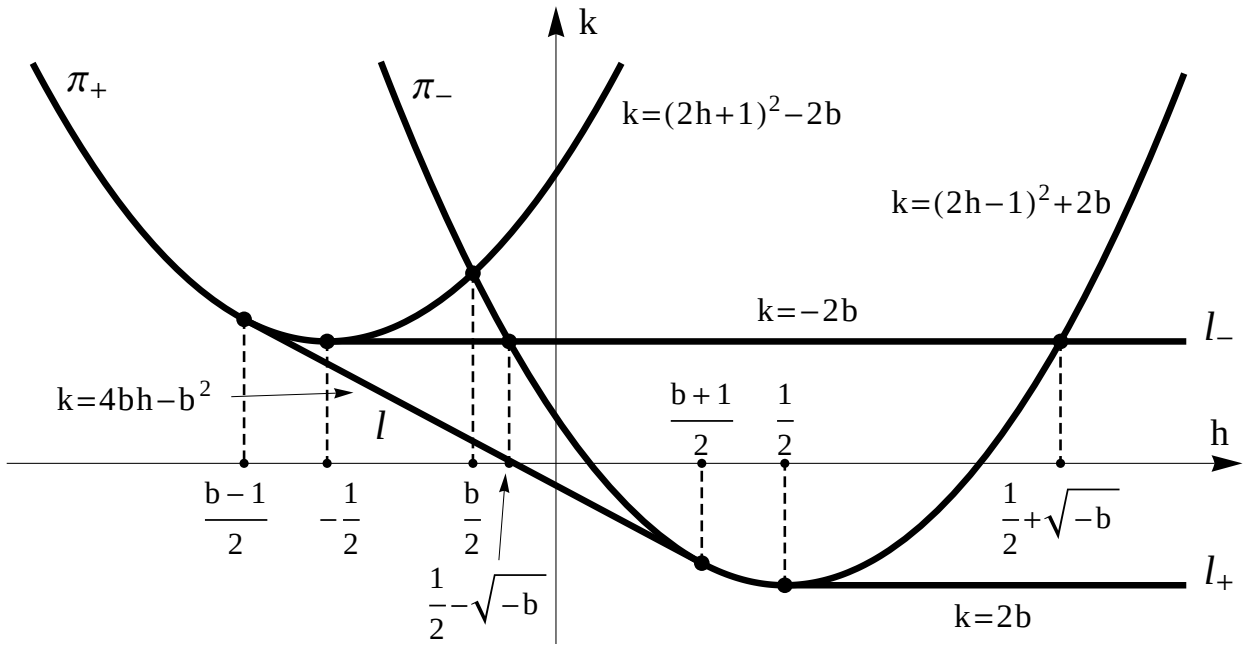


Рис. 2.4: Бифуркационная диаграмма отображения момента для некомпактного случая Горячева ($-1 < b < 0$)

множество состоит из двух окружностей

$$\{r_1^2 + r_2^2 = 1,\ s_3 = \pm\sqrt{H - \frac{1}{2} + r_2^2},\ s_1 = s_2 = r_3 = 0\} \text{ при } H > \frac{1}{2};$$
$$\{r_1^2 + s_3^2 = H + \frac{1}{2},\ r_2 = \pm\sqrt{1 - r_1^2},\ s_1 = s_2 = r_3 = 0\} \text{ при } H < \frac{1}{2}. \qquad (2.3.2)$$

При этом во втором случае, очевидно, $H \geq -\frac{1}{2}$, иначе критическое множество пусто. В частности, при $H = -\frac{1}{2}$ указанные две окружности вырождаются в две точки $P_2^{\pm}$ (особые точки ранга ноль отображения момента, см. раздел 2.2).

При $b \neq 0$ получаем:

$$s_1 = 0; \qquad s_2 = \pm\sqrt{r_3^2 - \frac{b}{r_3^2}}; \qquad r_2 = \pm\sqrt{\frac{1-2H}{2b}}r_3^2;$$
$$r_1 = \pm\sqrt{1 - r_2^2 - r_3^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{1-2H}{2b}r_3^4 - r_3^2};$$
$$s_3 = -\frac{s_2 r_2}{r_3} = \pm\sqrt{\frac{1-2H}{2b}(r_3^4 - b)}. \qquad (2.3.3)$$

Таким образом, критическое множество может быть параметризовано переменной r_3. Единственное ограничение – неотрицательность подкоренных выражений:

$$r_3^4 - b \geq 0; \quad \frac{1-2H}{2b} \geq 0; \quad 1 - \frac{1-2H}{2b}r_3^4 - r_3^2 \geq 0.$$

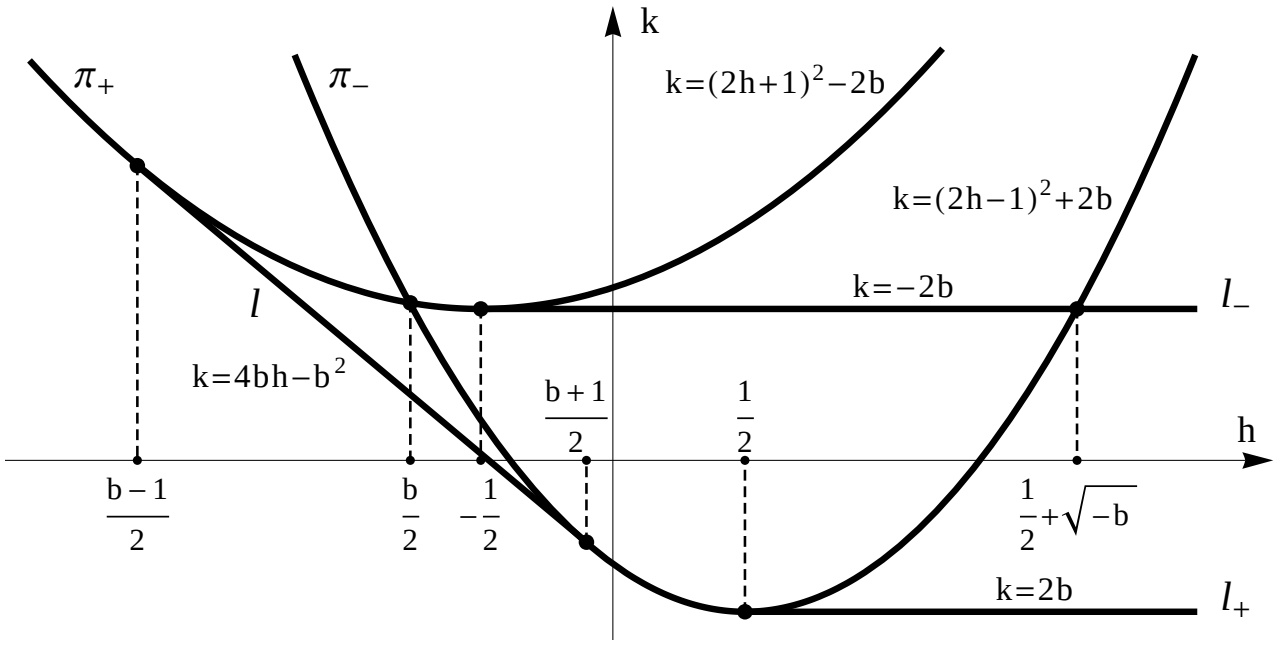


Рис. 2.5: Бифуркационная диаграмма отображения момента для некомпактного случая Горячева ($b < -1$)

Отсюда получаем следующие условия:

$$H \le \frac{1}{2}, \quad r_3^2 \in \left[\sqrt{b}; \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(1-2H)}{b}}}\right] \text{ при } b > 0 \text{ и}$$

$$H \ge \frac{1}{2}, \quad r_3^2 \in \left(0; \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(1-2H)}{b}}}\right] \text{ при } b < 0.$$

Так как $r_3^2 \le 1$, то в первом случае $b \le 1$ и

$$\sqrt{b} \le \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(1-2H)}{b}}},$$

откуда находим $H \ge \sqrt{b} - \frac{1}{2}$. Таким образом, при $b \in (0,1]$ имеем $H \in \left[\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, при $b > 1$ критическое множество пусто.

Итак, при $b \in (0,1)$ критическое множество состоит из 16-ти отрезков, заданных параметром r_3^2 и различающихся знаками переменных s_2, r_1, r_2, r_3 (знак s_3 определён однозначно из равенства $s_3 = -\frac{s_2 r_2}{r_3}$). Эти отрезки склеиваются в 4 окружности, различающиеся знаками переменных r_2 и r_3. При $H = \sqrt{b} - \frac{1}{2}$ эти окружности вырождаются в 4 особые точки $P_2^{\pm\pm}$ ранга ноль (см. раздел 2.2). При $H = \frac{1}{2}$ окружностей становится две (т.к. $r_2 = 0$). В вырожденном случае $b = 1$ остаются лишь две особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль (см. раздел 2.2).

При $b < 0$ критическое множество состоит из 16-ти полуинтервалов с параметром r_3^2. Эти полуинтервалы склеиваются в 8 прямых, различающихся знаками переменных s_2, r_2, r_3. При $H = \dfrac{1}{2}$ остаётся 4 прямых (т.к. $r_2 = 0$).

2) $\underline{\xi + r_3^2 = s_2 = 0}$, или, что равносильно, $s_2 = 0$, $s_1^2 = -r_3^2 - \dfrac{b}{r_3^2}$. Этот случай похож на предыдущий, только теперь обязательно $b \le 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial K}{\partial r_3} = -\dfrac{4b}{r_3^3}\xi + 4r_3\eta = -\dfrac{4b}{r_3^3}\cdot(-r_3^2) + 4r_3 \cdot \left(-\dfrac{b}{r_3^2}\right) = 0$, поэтому действительно $dK = 0$. При этом

$$K = \left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right)^2 - 2b = -2b,$$
$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 - 1 + 2r_1^2 + r_3^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) = -\frac{1}{2} + s_3^2 + r_1^2.$$

Далее, если $b = 0$, то $s_1 = s_2 = r_3 = 0$, и мы снова приходим к первому случаю. Если же $b < 0$, то, подобно первому случаю, из равенств $s_1^2 r_1^2 = s_3^2 r_3^2$ и $s_1^2 = -r_3^2 - \dfrac{b}{r_3^2}$ получаем $\dfrac{b r_1^2}{r_3^2} = -\left(\dfrac{1}{2} + H\right) r_3^2$, что даёт возможность выразить переменные s_i, r_i через r_3^2:

$$s_1 = \pm\sqrt{-r_3^2 - \frac{b}{r_3^2}}; \qquad s_2 = 0; \qquad r_1 = \pm\sqrt{\frac{1+2H}{-2b}}\, r_3^2;$$
$$r_2 = \pm\sqrt{1 - r_1^2 - r_3^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{1+2H}{-2b} r_3^4 - r_3^2};$$
$$s_3 = -\frac{s_1 r_1}{r_3} = \pm\sqrt{\frac{1+2H}{2b}(r_3^4 + b)}. \tag{2.3.4}$$

Условия неотрицательности подкоренных выражений имеют следующий вид:

$$r_3^4 + b \le 0; \quad \frac{1+2H}{-2b} \ge 0; \quad 1 - \frac{1+2H}{-2b} r_3^4 - r_3^2 \ge 0.$$

Отсюда получаем:

$$H \ge -\frac{1}{2}, \quad r_3^2 \in \left(0; \min\left(\sqrt{-b}, \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2(1+2H)}{-b}}}\right)\right].$$

Более точно,

$$r_3^2 \in \left(0, \sqrt{-b}\right] \text{ при } H \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b}\right), \ b \in (-1, 0) \text{ и}$$
$$r_3^2 \in \left(0, \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2(1+2H)}{-b}}}\right] \text{ в остальных случаях.}$$

Критическое множество в этом случае состоит из 16-ти полуинтервалов с параметром r_3^2, различающихся знаками переменных s_1, r_1, r_2, r_3. Эти полуинтервалы склеиваются в 8 прямых, различающихся знаками переменных r_1, r_2, r_3 при $H < \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$, $b \in (-1, 0)$ и знаками переменных s_1, r_1, r_3 при $H > \max\left(\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -\frac{1}{2}\right)$. При $H = \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$, $b \in [-1, 0)$ полуинтервалы склеиваются не в прямые, а в 4 букета двух прямых ("креста"), различающиеся знаками переменных r_1 и r_3, при этом склейка происходит в особых точках $P_1^{\pm\pm}$ ранга ноль (см. раздел 2.2). При $H = -\frac{1}{2}$ прямых (при $b \neq -1$), соответственно букетов (при $b = -1$), становится в два раза меньше, т.к. $r_1 = 0$.

3) $\underline{s_1 = s_2 = 0}$. Из условия $\frac{\partial K}{\partial r_3} = 0$ получаем $-\frac{4b}{r_3^3} \cdot \frac{b}{r_3^2} + 4r_3^3 = 0$, откуда $r_3^4 = \pm b$. Если $r_3^4 = b$, то $\xi - r_3^2 = \frac{b}{r_3^2} - r_3^2 = 0$, и мы возвращаемся к первому случаю. Если же $r_3^4 = -b$, то $\xi + r_3^2 = \frac{b}{r_3^2} + r_3^2 = 0$, и мы приходим ко второму случаю.

4) $\underline{\xi + r_3^2 = \xi - r_3^2 = 0}$. В этом случае $r_3 = 0$, а это может быть лишь при $b = 0$. Но тогда $\xi = s_1^2 + s_2^2 = 0$, следовательно, $s_1 = s_2 = 0$, и мы снова имеем дело с первым случаем.

Лемма 2.3 доказана. □

Таким образом, в случае $dK = 0$ на бифуркационной диаграмме получаем части прямых l_+ и l_-.

Шаг 2.

Лемма 2.4.

1) Если $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, *то* $K = (2H - 1)^2 + 2b$, *причём*

$H \geq \frac{b}{2}$ *при* $b \geq 0$,

$H \in \mathbb{R}$ *при* $b < 0$.

При этом $dK = 4\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(dH - \frac{1}{2}df_1\right)$.

2) Если $r_1 = s_2 = s_3 = 0$, *то* $K = (2H + 1)^2 - 2b$, *причём*

$H \geq \frac{b}{2}$ *при* $b \geq 1$,

$H \geq \sqrt{b} - \frac{1}{2}$ *при* $0 \leq b < 1$,

$H \in \mathbb{R}$ *при* $b < 0$.

При этом $dK = 4\left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right)\left(dH + \frac{1}{2}df_1\right)$.

Доказательство. 1) Для доказательства линейной зависимости дифференциалов заметим, что

$$\frac{\partial K}{\partial r_3} = -\frac{4b}{r_3^3}\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) + 4r_3\left(-s_2^2 + r_3^2\right) = 4\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(-\frac{b}{r_3^3} - r_3\right),$$

поэтому для частных производных по r_3 требуемое соотношение выполняется:

$$\frac{\partial K}{\partial r_3} = 4\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(\frac{\partial H}{\partial r_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial r_3}\right).$$

Для частных производных по остальным переменным оно, очевидно, также выполнено. Следовательно, оно верно и для дифференциалов dK, dH, df_1.

Далее, так как $s_1 = r_2 = s_3 = 0$ и $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, имеем:

$$K = \left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)^2 + 2b = (2H-1)^2 + 2b.$$

Выясним, как устроено критическое множество для различных значений b и H.

Если $b = 0$, то критическое множество состоит из двух окружностей

$$\left\{s_2^2 + r_1^2 = 2H,\ r_3 = \pm\sqrt{1 - r_1^2},\ s_1 = r_2 = s_3 = 0\right\} \text{ при } H \in \left(0, \frac{1}{2}\right);$$
$$\left\{r_1^2 + r_3^2 = 1,\ s_2 = \pm\sqrt{2H - r_1^2},\ s_1 = r_2 = s_3 = 0\right\} \text{ при } H > \frac{1}{2}. \tag{2.3.5}$$

При $H = \dfrac{1}{2}$ эти окружности имеют две общие точки (особые точки $P_1^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2), а при $H = 0$ вырождаются в две особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль (см. раздел 2.2). При $H < 0$ критическое множество пусто.

При $b \neq 0$ критическое множество может быть задано параметрически следующим образом:

$$\left\{r_1 = \pm\sqrt{1 - r_3^2},\ s_2 = \pm\sqrt{2H - 1 + r_3^2 - \frac{b}{r_3^2}},\ s_1 = r_2 = s_3 = 0\right\}. \tag{2.3.6}$$

Из условия неотрицательности подкоренных выражений получаем:

$r_3^2 \in (0;1]$, если $(2H-1)^2 + 4b \leq 0$ и

$r_3^2 \in (0;1] \setminus (\alpha_1, \beta_1)$, если $(2H-1)^2 + 4b > 0$

(где $\alpha_1 = \dfrac{-(2H-1) - \sqrt{(2H-1)^2 + 4b}}{2}$, $\beta_1 = \dfrac{-(2H-1) + \sqrt{(2H-1)^2 + 4b}}{2}$).

Отсюда при $b > 0$ имеем $r_3 \in [\beta_1, 1]$. При $H > b/2$ критическое множество состоит из 8-ми отрезков, различающихся знаками переменных r_1, s_2, r_3, которые склеиваются в две окружности, различающиеся знаком переменной r_3. При $H = b/2$ имеем $\beta_1 = 1$, и эти окружности вырождаются в две точки (особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2). При $H < b/2$ имеем $\beta_1 > 1$, и критическое множество пусто.

Если $b \in (-1,0)$, то $r_3^2 \in (0,1]$ при $H \geq \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$, $r_3^2 \in (0,\alpha_1] \cup [\beta_1, 1]$ при $H \in \left[\frac{b}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b}\right)$ и $r_3^2 \in (0,\alpha_1]$ при $H < \frac{b}{2}$. Следовательно, при $H > \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$ критическое множество состоит из 8-ми полуинтервалов с параметром r_3^2, различающихся знаками переменных r_1, s_2, r_3, которые склеиваются в 4 прямых, различающихся знаками переменных s_2, r_3. При $H = \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$ имеем $\alpha_1 = \beta_1 \in (0,1]$, и у этих прямых появляются общие точки: критическое множество представляет собой две пары прямых, имеющих по две общие точки (см. рис. 2.6), это особые точки $P_1^{\pm\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2. Далее, при $H \in \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b}\right)$ критическое множество представляет собой 8 полуинтервалов (когда $r_3^2 \in (0,\alpha_1]$), которые склеиваются в 4 прямые (различающиеся знаками переменных r_1, r_3), а также 8 отрезков (когда $r_3^2 \in [\beta_1, 1]$), которые склеиваются в две окружности (различающиеся знаком переменной r_3). При $H = \frac{b}{2}$ имеем $\beta_1 = 1$, поэтому окружности вырождаются в две точки (особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2). При $H < \frac{b}{2}$ они вовсе исчезают, и остаются только 4 прямые, отвечающие полуинтервалу $(0,\alpha_1]$.

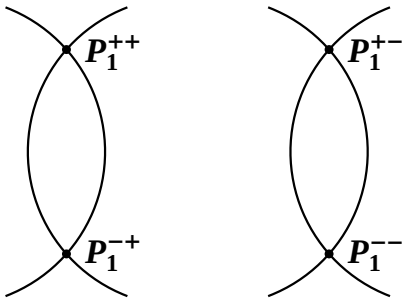


Рис. 2.6: Критическое множество при $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, $H = \frac{1}{2} - \sqrt{-b}$, $b \in (-1,0)$

Наконец, если $b \leq -1$, то $r_3^2 \in (0,1]$ при $H \geq \frac{b}{2}$ и $r_3^2 \in (0,\alpha_1]$ при $H < \frac{b}{2}$. Этот случай похож на случай $b \in (-1,0)$, только здесь при уменьшении значения H прямые перестраиваются в прямые, минуя стадию окружностей. А именно, при $H > \frac{b}{2}$ имеем 4 прямые, различающиеся знаками переменных s_2, r_3. При $H = \frac{b}{2}$ они превращаются в две пары пересекающихся прямых (в особых точках $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2), а при $H < \frac{b}{2}$ снова распадаются на 4 прямые, различающиеся теперь знаками переменных r_1, r_3.

2) Случай $r_1 = s_2 = s_3 = 0$ рассматривается совершенно аналогично. Учитывая, что $s_2 = 0$, имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial r_3} = -\frac{4b}{r_3^3}\left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) + 4r_3\left(s_1^2 + r_3^2\right) = 4\left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right)\left(-\frac{b}{r_3^3} + r_3\right) =$$
$$= 4\left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right)\left(\frac{\partial H}{\partial r_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial r_3}\right).$$

Для частных производных по другим переменным требуемое равенство, очевидно, также выполнено.

Далее, в силу равенств $r_1 = s_2 = s_3 = 0$ и $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, получаем:

$$K = \left(s_1^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right)^2 - 2b = (2H+1)^2 - 2b.$$

Выясним теперь, как выглядит критическое множество в зависимости от значений b и H.

Если $b = 0$, то критическое множество состоит из двух окружностей

$$\left\{s_1^2 + r_3^2 = 2H+1,\ r_2 = \pm\sqrt{1-r_3^2},\ r_1 = s_2 = s_3 = 0\right\} \text{ при } H \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right);$$
$$\left\{r_2^2 + r_3^2 = 1,\ s_1 = \pm\sqrt{2H+1-r_3^2},\ r_1 = s_2 = s_3 = 0\right\} \text{ при } H > 0. \tag{2.3.7}$$

При $H = 0$ эти окружности имеют две общие точки (особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2), а при $H = -\frac{1}{2}$ вырождаются в две особые точки $P_2^{\pm}$ ранга ноль (см. раздел 2.2). При $H < -\frac{1}{2}$ критическое множество пусто.

При $b \neq 0$ критическое множество может быть задано параметрически следующим образом:

$$\left\{r_2 = \pm\sqrt{1-r_3^2},\ s_1 = \pm\sqrt{2H+1-r_3^2-\frac{b}{r_3^2}},\ r_1 = s_2 = s_3 = 0\right\}. \tag{2.3.8}$$

Из условия неотрицательности подкоренных выражений находим, что критическое множество пусто, если $(2H+1)^2 - 4b < 0$, и

$$r_3^2 \in (0;1] \cap [\alpha_2, \beta_2], \text{ если } (2H+1)^2 - 4b \geq 0$$
$$(\text{где } \alpha_2 = \frac{2H+1-\sqrt{(2H+1)^2-4b}}{2},\ \beta_2 = \frac{2H+1+\sqrt{(2H+1)^2-4b}}{2}).$$

Отсюда при $b < 0$ получаем, что $r_3^2 \in (0,1]$, когда $H \geq \frac{b}{2}$, и $r_3^2 \in (0, \beta_2]$, когда $H < \frac{b}{2}$. При $H > \frac{b}{2}$ критическое множество представляет собой 8 полуинтервалов, которые склеиваются в 4 прямые, различающиеся знаками переменных s_1, r_3. При $H = \frac{b}{2}$, в силу того, что $\beta_2 = 1$, они превращаются в две пары пересекающихся прямых (в особых точках $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2). При $H < \frac{b}{2}$ они снова распадаются на 4 прямые, различающиеся теперь знаками переменных r_2, r_3.

Если $b \in (0,1)$, то $r_3^2 \in [\alpha_2, 1]$ при $H \geq \frac{b}{2}$ и $r_3^2 \in [\alpha_2, \beta_2]$ при $H \in \left[\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right)$. При $H > \frac{b}{2}$ критическое множество – 8 отрезков, которые склеиваются в две окружности, различающиеся знаком переменной r_3. При $H = \frac{b}{2}$, в силу того, что $\beta_2 = 1$, у этих окружностей возникает самопересечение (в особых точках $P_3^{\pm}$, см. раздел 2.2), и они превращаются в две "восьмёрки". Далее, при $H \in \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right)$ эти "восьмёрки" распадаются на 4 окружности, различающиеся

знаками переменных r_2, r_3. При $H = \sqrt{b} - \frac{1}{2}$ имеем $\alpha_2 = \beta_2$, и эти окружности вырождаются в 4 точки (особые точки $P_2^{\pm\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2). При $H < \sqrt{b} - \frac{1}{2}$ критическое множество пусто.

Наконец, если $b \geq 1$, то при $H > \frac{b}{2}$ имеем $r_3^2 \in [\alpha_2, 1]$, и критическое множество состоит из 8-ми отрезков, которые склеиваются в две окружности, различающиеся знаком переменной r_3. При $H = \frac{b}{2}$, так как $\alpha_2 = 1$, эти окружности вырождаются в две точки (особые точки $P_3^{\pm}$ ранга ноль, см. раздел 2.2). При $H < \frac{b}{2}$ критическое множество пусто.

Лемма 2.4 доказана.

□

Таким образом, случаям $s_1 = r_2 = s_3 = 0$ и $r_1 = s_2 = s_3 = 0$ отвечают на бифуркационной диаграмме соответственно параболы π_- и π_+ (или их части).

Шаг 3.

Рассмотрим функцию

$$F = \left(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2 - \frac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}\right)^2 + \left(s_1 s_2 - \frac{b r_1 r_2}{r_3^2}\right)^2.$$

Напомним (см. раздел 2.1), что F можно рассматривать как дополнительный первый интеграл системы, который связан с интегралами H и K соотношением

$$K = F + 4bH - b^2. \tag{2.3.9}$$

Лемма 2.5. *Пусть выполнены следующие равенства:*

$$s_1^2 - s_2^2 + r_3^2 = \frac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}; \tag{2.3.10}$$

$$s_1 s_2 = \frac{b r_1 r_2}{r_3^2}. \tag{2.3.11}$$

Тогда $K = 4bH - b^2$, *причём*

$H \geq -\frac{1}{2}$ *при* $b = 0$,

$H \geq \frac{b+1}{2}$ *при* $b > 0$,

$H \in \left[\frac{b-1}{2}, \frac{b+1}{2}\right]$ *при* $b < 0$.

При этом

$$dK = 2b\left(2dH - \frac{4s_3}{r_3}df_2 - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2}\right)df_1\right). \tag{2.3.12}$$

Напомним, что мы условились при $b = 0$ считать все выражения, содержащие b в качестве множителя, также равными нулю, независимо от того, определены они в этом случае или нет. Поэтому равенство 2.3.12 имеет смысл и при $r_3 = 0$: в этом случае $b = 0$, и правая часть просто равна нулю.

Доказательство. При $b = 0$ утверждение леммы уже фактически доказано нами на шаге 1. Действительно, из равенств 2.3.10 и 2.3.11 в этом случае вытекает, что $s_1 = 0$ и $s_2^2 = r_3^2$. Но тогда, как следует из доказательства леммы 2.3, $K = 0$, $H \geq -\dfrac{1}{2}$ и $dK = 0$, что и требуется. Поэтому далее будем предполагать, что $b \neq 0$ и, следовательно, $r_3 \neq 0$.

Равенства 2.3.10 и 2.3.11 в точности означают, что $F = 0$, и поэтому равенство $K = 4bH - b^2$ автоматически следует из 2.3.9.

Докажем 2.3.12. Для этого проверим, что соответствующее равенство выполнено для частных производных по всем переменным. Используя 2.3.10, 2.3.11, а также равенства $s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0$ и $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial K}{\partial s_1} - 2b\left(2\frac{\partial H}{\partial s_1} - \frac{4s_3}{r_3}\frac{\partial f_2}{\partial s_1} - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\right) = \\
&= 4s_1\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} + r_3^2\right) - 2b\left(2s_1 - \frac{4s_3r_1}{r_3}\right) = \\
&= 4s_1\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2} + r_3^2\right) + \frac{8bs_3r_1}{r_3} = \\
&= 4s_1\left(s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2} + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_1}{r_3} = \\
&= 8\left(s_1s_2^2 + \frac{bs_1r_1^2}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_1}{r_3} = 8\left(\frac{br_1r_2s_2}{r_3^2} + \frac{bs_1r_1^2}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_1}{r_3} = \\
&= \frac{8br_1}{r_3^2}(s_2r_2 + s_1r_1 + s_3r_3) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично, для частных производных по s_2 будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial K}{\partial s_2} - 2b\left(2\frac{\partial H}{\partial s_2} - \frac{4s_3}{r_3}\frac{\partial f_2}{\partial s_2} - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial s_2}\right) = \\
&= 4s_2\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right) - 2b\left(2s_2 - \frac{4s_3r_2}{r_3}\right) = \\
&= 4s_2\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2} - r_3^2\right) + \frac{8bs_3r_2}{r_3} = \\
&= 4s_2\left(s_1^2 + \frac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2} + s_1^2 - \frac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_2}{r_3} = \\
&= 8\left(s_1^2s_2 + \frac{bs_2r_2^2}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_2}{r_3} = 8\left(\frac{bs_1r_1r_2}{r_3^2} + \frac{bs_2r_2^2}{r_3^2}\right) + \frac{8bs_3r_2}{r_3} = \\
&= \frac{8br_2}{r_3^2}(s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3) = 0.
\end{aligned}$$

Для частных производных по s_3 равенство 2.3.12 тривиально.

Далее,

$$\frac{\partial K}{\partial r_1} - 2b\left(2\frac{\partial H}{\partial r_1} - \frac{4s_3}{r_3}\frac{\partial f_2}{\partial r_1} - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial r_1}\right) =$$
$$= -2b\left(2r_1 - \frac{4s_1s_3}{r_3} - \frac{2r_1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\right) =$$
$$= 4b\left(-r_1 + \frac{2s_1s_3}{r_3} + \frac{r_1}{r_3^2}\left(2s_1^2 + r_3^2 - \frac{b(r_1^2-r_2^2)}{r_3^2} + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\right) =$$
$$= 4b\left(\frac{2s_1s_3}{r_3} + \frac{r_1}{r_3^2}\left(2s_1^2 + \frac{2br_2^2}{r_3^2}\right)\right) = 8b\left(\frac{s_1s_3}{r_3} + \frac{s_1^2r_1}{r_3^2} + \frac{s_1s_2r_2}{r_3^2}\right) =$$
$$= \frac{8bs_1}{r_3^2}(s_3r_3 + s_1r_1 + s_2r_2) = 0.$$

Здесь мы снова воспользовались формулами 2.3.10, 2.3.11 и равенством $s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0$.

Аналогично,

$$\frac{\partial K}{\partial r_2} - 2b\left(2\frac{\partial H}{\partial r_2} - \frac{4s_3}{r_3}\frac{\partial f_2}{\partial r_2} - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial r_2}\right) =$$
$$= -2b\left(-2r_2 - \frac{4s_2s_3}{r_3} - \frac{2r_2}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\right) =$$
$$= 4b\left(r_2 + \frac{2s_2s_3}{r_3} + \frac{r_2}{r_3^2}\left(s_2^2 - r_3^2 + \frac{b(r_1^2-r_2^2)}{r_3^2} + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\right) =$$
$$= 4b\left(\frac{2s_2s_3}{r_3} + \frac{r_2}{r_3^2}\left(2s_2^2 + \frac{2br_1^2}{r_3^2}\right)\right) = 8b\left(\frac{s_2s_3}{r_3} + \frac{s_2^2r_2}{r_3^2} + \frac{s_1s_2r_1}{r_3^2}\right) =$$
$$= \frac{8bs_2}{r_3^2}(s_3r_3 + s_2r_2 + s_1r_1) = 0.$$

Наконец,

$$\frac{\partial K}{\partial r_3} - 2b\left(2\frac{\partial H}{\partial r_3} - \frac{4s_3}{r_3}\frac{\partial f_2}{\partial r_3} - \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial r_3}\right) =$$
$$= -\frac{4b}{r_3^3}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) + 4r_3(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2) -$$
$$- 2b\left(-\frac{2b}{r_3^3} - \frac{4s_3^2}{r_3} - \frac{2}{r_3}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{4b}{r_3^3}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right) + \frac{4b(r_1^2-r_2^2)}{r_3} + \frac{8bs_3^2}{r_3} + \frac{4b}{r_3}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right) =$$
$$= -\frac{4b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^3}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b(r_1^2+r_2^2)}{r_3^2}\right) + \frac{4b(r_1^2-r_2^2)}{r_3} + \frac{8b(s_1r_1+s_2r_2)^2}{r_3^3} =$$
$$= \frac{4b}{r_3^3}(2s_1^2r_1^2 + 2s_2^2r_2^2 - (r_1^2+r_2^2)(s_1^2+s_2^2)) - \frac{4b^2(r_1^2+r_2^2)^2}{r_3^5} +$$
$$+ \frac{4b(r_1^2-r_2^2)}{r_3} + \frac{16bs_1r_1s_2r_2}{r_3^3} =$$

$$= \frac{4b}{r_3^3}(r_1^2 - r_2^2)(s_1^2 - s_2^2) - \frac{4b^2(r_1^2 + r_2^2)^2}{r_3^5} + \frac{4b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3} + \frac{16b^2 r_1^2 r_2^2}{r_3^5} =$$
$$= \frac{4b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^3}(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2) - \frac{4b^2(r_1^2 + r_2^2)^2}{r_3^5} + \frac{16b^2 r_1^2 r_2^2}{r_3^5} =$$
$$= \frac{4b^2(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_3^5} - \frac{4b^2(r_1^2 + r_2^2)^2}{r_3^5} + \frac{16b^2 r_1^2 r_2^2}{r_3^5} =$$
$$= \frac{4b^2}{r_3^5}((r_1^2 - r_2^2)^2 - (r_1^2 + r_2^2)^2 + 4r_1^2 r_2^2) = 0.$$

Исследуем теперь структуру критического множества.

Из предыдущей цепочки равенств следует соотношение

$$2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}(r_1^2 + r_2^2)\right) = 0. \tag{2.3.13}$$

Далее, из формулы для гамильтониана H имеем

$$2H - b = (2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2) + \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}(r_1^2 + r_2^2)\right). \tag{2.3.14}$$

Из 2.3.13 и 2.3.14 получаем

$$2H - b = \frac{1}{r_3^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}(r_1^2 + r_2^2)\right), \tag{2.3.15}$$

что вместе с 2.3.14 даёт

$$(2H - b)(1 - r_3^2) = 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2. \tag{2.3.16}$$

Рассмотрим равенства $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ и 2.3.16 как систему линейных уравнений относительно r_1^2, r_2^2:

$$\begin{cases} r_1^2 + r_2^2 = 1 - r_3^2; \\ r_1^2 - r_2^2 = (2H - b)(1 - r_3^2) - 2s_3^2. \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Решая её, находим:

$$r_1^2 = \frac{1}{2}(2H + 1 - b)(1 - r_3^2) - s_3^2; \tag{2.3.18}$$

$$r_2^2 = -\frac{1}{2}(2H - 1 - b)(1 - r_3^2) + s_3^2. \tag{2.3.19}$$

Рассмотрим теперь равенства 2.3.10 и 2.3.15 как систему линейных уравнений относительно s_1^2, s_2^2:

$$\begin{cases} s_1^2 - s_2^2 = \dfrac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2} - r_3^2; \\ s_1^2 + s_2^2 = (2H - b)r_3^2 - \dfrac{b(r_1^2 + r_2^2)}{r_3^2}. \end{cases} \tag{2.3.20}$$

Решая её, получаем:

$$s_1^2 = \frac{1}{2}(2H - 1 - b)r_3^2 - \frac{br_2^2}{r_3^2}; \tag{2.3.21}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{2}(2H + 1 - b)r_3^2 - \frac{br_1^2}{r_3^2}. \tag{2.3.22}$$

Подставляя выражения для r_1^2, r_2^2 через r_3 и s_3 из 2.3.18, 2.3.19 в 2.3.21, 2.3.22, находим:

$$s_1^2 = \frac{1}{2}(2H - 1 - b)\left(r_3^2 + \frac{b(1 - r_3^2)}{r_3^2}\right) - \frac{bs_3^2}{r_3^2}; \tag{2.3.23}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{2}(2H + 1 - b)\left(r_3^2 - \frac{b(1 - r_3^2)}{r_3^2}\right) + \frac{bs_3^2}{r_3^2}. \tag{2.3.24}$$

Возведя равенство 2.3.11 в квадрат и подставив в него 2.3.18, 2.3.19, 2.3.23, 2.3.24, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(2H - 1 - b)(2H + 1 - b)\left(r_3^4 - \frac{b^2(1 - r_3^2)^2}{r_3^4}\right) + \\ &+ \frac{bs_3^2}{r_3^2}\left((2H - b)\frac{b(1 - r_3^2)}{r_3^2} - r_3^2\right) - \frac{b^2 s_3^4}{r_3^4} = \\ &= \frac{b^2}{r_3^4}\left(-\frac{1}{4}(2H - 1 - b)(2H + 1 - b)(1 - r_3^2)^2 + s_3^2(1 - r_3^2)(2H - b) - s_3^4\right). \end{aligned}$$

Отсюда находим выражение для s_3 через r_3:

$$s_3 = \pm\sqrt{\frac{r_3^4}{4b}(2H - 1 - b)(2H + 1 - b)}. \tag{2.3.25}$$

Наконец, подставляя 2.3.25 в 2.3.18, 2.3.19, 2.3.23, 2.3.24, находим выражения для всех переменных s_i, r_i через r_3:

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm\sqrt{-\frac{1}{4b}(2H + 1 - b)((2H - 1 - b)r_3^4 - 2b(1 - r_3^2))}; \\ r_2 &= \pm\sqrt{\frac{1}{4b}(2H - 1 - b)((2H + 1 - b)r_3^4 - 2b(1 - r_3^2))}; \\ s_1 &= \pm\sqrt{-\frac{1}{4r_3^2}(2H - 1 - b)((2H - 1 - b)r_3^4 - 2b(1 - r_3^2))}; \\ s_2 &= \pm\sqrt{\frac{1}{4r_3^2}(2H + 1 - b)((2H + 1 - b)r_3^4 - 2b(1 - r_3^2))}. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Таким образом, мы параметризовали критическое множество переменной r_3. При этом значения H, b и r_3 должны быть таковы, чтобы подкоренные выражения в 2.3.25, 2.3.26 были неотрицательны. Рассмотрим теперь отдельно случаи $b > 0$ и $b < 0$.

Если $\underline{b > 0}$, то из 2.3.25 следует, что либо $H \geq \dfrac{b+1}{2}$, либо $H \leq \dfrac{b-1}{2}$. Но из 2.3.15 следует, что $H \geq \dfrac{b}{2}$, поэтому $H \geq \dfrac{b+1}{2}$. В таком случае из 2.3.26 получаем следующие условия:

$$(2H-1-b)r_3^4 + 2br_3^2 - 2b \leq 0;$$
$$(2H+1-b)r_3^4 + 2br_3^2 - 2b \geq 0.$$

Отсюда находим, что $r_3^2 \in \left[\dfrac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(2H+1-b)}{b}}}, \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(2H-1-b)}{b}}}\right]$. Критическое множество состоит из 16-ти отрезков, параметризованных квадратом переменной r_3 и различающихся знаками переменной r_3 и каких-то трёх из переменных s_1, s_2, r_1, r_2. (Знак четвёртой переменной определяется из соотношения 2.3.11. Когда знаки переменных r_3, s_1, s_2, r_1, r_2 уже фиксированы, знак s_3 определяется из равенства $s_3 = -\dfrac{s_1 r_1 + s_2 r_2}{r_3}$). Эти 16 отрезков склеиваются в 4 окружности, различающиеся знаками переменной r_3 и произведения $s_1 r_1$ (или, эквивалентно, $s_2 r_2$). При $H = \dfrac{b+1}{2}$ имеем $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, и остаются только две окружности, различающиеся знаком переменной r_3.

При $\underline{b < 0}$ из 2.3.25 имеем $H \in \left[\dfrac{b-1}{2}, \dfrac{b+1}{2}\right]$. В этом случае условия неотрицательности подкоренных выражений в 2.3.26 выглядят следующим образом:

$$(2H-1-b)r_3^4 + 2br_3^2 - 2b \geq 0;$$
$$(2H+1-b)r_3^4 + 2br_3^2 - 2b \geq 0.$$

Отсюда находим, что $r_3^2 \in \left(0, \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2(2H-1-b)}{b}}}\right]$.

Таким образом, критическое множество состоит из 16-ти полуинтервалов с параметром r_3^2, различающихся знаками переменной r_3 и каких-то трёх из переменных s_1, s_2, r_1, r_2. Эти полуинтервалы склеиваются в 8 прямых, различающихся знаками переменных s_2, r_2, r_3. При $H = \dfrac{b+1}{2}$ имеем $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, и остаются 4 прямые, различающиеся знаками переменных s_2, r_3. Аналогично при $H = \dfrac{b-1}{2}$ имеем $r_1 = s_2 = s_3 = 0$, и остаются 4 прямые, различающиеся знаками переменных r_2, r_3.

Лемма 2.5 доказана. □

Таким образом, в случае $F = 0$ получаем на бифуркационной диаграмме часть прямой l.

Шаг 4.

Лемма 2.6. *Пусть в точке $P(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$, принадлежащей критическому множеству, имеем $dK \neq 0$. Тогда в ней выполнены следующие равенства:*

$$1)\ s_3(s_1r_2 - s_2r_1) = r_1r_2r_3; \tag{2.3.27}$$

$$2)\ r_1r_2(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2) = s_1s_2(r_1^2 - r_2^2); \tag{2.3.28}$$

$$3)\ s_1s_2r_3^2 = br_1r_2. \tag{2.3.29}$$

Доказательство. Так как ранг матрицы 2.3.1 меньше 4 и так как $dK \neq 0$, то $M_{345}^{123} = 0$. С другой стороны,

$$M_{345}^{123} = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_3 & s_1 & s_2 \\ 2s_3 & r_1 & -r_2 \end{vmatrix} = 2(r_1s_2s_3 + r_1r_2r_3 - s_1r_2s_3) = 2(r_1r_2r_3 - s_3(s_1r_2 - s_2r_1)),$$

откуда сразу получается формула 2.3.27.

Умножим теперь обе части 2.3.27 на r_3 и воспользуемся тем, что $s_3r_3 = -(s_1r_1 + s_2r_2)$. Получим:

$$-(s_1r_1 + s_2r_2)(s_1r_2 - r_1s_2) = r_1r_2r_3^2.$$

Раскрывая скобки и надлежащим образом группируя слагаемые, получаем 2.3.28.

Докажем 2.3.29. Из равенства $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ следует, что $df_1 \neq 0$. А поэтому обязательно $M_{123}^{234} = 0$. Имеем:

$$M_{123}^{234} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & 2s_3 \\ 4s_1(\xi + r_3^2) & 4s_2(\xi - r_3^2) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4s_1(\xi + r_3^2)(2r_2s_3 - s_2r_3) - 4s_2(\xi - r_3^2)(2r_1s_3 - s_1r_3) =$$

$$= 8\xi s_3(s_1r_2 - r_1s_2) + 8r_3^2s_3(s_1r_2 + r_1s_2) - 8s_1s_2r_3^3 =$$

$$= 8\xi r_1r_2r_3 - 8r_3(s_1r_1 + s_2r_2)(s_1r_2 + r_1s_2) - 8s_1s_2r_3^3 =$$

$$= 8r_3\left(\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)r_1r_2 - (s_1r_1 + s_2r_2)(s_1r_2 + r_1s_2) - s_1s_2r_3^2\right) =$$

$$= 8r_3\left(\frac{br_1r_2}{r_3^2} - s_1s_2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\right) = \frac{8(br_1r_2 - s_1s_2r_3^2)}{r_3} = 0.$$

Здесь мы воспользовались формулой 2.3.27 и тем, что $s_3r_3 = -(s_1r_1 + s_2r_2)$. В случае $b \neq 0$ имеем $r_3 \neq 0$, поэтому немедленно получаем 2.3.29. Если же $b = 0$, то последнее равенство имеет смысл лишь при $r_3 \neq 0$. Но при $r_3 = 0$ в случае $b = 0$ формула 2.3.29 выполняется автоматически.

Лемма доказана. □

Шаг 5.

Лемма 2.7. *Пусть $P(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ – критическая точка отображения момента. Тогда в точке P выполнено одно из следующих четырёх условий:*

1. $dK = 0$;
2. $s_1 = r_2 = s_3 = 0$;
3. $r_1 = s_2 = s_3 = 0$;
4. $\begin{cases} s_1^2 - s_2^2 + r_3^2 = \dfrac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}; \\ s_1 s_2 = \dfrac{b r_1 r_2}{r_3^2}. \end{cases}$

Таким образом, множество критических точек исчерпывается точками, описанными в леммах 2.3, 2.4, 2.5.

Доказательство. Пусть $dK|_P \neq 0$. Тогда выполнена лемма 2.6, и имеют место равенства 2.3.28, 2.3.29. Предположим, что $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_3 \neq 0$. Тогда из 2.3.29 получаем $s_1 s_2 = \dfrac{b r_1 r_2}{r_3^2}$, что вместе с 2.3.28 даёт $s_1^2 - s_2^2 + r_3^2 = \dfrac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}$. Таким образом, остаётся рассмотреть случаи, когда хотя бы одна из переменных r_i равна нулю.

Допустим, $\mathbf{r_3 = 0}$. В этом случае, как мы знаем, $b = 0$. Из равенств $s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = 0$ и $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ следует

$$s_1 r_1 + s_2 r_2 = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 = 1. \tag{2.3.30}$$

Отсюда получаем

$$s_1^2 + s_2^2 = (s_1^2 + s_2^2)(r_1^2 + r_2^2) = (s_1 r_1 + s_2 r_2)^2 + (s_1 r_2 - s_2 r_1)^2 = (s_1 r_2 - s_2 r_1)^2.$$

Кроме того, из 2.3.27 следует, что либо $s_3 = 0$, либо $s_1 r_2 - s_2 r_1 = 0$. Если $s_1 r_2 - r_1 s_2 = 0$, то $s_1^2 + s_2^2 = (s_1 r_2 - s_2 r_1)^2 = 0$. Но тогда $s_1 = s_2 = r_3 = 0$, и, следовательно, $dK = 0$.

Если $s_3 = 0$, то третий и шестой столбцы матрицы 2.3.1 обнуляются, следовательно, $M_{1245}^{1234} = 0$. С другой стороны,

$$M_{1245}^{1234} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2r_1 & 2r_2 \\ r_1 & r_2 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & r_1 & -r_2 \\ 4s_1(s_1^2 + s_2^2) & 4s_2(s_1^2 + s_2^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8(s_1^2 + s_2^2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_2 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & r_1 & -r_2 \\ s_1 & s_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -16(s_1^2 + s_2^2)(s_1 r_2 - s_2 r_1) r_1 r_2 = -16(s_1 r_2 - s_2 r_1)^3 r_1 r_2.$$

Таким образом, либо $s_1 r_2 - s_2 r_1 = 0$, либо $r_1 = 0$, либо $r_2 = 0$. Первый случай мы уже рассмотрели. Если $r_1 = 0$, то в силу 2.3.30 $s_2 = 0$, и мы имеем $r_1 = s_2 = s_3 = 0$. Аналогично, если $r_2 = 0$, то $s_1 = 0$, и мы имеем $s_1 = r_2 = s_3 = 0$.

Итак, случай $r_3 = 0$ рассмотрен. Далее будем полагать, что $r_3 \neq 0$.

Допустим теперь, что $\mathbf{r_1} = \mathbf{0}$. Тогда из 2.3.29 следует, что либо $s_1 = 0$, либо $s_2 = 0$. Если $s_2 = 0$, то равенство $s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0$ влечёт $s_3 = 0$ (напомним, что теперь $r_3 \neq 0$), и мы имеем $r_1 = s_2 = s_3 = 0$. Если же $s_1 = 0$, то в матрице 2.3.1 обнуляются первый и четвёртый столбцы, следовательно, $M^{1234}_{2356} = 0$. Используя равенства $r_2^2 + r_3^2 = 1$ и $s_2r_2 = -s_3r_3$, находим:

$$M^{1234}_{2356} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2r_2 & 2r_3 \\ r_2 & r_3 & s_2 & s_3 \\ s_2 & 2s_3 & -r_2 & -\dfrac{b}{r_3^3} \\ 4s_2\left(s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2} - r_3^2\right) & 0 & 0 & -\dfrac{4b}{r_3^3}\left(s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2}\right) - 4r_3(s_2^2 - r_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 8\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & r_2 & r_3 \\ r_2 & r_3 & s_2 & s_3 \\ s_2 & 2s_3 & -r_2 & -\dfrac{b}{r_3^3} \\ s_2 & 0 & 0 & -\left(r_3 + \dfrac{b}{r_3^3}\right) \end{vmatrix} = 16\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & r_2 & r_3 \\ r_2 & r_3 & s_2 & s_3 \\ 0 & s_3 & 0 & r_3 \\ s_2 & 0 & 0 & -\left(r_3 + \dfrac{b}{r_3^3}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= 16\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(-r_2^2 s_3\left(r_3 + \frac{b}{r_3^3}\right) - s_2(r_2 s_3^2 - s_2 s_3 r_3 - r_2 r_3^2)\right) =$$

$$= 16\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(-r_2^2 s_3\left(r_3 + \frac{b}{r_3^3}\right) - s_2(r_2 s_3^2 - s_2 s_3 r_3) - s_3 r_3^3)\right) =$$

$$= -\frac{16 s_3}{r_3}\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(r_2^2 r_3^2 + \frac{b r_2^2}{r_3^2} - s_2^2 r_2^2 - s_2^2 r_3^2 + r_3^4\right) =$$

$$= -\frac{16 s_3}{r_3}\left(s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} - r_3^2\right)\left(r_3^2 + \frac{b r_2^2}{r_3^2} - s_2^2\right).$$

Далее возможны три варианта: $s_3 = 0$ или $s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2} - r_3^2 = 0$ или $r_3^2 + \dfrac{br_2^2}{r_3^2} - s_2^2 = 0$. Если $s_3 = 0$, то в силу равенства $s_2r_2 = -s_3r_3$ либо $s_2 = 0$, и тогда $r_1 = s_2 = s_3 = 0$, либо $r_2 = 0$, и тогда $s_1 = r_2 = s_3 = 0$. Если $s_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2} - r_3^2 = 0$, то $dK = 0$ вопреки предположению (см. лемму 2.3). Если же $r_3^2 + \dfrac{br_2^2}{r_3^2} - s_2^2$, то отсюда немедленно следует равенство $s_1^2 - s_2^2 + r_3^2 = \dfrac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}$. Заметим, что равенство $s_1s_2 = \dfrac{br_1r_2}{r_3^2}$ автоматически следует из 2.3.29 при $r_3 \neq 0$.

Совершенно аналогично рассматривается случай $\mathbf{r_2} = \mathbf{0}$. Здесь имеют место равенства

$$s_1r_1 + s_3r_3 = 0, \quad r_1^2 + r_3^2 = 1. \tag{2.3.31}$$

Из 2.3.29 получаем, что либо $s_1 = 0$, либо $s_2 = 0$. Если $s_1 = 0$, то из 2.3.31 следует $s_3 = 0$, и $s_1 = r_2 = s_3 = 0$. Если же $s_2 = 0$, то в матрице 2.3.1 обнуляются второй и пятый столбцы,

следовательно, $M^{1234}_{1346}=0$. С другой стороны, используя 2.3.31, находим:

$$M^{1234}_{2356}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2r_1 & 2r_3 \\ r_1 & r_3 & s_1 & s_3 \\ s_1 & 2s_3 & r_1 & -\dfrac{b}{r_3^3} \\ 4s_1\left(s_1^2+\dfrac{b}{r_3^2}+r_3^2\right) & 0 & 0 & -\dfrac{4b}{r_3^3}\left(s_1^2+\dfrac{b}{r_3^2}\right)+4r_3(s_1^2+r_3^2) \end{vmatrix}=$$

$$=8\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & r_1 & r_3 \\ r_1 & r_3 & s_1 & s_3 \\ s_1 & 2s_3 & r_1 & -\dfrac{b}{r_3^3} \\ s_1 & 0 & 0 & r_3-\dfrac{b}{r_3^3} \end{vmatrix}=16\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & r_1 & r_3 \\ r_1 & r_3 & s_1 & s_3 \\ 0 & s_3 & 0 & -r_3 \\ s_1 & 0 & 0 & r_3-\dfrac{b}{r_3^3} \end{vmatrix}=$$

$$=16\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\left(r_1^2s_3\left(r_3-\frac{b}{r_3^3}\right)-s_1(r_1s_3^2-s_1s_3r_3+r_1r_3^2)\right)=$$

$$=16\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\left(r_1^2s_3\left(r_3-\frac{b}{r_3^3}\right)-s_1(r_1s_3^2-s_1s_3r_3)+s_3r_3^3)\right)=$$

$$=\frac{16s_3}{r_3}\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\left(r_1^2r_3^2-\frac{br_1^2}{r_3^2}+s_1^2r_1^2+s_1^2r_3^2+r_3^4\right)=$$

$$=\frac{16s_3}{r_3}\left(s_1^2+\frac{b}{r_3^2}+r_3^2\right)\left(r_3^2-\frac{br_1^2}{r_3^2}+s_1^2\right).$$

Далее, как и выше, возможны три случая: $s_3=0$ либо $s_1^2+\dfrac{b}{r_3^2}+r_3^2=0$ либо $r_3^2-\dfrac{br_1^2}{r_3^2}+s_1^2=0$. В первом из них получаем $s_1=r_2=s_3=0$ либо $r_1=s_2=s_3=0$, во втором $dK=0$, в третьем $s_1^2-s_2^2+r_3^2=\dfrac{b(r_1^2-r_2^2)}{r_3^2}$ и $s_1s_2=\dfrac{br_1r_2}{r_3^2}$.

Лемма 2.7 доказана, и это завершает доказательство теоремы 2.2. □

□

Замечание 2.3.1. В ходе доказательства теоремы 2.2 мы получили параметризацию критических множеств, лежащих в прообразе точек бифуркационной диаграммы (формулы 2.3.2–2.3.8, 2.3.25–2.3.26).

2.4 Особые точки ранга один

Теорема 2.8 (П. Е. Рябов [36] ($b>0$), С. С. Николаенко [75] ($b\le 0$))**.**

1. *В случае Горячева ($b\neq 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе точек касания прямых l, l_+, l_- с параболами π_+, π_- на бифуркационной диаграмме (т. е. точки $(1/2, 2b)$, $((b+1)/2, b^2+2b)$ при $b>0$ и точки $(1/2,2b)$, $((b+1)/2, b^2+2b)$, $(-1/2,-2b)$, $((b-1)/2, b^2-2b)$*

при $b < 0$) являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.

2. *В случае Чаплыгина ($b = 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l на бифуркационной диаграмме являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.*

Доказательство. Пусть $P(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ – некоторая точка особой орбиты $\mathfrak{O}$ ранга 1. Рассмотрим случай, когда орбита $\mathfrak{O}$ лежит в прообразе параболы π_- на бифуркационной диаграмме. Тогда для координат точки P и дифференциалов функций K, H, f_1 в точке P имеем (см. лемму 2.4):

$$s_1 = r_2 = s_3 = 0, \quad s_2^2 - r_3^2 + \frac{b}{r_3^2} = 2h - 1, \quad dK = 4\left(s_2^2 - r_3^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)\left(dH - \frac{1}{2}df_1\right).$$

Точку P всегда можно выбрать так, чтобы в ней выполнялось $s_2 \neq 0$, $r_3 \neq 0$. Тогда векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (r_3, 0, -r_1, 0, 0, 0)\,; \\ e_2 &= (0, 0, -s_2, 0, r_3, 0)\,; \\ e_3 &= \left(0, -r_1\left(r_3 + \frac{b}{r_3^3}\right), 0, s_2 r_3, 0, -s_2 r_1\right). \end{aligned}$$

будут образовывать базис в $T_P Q_h^3$. Вычислим вторые дифференциалы функций H, f_1, K в точке P:

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{3b}{r_3^4} \end{pmatrix}; \quad d^2f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$d^2K = 4\begin{pmatrix} s_2^2 + r_3^2 + \dfrac{b}{r_3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3s_2^2 - r_3^2 + \dfrac{b}{r_3^2} & 0 & 0 & 0 & -2s_2\left(r_3 + \dfrac{b}{r_3^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_2\left(r_3 + \dfrac{b}{r_3^2}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(s_2^2 - r_3^2 + \dfrac{b}{r_3^2}\right)\left(\dfrac{3b}{r_3^4} - 1\right) + 2\left(r_3 + \dfrac{b}{r_3^2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе из векторов e_1, e_2, e_3 будем иметь:

$$\left(d^2K - 4\left(s_2^2 - r_3^2 + \frac{b}{r_3^2}\right)\left(d^2H - \frac{1}{2}d^2f_1\right)\right)\Big|_{T_PQ_h^3} = 8\begin{pmatrix} r_3^4 - (2h-1)r_1^2 & -(2h-1)s_2r_1 & 0 \\ -(2h-1)s_2r_1 & (2h-1)(r_3^2 - s_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} r_3^4 - (2h-1)r_1^2 & -(2h-1)s_2r_1 \\ -(2h-1)s_2r_1 & (2h-1)(r_3^2 - s_2^2) \end{vmatrix} = r_3^2(2h-1)(r_3^4 - (2h-1)r_1^2 - s_2^2r_3^2) =$$
$$= r_3^2(2h-1)(b+1-2h),$$

поэтому точка P (и орбита $\mathfrak{O}$) вырождена при $h = 1/2$ и $h = (b+1)/2$, невырожденная эллиптическая при $h \in (1/2, (b+1)/2), b > 0$ ($h \in ((b+1)/2, 1/2), b < 0$) и невырожденная гиперболическая иначе.

Случаи, когда орбита $\mathfrak{O}$ лежит в прообразе других дуг бифуркационной диаграммы, рассматриваются аналогично.

□

Замечание 2.4.1. При $b = 0$ особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l при $h \in (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ становятся невырожденными, если в качестве дополнительного интеграла рассмотреть функцию $\sqrt{K}$ (см. также замечание 2.2.2). Действительно, в силу формул 2.3.2 на каждой такой орбите можно выбрать точку вида $P(0, 0, \pm\sqrt{h+1/2}, 0, \pm 1, 0)$. Тогда в качестве базиса в $T_PQ_h^3$ можно взять векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0);$$
$$e_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0);$$
$$e_3 = \left(0, \pm\sqrt{h + \frac{1}{2}}, 0, 0, 0, \mp 1\right).$$

Так же, как и в замечании 2.2.2, проверяется, что $\frac{\partial^2 K}{\partial s_1^2}|_P = \frac{\partial^2 K}{\partial s_2^2}|_P = \frac{\partial^2 K}{\partial r_3^2}|_P = 2$, а все остальные частные производные функции $\sqrt{K}$ в точке P равны нулю. Поэтому в базисе из векторов e_1, e_2, e_3 будем иметь:

$$d^2(\sqrt{K}|_{Q_h^3})|_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h+3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, точка P (а также соответствующая орбита) – невырожденная эллиптического типа.

Следствие 2.4.1. *На всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии интеграл K (или $\sqrt{K}$ при $b = 0$) является функцией Ботта.*

2.5 Топология изоэнергетических многообразий

В этом разделе мы опишем топологические типы неособых изоэнергетических многообразий $Q^3_h = \{x \in M^4_{1,0} \mid H(x) = h\}$ для систем Чаплыгина–Горячева.

Теорема 2.9 (О. Е. Орёл, П. Е. Рябов, С. С. Николаенко [67, 36]). *Изоэнергетические многообразия Q^3_h, отвечающие неособым уровням энергии h, для систем Чаплыгина–Горячева гомеоморфны следующим многообразиям:*

при $\underline{b = 0}$*:*

- $\emptyset$ *при* $h < -\dfrac{1}{2}$;
- $2S^3$ *при* $-\dfrac{1}{2} < h < 0$;
- $S^2 \times S^1$ *при* $0 < h < \dfrac{1}{2}$;
- $\mathbb{R}P^3$ *при* $h > \dfrac{1}{2}$;

при $\underline{0 < b < 1}$*:*

- $\emptyset$ *при* $h < \sqrt{b} - \dfrac{1}{2}$;
- $4S^3$ *при* $\sqrt{b} - \dfrac{1}{2} < h < \dfrac{b}{2}$;
- $2S^3$ *при* $h > \dfrac{b}{2}$;

при $\underline{b \geq 1}$*:*

- $\emptyset$ *при* $h < \dfrac{b}{2}$;
- $2S^3$ *при* $h > \dfrac{b}{2}$;

при $\underline{-1 < b < 0}$*:*

- $2D^2 \times S^1$ *при* $h < \dfrac{b}{2}$ *и* $h > \dfrac{1}{2} - \sqrt{-b}$, *где* D^2 *– открытый двумерный диск;*
- $2((S^2 \times S^1) \setminus \gamma)$ *при* $\dfrac{b}{2} < h < \dfrac{1}{2} - \sqrt{-b}$, *где* $\gamma \subset S^2 \times S^1$ *– тривиальная (стягивающаяся) окружность;*

при $\underline{b < -1}$*:*

- $2D^2 \times S^1$ *при* $h \neq \dfrac{b}{2}$.

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом, изложенным в разделе 1.11. Приведённый потенциал 1.11.4 в данном случае имеет вид $\varphi_0(r) = U(r) = \dfrac{1}{2}\left(r_1^2 - r_2^2 + \dfrac{b}{r_3^2}\right)$. Проекция изоэнергетического многообразия Q_h^3 на сферу Пуассона $S_P^2 = \{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 = 1\}$ задаётся неравенством $\varphi_0(r) \le h$. Таким образом, для начала нужно изучить слоение сферы Пуассона на линии уровня функции $\varphi_0(r)$.

Найдём сперва критические точки функции $\varphi_0|_{S_P^2}$. Это те точки $(r_1, r_2, r_3) \in S_P^2$, в которых дифференциалы функций φ_0 и $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ линейно зависимы. Из условия

$$\left(r_1, -r_2, -\frac{b}{r_3^3}\right) = \lambda\,(2r_1, 2r_2, 2r_3)$$

получаем следующие возможности.

1. $r_1 \neq 0$. Тогда $\lambda = 1/2$, $r_2 = 0$, $-b/r_3^3 = r_3$, откуда при $-1 \le b \le 0$ получаем точки $R_1^{\pm\pm} = (\pm\sqrt{1 - \sqrt{-b}}, 0, \pm\sqrt[4]{-b})$. При этом $\varphi_0(R_1^{\pm\pm}) = 1/2 - \sqrt{-b}$.

2. $r_2 \neq 0$. Тогда $\lambda = -1/2$, $r_1 = 0$, $b/r_3^3 = r_3$, откуда при $0 \le b \le 1$ получаем точки $R_2^{\pm\pm} = (0, \pm\sqrt{1 - \sqrt{b}}, \pm\sqrt[4]{b})$. При этом $\varphi_0(R_2^{\pm\pm}) = \sqrt{b} - 1/2$.

3. $r_1 = r_2 = 0$. Тогда $r_3 = \pm 1$, $\lambda = -b/2$, и при $b \in \mathbb{R}$ получаем точки $R_3^{\pm} = (0, 0, \pm 1)$. При этом $\varphi_0(R_3^{\pm}) = b/2$.

Замечание 2.5.1. Особые значения энергии, отвечающие точкам $R_1^{\pm\pm}$, $R_2^{\pm\pm}$, $R_3^{\pm}$, соответствуют изоэнергетическим уровням в многообразии $M_{1,0}^4$, содержащим особые точки $P_1^{\pm\pm}$, $P_2^{\pm\pm}$, $P_3^{\pm}$ отображения момента ранга ноль.

Замечание 2.5.2. При $b = -1$ имеем $R_1^{+\pm} = R_1^{-\pm} = R_3^{\pm}$, при $b = 1$ имеем $R_2^{+\pm} = R_2^{-\pm} = R_3^{\pm}$, а при $b = 0$ имеем $R_1^{\pm+} = R_1^{\pm-} = R_1^{\pm}(\pm 1, 0, 0)$ и $R_2^{\pm+} = R_2^{\pm-} = R_2^{\pm}(0, \pm 1, 0)$. Таким образом, при $-1 < b < 1$ имеем шесть критических точек функции φ_0 на сфере S_P^2, а при $|b| \ge 1$ – две.

Определим теперь типы критических точек $R_1^{\pm\pm}$, $R_2^{\pm\pm}$, $R_3^{\pm}$ с помощью второго дифференциала функции $\varphi_0|_{S_P^2}$. Для этого выберем базисы в касательных плоскостях к сфере Пуассона в рассматриваемых точках:

$e_1^1 = (0, 1, 0)$, $e_2^1 = (\pm\sqrt[4]{-b}, 0, \sqrt{1 - \sqrt{-b}})$ в $T_{R_1^{\mp+}} S_P^2$ и $T_{R_1^{\pm-}} S_P^2$,

$e_1^2 = (1, 0, 0)$, $e_2^2 = (0, \pm\sqrt[4]{b}, \sqrt{1 - \sqrt{b}})$ в $T_{R_2^{\mp+}} S_P^2$ и $T_{R_2^{\pm-}} S_P^2$,

$e_1^3 = (1, 0, 0)$, $e_2^3 = (1, 0, 0)$ в $T_{R_3^{\pm}} S_P^2$.

В выбранных базисах матрицы вторых дифференциалов функции $\varphi_0|_{S^2_P}$ запишутся следующим образом:

$$d^2(\varphi_0|_{S^2_P})(R_1^{\pm\pm}) = \left(d^2\varphi_0 - \frac{1}{2}d^2 f_1\right)\Big|_{S^2_P}(R_1^{\pm\pm}) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3b}{r_3^4}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\Big|_{S^2_P}(R_1^{\pm\pm}) = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4(1-\sqrt{-b})\end{pmatrix};$$

$$d^2(\varphi_0|_{S^2_P})(R_2^{\pm\pm}) = \left(d^2\varphi_0 + \frac{1}{2}d^2 f_1\right)\Big|_{S^2_P}(R_2^{\pm\pm}) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3b}{r_3^4}\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\Big|_{S^2_P}(R_2^{\pm\pm}) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4(1-\sqrt{b})\end{pmatrix};$$

$$d^2(\varphi_0|_{S^2_P})(R_3^{\pm}) = \left(d^2\varphi_0 + \frac{b}{2}d^2 f_1\right)\Big|_{S^2_P}(R_3^{\pm}) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3b}{r_3^4}\end{pmatrix} + \frac{b}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\Big|_{S^2_P}(R_3^{\pm}) = \begin{pmatrix}b+1 & 0\\ 0 & b-1\end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что $R_1^{\pm\pm}$ при $b \in (-1, 0]$ – точки невырожденного максимума, $R_2^{\pm\pm}$ при $b \in [0, 1)$ – точки невырожденного минимума, $R_3^{\pm}$ – точки невырожденного минимума при $b > 1$, вырожденного минимума при $b = 1$, седловые невырожденные при $-1 < b < 1$, точки вырожденного максимума при $b = -1$ и невырожденного максимума при $b < -1$ (чтобы убедиться в этом при $b = \pm 1$, можно, например, рассмотреть функцию φ_0 в локальных координатах r_1, r_2). Полученные сведения о типах критических точек функции φ_0 вместе с тем фактом, что $\varphi_0(r) \to +\infty$ при $r_3 \to 0$, $b > 0$ и $\varphi_0(r) \to -\infty$ при $r_3 \to 0$, $b < 0$, позволяют изобразить качественный портрет слоения сферы Пуассона на линии уровня функции φ_0 (см. рис. 2.7, 2.8, 2.9). В случае $b \neq 0$ функция φ_0 не определена при $r_3 = 0$, поэтому, так как она инвариантна относительно инволюции $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (r_1, r_2, -r_3)$, достаточно рассматривать слоение на полусфере $S^2_P \cap \{r_3 > 0\}$.

Пусть $b = 0$. Тогда при $h < -1/2$ проекция изоэнергетического многообразия Q^3_h на сферу Пуассона S^2_P пуста, при $-1/2 < h < 0$ она представляет собой два замкнутых диска (т.е. две сферы с одной "дыркой") (рис. 2.10, слева), при $0 < h < 1/2$ гомеоморфна замкнутому кольцу (т.е. сфере с двумя "дырками") (рис. 2.10, справа), а при $h > 1/2$ совпадает со всей сферой S^2_P.

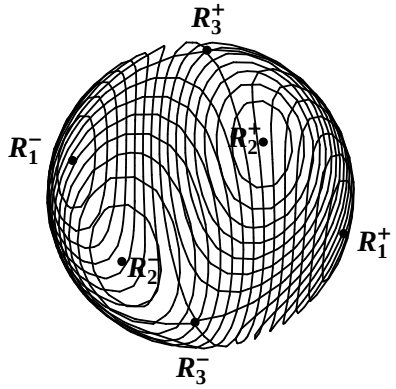


Рис. 2.7: Слоение сферы Пуассона S_P^2 на линии уровня функции φ_0 при $b = 0$

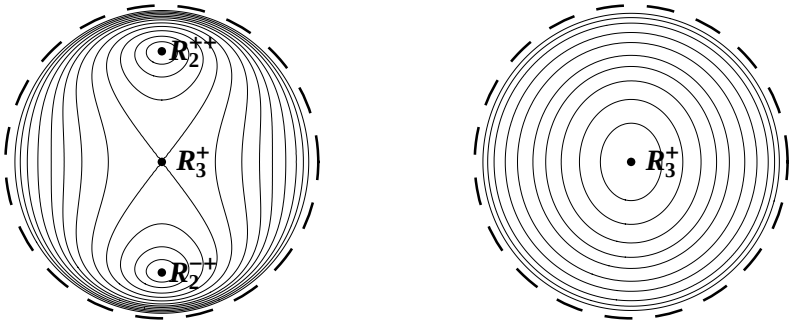


Рис. 2.8: Слоение полусферы Пуассона S_P^2, $r_3 > 0$ на линии уровня функции φ_0 при $0 < b < 1$ (слева) и $b > 1$ (справа)

Следовательно, в силу теоремы 1.6 многообразие Q_h^3 пусто при $h < -1/2$, гомеоморфно несвязному объединению двух 3-мерных сфер при $-1/2 < h < 0$, прямому произведению двумерной сферы и окружности при $0 < h < 1/2$ и 3-мерному проективному пространству при $h > 1/2$.

Аналогично рассматривается случай $b > 0$. При $0 < b < 1$ проекция многообразия Q_h^3 на полусферу S_P^2, $r_3 > 0$, пуста при $h < \sqrt{b} - 1/2$, гомеоморфна двум замкнутым дискам при $\sqrt{b} - 1/2 < h < b/2$ (рис. 2.11, слева) и одному замкнутому диску при $h > b/2$ (рис. 2.11, справа). Следовательно, многообразие Q_h^3 пусто при $h < \sqrt{b} - 1/2$, гомеоморфно несвязному объединению четырёх 3-мерных сфер при $\sqrt{b} - 1/2 < h < b/2$ и двух 3-мерных сфер при $h > b/2$.

При $b \geq 1$ проекция многообразия Q_h^3 на полусферу S_P^2, $r_3 > 0$ пуста при $h < b/2$ и гомеоморфна замкнутому диску при $h > b/2$. Следовательно, многообразие Q_h^3 пусто при $h < b/2$ и гомеоморфно несвязному объединению двух 3-мерных сфер при $h > b/2$.

При $b < 0$ проекции изоэнергетических многообразий Q_h^3 на сферу Пуассона становятся некомпактными, и использовать теорему 1.11 уже не получается. Поэтому будем напрямую пользоваться тем фактом, что многообразие Q_h^3 представляет собой расслоение единичных ка-

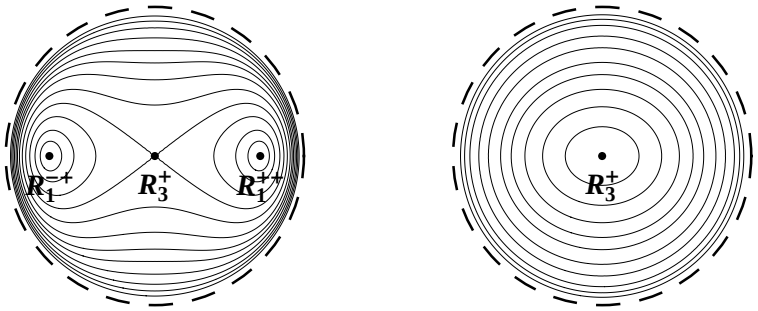


Рис. 2.9: Слоение полусферы Пуассона S^2_P, $r_3 > 0$ на линии уровня функции φ_0 при $-1 < b < 0$ (слева) и $b < -1$ (справа)

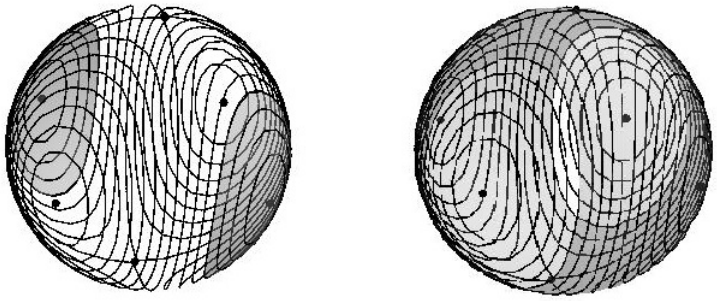


Рис. 2.10: Проекция многообразия Q^3_h на сферу Пуассона S^2_P при $b = 0$, $-1/2 < h < 0$ (слева) и $0 < h < 1/2$ (справа)

сательных окружностей над своей проекцией, где слои над границей проекции стянуты в точку.

Пусть $-1 < b < 0$. Если $h > 1/2 - \sqrt{-b}$, то проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$, совпадает со всей полусферой. Следовательно, Q^3_h гомеоморфно двум экземплярам расслоений единичных касательных векторов к открытому диску, т.е. $2D^2 \times S^1$. Если $h < b/2$, то проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$, представляет собой кольцо, содержащее внутреннюю границу и не содержащее внешнюю (рис. 2.12, слева). В этом случае "половина" Q^3_h гомеоморфна расслоению единичных касательных векторов над кольцом, причём слои над границей кольца нужно стянуть в точку. Ясно, что топологически такое многообразие эквивалентно прямому произведению окружности и расслоения единичных касательных окружностей над радиальным сечением ν кольца (рис. 2.12, слева). Расслоение над полуинтервалом ν представляет собой прямое произведение $\nu \times S^1$, где слой над граничной точкой N стянут в точку, т.е. двумерный диск D^2, расслоенный на концентрические окружности. Таким образом, многообразие Q^3_h гомеоморфно $2D^2 \times S^1$. Если же $b/2 < h < 1/2 - \sqrt{-b}$, то проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$, – это полусфера с двумя "дырками" (рис. 2.12, справа). База расслоения в этом случае гомеоморфна сфере с двумя "дырками" и одной выколотой точкой (например, $(0, 0, -1)$). Искомое расслоение над таким многообразием – это расслоение единичных окруж-

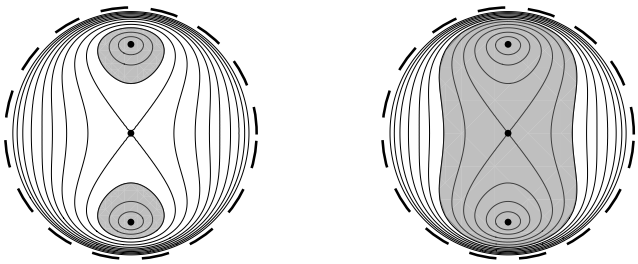


Рис. 2.11: Проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$ при $0 < b < 1$, $\sqrt{b} - 1/2 < h < b/2$ (слева) и $h > b/2$ (справа)

ностей над сферой с двумя "дырками", в котором удалён слой над одной внутренней точкой. Последнее расслоение, как следует из теоремы 1.6, гомеоморфно $S^2 \times S^1$. Таким образом, из многообразия $S^2 \times S^1$ нужно удалить вложенную окружность γ, которая, как несложно видеть, стягиваема: она стягивается в точку вдоль любого пути на сфере Пуассона, соединяющего выколотую точку с границей "дырок". Итак, в этом случае Q^3_h гомеоморфно двум экземплярам многообразия $(S^2 \times S^1) \setminus \gamma$.

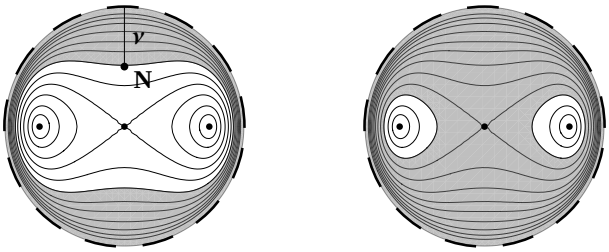


Рис. 2.12: Проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$ при $-1 < b < 0$, $h < b/2$ (слева) и $b/2 < h < 1/2 - \sqrt{-b}$ (справа)

Наконец, пусть $b \leq -1$. Тогда проекция многообразия Q^3_h на полусферу S^2_P, $r_3 > 0$, представляет собой кольцо при $h < b/2$ и всю полусферу при $h > b/2$. Рассуждая аналогично рассмотренному выше, заключаем, что в обоих случаях Q^3_h гомеоморфно двум экземплярам $D^2 \times S^1$.

Теорема 2.9 доказана.

□

Заметим, что образом при отображении момента компактного и связного изоэнергетического многообразия на плоскости значений первых интегралов является отрезок. Поэтому теоремы 2.9, 2.2 позволяют сделать вывод об образе отображения момента в случае Чаплыгина–Горячева при $b \geq 0$.

Следствие 2.5.1. *Образом отображения момента* $\mathfrak{F} = (H, K)$ *на плоскости* $\mathbb{R}^2(h, k)$ *значений первых интегралов для систем типа Чаплыгина–Горячева при* $b \geq 0$ *являются следующие множества:*

при $b = 0$*:*

- $0 \leq k \leq (2h+1)^2,\ h \geq -1/2$*;*

при $0 < b < 1$*:*

- $2b \leq k \leq (2h+1)^2 - 2b,\ \sqrt{b} - 1/2 \leq h < 1/2$*;*
- $(2h-1)^2 + 2b \leq k \leq (2h+1)^2 - 2b,\ 1/2 \leq h < (b+1)/2$*;*
- $4bh - b^2 \leq k \leq (2h+1)^2 - 2b,\ h \geq (b+1)/2$*;*

при $b \geq 1$*:*

- $(2h-1)^2 + 2b \leq k \leq (2h+1)^2 - 2b,\ b/2 \leq h < (b+1)/2$*;*
- $4bh - b^2 \leq k \leq (2h+1)^2 - 2b,\ h \geq (b+1)/2$*.*

Глава 3

Случай Чаплыгина ($b = 0$)

3.1 Грубый лиувиллев анализ

Напомним (см. теорему 2.2 и следствие 2.5.1), что в случае Чаплыгина ($b = 0$) бифуркационная диаграмма на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ содержится в объединении двух парабол $\pi_+ = \{k = (2h+1)^2\}$, $\pi_- = \{k = (2h-1)^2\}$ и прямой $l = \{k = 0\}$ и разбивает образ отображения момента на три области (камеры) I, II, III (рис. 3.1):

$$I: \qquad h > \frac{1}{2}, \quad 0 < k < (2h-1)^2; \tag{3.1.1}$$

$$II: \qquad h > 0, \quad (2h-1)^2 < k < (2h+1)^2; \tag{3.1.2}$$

$$III: \qquad -\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2}, \quad 0 < k < \min\{(2h-1)^2, (2h+1)^2\}. \tag{3.1.3}$$

Можно выделить три зоны регулярных значений энергии:

$$(1) = (-1/2, 0), \quad (2) = (0, 1/2), \quad (3) = (1/2, +\infty).$$

В работе [67] найдены типы бифуркаций (атомы), отвечающие дугам бифуркационной диаграммы, что позволяет предъявить молекулы (без меток) для каждой из трёх зон энергии.

Теорема 3.1 (О. Е. Орёл, П. Е. Рябов [67])**.** *Параболе π_+ и прямой l на бифуркационной диаграмме в случае Чаплыгина соответствуют бифуркации типа атома A, а параболе π_- – типа атома C_2 (см. рис. 1.1). Прообразы точек каждой из трёх камер I, II, III состоят из двух торов Лиувилля.*

Следствие 3.1.1. *Молекулы W_1, W_2, W_3, отвечающие зонам энергии* (1), (2), (3), *имеют вид, показанный на рисунке 3.2. Для значений энергии из зоны* (1) *поверхность Q^3_h состоит из двух компонент связности (являющихся 3-сферами), при этом молекула W_1 отвечает каждой компоненте.*

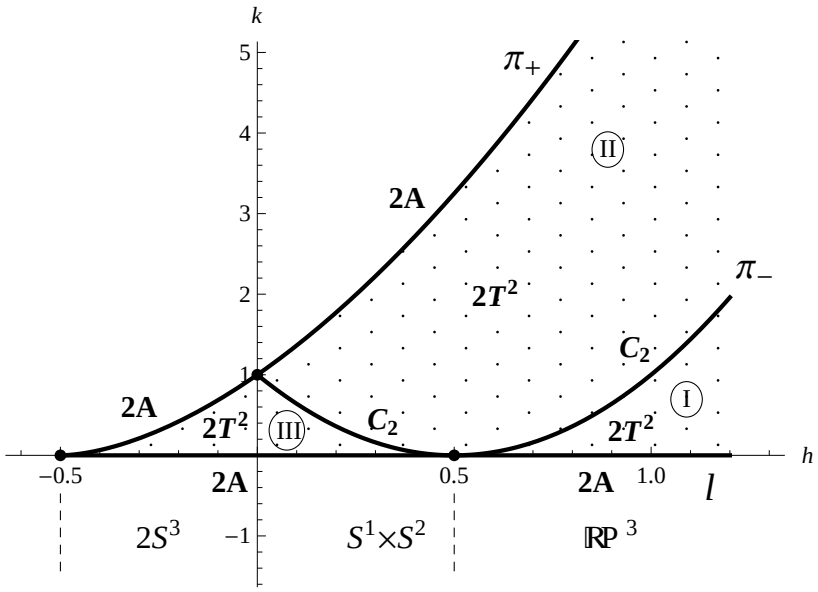


Рис. 3.1: Образ отображения момента, бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций для случая Чаплыгина

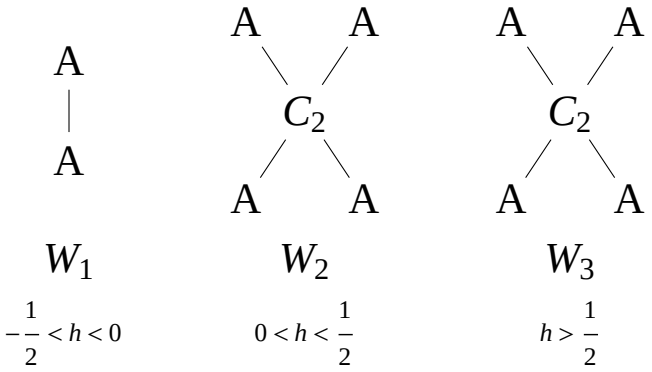


Рис. 3.2: Молекулы для случая Чаплыгина

3.2 Тонкий лиувиллев анализ

Теорема 3.2 (С. С. Николаенко [75]). *Меченые молекулы W_1^*, W_2^*, W_3^* для системы Чаплыгина, отвечающие зонам энергии (1), (2), (3), имеют вид, показанный на рисунке 3.3. Таким образом, молекулы с метками W_1^*, W_2^* и W_3^* описывают слоение Лиувилля соответственно на S^3, $S^1 \times S^2$ и $\mathbb{R}P^3$ (см. теорему 2.9). На S^3 это слоение соответствует расслоению Хопфа. При этом молекула W_1^* отвечает обеим изоэнергетическим 3-сферам.*

Следствие 3.2.1 (см. [8, 44, 26, 27]).

а) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (1), лиувиллево эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности, случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша, Соколова в

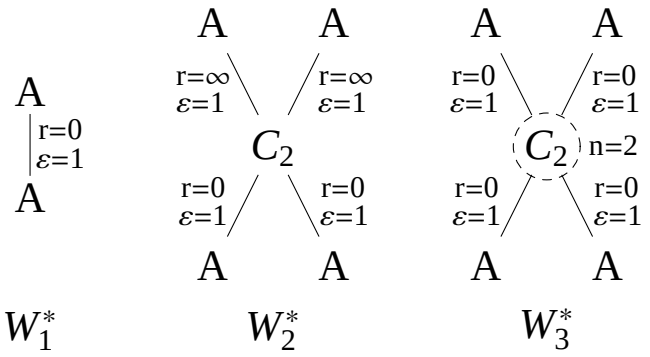


Рис. 3.3: Меченые молекулы для случая Чаплыгина

динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других параметров), а также интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фокальной прямой (примеры таких областей см. в главе 4, на рисунке 4.4).

б) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемым случаям Клебша и Соколова (при подходящих значениях энергии и параметров), а также геодезическому биллиарду в эллипсоидальной области, ограниченной конфокальным гиперболоидом (последняя эквивалентность является следствием из результатов Г. Белозёрова);*

в) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (3)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемому случаю Клебша (при подходящих значениях энергии и параметров), а также геодезическому потоку двумерного эллипсоида.*

Доказательство. Торы Лиувилля в прообразе камер I, II, III будем называть соответственно I-торами, II-торами и III-торами. Ясно, что два тора Лиувилля в прообразе регулярного значения (h, k) отображения момента выделяются в $\mathbb{R}^6(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ четырьмя уравнениями:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1; \tag{3.2.1}$$

$$s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = 0; \tag{3.2.2}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 2h; \tag{3.2.3}$$

$$(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2)^2 + 4s_1^2 s_2^2 = k. \tag{3.2.4}$$

Лемма 3.3. *Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ I-тора выполнено:*
а) $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$; б) $s_3 \neq 0$; в) $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$.

Доказательство.

а) Предположим, что $r_1 = r_2 = 0$. Тогда из (3.2.2) и (3.2.1) $s_3 = 0$, $r_3^2 = 1$ и $k = (s_1^2 + s_2^2)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2) + 1 \geq (s_1^2 + s_2^2 - 1)^2 = (2h - 1)^2$, что противоречит (3.1.1).

б) Пусть $s_3 = 0$. Тогда из (3.2.2) $s_1 r_1 + s_2 r_2 = 0$. Так как в силу пункта а) $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, то найдётся такое число j, что $s_1 = j r_2$, $s_2 = -j r_1$. С учётом (3.1.1), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.1) будем иметь:

$$0 < (2h-1)^2 - k = (s_1^2 + s_2^2 - 2r_2^2 - r_3^2)^2 - ((s_1^2 + s_2^2)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + r_3^4) =$$
$$= -4s_1^2 r_3^2 + 4r_2^2(r_2^2 + r_3^2 - s_1^2 - s_2^2) = 4r_2^2(r_2^2 + r_3^2 - j^2).$$

Отсюда получаем $j^2 < r_2^2 + r_3^2$ и

$$2h = j^2 r_2^2 + j^2 r_1^2 + r_1^2 - r_2^2 < (r_2^2 + r_3^2)(r_1^2 + r_2^2) + r_1^2 - r_2^2 = r_1^2(1 + r_3^2) \leq 1,$$

что противоречит (3.1.1).

в) Если $s_1 = s_2 = 0$, то из (3.2.2) и пункта б) следует $r_3 = 0$. Но тогда $k = 0$, что снова противоречит (3.1.1).

Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ II-тора выполнено:*
а) $s_1 \neq 0$; б) $r_2^2 + r_3^2 \neq 0$; в) $s_2^2 + s_3^2 \neq 0$.

Доказательство.

а) Пусть $s_1 = 0$. Тогда из (3.2.3), (3.2.4) имеем: $2h - 1 = (s_2^2 - r_3^2) + 2(s_3^2 - r_2^2)$, $k = (s_2^2 - r_3^2)^2$. Из (3.1.2) следует $4(s_3^2 - r_2^2)(s_3^2 - r_2^2 + s_2^2 - r_3^2) = (2h-1)^2 - k < 0$. Отсюда $(s_3^2 - r_2^2)(s_2^2 - r_3^2) < 0$, и либо $r_2^2 < s_3^2$, $s_2^2 < r_3^2$, либо $r_2^2 > s_3^2$, $s_2^2 > r_3^2$. В обоих случаях получаем противоречие с равенством $r_2^2 s_2^2 = r_3^2 s_3^2$, следующим из (3.2.2).

б) Пусть $r_2 = r_3 = 0$. Тогда из (3.2.2) получаем $r_1 = 0$ или $s_1 = 0$. Но первое невозможно в силу (3.2.1), а второе — в силу пункта а).

в) Пусть $s_2 = s_3 = 0$. Тогда из (3.2.2) и пункта а) следует $r_1 = 0$. Но в таком случае $k = (s_1^2 + r_3^2)^2 = (2h+1)^2$, что противоречит (3.1.2).

Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5. *Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ III-тора выполнено:*
а) $r_2 \neq 0$; б) $r_1^2 + s_3^2 \neq 0$; в) $s_1^2 + r_3^2 \neq 0$.

Доказательство.

а) Предположим, что $r_2 = 0$. Тогда (3.2.2) даёт $s_1 r_1 + s_3 r_3 = 0$. Поскольку в силу (3.2.1) $r_1^2 + r_3^2 \neq 0$, то найдётся такое число j, что $s_1 = j r_3$, $s_3 = -j r_1$. Из (3.2.3), (3.2.4) имеем:

$$2h - 1 = j^2 r_3^2 + s_2^2 + 2j^2 r_1^2 - r_3^2 = 2j^2 + (s_2^2 - (j^2+1)r_3^2),$$
$$k = (j^2 r_3^2 - s_2^2 + r_3^2)^2 + 4j^2 r_3^2 s_2^2 = (s_2^2 - (j^2+1)r_3^2)^2 + 4j^2 r_3^2 s_2^2,$$

и $0 < (2h-1)^2 - k = 4j^4 + 4j^2(s_2^2 - (j^2+1)r_3^2) - 4j^2 r_3^2 s_2^2 \leq 8j^4 + 4j^2(s_2^2 - (j^2+1)r_3^2) = 4j^2(2h-1)$. Отсюда $2h - 1 > 0$, что противоречит (3.1.3).

б) Пусть $r_1 = s_3 = 0$. Тогда из (3.2.2) и пункта а) следует $s_2 = 0$. В таком случае имеем $k = (s_1^2 + r_3^2)^2 = (2h+1)^2$, что противоречит (3.1.3).

в) Аналогично, если $s_1 = r_3 = 0$, то $s_2 = 0$. Отсюда $k = 0$, что снова противоречит (3.1.3).

Лемма 3.5 доказана. □

Следствие 3.2.2. *Два тора Лиувилля в прообразе регулярного значения (h,k) отображения момента различаются знаком переменной s_3, s_1 или r_2 соответственно для камеры I, II или III. Для каждой камеры существует инволюция, меняющая местами два тора Лиувилля в прообразе точек этой камеры.*

I-торы будем называть I^+-торами, если на них $s_3 > 0$, и I^--торами, если на них $s_3 < 0$. Аналогично определим II^+-торы, II^--торы, III^+-торы и III^--торы из условий $s_1 > 0$, $s_1 < 0$, $r_2 > 0$ и $r_2 < 0$ соответственно. I^+-, II^+- и III^+-торы в прообразе точки (h,k) будем обозначать через $T^+_{h,k}$, I^--, II^-- и III^--торы – через $T^-_{h,k}$.

Напомним (см. формулы 2.3.2, 2.3.5, 2.3.7), что критические окружности в прообразе кривых l, π_-, π_+ бифуркационной диаграммы задаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
l &: \quad s_1 = s_2 = r_3 = 0,\ r_1^2 + r_2^2 = 1,\ r_1^2 + s_3^2 = h + 1/2;\\
\pi_- &: \quad s_1 = r_2 = s_3 = 0,\ r_1^2 + r_3^2 = 1,\ r_1^2 + s_2^2 = 2h;\\
\pi_+ &: \quad r_1 = s_2 = s_3 = 0,\ r_2^2 + r_3^2 = 1,\ s_1^2 + r_3^2 = 2h + 1.
\end{aligned}
$$

Приступим к вычислению меток. Для удобства будем обозначать рёбра молекул так же, как и соответствующие торы Лиувилля: I^+-ребро, I^--ребро и т. д.

Начнём с простейшего случая молекулы W_1^*. Знания молекулы без меток и топологического типа поверхности Q^3_h здесь достаточно для вычисления меток (см. [8, том 2, предложение 1.1]). А именно, если молекула A——A задаёт изоэнергетическую сферу S^3, то метка r на единственном ребре равна нулю, а метку ε можно сделать равной единице выбором подходящей ориентации на S^3. С другой стороны, молекулу W_1^* позволяет сразу предъявить тот факт, что она является круговой молекулой особой точки $(-1/2, 0)$ бифуркационной диаграммы, отвечающей особенности типа центр-центр.

Рассмотрим теперь молекулу W_2^*. Пусть W' – круговая молекула особой точки $(0,1)$ бифуркационной диаграммы. Так как этой точке отвечает особенность типа центр-седло, то r-метки на всех рёбрах молекулы W' равны бесконечности (см. [8, том 1, теорема 9.2]). Отсюда немедленно следует, что $r = \infty$ на II-рёбрах молекулы W_2^*. Для определения r-меток на III-рёбрах нужно воспользоваться правилом сложения меток. Это правило позволяет вычислить r-метки на III-рёбрах молекулы W_2^*, зная r-метки на III-рёбрах молекулы W' и рёбрах молекулы W_1^*. Так как на рёбрах молекулы W' $r = \infty$, то r-метки на III-рёбрах молекулы W_2^* совпадают с r-метками на рёбрах молекулы W_1^* (см. [8, том 1, следствие из предложения 1.2]) и равны нулю.

Вычислим ε-метки молекулы W_2^*. На II-рёбрах (где $r = \infty$) они зависят от ориентации многообразия $Q^3 \cong S^1 \times S^2$. Поэтому, меняя при необходимости ориентацию Q^3_h, можно считать их равными 1. На III-рёбрах ε-метки имеют естественный топологический смысл. Равенство нулю r-меток на III-рёбрах означает гомологичность критических окружностей атомов A и C_2. Следовательно, можно сравнить естественные ориентации этих окружностей, задаваемые гамильтоновым потоком. Если ориентации совпадают, то $\varepsilon = 1$, если противоположны, то $\varepsilon = -1$.

Предъявим изотопию критических окружностей

$$S^1_0 = \left\{ s_1 = s_2 = r_3 = 0,\ r_1^2 + s_3^2 = h + \frac{1}{2},\ r_2 = \sqrt{1 - r_1^2} \right\},$$
$$S^1_{(1-2h)^2} = \left\{ s_1 = r_2 = s_3 = 0,\ r_1^2 + s_2^2 = 2h,\ r_3 = \sqrt{1 - r_1^2} \right\}$$

атомов A и C_2. Проверим, что при каждом $k \in (0, (2h-1)^2)$ условие

$$\{ s_1 = 0,\ r_3 > 0 \} \tag{3.2.5}$$

высекает на соответствующем торе $T^+_{h,k}$ цикл, непрерывно зависящий от k и гомологичный окружностям S^1_0 и $S^1_{(1-2h)^2}$. Для этого перейдём в плоскости $\mathbb{R}^2(r_1, s_3)$ к полярным координатам:

$$\begin{cases} r_1 = u \cos\varphi, \\ s_3 = u \sin\varphi. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Лемма 3.5 гарантирует, что такая замена корректно определена на III-торах. Покажем, что условие (3.2.5) задаёт вложение $i_k : S^1(\varphi) \to T^+_{h,k}$. Уравнения (3.2.2)–(3.2.4) на образе отображения i_k переписываются следующим образом:

$$s_2 r_2 + s_3 r_3 = 0; \tag{3.2.7}$$
$$s_2^2 + 2s_3^2 - 2r_2^2 - r_3^2 = 2h - 1; \tag{3.2.8}$$
$$(r_3^2 - s_2^2)^2 = k. \tag{3.2.9}$$

Из (3.2.1), (3.2.6), 3.2.8, 3.2.9 находим выражения для s_2^2, r_2^2, r_3^2 через u, φ:

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \frac{2h + 1 - \sqrt{k}}{2} - u^2, \\ r_2^2 &= u^2 \sin^2\varphi + \frac{1 - 2h - \sqrt{k}}{2}, \\ r_3^2 &= \frac{2h + 1 + \sqrt{k}}{2} - u^2. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Из (3.2.7) получаем:

$$\Big(\frac{2h + 1 - \sqrt{k}}{2} - u^2\Big)\Big(u^2 \sin^2\varphi + \frac{1 - 2h - \sqrt{k}}{2}\Big) = u^2 \sin^2\varphi \Big(\frac{2h + 1 + \sqrt{k}}{2} - u^2\Big),$$

откуда находим выражение для u через φ:

$$u = \Big(\frac{(2h+1-\sqrt{k})(1-2h-\sqrt{k})}{2(1-2h-\sqrt{k}\cos 2\varphi)}\Big)^{1/2}. \tag{3.2.11}$$

Подставляя (3.2.11) в (3.2.10), можно однозначно выразить s_2, r_2, r_3 через φ. При этом r_2, r_3 положительны, а знак s_2 противоположен знаку s_3. Таким образом, переменные $\mathbf{s}, \mathbf{r}$ выражаются как однозначные и гладкие функции от φ и k. Следовательно, отображение i_k задаёт гладкое вложение окружности в тор Лиувилля и, кроме того, гладко зависит от k.

Обозначим образ i_k через S^1_k. Несложно видеть, что $S^1_k \to S^1_0$ при $k \to 0$. Поэтому ориентация, заданная на окружностях S^1_k параметром φ, возникает и на S^1_0. Чтобы сравнить её с естественной ориентацией, задаваемой гамильтоновым потоком, рассмотрим проекцию окружности S^1_0 на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, s_3)$. Из 2.1.10 имеем $\dot{r}_1 = 2s_3 r_2$. Учитывая, что $r_2 > 0$ на S^1_0, заключаем, что ориентация, задаваемая на S^1_0 углом φ, противоположна естественной (рис. 3.4).

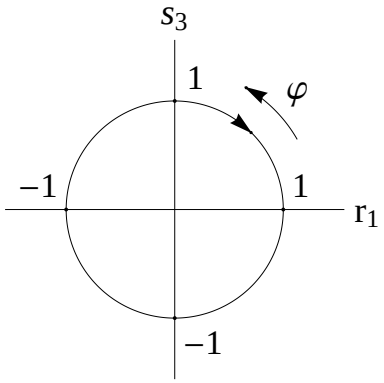


Рис. 3.4: Две ориентации окружности S^1_0

Устремим теперь k к $(1-2h)^2$. Рассмотрим на окружности $S^1_{(1-2h)^2}$ четыре точки:

$$\lim_{k\to(1-2h)^2} i_k(0) = P_0: \qquad r_1 = \sqrt{2h},\ s_2 = 0;$$

$$\lim_{k\to(1-2h)^2} i_k\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = P_{\pi/2}: \qquad r_1 = 0,\ s_2 = -\sqrt{2h};$$

$$\lim_{k\to(1-2h)^2} i_k(\pi) = P_\pi: \qquad r_1 = -\sqrt{2h},\ s_2 = 0;$$

$$\lim_{k\to(1-2h)^2} i_k\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = P_{3\pi/2}: \qquad r_1 = 0,\ s_2 = \sqrt{2h}.$$

Ориентация, заданная на S^1_k параметром φ, переходит и на $S^1_{(1-2h)^2}$. При этой ориентации точки $P_0, P_{\pi/2}, P_\pi, P_{3\pi/2}$ обходятся именно в таком порядке. Чтобы сравнить её с естественной ориентацией на $S^1_{(1-2h)^2}$, спроектируем $S^1_{(1-2h)^2}$ на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, s_2)$. Из системы 2.1.10 имеем: $\dot{r}_1 = -s_2 r_3$. Так как $r_3 > 0$ на $S^1_{(1-2h)^2}$, то рассматриваемые две ориентации противоположны (рис. 3.5).

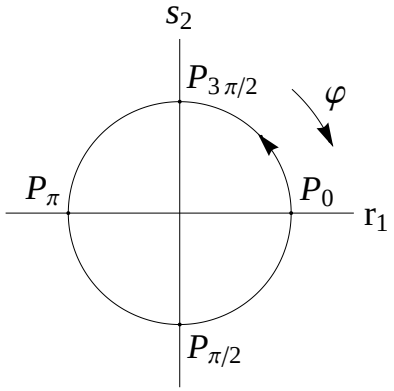


Рис. 3.5: Две ориентации окружности $S^1_{(1-2h)^2}$

Таким образом, естественные ориентации на окружностях S^1_0 и $S^1_{(1-2h)^2}$ совпадают. Следовательно, ε-метка на III$^+$-ребре молекулы W^*_2 равна единице. Аналогично проверяется, что и на III$^-$-ребре $\varepsilon = 1$.

Вычислим наконец метки молекулы W^*_3. Для вычисления r-меток воспользуемся методом П. Топалова [42]. Этот метод основывается на связи меток с топологией изоэнергетического многообразия Q^3.

Если разрезать молекулу по всем рёбрам с конечной r-меткой, то она распадётся на несколько связных кусков. Те из них, которые не содержат атомов A, были названы семьями (см. раздел 1.8). В каждом из оставшихся кусков, отличном от атома A, зафиксируем произвольное ребро. Ребро, не являющееся фиксированным, назовём *существенным*, если обе его вершины не принадлежат семьям.

Теорема 3.6 (П. Топалов [42])**.** *Каждое существенное ребро e даёт в группе $H_1(Q^3)$ прямое слагаемое $\mathbb{Z}_{\beta(e)}$, где $\beta(e)$ – знаменатель r-метки на ребре e (при $\beta(e) = 0$ полагаем $\mathbb{Z}_{\beta(e)} = \mathbb{Z}$).*

Из этой теоремы следует, что все r-метки молекулы W^*_3 конечны. Дело в том, что в силу имеющейся симметрии (см. следствие 5.3) r-метки как на двух I-рёбрах, так и на двух II-рёбрах молекулы W^*_3 совпадают (по крайней мере, с точностью до знака). Поэтому если бы существовало ребро с бесконечной r-меткой, то таких рёбер было бы как минимум два. Следовательно, нашлось бы существенное ребро с бесконечной r-меткой, которое давало бы прямое слагаемое $\mathbb{Z}$ в группе $H_1(Q^3)$. Но $Q^3 \cong \mathbb{R}P^3$, и $H_1(Q^3) = \mathbb{Z}_2$. Значит, все r-метки конечны, и имеется семья, состоящая из одного атома C_2.

Введём, согласно [42], для молекулы W^*_3 понятие *полной энергии кручения*. Ориентируем все рёбра в сторону атома A. Пусть $(\alpha_{11}, \beta_{11})$, $(\alpha_{12}, \beta_{12})$, $(\alpha_{21}, \beta_{21})$, $(\alpha_{22}, \beta_{22})$ – первые строки матриц склейки соответственно на I$^+$-ребре, I$^-$-ребре, II$^+$-ребре и II$^-$-ребре. Введём полную энергию кручения молекулы W^*_3 по формуле

$$N(W^*_3) = \beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}E(C_2), \tag{3.2.12}$$

где $E(C_2) = \dfrac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} + \dfrac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} + \dfrac{\alpha_{21}}{\beta_{21}} + \dfrac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}$ – *энергия семьи*, отличающаяся от n-метки на сумму r-меток всех рёбер, выходящих из семьи.

Теорема 3.7 (П. Топалов [42]). *Для произвольной молекулы W^* имеет место формула:*

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{rank} H_1(Q^3) > b_1(G) + 2\sum_{U \neq A} g(U); \\ \pm \operatorname{card}(\operatorname{Tor} H_1(Q^3)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $b_1(G)$ – первое число Бетти графа G, получающегося из молекулы W^* отождествлением каждой её семьи в точку; U – вершины графа G, $g(U)$ – род вершины U (т.е. род 2-мерной поверхности, получающейся из базы соответствующего расслоения Зейферта путём заклейки дисками всех её граничных окружностей).

В нашем случае теорема 3.7 даёт $N(W_3^*) = \pm 2$. Из равенства r-меток на двух I-рёбрах и на двух II-рёбрах следует $\beta_{11} = \pm\beta_{12}$, $\beta_{21} = \pm\beta_{22}$. Таким образом, из формулы (3.2.12) получаем:

$$\beta_{11}\beta_{21}((\alpha_{11} \pm \alpha_{12})\beta_{21} + (\alpha_{21} \pm \alpha_{22})\beta_{11}) = \pm 2. \tag{3.2.13}$$

Отсюда $\beta_{11} = \pm 1$ или $\beta_{21} = \pm 1$. Пусть, например, $\beta_{11} = \pm 1$. Если предположить, что $\beta_{21} = \pm 2$, то $\alpha_{21} \equiv \alpha_{22} \mod 2$. Поэтому левая часть (3.2.13) была бы кратна 4. Значит, и $\beta_{21} = \pm 1$. Таким образом, все r-метки равны нулю. Из этого следует, что n-метка совпадает с энергией семьи $E(C_2)$, равной ± 2 вследствие формулы (3.2.12). Меняя, если потребуется, ориентацию Q^3, можно считать, что $n = 2$.

Вычисление ε-меток молекулы W_3^* проводится аналогично тому, как это было сделано при вычислении ε-меток молекулы W_2^*. При этом для I-рёбер вложение i_k задаётся условием $\{s_1 = 0,\ s_2 > 0\}$, а переход к полярным координатам осуществляется в плоскости $\mathbb{R}^2(r_1, r_2)$. Для II-рёбер вложение i_k задаётся условием $\{s_3 = 0,\ s_2 > 0\}$, а переход к полярным координатам осуществляется в плоскости $\mathbb{R}^2(r_2, r_3)$.

Теорема 3.2 доказана. □

3.3 Наглядное описание топологии

Топология слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q_h^3 в случае Чаплыгина допускает весьма наглядное описание в терминах координат $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^6$. Оказывается, для каждой камеры существуют две координатные плоскости в $\mathbb{R}^6(\mathbf{s}, \mathbf{r})$, такие, что проекции соответствующих торов Лиувилля на эти плоскости являются кольцами, охватывающими начало координат. С помощью этого факта для каждого тора будет построен его диффеоморфизм на модельный тор $T^2_{can} = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$, задаваемый двумя 2π-периодическими координатами φ, ψ. Тем самым на всех торах Лиувилля будут определены две независимые гладкие функции φ, ψ, задающие два базисных цикла $\varphi = \{\psi = const\}$,

$\psi = \{\varphi = const\}$. Более того, эти циклы окажутся гладко зависящими от тора. По крайней мере одна из функций φ, ψ может быть продолжена на особые слои (другую же можно продолжить на регулярное множество особого слоя атома C_2). Это позволит выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов и в явном виде выписать матрицы склейки на рёбрах молекул. Таким образом будет получено ещё одно, конструктивное доказательство теоремы 3.2.

3.3.1 Параметризация I-торов

В плоскостях $\mathbb{R}^2(r_1, r_2)$, $\mathbb{R}^2(s_1, s_2)$ перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} r_1 = u\cos\varphi, \\ r_2 = u\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 = v\cos\psi, \\ s_2 = v\sin\psi. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Лемма 3.3 гарантирует регулярность этой замены на I-торах. Следовательно, на I-торах u, φ, v, ψ, s_3, r_3 являются гладкими функциями, две из которых можно выбрать в качестве локальных координат (в окрестности произвольной точки тора). Рассмотрим при фиксированном $h > 1/2$ отображения $\alpha_1^{\pm} = \alpha_{1,h,k}^{\pm} : T_{h,k}^{\pm} \to T_{can}^2(\varphi, \psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней угловых координат (φ, ψ).

Теорема 3.8 (С. С. Николаенко [75])**.**

1. *Введённые выше отображения $\alpha_{1,h,k}^{\pm}$ – диффеоморфизмы.*
2. *Отображения $\nu_{1,h}^{\pm} : T_{can}^2 \times (0, (2h-1)^2) \to Q^3$, определённые следующим образом: $\nu_{1,h}^{\pm}(\cdot\,, k) = (\alpha_{1,h,k}^{\pm})^{-1}(\cdot)$, являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в Q^3).*

Таким образом, теорема 3.8 позволяет определить на I-торах две независимые периодические координаты, гладко зависящие от значения интеграла K.

Доказательство.

Шаг 1. С учётом замены (3.3.1) уравнения 3.2.1–3.2.4 переписываются в виде

$$u^2 + r_3^2 = 1; \tag{3.3.2}$$

$$uv\cos(\varphi - \psi) + r_3 s_3 = 0; \tag{3.3.3}$$

$$v^2 + 2s_3^2 + 2u^2\cos^2\varphi + r_3^2 = 2h + 1; \tag{3.3.4}$$

$$v^4 + r_3^4 + 2v^2 r_3^2\cos 2\psi = k. \tag{3.3.5}$$

Нужно показать, что для любых φ, ψ уравнения 3.3.2–3.3.5 однозначно разрешимы относительно u, v, r_3, s_3, причём зависимость u, v, r_3, s_3 от φ, ψ и k является гладкой.

Обозначим $r_3^2 = x$, $v^2 = y$ и выразим u^2 из 3.3.2. Подставляя в 3.3.4, получим:

$$y + 2s_3^2 + 2(1 - x)\cos^2\varphi + x = 2h + 1, \tag{3.3.6}$$

Из (3.3.6) можно выразить s_3^2 через x, y, φ. В итоге уравнения 3.3.3, 3.3.5 дадут:

$$(1-x)y\cos^2(\varphi-\psi) = (2h-(1-x)\cos 2\varphi - y)\frac{x}{2}; \tag{3.3.7}$$

$$x^2+y^2+2xy\cos 2\psi = k. \tag{3.3.8}$$

Уравнения 3.3.7, 3.3.8 задают на плоскости (x,y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x,y)=0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x,y)=0\}$, где

$$\Gamma_1(x,y) = ((2h-\cos 2\varphi)+x\cos 2\varphi - y)\frac{x}{2} - (1-x)y\cos^2(\varphi-\psi),$$
$$\Gamma_2(x,y) = x^2+y^2+2xy\cos 2\psi - k.$$

Таким образом, мы получили два алгебраических уравнения 2-го порядка 3.3.7, 3.3.8 относительно двух неизвестных x, y, которые должны удовлетворять естественным требованиям

$$0 \le x < 1, \quad y > 0. \tag{3.3.9}$$

Докажем существование единственного решения $(x(\varphi,\psi,k),\ y(\varphi,\psi,k))$ уравнений 3.3.7, 3.3.8, удовлетворяющего условию (3.3.9) и гладко зависящего от φ, ψ, k. Тогда $u = \sqrt{1-x}$ и $v = \sqrt{y}$ также будут однозначными и гладкими функциями от φ, ψ, k. Таковыми будут и функции $s_3 = \pm\sqrt{((2h-\cos 2\varphi)+x\cos 2\varphi - y)/2}$ и $r_3 = -uv\cos(\varphi-\psi)/s_3$.

Шаг 2. *Существование.*

При фиксированных φ, ψ, k рассмотрим 2 случая.

1) $\underline{\cos(\varphi-\psi)=0.}$ Так как $s_3 \neq 0$ на I-торах, то из 3.3.3 следует $r_3 = x = 0$, а тогда из 3.3.8 $y = \sqrt{k}$.

2) $\underline{\cos(\varphi-\psi)\neq 0.}$ Выразим из 3.3.7 y как однозначную функцию x:

$$y = \widetilde{\Gamma}_1(x) := \frac{(2h-\cos 2\varphi(1-x))x}{2(1-x)\cos^2(\varphi-\psi)+x}. \tag{3.3.10}$$

Знаменатель положителен на отрезке $[0,1]$ (он линеен по x и положителен в точках 0 и 1), поэтому функция $\widetilde{\Gamma}_1(x)$ корректно определена на $[0,1]$. Более того, она неотрицательна на $[0,1]$ и обращается в нуль только при $x=0$. Действительно, если $\cos 2\varphi \le 0$, то $2h-\cos 2\varphi(1-x) > 0$ при $x \in [0,1]$. Если $\cos 2\varphi > 0$, то $2h-\cos 2\varphi(1-x) > (1-\cos 2\varphi)+x\cos 2\varphi \ge 0$ (воспользовались тем, что $h > 1/2$).

Рассмотрим дугу кривой γ_1 между точками $(0,0)$ и $(1,2h)$. Имеем:

$$\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))|_{x=0} = \Gamma_2(0,0) = -k < 0,$$
$$\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))|_{x=1} = \Gamma_2(1,2h) = 1+4h^2+2h\cos 2\psi - k \ge (2h-1)^2 - k > 0.$$

Следовательно, найдётся такая точка $x_0 \in (0,1)$, что $\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))|_{x=x_0} = 0$. Таким образом, $(x_0, \widetilde{\Gamma}_1(x_0))$ является точкой пересечения квадрик γ_1, γ_2 и удовлетворяет (3.3.9).

Шаг 3. *Единственность.*

Достаточно рассмотреть случай $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$.

Через $\gamma_i'(P)$ ($\gamma_i'(x,y)$) будем обозначать угловой коэффициент касательной к кривой γ_i в точке P (в точке (x,y)). Воспользуемся простым соображением: если кривые γ_1, γ_2 (точнее, их связные части) пересекаются в точках P_1 и P_2, то на дугах P_1P_2 кривых γ_1, γ_2 найдутся точки P', P'', такие, что $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$. Назовём это соображение *принципом параллельности.*

Положим $D = [0,1) \times (0, +\infty)$. Из доказательства существования точки пересечения кривых γ_1, γ_2 в D явствует, что таких точек – нечётное количество (с учётом кратности). Предположим, что их больше одной. Тогда их в точности три (в D). Обозначим их P_1, P_2, P_3. Рассмотрим два случая.

1) *Две из этих трёх точек (пусть P_1, P_2) лежат не ниже прямой $y = x$.* Тогда в соответствии с принципом параллельности должны найтись точки $P' \in \gamma_1 \cap D \cap \{y \geq x\}$, $P'' \in \gamma_2 \cap D \cap \{y \geq x\}$, такие, что $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$. Покажем, что это не так. Действительно, $\gamma_2' \in [-1, 1]$ в $D \cap \{y \geq x\}$ (так как γ_2 является либо эллипсом с центром в начале координат и главными направлениями $(1:1)$, $(1:-1)$, либо парой параллельных прямых, имеющих одно из этих направлений). Поскольку кривая γ_2 лежит в D не выше прямой $y = x + \sqrt{k}$, то точки P_1, P_2, а следовательно, и P', P'' содержатся в полосе $D \cap \{x \leq y \leq x + \sqrt{k}\}$. Учитывая, что кривые 2-го порядка имеют однозначный характер выпуклости, рассмотрим две возможности.

1.1) γ_1 *выпукла вверх в D* (рис. 3.6). Тогда $\gamma_1'(x, \widetilde{\Gamma}_1(x)) = \widetilde{\Gamma}_1'(x)$ не возрастает на $[0,1]$. Кроме того, точки $(0,0)$ и $(1, 2h)$, соединяемые графиком функции $\widetilde{\Gamma}_1(x)$ на $[0,1]$, лежат по разные стороны прямой $y = x + \sqrt{k}$ (т.к. $2h - 1 > \sqrt{k}$). Поэтому график $\widetilde{\Gamma}_1$ на $(0,1)$ пересекает прямую $y = x + \sqrt{k}$ в некоторой точке $\widetilde{P} = (\tilde{x}, \widetilde{\Gamma}_1(\tilde{x}))$, в которой $\gamma_1'(\widetilde{P}) > 1$, причём $\widetilde{\Gamma}_1(x) < x + \sqrt{k}$ при $x < \tilde{x}$ и $\widetilde{\Gamma}_1(x) > x + \sqrt{k}$ при $x > \tilde{x}$. Отсюда вследствие невозрастания $\widetilde{\Gamma}_1'(x)$ имели бы $\gamma_1'(P') \geq \gamma_1'(\widetilde{P}) > 1 \geq \gamma_2'(P'')$.

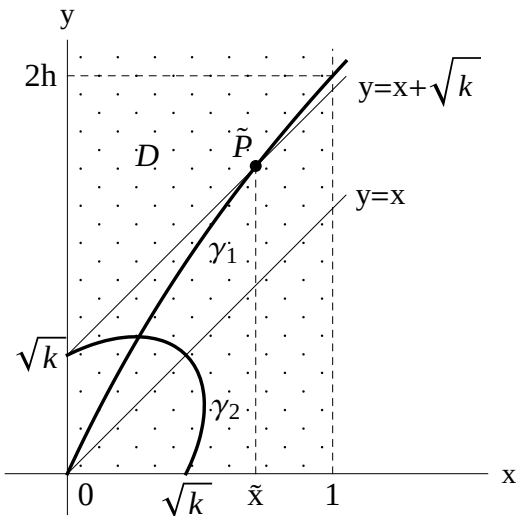


Рис. 3.6: Кривые γ_1 и γ_2: случай 1.1

1.2) γ_1 *выпукла вниз в* D (рис. 3.7). Тогда $\gamma_1'(x, \widetilde{\Gamma}_1(x)) = \widetilde{\Gamma}_1'(x)$ не убывает на $[0,1]$. Пусть $\hat{x} = \max\{x : (x, \widetilde{\Gamma}_1(x)) \in \gamma_1 \cap \{y = x\}\}$ (если $\gamma_1'(0,0) \geq 1$, то $\hat{x} = 0$, иначе $0 < \hat{x} < 1$). Ясно, что $\widetilde{\Gamma}_1(x) > x$ при $x > \hat{x}$, $\widetilde{\Gamma}_1(x) < x$ при $0 < x < \hat{x}$ (если $\hat{x} > 0$), и $\gamma_1'(\hat{x}, \widetilde{\Gamma}_1(\hat{x})) \geq 1$. В силу неубывания $\widetilde{\Gamma}_1'(x)$ имеем $\gamma_1'(P') \geq \gamma_1'(\hat{x}, \widetilde{\Gamma}_1(\hat{x})) \geq 1 \geq \gamma_2'(P'')$, причём равенство возможно лишь при $P' = (\hat{x}, \widetilde{\Gamma}_1(\hat{x})) = (0,0)$. Но $(0,0)$ не содержится в D.

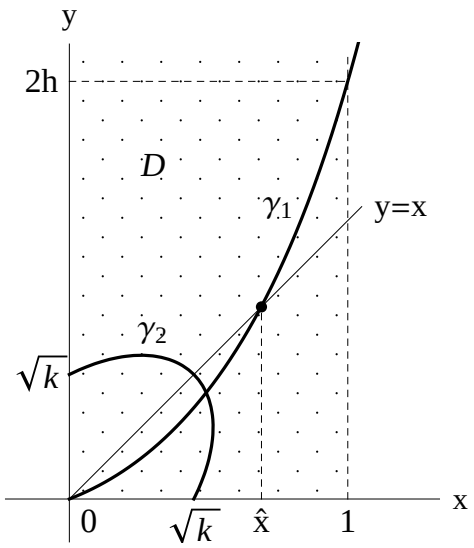


Рис. 3.7: Кривые γ_1 и γ_2: случай 1.2

2) *Две из трёх точек пересечения* γ_1 *с* γ_2 *в* D *(пусть* P_1, P_2*) лежат ниже прямой* $y = x$ (рис. 3.8). Пусть точка P_1 лежит на прямой $y = t_1 x$, а точка P_2 – на прямой $y = t_2 x$. Поскольку точки P_1, P_2 и $(0,0)$ не лежат на одной прямой (все они принадлежат квадрике γ_1), то можно считать, что $t_1 < t_2$. Воспользуемся принципом параллельности в усиленном виде, утверждающим, что в таком случае найдётся такое $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, что $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$, где P', P'' – точки пересечения прямой $y = \tilde{t}x$ с γ_1 и γ_2 в D. Покажем, однако, что $\gamma_1'(P) \neq \gamma_2'(Q)$ для любых точек $P \in \gamma_1 \cap D \cap \{y < x\}$, $Q \in \gamma_2 \cap D \cap \{y < x\}$.

Ясно, что в этом случае γ_1 должна быть выпукла вниз, и

$$\gamma_1'(0,0) = \frac{h + 1/2 - \cos^2\varphi}{\cos^2(\varphi - \psi)} < 1. \tag{3.3.11}$$

Следовательно, $\gamma_1'(x, \widetilde{\Gamma}_1(x)) \geq \gamma_1'(0,0) > 0$ при $x \in [0,1)$, то есть $\gamma_1' \in (0, +\infty)$ в $D \cap \{y < x\}$. Для эллипса (пары прямых) γ_2, в зависимости от вытянутости вдоль прямой $y = x$ либо $y = -x$, будем иметь:

а) $\gamma_2' \in [-\infty, -1]$ в $D \cap \{y < x\}$, если $\cos 2\psi \geq 0$ (в этом случае всё доказано);

б) $\gamma_2' \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$ в $D \cap \{y < x\}$, если $\cos 2\psi < 0$.

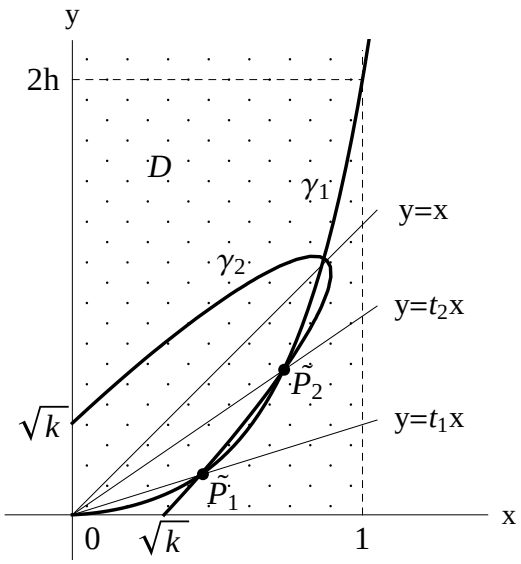


Рис. 3.8: Кривые γ_1 и γ_2: случай 2

Рассмотрим случай б). Через P_{1t}, P_{2t} будем обозначать точки пересечения прямой $y = tx$ с γ_1 и γ_2 в D. Имеем:

$$\gamma_2'(P_{2t}) = -\frac{\partial\Gamma_2/\partial x}{\partial\Gamma_2/\partial y}\Big|_{(x,y)=P_{2t}} = -\frac{x + y\cos 2\psi}{x\cos 2\psi + y}\Big|_{(x,y)=P_{2t}} = \frac{1 + t\cos 2\psi}{|\cos 2\psi| - t}.$$

При $t = |\cos 2\psi|$ касательная к γ_2 в точке P_{2t} вертикальна. При $t > |\cos 2\psi|$ $\gamma_2'(P_{2t}) \in (-\infty, -1)$, поэтому $\gamma_2'(P_{2t}) < \gamma_1'(P_{1t})$. Остаётся рассмотреть случай $t \in [\,\gamma_1'(0,0),\, |\cos 2\psi|\,)$, предполагая, что этот промежуток непуст.

Лемма 3.9. *$\gamma_1'(P_{1t}) < \gamma_2'(P_{2t})$ для любого $t \in [\,\gamma_1'(0,0),\, |\cos 2\psi|\,)$.*

Доказательство. Пусть $P_{1t} = (x_t, y_t)$. Используя (3.3.10), находим

$$x_t = \frac{2t\cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h}{t\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi}.$$

Далее, имеем

$$\gamma_1'(P_{1t}) = \widetilde{\Gamma}_1'(x_t) = t + \frac{(2t\cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h)(t\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi)}{2h\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi} <$$
$$< t + t\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi = 2t\cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi$$

(воспользовались неравенством $\dfrac{2t\cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h}{2h\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi} < 1$, следующим из того факта, что $t \le 1 < 2h$). Заметим, что $2h\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi > 0$, а также $t\cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi > 0$, что легко выводится из (3.3.11).

Теперь достаточно показать, что $2t\cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi \le \dfrac{1 + t\cos 2\psi}{|\cos 2\psi| - t}$, или

$$2\cos^2(\varphi - \psi)t^2 + (\cos 2\psi(2\cos^2(\varphi - \psi) + 1) + \cos 2\varphi)t + (1 + \cos 2\varphi\cos 2\psi) \ge 0.$$

Это следует из неположительности дискриминанта квадратного трёхчлена, стоящего в левой части, в чём можно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 3.9 доказана. □

Таким образом, однозначная разрешимость уравнений 3.3.7, 3.3.8 относительно x, y доказана.

Шаг 4. *Гладкость.*

Покажем гладкость функций x, y в произвольной точке (φ_0, ψ_0, k_0). Локально эти функции задаются неявно следующей системой уравнений (рассмотренной при фиксированном h):

$$\begin{cases} \Gamma_{1,h}(\varphi, \psi, x, y) = 0, \\ \Gamma_2(\varphi, \psi, k, x, y) = 0. \end{cases}$$

Поэтому гладкость x, y следует из теоремы о неявном отображении, применимость которой гарантируется условием

$$\Delta = \det \left(\begin{matrix} \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \end{matrix} \right) \Bigg|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} \neq 0.$$

Действительно, при $\cos(\varphi_0 - \psi_0) \neq 0$ это равносильно трансверсальности пересечения кривых γ_1, γ_2 в точке $(x(\varphi_0, \psi_0, k_0), y(\varphi_0, \psi_0, k_0))$, которая фактически была показана на шаге 3. При $\cos(\varphi_0 - \psi_0) = 0$ имеем $x = 0$, $y = \sqrt{k}$, $\dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial y} = 0$. Поэтому

$$\Delta = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}\Big|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} \cdot \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y}\Big|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} = \sqrt{k}\left((2h - 1 - \sqrt{k}) + 2\sin^2 \varphi_0\right) > 0.$$

Теорема 3.8 полностью доказана. □

Замечание 3.3.1. Легко видеть, что при $k \to 0$ цикл $\psi = \{\varphi = const\}$ на I-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = const\}$ накладывается на критическую окружность атома A.

3.3.2 Параметризация II-торов

Общая схема рассуждений аналогична случаю I-торов. Перейдём к полярным координатам в плоскостях $\mathbb{R}^2(r_2, r_3)$, $\mathbb{R}^2(s_2, s_3)$:

$$\begin{cases} r_2 = u\cos\varphi, \\ r_3 = u\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} s_2 = v\cos\psi, \\ s_3 = v\sin\psi. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Регулярность этой замены на II-торах гарантируется леммой 3.4. Переменные $u, \varphi, v, \psi, s_1, r_1$ на II-торах являются гладкими функциями, две из которых всегда можно выбрать в качестве локальных координат. Определим при фиксированном $h > 0$ отображения $\alpha_2^{\pm} = \alpha_{2,h,k}^{\pm} : T_{h,k}^{\pm} \to T_{can}^2(\varphi, \psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней координат φ, ψ.

Теорема 3.10 (С. С. Николаенко [75]).

1. *Отображения* $\alpha^{\pm}_{2,h,k}$ *– диффеоморфизмы.*
2. *Отображения* $\nu^{\pm}_{2,h} : T^2_{can} \times ((2h-1)^2, (2h+1)^2) \to Q^3$, *определённые формулой* $\nu^{\pm}_{2,h}(\cdot\,, k) = (\alpha^{\pm}_{2,h,k})^{-1}(\cdot)$, *являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в* Q^3*).*

Доказательство.

Шаг 1. С учётом замены (3.3.12) уравнения 3.2.1-3.2.4 переписываются в виде:

$$r_1^2 + u^2 = 1, \tag{3.3.13}$$

$$s_1 r_1 + uv\cos(\varphi - \psi) = 0, \tag{3.3.14}$$

$$s_1^2 + v^2(1 + \sin^2\psi) - u^2(1 + \cos^2\varphi) = 2h - 1, \tag{3.3.15}$$

$$(s_1^2 + v^2\cos^2\psi)^2 + 2(s_1^2 - v^2\cos^2\psi)u^2\sin^2\varphi + u^4\sin^4\varphi = k. \tag{3.3.16}$$

Обозначим $u^2 = x$, $v^2 = y$ и выразим r_1^2 из 3.3.13, а s_1^2 – из 3.3.15. Тогда уравнения 3.3.14, 3.3.16 дадут:

$$((2h-1) + x(1 + \cos^2\varphi) - y(1 + \sin^2\psi))(1 - x) = xy\cos^2(\varphi - \psi); \tag{3.3.17}$$

$$\begin{aligned}(2h - 1 + x(1 + \cos^2\varphi) - 2y\sin^2\psi)^2 + \\ + 2(2h - 1 + x(1 + \cos^2\varphi) - 2y)x\sin^2\varphi + x^2\sin^4\varphi = k.\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Уравнения 3.3.17, 3.3.18 задают на плоскости (x, y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x, y) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x, y) = 0\}$, где

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x, y) &= ((2h-1) + x(1 + \cos^2\varphi) - y(1 + \sin^2\psi))(1 - x) - xy\cos^2(\varphi - \psi), \\ \Gamma_2(x, y) &= (2h - 1 + x(1 + \cos^2\varphi) - 2y\sin^2\psi)^2 + \\ &\quad + 2(2h - 1 + x(1 + \cos^2\varphi) - 2y)x\sin^2\varphi + x^2\sin^4\varphi - k.\end{aligned}$$

Докажем существование и единственность решения $x(\varphi, \psi, k)$, $y(\varphi, \psi, k)$ уравнений 3.3.17, 3.3.18, удовлетворяющего естественному требованию

$$0 < x \le 1, \quad y > 0 \tag{3.3.19}$$

и гладко зависящего от φ, ψ, k. Тогда $u = \sqrt{x}$ и $v = \sqrt{y}$ также будут однозначными и гладкими функциями φ, ψ, k. Таковыми будут и функции $s_1 = \pm\sqrt{2h - 1 + u^2(1 + \cos^2\varphi) - v^2(1 + \sin^2\psi)}$ и $r_1 = -uv\cos(\varphi - \psi)/s_1$.

Шаг 2. *Существование.*

Рассмотрим при фиксированных φ, ψ, k два случая.

1) $\underline{\cos(\varphi-\psi)=0.}$ Так как $s_1\neq 0$ на II-торах, то из 3.3.14 следует $r_1=0$. Тогда из 3.3.13 $x=1$. Теперь нужно показать разрешимость уравнения 3.3.18 относительно y при $x=1$. Положим $y_0=\dfrac{2h+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi}$. Имеем:

$$\Gamma_2(1,y)\big|_{y=0}=(2h-1+2x)^2|_{x=1}-k=(2h+1)^2-k>0,$$
$$\Gamma_2(1,y)\big|_{y=y_0}=\left(\frac{2h+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi}\cos^2\psi\right)^2-2\frac{2h+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi}\cos^2\psi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi-k=$$
$$=(2h-1)^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\right)^2-k\leq(2h-1)^2-k<0$$

(воспользовались тем, что $\varphi-\psi=\pm\pi/2$).

Следовательно, найдётся такое $\hat{y}\in(0,y_0)$, что $\Gamma_2(1,\hat{y})=0$. Тогда $y(\varphi,\psi,k)=\hat{y}$.

2) $\underline{\cos(\varphi-\psi)\neq 0.}$ Из 3.3.17 можно выразить y как однозначную функцию x:

$$y=\widetilde{\Gamma}_1(x):=\frac{(2h-1+x(1+\cos^2\varphi))(1-x)}{x\cos^2(\varphi-\psi)+(1+\sin^2\psi)(1-x)}.$$

Знаменатель положителен на отрезке $[0,1]$ (он линеен по x и положителен в точках 0, 1). Поэтому функция $\widetilde{\Gamma}_1(x)$ корректно определена на $[0,1]$ и неотрицательна на $[\tau,1]$, где $\tau=\max\{0,\tau_0\}$, $\tau_0=\dfrac{1-2h}{1+\cos^2\varphi}$.

Рассмотрим дугу кривой γ_1 между точками $(\tau,\widetilde{\Gamma}_1(\tau))$ и $(1,\widetilde{\Gamma}_1(1))$. Имеем:

$$\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))\big|_{x=0}=(2h-1)^2\left(\frac{\cos^2\psi}{1+\sin^2\psi}\right)^2-k\leq(2h-1)^2-k<0;$$
$$\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))\big|_{x=\tau_0}=(2h-1)^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\right)^2-k\leq(2h-1)^2-k<0$$

(таким образом, $\Gamma_2(\tau,\widetilde{\Gamma}_1(\tau))<0$);

$$\Gamma_2(x,\widetilde{\Gamma}_1(x))\big|_{x=1}=(2h+1)^2-k>0.$$

Следовательно, найдётся такое $\hat{x}\in(\tau,1)$, что $\Gamma_2(\hat{x},\widetilde{\Gamma}_1(\hat{x}))=0$. В таком случае $(\hat{x},\widetilde{\Gamma}_1(\hat{x}))$ является искомой точкой пересечения кривых γ_1 и γ_2.

Шаг 3. *Единственность.*

В случае $\cos(\varphi-\psi)=0$ имеем $x=1$, а из 3.3.15 получаем $y\leq y_0$. Так как $\Gamma_2(1,0)\,\Gamma_2(1,y_0)<0$, то число точек пересечения кривой γ_2 с прямой $x=1$ при $0<y\leq y_0$ нечётно. С другой стороны, будучи кривой 2-го порядка, γ_2 не может пересекаться с прямой $x=1$ более, чем в двух точках. Тем самым $y(\varphi,\psi,k)$ определяется однозначно.

Рассмотрим случай $\cos(\varphi-\psi)\neq 0$. Исследуем более подробно кривые γ_1 и γ_2. Начнём с γ_1.

Кривая γ_1 пересекает ось абсцисс в точках $(\tau_0,0)$, $(1,0)$, а ось ординат – в точке $P_{1y}=$

$\left(0, \dfrac{2h-1}{1+\sin^2\psi}\right)$. Матрица квадратичной части многочлена Γ_1 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -(1+\cos^2\varphi) & \dfrac{1}{2}(\sin^2(\varphi-\psi)+\sin^2\psi) \\ \dfrac{1}{2}(\sin^2(\varphi-\psi)+\sin^2\psi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\sin(\varphi-\psi)=\sin\psi=0$, то γ_1 – парабола, задаваемая уравнением

$$y=\widetilde{\Gamma}_1(x)=(2h-1+x(1+\cos^2\varphi))(1-x).$$

Концы этой параболы направлены вниз, следовательно, она выпукла вверх.

Если $\sin(\varphi-\psi)\neq 0$ или $\sin\psi\neq 0$, то γ_1 – гипербола, имеющая одной из асимптот прямую

$$x=x_0:=\frac{1+\sin^2\psi}{\sin^2(\varphi-\psi)+\sin^2\psi}.$$

Так как $\cos(\varphi-\psi)\neq 0$, то $x_0>1$, и в дальнейшем имеет смысл интересоваться только левой ветвью гиперболы γ_1. Несложно видеть, что концы этой ветви направлены вниз, поэтому она имеет выпуклость вверх.

Кривая γ_2 пересекает ось абсцисс в точках $P_{2x}^{\pm}=((\pm\sqrt{k}-(2h-1))/2,0)$, а ось ординат – либо в точках $P_{2y}^{\pm}=\left(0,\dfrac{2h-1\pm\sqrt{k}}{2\sin^2\psi}\right)$ (если $\sin\psi\neq 0$), либо не пересекает вообще, если $\sin\psi=0$. Матрицу квадратичной части многочлена Γ_2 можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 4 & -2(\sin^2\varphi\cos^2\psi+2\sin^2\psi) \\ -2(\sin^2\varphi\cos^2\psi+2\sin^2\psi) & 4\sin^4\psi \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $-4\sin^2\varphi\cos^2\psi(\sin^2\varphi\cos^2\psi+4\sin^2\psi)\leq 0$. Поэтому γ_2 имеет либо параболический, либо гиперболический тип. Рассмотрим 3 случая.

2.1) $\underline{\sin\varphi=0.}$ Тогда γ_2 – это пара параллельных прямых $l^{\pm}=\{2h-1+2x-2y\sin^2\psi=\pm\sqrt{k}\}$ (рис. 3.9).

Лемма 3.11. *$l^-\cap\gamma_1\cap D=\varnothing$, где $D=(0,1]\times(0,+\infty)$.*

Доказательство. Если $\sin\psi=0$, то прямая l^- вертикальна, лежит левее оси y и потому не пересекает D. Поэтому рассмотрим случай, когда $\sin\psi\neq 0$. В этом случае l^- пересекает ось y в точке P_{2y}^+. Так как функция $\widetilde{\Gamma}_1(x)$ выпукла вверх (на $[0,1]$), то её график (т.е. кривая γ_1) лежит не выше касательной к нему в точке P_{1y}. Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить, что, во-первых, точка P_{2y}^+ лежит выше точки P_{1y} на оси y, а во-вторых – что $\gamma_2'(P_{2y}^+)\geq\gamma_1'(P_{1y})$. Первое из этих условий выполняется, ибо

$$\frac{2h-1+\sqrt{k}}{2\sin^2\psi}>\frac{2h-1}{1+\sin^2\psi}.$$

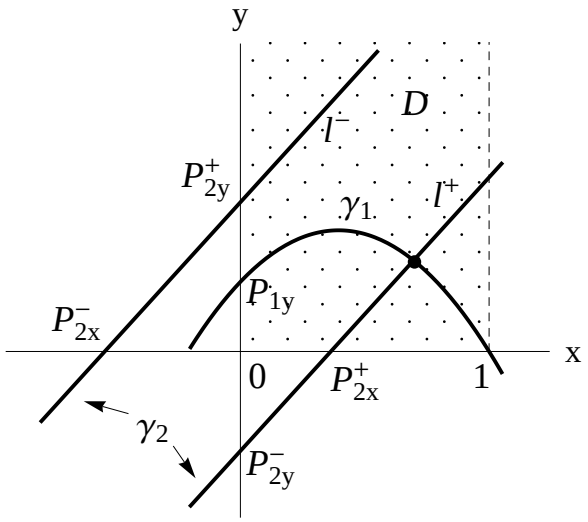


Рис. 3.9: Кривые γ_1 и γ_2: $\sin\varphi = 0$

Проверим второе условие. Учитывая, что $\sin\varphi = 0$ и $h > 0$, имеем:

$$\gamma_1'(P_{1y}) = \widetilde{\Gamma}_1'(0) = \frac{2(1+\sin^2\psi) - (2h-1)\cos^2\psi}{(1+\sin^2\psi)^2} \le \frac{1}{\sin^2\psi} = \gamma_2'(P^+_{2y}).$$

Лемма 3.11 доказана. □

Из леммы 3.11 следует, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D = \gamma_1 \cap l^+ \cap D$. Но точек пересечения прямой l^+ с γ_1 в D может быть не больше двух. С другой стороны, их должно быть нечётное количество (см. шаг 2). Следовательно, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = 1$.

2.2) $\underline{\cos\psi = 0.}$ γ_2 – пара параллельных прямых $l^\pm = \{2h - 1 + 2x - 2y = \pm\sqrt{k}\}$. Этот случай рассматривается по аналогии с предыдущим.

2.3) $\underline{\sin\varphi \ne 0,\ \cos\psi \ne 0.}$ В этом случае γ_2 имеет гиперболический тип.

Лемма 3.12. *Если* $\sin\psi \ne 0$, *то* $\gamma_2'(P^-_{2y}) > \dfrac{1}{\sin^2\psi} > \gamma_2'(P^+_{2x})$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем:

$$\gamma_2'(P^-_{2y}) = \frac{((1+\cos^2\varphi)\sin^2\psi + \sin^2\varphi)\sqrt{k} - \sin^2\varphi\cos^2\psi(2h-1)}{2\sin^4\psi\sqrt{k}};$$

$$\gamma_2'(P^+_{2x}) = \frac{2\sqrt{k}}{((1+\cos^2\varphi)\sin^2\psi + \sin^2\varphi)\sqrt{k} - \sin^2\varphi\cos^2\psi(2h-1)}.$$

Оба неравенства из условия сводятся к неравенству

$$((1+\cos^2\varphi)\sin^2\psi + \sin^2\varphi)\sqrt{k} - \sin^2\varphi\cos^2\psi(2h-1) > 2\sin^2\psi\sqrt{k} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\psi\cos^2\varphi(\sqrt{k} - (2h-1)) > 0,$$

что выполнено в силу (3.1.2). Лемма 3.12 доказана. □

При $\sin\psi \neq 0$ кривая γ_2 пересекает координатные оси лишь в точках $P_{2x}^{\pm}, P_{2y}^{\pm}$, а $\dfrac{1}{\sin^2\psi}$ – угловой коэффициент прямой $P_{2y}^{-}P_{2x}^{+}$. Поэтому из леммы 3.12 следует, что γ_2 – гипербола, одна из ветвей которой (обозначим её γ_2^{+}) проходит через точки P_{2y}^{-}, P_{2x}^{+} и имеет выпуклость вверх. Соответственно, другая ветвь (обозначим её γ_2^{-}) проходит через точки P_{2y}^{+}, P_{2x}^{-} и имеет выпуклость вниз (рис. 3.10). Поскольку асимптоты γ_2 проходят между парами точек P_{2y}^{-}, P_{2x}^{+} и P_{2y}^{+}, P_{2x}^{-}, то угловой коэффициент каждой из них принадлежит интервалу $(0, +\infty)$.

В случае $\sin\psi = 0$ кривая γ_2 не пересекает ось y и поэтому является гиперболой, имеющей ось y своей асимптотой. Одна из ветвей (γ_2^{+}) проходит через точку P_{2x}^{+} и имеет выпуклость вверх, другая (γ_2^{-}) проходит через точку P_{2x}^{-} и имеет выпуклость вниз. Угловой коэффициент второй асимптоты, естественно, принадлежит интервалу $(0, +\infty)$.

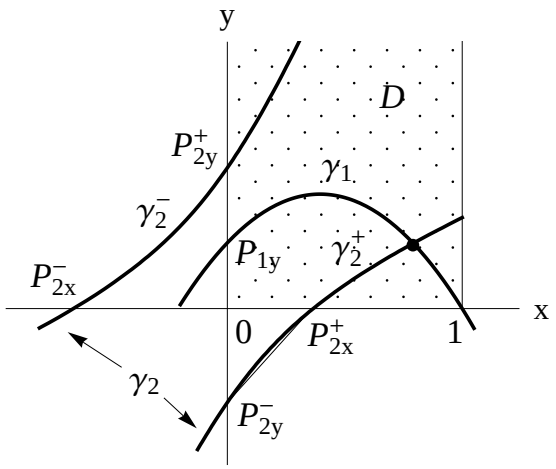


Рис. 3.10: Кривые γ_1 и γ_2: $\sin\varphi \neq 0$, $\cos\psi \neq 0$, $\sin\psi \neq 0$

Лемма 3.13. *Пусть κ – меньший из угловых коэффициентов асимптот гиперболы γ_2. Тогда $\kappa \geq \widetilde{\Gamma}'(\tau)$. (Напомним, что $\tau = \max\{0, \tau_0\}$, где $\tau_0 = \dfrac{1-2h}{1+\cos^2\varphi}$.)*

Доказательство. Выделим 2 случая.

1) $\underline{h \geq 1/2.}$ Тогда $\tau = 0$, и

$$\widetilde{\Gamma}_1'(\tau) = \widetilde{\Gamma}_1'(0) = \frac{(1+\cos^2\varphi)(1+\sin^2\psi) - (2h-1)\cos^2(\varphi-\psi)}{(1+\sin^2\psi)^2} \leq \frac{1+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi}.$$

Из матрицы квадратичной части многочлена Γ_2 находим

$$\kappa = (\sin^2\varphi\cos^2\psi + 2\sin^2\psi - |\sin\varphi\cos\psi|\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi}) \cdot (2\sin^4\psi)^{-1} =$$
$$= 2 \cdot (\sin^2\varphi\cos^2\psi + 2\sin^2\psi + |\sin\varphi\cos\psi|\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi})^{-1}.$$

Знаменатель последнего выражения преобразуем и оценим. Имеем:

$$\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi = \cos^2\psi(\sin^2\varphi - \cos^2\psi) + (1+\sin^2\psi)^2.$$

С использованием неравенства $\xi\eta \le (\xi^2+\eta^2)/2$ получим:

$$\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi}\,(1+\sin^2\psi) \le (\cos^2\psi(\sin^2\varphi - \cos^2\psi) + 2(1+\sin^2\psi)^2)/2,$$

$$\text{откуда}\quad \sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi} \le \frac{\cos^2\psi(\sin^2\varphi-\cos^2\psi)}{2(1+\sin^2\psi)} + 1 + \sin^2\psi.$$

Далее, можно показать, что

$$\sin^2\varphi\cos^2\psi + 2\sin^2\psi + |\sin\varphi\cos\psi|\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi} \le$$
$$\le \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}{2}\left(\frac{\cos^2\psi(\sin^2\varphi-\cos^2\psi)}{2(1+\sin^2\psi)} + \frac{4}{1+\sin^2\psi}\right) + 2.$$

Наконец,

$$(\sin^2\varphi\cos^2\psi + 2\sin^2\psi + |\sin\varphi\cos\psi|\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi})(1+\cos^2\varphi) -$$
$$- 2(1+\sin^2\psi) \le$$
$$\le \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}{2}\left(\frac{\cos^2\psi(\sin^2\varphi-\cos^2\psi)(1+\cos^2\varphi)}{2(1+\sin^2\psi)} + \frac{4(1+\cos^2\varphi)}{1+\sin^2\psi}\right) +$$
$$+ 2((1+\cos^2\varphi) - (1+\sin^2\psi)) =$$
$$= (\sin^2\varphi - \cos^2\psi)^2\frac{\cos^2\psi(1+\cos^2\varphi) - 8}{4(1+\sin^2\psi)} \le 0.$$

Таким образом,

$$\kappa = 2\cdot(\sin^2\varphi\cos^2\psi + 2\sin^2\psi + |\sin\varphi\cos\psi|\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\psi + 4\sin^2\psi})^{-1} \ge$$
$$\ge \frac{1+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi} = \widetilde{\Gamma}_1'(\tau),$$

что и требовалось.

2) $\underline{0 < h < 1/2.}$ В этом случае $\tau = \tau_0 = \dfrac{1-2h}{1+\cos^2\varphi}$, и

$$\widetilde{\Gamma}_1'(\tau) = \frac{(1+\cos^2\varphi)(2h+\cos^2\varphi)}{(1+\sin^2\psi)(2h+\cos^2\varphi) + (1-2h)\cos^2(\varphi-\psi)} \le \frac{1+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi} \le \kappa$$

(последнее неравенство доказано при рассмотрении первого случая).

Лемма 3.13 доказана. □

Лемма 3.14. $\gamma_2^- \cap \gamma_1 \cap D = \varnothing$.

Доказательство. Если $\sin\psi = 0$, то ветвь γ_2^- лежит левее оси y и, следовательно, не пересекает D. Поэтому рассмотрим случай, когда $\sin\psi \neq 0$.

Так как γ_1 выпукла вверх в D, то $\gamma_1 \cap D$ лежит не выше касательной к γ_1 в точке $(\tau, \widetilde{\Gamma}_1(\tau))$. Аналогично, поскольку γ_2^- выпукла вниз, то $\gamma_2^- \cap D$ лежит не ниже касательной к γ_2^- в точке P_{2y}^+. Таким образом, достаточно показать, что вторая из упомянутых касательных лежит выше первой в D.

Пусть касательная к γ_1 в $(\tau, \widetilde{\Gamma}_1(\tau))$ пересекает ось y в точке $(0, \tilde{y})$. Тогда, как и при доказательстве леммы 3.11, нужно проверить выполнение двух условий.

1. Точка P_{2y}^+ должна лежать выше точки $(0, \tilde{y})$ на оси y, т.е. $\dfrac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2\sin^2\psi} > \tilde{y}$. Действительно, если $\tau = \tau_0$, то $\tilde{y} < 0 < \dfrac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2\sin^2\psi}$. Если же $\tau = 0$, то $\tilde{y} = \widetilde{\Gamma}_1(0) = \dfrac{2h-1}{1+\sin^2\psi} < \dfrac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2\sin^2\psi}$.

2. Должно выполняться $\gamma_2'(P_{2y}^+) \geq \gamma_1'(\tau, \widetilde{\Gamma}_1(\tau)) = \widetilde{\Gamma}_1'(\tau)$. Это следует из леммы 3.13, так как $\gamma_2'(P_{2y}^+) > \kappa > \widetilde{\Gamma}_1'(\tau)$.

Лемма 3.14 доказана. □

Из леммы 3.14 следует, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D = \gamma_1 \cap \gamma_2^+ \cap D$. Остаётся проверить, что γ_1 и γ_2^+ не могут пересекаться в D более, чем в одной точке. Но это следует из принципа параллельности, уже использованного при доказательстве теоремы 3.8. А именно, если бы γ_1 и γ_2^+ пересекались в D в двух различных точках $(x_1, \widetilde{\Gamma}_1(x_1))$ и $(x_2, \widetilde{\Gamma}_1(x_2))$, то при некотором $\tilde{x} \in [x_1, x_2]$ касательные к γ_1 и γ_2^+ в точках P', P'' пересечения с прямой $x = \tilde{x}$ были бы параллельны (т.е. $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$). Заметим однако, что $(\tau, \widetilde{\Gamma}_1(\tau))$ — "самая левая" точка кривой γ_1 в $\overline{D}$. Поэтому в силу выпуклости вверх γ_1 и γ_2^+, а также в силу леммы 3.13 имеем $\gamma_2'(P'') > \kappa \geq \widetilde{\Gamma}_1'(\tau) \geq \gamma_1'(P')$. Таким образом, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = \#\{\gamma_1 \cap \gamma_2^+ \cap D\} = 1$.

Итак, существование обратного отображения $(\alpha_2^\pm)^{-1} : T^2_{can} \to T^\pm_{h,k}$ доказано.

Шаг 4. *Гладкость.*

Как и в теореме 3.8, гладкость x и y по φ, ψ, k следует из теоремы о неявном отображении, применимость которой обеспечивается условием

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0.$$

При $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$ это равносильно трансверсальности пересечения кривых γ_1, γ_2 в точке $(x(\varphi, \psi, k), y(\varphi, \psi, k))$, фактически показанной на шаге 3. При $\cos(\varphi - \psi) = 0$ имеем $x = 1$,

$\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial y} = 0$, поэтому

$$\Delta = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Gamma_2}{\partial y} = (2h + \cos^2\varphi - y(\varphi,\psi,k)(1+\sin^2\psi))\times$$
$$\times\, 4(\sin^2\psi(2h + \cos^2\varphi - 2y(\varphi,\psi,k)\sin^2\psi) + \sin^2\varphi) > 0,$$

т.к. $y(\varphi,\psi,k) < \dfrac{2h+\cos^2\varphi}{1+\sin^2\psi}$.

Теорема 3.10 теперь полностью доказана. □

Замечание 3.3.2. При $k \to (2h+1)^2$ цикл $\psi = \{\varphi = const\}$ на II-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = const\}$ накладывается на критическую окружность атома A.

3.3.3 Параметризация III-торов

Перейдём теперь к полярным координатам в плоскостях $\mathbb{R}^2(r_1, s_3)$, $\mathbb{R}^2(s_1, r_3)$:

$$\begin{cases} r_1 = u\cos\varphi, \\ s_3 = u\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 = v\cos\psi, \\ r_3 = v\sin\psi. \end{cases} \tag{3.3.20}$$

Лемма 3.5 обеспечивает регулярность этой замены на III-торах. Тем самым переменные u, φ, v, ψ, s_2, r_2 на III-торах являются гладкими функциями. Как и выше, определим при фиксированном $h \in [-1/2, 1/2]$ отображения $\alpha_3^{\pm} = \alpha_{3,h,k}^{\pm} : T_{h,k}^{\pm} \to T_{can}^2(\varphi,\psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней координат φ, ψ.

Теорема 3.15 (С. С. Николаенко [75])**.**

1. *Отображения $\alpha_{3,h,k}^{\pm}$ – диффеоморфизмы.*
2. *Отображения $\nu_{3,h}^{\pm} : T_{can}^2 \times (0, \min\{(2h-1)^2, (2h+1)^2\}) \to Q^3$, определённые формулой $\nu_{3,h}^{\pm}(\cdot, k) = (\alpha_{3,h,k}^{\pm})^{-1}(\cdot)$, являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в Q^3).*

Доказательство.

Шаг 1. С учётом замены (3.3.20) уравнения 3.2.1-3.2.4 переписываются в виде:

$$u^2\cos^2\varphi + r_2^2 + v^2\sin^2\psi = 1, \tag{3.3.21}$$
$$uv\cos(\varphi-\psi) + r_2 s_2 = 0, \tag{3.3.22}$$
$$2u^2 + v^2 + s_2^2 = 2h + 1, \tag{3.3.23}$$
$$v^4 + s_2^4 + 2v^2 s_2^2\cos 2\psi = k. \tag{3.3.24}$$

Обозначим $s_2^2 = x$, $v^2 = y$ и выразим u^2 из 3.3.23. Подствляя в 3.3.21, найдём выражение для r_2^2 через x, y, φ, ψ:

$$r_2^2 = 1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - x - y)\cos^2\varphi - y\sin^2\psi. \tag{3.3.25}$$

Уравнения 3.3.22, 3.3.24 в итоге дадут

$$\frac{1}{2}(2h+1-x-y)y\cos^2(\varphi-\psi) = (1-\frac{1}{2}(2h+1-x-y)\cos^2\varphi - y\sin^2\psi)x; \tag{3.3.26}$$

$$x^2+y^2+2xy\cos 2\psi = k. \tag{3.3.27}$$

Уравнения 3.3.26, 3.3.27 задают на плоскости (x,y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x,y) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x,y) = 0\}$, где

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x,y) &= (1-\frac{1}{2}(2h+1-x-y)\cos^2\varphi - y\sin^2\psi)x- \\ &\quad -\frac{1}{2}(2h+1-x-y)y\cos^2(\varphi-\psi), \\ \Gamma_2(x,y) &= x^2+y^2+2xy\cos 2\psi - k.\end{aligned}$$

Получили два алгебраических уравнения 2-го порядка 3.3.26, 3.3.27 относительно неизвестных x, y, которые должны удовлетворять условиям

$$x \geq 0, \quad y > 0, \quad x+y < 2h+1. \tag{3.3.28}$$

Докажем существование единственного решения $(x(\varphi,\psi,k),\ y(\varphi,\psi,k))$ уравнений 3.3.26, 3.3.27, удовлетворяющего (3.3.28) и гладко зависящего от φ, ψ, k. Тогда $u = \sqrt{(2h+1-x-y)/2}$ и $v = \sqrt{y}$ будут однозначными и гладкими функциями от φ, ψ, k. Таковыми будут и функции r_2 (в силу (3.3.25)) и $s_2 = -uv\cos(\varphi-\psi)/r_2$.

Шаг 2. *Существование.*

Рассмотрим при фиксированных φ, ψ, k два случая.

1) $\underline{\cos(\varphi-\psi) = 0.}$ Поскольку $r_2 \neq 0$ на III-торах, то из 3.3.22 следует $s_2 = x = 0$. Тогда из 3.3.27 $y = \sqrt{k}$. Очевидно, условие (3.3.28) выполнено.

2) $\underline{\cos(\varphi-\psi) \neq 0.}$ Положим $D = \{x \geq 0, y > 0, x+y < 2h+1\}$. Выделим 3 подслучая.

2.1) $\underline{\cos 2\psi \in (-1,1).}$ Тогда γ_2 – эллипс с центром в начале координат и главными направлениями $(1:1)$, $(1:-1)$. Этот эллипс пересекает границу множества D в точках $(\sqrt{k},0)$, $(0,\sqrt{k})$ и, возможно, в точках прямой $x+y = 2h+1$. Рассмотрим отдельно эти две возможности.

а) γ_2 *не имеет общих точек с прямой* $x+y = 2h+1$ (рис. 3.11). Имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(0,\sqrt{k}) &= -\frac{1}{2}(2h+1-\sqrt{k})\sqrt{k}\cos^2(\varphi-\psi) < 0; \\ \Gamma_1(\sqrt{k},0) &= (1-\frac{1}{2}(2h+1-\sqrt{k})\cos^2\varphi)\sqrt{k} \geq \frac{1}{2}(1-2h)\sqrt{k} > 0.\end{aligned}$$

Значит, на дуге эллипса γ_2, заключённой в D (и имеющей точки $(0,\sqrt{k})$, $(\sqrt{k},0)$ своими концами) найдётся такая точка (x_0,y_0), что $\Gamma_1(x_0,y_0) = 0$. Очевидно, точка (x_0,y_0) искомая.

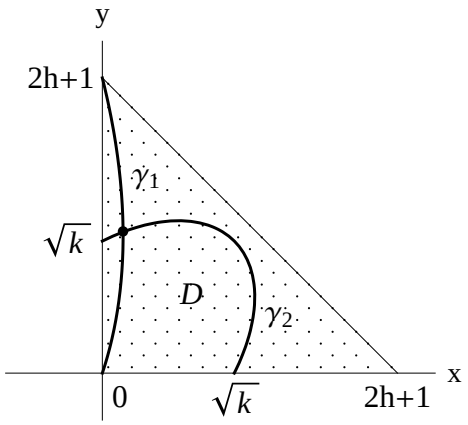


Рис. 3.11: Кривые γ_1 и γ_2: случай 2.1, а)

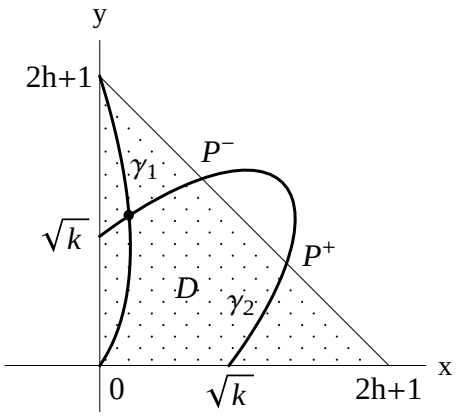


Рис. 3.12: Кривые γ_1 и γ_2: случай 2.1, б)

б) *γ_2 пересекает прямую $x + y = 2h + 1$ в двух (возможно совпадающих) точках $P^{\pm} = (x^{\pm}, y^{\pm})$, где*

$$x^+ = y^- = h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2\psi}},$$
$$x^- = y^+ = h + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2\psi}}.$$

Покажем, что $\Gamma_1(P^-) > 0$. Тогда из того факта, что $\Gamma_1(0, \sqrt{k}) < 0$, будет следовать, что на дуге эллипса γ_2, лежащей в D и имеющей точки P^-, $(0, \sqrt{k})$ своими концами, найдётся точка $(x_0, y_0) \in \gamma_1$, которая и будет искомой (рис. 3.12). Итак, имеем:

$$\Gamma_1(P^-) = (1 - y\sin^2\psi)x\big|_{(x,y)=P^-};$$
$$\Gamma_1(P^-) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \left(h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2\psi}}\right)\sin^2\psi > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{\sin^2\psi} - (2h+1)\right)^2 > (2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2\psi} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{\sin^2\psi} - 4(2h+1) + (2h+1)^2 - k > 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу (3.1.3).

2.2) $\underline{\cos 2\psi = 1}$, γ_2 – пара параллельных прямых $l^{\pm} = \{x + y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 3.13). Прямая l^+ проходит через точки $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$, и к её отрезку с концами в этих точках применимы рассуждения случая 2.1), а).

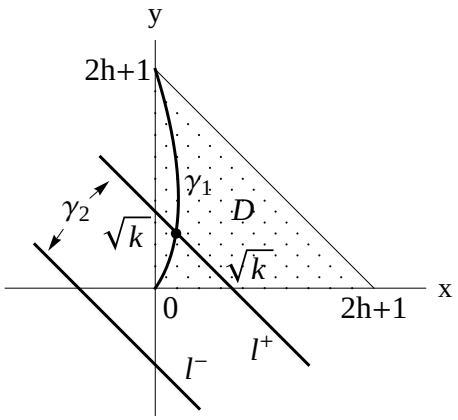


Рис. 3.13: Кривые γ_1 и γ_2: случай 2.2

2.3) $\underline{\cos 2\psi = -1}$, γ_2 – пара прямых $l^{\pm} = \{x - y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 3.14). В этом случае можно применить рассуждения случая 2.1), б) к отрезку прямой l^- с концами в точках $(0, \sqrt{k})$ и $((2h+1-\sqrt{k})/2, (2h+1+\sqrt{k})/2) = l^- \cap \{x + y = 2h+1\}$.

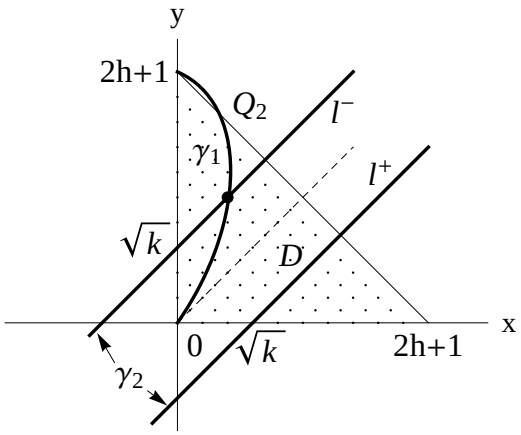


Рис. 3.14: Кривые γ_1 и γ_2: случай 2.3

Шаг 3. *Единственность.*

При $\cos(\varphi - \psi) = 0$ единственность искомого решения уравнений 3.3.27, 3.3.28 вытекает из доказательства существования. Поэтому рассмотрим случай $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$.

Кривая γ_1 пересекает ось x в точках $O=(0,0)$ и $\left(2h+1-\dfrac{2}{\cos^2\varphi},0\right)$ (если $\cos\varphi\neq 0$), ось y – в точках O, $Q_1=(0,2h+1)$, прямую $x+y=2h+1$ – в точках Q_1 и $Q_2=\left(2h+1-\dfrac{1}{\sin^2\psi},\dfrac{1}{\sin^2\psi}\right)$ (если $\sin\psi\neq 0$). Так как $2h+1-\dfrac{2}{\cos^2\varphi}<0$, то γ_1 пересекает границы D в точках O, Q_1 и, возможно, Q_2 (если $\dfrac{1}{\sin^2\psi}\leq 2h+1$).

$$\gamma_1'(O)=-\frac{\partial\Gamma_1/\partial x}{\partial\Gamma_1/\partial y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1-(h+\frac{1}{2})\cos^2\varphi}{(h+\frac{1}{2})\cos^2(\varphi-\psi)}>0, \tag{3.3.29}$$

поэтому γ_1 "входит" в треугольник D через точку O, а "выходить" может лишь через точки Q_1,Q_2.

Как и выше, рассмотрим 3 подслучая.

1) $\underline{\cos 2\psi=1}$, γ_2 – *пара параллельных прямых* $l^{\pm}=\{x+y=\pm\sqrt{k}\}$ (рис. 3.13). Тогда $l^-\cap D=\varnothing$. Прямая l^+ может пересекать γ_1 в D не более чем в двух точках. С другой стороны, так как $\Gamma_1(0,\sqrt{k})\cdot\Gamma_1(\sqrt{k},0)<0$, то число пересечения l^+ с γ_1 в D нечётно. Следовательно, $\#\{\gamma_1\cap\gamma_2\cap D\}=\#\{\gamma_1\cap l^+\cap D\}=1$.

2) $\underline{\cos 2\psi=-1}$, $\gamma_2=l^{\pm}=\{x-y=\pm\sqrt{k}\}$ (рис. 3.14). В таком случае (3.3.29) даёт

$$\gamma_1'(O)=\frac{1-(h+\frac{1}{2})\cos^2\varphi}{(h+\frac{1}{2})\sin^2\varphi}>1. \tag{3.3.30}$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sin^2\psi}\geq 1>h+\dfrac{1}{2}$, то точка Q_2 лежит выше прямой $y=x$. Поэтому из (3.3.30) следует, что $\gamma_1\cap D$ лежит не ниже прямой $y=x$. Отсюда $\gamma_1\cap l^+\cap D=\varnothing$. Таким образом, $\#\{\gamma_1\cap\gamma_2\cap D\}=\#\{\gamma_1\cap l^-\cap D\}=1$ (это число нечётно и не превосходит двух).

3) $\underline{\cos 2\psi\in(-1,1)}$, γ_2 – *эллипс с центром в начале координат и главными направлениями* $(1:1)$, $(1:-1)$. Пустим в ход использованный при доказательстве теорем 3.8, 3.10 принцип параллельности: если P_1 и P_2 – две различные точки пересечения γ_1 и γ_2 в D, то найдутся точки P',P'', лежащие на дугах кривых γ_1, γ_2 с концами P_1,P_2, такие, что $\gamma_1'(P')=\gamma_2'(P'')$. Рассмотрим две возможности.

3.1) γ_1 *выпукла вверх, "входит" в* D *через точку* O *и "выходит" через точку* Q_2 (рис. 3.15). Тогда $\gamma_1'(P)$ не возрастает при движении точки P от O к Q_2. Легко видеть, что в этом случае точка Q_2 лежит выше прямой $y=x+\sqrt{k}$. Поэтому γ_1 пересекает прямую $y=x+\sqrt{k}$ в некоторой точке $\widetilde{P}$, такой, что $\gamma_1'(\widetilde{P})>1$. Ясно, что $\gamma_1\cap\gamma_2\cap D\subset D\cap\{x\leq y\leq x+\sqrt{k}\}$, но в $D\cap\{x\leq y\leq x+\sqrt{k}\}$ имеем $\gamma_1'>1$, а $\gamma_2'\in[-1,1)$. В соответствии с принципом параллельности γ_1 и γ_2 не могут пересекаться в D более, чем в одной точке.

3.2) γ_1 *выпукла вправо, "входит" в* D *через точку* O *и "выходит" через* Q_1 *либо* Q_2 (рис. 3.11). Из доказательства существования точки пересечения γ_1 с γ_2 в D понятно, что таких точек нечётное число (с учётом кратности). Следовательно, если их больше одной, то их в точности три. Пусть это точки P_1,P_2,P_3 (возможно, какие-то из них совпадают). Рассмотрим 2 случая.

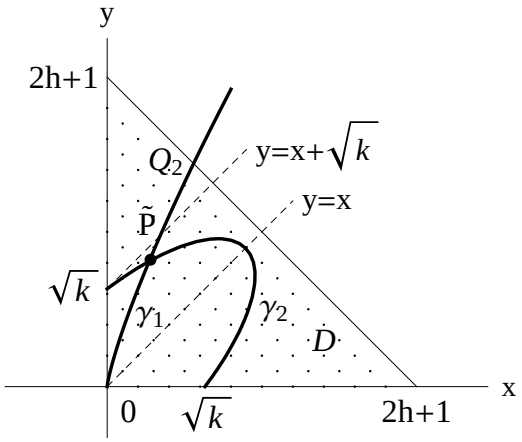


Рис. 3.15: Кривые γ_1 и γ_2: случай 3.1

а) Две из этих точек лежат в $D \cap \{y \geq x\}$. Но тогда получаем противоречие с принципом параллельности, ибо $\gamma_1' \in [-\infty, -1) \cup (1, +\infty]$, а $\gamma_2' \in [-1, 1)$ в $D \cap \{y \geq x\}$.

б) Две из точек P_1, P_2, P_3 (пусть P_1 и P_2) лежат в области $D \cap \{y < x\}$. Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u + v. \end{cases}$$

Тогда в новых координатах будем иметь $D = \{-u < v \leq u,\, u < h + 1/2\}$, $\gamma_1 = \{\widetilde{\Gamma}_1(u, v) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\widetilde{\Gamma}_2(u, v) = 0\}$, где

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_1(u, v) &= (1 - (h + \frac{1}{2} - u)\cos^2\varphi - (u + v)\sin^2\psi)(u - v) - \\ &\quad - (h + \frac{1}{2} - u)(u + v)\cos^2(\varphi - \psi), \\ \widetilde{\Gamma}_2(u, v) &= u^2\cos^2\psi + v^2\sin^2\psi - \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, новая система координат является канонической для эллипса γ_2 (рис. 3.16).

Имеем:

$$\gamma_1'(0,0) = -\frac{\partial\widetilde{\Gamma}_1/\partial u}{\partial\widetilde{\Gamma}_1/\partial v}\Big|_{(0,0)} = -\frac{X}{Y}, \quad \text{где}$$

$$X = \left(h + \frac{1}{2}\right)(\cos^2(\varphi - \psi) + \cos^2\varphi) - 1,\; Y = \left(h + \frac{1}{2}\right)(\cos^2(\varphi - \psi) - \cos^2\varphi) + 1.$$

(Здесь и ниже под $\gamma_i'(P)$ понимаем угловой коэффициент касательной к γ_i в точке P в новых координатах (u, v).)

Точки P_1, P_2 принадлежат области $D \cap \{v < 0\}$. Поскольку $\gamma_1 \cap D \cap \{v < 0\} \neq \varnothing$, то $\gamma_1'(O) = -X/Y < 0$. Кроме того, $Y > 1 - (h + 1/2)\cos^2\varphi > 0$, поэтому $X > 0$.

Ясно, что точки O, P_1, P_2 не лежат на одной прямой (т.к. все они принадлежат кривой 2-го порядка γ_1). Пусть P_1 лежит на прямой $v = -t_1 u$, P_2 – на прямой $v = -t_2 u$, $t_1, t_2 \in (0, X/Y)$, и

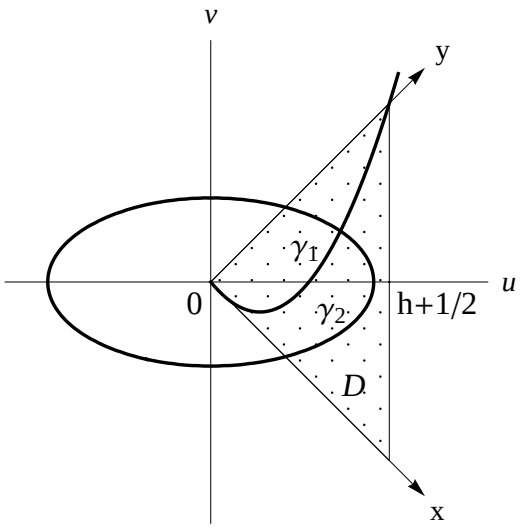


Рис. 3.16: Кривые γ_1 и γ_2: случай 3.2, б)

пусть $t_1 < t_2$. Воспользуемся усилением принципа параллельности, гласящим, что в этом случае найдётся такое $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, что касательные к γ_1 и γ_2 в точках P', P'' их пересечения с прямой $v = -\tilde{t}u$ параллельны (т.е. $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$). Противоречие с этим даст следующее утверждение.

Лемма 3.16. *Пусть P_{1t}, P_{2t} – точки пересечения прямой $v = -tu$ с кривыми γ_1 и γ_2 в области $\{-u < v < 0\}$. Тогда $\gamma_1'(P_{1t}) < \gamma_2'(P_{2t})$ для любого $t \in (0, X/Y)$.*

Доказательство. Пусть $P_{1t} = (u_t, -tu_t)$. Из равенства $\widetilde{\Gamma}_1(u_t, -tu_t) = 0$ находим $u_t = \dfrac{X - Yt}{Z}$, где

$$Z = (1+t)\cos^2\varphi + (1-t)\cos^2(\varphi - \psi) - (1-t^2)\sin^2\psi.$$

Из того, что $X - Yt > 0$ и $u_t > 0$, следует $Z > 0$. Далее находим $\widetilde{\Gamma}_1'(P_{1t}) = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$, $\widetilde{\Gamma}_2'(P_{2t}) = \dfrac{\gamma}{\delta}$, где

$$\begin{aligned}
\alpha &= -XZ + (X - Yt)[(2+t)\cos^2\varphi + (2-t)\cos^2(\varphi - \psi) - 2];\\
\beta &= YZ + (X - Yt)[\cos^2\varphi - \cos^2(\varphi - \psi)];\\
\gamma &= 2(X - Yt)\cos^2\psi;\\
\delta &= 2(X - Yt)t\sin^2\psi.
\end{aligned}$$

Воспользуемся тем фактом, что $\dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} < \dfrac{\gamma}{\delta} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\gamma}{\delta}$, если только $\beta(\beta + \delta) > 0$. Так как $\delta = 2(X - Yt)t\sin^2\psi \geq 0$, то достаточно проверить, что $\beta = Z(Y + u_t[\cos^2\varphi - \cos^2(\varphi - \psi)]) > 0$. Поскольку $0 < u_t < h + 1/2$ и β линейно по u_t, то положительность β следует из того, что $\beta|_{u_t=0} = ZY > 0$, $\beta|_{u_t=h+1/2} = Z > 0$. Таким образом, получаем $\widetilde{\Gamma}_1'(P_{1t}) < \widetilde{\Gamma}_2'(P_{2t}) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\cos^2\psi}{t\sin^2\psi}$.

Несложно проверить, что

$$\alpha = (X - Yt)(2\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi - t^2\sin^2\psi) - YZt;$$
$$\beta = 2\cos^2(\varphi - \psi) - Y(1 - t^2)\sin^2\psi.$$

Поэтому

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\cos^2\psi}{t\sin^2\psi} \;\Leftrightarrow\; (X - Yt)t(2\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi - t^2\sin^2\psi) - YZt^2 < \\ < 2\cos^2(\varphi - \psi)\operatorname{ctg}^2\psi - Y(1 - t^2)\cos^2\psi.$$

Имеем:

$$(X - Yt)t \le \frac{X^2}{4Y} \le \frac{X}{4}\cdot\frac{\cos^2(\varphi - \psi) - \sin^2\varphi}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2\varphi} = \frac{X}{4}\cdot\frac{\cos\psi\cos(2\varphi - \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2\varphi}.$$

Далее, несложно показать, что

$$\cos\psi\cos(2\varphi - \psi)\cdot\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi < 2\operatorname{ctg}^2\psi(\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2\varphi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&(X - Yt)t(2\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi - t^2\sin^2\psi) - YZt^2 \le \\
&\le (X - Yt)t\cdot 2\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi \le \\
&\le \frac{X}{4}\cdot\frac{\cos\psi\cos(2\varphi - \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2\varphi}\cdot 2\sin(\psi - \varphi)\cos\psi\sin\varphi < \\
&< X\operatorname{ctg}^2\psi \le X\operatorname{ctg}^2\psi + Y(\operatorname{ctg}^2\psi - \cos^2\psi) + Yt^2\cos^2\psi = \\
&= 2\Big(h + \frac{1}{2}\Big)\cos^2(\varphi - \psi)\operatorname{ctg}^2\psi - Y(1 - t^2)\cos^2\psi \le \\
&\le 2\cos^2(\varphi - \psi)\operatorname{ctg}^2\psi - Y(1 - t^2)\cos^2\psi,
\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 3.16 доказана. □

Итак, существование обратного отображения $(\alpha_3^{\pm})^{-1} : T^2_{can} \to T^{\pm}_{h,k}$ полностью доказано.

Шаг 4. *Гладкость.*

Гладкость функций x, y по φ, ψ, k проверяется точно так же, как и при доказательстве теорем 3.8, 3.10. В частности, при $\cos(\varphi - \psi) = 0$ имеем $x(\varphi, \psi) = 0$, $y(\varphi, \psi) = \sqrt{k}$, $\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial y} = 0$, поэтому

$$\Delta = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Gamma_2}{\partial y} = (1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - \sqrt{k})\cos^2\varphi - \sqrt{k}\sin^2\psi)\cdot 2\sqrt{k} = \\ = \sqrt{k}\,(2 - (2h + 1 + \sqrt{k})\cos^2\varphi) \ge \sqrt{k}\,(1 - 2h - \sqrt{k}) > 0.$$

Теорема 3.15 полностью доказана. □

Замечание 3.3.3. При $k \to 0$ цикл $\psi = \{\varphi = const\}$ на III-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = const\}$ накладывается на критическую окружность атома A. При $k \to (2h+1)^2$ $(h < 0)$, наоборот, цикл φ стягивается в точку, а цикл ψ накладывается на критическую окружность атома A.

3.3.4 Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга

Теоремы 3.8, 3.10, 3.15 позволяют предъявить базисные циклы на граничных торах атомов. Для этого нужно понять, как функции φ, ψ, определённые выше на всех торах Лиувилля, "сшиваются" на особых слоях.

Отныне циклы φ, ψ (а также функции φ, ψ), построенные выше на всех торах Лиувилля, будем снабжать соответствующими индексами: φ_1, ψ_1 – для I-торов, φ_2, ψ_2 – для II-торов и φ_3, ψ_3 – для III-торов.

Лемма 3.17. *Пусть точка $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ лежит на особом слое $\{H = h,\ K = (2h-1)^2\}$, $h \in (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ (т.е. в прообразе параболы π_- на бифуркационной диаграмме). Тогда*

а) *если $s_3 = 0$ и $h > 1/2$, то $s_1 = r_2 = 0$;*

б) *если $r_2 = 0$ и $0 < h < 1/2$, то $s_1 = s_3 = 0$;*

в) *если $s_1 = 0$, то $r_2 = s_3 = 0$.*

Доказательство.

Докажем пункт а). Пусть $s_3 = 0, h > 1/2$. Тогда из 3.2.2 следует $s_1 r_1 + s_2 r_2 = 0$. Предположим, что $r_2 \neq 0$. Тогда найдётся такое число j, что $s_1 = j r_2$, $s_2 = -j r_1$. Следуя доказательству пункта б) леммы 3.3, будем иметь $j^2 = r_2^2 + r_3^2$ и $2h = r_1^2(1 + r_3^2) \leq 1$. Получаем противоречие с условием $h > 1/2$. Таким образом, $r_2 = 0$. Из 3.2.2 теперь следует $s_1 r_1 = 0$, откуда легко находится, что $s_1 = 0$.

Утверждение пункта б) легко выводится из доказательства пункта а) леммы 3.5.

Докажем пункт в). Так как $s_1 = 0$, имеем $2h - 1 = (s_2^2 - r_3^2) + 2(s_3^2 - r_2^2)$, $k = (s_2^2 - r_3^2)^2$, и

$$0 = (2h-1)^2 - k = 4(s_3^2 - r_2^2)(s_2^2 - r_3^2 + s_3^2 - r_2^2). \tag{3.3.31}$$

Предположим, что $s_3^2 \neq r_2^2$, тогда из 3.3.31 следует, что $s_2^2 - r_3^2 + s_3^2 - r_2^2 = 0$. Если $s_3^2 < r_2^2$, то $s_2^2 > r_3^2$, а если $s_3^2 > r_2^2$, то $s_2^2 < r_3^2$. В обоих случаях получаем противоречие с равенством $s_2^2 r_2^2 = s_3^2 r_3^2$, следующим из 3.2.2. Следовательно, $s_3^2 = r_2^2$. Если s_3 и r_2 отличны от нуля, то $s_2^2 = r_3^2$, но тогда $2h - 1 = 0$, что противоречит условию леммы. Таким образом, $r_2 = s_3 = 0$.

Лемма 3.17 доказана. □

Вычислим метки молекулы W_3^*. Рассмотрим изоэнергетическую поверхность $Q_h^3, h > 1/2$. Пусть L – особый слой, соответствующий атому C_2. Напомним (см. формулу 2.3.5), что его критические окружности задаются следующим образом:

$$S^{\pm} = \{s_1 = r_2 = s_3 = 0, r_1^2 + r_3^2 = 1, s_2 = \pm\sqrt{2h - r_1^2}\}.$$

В силу леммы 3.17 имеем $s_1 \neq 0$, $s_3 \neq 0$ на $L \setminus S^{\pm}$. Особый слой L без критических окружностей распадается на несвязное объединение четырёх колец $R^{\pm\pm}$. В этом обозначении первый знак

верхнего индекса совпадает со знаком s_1 на данном кольце, второй знак – со знаком s_3 (например, на R^{+-} имеем $s_1 > 0$, $s_3 < 0$). При $k \to (2h-1)^2 - 0$ предельное множество для I$^+$-торов – $R^{++} \sqcup R^{-+} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для I$^-$-торов – $R^{+-} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$. При $k \to (2h-1)^2 + 0$ предельное множество для II$^+$-торов – $R^{++} \sqcup R^{+-} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для II$^-$-торов – $R^{-+} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$.

Так как на кольцах $R^{\pm\pm}$ $s_1 \neq 0$ и $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$ (ибо $s_3 \neq 0$), то определены отображения

$$\tilde{\alpha}_1^{\pm} = \tilde{\alpha}_{1,h}^{\pm} : R^{+\pm} \sqcup R^{-\pm} \to S^1(\varphi) \times (S^1(\psi) \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}),$$

задаваемые так же, как и отображения $\alpha_1^{\pm}$ (см. подраздел 3.3.1).

Теорема 3.18.

а) *Отображения $\tilde{\alpha}_{1,h}^{\pm}$ – диффеоморфизмы.*

б) *Отображения $\tilde{\nu}_1^{\pm} = \tilde{\nu}_{1,h}^{\pm} : S^1(\varphi) \times (S^1(\psi) \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}) \times (0, (2h-1)^2] \to Q_h^3$, определённые формулой*

$$\tilde{\nu}_{1,h}^{\pm}(\cdot\,, k) = \begin{cases} \nu_{1,h}^{\pm}(\cdot\,, k), & \text{если } k < (2h-1)^2; \\ (\tilde{\alpha}_{1,h}^{\pm})^{-1}(\cdot), & \text{если } k = (2h-1)^2, \end{cases}$$

являются гладкими (т.е. продлевают гомотопию, задаваемую отображениями $\nu_{1,h}^{\pm}$ до особого слоя атома C_2).

Доказательство является почти дословным повторением доказательства теоремы 3.8 с учётом того, что $\psi \neq \pm\pi/2$.

Теорема 3.18 позволяет продолжить цикл φ_1 с I-торов на кольца $R^{\pm\pm}$. Более того, утверждается, что этот цикл изотопен критическим окружностям, и поэтому его следует взять в качестве первого базисного цикла на граничных I-торах атома C_2.

Сравним ориентацию цикла $\varphi_1 = \varphi_1^+$ на граничном I$^+$-торе с естественной ориентацией критической окружности S^+. Рассмотрим на S^+ четыре точки

$$\begin{aligned}
&\lim_{\psi \to \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\psi - \frac{\pi}{2}, \psi\right) = P_0^+ : && r_1 = 1,\ r_3 = 0; \\
&\lim_{\psi \to \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\psi + \frac{\pi}{2}, \psi\right) = P_\pi^+ : && r_1 = -1,\ r_3 = 0; \\
&\lim_{\psi \to \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = P_{\pi/2}^+ : && r_1 = 0,\ r_3 = -1; \\
&\lim_{\psi \to \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\frac{3\pi}{2}, \psi\right) = P_{3\pi/2}^+ : && r_1 = 0,\ r_3 = 1.
\end{aligned}$$

Цикл φ_1 задаёт на S^+ ориентацию: положительным направлением обхода S^+ считается такое, при котором точки $P_0^+, P_{\pi/2}^+, P_\pi^+, P_{3\pi/2}^+$ следуют именно в таком порядке. Рассмотрим окружность S^+ в проекции на плоскость (r_1, r_3) и с помощью уравнений 2.1.10 сравним естественную ориентацию на ней с ориентацией, задаваемой циклом φ_1^+. Из 2.1.10 при $s_1 = r_2 = s_3 = 0$ имеем

$\dot r_1 = -s_2 r_3$. Так как $s_2 > 0$ на S^+, то ориентация цикла φ_1^+ противоположна естественной ориентации на S^+, и в качестве первого базисного цикла на граничном I^+-торе атома C_2 нужно брать цикл $-\varphi_1$.

Определим ориентацию первого базисного цикла на граничном I^--торе. Рассмотрим точки

$$P_0^- := \lim_{\psi\to\pi/2}(\tilde\alpha_1^-)^{-1}\left(\psi-\frac{\pi}{2},\psi\right), \qquad P_\pi^- := \lim_{\psi\to\pi/2}(\tilde\alpha_1^-)^{-1}\left(\psi+\frac{\pi}{2},\psi\right),$$
$$P_{\pi/2}^- := \lim_{\psi\to\pi/2}(\tilde\alpha_1^-)^{-1}\left(\frac{\pi}{2},\psi\right), \qquad P_{3\pi/2}^- := \lim_{\psi\to\pi/2}(\tilde\alpha_1^-)^{-1}\left(\frac{3\pi}{2},\psi\right).$$

Несложно видеть, что $P_0^- = P_0^+, P_{\pi/2}^- = P_{3\pi/2}^+, P_\pi^- = P_\pi^+, P_{3\pi/2}^- = P_{\pi/2}^+$. Следовательно, ориентация на S^+, задаваемая циклом φ_1^-, совпадает с естественной, и в качестве первого базисного цикла на граничном I^--торе атома C_2 следует брать $+\varphi_1$.

Посмотрим теперь, как можно продлить на кольца $R^{\pm\pm}$ циклы φ_2, ψ_2 с II-торов. Так как на $R^{\pm\pm}$ $s_3 \neq 0$ и $r_2^2 + r_3^2 \neq 0$ (ибо $s_1 \neq 0$), то определены отображения

$$\tilde\alpha_2^\pm = \tilde\alpha_{2,h}^\pm : R^{\pm+} \sqcup R^{\pm-} \to S^1(\varphi)\times(S^1(\psi)\setminus\{0,\pi\}),$$

задаваемые так же, как и отображения $\alpha_2^\pm$.

Теорема 3.19.

а) $\tilde\alpha_{2,h}^\pm$ – *диффеоморфизмы.*

б) *Отображения* $\tilde\nu_2^\pm = \tilde\nu_{2,h}^\pm : S^1(\varphi)\times(S^1(\psi)\setminus\{0,\pi\})\times[(2h-1)^2,(2h+1)^2) \to Q_h^3$, *определённые формулой*

$$\tilde\nu_{2,h}^\pm(\cdot\,,k) = \begin{cases} \nu_{2,h}^\pm(\cdot\,,k), & \text{если } k > (2h-1)^2; \\ (\tilde\alpha_{2,h}^\pm)^{-1}(\cdot), & \text{если } k = (2h-1)^2, \end{cases}$$

являются гладкими.

Доказательство получается из доказательства теоремы 3.10 с учётом того, что $\psi \neq 0, \pi$.

Теорема 3.19 позволяет определить на кольцах $R^{\pm\pm}$ циклы $\varphi_2^\pm$, которые изотопны, с одной стороны, циклам φ_2 на II-торах, а с другой – критическим окружностям $S^\pm$. Поэтому в качестве первого базисного цикла на граничных II-торах атома C_2 нужно брать $\pm\varphi_2$. Для определения его ориентации (на II^+-торе), как и выше, рассмотрим четыре точки

$$\tilde P_0^+ := \lim_{\psi\to0}(\tilde\alpha_2^+)^{-1}(0,\psi), \qquad \tilde P_\pi^+ := \lim_{\psi\to0}(\tilde\alpha_2^+)^{-1}(\pi,\psi),$$
$$\tilde P_{\pi/2}^+ := \lim_{\psi\to0}(\tilde\alpha_2^+)^{-1}\left(\psi+\frac{\pi}{2},\psi\right), \qquad \tilde P_{3\pi/2}^+ := \lim_{\psi\to0}(\tilde\alpha_2^+)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right).$$

Цикл φ_2^+ задаёт на S^+ ориентацию: положительным направлением считается то, при котором точки $\tilde P_0^+, \tilde P_{\pi/2}^+, \tilde P_\pi^+, \tilde P_{3\pi/2}^+$ обходятся именно в таком порядке. Несложно заметить, что $\tilde P_0^+ = P_\pi^+$,

$\tilde{P}^+_{\pi/2} = P^+_{3\pi/2}$, $\tilde{P}^+_{\pi} = P^+_0$, $\tilde{P}^+_{3\pi/2} = P^+_{\pi/2}$. Следовательно, ориентация цикла φ_2^+ противоположна естественной ориентации окружности S^+, и в качестве первого базисного цикла на граничном II^+-торе атома C_2 нужно взять $-\varphi_2$.

Аналогично, рассматривая точки

$$\tilde{P}^-_0 := \lim_{\psi\to 0}(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}(0,\psi) = P^+_0, \qquad \tilde{P}^-_{\pi} := \lim_{\psi\to 0}(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}(\pi,\psi) = P^+_{\pi},$$

$$\tilde{P}^-_{\pi/2} := \lim_{\psi\to 0}(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}\left(\psi+\frac{\pi}{2},\psi\right) = P^+_{3\pi/2}, \qquad \tilde{P}^-_{3\pi/2} := \lim_{\psi\to 0}(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right) = P^+_{\pi/2},$$

заключаем, что ориентация на S^+, задаваемая циклом φ_2^-, совпадает с естественной, и в качестве первого базисного цикла на граничном II^--торе атома C_2 нужно брать $+\varphi_2$.

Определим вторые базисные циклы на граничных торах атома C_2. Они должны высекаться на граничных торах некоторым глобальным сечением атома. Возьмём сечение, задаваемое условием $\{r_1 = 0\}$ и проходящее через точку $P^+_{\pi/2}$ (тем самым сечение определено однозначно). Это сечение высекает на I-торах циклы $\pm\psi_1$, а на II-торах – циклы $\pm(\varphi_2+\psi_2)$ (см. (3.3.1), (3.3.12)). Для согласования ориентаций этих циклов рассмотрим изотопные им циклы на особом слое L.

Рассматриваемое сечение атома пересекает кольца $R^{\pm\pm}$ по следующим кривым:

$$\Delta^{++} = \left\{(\tilde{\alpha}^+_1)^{-1}\left(\frac{\pi}{2},\psi\right), \psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{(\tilde{\alpha}^+_2)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right),\ \psi\in(0,\pi)\right\} \subset R^{++};$$

$$\Delta^{-+} = \left\{(\tilde{\alpha}^+_1)^{-1}\left(\frac{\pi}{2},\psi\right), \psi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right\} = \left\{(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right),\ \psi\in(0,\pi)\right\} \subset R^{-+};$$

$$\Delta^{+-} = \left\{(\tilde{\alpha}^-_1)^{-1}\left(\frac{3\pi}{2},\psi\right), \psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{(\tilde{\alpha}^+_2)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right),\ \psi\in(\pi,2\pi)\right\} \subset R^{+-};$$

$$\Delta^{--} = \left\{(\tilde{\alpha}^-_1)^{-1}\left(\frac{3\pi}{2},\psi\right), \psi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right\} = \left\{(\tilde{\alpha}^-_2)^{-1}\left(\psi+\frac{3\pi}{2},\psi\right),\ \psi\in(\pi,2\pi)\right\} \subset R^{--}.$$

Эти кривые имеют по одной (общей) предельной точке на S^+ (это $P^+_{\pi/2}$) и на S^-. Цикл $\overline{\Delta^{++}\cup\Delta^{-+}}$ изотопен циклу $\pm\psi_1$ на I^+-торах, $\overline{\Delta^{+-}\cup\Delta^{--}}$ – циклу $\pm\psi_1$ на I^--торах, $\overline{\Delta^{++}\cup\Delta^{+-}}$ – циклу $\pm(\varphi_2+\psi_2)$ на II^+-торах, $\overline{\Delta^{-+}\cup\Delta^{--}}$ – циклу $\pm(\varphi_2+\psi_2)$ на II^--торах. Отметим также, что поскольку $s_2 > 0$ на S^+ и $s_2 < 0$ на S^-, то в силу (3.3.1), (3.3.12) окружности S^+ соответствуют значения $\psi_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\psi_2 = 0, 2\pi$, а окружности S^- – значения $\psi_1 = -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$, $\psi_2 = \pi$.

Возьмём на граничном I^+-торе в качестве второго базисного цикла $-\psi_1$ (тем самым мы выбрали ориентацию на всей поверхности Q^3_h). Изотопный ему цикл на L состоит из кривых Δ^{++} и Δ^{-+}. Ориентации цикла $-\psi_1$ соответствует убывание функции ψ_1 и, следовательно, движение по кривой Δ^{++} в направлении от S^+ к S^-, а по кривой Δ^{-+} – от S^- к S^+ (рис. 3.17). Такие ориентации на Δ^{++} и Δ^{-+} позволяют однозначно определить ориентации на кривых Δ^{+-}, Δ^{--}, отвечающие некоторым ориентациям циклов $\pm\psi_1$, $\pm(\varphi_2+\psi_2)$: на Δ^{+-} – от S^- к S^+, на Δ^{--} – от S^+ к S^-. Таким ориентациям отвечают следующие ориентации циклов на торах Лиувилля: $-\psi_1$ на I^+-торах, ψ_1 на I^--торах, $\varphi_2+\psi_2$ на II^+-торах и $-(\varphi_2+\psi_2)$ на II^--торах. Учитывая, что ориентация вторых базисных циклов на граничных торах атома выбирается с помощью внешней нормали, делаем вывод, что в качестве вторых базисных циклов нужно взять $-\psi_1$ на I^+-торе, ψ_1 на I^--торе, $-(\varphi_2+\psi_2)$ на II^+-торе и $\varphi_2+\psi_2$ на II^--торе.

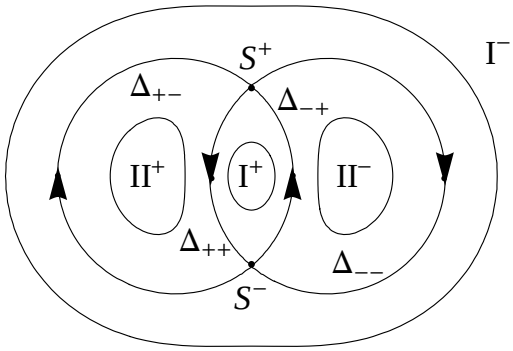


Рис. 3.17: Ориентации кривых Δ^{++}, Δ^{-+}, Δ^{+-}, Δ^{--}

Итак, мы получили следующие базисы фундаментальных групп граничных торов атома C_2: $(-\varphi_1,-\psi_1)$ на I^+-торе, (φ_1,ψ_1) на I^--торе, $(-\varphi_2,-(\varphi_2+\psi_2))$ на II^+-торе и $(\varphi_2,\varphi_2+\psi_2)$ на II^--торе. Ориентируем все рёбра молекулы W^*_3 по возрастанию значения интеграла K. Замечания к теоремам 3.8, 3.10 позволяют выбрать базисные циклы на граничных торах атомов A: $(-\psi_1,-\varphi_1)$ на I^+-торе, (ψ_1,φ_1) на I^--торе, $(-\psi_2,-\varphi_2)$ на II^+-торе и (ψ_2,φ_2) на II^--торе. При этом для определения ориентации вторых циклов нужно рассмотреть проекции критических окружностей на соответствующие координатные плоскости и воспользоваться уравнениями 2.1.10. Ориентации первых циклов выбираются так, чтобы определитель матриц склейки был равен -1. Получаем следующие матрицы склейки торов Лиувилля на рёбрах молекулы W^*_3: $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ для I-торов, $\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$ для II-торов. На всех рёбрах метка r равна нулю, метка ε равна единице. Атом C_2 образует семью с меткой $n=-2$. Так как знак метки зависит от ориентации изоэнергетического многообразия Q^3_h, то, поменяв последнюю, можем считать, что $n=2$.

Для вычисления меток молекулы W^*_2 поступаем совершенно аналогично. Рассматриваем изоэнергетическую поверхность $Q^3_h=\{H=h\}$, $h\in(0,1/2)$. Пусть снова L – особый слой, отве-

чающий атому C_2. Его критические окружности $S^{\pm}$ задаются следующим образом (см. формулу 2.3.5):

$$S^{\pm} = \{s_1 = r_2 = s_3 = 0,\ r_1^2 + s_2^2 = 2h,\ r_3 = \pm\sqrt{1 - r_1^2}\}.$$

Из леммы 3.17 следует, что $s_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ на $L \setminus S^{\pm}$. Если из особого слоя L удалить критические окружности, он распадётся на четыре кольца $R^{\pm\pm}$ (первый знак в индексе по-прежнему совпадает со знаком s_1, а второй теперь отвечает знаку r_2). При $k \to (2h-1)^2 - 0$ предельное множество для III$^+$-торов – $R^{++} \sqcup R^{-+} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для III$^-$-торов – $R^{+-} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$. При $k \to (2h-1)^2 + 0$ предельное множество для II$^+$-торов – $R^{++} \sqcup R^{+-} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для II$^-$-торов – $R^{-+} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$.

Имеют место аналоги теорем 3.18, 3.19 для отображений

$$\tilde{\alpha}^{\pm}_{3,h} : R^{+\pm} \sqcup R^{-\pm} \to S^1(\varphi) \times (S^1(\psi) \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}),$$
$$\tilde{\alpha}^{\pm}_{2,h} : R^{\pm+} \sqcup R^{\pm-} \to (S^1(\varphi) \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}) \times S^1(\psi)$$

(определяемых так же, как и отображения $\alpha^{\pm}_3$, $\alpha^{\pm}_2$). Это позволяет выбрать первые базисные циклы на граничных торах атома C_2.

Далее рассматриваем глобальное сечение атома C_2, задаваемое условием $\{r_1 = 0\}$ и проходящее через точку $\{r_1 = 0,\ s_2 = -\sqrt{2h}\}$ на окружности S^+. Окончательно получаем следующие базисы циклов на граничных торах атомов (рёбра ориентируем по возрастанию значения интеграла K):
для атома C_2:

$(-\varphi_3, -\psi_3)$ на III$^+$-торе, $(\psi_2, \varphi_2 + \psi_2)$ на II$^+$-торе,
(φ_3, ψ_3) на III$^-$-торе, $(-\psi_2, -(\varphi_2 + \psi_2))$ на II$^-$-торе;

для атомов A:

$(-\psi_3, -\varphi_3)$ на III$^+$-торе, $(\psi_2, -\varphi_2)$ на II$^+$-торе,
(ψ_3, φ_3) на III$^-$-торе, $(-\psi_2, \varphi_2)$ на II$^-$-торе.

Находим матрицы склейки: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для III-торов, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ для II-торов. Отсюда $r = 0$ на III-рёбрах, $r = \infty$ на II-рёбрах, $\varepsilon = 1$ на всех рёбрах молекулы W_2^*.

Наконец, для вычисления меток молекулы W_1^* выбираем базисные циклы на граничных торах атомов A с помощью замечания к теореме 3.15. При этом для определения ориентации вторых циклов используем уравнения 2.1.10. В итоге получаем следующие базисы:
для атома A, отвечающего дуге $\Sigma_1^{(1)}$:

$(-\psi_3, -\varphi_3)$ на III$^+$-торе, (ψ_3, φ_3) на III$^-$-торе;

для атома A, отвечающего дуге $\Sigma_3^{(1)}$:

$$(-\varphi_3, -\psi_3) \text{ на } \mathrm{III}^+\text{-торе}, \qquad\qquad (\varphi_3, \psi_3) \text{ на } \mathrm{III}^-\text{-торе}.$$

Таким образом, матрица склейки на обеих связных компонентах равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

3.4 Применение разделения переменных к вычислению инвариантов Фоменко–Цишанга

Покажем, как некоторые из меток молекул, фигурирующих в теореме 3.2, можно вычислить с использованием разделения переменных, найденного С. А. Чаплыгиным в [54], и метода булевых функций М. П. Харламова. А именно, будут вычислены метки r и ε на II-рёбрах молекул W_2^* и W_3^*. Вычислению остальных меток тем же способом препятствует вырождение при $K = 0$ замены, приводящей к разделяющимся переменным (см. ниже формулы (3.4.1)).

При фиксированных значениях h, k интегралов H, K переменные разделения u_1, u_2 вводятся следующим образом:

$$u_1 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + k}{r_3^2}, \qquad u_2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 - k}{r_3^2}. \tag{3.4.1}$$

В переменных u_1, u_2 на фиксированном лиувиллевом слое система 2.1.10 сводится к двум уравнениям:

$$\dot{u}_1 = -\sqrt{2(u_1^2 - 1)(u_1 - m)};$$
$$\dot{u}_2 = -\sqrt{2(1 - u_2^2)(n - u_2)},$$

где $m = 2h + \sqrt{k}$, $n = 2h - \sqrt{k}$. Формулы (3.4.1) задают проекцию слоя слоения Лиувилля на прямоугольник

$$\max\{m, 1\} \le u_1 \le +\infty, \quad -1 \le u_2 \le \min\{n, 1\},$$

называемый *областью возможности движения*. Чтобы сделать его конечным, положим $\tilde{u}_1 = \dfrac{m}{u_1}$ (предполагая для простоты, что $h > 0$). Тогда $\tilde{u}_1 \in \left[0, \dfrac{m}{\max\{m, 1\}}\right]$. Исходя из найденной в [54] зависимости фазовых переменных от переменных разделения, будем иметь

$$s_1 = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m - \tilde{u}_1}\sqrt{1 - u_2}}{\sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}};$$
$$s_2 = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m + \tilde{u}_1}\sqrt{1 + u_2}}{\sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}};$$

$$
\begin{aligned}
s_3 &= \frac{\sqrt{m-\tilde{u}_1}\sqrt{m+\tilde{u}_1}\sqrt{n-u_2}+\sqrt{1-u_2}\sqrt{1+u_2}\sqrt{m}\sqrt{1-\tilde{u}_1}\sqrt{\tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m-\tilde{u}_1u_2)};\\
r_1 &= \frac{\sqrt{m+\tilde{u}_1}\sqrt{1-u_2}\sqrt{n-u_2}\sqrt{\tilde{u}_1}-\sqrt{1+u_2}\sqrt{m-\tilde{u}_1}\sqrt{m}\sqrt{1-\tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m-\tilde{u}_1u_2)};\\
r_2 &= \frac{\sqrt{m-\tilde{u}_1}\sqrt{1+u_2}\sqrt{n-u_2}\sqrt{\tilde{u}_1}+\sqrt{1-u_2}\sqrt{m+\tilde{u}_1}\sqrt{m}\sqrt{1-\tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m-\tilde{u}_1u_2)};\\
r_3 &= -\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}\sqrt{\tilde{u}_1}}{\sqrt{m-\tilde{u}_1u_2}}.
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

Как видно, фазовые переменные $\mathbf{s}, \mathbf{r}$ определяются восемью радикалами:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{m-\tilde{u}_1},\ \sqrt{m+\tilde{u}_1},\ \sqrt{1-\tilde{u}_1},\ \sqrt{\tilde{u}_1},\\
&\sqrt{1-u_2},\ \sqrt{1+u_2},\ \sqrt{n-u_2},\ \sqrt{m-\tilde{u}_1u_2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

Эти радикалы делятся на две группы: те, которые периодически меняют знак вдоль траекторий системы, и те, которые имеют постоянный знак. Для учёта знака радикалов первой группы воспользуемся тригонометрической подстановки (см. [51, 52, 53, 41]). Пусть областью возможности движения на плоскости $\mathbb{R}^2(\tilde{u}_1, u_2)$ является некоторый прямоугольник $m_1 \le \tilde{u}_1 \le m_2$, $n_1 \le u_2 \le n_2$. Тогда положим

$$
\tilde{u}_1 = m_1\cos^2\varphi_1 + m_2\sin^2\varphi_1, \quad u_2 = n_1\cos^2\varphi_2 + n_2\sin^2\varphi_2.
$$

Для радикалов первой группы получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{m_2-\tilde{u}_1} = \sqrt{m_2-m_1}\cos\varphi_1, && \sqrt{\tilde{u}_1-m_1} = \sqrt{m_2-m_1}\sin\varphi_1;\\
&\sqrt{n_2-u_2} = \sqrt{n_2-n_1}\cos\varphi_2, && \sqrt{u_2-n_1} = \sqrt{n_2-n_1}\sin\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Остальные радикалы, как несложно видеть, будут относиться ко второй группе.

Если точка (h,k) является регулярным значением отображения момента, а знаки радикалов второй группы фиксированы, то переменные φ_1, φ_2 являются корректно определёнными координатами на торе Лиувилля и тем самым задают на нём два независимых цикла $\varphi_1 = (\varphi_2 = const)$, $\varphi_2 = (\varphi_1 = const)$. Чтобы выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов в терминах φ_1, φ_2, нужно изучить поведение циклов φ_1, φ_2 вблизи особых слоёв.

В качестве примера использования тригонометрической замены вычислим метки r и ε на II-рёбрах молекул W_2^* и W_3^*. Областями возможности движения на плоскости $\mathbb{R}^2(\tilde{u}_1, u_2)$ для точек (h,k) из камер I, II, III являются соответственно прямоугольники $\{0 \le \tilde{u}_1 \le 1,\ -1 \le u_2 \le 1\}$, $\{0 \le \tilde{u}_1 \le 1,\ -1 \le u_2 \le n\}$, $\{0 \le \tilde{u}_1 \le m,\ -1 \le u_2 \le n\}$. Для радикалов первой группы после тригонометрической замены получим соответственно следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1-\tilde{u}_1} = \cos\varphi_1, && \sqrt{\tilde{u}_1} = \sin\varphi_1;\\
&\sqrt{1-u_2} = \sqrt{2}\cos\varphi_2, && \sqrt{1+u_2} = \sqrt{2}\sin\varphi_2;
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-\tilde{u}_1}=\cos\varphi_1, && \sqrt{\tilde{u}_1}=\sin\varphi_1;\\ &\sqrt{n-u_2}=\sqrt{n+1}\cos\varphi_2, && \sqrt{1+u_2}=\sqrt{n+1}\sin\varphi_2;\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{m-\tilde{u}_1}=\sqrt{m}\cos\varphi_1, && \sqrt{\tilde{u}_1}=\sqrt{m}\sin\varphi_1;\\ &\sqrt{n-u_2}=\sqrt{n+1}\cos\varphi_2, && \sqrt{1+u_2}=\sqrt{n+1}\sin\varphi_2;\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

Из формул (3.4.5) видно, что при фиксированном $h>0$ и $k\to(2h+1)^2$ цикл φ_2 исчезает (т.к. $n\to-1$), а цикл φ_1 накладывается на критическую окружность атома A. Следовательно, в качестве базиса циклов на граничных торах двух атомов A, соответствующих дуге $\Sigma_3^{(2)}$ бифуркационной диаграммы можно взять $(\pm\varphi_2,\pm\varphi_1)$. Ориентация первого базисного цикла зависит от выбора ориентации изоэнергетического многообразия Q^3. Для определения ориентации второго цикла нужно сравнить ориентацию, задаваемую на критических окружностях $S^{\pm}_{\Sigma_3}$ атомов A переменной φ_1, с естественной ориентацией. Введём обозначения для знаков радикалов второй группы в случае камеры 2:

$$e_1=\operatorname{sign}\sqrt{m-\tilde{u}_1},\ e_2=\operatorname{sign}\sqrt{m+\tilde{u}_1},\ e_3=\operatorname{sign}\sqrt{1-u_2},\ e_4=\operatorname{sign}\sqrt{m-\tilde{u}_1u_2}.$$

Поскольку на окружностях $S^{\pm}_{\Sigma_3}$ имеем $n=u_2=-1$, подстановка формул (3.4.4) в (3.4.2) на них даёт

$$s_1=S_1(\tilde{u}_1)e_1e_3e_4,\quad r_2=R_2(\tilde{u}_1)e_2e_3\cos\varphi_1,\quad r_3=-R_3(\tilde{u}_1)e_4\sin\varphi_1,$$
$$r_1=s_2=s_3=0,$$

где S_1,R_2,R_3 – однозначные положительные функции от $\tilde{u}_1$. Из леммы 3.4 следует, что связные компоненты в прообразе точек камеры 2 и кривой $\Sigma_3^{(2)}$ различаются знаком s_1. Это также может быть получено независимо, с использованием техники, изложенной в [52]. Для удобства можем положить $e_1=e_2=e_4=1$. Тогда связная компонента определяется знаком e_3.

Для сравнения двух ориентаций на окружностях $S^{\pm}_{\Sigma_3}$ рассмотрим их проекцию на плоскость $\mathbb{R}^2(r_2,r_3)$. Естественую ориентацию определяем из уравнения $\dot{r}_2=s_1r_3$, следующего из 2.1.10. Она совпадает (для обеих компонент) с ориентацией цикла φ_1. Значит, второй базисный цикл берётся со знаком плюс.

Посмотрим теперь, что происходит при фиксированном h в окрестности особого слоя атома C_2. Пусть сначала $h>1/2$. Из (3.4.4), (3.4.5) видим, что при переходе через критический уровень цикл φ_1 никак не меняется. Следовательно, он является слоем расслоения Зейферта, соответствующего атому C_2. Бифуркации подвергается только цикл φ_2. На рисунке 3.18 изображено сечение $\{\varphi_1=const\}$ атома C_2, расслоенное на окружности и особый слой, состоящий из двух пересекающихся окружностей. На неособых слоях указана ориентация, задаваемая циклом φ_2. Особый слой параметризуется переменной φ_2 через радикалы (3.4.3) следующим образом:

$$\sqrt{1-u_2}=\sqrt{2}\cos\varphi_2,\quad \sqrt{1+u_2}=\sqrt{2}\sin\varphi_2,\quad \sqrt{n-u_2}=\pm\sqrt{2}\cos\varphi_2.\tag{3.4.7}$$

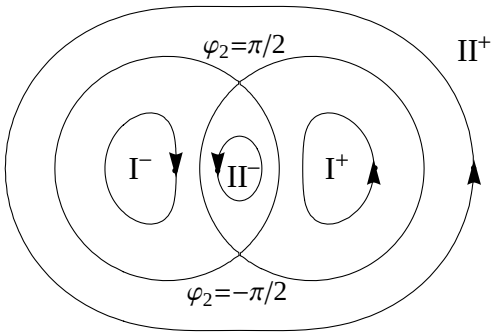


Рис. 3.18: Перестройка типа атома C_2

Отсюда видно, что две критические окружности $S^{\pm}_{\Sigma_2}$ атома C_2 задаются условием $\varphi_2 = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Для сравнения ориентации на них, задаваемой переменной φ_1, с естественной ориентацией, подставим (3.4.7) и выражения для радикалов с $\tilde{u}_1$ из (3.4.5) в (3.4.2). Учитывая, что $\cos\varphi_2 = 0$, получим:

$$r_1 = -R_1(\varphi_1)e_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1, \quad s_2 = S_2(\varphi_1)e_2e_4 \sin\varphi_2, \quad r_3 = -R_3(\varphi_1)e_4 \sin\varphi_1,$$
$$s_1 = r_2 = s_3 = 0,$$

где R_1, S_2, R_3 – однозначные положительные функции от φ_1, а e_1, e_2, e_4 – определённые выше знаки радикалов. Из соображений непрерывности $e_1 = e_2 = e_4 = 1$ (т.к. мы это приняли для камеры 2). Рассматривая теперь проекцию окружностей $S^{\pm}_{\Sigma_2}$ на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, r_3)$ и определяя естественную ориентацию на них из уравнения $\dot{r}_1 = -s_2r_3$ (см. 2.1.10), заключаем, что она совпадает с ориентацией цикла φ_1. Итак, на граничных торах атома C_2 в качестве первого базисного цикла нужно брать $+\varphi_1$. Исходя из рисунка 3.18, выберем в качестве второго базисного цикла φ_2 на II^+-торах и $-\varphi_2$ – на II^--торах (тем самым задавая ориентацию на Q^3). Теперь ориентация первого базисного цикла на граничных торах атомов A выбирается из условия равенства -1 определителя матриц склейки: φ_2 для II^+-торов и $-\varphi_2$ для II^--торов. В итоге получаем матрицу $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ в качестве матрицы склейки на обоих II-рёбрах молекулы W_3^*. Отсюда находим $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

По аналогичным соображениям в случае $0 < h < 1/2$ слоем расслоения Зейферта, отвечающим атому C_2, как видно из (3.4.5), (3.4.6), является цикл φ_2. Отсюда сразу можно сделать вывод, что первая строка матриц склейки на II-рёбрах молекулы W_2^* будет иметь вид $(\pm1, 0)$. Следовательно, $r = \infty$. Метка ε в этом случае будет зависеть от выбора ориентации на Q^3.

Замечание 3.4.1. Формулы (3.4.2), (3.4.4)–(3.4.6) позволяют понять связь циклов φ_1, φ_2 на

торах с циклами φ, ψ, построенными в предыдущем разделе:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pm\varphi, \\ \varphi_2 = \pm(\varphi + \psi) \end{cases} \quad \text{для I-торов;}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pm\varphi, \\ \varphi_2 = \pm\psi \end{cases} \quad \text{для II-торов;}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pm(\varphi + \psi), \\ \varphi_2 = \pm\varphi \end{cases} \quad \text{для III-торов.}$$

3.5 Лиувиллева и траекторная эквивалентность случаю Эйлера и задаче Якоби

В этом разделе мы сформулируем теорему об эквивалентности (лиувиллевой и траекторной) случая Чаплыгина двум другим хорошо известным интегрируемым системам: геодезическому потоку на трёхосном эллипсоиде (задача Якоби, [63]) и случаю Эйлера в динамике твёрдого тела [59]. Изучению этих систем с точки зрения топологической классификации и теории инвариантов посвящены работы [10, 12, 4, 30].

Геодезический поток двумерного эллипсоида является интегрируемой системой с двумя степенями свободы на пространстве кокасательного расслоения T^*E^2 со стандартной симплектической структурой, где

$$E^2 = \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \right\}$$

– эллипсоид с квадратами полуосей a, b, c $(0 < a < b < c)$, вложенный в евклидово пространство $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Гамильтониан и дополнительный интеграл этой системы (записанные в координатах объемлющего пространства $\mathbb{R}^6 = T^*\mathbb{R}^3$) имеют следующий вид:

$$H_J = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right),$$
$$f_J = abc\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} + \frac{\dot{z}^2}{c}\right).$$

Здесь $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – касательный вектор к геодезической (мы отождествляем естественным образом элементы касательного и кокасательного пространств).

Бифуркационная диаграмма для этой системы изображена на рисунке 3.19. Каждая изоэнергетическая поверхность (кроме нулевой) представляет собой расслоение единичных кокасательных векторов над эллипсоидом E^2 и диффеоморфна трёхмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. Отметим, что в силу однородности гамильтониана структура пространства траекторий для этой системы не зависит от уровня энергии. Более того, пропорциональным тройкам (a, b, c) и (a', b', c') соответствуют траекторно эквивалентные системы ([10, теорема A]). Таким

образом, задача Якоби описывает двупараметрическое семейство интегрируемых систем (тройка (a, b, c), рассматриваемая с точностью до пропорциональности, даёт два параметра).

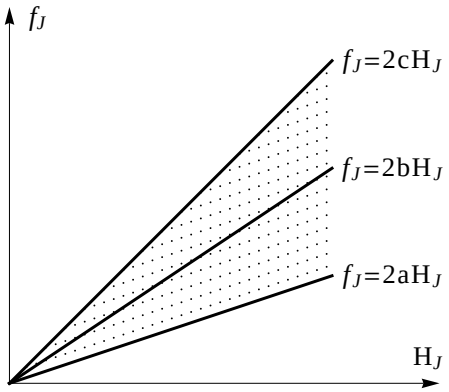


Рис. 3.19: Бифуркационная диаграмма для геодезического потока трёхосного эллипсоида

Другой знаменитой интегрируемой системой является случай Эйлера, описывающий движение твёрдого тела, закреплённого в центре масс. Она задаётся уравнениями Эйлера–Пуассона:

$$\dot{K} = K \times \Omega, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega.$$

Здесь вектор $K = (s_1, s_2, s_3)$ – кинетический момент тела, $\Omega = (As_1, Bs_2, Cs_3)$ – вектор его угловой скорости, $\gamma = (r_1, r_2, r_3)$ – единичный вертикальный вектор. Координаты этих векторов записаны в ортонормированном базисе, жёстко связанном с телом, причём координатные оси этого базиса совпадают с главными осями инерции. Параметры A, B, C $(A < B < C)$ задачи Эйлера – обратные величины к главным моментам инерции тела.

Случай Эйлера является гамильтоновой системой на пространстве $\mathbb{R}^6(s_i, r_i)$, рассматриваемом как двойственное пространство $e(3)^*$ алгебры Ли $e(3) = so(3) + \mathbb{R}^3$ (см. раздел 2.1). Пуассонова структура задаётся здесь с помощью скобки Ли–Пуассона 2.1.1. Гамильтониан системы имеет вид

$$H_E = (As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2)/2.$$

Напомним, что скобка Ли–Пуассона на пространстве $e(3)^*$ имеет две функции Казимира

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$
$$f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3$$

и определяет симплектическую структуру на четырёхмерном многообразии $M^4_{a,g} = \{f_1 = a^2, f_2 = g\}$ (при $a > 0$), диффеоморфном T^*S^2. Уравнения Эйлера–Пуассона можно рассматривать как гамильтонову систему с двумя степенями свободы на $M^4_{1,g}$. Эта система интегрируема при помощи дополнительного интеграла

$$f_E = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Бифуркационная диаграмма отображения момента $(H_E, f_E)\colon M^4_{1,g} \to \mathbb{R}^2$ для случая Эйлера показана на рисунке 3.20. Имеется три зоны регулярных значений энергии:

$$(1)_E = \left(\frac{Ag^2}{2}, \frac{Bg^2}{2}\right), \qquad (2)_E = \left(\frac{Bg^2}{2}, \frac{Cg^2}{2}\right), \qquad (3)_E = \left(\frac{Cg^2}{2}, +\infty\right).$$

В случае $g = 0$ остаётся только третья зона, и бифуркационная диаграмма становится такой же, как и в задаче Якоби.

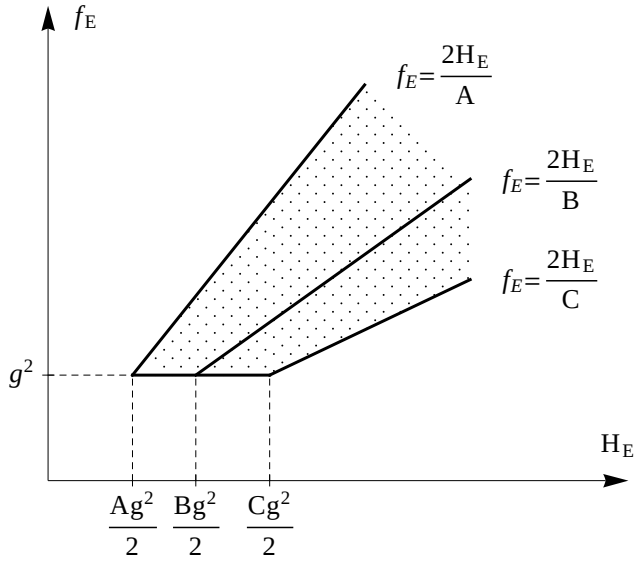


Рис. 3.20: Бифуркационная диаграмма для случая Эйлера

Как следует из [12], пропорциональные тройки (A, B, C) и (A', B', C') определяют траекторно эквивалентные системы Эйлера. Более того, для энергий из третьей зоны ("больших" энергий) класс траекторной эквивалентности не зависит от значения энергии. Считая фиксированным значение g интеграла площадей f_2, получаем два трёхпараметрических семейства систем Эйлера, отвечающих зонам $(1)_E, (2)_E$ и одно двупараметрическое семейство, отвечающее зоне $(3)_E$. Здесь два параметра даются тройкой (A, B, C), рассматриваемой с точностью до пропорциональности, а третий параметр (для зон $(1)_E, (2)_E$) – это значение энергии χ.

Хорошо известен результат А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко о траекторной эквивалентности систем Якоби и Эйлера. Стоит отметить, что речь идёт здесь о топологической тракторной эквивалентности. С гладкой же точки зрения эти системы не являются траекторно эквивалентными. Не являются они также и топологически сопряжёнными. Собрав всю информацию, касающуюся различных типов эквивалентностей для этих двух систем, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3.20. *Пусть $v_J(a, b, c)$ $(a < b < c)$ и $v_E(A, B, C)$ $(A < B < C)$ – соответственно системы Якоби и Эйлера на поверхностях постоянной (ненулевой) энергии. В случае Эйлера будем считать выполненным одно из двух условий: либо $g = 0$, а значение энергии $\chi > 0$*

произвольно, либо $g \neq 0$, а значение энергии принадлежит третьей зоне $(3)_E$. Тогда верны следующие утверждения.

а) (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [10]) Системы $v_J(a,b,c)$ и $v_E(A,B,C)$ лиувиллево эквивалентны. Более того, они топологически траекторно эквивалентны в следующем смысле. Для каждой тройки (a,b,c) существует единственная с точностью до пропорциональности тройка (A,B,C) (и наоборот, для каждой тройки (A,B,C) существует единственная с точностью до пропорциональности тройка (a,b,c)) такая, что системы $v_J(a,b,c)$ и $v_E(A,B,C)$ топологически траекторно эквивалентны. Более того, связь между соответствующими друг другу тройками (A,B,C) и (a,b,c) описывается эффективным образом (то есть посредством явных формул).

б) (А. В. Болсинов, Х. Дуллин [4]) Любые две системы $v_J(a,b,c)$ и $v_E(A,B,C)$ не являются гладко траекторно эквивалентными (даже в смысле C^1-гладкости). (Стоит отметить, что это утверждение основывается на результатах компьютерного анализа.)

в) (О. Е. Орёл [30]) Любые две системы $v_J(a,b,c)$ и $v_E(A,B,C)$ не являются топологически сопряжёнными (и, следовательно, гладко сопряжёнными).

Доказательство этой теоремы основано на сравнении соответствующих инвариантов рассматриваемых систем. В частности, для доказательства первого утверждения были найдены t-молекулы и исследованы условия их совпадения. Второе утверждение основывается на компьютерном анализе возможных значений некоторых инвариантов гладкой траекторной эквивалентности.

Сформулируем теперь результат об эквивалентности интегрируемого случая Чаплыгина системам Эйлера и Якоби. Напомним, что случай Чаплыгина – интегрируемая система на 4-мерном симплектическом листе в пространстве $e(3)^*$ с гамильтонианом 2.1.8 и дополнительным интегралом 2.3.2, где $b = 0$. Как и в случае Эйлера, в случае Чаплыгина имеется 3 зоны регулярных значений энергии:

$$(1)_{Ch} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \qquad (2)_{Ch} = \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad (3)_{Ch} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Теорема 3.21 (С. С. Николаенко [76]). *Пусть $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A,B,C,\chi)$ – соответственно системы Чаплыгина и Эйлера на регулярных изоэнергетических поверхностях $\{H_{Ch} = h\}$ и $\{H_E = \chi\}$. Предположим, что значения энергии h и χ принадлежат зонам с одним и тем же номером. Пусть, как и выше, $v_J(a,b,c)$ – система Якоби на ненулевом уровне энергии (тройки (A,B,C) и (a,b,c) рассматриваются с точностью до пропорциональности). Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне $(1)_{Ch}$, то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A,B,C,\chi)$ для любых значений A,B,C и

для любого значения энергии χ из зоны $(1)_E$. Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, траекторно (топологически и гладко) эквивалентных системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Эта траекторная эквивалентность может быть продолжена на 4-мерные окрестности изоэнергетических многообразий. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются топологически сопряжёнными.

2) *Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне $(2)_{Ch}$, то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C, \chi)$ для любых значений A, B, C и для любого значения энергии χ из зоны $(2)_E$. Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, топологически траекторно эквивалентных системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются гладко траекторно эквивалентными (даже в смысле C^1-гладкости) и не являются топологически сопряжёнными.*

3) *Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне $(3)_{Ch}$, то она лиувиллево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ для любых значений A, B, C (со значением энергии из зоны $(3)_E$) и системе Якоби $v_J(a, b, c)$ для любых значений a, b, c. При достаточно больших значениях h существуют единственные с точностью до пропорциональности тройки (A, B, C) и (a, b, c) такие, что система Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ топологически траекторно эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ и системе Якоби $v_J(a, b, c)$. Но эту траекторную эквивалентность нельзя сделать гладкой (даже в смысле C^1-гладкости). Кроме того, для любых троек значений система Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ не является топологически сопряжённой ни с системой Эйлера $v_E(A, B, C)$, ни с системой Якоби $v_J(a, b, c)$.*

Замечание 3.5.1. Результаты теоремы 3.21 удобно представить в виде следующей таблицы. Для каждого из четырёх типов эквивалентности и для каждой из трёх зон энергии поставим знак "+", если соответствующие системы Чаплыгина и Эйлера эквивалентны, и знак "-" в противном случае.

Таблица 1. Эквивалентность систем Чаплыгина и Эйлера

	зона (1)	зона (2)	зона (3)
Лиувиллева эквивалентность	+	+	+
Топологическая траекторная эквивалентность	+	+	+
Гладкая траекторная эквивалентность	+	-	-
Топологическая сопряжённость	-	-	-

Каждая клетка первой строки таблицы отвечает лиувиллевой эквивалентности между однопараметрическим семейством систем Чаплыгина с параметром h и трёхпараметрическим семейством систем Эйлера с параметрами A, B, χ. Иными словами, любые две системы из этих двух семейств лиувиллево эквивалентны. (Мы полагаем $C = 1$, так как тройки (A, B, C) рассматриваются с точностью до пропорциональности.)

Первые две клетки второй строки и первая клетка третьей строки отвечают траекторной эквиваллентности (топологической или гладкой) между однопараметрическим семейством систем Чаплыгина с параметром h и двупараметрическим семейством систем Эйлера с параметрами A и χ. Теперь параметр B однозначно определяется параметром A: $B = B(A)$. Каждой точке в однопараметрическом семействе систем Чаплыгина, определяемой значением энергии h, соответствует кривая в двупараметрическом семействе систем Эйлера, задаваемая параметром A и зависимостями $B = B(A)$, $\chi = \chi(h, A)$ (см. рис. 3.21).

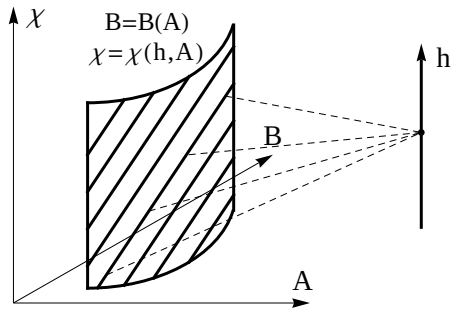


Рис. 3.21: Топологическая траекторная эквивалентность случаев Чаплыгина и Эйлера: зоны (1) и (2)

Наконец, третья клетка второй строки таблицы отвечает топологической траекторной эквивалентности между однопараметрическим семейством систем Чаплыгина с параметром h и однопараметрическим семейством систем Эйлера. Каждой точке первого семейства, определяемой значением h, соответствует единственная точка во втором семействе, задаваемая зависимостями $A = A(h)$, $B = B(h)$.

Замечание 3.5.2. Траекторные изоморфизмы, устанавливаемые теоремой 3.21, допускают явное описание в терминах параметров A, B, C задачи Эйлера. Для первой и второй зон энергии однопараметрическое семейство систем Эйлера, траекторно эквивалентных данной системе Чаплыгина, описывается простой формулой $A[(C-A)(B-A)]^{-1/2} = 2$. Поскольку тройки (A, B, C) рассматриваются с точностью до пропорциональности, мы можем положить $C = 1$ и выразить B через A:

$$B = A + \frac{A^2}{4(1-A)}.$$

Из условия $0 < A < B < 1$ находим интервал возможных значений параметра A: $0 < A < 2/3$. (В случае зон $(2)_{Ch}$ и $(2)_E$ этот интервал становится короче: $A \in (0, A_0(h))$, где $A_0(h) < 2/3$, см.

ниже.) Однопараметрическое семейство троек (A, B, C) представлено на рисунке 3.22.

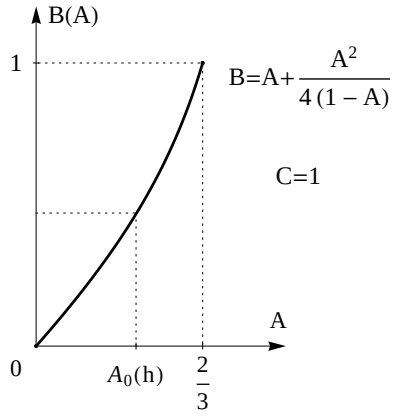


Рис. 3.22: Однопараметрическое семейство троек (A, B, C)

Для случая "больших" энергий (зоны $(3)_{Ch}$ и $(3)_E$) однопараметрическое семейство систем Эйлера, траекторно эквивалентных однопараметрическому семейству систем Чаплыгина, описывается формулой $C[(C-A)(C-B)]^{-1/2} = 2$. Снова полагая $C = 1$, мы можем выразить B через A:

$$B = 1 - \frac{1}{4(1-A)}.$$

Здесь интервал возможных значений параметра A имеет вид $[A_1, 1/2)$, где $A_1 > 0$ – некоторое фиксированное число (см. ниже). Соответствующее однопараметрическое семейство троек (A, B, C) представлено на рисунке 3.23.

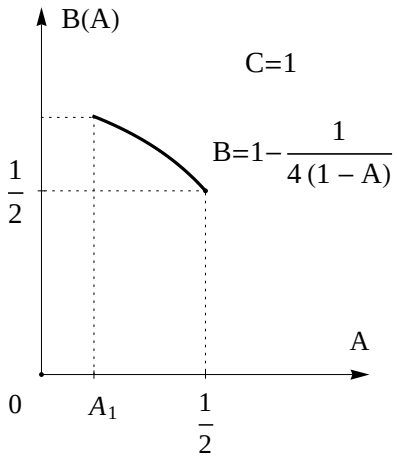


Рис. 3.23: Однопараметрическое семейство троек (A, B, C)

Таким образом, теоремы 3.20 и 3.21 устанавливают изоморфизмы различных типов между тремя классическими интегрируемыми системами: задачей Якоби, случаем Эйлера и случаем

Чаплыгина. В частности, все эти системы оказываются траекторно эквивалентными в указанном выше смысле. Однако явные формулы для этих траекторных изоморфизмов неизвестны.

Доказательство. Лиувиллева эквивалентность систем Чаплыгина системам Эйлера (и, следовательно, при соответствующих уровнях энергии также системе Якоби) следует из сравнения меченых молекул для этих систем.

Для доказательства траекторной эквивалентности рассматриваемых систем сравним их t-молекулы. Подчеркнём, что во всех трёх интегрируемых случаях имеется естественная симметрия, позволяющая использовать для их траекторной классификации простые t-молекулы (см. замечание 1.9.2). Это замечание было использовано в [12, 10] для траекторной классификации систем Эйлера и Якоби, и теперь мы применяем его в случае Чаплыгина.

Для нахождения t-молекул для систем Чаплыгина нам нужно добавить к соответствующим меченым молекулам R-инварианты и $\mathfrak{b}$-инварианты.

Шаг 1. **Вычисление функции вращения.** Для вычисления функций вращения для систем Чаплыгина воспользуемся разделением переменных (см. раздел 3.4). В разделяющихся переменных гамильтоновы уравнения на фиксированном торе Лиувилля $T^2_{h,k} \subset \{H = h,\, K = k\}$ (мы рассматриваем один из двух торов Лиувилля в образе регулярного значения (h, k) отображения момента) принимают вид:

$$\dot{u}_1 = \sqrt{Q_1(u_1)}, \qquad \dot{u}_2 = \sqrt{Q_2(u_2)} \tag{3.5.1}$$

$$\text{где} \quad Q_1(u) = 2\,(u+1)(u-1)(u-\alpha_1), \qquad Q_2(u) = 2\,(1+u_2)(1-u_2)(\alpha_2-u_2).$$

Здесь $\alpha_1 = 2h + \sqrt{k}$, $\alpha_2 = 2h - \sqrt{k}$, а u_1, u_2 – гладкие функции на торе $T^2_{h,k}$. Образом отображения $u_1 \times u_2 \colon T^2_{h,k} \to \overline{\mathbb{R}}^2(u_1, u_2)$ является бесконечный прямоугольник $[\max\{\alpha_1, 1\}, +\infty] \times [-1, \min\{\alpha_2, 1\}]$.

Пусть P_0 – некоторая фиксированная точка на торе $T^2_{h,k}$ и пусть $\gamma_1 \subset I_1 = \{u_2 = u_2(P_0)\}$, $\gamma_2 \subset I_2 = \{u_1 = u_1(P_0)\}$ циклы на торе $T^2_{h,k}$, содержащие точку P_0. Несложно проверить, что циклы γ_1 и γ_2 независимы и образуют базис в одномерной группе гомологий $H_1(T^2_{h,k})$. Рассмотрим на торе $T^2_{h,k}$ следующие функции:

$$\varphi_1(P) = 2\pi \frac{\displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{du_1}{\sqrt{Q_1(u_1)}}}{\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{du_1}{\sqrt{Q_1(u_1)}}} \pmod{2\pi}, \quad \varphi_2(P) = 2\pi \frac{\displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{du_2}{\sqrt{Q_2(u_2)}}}{\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{du_2}{\sqrt{Q_2(u_2)}}} \pmod{2\pi}. \tag{3.5.2}$$

Интегралы в числителях в (3.5.2) берутся вдоль любого пути в $T^2_{h,k}$, соединяющего точки P_0 и P. В этом случае, как легко видеть, функции φ_1 и φ_2 корректно определены по модулю 2π. Мы утверждаем, что функции φ_1 и φ_2 являются переменными "угол" на торе $T^2_{h,k}$ и

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{du_1}{\sqrt{Q_1(u_1)}}}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{du_2}{\sqrt{Q_2(u_2)}}}.$$

В самом деле, интегралы в знаменателях в (3.5.2) являются константами, а производные числителей равны 1 в силу (3.5.1).

Можно показать, что каждый из циклов γ_1 и γ_2 является четырёхлистным разветвлённым накрытием над соответствующим отрезком I_1 или I_2. Следовательно, для функции вращения $\rho(h,k)$ имеем:

$$\rho(h,k) = \frac{\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{du_2}{\sqrt{Q_2(u_2)}}}{\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{du_1}{\sqrt{Q_1(u_1)}}} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{\min\{\alpha_2,1\}} \frac{du_2}{\sqrt{Q_2(u_2)}}}{\displaystyle\int_{\max\{\alpha_1,1\}}^{+\infty} \frac{du_1}{\sqrt{Q_1(u_1)}}} = \frac{E_2}{E_1}.$$

С помощью стандартных подстановок интегралы E_1, E_2 легко приводятся к каноническому виду. В результате получаем:

$$E_1 = \begin{cases} \pm 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\alpha_1-2t^2)}} & \text{if } \alpha_1 > 1, \\ \pm 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-(1+\alpha_1)\,t^2)}} & \text{if } \alpha_1 < 1; \end{cases} \tag{3.5.3}$$

$$E_2 = \begin{cases} \pm 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\alpha_2-2t^2)}} & \text{if } \alpha_2 > 1, \\ \pm 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-(1+\alpha_2)\,t^2)}} & \text{if } \alpha_2 < 1. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Знак в этих формулах зависит от выбора связной компоненты.

Отметим, что для систем, сводящихся к уравнениям Абеля (см. [31]), функция вращения может быть вычислена аналогичным образом.

Полученные формулы для функции вращения записаны в базисе (γ_1, γ_2). Для каждой из регулярных областей (камер) $I = \{\, h > 1/2,\, 0 < k < (2h-1)^2 \,\}$, $II = \{\, h > 0,\, (2h-1)^2 < k < (2h+1)^2 \,\}$, $III = \{\, -1/2 < h < 1/2,\, 0 < k < \min\{\, (2h-1)^2,\, (2h+1)^2 \,\} \,\}$, лежащих в образе отображения момента, нам нужно записать функцию вращения в некоторой допустимой системе координат, непрерывно зависящей от торов Лиувилля.Выпишем допустимые базисы и матрицы склейки на рёбрах меченых молекул, отвечающих зонам $(1)_{Ch}, (2)_{Ch}, (3)_{Ch}$ (см. рис. 3.24, 3.25). Фиксируем на каждом ребре некоторую ориентацию. Функции вращения следует выписывать в базисах, отвечающих началам рёбер. Для этого мы используем простую формулу, связывающую функции вращения, записанные в двух различных базисах. (см. [8, предложение 1.13]). Заметим, что левой молекуле на рисунке 3.24 и левым рёбрам молекул на рисунке 3.25 отвечают разные знаки в формулах 3.5.3, 3.5.4, а правой молекуле на рисунке 3.24 и правым рёбрам молекул на рисунке 3.25 – одинаковые знаки.

Имеем $\alpha_1 > \alpha_2 > 1$ для камеры I, $\alpha_1 > 1 > \alpha_2$ для камеры II и $1 > \alpha_1 > \alpha_2$ для камеры III. Соответствующие функции вращения имеют следующий вид (напомним, что $\alpha_1 = 2h + \sqrt{k}$,

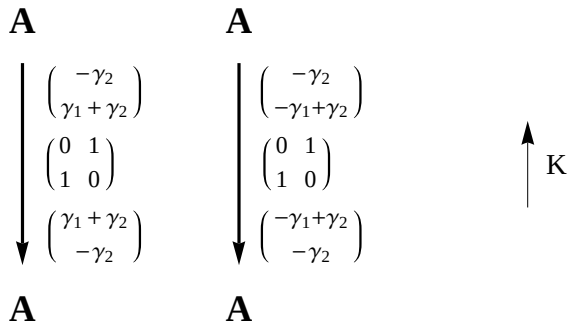


Рис. 3.24: Допустимые базисы и матрицы склейки, зона $(1)_{Ch}$ (две связные компоненты)

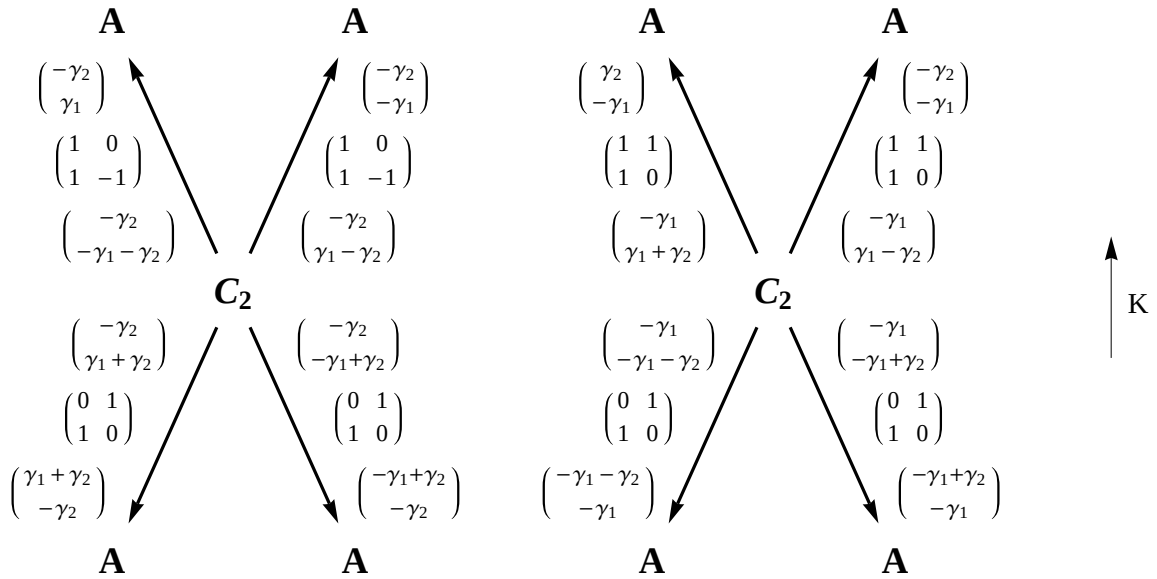


Рис. 3.25: Допустимые базисы и матрицы склейки, зоны $(2)_{Ch}$ и $(3)_{Ch}$

$\alpha_2 = 2h - \sqrt{k}$):

$$\rho_I(h,k) = -1 - \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\alpha_2-2t^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\alpha_1-2t^2)}}}, \tag{3.5.5}$$

$$\rho_{II,(3)}(h,k) = 1 + \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-(1+\alpha_2)\,t^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\alpha_1-2t^2)}}} \quad \text{(для зоны } (3)_{Ch}\text{)}, \tag{3.5.6}$$

$$\rho_{II,(2)}(h,k) = \frac{\rho_{II,(3)}(h,k)}{1-\rho_{II,(3)}(h,k)} \quad (\text{для зоны } (2)_{Ch}), \tag{3.5.7}$$

$$\rho_{III}(h,k) = 1 + \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-(1+\alpha_1)\,t^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-(1+\alpha_2)\,t^2)}}}. \tag{3.5.8}$$

Нас интересует поведение функций вращения на изоэнергетических поверхностях, то есть при фиксированном значении гамильтониана h. Легко видеть, что функции ρ_I и ρ_{III} монотонны по переменной k. Для функций $\rho_{II,(2)}$ и $\rho_{II,(3)}$ мы используем компьютерный анализ. Качественное поведение линий уровня функции $\rho_{II,(3)}$ показано на рисунке 3.26. Отсюда можно с высокой степенью уверенности заключить, что для достаточно больших значений энергии из зоны $(3)_{Ch}$ и для значений энергии из зоны $(2)_{Ch}$ функция $\rho_{II,(3)}$ монотонна (а следовательно, монотонна также функция $\rho_{II,(2)}$). Но существует значение энергии $h_0 > 1/2$ такое, что при $h \in (1/2, h_0)$ функция $\rho_{II,(3)}$ имеет критическую точку на интервале $((2h-1)^2, (2h+1)^2)$.

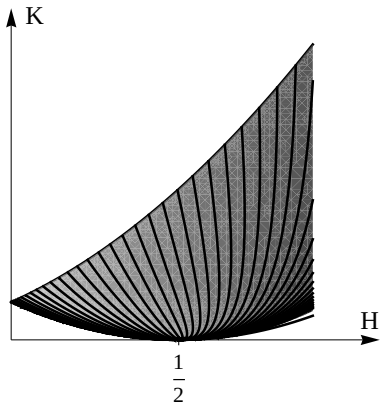


Рис. 3.26: Линии уровня функции вращения $\rho_{II,(3)}$

Рецензентами работы [76] было предложено следующее аналитическое доказательство монотонности функции $\rho_{II,(3)}$ для больших значений энергии. Положим $q = (1+\alpha_2)/2$. Нам требуется доказать монотонность функции

$$G(q) = \frac{E(q)\sqrt{1+2h-q}}{E\left(\dfrac{1}{1+2h-q}\right)}, \quad q \in (0,1),$$

где

$$E(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода. Для доказательства монотонности функции

$G(q)$ рассмотрим её логарифмическую производную:

$$(\ln G(q))' = \frac{G'(q)}{G(q)} = \frac{E'(q)}{E(q)} - \frac{1}{2(1+2h-q)} - \frac{1}{(1+2h-q)^2}\frac{E'\left(\dfrac{1}{1+2h-q}\right)}{E\left(\dfrac{1}{1+2h-q}\right)}.$$

Функции $E(q)$ и $E'(q)$ непрерывны на $[0,1)$, следовательно, для любого $\sigma < 1$ отношение $\dfrac{E'(q)}{E(q)}$ ограничено на отрезке $[0,\sigma]$. Из представления функции $E(q)$ в виде степенного ряда

$$E(q) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 q^n$$

легко видеть, что отношение $\dfrac{E'(q)}{E(q)}$ стремится к бесконечности при $q \to 1-0$. Значит, это отношение ограничено снизу на $[0,1)$. Аналогичным образом, отношение $\dfrac{E'\left(\dfrac{1}{1+2h-q}\right)}{E\left(\dfrac{1}{1+2h-q}\right)}$ ограничено сверху, так как аргумент функций E, E' изменяется от $\dfrac{1}{2h+1}$ до $\dfrac{1}{2h} < 1$. Ясно теперь, что для достаточно больших значений h имеем $G'(q) > 0$ при $q \in [0,1)$.

Аналогичную идею можно использовать для доказательства монотонности функции $\rho_{II,(3)}$ для значений энергии из зоны $(2)_{Ch}$. Однако короткое доказательство этого факта для всех $h \in (0,1/2)$ нам неизвестно.

Шаг 2. **Доказательство топологической траекторной эквивалентности.** Теперь мы имеем возможность выписать t-молекулы для систем типа Чаплыгина. Из явных формул для функций вращения находим векторы вращения на концах молекул. Далее, в зависимости от матриц склейки, мы "улучшаем" эти векторы, превращая их в R-инварианты. И, наконец, выписываем $\mathfrak{b}$-инварианты. Молекулы, отвечающие зонам $(2)_{Ch}$ и $(3)_{Ch}$, содержат только один радикал, состоящий из одного атома C_2.

Теорема 3.22. *Для систем Чаплыгина имеется 4 типа t-молекул, которые показаны на рисунках 3.27, 3.28, 3.29, 3.30.*

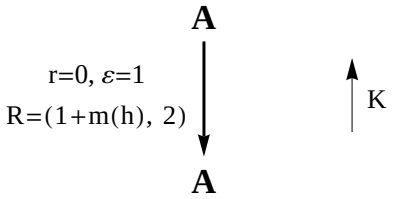


Рис. 3.27: t-молекула для случая Чаплыгина, зона $(1)_{Ch}$

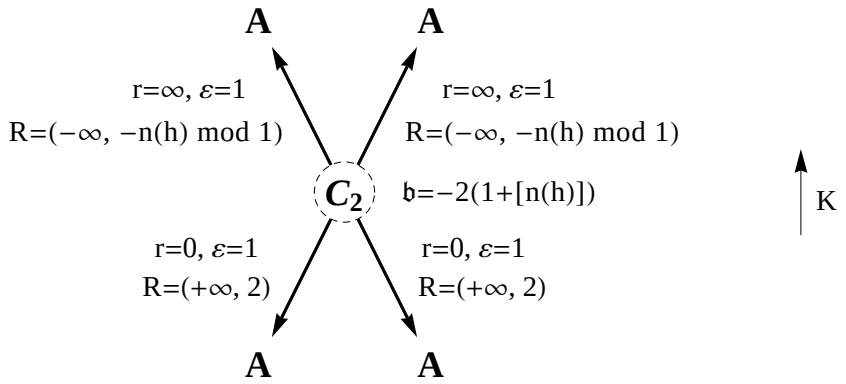


Рис. 3.28: t-молекула для случая Чаплыгина, зона $(2)_{Ch}$

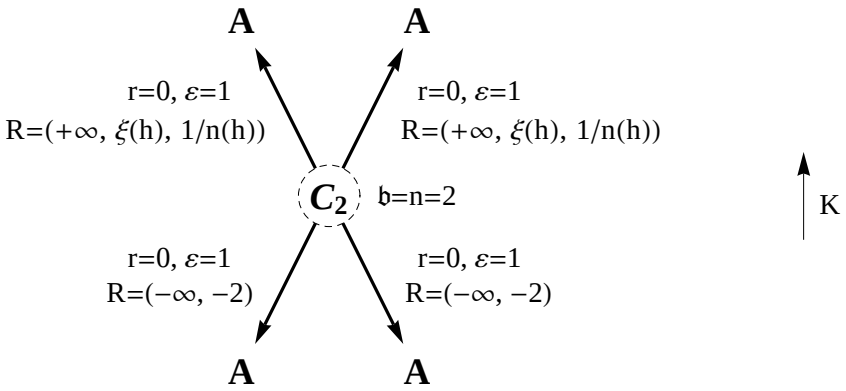


Рис. 3.29: t-молекула для случая Чаплыгина, зона $(3)_{Ch}:\ h < h_0$

Здесь

$$m(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(2h+1)t^2)}},$$
$$n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2h+1-t^2)}},$$

а $\xi(h)$ *– локальный минимум функции вращения при* $h \in (1/2, h_0)$.

Теперь мы хотим сравнить t-молекулы для случая Чаплыгина с t-молекулами для систем Эйлера и Якоби. Последние были найдены в работах [12], [10] (см. рис. 3.31, 3.32, 3.33, 3.34).

Мы используем следующие обозначения:

$$K(A,B,C) = \frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}}, \qquad L(A,B,C) = \frac{C}{\sqrt{(C-A)(C-B)}},$$
$$M(A,B,C,\chi) = \frac{1}{\pi}\int_A^{2\chi/g^2} \left[\left(\frac{2\chi}{g^2}-u\right)(C-u)(B-u)(u-A)\right]^{-1/2} u\,du,$$
$$N(A,B,C,\chi) = \frac{1}{\pi}\int_A^{B} \left[\left(\frac{2\chi}{g^2}-u\right)(C-u)(B-u)(u-A)\right]^{-1/2} u\,du;$$

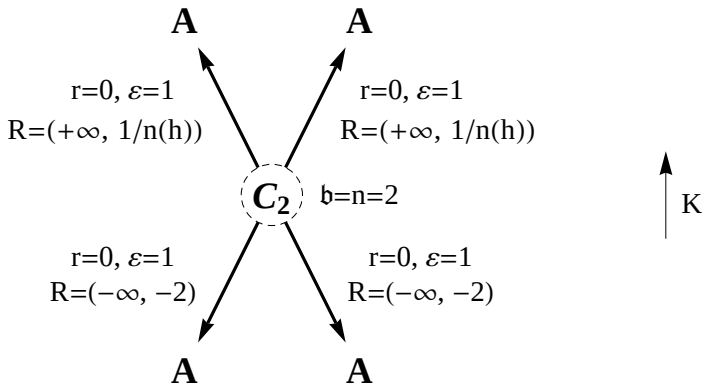


Рис. 3.30: t-молекула для случая Чаплыгина, зона $(3)_{Ch}:\ h \geq h_0$

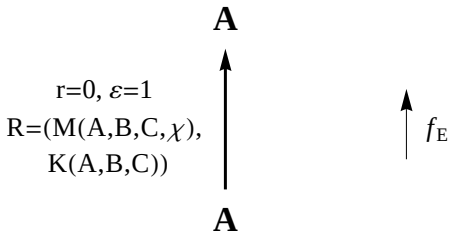


Рис. 3.31: t-молекула для случая Эйлера, зона $(1)_E$

$$k(a,b,c) = \frac{\pi\sqrt{\dfrac{a}{(b-a)(c-a)}}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(u,a)\,du}, \qquad l(a,b,c) = \frac{\pi\sqrt{\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(u,c)\,du},$$

где $\Phi(u,t) = u[(u+a)(u+b)(u+c)(u+t)]^{-1/2}$.

Функции $M(A,B,C,\chi)$ и $N(A,B,C,\chi)$ монотонны по значению энергии χ.

Рассмотрим молекулы, отвечающие зонам $(1)_{Ch}$ и $(1)_E$ в системах Чаплыгина и Эйлера. Они содержат только минимаксный атом A и не содержат ни одного седлового атома. В этом случае единственным траекторным инвариантом (как топологическим, так и гладким) является R-инвариант. Предположим, что $K(A,B,C) = 2$, то есть вторые компоненты R-инвариантов совпадают. Так как функции $m(h)$ и $M(A,B,C,\chi)$ (первые компоненты R-инвариантов)монотонно растут от $2 = K(A,B,C)$ до $+\infty$ с изменением значения энергии h (соотвественно χ), то мы можем заключить, что для любого значения $h \in (-1/2, 0)$ существует такое значение $\chi \in (Ag^2/2, Bg^2/2)$, что $M(A,B,C,\chi) = m(h)$ и, следовательно, R-инварианты совпадают. Отсюда следует гладкая траекторная эквивалентность систем Чаплыгина и Эйлера на изоэнергетических поверхностях Q^3_h и Q^3_χ. Однопараметрическое семейство систем Эйлера, траекторно эквивалентных данной системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$, задаётся двумя уравнениями: $K(A,B,C) = 2$ и $M(A,B,C,\chi) = m(h)$. Первое уравнение задаёт кривую $B = B(A)$ в 3-мерном пространстве значений параметров A, B, C (см. рис. 3.22), а второе уравнение устанавливает соответствие

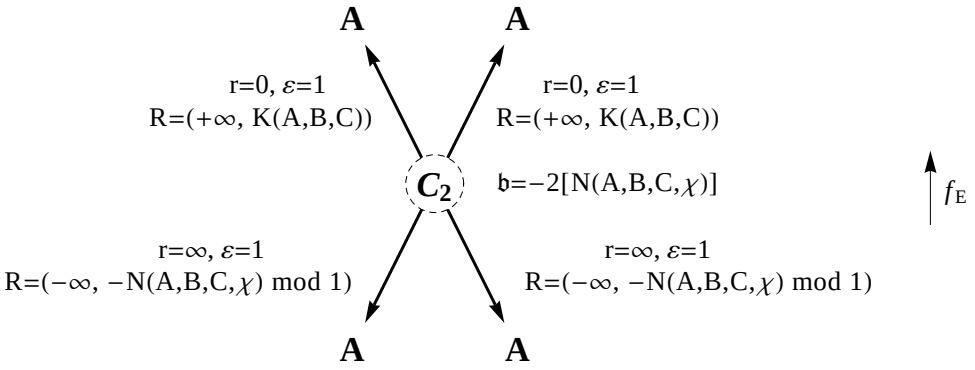


Рис. 3.32: t-молекула для случая Эйлера, зона $(2)_E$

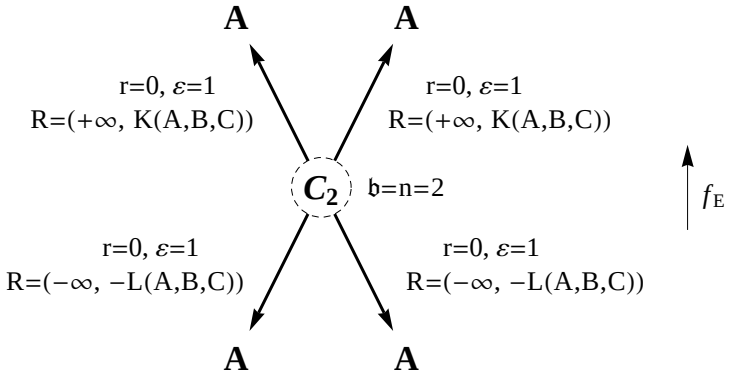


Рис. 3.33: t-молекула для случая Эйлера, зона $(3)_E$

между значениями энергии χ и h при фиксированных значениях параметров A, B, C.

Рассмотрим теперь системы Чаплыгина и Эйлера на 4-мерных многообразиях $D^4_{Ch} = \{h \in [-1/2, 0)\}$ и $D^4_E = \{\chi \in [Ag^2/2, Bg^2/2)\}$. Каждое из этих многообразий представляет собой несвязное объединение двух 4-мерных дисков, расслоенных на концентрические изоэнергетические 3-мерные сферы. Центры дисков являются для соответствующих систем неподвижными точками эллиптического типа (отвечающими глобальному минимуму энергии). Выше мы установили траекторную эквивалентность систем Чаплыгина и Эйлера на отдельных слоях (т.е. на изоэнергетических 3-сферах). Легко видеть, что эти траекторные изоморфизмы между отдельными 3-сферами можно "сшить" в единый траекторный изоморфизм между 4-дисками. В итоге мы получаем траекторную эквивалентность систем Чаплыгина и Эйлера на 4-мерных многообразиях D^4_{Ch} и D^4_E.

Когда значения энергии систем Чаплыгина и Эйлера принадлежат зонам $(2)_{Ch}$ и $(2)_E$, совпадение t-молекул означает, что $K(A, B, C) = 2$ и $N(A, B, C, \chi) = n(h) + 1$. Предположим, что первое равенство выполнено. При фиксированных значениях A, B, C функция $N(A, B, C, \chi)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $L(A, B, C)$ с изменением значения энергии χ от $Bg^2/2$ до $Cg^2/2$, а функция $n(h)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $n(1/2)$ с изменением значения энергии h от 0 до $1/2$. Следовательно, при $h \in (0, 1/2)$ уравнение $1 + n(h) = N(A, B, C, \chi)$ имеет решение относительно

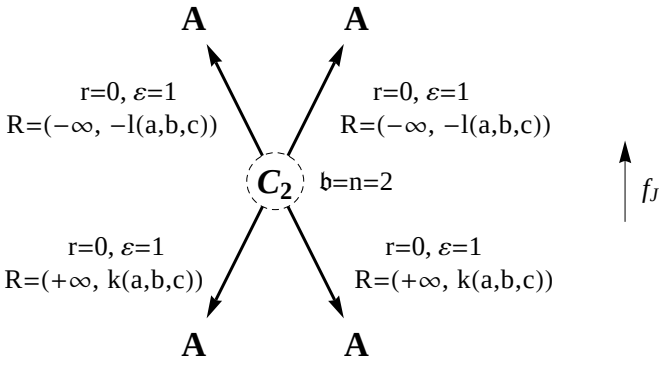


Рис. 3.34: t-молекула для задачи Якоби

переменной χ в том и только в том случае, если $1+n(h) > L(A,B,C)$. Как показано в [10, теорема 3.3], возможные значения функции $L(A,B,C)$ принадлежат интервалу $(1,+\infty)$. Поэтому уравнение $1+n(h) = N(A,B,C,\chi)$ разрешимо для любого значения энергии $h \in (0,1/2)$, а соответствующие значения параметров A,B,C удовлетворяют условию $1 < L(A,B,C) < 1+n(h)$. Однопараметрическое семейство систем Эйлера, траекторно эквивалентных данной системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$, задаётся двумя уравнениями: $K(A,B,C) = 2$ и $n(h) = N(A,B,C,\chi)$. Как и в предыдущем случае, первое уравнение задаёт кривую $B = B(A)$ в 3-мерном пространстве значений параметров A,B,C, а второе уравнение устанавливает соответствие между значениями энергии при фиксированных значениях параметров A,B,C. Но теперь интервал возможных значений параметра A становится короче. В самом деле, из условия $1 < L(A,B,C) < 1+n(h)$ находим $0 < A < A_0(h)$, где

$$A_0(h) = \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{1 + \frac{3}{(1+n(h))^2}}\right) < \frac{2}{3}.$$

Рассмотрим, наконец, случай "больших" энергий. Предположим, что $h \geq h_0$ и, следовательно, функции вращения в случае Чаплыгина не имеют критических точек. В этом случае условия совпадения t-молекул для систем Чаплыгина и Эйлера таковы: $K(A,B,C) = 1/n(h)$, $L(A,B,C) = 2$. Как показано в [10, теорема 3.3], областью возможных значений для пары функций $K(A,B,C)$, $L(A,B,C)$ является бесконечный прямоугольник $(0,+\infty)\times(1,+\infty)$, и для каждой точки (k,l) этого прямоугольника существует единственная с точностью до пропорциональности тройка (A,B,C) такая, что $K(A,B,C) = k$, $L(A,B,C) = l$. Так как $n(h) > 0$, то для каждого значения энергии $h \geq h_0$ существует единственная (с точностью до пропорциональности) система типа Эйлера $v_E(A,B,C)$, топологически траекторно эквивалентная системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Эта система Эйлера задаётся параметрами

$$A(h) = \frac{3}{2\left(2+\sqrt{1+3\,(n(h))^2}\right)}, \quad B(h) = 1 - \frac{1}{4(1-A(h))}, \quad C = 1.$$

Однопараметрическое семейство систем Эйлера, траекторно эквивалентных в этом случае систе-

мам Чаплыгина, представлено на рисунке 3.23, где $A_1 = A(h_0) = 3\left[2\left(2+\sqrt{1+3\,(n(h_0))^2}\right)\right]^{-1}$. В силу теоремы 3.20 существует также единственный с точностью до подобия двумерный эллипсоид с квадратами полуосей a, b, c, такой, что система Якоби $v_J(a,b,c)$ топологически траекторно эквивалентна системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Отметим, что в этом случае траекторные изоморфизмы не могут быть продолжены на 4-мерные окрестности изоэнергетических поверхностей. Это объясняется тем фактом, что функция $n(h)$ строго монотонна, в то время как соответствующие элементы R-инвариантов в случае Эйлера и в задаче Якоби не зависят от значения энергии.

Шаг 3. **Доказательство отсутствия гладкой траекторной эквивалентности для зон (2) и (3).** Для доказательства того факта, что траекторную эквивалентность систем Чаплыгина и Эйлера для зон энергии 2 и 3 нельзя сделать гладкой, мы последуем идее, использованной в [4, раздел 5]. А именно, добавим к t-молекулам некоторые дополнительные инварианты гладкой траекторной эквивалентности и затем посмотрим, могут ли получившиеся более сложные молекулы совпадать при каких-то значениях параметров. Более точно, к t-молекулам нужно добавить Λ-*инвариант* (см. раздел 1.9).

Для вычисления Λ-инварианта мы используем следующее простое утверждение.

Лемма 3.23. *(см. [4, раздел 5]) При $t \to b$ имеет место равенство*

$$\int_a^b \frac{g(u)\,du}{\sqrt{(u-b)(u-t)}} = -g(b)\,\ln|t-b| + c(t),$$

где $c(t)$ – некоторая функция, непрерывная в точке $t = b$.

Используя формулы 3.5.5–3.5.8 и лемму 3.23, легко находим Λ-инварианты для случая Чаплыгина:

$$\Lambda_{(2),Ch} = \left(2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-2ht^2)}}\right)^{-1} \text{ для зоны } (2)_{Ch} \text{ и}$$

$$\Lambda_{(3),Ch} = \left(2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2h-t^2)}}\right)^{-1} \text{ для зоны } (3)_{Ch}.$$

Для случая Эйлера и задачи Якоби имеем:

$$\Lambda_E = \frac{1}{\pi}\frac{B}{\sqrt{(C-B)(B-A)}}, \qquad \Lambda_J = \frac{\sqrt{\dfrac{b}{(c-b)(b-a)}}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(u,b)\,du},$$

где $\Phi(u,t)$ – функция, определённая выше.

Рассмотрим зоны энергии $(2)_{Ch}$ и $(2)_E$. Совпадение t-молекул и Λ-инвариантов для систем

Чаплыгина и Эйлера означает, что

$$\frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}} = 2 \qquad \text{и}$$
$$\frac{B}{\sqrt{(C-B)(B-A)}} = \pi \left(2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-2ht^2)}} \right)^{-1}.$$

Но выполнение этих условий невозможно, так как для зоны $(2)_{Ch}$ имеем $h \in (0, 1/2)$, и

$$\pi \left(2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-2ht^2)}} \right)^{-1} <$$
$$< \pi \left(2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-2ht^2)}} \right)^{-1} \Bigg|_{h=0} = 1 < 2,$$
$$\text{в то время как} \quad \frac{B}{\sqrt{(C-B)(B-A)}} > \frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}}.$$

Аналогичные неравенства показывают, что и в случае зоны энергии $(3)_{Ch}$ t-молекула и Λ-инвариант для случая Чаплыгина не могут совпадать с таковыми для случая Эйлера или задачи Якоби.

Шаг 4. **Доказательство отсутствия топологической сопряжённости.** Если мы задаёмся целью доказать отсутствие сопряжённости (топологической) рассматриваемых систем, то мы должны добавить к их t-молекулам некоторые "точные" инварианты. Следуя [30], рассмотрим для каждой из систем Чаплыгина, Эйлера и Якоби периоды трёх замкнутых особых траекторий. Две из этих трёх траекторий эллиптические и отвечают атому A, а третья – гиперболическая и отвечает атому C_2. Таким образом, к t-молекуле добавляется новый инвариант – тройка $(t^1 : t^2 : t^3)$, где t^1 и t^3 – периоды эллиптических траекторий, а t^2 – период гиперболической траектории. Покажем, что ни при каких значениях параметров систем Чаплыгина, Эйлера и Якоби одновременное совпадение их t-молекул, а также троек $(t^1 : t^2 : t^3)$ невозможно.

Ограничимся рассмотрением случая "больших" энергий (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тройки $(t^1 : t^2 : t^3)$ будем рассматривать с точностью до пропорциональности (это означает, что мы не берём в учёт уровень энергии).

Для системы Эйлера $v_E(A, B, C)$ (в случае зоны $(3)_E$) и для системы Якоби $v_J(a, b, c)$ инварианты $(t^1 : t^2 : t^3)$ были вычислены в [30] и принимают следующие значения:

$$(t^1_E : t^2_E : t^3_E) = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{A}};$$
$$(t^1_J : t^2_J : t^3_J) = t\,(a,b) : t\,(a,c) : t\,(b,c) \quad \text{где } t\,(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha \cos^2\varphi + \beta \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Рассмотрим теперь зону энергии $(3)_{Ch}$ для случая Чаплыгина. Период t^1_{Ch} отвечает критическим траекториям, которые при отображении момента переходят в луч $\{\, K = 0,\, H > 1/2 \,\}$

бифуркационной диаграммы (см. рис. 3.1). Такие критические траектории задаются в пространстве $\mathbb{R}(\mathbf{s},\mathbf{r})$ следующим образом (см. формулу 2.3.2):

$$s_1 = s_2 = r_3 = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 = 1, \quad s_3 = \pm\sqrt{h + 1/2 - r_1^2}.$$

Тогда из уравнений 2.1.10 имеем:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2s_3 r_2, \\ \dot{r}_2 = -2s_3 r_1. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что

$$t^1_{Ch} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h + 1/2 - \cos^2\varphi}}.$$

Аналогично получаем, что

$$t^2_{Ch} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h - \cos^2\varphi}} \quad \text{и} \quad t^3_{Ch} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h + 1 - \cos^2\varphi}}.$$

Таким образом, тройка $(t^1 : t^2 : t^3)$ для случая Чаплыгина принимает следующие значения:

$$(t^1_{Ch} : t^2_{Ch} : t^3_{Ch}) = \left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h + 1/2 - \cos^2\varphi}} : \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h - \cos^2\varphi}} : \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h + 1 - \cos^2\varphi}}\right).$$

Легко видеть, что $t^2_{Ch} > t^3_{Ch}$, в то время как $t^2_E < t^3_E$ и $t^2_J < t^3_J$. Следовательно, тройка периодов $(t^1_{Ch} : t^2_{Ch} : t^3_{Ch})$ не может совпадать с аналогичными тройками для случая Эйлера и задачи Якоби ни при каких значениях параметров A, B, C, a, b, c. Таким образом, в случае "больших" энергий системы типа Чаплыгина не сопряжены ни с каками системами типа Эйлера или Якоби. Это утверждение верно также для зон энергии (1) и (2).

□

Глава 4

Компактный случай Горячева ($b > 0$)

4.1 Грубый лиувиллев анализ

Всюду в этой главе будем считать, что $r_3 > 0$ (при $r_3 < 0$ все результаты аналогичны в силу имеющейся симметрии).

Для компактного случая Горячева ($b > 0$) П. Е. Рябовым [36] был выполнен грубый топологический анализ (найдена бифуркационная диаграмма, описаны перестройки торов Лиувилля, определена топология изоэнергетических поверхностей). Напомним (см. теорему 2.2), что бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Горячева при $0 < b < 1$ состоит из четырёх кривых:

$$\Sigma_1 = \left\{ k = 4bh - b^2,\ h \geq \frac{b+1}{2} \right\},$$
$$\Sigma_2 = \left\{ k = 2b,\ \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2} \right\},$$
$$\Sigma_3 = \left\{ k = (2h-1)^2 + 2b,\ h \geq \frac{b}{2} \right\},$$
$$\Sigma_4 = \left\{ k = (2h+1)^2 - 2b,\ h \geq \sqrt{b} - \frac{1}{2} \right\},$$

которые разбивают образ отображения момента на три камеры (рис. 4.1).

Можно выделить четыре зоны регулярных значений энергии:

$$(1) = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad (2) = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{b+1}{2} \right), \quad (4) = \left(\frac{b+1}{2}, +\infty \right).$$

Теорема 4.1 (П. Е. Рябов [36])**.** *Прообразы точек камер I и III состоят из двух торов Лиувилля, камеры II – из одного тора. Дуги бифуркационной диаграммы, находящиеся внутри образа отображения момента (т.е. разделяющие камеры), отвечают седловым перестройкам лиувиллевых торов типа атома B. Дуги на границе образа отображения момента соответствуют вырождению торов в окружность (т.е. отвечают атому A).*

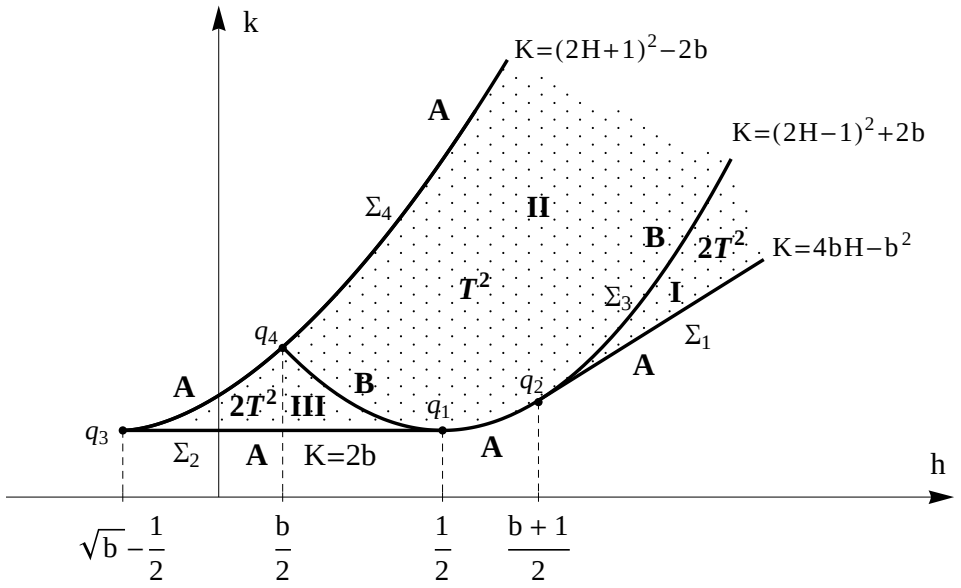


Рис. 4.1: Бифуркационная диаграмма для случая Горячева

Следствие 4.1.1. *Молекулы (без меток) для зон энергии (1)-(4) в случае Горячева при* $0 < b < 1$ *имеют вид, показанный на рисунке 4.2.*

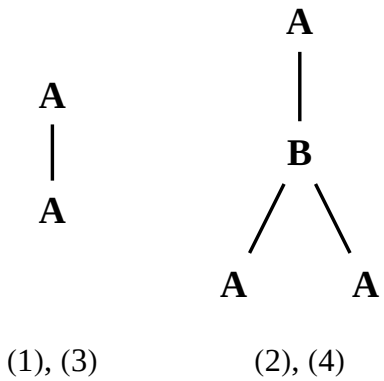


Рис. 4.2: Молекулы для компактного случая Горячева, $0 < b < 1$

Отметим, что фазовое пространство системы типа Горячева при $b \in (0,1)$ представляет собой 4-мерный диск D^4, задаваемый как касательное расслоение к 2-мерному диску $\{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, r_3 > 0\}$. Диск D^4 расслоен на 3-мерные изоэнергетические сферы и особые слои. При переходе через критический уровень энергии $H = b/2$ изоэнергетическая сфера S^3 (отвечающая энергиям из зон (2), (3), (4)) перестраивается в две сферы (отвечающие энергиям из зоны (1)). Критическому уровню энергии $b/2$ при этом соответствует букет $S^3 \vee S^3$. При $H = \sqrt{b} - 1/2$ две изоэнергетические сферы вырождаются в две точки.

В случае $b \geq 1$ исчезают камера III и зоны энергии (1) и (2). Топология слоения Лиувилля для зон (3) и (4) при этом не меняется. Поэтому мы не будем отдельно рассматривать этот

случай, предполагая всюду далее, что $0 < b < 1$.

4.2 Тонкий лиувиллев анализ

Полный топологический портрет систем Горячева при $b > 0$ даётся следующей теоремой.

Теорема 4.2 (С. С. Николаенко [77]). *Меченые молекулы в компактном случае Горячева для четырёх зон энергии* (1) – (4) *имеют вид, показанный на рисунке 4.3.*

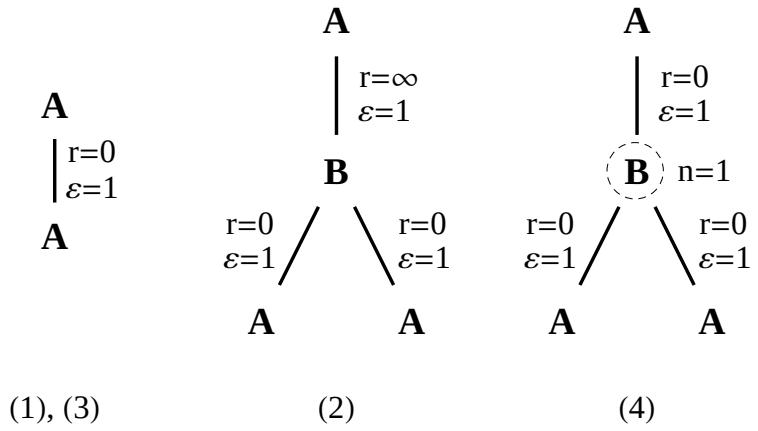


Рис. 4.3: Меченые молекулы для компактного случая Горячева

Таким образом, слоения Лиувилля для компактных систем типа Горячева описывается мечеными молекулами трёх типов. Эти молекулы характеризуют также лиувиллевы слоения многих других известных сегодня интегрируемых задач механики. В частности, как было показано В. В. Ведюшкиной (Фокичевой), все три молекулы соответствуют интегрируемым биллиардам в некоторых плоских областях, ограниченных софокусными квадриками [44]. Отсюда, в силу теоремы 1.4, получаем следствие.

Следствие 4.2.1 (см. [8, 44, 26, 27, 39]).

а) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зон (1), (3)*, лиувиллево эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности, случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша, Соколова в динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других параметров), а также интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фокальной прямой (примеры таких областей показаны на рисунке 4.4).*

б) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемому случаю Жуковского (при подходящих*

значениях энергии и параметров), а также двум интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками: эллипсом и двумя гиперболами либо двумя эллипсами и одной ветвью гиперболы (см. рис. 4.5).

в) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (4)*, лиувиллево эквивалентна интегрируемым случаям Клебша, Соколова, Ковалевской–Яхьи (при подходящих значениях энергии и параметров), а также интегрируемому биллиарду в плоской области, ограниченной эллипсом.*

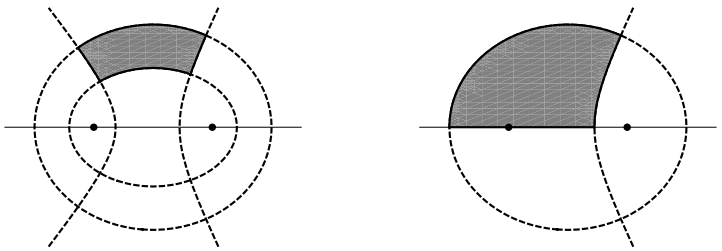


Рис. 4.4: Биллиардные области, соответствующие зонам энергии (1), (3) случая Горячева

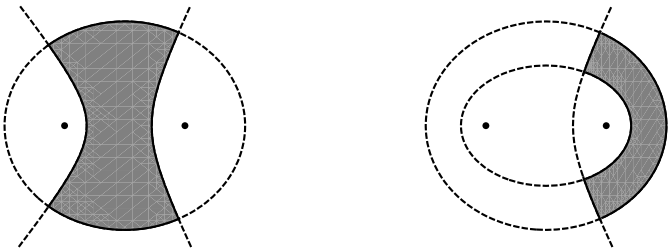


Рис. 4.5: Биллиардные области, соответствующие зоне энергии (2) случая Горячева

Замечание 4.2.1. Интересно проследить, что происходит с топологией компактного случая Горячева в пределе $b \to +0$, т.е. когда он превращается в случай Чаплыгина (см. главу 3). При этом точки q_1 и q_2 на бифуркационной диаграмме сливаются в одну, а луч Σ_1 становится продолжением отрезка Σ_2. Зона энергии (3) исчезает вовсе, а в зонах (2) и (4) два атома B (отвечающие случаям $r_3 > 0$ и $r_3 < 0$) склеиваются в один атом C_2, см. рис. 4.6, 4.7 (на рёбрах молекул указаны r-метки).

Для нахождения меченых молекул компактного случая Горячева мы воспользуемся разделением переменных для этой задачи, найденным П. Е. Рябовым в [36]. При этом мы будем использовать технику булевых функций М. П. Харламова (см. раздел 1.12), а вычисление меток будет проводиться по схеме, описанной в [31].

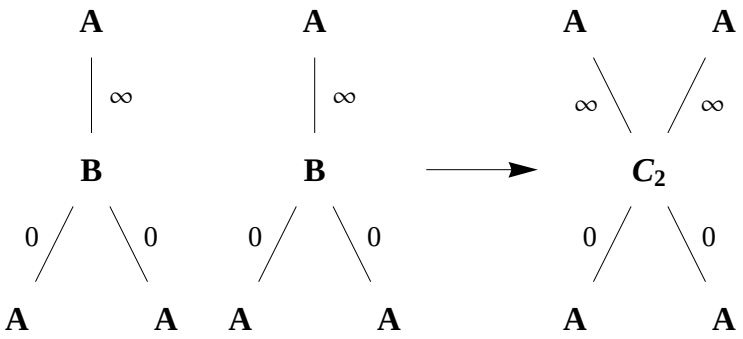


Рис. 4.6: Молекулы для зоны энергии (2) случая Горячева и соответствующая молекула случая Чаплыгина

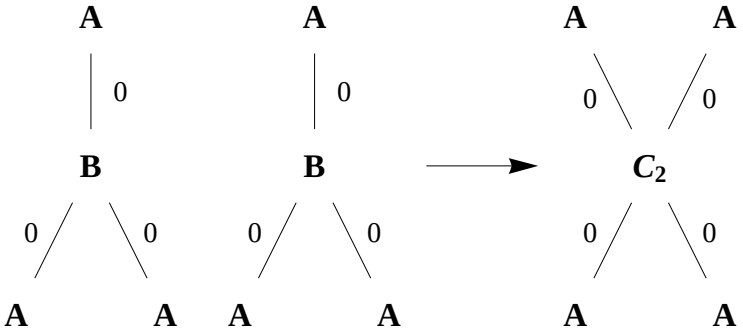


Рис. 4.7: Молекулы для зоны энергии (4) случая Горячева и соответствующая молекула случая Чаплыгина

Разделение переменных в случае Горячева означает существование на каждой совместной поверхности уровня первых интегралов $M_{h,k} = \{H = h,\, K = k\}$ переменных u_1, u_2, в которых гамильтоновы уравнения сводятся к уравнениям типа Абеля

$$\dot{u}_1 = \frac{\sqrt{P(u_1)}}{u_1 - u_2}, \qquad \dot{u}_2 = \frac{\sqrt{P(u_2)}}{u_1 - u_2}, \tag{4.2.1}$$

где

$$P_{h,k}(u) = \frac{1}{b}(2b + k - u^2)(2b - k + u^2)((u - b)^2 - k + 4bh - b^2)$$

– многочлен шестой степени, зависящий от значений h, k первых интегралов. Вводя обозначения $m_1 = \sqrt{k - 2b}$, $m_2 = \sqrt{k + 2b}$, $n_1 = b - \sqrt{k - 4bh + b^2}$, $n_2 = b + \sqrt{k - 4bh + b^2}$, можем записать (опуская индексы h, k)

$$P(u) = -\frac{1}{b}(u^2 - m_1^2)(u^2 - m_2^2)(u - n_1)(u - n_2). \tag{4.2.2}$$

Выражения исходных фазовых переменных через переменные разделения имеют при этом следующий вид:

$$s_1 = -\frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b(u_1 + u_2)}}, \qquad s_2 = -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b(u_1 + u_2)}},$$

$$
\begin{aligned}
s_3 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31}+r_{11}r_{21}r_{32}),\\
r_1 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(-r_{12}r_{21}r_{31}+r_{11}r_{22}r_{32}),\\
r_2 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31}+r_{12}r_{21}r_{32}),\\
r_3 &= \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1+u_2}},
\end{aligned}
\tag{4.2.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{m_2^2-u_1^2}, \quad r_{21} = \sqrt{m_1^2-u_1^2}, \quad r_{31} = \sqrt{(u_1-n_1)(n_2-u_1)},\\
r_{12} &= \sqrt{m_2^2-u_2^2}, \quad r_{22} = \sqrt{u_2^2-m_1^2}, \quad r_{32} = \sqrt{(u_2-n_1)(u_2-n_2)}.
\end{aligned}
$$

Каждый слой слоения Лиувилля проектируется на некоторый прямоугольник (возможно, вырождающийся в отрезок) $\Pi = [a_{11}, a_{12}] \times [a_{21}, a_{22}]$ на плоскости $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$, где a_{ij} – корни многочлена $P(u)$.

Факт разделения переменных допускает также следующую интерпретацию: для каждой совместной поверхности уровня первых интегралов $M_{h,k}$ существует гладкое отображение $G = G_{h,k}\colon M_{h,k} \to \mathrm{Re}(\Gamma_{h,k} \times \Gamma_{h,k})$, переводящее гамильтонов поток в систему вида (5). Здесь $\Gamma_{h,k} = \{v = \sqrt{P(u)}\}$ – гиперэллиптическая поверхность рода два. Поскольку связной компонентой вещественного сечения каждого из сомножителей $\Gamma_{h,k}$ является некоторая окружность $\gamma_i = \{v_i = \sqrt{P(u_i)},\ u_i \in [a_{i1}, a_{i2}]\}$, $i = 1, 2$, а вещественного сечения произведения $\Gamma_{h,k} \times \Gamma_{h,k}$ – тор $T^2_{h,k} = \gamma_1 \times \gamma_2$, то в случае связности $M_{h,k}$ имеем отображение $G\colon M_{h,k} \to T^2_{h,k}$, переводящее гамильтонов поток в поток на торе $T^2_{h,k}$, задаваемый системой (5). Если поверхность $M_{h,k}$ является тором Лиувилля, то она, как несложно видеть, представляет собой конечнолистное накрытие тора $T^2_{h,k}$. Проекцией тора $T^2_{h,k}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ является прямоугольник Π.

В рассматриваемом случае Горячева, напомним, имеется три связные области (камеры) на плоскости первых интегралов $\mathbb{R}^2(h, k)$, которые выше были обозначены римскими цифрами I, II, III. Пусть $\Pi_I, \Pi_{II}, \Pi_{III}$ – проекции соответствующих торов Лиувилля на плоскость $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ переменных разделения. В [36] было показано, что

$$
\Pi_I = [n_1, n_2] \times [m_1, m_2], \quad \Pi_{II} = [n_1, m_1] \times [n_2, m_2], \quad \Pi_{III} = [-m_1, m_1] \times [n_2, m_2].
$$

Обозначим через γ_i^j $(i = 1, 2,\ j = I, II, III)$ соответствующие циклы на торах $T^2_{h,k} \subset \mathrm{Re}(\Gamma_{h,k} \times \Gamma_{h,k})$, а именно

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^I &= \{v_1 = \sqrt{P(u_1)},\ u_1 \in [n_1, n_2]\} \times \{pt\},\\
\gamma_2^I &= \{pt\} \times \{v_2 = \sqrt{P(u_2)},\ u_2 \in [m_1, m_2]\},
\end{aligned}
$$

$$\gamma_1^{II} = \{v_1 = \sqrt{P(u_1)},\ u_1 \in [n_1, m_1]\} \times \{pt\},$$
$$\gamma_2^{II} = \{pt\} \times \{v_2 = \sqrt{P(u_2)},\ u_2 \in [n_2, m_2]\},$$
$$\gamma_1^{III} = \{v_1 = \sqrt{P(u_1)},\ u_1 \in [-m_1, m_1]\} \times \{pt\},$$
$$\gamma_2^{III} = \{pt\} \times \{v_2 = \sqrt{P(u_2)},\ u_2 \in [n_2, m_2]\}.$$

Введём на циклах γ_i^j ориентацию таким образом, чтобы положительным значениям радикалов $\sqrt{P(u_i)}$ соответствовало направление от меньшей границы отрезка изменения переменной u_i к большей. Например, ориентация цикла γ_1^I соответствует возрастанию переменной u_1 от n_1 к n_2 при $v_1 > 0$.

Далее при обозначении торов Лиувилля и рёбер молекул будем использовать номера соответствующих камер (например, I-тор, II-ребро).

Лемма 4.3. *Два I-тора Лиувилля в прообразе любой точки из камеры I различаются знаком переменной s_3, а два III-тора в прообразе точки из камеры III – знаком переменной r_2.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что $s_3 \neq 0$ на I-торах и $r_2 \neq 0$ на III-торах. Доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству соответствующих пунктов лемм 3.3 и 3.5. Таким образом, знак s_3 постоянен на каждом I-торе, а знак r_2 – на каждом III-торе. Остаётся заметить, что инволюция $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \mapsto (s_1, s_2, -s_3, -r_1, -r_2, r_3)$, меняющая знаки s_3 и r_2, сохраняет первые интегралы системы и, следовательно, переводит друг в друга два I-тора (III-тора) в прообразе произвольной точки камеры I (камеры III).

Впрочем, утверждение леммы можно было бы усмотреть и из формул 5.0.1. Действительно, радикалы $r_{\alpha i}$, входящие в состав 5.0.1, можно разделить (в зависимости от камеры) на две группы, относя в первую радикалы, не меняющие знак на соответствующих траекториях, а во вторую, радикалы, периодически меняющие знак вдоль траекторий. Иначе говоря, в регулярном случае радикал вида $\sqrt{(u_i - a_{i1})(u_i - a_{i2})}$ относится к первой группе, если ни одно из чисел a_{i1}, a_{i2} не является границей отрезка изменения переменной u_i, и ко второй группе в противном случае. Теперь рассмотрим, например, камеру I. Заметим, что в выражении для s_3 в 5.0.1 фигурирует моном $r_{11}r_{21}r_{32}$, состоящий исключительно из радикалов первой группы. Знак этого монома постоянен на траекториях системы и определяет знак переменной s_3 на соответствующем торе Лиувилля (можно показать, что $|r_{11}r_{21}r_{32}| > |r_{12}r_{22}r_{31}|$). Аналогичное верно и для камеры III и переменной r_2. □

Рассмотрим прообразы $G^{-1}(\gamma_i^j)$ циклов γ_i^j на соответствующих торах Лиувилля (в случае камер I и III отображение G будем рассматривать для любого из двух торов).

Лемма 4.4. *Прообразы $G^{-1}(\gamma_1^I)$, $G^{-1}(\gamma_1^{II})$, $G^{-1}(\gamma_2^{II})$ и $G^{-1}(\gamma_1^{III})$ состоят из двух связных компонент, а $G^{-1}(\gamma_2^I)$ и $G^{-1}(\gamma_2^{III})$ – из одной. При этом связные компоненты прообразов $G^{-1}(\gamma_1^I)$ и $G^{-1}(\gamma_1^{III})$ однолистно накрывают свой образ, а прообразов $G^{-1}(\gamma_2^I)$, $G^{-1}(\gamma_1^{II})$, $G^{-1}(\gamma_2^{II})$ и $G^{-1}(\gamma_2^{III})$ – двулистно.*

Доказательство. Кратность накрытия цикла γ_i^j связной компонентой его прообраза определить просто. Она равна минимальному числу обходов цикла γ_i^j, за которое все радикалы $r_{\alpha i}$ приобретут исходные знаки (это означает, что мы вернулись в исходную точку на многообразии M^4). Например, при однократном обходе вдоль цикла γ_2^I меняют знаки только радикалы r_{12} и r_{22}, а после повторного обхода все радикалы имеют уже прежние знаки. При однократном обходе вдоль цикла γ_1^I радикал r_{31} дважды меняет знак, а все остальные не меняют знака, и в итоге все радикалы сохраняют прежние знаки. Для остальных циклов рассуждения аналогичны.

Для определения числа связных компонент в прообразе каждого из циклов γ_i^j изучим более подробно формулы 5.0.1. Следуя [50], рассмотрим функцию (булев знак) $\operatorname{bsgn}\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ такую, что

$$\operatorname{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \geq 0, \\ 1, & \text{если } \theta < 0. \end{cases}$$

Обозначим $z_\alpha = \operatorname{bsgn}(r_{\alpha 1})$, $z_{3+\alpha} = \operatorname{bsgn}(r_{\alpha 2})$, $\alpha = 1,2,3$. Формулы 5.0.1 определяют $\mathbb{Z}_2$-линейное отображение

$$\xi\colon \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_2 \oplus z_5 \\ z_1 \oplus z_4 \\ z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 \\ z_1 \oplus z_2 \oplus z_6 \\ z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 \\ z_1 \oplus z_5 \oplus z_6 \\ z_1 \oplus z_3 \oplus z_5 \\ z_2 \oplus z_4 \oplus z_6 \end{pmatrix}, \tag{4.2.4}$$

ставящее в соответствие набору знаков радикалов $r_{\alpha i}$ набор знаков мономов в формулах 5.0.1 (символом $\oplus$ обозначена операция сложения по модулю два, обладающая естественным свойством аддитивности). Легко понять, что точка общего положения на плоскости $\mathbb{R}^2(u_1,u_2)$, для которой все радикалы $r_{\alpha i}$ вещественны, имеет 2^p прообразов в многообразии M^4, где p – ранг отображения ξ. Иными словами, число прообразов равно мощности образа отображения ξ. В данном случае это число равно $2^4 = 16$, так как среди восьми линейных комбинаций знаков z_l в (4.2.4) только четыре являются линейно независимыми (см. [36]).

Пусть мы теперь хотим найти число прообразов точки на торе $\gamma_1^j \times \gamma_2^j$, $j = I, II, III$. В этом случае знаки радикалов $\sqrt{P(u_1)} = \dfrac{1}{b} r_{11} r_{21} r_{31}$ и $\sqrt{P(u_2)} = \dfrac{1}{b} r_{12} r_{22} r_{32}$ уже фиксированы. Поэтому число прообразов будет равно мощности образа отображения ξ при условии, что значения выражений $z_1 \oplus z_2 \oplus z_3$ и $z_4 \oplus z_5 \oplus z_6$ фиксированы. Несложно подсчитать, что это число равно четырём. Действительно, из (4.2.4) следует, что уравнения $z_1 \oplus z_2 \oplus z_3 = \text{const}$ и $z_4 \oplus z_5 \oplus z_6 = \text{const}$ выделяют в 4-мерном пространстве $\operatorname{Im}\xi$ двумерное аффинное подпространство, мощность которого как раз равна четырём. Для точки $x \in \gamma_1^j \times \gamma_2^j$, где $j = I$ или III, число прообразов $|G^{-1}(x)|$ на самом деле следует поделить пополам (напомним, что в случае камер I и III мы

рассматриваем отображение G только для одного из двух торов Лиувилля).

Теперь, зная мощность ξ полного прообраза каждой точки циклов γ_i^j и кратность η накрытия этих циклов связными компонентами их прообразов, получаем число связных компонент как отношение ξ/η. □

Далее через φ_i^j будем обозначать связную компоненту прообраза $G^{-1}(\gamma_i^j)$ цикла γ_i^j. Оказывается, в терминах циклов φ_i^j удобно выбрать базисы на граничных торах атомов, после чего в явном виде выписать матрицы склейки. Отметим, что каждый из циклов φ_i^j наследует ориентацию от соответствующего цикла γ_i^j.

Положим $\Sigma_3 = \Sigma_3^{(1)} \cup \Sigma_3^{(2)} \cup \Sigma_3^{(3)}$, где дуги $\Sigma_3^{(1)}, \Sigma_3^{(2)}, \Sigma_3^{(3)}$ бифуркационной диаграммы выделяются соответственно условиями $b/2 \le h \le 1/2$, $1/2 \le h \le (b+1)/2$, $h \ge (b+1)/2$. Теперь для каждого участка бифуркационной диаграммы мы предъявим базисы на граничных торах соответствующих атомов.

Напомним правила выбора базисных циклов на граничных торах двух интересующих нас типов атомов (см. раздел 1.8). В случае атома A в качестве первого базисного цикла на единственном граничном торе выбирается цикл, стягивающийся в точку, а в качестве второго – цикл, гомологичный критической окружности атома. При этом ориентация второго цикла выбирается естественным образом (согласованно с ориентацией гамильтонова поля на особой окружности), а ориентация первого цикла определяется ориентацией изоэнергетической поверхности.

В случае седлового атома без звёздочек базисные циклы на граничных торах нужно выбирать так, чтобы первые циклы были гомологичны критической окружности атома, а вторые были связаны условием существования глобального трансверсального сечения атома, проходящего через них. Ориентация первых циклов при этом должна быть согласована с естественной ориентацией критической окружности, а ориентация вторых - с ориентацией изоэнергетической поверхности.

Перейдём теперь к изучению поведения циклов φ_i^j вблизи особых слоёв, соответствующих различным дугам бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим, например, дугу Σ_1. Она характеризуется тем, что $n_1 = n_2 = b$. Это означает, что цикл γ_1^I, а вместе с ним и цикл φ_1^I вырождаются в точку. Цикл φ_2^I при этом накладывается на критическую окружность. Следовательно, в качестве базиса на граничном торе каждого из двух соответствующих атомов A можно взять $(\pm\varphi_1^I, \pm\varphi_2^I)$.

Определим теперь ориентацию второго цикла. Для этого нужно понять, возрастает или убывает переменная u_2 вдоль гамильтонова поля при условии, что $\sqrt{P(u_2)} = \dfrac{1}{b} r_{12} r_{22} r_{32} > 0$. Так как $n_1 = n_2$, то $u_1 = n_1 = n_2$, и $r_{31} = 0$. Из 2.1.10 и 5.0.1 имеем:

$$\dot{r}_3 = r_1 s_2 - s_1 r_2 = C r_{12} r_{22} r_{32} (r_{11}^2 - r_{21}^2) = 4bC r_{12} r_{22} r_{32} > 0,$$

где $C = \dfrac{1}{4b(u_2^2 - u_1^2)\sqrt{2(u_1+u_2)}} > 0$. Значит, r_3 возрастает в силу системы 2.1.7, а так как u_1

не меняется, то из выражения для r_3 в 5.0.1 заключаем, что u_2 убывает. Итак, цикл φ_2^I нужно брать со знаком минус.

Далее, для дуги Σ_2 имеем $m_1 = u_1 = 0$, $r_{21} = 0$. Значит, цикл φ_1^{III} стягивается в точку, а цикл φ_2^{III} "сползает" на критическую окружность атома A. Поэтому в качестве базиса на граничном торе каждого из двух атомов A берём $(\pm\varphi_1^{III}, \pm\varphi_2^{III})$. Так как $r_{21} = 0$, то $s_1 = 0$, и система 2.1.7 даёт

$$\dot{r}_3 = r_1 s_2 = C r_{11}^2 r_{12} r_{22} r_{32} > 0,$$

если $\sqrt{P(u_2)} > 0$. Возрастанию r_3 при фиксированном u_1 соответствует убывание u_2, значит, второй базисный цикл φ_2^{III} берём со знаком минус.

Аналогично выписываются базисы граничных торов атомов A для дуг $\Sigma_3^{(2)}$ и Σ_4. В случае дуги $\Sigma_3^{(2)}$ имеем $n_1 = m_1 = u_1$, $r_{21} = r_{31} = 0$, $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, допустимый базис выбирается в виде $(\pm\varphi_1^{II}, -\varphi_2^{II})$. Для дуги Σ_4 выполнено $n_2 = m_2 = u_2$, $r_{12} = r_{32} = 0$, $r_1 = s_2 = s_3 = 0$, а искомый базис имеет вид $(\pm\varphi_2^{II}, \varphi_1^{II})$ при $h > b/2$, либо $(\pm\varphi_2^{III}, \varphi_1^{III})$ при $h < b/2$.

Рассмотрим теперь дугу $\Sigma_3^{(1)}$, соответствующую атому B. Она характеризуется тем, что многочлен P имеет кратный корень $n_1 = -m_1$. Легко видеть, что с циклом φ_2 при пересечении дуги $\Sigma_3^{(1)}$ не происходит никаких изменений. Проследим, как меняется при прохождении через особый слой цикл φ_1^{II}, соответствующий камере II и двулистно накрывающий цикл γ_1^{II}. На критическом уровне интеграла K две точки цикла φ_1^{II}, отвечающие значению $u_1 = n_1 = -m_1$, склеиваются в одну, превращая цикл в "восьмёрку", которая затем распадается на два цикла φ_1^{III}, однолистно накрывающих γ_1^{III} (рис. 4.8). Таким образом, соответствующий дуге $\Sigma_3^{(1)}$ атом B представляет собой прямое произведение цикла $\varphi_2^{II} = \varphi_2^{III}$ (как слоя тривиального расслоения Зейферта) и плоского атома B, описывающего перестройку цикла φ_1^{II} в два цикла φ_1^{III}. Ясно, что в таком случае в качестве базиса на граничных торах можно брать $(-\varphi_2^{II}, \pm\varphi_1^{II})$ на II-торе и $(-\varphi_2^{III}, \mp\varphi_1^{III})$ – на двух III-торах. Ориентация первого цикла, как и выше, определяется исходя из системы 2.1.7 и того факта, что $s_1 = r_2 = s_3 = 0$ на критической траектории атома B.

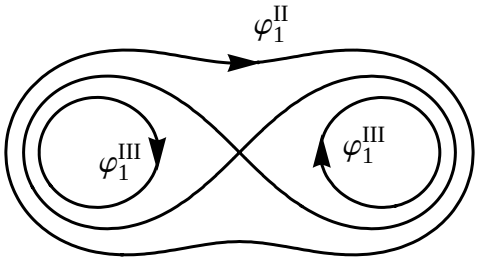


Рис. 4.8: Перестройка цикла φ_1^{II} в циклы φ_1^{III}

Наконец, чтобы определить базисы на граничных торах атома B, отвечающего дуге $\Sigma_3^{(3)}$ бифуркационной диаграммы, воспользуемся леммой, которая будет доказана в следующем пункте.

Лемма 4.5. *Циклы $2\varphi_1^I - \varphi_2^I$ и $\varphi_1^{II} - \varphi_2^{II}$ (с учётом ориентации) гомологичны критической окружности атома B, отвечающего дуге $\Sigma_3^{(3)}$, а циклы φ_1^I и φ_1^{II} высекаются некоторым трансверсальным сечением атома.*

Таким образом, в качестве базисов на граничных торах атома B, отвечающего дуге $\Sigma_3^{(3)}$, можно взять $(\varphi_1^{II} - \varphi_2^{II}, \pm\varphi_1^{II})$ на II-торе и $(2\varphi_1^I - \varphi_2^I, \mp\varphi_1^I)$ – на двух I-торах.

Итак, для граничных торов всех атомов мы предъявили допустимые базисы. При этом для каждого базиса осталась неоднозначность в ориентации одного из циклов, которую устраним исходя из требования, чтобы определители всех матриц склеек были равны -1. Отметим, что для каждой из молекул это можно сделать двумя способами, в зависимости от ориентации изоэнергетического многообразия. Полученные в итоге базисы на торах и матрицы склейки на рёбрах молекул представлены на рисунках 4.9, 4.10. Метки теперь вычисляются непосредственно по определению. Теорема 4.2 доказана.

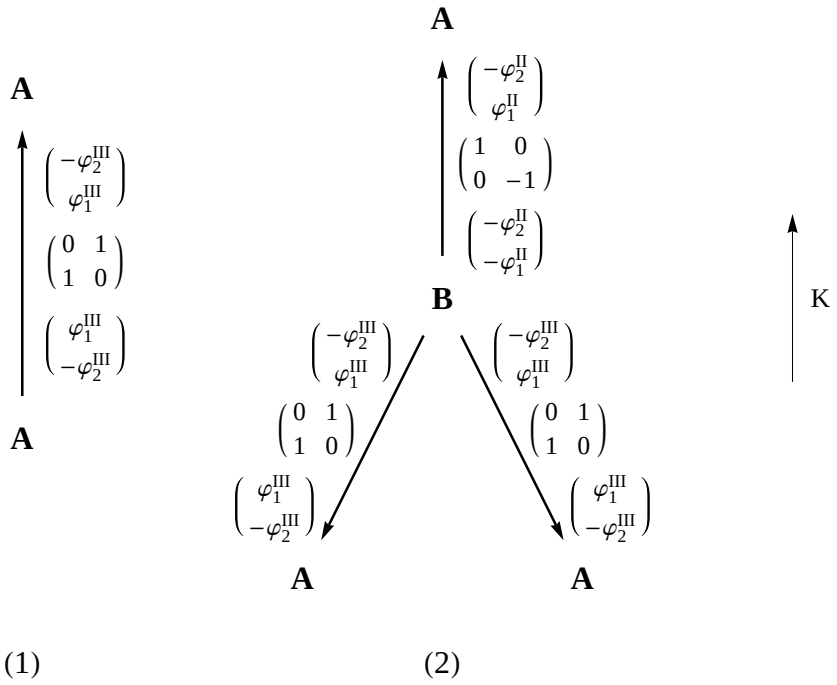


Рис. 4.9: Допустимые базисы на граничных торах атомов и матрицы склейки на рёбрах молекул (зоны энергии (1), (2))

Замечание 4.2.2. Некоторые из меток в случае Горячева можно вычислить проще, а именно, при помощи некоторых стандартных приёмов. Например, известно, что если молекула простейшего вида A—A задаёт изоэнергетическую сферу S^3, то метка r на единственном ребре этой молекулы равна нулю (см. [8, том 2, предл. 1.1]). Метку ε при этом можно сделать равной единице путём выбора подходящей ориентации на $Q_h^3 = S^3$. Тем самым мы сразу получаем меченые молекулы для зон энергии (1) и (3).

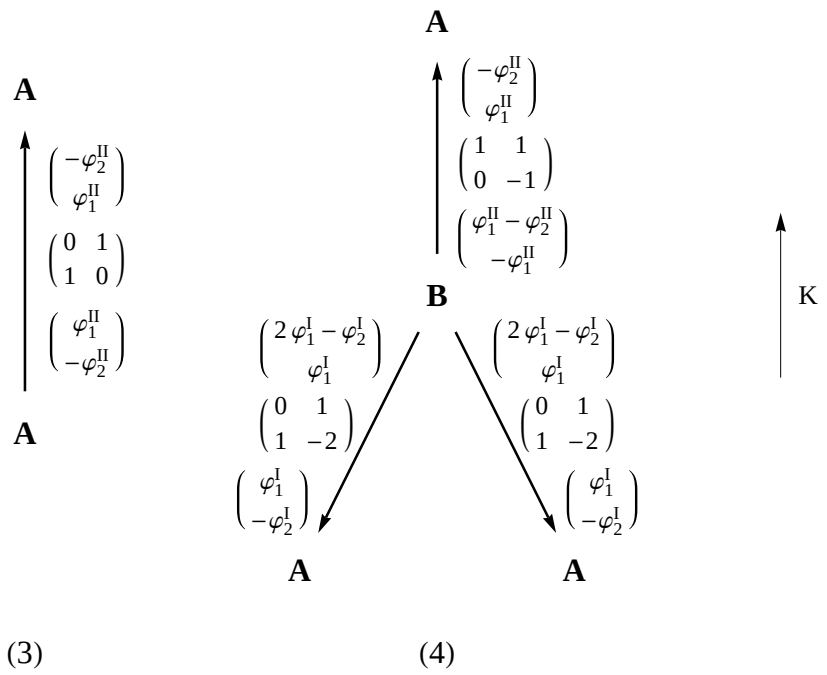


Рис. 4.10: Допустимые базисы на граничных торах атомов и матрицы склейки на рёбрах молекул (зоны энергии (3), (4))

В случае молекул для зон (2), (4) можно воспользоваться методом круговых молекул. Круговая молекула определяется точно так же, как и изоэнергетическая меченая молекула, с той лишь разницей, что она описывает слоение Лиувилля трёхмерной поверхности в прообразе некоторой окружности малого радиуса, обходящей особую точку. В рассматриваемом случае Горячева точки q_1, q_2 бифуркационной диаграммы (рис. 4.11) отвечают вырожденным особенностям ранга 1 (см. теорему 2.1). Известно, что в окрестности таких особенностей имеется структура расслоения Зейферта, согласованного со слоением Лиувилля [72]. Отсюда легко усмотреть, что r-метки на рёбрах соответствующих круговых молекул (соединяющих атомы B и A) равны нулю, а ε-метки – единице (эти круговые молекулы отвечают типичной бифуркации типа “pitch-fork”). Следовательно, то же самое можно утверждать и для I- и III-рёбер изоэнергетических молекул.

Далее, точка q_4 бифуркационной диаграммы соответствует невырожденной особенности ранга ноль типа центр-седло (см. теорему 2.1). В этом случае известно (см. [8, теорема 9.2]), что r-метки на рёбрах круговой молекулы равны бесконечности. Таким образом, на II-ребре молекулы, отвечающей зоне (2), метка r равна бесконечности, а метку ε можно сделать равной единице путём выбора подходящей ориентации изоэнергетической поверхности.

Также отметим, что в случае камер I, III слоение Лиувилля допускает явное описание в терминах исходных фазовых переменных s_i, r_i, аналогичное предъявленному в разделе 3.3. Это позволяет в явном виде указать некоторые базисные циклы на граничных торах атомов и выписать некоторые матрицы склейки.

Замечание 4.2.3. Знание базисных циклов на граничных торах всех атомов случая Горяче-

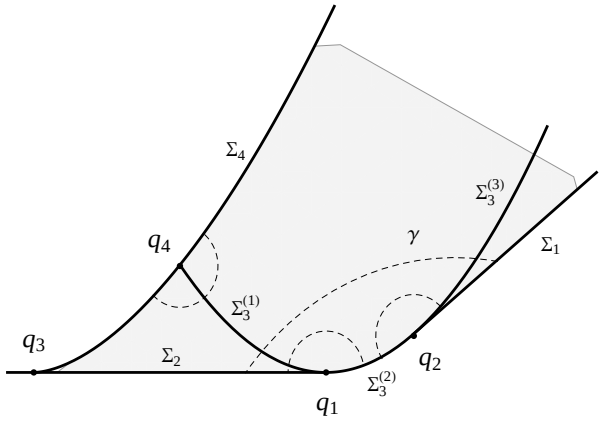


Рис. 4.11: Кривая γ в образе отображения момента

ва позволяет выписать круговую молекулу особых точек q_1, q_2, соответствующую кривой γ на рисунке 4.11. Эта молекула показана на рисунке 4.12.

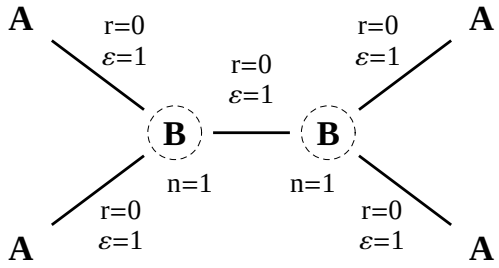


Рис. 4.12: Круговая молекула особых точек q_1, q_2

Замечание 4.2.4. Первый цикл любого допустимого базиса на границе каждого атома определён однозначно (в случае атома A – с точностью до ориентации). Интересно понять, как связаны между собой такие циклы для разных дуг бифуркационной диаграммы. Ясно, что эти циклы по непрерывности можно определить на любом торе Лиувилля в пределах одной камеры. На рисунке 4.13 для каждой камеры изображена развёртка соответствующего тора Лиувилля с указанием первых циклов базисов, отвечающих тем дугам, которые ограничивают данную камеру. При этом стороны развёртки изображают циклы φ_1, φ_2.

4.2.1 Доказательство леммы 4.5

Для доказательства леммы 4.5 необходимо понять, как устроена проекция $\hat{G}\colon L \to \mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ особого слоя L атома B (гомеоморфная прямому произведению "восьмёрки" на окружность) на плоскость разделяющихся переменных. Структура этой проекции схематически изображена на рисунке 4.14. Её образом служит прямоугольник П, две из сторон которого (нижняя и правая)

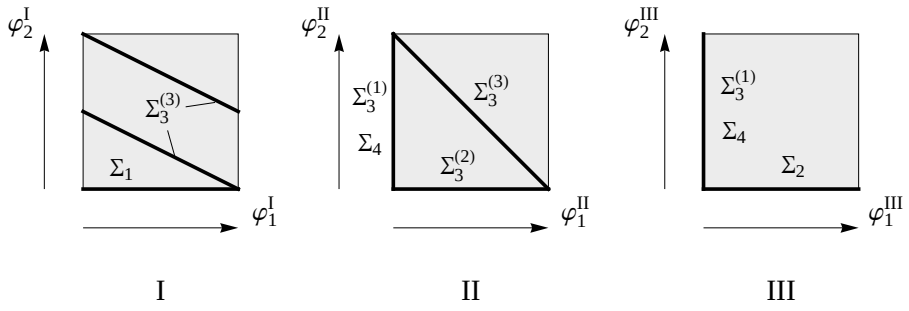


Рис. 4.13: Связь первых базисных циклов на торах Лиувилля

соответствуют кратному корню многочлена P. При этом в вершине, общей для этих сторон, разделяющиеся переменные u_1, u_2 совпадают: $u_1 = u_2 = n_2 = m_1$.

На рисунке 4.14 точки, обозначенные буквой "Y", являются прообразами точек, обозначенных буквой "X", с такими же нижними индексами. (Например, $Y_{34}^1, Y_{34}^2, Y_{34}^3, Y_{34}^4$ – прообразы точки X_{34}.) Для вершин и сторон прямоугольника Π изображены их полные прообразы, в то время как для интервалов $X_{12}X_{34}$ и $X_{23}X_{14}$ – только "половина" прообраза, для которой $s_2 > 0$. Поясним, что $s_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $u_2 = m_2$, т.е. в точности на $\hat{G}^{-1}(X_2X_3)$ (это следует из 5.0.1). Чтобы не загромождать рисунок, мы не показываем на нём те компоненты прообраза интервалов $X_{12}X_{34}$, $X_{23}X_{14}$, на которых $s_2 < 0$.

Приступим к обоснованию рисунка 4.14. В основе анализа проекции $\hat{G}$ лежит следующее утверждение.

Предложение 4.2.2. *1. При проекции $\hat{G}$ внутренность прямоугольника $\Pi = X_1X_2X_3X_4$ накрывается 16-тью листами, различаемыми знаками переменных $s_1, s_2, s_3, \tilde{s}_3$, где $\tilde{s}_3 = r_{12}r_{22}r_{31}$ (итого $2^4 = 16$ вариантов).*

2. *Прообраз внутренних точек отрезка X_1X_2 состоит из восьми компонент связности, различаемых знаками переменных s_1, s_2, s_3.*

3. *Прообраз внутренних точек отрезка X_2X_3 состоит из восьми компонент, различаемых знаками s_1, r_2, s_3.*

4. *Прообраз внутренних точек отрезков X_2X_3 и X_1X_4 состоит из четырёх компонент, различаемых знаками r_1, s_2.*

5. *Прообраз точки X_1 состоит из двух точек, различаемых знаком переменной s_2.*

6. *Прообраз X_2 состоит из четырёх точек, различаемых знаками s_1, s_3.*

7. *Прообраз X_3 состоит из двух точек, различаемых знаком r_1.*

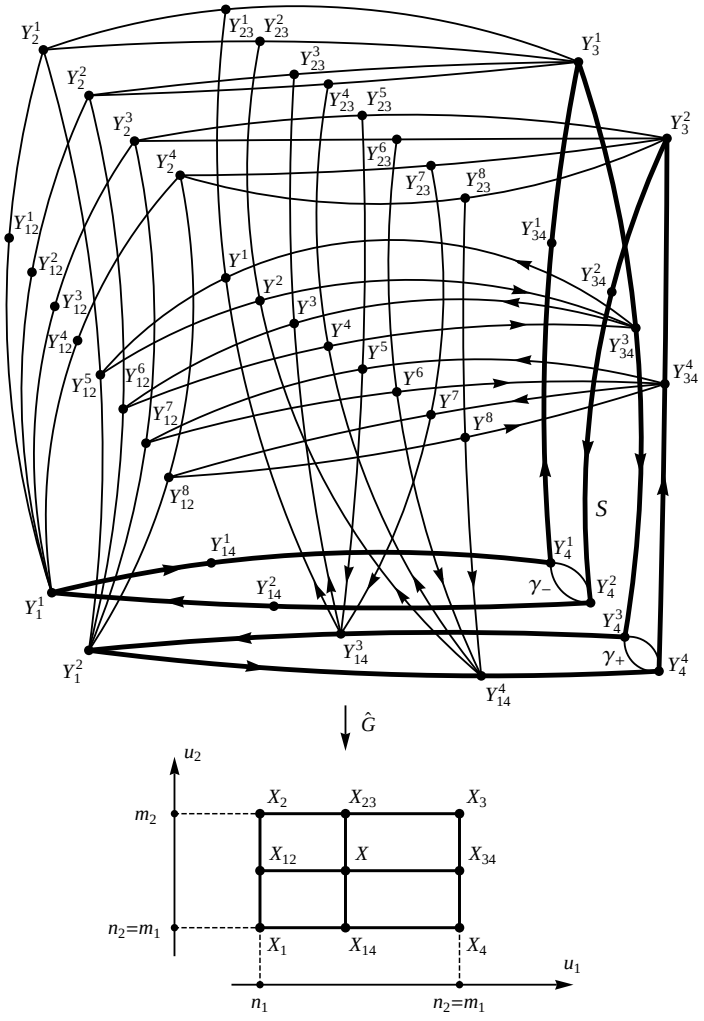


Рис. 4.14: Структура проекции $\hat{G}$ особого слоя атома B на плоскость $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ (зона энергии (4))

8. *Точка X_4 имеет в качестве прообраза две окружности γ_+, γ_-, различаемые знаком s_2. Каждая из этих окружностей имеет по две общие точки с критической окружностью S атома B. Кроме того, $\hat{G}^{-1}(X_1X_4 \cup X_3X_4) = S \cup \gamma_+ \cup \gamma_-$.*

В основе доказательства предложения 4.2.2 лежит анализ линейного отображения ξ (4.2.4). Действительно, мощность прообраза $\hat{G}^{-1}(P)$ точки P прямоугольника Π равна мощности образа отображения ξ (что соответствует количеству всевозможных наборов знаков мономов в формулах (5.0.1)), или, что то же самое, 2^p, где p – ранг отображения ξ. Как уже было отмечено при доказательстве леммы 4.4, для внутренних точек прямоугольника Π это число равно $2^4 = 16$. При этом в качестве четырёх линейно независимых сумм в (4.2.4) можно взять $z_2 \oplus z_5$, $z_1 \oplus z_4$, $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$, $z_3 \oplus z_4 \oplus z_5$. При этом первые два выражения определяют, согласно (5.0.1), знаки переменных s_1 и s_2, а вторые два – знаки мономов $r_{11}r_{21}r_{32}$, $r_{12}r_{22}r_{31} = \tilde{s}_3$, входящих в фор-

мулу для s_3. Несложно проверить, что на особом слое L имеем $|r_{11}r_{21}r_{32}| > |r_{12}r_{22}r_{31}|$, поэтому выражение $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$ определяет знак s_3.

Рассмотрим теперь, например, интервал X_2X_3. Для него выполнено $u_2 = m_2$, $r_{12} = 0$, поэтому в (4.2.4) исчезают все суммы, содержащие z_4 (т.е. соответствующие мономам в (5.0.1), содержащим радикал r_{12}). У такого отображения ξ ранг равен трём, в качестве трёх базисных компонент можно взять суммы $z_2 \oplus z_5$, $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$, $z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$, соответствующие, как несложно видеть, знакам переменных s_1, s_3, r_2.

Остальные стороны, а также вершины X_1, X_2, X_3 прямоугольника П рассматриваются аналогично. Соответствующие результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Структура проекции $\hat{G}$

Подмножество прямоугольника П	**Переменные z_i, не входящие в отображение ξ**	**Базисные компоненты отображения ξ**	**Соответствующая переменная**
$\mathrm{Int}(X_1X_2X_3X_4)$	–	$z_2 \oplus z_5$ $z_1 \oplus z_4$ $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$ $z_3 \oplus z_4 \oplus z_5$	s_1 s_2 s_3 $\tilde{s}_3$
$\mathrm{Int}(X_1X_2)$	z_3	$z_2 \oplus z_5$ $z_1 \oplus z_4$ $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	s_1 s_2 s_3
$\mathrm{Int}(X_2X_3)$	z_4	$z_2 \oplus z_5$ $z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$ $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	s_1 r_2 s_3
$\mathrm{Int}(X_3X_4)$	z_2, z_3	$z_1 \oplus z_5 \oplus z_6$ $z_1 \oplus z_4$	r_1 s_2
$\mathrm{Int}(X_1X_4)$	z_5, z_6	$z_2 \oplus z_3 \oplus z_4$ $z_1 \oplus z_4$	r_1 s_2
X_1	z_3, z_5, z_6	$z_1 \oplus z_4$	s_2
X_2	z_3, z_4	$z_2 \oplus z_5$ $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	s_1 s_3
X_3	z_2, z_3, z_4	$z_1 \oplus z_5 \oplus z_6$	r_1

Особый интерес представляет точка X_4. В ней имеем $u_1 = u_2$, поэтому, строго говоря, формулы (5.0.1) в этом случае не определены. Чтобы понять, какое подмножество особого слоя L проектируется в точку X_4, выясним, для каких точек фазового многообразия M^4 переменные разделения совпадают. Согласно [36], переменные u_1, u_2 определяются как корни квадратного

уравнения

$$r_3^2u^2 - 2bu + \left(2b\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) - kr_3^2\right) = 0,$$

где k – значение интеграла K. Поэтому условие равенства $u_1 = u_2$ записывается в виде $D = 4b^2 - 4r_3^2\left(2b\left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2}\right) - kr_3^2\right) = 0$. Подставляя (2.1.6), получаем $D = 4r_3^4((s_1^2 - s_2^2 + r_3^2)^2 + 4s_1^2s_2^2) = 0$. Отсюда $s_1 = 0$, $s_2^2 = r_3^2$, а из условия $s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = 0$ следует $s_3 = \pm r_2$. В итоге получаем две окружности $\gamma_\pm$, различаемые знаком s_2:

$$\gamma_\pm = \left\{ r_1^2 + r_2^2 = 1 - \frac{b}{2h-1},\ r_3 = \sqrt{\frac{b}{2h-1}},\ s_2 = \pm\sqrt{\frac{b}{2h-1}},\ s_3 = \mp r_2,\ s_1 = 0 \right\}.$$

Здесь h – значение гамильтониана H.

Рассмотрим теперь критическую окружность $S \subset L$. Она задаётся следующим образом (см. формулу 2.3.6):

$$S = \left\{ r_1^2 + r_3^2 = 1,\ s_2^2 = 2h - 1 + r_3^2 - \frac{b}{r_3^2},\ s_1 = r_2 = s_3 = 0 \right\}.$$

Из того, что $s_1 = 0$, следует $r_{21} = 0$ или $r_{22} = 0$, откуда либо $u_1 = m_1$, либо $u_2 = m_1$. Поэтому $\hat{G}(S) \subset X_1X_4 \cup X_3X_4$. С другой стороны, если $P \in (X_1X_4 \cup X_3X_4) \setminus \{X_4\}$, то в точке P либо $u_1 = m_1 = n_2$ и $r_{21} = r_{31} = 0$, либо $u_2 = m_1 = n_2$ и $r_{22} = r_{32} = 0$. В обоих случаях в силу (5.0.1) $s_1 = r_2 = s_3 = 0$, поэтому $P \in S$. Ясно также, что каждая из окружностей γ_+, γ_- пересекает S по двум точкам:

$$\gamma_+ \cap S = \left\{ s_1 = r_2 = s_3 = 0,\ r_3 = s_2 = \sqrt{\frac{b}{2h-1}},\ r_1 = \pm\sqrt{1 - \frac{b}{2h-1}} \right\};$$

$$\gamma_- \cap S = \left\{ s_1 = r_2 = s_3 = 0,\ r_3 = -s_2 = \sqrt{\frac{b}{2h-1}},\ r_1 = \pm\sqrt{1 - \frac{b}{2h-1}} \right\}.$$

Тем самым предложение 4.2.2 полностью доказано.

Результаты доказанного предложения представлены в таблице 3, где, в частности, даются пояснения к обозначенным на рисунке 4.14 точкам особого слоя L в терминах знаков соответствующих переменных. Например, точка Y^1 характеризуется тем, что в ней $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$, $\tilde{s}_3 > 0$.

Итак, мы нашли по отдельности прообразы внутренности, сторон и вершин прямоугольника Π и охарактеризовали связные компоненты этих прообразов в терминах знаков некоторых переменных. Для восстановления полной картины проекции $\hat{G}$ нам осталось понять, как различные компоненты "склеиваются" между собой. Рассмотрим, например, отрезок $X_{12}XX_{34} \subset \Pi$. Его прообраз состоит из 16-ти кривых вида $Y_{12}^iY^jY_{34}^k$ (их начала и концы могут совпадать). При этом точке Y_{12}^i приписаны знаки переменных s_1, s_2, s_3, точке Y^j – знаки $s_1, s_2, s_3, \tilde{s}_3$, точке Y_{34}^k – знаки r_1, s_2. Из соображений непрерывности ясно, что $\operatorname{sign}(s_1(Y_{12}^i)) = \operatorname{sign}(s_1(Y^j))$,

$\operatorname{sign}(s_2(Y^i_{12})) = \operatorname{sign}(s_2(Y^k_{34})) = \operatorname{sign}(s_2(Y^j))$, $\operatorname{sign}(s_3(Y^i_{12})) = \operatorname{sign}(s_3(Y^j))$. Остаётся определить знак переменной r_1 в точке Y^k_{34}. Так как $r_{12}r_{21}r_{31}|_{Y^k_{34}} = 0$, то из формул (5.0.1) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(r_1(Y^k_{34})) &= -\operatorname{sign}(r_{11}r_{22}r_{32}|_{Y^k_{34}}) = -\operatorname{sign}(r_{11}r_{22}r_{32}|_{Y^j}) = \\ &= -\operatorname{sign}(r_{21}r_{22}|_{Y^j})\operatorname{sign}(r_{11}r_{21}r_{32}|_{Y^j}) = -\operatorname{sign}(s_1(Y^j))\operatorname{sign}(s_3(Y^j)).\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Такая связь знаков, характеризующих точки Y^i_{12}, Y^j, Y^k_{34}, как раз соответствует рисунку 4.14.

Таблица 3. Структура проекции $\hat{G}$: пояснения к рисунку 4.14

Подмножество прямоугольника П	**Число компонент прообраза**	**Переменные, определяющие компоненту**	**Пояснения к точкам в прообразе**
$\operatorname{Int}(X_1X_2X_3X_4)$	16	$s_1, s_2, s_3, \tilde{s}_3$	$Y^1\colon\ -+++$ $Y^2\colon\ -++-$ $Y^3\colon\ ++--$ $Y^4\colon\ ++-+$ $Y^5\colon\ +++-$ $Y^6\colon\ ++++$ $Y^7\colon\ -+-+$ $Y^8\colon\ -+--$
$\operatorname{Int}(X_1X_2)$	8	s_1, s_2, s_3	$Y^1_{12}\colon\ --+$ $Y^2_{12}\colon\ +--$ $Y^3_{12}\colon\ +-+$ $Y^4_{12}\colon\ ---$ $Y^5_{12}\colon\ -++$ $Y^6_{12}\colon\ ++-$ $Y^7_{12}\colon\ +++$ $Y^8_{12}\colon\ -+-$
$\operatorname{Int}(X_2X_3)$	8	s_1, r_2, s_3	$Y^1_{23}\colon\ -++$ $Y^2_{23}\colon\ --+$ $Y^3_{23}\colon\ +--$ $Y^4_{23}\colon\ ++-$ $Y^5_{23}\colon\ +-+$ $Y^6_{23}\colon\ +++$ $Y^7_{23}\colon\ -+-$ $Y^8_{23}\colon\ ---$
$\operatorname{Int}(X_3X_4)$	4	r_1, s_2	$Y^1_{34}\colon\ +-$ $Y^2_{34}\colon\ --$ $Y^3_{34}\colon\ ++$ $Y^4_{34}\colon\ -+$
$\operatorname{Int}(X_1X_4)$	4	r_1, s_2	$Y^1_{14}\colon\ +-$ $Y^2_{14}\colon\ --$ $Y^3_{14}\colon\ ++$ $Y^4_{14}\colon\ -+$
X_1	2	s_2	$Y^1_1\colon\ -$ $Y^2_1\colon\ +$
X_2	4	s_1, s_3	$Y^1_2\colon\ -+$ $Y^2_2\colon\ +-$ $Y^3_2\colon\ ++$ $Y^4_2\colon\ --$
X_3	2	r_1	$Y^1_3\colon\ +$ $Y^2_3\colon\ -$
X_4	2	s_2	$Y^1_4\colon\ +-$ $Y^2_4\colon\ --$ $Y^3_4\colon\ ++$ $Y^4_4\colon\ -+$

Аналогично, пусть $Y^i_{23}Y^jY^k_{14} \subset \hat{G}^{-1}(X_{23}XX_{14})$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(s_1(Y^i_{23})) = \operatorname{sign}(s_1(Y^j)), \quad \operatorname{sign}(s_2(Y^k_{14})) = \operatorname{sign}(s_2(Y^j)),\\
&\operatorname{sign}(s_3(Y^i_{23})) = \operatorname{sign}(s_3(Y^j)),\\
&\operatorname{sign}(r_2(Y^k_{23})) = -\operatorname{sign}(r_{11}r_{22}r_{31}|_{Y^k_{23}}) = -\operatorname{sign}(r_{11}r_{22}r_{31}|_{Y^j}) =\\
&\quad = -\operatorname{sign}(r_{11}r_{12}|_{Y^j})\operatorname{sign}(r_{12}r_{22}r_{31}|_{Y^j}) = \operatorname{sign}(s_2(Y^j))\operatorname{sign}(\tilde{s}_3(Y^j)),\\
&\operatorname{sign}(r_1(Y^k_{14})) = \operatorname{sign}(r_{12}r_{21}r_{31}|_{Y^k_{14}}) = \operatorname{sign}(r_{12}r_{21}r_{31}|_{Y^j}) =\\
&\quad = \operatorname{sign}(r_{21}r_{22}|_{Y^j})\operatorname{sign}(r_{12}r_{22}r_{31}|_{Y^j}) = -\operatorname{sign}(s_1(Y^j))\operatorname{sign}(\tilde{s}_3(Y^j)).
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Точно так же определяем правила "склейки" всех других компонент в прообразе $\hat{G}^{-1}(\Pi)$.

Поясним теперь выбор ориентации на критической окружности S и кривых вида $Y^i_{12}Y^jY^k_{34}$, $Y^i_{23}Y^jY^k_{14}$. На окружности S, показанной на рисунке 4.14 жирной линией, отмечена её естественная ориентация, определяемая, как это делалось выше, из уравнений (2.1.7). На кривых $Y^i_{12}Y^jY^k_{34}$, $Y^i_{23}Y^jY^k_{14}$ ориентация определяется, как и на циклах φ_1, φ_2, знаком $\operatorname{sign}(\sqrt{P(u_1)}) = \operatorname{sign}(r_{11}r_{21}r_{31})$ или $\operatorname{sign}(\sqrt{P(u_2)}) = \operatorname{sign}(r_{12}r_{22}r_{32})$. Здесь нужно заметить, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(r_{11}r_{21}r_{31}) = \operatorname{sign}(r_{21}r_{22})\operatorname{sign}(r_{11}r_{12})\operatorname{sign}(r_{12}r_{22}r_{31}) = \operatorname{sign} s_1 \operatorname{sign} s_2 \operatorname{sign} \tilde{s}_3,\\
&\operatorname{sign}(r_{12}r_{22}r_{32}) = \operatorname{sign}(r_{21}r_{22})\operatorname{sign}(r_{11}r_{12})\operatorname{sign}(r_{11}r_{21}r_{32}) = -\operatorname{sign} s_1 \operatorname{sign} s_2 \operatorname{sign} s_3.
\end{aligned}$$

Тем самым мы завершаем пояснение рисунка 4.14 и переходим к выбору допустимых базисов циклов на граничных торах атома B. Для этого "стянем" циклы φ^j_i, $i = 1, 2$, $j = I, II$, на особый слой L. Можно считать, что полученные таким образом циклы на L (для которых сохраним те же обозначения) лежат в прообразах отрезков $X_{12}X_{34}$ и $X_{23}X_{14}$. При этом у нас будет два цикла φ^I_1 и два цикла φ^I_2 (соответственно двум I-торам, различающихся, согласно лемме 4.3, знаком переменной s_3). Поэтому положим $\varphi^I_1 = \varphi^{I+}_1$, если $s_3|_{\varphi^I_1} \geq 0$, и $\varphi^I_1 = \varphi^{I-}_1$, если $s_3|_{\varphi^I_1} \leq 0$ $(i = 1, 2)$.

Итак, мы имеем шесть циклов $\varphi^{I\pm}_i, \varphi^{II}_i \subset \hat{G}^{-1}(X_{12}X_{34} \cup X_{23}X_{14})$, $i = 1, 2$. Будем полагать, что циклы $\varphi^{I+}_i, \varphi^{II}_i$ содержат точку Y^1, а циклы φ^{I-}_i – точку Y^3. Тем самым мы фиксируем представителей в классах гомологичных циклов. Далее, мы утверждаем, что

$$\begin{aligned}
&\varphi^{I+}_1 = Y^1Y^5_{12}Y^2Y^3_{34}Y^1, && \varphi^{I+}_2 = Y^1Y^1_{23}Y^2_{14}Y^5_{23}Y^5Y^3_{14}Y^1,\\
&\varphi^{I-}_1 = Y^3Y^6_{12}Y^4Y^3_{34}Y^3, && \varphi^{I-}_2 = Y^3Y^3_{23}Y^2_{14}Y^7_{23}Y^7Y^3_{14}Y^3,\\
&\varphi^{II}_1 = Y^1Y^5_{12}Y^2Y^3_{34}Y^3Y^6_{12}Y^4Y^3_{34}Y^1, && \varphi^{II}_2 = Y^1Y^1_{23}Y^2_{14}Y^7_{23}Y^7Y^3_{14}Y^1.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Для доказательства этого факта достаточно для каждого цикла φ^j_i восстановить соответствующую последовательность компонент прообраза отрезка $X_{12}X_{34}$ или $X_{23}X_{14}$. Для этого нужно понять, как меняются знаки переменных $s_1, s_2, s_3, \tilde{s}_3$ при переходе от одной компоненты к другой (т.е. в точках вида Y^j_{12}, Y^j_{23}, Y^j_{34} и Y^j_{14}). Рассмотрим, например, цикл φ^{I+}_1 или φ^{I-}_1. Если рассматривать его как цикл на I-торе Лиувилля, то минимуму и максимуму функции u_1 (т.е.

$u_1 = n_1$ или $u_1 = n_2$) соответствует смена знака радикала r_{31}. Это означает, что переменные s_1, s_2, s_3 сохраняют знаки, а $\tilde{s}_3$ меняет знак. То же самое верно, естественно, и для цикла φ_1^{I+} (φ_1^{I-}) на особом слое L.

Аналогично, для цикла φ_1^{II} при $u_1 = n_1$ меняет знак переменная $\tilde{s}_3$, а при $u_1 = m_1$ – переменные s_1 и s_3. На цикле $\varphi_2^{I\pm}$ при $u_2 = m_1$ меняют знаки $s_1, \tilde{s}_3$, при $u_2 = m_2$ – $s_2, \tilde{s}_3$. На цикле φ_2^{II} при $u_2 = n_2$ меняет знак s_3, а при $u_2 = m_2$ – $s_2, \tilde{s}_3$. Отсюда с учётом (4.2.5), (4.2.6) получаем 4.2.7.

Из 4.2.7 сразу следует, что в качестве вторых базисных циклов на граничных I-торах и II-торе атома B можно взять циклы $\pm\varphi_1^{I\pm}$ и $\mp\varphi_1^{II}$, так как они трансверсальны критической окружности атома на его особом слое (см. рис. 4.14) и, следовательно, высекаются некоторым трансверсальным сечением атома на его граничных торах.

Остаётся выбрать первые базисные циклы. Для этого стянем циклы $\varphi_i^{I\pm}, \varphi_i^{II}$ на прообраз $\hat{G}^{-1}(X_1X_4 \cup X_3X_4)$, т.е. на объединение критической окружности S и окружностей $\gamma_\pm$. Рассмотрим сначала цикл φ_2^{II} (изображённый на рисунке 4.14 лишь "наполовину"). Устремим значение u_1, отвечающее этому циклу, к $m_1 = n_2$. При этом точки Y_{23}^1, Y_{23}^7, Y^1, Y^7, Y_{14}^3 перейдут, соответственно, в точки Y_3^1, Y_3^2, Y_{34}^3, Y_{34}^4, Y_4^3, кривые $Y_{14}^3Y^1Y_{23}^1$, $Y_{14}^2Y_{23}^7$ – в кривые $Y_4^3Y_{34}^3Y_3^1$, $Y_4^2Y_{34}^2Y_3^2$. Кривая $Y_{23}^7Y^7Y_{14}^3$ перейдёт в кривую $Y_3^2Y_{34}^4Y_4^4$ и ту часть окружности γ_+, на которой $s_3 \le 0$ (т.к. $s_3|_{Y_{23}^7Y^7Y_{14}^3} \le 0$), а кривая $Y_{23}^1Y_{14}^2$ – в кривую $Y_3^1Y_{34}^1Y_4^1$ и ту часть окружности γ_-, на которой $s_3 \ge 0$ (см. рис. 4.15).

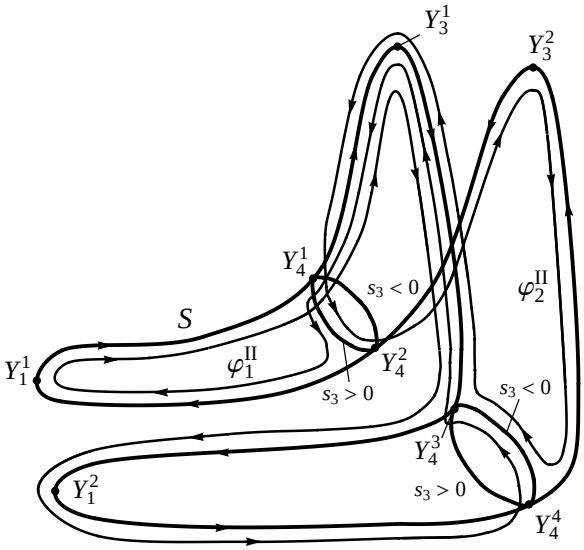


Рис. 4.15: Предельные положения циклов φ_1^{II} и φ_2^{II}

В случае цикла φ_1^{II} поступим следующим образом. Петлю $Y_{34}^3Y^3Y_{12}^6Y^4Y_{34}^3$ стянем на кривую $Y_4^3Y_{14}^3Y_1^2Y_{14}^4Y_4^4$ и дугу $Y_4^4Y_4^3$ окружности γ_+, устремив u_2 к $m_1 = n_2$. А петлю $Y_{34}^3Y^1Y_{12}^5Y^2Y_{34}^3$ сначала стянем на кривую $Y_3^1Y_{23}^1Y_2^1Y_{23}^2Y_3^1$, устремив значение u_2 к m_2, а затем на дугу $Y_4^1Y_4^2$ окружности γ_+ и кривую $Y_4^2Y_{14}^2Y_1^1Y_{14}^1Y_4^1$, устремив u_2 к $m_1 = n_2$. Результат показан на рисунке 4.15. Из рисунка видно, что ориентированная окружность S представляет собой сумму $\varphi_1^{II} + \varphi_2^{II}$. Итак,

в качестве первого базисного цикла на граничном II-торе атома B следует взять цикл $\varphi_1^{II}+\varphi_2^{II}$.

Для I-торов рассуждения аналогичны (см. рис. 4.16, 4.17). Тем самым лемма 4.5 полностью доказана.

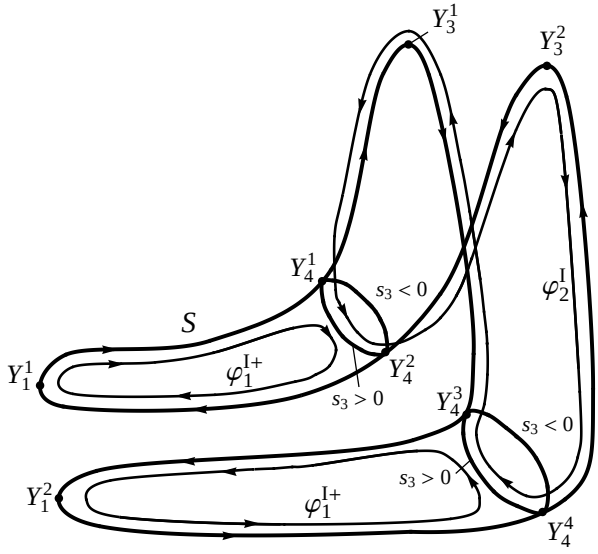


Рис. 4.16: Предельные положения циклов φ_1^{I+} и φ_2^I

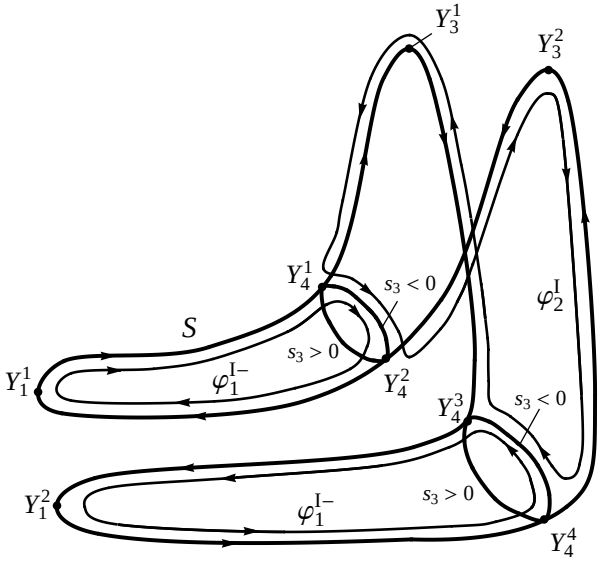


Рис. 4.17: Предельные положения циклов φ_1^{I-} и φ_2^I

Глава 5

Некомпактный случай Горячева ($b < 0$)

Для исследования топологии некомпактного случая Горячева ($b < 0$) мы снова будем использовать разделение переменных, найденное П. Е. Рябовым [36] и уже использованное нами в главе 4. Для удобства напомним, в чём оно состоит. На каждом слое слоения Лиувилля гамильтоновы уравнения сводятся к следующей системе:

$$\dot{u}_1 = \frac{\sqrt{P(u_1)}}{u_1 - u_2}, \qquad \dot{u}_2 = \frac{\sqrt{P(u_2)}}{u_1 - u_2},$$

где $P(u) = P_{h,k}(u) = \frac{1}{b}(2b+k-u^2)(2b-k+u^2)((u-b)^2-k+4bh-b^2)$ – многочлен степени 6, зависящий от значений h, k первых интегралов H, K, а u_1, u_2 – переменные разделения, являющиеся однозначными функциями от фазовых переменных s_i, r_i. Более точно, u_1 и u_2 определяются как корни некоторого квадратного уравнения с коэффициентами, гладко зависящими от s_i, r_i. Мы будем полагать, что $u_1 \geq u_2$.

Положим $m_1 = \sqrt{k-2b}$, $m_2 = \sqrt{k+2b}$, $n_1 = b - \sqrt{k-4bh+b^2}$, $n_2 = b + \sqrt{k-4bh+b^2}$ (таким образом, $\pm m_1, \pm m_2, n_1, n_2$ – корни многочлена P). Все фазовые переменные s_i, r_i выражаются через переменные разделения u_1, u_2 как рациональные функции от радикалов $r_{1j} = \sqrt{m_2^2 - u_j^2}$, $r_{2j} = \sqrt{u_j^2 - m_1^2}$, $r_{3j} = \sqrt{(u_j - n_1)(u_j - n_2)}$, $j = 1, 2$, с коэффициентами, гладко зависящими от u_1, u_2:

$$\begin{aligned}
s_1 &= i\frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}}, \qquad s_2 = -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}},\\
s_3 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31} + r_{11}r_{21}r_{32}),\\
r_1 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(r_{12}r_{21}r_{31} + r_{11}r_{22}r_{32}),\\
r_2 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2-u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31} + r_{12}r_{21}r_{32}), \qquad r_3 = \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1+u_2}}.
\end{aligned} \tag{5.0.1}$$

При фиксированных значениях h, k формулы (5.0.1) являются параметрическими уравнениями инвариантной поверхности $\mathfrak{C}_{h,k} = F^{-1}(h,k)$ и задают отображение из некоторого подмножества $Acc(h,k)$ в плоскости $\mathbb{R}^2(u_1,u_2)$ (называемого *областью возможности движения*) на $\mathfrak{C}_{h,k}$. Так как фазовые переменные s_i, r_i являются вещественными, множество $Acc(h,k)$ представляет собой объединение прямоугольников вида $[\alpha_{11},\alpha_{12}]\times[\alpha_{21},\alpha_{22}]$ (возможно, бесконечных), где α_{js} – корни многочлена P или $\pm\infty$.

Теорема 5.1 (С. С. Николаенко [78]). *Образ отображения момента $\mathfrak{F}$ для случая Горячева при $b<0$ представляет собой следующее множество:*
$$\left\{k \geq (2h+1)^2 - 2b,\ h \leq \frac{b-1}{2}\right\} \cup \left\{k \geq 4bh - b^2,\ \frac{b-1}{2} < h \leq \frac{b+1}{2}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{k \geq (2h-1)^2 + 2b,\ \frac{b+1}{2} < h \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{k \geq 2b,\ h > \frac{1}{2}\right\}.$$

Доказательство. Идея доказательства основана на анализе формул 5.0.1, выражающих фазовые переменные через переменные разделения.

Образ отображения момента состоит из всех таких пар (h,k), для которых область возможности движения непуста. Поскольку $u_1 + u_2 = b/r_3^2 < 0$ (см. [36]), то условия вещественности правых частей в равенствах (5.0.1) можно выписать в виде следующей системы $\mathbb{Z}_2$-линейных уравнений:

$$\begin{cases} z_2 \oplus z_5 = 1; \\ z_1 \oplus z_4 = 0; \\ z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 = 0; \\ z_1 \oplus z_2 \oplus z_6 = 0; \\ z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 = 1; \\ z_1 \oplus z_5 \oplus z_6 = 1; \\ z_1 \oplus z_3 \oplus z_5 = 0; \\ z_2 \oplus z_4 \oplus z_6 = 0, \end{cases} \tag{5.0.2}$$

где $z_q = \operatorname{bsgn}(r_{q1}^2)$, $z_{3+q} = \operatorname{bsgn}(r_{q2}^2)$, $q = 1,2,3$, $\operatorname{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \geq 0, \\ 1, & \text{если } \theta < 0, \end{cases}$ а $\oplus$ – сумма по модулю 2.

Система (5.0.2) имеет 4 независимых решения: $(1,1,1,1,0,0)$, $(0,1,0,0,0,1)$, $(0,0,1,0,1,0)$, $(1,0,0,1,1,1)$. Так как $b<0$, мы имеем $r_{11}^2 + r_{21}^2 < 0$ и $r_{12}^2 + r_{22}^2 < 0$, откуда $(z_1,z_2) \neq (0,0)$ и $(z_4,z_5) \neq (0,0)$. Наше соглашение о том, что $u_1 \geq u_2$, вместе с условием $u_1 + u_2 < 0$ влечёт $u_1^2 \leq u_2^2$. Поэтому $(z_2,z_5) \neq (0,1)$. Единственным решением системы (5.0.2), удовлетворяющим этим условиям, является набор $(1,1,1,1,0,0)$. Следовательно, область возможности движения

задаётся следующими неравенствами:

$$m_2^2 - u_1^2 \le 0, \qquad u_1^2 - m_1^2 \le 0, \qquad (u_1 - n_1)(u_1 - n_2) \le 0,$$
$$m_2^2 - u_2^2 \le 0, \qquad u_2^2 - m_1^2 \ge 0, \qquad (u_2 - n_1)(u_2 - n_2) \ge 0.$$

Отсюда находим промежутки возможных значений для u_1 и u_2:
$u_1 \in ([-m_1, m_1] \cap [n_1, n_2]) \setminus [-m_2, m_2], \quad u_2 \in (-\infty, -m_1] \setminus [n_1, n_2]$.

В нижеследующей таблице мы перечисляем области возможности движения для всех возможных случаев взаимного расположения корней многочлена P (в предположении, что все они различны), учитывая, что $m_2 < m_1$ (при $m_2 \in \mathbb{R}$) и что $n_1 + n_2 < 0$.

Таблица 4. Связь взаимного расположения корней многочлена P с областью возможности движения

	Взаимное расположение корней	Область возможности движения
I	$n_1 < -m_1 < -m_2 < m_2 < m_1 < n_2$	$([-m_1, -m_2] \cup [m_2, m_1]) \times (-\infty, n_1]$
II	$n_1 < -m_1 < -m_2 < m_2 < n_2 < m_1$	$([-m_1, -m_2] \cup [m_2, n_2]) \times (-\infty, n_1]$
III	$-m_1 < n_1 < -m_2 < m_2 < n_2 < m_1$	$([n_1, -m_2] \cup [m_2, n_2]) \times (-\infty, -m_1]$
IV	$n_1 < -m_1 < -m_2 < n_2 < m_2 < m_1$	$[-m_1, -m_2] \times (-\infty, n_1]$
V	$-m_1 < n_1 < -m_2 < n_2 < m_2 < m_1$	$[n_1, -m_2] \times (-\infty, -m_1]$
VI	$-m_1 < -m_2 < n_1 < n_2 < m_2 < m_1$	$\emptyset \times (-\infty, -m_1]$
VII	$n_1 < -m_1 < m_1 < n_2$, $m_2 \notin \mathbb{R}$	$[-m_1, m_1] \times (-\infty, n_1]$
$VIII$	$n_1 < -m_1 < n_2 < m_1$, $m_2 \notin \mathbb{R}$	$[-m_1, n_2] \times (-\infty, n_1]$
$VIII_*$	$n_1 < -m_1 < n_2 < -m_2 < m_2 < m_1$	$[-m_1, n_2] \times (-\infty, n_1]$
IX	$-m_1 < n_1 < n_2 < -m_2 < m_2 < m_1$	$[n_1, n_2] \times (-\infty, -m_1]$
IX_*	$-m_1 < n_1 < n_2 < m_1$, $m_2 \notin \mathbb{R}$	$[n_1, n_2] \times (-\infty, -m_1]$
X	$n_1 < n_2 < -m_1 < m_1$, $m_2 \notin \mathbb{R}$	$\emptyset \times ((-\infty, n_1] \cup [n_2, -m_1])$
X_*	$n_1 < n_2 < -m_1 < -m_2 < m_2 < m_1$	$\emptyset \times ((-\infty, n_1] \cup [n_2, -m_1])$

Перечисленные в таблице случаи определяют в плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ следующие области:

$I: -2b < k < (2h-1)^2 + 2b,\ h > 1/2;$

$II: \max\{-2b, (2h-1)^2 + 2b\} < k < (2h+1)^2 - 2b,\ h > -1/2;$

$III\,(-1 < b < 0): -2b < k < \min\{(2h-1)^2 + 2b, (2h+1)^2 - 2b\},$
$-1/2 < h < 1/2;$

$IV: k > \max\{(2h-1)^2 + 2b, (2h+1)^2 - 2b\};$

$V: (2h+1)^2 - 2b < k < (2h-1)^2 + 2b;$

$VI: 4bh - b^2 < k < (2h+1)^2 - 2b,\ h < (b-1)/2;$

$VII:\ 2b < k < \min\{-2b, (2h-1)^2 + 2b\},\ h > 1/2;$

$VIII:\ (2h-1)^2 + 2b < k < -2b;$

$VIII_*\,(b < -1):\ \max\{-2b, (2h-1)^2 + 2b\} < k < (2h+1)^2 - 2b,\ h < -1/2;$

$IX:\ \max\{-2b, 4bh - b^2\} < k < \min\{(2h-1)^2 + 2b, (2h+1)^2 - 2b\},$

$(b-1)/2 < h < -1/2;$

$IX_*\,(-4 < b < 0):\ 4bh - b^2 < k < \min\{-2b, (2h-1)^2 + 2b\},\ h < (b+1)/2;$

$X:\ \max\{2b, 4bh - b^2\} < k < \min\{-2b, (2h-1)^2 + 2b\},\ (b+1)/2 < h < 1/2;$

$X_*\,(b < -4):\ \max\{-2b, 4bh - b^2\} < k < (2h-1)^2 + 2b,\ (b+1)/2 < h < 1/2.$

Таким образом, мы получаем, что образ отображения момента представляет собой замыкание объединения перечисленных областей (за исключением областей VI, X и X_*, для которых область возможности движения пуста).

□

Теперь нам предстоит дать описание особенностей слоения Лиувилля для систем типа Горячева в случае $b < 0$.

Теорема 5.2 (С. С. Николаенко [78])**.**

a) Прообраз любого регулярного значения отображения момента $\mathfrak{F}$ состоит из двух или четырёх цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ в зависимости от области в $\operatorname{Im}\mathfrak{F}$ (см. рис. 5.1, 5.2).

b) Бифуркации регулярных цилиндров имеют тип атомов $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}_2$, $\overline{P}_4$ и B'' (соответствие между кривыми бифуркационной диаграммы и атомами указано на рисунках 5.1, 5.2).

Доказательство. Для подсчёта числа связных компонент в прообразе регулярного значения отображения момента мы следуем алгоритму, описанному в [50] (см. раздел 1.12). Отныне переменные z_q будут иметь иное значение: через них мы будем обозначать булевы знаки самих радикалов r_{qj} (а не выражений под радикалами): $z_q = \operatorname{bsgn}(r_{q1})$, $z_{3+q} = \operatorname{bsgn}(r_{q2})$, $q = 1, 2, 3$. Если какие-то из подкоренных выражений окажутся отрицательными, поменяем их знак, сделав положительными, а перед радикалом запишем мнимую единицу i в качестве коэффициента.

Пусть (h, k) – регулярное значение отображения момента F. Тогда для каждой связной компоненты в $Acc(h, k)$ радикалы r_{qj} можно разделить на две группы. Радикалы первой группы не меняют своего знака вдоль траекторий в прообразе этой данной компоненты, в то время как радикалы второй группы периодически меняют знак. Если $Acc(h, k) = [\alpha_{11}, \alpha_{12}] \times [\alpha_{21}, \alpha_{22}]$, то ко второй группе следует отнести радикалы $\sqrt{u_j - \alpha_{js}}$, а также все радикалы, кратные им; остальные радикалы относятся к первой группе.

Рассмотрим теперь матрицу системы (5.0.2). Она имеет 8 строк (в соответствии с числом уравнений) и 6 столбцов (по числу переменных). Для каждой переменной, отвечающей радикалу

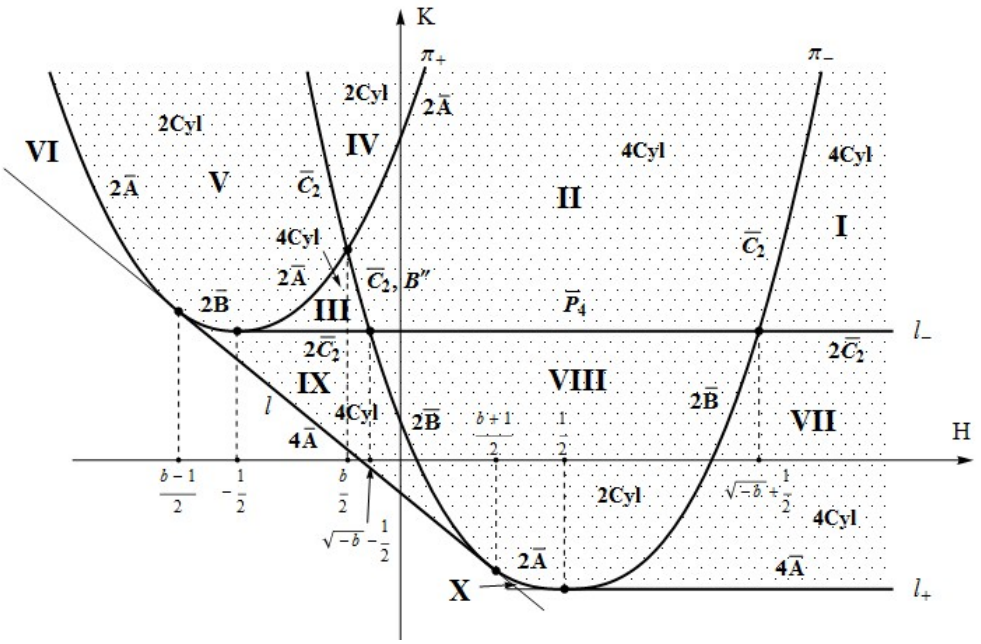


Рис. 5.1: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b \in (-1, 0)$

из второй группы, проделаем следующую процедуру. Если соответствующий столбец ненулевой, элементарными преобразованиями строк матрицы добьёмся того, чтобы он содержал ровно одну единицу, а затем вычеркнем из матрицы данный столбец, а также строку, содержащую полученную единицу. В конце концов, когда все оставшиеся столбцы будут соответствовать радикалам только из первой группы, подсчитаем ранг полученной матрицы. Если он равен p, то прообраз $F^{-1}(h, k)$ над выбранной компонентой в $Acc(h, k)$ состоит в точности из 2^p связных компонент.

Рассмотрим, к примеру, точку (h, k) из области II. Область возможности движения $Acc(h, k)$ состоит из двух прямоугольников: $\Pi_1 = [-m_1, -m_2] \times (-\infty, n_1]$ и $\Pi_2 = [m_2, n_2] \times (-\infty, n_1]$. Рассмотрим прямоугольник Π_1. Для него радикалы r_{11}, r_{21} и r_{32} относятся ко второй группе, а радикалы r_{31}, r_{12} и r_{22} – к первой группе. Из восьми линейных комбинаций переменных z_q в левых частях уравнений (5.0.2) можно оставить первые четыре в качестве базисных. Тогда соответствующая матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам нужно вычеркнуть из матрицы 1-й, 2-й и 6-й столбцы. 6-й столбец и так уже содержит ровно одну единицу, поэтому мы сразу можем его вычеркнуть вместе с 4-й строкой. Затем мы вычёркиваем 1-й столбец вместе со 2-й строкой, а также 2-й столбец вместе с 1-й строкой. Так как в результате в матрице остаётся всего одна ненулевая строка, получаем, что прообраз $F^{-1}(h, k)$ над прямоугольником Π_1 состоит из $2^1 = 2$ связных компонент. Они различаются

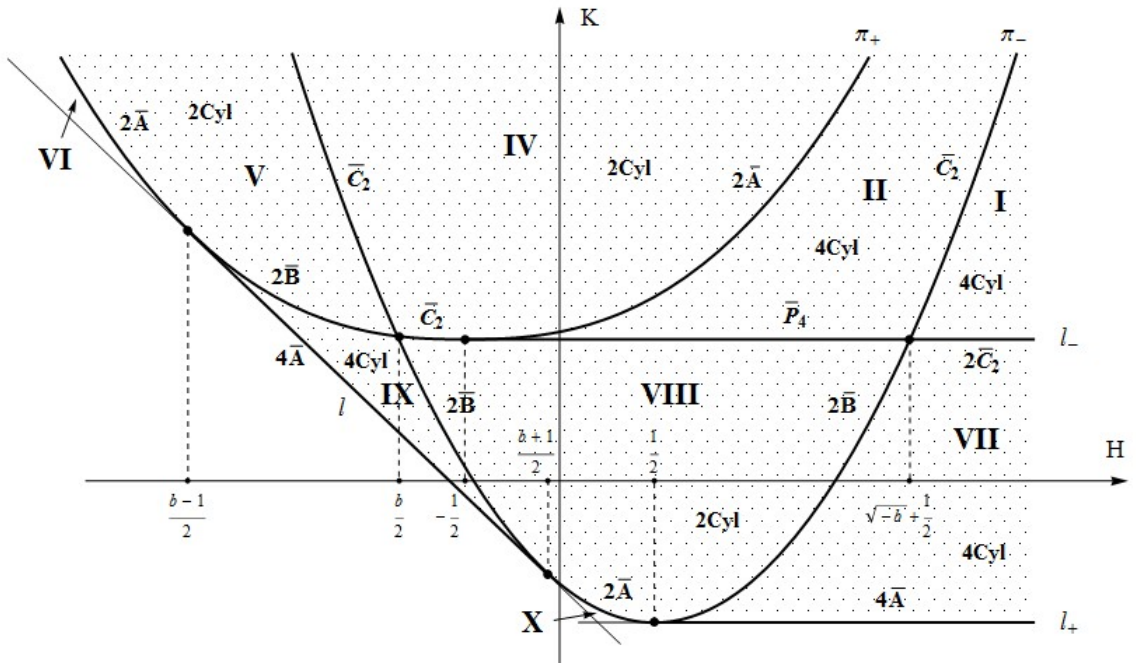


Рис. 5.2: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b < -1$

значением выражения $z_3 \oplus z_4 \oplus z_5$. Применяя аналогичные рассуждения к прямоугольнику Π_2, получаем, что прообраз $F^{-1}(h,k)$ над Π_2 также состоит из двух компонент. Таким образом, полный прообраз $F^{-1}(h,k)$ состоит из четырёх связных компонент.

Для понимания топологии каждой компоненты в $F^{-1}(h,k)$ проанализируем прообразы сечений $\{u_1 = const\}$ и $\{u_2 = const\}$ в $Acc(h,k)$. Рассмотрим связную компоненту в прообразе луча $\{u_1 = const,\, u_2 \le n_1\}$. Это прямая, параметризованная значением радикала $\sqrt{n_1 - u_2}$, меняющимся от $-\infty$ до $+\infty$. Эта прямая "разворачивается" над точкой $\{u_2 = n_1\}$, а интервал $(-\infty, n_1)$ накрывает двулистно.

Связная компонента прообраза отрезка $\{u_1 \in [-m_1, -m_2],\, u_2 = const\}$ – это окружность, четырёхлистно накрывающая интервал $\{-m_1 < u_1 < -m_2\}$. Четыре листа этого накрытия различаются знаками радикалов $\sqrt{u_1 + m_1}$ и $\sqrt{-m_2 - u_1}$. Если положить $u_1 = -m_1 \cos^2\varphi - m_2 \sin^2\varphi$, то $\varphi \mod 2\pi$ можно взять в качестве параметра на данной окружности.

Подводя итог, заключаем, что связная компонента прообраза $F^{-1}(h,k)$ над прямоугольником Π_1 диффеоморфна прямому произведению окружности S^1 и прямой $\mathbb{R}$, т.е. цилиндру. То же самое верно и для прямоугольника Π_2. Аналогично находим число связных компонент в прообразах $F^{-1}(h,k)$ для всех остальных регулярных областей в $\operatorname{Im} F$ и показываем, что каждая из этих компонент диффеоморфна цилиндру.

Теперь мы хотим понять, что происходит с этими цилиндрами, когда точка (h,k) в $\operatorname{Im} F$ пересекает бифуркационную диаграмму. Снова возьмём точку (h,k) из области II. Так как знаки радикалов r_{12}, r_{22} не меняются, то удобно считать их фиксированными. Рассмотрим сечения $\{\sqrt{n_1 - u_2} = const\}$ четырёх цилиндров в прообразе $F^{-1}(h,k)$. Эти сечения являются окруж-

ностями: по две над каждым из прямоугольников Π_1 и Π_2. Окружности над Π_1 различаются знаком радикала r_{31} (или, что эквивалентно, значением переменной z_3). В соответствии с этим обозначим их γ_{1+} и γ_{1-}. Окружности над Π_2 различаются знаком радикала r_{21} (или, эквивалентно, значением переменной z_2). Их мы обозначим соответственно через γ_{2+} и γ_{2-}.

Каждая из окружностей $\gamma_{1\pm}$ разбивается на две полуокружности в соответствии со знаком радикала r_{21} (значением z_2), которые мы обозначим через $\gamma^{\pm}_{1\pm}$. Например, $\gamma^{-}_{1+} = \gamma_{1+} \cap \{z_2 = 1\}$. Аналогично каждая из окружностей $\gamma_{2\pm}$ разбивается на две полуокружности в соответствии со знаком радикала r_{31} (значением z_3), которые мы обозначим через $\gamma^{\pm}_{2\pm}$. В то же время каждая из окружностей $\gamma_{i\pm}$ разбивается на две полуокружности в соответствии со знаком радикала r_{11} (значением z_1), которые обозначим через $\gamma^{(\pm)}_{i\pm}$ ($\gamma^{(+)}_{2-} = \gamma_{2-} \cap \{z_1 = 0\}$ и т.д.).

Предположим, что точка (h, k) движется из области II в область IV. Когда она достигает параболы π_+, мы имеем $m_2 = n_2$. Следовательно, окружности $\gamma_{2\pm}$ стягиваются в точки, а два цилиндра над Π_2 – в прямые. Это соответствует двум бифуркациям типа $\overline{A}$. Отметим, что при пересечении точкой (h, k) параболы π_+ с прямоугольником Π_1, а также двумя цилиндрами над ним ничего не происходит.

Пусть теперь точка (h, k) движется из области II в область I, пересекая параболу π_-. С прямоугольником Π_1 и цилиндрами над ним опять-таки ничего не происходит. А вот окружности $\gamma_{2\pm}$ над параболой π_- касаются друг друга в двух точках, образуя критический уровень атома C_2 (см. рис. 5.3). В этих двух общих точках $u_1 = n_2 = m_1$. Далее, когда точка (h, k) входит в область I, это объединение окружностей снова распадается на две окружности, но иным способом: одна окружность – это $\gamma^{+}_{2+} \cup \gamma^{+}_{2-}$, а другая – $\gamma^{-}_{2+} \cup \gamma^{-}_{2-}$. Описанные преобразования в точности соответствуют бифуркации типа C_2. Соответствующая бифуркация цилиндров описывается атомом $\overline{C}_2$.

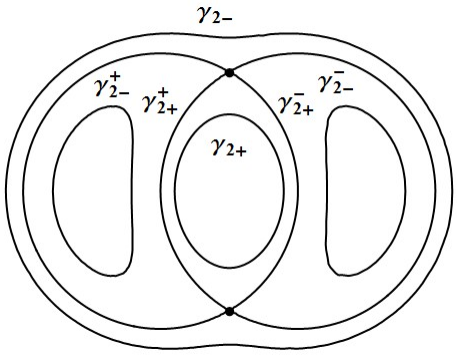


Рис. 5.3: Перестройка типа атома C_2

Наконец, пусть точка (h, k) движется из области II в область $VIII$, пересекая прямую l_-. Когда она достигает прямой l_-, мы имеем $m_2 = 0$, а прямоугольники Π_1 и Π_2 касаются друг друга вдоль общей стороны $\{u_1 = 0,\ u_2 \le n_1\}$. Четыре окружности $\gamma_{1\pm}$, $\gamma_{2\pm}$ касаются друг друга в четырёх точках (в которых $m_2 = 0$), образуя критический уровень атома P_4 (см. рис. 5.4).

Когда точка (h,k) входит в область $VIII$, это объединение окружностей распадается на две окружности: одна окружность – это $\gamma_{1+}^{(+)} \cup \gamma_{2+}^{(+)} \cup \gamma_{1-}^{(+)} \cup \gamma_{2-}^{(+)}$, а другая – $\gamma_{1+}^{(-)} \cup \gamma_{2+}^{(-)} \cup \gamma_{1-}^{(-)} \cup \gamma_{2-}^{(-)}$. Описанные преобразования соответствуют бифуркации типа P_4. Соответствующая бифуркация цилиндров описывается атомом $\overline{P}_4$.

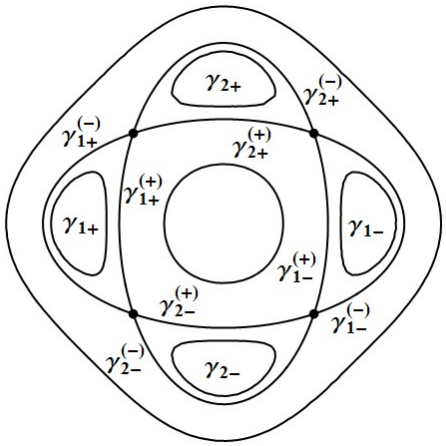


Рис. 5.4: Перестройка типа атома P_4

Бифуркации, отвечающие всем остальным частям бифуркационной диаграммы, рассматриваются аналогичным образом. При этом для исследования некоторых бифуркаций нужно применить технику, описанную при доказательстве леммы 4.5. □

Теперь, когда мы знаем типы бифуркаций, отвечающих различным участкам бифуркационной диаграммы, можно легко построить инварианты Фоменко для всех регулярных значений энергии. Положим

$$I_1 = \left(-\infty, \frac{b-1}{2}\right),\ I_2 = \left(\frac{b-1}{2}, \frac{\min\{-1,b\}}{2}\right),\ I_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right),$$
$$I_4 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b}\right) \text{ (в случае } -1 < b < 0),\ I_5 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1+\min\{-2,b\}}{2}\right),$$

$$I_6 = \left(\max\left\{\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -\frac{1}{2}\right\}, \frac{b+1}{2}\right),\ I_7 = \left(\frac{b+1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$I_8 = \left(\frac{1+\max\{-2,b\}}{2}, \frac{1}{2}\right),\ I_9 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{-b}\right),\ I_{10} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-b}, +\infty\right).$$

В зависимости от значения параметра b получаем следующие зоны регулярных значений энергии:

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $-1 < b < 0$;
$I_1, I_2, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $b = -1$;
$I_1, I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{10}$ при $-2 < b < -1$;
$I_1, I_2, I_5, I_8, I_9, I_{10}$ при $b = -2$;
$I_1, I_2, I_5, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ при $b < -2$.

Следствие 5.0.3. *Слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей для случая Горячева при $b < 0$, соответствующих регулярным зонам энергии $I_1 - -I_{10}$, описываются молекулами семи типов, представленными на рисунках 5.5-5.11.*

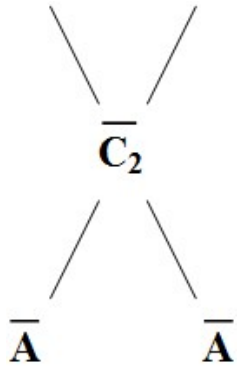


Рис. 5.5: Молекула для зон энергии I_1, I_7

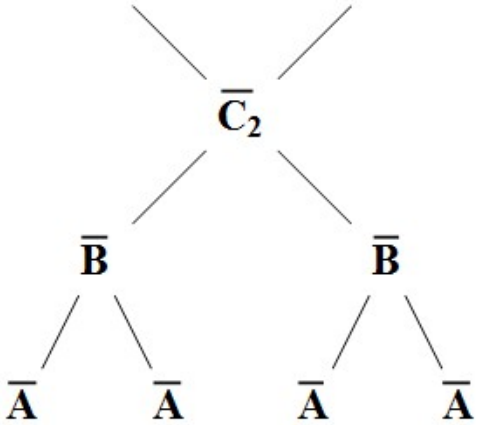


Рис. 5.6: Молекула для зон энергии I_2, I_5

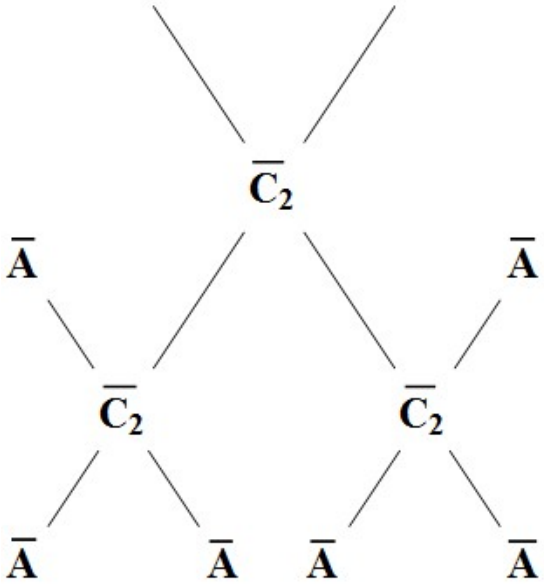


Рис. 5.7: Молекула для зоны энергии I_3

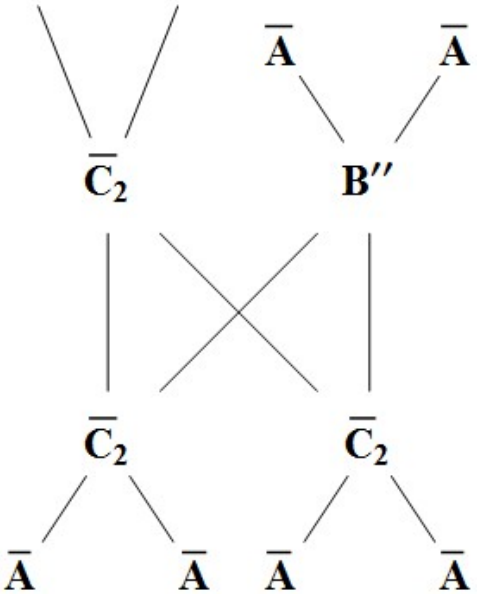


Рис. 5.8: Молекула для зоны энергии I_4

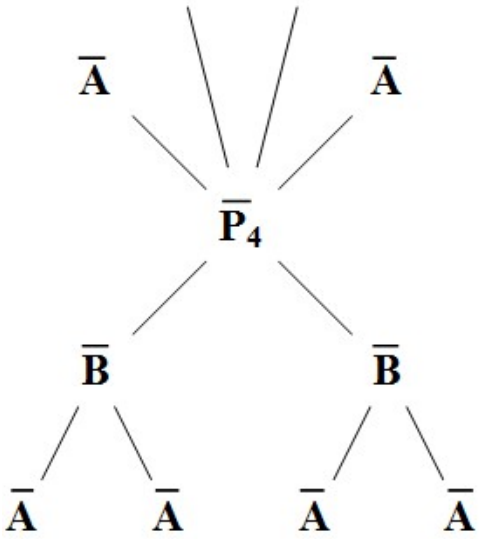


Рис. 5.9: Молекула для зон энергии I_6, I_9

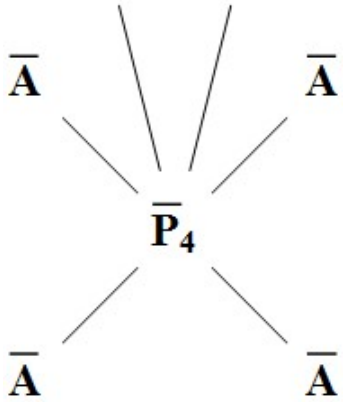


Рис. 5.10: Молекула для зоны энергии I_8

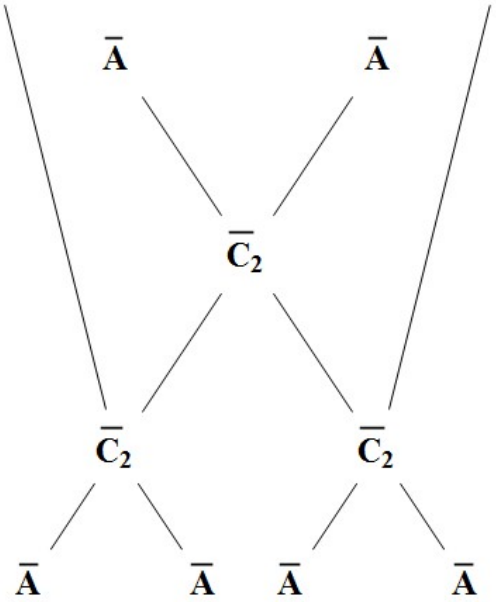


Рис. 5.11: Молекула для зоны энергии I_{10}

Заключение

В работе проведён топологический анализ однопараметрического (с параметром b) семейства интегрируемых систем типа Чаплыгина–Горячева, заданных на коалгебре $e(3)^*$. Отдельно рассмотрены случаи: $b = 0$ (случай Чаплыгина), $b > 0$ (компактный случай Горячева), $b < 0$ (некомпактный случай Горячева). При $b \geq 0$ при каждом неособом топологически устойчивом уровне энергии полностью исследована топология слоения Лиувилля в терминах инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы). В результате выявлена лиувиллева эквивалентность (при подходящих значениях энергии и других параметров) многим ранее изученным классическим интегрируемым системам (случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Чаплыгина, Сретенского, Клебша, Ковалевской–Яхьи в динамике твёрдого тела, геодезическому потоку трёхосного эллипсоида, а также некоторым интегрируемым биллиардам в областях, ограниченных софокусными квадриками). При $b = 0$ исследован также топологический траекторный портрет системы в терминах инварианта Болсинова–Фоменко (t-молекулы). В результате оказалось, что случай Чаплыгина топологически траекторно эквивалентен (при подходящих значениях энергии и других параметров) двум другим хорошо известным интегрируемым системам: случаю Эйлера в динамике твёрдого тела и задаче Якоби о геодезическом потоке на трёхосном эллипсоиде (топологическая траекторная эквивалентность последних двух систем была доказана ранее А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко). Показано, что эту траекторную эквивалентность можно сделать гладкой лишь при малых значениях энергии, а также доказано отсутствие топологической (и, следовательно, гладкой) сопряжённости случая Чаплыгина случаю Эйлера и задаче Якоби.

Случай $b < 0$ является, по-видимому, наиболее интересным как пример интегрируемой системы с некомпактными лиувиллевыми слоями. В этом случае топология слоений Лиувилля при фиксированном уровне энергии исследована в терминах инварианта Фоменко (молекулы). Оказалось, что все регулярные лиувиллевы слои диффеоморфны двумерному цилиндру, а все атомы (бифуркации) представляют собой прямое произведение компактного двумерного атома на прямую либо окрестности невырожденной седловой двумерной особенности на окружность.

В качестве направлений дальнейшего исследования можно выделить следующие.

- *Исследование типов вырожденных особенностей отображения момента для систем типа Чаплыгина–Горячева.*

- *Исследование траекторного портрета компактного случая Горячева ($b > 0$).* Разделение переменных, имеющееся в этой задаче, позволяет выразить основной траекторный инвариант – функцию вращения – через гиперэллиптические интегралы. Их аналитическое исследование может быть затруднено, поэтому окончательный вывод о виде траекторных инвариантов, по-видимому, должен опираться на результаты компьютерного эксперимента.

- *Построение общей теории топологической классификации интегрируемых систем с некомпактными лиувиллевыми слоями.* В этом направлении сейчас активно ведутся работы. В частности, автором получен аналог теоремы Фоменко 1.3 для некомпактных 3-атомов, а также получена полная классификация некомпактных 2-атомов (при некоторых естественных предположениях) (см. [92, 90]).

Литература

[1] Алёшкин К. Р., *Топология интегрируемых систем с неполными полями*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 9, сс. 49–64.

[2] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1985, **3**, М.:ВИНИТИ, сс. 5–304.

[3] Болсинов А. В., *Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Матем. сборник, 1995, **186**, № 1, сс. 3–28.

[4] Болсинов А. В., Дуллин Х., *О случае Эйлера в динамике твёрдого тела и задаче Якоби*, Регулярная и хаотическая динамика, 1997, **2**, № 1, pp. 13–25.

[5] Болсинов А. В., Матвеев В. С., Фоменко А. Т., *Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия*, Матем. сборник, 1998, **189**, № 10, сс. 5–32.

[6] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т., *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, Успехи матем. наук, 1990, **45**, № 2, сс. 49–77.

[7] Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сборник, 2000, **191**, № 2, сс. 3–42.

[8] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т. 1, 2*, Ижевск, изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.

[9] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Размерность пространства интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 1997, **216**, сс. 45–69.

[10] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела*, Функц. анализ и его прил., 1995, **29**, № 3, сс. 1–15.

[11] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II*, Матем. сборник, 1994, **185**, № 4, 5, сс. 27–80, 27–78.

[12] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твёрдого тела*, Известия РАН, сер. матем., 1995, **59**, № 1, сс. 65–102.

[13] Борисов А. В., Мамаев И. С., *Динамика твёрдого тела*, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

[14] Ведюшкина В. В., *Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов*, Матем. сборник, 2019, **210**, № 3, сс. 17–74.

[15] Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы*, Известия РАН, сер. матем., 2017, **81**, № 4, сс. 20–67.

[16] Ведюшкина В. В., Харчева И. С., *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сборник, 2018, **209**, № 12, сс. 17–56.

[17] Горячев Д. Н., *Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера*, Изв. Варшавского ун-та, 1916, № 3, сс. 1–13.

[18] Калашников В. В., *Топологическая классификация квадратично-интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе*, Успехи мат. наук, 1995, **50**, № 1, сс. 201–202.

[19] Кудрявцева Е. А., *Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками*, Доклады Академии наук, 2012, **445**, № 4, сс. 383–385.

[20] Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А., *Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом*, Матем. сборник, 2011, **202**, № 3, сс. 69–106.

[21] Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А., *Топология слоений и теорема Лиувилля для интегрируемых систем с неполными потоками*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 2011, **27**, сс. 106–149.

[22] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т., *Максимально симметричные разбиения поверхностей и их накрытия*, Матем. сборник, 2008, **199**, № 9, сс. 3–96.

[23] Кудрявцева Е. А., Фоменко А. Т., *Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях*, Доклады РАН, серия: математика, 2012, **446**, № 6, сс. 615–617.

[24] Матвеев С. В., Фоменко А. Т., *Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии*, М.: изд-во МГУ, 1991.

[25] Мозер Дж., *Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем*, Успехи матем. наук, 1981, **36**, № 5, сс. 109–151.

[26] Морозов П. В., *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сборник, 2002, **193**, № 10, сс. 113–138.

[27] Морозов П. В., *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сборник, 2004, **195**, № 3, сс. 69–114.

[28] Нгуен Тьен Зунг, Полякова Л. С., Селиванова Е. Н., *Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях*, Функц. анализ и его прил., 1993, **27**, № 3, сс. 42–56.

[29] Нгуен Т. З., Фоменко А. Т., *Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трёхмерной сфере*, Успехи матем. наук, 1990, **45**, № 6, сс. 91–111.

[30] Орёл О. Е., *О несопряженности случая Эйлера в динамике твердого тела и задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*, Матем. заметки, 1997, **61**, № 2, pp. 252–258.

[31] Орёл О. Е., *Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина*, Матем. сборник, 1995, **186**, № 2, сс. 105–128.

[32] Орёл О. Е., Такахаши С., *Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа*, Матем. сборник, 1996, **187**, № 1, сс. 95–112.

[33] Ошемков А. А., *Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твёрдого тела*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **25**, часть 2, М.: изд-во МГУ, 1993.

[34] Ошемков А. А., *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **23**, М.: изд-во МГУ, 1988.

[35] Ошемков А. А., *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твёрдого тела на $SO(4)$*, Успехи матем. наук, 1990, **42**, № 2, сс. 199–200.

[36] Рябов П. Е., *Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в динамике твёрдого тела*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 7, сс. 115–134.

[37] Селиванова Е. Н., *Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности*, Матем. сборник, 1992, **183**, № 4, сс. 69–86.

[38] Селиванова Е. Н., *Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе*, Матем. сборник, 1995, **186**, № 10, сс. 141–160.

[39] Славина Н. С., *Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 1, сс. 105–160.

[40] Смейл С., *Топология и механика*, Успехи матем. наук, 1972, **15**, № 2, сс. 77–125.

[41] Смирнов Г. Е., Харламов М. П., *Круговые молекулы в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской*, Пятая межрегиональная научно-практическая конференция “Региональные аспекты предпринимательства: прошлое и настоящее”, Ярославль: Канцлер, 2013.

[42] Топалов П., *Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твёрдого тела*, Матем. сборник, 1996, **187**, № 3, сс. 143–160.

[43] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., *Риманова геометрия*, Современная математика и её приложения. Итоги науки и техники, **76**, М.: ВИНИТИ, 2002.

[44] Фокичева В. В., *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сборник, 2015, **206**, № 10, сс. 127–176.

[45] Фоменко А. Т., *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Успехи матем. наук, 1989, **44**, № 1 (265), сс. 145–173.

[46] Фоменко А. Т., *Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем*, Известия АН СССР, серия матем., 1991, **55**, № 4, сс. 747–779.

[47] Фоменко А. Т., *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Докл. АН СССР, 1986, **287**, № 5, сс. 1071–1075.

[48] Фоменко А. Т., *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*, Функц. анализ и его прил., 1988, **22**, № 4, сс. 38–51.

[49] Фоменко А. Т., Цишанг Х., *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Известия АН СССР, 1990, **54**, № 3, сс. 546–575.

[50] Харламов М. П., *Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам*, Нелинейная динамика, 2010, **6**, № 4, сс. 769–805.

[51] Харламов М. П., *Топологический анализ и булевы функции: II. Приложения к новым алгебраическим решениям*, Нелинейная динамика, 2011, **7**, № 1, сс. 25–51.

[52] Харламов М. П., *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела*, Ленинградский ун-т, Ленинград, 1988.

[53] Харламов М. П., Савушкин А. Ю., *Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской*, Украинский математический вестник, 2004, **1**, № 4, сс. 564–582.

[54] Чаплыгин С. А., *Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости*, Отдельный оттиск из XI тома Трудов Отделения физических наук Императорского Московского Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, М.: Типолитогр. Н.Н. Шарапова, 1902.

[55] Audin M., *Courbes algebriques et systemes integrables: geodesiques des quadriques*, Expos. Math., 1994, **12**, pp. 193–226.

[56] Bolsinov A. V., *Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant*, Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc., 1991, **6**, pp. 147–183.

[57] Bolsinov A. V., Davison C. M., Dullin H. R., *Geodesics on the ellipsoid and monodromy*, J. Geom. Phys., 2007, **57**, № 12, pp. 2437–2454.

[58] Davison C. M., Dullin H. R., *Geodesic flow on three dimensional ellipsoids with equal semi-axes*, Regular and Chaotic Dynamics, 2007, **12**, № 2, pp. 172–197.

[59] Euler L., *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable*, Mémoires Acad. Sci. Berlin, 1758, **14**, pp. 154–193.

[60] Fiorani E., Giachetta E., Sardanashvily G., *The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, **36**, № 7, pp. 101–107.

[61] Fomenko A. T., *Symplectic topology of integrable dynamical systems. Rough topological classification of classical cases of integrability in the dynamics of a heavy rigid body*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 1996, **235**, pp. 104–183.

[62] Fomenko A. T., *The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom*, Topological classification of integrable systems. Adv. Sov. Math., 1991, **6**, Amer. Math. Soc., pp. 1–36.

[63] Jacobi C. G. J., *Vorlesungen über Dynamik* (2nd edn.), Berlin: G. Reimer, 1884. Пер. с нем.: К. Якоби, *Лекции по динамике*, М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1936.

[64] Matveev V. S., *Quadratically integrable geodesic flows on the torus and the Klein bottle*, Regular and Chaotic Dynamics, 1997, **2**, pp. 96–102.

[65] Matveev V. S., *Geodesic flows on the Klein bottle, integrable linear or quadratic in velocities.* In the book: *Topological Methods in Theory of Hamiltonian Systems*, Factorial (1998), pp. 213–223.

[66] Nguyen T. Z., Polyakova L. S., *A topological classification of integrable geodesic flows of the two-dimensional sphere with quadratic in momenta additional integral*, J. Nonlin. Sci., 1992, **6**, pp. 85–108.

[67] Orel O. E., Ryabov P. E., *Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid in the generalization of this problem*, Regul. Chaotic Dyn., 1998, **3**, № 2, pp. 82–91.

[68] Oshemkov A. A., *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*, Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc., 1991, **6**, pp. 67–146.

[69] Pelayo A., Vũ Ngọc S., *Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds*, Invent. Math., 2009, **177**, pp. 571–597.

[70] Pelayo A., Vũ Ngọc S., *Constructing integrable systems of semitoric type*, Acta Math., 2011, **206**, pp. 93–125.

[71] Selivanova E. N., *Topological classification of integrable Bott geodesic flows on the two-dimensional torus*, Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc., 1991, **6**, pp. 209–228.

[72] Zung N. T., *A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems*, Commentarii Mathematici Helvetici, 2000, **75**, № 2, pp. 271–283.

[73] Zung N. T., *Singularities of integrable geodesic flows on multidimensional torus and sphere*, J. Geom. Phys., 1996, **18**, № 2, pp. 147–162.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[74] Николаенко С. С., *Число связных компонент в прообразе регулярного значения отображения момента для геодезического потока эллипсоида*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2013, № 5, сс. 29–34.
Англ. пер.: Nikolaenko S. S., *The Number of Connected Components in the Preimage of a Regular Value of the Momentum Mapping for the Geodesic Flow on Ellipsoid*, Moscow University Mathematics Bulletin, 2013, Vol. 68, no. 5, pp. 241–245.

[75] Николаенко С. С., *Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 2, сс. 75–122.
Англ. пер.: Nikolaenko S. S., *A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid*, Sb. Math., 2014, **205**, no. 2, pp. 1–45.

[76] Fomenko A. T., Nikolaenko S. S., *The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid*, J. Geom. Phys., 2015, **87**, pp. 115–133.

[77] Николаенко С. С., *Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твёрдого тела*, Матем. сборник, 2016, **207**, № 1, сс. 123–150.
Англ. пер.: Nikolaenko S. S., *Topological classification of the Goryachev integrable case in rigid body dynamics*, Sb. Math., 2016, **207**, no. 1, pp. 113–139.

[78] Nikolaenko S. S., *Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, **38**, no. 6, pp. 1050–1060.

Тезисы докладов

[79] Николаенко С.С., *Разделение переменных и топология слоения Лиувилля геодезического потока на эллипсоиде общего положения*, сборник тезисов международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящённой 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского, Московский государственный университет, Москва, 2011, с. 288–289.

[80] S.S. Nikolaienko, *Topology of the Liouville foliation in the integrable case of Goryachev in the problem on motion of a rigid body in fluid*, Abstracts of the International Topological

Conference “Alexandroff Readings”, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2012, pp. 53–54.

[81] Stanislav Nikolaienko, *Topology of the Liouville foliation in the integrable case of Goryachev in the problem of motion of a rigid body in fluid*, Book of Abstracts of the XVII Geometrical Seminar, University of Belgrade, Serbia, 2012, pp. 58–59.

[82] Николаенко Станислав Сергеевич, *Инвариант Фоменко-Цишанга для случая Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости*, материалы международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2013”, МАКС Пресс, Москва, 2013, с. 1–2.

[83] С.С. Николаенко, *Траекторная эквивалентность интегрируемого случая Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости случаю Эйлера и задаче Якоби*, материалы международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна”, Воронеж: изд.-полигр. центр “Научная книга”, 2014, с. 231–233.

[84] Николаенко С.С., *Топология интегрируемого случая Горячева в динамике твёрдого тела*, материалы международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2014”, МАКС Пресс, Москва, 2014, с. 1–2.

[85] Stanislav Nikolaenko, *The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case and to the Jacobi problem*, Book of Abstracts of the 13th Serbian Mathematical Congress, University of Niš, Serbia, 2014, p. 93.

[86] Stanislav Nikolaenko, *Orbital equivalence of some classical integrable systems*, Book of Abstracts of the XVIII Geometrical Seminar, University of Niš, Serbia, 2014, p. 88.

[87] S.S. Nikolaienko, *Theory of topological invariants for integrable systems: how it works*, Abstracts of the International Workshop “Analysis, Geometry and Probability”, Moscow, 2014, p. 11.

[88] Николаенко С.С., *Траекторные инварианты для интегрируемого случая Горячева в динамике твёрдого тела*, материалы международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2015”, МАКС Пресс, Москва, 2015, с. 1.

[89] А.Т. Фоменко, В.В. Фокичева, С.С. Николаенко, *Топологически эквивалентные случаи интегрируемости в динамике*, материалы международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна”, Воронеж: изд.-полигр. центр “Научная книга”, 2016, с. 407–417.

[90] Stanislav Nikolaienko, *Topological classification of non-compact 1D Liouville foliations*, Book of abstracts of the international conference “Finite Dimensional Integrable Systems in

Geometry and Mathematical Physics", Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), Spain, 2017, pp. 37–38.

[91] Stanislav Nikolaienko, *Classification of Hamiltonian systems on non-compact two-dimensional manifolds up to the topological conjugacy*, Abstracts of the International Conference on Topology and its Applications, University of Patras, Greece, 2018, p. 156.

[92] Stanislav Nikolaienko, *Non-compact singularities of integrable Hamiltonian systems with 2 degrees of freedom*, International Conference on Finite Dimensional Integrable systems in Geometry and Mathematical Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 2019, pp. 25–26.

[93] С.С. Николаенко, *Некомпактные бифуркации в обобщённом семействе интегрируемых систем Чаплыгина-Горячева*, материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна", Воронеж: изд.-полигр. центр "Научная книга", 2016, с. 304–305.

[94] Stanislav S. Nikolaienko, *Topological invariants for the Chaplygin-Goryachev integrable case with non-compact Liouville foliations*, Book of Abstracts of the International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin (Nonholonomic Mechanics, Vortex Structures and Hydrodynamics)", Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2019, p. 155.