

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517.938.5+514.762

Москвин Андрей Юрьевич

Топология особенностей
дробно-рациональных
интегрируемых систем

01.01.04 — геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

Академик А.Т. Фоменко,

профессор А.В. Болсинов

Москва — 2010

Оглавление

Введение	5
1 Основные определения	12
1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях	12
1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы и теорема Лиувилля	12
1.1.2 Теорема Лиувилля	14
1.1.3 Типы эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем	15
1.2 Грубые топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	16
1.2.1 Изоэнергетические поверхности	16
1.2.2 Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс	20
1.2.3 Структура критических точек на изоэнергетической поверхности и понятие грубой молекулы	21
1.2.4 Склейка изоэнергетических поверхностей из 3-атомов	23
1.2.5 Типы невырожденных точек ранга ноль	24
1.3 Гамильтоновы системы в механике	30

1.3.1	Фазовое пространство	30
1.3.2	Конформно-гамильтоновы системы	32
1.4	Гипотеза Мищенко-Фоменко	33
1.4.1	Формулировка	33
1.4.2	Метод Садэтова	34
2	Случай Дуллина-Матвеева	42
2.1	Интегрируемый случай	42
2.2	Топология изоэнергетических поверхностей	44
2.3	Невырожденность точек ранга ноль	51
2.4	Бифуркационная диаграмма отображения момента	56
2.4.1	Критические точки отображения момента при $r_2 \neq 0$	56
2.4.2	Бифуркационная диаграмма	59
2.5	Критические окружности и их невырожденность	65
2.5.1	Количество критических окружностей в прообразе точек кривых бифуркационной диаграммы при $c = 0$	65
2.5.2	Явное интегрирование вдоль критических окружностей	68
2.5.3	Индексы некоторых критических окружностей	69
2.5.4	Экспериментальные данные	72
2.6	Грубые инварианты слоения Лиувилля и бифуркационный комплекс	80
2.7	Тонкий инвариант Фоменко-Цишанга	82
2.7.1	Циклы на торах Лиувилля	82
2.7.2	Допустимые системы координат и матрицы склейки	90
3	Шар Чаплыгина с ротором на плоскости	93
3.1	Уравнения движения и первые интегралы	93

3.2	Критические точки отображения момента	95
3.2.1	Критические окружности	95
3.2.2	Неподвижные точки	98
3.3	Бифуркационная диаграмма	98
3.3.1	Бифуркационные кривые	98
3.3.2	Устойчивость критических окружностей и бифуркаци- онный комплекс	101
3.3.3	Стабилизация и дестабилизация критических решений .	105
4	Резиновый шар на плоскости	108
4.1	Уравнения движения и первые интегралы	108
4.1.1	Резиновый шар на плоскости	108
4.1.2	Резиновый шар на плоскости с ротором в потенциальном поле	109
4.1.3	Интегрируемые случаи	111
4.2	Критические окружности их устойчивость	111
4.2.1	Резиновый шар	112
4.2.2	Резиновый шар с ротором	113
4.2.3	Резиновый шар в поле сил задачи Бруна	118
5	О полноте гамильтоновых векторных полей	124
5.1	Редукция систем	124
5.2	Левоинвариантные гамильтоновы системы на группах Ли и урав- нения Эйлера на алгебрах Ли	125
5.3	О полноте гамильтоновых векторных полей для полиномов, по- лученных методом Садэтова	127

Введение

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию топологии слоения Лиувилля для некоторых интегрируемых систем, в том числе систем неголономной механики. В работе находит активное применение теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, разработанная М.П. Харламовым, а также теория топологической классификации, построенная А.Т. Фоменко, Х. Цишангом, А.В. Болсиновым, С.В. Матвеевым и другими.

В классической механике имеется обширный класс систем с неголономными связями. Этот класс задач не укладывается в рамки обычной гамильтоновой механики. Однако некоторые системы сохраняют интеграл энергии и другие тензорные инварианты. В частности, некоторые задачи, такие как качение шара по плоскости, обладают инвариантной мерой и после замены времени могут быть приведены к гамильтоновому виду. А потому для их анализа применимы методы обычной гамильтоновой механики (в том числе и топологические).

Первые постановки задачи неголономной механики, а также их исследования принадлежат Э. Раусу, С.А. Чаплыгину, П.В. Воронцу, П. Аппелю и Г.К. Суслову, которые нашли замечательные интегрируемые ситуации и дали их аналитическое и качественное описание.

Многие задачи неголономной механики имеют сложные уравнения дви-

жения. Поэтому для их качественного анализа необходимо прибегать к различным методам анализа, например, к топологическим методам. Первые работы по исследованию топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификации особенностей, построению бифуркационных диаграмм и определения типов бифуркаций, вычислению локальных и глобальных инвариантов слоения Лиувилля, траекторных инвариантов принадлежат А.Т. Фоменко, Х. Цишангу [1], А.В. Болсинову [2], А.А. Ошемкову [3, 4], В.С. Матвееву [5], М.П. Халамову [6], П. Топалову [7], О.Е. Орел [8], П.Е. Рябову [9, 10, 11, 12], П.В. Морозову [13, 14].

В настоящей диссертации показано, как теория топологического анализа может быть применена к исследованию системы Дуллина-Матвеева, задач неголономной механики о качении шара Чаплыгина и резинового шара по плоскости, которые являются гамильтоновыми лишь после замены времени.

Цель диссертации

Диссертационная работа преследует три основные цели:

1. Исследование топологии слоений Лиувилля интегрируемого случая Дуллина -Матвеева.
2. Описание устойчивости критических решений в задачах о катании шара Чаплыгина и резинового шара по плоскости.
3. Изучение вопроса полноты гамильтоновых полей соответствующих полиномам из полного коммутативного набора полиномов на вещественных алгебрах Ли, полученных методом Садэтова.

Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, разработанные М.П. Харламовым. Для построения

грубых и меченых молекул была использована теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А.Т. Фоменко, А.В. Болсиновым и другими. При исследовании полноты векторных полей использовался метод редукции динамических систем.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Исследована топология слоений Лиувилля для интегрируемых случаев Дуллина-Матвеева, о качении шара Чаплыгина с ротором по плоскости, о качении резинового шара с ротором и в поле сил задачи Бруна по плоскости. Для всех систем получены бифуркационные диаграммы отображения момента, вычислены индексы критических окружностей и построены бифуркационные комплексы.
2. Решена задача тонкой Лиувиллевой классификации изоэнергетических поверхностей случая Дуллина-Матвеева. Доказана невырожденность и дана классификация положений равновесия, описаны грубые и меченые молекулы изоэнергетических поверхностей.
3. Решена задача о полноте гамильтоновых векторных полей отвечающих полиномам, полученных методом Садэтова. А именно, в полных коммутативных наборах полиномов, полученных методом Садэтова, есть два типа полиномов. Полиномы первого типа получают методом сдвига аргумента, полиномы второго типа — другими методами. Доказано, что гамильтоновы поля, соответствующие полиномам второго типа — полные.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение. Они полезны для исследования особенностей интегрируемых гамильтоновых систем. Предложен метод для доказательства полноты гамильтоновых полей, обладающих большим количеством интегралов. На практике они могут быть использованы для создания шарообразных движущихся механизмов, например, игрушек.

Аппробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на заседании Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 2006), на конференции «Александровские чтения» (Москва, 2006), на геометрическом заседании семинара проф. Лауреса (Бохумский университет, Германия, 2008), на международной конференции «Geometry, Dynamics and Integrable systems» (Белград, 2008), на конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященную 70-летию ректора МГУ акад. В.А.Садовниченко (Москва, 2009), на семинаре Института Компьютерных Исследований (Ижевск, 2009), а также многократно на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко и проф. А.С. Мищенко (мех-мат МГУ).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 4 работы [15, 16, 17, 18].

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 134 страницах. Список литературы содержит 40 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а так же освещается место данных результатов в современной механике.

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Описаны фазовое пространство и конформно-гамильтоновы дифференциальные уравнения на пуассоновых многообразиях, которые возникают в задачах неголономной механики. А также сформулирована гипотеза Мищенко-Фоменко и дана новая интерпретация метода Садэтова построения полных коммутативных наборов полиномов на алгебрах Ли.

Во **второй главе** для случая Дуллина–Матвеева найдены множество критических точек и множество критических значений отображения момента, описана топология изоэнергетических поверхностей, исследованы особые точки векторного поля и их тип, определено количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы. На компьютере вычислены индексы критических окружностей и сделан вывод о типе грубых молекул интегрируемого случая. Построены меченые молекулы.

Случай Дуллина–Матвеева является топологически новым, поскольку такой набор грубых молекул не встречается ни в одном из известных случаев интегрируемости. В одной из молекул встречается атом D_2 . Такая перестройка торов Лиувилля не встречается ни в одном из классических случаев интегрируемости.

В **третьей главе** анализируются движения шара Чаплыгина с ротором. Проведен топологический анализ. В частности, для отображения момента построена бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс. Описаны особые решения. Их устойчивость исследована аналитически. В последнем параграфе показано, как при помощи ротора можно стабилизировать неустойчивые и дестабилизировать устойчивые критические траектории.

В **четвертой главе** изучены отдельные замечательные периодические ре-

шения задачи о качении резинового шара по плоскости. Эта задача остается интегрируемой после замены времени даже при добавлении к шару постоянного ротора или силового поля задачи Бруна. При обеих добавках также исследованы решения, и среди них найдены устойчивые. Для этого системы были подвергнуты топологическому анализу, разработанному М.П. Харламовым. В частности, по отображению момента построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы. Описаны критические решения. Их устойчивость исследована аналитически.

Наконец, в **пятой главе** получены результаты о полноте некоторых гамильтоновых векторных полей. А именно, в работе [19] А.С.Мищенко и А. Т. Фоменко сформулировали гипотезу о существовании полного коммутативного набора полиномов на произвольной алгебре Ли над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} и предложили метод сдвига аргумента, доказывающий гипотезу для полупростых алгебрах Ли. В работе [20] С.Т.Садэтов доказал гипотезу в общем случае над произвольным полем нулевой характеристики. Естественным образом встает вопрос об исследовании полноты гамильтоновых полей, отвечающих полученным полиномам. Действительно, полный коммутативный набор функций еще не определяет интегрируемую по Лиувиллю систему. Для интегрируемости по Лиувиллю требуется полнота гамильтоновых полей для всех функций из набора коммутирующих функций. Метод Садэтова устроен пошагово. На каждом шаге применяется один из четырех методов и к уже существующему набору полиномов добавляется несколько новых. Среди этих четырех методов, используемых Садэтовым, есть метод сдвига аргумента. Таким образом, Садэтов каждый отдельный полином получает одним из двух способов: либо методом сдвига аргумента, либо одним из трех оставшихся методов. В пятой главе показано, что гамильтоновы поля для полиномов, полученных

вторым способом — полны. Тем самым, задача об исследовании гамильтоновых полей полиномов из набора полных коммутативных наборов полиномов, полученных методом Садэтова, сведена к задаче об исследовании полноты гамильтоновых полей полиномов, полученных методом сдвига аргумента.

Публикации автора на тему диссертации

1. Москвин А.Ю. Топология слоений Лиувилля нового интегрируемого случая на двумерной сфере — Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна, 2006, ИПЦВГУ, с.135-139
2. Москвин А.Ю. Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере — Матем. сб., 2008, т.199, №3, с. 95–132
3. Москвин А.Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения — Нелинейная динамика, 2009, т.5, №3, с. 345-356
4. Москвин А.Ю. Резиновый шар на плоскости: критические решения — Нелинейная динамика, 2010, т.6, №2, с. 345-358

Глава 1

Основные определения

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях

1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы и теорема Лиувилля

Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие \mathcal{M}^{2n} и гладкую функцию H на нем. *Косым градиентом* $\text{sgrad } H$ функции H на \mathcal{M}^{2n} называется векторное поле на \mathcal{M}^{2n} , являющееся результатом поднятия нижнего индекса у ковекторного поля $\text{grad } H$ при помощи симплектической формы ω .
Динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{sgrad } H(\mathbf{x}) \quad (1.1.1)$$

на симплектическом многообразии называется *гамильтоновой с гамильтонианом* H . невырожденная дифференциальная 2-форма на многообразии помогает ввести скобку Пуассона гладких функций следующим каноническим образом:

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g).$$

Легко показать, что все аксиомы скобки Пуассона выполнены. Тождество Якоби следует из замкнутости формы ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1 Гамильтонова система (1.1.1) на симплектическом многообразии \mathcal{M}^{2n} называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций f_1, f_2, \dots, f_n таких, что:

- 1) f_1, f_2, \dots, f_n — первые интегралы системы,
- 2) они функционально независимы на \mathcal{M}^{2n} , то есть почти всюду на \mathcal{M}^{2n} градиенты линейно независимы,
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ для любых i и j ,
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны для всех i , т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Часто для краткости вполне интегрируемую по Лиувиллю динамическую систему называют *интегрируемой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2 *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия \mathcal{M}^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Отметим, что векторные поля $\text{sgrad } f_1, \text{sgrad } f_2, \dots, \text{sgrad } f_n$ коммутируют, поскольку

$$[\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j] = \text{sgrad } \{f_i, f_j\}$$

и являются полными. Это позволяет определить на \mathcal{M}^{2n} действие абелевой группы \mathbb{R}^n , порожденное сдвигами вдоль векторных полей $\text{sgrad } f_1, \text{sgrad } f_2, \dots, \text{sgrad } f_n$.

1.1.2 Теорема Лиувилля

В случае интегрируемой гамильтоновой системы на симплектическом многообразии \mathcal{M}^{2n} отображением момента называют отображение

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n : \mathcal{M}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

сопоставляющее точке $\mathbf{x} \in \mathcal{M}^{2n}$ точку $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим регулярную поверхность уровня отображения момента:

$$T_\xi = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}^{2n} \mid f_i(\mathbf{x}) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ . Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1.1 (Лиувилля) Пусть на симплектическом многообразии $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$, и T_ξ — регулярная поверхность уровня отображения момента. Тогда

- 1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.
- 2) Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то оно диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.
- 3) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \phi_1, \dots, \phi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
 - а) s_1, \dots, s_n — координаты на диске D^n , ϕ_1, \dots, ϕ_n — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
 - б) $\omega = \sum d\phi_i \wedge ds_i$.

в) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n .

г) В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

В частности, слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T^n тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n . Доказательство теоремы можно найти, допустим, в [21].

1.1.3 Типы эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматривают несколько типов их изоморфизмов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3 Две интегрируемы гамильтоновы системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) *лиувиллево эквивалентны*, если существует диффеоморфизм $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, переводящий слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Это отношение эквивалентности можно несколько ослабить. В результате получается понятие грубой лиувиллевой эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.4 Две интегрируемы гамильтоновы системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) *грубо лиувиллево эквивалентны*, если существует гомеоморфизм

между базами слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

1.2 Грубые топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Далее будем рассматривать лишь системы с двумя степенями свободы, т.е. в обозначениях выше $n = 2$. В таком случае для интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновой системы $\text{sgrad } H$ на \mathcal{M}^4 достаточно существования всего одного дополнительного первого интеграла F , функционально независимого с H .

1.2.1 Изоэнергетические поверхности

Изоэнергетической поверхностью называется трехмерное многообразие

$$Q_h^3 = \{x \in \mathcal{M}^{2n} | H(x) = h\}.$$

Сразу ограничимся рассмотрением лишь тех h , при которых, во-первых, Q_h^3 компактно, а во-вторых, $dH \neq 0$ на Q_h^3 . Тем самым, мы гарантируем, что Q_h^3 — гладкое трехмерное многообразие, а векторное поле $v = \text{sgrad } H$ нигде на Q_h^3 не обращается в ноль.

Продифференцируем гамильтониан H вдоль кососимметрических градиентов функций H и F

$$(\text{sgrad } H)(H) = \{H, H\} = 0, \quad (\text{sgrad } F)(H) = \{F, H\} = 0.$$

Значит, на неособой изоэнергетической поверхности можно рассматривать два касательных векторных поля $v = \text{sgrad } H$ и $w = \text{sgrad } F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1 Точку $x \in Q^3$ будем называть *критической*, если

в ней поля $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ линейно зависимы

$$\text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H.$$

Следует отметить, что особые поверхности уровня отображения момента — это в точности те поверхности, на которые попали критические точки. Теорема Лиувилля к таким поверхностям не применима.

Ограничим интеграл F на изоэнергетическую поверхность

$$\hat{F} = F|_{Q_h^3}.$$

Для топологического исследования интегрируемого случая с двумя степенями свободы полезно следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.1 [21, том 1, глава 1] *Функция \hat{F} не может иметь изолированных критических точек на неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Критические точки \hat{F} организованы в критические траектории. Каждая критическая траектория проектируется в одну точку на бифуркационной диаграмме. Параметр λ пропорциональности $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен вдоль критической траектории.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Введем такие локальные координаты на 4-мерном многообразии x_1, x_2, x_3, x_4 , в которых $\text{sgrad } H = (1, 0, 0, 0)$. Тогда поскольку F и H коммутируют, получаем

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

т.е.

$$F = F(x_2, x_3, x_4), \quad H = H(x_2, x_3, x_4).$$

Теперь понятно, что если градиенты F и H пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности λ , тогда они будут пропорциональны и

в точке, сдвинутой вдоль первой координатной оси, то есть вдоль интегральной траектории гамильтонова поля с тем же коэффициентом пропорциональности.

Утверждение доказано. \square

Функция \hat{F} является гладкой на изоэнергетической поверхности Q^3 . Множество критических точек функции \hat{F} на Q^3 будет совпадать с множеством критических точек в смысле определения 1.2.1. Как отмечено в предыдущем утверждении, критические точки на Q^3 не могут быть изолированными. Поэтому предположение о том, что \hat{F} является функцией Морса бессмысленно. Однако, в случае динамических систем существует естественный аналог этого понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.2 Функция \hat{F} называется *функцией Ботта* на многообразии Q_h^3 , если все ее критические точки организованы в критические подмногообразия.

Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причем каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал $d^2\hat{F}$ невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию (в каждой его точке). Другими словами, ограничение функции \hat{F} на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.2 [21, том 1, глава 1] *Связные критические подмногообразия интеграла \hat{F} на Q_h^3 диффеоморфны либо окружности, либо тору, либо бутылке Клейна.*

Таким образом критические подмногообразия устроены очень просто. Далее в тексте диссертации будут рассматриваться интегрируемые системы, не

содержащие критических торов и бутылок Клейна. Так, исходя из компактности Q^3 , в случае боттовского дополнительного интеграла множество критических точек организовано в набор конечного числа критических окружностей. Каждая такая критическая окружность является периодической траекторией поля $\text{sgrad } H$.

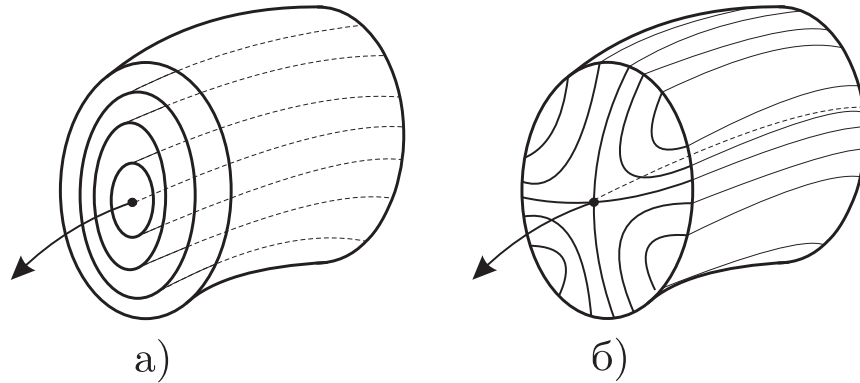


Рис. 1.1: Окрестности точек невырожденных критических окружностей на изоэнергетических поверхностях

Не сложно показать, что сигнатура гессиана \hat{F} на Q^3 одинакова для всех точек на критической окружности. Поэтому для проверки невырожденности точки на критической окружности достаточно проверить невырожденность всего одной точки. Так же можно ввести *индекс критической окружности* — это количество отрицательных собственных значений $d^2\hat{F}$ в какой-нибудь точке на этой окружности.

В боттовском случае слоение Лиувилля в трехмерной окрестности нестационарной для поля v критической точки устроено очень просто. С точностью до гомеоморфизма существует лишь два типа таких слоений (см. рис. 1.1). Окрестность имеет тип а), если два ненулевых собственных значения $d^2\hat{F}$ одного знака, и тип б), если — разного.

Соответственно, невырожденные критические окружности будем называть *устойчивыми*, если два ненулевых собственных значения $d^2\hat{F}$ одного знака,

и *неустойчивой*, если — разного. Тогда решения, отвечающие устойчивым и неустойчивым критическим окружностям, будут соответственно орбитально устойчивыми и неустойчивыми.

1.2.2 Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс

Рассмотрим *отображение момента*. Оно определяется следующим образом

$$H \times F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f). \quad (1.2.1)$$

Бифуркационной диаграммой называют образ критических точек этого отображения. Иногда в литературе бифуркационную диаграмму называют *диаграммой Смейла*. Обычно, бифуркационная диаграмма состоит из набора кривых и изолированных точек. Отметим, что изоэнергетические поверхности при таком отображении переходят в прямые.

Для более наглядной визуализации структуры критических точек рассмотрим отображение момента (1.2.1) и двумерный комплекс K , точками которого являются отдельные компоненты связности прообразов отображения момента, т. е. множеств $(H \times F)^{-1}(y)$, где точка $y \in \mathbb{R}^2$ пробегает $H \times F(\mathcal{M}^4)$ (т. е. образ \mathcal{M}^4 на плоскости \mathbb{R}^2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.3(А.Т.Фоменко [22]) Комплекс K называется *бифуркационным комплексом* для интегрируемой системы (1.1.1).

Следует отметить, что в нерезонансном случае бифуркационный комплекс не зависит от выбора интегралов, а определяется лишь векторным полем $\text{sgrad } H$. Этот факт не очевиден, однако несложно вытекает из фундаментальных теорем симплектической геометрии. Обобщение понятия бифуркационного комплекса на случай интегрируемых гамильтоновых систем с большими степенями свободы, а также основные свойства этого комплекса изло-

жены в работе [23].

Обычно, многообразие \mathcal{M}^4 задается в виде регулярной поверхности уровня некоторых гладких функций I_1, I_2 :

$$\mathcal{M}^4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid I_1(\mathbf{x}) = c_1, I_2(\mathbf{x}) = c_2\}.$$

При этом H и F заданы как гладкие функции в \mathbb{R}^6 . Тогда критические точки отображения (1.2.1) можно найти следующим способом. Находим множество критических точек отображения

$$H \times F \times I_1 \times I_2 : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

и пересекаем это множество с \mathcal{M}^4 . Получаем в точности множество критических точек отображения (1.2.1).

1.2.3 Структура критических точек на изоэнергетической поверхности и понятие грубой молекулы

Дополнительный интеграл F определяет слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности Q^3 . База этого слоения представляет собой некоторый граф $\Gamma(Q^3)$. При этом, согласно теореме Лиувилля, каждой точке ребер этого графа соответствует один тор Лиувилля, вершинам — соответствуют связанные особые слои (см. рис. 1.2 :).

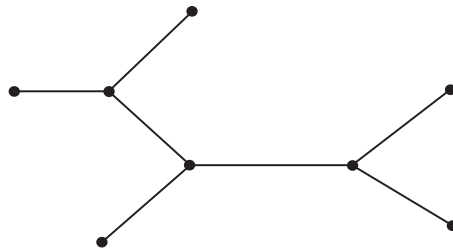


Рис. 1.2: База слоения Лиувилля на изоэнергетической поверхности

Очевидно, что графы вида $\Gamma(Q^3)$ получаются как «сечения» бифуркационного комплекса K , а именно $\Gamma(Q^3) = (H \times F)^{-1}(l)$, где прямая $l \subset \mathbb{R}^2$

задается уравнением $H = \lambda = \text{const}$. Меняя число λ , мы меняем граф $\Gamma(Q^3)$, который замечает при этом весь комплекс K . С этой точки зрения топологический инвариант $\{\Gamma(Q^3)\}$ состоит из всех типов сечений комплекса K .

Оказывается, что в боттовском случае с точностью до Лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировано количество критических окружностей на сингулярном слое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.4 (А.Т.Фоменко) Класс Лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется *3-атомом*.

Фактически, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой слоения Лиувилля. Это многообразие содержит ровно один сингулярный слой. Граница состоит из конечного числа торов. Количество критических окружностей на сингулярном слое называется *сложностью атома*. В книге А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [21] изложена классификация всех возможных 3-атомов в зависимости от их сложности. Три наиболее встречающихся атома обозначают буквами A , B и A^* (см. рис. 1.3). Как видно, все три атома имеют сложность один.

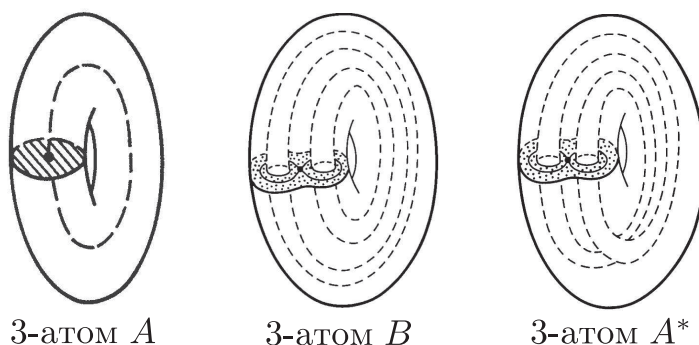


Рис. 1.3: 3-атомы.

Если каждой вершине графа, отвечающему слоению Лиувилля, сопоста-

вить подходящий \mathbb{Z} -атом, то получим *грубую молекулу* слоения Лиувилля. Грубая молекула несет информацию о слоении Лиувилля и позволяет локально восстановить структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев. Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.2.1 (А.Т. Фоменко [21, том 1, глава 3]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) с боттовскими интегралами F_1 и F_2 грубо лиувиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

1.2.4 Склейка изоэнергетических поверхностей из \mathbb{Z} -атомов

\mathbb{Z} -атомы описывают структуру слоения Лиувилля в окрестности особого слоя. Все многообразие Q^3 представляется в виде объединения \mathbb{Z} -атомов. Для того, что бы восстановить структуру слоений глобально на всем Q^3 , необходимо указать гомеоморфизмы, по которым склеиваются границы этих \mathbb{Z} -атомов. Если на всех граничных торах \mathbb{Z} -атомов указать по паре базисных циклов, то склеивающий гомеоморфизм будет задаваться целочисленной матрицей 2×2 с определителем ± 1 . Однако, базисные циклы можно выбрать многими разными способами.

Оказывается, для каждого \mathbb{Z} -атома можно определить по одному каноническому базисному циклу на каждом его граничном торе. В случае атома A это цикл, который стягивается при приближении к критической окружности. Для седлового атома B этот цикл изотопен критической окружности.

Выделить второй базисный цикл таким же каноническим способом уже не удастся. Поэтому ограничиваются выбором сразу множества циклов, обладающих некоторыми общими свойствами. Вместе с первым базисным циклом они образуют так называемую *допустимую систему координат* на гранич-

ном торе 3-атома. Более точное определение можно найти в [21].

Группа замен координат в классе допустимых имеет не сложную структуру. Инвариантами действия этой группы на матрицы склейки являются числовыми метками r, ε и n . Они могут быть легко вычислены по этим матрицам. Метки r и ε расставляются на каждом ребре молекулы. Метка n ставится сразу на группе атомов, называемых *семьей*.

Числовые метки имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Допустим, метка $r \in \{\mathbb{Q} \cap [0, 1) \cup \infty\}$ на ребре определяет беззнаковый индекс пересечения однозначно определенных базисных циклов бифуркаций, которые соединяются этим ребром. Метка $\varepsilon \in \{1, -1\}$ отвечает за ориентацию. Если $r = \infty$, то первые базисные циклы изотопны вдоль ребра с точностью до ориентации. Эти циклы сонаправлены, если $\varepsilon = 1$, и противоположно направлены, если $\varepsilon = -1$. Смысл метки $n \in \mathbb{Z}$ более сложный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.5 Грубая молекула W , снабженная метками r_i, ε_i и n_i называется *инвариантом Фоменко-Цишанга* или просто *меченой молекулой*.

ТЕОРЕМА 1.2.2 (ФОМЕНКО, ЦИШАНГ [21, ТОМ 1, ГЛАВА 4]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) ливиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их меченые молекулы совпадают.*

1.2.5 Типы невырожденных точек ранга ноль

По определению выше точка \mathcal{M}^4 называется критической, если в ней ранг дифференциала отображения (1.2.1) меньше двух. Среди таких точек особый интерес представляют те, где ранг этого дифференциала равен нулю. В невырожденном случае (определение невырожденности будет дано ниже) с

точностью до гомеоморфизма существует лишь конечное число типов слоев Лиувилля 4-мерных окрестностей таких точек.

Пусть на симплектическом многообразии \mathcal{M}^4 задана интегрируемая система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F , а точка $\xi \in \mathcal{M}^4$ такая, что

$$dH(\xi) = dF(\xi) = 0.$$

Оператор $A : T_\xi \mathcal{M}^4 \rightarrow T_\xi \mathcal{M}^4$ называется симплектическим, если он сохраняет форму $\omega|_\xi$. В локальных координатах это эквивалентно условию

$$A^T \Omega + \Omega A = 0,$$

где Ω — матрица формы $\omega|_\xi$. Множество всех симплектических операторов образует алгебру Ли $sp(4, \mathbb{R})$. На $T_\xi \mathcal{M}^4$ можно корректно определить два симплектических оператора

$$A_H := \Omega^{-1} d^2(H|_\xi), \quad A_F := \Omega^{-1} d^2(F|_\xi),$$

порождающих в $sp(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.6 Точка ξ ранга ноль отображения момента называется невырожденным, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $sp(4, \mathbb{R})$.

Укажем эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$. Коммутативная подалгебра $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна, и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. Итак, сначала надо убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация

$$\lambda A_H + \mu A_F$$

имеет попарно различные собственные значения (такой элемент называется регулярным элементом $sp(4, \mathbb{R})$).

Собственные значения операторов из $sp(4, \mathbb{R})$ разбиваются на пары вида $\lambda, -\lambda$. Поэтому невырожденные точки ранга ноль можно классифицировать по типу собственных значений регулярного элемента в подалгебре Картана $K(H, F)$:

- 1) *центр-центр* — чисто мнимые корни $iA, -iA, iB, -iB$;
- 2) *центр-седло* — два вещественных и два мнимых корня $-A, A, iB, -iB$;
- 3) *седло-седло* — вещественные корни $-A, A, -B, B$;
- 4) *фокус-фокус* — чисто комплексные $A - iB, A + iB, -A + iB, -A - iB$.

Зная тип невырожденной точки ранга ноль, можно многое сказать о топологии слоения Лиувилля в его окрестности \mathcal{U}^4 .

ТЕОРЕМА 1.2.3 (РЮССМАН [24]) Пусть многообразие \mathcal{M}^4 , симплектическая структура ω и функции H и F являются вещественно - аналитическими. Тогда в окрестности невырожденной особой точки ранга ноль $\xi \in \mathcal{M}^4$ всегда существуют канонические координаты (p_1, q_1, p_2, q_2) , в которых функции H и F одновременно приводятся к одному из следующих видов:

- 1) *случай центр-центр:*

$$H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2),$$

$$F = F(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2),$$

- 2) *случай центр-седло:*

$$H = H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2),$$

$$F = F(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2),$$

3) случай седло-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1q_1, p_2q_2), \\ F &= F(p_1q_1, p_2q_2), \end{aligned}$$

4) случай фокус-фокус:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - p_2q_1), \\ F &= F(p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - p_2q_1). \end{aligned}$$

Теорему Рюссмана можно найти в [21, том 1, глава 1].

Особенность центр-центр. Используем эту теорему для описания топологии слоений Лиувилля в окрестности точки центр-центр. А именно, мы хотим найти естественно связанную с системой пару циклов на неособых торах Лиувилля в \mathcal{U}^4 . Введем две функции

$$r_1 = \pm(p_1^2 + q_1^2), \quad r_2 = \pm(p_2^2 + q_2^2). \quad (1.2.2)$$

Знаки ± 1 зададим позже. Тогда $H = H(r_1, r_2)$, $F = F(r_1, r_2)$ и

$$\text{sgrad } H = \frac{\partial H}{\partial r_1} \text{sgrad } r_1 + \frac{\partial H}{\partial r_2} \text{sgrad } r_2 \quad (1.2.3)$$

в окрестности \mathcal{U}^4 . Множество критических точек — точек, где зависимы градиенты функций H и F — локально состоит из объединения пары двумерных плоскостей

$$r_1 = 0 \text{ и } r_2 = 0.$$

Векторные поля $\text{sgrad } r_1$ и $\text{sgrad } r_2$ коммутируют, независимы, их траектории периодичны — и поэтому задают циклы λ_1 и λ_2 на неособых торах Лиувилля. При приближении к плоскости $r_2 = 0$ поле $\text{sgrad } r_2$ обнуляется, а цикл λ_1 стягивается в точку. А при приближении к плоскости $r_1 = 0$ обнуляется поле $\text{sgrad } r_1$, и цикл λ_2 стягивается в точку. Так, на плоскости $r_2 = 0$ параллельными будут поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } r_1$, а на плоскости $r_1 = 0$ — поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } r_2$.

Теперь сделаем предположение, что в \mathcal{U}^4 всего одна неподвижная точка векторного поля $\text{sgrad } H$, и она совпадает с точкой центр-центр. Выберем знаки ± 1 в (1.2.2) так, чтобы пары полей $\text{sgrad } H, \text{sgrad } r_1$ и $\text{sgrad } H, \text{sgrad } r_2$ были сонаправленными на плоскостях $r_2 = 0$ и $r_1 = 0$ соответственно. Что эквивалентно условию

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial r_1}|_{r_2=0} > 0, \\ \frac{\partial H}{\partial r_2}|_{r_1=0} > 0. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Итак, на неособых торах в \mathcal{U}^4 выделена пара циклов λ_1, λ_2 . При этом, во-первых, циклы λ_1, λ_2 образуют базис фундаментальной группы торов. Во-вторых, цикл λ_1 стягивается в точку при приближении к плоскости $r_2 = 0$, цикл λ_2 стягивается в точку при приближении к $r_1 = 0$. И в-третьих, поле $\text{sgrad } H$ задает ориентации циклов λ_1 и λ_2 на плоскостях $r_2 = 0$ и $r_1 = 0$ соответственно. Пара циклов λ_1, λ_2 в окрестности точки центр-центр с такими свойствами определена однозначно.

ЛЕММА 1.2.1 Пусть регулярный тор в \mathcal{U}^4 резонансен. Тогда траектории поля $\text{sgrad } H$ задают некоторый цикл λ . Этот цикл можно разложить по λ_1 и λ_2 .

$$\lambda = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2,$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда либо $a_1 > 0$, либо $a_2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Поскольку $\text{sgrad } r_1$ и $\text{sgrad } r_2$ оба периодичны с периодом 2π , из (1.2.3) получаем

$$\lambda = \alpha \frac{\partial H}{\partial r_1} \lambda_1 + \alpha \frac{\partial H}{\partial r_2} \lambda_2.$$

Для некоторого $\alpha > 0$. При этом должно получиться

$$\alpha \frac{\partial H}{\partial r_1}, \alpha \frac{\partial H}{\partial r_2} \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку точка центр-центр невырождена, значит

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} \Big|_{r_1=0, r_2=0} \neq 0 \text{ либо } \frac{\partial H}{\partial r_2} \Big|_{r_1=0, r_2=0} \neq 0.$$

Пусть для определенности верно первое неравенство. Тогда ввиду (1.2.4)

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} \Big|_{r_1=0, r_2=0} > 0.$$

Значит, можно считать, что во всей окрестности \mathcal{U}^4 имеет место

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} > 0 \implies a_1 = \alpha \frac{\partial H}{\partial r_1} > 0.$$

Лемма доказана. \square

Особенность фокус-фокус. Опишем слоение Лиувилля в окрестности особого слоя типа фокус-фокус. Разберем самый простой случай, когда на особом слое лежит всего одна точка ранга ноль. В таком случае особый слой можно представить себе в виде тора с одной перетяжкой.

На торах, проходящих вблизи особой точки фокус-фокус можно выделить некоторый замечательный цикл λ : этот цикл стягивается в точку при приближении к особому слою [21, том 1, глава 9] (см. рис. 1.4).

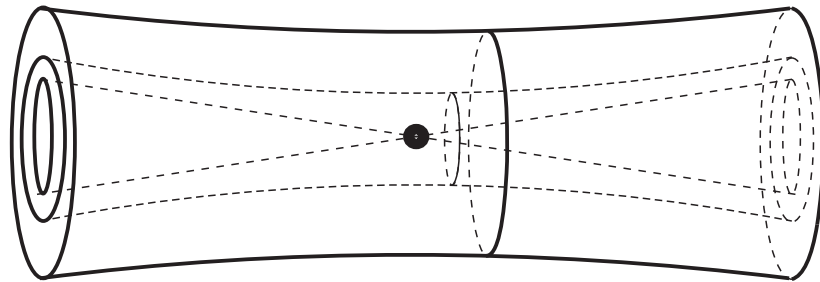


Рис. 1.4: Стягивающийся цикл в окрестности точки фокус-фокус

Бифуркационная диаграмма отображения момента вблизи особого слоя фокус-фокус состоит из одной точки. Выберем тор вблизи особой точки, и дополним цикл λ до базиса некоторым циклом μ . Рассмотрим круговую молекулу особенности. При движении точки по плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ циклы течет

по торах. И обход вдоль круговой молекулы задает нетривиальный диффеоморфизм тора на себя, тем самым перестраивая циклы. Однако существует унимодулярная целочисленная матрица перехода (матрица монодромии), выражающая образы циклов λ, μ через λ, μ .

ТЕОРЕМА 1.2.4 [25] *Пусть на особом слое лежит всего одна точка типа фокус-фокус. Тогда матрица монодромии имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где знак ± 1 зависит от направления обхода по круговой молекуле и выбора ориентации на цикле λ .

Доказательство теоремы можно найти в [21, том 1, глава 9]. Так, из теоремы можно сделать два наблюдения. Во-первых, цикл λ сохраняется при монодромии. А во-вторых, если для некоторого цикла λ_1 его индекс пересечения с λ равен одному, тогда при монодромии цикл λ_1 перейдет в цикл

$$\lambda_1 \pm \lambda.$$

1.3 Гамильтоновы системы в механике

1.3.1 Фазовое пространство

Многие задачи механики можно представить в виде гамильтоновых на симплектических многообразиях. При этом в качестве симплектических многообразий выступают орбиты коприсоединенного действия группы Ли на двойственном пространстве к их алгебре Ли.

Рассмотрим произвольную конечномерную группу Ли \mathbf{G} и ее алгебру Ли \mathfrak{g} . Двойственное пространство \mathfrak{g}^* снабжено структурой Пуассона-Ли. Пусть

$f, g : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольные гладкие функции. Их дифференциалы в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}^*$ можно трактовать как элементы самой алгебры Ли \mathfrak{g} . Скобка Пуассона-Ли функций f и g определяется тогда следующей формулой:

$$\{f, g\}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, [df_x, dg_x] \rangle, \quad (1.3.1)$$

Верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.1 *Орбиты коприсоединенного действия группы Ли \mathbf{G} на своей коалгебре \mathfrak{g}^* все являются симплектическими многообразиями с канонической 2-формой ω — формой Кириллова. Скобку Пуассона на этих многообразиях можно считать следующим образом: если f, g — две гладкие функции на орбите, продолжаем их произвольным образом до гладких функций \tilde{f}, \tilde{g} на всей коалгебре, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{g}^* : \{f, g\}(\mathbf{x}) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(\mathbf{x})$.*

Фактически, последнее предложение утверждает, что тензор Пуассона π^{ij} скобки (1.3.1) можно ограничить с коалгебры на орбиту. Вообще говоря, тензоры с верхними индексами не ограничиваются с многообразия на подмногообразии. Однако в данном конкретном случае, это ограничение сделать можно.

Для примера рассмотрим алгебру $e(3)$ группы движений трехмерного пространства \mathbb{R}^3 . Эта алгебра 6-мерна. В коалгебре можно выбрать такие координаты $S_1, S_2, S_3, r_1, r_2, r_3$, что скобка Пуассона запишется в виде:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \{S_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \{r_i, r_j\} = 0, \quad (1.3.2)$$

где ε_{ijk} — кососимметрический тензор, принимающий значение 1 на четных перестановках индексов. Скобку Пуассона достаточно задать лишь на координатных функциях. Поэтому скобка полностью определена. Данная скобка

имеет 2 функции Казимира:

$$I_1 = S_1 r_1 + S_2 r_2 + S_3 r_3 \text{ и } I_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.2 $\mathcal{M}_{c_1, c_2}^4 = \{I_1 = c_1, I_2 = c_2\}$ — орбита коприсоединенного действия группы $E(3)$ в своей коалгебре.

Поэтому \mathcal{M}_{c_1, c_2}^4 являются 4-мерными симплектическими многообразиями. Такие уравнения классической механики, как уравнения Эйлера-Пуассона о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести, уравнения Кирхгофа о движении твердого тела в несжимаемой жидкости с однозначным потенциалом скоростей, равным нулю на бесконечности, могут быть записаны в гамильтоновом виде с квадратичным гамильтонианом на орбитах коприсоединенного действия именно группы $E(3)$, т.е. на симплектических многообразиях типа \mathcal{M}_{c_1, c_2}^4 .

1.3.2 Конформно-гамильтоновы системы

В предыдущем параграфе было отмечено, что многие задачи механики можно представить в гамильтоновом виде (1.1.1) на симплектических многообразиях. Класс таких дифференциальных уравнений можно расширить. Допустим, задачи неголономной механики обычной нельзя представить в гамильтоновой форме (1.1.1), однако часто можно представить в так называемом *конформно-гамильтоновом виде*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x}) \operatorname{sgrad} H(\mathbf{x}), \quad (1.3.3)$$

где *приводящий множитель* $\mu(\mathbf{x})$ — знакоопределенная на всем многообразии \mathcal{M}^{2n} функция. Легко видеть, что траектории решений (1.3.3) после

замены времени

$$d\tau = \mu(\mathbf{x})dt$$

совпадают с траекториями уравнения (1.1.1).

Так конформно-гамильтонову систему будем называть *интегрируемой*, если соответствующая ей гамильтонова система после замены времени является интегрируемой.

1.4 Гипотеза Мищенко-Фоменко

1.4.1 Формулировка

Рассмотрим произвольную конечномерную алгебру Ли \mathfrak{g} над произвольным полем \mathbb{K} и ее двойственное пространство \mathfrak{g}^* , снабженное структурой Пуассона-Ли (1.3.1). Если ограничиться полиномами, то эту операцию можно понимать чисто алгебраически. Скобка Пуассона-Ли на полиномах определяется как кососимметрическая билинейная операция, удовлетворяющая двум свойствам:

- 1) $\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}$ (правило Лейбница);
- 2) если полиномы f и g линейны (тогда их можно понимать как элементы алгебры Ли \mathfrak{g}), то их скобка Пуассона-Ли совпадает с коммутатором в алгебре, т.е.

$$\{f, g\} = [f, g].$$

Иногда полиномы на \mathfrak{g}^* удобно рассматривать как полиномы от элементов алгебры \mathfrak{g} . Алгебру таких полиномов будем обозначать $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ и будем называть *пуассоновой алгеброй* алгебры Ли \mathfrak{g} . Заметим, что скобка Пуассона-Ли есте-

ственным образом распространяется на пространство рациональных функций $\mathbb{K}(\mathfrak{g})$ на \mathfrak{g}^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1 Коммутативный относительно скобки Пуассона-Ли набор алгебраически независимых полиномов $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ называется *полным*, если $k = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$

ГИПОТЕЗА МИЩЕНКО-ФОМЕНКО ([19], [26]) Пусть \mathfrak{g} — вещественная или комплексная конечномерная алгебра Ли. Тогда на \mathfrak{g} существует полный коммутативный набор полиномов.

С точки зрения гамильтоновой механики это утверждение эквивалентно существованию интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного действия произвольной конечномерной группы Ли \mathbf{G} .

1.4.2 Метод Садэтова

Гипотеза Мищенко-Фоменко была доказана ее авторами для полупростых алгебр Ли [19], а затем для многих других алгебр Ли разными авторами (см. [27]). Доказать ее в общем случае удалось С.Т.Садэтову [20]

ТЕОРЕМА 1.4.1 (САДЭТОВ, 2003) Гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива для произвольной конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики.

В работе [28] А.В. Болсинов переформулировал конструкцию Садэтова на языке пуассоновой геометрии, позволяющей эффективно работать с конкретными алгебрами Ли.

Опишем кратко, в чем заключается метод Садэтова для поиска полных коммутативных наборов полиномов на произвольных пуассоновых алгебрах. В [28] Болсинов сформулировал следующую лемму.

ЛЕММА 1.4.1 Любая алгебра Ли \mathfrak{g} над полем \mathbb{K} нулевой характеристики удовлетворяет одному из следующих условий.

- 1) \mathfrak{g} имеет коммутативный идеал \mathfrak{h} , не являющийся одномерным центром алгебры.
- 2) \mathfrak{g} имеет идеал \mathfrak{h}_m , изоморфный алгебре Гейзенберга, и при этом центр \mathfrak{g} совпадает с центром идеала \mathfrak{h}_m
- 3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathbb{K}$, где \mathfrak{l} — полупроста
- 4) \mathfrak{g} полупроста.

Напомним структуру алгебры Гейзенберга: \mathfrak{h}_m раскладывается в прямую сумму подпространств V размерности $2m$ и одномерного центра $\mathfrak{z} = Z(\mathfrak{h}_m)$, порожденного вектором e . Для двух произвольных векторов $\xi_1, \xi_2 \in V$ коммутатор определяется формулой

$$[\xi_1, \xi_2] = \omega(\xi_1, \xi_2)e,$$

где ω — симплектическая форма на V .

Отметим несколько полезных свойств алгебры \mathfrak{g} в случае, когда выполнен пункт 2) леммы 1.4.1.

ЛЕММА 1.4.2 Существует подалгебра $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, такая что

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{h}_m = \mathfrak{g} \text{ и } \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_m = \mathfrak{z}.$$

При этом подпространство $V \subset \mathfrak{h}_m$ инвариантно относительно присоединенного действия \mathfrak{b} , и \mathfrak{b} действует на V симплектическими преобразованиями.

Метод Садэтова описан в [28] и основан на индукции по размерности алгебры. Рассмотрим этот метод с нового ракурса. С процедурой поиска полных коммутативных наборов полиномов в $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ связана следующая конечная последовательность троек

$$(1, 1, \mathfrak{g}) \rightarrow (z_2, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}_2) \rightarrow (z_3, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{g}_3) \rightarrow \dots \quad (1.4.1)$$

Здесь z_i — некоторый полином на \mathfrak{g}^* , \mathfrak{h}_i — коммутативная подалгебра в пуассоновой алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$, причем $\mathfrak{h}_i = \mathbb{K}[\mathfrak{h}_i]$. \mathfrak{g}_i — такое линейное подпространство $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$, что во-первых,

$$z_i, \mathfrak{h}_i \subset \text{Ann}(\mathfrak{g}_i),$$

а во-вторых, множество

$$\mathfrak{g}_i/z_i = \left\{ \frac{f}{z_i} \mid f \in \mathfrak{g}_i \right\}$$

является алгеброй Ли над полем рациональных функций $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$. При этом

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i > \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_{i+1})} \mathfrak{g}_{i+1}/z_{i+1}.$$

Следует прокомментировать каждый элемент тройки $(z_i, \mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_i)$ в отдельности. Метод Садэтова поиска полного набора полиномов выполняется пошагово. На i -ом шаге появляется очередная алгебра Ли \mathfrak{G}_i , возможно, над расширенным полем. При этом новое поле всегда есть поле частных $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$ некоторой коммутативной подалгебры \mathfrak{h}_i пуассоновой алгебры $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$. Полином z_i имеет следующий смысл. Если в методе Садэтова на предыдущих шагах встречались алгебры Ли, содержащие идеал Гейзенберга, тогда z_i — это произведение центров всех этих идеалов Гейзенберга.

Прокомментируем смысл линейного подпространства \mathfrak{g}_i . Как отмечалось ранее, алгебра Ли \mathfrak{G}_i , полученная на i -ом шаге метода Садэтова определена над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$. Также мы потребовали, что бы линейное пространство \mathfrak{g}_i/z_i

было алгеброй Ли над тем же полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$. Множества \mathfrak{g}_i строятся так, чтобы имел место изоморфизм

$$\mathfrak{G}_i \approx \mathfrak{g}_i/z_i.$$

Теперь приступим к описанию метода Садэтова с этого нового ракурса. Полный коммутативный набор полиномов составляется пошагово. Каждый шаг процедуры поиска характеризуется добавлением очередной тройки в последовательность (1.4.1). В начале процедуры поиска набор полиномов пуст. Новые полиномы добавляются, во-первых, при переходе от тройки $(z_i, \mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_i)$ к тройке $(z_{i+1}, \mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1})$, а во-вторых, на последнем шаге процедуры.

Опишем, как добавляются новые полиномы. Для этого рассмотрим алгебру Ли \mathfrak{g}_i/z_i над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$ и применим к ней лемму Болсинова 1.4.1. Разберем каждый случай в отдельности

Коммутативный идеал. Пусть в алгебре \mathfrak{g}_i/z_i существует коммутативный идеал. Это означает, что в линейном пространстве \mathfrak{g}_i существует такой коммутативный линейно независимый над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$ набор полиномов

$$f_1, f_2, \dots, f_k,$$

что линейные комбинации

$$\left\langle \frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right\rangle$$

с коэффициентами из \mathfrak{h}_i образуют коммутативный идеал в \mathfrak{g}_i/z_i . На этом шаге к уже существующему коммутативному набору полиномов добавляется k полиномов f_1, f_2, \dots, f_k .

Теперь если

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i = k$$

(фактически это означает, что алгебра \mathfrak{g}_i/z_i коммутативна), тогда на этом процедура метода Садэтова заканчивается. Полный коммутативный набор

полиномов построен. В противном случае, если

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i / z_i > k,$$

процедура метода Садэтова продолжается, и следует указать, как строится новая тройка $(z_{i+1}, \mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1})$. Тогда

$$\mathfrak{h}_{i+1} = \mathbb{K}[\mathfrak{h}_i, f_1, f_2, \dots, f_k]$$

будет коммутативной подалгеброй пуассоновой алгебры $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$. Определим \mathfrak{g}_{i+1} как множество линейных комбинаций элементов \mathfrak{g}_i с коэффициентами из \mathfrak{h}_{i+1} , коммутирующих с \mathfrak{h}_{i+1} . Многочлен z_i не изменяется:

$$z_{i+1} = z_i.$$

Идеал Гейзенберга. Пусть алгебра \mathfrak{g}_i / z_i имеет идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда в линейном пространстве \mathfrak{g}_i можно выделить такие $2m + 1$ полином $e, v_1, v_2, \dots, v_{2m}$, что

1. $\left\langle \frac{v_1}{z_i}, \frac{v_2}{z_i}, \dots, \frac{v_{2m}}{z_i} \right\rangle$ образуют базис в V ,

2. $\left\langle \frac{e}{z_i} \right\rangle$ — центр идеала Гейзенберга \mathfrak{h}_m .

Пространство V является $2m$ -мерным симплектическим с симплектической формой ω . Выделим в нем максимальное изотропное подпространство, натянутое на некоторые линейно независимые вектора

$$\left\langle \frac{p_1}{z_i}, \frac{p_2}{z_i}, \dots, \frac{p_m}{z_i} \right\rangle,$$

где полиномы $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathfrak{g}_i$. На этом шаге метода Садэтова к уже существующему коммутативному набору полиномов добавляется $m + 1$ полином:

$$e, p_1, p_2, \dots, p_m.$$

Теперь если

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i = 2m + 1$$

(фактически это означает, что идеал Гейзенберга \mathfrak{h}_m совпадает со всей алгеброй \mathfrak{g}_i/z_i), тогда на этом процедура метода Садэтова заканчивается. Полный коммутативный набор полиномов построен. В противном случае, если

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i > 2m + 1,$$

процедура метода Садэтова продолжается, и следует указать, как строится новая тройка $(z_{i+1}, \mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1})$. Для этого воспользуемся леммой 1.4.2. Согласно ей, в линейном пространстве \mathfrak{g}_i можно выделить такие k полиномов f_1, f_2, \dots, f_k , что

1. $\left\langle \frac{e}{z_i}, \frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right\rangle$ образуют базис в \mathfrak{b} ,
2. $\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \langle v_1, v_2, \dots, v_{2m}, f_1, f_2, \dots, f_k, e \rangle = 2m + k + 1$.

В таком случае коммутативный идеал \mathfrak{h}_i не изменяется:

$$\mathfrak{h}_{i+1} = \mathfrak{h}_i.$$

Полином z_i умножается на полином e :

$$z_{i+1} = z_i e.$$

А линейное подпространство $\mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ определяется как множество линейных комбинаций многочленов

$$v_j v_s, f_1 e, f_2 e, \dots, f_k e, \quad j, s = 1, 2, \dots, 2m$$

с коэффициентами из \mathfrak{h}_i , коммутирующих с v_1, v_2, \dots, v_{2m} .

Полупростая плюс поле. Пусть алгебра \mathfrak{g}_i/z_i представляется в виде

$$\mathfrak{l} \oplus \mathbb{K}(\mathfrak{h}_i),$$

где \mathfrak{l} — полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$. Тогда можно выделить полиномы $f, f_2, f_3, \dots, f_k \in \mathfrak{g}_i$, что

$$\left\langle \frac{f}{z_i} \right\rangle, \left\langle \frac{f}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \frac{f_3}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right\rangle$$

— два идеала в \mathfrak{g}_i/z_i . Причем первый из них коммутативный, а второй — полупростой, и

$$\mathfrak{g}_i/z_i = \left\langle \frac{f}{z_i} \right\rangle \oplus \left\langle \frac{f}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \frac{f_3}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right\rangle.$$

Тогда к существующему коммутативному набору следует добавить полином f . Процедура Садэтова на этом шаге не заканчивается. Новая тройка $(z_{i+1}, \mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1})$ строится естественным образом.

$$\mathfrak{h}_{i+1} = \mathfrak{h}_i, \quad z_{i+1} = z_i,$$

а \mathfrak{g}_{i+1} — подпространство \mathfrak{g}_i , порожденное линейными комбинациями полиномов $\langle f_2, f_3, \dots, f_k \rangle$ с коэффициентами из $\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)$.

Полупростой случай. Пусть алгебра \mathfrak{g}_i/z_i полупроста. В таком случае к алгебре \mathfrak{g}_i/z_i остается применить метод сдвига аргумента. А именно, пусть

$$f_1, f_2, \dots, f_k$$

такие полиномы из \mathfrak{g}_i , что набор

$$\left\langle \frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right\rangle$$

образует базис в \mathfrak{g}_i/z_i . Применяя в этом базисе метод сдвига аргумента, получаем коммутативный набор полиномов F_1, F_2, \dots, F_q в двойственном пространстве $(\mathfrak{g}_i/z_i)^*$ в количестве

$$q = \frac{\text{ind}_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i + \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}_i)} \mathfrak{g}_i/z_i}{2}$$

штук. В таком случае к уже существующему набору полиномов добавляются дроби

$$F_1 \left(\frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right), F_2 \left(\frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right), \dots, F_q \left(\frac{f_1}{z_i}, \frac{f_2}{z_i}, \dots, \frac{f_k}{z_i} \right)$$

помноженные на соответствующую степень z_i , что бы избавиться от знаменателя. На этом шаге процедура метода Садэтова всегда заканчивается.

Итак, метод Садэтова поиска полных коммутативных наборов в пуассоновых алгебрах полностью описан. Обоснование этого метода можно найти в работе [28].

Глава 2

Случай Дуллина-Матвеева

Глава посвящена исследованию топологии слоений Лиувилля случая интегрируемости Дуллина-Матвеева. Найдено множество критических точек гамильтониана, вычислены типы изоэнергетических поверхностей, проверены условия невырожденности и найдены типы невырожденных точек пуассонова действия, исследовано отображение момента и построена бифуркационная диаграмма. Методом компьютерного моделирования установлено условие боттовости, найдены индексы критических окружностей, типы перестроек, бифуркационный комплекс, грубые и меченые молекулы слоений Лиувилля изоэнергетических поверхностей. В итоге практически завершены грубая и тонкая лиувиллевы классификации этого интегрируемого случая.

2.1 Интегрируемый случай

В своей работе [29] Х.Р.Дуллин и В.С.Матвеев выписали новый интегрируемый случай на одной из орбит коприсоединенного действия группы $E(3)$, а именно на многообразии

$$\mathcal{M}^4 = \{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, S_1 r_1 + S_2 r_2 + S_3 r_3 = 0\}$$

в координатах, описанных выше (см. параграф 1.3). Новая система зависит от двух параметров $c, s \in \mathbb{R}$, где $s > 1$. Гамильтониан H и дополнительный первый интеграл F задаются формулами

$$\begin{aligned} H &:= \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + (1 + G(r_3))S_3^2) - \frac{r_1}{\sqrt{W(r_3)}} + \frac{c}{W(r_3)}, \\ F &:= 2HS_3 - S_3^3 + \frac{(r_1S_3 + 2W(r_3)S_1)}{\sqrt{W(r_3)}}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где

$$W(z) = z + s, \quad P(z) = 3z^2 + 4sz + 1, \quad G(z) = \frac{P(z)}{(2W(z))^2}.$$

Следует особо отметить, что случай Дуллина-Матвеева имеет интеграл третьей степени по импульсам. И как показал А.В.Цыганов [30], данная система тесно связана с классическим случаем Горячева-Чаплыгина [31]. В своей работе А.В.Цыганов описал все интегрируемые гамильтоновы системы на \mathcal{M}^4 , для которых гамильтониан и дополнительный первый интеграл представляются в виде

$$\begin{aligned} H_u &= S_1^2 + S_2^2 + (3\alpha^2 + f(r_3))S_3^2 + m(r_3)r_1 + g(r_3), \\ F_u &= -2\alpha S_3(-\alpha^2 S_3^2 + S_1^2 + S_2^2 + f(r_3)S_3^2 + g(r_3)) - n(r_3)S_1 - l(r_3)r_1S_3, \end{aligned}$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\cdot), m(\cdot), g(\cdot), n(\cdot), l(\cdot)$ — гладкие функции. Имеет место следующий результат

ТЕОРЕМА 2.1.1 (А.В. ЦЫГАНОВ [30]) *Гамильтониан H_u и дополнительный интеграл F_u коммутируют относительно скобки Пуассона $e(3)^*$ на многообразии \mathcal{M}^4 тогда и только тогда, когда имеет место следующее дифференциальное уравнение на $n(\cdot)$*

$$\begin{aligned}
24\alpha^2 - 9 = & 15 \frac{zn'(z) - n''(z)(1 - z^2)}{n'(z)} + \\
& + \frac{3zn''(z) - n'''(z)(1 - z^2)}{n'(z)} \left(9 - \frac{n(z)n''(z)}{n'(z)^2} \right) + \\
& + n \left(\frac{5zn'''(z) - n''''(z)(1 - z^2) + 3n''(z)}{n'(z)^2} \right), \tag{2.1.2}
\end{aligned}$$

а все остальные функции, входящие в определение интегралов H_u и F_u , имеют вид

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{d}{n(z)^2}, \quad m(z) = -\frac{n'(z)}{\alpha}, \quad l(z) = \frac{n(z)n''(z)}{n'(z)}, \\
f(z) &= 1 - 3\alpha^2 - \alpha \frac{3zm(z) - 2(1 - z^2)m'(z)}{n(z)} + \frac{zl(z) - (1 - z^2)l'(z)}{n(z)}
\end{aligned}$$

для некоторого $d \in \mathbb{R}$.

Теорема А.В.Цыганова показывает, что случай Горячева-Чаплыгина и Дуллина-Матвеева лежат в одном семействе интегрируемых гамильтоновых систем. Действительно, частное решение системы (2.1.2) $n(z) = cz, \alpha = \pm 1, c \in \mathbb{R}$ соответствует интегрируемому случаю Горячева-Чаплыгина, а частное решение $n(z) = c\sqrt{z+s}, \alpha = \pm 1, s > 1, c \in \mathbb{R}$ соответствует случаю Дуллина-Матвеева.

Во избежание громоздкости формул этой главы вместо выражений $G(r_3), G'(r_3)$ и $W(r_3)$ иногда будем просто писать G, G' и W .

2.2 Топология изоэнергетических поверхностей

Одним из результатов данной работы является следующее утверждение

ТЕОРЕМА 2.2.1 Множество критических точек гамильтониана H случая Дуллина-Матвеева на многообразии \mathcal{M}^4 можно представить в виде

$$\begin{cases} r_2 = 0, \\ S_1 = S_2 = S_3 = 0, \\ r_1^2 + 2r_3W(r_3) - \frac{2cr_1}{\sqrt{W(r_3)}} = 0. \end{cases}$$

В случае $c = 0$ система Дуллина-Матвеева сильно упрощается, и поэтому при $c = 0$ верно более сильное утверждение

1) Интеграл энергии H на \mathcal{M}^4 имеет только два критических значения

$$\begin{aligned} h_1 &= -\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}, \\ h_2 &= \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}. \end{aligned}$$

2) Критические точки ξ_1 и ξ_2 , отвечающие критическим значениям h_1 и h_2 , обе невырождены, то есть интеграл энергии H на \mathcal{M}^4 является функцией Морса.

3) Критические точки ξ_1 и ξ_2 являются точками ранга ноль отображения момента.

4) Критическая точка, отвечающая значению h_1 , — точка глобального минимума.

5) Критическая точка, отвечающая значению h_2 , — седловая точка индекса 2.

6) Неособые изоэнергетические поверхности Q_h^3 диффеоморфны трехмерной сфере S^3 при $h \in (h_1, h_2)$, и $\mathbb{R}P^3$ при $h > h_2$. При $h < h_1$ Q_h^3 пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки многообразия \mathcal{M}^4 , где зависимы градиенты функций H, I_1 и I_2 как функций в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{r})$,

являются критическими точками гамильтониана. Выпишем таблицу градиентов функций H, I_1 и I_2

$H :$	S_1	S_2	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$	0	$\frac{1}{2}G'S_3^2 + \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2}$
$I_1 :$	0	0	0	$2r_1$	$2r_2$	$2r_3$
$I_2 :$	r_1	r_2	r_3	S_1	S_2	S_3

(2.2.1)

В предположении, что $r_2 \neq 0$, вычтем из третьей строчки вторую с коэффициентом $S_2/2r_2$, тогда зависимость строк таблицы (2.2.1) будет эквивалента зависимости строк таблицы (2.2.2)

S_1	S_2	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2}G'S_3^2 + \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2}$
r_1	r_2	r_3	$S_1 - S_2\frac{r_1}{r_2}$	$S_3 - S_2\frac{r_3}{r_2}$

(2.2.2)

Определитель первого и второго столбцов последней таблицы должен равняться нулю, поскольку две строчки зависимы. То есть $S_1r_2 - S_2r_1 = 0$. Следовательно, определитель 2-ого и 4-ого столбцов не равен нулю. При $r_2 \neq 0$ получили противоречие с зависимостью строк.

Если предположить, что $r_2 = 0, S_2 \neq 0$, то из второго и пятого столбца таблицы (2.2.1) видно, что вторая строчка должна быть нулевой. Что невозможно, так как $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$.

В случае $r_2 = 0, S_2 = 0$ из таблицы (2.2.1) можно выкинуть второй и пятый столбцы:

S_1	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2}G'S_3^2 + \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2}$
0	0	r_1	r_3
r_1	r_3	S_1	S_3

(2.2.3)

Если $r_1 = 0$, тогда из равенств $I_1 = 0, I_2 = 0$ получаем $r_3 = \pm 1, S_3 = 0$. Из первого столбца таблицы (2.2.3) следует, что $S_1 = 0$, поскольку вторая и

третья строчка таблицы (2.2.3), так же как и вторая и третья строчка таблицы (2.2.1), нигде не зависимы на всем фазовом пространстве. Определитель второго, третьего и четвертого столбцов таблицы (2.2.3) равен

$$-\frac{r_3^2}{\sqrt{W}} \neq 0,$$

т.е. строчки не зависимы. Получили противоречие.

Итак, остается следующее единственное допустимое соотношение на переменные: $r_2 = 0, S_2 = 0, r_1 \neq 0$. Упрощаем таблицу (2.2.3):

S_1	$(1 + G)S_3$	$\frac{G'S_3^2}{2} + \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} + \frac{r_3}{r_1\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2}$	(2.2.4)
r_1	r_3	$S_3 - S_1 \frac{r_3}{r_1}$	

Зависимость строк таблицы (2.2.4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} r_1^2 + r_3^2 = 1, \\ r_1 S_1 + r_3 S_3 = 0, \\ \left(\frac{1}{1 - r_3^2} + G \right) S_3 = 0, \\ \frac{r_1 G' S_3^2}{2} + \frac{r_1^2}{2W\sqrt{W}} + \frac{r_3}{\sqrt{W}} - \frac{cr_1}{W^2} + GS_1 S_3 = 0. \end{cases}$$

Или уже в упрощенном виде:

$$\begin{cases} S_1 = S_2 = S_3 = 0, \\ r_2 = 0, \\ r_1^2 + 2r_3 W - \frac{2cr_1}{\sqrt{W}} = 0. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Теперь разберемся только с частным случаем, когда $c = 0$. Получаем две критические точки

$$\xi_{1,2} = (0, 0, 0, \pm r_{1_0}, 0, r_{3_0}),$$

где

$$\begin{aligned} r_{1_0} &= \sqrt{2 + 2s\sqrt{s^2 - 1} - 2s^2}, \\ r_{3_0} &= -s + \sqrt{s^2 - 1}. \end{aligned}$$

Для обеих точек выполнено $r_2 = 0$. Легко проверить, что в точках ξ_1 и ξ_2 градиенты функций F, I_1 и I_2 линейно зависимы. Следовательно,

$$\text{grad}(H|_{\mathcal{M}^4})|_{\xi_i} = \text{grad}(F|_{\mathcal{M}^4})|_{\xi_i} = 0$$

для обеих точек, и ранг отображения момента в этих точках равен нулю. Далее, подставляя точки в гамильтониан, получаем два критических значения.

Следующая лемма полезна для поиска индексов критических точек. Под d^2K будем понимать гессиан функции K , то есть матрицу вторых частных производных.

ЛЕММА 2.2.1 [21, том 2, лемма 5.1] *Пусть для точки $\xi_0 \in \mathcal{M}^4$ выполнено условие*

$$\text{grad} H|_{\xi_0} = \lambda_1 \text{grad}(I_1)|_{\xi_0} + \lambda_2 \text{grad}(I_2)|_{\xi_0}.$$

Тогда квадратичная форма, определяемая гессианом функции

$$\tilde{H} = H|_{\mathcal{M}^4}$$

в точке ξ_0 , является ограничением формы, определяемой матрицей

$$\mathbf{G} = d^2H - \lambda_1 d^2I_1 - \lambda_2 d^2I_2,$$

на касательное пространство $T_{\xi_0}\mathcal{M}^4$.

Продолжим доказательство теоремы. В обеих критических точках выполнено следующее равенство

$$\text{grad}(H) = \lambda \text{grad}(I_1), \quad \text{где } \lambda = -\frac{1}{2r_1\sqrt{W(r_3)}}.$$

Воспользуемся леммой 2.2.1. В координатах $S_1, S_2, S_3, r_1, r_2, r_3$ получаем

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{3r_1}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix}, d^2I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве к \mathcal{M}^4 в точках ξ_i векторы

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} -r_{3_0} \\ 0 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{3_0} \\ 0 \\ r_1 \end{pmatrix},$$

можно взять за базис. Тогда матрица $d^2\tilde{H}$ в этом базисе примет вид:

$$d^2\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1^2 \left(\frac{1}{1-r_3^2} + G \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_1\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_1}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Итак, в точках ξ_1 и ξ_2 определитель матрицы (2.2.6) не равен нулю, значит, обе критические точки ξ_1 и ξ_2 невырождены. При этом, ξ_1 — локальный минимум, ξ_2 — седло индекса 2. Следовательно, для любого h из (h_1, h_2) изо-

энергетическая поверхность Q_h^3 диффеоморфна S^3 , как поверхность уровня функции Морса вблизи точки локального минимума.

Теперь рассмотрим Q_h^3 при $h > h_2$. Заменяем $G(r_3)$ на $tG(r_3)$, тем самым введем еще один параметр $t \in [0, 1]$. Тогда критические значения нового гамильтониана будут те же — h_1 и h_2 . Потому что при подсчете критических значений исходного гамильтониана от функции $G(r_3)$ нам потребовалось только одно свойство

$$\frac{1}{1-r_3^2} + G > 0,$$

а оно сохранится после введения параметра. Следовательно, неособые компактные поверхности в \mathcal{M}^4 ,

$$\{\chi \in \mathcal{M}^4 | H_t(\chi) = h\},$$

диффеоморфны при $t \in [0, 1]$. При $t = 1$ получаем Q_h^3 , а при $t = 0$ новую поверхность, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2h + \frac{2r_1}{\sqrt{W}}, \\ r_1 S_1 + r_2 S_2 + r_3 S_3 = 0, \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1. \end{cases}$$

Если взять

$$h > \max_{r_1^2+r_2^2+r_3^2=1} \left(\frac{r_1}{\sqrt{W(r_3)}} \right),$$

то гладкой заменой

$$\vec{S} \rightarrow \frac{h + \frac{r_1}{\sqrt{W(r_3)}}}{h} \vec{S}$$

получаем еще одну поверхность

$$\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2h, \\ r_1 S_1 + r_2 S_2 + r_3 S_3 = 0, \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1. \end{cases}$$

Последняя поверхность уже диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$, а значит, и изоэнергетическая поверхность Q_h^3 при $h > h_2$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$. Теорема 2.2.1 доказана. ■

2.3 Невырожденность точек ранга ноль

Верен следующий результат

ТЕОРЕМА 2.3.1 *Для случая Дуллина-Матвеева на множестве параметров $s > 1, c = 0$ верно следующее описание ливиллева слоения в окрестности критических точек отображения момента ранга ноль:*

1) ξ_1 — особая точка типа центр-центр, если

$$\sqrt{s^2 - 1} \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})} \neq 1,$$

2) ξ_2 — особая точка типа фокус-фокус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение типа особой точки ранга ноль было дано в разделе 1.2.5. Для вычисления симплектических операторов A_H и A_F полезна следующая техническая лемма.

ЛЕММА 2.3.1 *Пусть ξ — критическая точка функции φ на M^4 , Φ — гладкое продолжение функции φ на все $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{r})$, тогда*

1) Существуют такие $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, что

$$\text{grad}(\Phi)|_\xi = \lambda_1 \text{grad}(I_1)|_\xi + \lambda_2 \text{grad}(I_2)|_\xi,$$

2) Оператор $A_\varphi = \Omega^{-1} d^2 H|_\xi$ равен ограничению оператора

$$\pi^{ij} (d^2 H|_\xi - \lambda_1 d^2 I_1|_\xi - \lambda_2 d^2 I_2|_\xi)_{jk}$$

на \mathcal{M}^4 в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Линеаризация векторного поля \mathbf{v} в особой точке ξ в координатной форме представляется в виде

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} \Big|_\xi.$$

При этом, если векторное поле сохраняет некоторое подмногообразие \mathcal{N} , тогда оператор линеаризации этого векторного поля в особой точке на подмногообразии будет ограничением оператора линеаризации в объемлющем многообразии \mathcal{M} .

В нашем случае оператор A_φ является линеаризацией гамильтонова векторного поля в особой точке. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\omega^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \Big|_\xi = \frac{\partial}{\partial x^k} (\omega^{ij}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Big|_\xi + \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \Big|_\xi = \omega^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} \Big|_\xi,$$

поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Big|_\xi = 0.$$

С другой стороны, оператор A_φ есть ограничение линеаризации гамильтонова векторного поля в объемлющем пространстве \mathbb{R}^6 , то есть

$$A_\varphi = \frac{\partial}{\partial r_2^k} \left(\pi^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial r_2^j} \right) (\xi) \Big|_{\mathcal{M}^4}.$$

Лемма доказана. \square

С помощью леммы вычислим операторы A_H и A_F в критических точках.

Для оператора A_H имеем:

$$A_H = \Omega^{-1}d^2H|_{\xi} = \|\pi^{ij}(d^2H - \lambda_1 d^2I_1 - \lambda_2 d^2I_2)_{jk}\|(\xi),$$

где

$$\text{grad}(H)|_{\xi} = \lambda_1 \text{grad}(I_1)|_{\xi} + \lambda_2 \text{grad}(I_2)|_{\xi}.$$

Для оператора A_F :

$$A_F = \Omega^{-1}d^2F|_{\xi} = \|\pi^{ij}(d^2F - \mu_1 d^2I_1 - \mu_2 d^2I_2)_{jk}\|(\xi),$$

если

$$\text{grad}(F)|_{\xi} = \mu_1 \text{grad}I_1|_{\xi} + \mu_2 \text{grad}(I_2)|_{\xi}.$$

В нашем случае

$$\text{grad}(H)|_{\xi_l} = -\frac{1}{r_1\sqrt{W}}\text{grad}(I_1)|_{\xi_l}, \quad \text{grad}(F)|_{\xi_l} = \frac{2\sqrt{W}}{r_1}\text{grad}(I_2)|_{\xi_l},$$

Следовательно, для линейризации векторного поля $\text{sgrad}H$ получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} & \|\pi^{ij}(d^2H + \frac{1}{r_1\sqrt{W}}d^2I_1)_{jk}\|(\xi_l) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_1\sqrt{W}} & 0 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_1\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} & 0 & \frac{1}{r_1\sqrt{W}} - \frac{3r_1}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{r_1\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r_3}{r_1\sqrt{W}} + \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{r_3}{2W\sqrt{W}} + r_1\left(\frac{1}{r_1\sqrt{W}} - \frac{3r_1}{4W^2\sqrt{W}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1(1+G) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И для линеаризации векторного поля $\text{sgrad } F$:

$$\begin{aligned} \|\pi^{ij} \left(d^2 F - \frac{2\sqrt{W}(r_3)}{r_1} d^2 I_2 \right)_{jk} \|(\xi_l) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{2\sqrt{W}}{r_1} \\ -\frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} + \frac{r_1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_3}{\sqrt{W}} + r_1 \left(\frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{2\sqrt{W}}{r_1} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} - \frac{r_1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_3}{\sqrt{W}} + r_1 \left(\frac{r_1}{2W\sqrt{W}} - \frac{\sqrt{W}}{r_1} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{W} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Осталось ограничить эти два оператора на $T|_{\xi_l} \mathcal{M}^4$. В базисе $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ операторы A_H и A_F принимают вид:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{r_1}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_1\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1 + r_1^2 G & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & -2r_1\sqrt{W} & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r_1\sqrt{W} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{W}}{r_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим линейную комбинацию A_H и A_F

$$A_H - \frac{r_1}{2\sqrt{W}} A_F = \begin{pmatrix} 0 & r_1^2 & 0 & \frac{r_1}{\sqrt{W}} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{r_1\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1 + r_1^2 G & 0 & r_1^2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

Характеристический многочлен оператора (2.3.1) имеет вид:

$$\lambda^4 + 2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{W}} + r_1^2 \right) \lambda^2 + \left(\frac{r_1}{\sqrt{W}} - r_1^2 \right)^2.$$

Дискриминант $D = 16r_1^3/\sqrt{W}$. Теперь для точки ξ_1 , где $r_1 > 0$, получаем 4 различных чисто мнимых собственных значения, но только если свободный член многочлена не равен нулю, то есть

$$1 \neq r_1\sqrt{W} = \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}.$$

А для точки ξ_2 , где $r_1 < 0$, четыре различных комплексных не чисто мнимых и не действительных значения. То есть ξ_1 — особая точка типа центр-центр, ξ_2 — особая точка типа фокус-фокус. ■

2.4 Бифуркационная диаграмма отображения момента

2.4.1 Критические точки отображения момента при $r_2 \neq 0$

Будем искать критические точки отображения момента способом, описанным в разделе 1.2.2. Для нахождения критических точек полезна следующая техническая лемма.

ЛЕММА 2.4.1 $f_1, f_2, f_3, f_4 : e(3)^* \rightarrow \mathbb{R}$ — попарно коммутирующие в некоторой точке $\xi \in (e(3))^*$ функции (т.е. $\{f_i, f_j\}(\xi) = 0$). Пусть в этой точке λ_0 выполнены следующие два условия

1) зависимы первые 5 координат градиентов функций f_1, f_2, f_3, f_4 , отвечающих переменным S_1, S_2, S_3, r_1, r_2 ,

2) для некоторого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ выполняется $r_1 \frac{\partial f_i}{\partial S_2} - r_2 \frac{\partial f_i}{\partial S_1} \neq 0$,

Тогда градиенты функций f_1, f_2, f_3, f_4 линейно зависимы в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Рассмотрим линейную комбинацию градиентов функций $f_j, j = 1, \dots, 4$ в точке ξ :

$$\alpha = a_1 \text{grad}(f_1)|_\xi + a_2 \text{grad}(f_2)|_\xi + a_3 \text{grad}(f_3)|_\xi + a_4 \text{grad}(f_4)|_\xi.$$

Из условия 1) леммы следует, что можно так подобрать коэффициенты a_j , что первые пять координат вектора α будут обращаться в нуль. Рассмотрим шестую координату вектора $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_6)$. Поскольку f_1, f_2, f_3, f_4 попарно коммутируют в точке ξ , значит, градиенты функций f_j и их линейные комбинации коммутируют относительно формы на векторах, отвечающей тензору Пуассона (1.3.2), взятого в точке ξ . Пусть для определенности в условии 2) леммы $i = 1$, то есть

$$r_1 \frac{\partial f_1}{\partial S_2} - r_2 \frac{\partial f_1}{\partial S_1} \neq 0.$$

Тогда

$$0 = (\text{grad } f_1)_i \pi^{ij} \alpha_j = \left(r_1 \frac{\partial f_1}{\partial S_2} - r_2 \frac{\partial f_1}{\partial S_1} \right) \alpha_6.$$

Следовательно, $\alpha_6 = 0$. Лемма доказана. \square

Воспользуемся леммой для нахождения точек, где зависимы градиенты функций H, F, I_1, I_2 . Следуя лемме, почти везде необходимо искать только точки, где зависимы лишь первые пять координат градиентов, а не все шесть. Для проверки условия 2) полезно воспользоваться таблицей градиентов (2.4.2). Тогда это условие запишется в виде:

$$\begin{cases} r_2 \neq 0, \\ r_1 S_2 \neq 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Следовательно, на множестве $r_2 \neq 0$ достаточно смотреть зависимость лишь первых пяти координат градиентов функций H, K, I_1, I_2 . Выпишем таблицу, в строчках которой стоят компоненты градиентов функций H, K, I_1, I_2

$H :$	S_1	S_2	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$	0
$K :$	$2S_1S_3 + 2\sqrt{W}$	$2S_2S_3$	$S_1^2 + S_2^2 + 3GS_3^2 - \frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$-\frac{S_3}{\sqrt{W}}$	0
$I_1 :$	0	0	0	r_1	r_2
$I_2 :$	r_1	r_2	r_3	S_1	S_2

(2.4.2)

ТЕОРЕМА 2.4.1 *Множество критических точек отображения момента*

интегрируемого случая Дуллина-Матвеева при $r_2 \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\ r_1 S_1 + r_2 S_2 + r_3 S_3 = 0, \\ (r_1 S_2 - r_2 S_1) \left(\frac{S_3}{2W r_2} + \frac{S_2}{r_2^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{W}}, \\ \left(2G - 1 - \frac{r_3}{2W} \right) S_3^2 + \frac{2S_2 S_3 W}{r_2} + \left(1 - \frac{1 - r_3^2 + 2r_3 W}{r_2^2} \right) S_2^2 + S_1^2 + \frac{2c}{W} = 0. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ищем точки, где зависимы строки таблицы (2.4.2).

Вычтем из второй строки первую с коэффициентом $2S_3$

S_1	S_2	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$	0
$2\sqrt{W}$	0	$S_1^2 + S_2^2 + (G - 2)S_3^2 - \frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{S_3}{\sqrt{W}}$	0
0	0	0	r_1	r_2
r_1	r_2	r_3	S_1	S_2

(2.4.4)

Теперь в таблице (2.4.4) вычтем из четвертой строки третью с коэффициентом S_2/r_2 . Поскольку $r_2 \neq 0$, зависимость строчек таблицы (2.4.4) эквивалента зависимости строчек таблицы

S_1	S_2	$(1 + G)S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$
$2\sqrt{W}$	0	$S_1^2 + S_2^2 + (G - 2)S_3^2 - \frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{S_3}{\sqrt{W}}$
r_1	r_2	r_3	$S_1 - S_2 \frac{r_1}{r_2}$

(2.4.5)

Вычтем из первой строчки третью с коэффициентом S_2/r_2 . Опять, поскольку $r_2 \neq 0$, зависимость строчек таблицы (2.4.5) эквивалентна зависимости строчек новой таблицы

$S_1 - S_2 \frac{r_1}{r_2}$	$(1 + G)S_3 - S_2 \frac{r_3}{r_2}$	$-\frac{1}{\sqrt{W}}$
$2\sqrt{W}$	$S_1^2 + S_2^2 + (G - 2)S_3^2 - \frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{S_3}{\sqrt{W}} + 2\frac{S_2\sqrt{W}}{r_2}$

Нижний элемент первого столбца последней таблицы ненулевой. Поэтому для зависимости строк необходимо приравнять к нулю лишь два определителя: это 1-ый и 2-ой столбцы, и 1-ый и 3-ий. Приравнивая эти два определителя к нулю, получаем два последних равенства в системе (2.4.3). Теорема доказана. ■

2.4.2 Бифуркационная диаграмма

Пусть $\xi \in \mathcal{M}^4$ — критическая точка. Тогда либо ξ является неподвижной для гамильтонова векторного поля $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$, либо в этой точке косые градиенты F и H пропорциональны. Пусть λ — коэффициент пропорциональности, то есть

$$\text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H. \quad (2.4.6)$$

Поскольку функция F постоянна вдоль векторного поля $\text{sgrad } H$, значит вся траектория, выходящая из точки ξ , состоит из критических точек отображения момента с тем же коэффициентом пропорциональности λ , то есть (2.4.6) верно вдоль всей критической траектории. Получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.1 *Коэффициент пропорциональности полей $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен вдоль критических окружностей.*

В случае Дуллина-Матвеева этот коэффициент равен $2g$, где

$$g = S_3 + \frac{r_2\sqrt{W}}{r_2S_1 - r_1S_2} \quad (2.4.7)$$

Шестую координату полей $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$, отвечающую переменной r_3 , легко вычислить. Коэффициент $2g$ есть отношение шестых координат косых градиентов. Исходя из третьего уравнения системы (2.4.3) на критические точки, на множестве $r_2 \neq 0$ коэффициент g определен корректно.

ТЕОРЕМА 2.4.2 *Для каждой критической точки отображения момента случая Дуллина-Матвеева при $r_2 \neq 0$ существуют такие $g, \lambda \in \mathbb{R}$, что выполняются следующие условия:*

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\ r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3 = 0, \\ g = S_3 + \frac{r_2\sqrt{W}}{r_2S_1 - r_1S_2}, \\ \lambda = \frac{S_3 - g}{W}, \\ S_2 = \frac{r_2(S_3 - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs - 2c)\lambda^2 = 1. \end{array} \right. \quad (2.4.8)$$

При этом

$$H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), \quad F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gc\lambda + 2g^3.$$

Фактически теорема обеспечивается лишь необходимыми условиями на критические точки, но не достаточными. Для поиска бифуркационной диаграммы, следует еще оценить, при каких значениях g и λ система (2.4.8) совместна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим выражение для g в третье уравнение (2.4.3), получим:

$$S_2 = \frac{r_2(S_3 - 2g)}{2W}. \quad (2.4.9)$$

Получившееся подставим в выражение для g :

$$(S_3 - g) \left(\frac{1 - r_3^2}{2W} (S_3 - 2g) + r_3 S_3 \right) = r_1 \sqrt{W}.$$

Как легко видеть четвертое уравнение (2.4.3) может быть записано в виде:

$$GS_3^2 + S_1^2 + S_2^2 + \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2} g(S_3 - g) - 2gS_3 + \frac{2c}{W} = 0. \quad (2.4.10)$$

Опять же из (2.4.7) и (2.4.9) выразим S_1 через переменные r_3 и S_3 :

$$S_1 = r_1 \frac{S_3 - 2g}{2W} + \frac{\sqrt{W}}{g - S_3}.$$

Распишем выражение через r_3 , S_3 и g

$$S_1^2 + S_2^2 = \frac{W}{(S_3 - g)^2} - GS_3^2 + \frac{g}{W} \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W} S_3 - g \frac{1 - r_3^2}{W^2}. \quad (2.4.11)$$

Выражение (2.4.11) подставляем в (2.4.10) и после некоторых преобразований получаем

$$1 + 2g \left((1 - s^2) \left(\frac{S_3 - g}{W} \right) - gs \right) \left(\frac{S_3 - g}{W} \right)^2 + 2c \left(\frac{S_3 - g}{W} \right)^2 = 0.$$

Теперь видно, что

$$\lambda = \frac{S_3 - g}{W}$$

является еще одной функцией, постоянной на критических окружностях. Выражение для H подставим в (2.4.11):

$$2H + \frac{2r_1}{\sqrt{W}} - S_3^2 + \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2} g(S_3 - g) - 2gS_3 = 0,$$

$$2H + (1 - s^2) \left(\frac{S_3 - g}{W} \right)^2 - 4gs \frac{S_3 - g}{W} - 3g^2 = 0$$

$$H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2).$$

Выражение (2.4.11) подставим в формулу для интеграла F :

$$F = g \left(2S_3 - \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2}(S_3 - g) \right) S_3 - \frac{r_1}{\sqrt{W}}S_3 + 2\sqrt{W}S_1.$$

Упростим:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{W}S_1 - \frac{r_1}{\sqrt{W}}S_3 &= -g \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2}(S_3 - g)^2 + \\ &+ g^2 \frac{1 - r_3^2 - 2r_3W}{W^2}(S_3 - g) - \frac{2^2W}{S_3 - g}, \\ g \left(2S_3 - \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2}(S_3 - g) \right) S_3 &= g \left(2 - \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2} \right) (S_3 - g)^2 + \\ &+ g^2 \left(4 - \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2} \right) (S_3 - g) + 2g^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= g \left(2 - 2 \frac{1 - r_3^2 + 2r_3W}{W^2} \right) (S_3 - g)^2 + 4g^2 \left(1 - \frac{r_3W}{W^2} \right) (S_3 - g) + \\ &+ 2g^3 - \frac{2A^2W}{S_3 - g}, \\ F &= 2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 4g^2s\lambda + 2g^3 - \frac{2}{\lambda}, \end{aligned}$$

или

$$F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gs\lambda + 2g^3.$$

Теорема доказана. ■

ЛЕММА 2.4.2 Множество критических траекторий случая Дуллина - Матвеева, полностью лежащих в гиперплоскости $r_2 = 0$, исчерпывается особыми точками векторного поля $\mathbf{v} = \text{sgrad } H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Рассмотрим траекторию, полностью лежащую в гиперплоскости $r_2 = 0$. Тогда вдоль этой траектории координата поля, отвечающая переменной r_2 , равна нулю. Приравняем координату $\text{sgrad } H$, отвечающую переменной r_2 , к нулю:

$$(\text{sgrad } H)_5 = -r_3 \frac{\partial H}{\partial S_1} + r_1 \frac{\partial H}{\partial S_3} = -r_3 S_1 + r_1(1 + G)S_3 = 0.$$

На гиперплоскости $r_2 = 0$ выделим следующие случаи. Пусть $r_1 = 0, r_2 = 0$, тогда интеграл площадей $I_2 = r_3 S_3 = 0$. Получаем $r_3 = \pm 1, S_3 = 0$, и из условия $(\text{sgrad } H)_5 = 0$ имеем $S_1 = 0$. Мы рассматриваем критические точки векторного поля, то есть те точки, в которых зависимы градиенты функций H, F, I_1, I_2 . А поэтому матрица, составленная из первых, третьих, четвертых и шестых координат градиентов функций H, F, I_1, I_2 , должна быть вырождена. Первую, третью и четвертую координаты градиентов функций H, F, I_1, I_2 можно взять из таблицы (2.4.2), шестую координату придется подсчитать при $r_2 = 0$. Поэтому матрица, составленная из первых, третьих, четвертых и шестых координат градиентов функций H, F, I_1, I_2 , при $r_2 = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 \\ 2\sqrt{W} & S_2^2 + \frac{2c}{W} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но определитель такой матрицы равен $2r_3^2$, и он не равен нулю. Значит, при $r_1 = 0, r_2 = 0$ критических точек гамильтонова векторного поля Дуллина-Матвеева нет.

В случае $r_1 \neq 0, r_2 = 0$ из $(\text{sgrad } H)_5 = 0$ и из равенства нулю интеграла площадей получаем:

$$\left(\frac{1}{1 - r_3^2} + G(r_3) \right) S_3 = 0, \quad I_2 = r_1 S_1 + r_3 S_3.$$

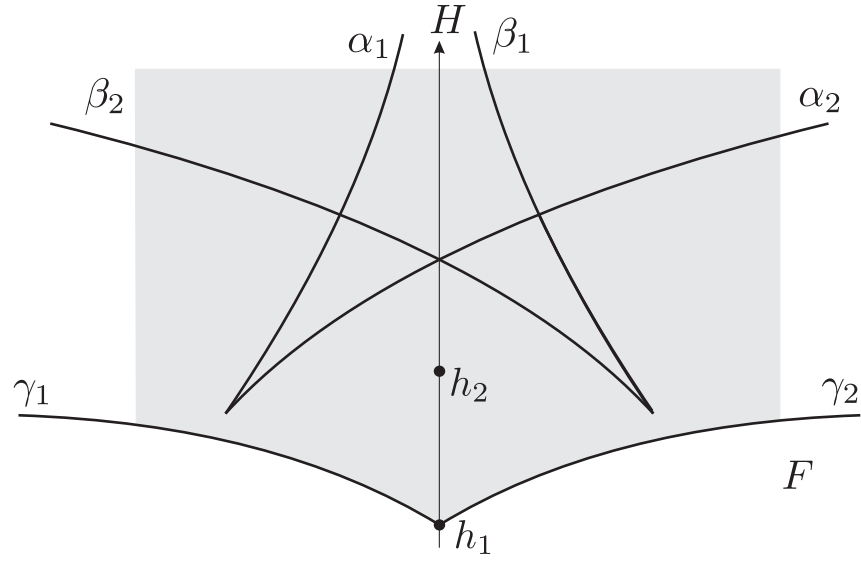


Рис. 2.1: Бифуркационная диаграмма отображения момента случая Дуллина-Матвеева при $c = 0$

Значит, $S_3 = 0, S_1 = 0$. Теперь из зависимости строк таблицы (2.4.4) получаем

$$S_2 = 0, \quad r_1^2 + 2r_3W(r_3) - \frac{2cr_1}{\sqrt{W(r_3)}} = 0.$$

Следовательно, при $r_1 \neq 0, r_2 = 0$ получаем множество точек, которые в точности совпадает с множеством критических точек из системы (2.2.5). ■

Теперь для построения бифуркационной диаграммы в случае $c = 0$ необходимо найти условия совместности системы (2.4.8). Такие вычисления технические и не очень сложные, поэтому приводим лишь результат.

ТЕОРЕМА 2.4.3 *Бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой системы Дуллина-Матвеева при $c = 0$ состоит из следующих компонент:*

- 1) критические точки $(h, f) = (h_1, 0), (h, f) = (h_2, 0)$

2) кривых, задающихся при $\lambda, g \in \mathbb{R}$ условием :

$$\begin{cases} 2g((s^2 - 1)\lambda + gs)\lambda^2 = A^2, \\ H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), H \geq h_1, \\ F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 2g^3. \end{cases}$$

2.5 Критические окружности и их невырожденность

2.5.1 Количество критических окружностей в прообразе точек кривых бифуркационной диаграммы при $c = 0$

В этом пункте мы рассчитаем количество критических окружностей в прообразе каждой точки бифуркационной диаграммы.

ТЕОРЕМА 2.5.1 *В случае Дуллина-Матвеева при $c = 0$ в прообразе*

- 1) *каждой точки кривых бифуркационной диаграммы $\gamma_1, \beta_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и γ_2 лежит ровно по одной критической окружности,*
- 2) *общей точки кривых γ_1 и γ_2 лежит одна точка из \mathcal{M}^4 ,*
- 3) *пересечений $\beta_2 \cap \alpha_1, \beta_2 \cap \alpha_2$ и $\beta_1 \cap \alpha_2$ лежит по две критические окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего пункта имеем следующее представление для критических точек отображения момента

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\ r_1 S_1 + r_2 S_2 + r_3 S_3 = 0, \\ g = S_3 + \frac{r_2 \sqrt{W}}{r_2 S_1 - r_1 S_2}, \\ \lambda = \frac{S_3 - g}{W}, \\ S_2 = \frac{r_2(S_3 - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs - 2c)\lambda^2 = 1. \end{array} \right.$$

Для каждого g и λ посчитаем количество критических окружностей, удовлетворяющих вышеуказанной системе. Получаем:

$$S_3 = g + \lambda W, \quad S_2 = \frac{r_2(\lambda W - g)}{2W}, \quad S_1 = \frac{r_1(\lambda W - g)}{2W} - \frac{1}{\lambda \sqrt{W}}. \quad (2.5.1)$$

Следовательно, уравнение совместности системы можно свести к уравнению на сфере Пуассона:

$$r_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{W(r_3)}} [(1 - r_3^2)(\lambda W(r_3) - g) + 2r_3 W(r_3)(g + \lambda W(r_3))] =: f(r_3). \quad (2.5.2)$$

Теперь рассмотрим точки пересечения гладкой плоской кривой $r_1 = f(r_3)$ и окружности $r_1^2 + r_3^2 = 1$ и разделим эти точки на три типа:

- 1) точки, в которых кривая $r_1 = f(r_3)$ „входит“ во внутренность круга $r_1^2 + r_3^2 \leq 1$,
- 2) точки, в которых кривая „выходит“ во внешность круга,
- 3) точки, в которых кривая лишь касается окружности, оставаясь вне или внутри окружности.

Заметим, что точкам типа 3) соответствуют особые точки векторного поля $\text{sgrad } H$. Мы рассматриваем лишь вырожденные точки отображения момента

ранга 1 — без критических точек ранга 0. Поэтому ни при каких допустимых значениях интегралов g и λ точек типа 3) получиться не может. Следовательно, возможны лишь точки типов 1) и 2), причем в равных количествах. То есть если при каких-то g и λ у нас k точек типа 1), то и k точек типа 2). И при этом в прообразе лежит k критических окружностей.

Сделаем еще одно замечание. Возьмем какую-то критическую точку бифуркационной диаграммы, посчитаем количество критических окружностей, „висящих“ над этой точкой. Пусть их оказалось k штук. Теперь начинаем гладко передвигаться по кривой бифуркационной диаграммы на уровни более высокой энергии. Тем самым мы гладко меняем как параметры g и λ так и уравнение кривой $r_1 = f(r_3)$. При этом количество критических окружностей меняться не должно. В противном случае для кривой $r_1 = f(r_3)$ возникли бы точки третьего типа пересечения с окружностью $r_1^2 + r_3^2 = 1$. Итак, на каждой гладкой кривой бифуркационной диаграммы количество критических окружностей строго постоянно, причем равно количеству окружностей для критических значений с высокой энергией.

Рассмотрим точку на кривой α_1 и устремим ее на высокий уровень энергии, что будет характеризоваться условиями $g \rightarrow +0, \lambda \rightarrow +\infty, g\lambda^3 = O(1)$. Уравнение кривой $r_1 = f(r_3)$ примет вид:

$$r_1 = (1 - r_3^2 + 2r_3W(r_3)) \frac{\lambda^2 \sqrt{W(r_3)}}{2A} + o(1).$$

Пересечения с окружностью $r_1^2 + r_3^2 = 1$ ровно два: одно — точка типа 1), другое — типа 2). Таким образом, в прообразе каждой внутренней точки кривой α_1 лежит одна критическая окружность.

Теперь рассмотрим точку на кривой α_2 . Устремим ее на бесконечность. Это будет характеризоваться условиями

$$g \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow +0, g\lambda = \frac{1}{\sqrt{2s}} + o(1).$$

В таком случае уравнение кривой $r_1 = f(r_3)$ примет вид:

$$r_1 = \frac{2r_3W(r_3) + r_3^2 - 1}{2\sqrt{2sW(r_3)}} + o(1).$$

Точек пересечения с окружностью $r_1^2 + r_3^2 = 1$ опять только две. Таким образом, в прообразе каждой внутренней точки кривой α_2 лежит тоже лишь одна окружность.

Для кривой γ_2 имеем

$$g \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow -0, g\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2s}} + o(1).$$

Уравнение кривой $r_1 = f(r_3)$ имеет вид:

$$r_1 = -\frac{2r_3W(r_3) + r_3^2 - 1}{2\sqrt{2sW(r_3)}} + o(1).$$

Точек пересечения с окружностью опять только две. В прообразе каждой внутренней точки кривой γ_2 лежит одна окружность.

Поскольку наша диаграмма по своей структуре симметрична относительно прямой $f = 0$, значит, в прообразе точек кривых β_1, β_2 и γ_1 тоже лежит ровно по одной критической окружности.

Теорема доказана. ■

2.5.2 Явное интегрирование вдоль критических окружностей

Выпишем квадратуры для решения системы Дуллина-Матвеева вдоль критических окружностей. Вдоль таких решений координату r_3 можно взять в качестве параметра. Остальные координаты объемлющего 6-мерного пространства выражаются через r_3 по формулам (2.5.1), (2.5.2). Получаем

$$\dot{r}_3 = r_2S_1 - r_1S_2 = -\frac{r_2}{\lambda\sqrt{W(r_3)}} = -\frac{\sqrt{1 - r_3^2 - f^2(r_3)}}{\lambda\sqrt{W(r_3)}}.$$

Следовательно,

$$r_3 = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{(r_3 + s)(1 - r_3^2) - (r_3 + s)f^2(r_3)}{(r_3 + s)^2}}.$$

Многочлен в числителе под корнем имеет шестую степень по r_3 .

2.5.3 Индексы некоторых критических окружностей

При исследовании интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы важным является не только найти критические окружности, но и указать их индекс. Знание индекса критической окружности помогает, допустим, описать топологию слоений Лиувилля в окрестности этой окружности.

Формулы для гамильтониана и первого интеграла (2.1.1) системы Дуллина-Матвеева довольно сложные. Поэтому посчитать индекс каждой критической окружности оказалось сложной задачей. Однако, удалось найти индекс одной критической окружности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5.1 *При $s = 0$ одна окружность в прообразе кривой α_2 имеет индекс 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. При $s = 0$ рассмотрим критическую точку ξ , имеющую на сфере Пуассона координаты $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 0$. Согласно теореме 2.4.2 имеем:

$$\begin{cases} r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 0, \\ S_2 = 0, \\ S_1 S_3 = -2\sqrt{s}, \\ S_3^4 = \frac{8s^3}{2s^2 - 1}. \end{cases}$$

Выбираем точку, в которой $S_1 < 0$, а $S_3 > 0$. Тогда, подсчитав параметры $g = S_3/2 > 0$ и $\lambda = S_3/(2s) > 0$ для точки ξ , легко понять, что эта точка лежит на кривой α_2 , причем $F(\xi) > 0$.

Таблица градиентов интегралов системы в точке ξ имеет вид:

$H :$	S_1	0	$1 - \frac{1}{4s^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{s}}$	0	$S_3^2 \frac{2s^2 - 1}{4s^3}$
$F :$	$-2\sqrt{s}$	0	$S_1^2 + S_3^2 \frac{3}{4s^2}$	$-\frac{S_3}{\sqrt{s}}$	0	$S_3^3 \frac{2s^2 - 1}{2s^3} + \frac{S_1}{\sqrt{s}}$
$I_1 :$	0	0	0	0	1	0
$I_2 :$	0	1	0	S_1	0	S_3

Для упрощения подсчета индекса интеграла F на изоэнергетической поверхности $Q_h^3(\xi)$ в точке ξ воспользуемся [21, том 2, лемма 5.1]. Очевидна линейная комбинация градиентов $\text{grad } F - S_3 \text{grad } H = 0$. Поэтому квадратичная форма, определяемая гессианом функции $\tilde{F} = F|_{Q_h^3}$ в точке ξ , является ограничением формы $\mathbf{G} = d^2F - S_3 d^2H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$, где d^2H и d^2F — гессианы интегралов H и F как функций в шестимерном пространстве. После несложных подсчетов получаем:

$$d^2H|_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4s^2 + 1}{4s^2} & 0 & 0 & S_3 \frac{2s^2 - 1}{2s^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \frac{2s^2 - 1}{2s^3} & \frac{1}{2s\sqrt{s}} & 0 & S_3^2 \frac{3 - 5s^2}{4s^4} \end{pmatrix},$$

$$d^2F|_{\xi} = \begin{pmatrix} 2S_3 & 0 & \frac{4\sqrt{s}}{S_3} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} \\ 0 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{s}}{S_3} & 0 & \frac{3}{2s^2} & -\frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & S_3^2 \frac{3(2s^2-1)}{2s^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{S_3}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & S_3^2 \frac{3(2s^2-1)}{2s^3} & 0 & 0 & S_3^3 \frac{11-8s^2}{8s^4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}|_{\xi} = \begin{pmatrix} S_3 & 0 & \frac{4\sqrt{s}}{S_3} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} \\ 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{s}}{S_3} & 0 & \frac{5-4s^2}{4s^2} & -\frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & S_3^2 \frac{2s^2-1}{s^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & S_3^2 \frac{2s^2-1}{s^3} & 0 & 0 & S_3^3 \frac{5-8s^2}{8s^4} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ортогональное дополнение относительно стандартной евклидовой формы в \mathbb{R}^6 к градиентам H, I_1, I_2 из таблицы (2.2.1). Выберем в этом

пространстве базисные векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{S_3\sqrt{s}}, -S_3, 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} \frac{S_3}{2s}, \frac{2\sqrt{s}}{S_3}, 0, 1, 0, 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} \frac{4s^2 + 1}{S_3^2 \frac{8s^2\sqrt{s}}{8s^2\sqrt{s}}}, 0, 1, 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

Тогда ограничение формы $\mathbf{G} = d^2F - S_3d^2H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$ можно представить в координатном виде как:

$$\mathbf{G}_{Q_h^3} = \begin{pmatrix} S_3^3 \frac{4s^4 - s^2 + 1}{4s^4} & -\frac{(2s^2 + 1)S_3}{s\sqrt{s}} & S_3^3 \frac{8s^2 - 1}{4s^2} \\ -\frac{(2s^2 + 1)S_3}{s\sqrt{s}} & S_3^3 \frac{4s^2 - 1}{4s^2} & -\frac{3S_3^4}{16S_3^3\sqrt{s}} \\ S_3^3 \frac{8s^2 - 1}{4s^2} & -\frac{3S_3^4}{16s^3\sqrt{s}} & S_3^5 \frac{-64s^4 + 52s^2 - 1}{64s^5} \end{pmatrix}.$$

Итак, матрицы $\mathbf{G}_{Q_h^3}$ имеет по одному положительному, отрицательному и нулевому собственное значение.

Утверждение доказано. \square

2.5.4 Экспериментальные данные

Как отмечалось в предыдущем пункте, задача о поиске индексов критических окружной случая Дуллина-Матвеева оказалась сложной. Поэтому разумно применить компьютер для расчета индексов хотя бы при некоторых параметрах системы.

Для поиска индексов критических окружностей случая Дуллина-Матвеева полезна следующая лемма.

ЛЕММА 2.5.1 *Любая критическая окружность случая Дуллина-Матвеева при $c = 0$ проходит через гиперплоскость $r_2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Движение вдоль критической траектории периодически, поэтому координаты точки на критической окружности повторяются циклически. Следовательно, вдоль критической окружности каждая координата скорости должна обращаться в нуль в некоторых точках. Поскольку

$$(\text{sgrad } H)_3 = -\frac{r_2}{\sqrt{W(r_3)}},$$

значит, на любой критической траектории есть точка, где $r_2 = 0$.

Лемма доказана. \square

При помощи компьютера удалось доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5.2 (*„Экспериментальное“*) *При $c = 0$ критические окружности в прообразе внутренних точек кривых бифуркационной диаграммы все невырождены. Индекс окружностей, лежащих в прообразе внутренних точек кривых*

- 1) α_1, γ_1 , равен 2,
- 2) α_2, β_2 — равен 1,
- 3) γ_2, β_1 — равен 0.

Для доказательства утверждения был разработан алгоритм подсчета индексов критических окружностей. Двигаясь по кривым бифуркационной диаграммы с маленьким шагом (подробнее смотри ниже), индексы были вычислены в серии порядка 3000 точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Сначала представим некоторое теоретическое обоснование алгоритма, а в конце доказательства укажем сам алгоритм.

Как видно из таблицы градиентов (2.4.4) на множестве критических точек из условия $r_2 = 0$ следует $S_2 = 0$. Рассмотрим случай $r_1 \neq 0$.

На множестве $r_2 = 0, S_2 = 0$ гессианы интегралов H, F, I_1, I_2 принимают вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & G'S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'S_3 & \frac{1}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} 2S_3 & 0 & 2S_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{W}} \\ 0 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2S_1 & 0 & 6GS_3 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & \frac{S_3}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{r_1}{2W\sqrt{W}} & \frac{S_3}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$d^2 I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d^2 I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где выражения * — громоздкие, и могут быть выписаны при необходимости.

На множестве критических точек градиенты интегралов линейно зависимы:

$$\text{sgrad } F = \lambda_1 \text{sgrad } H + \lambda_2 \text{sgrad } I_1 + \lambda_3 \text{sgrad } I_2,$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно найти из первых трех столбцов таблицы градиентов (2.4.4). А именно

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & r_1 \\ (1+G)S_3 & 0 & r_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{W}} & r_1 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2S_1 S_3 + 2\sqrt{W} \\ S_1^2 + 3GS_3^2 - \frac{r_1}{\sqrt{W}} \\ -\frac{AS_3}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}$$

По правилу Крамера получаем

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= r_1^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + G \right) S_3, \\
\Delta_1 &= r_1^2 \left(3 \left(\frac{r_3^2}{r_1^2} + G \right) S_3^2 - \left(\frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} \right) \right), \\
\Delta_2 &= -\frac{r_3^2}{r_1^2} \left(3 - \frac{1}{r_1^2} - G \right) S_3^4 - \left(-\frac{r_3^2}{r_1\sqrt{W}} - 2G \left(\frac{r_1}{\sqrt{W}} + \frac{r_3\sqrt{W}}{r_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{r_1}{\sqrt{W}} - \frac{2r_3\sqrt{W}}{r_1} \right) \right) S_3^2 - \frac{1}{\sqrt{W}} \left(\frac{Ar_1^2}{\sqrt{W}} + 2r_3\sqrt{W} \right), \\
\Delta_3 &= -r_3 \left(3 - \frac{1}{r_1^2} - G \right) S_3^3 - r_1 \left(\frac{r_3}{\sqrt{W}} - 2(1+G)\sqrt{W} \right) S_3,
\end{aligned}$$

Теперь для множества критических точек строим квадратичную форму, определяемую вторым дифференциалом интеграла F как функции на Q_h^3 , по правилу

$$d^2(F|_{Q_h^3}) = (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 d^2I_1 - \lambda_3 d^2I_2)|_{Q_h^3}.$$

Эта квадратичная форма на множестве критических точек всегда вырождена. И для нас интересны точки, в которых ранг этой формы равен 2.

Как видно из таблицы градиентов (2.2.1) при $r_2 = 0, S_2 = 0$ вектора e_2 и e_5 лежат в TQ_h^3 . Осталось найти еще один вектор e из TQ_h^3 , ортогональный e_2, e_5 и градиентам из таблицы (2.2.1). Имеем

$$e = \left(r_1 \left(\frac{r_3}{2} G'(r_3) - \frac{1}{r_1^2} (1 + G(r_3)) \right), \right. \\ \left. 0, r_1^2 \left(\frac{r_3}{r_1^4} + \frac{1}{2} G'(r_3) \right) S_3^2 + r_1 \left(\frac{Ar_1^2}{2W(r_3)\sqrt{W(r_3)}} + \frac{r_3}{\sqrt{W(r_3)}} \right), \right. \\ \left. -r_3 r_1 \left(\frac{1}{r_1^2} + G(r_3) \right), 0, -r_1^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + G(r_3) \right) \right).$$

Вычислим

$$d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 d^2I_1 - \lambda_3 d^2I_2$$

как квадратичную форму на векторах e_2, e_5, e . Ограничение $d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 d^2I_1 - \lambda_3 d^2I_2$ на $\langle e_2, e_5 \rangle$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2S_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2S_3 - \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель последней матрицы равен $(\lambda_1 - 2S_3)\lambda_2 - \lambda_3^2$. Если его приравнять к нулю, получим следующее уравнение:

$$(\Delta_1 - 2S_3\Delta)\Delta_2 - \Delta_3^2 = 0.$$

И если расписать последнее равенство, можно получить довольно громоздкое выражение:

$$b_1\xi^2 + b_2\xi + b_3 = 0, \tag{2.5.3}$$

где

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(3 - \frac{1}{r_1^2} - G \right) \left(-\frac{3r_3^2}{r_1^2} - (r_1^2 + r_3W) \frac{2G}{r_1^2} + (r_1^2 - 2r_3W) \frac{1}{r_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r_3^2}{r_1^4} (r_1^2 + 2r_3W) + (1 + G) \frac{4r_3W}{r_1^2} \right), \\
b_2 &= (r_1^2 + 2r_3W) \left(3 - \frac{1}{r_1^2} - G - \frac{r_3^2}{r_1^2} - (r_1^2 + r_3W) \frac{2G}{r_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + (r_1^2 - 2r_3W) \frac{1}{r_1^4} - (r_3 - 2W(1 + G))^2 \right), \\
b_3 &= (r_1^2 + 2r_3W)^2, \\
\xi &= \frac{r_1 S_3^2}{\sqrt{W}}.
\end{aligned}$$

Теперь составим уравнения критических точек при $r_2 = S_2 = 0, r_1 \neq 0$.

Косые градиенты H и F имеют только по две отличные от нуля координаты, а именно

$$\begin{aligned}
(\text{sgrad } H)_2 &= \left(-\frac{r_3}{r_1} G + \frac{r_1}{2} G' \right) S_3^2 + \left(\frac{r_3}{\sqrt{W}} + \frac{Ar_1^2}{2W\sqrt{W}} \right), \\
(\text{sgrad } H)_5 &= r_1 \left(\frac{1}{r_1^2} + G \right) S_3, \\
(\text{sgrad } F)_2 &= \left(\frac{2r_3}{r_1} - \frac{r_3^3}{r_1^3} - \frac{3r_3}{r_1} G + r_1 G' \right) S_3^3 - \left(2\sqrt{W} - \frac{r_3}{\sqrt{W}} - \frac{r_1^2}{2W\sqrt{W}} \right) S_3, \\
(\text{sgrad } F)_5 &= 3r_1 \left(\frac{r_3^2}{r_1^2} + G \right) S_3^2 - \left(2r_3\sqrt{W} + \frac{r_1^2}{\sqrt{W}} \right).
\end{aligned}$$

После этого уравнения на зависимость косых градиентов примет вид:

$$a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 = 0, \quad (2.5.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -2W \left(\frac{r_3}{r_1^4} + \frac{G'}{2} \right) \left(3 - \frac{1}{r_1^2} - G \right), \\
 a_2 &= (2r_3W + r_1^2) \left(\frac{2r_3W}{r_1^2}G - WG' - 3 + 2 \left(\frac{1}{r_1^2} + G \right) \right) + 4W^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + G \right), \\
 a_3 &= -(r_1^2 + 2r_3W)^2.
 \end{aligned}$$

Как видно, уравнения (2.5.3) и (2.5.4) эквивалентны. К тому же

$$(\langle e_2, e_5 \rangle)^T (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 d^2I_1 - \lambda_3 d^2I_2) (\langle e \rangle) = 0.$$

Отсюда получаем

$$d^2(F|_{Q_h^3}) = \begin{pmatrix} 2S_3 - \lambda_1 & -\lambda_3 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.5.5)$$

где

$$a_{33} = e^T (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 d^2I_1 - \lambda_3 d^2I_2) e,$$

а главный минор, натянутый на первые два столбца и две строки, равен нулю.

Теперь укажем алгоритм, при помощи которого можно проверить „экспериментальное“ утверждение.

- 1) Выбираем $N \in \mathbb{N}$.
- 2) Для каждого $r_{3_m} = 2m/N - 1$, где $m = 1, 2, \dots, N - 1$, рассматриваем

$$r_{1_m} = -\sqrt{1 - r_{1_m}^2}, \text{ либо } r_{1_m} = \sqrt{1 - r_{3_m}^2}.$$
- 3) Для выбранных r_{3_m} и r_{1_m} находим S_{3_m} из формулы (2.5.4).
- 4) Для получившихся r_{3_m}, r_{1_m} и S_{3_m} численно считаем количество положительных и отрицательных собственных значений матрицы (2.5.5).

Описанный алгоритм проверен при $s = 2, c = 0, N = 1000$. Программа написана на языке $C++$.

Утверждение доказано. \square

2.6 Грубые инварианты слоения Лиувилля и бифуркационный комплекс

Теперь на основании экспериментального утверждения можно провести грубую лиувиллеву классификацию случая Дуллина-Матвеева при $c = 0$. Напомним, что h_1 и h_2 — критические уровни гамильтониана (см. рис. 2.2). Пусть h_Z — уровень энергии точки пересечения кривых α_2 и β_2 , h_k — уровень энергии общей точки кривых α_1 и α_2 (β_1 и β_2). Тогда понятно, что при движении вверх от уровня энергии h_1 грубый топологический тип изоэнергетической поверхности может поменяться лишь на уровнях h_2, h_k и h_Z . Доказательство следующей теоремы основано на компьютерном эксперименте, поэтому ее также следует рассматривать как „экспериментальную“. Роль компьютера заключается в том, что бы рассчитать индексы большого количества критических окружностей при разных параметрах системы.

ТЕОРЕМА 2.6.1 („ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ“ ТЕОРЕМА) *Грубые молекулы изоэнергетических поверхностей Q_h^3 случая Дуллина-Матвеева имеют тип 1 при $h \in (h_1, h_k) \setminus \{h_2\}$, тип 2 при $h \in (h_k, h_Z) \setminus \{h_2\}$, и тип 3 при $h \in (h_k, h_c) \setminus \{h_2\}$ (см. рис. 2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В прообразе кривых $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \beta_2$ лежат критические окружности индексов 0 и 2. Поэтому бифуркации, отвечающие этим кривым, имеют тип атом A . Критические окружности, соответствующие кривым α_2, β_1 , имеют индекс 1. Таким кривым будет соответствовать либо атом

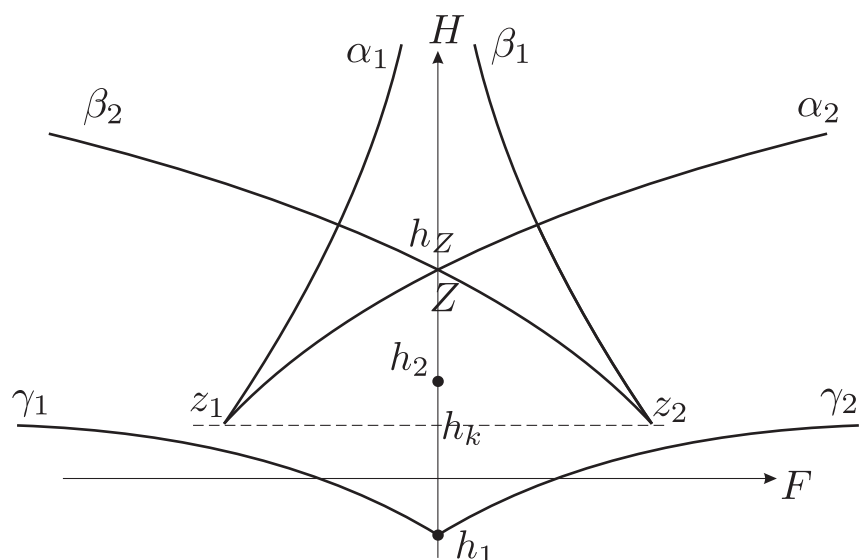


Рис. 2.2: Бифуркационная диграмма при $c = 0$

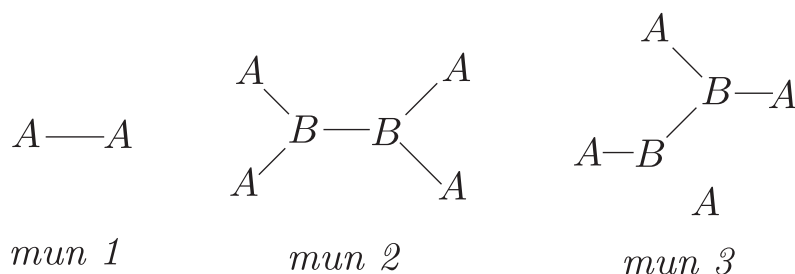


Рис. 2.3: Грубые типы молекул изоэнергетических поверхностей случая Дуллина-Матвеева при $c = 0$

B , либо атом A^* . Атом A^* не возможен, поскольку перестройка A^* не изменяет количество торов в прообразе. Теперь тип грубой молекулы определяется однозначно.

Теорема доказана. ■

Проиллюстрируем „Экспериментальную“ теорему при помощи бифуркационного комплекса рис. 2.4 (определение см. в разделе 1.2.2). Бифуркационный комплекс является „накрытием“ над бифуркационной диаграммой и показывает количество торов в прообразе каждой камеры бифуркационной диаграммы. Более того, если кривая бифуркационной диаграммы лежит внутри бифуркационного комплекса, то этой кривой отвечает седловая бифуркация. Если же кривая лежит на границе комплекса, то ей отвечает атом A .

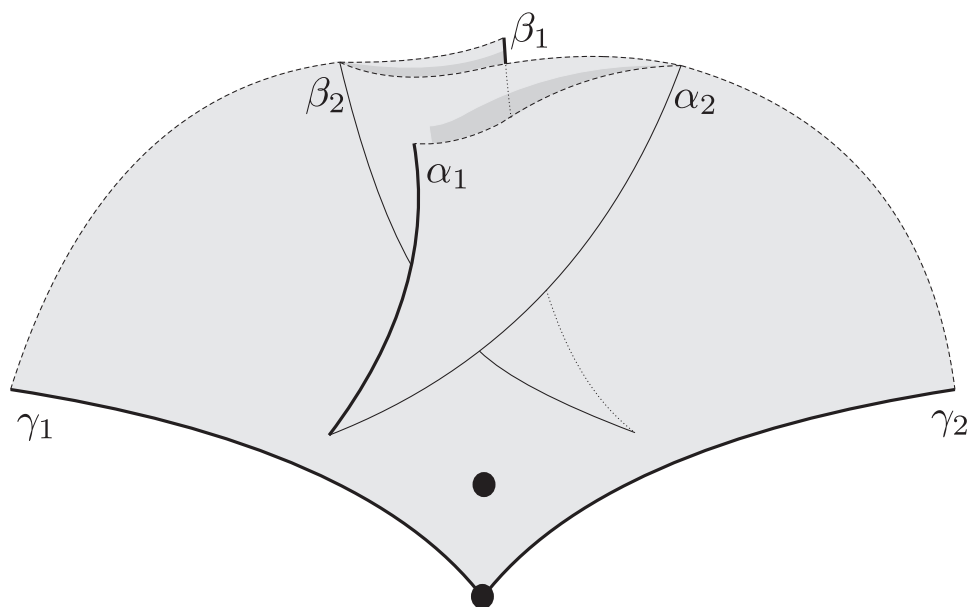


Рис. 2.4: Бифуркационный комплекс слоений Лиувилля случая Дуллина-Матвеева при $c = 0$

2.7 Тонкий инвариант Фоменко-Цишанга

2.7.1 Циклы на торах Лиувилля

Проведем тонкий топологический анализ системы Дуллина-Матвеева. Нашей целью будет описать допустимые системы координат на торах Лиувилля вблизи всех бифуркаций и выписать всевозможные матрицы склейки. Для этого опишем ряд наблюдений.

ЛЕММА 2.7.1 *Плоскость $S_1 = S_3 = r_2 = 0$ является инвариантной относительно векторного поля $\text{sgrad } H$.*

Эта лемма говорит о том, что некоторые торы в прообразе $F = 0$ являются резонансными. А именно те, которые проходят через плоскость $S_1 = S_3 = r_2 = 0$. Такое свойство является следствием того, что дополнительный интеграл F является нечетной функцией по импульсам. Подобную резонансность торов можно наблюдать и в случае Горячева-Чаплыгина [32]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Действительно, в координатах объемлющего пространства $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{r})$ для векторного поля $\text{sgrad } H$ имеет место

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -G(r_3)S_2S_3 - r_2 \left(\frac{1}{2}G'(r_3)S_3^2 + \frac{r_1}{2W(r_3)\sqrt{W(r_3)}} \right), \\ \dot{S}_3 = -\frac{r_2}{\sqrt{W(r_3)}}, \\ \dot{r}_2 = r_1(1 + G(r_3))S_3 - r_3S_1. \end{cases}$$

Очевидно, что при $S_1 = S_3 = r_2 = 0$ верно $\dot{S}_1 = \dot{S}_3 = \dot{r}_2 = 0$. Лемма доказана. \square

Введем некоторые естественные циклы на торах Лиувилля. Во-первых, дугам γ_1, γ_2 бифуркационной диаграммы (см. рис. 2.1) соответствует атом A . А на торах вблизи атома A всегда существует цикл, стягивающийся в точку при приближении к особому слою. Пусть λ_1, λ_2 — два таких цикла, отвечающих атомам A на дугах γ_1, γ_2 . Причем мы предположим, что на \mathcal{M}^4 введена ориентация таким образом, что λ_1, λ_2 являются первыми элементами допустимых базисных циклов в окрестности особенностей, отвечающих дугам γ_1, γ_2 .

Во-вторых, согласно лемме 2.7.1, траектории $\text{sgrad } H$ замкнуты при $F = 0$. Пусть λ_0 — цикл, задающийся этими периодическими траекториями.

И в-третьих, согласно [21, том 1, глава 9] на торах вблизи особенности фокус-фокус существует определенный однозначно с точностью до знака цикл λ_s , стягивающийся в точку при приближении к особенности. Более того, этот цикл λ_s выделяется еще и следующим свойством. Нарисуем на бифуркационной диаграмме окружность вокруг точки фокус-фокус. Обход по этой окружности задает оператор монодромии на циклах на торах Лиувилля. И цикл λ_s является инвариантным для этого оператора.

Итак, можно определить четыре цикла $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_s$ и λ_0 . Причем только на цикле λ_0 задана естественная ориентация. Ориентации на остальных циклах зададим позже.

При описании циклов на торах Лиувилля интегрируемой системы необходимо извлекать много информации из формул для гамильтониана и первого интеграла. Для случая Дуллина-Матвеева гамильтониан H является четной функцией по импульсам, а дополнительный интеграл F — нечетной. Поэтому следует ввести естественный диффеоморфизм $\tau : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{M}^4$ фазового многообразия по правилу:

$$\tau : (S_1, S_2, S_3, r_1, r_2, r_3) \mapsto (-S_1, -S_2, -S_3, r_1, r_2, r_3).$$

ЛЕММА 2.7.2 *Для диффеоморфизма τ имеет место*

- 1) $H(\tau \mathbf{x}) = H(\mathbf{x}), F(\tau \mathbf{x}) = -F(\mathbf{x}),$
- 2) τ сохраняет ориентацию на \mathcal{M}^4 и на $Q_h^3,$
- 3) $d\tau$ сохраняет векторное поле $\text{sgrad } F$ и переворачивает векторное поле $\text{sgrad } H,$
- 4) $\tau(\lambda_1) = -\lambda_2, \tau(\lambda_2) = -\lambda_1, \tau(\lambda_0) = -\lambda_0, \tau(\lambda_s) = \lambda_s$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Первый пункт очевидным образом следует из четности гамильтониана и нечетности дополнительного интеграла по импульсам (2.1.1).

Для понимания второго пункта воспользуемся следующими соображениями. Пусть $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — диффеоморфизм, $\varepsilon_1 = \text{ind } \tau$. То есть $\varepsilon_1 = 1$, если τ сохраняет ориентацию на \mathcal{M} , и $\varepsilon_1 = -1$, если τ меняет ориентацию.

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} | I(\mathbf{x}) = 0\}$$

инвариантное относительно τ подмногообразии \mathcal{M} , где $I(\mathbf{x})$ — некоторая гладкая функция на \mathcal{M} . И пусть $I(\tau\mathbf{x}) = \varepsilon_2 I(\mathbf{x})$ на \mathcal{N} для некоторой константы $\varepsilon_2 = \pm 1$. Тогда τ сохраняет ориентацию на \mathcal{N} тогда и только тогда, когда $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Применим это соображение несколько раз

Напомним, что многообразие \mathcal{M}^4 задается в виде

$$\mathcal{M}^4 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{r}) \mid I_1(x) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, I_2(\mathbf{x}) = S_1 r_2 + S_2 r_2 + S_3 r_3 = 0\}.$$

Получаем, τ меняет ориентацию на $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{x})$, и $I_1(\tau\mathbf{x}) = I_1(\mathbf{x})$. Значит, τ меняет ориентацию на

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{r}) \mid I_1(x) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1\}.$$

Поскольку $I_2(\tau\mathbf{x}) = -I_2(\mathbf{x})$, значит, τ сохраняет ориентацию на \mathcal{M}^4 . И последнее, ввиду $H(\tau\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})$, получаем, что τ сохраняет ориентацию на

$$Q_h^3 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}^4 \mid H(\mathbf{x}) = h\}.$$

Пункт три получается легким подсчетом степеней по импульсам компонент поля $\text{sgrad } H$ и поля $\text{sgrad } F$.

Поскольку $d\tau$ переворачивает векторное поле $\text{sgrad } H$, значит $\tau(\lambda_0) = -\lambda_0$. Очевидно, что для цикла λ_s имеет место $\tau(\lambda_s) = \pm\lambda_s$. Следуя соображениям из пункта два этой леммы, τ меняет ориентацию на торе при $F = 0$, значит $\tau(\lambda_s) = \lambda_s$.

Осталось показать, что $\tau(\lambda_1) = -\lambda_2, \tau(\lambda_2) = -\lambda_1$. Очевидно, что $\tau(\lambda_1) = \pm\lambda_2$. Пусть (λ_1, μ_1) — допустимая система координат на торе вблизи особенности на кривой γ_1 , тогда $(-d\tau(\lambda_1), -d\tau(\mu_1))$ — допустимая система координат на торе вблизи особенности на кривой γ_2 . Отсюда получаем, что $\tau(\lambda_1) = -\lambda_2$.

Лемма доказана. \square

Монодромия точки фокус-фокус нетривиальна. Поэтому описанные выше циклы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_s$ и λ_0 будем сравнивать вдоль путей отдельно „над“ и „под“

точкой фокус-фокус.

ЛЕММА 2.7.3 *Вдоль путей, проходящих „ниже“ точки фокус-фокус, имеет место:*

- 1) *индексы пересечения циклов λ_1, λ_2 равен 1, а циклов λ_0, λ_s — равен 2,*
- 2) $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm \lambda_s,$
- 3) $\lambda_1 + \lambda_2 = \pm \lambda_0,$

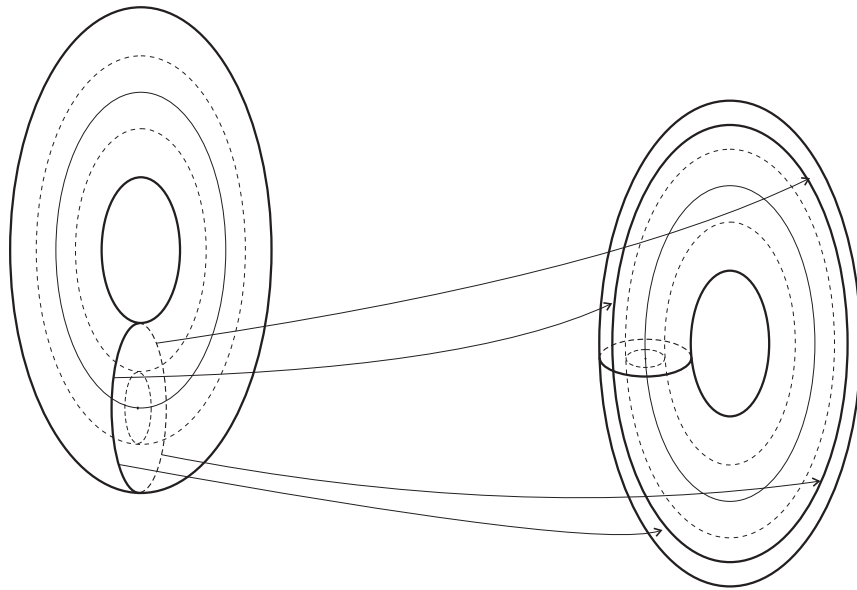


Рис. 2.5: Склейка S^3 из двух полноториев

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Согласно [21, том 1, глава 4], топология слоев изоэнергетических поверхностей вблизи точки центр-центр устроена следующим образом. Грубая молекула имеет вид $A-A$, метка $r = 0$. Это означает, что слое Ливилля изоэнергетическая поверхность устроено так, как показано на рис. 2.5. Поэтому λ_1 и λ_2 имеют индекс пересечения 1. Значит, λ_1 и λ_2 можно рассматривать в качестве базисных циклов.

Докажем, что индекс пересечения λ_0, λ_s равен 2. Для этого рассмотрим, как плоскость $S_1 = S_3 = r_2 = 0$ сечет изоэнергетические поверхности Q_h^3 . В пространстве $\mathbb{R}^3(S_2, r_1, r_3)$ оно задается системой

$$\begin{cases} \frac{S_2^2}{2} - \frac{r_1}{W(r_2)} = h, \\ r_1^2 + r_3^2 = 1. \end{cases}$$

Получаем, что эта плоскость на торе высекает одну окружности при $h_1 < h < h_2$, „восьмерку“ при $h = h_2$, и две окружности при $h > h_2$ (см. рис. 2.6). Получаем, что индекс пересечения λ_0, λ_s равен 2 при $h_1 < h < h_2$, и равен 1 при $h > h_2$,

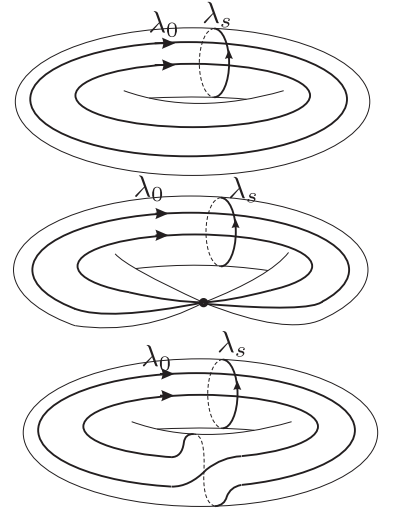


Рис. 2.6: Циклы вблизи точки фокус-фокус

Докажем оставшиеся два пункта леммы. Для этого циклы λ_0 и λ_s разложим по циклам λ_1 и λ_2 . Из соображений четности — пункт 3) Леммы 2.7.2 — получаем

$$\lambda_s = a(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\lambda_0 = b(\lambda_1 + \lambda_2),$$

где $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Циклы λ_1 и λ_2 образуют базис. Поэтому индекс пересечения λ_0 и λ_s равен

$$\pm \begin{vmatrix} a & -a \\ b & b \end{vmatrix} = \pm 2ab.$$

Следовательно, $a = \pm 1, b = \pm 1$.

Лемма доказана. \square

Выберем ориентацию на многообразии так, что бы „ниже“ точки фокус-фокус

$$\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Очевидным образом, мы всегда так можем сделать. А ориентацию на цикле λ_s выберем так, чтобы пара циклов (λ_1, λ_s) образовывала допустимую систему координат вблизи бифуркаций на кривой γ_1 . Тогда $(\lambda_2, -\lambda_s)$ будет допусти-

мой системой координат вблизи бифуркаций на кривой γ_2 . Это следует из того, что τ сохраняет ориентацию на Q_h^3 .

Итак, на всех выбранных нами циклах фиксирована ориентация. Цикла λ_0 разложен по базису (λ_1, λ_2) . Для того, что бы понимать все линейные комбинации циклов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_s$ и λ_0 „ниже“ точки фокус-фокус осталось разложить цикл λ_s по тому же базису (λ_1, λ_2) .

ЛЕММА 2.7.4 „Ниже“ точки фокус-фокус имеет место:

$$\lambda_s = \lambda_2 - \lambda_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $\lambda_2 - \lambda_1 = \varepsilon \lambda_s$, где $\varepsilon = \pm 1$. Цикл $\lambda_s + \varepsilon \lambda_1$ может быть выбран в качестве второго базисного цикла вблизи дуги γ_1 , и стягивается в точку при приближении к дуге γ_2 . А цикл $-\lambda_s + \varepsilon \lambda_2$ может быть выбран в качестве второго базисного цикла вблизи дуги γ_2 , и стягивается в точку при приближении к дуге γ_1 . Разложим цикл λ_0 по паре циклов $\lambda_s + \varepsilon \lambda_1, -\lambda_s + \varepsilon \lambda_2$

$$\lambda_0 = \varepsilon(\lambda_s + \varepsilon \lambda_1) + \varepsilon(-\lambda_s + \varepsilon \lambda_2).$$

Согласно лемме 1.2.1, по крайней мере, один из коэффициентов разложения должен быть положительным. Значит, $\varepsilon = 1$.

Лемма доказана. \square

ЛЕММА 2.7.5 „Выше“ фокуса имеет место:

- 1) индексы пересечения циклов λ_1, λ_2 равен 2, а циклов λ_0, λ_s — равен 1,
- 2) $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_s$,
- 4) $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0$,
- 5) пары циклов λ_1, λ_s и λ_2, λ_s имеют индекс пересечения 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Изоэнергетическая поверхность „выше“ точки фокус-фокус гомеоморфна $\mathbb{R}P^3$ (см. Теорема 2.2.1). Поэтому индекс пересечения циклов λ_1 и λ_2 равен двум [21, том 1, глава 4].

Перестройка тора при переходе через точку фокус-фокус при $F = 0$ устроена так, как показано на рисунке 2.6. Поэтому индекс пересечения циклов λ_0 и λ_s выше точки фокус-фокус равен 1. Так, пара циклов λ_0, λ_s образует базис фундаментальной группы на торах вдоль путей „выше“ точки фокус-фокус. Значит, по этим циклам можно разложить циклы λ_1 и λ_2 . Поскольку индекс пересечения λ_1 и λ_2 равен двум, получаем

$$\begin{aligned}\lambda_2 - \lambda_1 &= \pm 2\lambda_s, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \pm 2\lambda_0.\end{aligned}\tag{2.7.1}$$

Вдоль пути „ниже“ точки фокус-фокус $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_s$. И как отмечалось в разделе 1.2.5, если индекс пересечения циклов λ, λ_s равен 1, тогда при обходе вокруг точки фокус-фокус цикл λ изменится на цикл $\lambda \pm \lambda_s$. „Ниже“ точки фокус-фокус индекс пересечения циклов λ_2, λ_s равнялся 1. Поэтому с учетом предыдущей леммы получаем, что вдоль пути „выше“ точки фокус-фокус

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_s \pm \lambda_s.$$

Значит, $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_s$.

Теперь для доказательства леммы осталось определить знак во втором уравнении (2.7.1). Для этого воспользуемся соображениями ориентации. Пусть $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\varepsilon\lambda_0$, где $\varepsilon = \pm 1$. Из рис. 2.6 видно, что циклы λ_0 и λ_s ориентированы одинаково „ниже“ и „выше“ точки фокус-фокус. Более того, „ниже“ точки фокус-фокус пары циклов (λ_0, λ_s) и (λ_1, λ_s) ориентированы одинаково. „Выше“ же точки фокус-фокус пара циклов (λ_0, λ_s) выражается через

(λ_1, λ_s) при помощи матрицы перехода

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен ε , и должен быть положительным. Значит, $\varepsilon = 1$, и пункт 4) леммы доказан. Пункт 5) тривиален.

Лемма доказана. \square

2.7.2 Допустимые системы координат и матрицы склейки

Введем допустимые системы координат в окрестности каждой особенности так, как показано на рис. 2.7. Циклы μ_1 и μ_2 — однозначно определенные

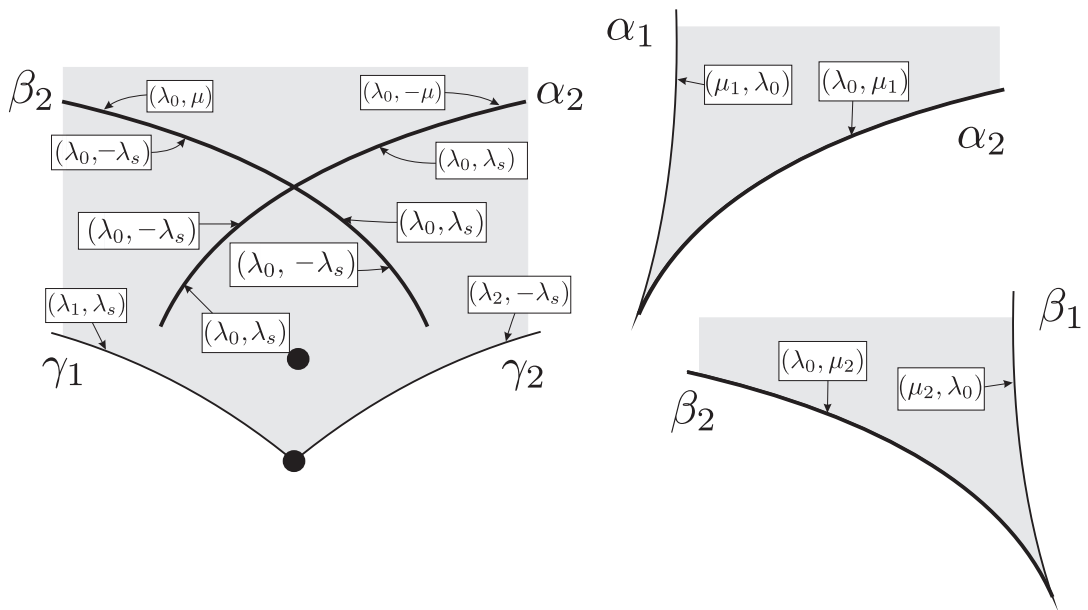


Рис. 2.7: Допустимые системы координат в окрестности бифуркаций. Бифуркационный комплекс представлен в виде склейки трех листов. Границы склейки выделены более жирной линией

циклы, стягивающиеся в точку в окрестности атома A . μ — элемент допустимого базиса в окрестности атома B . Соответствующие матрицы склейки нарисованы на рис. 2.8.

По матрицам склейки не сложно посчитать метки. Напомним, что h_1 и

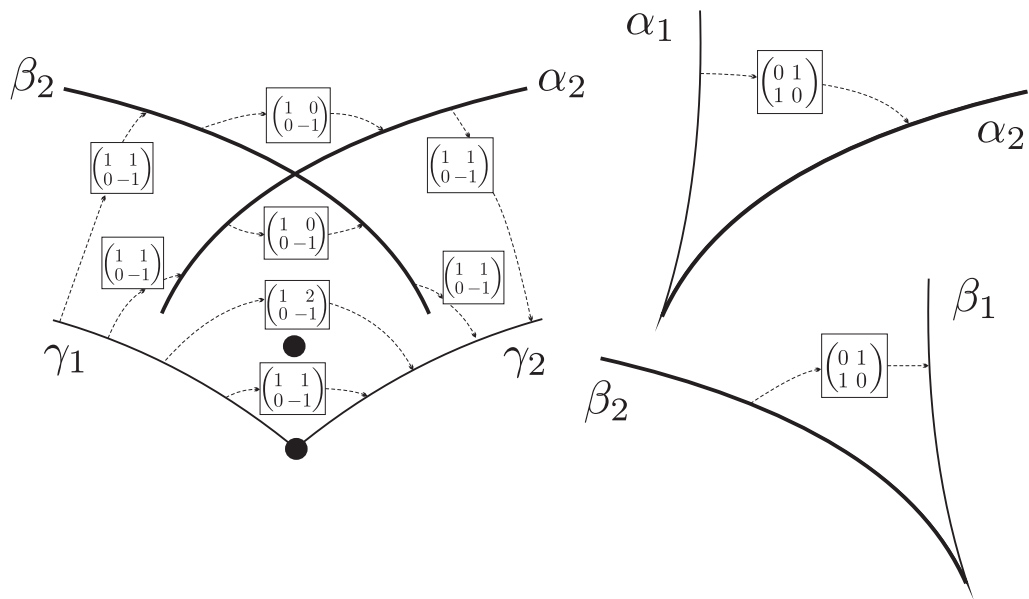


Рис. 2.8: Матрицы склейки. Бифуркационный комплекс представлен в виде склейки трех листов. Границы склейки выделены более жирной линией

h_2 — критические уровни гамильтониана (см. рис. 2.2), h_Z — уровень энергии точки пересечения кривых α_2 и β_2 , h_k — уровень энергии общей точки кривых α_1 и α_2 (β_1 и β_2). Получаем

ТЕОРЕМА 2.7.1 *Инвариант Фоменко-Цишанга изоэнергетических поверхностей системы Дуллина-Матвеева при $c = 0$ имеют типа 1 при $h \in (h_1, h_2) \cap (h_1, h_k)$, типа 2 при $h \in (h_2, h_k)$ (если $h_2 < h_k$), тип 3 при $h \in (h_k, h_2)$ (если $h_k < h_2$), типа 4 при $h \in (h_2, h_Z) \cap (h_k, h_Z)$ и тип 5 при $h > h_Z$ (см. рис. 2.9).*

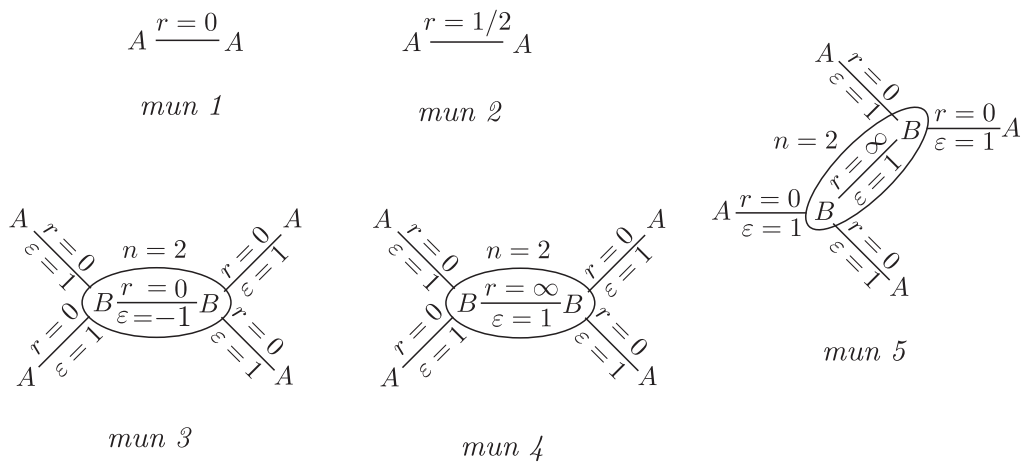


Рис. 2.9: Меченые молекулы слоений Лиувилля изоэнергетических поверхностей системы Дуллина-Матвеева при $c = 0$.

Глава 3

Шар Чаплыгина с ротором на ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по горизонтальной шероховатой плоскости. Для исследования динамики системы и нахождения особых решений построены бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс. Описаны критические окружности и исследована их устойчивость. Показано, что добавление ротора может стабилизировать неустойчивые и дестабилизировать устойчивые критические решения.

3.1 Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В таком случае скорость точки контакта равна нулю. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{M} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\gamma}, & \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, & D = ma^2 \geq 0, & \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикали, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, m — масса шара, a — его радиус, $D = ma^2$. Вектор \mathbf{M} имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта. Как показал С.А. Чаплыгин [33] данная система обладает четырьмя первыми интегралами

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad N = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \\ C &= (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad K_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1. \end{aligned}$$

Теперь закрепим внутри шара ротор. Тогда уравнения (3.1.1) можно обобщить

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

где \mathbf{K} — постоянный вектор момента ротора. Легко проверить, что система (3.1.2) допускает интегралы

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad N = (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \mathbf{M} + \mathbf{K}), \\ C &= (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}), \quad K_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Согласно [34], системы (3.1.1) и (3.1.2) являются конформно-гамильтоновыми с гамильтонианом H и приводящим множителем

$$\mu(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 1/\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, J^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (3.1.4)$$

Скобку Пуассона легко выписать в координатах $\mathbf{L} = (\mathbf{M} + \mathbf{K})\mu$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ijk}(L_k - D \det \mathbf{J}((\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma})\mu^2 - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}))\boldsymbol{\gamma}_k), \\ \{L_i, \boldsymbol{\gamma}_j\} &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\gamma}_k, \\ \{\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

При этом интегралы C и K_1 являются функциями Казимира скобки. Они расслаивают фазовое пространство $\mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times \mathbb{S}^2(\boldsymbol{\gamma})$ на четырехмерные симплектические листы

$$\mathcal{M}_c^4 = \{C = c, K_1 = 1\}.$$

Следует отметить, что скобка (3.1.5) при $D = 0$ совпадает со скобкой Пуассона в коалгебре $e(3)^*$, а приводящий множитель (3.1.4) обращается в константу. Тем самым, уравнения (3.1.1) и (3.1.2) становятся гамильтоновыми без замены времени. Более того, система (3.1.1) при $D = 0$ совпадает с уравнениями для случая Эйлера, а система (3.1.2) при $D = 0$ — для случая Жуковского [31].

Будем рассматривать лишь случай различных собственных значений тензора \mathbf{I} . При этом для простоты упорядочим главные моменты инерции $I_1 < I_2 < I_3$. Компоненты ротора $\mathbf{K} = (k_1, k_2, k_3)$ и параметр D могут обращаться в ноль.

3.2 Критические точки отображения момента

3.2.1 Критические окружности

Опишем критические окружности на каждом уровне интеграла площадей $c \in \mathbb{R}$. Для этого ограничим интегралы H и N на симплектическое многообразие \mathcal{M}_c^4

$$\tilde{H} := H|_{\mathcal{M}_c^4} \quad \tilde{N} := N|_{\mathcal{M}_c^4}$$

и введем отображение момента

$$\tilde{H} \times \tilde{N} : \mathcal{M}_c^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, n). \quad (3.2.1)$$

Согласно теореме Лиувилля, неособые поверхности уровня отображения (3.2.1) будут объединениями двумерных торов. На особых же слоях существуют точки, где ранг дифференциала отображения (3.2.1) меньше двух. Поскольку многообразие \mathcal{M}_c^4 симплектическое, неподвижные точки векторного поля $\text{sgrad } \tilde{H}$ находятся из соотношения $d\tilde{H} = 0$. Тем самым, критиче-

ские точки отображения (3.2.1) либо неподвижные, либо ранга один, где

$$d\tilde{N} = 2\lambda d\tilde{H} \quad (3.2.2)$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Во втором случае особые точки не изолированы (см. раздел 1.2.1). Через каждую из них проходит целая траектория точек ранга один. Причем коэффициент λ является интегралом этой траектории, а сама траектория замкнута.

Для случая шара Чаплыгина с ротором будем различать два типа критических окружностей. Для окружностей *первого типа* $\lambda \neq 0$, для *второго типа* $\lambda = 0$.

Критические окружности первого типа находим следующим образом. Фиксируем $\lambda \neq 0$ и решаем уравнение (3.2.2). Для этого находим точки, где зависимы $dN - 2\lambda dH$, dC , и dK_1 , и ограничивает их на \mathcal{M}_c^4 . Градиенты проще выписывать в координатах \mathbf{M}, γ . Следует отметить, что вдоль критических окружностей первого типа вектора $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ и γ независимы. Так уравнение (3.2.2) становится эквивалентно условию $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}$. Вдоль критических окружностей второго типа $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ параллелен γ . Тогда из (3.1.3) следует, что $\mathbf{M} + \mathbf{K} = c\gamma$. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ им не коллинеарен.

При отображении момента (3.2.1) каждая критическая окружность переходит в точку. Это облегчает описание критических окружностей. Выпишем две системы

$$\begin{cases} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}, \\ c = (\lambda - D)(\gamma, \boldsymbol{\omega}), \\ n = \lambda^2((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - (\gamma, \boldsymbol{\omega})^2) + c^2, \\ 2h = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - D(\gamma, \boldsymbol{\omega})^2, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} = c\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{K}, \\ n = c^2, \\ 2h = (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{D(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2}{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Здесь h, n, c — значения интегралов H, N, C соответственно. Из (3.1.3) получаем

ЛЕММА 3.2.1 *Вдоль критической окружности первого типа для некоторого $\lambda \neq 0$ имеет место (3.2.3). Вдоль критических окружностей второго типа справедливо (3.2.4).*

Тем самым, для описания критических окружностей первого типа необходимо найти h, n, c, λ , где система (3.2.3) совместна относительно $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$. Для описания окружностей второго типа, необходимо исследовать совместность системы (3.2.4) относительно $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$. Совместность обеих систем обсуждается ниже.

Критические окружности первого типа представляют собой *перманентные вращения* вокруг неподвижного вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Движения вдоль них допускают наглядную интерпретацию. Они представляют собой такие движения, когда скорость точки контакта и вектор угловой скорости постоянны в неподвижной системе координат.

Динамически несимметричный шар Чаплыгина с ротором и без допускает вращение с неподвижной точкой контакта. Вдоль таких решений вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ вертикальны.

Критические окружности второго типа описаны в работе [35]. Там показана связь этих решений с движением свободного ротора. Так же выведены уравнения и проиллюстрированы движения точки контакта.

3.2.2 Неподвижные точки

Рассмотрим неподвижные точки векторного поля (3.1.2). Разобьем все такие точки на точки первого рода, в которых $\omega \neq 0$, и точки второго рода, где $\omega = 0$.

ЛЕММА 3.2.2 *Точки первого рода изолированы. В каждой из них $n = c^2$ и ранг отображения момента (3.2.1) равен нулю. При $c^2 < (\mathbf{K}, \mathbf{K})$ объединение точек второго рода является окружностью, в каждой из них ранг отображения (3.2.1) равен единице.*

Заметим также, что точки второго рода лежат на одном совместном уровне интегралов H и N . А именно $h = 0$, $n = (\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

3.3 Бифуркационная диаграмма

3.3.1 Бифуркационные кривые

Для описания бифуркационной диаграммы отображения (3.2.1) найдем наборы h, n , когда совместна либо система (3.2.3), либо система (3.2.4). Отметим, что реальные движения возможны лишь в области $n \geq c^2$, поэтому на бифуркационной диаграмме будет присутствовать ограничительная прямая $n = c^2$.

ТЕОРЕМА 3.3.1 *Бифуркационная диаграмма отображения (3.2.1) состоит из объединения*

1) набора кривых σ

$$n(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{k_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{c^2}{(D - \lambda)^2} \right) + c^2, n > c^2,$$

$$2h(\lambda) = \frac{k_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{Dc^2}{(D - \lambda)^2}. \quad (3.3.1)$$

2) отрезка σ_0 при $c = 0$

$$n = 2Dh - D(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{K}), \text{ где } n \in [0, D^2(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K})],$$

3) луча σ_i , если $k_i = 0$

$$n = 2J_i h - \frac{Dc^2}{I_i} - J_i \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{I_j - I_i}, \text{ где } n \geq c^2 + J_i^2 \left(\sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{(I_j - I_i)^2} - \frac{c^2}{I_i^2} \right),$$

4) отрезка τ на прямой $n = c^2$.

5) точки T_0 $h = 0, n = (\mathbf{K}, \mathbf{K})$ при $c^2 \leq (\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Следует отметить, что количество кривых σ может быть от двух до шести. Будем различать их интервалами для λ . Набор кривых σ , отрезок σ_0 и лучи $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отвечают критическим окружностям первого типа. Образ критических окружностей второго типа лежит на отрезке τ . Прообраз точки T_0 состоит из неподвижных точек второго рода.

Неподвижные точки первого рода отображаются в точки пересечения кривых σ , либо отрезка σ_0 и прямой $n = c^2$. Это легко понять следующим образом. В каждой неподвижной точке первого рода имеет место $\mathbf{J}\omega + \mathbf{K} = \lambda\omega$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому в них справедливы система (3.2.3) и формулы (3.3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.1. Рассмотрим критические окружности первого типа. Из системы (3.2.3) при $\lambda \neq D$ получаем набор кривых σ .

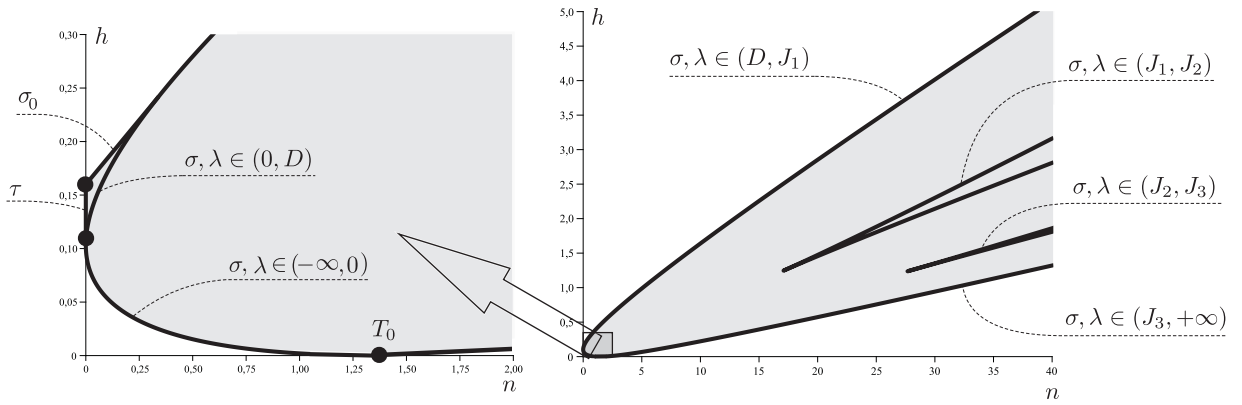


Рис. 3.1: $\mathbf{I} = \text{diag}(3, 6.5, 10)$, $\mathbf{K} = (0.8, 0.7, 0.5)$, $D = 2$, $c = 0$

Вдоль критических окружностей первого типа ω и γ независимы. Поэтому условие совместности системы (3.2.3) $(\gamma, \omega)^2 < (\omega, \omega)$ эквивалентно $n > c^2$.

Из (3.2.3) при $c = 0$ для $\lambda = D$ на бифуркационной диаграмме получаем дополнительный отрезок σ_0 . Луч σ_i соответствует $\lambda = J_i$. Образ критических окружностей второго рода лежит на прямой $n = c^2$ и образует отрезок.

Теорема доказана. ■

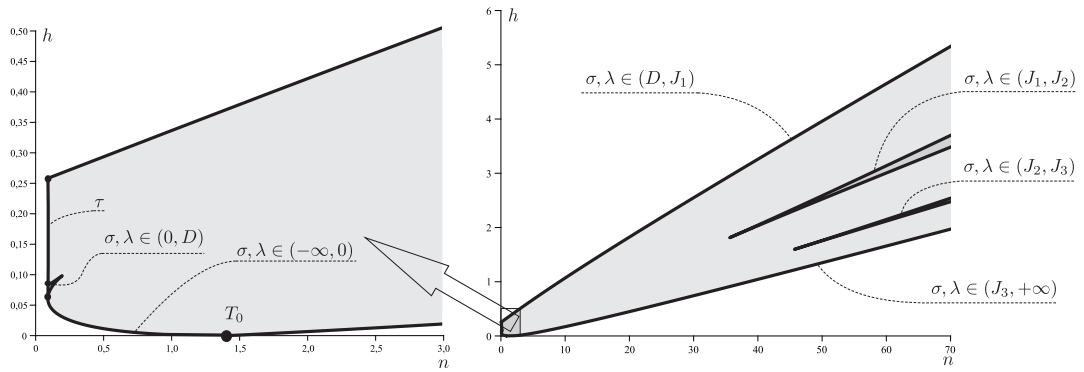


Рис. 3.2: $\mathbf{I} = \text{diag}(3, 6.5, 10)$, $\mathbf{K} = (0.8, 0.7, 0.5)$, $D = 5$, $c = 0.3$

Область возможных движений изображена темным цветом (см. рис. 3.1, 3.2). Уходящие на бесконечность два клюва получаются по формулам (3.3.1) при $\lambda \in (J_1, J_2)$ и $\lambda \in (J_2, J_3)$. Образ неподвижных точки показаны крупными точками. В случае Жуковского $D = 0$, поэтому отрезок σ_0 совпадает с точкой.

Бифуркационная диаграмма для случая Жуковского, когда все $k_i \neq 0$ была впервые построена Харламовым [6]. Там же произведен топологический анализ. А бифуркационная диаграмма в случае, когда ротор $\mathbf{K} = 0$ впервые была получена Килиным [35]. В этой работе был проведен качественный анализ движения шара Чаплыгина.

Несложно видеть из (3.2.3), каждой точке кривых σ отвечает одна критическая окружность. Это перманентное вращение вокруг постоянного вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{K}$. В таком случае решение выписывается явно

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})} \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\xi}_1 \cos(|\boldsymbol{\omega}|t) - \boldsymbol{\xi}_2 \sin(|\boldsymbol{\omega}|t)) \sqrt{1 - \frac{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}}, \quad (3.3.2)$$

где $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ — два ортогональных орта, что $[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2] = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$. Выражения для $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ и $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ можно получить из системы (3.2.3).

Каждой точке отрезка σ_0 и лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответствует по две критические окружности. Это тоже перманентными вращениями вокруг постоянного $\boldsymbol{\omega}$.

Решения в прообразе отрезка τ были исследованы Килиным [35]. В этой работе показано, что уравнения (3.1.2) в прообразе отрезка τ совпадают с уравнениями Жуковского-Вольтерра, описывающие движения свободного ротора [31].

3.3.2 Устойчивость критических окружностей и бифуркационный комплекс

Исследуем боттовость дополнительного интеграла и устойчивость критических окружностей (см. раздел 1.2.1). Введем следующее выражения

$$(\lambda - D) \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) n'_\lambda \quad (3.3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.3.2 В прообразе каждой внутренней точки

1) кривых из набора σ лежит одна устойчивая критическая окружность, если выражение (3.3.3) положительно, и одна неустойчивая, если это выражение отрицательно.

2) отрезка σ_0 лежат две устойчивые критические окружности.

3) луча σ_i лежат две устойчивые критические окружности если $i = 1, 3$, и две неустойчивые — если $i = 2$.

4) отрезка τ лежат либо неподвижные точки, либо устойчивые критические решения. Эти критические решения являются невырожденными устойчивыми критическими окружностями при $c \neq 0$.

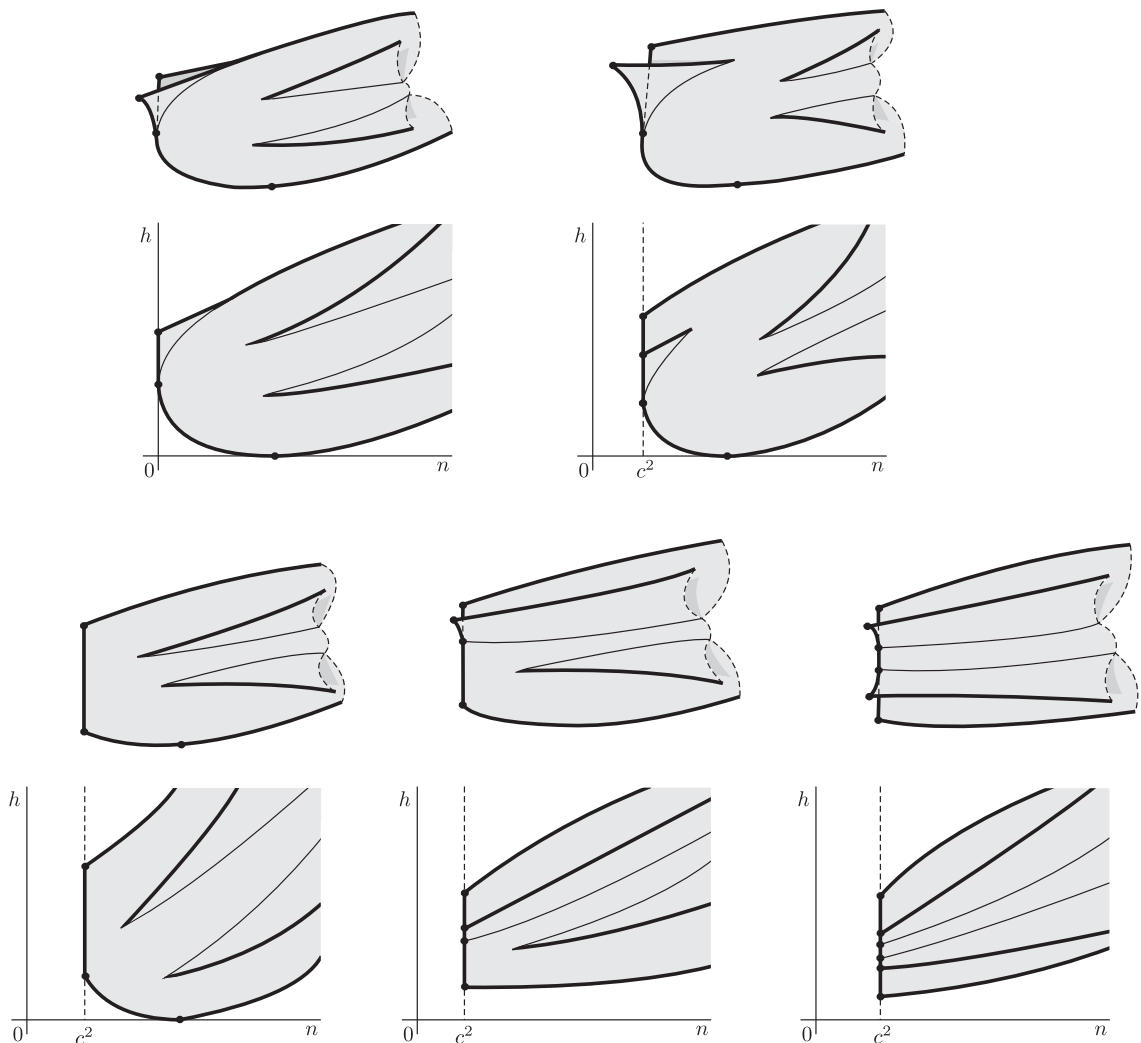


Рис. 3.3: Бифуркационные комплексы, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 2, 3)$, $D = 1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вдоль критических окружностей первого типа верно

$$dN = \beta_1 dK_1 + \beta_2 dC + \beta_3 dH,$$

где

$$\beta_1 = -D^2(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2, \beta_2 = -2D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}), \beta_3 = 2\lambda.$$

Определим матрицу

$$G = d^2N - \beta_1 d^2K_1 - \beta_2 d^2C - \beta_3 d^2H.$$

Двумерное пространство, ортогональное градиентам (3.1.3) и трансверсальное векторному полю (3.1.2), натянуто на вектора

$$r_1 = \begin{pmatrix} (\lambda - D)(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + b\boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } b = D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2 - \lambda(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Обозначим через \hat{G} ограничение G на $\langle r_1, r_2 \rangle$ как квадратичную форму. Согласно разделу 1.2.1, критическая окружность устойчивая, если $\det \hat{G} > 0$, и неустойчивая, если $\det \hat{G} < 0$. Вдоль критических окружностей первого типа получаем

$$\det \hat{G} = \frac{2((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2)^2}{(1 - D(\boldsymbol{\gamma}, J^{-1}\boldsymbol{\gamma})) \det \mathbf{J}} m(\lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}),$$

где функция $m(\lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ при $\lambda \neq D, J_1, J_2, J_3$ зависит только от первого аргумента и совпадает с выражением (3.3.3). Это доказывает первый пункт теоремы.

При $\lambda = D, c = 0$ функция

$$m(\lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = 2D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2 \det \mathbf{I} > 0.$$

Тем самым, в прообразе отрезка σ_0 лежат устойчивые критические окружности. В критических точках, отвечающих лучу σ_i имеем

$$m(\lambda, \gamma, \omega) = 2J_i^2 I_i \omega_i^2 \prod_{j \neq i} (I_j - I_i).$$

Откуда $\det \hat{G} > 0$ для $i = 1, 3$ и $\det \hat{G} < 0$ для $i = 2$.

Исследуем критические окружностей второго типа. В них справедливо

$$dN = 2c dC - c^2 dK_1.$$

Определим

$$G = d^2 N - 2c d^2 C + c^2 d^2 K_1.$$

Двумерное пространство порождено векторами

$$r_1 = \begin{pmatrix} \omega - (\gamma, \omega)\gamma \\ D(\gamma, \omega)(\omega - (\gamma, \omega)\gamma) \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \gamma \times \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Опять, пусть \hat{G} будет ограничением G на $\langle r_1, r_2 \rangle$ как квадратичная форма.

Тогда

$$\det \hat{G} = 4((\omega, \omega) - (\gamma, \omega)^2)^2 (c + D(\gamma, \omega))^2 > 0.$$

Легко понять, что во внутренних точках отрезка τ выражение $c + D(\gamma, \omega) \neq 0$ при $c \neq 0$. Значит, критические окружности второго типа устойчивые.

Теорема доказана. ■

Проиллюстрируем результат с помощью *бифуркационного комплекса* 1.2.2. Теорема 3.3.2 позволяет описать его топологию (см. рис. 3.3).

Границы комплексов изображены жирными линиями. В их прообразе лежат устойчивые периодические решения. В прообразе тонких сплошных линий лежат связные особые слои, содержащие неустойчивые критической траектории. Соответствующие линии на бифуркационных диаграммах тоже либо жирные, либо тонкие. Образ неподвижных точек помечен жирными точками. Верхний левый комплекс соответствует $c = 0$. Далее c увеличивается.

3.3.3 Стабилизация и дестабилизация критических решений

В данном разделе остановимся на механической интерпретации полученных результатов. А именно воспользуемся соображением, что невырожденным критическим окружностям индекса 0 или 2 соответствуют устойчивые решения, а критическим окружностям индекса 1 — неустойчивые.

В работе [33] исследована устойчивость критических окружностей для задачи (3.1.1). Там показано, что в случае нулевой константы площадей особые периодические решения представляют собой вращения вокруг главных осей. Причем вращение вокруг средней оси неустойчиво, а вокруг наибольшей и наименьшей — устойчиво. Возникают естественные вопросы, возможно ли стабилизировать вращения вокруг средней оси, добавив в шар ротор, параллельный этой оси? А так же, дестабилизируются ли устойчивые вращения, если ротор направить вдоль наибольшей или наименьшей осей?

Подробно разберем случай $c = 0$. Бифуркационная диаграмма отображения (3.2.1) при $\mathbf{K} = 0$ на \mathcal{M}_0^4 состоит из трех лучей

$$\sigma_i : h = \frac{n}{2J_i}, i = 1, 2, 3.$$

В прообразе точек лучей σ_1 и σ_3 лежит по две устойчивые критические окружности, в прообразе σ_2 — по две неустойчивые (см. рис. 3.4).

Теперь к шару добавим ротор, параллельный средней оси $\mathbf{K} = (0, k, 0)$. На бифуркационной диаграмме отображения (3.2.1) (см. рис. 3.4) в прообразе более жирных кривых лежат устойчивые критические решения. Имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.1 Пусть $\mathbf{K} = (0, k, 0)$. Тогда в прообразе каждой точки дуг

$$\sigma, \lambda \in (-\infty, 0) \cup (D, J_1) \cup (J_3, +\infty)$$

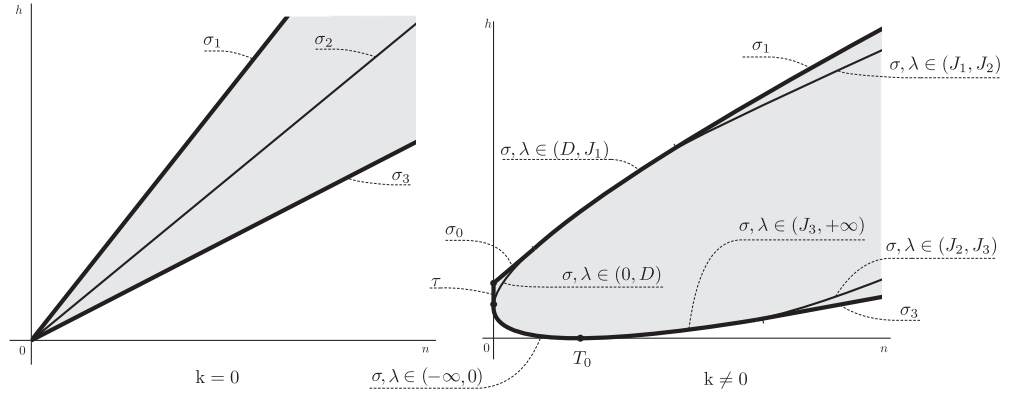


Рис. 3.4: Бифуркационная диаграмма при $\mathbf{K} = (0, k, 0)$, $c = 0$

(см. рис. 3.4) лежит по одной, а в прообразе отрезка σ_0 по две устойчивые критические окружности. Решения, отвечающие этим окружностям, являются равномерными вращениями вокруг средней оси инерции.

При $\mathbf{K} = 0$ перманентные вращения вокруг средней оси инерции были неустойчивы. Добавив же ротор вида $\mathbf{K} = (0, k, 0)$, некоторые из таких вращений стабилизировались. Без ограничения общности положим $k > 0$. Тогда в прообразе дуг

$$\sigma, \lambda \in (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3)$$

лежат неустойчивые вращения вокруг средней оси, причем

$$\omega_2 \in \left(-\infty, -\frac{k}{I_2 - I_1}\right) \cup \left(\frac{k}{I_3 - I_2}, +\infty\right).$$

В прообразе же дуг

$$\sigma, \lambda \in (-\infty, 0) \cup (D, J_1) \cup (J_3, +\infty)$$

и отрезка σ_0 лежат устойчивые вращения. Они соответствуют

$$\omega_2 \in \left(-\frac{k}{I_2 - I_1}, \frac{k}{I_3 - I_2}\right).$$

Тем самым, перманентные вращения вокруг средней оси при небольшой угловой скорости $\omega_2 \in \left(-\frac{k}{I_2 - I_1}, \frac{k}{I_3 - I_2}\right)$ стали устойчивыми.

Теперь к шару добавим ротор и направим его вдоль устойчивой наименьшей оси $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$. Бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс представлены на рис. 3.5. Получаем

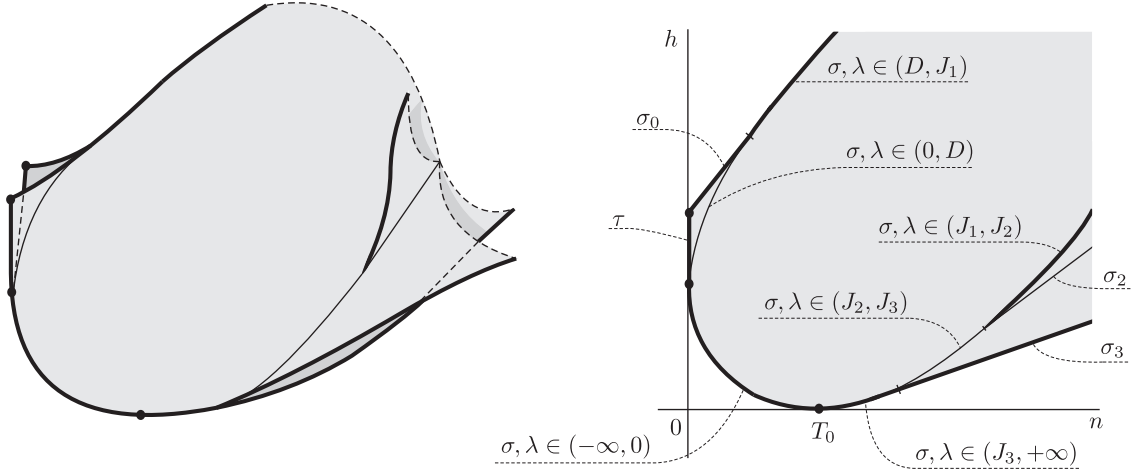


Рис. 3.5: Бифуркационные комплекс и диаграмма при $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$, $c = 0$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.2 Пусть $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$. Тогда в прообразе каждой точки дуг

$$\sigma, \lambda \in (0, D) \cup (J_2, J_3)$$

(см. рис. 3.5) лежит по одной неустойчивой критической окружности. Решения, отвечающие этим окружностям, являются равномерными вращениями вокруг наименьшей оси инерции.

Так часть перманентных вращений вокруг средней оси стали неустойчивыми. А именно, положив $k > 0$, те вращения, где

$$\omega_1 \in \left(-\frac{k}{I_1}, -\frac{k}{J_1} \right) \cup \left(-\frac{k}{I_3 - I_1}, -\frac{k}{I_2 - I_1} \right).$$

Глава 4

Резиновый шар на плоскости

Классической является задача о движении динамически несимметричного уравновешенного шара (шара Чаплыгина) по горизонтальной плоскости. Мы предполагаем, что мгновенная скорость точки контакта равна нулю. В данной главе исследуются движения шара Чаплыгина при наличии еще одного ограничения — проекция вектора угловой скорости на нормально к плоскости должна равняться нулю. В дальнейшем такой шар будем называть *резиновым* (*Rubber Ball*). Такая модель была введена в работе [36].

4.1 Уравнения движения и первые интегралы

4.1.1 Резиновый шар на плоскости

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного резинового шара по горизонтальной плоскости. Как уже предположено ранее, равна нулю не только скорость точки контакта шара с плоскостью, но и проекция вектора угловой скорости на вертикаль. То есть в координатах, жестко связанных с телом

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0. \quad (4.1.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}$ — угловая скорость и скорость центра масс шара, \mathbf{n} — орт, направленный вертикально вниз, \mathbf{r} — вектор из центра масс в точку контакта. Движения шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описываются уравнениями

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad \mu = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}, \quad (4.1.2)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}$, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, \mathbf{E} — единичная матрица, $D = mR^2$, m и R — масса и радиус шара. Будем предполагать, что главные моменты инерции различны: $0 < I_1 < I_2 < I_3$.

Очевидным образом система (4.1.2) эквивалентна системе Веселовой [37], описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой при наличии связи $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$. Система уравнения (4.1.2) допускают интеграл энергии и геометрический интеграл

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1. \quad (4.1.3)$$

Имеется также дополнительный интеграл

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})^2. \quad (4.1.4)$$

4.1.2 Резиновый шар на плоскости с ротором в потенциальном поле

Теперь закрепим внутри шара постоянный ротор и поместим в вертикальное потенциальное поле. При этом сохраним требования (4.1.1). Тогда уравнения движения (4.1.2) можно обобщить

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \mu \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$\mu = -\frac{((\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})},$$

Здесь \mathbf{K} — постоянный вектор момента ротора, $U = U(\mathbf{n})$ — потенциал силового поля. Уравнения (4.1.5) также сохраняют интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{n}). \quad (4.1.6)$$

Однако в общем случае дополнительного первого интеграла не существует.

В работе [38] система (4.1.5) (а потому и (4.1.2)) была представлена в конформно-гамильтоновом виде. Опишем это представление. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$. В новых координатах $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{J}^{1/2} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \rho^{-1} \mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{n} : \quad (4.1.7)$$

введем скобку Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}(M_k - \rho^3 \det \mathbf{J}(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{1/2}\boldsymbol{\gamma})\gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

В таком случае фазовым пространство системы (4.1.5) — многообразие

$$\mathcal{M}^4 = \{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1\} \equiv \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1\} \quad (4.1.9)$$

будет симплектическим листом этой скобки, а значит, \mathcal{M}^4 — симплектическое многообразие. Переписав скобку (4.1.8) обратно в координатах $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, система (4.1.5) будет иметь вид (1.3.3). Где гамильтониан H представляется в форме (4.1.6), а приводящий множитель равен

$$\mu(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \rho = \sqrt{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

4.1.3 Интегрируемые случаи

Как отмечалось выше, в общем случае система (4.1.5) не обладает дополнительным первым интегралом. Однако некоторые из таких обобщений все же будут интегрируемыми.

1. При $U(\mathbf{n}) \equiv 0$ система (4.1.5) обладает дополнительным интегралом

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \mathbf{n})^2. \quad (4.1.10)$$

2. В случае

$$\mathbf{K} = 0, \quad U(\mathbf{n}) = -\frac{\varepsilon}{4}(\mathbf{J}\mathbf{n}, \mathbf{n}) \quad (4.1.11)$$

система (4.1.5) допускает интеграл

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n})^2 + \frac{\varepsilon \det \mathbf{J}}{2}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}). \quad (4.1.12)$$

Потенциал вида (4.1.11) соответствует полю сил задачи Бруна. В таком случае все точки шара притягиваются к плоскости с силой, пропорциональной расстоянию до плоскости. Для классической задачи о качении шара Чаплыгина интегрируемое обобщение добавлением потенциала (4.1.11) было показано В.В.Козловым [39]. А добавление потенциала (4.1.11) к волчку Эйлера будет интегрируемым случаем Клебша [31].

4.2 Критические окружности их устойчивость

Укажем критические окружности и построим бифуркационные диаграммы для указанных выше интегрируемых случаев.

4.2.1 Резиновый шар

Гамильтониан (4.1.3) и дополнительный интеграл (4.1.4) заданы на многообразии (4.1.9). Стационарные решения уравнений (4.1.2) имеют вид: $\boldsymbol{\omega} = 0$, а \boldsymbol{n} — произвольный единичный вектор. Этим решениям отвечают состояния покоя шара. Точки, в которых ранг дифференциала интегрального отображения

$$\text{rank } d(H \times F) = 0$$

совпадают со стационарными решениями.

Вдоль решений, отвечающим критическим окружностям, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и направлен вдоль одной из главных осей. В таком случае шар равномерно катится по прямой, при этом ось вращения направлена вдоль одной из главных осей инерции. Бифуркационная диаграмма отображения момента для гамильтониана (4.1.3), дополнительного интеграла (4.1.4), заданных на многообразии (4.1.9), состоит из трех лучей

$$h = \frac{f}{2J_i}, f \geq 0.$$

При этом вращению вокруг средней оси отвечает устойчивая критическая окружность, а вокруг наибольшей и наименьшей — неустойчивая (см. рис. 4.1). Вид бифуркационной диаграммы довольно типичный. Это связано с тем, что задача о качении резинового шара по плоскости сводится к задаче Неймана [37].

В работе [35] были исследованы критические решения аналогичной классической системы — качение шара Чаплыгина по плоскости. Оказалось, что резиновый шар не допускает ряд движений, возможных для классического аналога — а именно, шар Чаплыгина допускает вращение на неподвижной точке, при котором одно из главных направлений тензора инерции направ-

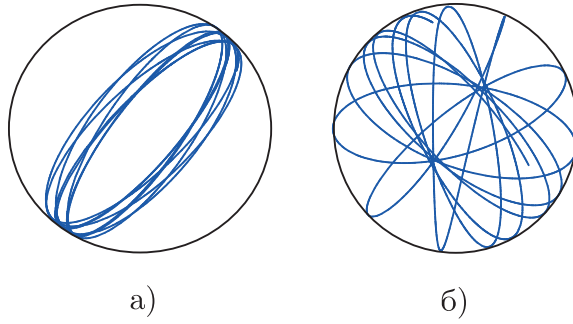


Рис. 4.1: Резиновый шар на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$. Траектория точки контакта на поверхности шара при вращении около устойчивой оси (рис. а) и около неустойчивой (рис. б). Траектория на рис. а) выпущена из точки $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0.1)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, на рис. б) — из точки $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 0.1)$, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$

лено вертикально. Для резинового шара такие движения невозможны.

4.2.2 Резиновый шар с ротором

Как отмечено в разделах 4.1.2, 4.1.3, задача о качении резинового шара с ротором по плоскости является интегрируемой по Лиувиллю после замены времени. Фазовое пространство — многообразие (4.1.9), гамильтониан и дополнительный первый интеграл выражаются формулами (4.1.3) и (4.1.10). Тем самым корректно определено отображение момента

$$H \times F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f).$$

ТЕОРЕМА 4.2.1 *Бифуркационная диаграмма отображения момента для задачи о качении резинового шара с ротором по плоскости состоит из объединения (см. рис. 4.2, а)*

- 1) набора кривых σ ($\lambda \neq 0, J_1, J_2, J_3$)

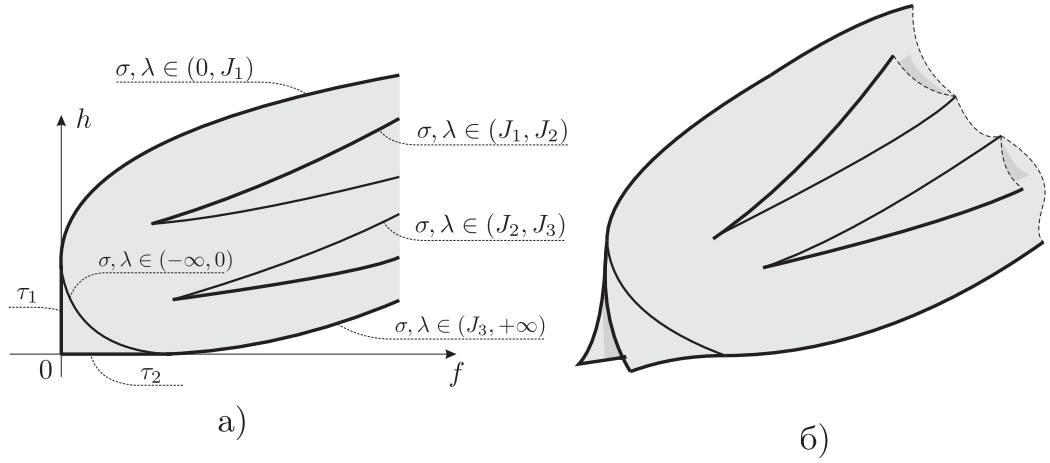


Рис. 4.2: Резиновый шар с ротором на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$. а) Бифуркационная диаграмма интегрального отображения. б) Бифуркационный комплекс.

$$f(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{k_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} \right),$$

$$2h(\lambda) = \frac{k_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2},$$

2) лучей σ_i , если $k_i = 0$

$$f = 2J_i h - J_i \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{J_j - J_i}, \quad \text{где } f > J_i^2 \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{(J_j - J_i)^2},$$

3) отрезка τ_1 : $f = 0, 2h \in (0, (\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}))$,

4) отрезка τ_2 : $f \in [0, (\mathbf{K}, \mathbf{K})], h = 0$,

Точка \mathcal{M}^4 является стационарной для системы (4.1.5) при $U(\mathbf{n}) \equiv 0$, если в ней $\boldsymbol{\omega} = 0$. Все такие точки соответствуют состояниям покоя шара и при отображении момента переходят в отрезок τ_2 . Точка \mathcal{M}^4 является точкой ранга ноль отображения момента, если в ней $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} \parallel \mathbf{K}$. Обе такие точки при отображении момента проектируются в точку $(0, 0)$.

Кратко опишем схему доказательства теоремы. Вначале следует найти множество критических точек отображения момента. Это множество полностью состоит из особых траекторий и совпадает с теми точками \mathcal{M}^4 , где зависимы градиенты четырех функций

$$H, F, (\mathbf{n}, \mathbf{n}), (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$$

как функций в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$. Далее следует найти образ этого множества при отображении момента.

Критические окружности в задаче о качении резинового шара с постоянным ротором устроены следующим образом. В прообразе каждой точки кривых σ лежит по одной, а лучей σ_i по две критические окружности. Вдоль таких решений вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и может быть найден из системы

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}$$

для кривых σ , и

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = J_i\boldsymbol{\omega}$$

для луча σ_i . В абсолютном пространстве вдоль таких решений шар равномерно катится по прямой.

Внутренним точкам отрезка τ_1 отвечает по две критические окружности. Вдоль них

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \parallel \mathbf{n},$$

вектор \mathbf{n} описывает траектории (см. рис 4.3, а):

$$(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}) - \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} = 2h.$$

При этом

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(\alpha\mathbf{n} - \mathbf{K}), \quad \text{где } \alpha = \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

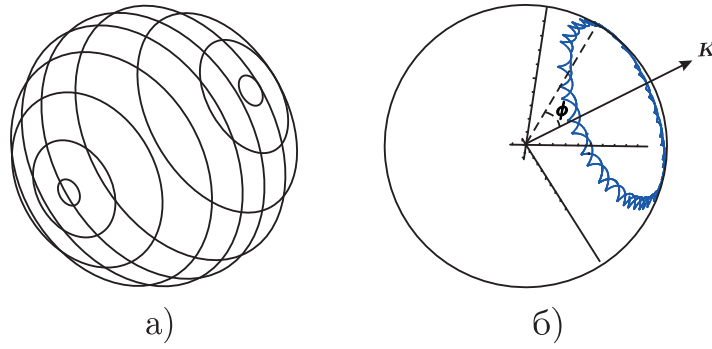


Рис. 4.3: Резиновый шар с ротором на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$. а) Траектория точки контакта на поверхности шара вдоль особых решений, где $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \parallel \mathbf{n}$. б) Траектория точки контакта при возмущении стационарной точки $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0.6, 0, 0.8)$

Прообраз отрезка τ_2 устроен очень просто. В прообразе точки $(f, h = 0)$ лежат стационарные решения, при которых вектор момента ротора \mathbf{K} направлен под углом ϕ к вертикали, где $\sin^2 \phi = f/(\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Опишем некоторые различия в движениях резинового шара и шара Чаплыгина. Критические решения для задачи о качении шара Чаплыгина с ротором были описаны в главе 3. Некоторые из таких решений представляют прямолинейные качения, при которых вектор угловой скорости постоянен в абсолютном пространстве и направлен не горизонтально. Вдоль подобных критических решений для резинового шара с ротором вектор угловой скорости тоже постоянен, но обязательно горизонтален.

Исследуем устойчивость критических окружностей (см. раздел 1.2.1). Выпишем выражение

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) f'_\lambda \tag{4.2.1}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2.1 *В прообразе каждой внутренней точки*

- 1) *кривых σ лежит по одной устойчивой критической окружности, если выражение (4.2.1) положительно и одной неустойчивой — если это выражение отрицательно.*

2) луча σ_i лежит по две устойчивые критические окружности при $i = 1, 3$ и две неустойчивые — при $i = 2$.

3) отрезка τ_1 лежит по две устойчивые критические траектории.

4) отрезка τ_2 лежит по две окружности. Каждая точка этих окружностей есть неустойчивое положение равновесия.

Среди стационарных решений устойчивы только два. Это точки, где $\mathbf{n} \parallel \mathbf{K}$. При возмущении остальных неподвижных точек, вектор \mathbf{n} в \mathcal{M}^4 будет вращаться вокруг вектора \mathbf{K} (см.рис. 4.3, б). Бифуркационный комплекс слоя Лиувилля изображен на рис. 4.2, б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Докажем пункт 1). Вдоль критических периодических траекторий в прообразе кривой σ верно

$$dF = 2\lambda dH$$

Введем матрицу

$$G = d^2F - 2\lambda d^2H.$$

Двумерное пространство в $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, ортогональное градиентам функций $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , H и трансверсальное к полю (4.1.5) при $U(\mathbf{n}) = 0$, натянуто на вектора

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через \hat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму. Согласно разделу 1.2.1 критическая окружность устойчива если вдоль нее $\det \hat{G} > 0$, и неустойчива если $\det \hat{G} < 0$. Получаем,

$$\det \hat{G} = \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})^4 (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}) \det \mathbf{J}}{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})} \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) f'_\lambda.$$

Поскольку дробь в последней формуле строго положительна, а выражение после дроби совпадает с выражением (4.2.1), утверждение пункта 1) доказано.

В критических точках, отвечающих лучу σ_i , имеем

$$\det \hat{G} = 2J_i \omega_i^4 (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}, \mathbf{n}) (\det \mathbf{J}) \prod_{j \neq i} (J_j - J_i).$$

Отсюда $\det \hat{G} > 0$ при $i = 1, 3$ и $\det \hat{G} < 0$ при $i = 2$.

Исследуем критические окружности в прообразе отрезка τ_1 . Следуя определению из раздела 1.2.1, эти окружности будут вырожденными. Поэтому их орбитальную устойчивость будем проверять по определению. Рассмотрим прообраз точки $H = h + o(1)$, $F = o(1)$ и убедимся, что он лежит в окрестности прообраза точки $H = h$, $F = 0$. Действительно, имеем

$$(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}) - \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})} = 2h + o(1).$$

При этом

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(\alpha \mathbf{n} - \mathbf{K}) + o(1), \quad \text{где } \alpha = \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})} + o(1).$$

Утверждение доказано. \square

4.2.3 Резиновый шар в поле сил задачи Бруна

Задача о качении резинового шара в поле сил задачи Бруна также является интегрируемой по Лиувиллю после замены времени. Многообразие (4.1.9) является фазовым пространством, гамильтониан и дополнительный первый интеграл выписаны в выражениях (4.1.6) и (4.1.12). Так определено интегральное отображение $H \times F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — главные направления тензора инерции, отвечающие моментам I_1, I_2, I_3 соответственно.

ТЕОРЕМА 4.2.2 *Бифуркационная диаграмма отображения момента для задачи о качении резинового шара в поле сил Бруна состоит из объединения (см. рис. 4.4)*

1) *трех лучей*

$$\sigma_i: f = 2J_i h + \frac{\varepsilon J_i}{2}(\text{tr}\mathbf{J} - J_i), \quad h > -\frac{\varepsilon}{4} \max_{j \neq i} J_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

2) *кривой τ при $\lambda \in (J_2, J_3)$*

$$h(\lambda) = \frac{\varepsilon}{4}(2\lambda - \text{tr}\mathbf{J}),$$

$$f(\lambda) = 2\lambda h(\lambda) + \frac{\varepsilon \lambda}{2}(\text{tr}\mathbf{J} - \lambda).$$

Точка \mathcal{M}^4 является стационарной для системы (4.1.5) при $\mathbf{K} = 0$, если в ней

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_i \quad \text{для некоторого } i = 1, 2, 3.$$

Все шесть таких точек соответствуют состояниям покоя шара и при отображении момента переходят в точки пересечения лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Точки ранга ноль отображения момента совпадают со стационарными решениями.

Опишем, как устроены критические окружности. В прообразе каждой неособой точки лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ лежит по две, а дуги τ — по четыре критические окружности. Вдоль критических окружностей, отвечающих лучу σ_i , вектор угловой скорости параллелен \mathbf{e}_i — i -ому главному направлению тензора инерции. Пусть

$$j = \min_{k \neq i} k.$$

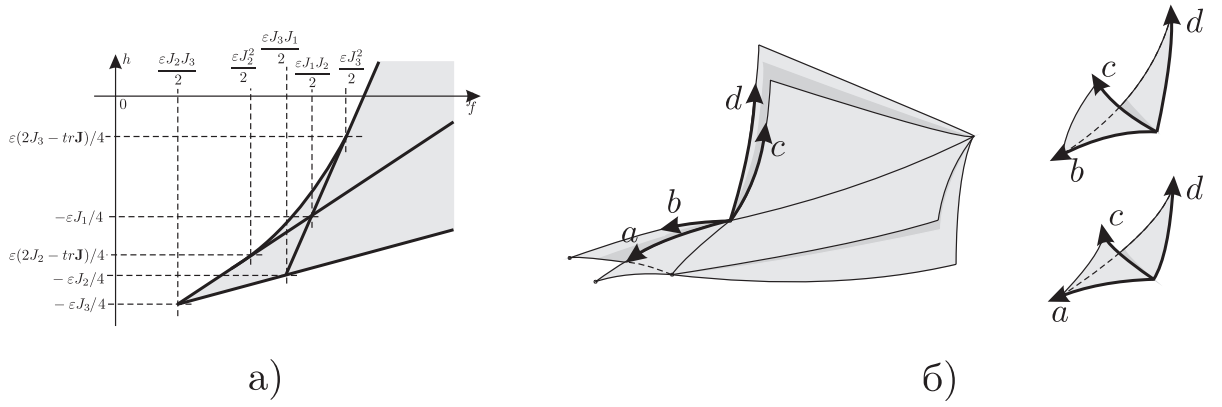


Рис. 4.4: Резиновый шар в поле сил задачи Бруна на плоскости. а) Бифуркационная диаграмма, б) бифуркационный комплекс (состоит из склейки трех компонент).

Тогда при $h < -\varepsilon J_j/4$ шар осуществляет колебания. Минимум потенциальной энергии этого колебания достигается, когда вектор \mathbf{e}_j направлен вертикально. Если же $h > -\varepsilon J_j/4$, то шар неравномерно катится по прямой.

Вдоль критических окружностей, отвечающих внутренним точкам дуги τ , шар так же осуществляет колебания, при которых направление вектора угловой скорости уже не постоянно. В прообразе точки $(f(\lambda), h(\lambda))$ вектор \mathbf{n} описывает траекторию

$$((\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0.$$

Вектор угловой скорости при этом будет

$$\boldsymbol{\omega} = \nu(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{n}, \text{ где } \nu^2 = \frac{\varepsilon \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})}{2 \lambda}.$$

Некоторые траектории точки контакта вдоль таких особых решений на поверхности шара и на плоскости изображены на (рис. 4.5).

Как видно, бифуркационная диаграмма отображения момента для задачи о качении резинового шара по плоскости в поле сил задачи Бруна совпадает с диаграммой для случая Клебша из динамики твердого тела при нулевой константе площадей. Исследование случая Клебша было проведено Харламовым

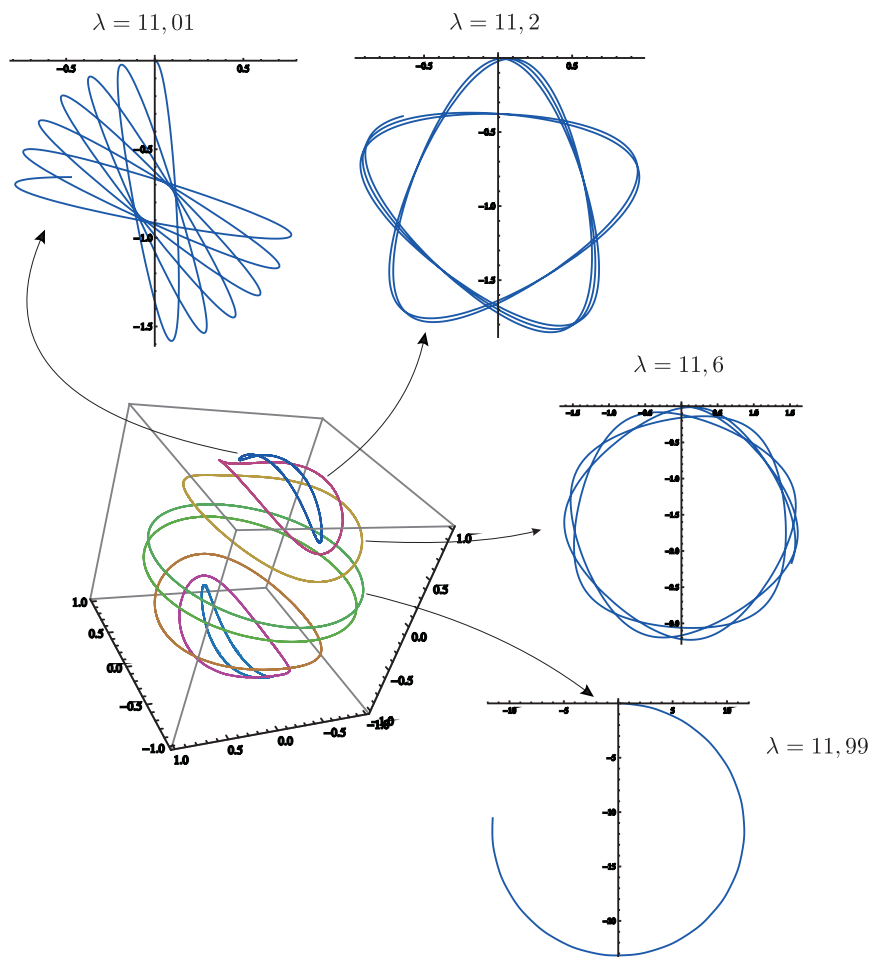


Рис. 4.5: Резиновый шар в поле сил задачи Бруна на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $R = 1$, $\varepsilon = 1$. Траектория точки контакта на поверхности шара и на плоскости при $\lambda = 11,01; 11,2; 11,6; 11,99$ для решений в прообразе дуги τ

Исследуем устойчивость критических окружностей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2.2 В прообразе

- 1) части луча σ_i на границе заштрихованной области (см. рис. 4.4) лежит по две устойчивые критические окружности.
- 2) части луча σ_i внутри заштрихованной области лежит по две неустойчивые критические окружности.
- 3) дуги τ лежит по четыре устойчивые критические окружности.

Стационарные решения, в которых $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_3$ — устойчивы, а в которых $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_1$

или $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_2$ — неустойчивы.

Последнее утверждение можно иллюстрировать с помощью бифуркационного комплекса. Этот комплекс не вкладывается в \mathbb{R}^3 , однако его можно представить в виде склейки (см. рис. 4.4 б) ребро a приклеивается к ребру a , ребро b — к ребру b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Исследуем устойчивость критических окружностей, отвечающих лучу σ_i . Для этого рассчитаем индекс критической траектории, проходящей через точку

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i, \mathbf{n} = \mathbf{e}_k.$$

В таких точках имеет место

$$dF = 2J_i dH + \frac{\varepsilon}{2} J_i (\text{tr} \mathbf{J} - J_i) d(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Введем матрицу

$$G = d^2 F - 2J_i d^2 H - \frac{\varepsilon}{2} J_i (\text{tr} \mathbf{J} - J_i) d^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Двумерное пространство в $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, ортогональное градиентам функций $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , H и трансверсальное к полю (4.1.5) при $\mathbf{K} = 0$, натянуто на вектора

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\omega_i \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через \hat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму.

Получаем

$$\det \hat{G} = 4J_j (J_j - J_i) (J_k - J_i) \left(J_i \omega_i^2 - \frac{\varepsilon}{2} (J_i - J_j) \right).$$

Так, $\det \hat{G} > 0$ для особых решений из пункта 1), и $\det \hat{G} < 0$ для особых решений из пункта 2) утверждения 4.2.2.

Вдоль особых решений, отвечающих дуге τ верно

$$dF = 2\lambda dH + \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{J} - \lambda) - \nu^2 \right) d(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Опять введем матрицу

$$G = d^2F - 2\lambda d^2H - \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{J} - \lambda) - \nu^2 \right) d(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Двумерное пространство ортогональное градиентам функций $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}), (\mathbf{n}, \mathbf{n}), H$ и трансверсальное к полю (4.1.5) при $\mathbf{K} = 0$ натянуто на вектора

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})\mathbf{n} + \alpha\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\text{где } \mathbf{e} = \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}|}, \alpha = \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{\varepsilon}{2}}{\lambda(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}$$

Обозначая через \hat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму, получаем $\det \hat{G} > 0$. Тем самым, критические окружности в прообразе дуги τ невырожденные и устойчивы.

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Функция H является гладкой и ограниченной снизу на \mathcal{M}^4 . Положения равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0, \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3$ являются ее двумя невырожденными (т.е. морсовскими) изолированными минимумами, а потому устойчивы.

Остальные положения равновесия неустойчивы. Действительно, сколь угодно близко к положениям $\boldsymbol{\omega} = 0, \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_2$ существуют особые решения, вдоль которых шар катится при $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{e}_2$ или \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}_3 соответственно.

Глава 5

О полноте гамильтоновых векторных полей

5.1 Редукция систем

Рассмотрим многообразие \mathcal{M} и векторное поле \mathbf{v} на нем. Пусть определено действие произвольная группа Ли \mathbf{G} на \mathcal{M} , сохраняющее векторное поле \mathbf{v} . Множество орбит этого действия $\mathcal{K} = \mathcal{M}/\mathbf{G}$ не обязано быть хаусдорфовым пространством. Очевидно, тогда поле \mathbf{v} переводит орбиты этого действия в орбиты. Тем самым \mathbf{v} локально задает поток ϕ_t^v на пространстве орбит.

ЛЕММА 5.1.1 ϕ_t^v определено $\forall t \in \mathbb{R}$ на $\mathcal{K} \implies$ поле \mathbf{v} полно на \mathcal{M} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Рассмотрим точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ и интегральную траекторию векторного поля \mathbf{v} , начинающуюся в этой точке. Докажем, что эта траектория определена на отрезке $t \in [0, T]$ для $\forall T > 0$.

Сделаем следующее замечание. Пусть две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$ лежат на одной орбите $\mathbf{A} \in \mathcal{M}/\mathbf{G}$. И пусть интегральная траектория поля \mathbf{v} с началом в точке \mathbf{x} определена вдоль интервала $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, тогда интегральная траектория \mathbf{v} с началом в точке \mathbf{y} так же определена на интервале $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Это свойство следует из того, что действие \mathbf{G} на \mathcal{M} определено везде на \mathcal{M} .

Точка \mathbf{x}_0 лежит на некоторой орбите $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{M}/\mathbf{G}$ действия группы G . Поток ϕ_t^v задает кривую

$$\phi_t^v(\mathbf{A}_0), \quad t \in [0, T].$$

Покроем отрезок $[0, T]$ интервалами

$$[0, T] \subset \bigcup_{t \in [0, T]} (a_t, b_t)$$

такими, что, во-первых, $a_t < t < b_t$, а во-вторых, интегральные траектории поля \mathbf{v} , начинающиеся в точках с орбиты $\phi_t^v(\mathbf{A}_0)$ продолжаются на интервале $(a_t - t, b_t - t)$. Выберем конечно подпокрытие

$$[0, T] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_{t_i}, b_{t_i}).$$

Тогда получим, что траектория поля \mathbf{v} продолжается вдоль каждого из интервалов (a_{t_i}, b_{t_i}) , а значит, и вдоль отрезка $[0, T]$.

Тем самым лемма доказана. \square

5.2 Левоинвариантные гамильтоновы системы на группах Ли и уравнения Эйлера на алгебрах Ли

Пусть \mathbf{G} — вещественная группа Ли, \mathfrak{g} — касательное пространство в единице, \mathfrak{g}^* — двойственное пространство к \mathfrak{g} . Возьмем гладкую функцию

$$H : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

и определим по ней левоинвариантным образом функцию

$$\bar{H} : T^*\mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$$

на кокасательном расслоении $T^*\mathbf{G}$ к группе \mathbf{G} .

С функциями H и \bar{H} естественным образом связаны две динамические системы (v, \mathfrak{g}^*) и $(w, T^*\mathbf{G})$. Первая из них, v , определена на \mathfrak{g}^* :

$$v(\xi) = \text{ad}_{dH(\xi)}^* \xi,$$

где $\xi \in \mathfrak{g}^*$. При этом уравнения

$$\dot{\xi} = v(\xi)$$

на \mathfrak{g}^* называется *уравнениями Эйлера*. Вторая, w , определена на $T^*\mathbf{G}$ — гамильтонова система относительно естественной симплектической структуры на кокасательном расслоении к многообразию \mathbf{G} с гамильтонианом \bar{H} . При помощи леммы 5.1.1 не сложно доказать следующий результат:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2.1 *Поле (v, \mathfrak{g}^*) полно \iff полно поле $(w, T^*\mathbf{G})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\mathcal{M} = T^*\mathbf{G}$. Группа \mathbf{G} действует на \mathcal{M} левыми сдвигами. Для применения леммы 5.1.1 необходимо показать, что поле $(\omega, T^*\mathbf{G})$ сохраняется при таком действии. А это уже показано в книге [40]:

ЛЕММА 5.2.1 [40, Глава 7, § 2.1, лемма 1] *Если функция Гамильтона $\bar{H}(t), t \in T^*\mathbf{G}$, левинвариантна, то векторное поле $s\text{grad } H$ тоже левинвариантно.*

Отождествим множество орбит действия \mathbf{G} на \mathcal{M} с \mathfrak{g}^* . Встает естественный вопрос: как связаны поле (v, \mathfrak{g}^*) и поле, задающее поток ϕ_t^ω на \mathfrak{g}^* ? Ответ получен в [40]:

ЛЕММА 5.2.2 [40, Глава 7, § 2.1, лемма 2] *Поле v задает поток ϕ_t^ω на \mathfrak{g}^* .*

Итак, пусть векторное поле (v, \mathfrak{g}^*) полное. Тогда поток ϕ_t^ω на \mathfrak{g}^* определен для любого $t \in \mathbb{R}$. Значит по лемме 5.1.1 поле $(\omega, T^*\mathbf{G})$ полно.

И наоборот. Если поле $(\omega, T^*\mathbf{G})$ полно, тогда поток ϕ_t^ω на \mathfrak{g}^* определен для любого $t \in \mathbb{R}$. А поскольку поле v задается именно этим потоком, значит v полно.

Утверждение доказано. \square

5.3 О полноте гамильтоновых векторных полей для полиномов, полученных методом Садэтова

Рассмотрим полиномы, полученные методом Садэтова для некоторой алгебры Ли над полем действительных чисел \mathbb{R} . Как описано в разделе 1.4.2, с процедурой поиска полиномов связана последовательность троек 1.4.1. Верен следующий результат:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3.1 *Гамильтоновые векторные поля для полиномов из \mathfrak{g}_i для последовательности 1.4.1 полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать по индукции по номеру шага в методе Садэтова. На первом шаге $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ — множество линейных полиномов. Поэтому соответствующие гамильтоновы поля полны. Пусть $\forall f_i \in \mathfrak{g}_i$ поле

$$\text{sgrad } f_i \tag{5.3.1}$$

полно. Докажем, что $\forall f_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$ поле

$$\text{sgrad } f_{i+1} \tag{5.3.2}$$

полно. Тройка $(z_{i+1}, \mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1})$ строится по тройке $(z_i, \mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_i)$ в зависимости от того, какой реализовался случай леммы 1.4.1 для алгебры \mathfrak{g}_i/z_i . Разберем все случаи в отдельности.

КОММУТАТИВНЫЙ ИДЕАЛ. Пусть в алгебре \mathfrak{g}_i/z_i существует коммутативный идеал. Тогда, во-первых,

$$\mathfrak{h}_{i+1} \subset \text{Ann}(\mathfrak{g}_{i+1}), \quad (5.3.3)$$

а во-вторых, \mathfrak{g}_{i+1} — множество линейных комбинаций элементов из \mathfrak{g}_i с коэффициентами из \mathfrak{h}_{i+1} :

$$f_{i+1} = h_1 f_i^1 + h_2 f_i^2 + \dots + h_k f_i^k, \quad (5.3.4)$$

где $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathfrak{h}_{i+1}$, $f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^k \in \mathfrak{g}_i$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь, поскольку (5.3.3), полиномы h_1, h_2, \dots, h_k постоянны вдоль траекторий поля (5.3.2). Следовательно, поскольку (5.3.4), каждая траектория поля (5.3.2) совпадает с траекторией некоторого поля (5.3.1). Значит, поле (5.3.2) полно.

ИДЕАЛ ГЕЙЗЕНБЕРГА. Пусть в алгебре \mathfrak{g}_i/z_i существует идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда любой элемент $f_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$ представим в виде

$$f_{i+1} = (h_1 f_i^1 + h_2 f_i^2 + \dots + h_k f_i^k) e + \sum h_{j,s} v_j v_s,$$

где $h_{j,s}, h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathfrak{h}_{i+1}$, $e, f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^k, v_1, v_2, \dots, v_{2m} \in \mathfrak{g}_i$, $k \in \mathbb{N}$ (см. обозначения раздела 1.4.2). Причем

$$e, h_{j,s}, h_1, h_2, \dots, h_k, f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^k, v_1, v_2, \dots, v_{2m}, f_{i+1} \subset \text{Ann}(f_{i+1}).$$

Следовательно многочлен

$$h_1 f_i^1 + h_2 f_i^2 + \dots + h_k f_i^k \in \text{Ann}(f_{i+1})$$

и постоянен вдоль траекторий поля (5.3.2). Получаем

$$\begin{aligned} \text{sgrad } f_{i+1} = & \\ & (h_1 f_i^1 + h_2 f_i^2 + \dots + h_k f_i^k) \text{sgrad } e + \\ & e \text{sgrad } (h_1 f_i^1 + h_2 f_i^2 + \dots + h_k f_i^k) + \\ & \sum h_{j,s} v_j \text{sgrad } v_s + \sum h_{j,s} v_s \text{sgrad } v_j. \end{aligned}$$

Коэффициенты постоянные. Следовательно, каждая траектория поля (5.3.2) совпадает с траекторией некоторого поля (5.3.1). Значит, поле (5.3.2) полно.

ПОЛУПРОСТОЙ СЛУЧАЙ. В случае, когда алгебра \mathfrak{g}_i/z_i представляется в виде прямой суммы поля и полупростой подалгебры $\mathfrak{g}_{i+1} \in \mathfrak{g}_i$. Поэтому из полноты полей (5.3.1) следует полнота полей (5.3.2).

Утверждение доказано. \square

Прокомментируем утверждение 5.3.1. Исследуется полнота гамильтоновых векторных полей для полиномов, полученных методом Садэтова. Поиск коммутирующих полиномов происходит пошагово. На каждом шаге добавляется несколько полиномов. При этом если на некотором шаге алгебра \mathfrak{g}_i/z_i не является полупростой, тогда добавляемые на этом шаге полиномы лежат в линейном пространстве \mathfrak{g}_i . И по предыдущему утверждению их поля косоугольные полны. Если же алгебра \mathfrak{g}_i/z_i полупроста, тогда добавляемые полиномы имеют иную природу, и для них предыдущее утверждение неприменимо.

Литература

- [1] Фоменко А.Т. Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, т. 54, выпуск 3, с. 546-575, 1990.
- [2] Болсинов А.В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. *Матем. сборник*, т. 186, №1, с. 3-28, 1995.
- [3] Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем с двумя степенями свободы. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, №23, с. 122-132, 1999.
- [4] Ошемков А.А. Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, №25, часть 2, с. 23-110, 1993.
- [5] Матвеев В.С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус. *Матем. сборник*, т. 187, №4, с. 29-58, 1996.
- [6] Харламов М.П. *Топологический анализ интегрируемых задачи динамики твердого тела*. Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета, 1988.

- [7] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. *Матем. сборник*, т. 187, №3, с. 143-160, 1996.
- [8] Орел О.Е. Функции вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина. *Матем. сборник*, т. 186, №2, с. 105-128, 1995.
- [9] Рябов П.Е. Харламов М.П. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи. *Регулярная и хаотическая динамика*, т. 2, №2, с. 25-40, 1997.
- [10] Orel O.E. Ryabov P.E. Biffurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem. *Regular and Chaotic Dynamic*, vol. 3, №2, p. 82-91, 1998.
- [11] Ryabov P.E. Biffurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid. *Regular and Chaotic Dynamic*, vol. 4, №4, p. 59-76, 1999.
- [12] Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова. *Теоретическая и математическая физика*, т. 134, №2, с. 207-226, 2003.
- [13] Морозов П.В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. *Матем. сборник*, т. 193, №10, с. 113-138, 2002.
- [14] Морозов П.В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа. *Матем. сборник*, т. 195, №3, с. 69-114, 2004.
- [15] Москвин А.Ю. Топология слоений Лиувилля нового интегрируемого случая на двумерной сфере. *Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна, ИПЦВГУ*, с. 135-139, 2006.

- [16] Москвин А.Ю. Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере. *Матем. сб.*, т.199, №3, с. 95–132, 2008.
- [17] Москвин А.Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения. *Нелинейная динамика*, т.5, №3, с. 345-356, 2009.
- [18] Москвин А.Ю. Резиновый шар на плоскости: критические решения. *Нелинейная динамика*, т.6, №2, с. 345-358, 2010.
- [19] Мищенко А.С. Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли. *Известия АН СССР, сер. матем.*, т. 42, №2, с. 396-415, 1978.
- [20] Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. *Доклады РАН*, т. 397, №6, с. 751-754, 2004.
- [21] Болсинов А.В. Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. РХД, Ижевск, 1999.
- [22] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. *Функциональный анализ и его приложения*, т. 22, №4, с. 38-51, 1988.
- [23] Fomenko A.T. The theory of invariants of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom. *Advances in Soviet Mathematics*, vol. 6, p. 1-36, 1991.
- [24] Russmann H. Uber das verhalten analytischer hamiltonscher differentialgleichungen in der nahe einer gleichwichtslosung. *Math. Ann.*, vol. 154, p. 284-300, 1964.

- [25] Лерман Л.М. Уманский Я.Л. Классификация четырехмерных интегрируемых систем и пуассонова действия r^2 в расширенных окрестностях простых особых точек. *i, ii, iii. i:* // Матем. Сборник, 1992, т. 183, №12, с. 141-176. *ii:* // Матем. Сборник, 1993, т. 184, №4, с. 103-138. *iii:* // Матем. Сборник, 1995, т. 186, №10, с. 89-102.
- [26] Мищенко А.С. Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем некоммутативными симметриями. *Труды семинара по вект. и тенз. анализу. М.: МГУ, т. 20, с. 5-54, 1981.*
- [27] Трофимов В.В. Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.* Москва-Ижевск: Факториал и изд-во Просперус Удмуртского ун-та, 1995.
- [28] Болсинов А.В. Полные коммутативные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М.: МГУ, т. 26, с. 87-109, 2005.*
- [29] Dullin H.R. Matveev V.S. A new integrable system on the sphere. *Math Research Letters*, №11, p. 715–722, 2004.
- [30] Цыганов А.В. Об одном семействе интегрируемых систем на сфере, обладающих кубическим интегралом движения. *ДАН, т. 402, №4, с. 457-459, 2005.*
- [31] Борисов А.В. Мамаев И.С. *Динамика твердого тела.* РХД, Ижевск, 2005.
- [32] Горячев Д.Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $a = b = 4c$. *Мат. Сборник Кружка любителей мат. наук, т. 21, №3, с. 431-438, 1900.*

- [33] Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости. *Мат. сб.*, т. XXIV, 1903.
- [34] Борисов А.В. Мамаев И.С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении Шара. *Мат. заметки*, т. 70, №5, с. 793-795.
- [35] Kilin A.A. The dynamics of chaplygin ball: the qualitative and computeral analysis. *Reg. & Chaot. Dyn.*, vol. 6 №3, p. 291-306, 2001.
- [36] K. Ehlers J. Koiller R. Montgomery and P. M. Rios. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and chaplygin hamiltonization. In *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry, Volume 232*, p. 75-120. Birkhauser Boston, 2005.
- [37] Веселова Л.Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономное связи. *сб. Геометрия, дифференциальные уравнения и механика, МГУ*, с. 64-68, 1986.
- [38] Борисов А.В. Мамаев И.С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем. *Сибирский математический журнал*, т. 48, №1, с/ 33-45, 2007.
- [39] Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. *Успехи механики*, т. 8, №3, с. 85-107, 1985.
- [40] Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия*. Изд. МГУ, М, 1988.