

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517.938.5+514.762

Морозов Павел Валерьевич

Тонкая лиувиллева классификация
некоторых интегрируемых случаев
механики твердого тела

01.01.04 — геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик А. Т. Фоменко

МОСКВА – 2006

Оглавление

Введение	6
1 Инварианты Фоменко-Цишанга	16
1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектическом многообразии	16
1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы.	16
1.1.2 Теорема Лиувилля.	17
1.1.3 Отношения эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем.	19
1.2 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	20
1.2.1 Изоэнергетические поверхности.	21
1.2.2 Бифуркационная диаграмма.	22
1.2.3 Структура критических множеств на изоэнергетической поверхности.	23
1.2.4 Окрестности сингулярных слоев лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности.	23
1.2.5 Матрицы склейки и допустимые системы координат.	25

1.2.6	Числовые метки.	27
1.2.7	Формула Топалова.	29
1.3	Интегрируемые гамильтоновы системы в механике твердого тела	30
1.3.1	Фазовое пространство.	30
1.3.2	Основные случаи интегрируемости.	32
1.3.3	Результаты лиувиллевой классификации интегрируемых случаев.	35
2	Лиувиллева классификация интегрируемого случая Стеклова	38
2.1	Грубая лиувиллева классификация систем случая Стеклова	39
2.2	Классификация круговых слоений Лиувилля	43
2.3	Классификация невырожденных положений равновесия	44
2.4	Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит .	56
2.5	Построение допустимых систем координат	61
2.6	Определение взаимного расположения базисных циклов	67
2.7	Алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга .	69
2.8	Пример вычисления меченой молекулы	69
3	Лиувиллева классификация интегрируемого случая Клебша	72
3.1	Бифуркационные диаграммы, семейства торов и их перестройки	73
3.2	Классификация невырожденных положений равновесия	75
3.3	Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит .	80
3.4	Допустимые системы координат	81

3.5	Определение взаимного расположения базисных циклов	83
3.6	Разрешение неопределенностей с ориентациями	89
3.7	Вычисление монодромии особенности типа фокус-фокус	91
3.8	Полный список изоэнергетических молекул случая Клеб- ша	93
3.9	Эквивалентности случаев Эйлера, Клебша и Стеклова	93
4	Лиувиллева классификация интегрируемого случая Соко-	
	лова	96
4.1	Гамильтониан и дополнительный интеграл случая Со- колова	96
4.2	Результаты П. Е. Рябова	96
4.3	Невырожденные положения равновесия в случае Соко- лова	98
4.4	Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит .	106
4.5	Построение допустимых систем координат	107
4.6	Определение взаимного расположения базисных циклов	109
4.7	Применение формулы Топалова	112
5	Лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской-	
	Яхьи при $g = 0$	115
5.1	Гамильтониан и дополнительный интеграл	116
5.2	Бифуркационные диаграммы, семейства торов и их пе- рестройки	118
5.3	Классификация невырожденных положений равновесия	120
5.4	Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит .	129
5.5	Построение допустимых систем координат	131
5.6	Определение взаимного расположения базисных циклов	134

5.7	Применение формулы Топалова	136
	Список таблиц	138
	Список рисунков	139
	Список литературы	140

Введение

Актуальность темы

Диссертация посвящена вычислению глобальных топологических инвариантов слоений Лиувилля для известных случаев интегрируемости механики твердого тела. В работе находят активное практическое применение ранее предложенные методы вычисления инвариантов (метод круговых молекул [1, 2] и формула Топалова [3]), а также демонстрируются новые подходы и технические приемы.

Механика твердого тела ведет свою историю с 1765 года, когда Л. Эйлером [4] была поставлена и решена задача о движении тела, закрепленного в центре масс в поле тяжести. Выдающиеся математики разных эпох, в их числе Лагранж, Кирхгоф, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов, С. А. Чаплыгин, Л. Н. Сретенский и другие, внесли в ее развитие свой вклад. По сегодняшний день механика твердого тела остается одной из динамически развивающихся классических областей физико-математической науки.

В наши дни в механике твердого тела можно выделить четыре основных направления исследований:

1. Поиск новых случаев интегрируемости, в том числе с привлечением компьютерных методов, получение полного списка интегрируемых систем (Х. М. Яхья [5, 6], Соколов [7, 8], Т. Вольф, О. В. Ефимовская [9],

А. В. Борисов, И. С. Мамаев [10] и др.)

2. Изучение интегрируемых систем с привлечением алгебраических методов, исследование свойств представлений в форме Лакса и спектральных кривых (М. Оден [11], Ю. А. Браилов [12], А. В. Борисов, И. С. Мамаев [10], В. В. Соколов, А. В. Цыганков [13] и др.)
3. Исследование топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификация особенностей, построение бифуркационных диаграмм и определение типов бифуркаций, вычисление локальных и глобальных инвариантов слоений Лиувилля, траекторных инвариантов (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [14], А. В. Болсинов [15], А. А. Ошемков [16, 17], В. С. Матвеев [18], М. П. Харламов [19], П. Топалов [3], О. Е. Орел [20], П. Е. Рябов [21, 22, 23, 24] и др.)
4. Изучение и компьютерное моделирование систем близких к интегрируемым, КАМ–теория (В. В. Козлов [25, 26], А. В. Борисов, К. В. Емельянов [27], А. И. Кирьянов [28] и др.)

Данная диссертационная работа принадлежит к третьему направлению: она посвящена развитию техники вычисления глобальных инвариантов лиувиллевых слоений — инвариантов Фоменко-Цишанга [1, 14] — и ее практическому применению для нахождения полного списка инвариантов ряда известных случаев интегрируемости. Инвариант Фоменко-Цишанга также называют меченой молекулой или тонким лиувиллевым инвариантом.

Вычисление инвариантов слоений в простейших случаях Эйлера и Лагранжа проводится прямыми методами [1], однако для более сложных систем потребовалось создание специальной техники. В работе [2] А. Т. Фоменко, А. В. Болсинов, П. Рихтер предложили метод круговых молекул и успешно применили его для вычисления инвариантов волчка Ковалевской. Ранее

П. Топалов [3] нашел формулу, устанавливающую связь между топологией несущего трехмерного многообразия и инвариантом Фоменко-Цишанга, что позволило ему полностью вычислить меченые молекулы для случая Жуковского.

В настоящей диссертации показано, как комбинация этих двух подходов, с привлечением некоторых дополнительных соображений и технических приемов, позволяет вычислить полный список инвариантов Фоменко-Цишанга в случаях интегрируемости Клебша [29], Стеклова [30], Соколова [7], а также Ковалевской-Яхьи [5, 6] при нулевом интеграле площадей.

Цель работы

Вычисление полного списка инвариантов Фоменко-Цишанга и круговых молекул особенностей, классификация невырожденных положений равновесия для интегрируемых систем Клебша, Стеклова, Соколова и Ковалевской-Яхьи (при нулевом интеграле площадей). Практическое применение и обогащение техники вычисления глобальных лиувиллевых инвариантов.

Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. При проверке невырожденности положений равновесия используются методы линейной алгебры и классической дифференциальной геометрии с привлечением компьютерных пакетов символьных вычислений.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Вычислены все инварианты Фоменко-Цишанга случаев интегрируемости Клебша, Стеклова, Соколова, а также Ковалевской-Яхьи при нулевом интеграле площадей.
2. Вычислены все круговые молекулы вышеперечисленных интегрируемых систем.
3. Получено доказательство невырожденности и дана классификация точек положения равновесия систем.
4. Получено топологическое доказательство изоморфности слоений Лиувилля систем Эйлера, Клебша и Стеклова для ряда значений параметров.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем, при изучении возмущений исследованных систем, в том числе неинтегрируемых. Полное описание круговых молекул может быть полезно при составлении списка наиболее типичных особенностей слоений в интегрируемых задачах механики и физики. Подробно описанная и продемонстрированная на конкретных примерах техника вычислений глобальных топологических инвариантов может быть применена при классификации слоений других случаев интегрируемости.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях: “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Киев, 2003), Международный семинар имени Лобачевского “Современная геометрия и теория физических

полей” (Казань, 2002). Результаты также докладывались на конференции “Александровские чтения” (Москва, 2006), на заседаниях Воронежской зимней математической школы им С. В. Крейна (Воронеж, 2002), на геометрическом семинаре проф. Книппера (Бохумский университет, Германия, 2003), на семинаре “Динамические системы” под руководством проф. А. М. Степина (мех-мат МГУ, 2001), на семинаре “Некоммутативная геометрия и топология” под руководством проф. А. С. Мищенко (мех-мат МГУ, 2006), а также многократно на семинаре “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко и проф. А. С. Мищенко (мех-мат МГУ).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах, список которых приведен в конце введения.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 146 страницах и дополняется 10 таблицами и 19 рисунками. Список литературы содержит 46 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной механике твердого тела.

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем [1, 14]. Также описаны фазовое пространство и дифференциальные

уравнения на алгебре Ли $e(3)^*$, которые возникают в задаче о движении твердого тела; перечислены основные известные на сегодняшний день случаи интегрируемости и достижения в области их топологической классификации.

Определение. *Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение фазового многообразия M^{2n} системы на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .*

Определение. *Две интегрируемые гамильтоновы системы (M, ν) и (M', ν') называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi : M \rightarrow M'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.*

Будем рассматривать гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть такие, у которых фазовое симплектическое многообразие M имеет размерность 4, а интегрируемость гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом H дополнительного интеграла F . Всякий случай интегрируемости в механике твердого тела представляет из себя однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, при этом в качестве параметра выступает значение интеграла площадей.

Изоэнергетической поверхностью называется поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{H(x) = h\}$. Полным инвариантом слоения Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности является инвариант Фоменко-Цишанга, также называемый меченой молекулой или тонким лиувиллевым инвариантом. Он представляет из себя граф, ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критиче-

ским слоям, в которых происходят бифуркации.

Определение. *Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой окрестности особого слоя называется 3-атомом.*

Оказывается, в подавляющем большинстве систем разнообразие бифуркаций ограничивается четырьмя наиболее распространенными 3-атомами, которые обозначают A , A^* , B и C_2 .

Обозначения 3-атомов помещают в вершины графа. Способ склейки глобального изоэнергетического многообразия Q_h^3 из этих “универсальных кирпичей” задается числовыми метками трех типов: r , ε и n . Вместе с описанным графом они и составляют инвариант Фоменко-Цишанга.

Последующие главы посвящены вычислению тонких инвариантов слоев для различных случаев интегрируемости и изложены в порядке возрастания сложности задачи лиувиллевой классификации конкретной системы.

Во **второй главе** получена лиувиллева классификация интегрируемого случая Стеклова [30]. Отталкиваясь от общего утверждения Н. Т. Зунга [31], доказано важное с практической точки зрения

Предложение. *На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, метки r равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, метки r конечны. В обоих случаях метки ε равны $+1$.*

Вырожденные одномерные орбиты вместе с точками положения равновесия представляют из себя два главных класса особенностей интегрируемых систем на M^4 . С применением приведенного утверждения метод круговых молекул позволяет провести глобальный анализ системы Стеклова до конца. В этом случае интегрируемости основную техническую сложность составляет проверка невырожденности положений равновесия системы, что связано

с большим количеством параметров и сложными явными формулами интегралов. Крайне полезным здесь оказалось привлечение компьютера для проведения промежуточных выкладок.

Третья глава посвящена лиувиллевой классификации системы Клебша [29]. В этом случае наблюдается обратная ситуация: аналитическая часть задачи проста, однако топологический анализ требует крайней скрупулезности. Метод круговых молекул не дает окончательного ответа и только неоднократное применение в определенной последовательности формулы Топалова позволяет разрешить ключевые неопределенности. После этого остается вычислить ряд ε -меток, что достигается рассмотрением случая Клебша как возмущения случая Эйлера в классе интегрируемых систем.

Следствием второй и третьей глав является топологическое доказательство двух естественных изоморфизмов.

Теорема

- 1. При достаточно больших значениях энергии системы Стеклова и Клебша лиувиллево эквивалентны случаю Эйлера.*
- 2. При достаточно больших абсолютных значениях интеграла площадей системы Стеклова и Клебша лиувиллево эквивалентны случаю Эйлера как системы на четырехмерном симплектическом многообразии.*

В **четвертой главе** получена классификация слоений для случая Соколова [7], который был открыт в 2001 году с применением компьютерных методов. При этом вновь применяется комбинация метода круговых молекул и формулы Топалова. Основную техническую сложность составляет проверка невырожденности точек положения равновесия системы, что связано с четвертой степенью и сложной явной формулой для интеграла F .

Наконец, в **пятой главе** дана лиувиллева классификация интегрируемой системы Ковалевской-Яхьи [5, 6]. Данный случай отличается тем, что представляет из себя не одно-, а двухпараметрическое семейство интегрируемых систем. Классический случай Ковалевской является однопараметрическим подсемейством, соответствующим нулевому значению гиростатического момента системы, и полностью исследован в [2]. Мы же в пятой главе исследовали другое естественное однопараметрическое подсемейство, соответствующее нулевому значению интеграла площадей. Результаты этих двух исследований должны сильно облегчить задачу лиувиллевой классификации “смешанных” случаев.

С точки зрения лиувиллевой классификации наибольший интерес в пятой главе представляет метод построения допустимых систем координат бифуркаций в окрестности вырожденных одномерных орбит с применением формулы Топалова, а также предложенный способ вычисления топологического типа трехмерных круговых многообразий.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — академику А. Т. Фоменко, а также профессору А. В. Болсинову и доценту А. А. Ошемкову за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.

Публикации автора по теме диссертации

1. Морозов П.В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. — Матем. сборник, 2002, т. 193, N 10, с. 113-138.
2. Морозов П. В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа — Матем. сборник, 2004, т. 195, N 3, с. 69-114.
3. Морозов П. В. Тонкая лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи. — Вестник МГУ, сер. матем. и мех., (в печати)
4. Морозов П. В. Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи. — Матем. сборник, (в печати)
5. Морозов П. В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. — Воронеж, 2002, Воронежская зимняя математическая школа – 2002, с. 55-57
6. Морозов П. В., Фоменко А. Т. Новые результаты топологической классификации интегрируемых систем в механике твердого тела. — Казань, 2003, Труды геометрического семинара, вып. 24, с. 107-120.

В работе [6] А. Т. Фоменко принадлежат теоремы 2 и 3 (об инварианте слоения Ливилля на трехмерной изоэнергетической поверхности), П. В. Морозову принадлежат теоремы 4, 5 и 6 (результаты и следствия лиувиллевой классификации случаев Клебша и Соколова).

Глава 1

Инварианты Фоменко-Цишанга

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектическом многообразии

1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы. Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) с заданной на нем гладкой функцией H . Динамическую систему $v = \text{sgrad}H$ называют гамильтоновой динамической системой с n степенями свободы, а функцию H — ее гамильтонианом. (Векторное поле $\text{sgrad}H$ определяется тождеством $\omega(l, \text{sgrad}H) = l(H)$, где l — произвольный вектор касательного пространства, а $l(H)$ — производная функции H вдоль l .) В локальных координатах (x^1, \dots, x^{2n}) такую систему можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, i = 1, \dots, 2n.$$

Здесь $\{, \}$ — скобка Пуассона на многообразии M^{2n} , определяемая симплектической структурой ω посредством тождества:

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad}f, \text{sgrad}g).$$

Определение 1 Гамильтонова система v называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n , таких что:

1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы v (что равносильно условию $\{f_i, H\} = 0$, выполненному при любом i на всем M),

2) они функционально независимы, то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ,

4) векторные поля $\text{sgrad} f_i$ полны.

Часто для краткости вполне интегрируемые по Лиувиллю системы называют просто *интегрируемыми*.

Определение 2 Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Отметим, что в случае интегрируемых систем потоки $\text{sgrad} f_1, \dots, \text{sgrad} f_n$ коммутируют, поскольку

$$\{\text{sgrad} f_i, \text{sgrad} f_j\} = \text{sgrad} \{f_i, f_j\} = 0,$$

и являются полными. Это позволяет определить на многообразии M^{2n} действие абелевой группы \mathbb{R}^n , порожденное сдвигами вдоль векторных полей $\text{sgrad} f_1, \dots, \text{sgrad} f_n$. Это действие называется *действием Пуассона*.

1.1.2 Теорема Лиувилля. Топология вполне интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности совместной регулярной поверхности уровня ее первых интегралов полностью описывается теоремой Лиувилля. Обозначим поверхность уровня за T_ξ :

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ .

Теорема 1 (Теорема Лиувилля) Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad}H$ и T_ξ — регулярная совместная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда:

1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad}H$ и $\text{sgrad}f_1, \dots, \text{sgrad}f_n$.

2) Если многообразие T_ξ компактно, то каждая компонента связности T_ξ диффеоморфна n -мерному тору T^n . Такие торы называются торами Лиувилля.

3) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменные действие-угол, со свойствами:

а) s_1, \dots, s_n — координаты на диске $D^n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе $T^n, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.

в) Переменные действие s_i являются функциями интегралов f_1, \dots, f_n .

г) В переменных действие-угол гамильтонов поток выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , и гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство теоремы можно найти в [1, т.1, гл.1].

1.1.3 Отношения эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем.

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматриваются несколько основных типов их изоморфизмов.

Определение 3 *Две динамические системы (M, v) и (M', v') называются топологически сопряженными (гладко сопряженными), если существует гомеоморфизм (дiffeоморфизм) $\Phi : M \rightarrow M'$, переводящий поток σ^t , отвечающий системе (M, v) , в поток σ'^t , отвечающий системе (M', v') , т. е. $\sigma'^t = \Phi \circ \sigma^t \circ \Phi^{-1}$.*

Другими словами, сопряженные системы получаются друг из друга регулярной заменой координат, поэтому сопряженность — самое сильное отношение эквивалентности.

Определение 4 *Две динамические системы (M, v) и (M', v') называются топологически (гладко) траекторно эквивалентными, если существует гомеоморфизм (дiffeоморфизм) $\Phi : M \rightarrow M'$, переводящий переводящий ориентированные траектории первой системы в ориентированные траектории второй системы.*

При этом не требуется сохранения параметра (времени) вдоль траекторий. Иными словами, траектории рассматриваются здесь как кривые без

параметризации, но с направлением, задаваемым потоком. Всякие две сопряженные системы, очевидно, траекторно эквивалентны, но не наоборот.

Данная работа посвящена классификации некоторых известных интегрируемых систем из механики твердого тела с точностью до отношения *лиувиллевой эквивалентности*.

Определение 5 *Две интегрируемых гамильтоновых системы (M, v) и (M', v') называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi : M \rightarrow M'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.*

Это отношение эквивалентности можно несколько ослабить. В результате возникает понятие *грубой лиувиллевой эквивалентности*.

Определение 6 *Две интегрируемых гамильтоновых системы (M, v) и (M', v') называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.*

Несложно видеть, что отношение лиувиллевой эквивалентности есть ослабление отношения траекторной эквивалентности: здесь требуется сохранение лишь поверхностей уровня интегралов системы, в то время как отдельные траектории системы могут нарушаться.

1.2 Инвариаты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Будем далее рассматривать интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть случай $n = 2$. Тогда интегрируемость системы на

M^4 гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом H интеграла F . В этом пункте мы опишем основные этапы построения известного инварианта Фоменко-Цишанга (или меченой молекулы) [1, т.1, гл.4], который описывает глобальную структуру лиувиллева слоения на неособых трехмерных изоэнергетических подмногообразиях фазового пространства M^4 интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

1.2.1 Изоэнергетические поверхности. Изоэнергетическими поверхностями называются трехмерные поверхности вида $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$. Сразу ограничимся рассмотрением лишь тех h , при которых, во-первых, Q_h^3 компактна и, во-вторых, $dH \neq 0$ всюду на Q_h^3 . Тем самым мы гарантируем, что Q_h^3 является гладким компактным подмногообразием в M^4 , а векторное поле $v = \text{sgrad}H$ нигде не обращается в ноль.

Наряду с лиувиллевой эквивалентностью на всем симплектическом многообразии мы будем говорить о лиувиллевой эквивалентности на избранных изоэнергетических поверхностях. Для того чтобы строго ввести это понятие, достаточно в определениях 5 и 6 заменить M^4 на Q^3 .

Определение 7 Точку $x \in Q^3$ будем называть критической, если векторы $\text{sgrad}H$ и $\text{sgrad}F$ в ней линейно зависимы.

Заметим что, сингулярные совместные поверхности уровня интегралов T_ξ в Q^3 — это в точности те поверхности, на которые попали критические точки, и теорема Лиувилля к ним не применима.

Сделаем еще одно предположение о изоэнергетической поверхности, касающееся свойств критических точек. Легко показать, что критические точки на Q^3 не могут быть изолированными. Поэтому предполагать, что дополнительный интеграл F является функцией Морса, бессмысленно. Однако в

случае динамических систем существует естественный аналог этого понятия.

Определение 8 *Дополнительный интеграл F называется интегралом Ботта на данной изоэнергетической поверхности Q^3 , если все его критические точки организованы в невырожденные критические подмногообразия.*

Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причем каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал d^2F невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию (в каждой точке). Другими словами, ограничение функции F на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

В реальных интегрируемых задачах физики и механики типична ситуация, когда найденный дополнительный интеграл F является боттовским для всех h , кроме некоторого конечного набора значений. Случаев же, когда неботтовские значения h отсутствуют полностью, известно крайне мало.

1.2.2 Бифуркационная диаграмма. Рассмотрим отображение момента \mathfrak{F} , которое определяется следующим образом:

$$\mathfrak{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$$

$$\mathfrak{F} : x \rightarrow (H(x), F(x))$$

Образ критических точек при отображении момента называется *бифуркационной диаграммой*. Как правило она представляет из себя набор гладких кривых на плоскости, имеющих конечное число точек пересечения, касания и возврата. Возможны также и изолированные точки. Бифуркационную

диаграмму удобно использовать как некоторый портрет фазового пространства интегрируемой системы с целью визуализации структуры критического множества. Отметим, что при отображении момента изоэнергетические поверхности переходят в семейство параллельных вертикальных прямых.

1.2.3 Структура критических множеств на изоэнергетической поверхности.

Условие боттовости накладывает существенное ограничение на структуру множества критических точек в Q^3 . Действительно, каждая компонента его связности должна быть замкнутым подмногообразием размерности 1 или 2. Из условия $v = \text{sgrad}H \neq 0$, следует, что на этих подмногообразиях существует гладкое векторное поле, отличное от нуля в каждой точке. Следовательно, это или окружность, или двумерный тор, или бутылка Клейна. В известных примерах математической физики критические множества двух последних типов встречаются крайне редко и их появление связано, как правило, с неудачным выбором дополнительного интеграла. Топология таких особенностей подробно изучена в [1, т.1, гл.4]. Мы же далее будем предполагать, что все критические подмногообразия являются окружностями.

1.2.4 Окрестности сингулярных слоев лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности.

Изоэнергетическая поверхность Q^3 представляет из себя однопараметрическое семейство совместных поверхностей уровня T_ξ интегралов системы H и F , параметризованное значением второго интеграла F . Если стянуть каждую компоненту связности поверхностей T_ξ в точку, то мы получим некоторый одномерный граф — базу слоения Лиувилля (см. рис. 1). Над каждым ребром такого графа “висит” многообразие диффеоморфное $T^2 \times (0, 1)$. Вершинам графа соответствуют сингулярные слои. Типичной является ситуация, когда при переходе через критический уровень

число компонент связности T_ξ меняется.

Будем рассматривать замкнутую трехмерную окрестность особого слоя в Q^3 . Оказывается, что в боттовском случае с точностью до лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировать количество критических окружностей на сингулярном слое.

Определение 9 *Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется 3-атомом.*

С конструктивной точки зрения, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой лиувиллева слоения, содержащего ровно один сингулярный слой, при этом сингулярный слой предполагается связным. Край такого многообразия состоит из некоторого количества торов Лиувилля. Число критических окружностей на особом слое называется сложностью 3-атома. В [1, т.1, гл.3] изложен алгоритм, позволяющий явно перечислить все 3-атомы данной сложности. 3-атомы принято обозначать заглавными латинскими буквами с натуральными индексами и звездочками. Четыре наиболее простых и часто встречающихся 3-атома (A, A^*, B , и C_2) изображены на рис. 2.

Если теперь в вершинах графа на рис. 1 поставить подходящие 3-атомы, то мы получим так называемую *грубую молекулу*. Грубая молекула несет информацию о базе слоения Лиувилля, а также позволяет локально восстановить его структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев.

Справедлива

Теорема 2 (А. Т. Фоменко) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (v, Q^3) и (v', Q'^3) грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

Полное и последовательное доказательство фактов, изложенных в этом пункте, можно найти в [1, т.1, гл.3]. Здесь мы сформулируем основную теорему, на которую опираются эти доказательства.

Теорема 3 (А. Т. Фоменко) 1) *Трехмерная окрестность сингулярного слоя ливиллевого слоения является расслоением Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют тип $(2,1)$.*

2) *Если особых слоев у этого расслоения нет, то окрестность представима в виде прямого произведения $P^2 \times S^1$, где P^2 — ориентируемая поверхность с краем из несвязных окружностей.*

3) *Структура расслоения Зейферта согласована со структурой ливиллевого слоения, в том смысле, что всякий слой расслоения Зейферта (окружность) целиком лежит на некотором слое слоения Ливилля.*

1.2.5 Матрицы склейки и допустимые системы координат. 3-атомы описывают локальную структуру слоения Ливилля в окрестности особого слоя. Для того, чтобы восстановить структуру слоения глобально на всем Q^3 , нужно знать гомеоморфизмы, по которым склеены граничные торы 3-атомов. Если на каждом из пары склеиваемых торов выбрать базисные циклы, то склеивающий гомеоморфизм задается целочисленной матрицей 2×2 с определителем ± 1 . Но базисы можно выбирать многими разными способами.

Оказывается, однако, что всякий 3-атом определяет на своих граничных торах некоторый цикл, называемый *однозначно определенным циклом* данной бифуркации. В случае минимаксного атома A это цикл, который стягивается в точку при приближении к критической окружности — он определен лишь с точностью до ориентации. В случае всех остальных (седловых) атомов (A^*, B, C_2, \dots) это цикл, изотопный слоям расслоения Зейферта. При

этом ориентация цикла однозначно задается гамильтоновым потоком системы.

Однозначно определенный цикл бифуркации всегда берется за первый элемент базиса на всех граничных торах рассматриваемого 3-атома. Выделить подобным образом какой-то один цикл из множества кандидатов на вторую позицию в базисе не удастся. Поэтому ограничиваются выбором одного из множества циклов, обладающих некоторыми общими свойствами. Это множество в паре с первым циклом составляют класс так называемых *допустимых систем координат* для данного 3-атома. Точное определение зависит от типа атома и будет дано ниже. При этом группа замен внутри класса допустимых систем координат имеет уже очень простую структуру.

Опишем условия, определяющие вторые базисные циклы допустимых систем координат. Здесь следует различать три случая:

1. Минимакстный атом A
2. Седловые атомы без звездочек, то есть представимые как тривиальное S^1 -расслоение Зейферта (атомы B, C_2, \dots)
3. Седловые атомы со звездочками, расслоение Зейферта которых имеет один или несколько особых слоев типа $(2,1)$ (атом A^* и др.)

В случае минимаксного атома A за второй элемент берут любой другой цикл, дополняющий первый до базиса. При этом ориентация второго базисного цикла фиксирована и задается гамильтоновым потоком.

Для седловых атомов без звездочек дополнительно требуют, чтобы в совокупности вторые циклы базисов образовывали на 3-атоме глобальное сечение, над которым этот атом представим как тривиальное S^1 -расслоение.

В случае седловых атомов со звездочками такого глобального сечения не существует. Однако его всегда можно построить, удалив из 3-атома ма-

лые окрестности-полнотория особых слоев. При этом необходимо некоторым естественным образом закрепить это сечение вблизи особых слоев. Для этого рассмотрим границу окрестности особого слоя, являющуюся тором. На нем однозначно определены циклы λ — слой расслоения — и \varkappa , стягивающийся в точку внутри полнотория. Вторым циклом мы ориентируем так, чтобы (λ, \varkappa) образовывала положительно ориентированную пару, не являющуюся однако базисом, поскольку рассматриваемые циклы имеют две точки пересечения. Далее из соотношения $\lambda = \varkappa - 2\mu$ определим цикл μ , дополняющий λ до базиса. Так построенные циклы μ определяют сечение тривиального расслоения на границах выброшенных особых слоев. Построенные сечения будем называть допустимыми, а высекаемые ими на границах 3-атома циклы будем брать за вторые элементы его допустимых базисов.

Неопределенность в выборе ориентаций вторых базисных циклов седловых атомов и первого базисного цикла минимаксного атома A устраняется требованием *согласованности ориентаций базисов*, которое заключается в следующем.

Зафиксируем ориентацию на изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Границы всех 3-атомов этой поверхности делятся на положительные и отрицательные по направлению роста дополнительного интеграла f . Потребуем, чтобы тройка $(\lambda_1, \lambda_2, \text{grad} f)$, где λ_1, λ_2 соответственно первый и второй элементы базиса на торе, была положительно ориентирована в Q_h^3 , если тор относится к положительной границе атома, и отрицательно ориентирована в противном случае.

1.2.6 Числовые метки. Инвариантами действия группы замен допустимых систем координат на множестве матриц склеек молекулы являются числовые метки r, ε и n . Они вычисляются по матрицам склеек посредством

следующих явных формул.

Пусть на ребре i молекулы стоит матрица склейки

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

тогда по определению:

$$r_i = \begin{cases} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\}, & \text{если } b_i \neq 0 \\ \infty, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}, \varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } b_i, & \text{если } b_i \neq 0 \\ \text{sign } a_i, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}.$$

Разрежем молекулу по всем конечным ребрам, то есть таким, что $r_i \neq \infty$. Куски, содержащие лишь седловые атомы, будем называть *семьями*. Метка n определяется для всякой семьи, по формуле:

$$n = \sum_{\text{вых.ребра}} \left[\frac{a_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{вход.ребра}} \left[-\frac{d_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{внут.ребра}} \left[-\frac{c_i}{a_i} \right].$$

В [1, т.1, гл.4] доказывается, что метки не зависят от выбора допустимых координат. При выбранных допустимых базисах матрицы склеек по меткам восстанавливаются однозначно.

Числовые метки имеют естественный топологический смысл. Так знаменатель метки r — суть беззнаковый индекс пересечения однозначно определенных циклов бифуркаций, которые соединены соответствующим ребром. Метка $\varepsilon \in \{1, -1\}$ говорит о согласованности или несогласованности ориентаций критических окружностей двух бифуркаций, когда такое сравнение корректно определено. А метка $n \in \mathbb{Z}$ равна числу Эйлера расслоения Зейферта, образованного семьей, которой она соответствует.

Наконец дадим определение инварианта Фоменко-Цишанга и сформулируем основную теорему этой главы.

Определение 10 Грубая молекула W , снабженная метками r_i, ε_i и n_k , называется инвариантом Фоменко-Цишанга (меченой молекулой, тонким лиувиллевым инвариантом).

Теорема 4 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [1, т.1, гл.4]) Две интегрируемые гамильтоновы системы (v, Q^3) и (v', Q'^3) лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченые молекулы совпадают.

1.2.7 Формула Топалова. Формула Топалова [3] связывает метки молекулы с топологическим типом несущей поверхности. Она является одним из наиболее эффективных средств для вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга и активно применяется в настоящей работе.

Конкретный вид формулы Топалова зависит от структуры молекулы и получается в соответствии с алгоритмом, приведенным в [3]. Здесь мы укажем ответ для простых, наиболее часто встречающихся случаев, которых будет достаточно для наших целей.

Пусть некоторая молекула W^* не содержит семей из более чем одного атома и после стирания внутренних ребер семей принимает вид дерева. Пусть также все атомы W^* имеют род 0. (Атомы A, A^*, B и C_2 относятся к этой категории.) Тогда энергия молекулы $N(W^*)$, введенная П. Топаловым, определяется формулой:

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{rk}H_1(Q^3) > 0 \\ |\text{Tor}H_1(Q^3)|, & \text{если } \text{rk}H_1(Q^3) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $N(W^*)$ целиком определяется топологией многообразия.

Определим для каждой семьи число $\tilde{n} = n + \sum r_i + \frac{p}{2}$, где n — ее n -метка, r_i — метки r на ее внешних ребрах, а p — число звездочек данной семьи. Укажем конкретный вид формулы Топалова для трех типов молекул. Ниже

за b_i обозначен второй элемент матрицы склейки ребра e_i . Предполагается, что все ребра e_i конечны, то есть $b_i \neq 0$. Под количеством звездочек семьи понимается суммарное количество особых слоев соответствующего расслоения Зейферта. Стрелка на ребре указывает, допустимый базис какого атома мы получим, умножив базис второго атома на матрицу склейки.

1. Молекула состоит из одной семьи F с p звездочками, из которой исходят ребра e_1, \dots, e_n вида $F \xrightarrow{e_i} A$:

$$N(W^*) = \pm 2^p b_1 \dots b_n \tilde{n}(F) \quad (1.1)$$

2. Молекула состоит из фрагмента $F_1 \xrightarrow{e_0} F_2$ и ребер $F_j \xrightarrow{e_i} A$, ведущих в атомы A ; суммарное число звездочек двух семей равно p :

$$N(W^*) = \pm 2^p b_0 b_1 \dots b_n (\tilde{n}(F_1) \tilde{n}(F_2) - b_0^{-2}) \quad (1.2)$$

3. Молекула состоит из фрагмента $F_0 \xrightarrow{e_0} F_2 \xrightarrow{e_1} F_1$ и ребер $F_j \xrightarrow{e_i} A$, ведущих в атомы A ; суммарное число звездочек семей равно p :

$$N(W^*) = \pm 2^p b_0 b_1 \dots b_n (\tilde{n}(F_0) \tilde{n}(F_1) \tilde{n}(F_2) - \tilde{n}(F_0) b_0^{-2} - \tilde{n}(F_1) b_1^{-2}) \quad (1.3)$$

1.3 Интегрируемые гамильтоновы системы в механике твердого тела

1.3.1 Фазовое пространство. Определим пару (M^4, ω) , возникающую в механике твердого тела.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка

Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(\mathbb{Z})^*$, а $[,]$ — коммутатор в алгебре Ли $e(\mathbb{Z})$.

В канонических координатах:

$$(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$$

на линейном пространстве $e(\mathbb{Z})^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$1 \leq i, j, k \leq 3, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i).$$

Пусть на $e(\mathbb{Z})^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \dot{r}_i = \{r_i, H\} \quad (1.5)$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли-Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (1.5). На совместных четырехмерных поверхностях уровня функций f_1 и f_2 :

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\},$$

ограничение системы (1.5) представляет из себя гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(\mathbb{Z})^*$, диффеоморфными TS^2 . Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли-Пуассона из

объемлющего пространства $e(\mathbb{3})^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $F(s, r)$, такая что $\{H, F\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(\mathbb{3})^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g здесь имеет физический смысл постоянной площадей.

1.3.2 Основные случаи интегрируемости. Фундаментальную роль в механике твердого тела играет случай интегрируемости Эйлера (1765 год) [4], который соответствует свободному движению твердого тела, закрепленного в центре масс. Укажем конкретный вид гамильтониана H и дополнительного интеграла F случая Эйлера:

$$H = \frac{s_1^2}{2A_1} + \frac{s_2^2}{2A_2} + \frac{s_3^2}{2A_3},$$

$$F = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Здесь вещественные параметры $0 < A_1 < A_2 < A_3$ имеют смысл главных моментов инерции твердого тела.

Хорошо известны также случаи интегрируемости Клебша и Стеклова, которые соответствуют задаче о движении твердого тела в жидкости:

Случай Клебша (1871 год) [29]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A_1} + \frac{s_2^2}{2A_2} + \frac{s_3^2}{2A_3} + \frac{\varepsilon}{2}(A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + A_3 r_3^2),$$

$$F = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{\varepsilon}{2}(A_2 A_3 r_1^2 + A_1 A_3 r_2^2 + A_1 A_2 r_3^2).$$

Случай Стеклова (1893 год) [30]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A_1} + \frac{s_2^2}{2A_2} + \frac{s_3^2}{2A_3} + \varepsilon(A_1 r_1 s_1 + A_2 r_2 s_2 + A_3 r_3 s_3) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}(A_1(A_2^2 + A_3^2)r_1^2 + A_2(A_3^2 + A_1^2)r_2^2 + A_3(A_1^2 + A_2^2)r_3^2),$$

$$F = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2\varepsilon(A_2A_3s_1r_1 + A_3A_1s_2r_2 + A_1A_2s_3r_3)$$

$$+\varepsilon^2(A_1^2(A_2 - A_3)^2r_1^2 + A_2^2(A_3 - A_1)^2r_2^2 + A_3^2(A_1 - A_2)^2r_3^2).$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — некоторый действительный параметр. Как видно, эти два случая интегрируемости можно интерпретировать, как однопараметрические возмущения случая Эйлера в классе интегрируемых систем.

Как известно, помимо случая Эйлера, существуют еще два случая интегрируемости задачи о движении тяжелого твердого тела, подвешенного в поле тяжести: случаи Лагранжа и Ковалевской. Укажем для них вид интегралов H и F .

Случай Лагранжа (1788 год):

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{s_3^2}{2B} + ar_3, K = s_3.$$

Случай Ковалевской (1889 год) [33, 34]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{s_3^2}{A} + a_1r_1 + a_2r_2,$$

$$F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2r_2 - a_1r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1s_2}{A} - a_1r_2 - a_2r_1 \right)^2.$$

Также известен случай частичной интегрируемости Горячева-Чаплыгина (1899 год) [35, 36]. У этой системы $\{H, F\} = 0$ лишь на одной поверхности $M_{g=0}^4$:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{2s_3^2}{A} + a_1r_1 + a_2r_2,$$

$$F = s_3(s_1^2 + s_2^2) - Ar_3(a_1s_1 + a_2s_2).$$

В приведенных выше примерах параметры $A, B > 0$ отвечают значениям главных моментов инерции твердого тела, $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ определяют точку закрепления твердого тела.

Оказывается, что все приведенные выше случаи интегрируемости задачи о движении твердого тела в поле тяжести допускают обобщения на случай наличия в системе постоянных гиростатических сил. Физически это означает, что с телом жестко связан волчок, вращающийся с постоянной угловой скоростью относительно оси своей динамической симметрии. Данные случаи дают примеры возмущения описанных выше систем в классе вполне интегрируемых по Лиувиллю.

Случай Жуковского (1885 год)[32]:

$$H = \frac{(s_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(s_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(s_3 + \lambda_3)^2}{2A_3},$$

$$F = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Случай Лагранжа с гиростатом:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{2B} + ar_3, K = s_3.$$

Случай Ковелевской-Яхьи (1986 год)[5, 6]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1r_1 + a_2r_2,$$

$$F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2r_2 - a_1r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1s_2}{A} - a_1r_2 - a_2r_1 \right)^2 -$$

$$-\frac{2\lambda}{A^2}(s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \frac{4\lambda r_3}{A}(a_1s_1 + a_2s_2).$$

Случай частичной интегрируемости Сретенского (1963 год) [37]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{2(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2,$$

$$F = (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) - Ar_3(a_1 s_1 + a_2 s_2).$$

Параметры $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ задают постоянный гиростатический момент.

В последние годы в связи с бурным развитием компьютерных методов и появлением высокопроизводительных пакетов символьных вычислений удалось значительно продвинуться в задаче нахождения квадратичных гамильтонианов уравнений (1.5), допускающих полиномиальный дополнительный интеграл. Отметим работы В. В. Соколова [7, 8], Вольфа и Ефимовской [9]. Обнаруженные случаи интегрируемости зачастую не имеют ясной физической интерпретации, что, впрочем, не мешает заниматься исследованием их топологии как интегрируемых гамильтоновых систем. Примером одной из таких систем может служить случай интегрируемости Соколова (2001 год) [7], подробно изученный в настоящей работе:

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + r_2 s_3 - \frac{1}{2}r_3^2,$$

$$F = s_3^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(r_2 s_3 - r_3 s_2) + r_2^2 + r_3^2) + 2s_3(s_2 - r_3)(r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3).$$

1.3.3 Результаты лиувиллевой классификации интегрируемых случаев. Перечислим основные известные на сегодняшний день результаты в направлении лиувиллевой классификации конкретных интегрируемых систем механики твердого тела.

Лиувиллева классификация случаев Эйлера и Лагранжа подробно изложена в [1, т.2, гл.5]. В работе [2] А. В. Болсиновым, П. Рихтером и А. Т. Фоменко был впервые предложен *метод круговых молекул*, ставший главным инструментом вычисления меченных молекул сложных интегрируемых систем, который также является основным методом исследований в данной работе. При помощи него авторами были вычислены все инварианты Фоменко-Цишанга волчка Ковалевской. Тем самым была завершена лиувиллева классификация всех случаев интегрируемости задачи о движении твердого тела, подвешенного в поле тяжести.

До этого, в 1996 году, П. Топалов [3] получил общую формулу, связывающую числовые метки молекулы с топологией ее изоэнергетического многообразия, что позволило ему вычислить все меченные молекулы случая Жуковского, а в случаях Ковалевской и Сретенского получить конечный список альтернатив для тонких лиувиллевых инвариантов. *Формула Топалова* оказалась мощным средством для нахождения глобальных лиувиллевых инвариантов слоений и активно применяется в настоящей работе.

Грубая лиувиллева классификация случаев Клебша, Стеклова и Жуковского была получена в диссертационной работе А. А. Ошемкова и опубликована в [16, 17].

Для системы Горячева-Чаплыгина О. Е. Орел [20] была дана траекторная классификация. Меченные молекулы случая Сретенского были вычислены В. В. Корнеевым при помощи метода круговых молекул [38]; ответ можно найти в [1, т.2, гл.5].

В серии работ П. Е. Рябова, О. Е. Орел, М. П. Харламова [21, 22, 23, 24] были построены бифуркационные диаграммы и дана грубая лиувиллева классификация многих недавно обнаруженных сложных случаев интегрируемости, в том числе системы Ковалевской-Яхьи и Соколова.

Отметим также более ранние работы М. П. Харламова [19, 43] и Т. И. Погосяна [44, 45, 46], в которых были впервые построены бифуркационные диаграммы многих упомянутых выше случаев интегрируемости.

Данная работа посвящена подробному исследованию структуры слоений Лиувилля в случаях Стеклова, Клебша, а также Соколова и Ковалевской-Яхьи (последнее при $g = 0$). Дана классификация всех невырожденных положений равновесия (см. 2.3), вычислены все круговые молекулы (см. 2.2) и инварианты Фоменко-Цишанга. Результаты опубликованы в серии статей [39, 40, 41, 42].

Глава 2

Лиувиллева классификация интегрируемого случая Стеклова

Вычисление тонких лиувиллевых инвариантов отдельных случаев интегрируемости механики твердого тела начнем с системы Стеклова [30]:

$$H = \frac{s_1^2}{2A_1} + \frac{s_2^2}{2A_2} + \frac{s_3^2}{2A_3} + \varepsilon(A_1 r_1 s_1 + A_2 r_2 s_2 + A_3 r_3 s_3) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}(A_1(A_2^2 + A_3^2)r_1^2 + A_2(A_3^2 + A_1^2)r_2^2 + A_3(A_1^2 + A_2^2)r_3^2),$$

$$F = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2\varepsilon(A_2 A_3 s_1 r_1 + A_3 A_1 s_2 r_2 + A_1 A_2 s_3 r_3)$$

$$+ \varepsilon^2(A_1^2(A_2 - A_3)^2 r_1^2 + A_2^2(A_3 - A_1)^2 r_2^2 + A_3^2(A_1 - A_2)^2 r_3^2).$$

Порядок изложения для случаев интегрируемости выбран исходя из принципа движения от простого к сложному. Техника и приемы вычисления меченных молекул будут обогащаться при переходе к каждому следующему интегрируемому случаю. С этой точки зрения естественно начать со случая Стеклова, для которого метод круговых молекул [2] дает окончательный ответ с привлечением лишь некоторых общих дополнительных соображений,

справедливых для любой другой интегрируемой системы.

2.1 Грубая лиувиллева классификация систем случая Стеклова

Бифуркационные диаграммы и грубые молекулы для интегрируемого случая Стеклова были вычислены А. А. Ошемковым в работе [17]. В этом пункте мы вкратце приводим его результаты и вводим понятия и обозначения, которые понадобятся нам для вычисления тонких лиувиллевых инвариантов.

Рассмотрим коммутирующую пару функций на $e(3)^*$:

$$H_0 = a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 + 2(a_1^2 s_1 r_1 + a_2^2 s_2 r_2 + a_3^2 s_3 r_3) + a_1^3 r_1^2 + a_2^3 r_2^2 + a_3^3 r_3^2,$$

$$F_0 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2(a_1 s_1 r_1 + a_2 s_2 r_2 + a_3 s_3 r_3) - 3(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2 + a_3^2 r_3^2),$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Как впервые заметил А. А. Ошемков, любой гамильтониан H случая Стеклова представим в виде,

$$H = \alpha H_0 + \beta F_0 + \gamma f_1 + \delta f_2,$$

где

$$a_1 = \frac{\varepsilon}{3}(2A_2 A_3 - A_3 A_1 - A_1 A_2), a_2 = \frac{\varepsilon}{3}(2A_3 A_1 - A_1 A_2 - A_2 A_3),$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon}{3}(2A_1 A_2 - A_2 A_3 - A_3 A_1), \alpha = \frac{1}{2\varepsilon A_1 A_2 A_3},$$

$$\beta = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right), \gamma = \varepsilon^2 \left(\frac{2(A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1)^3}{27 A_1 A_2 A_3} - A_1 A_2 A_3 \right),$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{9} \left(5(A_1 + A_2 + A_3) - 2 \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_3 A_1}{A_2} + \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \right).$$

Далее будем рассматривать интегрируемую систему с гамильтонианом H_0 и дополнительным интегралом F_0 . Тем самым мы фактически понижаем число параметров с четырех до двух. Перенумерацией переменных

добьемся, чтобы

$$a_1 < 0 \leq a_2 < a_3.$$

Рассмотрим отображение момента \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F} : M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(f, h)$$

$$\mathfrak{F} : x \rightarrow (F_0(x), H_0(x))$$

В случае Стеклова при любом значении g бифуркационная диаграмма состоит из кривой, заданной параметрически:

$$f = -8\mu g - 12\mu^2, h = -4\mu^2 g - 8\mu^3, -(g + a_3) \leq 2\mu \leq -(g + a_1), \quad (2.1)$$

и трех лучей лежащих на прямых $h = a_i f + 4a_i^3 + 4ga_i^2 (i = 1, 2, 3)$. Лучи задаются так: $\{h = a_i f + 4a_i^3 + 4ga_i^2, f \geq T - 12a_i^2 - 8ga_i\}$, где T — некоторое неотрицательное число.

Кривая (2.1), заданная параметрически с параметром μ , имеет вид, изображенный на рис. 3.

- a) $g < -3a_3$,
- b) $-3a_3 < g < -3a_2$,
- c) $-3a_2 < g < -3a_1$,
- d) $g > -3a_1$.

Для точки кривой, отмеченной цифрой i , значение параметра равно $-\frac{1}{2}(g + a_i)$. Это точка пересечения кривой и прямой $h = a_i f + 4a_i^3 + 4ga_i^2$. Для точки возврата кривой мы имеем $\mu = \frac{g}{3}$ при $-3a_3 < g < -3a_1$. В точке касания луча с кривой значение параметра на кривой равно a_i .

В результате для различных значений g получаем в общей сложности 10 качественно различных бифуркационных диаграмм. Они изображены на рис. 4. Соответствующие значения g таковы:

- a) $g < -3a_3$,
- b) $-3a_3 < g < a_1 - a_3$,
- c) $a_1 - a_3 < g < a_1 - a_2$,
- d) $a_1 - a_2 < g < -3a_2$,
- e) $-3a_2 < g < a_2 - a_3$,
- f) $a_2 - a_3 < g < a_3 - a_2$,
- g) $a_3 - a_2 < g < a_2 - a_1$,
- h) $a_2 - a_1 < g < a_3 - a_1$,
- i) $a_3 - a_1 < g < -3a_1$,
- j) $g > -3a_1$.

На рис. 4 гладкие дуги бифуркационной диаграммы обозначены малыми греческими буквами с индексами. Окрестности их прообразов в Q^3 представляют из себя боттовские перестройки торов Лиувилля, описываемые 3-атомами. Укажем их типы:

$$2A : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$$

$$4A : \alpha_7, \alpha_8$$

$$2B : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

$$C_2 : \gamma_1$$

$$2C_2 : \gamma_2, \gamma_3$$

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(f, h)$ являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Эти торы естественным образом разбиваются на семейства, которые мы будем обозначать римскими цифрами I-V (см. рис. 4). Число прообразов для каждой области регулярности также вычислено в [17]. Имеем:

семейство	число торов Лиувилля
I	2
II	2
III	2
IV	4
V	2

В каждое семейство мы отнесли торы, которые испытывают одинаковые бифуркации на границах области регулярности. Появление пар торов-близнецов не должно нас удивлять. Дело в том, что фазовое пространство в случае Стеклова, обладает очевидной симметрией

$$\Phi : (s, r) \rightarrow (-s, -r),$$

такой что $\Phi : (f_1, f_2, H_0, F_0) \rightarrow (f_1, f_2, H_0, F_0)$.

Особо отметим, что регулярные торы Лиувилля могут лежать и в прообразах кривых бифуркационной диаграммы, как это происходит, например, с дугой β_1 . Дело в том, что кривая β_1 является бифуркационной только для семейства III, а для семейства II торы эта дуга является частью области регулярности. Этот эффект отражает тот факт, что бифуркационная диаграмма (вместе с регулярными точками) есть *проекция* базы слоения Лиувилля на $\mathbb{R}^2(f, h)$. В результате регулярные и особые компоненты связности одного слоя, удаленные друг от друга на M^4 , отображаются в одну точку плоскости.

Исходный гамильтониан Стеклова H представим в виде $H = \alpha H_0 + \beta K_0 + \gamma f_1 + \delta f_2$, в силу чего при отображении момента изоэнергетические поверхности $Q_h^3 = \{H(x) = h\}$ будут отображаться в сечения бифуркационной диаграммы семейством параллельных прямых $\alpha h + \beta f = c$. При этом следует рассматривать только те прямые, которые пересекают бифуркационную

диаграмму по компактному множеству, не проходят через ее особые точки и пересекают дуги диаграммы трансверсально. Тем самым мы гарантируем выполнение условий регулярности, накладываемых на изоэнергетические поверхности.

Несложно заметить, что представленной в этом пункте информации достаточно для того чтобы определить грубые молекулы этих поверхностей, что составляет грубую Лиувиллеву классификацию случая Стеклова.

После этого для получения инвариантов Фоменко-Цишанга нам остается вычислить числовые метки этих молекул. Однако мы решим более общую задачу: научимся вычислять меченую молекулу для произвольной *допустимой кривой*. Под допустимой кривой понимается гладкая кривая, пересекающая дуги бифуркационной диаграммы трансверсально и не проходящая через её особые точки. Потребуем, как и ранее, чтобы кривая пересекала образ отображения момента по компактному множеству. В конце главы мы предъявим алгоритм вычисления меченой молекулы для произвольной допустимой кривой в случае Стеклова и в качестве примера вычислим одну из изоэнергетических молекул.

2.2 Классификация круговых слоений Лиувилля

Точки M , N , P , Q , R , L и z_i на рис. 4 являются особыми точками бифуркационной диаграммы. Они образованы точками пересечения, касания или возврата гладких кривых. Рассмотрим произвольную особую точку. Опишем вокруг нее малую окружность. Это частный случай допустимой кривой. В прообразе окружности имеется некоторое трехмерное многообразие, на котором возникает слоение Лиувилля. Инвариант Фоменко-Цишанга этого слоения называют круговой молекулой данной особенности. Оказывается, что, с одной стороны, круговые молекулы много “знают” о глобальном

слоении системы, а с другой — их несложно вычислить, так как они целиком определяются локальной структурой слоения вблизи особенности.

Теорема 5 *Круговые молекулы всех особых точек случая Стеклова приведены в таблице 1.*

Доказательство этой теоремы будет получено в двух следующих пунктах.

2.3 Классификация невырожденных положений равновесия

В прообразах точек M, N, P, Q, R и L бифуркационной диаграммы лежат точки, в которых ранг отображения момента падает до нуля. Это — образы слоев, содержащих одну или несколько неподвижных точек действия Пуассона. Будем далее называть их *точками положения равновесия* системы. Дадим определение невырожденности положения равновесия для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Пусть на (M^4, ω) задана интегрируемая система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F . Пусть точка $x \in M^4$ такая, что $dH(x) = dF(x) = 0$. Тогда на $T_x M$ корректно определены два симплектических оператора $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_F = \Omega^{-1} d^2 F$, порождающие в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H, F)$.

Определение 11 *Положение равновесия x называется невырожденным, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $sp(4, \mathbb{R})$.*

Известно, что в $sp(4, \mathbb{R})$ существует ровно четыре несопряженных подалгебры Картана, различаемых по типу собственных значений ее элементов. В зависимости от них, невырожденное положение равновесия относят к одному из следующих типов:

1. $ia, -ia, ib, -ib$ — центр-центр,

2. $a, -a, ib, -ib$ — седло-центр,
3. $a, -a, b, -b$ — седло-седло,
4. $a + ib, a - ib, -a + ib, -a - ib$ — фокус-фокус,

где $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Теперь укажем эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$.

Для начала заметим, что операторы A_H и A_F совпадают с линеаризациями векторных полей $\text{sgrad}H$ и $\text{sgrad}F$ соответственно, что позволяет легко вычислять матрицы, которыми они задаются в локальных координатах. Действительно,

$$\frac{\partial(\text{sgrad}H)^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k} \right) = \omega^{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^k} = (\Omega^{-1} d^2 H)_j^i$$

Коммутативная подалгебра в $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской если и только если она двумерна и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными ненулевыми собственными значениями. Итак, сначала нужно убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$ имеет попарно различные собственные значения.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности окрестности их слоев в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов. Структура слоения Лиувилля вблизи особых слоев, содержащих невырожденные положения равновесия, полностью описана. Для случаев малой сложности (по количеству неподвижных точек на слое) имеются классификационные таблицы, в которых, в частности, указаны круговые молекулы. Изложению этой теории посвящена глава [1, т.1, гл.9].

Вернемся к случаю Стеклова.

Теорема 6 *Условия невырожденности, типы и представления в виде почти прямого произведения для положений равновесия, лежащих в прообразах точек M, N, P, Q, R, L бифуркационной диаграммы указаны в таблице:*

	<i>условия невырожденности</i>	<i>тип</i>	<i>n/n произв.</i>
M	$g \in (-\infty, a_2 - a_3) \cup (a_3 - a_2, +\infty) \setminus \{-3a_1\}$	<i>центр-центр</i>	$2(A \times A)$
	$g \in (a_2 - a_3, a_3 - a_2)$	<i>седло-центр</i>	$2(A \times B)$
N	$g \in (-\infty, a_1 - a_2) \cup (a_2 - a_1, +\infty) \setminus \{-3a_3\}$	<i>центр-центр</i>	$2(A \times A)$
	$g \in (a_1 - a_2, a_2 - a_1)$	<i>седло-центр</i>	$2(A \times B)$
P	$g \in (-\infty, a_1 - a_3) \cup (a_3 - a_1, +\infty)$	<i>седло-центр</i>	$(A \times C_2)$
	$g \in (a_1 - a_3, a_3 - a_1) \setminus \{-3a_2\}$	<i>седло-седло</i>	$(B \times C_2)$
Q	$g \in (a_1 - a_3, a_1 - a_2)$	<i>седло-центр</i>	$2(A \times C_2)$
R	$g \in (a_3 - a_2, a_3 - a_1)$	<i>седло-центр</i>	$2(A \times C_2)$
L	$g \in (a_2 - a_3, a_2 - a_1)$	<i>центр-центр</i>	$4(A \times A)$

Круговые молекулы точек M, N, P, Q, R, L указаны в таблице 1. Других критических точек у гамильтониана H_0 на M_g^4 нет.

Доказательство:

Координаты $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ критических точек гамильтониана H_0 на M_g^4 были найдены А. А. Ошемковым [17]:

$$x_M = \pm(g, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$x_N = \pm(0, 0, g, 0, 0, 1),$$

$$x_P = \pm(0, g, 0, 0, 1, 0),$$

$$x_Q = (0, (a_1 - a_3)u_1, (a_1 - a_2)v_1, 0, u_1, v_1)$$

$$u_1^2 = \frac{g + a_2 - a_1}{a_2 - a_3}, \quad v_1^2 = \frac{g + a_3 - a_1}{a_3 - a_2}, \quad a_1 - a_3 \leq g \leq a_1 - a_2;$$

$$x_L = ((a_2 - a_3)v_2, 0, (a_2 - a_1)u_2, v_2, 0, u_2)$$

$$u_2^2 = \frac{g + a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad v_2^2 = \frac{g + a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad a_2 - a_3 \leq g \leq a_2 - a_1;$$

$$x_R = ((a_3 - a_2)u_3, (a_3 - a_1)v_3, 0, u_3, v_3, 0)$$

$$u_3^2 = \frac{g + a_1 - a_3}{a_1 - a_2}, \quad v_3^2 = \frac{g + a_2 - a_3}{a_2 - a_1}, \quad a_3 - a_2 \leq g \leq a_3 - a_1.$$

Отметим, что в силу невырожденности симплектической формы ω на M_g^4 , условия $dH_0|_{M_g^4} = 0$ и $\text{sgrad}H_0 = 0$ эквивалентны. Проверка показывает, что поле $\text{sgrad}F_0$ в этих точках также обнуляется. Следовательно, точки x_M, \dots, x_R и только они являются неподвижными точками действия Пуассона.

Проверим невырожденность этих положений равновесия при указанных значениях g . Для этого вычислим матрицы линеаризаций векторных полей $\frac{1}{2}\text{sgrad}H_0$ и $\frac{1}{2}\text{sgrad}F_0$ в $e(3)^*$. Имеем:

$$\dot{s}_i = \frac{1}{2}\{s_i, H_0\}, \quad \dot{r}_i = \frac{1}{2}\{r_i, H_0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1 = (a_2 - a_3)s_2s_3 + (a_2^2 - a_3^2)(r_2s_3 + s_2r_3) + (a_2^3 - a_3^3)r_2r_3 \\ \dot{s}_2 = (a_3 - a_1)s_3s_1 + (a_3^2 - a_1^2)(r_3s_1 + s_3r_1) + (a_3^3 - a_1^3)r_3r_1 \\ \dot{s}_3 = (a_1 - a_2)s_1s_2 + (a_1^2 - a_2^2)(r_1s_2 + s_1r_2) + (a_1^3 - a_2^3)r_1r_2 \\ \dot{r}_1 = a_2s_2r_3 - a_3s_3r_2 + (a_2^2 - a_3^2)r_2r_3 \\ \dot{r}_2 = a_3s_3r_1 - a_1s_1r_3 + (a_3^2 - a_1^2)r_3r_1 \\ \dot{r}_3 = a_1s_1r_2 - a_2s_2r_1 + (a_1^2 - a_2^2)r_1r_2 \end{array} \right.$$

Дифференцируя правые части уравнений получаем матрицу линеаризации $A_{H_0}^6$ векторного поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}H_0$ в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$:

$$A_{H_0}^6 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (a_2 - a_3)s_3 + (a_2^2 - a_3^2)r_3 & (a_2 - a_3)s_2 + (a_2^2 - a_3^2)r_2 \\ (a_3 - a_1)s_3 + (a_3^2 - a_1^2)r_3 & 0 & (a_3 - a_1)s_1 + (a_3^2 - a_1^2)r_1 \\ (a_1 - a_2)s_2 + (a_1^2 - a_2^2)r_2 & (a_1 - a_2)s_1 + (a_1^2 - a_2^2)r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (a_2^2 - a_3^2)s_3 + (a_2^3 - a_3^3)r_3 & (a_2^2 - a_3^2)s_2 + (a_2^3 - a_3^3)r_2 \\ (a_3^2 - a_1^2)s_3 + (a_3^3 - a_1^3)r_3 & 0 & (a_3^2 - a_1^2)s_1 + (a_3^3 - a_1^3)r_1 \\ (a_1^2 - a_2^2)s_2 + (a_1^3 - a_2^3)r_2 & (a_1^2 - a_2^2)s_1 + (a_1^3 - a_2^3)r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_2r_3 & -a_3r_2 \\ -a_1r_3 & 0 & a_3r_1 \\ a_1r_2 & -a_2r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & (a_2^2 - a_3^2)r_3 - a_3s_3 & (a_2^2 - a_3^2)r_2 + a_2s_2 \\ (a_3^2 - a_1^2)r_3 + a_3s_3 & 0 & (a_3^2 - a_1^2)r_1 - a_1s_1 \\ (a_1^2 - a_2^2)r_2 - a_2s_2 & (a_1^2 - a_2^2)r_1 + a_1s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогичные вычисления необходимо проделать для поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}F_0$.

$$\dot{s}_i = \frac{1}{2}\{s_i, F_0\}, \dot{r}_i = \frac{1}{2}\{r_i, F_0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1 = (a_3 - a_2)(r_2s_3 + s_2r_3) + 3(a_3^2 - a_2^2)r_2r_3 \\ \dot{s}_2 = (a_1 - a_3)(r_3s_1 + s_3r_1) + 3(a_1^2 - a_3^2)r_3r_1 \\ \dot{s}_3 = (a_2 - a_1)(r_1s_2 + s_1r_2) + 3(a_2^2 - a_1^2)r_1r_2 \\ \dot{r}_1 = s_2r_3 - s_3r_2 + (a_3 - a_2)r_2r_3 \\ \dot{r}_2 = s_3r_1 - s_1r_3 + (a_1 - a_3)r_3r_1 \\ \dot{r}_3 = s_1r_2 - s_2r_1 + (a_2 - a_1)r_1r_2 \end{array} \right.$$

$$A_{F_0}^6 = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & (a_3 - a_2)r_3 & (a_3 - a_2)r_2 \\ (a_1 - a_3)r_3 & 0 & (a_1 - a_3)r_1 \\ (a_2 - a_1)r_2 & (a_2 - a_1)r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 3(a_3^2 - a_2^2)r_3 + (a_3 - a_2)s_3 & 3(a_3^2 - a_2^2)r_2 + (a_3 - a_2)s_2 \\ 3(a_1^2 - a_3^2)r_3 + (a_1 - a_3)s_3 & 0 & 3(a_1^2 - a_3^2)r_1 + (a_1 - a_3)s_1 \\ 3(a_2^2 - a_1^2)r_2 + (a_2 - a_1)s_2 & 3(a_2^2 - a_1^2)r_1 + (a_2 - a_1)s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & (a_3 - a_2)r_3 - s_3 & (a_3 - a_2)r_2 + s_2 \\ (a_1 - a_3)r_3 + s_3 & 0 & (a_1 - a_3)r_1 - s_1 \\ (a_2 - a_1)r_2 - s_2 & (a_2 - a_1)r_1 + s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим точку M . В ее прообразе лежит два симметричных положения равновесия $x_M = \pm(g, 0, 0, 1, 0, 0)$. Для определенности, возьмем точку соответствующую знаку “+”. В качестве локальных координат в ее 4-окрестности на M_g^4 можно взять функции (s_2, s_3, r_2, r_3) . Тогда канонический базис в касательном пространстве задается матрицей:

$$TM_g^4 = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{r_1} & -\frac{r_3}{r_1} & \frac{r_2 s_1 - s_2 r_1}{r_1^2} & \frac{r_3 s_1 - s_3 r_1}{r_1^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_2}{r_1} & -\frac{r_3}{r_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ограничивая операторы $A_{H_0}^6$ и $A_{F_0}^6$ из $e(3)^*$ на $T_M M_g^4$, находим матрицы симплектических операторов A_{H_0} и A_{F_0} :

$$A_{H_0} = \begin{pmatrix} 0 & (a_3 - a_1)g + (a_3^2 - a_1^2) & 0 & (a_3^2 - a_1^2)g + (a_3^3 - a_1^3) \\ (a_1 - a_2)g + (a_1^2 - a_2^2) & 0 & (a_1^2 - a_2^2)g + (a_1^3 - a_2^3) & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & (a_3^2 - a_1^2) - a_1g \\ -a_2 & 0 & (a_1^2 - a_2^2) + a_1g & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{F_0} = \begin{pmatrix} 0 & (a_1 - a_3) & 0 & 3(a_1^2 - a_3^2) + (a_1 - a_3)g \\ a_2 - a_1 & 0 & 3(a_2^2 - a_1^2) + (a_2 - a_1)g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 - a_3 - g \\ -1 & 0 & a_2 - a_1 + g & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что эти матрицы линейно независимы при любых g : для этого достаточно рассмотреть квадраты 2×2 в левых нижних углах двух матриц. Следовательно, первое условие невырожденности выполняется. Проверим второе условие. Покажем, что при $g \notin \{a_2 - a_3, a_3 - a_2, -3a_1, 3a_1\}$ матрица A_{F_0} имеет попарно различные собственные значения. Эта матрица имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ A_2 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & D_1 \\ C_2 & 0 & D_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение на собственные значения:

$$\det(X - \lambda E) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^4 - (A_1A_2 + B_1C_2 + B_2C_1 + D_1D_2)\lambda^2 + (A_1D_1 - B_1C_1)(A_2D_2 - B_2C_2) = \\
&= \lambda^4 - b\lambda^2 + \Delta_1\Delta_2 = \lambda^4 - b\lambda^2 + \Delta = t^2 - bt + \Delta = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} t = \lambda^2, \\ b = A_1A_2 + B_1C_2 + B_2C_1 + D_1D_2, \\ \Delta = \Delta_1\Delta_2 = (A_1D_1 - B_1C_1)(A_2D_2 - B_2C_2). \end{cases}$$

Для нашего случая имеем:

$$b = ((a_2 - a_1)(a_1 - 4a_3) + (a_1 - a_3)(4a_2 - a_1) - g^2) = -(22a_2a_3 + 7a_2^2 + 7a_3^2 + g^2) < 0,$$

$$\Delta = -4(a_1 - a_3)(a_2 - a_1)(g^2 - (a_3 - a_2)^2) = 4(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)(g^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2a_2a_3).$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D = (22a_2a_3 + 7a_2^2 + 7a_3^2 + g^2)^2 - 16(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)(g^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2a_2a_3)$$

Как видно, дискриминант является квадратичной функцией от g^2 , принимающей положительные значения на $\pm\infty$. Найдем точку минимума и минимальное значение функции $D(g^2)$:

$$\begin{aligned}
g_{\min}^2 &= -\frac{1}{2} (2(22a_2a_3 + 7a_2^2 + 7a_3^2) - 16(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)) = \\
&= 9(2a_2a_3 + a_2^2 + a_3^2) = (3a_1)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\min} &= (22a_2a_3 + 7a_2^2 + 7a_3^2 + 9(2a_2a_3 + a_2^2 + a_3^2))^2 - \\
&- 16(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)(9(2a_2a_3 + a_2^2 + a_3^2) - a_2^2 - a_3^2 + 2a_2a_3) = \\
&= 64((2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)^2 - (2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)) = 0.
\end{aligned}$$

Корни квадратного уравнения $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, так как $D \geq 0$.

При $g \in (a_2 - a_3, a_3 - a_2)$ имеем $\Delta < 0$ и по теореме Виета $t_2 < 0 < t_1$.

Значит четыре корня λ_i биквадратного уравнения на собственные значения имеют вид $\{\pm\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}$. Следовательно, особенность невырождена и имеет тип седло-центр.

При $g \in (-\infty, a_2 - a_3) \cup (a_3 - a_2, +\infty)$ имеем $\Delta > 0$. С учетом того что $b < 0$, по теореме Виета имеем $t_1 < t_2 < 0$, а значит множество собственных значений имеет вид $\{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}$, и нужно дополнительно требовать, чтобы $t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow g \neq \pm 3a_1$. Тогда особенность имеет тип центр-центр.

Итак мы доказали, что при $g \notin \{a_2 - a_3, a_3 - a_2, -3a_1, 3a_1\}$ положение равновесия x_M в прообразе точки M невырождено. Не приходится сомневаться, что при $g \in \{a_2 - a_3, a_3 - a_2, -3a_1\}$ точка x_M действительно вырождается, так как при этих значениях происходят перестройки бифуркационной диаграммы в точке M . Однако, это не так для $g = 3a_1$. На самом деле при этом g вырождения положения равновесия x_M не происходит. Собственные значения матрицы $A_{F_0}|_{g=3a_1}$ совпадают, но среди линейных комбинаций $(\lambda A_{H_0} + \mu A_{F_0})|_{g=3a_1}$ остаются матрицы с попарно различными собственными значениями. Для того, чтобы в этом убедиться достаточно проверить, что собственные значения матрицы $A_{H_0}|_{g=3a_1}$ не совпадают. Действительно, сохраняя введенные обозначения, имеем:

$$A_{H_0}|_{g=3a_1} = \begin{pmatrix} 0 & a_3^2 - 4a_1^2 + & 0 & a_3^3 - 4a_1^3 + \\ & +3a_1a_3 & & +3a_1a_3^2 \\ 4a_1^2 - a_2^2 - & 0 & 4a_1^3 - a_2^3 - & 0 \\ -3a_1a_2 & & -3a_1a_2^2 & \\ 0 & a_3 & 0 & a_3^2 - 4a_1^2 \\ -a_2 & 0 & 4a_1^2 - a_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -b &= (a_2^2 + 3a_1a_2 - 4a_1^2)(a_3^2 + 3a_1a_3 - 4a_1^2) + a_3(a_2^3 + 3a_1a_2^2 - 4a_1^3) + a_2(a_3^3 + 3a_1a_3^2 - \\ & 4a_1^3) + (a_2^2 - 4a_1^2)(a_3^2 - 4a_1^2) = 32a_1^4 - 4a_1^2(2a_2^2 + 2a_3^2 + 3a_1a_2 + 3a_1a_3) + 2a_2^2a_3^2 + \\ & 6a_1a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_3^2 + 9a_1^2a_2a_3 + a_2^3a_3 + a_2a_3^3 - 4a_1^3a_2 - 4a_1^3a_3 = 48a_1^4 + 4a_1^2a_2a_3 - \end{aligned}$$

$$8a_1^2a_2^2 - 8a_1^2a_3^2 = 4a_1^2(12a_1^2 + a_2a_3 - 2a_2^2 - 2a_3^2) = 4a_1^2(10a_2^2 + 10a_3^2 + 25a_2a_3) = 20a_1^2(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3) > 0,$$

$$\Delta = \Delta_1\Delta_2,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (a_3^2 + 3a_1a_3 - 4a_1^2)(a_3^2 - 4a_1^2) - a_3(a_3^3 + 3a_1a_3^2 - 4a_1^3) = a_3^2(a_3^2 + 3a_1a_3) - \\ &4a_1^2(2a_3^2 + 3a_1a_3) + 16a_1^4 - a_3^2(a_3^2 + 3a_1a_3) + 4a_1^3a_3 = -4a_1^2(2a_3^2 + 3a_1a_3 - a_1a_3) + \\ &16a_1^4 = 16a_1^4 - 8a_1^2(a_3^2 + a_1a_3) = 8a_1^2(2a_1^2 + a_3a_2) = 8a_1^2(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3), \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 8a_1^2(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3), \Delta = 64a_1^4(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)^2 > 0.$$

$$t^2 - bt + \Delta = 0,$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \Delta = 36a_1^4(2a_2^2 + 2a_3^2 + 5a_2a_3)^2 > 0, \quad b < 0, \quad \Delta > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_2 < t_1 < 0, \quad \{\lambda_i\} = \{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}.$$

В прообразах точек N и P бифуркационной диаграммы лежат положения равновесия с координатами $\pm(0, 0, g, 0, 0, 1)$ и $\pm(0, g, 0, 0, 1, 0)$ соответственно. Проверка их условий невырожденности проводится путем тех же выкладок, что и в случае точки M , с применением циклической перестановки индексов у параметров a_1, a_2, a_3 и переоценкой получающихся неравенств.

Обратимся теперь к точкам Q, L, R . В их прообразах лежит по четыре положения равновесия, соответствующих разным знакам u_i, v_i . Начнем с точки Q . Для определенности возьмем особенность, соответствующую знакам “+”. В качестве локальных координат на M_g^4 возьмем (s_1, s_2, r_1, r_2) . Тогда канонический базис в касательном пространстве задается векторами:

$$T_Q M_g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ где } z = \frac{g}{u_1^2} - 2(a_1 - a_3).$$

Линейную независимость операторов A_{H_0} и A_{F_0} можно усмотреть хотя бы из того, что они переводят вектор $(1, 1, -1, 0, 0, 0)^t$ касательного пространства в вектора $(*, *, *, a_2 v_1 + a_3 u_1, -a_1 v_1, a_1 u_1)^t$ и $(*, *, *, v_1 + u_1, -v_1, u_1)^t$ соответственно. Последние линейно независимы при любом $g \in (a_1 - a_3, a_1 - a_2)$.

Дальнейшие выкладки по вычислению матрицы оператора A_{F_0} становятся крайне громоздкими, поэтому в этом месте мы прибегли к помощи пакета символьных вычислений *Matlab 6.5 Symbolic Math Toolbox*. В результате было найдено уравнение на собственные значения:

$$\det(A_{F_0} - \lambda E) = (\lambda^2 + 4(2a_2 + a_3)g + 4a_3^2 + 16a_2a_3 + 16a_2^2) \cdot (\lambda^2 + 4(2a_3 + a_2)g + 4a_2^2 + 16a_2a_3 + 16a_3^2) = 0.$$

Напомним, что $a_1 < 0 \leq a_2 < a_3$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, поэтому коэффициенты при g положительны. Пусть $t = \lambda^2$. Тогда корни уравнения t_1, t_2 с ростом g линейно убывают. При подстановке минимального значения $g_{\min} = a_1 - a_3$ в уравнение оно примет вид:

$$\det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + 8a_2^2 - 4a_2a_3 - 4a_3^2) = t(t + (3a_2)^2 - (a_2 + 2a_3)^2) = 0,$$

$$(3a_2)^2 - (a_2 + 2a_3)^2 < 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 > 0.$$

Подставляя максимальное значение $g_{\max} = a_1 - a_2$ имеем:

$$\det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + 8a_3^2 - 4a_2a_3 - 4a_2^2) = t(t + (3a_3)^2 - (a_3 + 2a_2)^2) = 0,$$

$$(3a_3)^2 - (a_3 + 2a_2)^2 > 0 \Rightarrow t_1 < 0, t_2 = 0.$$

В итоге, для промежуточных $g \in (a_1 - a_3, a_1 - a_2)$ будем иметь $t_1 < 0 < t_2$. Следовательно собственные значения λ_i имеют вид $\{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm\sqrt{|t_2|}\}$, и положение равновесия невырождено и имеет тип седло-центр.

В случае точек R и L выкладки повторяются с циклической перестановкой индексов у параметров a_1, a_2, a_3 . Для точки R будем иметь:

$$\begin{aligned} \det(A_{F_0} - \lambda E) &= (\lambda^2 + 4(2a_1 + a_2)g + 4a_2^2 + 16a_1a_2 + 16a_1^2) \cdot \\ &\cdot (\lambda^2 + 4(2a_2 + a_1)g + 4a_1^2 + 16a_1a_2 + 16a_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при g отрицательны и корни t_1, t_2 линейно растут с ростом g .

$$g_{\min} = a_3 - a_2 \Rightarrow \det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + (3a_1)^2 - (a_1 + 2a_2)^2) = 0,$$

$$(3a_1)^2 - (a_1 + 2a_2)^2 > 0 \Rightarrow t_1 < 0, t_2 = 0.$$

$$g_{\max} = a_3 - a_1 \Rightarrow \det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + (3a_2)^2 - (a_2 + 2a_1)^2) = 0,$$

$$(3a_2)^2 - (a_2 + 2a_1)^2 < 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 > 0.$$

Для промежуточных $g \in (a_3 - a_2, a_3 - a_1)$ будем иметь $t_1 < 0 < t_2$. Следовательно, собственные значения λ_i имеют вид $\{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm\sqrt{|t_2|}\}$, и положение равновесия невырождено и имеет тип седло-центр.

Вновь циклически переставляя индексы, для точки L имеем:

$$\det(A_{F_0} - \lambda E) = (\lambda^2 + 4(2a_3 + a_1)g + 4a_1^2 + 16a_1a_3 + 16a_3^2) \cdot$$

$$\cdot (\lambda^2 + 4(2a_1 + a_3)g + 4a_3^2 + 16a_1a_3 + 16a_1^2) = 0.$$

$$g_{\min} = a_2 - a_3 \Rightarrow \det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + (3a_3)^2 - (a_3 + 2a_1)^2) = 0,$$

$$(3a_3)^2 - (a_3 + 2a_1)^2 > 0 \Rightarrow t_1 < 0, t_2 = 0.$$

$$g_{\max} = a_2 - a_1 \Rightarrow \det(A_{F_0} - \lambda E) = t(t + (3a_1)^2 - (a_1 + 2a_3)^2) = 0,$$

$$(3a_1)^2 - (a_1 + 2a_3)^2 > 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 < 0.$$

Для промежуточных $g \in (a_2 - a_3, a_2 - a_1)$ будем иметь $t_1 < 0, t_2 < 0$. Собственные значения λ_i имеют вид $\{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}$. Условие $t_1 = t_2$ равносильно $g = 3a_2 \in (a_2 - a_3, a_2 - a_1)$, но проверка показывает, что в этом исключительном случае собственные значения A_{H_0} будут попарно различны. Следовательно, положение равновесия невырождено и имеет тип центр-центр.

Тем самым завершена проверка условий невырожденности и найдены типы для точек M, N, P, Q, R и L .

Сложности рассматриваемых особенностей не превосходят четырех. В таблицах невырожденных положений равновесия малой сложности, приведенных в [1, т.1, гл.9], для каждой особенности указаны представление в виде почти прямого произведения и круговая молекула. Зная типы 3-атомов, несложно определить, какую именно особенность мы наблюдаем в случае каждой точки.

Теорема доказана.

2.4 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Точки возврата и касания z_i ($i = 1, \dots, 8$) бифуркационной диаграммы представляют другой распространенный класс особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В прообразе некоторой их окрестности гамильтониан H_0 не имеет критических точек, а гамильтонов поток $v = \text{sgrad}H_0$ не обращается в ноль. Возьмем это за определение вырожденных одномерных орбит. Полной классификации этих особенностей на сегодняшний день не существует, однако некоторые их общие свойства позволят нам полностью описать их круговые слоения для исследуемой си-

стемы.

Будем предполагать, что все объекты вещественно-аналитические. Отображение момента, как и ранее, будем обозначать через \mathfrak{F} . Рассмотрим точку z бифуркационной диаграммы, такую что $\text{rk } \mathfrak{F}|_{\mathfrak{F}^{-1}(z)} \geq 1$ и сформулируем теорему Н. Т. Зунга [31] для нашего случая систем с двумя степенями свободы.

Теорема 7 (Н. Т. Зунг [31]) Пусть либо $\dim \mathfrak{F}^{-1}(z) = 1$, либо $\dim \mathfrak{F}^{-1}(z) = 2$ и $\mathfrak{F}^{-1}(z)$ содержит регулярную точку. Тогда в окрестности $U^4(\mathfrak{F}^{-1}(z)) \subset M^4$ существует симплектическое аналитическое локально-свободное действие окружности S^1 , свободное на торах Лиувилля и сохраняющее отображение момента \mathfrak{F} .

Рассмотрим “круговое” многообразие Q_τ^3 , лежащее в прообразе малой окружности с центром в z . Орбиты S^1 -действия задают на нем структуру расслоения Зейферта, согласованного со слоением Лиувилля. Ранее мы обсуждали (теорема 3), что такое расслоение всегда существует на 3-атомах. Из теоремы Зунга следует, что расслоения всех 3-атомов на Q_τ^3 согласованы и образуют одно глобальное расслоение Зейферта. Отдельно отметим, что для положений равновесия этот факт неверен.

Сделаем отсюда выводы о свойствах круговых молекул изучаемых особенностей. В условиях теоремы 7 справедливо

Предложение 1 На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, метки r равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, метки r конечны. В обоих случаях метки ε равны $+1$.

Доказательство:

Хорошо известно, что равенство метки r бесконечности, является критерием того, что два седловых атома, которые соединяет рассматриваемое ребро, образуют единое расслоение Зейферта [1, т.1, гл.4]. С другой стороны минимаксная окружность атома A является слоем этого расслоения. Поэтому стягиваемый цикл атома A не может иметь со слоями расслоения Зейферта нулевой индекс пересечения. Следовательно, метка r ребра “атом A — седловой атом” конечна.

Докажем второе утверждение. Равенство метки $\varepsilon = +1$ означает, что критические окружности-траектории двух атомов имеют одинаковую ориентацию с точки зрения общего расслоения Зейферта. В прообразе точки на гладкой дуге бифуркационной диаграммы может лежать несколько критических окружностей атома. Известно, что в случае топологически устойчивых боттовских перестроек, они ориентированы одинаково [1, т.1, гл.3], поэтому далее можно рассматривать лишь одну критическую окружность. Но при движении вдоль гладкой кривой бифуркационной диаграммы и при пересечении особой точки, которая соответствует вырожденной одномерной орбите, эта критическая окружность непрерывно “плывет”, не меняя своей ориентации, т.к. $v \neq 0$. Следовательно, ориентации критических окружностей разных атомов также совпадают.

Предложение доказано.

Замечание 1 *Равенство всех меток $\varepsilon = +1$ равносильно ориентированности базы расслоения Зейферта, поэтому в нашем случае это сфера S^2 с g ручками. Каждая звездочка на седловом атоме дает особый слой типа $(1, 2)$, а каждая дробная метка $r = \frac{p}{q}$ — особый слой типа (p, q) . Эйлеров класс Q_τ^3 в точности совпадает с n -меткой семьи, образованной всеми седловыми атомами.*

Замечание 2 Матрица склейки на ребрах “седло — седло” круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты всегда равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Это следует из определения метки $r = \infty$ и свойств матриц склеек.

Замечание 3 Наряду с круговыми молекулами вырожденных одномерных орбит иногда бывает полезно рассматривать круговые молекулы регулярных точек бифуркационной диаграммы, т.е. образов 3-атомов. Предложение 1 для них очевидно тоже верно.

Докажем еще одно предложение, которое хоть и имеет исключительно частный характер, на практике может быть применено для очень большого количества систем.

Предложение 2 Пусть точка z соответствует вырожденной одномерной орбите, а в ее окрестности бифуркационная диаграмма представляет из себя гладкую кривую с точкой возврата в z , меняющую при этом тип 3-атома с B на A . Тогда на ребре круговой молекулы $B-A$ метка $r = 0$.

Доказательство:

Бифуркационная диаграмма рассматриваемой особенности изображена на рисунке 5. Произведем деформацию контура ABC_0D_0 в контур ABC_1D_1 . При этом топологический тип многообразия в прообразе не изменится: прообраз отрезка CD определяется в M^4 уравнением $H = const$, из условия же известно, что критических точек H в окрестности z нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контур ABC_0D_0 определяет круговую молекулу регулярной точки. В его прообразе очевидно лежит трехмерный тор \mathbb{T}^3 . Следовательно, круговое многообразие z тоже имеет тип \mathbb{T}^3 .

Круговая молекула рассматриваемой особенности состоит из двух атомов — B и A — и двух ребер: одно ребро начинается и заканчивается в атоме B , второе ребро идет из атома B в атом A . Матрица склейки первого ребра имеет вид, указанный в замечании 2. Пусть матрица склейки ребра $B \rightarrow A$ есть:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Далее $H_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3 \Rightarrow N(W^*) = 0$ и по формуле Топалова имеем:

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2 = \left(\left[\frac{a}{b} \right] + \left[-\frac{k}{1} \right] \right) + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + 0 = \frac{a}{b} - k,$$

$$(1.1) \Rightarrow (a/b - k)b = 0 \Rightarrow a = kb \Rightarrow r = 0$$

Предложение доказано.

Далее будем за $r(x-y)$, обозначать r -метку ребра, которое соединяет бифуркации x и y . Напомним очевидное *правило сложения меток*: пусть для ребер, относящихся к некоторому семейству торов, известны метки $r(x-y) = r_0$ и $r(y-z) = \infty$, тогда $r(x-z) = r_0$ в том же семействе.

Теорема 8 *Круговые молекулы особых точек z_i ($i = 1, \dots, 8$) случая Стеклова представлены в таблице 1.*

Доказательство:

Легко видеть, что условия теоремы 7 выполняются для каждой из точек z_i , поэтому остается вычислить метки r на ребрах, ведущих в атомы A . Рассмотрим ребро круговой молекулы точки z_2 , относящееся к семейству III. Оно соединяет бифуркации β_1 и α_5 . Из круговой молекулы точки P име-

ем $r(\beta_1 - \gamma_2) = 0$, точки $Q - r(\gamma_2 - \alpha_5) = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток, $r(\beta_1 - \alpha_5) = 0$. Для других семейств торов получаем:

- точка z_2 :

семейство II: $r(\beta_1 - \gamma_2) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_2) = \infty \Rightarrow r(\beta_1 - \alpha_2) = 0$

семейство II: $r(\beta_1 - \gamma_1) = 0, r(\gamma_1 - \alpha_4) = \infty \Rightarrow r(\beta_1 - \alpha_4) = 0$

- точка z_3 :

семейство I: $r(\alpha_1 - \alpha_3) = 0, r(\alpha_1 - \beta_2) = \infty \Rightarrow r(\beta_2 - \alpha_3) = 0$

семейство IV: $r(\beta_2 - \gamma_2) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_7) = \infty \Rightarrow r(\beta_2 - \alpha_7) = 0$

- точка z_4 :

семейство III: $r(\alpha_6 - \alpha_5) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_5) = \infty \Rightarrow r(\gamma_2 - \alpha_6) = 0$

- точка z_6 :

семейство V: $r(\alpha_{12} - \alpha_9) = 0, r(\gamma_3 - \alpha_9) = \infty \Rightarrow r(\gamma_3 - \alpha_{12}) = 0$

- точка z_7 :

семейство II: $r(\alpha_{11} - \alpha_2) = 0, r(\alpha_2 - \beta_3) = \infty \Rightarrow r(\beta_3 - \alpha_{11}) = 0$

семейство IV: $r(\beta_3 - \gamma_3) = 0, r(\gamma_3 - \alpha_8) = \infty \Rightarrow r(\beta_3 - \alpha_8) = 0$

- точка z_8 :

семейство V: $r(\beta_4 - \gamma_3) = 0, r(\gamma_3 - \alpha_9) = \infty \Rightarrow r(\beta_4 - \alpha_9) = 0$

семейство I: $r(\beta_4 - \gamma_3) = 0, r(\gamma_3 - \alpha_1) = \infty \Rightarrow r(\beta_4 - \alpha_1) = 0$

семейство I: $r(\beta_4 - \gamma_1) = 0, r(\gamma_1 - \alpha_{10}) = \infty \Rightarrow r(\beta_4 - \alpha_{10}) = 0$

Метки r на ребрах $B-A$ молекул точек z_1 и z_5 также нулевые в силу предложения 2.

Теорема доказана.

2.5 Построение допустимых систем координат

Рассмотрим малый отрезок, трансверсально пересекающий дугу бифуркационной диаграммы. В его прообразе лежит многообразие с краем — 3-атом.

Его край состоит из некоторого числа (в зависимости от типа бифуркации) граничных торов. Нам предстоит выбрать на каждом таком торе допустимую систему координат в его фундаментальной группе.

Однозначно определенный цикл бифуркации $*$ будем обозначать λ_* . Поставим нашей целью предъявить на каждом граничном торе бифуркаций допустимую систему координат, выраженную в циклах λ_* . Для определенности договоримся ребра всех атомов ориентировать по возрастанию H_0 . Другими словами, к положительной границей всякого 3-атома отнесем те торы, на которых значение интеграла H_0 больше.

В начале выберем допустимые координаты на седловых атомах.

Рассмотрим точку P при $a_1 - a_3 < g < -3a_2$. Она имеет тип седло-седло. Ее 4-окрестность представима в виде прямого произведения 2-атомов $(B \times C_2)$. Его сомножители изображены на рис. 6. Граничные циклы атомов B и C_2 обозначены за u, v_1, v_2 и p_1, p_2, q_1, q_2 соответственно.

Обозначим 3-атомы, близкие к точке P , соответственно $Q_{\gamma_1}, Q_{\gamma_2}, Q_{\beta_1}, Q_{\beta_3}$. Тогда имеем:

1. $Q_{\gamma_1} = C_2 \times u$;
2. $Q_{\gamma_2} = (C_2 \times v_1) \cup (C_2 \times v_2)$;
3. $Q_{\beta_1} = (B \times p_1) \cup (B \times p_2)$;
4. $Q_{\beta_2} = (B \times q_1) \cup (B \times q_2)$;

Вспоминая определение допустимых систем координат на седловых атомах без звездочек, для первого 3-атома Q_{γ_1} имеем:

$$\begin{array}{ccc}
 (u, q_1) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (u, -p_1) \\
 & & C_2 \boxed{\gamma_1} \\
 (u, q_2) & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (u, -p_2)
 \end{array}$$

Стрелочки указывают направление роста H_0 . Римские цифры над стрелочками обозначают семейство торов, к которому относится данный граничный тор. Знак минус требуется для согласования ориентаций систем координат на атоме.

В прообразах остальных трех гладких дуг бифуркационной диаграммы, сходящихся в точке P , лежит по два экземпляра соответствующих атомов.

Имеем для $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccccc}
 (v_i, q_1) & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} & & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} & (v_i, -p_1) \\
 & & C_2 \boxed{\gamma_2} & & \\
 (v_i, q_2) & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} & & \begin{array}{c} (III) \\ \searrow \end{array} & (v_i, -p_2) \\
 & & & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} & (p_i, v_1) \\
 (p_i, -u) & \begin{array}{c} (II) \\ \rightarrow \end{array} & B \boxed{\beta_1} & & \\
 & & & \begin{array}{c} (III) \\ \searrow \end{array} & (p_i, v_2) \\
 & & & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} & (q_i, v_1) \\
 (q_i, -u) & \begin{array}{c} (I) \\ \rightarrow \end{array} & B \boxed{\beta_2} & & \\
 & & & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} & (q_i, v_2)
 \end{array}$$

Заметим, что при выборе допустимых систем координат на атоме Q_{γ_1} мы произвольно поставили знак “-” у правых базисов, а не у левых. Тем самым мы фиксировали некоторую ориентацию на многообразии $Q_{\gamma_1}^3$. Однако после этого произвола в выборе допустимых систем координат для остальных трех атомов нет: однозначный ответ дает условие согласованности ориентаций базисов.

Теперь вспомним, что первый базисный цикл бифуркации всегда совпадает с ее однозначно определенным циклом. Откуда имеем:

$$\lambda_{\gamma_1} = u, \lambda_{\gamma_2} = v_i, \lambda_{\beta_1} = p_i, \lambda_{\beta_2} = q_i.$$

Тем самым мы выбрали допустимые системы координат, выраженные в однозначно определенных базисных циклах, для дуг $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1$ и β_2 . Результат выглядит так:

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_1}) \\
 & & C_2 \boxed{\gamma_1} \\
 (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_1}) \\
 (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_1}) \\
 & & C_2 \boxed{\gamma_2} \\
 (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (III) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_1}) \\
 & & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_2}) \\
 (\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\gamma_1}) & \begin{array}{c} (II) \\ \rightarrow \end{array} B \boxed{\beta_1} & \begin{array}{c} (III) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_2}) \\
 & & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}) \\
 (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\gamma_1}) & \begin{array}{c} (I) \\ \rightarrow \end{array} B \boxed{\beta_2} & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2})
 \end{array}$$

Аналогично, рассмотрев точку P при $-3a_2 < g < a_3 - a_1$, получаем допустимые системы координат для бифуркаций $\beta_3, \beta_4, \gamma_3$ и второй вариант допустимых систем координат для γ_1 :

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_4}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_3}) \\
 & & C'_2 \boxed{\gamma_1} \\
 (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_4}) & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_3}) \\
 (\lambda_{\gamma_3}, -\lambda_{\beta_4}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_3}, \lambda_{\beta_3}) \\
 & & C_2 \boxed{\gamma_3} \\
 (\lambda_{\gamma_3}, -\lambda_{\beta_4}) & \begin{array}{c} (V) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_3}, \lambda_{\beta_3})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_3}) & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} & \\
& & B_{\beta_3} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\gamma_1}) \\
(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_3}) & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} & \\
(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_3}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \\
& & B_{\beta_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\gamma_1}) \\
(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_3}) & \begin{array}{c} (V) \\ \nearrow \end{array} &
\end{array}$$

Здесь только необходимо пояснить выбор ориентаций вторых базисных циклов. Напомним, что при выборе допустимых систем координат для бифуркаций $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ у нас была альтернатива: взять такие знаки вторых базисных циклов, на которых мы остановились, либо одновременно заменить все знаки на противоположные. Однако после того как мы фиксировали выбор знаков для бифуркаций $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$, аналогичного произвола для дуг $\gamma_1, \gamma_3, \beta_3, \beta_4$ уже нет. Покажем, что выбор знаков, указанный выше, является единственно верным.

Из круговых молекул особых точек z_4 и z_6 следует, что $\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\beta_3}$ и $\lambda_{\gamma_3} = \lambda_{\beta_4}$ на торах семейства IV. Обратимся к допустимым базисам бифуркаций γ_2 и β_3 , соответствующим последнему семейству. Из структуры слоения вблизи точки z_4 следует, что они должны быть одинаково ориентированы. Для γ_2 мы выбрали базис $(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_2})$, поэтому для β_3 следует выбрать базис $(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_3})$, как и было сделано, а не $(\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\gamma_3})$. Таким образом устраняется произвол в выборе знаков вторых базисных циклов для дуг $\gamma_1, \gamma_3, \beta_3$ и β_4 .

Осталось выбрать системы координат на атомах A.

Напомним, что допустимые системы координат на A-атомах имеют одно существенное отличие: регулировка ориентации базиса осуществляется за счет соответствующего выбора ориентации первого базисного цикла (он определен однозначно только с точностью до ориентации). И это понятно,

так как у атома A второй, а не первый базисный цикл имеет естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым потоком.

В начале сформулируем предложение, которое сразу следует из определения метки r (см. 1.2.6).

Предложение 3 *Метка $r(*-**) = \infty$ тогда и только тогда, когда индекс пересечения циклов λ_* и λ_{**} на торах этого семейства равен 0 (т.е. циклы гомологичны с точностью до ориентации); $r(*-**) = 0 \Leftrightarrow$ модуль индекса пересечения λ_* и λ_{**} равен 1 и пара $(\lambda_*, \lambda_{**})$ образует базис; $r(*-**) = 1/2 \Leftrightarrow$ модуль индекса пересечения λ_* и λ_{**} равен 2.*

Выберем допустимую систему координат для атома α_1 исходя из круговой молекулы точки z_8 . Метки $r = 0$, поэтому пара $(\pm\lambda_{\alpha_1}, \pm\lambda_{\beta_4})$ образует базис на торах семейства I. Осталось разобраться с ориентацией. Перед λ_{β_4} с необходимостью должен стоять знак “+” так как на соответствующем ребре круговой молекулы точки z_8 стоит метка $\varepsilon = +1$. Знак перед λ_{α_1} лишен смысла, так как этот цикл пока определен с точностью до ориентации. Поставим перед ним знак “+”, а ориентацию λ_{α_1} выберем такой, чтобы базис $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4})$ имел такую же ориентацию, как и прочие базисы положительных границ атомов семейства I. Итак:

$$A_{\boxed{\alpha_1}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4})$$

Для остальных атомов A из круговых молекул точек z_i аналогично получаем:

$$(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} A_{\boxed{\alpha_2}}$$

$$(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\alpha_3}}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} A_{\alpha_4} \\
& (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(III)} A_{\alpha_5} \\
& (\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\gamma_2}) \xrightarrow{(III)} A_{\alpha_6} \\
& (\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(IV)} A_{\alpha_7} \\
& A_{\alpha_8} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\beta_3}) \\
& A_{\alpha_9} \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_4}) \\
& A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_4}) \\
& A_{\alpha_{11}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_3}) \\
& A_{\alpha_{12}} \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\gamma_3})
\end{aligned}$$

2.6 Определение взаимного расположения базисных циклов

Проанализируем информацию из круговых молекул и списка допустимых систем координат для определения взаимном расположении циклов λ_* на торах семейств I-V.

Рассмотрим семейство I. На каждом торе этого семейства бифуркации определяют циклы λ_{α_1} , λ_{α_3} , $\lambda_{\alpha_{10}}$, λ_{β_2} , λ_{β_4} , λ_{γ_1} и λ_{γ_3} . В силу предложения 3 из круговых молекул особых точек M, P, R, z_3, z_6, z_8 можно извлечь следующую информацию об индексах пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_3}$	1
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2}$	0
$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\gamma_1}$	0
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_1}$	1
$\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_1}$	1
$\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_3}$	1
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\gamma_3}$	0
$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_3}$	0
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4}$	1
$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_4}$	1

С другой стороны, базисы на положительных и отрицательных границах атомов должны иметь разную ориентацию. В силу чего из списка допустимых систем координат следует, что базисы $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4})$, $(\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_4})$, $(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_4})$, $(\lambda_{\gamma_3}, -\lambda_{\beta_4})$ должны иметь одинаковую ориентацию, а базисы $(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\gamma_1})$ — противоположную им.

Несложно убедиться, что эти условия определяют взаимное расположение всех циклов рассматриваемого семейства однозначно.

Анализ остальных семейств торов проводится аналогично. Мы не приводим здесь эти рассуждения в силу их тривиальности. В каждом случае информации из списка круговых молекул и допустимых систем координат оказывается достаточно, чтобы однозначно определить взаимное расположение циклов.

На рис. 7 представлен итоговый результат. Фундаментальные группы се-

мейств торов изображены в виде целочисленной решетки на плоскости, а циклы — в виде векторов на ней. Это позволяет наглядно отобразить собранную информацию.

2.7 Алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга

Рис. 7 следует считать ответом на поставленную в данной работе задачу. Действительно, зная взаимное расположение базисных циклов на торах и все допустимые системы координат, можно вычислить молекулу, соответствующую любой допустимой кривой. Действовать следует так:

1. Изобразить кривую на бифуркационной диаграмме.
2. Задать на кривой ориентацию.
3. Выписать допустимые системы координат на атомах, лежащих в образе кривой; подкорректировать ориентации атомов, согласуя их с ориентацией на кривой. Напомним, что при смене ориентации на седловых атомах, меняются знаки всех вторых базисных циклов, а в случае атома A — знак первого базисного цикла.
4. Выписать матрицы склеек на ребрах молекулы, пользуясь рис. 7.
5. Вычислить по матрицам склеек числовые метки r, ε и n .

2.8 Пример вычисления меченой молекулы

В качестве примера применения вышеизложенного алгоритма вычислим метки молекулы, соответствующей вертикальной прямой, проходящей правее всех особых точек бифуркационной диаграммы. Это так называемая молекула больших энергий (для исходного гамильтониана Стеклова H).

Ориентируем прямую по возрастанию H_0 . Ей соответствует грубая молекула:

$$\begin{array}{ccc} A & \searrow & \nearrow A \\ & C_2 & \\ A & \nearrow & \searrow A \end{array}$$

Выпишем допустимые системы координат атомов молекулы:

$$\begin{array}{ccccccc} A_{\boxed{\alpha_1}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4}) & (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_2}) & \xrightarrow{(I)} & \xrightarrow{(II)} & (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_1}) & (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) & \xrightarrow{(II)} A_{\boxed{\alpha_2}} \\ A_{\boxed{\alpha_1}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_4}) & (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_2}) & \xrightarrow{(I)} & C_2 \boxed{\gamma_1} & \xrightarrow{(II)} & (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) & \xrightarrow{(II)} A_{\boxed{\alpha_2}} \\ & & & & & & \end{array}$$

По рис. 7 вычисляем матрицы склеек:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ -\lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

Вычисляя по матрицам склеек метки, получаем окончательный вид инварианта Фоменко-Цишанга для рассматриваемой прямой:

$$\begin{array}{ccc} r = 0 & & r = 0 \\ \varepsilon = 1 & & \varepsilon = 1 \\ A & \searrow & \nearrow A \\ & C_2 & \\ A & \nearrow & \searrow A \\ r = 0 & n = 2 & r = 0 \\ \varepsilon = 1 & & \varepsilon = 1 \end{array}$$

Сопоставляя этот результат с результатами лиувиллевой классификации случая Эйлера [1, т.2, гл.5], заключаем, что их молекулы больших энергий

совпадают. Следовательно, системы Стеклова и Эйлера лиувиллево эквивалентны на Q_h^3 при достаточно больших h . Этот факт можно также получить, рассматривая случай Стеклова как однопараметрическое возмущение случая Эйлера в классе интегрируемых систем (по аналогии с теоремой 11). То, что наши вычисления подтверждают этот вывод, говорит в пользу правильности проделанного анализа.

Глава 3

Лиувиллева классификация интегрируемого случая Клебша

В данной главе вычисляются тонкие лиувиллевы инварианты интегрируемого случая Клебша (1871 год) [29] движения твердого тела в жидкости. Существует также другая физическая интерпретация — движение твердого тела, закрепленного в центре масс, в линейном поле сил [39]. Она приводит к тем же дифференциальным уравнениям. Гамильтониан и дополнительный интеграл системы, записанные в канонических координатах на $e(3)^*$, имеют вид:

$$H = \frac{s_1^2}{2A_1} + \frac{s_2^2}{2A_2} + \frac{s_3^2}{2A_3} + \frac{\varepsilon}{2}(A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + A_3 r_3^2),$$
$$F = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{\varepsilon}{2}(A_2 A_3 r_1^2 + A_1 A_3 r_2^2 + A_1 A_2 r_3^2).$$

Простота этих функций по сравнению со случаем Стеклова обманчива: для вычисления меток молекул приходится привлекать более широкий спектр методов. Именно поэтому мы излагаем главы, посвященные случаями Стеклова и Клебша в таком порядке. Отдельно отметим, что в системе Клебша наблюдаются все четыре типа точек невырожденного положения равновесия: центр-центр, седло-центр, седло-седло и фокус-фокус. При этом

особенность седло-седло имеет тип не прямого, а почти прямого произведения 2-атомов.

3.1 Бифуркационные диаграммы, семейства торов и их перестройки

В гамильтониан случая Клебша входят четыре параметра: A_1 , A_2 , A_3 , и ε . Полагая $A'_i = \sqrt{|\varepsilon|} A_i$ и поделив гамильтониан на $\sqrt{|\varepsilon|}$, мы получаем гамильтониан с параметрами A'_1 , A'_2 , A'_3 , и $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, можно исследовать лишь гамильтонианы с $\varepsilon = \pm 1$.

Как и в случае Стеклова, все гамильтонианы случая Клебша представимы в виде линейной комбинации двух коммутирующих функций:

$$H = \alpha H_0 + \beta F_0,$$

$$H_0 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + (c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2),$$

$$F_0 = (c_1 s_1^2 + c_2 s_2^2 + c_3 s_3^2) - (c_1^2 r_1^2 + c_2^2 r_2^2 + c_3^2 r_3^2),$$

где $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, $c_1 < c_2 \leq 0 < c_3$. Тем самым мы фактически понизили число параметров системы до двух.

На рисунке 8 показано, какой из гамильтонианов случая Клебша получается при различных значения α и β . Если прямая $\alpha h + \beta k = 0$ лежит в зоне I, то имеем гамильтониан Клебша $H = \alpha H_0 + \beta F_0$ с $\varepsilon = +1$ — так называемый случай притяжения; если же прямая $\alpha h + \beta k = 0$ лежит в зоне II, то имеем гамильтониан с $\varepsilon = -1$, называемый случаем отталкивания.

Бифуркационные диаграммы случая Клебша были построены и исследованы Т.И. Погосьяном [43, 44, 45, 46]. Они приведены на рис. 9. Будем

различать четыре качественно различных случая:

a) $g = 0$

b) $g^2 < p_1$

c) $p_1 < g^2 < p_2$

d) $g^2 > p_2$

Здесь $p_1 = 3c_3 - \sqrt{9c_3^2 - (c_1 - c_2)^2}$, $p_2 = 3c_3 + \sqrt{9c_3^2 - (c_1 - c_2)^2}$. При противоположных значениях g бифуркационные диаграммы одинаковы.

Уравнение бифуркационной кривой удобно записать в параметрической форме, где h и k зависят от двух параметров x и y , которые в свою очередь связаны соотношением. А именно:

$$h = -2x - \frac{g}{y}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 + 3x^2),$$

$$k = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 - x^2 - \frac{g}{y}(x^3 - x(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1) + 2c_1c_2c_3),$$

$$\text{где } y^2 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3).$$

При этом бифуркационной кривой, является не вся эта кривая, а лишь ее часть, показанная на рис. 9. Асимптотами бифуркационной кривой являются три прямые: $k = c_1h + c_2c_3$, $k = c_2h + c_3c_1$ и $k = c_1h + c_2c_3$.

Гладкие дуги бифуркационной диаграммы мы обозначили малыми греческими буквами с индексами. Окрестности их прообразов в Q^3 представляют из себя боттовские перестройки торов Лиувилля, описываемые 3-атомами. Их типы были установлены А. А. Ошемковым [17]. Укажем их:

$$2A : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$$

$$2B : \beta_1, \beta_2$$

$$C_2 : \gamma_1, \gamma_2$$

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(h, f)$ являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Эти торы естественным

образом разбиваются на семейства, которые мы обозначили римскими цифрами I-III (см. рис. 9). Число прообразов для каждой области регулярности также вычислено в [17]. Имеем:

семейство	число торов Лиувилля
I	2
II	2
III	2

В каждое семейство мы отнесли торы, которые испытывают одинаковые бифуркации на границах области регулярности. Появление пар торов-близнецов не должно нас удивлять. Дело в том, что фазовое пространство системы Клебша, как и в случае Стеклова, обладает очевидной симметрией

$$\Phi : (s, r) \rightarrow (-s, -r),$$

такой что $\Phi : (f_1, f_2, H_0, F_0) \rightarrow (f_1, f_2, H_0, F_0)$.

3.2 Классификация невырожденных положений равновесия

Точки M , N и P бифуркационной диаграммы системы Клебша на рис. 9 относятся к невырожденным положениям равновесия. Данный параграф посвящен их описанию.

Теорема 9 *Условия невырожденности, типы и представления в виде почти прямого произведения для положений равновесия, лежащих в прообразах точек M , N и P бифуркационной диаграммы случая Клебша указаны*

в таблице:

точка	условия невырожденности	тип	n/n произведение
M	$g \in \mathbb{R}$	центр-центр	$2(A \times A)$
N	$g \in \mathbb{R}$	седло-центр	$A \times C_2$
P	$g^2 < p_1$	седло-седло	$(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
	$p_1 < g^2 < p_2$	фокус-фокус	—
	$g^2 > p_2$	центр-центр	$2(A \times A)$

Круговые молекулы точек M , N , P приведены в таблице 2. Других критических точек у гамильтониана H_0 на M_g^4 нет.

Доказательство:

Вычислим матрицы линеаризаций $A_{H_0}^6$ и $A_{F_0}^6$ векторных полей $\frac{1}{2}\text{sgrad}H_0$ и $\frac{1}{2}\text{sgrad}F_0$ в $e(3)^*$. Имеем:

$$\dot{s}_i = \frac{1}{2}\{s_i, H_0\}, \dot{r}_i = \frac{1}{2}\{r_i, H_0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1 = (c_2 - c_3)r_2r_3 \\ \dot{s}_2 = (c_3 - c_1)r_3r_1 \\ \dot{s}_3 = (c_1 - c_2)r_1r_2 \\ \dot{r}_1 = s_2r_3 - s_3r_2 \\ \dot{r}_2 = s_3r_1 - s_1r_3 \\ \dot{r}_3 = s_1r_2 - s_2r_1 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Дифференцируя правые части уравнений, получаем матрицу линеаризации $A_{H_0}^6$ векторного поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}H_0$ в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$:

$$A_{H_0}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (c_2 - c_3)r_3 & (c_2 - c_3)r_2 \\ 0 & 0 & 0 & (c_3 - c_1)r_3 & 0 & (c_3 - c_1)r_1 \\ 0 & 0 & 0 & (c_1 - c_2)r_2 & (c_1 - c_2)r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & -s_3 & s_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 & s_3 & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогичные вычисления необходимо проделать для поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}F_0$.

$$\dot{s}_i = \frac{1}{2}\{s_i, F_0\}, \dot{r}_i = \frac{1}{2}\{r_i, F_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = (c_2 - c_3)(s_2s_3 - c_1r_2r_3) \\ \dot{s}_2 = (c_3 - c_1)(s_3s_1 - c_2r_3r_1) \\ \dot{s}_3 = (c_1 - c_2)(s_1s_2 - c_3r_1r_2) \\ \dot{r}_1 = c_2s_2r_3 - c_3s_3r_2 \\ \dot{r}_2 = c_3s_3r_1 - c_1s_1r_3 \\ \dot{r}_3 = c_1s_1r_2 - c_2s_2r_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Дифференцируя правые части уравнений получаем матрицу линеаризации

$A_{F_0}^6$ векторного поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}F_0$ в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$:

$$A_{F_0}^6 = \begin{pmatrix} 0 & (c_2 - c_3)s_3 & (c_2 - c_3)s_2 & 0 & c_1(c_3 - c_2)r_3 & c_1(c_3 - c_2)r_2 \\ (c_3 - c_1)s_3 & 0 & (c_3 - c_1)s_1 & c_2(c_1 - c_3)r_3 & 0 & c_2(c_1 - c_3)r_1 \\ (c_1 - c_2)s_2 & (c_1 - c_2)s_1 & 0 & c_3(c_2 - c_1)r_2 & c_3(c_2 - c_1)r_1 & 0 \\ 0 & c_2r_3 & -c_3r_2 & 0 & -c_3s_3 & c_2s_2 \\ -c_1r_3 & 0 & c_3r_1 & c_3s_3 & 0 & -c_1s_1 \\ c_1r_2 & -c_2r_1 & 0 & -c_2s_2 & c_1s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

В силу невырожденности симплектической формы ω на M_g^4 , условие $dH_0|_{M_g^4} = 0$ эквивалентно условию $\text{sgrad}H_0 = 0$. Приравнивая правые части уравнений (3.1) нулю, находим координаты критических точек гамильтониана H_0 на M_g^4 :

$$x_M = \pm(g, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$x_N = \pm(0, g, 0, 0, 1, 0)$$

$$x_P = \pm(0, 0, g, 0, 0, 1)$$

Подставляя найденные точки в (3.2), убеждаемся, что они же являются неподвижными точками действия Пуассона.

Проверим выполнения условий невырожденности.

Рассмотрим точку M . Для определенности, возьмем неподвижную точку, соответствующую знаку “+”. В качестве локальных координат в ее 4-окрестности на M_g^4 можно взять функции (s_2, s_3, r_2, r_3) . Ограничивая операторы $A_{H_0}^6$ и $A_{F_0}^6$ из $e(\mathfrak{z})^*$ на $T_M M_g^4$, находим матрицы симплектических операторов A_{H_0} и A_{F_0} :

$$A_{H_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_3 - c_1 \\ 0 & 0 & c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -g \\ -1 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{F_0} = \begin{pmatrix} 0 & (c_3 - c_1)g & 0 & c_2(c_1 - c_3) \\ (c_1 - c_2)g & 0 & c_3(c_2 - c_1) & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & -c_1g \\ -c_2 & 0 & c_1g & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что эти матрицы линейно независимы при любых g , и тем самым, первое условие невырожденности выполняется. Теперь прове-

рим второе условие. Покажем, что матрица A_{H_0} всегда имеет попарно различные чисто мнимые собственные значения.

Уравнение на собственные значения:

$$\det(A_{H_0} - \lambda E) = \lambda^4 - b\lambda^2 + \Delta = t^2 - bt + \Delta = 0, \lambda^2 = t. \quad (3.3)$$

Для рассматриваемого случая имеем:

$$b = (c_1 - c_3) + (c_1 - c_2) - g^2 = g^2 - 3c_1 > 0,$$

$$\Delta = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1) > 0.$$

Вычислим также дискриминант D :

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4\Delta &= (g^2 - 3c_1)^2 - 4(c_2 - c_1)(c_3 - c_1) = g^4 - 6c_1g^2 + c_1^2 - 4c_2c_3 = \\ &= g^4 - 6c_1g^2 + (c_2 - c_3)^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Виета уравнение (3.3) имеет корни $t_1 < t_2 < 0$, и четыре корня λ_i биквадратного уравнения на собственные значения имеют вид $\{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}$. А значит, точка равновесия невырождена и имеет тип центр-центр.

Циклически переставляя индексы, для точки N имеем $\Delta = (c_3 - c_2)(c_1 - c_2) < 0$. Следовательно, $t_1 < 0 < t_2$ и $\lambda_i = \{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm\sqrt{|t_2|}\}$ — собственные значения попарно различны, а положение равновесия имеет тип седло-центр.

Наиболее сложным будет анализ случая точки P .

$$b = g^2 - 3c_3 = \begin{cases} b < 0, & \text{при } g^2 < 3c_3, \\ b > 0, & \text{при } g^2 > 3c_3. \end{cases}$$

$$\Delta = (c_1 - c_3)(c_2 - c_3) > 0,$$

$$D(g^2) = g^4 - 6c_3g^2 + (c_1 - c_2)^2.$$

Имеем $D(0) = (c_1 - c_2)^2 > 0$, $D_{\min} = D(g^2 = 3c_3) = -9c_3^2 + (c_1 - c_2)^2 < 0$ и, следовательно, $D(g^2)$ имеет два корня

$$g^2 = p_1 = 3c_3 - \sqrt{9c_3^2 - (c_1 - c_2)^2}$$

$$g^2 = p_2 = 3c_3 + \sqrt{9c_3^2 - (c_1 - c_2)^2}$$

между которым он принимает отрицательные значения.

При отрицательно дискриминанте $D(g^2)$ корни t_1 и t_2 — сопряженные мнимые и точка равновесия имеет тип фокус-фокус.

При $g^2 < p_1$, $D > 0$, $b < 0$, $\Delta > 0$, а значит $t_1 > t_2 > 0$, $\lambda_i = \{\pm\sqrt{|t_1|}, \pm\sqrt{|t_2|}\}$, и мы получаем невырожденную точку типа седло-седло.

При $g^2 > p_2$, $D > 0$, $b > 0$, $\Delta > 0$, а значит $t_1 < t_2 < 0$, $\lambda_i = \{\pm i\sqrt{|t_1|}, \pm i\sqrt{|t_2|}\}$, и мы получаем невырожденную точку типа центр-центр.

Сложности рассматриваемых особенностей не превосходят 2. Типы перестроек торов в их окрестностях известны. Из таблиц, приведенных в [1, т.1, гл.9], находим представления в виде почти прямых произведений и круговые молекулы точек. Исключение здесь составляет точка P , которая при $p_1 < g^2 < p_2$ имеет тип фокус-фокус. Особенность такого типа не представима в виде почти прямого произведения 2-атомов, а ее круговая молекула — это окружность, оснащенная матрицей монодромии. В п. 3.7 будет показано,

что она равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема доказана.

3.3 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Теорема 10 *Круговые молекулы особых точек z_1, z_2, z_3 и z_4 случая Клебша, соответствующих вырожденным одномерным орбитам системы, приведены в таблице 2.*

Доказательство:

В силу предложения 1 остается вычислить r -метки на ребрах $B-A$. Точки возврата z_3 и z_4 подпадают под предложение 2. Поэтому их круговые молекулы целиком известны. В частности, имеем $r(\alpha_4-\beta_1) = 0$ и $r(\alpha_4-\beta_2) = 0$ в семействе III, что дает r -метки для ребер этого же семейства молекул точек z_1 и z_2 . Оказывается, что вычислить оставшиеся r -метки, относящихся к семейству II, из каких-либо элементарных соображений, как это было в случае Стеклова, невозможно. Позже в п. 3.5 мы убедимся, что они также нулевые. Здесь мы приводим этот факт для полноты.

Теорема доказана.

3.4 Допустимые системы координат

Укажем допустимые системы координат 3-атомов в терминах циклов λ_* .

Допустимые системы координат на седловых атомах $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 выберем исходя из представления особенности точки P типа седло-седло в виде почти прямого произведения $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, причем группа \mathbb{Z}_2 действует центральной симметрией на каждом из сомножителей. Имеем:

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\gamma_2}) \\
 & & C_2[\gamma_1] \\
 (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\gamma_2}) \\
 \\
 (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_1}) \\
 & & C_2[\gamma_2] \\
 (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_2}) & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_1})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda_{\beta_1}, -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}) & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} & \\
& & B_{\boxed{\beta_1}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_1} + \lambda_{\beta_1}) \\
(\lambda_{\beta_1}, -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}) & \begin{array}{c} (III) \\ \nearrow \end{array} & \\
& & \\
(\lambda_{\beta_2}, \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}) & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} & \\
& & B_{\boxed{\beta_2}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_2}, -(\lambda_{\gamma_2} + \lambda_{\beta_2})) \\
(\lambda_{\beta_2}, \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}) & \begin{array}{c} (III) \\ \nearrow \end{array} &
\end{array}$$

Теперь выберем допустимые системы координат на минимаксных атомах A бифуркаций $\alpha_1, \dots, \alpha_5$.

Допустимый базис на атоме $A_{\boxed{\alpha_4}}$ выбирается из круговой молекулы точки z_3 , исходя из тех же соображений, что приводились для случая Стеклова.

$$A_{\boxed{\alpha_4}} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1})$$

Отметим, что рассматривая круговую молекулу точки z_4 , для этой бифуркации мы могли также выбрать базис $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2})$. Отсюда следует, что пары $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1})$ и $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2})$ имеют одинаковую ориентацию.

Позже в п. 3.5 мы увидим, что на ребрах молекул точек z_1 и z_2 , относящихся к семейству II, стоят метки $r = 0$. Это даст возможность выбрать допустимый базис бифуркации α_3 . Мы указываем его здесь для полноты списка, однако пользоваться этим пока не будем:

$$A_{\boxed{\alpha_3}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_1})$$

Задача выбора допустимых систем координат для остальных атомов A является нетривиальной. В каждом случае мы легко найдем цикл, дополняющий первый до базиса, однако по требованиям допустимости он еще

должен иметь ориентацию, согласованную с гамильтоновым потоком вблизи бифуркации. Из-за отсутствия особенностей вырожденных одномерных орбит, в которых бы участвовали рассматриваемые атомы A , проверить это старым методом не удастся.

Из меток $r = \infty$ круговой молекулы точки N следует, что циклы λ_{α_1} и λ_{γ_1} гомологичны (с точностью до ориентации). Из круговой молекулы точки P типа седло-седло, получаем, что индекс пересечения λ_{γ_1} и λ_{β_1} равен 1. Следовательно, пара $(\lambda_{\alpha_1} \pm \lambda_{\beta_1})$ образует базис бифуркации α_1 . Рассуждая аналогично, мы завершаем список допустимых систем координат:

$$(\lambda_{\alpha_1}, \pm \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} A_{\boxed{\alpha_1}}$$

$$(\lambda_{\alpha_2}, \pm \lambda_{\gamma_2}) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\alpha_2}}$$

$$(\lambda_{\alpha_5}, \pm \lambda_{\gamma_1}) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\alpha_5}}$$

Позже в п. 3.6 будет показано, что правильный вариант в каждом из случаев соответствует знаку “+”, однако для этого будут привлечены нетривиальные дополнительные рассуждения.

3.5 Определение взаимного расположения базисных циклов

Для определения взаимного расположения циклов λ_* будем рассматривать семейства торов I-III поочередно.

Начнем с самого простого семейства III. На каждом торе этого семейства бифуркации определяют циклы λ_{α_4} , λ_{β_1} и λ_{β_2} . В силу предложения 3 из круговых молекул особых точек P , z_3 и z_4 можно извлечь следующую информацию об индексах пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1}$	1
$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_2}$	2

С другой стороны, базисы на положительных и отрицательных границах атомов должны иметь разную ориентацию. В силу чего из списка допустимых систем координат следует, что базисы $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2})$ должны иметь одинаковую ориентацию, а базисы $(\lambda_{\beta_1}, -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2})$, $(\lambda_{\beta_2}, \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2})$ — противоположную им. Несложно убедиться, что эти условия определяют взаимное расположение всех циклов рассматриваемого семейства однозначно. Результат изображен на рис. 10 в виде векторов на целочисленной решетке тора.

Перейдем к исследованию семейства II.

Рассмотрим круговую молекулу точки z_3 . Из списка допустимых систем координат и рис. 10 находим матрицу склейки на ребре $B \rightarrow A$, относящемуся к уже исследованному семейству III:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix}$$

В силу замечания 2, на ребре относящемся к семейству II, имеем соотношение:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ \lambda_{\beta_1} + \lambda_{\gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

Применяя формулу Топалова (1.1) к круговой молекуле точки z_3 , $Q_7^3 \cong \mathbb{T}^3$, $N(W^*) = 0$, имеем:

$$1 \cdot (1/1 + [-k/1]) = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\gamma_1} = \lambda_{\beta_1} + \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{\gamma_1} = \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}.$$

Проводя те же рассуждения для круговой молекулы точки z_4 , имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -(\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\gamma_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix}, k' \in \mathbb{Z}$$

$$1 \cdot (-1/1 + [-k'/1]) = 0 \Leftrightarrow k' = -1 \Rightarrow$$

$$-(\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\gamma_2}) = -\lambda_{\beta_1} - \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{\gamma_2} = \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2}.$$

Два полученных соотношения в купе с информацией об индексах пересечения из круговых молекул и об ориентации базисов из списка допустимых систем координат определяют взаимное положение циклов λ_{β_1} , λ_{β_2} и λ_{γ_1} , λ_{γ_2} однозначно (см. рис. 10).

Из круговой молекулы точки N цикл λ_{α_1} гомологичен с точностью до ориентации циклу λ_{γ_1} . Вопрос об его ориентации будет решен в п. 3.6.

Относительно цикла λ_{α_3} пока сохраняется полная неопределенность, связанная с тем, что мы не знаем r -меток в семействе Π молекул точек z_1 и z_2 .

Рассмотрим молекулу в прообразе вертикальной прямой, проходящей справа от всех особых точек бифуркационной диаграммы. Это так называемая молекула больших энергий (для исходного гамильтониана Клебша H). Выпишем матрицы склейки на ее ребрах для случая $g^2 < p_1$, насколько они нам сейчас известны:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \\
A_{\alpha_3} \swarrow & & \nearrow A_{\alpha_2} \\
& C_2 \overline{\gamma_2} & \\
A_{\alpha_3} \swarrow & & \searrow A_{\alpha_2} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Как известно, молекула больших энергий в механики твердого тела *всегда* имеет топологический тип $\mathbb{R}P^3$ [1, т.2, гл.5]. Имеем $H_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow N(W^*) = 2$, и применяя формулу Топалова (1.1):

$$b^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{0}{\pm 1} + \frac{0}{\pm 1} \right) = \pm 2 \Leftrightarrow ab = \pm 1$$

В результате для изображения цикла λ_{α_3} на рис. 10 остается четыре варианта: $(1, -1)$, $(1, -3)$, $(-1, 1)$ и $(-1, 3)$. Вычисляя первые строки матриц склейки на ребрах круговых молекул точек z_1 и z_2 для каждой из альтернатив, убеждаемся, что только для случая $a = b = 1 \Leftrightarrow \lambda_{\alpha_3} = (1, -1)$ все четыре метки ε равны $+1$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_3} \\ * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ -\frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon = +1, \\
\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_3} \\ * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \frac{\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon = +1,
\end{aligned}$$

что в силу предложения 1 должно выполняться с необходимостью. Тем самым положение цикла λ_{α_3} в семействе Π нами установлено однозначно.

Замечание 4 Индекс пересечения циклов λ_{α_3} с λ_{β_1} и λ_{α_3} с λ_{β_2} равен 1, следовательно, на ребрах круговых молекул точек z_1 и z_2 семейства Π

метки $r = 0$, а базис $(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_1})$ является допустимым для бифуркации α_3 .

Замечание 5 К данному моменту нами установлено, что молекула больших энергий в случае Клебша имеет вид:

$$\begin{array}{ccc}
 r = 0 & & r = 0 \\
 \varepsilon = 1 & & \varepsilon = ? \\
 A^{(II)} \searrow & & \nearrow A^{(I)} \\
 & C_2 & \\
 A^{(II)} \nearrow & n = 2 & \searrow A^{(I)} \\
 r = 0 & & r = 0 \\
 \varepsilon = 1 & & \varepsilon = ?
 \end{array}$$

Осталось уяснить взаимное положение циклов в семействе I.

На этом семействе определены циклы $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\gamma_1}$ и λ_{γ_2} , при этом известно, что циклы λ_{α_1} и λ_{γ_1} с точностью до ориентации гомологичны, а пара $(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_1})$ образует базис положительной границы атома.

Ориентация цикла λ_{α_1} будет найдена в п. 3.6. Установим положение цикла λ_{α_5} . Выпишем матрицы склейки для молекулы больших энергий для случая $g^2 > p_2$, насколько они на данный момент нам известны:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} a' & b' \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{\alpha_3} \searrow & & \nearrow A_{\alpha_5} \\
 & C_2_{\gamma_1} & \\
 A_{\alpha_3} \nearrow & & \searrow A_{\alpha_5} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} a' & b' \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Сделаем важное

Замечание 6 В случае Клебша молекула больших энергий одинакова для любых значений g .

Действительно, соответствующие изоэнергетические поверхности могут быть переведены друг в друга гладкой изотопией с изменением параметра g , не встречая особых точек бифуркационной диаграммы. Следовательно, тип слоения Лиувилля на них не изменится.

Рассматривая ранее молекулу больших энергий в случае $g^2 < p_1$, мы установили, что метка r на ребрах семейства I равна 0, а метка $n = 2$. В п. 3.6 будет доказано, что метка $\varepsilon = +1$. В результате на коэффициенты a' и b' имеем условия:

$$r = 0 \Rightarrow a'/b' \in \mathbb{Z},$$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow b' > 0 \Rightarrow b' = 1,$$

$$n = 2 \Leftrightarrow n = 2 \left[-\frac{1}{1} \right] + 2 \left[\frac{a'}{b'} \right] = 2 \Leftrightarrow a' = 2.$$

Тем самым положение цикла λ_{α_5} однозначно установлено.

Для семейства I отдельно следует обговорить следующее обстоятельство. В случаях $g^2 < p_1$ и $g^2 > p_2$ алгоритмом вычисления меченой молекулы для произвольной допустимой кривой (п. 2.7) можно пользоваться без каких-либо изменений. Однако в случае $p_1 < g^2 < p_2$, когда в семействе I “сидит” особая точка P типа фокус-фокус (см. рис. 9 с), так можно поступать лишь для кривых, проходящих слева от нее, то есть вдоль остова бифуркационной диаграммы. В случае, когда кривая проходит справа от точки P , метки молекулы устанавливаются из замечания 6.

3.6 Разрешение неопределенностей с ориентациями

Для завершения Лиувиллевой классификации системы Клебша нам осталось устранить неопределенность, связанную с ориентацией вторых базисных циклов бифуркаций α_1, α_2 и α_5 . После этого ориентации циклов λ_{α_1} и λ_{α_2} выбираются исходя из требования согласованности ориентаций базисов (см. п. 1.2.5). Воспользуемся следующим фундаментальным фактом.

Теорема 11 *Случаи Клебша и Эйлера лиувиллево эквивалентны при достаточно больших значениях энергии.*

Доказательство:

Будем рассматривать случай Клебша, задаваемый парой $(H_\varepsilon, F_\varepsilon)$, как возмущение случая Эйлера, получающегося при $\varepsilon = 0$. Зафиксируем значение $g \neq 0$ и будем рассматривать однопараметрическое семейство бифуркационных диаграмм $H_\varepsilon \times F_\varepsilon$. Анализ показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $c_i \rightarrow 0 \Rightarrow p_1, p_2 \rightarrow 0$, поэтому, начиная с некоторого достаточно малого значения ε , бифуркационная диаграмма примет вид, указанный на рис. 9 d, а в пределе превратится в бифуркационную диаграмму случая Эйлера. Отметим, что бифуркационная диаграмма случая Эйлера (см. рис. 12) качественно не отличается от бифуркационной диаграммы Клебша при $g^2 > p_2$.

Рассмотрим вертикальную прямую, которая в процессе деформации остается справа от особых точек бифуркационной диаграммы. Из приведенных выше рассуждений следует, что это всегда можно сделать. Такая прямая соответствует молекуле больших энергий. Она испытывает гладкую изотопию и слоение в ее прообразе не меняется.

Для случая $g = 0$ утверждение теоремы также верно в силу замечания б.

Теорема доказана.

Молекула больших энергий случая Эйлера известна из [1, т.2, гл.5]: она совпадает с молекулой, указанной в замечании 5, при этом все ее метки $\varepsilon = +1$. Следовательно, и в случае Клебша метки ε , относящиеся к ребрам семейства I — единственные, оставшиеся до настоящего момента невычисленными, — равны $+1$. Заметим, что остальные метки молекулы были вычислены нами без использования *a priori* эквивалентности Эйлера и Клебша. То что эти метки совпали с ожидаемыми говорит в пользу правильности проделанного анализа.

Теперь воспользуемся найденной молекулой больших энергий Клебша для разрешения неопределенностей с ориентациями циклов.

При $g^2 < p_1$ на ребре семейства I имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \pm\lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_2} \\ \lambda_{\gamma_1} \end{pmatrix}.$$

Из-за того, что метка $\varepsilon = 1$, заключаем, что имеет место случай знака “+”, и правильный вариант допустимого базиса для α_2 :

$$(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\gamma_2}) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\alpha_2}}$$

Рассматривая случай $g^2 > p_2$, для бифуркации α_5 имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \pm\lambda_{\gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ -\lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix}, \varepsilon = 1 \Rightarrow (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\gamma_1}) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\alpha_5}}$$

Ориентацию второго базисного цикла для бифуркации α_1 установим исходя из особенности точки N типа седло-центр. Согласно [1, т.1, гл.9] круговая молекула особенности типа седло-центр обладает свойством: $\varepsilon = +1$ на всех исходящих ребрах и $\varepsilon = -1$ на всех входящих ребрах, или наоборот — в зависимости от ориентации на Q_τ^3 . Вычислим ε -метки на ребрах семейства I:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ -\lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon = 1.$$

Тогда на ребрах семейства II должна стоять метка $\varepsilon = -1$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \pm \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}, \varepsilon = -1 \Rightarrow (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} A_{\boxed{\alpha_1}}$$

и допустимый базис для бифуркации α_1 теперь установлен.

3.7 Вычисление монодромии особенности типа фокус-фокус

Положение равновесия P при $p_1 < g^2 < p_2$ является особенностью типа фокус-фокус. Как известно [1, т.1, гл.9], всякая связная компонента сингулярного слоя в этом случае — это тор с m перетяжками. Эти перетяжки и есть неподвижные точки действия Пуассона. Количество неподвижных точек на связной компоненте сингулярного слоя определяет класс ливиллевой эквивалентности особенности фокус-фокус и, в частности, ее монодромию. Если на торе фиксировать некоторый базис, то монодромия задается матрицей преобразования этого базиса при обходе особенности по окружности.

Известно, что если количество перетяжек равно m , то в подходящем базисе матрица монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

Нам известно, что в прообразе точки P лежит две неподвижных точки, однако не ясно, располагаются ли они на единственной компоненте связности сингулярного слоя, или же сингулярный слой состоит из двух компонент, то есть двух торов, каждый из которых имеет по одной перетяжке. Проведенный в предыдущих пунктах анализ позволит нам легко вычислить монодромию и тем самым убедиться, что имеет место второй вариант.

Действительно, рассмотрим бифуркационную диаграмму при $p_1 < g^2 < p_2$ (рис. 9 с) и вычислим матрицу склейки на ребре семейства I молекулы больших энергий. Из замечания 6 нам известны все метки, поэтому с необходимостью получаем:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{\alpha_3} \searrow & & \nearrow A_{\alpha_2} \\
 & C_2 \gamma_1 & \\
 A_{\alpha_3} \nearrow & & \searrow A_{\alpha_2} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Путь вокруг точки P представим в виде композиции пути, соединяющего дугу α_2 с дугой γ_1 слева от точки P , и пути, соединяющего дугу γ_1 с дугой α_2 справа от нее. Матрица склейки первого пути равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а матрица склейки второго пути есть матрица склейки на ребре семейства I молекулы больших энергий при $p_1 < g^2 < p_2$ и была только что вычислена. В итоге, находим матрицу монодромии U :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться, что эта матрица лежит в одном классе сопряженности с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Действительно:

$$U = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.8 Полный список изоэнергетических молекул случая Клебша

В предыдущих пунктах нами получен полный список допустимых систем координат и установлено взаимное положение циклов λ_* в случае Клебша. Данная информация позволяет вычислить меченую молекулу любой допустимой кривой в соответствии с алгоритмом п. 2.7.

В качестве примера рассмотрим важный случай изоэнергетических молекул. Как уже отмечалось, изоэнергетические поверхности при отображении момента $H_0 \times F_0$ переходят в прямые $\alpha h + \beta f = c$ с углом наклона из зон I и II рис. 8. Различные сечения бифуркационной диаграммы такими прямыми показаны на рис. 11. Часть из них для удобства изображена кривыми, которые соответствуют изотопным им прямым при других значениях параметров c_1, c_2 и c_3 .

Номерам прямых на рис. 11 соответствуют молекулы в таблицах 3 и 4. В первой приведены молекулы с матрицами склеек, во второй — меченые молекулы. В последней таблице также указаны топологические типы соответствующих изоэнергетических поверхностей Q_h^3 , вычисленные А. А. Ошемковым [17]. За N^3 обозначена связная сумма $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$.

С учетом того, что молекулы номер 1 и 11, а также 10 и 12 совпадают с точностью до выбора ориентации на Q_h^3 , получаем утверждение теоремы:

Теорема 12 *Полный список изоэнергетических молекул случая Клебша приведен в таблице 4. При разных значениях постоянной площадей g и энергии h обнаруживается 10 неэквивалентных слоений Лиувилля.*

3.9 Эквивалентности случаев Эйлера, Клебша и Стеклова

Проведенный анализ позволяет в частности установить естественные эквивалентности между случаями интегрируемости Эйлера, Клебша и Стеклова.

Теорема 13

1. При достаточно больших значениях интегралов энергии случаи Эйлера, Клебша и Стеклова лиувиллево эквивалентны.
2. При достаточно больших по модулю значениях постоянной площадей g случаи Клебша и Стеклова лиувиллево эквивалентны случаю Эйлера с ненулевой постоянной площадей как системы на четырехмерных симплектических многообразиях (то есть в смысле определения 5).

Доказательство:

Первое утверждение теоремы сразу следует из совпадения молекул больших энергий трех систем.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим бифуркационные диаграммы случая Клебша при $g^2 > p_2$ и случай Эйлера при $g' \neq 0$ (рис. 12). Случай Стеклова рассматривается аналогично. Утверждается существование послойного диффеоморфизма четырехмерных поверхностей:

$$\Phi : M_g^4 \rightarrow M_{g'}^4$$

Здесь поверхность M соответствует случаю Клебша, а M' — случаю Эйлера; $g^2 > p_2$ и $g' \neq 0$.

Рассмотрим разрезы 1, 2, 1' и 2', разделяющие бифуркационные диаграммы на зоны, обозначенные римскими цифрами.

Прообраз каждой из зон I, I', III и III' суть несвязное объединения двух одинаковых окрестностей особенности типа центр-центр. На рис. 12 изображен замкнутый диск D_1 и открытый диск D_2 , каждый из которых расслоен на окружности. Окрестность особенности центр-центр может быть задана

как $D_1 \times D_2$ (то есть произведение 2-атомов $A \times A$). Краем многообразия служит расслоенное на торы Лиувилля полноторие $\partial D_1 \times D_2$.

Прообразы зон II и II' являются четырехмерными окрестностями особенности седло-центр типа $A \times C_2$ и аналогичным образом могут быть представлены в виде прямого произведения открытого диска D_3 и двумерной поверхности C_2 с краем ∂C_2 из четырех окружностей. Две из них соответствуют разрезу 1 и образуют часть края ∂C_2^+ , а две других — разрезу 2, их обозначим за ∂C_2^- . Краем четырехмерного многообразия служит $\partial C_2 \times D_3 = (\partial C_2^+ \times D_3) \cup (\partial C_2^- \times D_3)$ — объединение четырех расслоенных на торы Лиувилля полноторий.

Многообразия M_g^4 и $M_{g'}^4$ можно получить, приклеивая к “базе” $C_2 \times D_3$ “ручки” $D_1 \times D_2$ с сохранением структуры слоения Лиувилля. Для этого требуется указать послойный диффеоморфизм двух полноторий. От выбора пар склеиваемых торов результат, очевидно, не зависит. А способ склейки каждой пары торов целиком определяется метками на соответствующем ребре молекулы больших энергий. Но они одинаковы, следовательно, многообразия M_g^4 и $M_{g'}^4$ будут послойно диффеоморфны.

Теорема доказана.

Глава 4

Лиувиллева классификация интегрируемого случая Соколова

4.1 Гамильтониан и дополнительный интеграл случая Соколова

Интегрируемый случай Соколова [7], обнаруженный в 2001 году, задается на $e(3)^*$ гамильтонианом H :

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + r_2s_3 - \frac{1}{2}r_3^2.$$

Дополнительный интеграл F четвертой степени имеет вид:

$$F = s_3^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(r_2s_3 - r_3s_2) + r_2^2 + r_3^2) + 2s_3(s_2 - r_3)(r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3).$$

Отметим, что этот случай интегрируемости был обнаружен при помощи компьютерных методов. В настоящей главе полностью исследовано лиувиллево системы Соколова: дана классификация невырожденных положений равновесия, вычислены все круговые и изоэнергетические молекулы.

4.2 Результаты П. Е. Рябова

Грубая лиувиллева классификация интегрируемого случая Соколова была получена Рябовым [24]. В этом пункте мы вкратце приводим его результаты.

Теорема 14 (П. Е. Рябов [24]) На плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$ бифуркационная диаграмма системы Соколова представляет собой объединение гладких кривых Γ_i , $i = 1, \dots, 5$, где

$$\Gamma_1: f = -g^2, h \geq \frac{1}{2}(g^2 - 1),$$

$$\Gamma_2: f = 2g^2h - g^4, \frac{1}{2}(g^2 - 1) \leq h \leq g^2,$$

$$\Gamma_3: f = (h + \frac{1}{2})^2 - g^2, h \geq g^2 - \frac{1}{2},$$

$$\Gamma_4: f = h^2, h \geq g^2 - \frac{1}{4},$$

$$\Gamma_5: f = 0,$$

$$h \geq 0, \text{ если } 0 \leq g \leq \frac{1}{2},$$

$$h \geq g - \frac{1}{2}, \text{ если } \frac{1}{2} \leq g \leq 1,$$

$$h \geq \frac{g^2}{2}, \text{ если } g \geq 1.$$

При противоположных значениях g получаем изоморфные системы, поэтому далее будем предполагать, что $g \geq 0$. Следует различать четыре качественно различных вида бифуркационных диаграмм (см. рис. 13):

a) $g = 0$,

b) $0 < g < \frac{1}{2}$,

c) $\frac{1}{2} < g < 1$,

d) $g > 1$.

Отметим, что при $g = 0$ в прообразе левой стенки бифуркационной диаграммы лежат критические торы. Далее будем рассматривать только не критические значения g .

На рис. 13 гладкие дуги бифуркационной диаграммы обозначены малыми греческими буквами с индексами. В их прообразах лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, описываемые 3-атомами. Укажем их типы:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 : 2A & \beta_1 : 2B \\
\alpha_2 : 2A & \beta_2 : 2B \\
\alpha_3 : 2A & \beta_2 : 2B \\
\alpha_4 : 4A & \gamma_1 : C_2 \\
\alpha_5 : 2A & \gamma_2 : 2C_2 \\
\alpha_6 : 2A & \delta_1 : 2A \\
& \delta_2 : 2A^*
\end{array}$$

Семейства торов Лиувилля обозначены римскими цифрами I-V. Каждая точка семейств I-IV образована парой симметричных относительно инволюции $\Phi : (s, r) \rightarrow (-s, -r)$ торов. Семейство V состоит из четырех компонент связности.

В прообразе прямых A, B, C, D, E, F, G, H и I лежат изоэнергетические поверхности Q_h^3 с разным типом лиувиллевого слоения. П. Е. Рябов [24] указал грубые молекулы, которые им соответствуют, и вычислил топологические типы этих поверхностей. Они таковы: A, B — $2S^2$; C, D, H, I — $S^1 \times S^2$; G — $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$; E, F — $\mathbb{R}P^3$. Нашей главной задачей является вычисление r , ε и n меток этих молекул.

4.3 Невырожденные положения равновесия в случае Соколова

В этом пункте мы даем классификацию невырожденных положений равновесия системы Соколова и вычисляем их круговые молекулы.

Теорема 15 *Условия невырожденности, типы и представления в виде почти прямого произведения для положений равновесия, лежащих в прообразах точек M, N, P, Q, L, R бифуркационной диаграммы указаны в таблице.*

точка	условия невырожденности	тип	n/n произведение
M	$g > 0$	центр-центр	$2(A \times A)$
N	$0 < g < \frac{1}{2}$	седло-центр	$2(A \times B)$
P	$0 < g < 1$	седло-седло	$B \times C_2$
Q	$\frac{1}{2} < g < 1$	седло-центр	$2(A \times C_2)$
L	$g > \frac{1}{2}$	центр-центр	$2(A \times A)$
R	$g > 1$	седло-центр	$A \times C_2$

Круговые молекулы этих особых точек приведены в таблице 5. Других критических точек у гамильтониана H на M_g^4 нет.

Доказательство:

Система уравнений Гамильтона $v = \text{sgard}H$, записанная в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$, имеет вид:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \dot{r}_i = \{r_i, H\} \Leftrightarrow$$

$$\dot{s}_1 = (-s_2 + r_3)(r_2 + s_3), \quad \dot{r}_1 = r_3 s_2 - 2r_2 s_3 - r_2^2,$$

$$\dot{s}_2 = s_3 s_1 + s_1 r_2 - r_1 r_3, \quad \dot{r}_2 = -s_1 r_3 + 2r_1 s_3 + r_1 r_2,$$

$$\dot{s}_3 = -r_1 s_3, \quad \dot{r}_3 = s_1 r_2 - s_2 r_1$$

Приравнивая к нулю правые части уравнений, находим координаты критических точек H на M_g^4 . Найденные точки также являются точками положения равновесия системы.

	усл. сущ.	кол-во	координаты
P, Q	$g \in \mathbb{R}$	2	$\pm(g, 0, 0, 1, 0, 0)$
M	$g \in \mathbb{R}$	2	$\pm \left(0, \frac{g^2}{\sqrt{g^2+1}}, -\frac{g}{\sqrt{g^2+1}}, 0, \frac{g}{\sqrt{g^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{g^2+1}} \right)$
N, L	$g \in \mathbb{R}$	2	$\pm \left(0, \frac{g}{\sqrt{g^2+\frac{1}{4}}}, \sqrt{g^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2\sqrt{g^2+\frac{1}{4}}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{g^2+\frac{1}{4}}}, \frac{g}{\sqrt{g^2+\frac{1}{4}}} \right)$
Q	$\frac{1}{2} \leq g \leq 1$	4	$\pm (\mp\sqrt{2g-1}, \sqrt{1-g}, 0, \mp\sqrt{2g-1}, \sqrt{1-g}, \sqrt{1-g})$

Докажем, что для каждой из точек, собственные значения оператора A_H попарно различны, отличны от нуля и соответствуют указанному типу.

Начнем с вычисления матрицы линеаризации A_H^6 гамильтонова потока $v = \text{sgrad}H$ в $e(3)^*$ в общем виде:

$$A_H^6 = \begin{pmatrix} 0 & -(r_2 + s_3) & -s_2 + r_3 & 0 & -s_2 + r_3 & r_2 + s_3 \\ r_2 + s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & s_1 & -r_1 \\ 0 & 0 & -r_1 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3 + r_2) & s_2 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2s_3 + r_2 & r_1 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим точки P и R . В прообразе каждой лежит по два симметричных положения равновесия с координатами $\pm(g, 0, 0, 1, 0, 0)$. Проведем вычисления для случая знака “+”. В качестве локальных координат на M_g^4 возьмем (s_2, s_3, r_2, r_3) . Тогда канонический базис в касательном простран-

стве задается матрицей:

$$TM_g^4 = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{r_1} & -\frac{r_3}{r_1} & \frac{r_2 s_1 - s_2 r_1}{r_1^2} & \frac{r_3 s_1 - s_3 r_1}{r_1^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_2}{r_1} & -\frac{r_3}{r_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{P,R}M_g^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И мы легко находим матрицу искомого оператора $A_H = A_H^6|_{T_{P,R}M}$:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & g & g & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -g \\ -1 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение на собственные значения:

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + g - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{1 - g}$$

Как видно, при $g = 1$ происходит вырождение: точка P превращается в точку R , меняя свой тип с седло-седло на седло-центр.

Проделаем ту же процедуру для точки M . В ее прообразе лежит два симметричных положения равновесия:

$$\pm \left(0, \frac{g^2}{\sqrt{g^2 + 1}}, -\frac{g}{\sqrt{g^2 + 1}}, 0, \frac{g}{\sqrt{g^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{g^2 + 1}} \right).$$

Проведем вычисления для случая знака “-”. В качестве локальных координат возьмем (s_1, s_2, r_1, r_2) , тогда:

$$TM_g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{r_1}{r_3} & -\frac{r_2}{r_3} & \frac{r_1 s_3 - s_1 r_3}{r_3^2} & \frac{r_2 s_3 - s_2 r_3}{r_3^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{r_1}{r_3} & -\frac{r_2}{r_3} \end{pmatrix} \Rightarrow T_M M_g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

Оператор A_H^6 переводит данный базис касательного пространства в вектора:

$$A_H^6 \cdot T_M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g(1+g^2)}{\sqrt{g^2+1}} & 0 & \frac{1+g^2}{\sqrt{g^2+1}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{g^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{\sqrt{g^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1+2g^2}{\sqrt{g^2+1}} & 0 & -\frac{g^3}{\sqrt{g^2+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{g^2+1}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{g^2+1}} & 0 \\ -\frac{g}{\sqrt{g^2+1}} & 0 & \frac{g^2}{\sqrt{g^2+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Разлагая найденные вектора по выбранному базису в $T_M M_g^4$, получаем матрицу оператора $A_H = A_H^6|_{T_M M}$:

$$\sqrt{g^2+1} \cdot A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ g(1+g^2) & 0 & 1+2g^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & g \\ 1+g^2 & 0 & -g^3 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате находим собственные значения $\det(\sqrt{g^2+1} \cdot A_H - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{g^2+1}$, $\lambda_{3,4} = \pm i(g^2+1)$, соответствующие типу центр-центр. При $g = 0$ они равны $(\pm i, \pm i)$, и происходит вырождение.

Рассматривая положение равновесия, соответствующее знаку “+”, для точек N и L в локальных координатах (s_1, s_2, r_1, r_2) , имеем:

$$T_{N,L}M_g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2g} & 0 & \frac{1}{4g^2} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2g} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{g^2 + \frac{1}{4}} \cdot A_H^6 \cdot T_{N,L} = \begin{pmatrix} 0 & -(g^2 + \frac{1}{4}) & 0 & -\frac{1}{2g}(g^2 + \frac{1}{4}) \\ (g^2 + \frac{1}{4}) & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4} - g^2) & 0 \\ 0 & (g + \frac{1}{2g}) & 0 & -2(g^2 + \frac{1}{2}) \\ -g & 0 & 2g^2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sqrt{g^2 + \frac{1}{4}} \cdot A_H = \begin{pmatrix} 0 & (g^2 + \frac{1}{4}) & 0 & -g \\ -(g^2 + \frac{1}{4}) & 0 & \frac{1}{g}(g^2 + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & -g & 0 & 2g^2 \\ -\frac{1}{2g}(g^2 + \frac{1}{4}) & 0 & -2(g^2 + \frac{1}{2}) & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения оператора $\sqrt{g^2 + \frac{1}{4}} \cdot A_H$:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 16g^4} \\ \lambda_{3,4} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{16g^4 + 12g^2 + 2} \end{cases}$$

При $g = \frac{1}{2}$ имеем $\lambda_{1,2} = 0$. Мы видим, что точка вырождается, меняя свой тип с седло-центр, на центр-центр.

Наконец, рассмотрим положение равновесия

$$\left(-\sqrt{2g-1}, \sqrt{1-g}, 0, -\sqrt{2g-1}, \sqrt{1-g}, \sqrt{1-g} \right),$$

лежащее в прообразе точки Q , в локальных координатах (s_2, s_3, r_2, r_3) . Имеем:

$$T_Q M_g^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-g}{2g-1}} & \sqrt{\frac{1-g}{2g-1}} & 0 & -\sqrt{\frac{1-g}{2g-1}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-g}{2g-1}} & \sqrt{\frac{1-g}{2g-1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2g-1} \cdot A_H = \begin{pmatrix} 1-g & 0 & g-1 & g \\ 2-3g & 2g-1 & 1-3g & 1-g \\ -g & 0 & 2-3g & -g \\ 4g-3 & 0 & 1 & 2g-2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения оператора $\sqrt{2g-1} \cdot A_H$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm(2g-1) \\ \lambda_{3,4} = \pm 2i\sqrt{-2g^2+3g-1} \end{cases}$$

свидетельствуют о том, что при $\frac{1}{2} < g < 0$ точка невырождена и имеет тип седло-центр.

Итак мы закончили вычисление собственных значений оператора A_H , но необходимо еще проверить его линейную независимость с оператором A_F . Из-за того, что интеграл F является сложным полиномом четвертой степени, сделать это не так легко. Поэтому мы вычислим лишь часть коэффициентов матрицы линеаризации A_F^6 векторного поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}F$ в $e(3)^*$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{r_1, F\} &= -s_3r_2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(r_2s_3 - r_3s_2) + r_2^2 + r_3^2) + \\
&\quad + s_3^2(s_2r_3 - s_3r_2 - r_2^2 - r_3^2) + \\
&\quad + (r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3)(s_3r_3 - s_2r_2 + r_2r_3), \\
\frac{1}{2}\{r_2, F\} &= s_3r_1(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(r_2s_3 - r_3s_2) + r_2^2 + r_3^2) + \\
&\quad + s_3^2(s_3r_1 - s_1r_3 + r_1r_2) + (r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3)(s_2r_1 - r_2r_1), \\
\frac{1}{2}\{r_3, F\} &= s_3^2(s_1r_2 - s_2r_1 + r_3r_1) - (r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3)r_1s_3.
\end{aligned}$$

$$(A_F^6)_{i+3,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} \{r_i, F\}, 1 \leq i, j \leq 3,$$

$$(A_F^6)_{i+3,j+3} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} \{r_i, F\}, 1 \leq i, j \leq 3,$$

Рассмотрим точки P и R . Вектор $v = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^t \in T_{P,R}M$ под действием оператора $A_H = A_H^6|_{TM}$ переходит в вектор $(*, *, *, 0, 0, -1)^t$, а под действием оператора $A_F = A_F^6|_{TM}$ — в вектор $(*, *, *, (A_F^6)_{4,2}, (A_F^6)_{5,2}, (A_F^6)_{6,2})^t = (*, *, *, 0, g, 0)^t$. Последние два вектора заведомо линейно независимы при $g \neq 0$, а следовательно и операторы A_H и A_F будут линейно независимы.

Для остальных положений равновесия линейную независимость операторов A_H и A_F усматриваем из соотношений, приведенных ниже.

- точка M :

$$\begin{aligned}
v &= (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t \in T_M M, \\
A_H v &= \left(*, *, *, 0, -\frac{g}{\sqrt{g^2+1}}, -\frac{g^2}{\sqrt{g^2+1}} \right)^t, \\
A_F v &= \left(*, *, *, 0, 0, -\frac{g^2}{(g^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)^t.
\end{aligned}$$

$A_H v$ и $A_F v$ заведомо линейно независимы при $g \neq 0$.

- точки N и L :

$$v = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t \in T_{N,L}M,$$

$$A_H v = \left(*, *, *, 0, \frac{4g^2}{\sqrt{4g^2+1}}, -\frac{2g}{\sqrt{4g^2+1}} \right)^t,$$

$$A_F v = \left(*, *, *, 0, \frac{g^2(4g^2-1)}{\sqrt{4g^2+1}}, \frac{(4g^2-1-16g^3)(4g^2-1)}{4(4g^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)^t,$$

$A_H v$ и $A_F v$ заведомо линейно независимы при $g \neq 0, \pm \frac{1}{2}$.

- точка Q :

$$v = \left(\sqrt{\frac{1-g}{2g-1}}, 1, 0, 0, 0, 0 \right)^t \in T_Q M,$$

$$A_H v = \left(*, *, *, \sqrt{1-g}, \frac{g-1}{\sqrt{2g-1}}, \frac{g}{\sqrt{2g-1}} \right)^t,$$

$$A_F v = \left(*, *, *, -g\sqrt{1-g}, -g\sqrt{2g-1}, 0 \right)^t.$$

$A_H v$ и $A_F v$ заведомо линейно независимы при $\frac{1}{2} < g < 1$.

Тем самым закончена проверка условий невырожденности. Отметим что при проведении промежуточных выкладок мы активно пользовались пакетом символьных вычислений *Matlab 6.5 Symbolic Math Toolbox*.

После этого типы, представления в виде почти прямых произведений и круговые молекулы точек M , N , P , Q , L , и R определяются по таблицам приведенным в [1, т.1, гл.9].

Теорема доказана.

4.4 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Точки z_1, z_2, z_3 и z_4 соответствуют неботтовским критическим окружностям системы Соколова.

Теорема 16 *Круговые молекулы точек z_1, z_2, z_3 и z_4 приведены в таблице 5.*

Доказательство:

В силу предложения 1 остается вычислить метки r на ребрах, ведущих в атомы A . Будем за $r(x-y)$, обозначать r -метку ребра которое соединяет

бифуркации x и y . Рассмотрим ребра круговой молекулы точки z_1 , относящиеся к семейству V. Они соединяют бифуркации β_1 и α_4 . Из круговой молекулы точки P имеем $r(\beta_1 - \gamma_2) = 0$, точки Q — $r(\gamma_2 - \alpha_4) = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток (см. п. 2.4), $r(\beta_1 - \alpha_4) = 0$. Аналогично получаем:

- точка z_1 :

$$\text{семейство I: } r(\beta_1 - \gamma_1) = 0, r(\gamma_1 - \alpha_2) = \infty \Rightarrow r(\beta_1 - \alpha_2) = 0$$

- точка z_2 :

$$\text{семейство IV: } r(\delta_1 - \alpha_6) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_6) = \infty \Rightarrow r(\delta_1 - \gamma_2) = 0$$

- точка z_4 :

$$\text{семейство II: } r(\beta_2 - \gamma_1) = 0, r(\gamma_1 - \alpha_3) = \infty \Rightarrow r(\beta_2 - \alpha_3) = 0$$

$$\text{семейство III: } r(\beta_2 - \gamma_2) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_5) = \infty \Rightarrow r(\beta_2 - \alpha_5) = 0$$

$$\text{семейство IV: } r(\beta_2 - \gamma_2) = 0, r(\gamma_2 - \alpha_6) = \infty \Rightarrow r(\beta_2 - \alpha_6) = 0$$

В результате не вычисленной остается только метка r на ребре $A-B$ молекулы точки z_3 . В действительности, она равна $\frac{1}{2}$. Этот факт мы получим, вычислив изоэнергетические молекулы. Здесь мы приводим его для полноты картины.

Теорема доказана.

4.5 Построение допустимых систем координат

Допустимые системы координат на 3-атомах кривых $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ выбираются исходя из 4-окрестности точки седло-седло P , которая имеет тип прямого произведения $B \times C_2$ — такой же, как в случае Стеклова. Стрелочки указывают направление роста F .

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_2}) \\
& & C_2 \boxed{\gamma_1} \\
(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (I) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_1}, -\lambda_{\beta_2}) \\
(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (V) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (III) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_2}) \\
& & C_2 \boxed{\gamma_2} \\
(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_1}) & \begin{array}{c} (V) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma_2}, -\lambda_{\beta_2}) \\
& & \begin{array}{c} (V) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_2}) \\
(\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\gamma_1}) & \begin{array}{c} (I) \\ \longleftarrow \end{array} B \boxed{\beta_1} & \begin{array}{c} (V) \\ \swarrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_2}) \\
& & \begin{array}{c} (III) \\ \swarrow \end{array} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}) \\
(\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\gamma_1}) & \begin{array}{c} (II) \\ \longleftarrow \end{array} B \boxed{\beta_2} & \begin{array}{c} (IV) \\ \swarrow \end{array} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2})
\end{array}$$

Допустимые системы координат на атомах A выберем, пользуясь тем, что на соответствующих ребрах круговых молекул точек M, z_1, z_2, z_4 r -метки равны 0. Для бифуркации α_1 , ориентация второго базисного цикла устанавливается исходя из того, что при $g \rightarrow 0$ критические окружности атомов α_1 и γ_1 бесконечно сближаются. Получаем:

$$\begin{array}{l}
A \boxed{\alpha_1} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\gamma_1}) \\
(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(I)} A \boxed{\alpha_2} \\
(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(II)} A \boxed{\alpha_3} \\
(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(V)} A \boxed{\alpha_4} \\
(\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(III)} A \boxed{\alpha_5} \\
(\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(IV)} A \boxed{\alpha_6}
\end{array}$$

$$(\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\gamma_2}) \xrightarrow{(IV)} A_{\boxed{\delta_1}}$$

Мы не будем выбирать вторые базисные циклы для атомов $B_{\boxed{\beta_3}}$ и $A_{\boxed{\delta_2}}^*$ в терминах λ_* . Обозначим их $x_\beta, -y_\beta, -x_\delta, y_\delta$.

$$\begin{array}{ccc} (\lambda_{\beta_3}, x_\beta) & \xrightarrow{(III)} & \\ & \searrow & \\ & & B_{\boxed{\beta_3}} \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\beta_3}, -y_\beta) \\ & \nearrow & \\ (\lambda_{\beta_3}, x_\beta) & \xrightarrow{(IV)} & \\ & & \\ (\lambda_{\delta_2}, -x_\delta) & \xrightarrow{(II)} & A_{\boxed{\delta_2}}^* \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_3}, y_\delta) \end{array}$$

Из замечания 2 следует, что

$$\begin{aligned} x_\beta &= \lambda_{\beta_1} + k_1 \lambda_{\gamma_2}, \\ y_\beta &= \lambda_{\beta_2} + k_2 \lambda_{\gamma_2}, \\ x_\delta &= \lambda_{\gamma_2} + k_3 \lambda_{\delta_2}, \\ y_\delta &= \lambda_{\gamma_1} + k_4 \lambda_{\delta_2}, \end{aligned}$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$ — неизвестны.

4.6 Определение взаимного расположения базисных циклов

Проанализируем информацию из круговых молекул и списка допустимых систем координат для определения взаимного расположения циклов λ_* . Будем рассматривать семейства торов Лиувилля I-V поочередно.

Семейство I

На каждом торе этого семейства бифуркации определяют циклы $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_1}$. Из круговых молекул особых точек M, P, R, z_1 в силу предложения 3 получаем следующую информацию об индексах пересечения циклов λ_* :

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}$	1
$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_1}$	1
$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\gamma_1}$	0
$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}$	1

С другой стороны, базисы на положительных и отрицательных границах атомов должны иметь разную ориентацию. В силу чего из списка допустимых систем координат следует, что базисы $(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\gamma_1})$ должны иметь одинаковую ориентацию, а базис $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2})$ — противоположную им.

Несложно убедиться, что эти условия определяют взаимное расположение циклов $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}$ и λ_{γ_1} однозначно, а про цикл λ_{β_1} можно утверждать, что

$$\lambda_{\beta_1} = \lambda_{\alpha_1} + l_1 \lambda_{\gamma_1}, l_1 \in \mathbb{Z}.$$

На рис. 14 фундаментальная группа тора изображена в виде целочисленной решетки на плоскости, а циклы — в виде векторов на ней. Это позволяет наглядно отобразить собранную информацию.

Семейство II

Циклы семейства: $\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\delta_2}$.

Индексы пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\delta_2}$	0
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_1}$	1
$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\gamma_1}$	0
$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}$	1

Из меток ε круговой молекулы точки z_3 следует, что $\lambda_{\beta_2} = \lambda_{\delta_2}$.

При этом базисы $(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_2}), (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_1})$ имеют одинаковую ориентацию.

Перечисленные условия однозначно определяют взаимное расположение циклов λ_* этого семейства. Результат изображен на рис. 14.

Семейство III

Циклы семейства: $\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\delta_2}$.

Индексы пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\delta_2}$	0
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}$	1
$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\gamma_2}$	0
$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}$	1

Из круговой молекулы точек z_2 и z_3 следует, что $\lambda_{\beta_2} = \lambda_{\delta_2}$ и $\lambda_{\beta_3} = \lambda_{\gamma_2}$.

При этом базисы $(\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2})$ и $(\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2})$ имеют противоположную ориентацию.

Перечисленные условия однозначно определяют взаимное расположение циклов λ_* этого семейства. Результат изображен на рис. 14.

Семейство IV

Циклы семейства: $\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\delta_1}$.

Индексы пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\delta_1}$	1
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}$	1
$\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\gamma_2}$	0
$\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\delta_1}$	1
$\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\beta_2}$	1

При этом базисы $(\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\gamma_2})$ имеют одинаковую ориентацию, а базис $(\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2})$ — противоположную им.

Перечисленные условия однозначно определяют взаимное расположение циклов $\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\beta_2}, \lambda_{\gamma_2}$. Про цикл λ_{δ_1} можно утверждать, что

$$\lambda_{\delta_1} = -\lambda_{\beta_2} + l_2 \lambda_{\gamma_2}, l_2 \in \mathbb{Z}.$$

Более того, на ребре $B-A$ молекулы точки z_3 метка r конечна, а метка $\varepsilon = +1$, поэтому с необходимостью выполнено $l_2 \geq 1$.

Семейство V

Циклы семейства: $\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_2}$.

Индексы пересечения циклов:

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\gamma_2}$	0
$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\gamma_2}$	1
$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\gamma_2}$	0
$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1}$	1

Из круговой молекулы точки z_2 следует, что $\lambda_{\beta_3} = \lambda_{\gamma_2}$.

При этом базисы $(\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_1})$ и $(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_1})$ имеют одинаковую ориентацию.

Перечисленные условия однозначно определяют взаимное расположение циклов λ_* этого семейства. Результат изображен на рис. 14.

4.7 Применение формулы Топалова

Результаты двух предыдущих пунктов позволяют выписать матрицы склеек изоэнергетических молекул с неизвестными коэффициентами $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2$. Они приведены в таблице 6. Оказывается, что для того чтобы вычислить по этим матрицам метки r, ε и n , вовсе необязательно знать точные

значения всех коэффициентов. Легко видеть, что от k_1 и k_2 метки вообще не зависят, а от k_3 и k_4 зависит только n -метка на атомах A^* молекулы F.

Предложение 4 На атомах A^* в молекуле F метка $n = -1$; $l_1 = 1, l_2 = 2$.

Доказательство:

Для молекул E, F применим формулу Топалова (1.3):

$$N(W^*) = \pm 2^p (\tilde{n}_1 \tilde{n}^2 - 2\tilde{n} b_0^{-2}) \prod_j b_j,$$

где число \tilde{n}_1 соответствует атому C_2 , \tilde{n} — атомам B или A^* , b_0 — коэффициент матрицы склейки на ребрах C_2-B либо C_2-A^* , а произведение $\prod_j b_j$ берется по всем ребрам молекулы.

Нам известно, что для молекул E и F $Q^3 \cong \mathbb{R}P^3 \Rightarrow H_1(Q^3) = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow N(W^*) = 2$.

Для молекулы E имеем $n(B) = [-\frac{1}{l_2}] = -1$ (ведь $l_2 \geq 1$), $\tilde{n}_1 = -2l_1$.

Формула Топалова дает:

$$\pm 2 = l_2^2 (-2l_1 (-1 + 1 - \frac{1}{l_2})^2 - 2(-1 + 1 - \frac{1}{l_2})) \Leftrightarrow l_1 = \pm 1 + l_2 \Rightarrow l_1 \geq 0$$

Для молекулы F $\tilde{n} = n(A^*) + \frac{1}{2}$, $\tilde{n}_1 = -2l_1$. Получаем:

$$\pm 2 = 4(-2l_1(n(A^*) + \frac{1}{2})^2 - 2(n(A^*) + \frac{1}{2}))$$

$$\pm 2 = (-2l_1(2n(A^*) + 1)^2 - 4(2n(A^*) + 1))$$

$$\pm 1 = (2n(A^*) + 1)(l_1(2n(A^*) + 1) + 2)$$

При условии $l_1 \geq 0$ это уравнение в целых числах имеет единственное решение $n(A^*) = -1, l_1 = 1 \Rightarrow l_2 = 2$. Что завершает доказательство.

Теперь по таблице 6 можно вычислить все метки изоэнергетических молекул A, B ..., I.

Замечание 7 Из молекулы E , в частности, следует, что метка $r = \frac{1}{2}$ на ребре $B-A$ круговой молекулы точки z_3 .

Сформулируем итоговый результат главы.

Теорема 17 Полный список инвариантов Фоменко-Цишанга для случая Соколова приведен в таблице 7. При разных значениях постоянной площадей g и энергии h обнаруживается 9 неэквивалентных слоений Лиувилля.

Глава 5

Лиувиллева классификация

интегрируемого случая

Ковалевской-Яхьи при $g = 0$

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи — это обобщение классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Во многих отношениях он является самым сложным из известных случаев интегрируемости механики твердого тела. Для всякого значения гиросtatического параметра λ пара (H_λ, F_λ) Ковалевской-Яхьи дает интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы на каждой поверхности M_g^4 . При этом оказывается, что топологическая структура фазового пространства существенно зависит от обоих параметров. На рис. 15 на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$ изображены кривые, разделяющие области с качественно различным видом бифуркационных диаграмм системы. Они были получены П. Е. Рябовым и М. П. Харламовым [21]. Как видно, при разных значениях параметров наблюдается 18 устойчивых типов бифуркационных диаграмм.

Работа [2] посвящена описанию структуры лиувиллева слоения в классическом случае Ковалевской ($\lambda = 0$). В этой главе мы решаем аналогичную задачу для случая $g = 0$. Исчерпывающее исследование по лиувиллевой

классификации всего множества значений параметров в рамках данной работы не представляется возможным. Тем ни менее, при изучении топологии слоений в какой-либо точке общего положения системы Ковалевской-Яхьи полная классификация двух “образующих” семейств может послужить хорошей отправной точкой. Отдельный интерес представляет исследование критических движений, например, соответствующих точке A .

5.1 Гамильтониан и дополнительный интеграл

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2$$

Как впервые в 1986 году указал Х. М. Яхья [5, 6] для него существует дополнительный интеграл четвертой степени:

$$F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1 \right)^2 - \frac{2\lambda}{A^2} (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \frac{4\lambda r_3}{A} (a_1 s_1 + a_2 s_2).$$

Здесь $(A, A, \frac{A}{2})$ - главные моменты инерции твердого тела, параметры a_1 и a_2 задают положение точки подвеса волчка в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а λ — величину постоянного гиросtatического момента, направленного по условию вдоль оси динамической симметрии волчка. При $\lambda = 0$ получаем классический случай Ковалевской.

Линейной заменой координат на $e(3)^*$

$$\begin{cases} s_1 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \left(-\frac{a_1}{\zeta} \tilde{s}_1 + \frac{a_2}{\zeta} \tilde{s}_2 \right) \\ s_2 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \left(-\frac{a_2}{\zeta} \tilde{s}_1 - \frac{a_1}{\zeta} \tilde{s}_2 \right) \\ s_3 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \tilde{s}_3 \\ r_1 = -\frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_1 + \frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_2 \\ r_2 = -\frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_1 - \frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_2 \\ r_3 = \tilde{r}_3 \end{cases}$$

где $\zeta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, добиваются исключения параметров A, a_1 и a_2 . В новых переменных $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3)$, скобка Ли-Пуассона, определяемая соотношениями (1.4), будет пропорциональна исходной, а гамильтониан и дополнительный интеграл Ковалевской-Яхьи примут упрощенный вид:

$$H = \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{2} - r_1,$$

$$F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{4} + r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{2} + r_2 \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + 2\lambda s_1 r_3.$$

Здесь и далее мы для простоты используем старые обозначения для новых переменных. За новый параметр λ обозначена исходная величина $\sqrt{\zeta A} \lambda$.

При этом уравнения (1.5) в координатах записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\frac{s_2}{2}(s_3 + 2\lambda) & \dot{r}_1 &= \frac{s_2 r_3}{2} - r_2(s_3 + \lambda) \\ \dot{s}_2 &= \frac{s_1}{2}(s_3 + 2\lambda) + r_3 & \dot{r}_2 &= -\frac{s_1 r_3}{2} + r_1(s_3 + \lambda) \\ \dot{s}_3 &= -r_2 & \dot{r}_3 &= \frac{s_1 r_2}{2} - \frac{s_2 r_1}{2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Итак, на всяком четырехмерном симплектическом многообразии M_g^4 для заданного значения λ мы получаем интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы, задаваемую парой (H_λ, F_λ) .

В настоящей главе, отталкиваясь от результатов по структуре бифуркационного множества, ранее полученных М. П. Харламовым и П. Е. Рябовым [21], вычислены все инварианты Фоменко-Цишанга системы Ковалевской-Яхьи при $g = 0$ (теорема 20). Всего обнаружено 10 типов слоений, соответствующих различным уровням энергии и значениям гиростатического параметра λ . Также получено описание всех круговых слоений (теорема 19) и дана классификация невырожденных положений равновесия системы (теорема 18).

5.2 Бифуркационные диаграммы, семейства торов и их перестройки

В этом пункте мы излагаем результаты М.П.Харламова и П.Е.Рябова [21], которые будут использованы нами в дальнейшем, а также вводим некоторые обозначения.

Рассмотрим отображение момента \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(f, h)$$

$$\mathfrak{F} : x \rightarrow (F(x), H(x))$$

В случае Ковалевской-Яхьи бифуркационная диаграмма будет зависеть от параметров g и λ . В [21] найден явный вид кривых бифуркационных диаграмм при всех значениях параметров, а также указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм (см. рис. 15). При замене знака у g или λ получаем систему изоморфную исходной, поэтому далее можно предполагать, что $g, \lambda \geq 0$. В рассматриваемом нами случае $g = 0$ следует различать пять типов диаграмм (см. рис. 16):

- a) $\lambda = 0$
- b) $0 < \lambda^2 < 1$
- c) $1 < \lambda^2 < \frac{8}{3\sqrt{3}}$
- d) $\frac{8}{3\sqrt{3}} < \lambda^2 < 2$
- e) $\lambda^2 > 2$

Гладкие дуги бифуркационных диаграмм мы обозначили малыми греческими буквами с индексами. В их прообразах лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами. Их типы указаны ниже:

$$\begin{aligned}
 A & : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} \\
 2A & : \alpha_3, \alpha_7, \alpha_8 \\
 A^* & : \delta_1, \delta_2 \\
 B & : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6 \\
 2B & : \beta_4 \\
 C_2 & : \gamma
 \end{aligned}$$

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(f, h)$ являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Их число для каждой области также вычислено в [21]. Эти торы естественным образом разбиваются на семейства. Мы обозначили римскими цифрами I-VII.

семейство	число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2

Интересующие нас изоэнергетические поверхности Q_h^3 лежат в прообразах сечений бифуркационных диаграмм горизонтальными прямыми A, \dots, J . Установлено, что они имеют следующие топологические типы:

прямая	тип Q_h^3
A, B, C, F	\mathbb{S}^3
D, E, G	$\mathbb{R}P^3$
H	$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$
I, J	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Несложно заметить, что представленной в этом пункте информации достаточно для того чтобы найти грубые инварианты слоений Лиувилля на этих поверхностях. После этого для получения инвариантов Фоменко-Цишанга нам остается вычислить числовые метки молекул.

5.3 Классификация невырожденных положений равновесия

Дадим описание невырожденных точек положения равновесия системы Ковалевской-Яхьи.

Теорема 18 *В случае Ковалевской-Яхьи при $g = 0$ и некритических значениях $\lambda^2 \notin \left\{0, 1, \frac{8}{3\sqrt{3}}, 2\right\}$ точки бифуркационной диаграммы M, N, P, Q, R и L соответствуют невырожденным положениям равновесия. Их типы и представления в виде почти прямого произведения указаны ниже.*

<i>точка</i>	<i>тип</i>	<i>n/n произведение</i>
M	<i>центр-центр</i>	$A \times A$
R	<i>центр-центр</i>	$2(A \times A)$
Q	<i>седло-центр</i>	$A \times B$
L	<i>седло-центр</i>	$2(A \times B)$
N	<i>седло-седло</i>	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
P	<i>седло-седло</i>	$B \times B$

Круговые молекулы этих особенностей приведены в таблице 8. Других критических точек у гамильтонианов H_λ на $M_{g=0}$ нет.

Доказательство:

В начале необходимо найти координаты точек положений равновесия на фазовом пространстве системы. Будем искать их из условия $dH|_{M^4}(x) = 0$. Тогда $\text{sgrad}H(x) = 0$, а значит правая часть уравнений (5.1) обнуляется.

Из третьего уравнения системы имеем $r_2 = 0$. Тогда, если предположить что $s_2 \neq 0$, то из четвертого уравнения (на \dot{r}_1) следует, что $r_3 = 0$, а из шестого — что $r_1 = 0$. Но это невозможно в силу соотношения $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$. Итак с необходимостью $s_2 = r_2 = 0$.

После этого правые части уравнений 1, 3, 4 и 6 обнуляются автоматически, и мы получаем следующие условия на точки положения равновесия:

$$\begin{cases} f_1 = r_1^2 + r_3^2 = 1 \\ f_2 = r_1 s_1 + r_3 s_3 = 0 \\ \frac{s_1 s_3}{2} + \lambda s_1 + r_3 = 0 \\ -\frac{s_1 r_3}{2} + \lambda r_1 + s_3 r_1 = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Пусть $s_1 = x$, $s_3 = y$, тогда из первых двух уравнений (5.2) следует, что координаты искомым точек имеют вид:

$$\left(x, 0, y, \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0, \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Подставляя в третье и четвертое уравнение системы (5.2) получаем:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \lambda x = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2y^2 + x^2 + 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Если $x = 0$, то с необходимостью $y = -\lambda$, и мы получаем два решения: $(0, 0, -\lambda, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, -\lambda, -1, 0, 0)$. Проверка показывает, что первое соответствует точке M бифуркационной диаграммы, а второе — точкам N , P и Q в зависимости от значения λ .

Будем искать остальные решения. Пусть $x \neq 0$. Второе уравнение (5.3) переписывается в виде $x^2 = -2y(y + \lambda) \Rightarrow y \in (-\lambda, 0)$. Подставляя выражение для x^2 в первое уравнение, получаем:

$$y + 2\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{-y^2 - 2\lambda y}} \Leftrightarrow (y + 2\lambda)^2(-y^2 - 2\lambda y) = 4 \Leftrightarrow -y(y + 2\lambda)^3 = 4$$

Исследуем вопрос: когда последнее уравнение имеет корень из интервала $(-\lambda, 0)$?

$$f(y) = -y(y + 2\lambda)^3 \Rightarrow f'(y) = -2(y + 2\lambda)^2(2y + \lambda) \Rightarrow y_{\max} = -\lambda/2$$

Необходимым условием наличия корней является:

$$f(y_{\max}) = \frac{27}{16}\lambda^4 \geq 4 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

Оно же является достаточным для существования корня y_R (см. рис. 17).

Для существования корня y_L дополнительно необходимо потребовать: $f(-\lambda) \leq 4 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 2$.

Найденные точки равновесия соответствуют точкам R и L бифуркационной диаграммы. Отметим, что в отличие от первого случая, здесь в прообразе лежит по два положения равновесия соответствующие разным знакам x .

Итоги поиска точек положения равновесия подведены в таблице.

точка	усл. сущ.	кол-во	координаты
M	$\lambda \in \mathbb{R}$	1	$(0, 0, -\lambda, 1, 0, 0)$
N, P, Q	$\lambda \in \mathbb{R}$	1	$(0, 0, -\lambda, -1, 0, 0)$
R	$\lambda^2 > \frac{8}{3\sqrt{3}}$	2	$\left(x, 0, y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, где $-y(y+2\lambda)^3 = 4$, $y^2 \in (0, \frac{\lambda^2}{4})$, $x = \pm\sqrt{-2y(y+\lambda)}$
L	$\frac{8}{3\sqrt{3}} < \lambda^2 < 2$	2	$\left(x, 0, y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, где $-y(y+2\lambda)^3 = 4$, $y^2 \in (\frac{\lambda^2}{4}, \lambda^2)$, $x = \pm\sqrt{-2y(y+\lambda)}$

Теперь проверим, что в найденных точках положения равновесия оператор A_H имеет ненулевые попарно различные собственные значения и установим типы точек. Дифференцируя правые части уравнений (5.1), получаем матрицу A_H^6 линеаризации векторного потока $\frac{1}{2}\text{sgrad}H$ на $e(3)^*$ в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$:

$$A_H^6 = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3 + 2\lambda) & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 + 2\lambda & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3 + \lambda) & s_2 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим положение равновесия в прообразе точки M . Возьмем (s_2, s_3, r_2, r_3) за локальные координаты. Тогда канонический базис касательного пространства к M^4 в точке M имеет вид:

$$T_M M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Под действием оператора A_H^6 он переходит в вектора:

$$A_H^6 \cdot T_M M^4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, матрица искомого оператора $A_H = A_H^6|_{TM^4}$:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Его собственные значения $\pm 2i, \pm(\sqrt{\lambda^2 + 2})i$ чисто мнимые и попарно различны при $\lambda^2 \neq 2$. Таким образом, при условии линейной независимости операторов A_H и A_F исследуемая точка положения равновесия невырождена и имеет тип центр-центр.

Аналогично для точек N, P и Q имеем:

$$TM^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_H \cdot TM^4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_H|_{TM^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения $\pm 2, \pm\sqrt{2 - \lambda^2}$ попарно различны и отличны от нуля при $\lambda^2 \neq 2$, следовательно, при условии линейной независимости операторов A_H и A_F положение равновесия невырождено. При $\lambda^2 < 2$ все собственные значения действительны, получаем тип седло-седло — случай точек N и P .

При $\lambda^2 > 2$ два собственных значения действительны, а два других — чисто мнимые, и мы имеем тип седло-центр — случай точки Q .

Перейдем к рассмотрению точек R и L . В качестве локальных координат на M^4 возьмем функции (s_1, s_2, r_1, r_2) . Имеем:

$$T_{R,L}M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{y}{x} & 0 & \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{y}{x} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(y+2\lambda) & 0 & 0 \\ 2(y+\lambda) & 0 & \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+2y}{x} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & -2(y+\lambda) \\ \frac{x^2+2y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{3x^2y+2y^3+2\lambda x^2}{x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Совершая подстановку в соответствии с тождеством $x^2 = -2y(y+\lambda)$, получим:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(y+2\lambda) & 0 & 0 \\ 2(y+\lambda) & 0 & \frac{(-y(y+2\lambda))^{\frac{3}{2}}+2y}{x} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{\sqrt{-y(y+2\lambda)}} & 0 & -2(y+\lambda) \\ -\frac{2y\lambda}{x\sqrt{-y(y+2\lambda)}} & 0 & \frac{(y+2\lambda)(2y+\lambda)}{y+\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

Рассматривая случай $\lambda \geq 0$, $y+2\lambda \in (\lambda, 2\lambda) > 0$, из тождества $-y(y+2\lambda)^3 = 4$ имеем:

$$\sqrt{-y(y+2\lambda)} = \frac{\sqrt{-y(y+2\lambda)^3}}{(y+2\lambda)} = \frac{2}{y+2\lambda},$$

$$(-y(y+2\lambda))^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{(y+2\lambda)^3} = \frac{-8y}{-y(y+2\lambda)^3} = -2y,$$

откуда:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(y+2\lambda) & 0 & 0 \\ 2(y+\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x(y+2\lambda)}{2} & 0 & -2(y+\lambda) \\ -\frac{y\lambda(y+2\lambda)}{x} & 0 & \frac{(y+2\lambda)(2y+\lambda)}{y+\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

после чего собственные значения μ_i оператора A_H находятся в явном виде:

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = \pm i \sqrt{2y^2 + 6\lambda y + 4\lambda^2} \\ \mu_{3,4} = \pm i \sqrt{4y^2 + 10\lambda y + 4\lambda^2} \end{cases}$$

Оценим знаки подкорневых трехчленов:

$$2y^2 + 6\lambda y + 4\lambda^2 = 2\lambda^2(t^2 + 3t + 2) = 2\lambda^2(t+1)(t+2) > 0 \text{ при } t = \frac{y}{\lambda} \in (-1, 0),$$

$$\begin{aligned} 4y^2 + 10\lambda y + 4\lambda^2 &= 2\lambda^2(2t^2 + 5t + 2) = 4\lambda^2(t+2) \left(t + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} > 0, & \text{при } t \in (-\frac{1}{2}, 0) \Leftrightarrow y \in (-\frac{\lambda}{2}, 0) \text{ — случай точки } R \\ < 0, & \text{при } t \in (-1, -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y \in (-\lambda, -\frac{\lambda}{2}) \text{ — случай точки } L. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в случае точки L мы имеем пару чисто мнимых и пару вещественных собственных значений, что соответствует типу седло-центр, а в случае точки R — две пары чисто мнимых собственных значений, что соответствует типу центр-центр. В последнем случае еще необходимо удостовериться, что собственные значения попарно различны. Это легко устанавливается из:

$$\begin{aligned} 2y^2 + 6\lambda y + 4\lambda^2 = 4y^2 + 10\lambda y + 4\lambda^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y^2 + 5y\lambda = y^2 + 3y\lambda &\Leftrightarrow y(y+2\lambda) = 0 \Leftrightarrow y \in \{0, -2\lambda\}, \text{ но } y \in (-\lambda, 0). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства невырожденности найденных положений равновесия осталось проверить, что в каждой точке операторы A_H и

A_F будут линейно независимы. Из-за того, что интеграл F является сложным полиномом четвертой степени сделать это не так легко. Поэтому вычислим лишь часть коэффициентов матрицы линеаризации A_F^6 векторного поля $\frac{1}{2}\text{sgrad}F$ в $e(3)^*$. Имеем:

$$\begin{aligned} \{r_1, F\} &= -\left(\frac{s_1^2-s_2^2}{4} + r_1\right) s_2 r_3 + \left(\frac{s_1 s_2}{2} + r_2\right) s_1 r_3 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda r_2 (s_1^2 + s_2^2) - \lambda (s_3 + 2\lambda) s_2 r_3, \\ \{r_2, F\} &= -\left(\frac{s_1^2-s_2^2}{4} + r_1\right) s_1 r_3 - \left(\frac{s_1 s_2}{2} + r_2\right) s_2 r_3 - \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda r_1 (s_1^2 + s_2^2) + \lambda (s_3 + 2\lambda) s_1 r_3 - 2\lambda r_3^2, \\ \{r_3, F\} &= \left(\frac{s_1^2-s_2^2}{4} + r_1\right) (s_1 r_2 + s_2 r_1) + \left(\frac{s_1 s_2}{2} + r_2\right) (s_2 r_2 - s_1 r_1) - \\ &\quad - \lambda (s_3 + 2\lambda) (s_1 r_2 - s_2 r_1) + 2\lambda r_2 r_3, \\ (A_F^6)_{i+3,j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} \{r_i, F\}, 1 \leq i, j \leq 3, \\ (A_F^6)_{i+3,j+3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} \{r_i, F\}, 1 \leq i, j \leq 3, \end{aligned}$$

Рассмотрим точку M . Вектор $v = (0, 1, 1, 0, 1, 0)^t \in T_M M^4$ под действием оператора $A_H = A_H^6|_{TM}$ переходит в вектор $(*, *, *, 0, 2, -1)^t$, а под действием оператора $A_F = A_F^6|_{TM}$ — в вектор $(*, *, *, 0, 0, 1 + \lambda^2)^t$. Последние два вектора заведомо линейно независимы, а следовательно и операторы A_H и A_F будут линейно независимы.

Для точек N , P и Q имеем: $v = (0, 1, 1, 0, 1, 0)^t \in TM$, $A_H v = (*, *, *, 0, -2, 1)^t$, $A_F v = (*, *, *, 0, 0, 1 - \lambda^2)^t$. $A_H v$ и $A_F v$ заведомо линейно независимы при $\lambda^2 \neq 1$.

Для точек L и R , представив их координаты в виде $\left(x, 0, y, \frac{y(y+2\lambda)}{2}, 0, -\frac{x(y+2\lambda)}{2}\right)$, будем иметь: $v = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^t \in TM$, $A_H v = (*, *, *, -2(y + \lambda), 0, x)^t$, $A_F v = \left(*, *, *, -\frac{x^2(y+\lambda)}{2}, 0, \frac{x^3}{4} - 2\lambda(y + 2\lambda)x\right)^t$. $A_H v$ и $A_F v$ заведомо линейно независимы при $y \notin \{-2\lambda, 0\}$, но, как известно, $y \in (-\lambda, 0)$.

Тем самым закончена проверка условий невырожденности. Отметим что при проведении промежуточных выкладок мы активно пользовались пакетом символьных вычислений *Matlab 6.5 Symbolic Math Toolbox*.

После этого из таблиц, приведенных в [1, т.1, гл.9], находим представления в виде почти прямого произведения и круговые молекулы.

Теорема доказана.

5.4 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Дадим описание круговых молекул вырожденных одномерных орбит случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$.

Теорема 19 *Круговые молекулы особых точек z_i ($i = 1, \dots, 6$), а также топологические типы соответствующих круговых многообразий приведены в таблице 8.*

Доказательство:

С учетом предложения 1 нам остается вычислить метки r на ребрах, ведущих в атомы A .

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки z_1 , относящееся к семейству I. Оно соединяет бифуркации β_1 и α_2 . Из круговой молекулы точки P имеем $r(\beta_1 - \beta_3) = 0$, точки Q — $r(\beta_3 - \alpha_2) = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r(\beta_1 - \alpha_2) = 0$. Аналогично получаем:

- точка z_1 :

$$\text{семейство II: } r(\beta_1 - \beta_4) = 0, r(\beta_4 - \alpha_3) = \infty \Rightarrow r(\beta_1 - \alpha_3) = 0$$

- точка z_5 :

$$\text{семейство VII: } r(\alpha_7 - \alpha_8) = 0, r(\alpha_8 - \beta_4) = \infty \Rightarrow r(\beta_4 - \alpha_7) = 0$$

• точка z_6 :

$$\text{семейство II: } r(\beta_6 - \beta_4) = 0, r(\beta_4 - \alpha_3) = \infty \Rightarrow r(\beta_6 - \alpha_3) = 0$$

$$\text{семейство III: } r(\beta_3 - \beta_5) = 0, r(\beta_3 - \alpha_9) = \infty \Rightarrow r(\beta_5 - \alpha_9) = 0$$

$$\text{семейство IV: } r(\beta_3 - \beta_6) = 0, r(\beta_3 - \alpha_{10}) = \infty \Rightarrow r(\beta_6 - \alpha_{10}) = 0$$

$$\text{семейство VII: } r(\beta_5 - \beta_4) = 0, r(\beta_4 - \alpha_8) = \infty \Rightarrow r(\beta_5 - \alpha_8) = 0$$

Для точки z_2 на ребре $B-A$ метка $r = 0$ в силу предложения 2.

Точка z_7 наблюдается только при $\lambda = 0$ и относится к классическому случаю Ковалевской. Ее круговая молекула указана в [2].

Несложно видеть, что недостающие метки молекул точек z_3 и z_4 нельзя вычислить таким элементарным способом. Окончательный ответ будет получен в последующих пунктах. Здесь мы приводим его для полноты.

Определим также топологические типы круговых многообразий Q_7^3 вырожденных одномерных орбит.

Рассмотрим точку z_3 . Во-первых, заметим, что в действительности ей отвечает две несвязных особенности, которые спроецированы в одну точку бифуркационной диаграммы отображением момента. Этим объясняется наличие для нее двух круговых. Рассмотрим особенность, отвечающую молекуле $A-A^*-A$. Ее бифуркационная диаграмма изображена на рис. 18. Произведем деформацию контура ABC_0D_0 в ABC_1D_1 . При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообраз отрезка CD определяется в M^4 уравнением $H = const$, а из теоремы 18 нам известно, что критических точек H в окрестности z_3 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контур ABC_0D_0 определяет круговую молекулу неособой точки бифуркационной диаграммы, более точно — круговую молекулу 3-атома A кривой α_6 . Такие круговые молекулы полностью описаны в [1, т.2, гл.1]. Приведем топологические типы круговых многообразий для основных 3-атомов:

3-атом	тип кругового мн-ия
регулярная точка	\mathbb{T}^3
A	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
A^*	H^3
B	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
C_2	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 3g)$

Здесь $(\mathbb{S}^2 + Ng)$ — сфера с N ручками; за H^3 обозначено расслоение Зейфerta со слоем окружность и базой \mathbb{T}^2 с двумя особыми точками типа $(2, 1)$.

Таким образом, круговое многообразие рассмотренной особенности точки z_3 , лежащее в прообразе контура ABC_1D_1 , топологически является $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для других вырожденных одномерных орбит и используя приведенную выше таблицу, получаем топологические типы остальных круговых многообразий точек z_i .

Теорема доказана.

5.5 Построение допустимых систем координат

Поставим нашей целью выбрать для каждого 3-атома допустимые системы координат, составленные из циклов λ_* .

Допустимые системы координат на седловых атомах выберем исходя из представления в виде почти прямого произведения особенностей точек N и P типа седло-седло. Аналогичная процедура проделывается в [2] для классического случая Ковалевской, где особенности типа седло-седло в точности такие же. Поэтому нам остается выписать ответ.

Рассматривая точку N с представлением $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, получаем:

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda_{\beta_2}, -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2}}{2}) & \begin{array}{c} (I) \\ \searrow \end{array} & \\
& & B_{\boxed{\beta_2}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1}) \\
(\lambda_{\beta_2}, -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_1}}{2}) & \begin{array}{c} (VI) \\ \nearrow \end{array} &
\end{array}$$

$$\left(\lambda_{\delta_1}, \frac{\lambda_{\delta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \right) \xrightarrow{(VI)} A_{\boxed{\delta_1}}^* \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\delta_1}, -\lambda_{\gamma})$$

$$\left(\lambda_{\delta_2}, \frac{\lambda_{\delta_2} + \lambda_{\beta_2}}{2} \right) \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\delta_2}}^* \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\delta_2}, -\lambda_{\gamma})$$

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda_{\gamma}, -\lambda_{\delta_1}) & \begin{array}{c} (V) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\gamma}, \lambda_{\beta_1}) \\
& & C_{2\boxed{\gamma}} \\
(\lambda_{\gamma}, -\lambda_{\delta_2}) & \begin{array}{c} (IV) \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\gamma}, \lambda_{\beta_1})
\end{array}$$

Рассматривая точку P с представлением $B \times B$ получаем:

$$\begin{array}{ccc}
& & \begin{array}{c} (II) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4}) \\
(\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\beta_3}) & \xrightarrow{(I)} B_{\boxed{\beta_1}} & \\
& & \begin{array}{c} (II) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \begin{array}{c} (III) \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\beta_5}) \\
(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_1}) & \xrightarrow{(I)} B_{\boxed{\beta_3}} & \\
& & \begin{array}{c} (IV) \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\beta_6})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \begin{array}{l} \text{(VII)} \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\beta_5}) \\
(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{\text{(II)}} & B_{\boxed{\beta_4}} & \\
& & \begin{array}{l} \text{(II)} \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\beta_6})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \begin{array}{l} \text{(VII)} \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_5}, \lambda_{\beta_4}) \\
(\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\beta_3}) \xrightarrow{\text{(III)}} & B_{\boxed{\beta_5}} & \\
& & \begin{array}{l} \text{(VII)} \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_5}, \lambda_{\beta_4})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \begin{array}{l} \text{(II)} \\ \nearrow \end{array} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_4}) \\
(\lambda_{\beta_6}, -\lambda_{\beta_3}) \xrightarrow{\text{(IV)}} & B_{\boxed{\beta_6}} & \\
& & \begin{array}{l} \text{(II)} \\ \searrow \end{array} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_4})
\end{array}$$

Теперь выберем допустимые системы координат на минимаксных атомах A .

На ребре круговой молекулы точки z_7 , соответствующему семейству I, $r(\alpha_1 - \beta_2) = 0$. Следовательно, циклы λ_{α_1} и λ_{β_2} имеют индекс пересечения 1 и образуют базис. Поскольку второй цикл имеет ориентацию, заданную гамильтоновым потоком, базис является допустимым для рассматриваемого атома $A_{\boxed{\alpha_1}}$. Рассуждая аналогично, получаем допустимые базисы для остальных бифуркаций. Исключением являются атомы $A_{\boxed{\alpha_5}}$ и $A_{\boxed{\alpha_6}}$, для которых мы пока не можем указать вторые базисные циклы, из-за того что соответствующие r -метки круговых молекул нам еще неизвестны. Их мы найдем позже, а здесь приведем ответ для завершенности списка.

$$A_{\boxed{\alpha_1}} \xrightarrow{\text{(I)}} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2})$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(I)} A_{\alpha_2} \\
& (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} A_{\alpha_3} \\
& (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2}) \xrightarrow{(VI)} A_{\alpha_4} \\
& (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}) \xrightarrow{(III)} A_{\alpha_5} \\
& A_{\alpha_6} \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\gamma}) \\
& (\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{(VII)} A_{\alpha_7} \\
& (\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\beta_5}) \xrightarrow{(VII)} A_{\alpha_8} \\
& (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}) \xrightarrow{(III)} A_{\alpha_9} \\
& (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_6}) \xrightarrow{(IV)} A_{\alpha_{10}} \\
& A_{\alpha_{11}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_2}) \\
& A_{\alpha_{12}} \xrightarrow{(VI)} (\lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\beta_2})
\end{aligned}$$

5.6 Определение взаимного расположения базисных циклов

Проанализируем информацию из круговых молекул и списка допустимых систем координат для определения взаимного расположения циклов λ_* на каждом из семейств торов.

Рассмотрим семейство I. На каждом торе этого семейства бифуркации определяют циклы λ_{α_1} , λ_{α_2} , $\lambda_{\alpha_{11}}$, λ_{β_1} , λ_{β_2} , λ_{β_3} и λ_{δ_2} . Из круговых молекул особых точек M , N , P , Q и z_1 , z_7 извлекаем следующую информацию об индексах пересечений циклов λ_* :

пара циклов	индекс пересечения
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}$	1
$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}$	1
$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_3}$	0
$\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_2}$	1
$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_3}$	1
$\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\delta_2}$	2

С другой стороны, базисы на положительных и отрицательных границах 3-атомов должны иметь разную ориентацию. В силу чего из списка допустимых систем координат заключаем, что базисы $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_2})$ и $(\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1})$ должны иметь одинаковую ориентацию, а базисы $(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_3})$, $(\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\beta_3})$, $(\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\delta_2}, \frac{\lambda_{\delta_2} + \lambda_{\beta_2}}{2})$ и $(\lambda_{\beta_2}, -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2}}{2})$ — противоположную им.

Эти условия определяют взаимное расположение всех циклов кроме $\lambda_{\alpha_{11}}$ однозначно. Последний цикл относится к классическому случаю Ковалевской и соотношение на него $\lambda_{\alpha_{11}} = \frac{\lambda_{\beta_2} - \lambda_{\delta_2}}{2}$ мы получаем из [2].

Взаимное расположение циклов остальных семейств анализируется по аналогичной схеме. На рис. 19 фундаментальные группы торов изображены в виде целочисленных решеток на плоскости, а циклы — в виде векторов на них. Это позволяет наглядно отобразить собранную информацию.

Положение циклов α_4 , α_5 , α_5 и α_7 , однако же, определить таким методом не удастся. Это связано с тем, что мы до настоящего момента не знаем некоторых меток круговых молекул. Данную неопределенность мы окончательно устраним в следующем пункте, пока же ответ для этих циклов

изображен пунктиром.

5.7 Применение формулы Топалова

Теперь мы используем формулу Топалова в варианте (1.1) для разрешения оставшихся неопределенностей.

Рассмотрим круговую молекулу точки z_2 . Находим матрицу склейки на бесконечном ребре:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

На конечном ребре матрица склейки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ \lambda_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_1}}{2} \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z}$$

Топологический тип кругового многообразия - \mathbb{T}^3 , $H_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3 \Rightarrow N(W^*) = 0$. Имеем:

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2 = m - 1, \quad (1.1) \Rightarrow (m - 1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Тем самым определено положение цикла λ_{α_4} относительно других циклов семейства VI.

Далее рассмотрим круговую молекулу точки z_3 , имеющую вид $A-A^*-A$. Теперь мы можем вычислить матрицу склейки на ее ребре, относящемся к семейству VI:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ \lambda_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \frac{\lambda_{\delta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0$$

Вторую матрицу склейки молекулы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определим из уравнения Топалова. Топологический тип многообразия - $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \Rightarrow N(W^*) = 0$. В силу предложения 1 $\varepsilon = +1 \Rightarrow b > 0$.

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2 = \left[\frac{a}{b} \right] - 1 + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} - \frac{1}{2},$$

$$(1.1) \Rightarrow (a/b - 1/2)b = 0 \Rightarrow 2a = b \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow r = 1/2.$$

Мы получили соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{α_6} :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ -\lambda_{\gamma} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

Вторая строка задает множество для выбора второго элемента допустимого базиса для α_6 . В списке допустимых систем координат мы для определенности зафиксировали вариант соответствующий $k = 0$.

Анализ круговых многообразий точек z_5 , а затем z_4 позволяет в точности аналогично определить положение циклов λ_{α_7} и λ_{α_5} и выбрать второй базисный элемент для α_5 .

Тем самым завершены вычисление круговых молекул, выбор допустимых координат и определение взаимного расположения базисных циклов, после чего вычисление изоэнергетических молекул превращается в несложную алгоритмическую процедуру. Из списка допустимых систем координат и взаимного расположения базисных циклов вычисляем все матрицы склеек изоэнергетических молекул. Результат приведен в таблице 9. По матрицам склеек вычисляем числовые метки. Сформулируем итоговый результат в виде теоремы.

Теорема 20 *Полный список инвариантов Фоменко-Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской-Яхьи при $g = 0$ приведен в таблице 10. В зависимости значений гиростатического параметра λ и уровня энергии обнаруживается 10 неэквивалентных слоений Лиувилля.*

Список таблиц

1. Круговые молекулы случая Стеклова
2. Круговые молекулы случая Клебша
3. Матрицы склейки изоэнергетических молекул в случае Клебша
4. Изоэнергетические молекулы случая Клебша
5. Круговые молекулы случая Соколова
6. Матрицы склейки изоэнергетических молекул в случае Соколова
7. Изоэнергетические молекулы случая Соколова
8. Круговые молекулы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$
9. Матрицы склейки изоэнергетических молекул в случае Ковалевской-Яхьи при $g = 0$
10. Изоэнергетические молекулы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$

Список рисунков

1. Пример базы слоения Лиувилля
2. Основные 3-атомы: A , A^* , B , C_2
3. Различаемые случаи для параметрической кривой бифуркационной диаграммы системы Стеклова
4. Бифуркационные диаграммы случая Стеклова
5. Деформация кругового контура в окрестности точки возврата бифуркационной диаграммы
6. Представление 4-окрестности особенности в виде прямого произведения 2-атомов
7. Расположение однозначно определенных циклов бифуркаций на семействах торов в случае Стеклова
8. Зоны, соответствующие случаями притяжения и отталкивания в задаче Клебша
9. 7 Бифуркационные диаграммы случая Клебша
10. Расположение однозначно определенных циклов бифуркаций на семействах торов в случае Клебша
11. Изоэнергетические прямые с различным типом слоения в случае Клебша

12. Эквивалентность случаев Клебша и Эйлера на M_g^4
13. Бифуркационные диаграммы случая Соколова
14. Расположение однозначно определенных циклов бифуркаций на семействах торов в случае Соколова
15. Области различных бифуркационных диаграмм случая Ковалевской-Яхьи в зависимости от g и λ
16. Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$
17. Условия существования решений y_L и y_R
18. Деформация контура круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты
19. Расположение однозначно определенных циклов бифуркаций на семействах торов в случае Ковалевской-Яхьи при $g = 0$

Литература

- [1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. — Изд-во УдГУ, 1999.
- [2] Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. — Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42.
- [3] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. — Матем. сборник, 1996, т. 187, N 3, с. 143-160.
- [4] Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. — Memoires de l'academie des sciences de Berlin, 1765, v. 14, pp. 154-193
- [5] Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. — Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp. 169-172.
- [6] Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. — Вестник МГУ, сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90
- [7] Соколов В.В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа. — Теоретическая и математическая физика, 2001, т. 129, N 1, с. 31-37
- [8] Соколов В.В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ Доклады РАН, сер. матем., 2004, Том 394, N 5

- [9] Wolf T., Efimovskaya O.V. Classification of Integrable Quadratic Hamiltonians on $e(3)$. — Regular and Chaotic Dynamics, 2003, v. 8, N 2, pp. 1-7
- [10] Борисов А.В., Мамаев И.С. Обобщение случая Горячева-Чаплыгина. — Regular and Chaotic Dynamics, 2002, v. 7, N 1, pp. 1-10
- [11] М. Оден Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. — Ижевск, Изд-во УдГУ, 1999.
- [12] Браилов Ю.А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли — Матем. сборник, 2003, т. 194, N 11, с. 3-16.
- [13] Соколов В.В., Цыганков А.В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева-Чаплыгина. — Теоретическая и математическая физика, 2002, т. 131, N 1, с. 118-125.
- [14] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1990, т. 54, с. 546-575.
- [15] Болсинов А.В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Матем. сборник, 1995, т. 186, N 1, с. 3-28.
- [16] Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1988, вып. 23, с. 122-132.
- [17] Ошемков А.А. Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. — Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1993, вып. 25, часть 2, с. 23-110.

- [18] Матвеев В.С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус — Матем. сборник, 1996, т. 187, N 4, с. 29-58.
- [19] Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [20] Орел О.Е. Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина. — Матем. сборник, 1995, т. 186, N 2, с. 105-128.
- [21] Харламов М.П., Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи. — Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №2.
- [22] Orel O.E., Ryabov P.E. Bifurcation Sets in a Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid and in the Generalization of This Problem — Regular and Chaotic Dynamics, 1998, v. 3, N 1, pp. 82-91
- [23] Ryabov P.E. Bifurcation Sets in an Integrable Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid — Regular and Chaotic Dynamics, 1999, v. 4, N 4, pp. 59-76
- [24] Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова. — Теоретическая и математическая физика, 2003, т. 134, N 2, с. 207-226.
- [25] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М. Наука, 1978
- [26] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск, изд-во УдГУ, 1995

- [27] Борисов А.В., Емельянов К.В. Неинтегрируемость и стохастичность в динамике твердого тела. — Ижевск, Изд-во УдГУ, 1995
- [28] Борисов А.В., Кирьянов А.И. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа. — Математические методы в механике. М., МГУ, 1990, с.13-18
- [29] Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Math. Ann., Leipzig, 1871, N3, S. 238-262.
- [30] Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
- [31] Nguyen Tien Zung. A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems. — Commentarii Mathematici Helvetici, 2000, N 75 pp. 271-283.
- [32] Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью — В томе 1 “Собрания сочинений”. Т. 1, 2. Москва, 1949.
- [33] Kowalevski S. Sur le problème de la rotation l’un corps solide autour d’un point fixe — Acta Math. 1889, v. 12, p. 177-232; русский перевод: Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки — Ковалевская С.В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 153-220.
- [34] Kowalevski S. Sur une propriété du système d’équations différentielles qui définit la rotation d’un corps solide d’un point fixe — Acta Math. 1889, v.14, p. 81-93.
- [35] Чаплыгин С.А. Новый случай вращения твердого тела, подпертого в одной точке. В томе 1 “Собрания сочинений” (тома 1, 2). ОГИЗ, М.-Л., 1948.

- [36] Горячев Д.Н. О движении тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ — Матем. сборник, 1900, т. 21, N 3
- [37] Сретенский Л.Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. — Вестник МГУ, 1963, N 3.
- [38] Korneev V.V., Morozov P.V. Calculation of Fomenko-Zieschang Invariants in the Integrable Sretenskiy Case. — in A. V. Bolsinov, A.T.Fomenko, A.A.Oshemkov “Topological Methods in the Theory of Integrable Systems” — Cottenham, Cambridge : Cambridge Scientific Publishers, 2006.
- [39] Морозов П.В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. — Матем. сборник, 2002, т. 193, N 10, с. 113-138.
- [40] Морозов П.В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа — Матем. сборник, 2004, т. 195, N 3, с. 69-114.
- [41] Морозов П.В. Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга в случае Ковалевской-Яхьи. — Матем. сборник, в печати
- [42] Морозов П.В. Тонкая лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи. — Вестник МГУ, сер. матем. и мех., в печати
- [43] Погосян Т.И., Харламов М.П. Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении тела в линейном поле сил. — ПММ, 1979, т.43, N 3, с. 419-428
- [44] Погосян Т.И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела. — Мех. тверд. тела, вып. 12, Киев: Наукова думка, с. 9-16

- [45] Погосян Т.И. Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай. — Мех. тверд. тела, 1983, вып. 15, Киев: Наукова думка, с. 3-23
- [46] Погосян Т.И. Критические интегральные поверхности задачи Клебша. — Мех. тверд. тела, 1984, вып. 16, Киев: Наукова думка, с. 19-24

Таблица 1

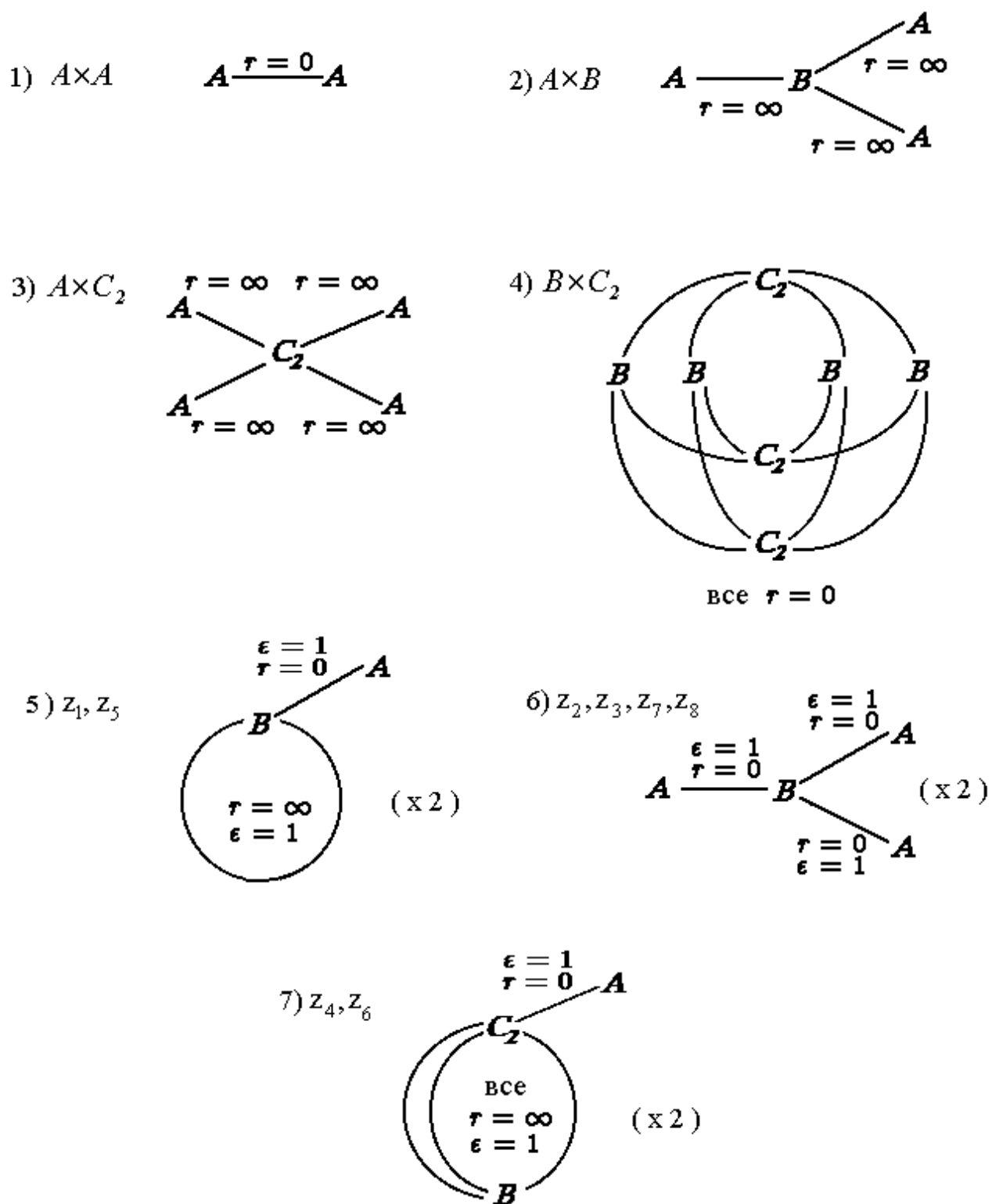


Таблица 2

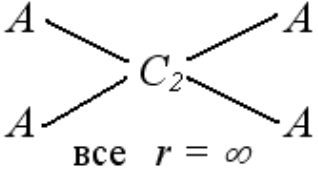
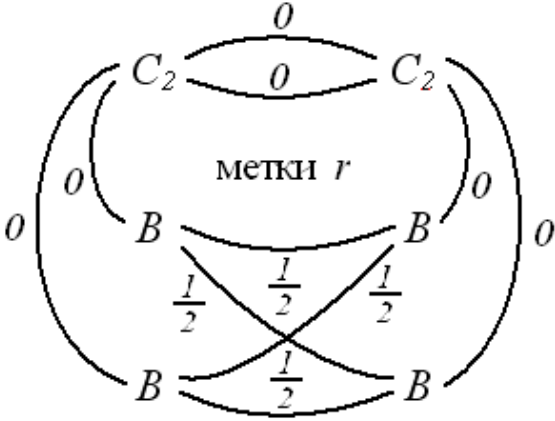
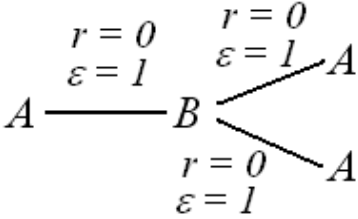
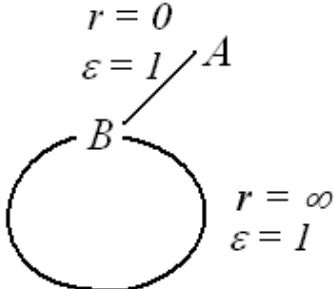
особая точка	Круговая молекула
M, P (при $g^2 > p_2$)	$A \xrightarrow{r=0} A \quad (\times 2)$
N	
P (при $g^2 < p_1$)	
P (при $p_1 < g^2 < p_2$)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\times 2)$
z_1, z_2	
z_3, z_4	

Таблица 4

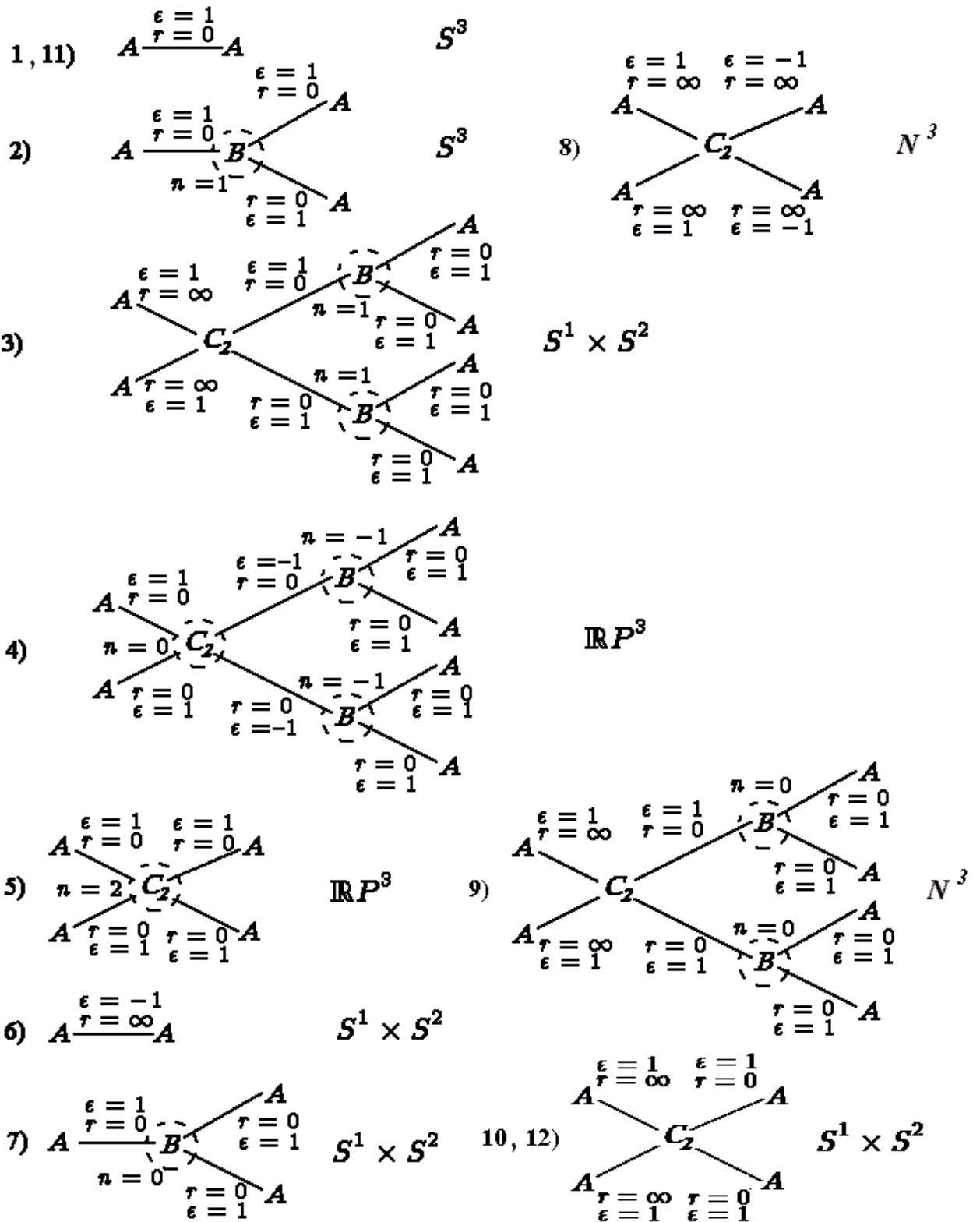


Таблица 5

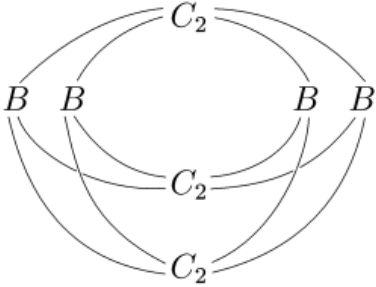
<p>M, L</p>	<p>$A \xrightarrow{r=0} A \quad (\times 2)$</p>	<p>N</p>	<p>$A \xrightarrow{r=\infty} B$ $\begin{matrix} \nearrow^{r=\infty} A \\ \searrow^{r=\infty} A \end{matrix}$ $(\times 2)$</p>
<p>Q</p>	<p>$\begin{matrix} A \searrow^{r=\infty} & \nearrow^{r=\infty} A \\ & C_2 \\ A \nearrow^{r=\infty} & \searrow^{r=\infty} A \end{matrix} \quad (\times 2)$</p>	<p>R</p>	<p>$\begin{matrix} A \searrow^{r=\infty} & \nearrow^{r=\infty} A \\ & C_2 \\ A \nearrow^{r=\infty} & \searrow^{r=\infty} A \end{matrix}$</p>
<p>P</p>	<p> <p>все $r = 0$</p> </p>	<p>z_1, z_4</p>	<p>$A \xrightarrow[r=\infty]{r=0, \varepsilon=1} B$ $\begin{matrix} \nearrow^{r=0, \varepsilon=1} A \\ \searrow^{r=0, \varepsilon=1} A \end{matrix}$ $(\times 2)$</p>
<p>z_2</p>	<p>$\begin{matrix} \nearrow^{r=0, \varepsilon=1} A \\ \searrow^{r=\infty, \varepsilon=1} A \end{matrix}$ $\begin{matrix} C_2 \\ B \end{matrix}$ $(\times 2)$ <p>все $r = \infty$ $\varepsilon = 1$</p> </p>	<p>z_3</p>	<p>$\begin{matrix} \nearrow^{r=\frac{1}{2}, \varepsilon=1} A \\ \searrow^{r=\infty, \varepsilon=1} A \end{matrix}$ $\begin{matrix} B \\ A^* \end{matrix}$ $(\times 2)$ <p>все $r = \infty$ $\varepsilon = 1$</p> </p>

Таблица 6

<p>A) $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l_1 \end{pmatrix} \rightarrow A \quad (\times 2)$</p>	<p>F) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow A^* \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ C_2 \quad \begin{matrix} \nearrow A^* \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & k_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -k_4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$</p>
<p>B) $A \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \quad (\times 2)$</p>	<p>G) $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $\begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</p>
<p>C) $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$ $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$ $\begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 & -1 \end{pmatrix}$</p>	<p>H) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow B \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ C_2 \quad \begin{matrix} \nearrow B \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$</p>
<p>D) $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $\begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} l_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</p>	<p>I) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow A \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ C_2 \quad \begin{matrix} \nearrow A \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</p>
<p>E) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow B \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ C_2 \quad \begin{matrix} \nearrow B \\ \rightarrow A \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$</p>	

Таблица 7

<p>A) $A \xrightarrow[r=0, \varepsilon=1]{} A \quad (\times 2)$</p>	<p>F) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow A^* \\ \searrow A^* \end{matrix} \rightarrow A$ $A \nearrow \begin{matrix} \nearrow C_2 \\ \searrow C_2 \end{matrix} \rightarrow A$ $n = -2$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=-1$ $r=0, \varepsilon=1$</p>
<p>B) $A \xrightarrow[r=0, \varepsilon=1]{} B \xrightarrow[r=0, \varepsilon=1]{} A \quad (\times 2)$ $n = 1$</p>	<p>G) $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $n = 1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$</p>
<p>C) $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$ $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$ $n = 1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$</p>	<p>H) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow B \\ \searrow B \end{matrix} \rightarrow A$ $A \nearrow \begin{matrix} \nearrow C_2 \\ \searrow C_2 \end{matrix} \rightarrow A$ $n = -2$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=-1$ $r=0, \varepsilon=1$</p>
<p>D) $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ $n = 1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$</p>	<p>I) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow A \\ \searrow A \end{matrix}$ $A \nearrow \begin{matrix} \nearrow C_2 \\ \searrow C_2 \end{matrix}$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=\infty, \varepsilon=1$</p>
<p>E) $A \searrow \begin{matrix} \nearrow B \\ \searrow B \end{matrix} \rightarrow A$ $A \nearrow \begin{matrix} \nearrow C_2 \\ \searrow C_2 \end{matrix} \rightarrow A$ $n = -2$ $r=0, \varepsilon=1$ $r=0, \varepsilon=-1$ $r=0, \varepsilon=1$</p>	

Таблица 8

M	$A_{\alpha_1} \xrightarrow[r=0]{\text{I}} A_{\alpha_2}$	R	$A_{\alpha_8} \xrightarrow[r=0]{\text{VII}} A_{\alpha_7} \quad (\times 2)$
Q	$A_{\alpha_2} \xrightarrow{\text{I}} B_{\beta_3} \begin{cases} \text{III} \rightarrow A_{\alpha_9} \\ \text{IV} \rightarrow A_{\alpha_{10}} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">все $r = \infty$</p>	L	$A_{\alpha_3} \xrightarrow{\text{II}} B_{\beta_4} \begin{cases} \text{II} \rightarrow A_{\alpha_3} \\ \text{VII} \rightarrow A_{\alpha_8} \end{cases} \quad (\times 2)$ <p style="text-align: center;">все $r = \infty$</p>
N		P	<p style="text-align: center;">все $r = 0$</p>
z ₁	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>	z ₇	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>
z ₂	<p style="text-align: right;">\mathbb{T}^3</p>	z ₅	<p style="text-align: right;">$(\times 2)$ $2\mathbb{T}^3$</p>
z ₃	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>	z ₃	<p style="text-align: right;">H^3</p>
z ₄	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>	z ₄	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$</p>
z ₆	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>	z ₆	<p style="text-align: right;">$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$</p>

Таблица 10

A	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	B	
C		D	
E		F	
G		H	
I		J	



рис. 1

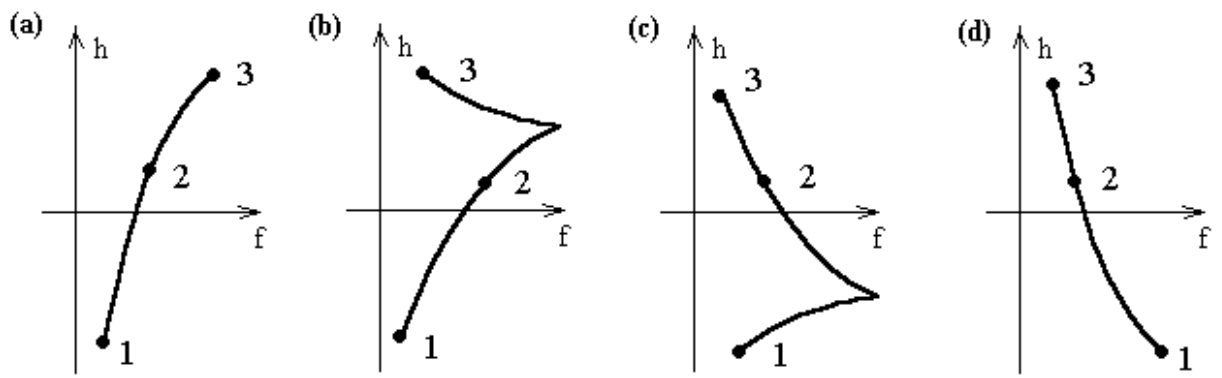


рис. 3

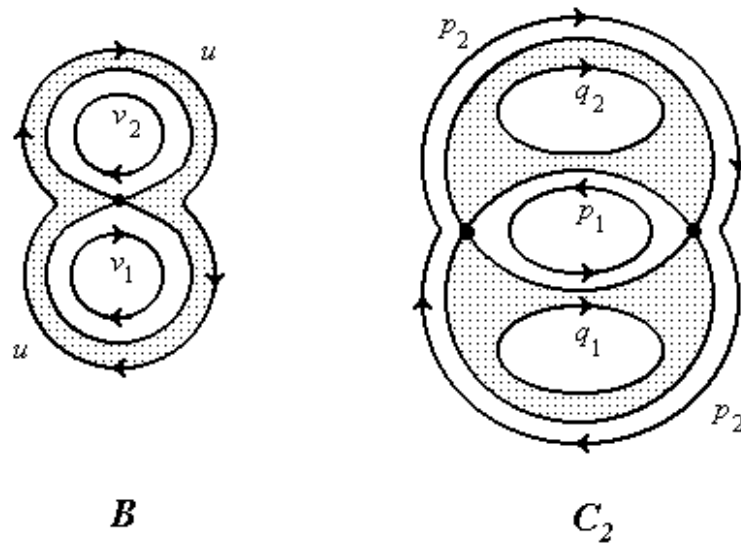


рис. 6

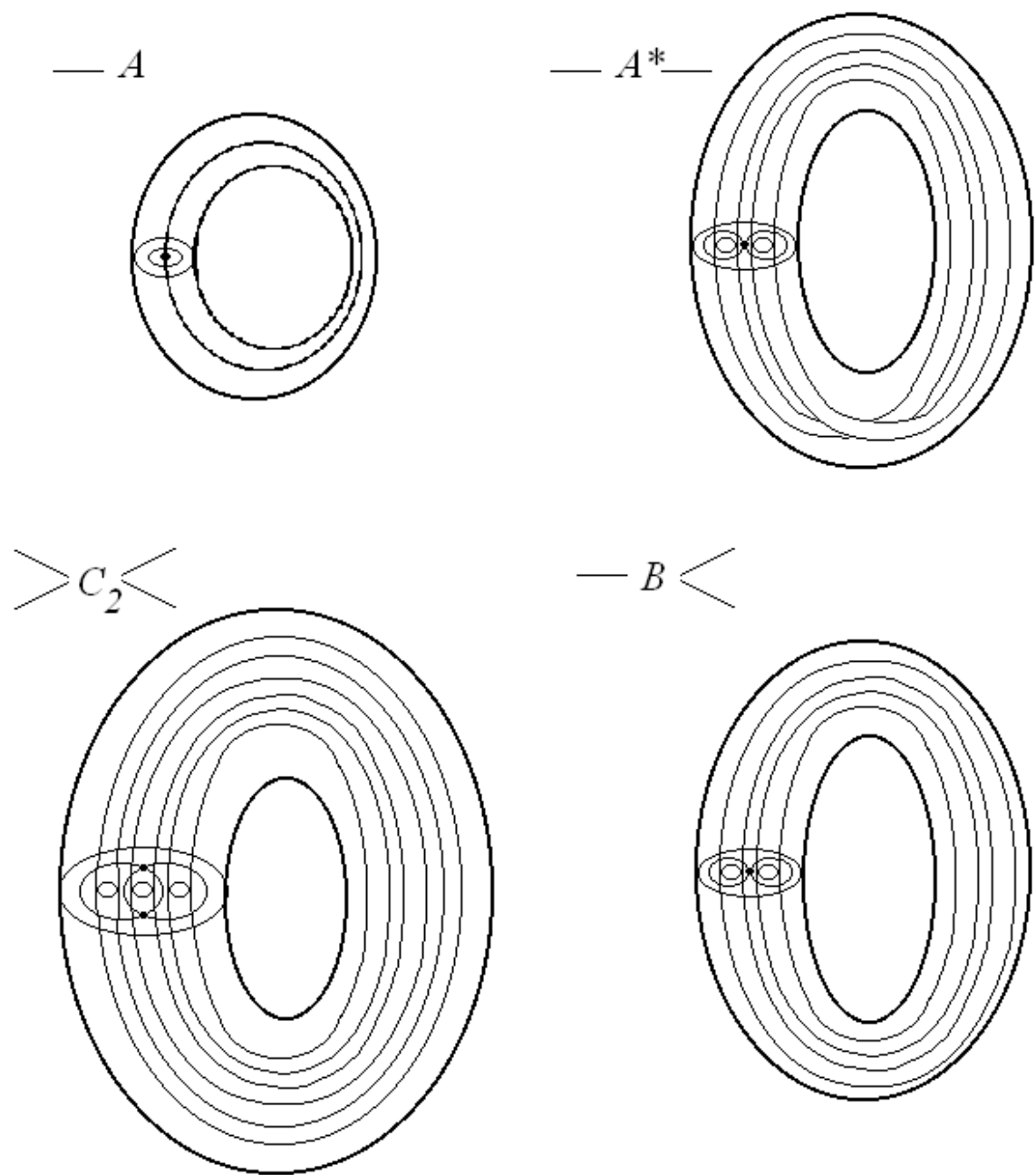


рис. 2

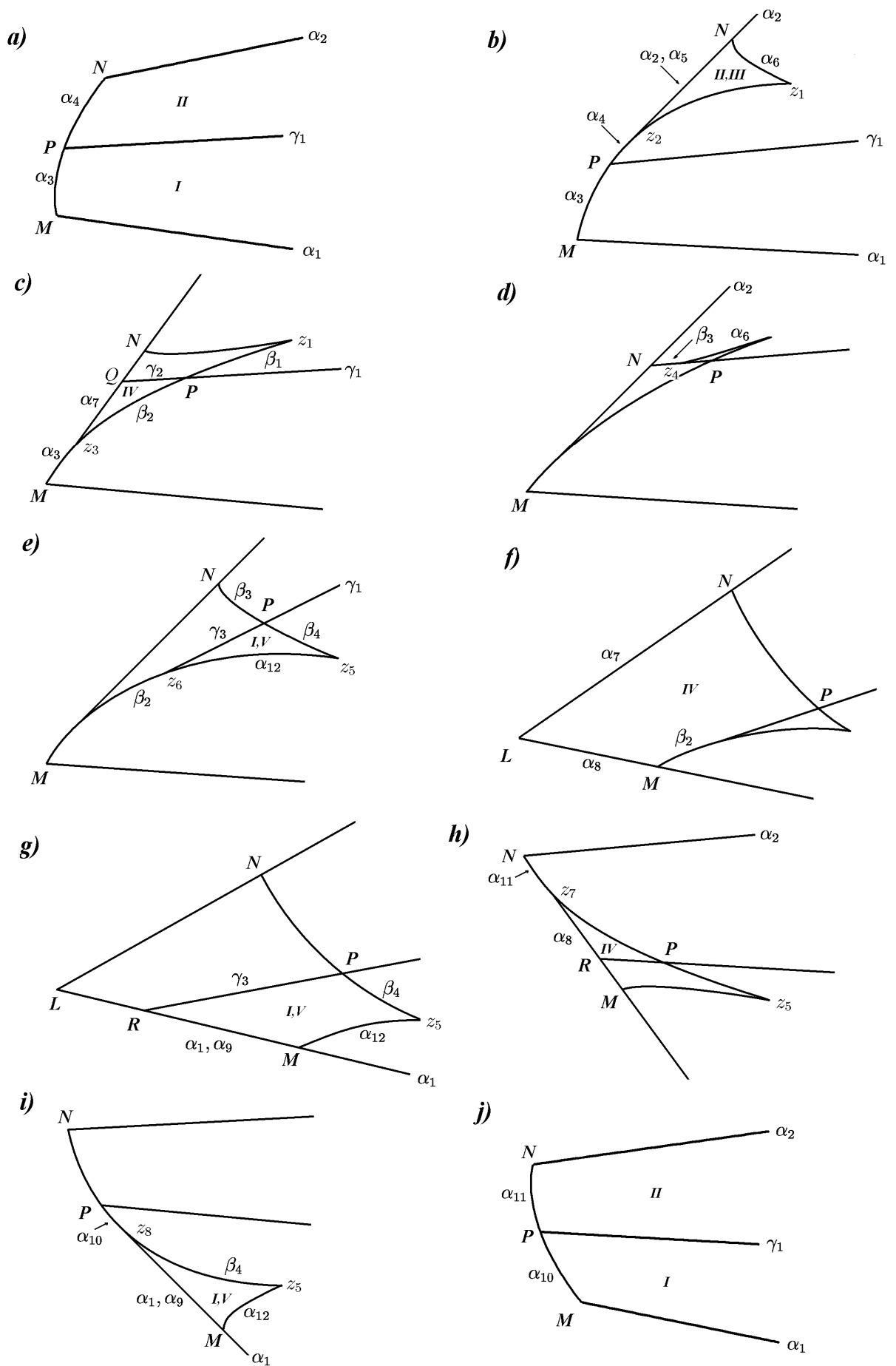


рис. 4

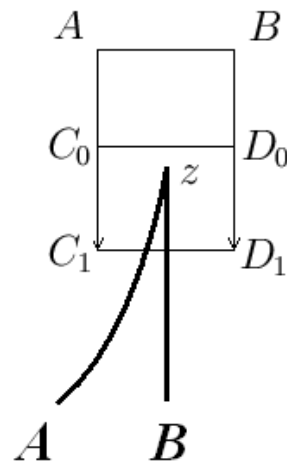


рис. 5

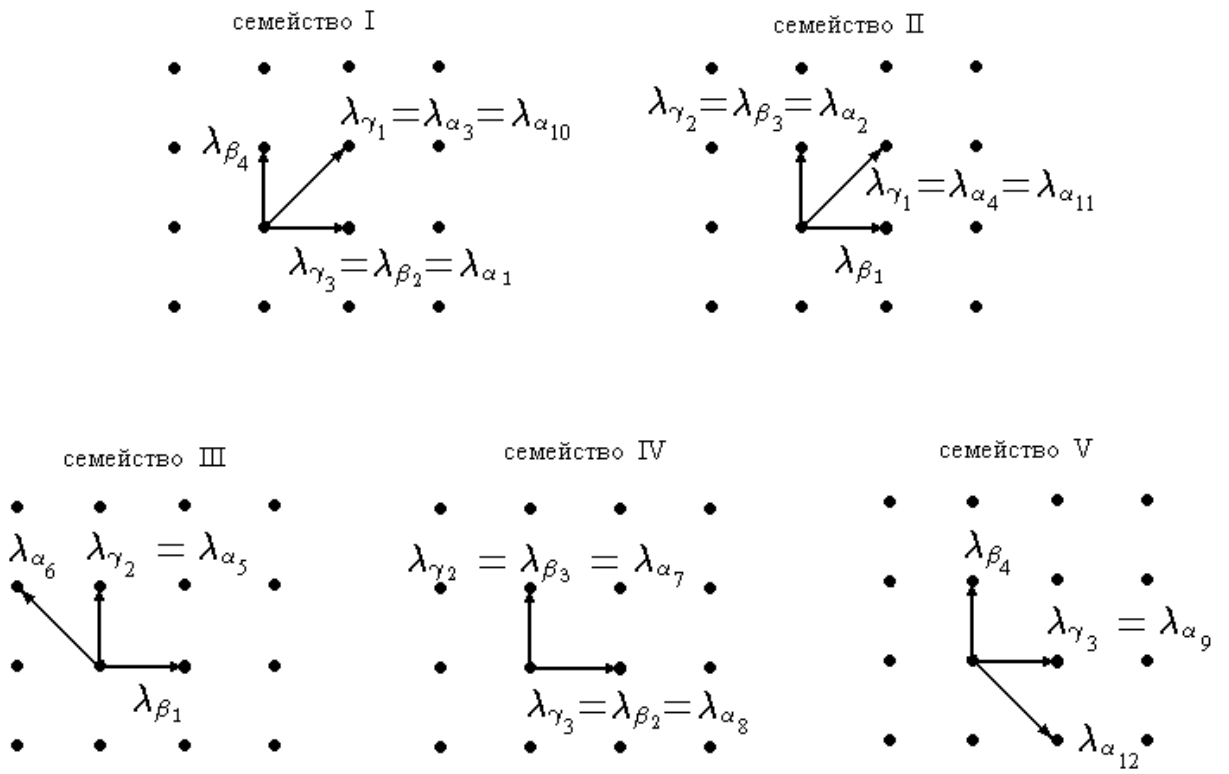


рис. 7

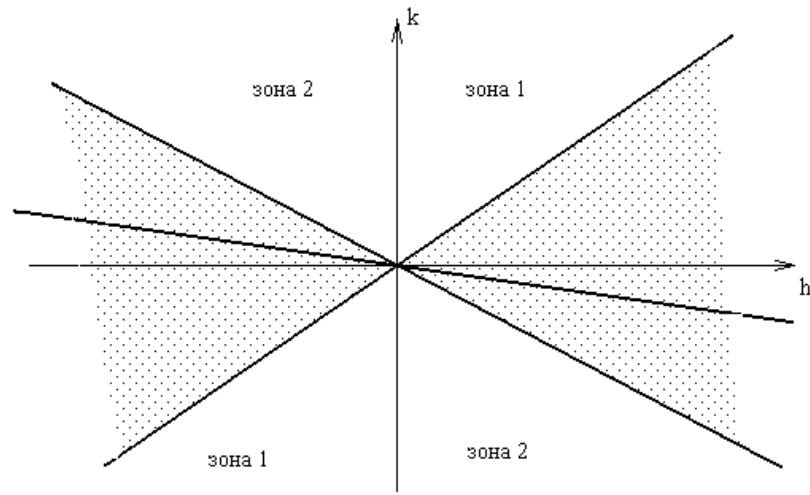


рис. 8

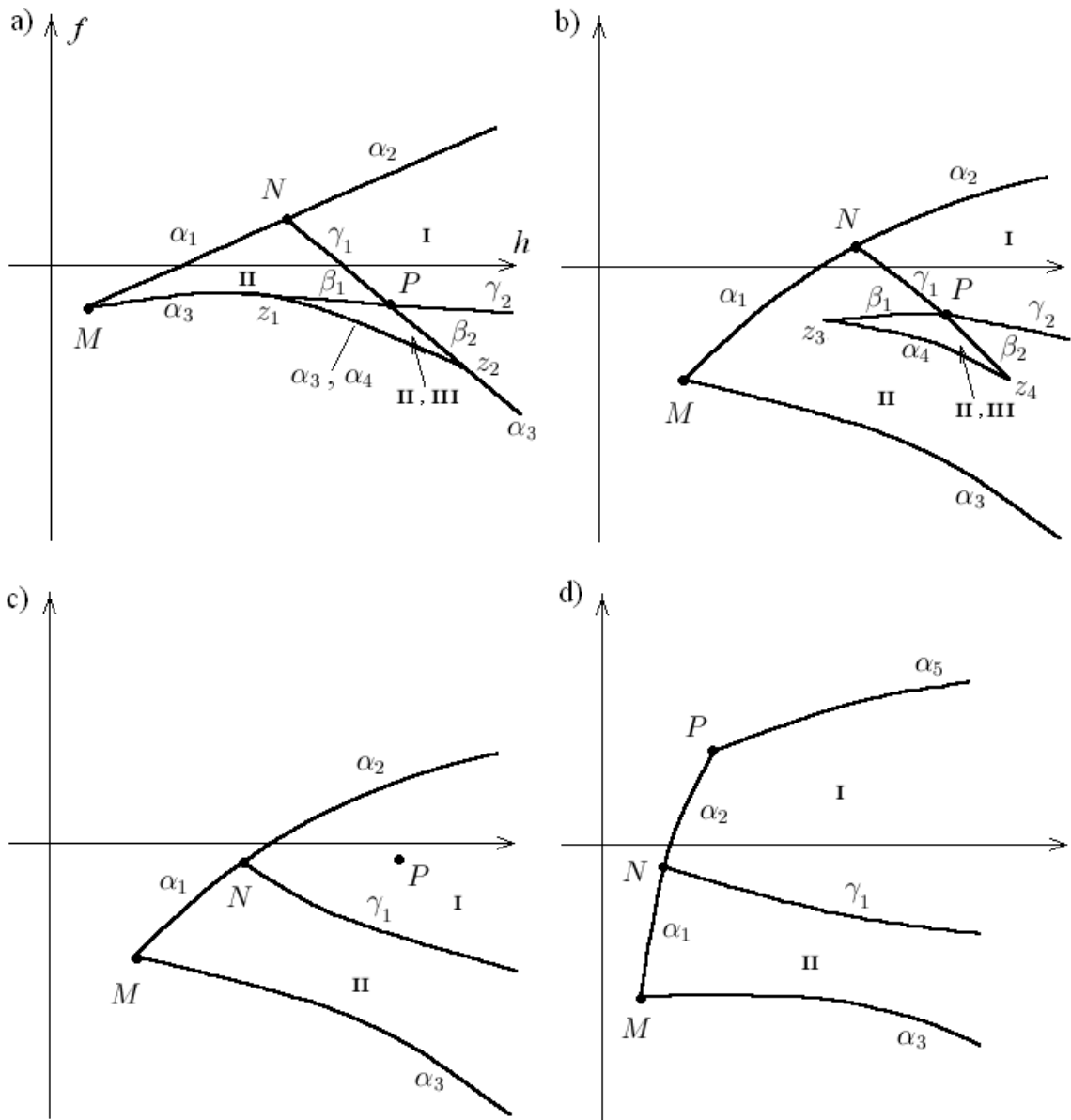
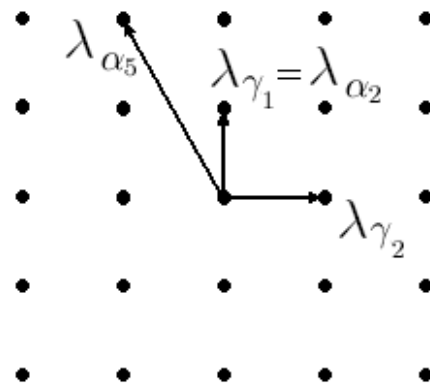
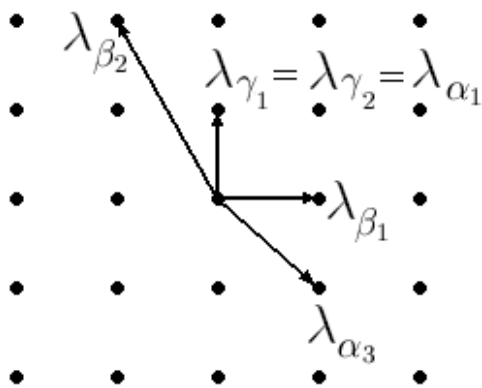


рис. 9

семейство I



семейство II



семейство III

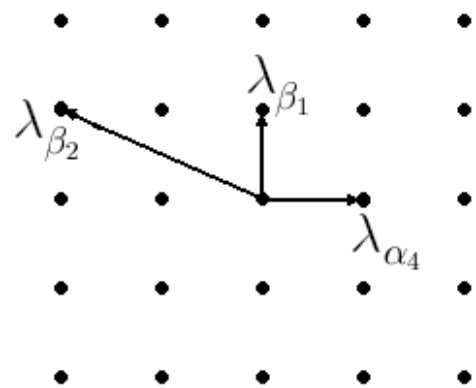


рис. 10

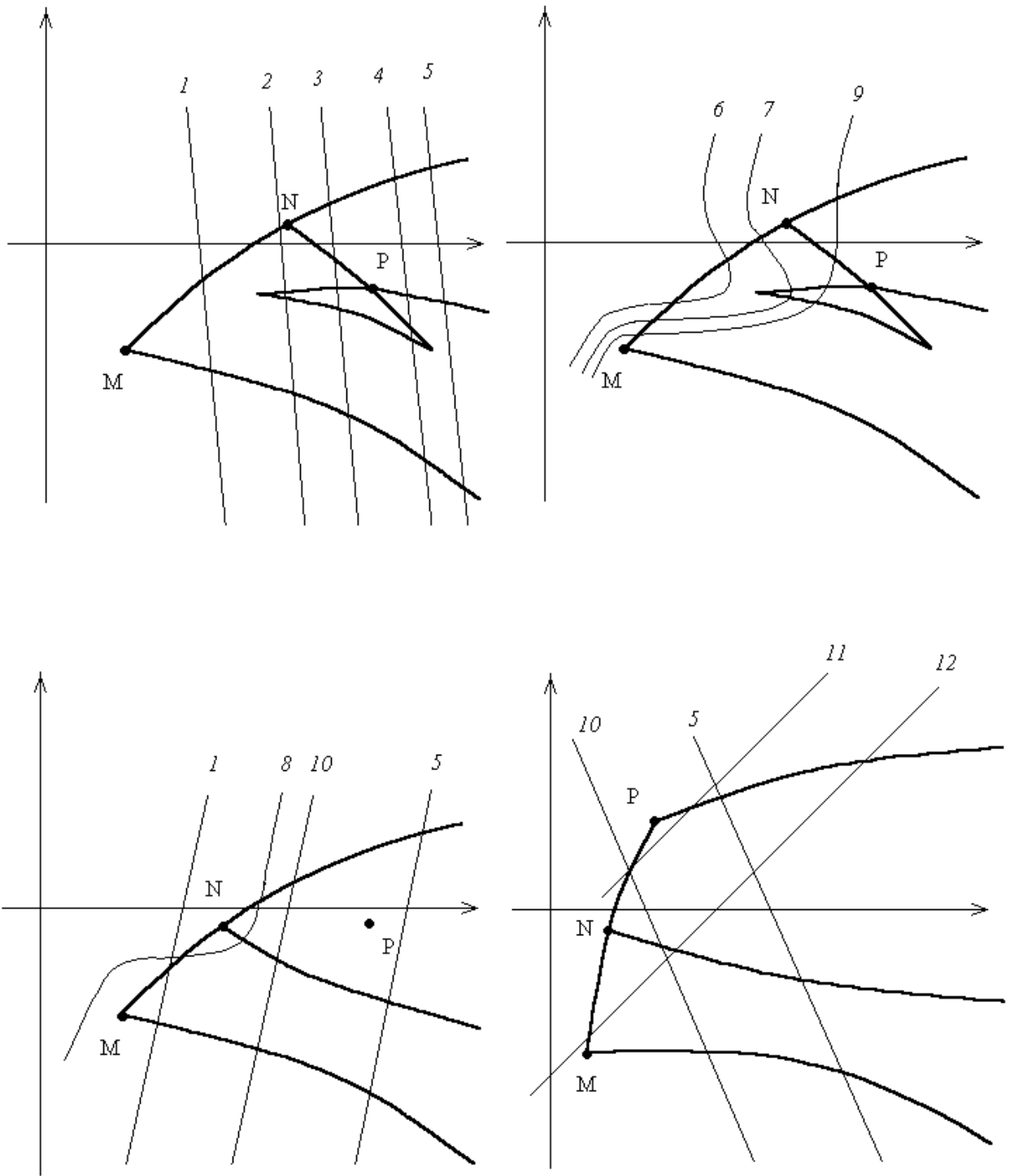
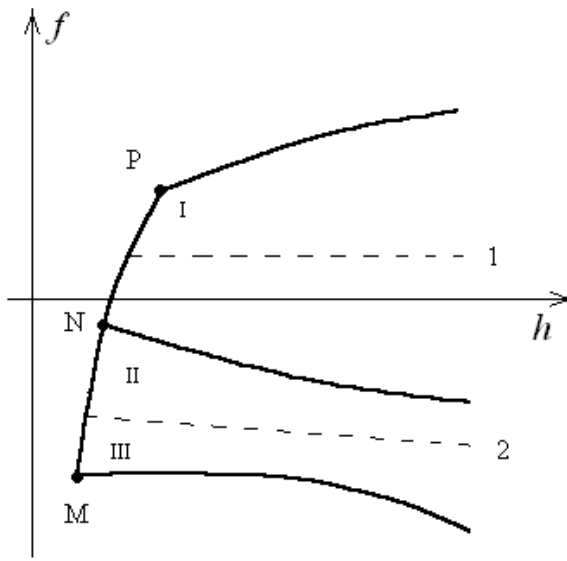
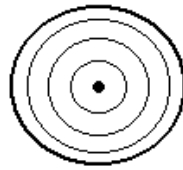
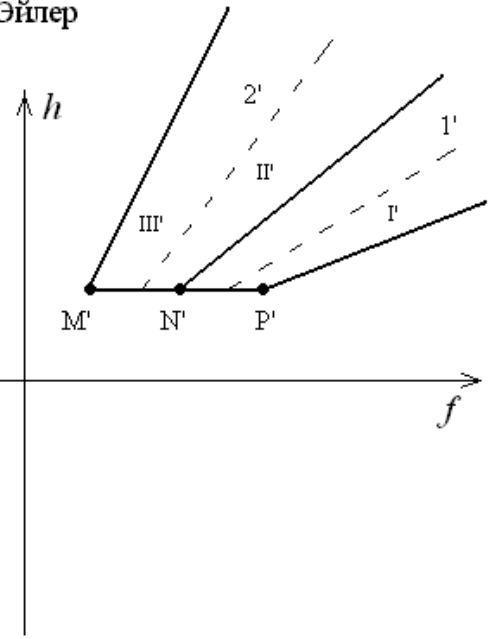


рис. 11

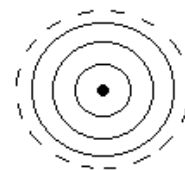
Клебш



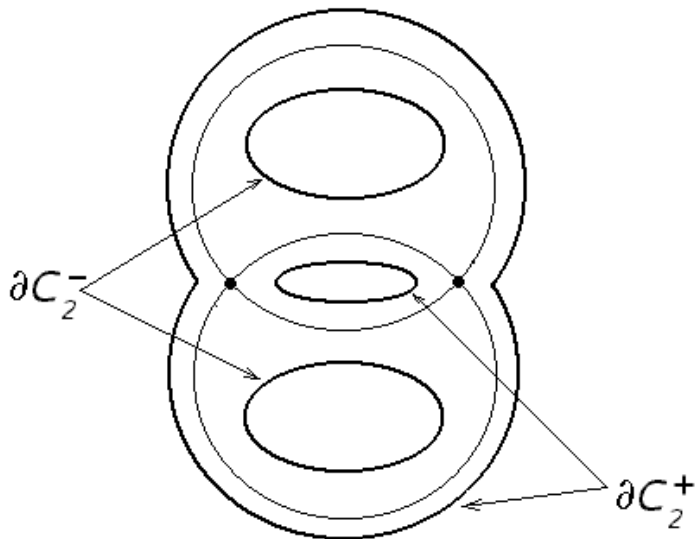
Эйлер



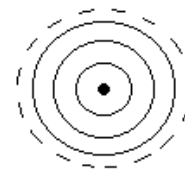
D_1



D_2



C_2



D_3

рис. 12

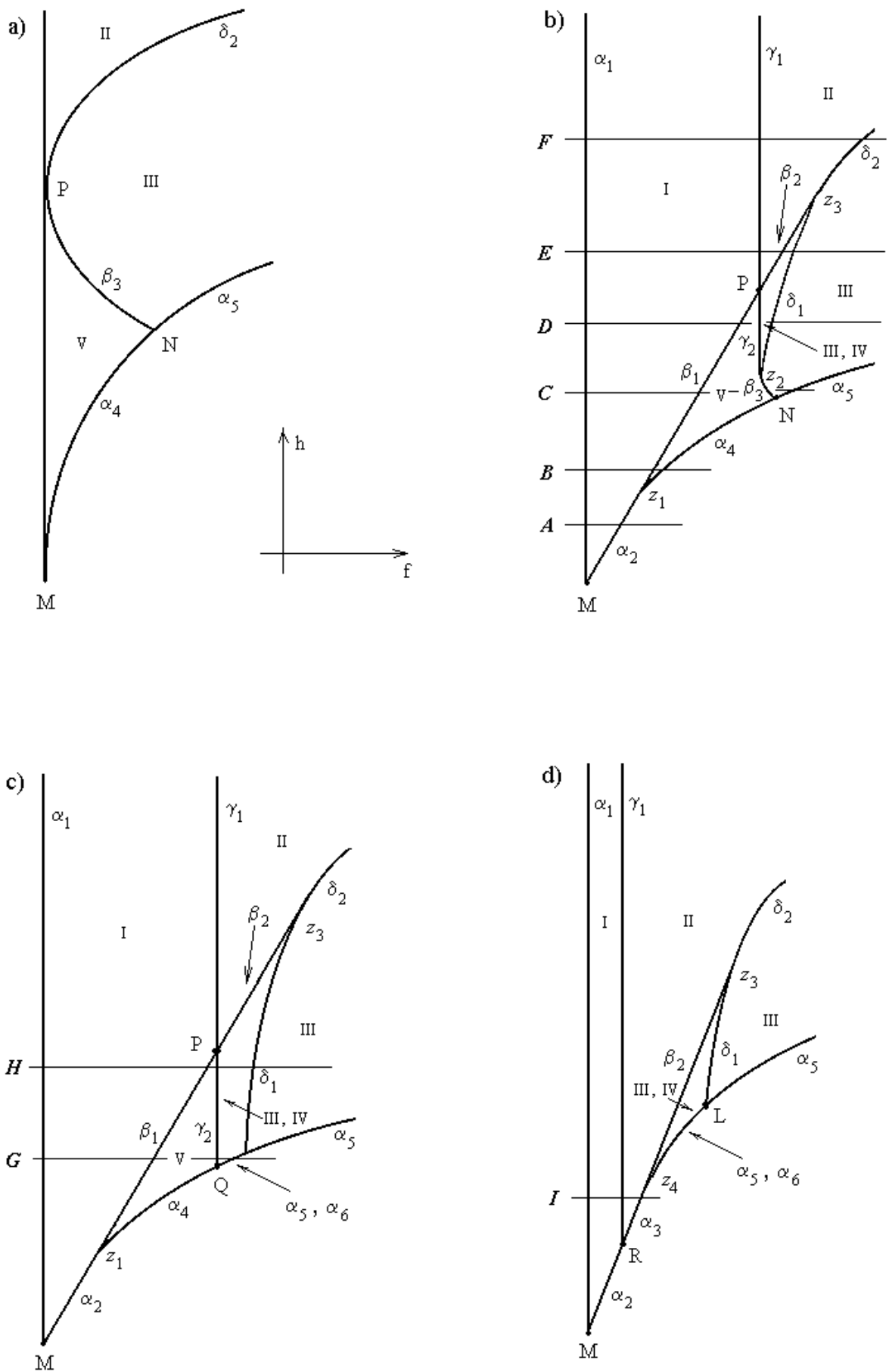


рис. 13

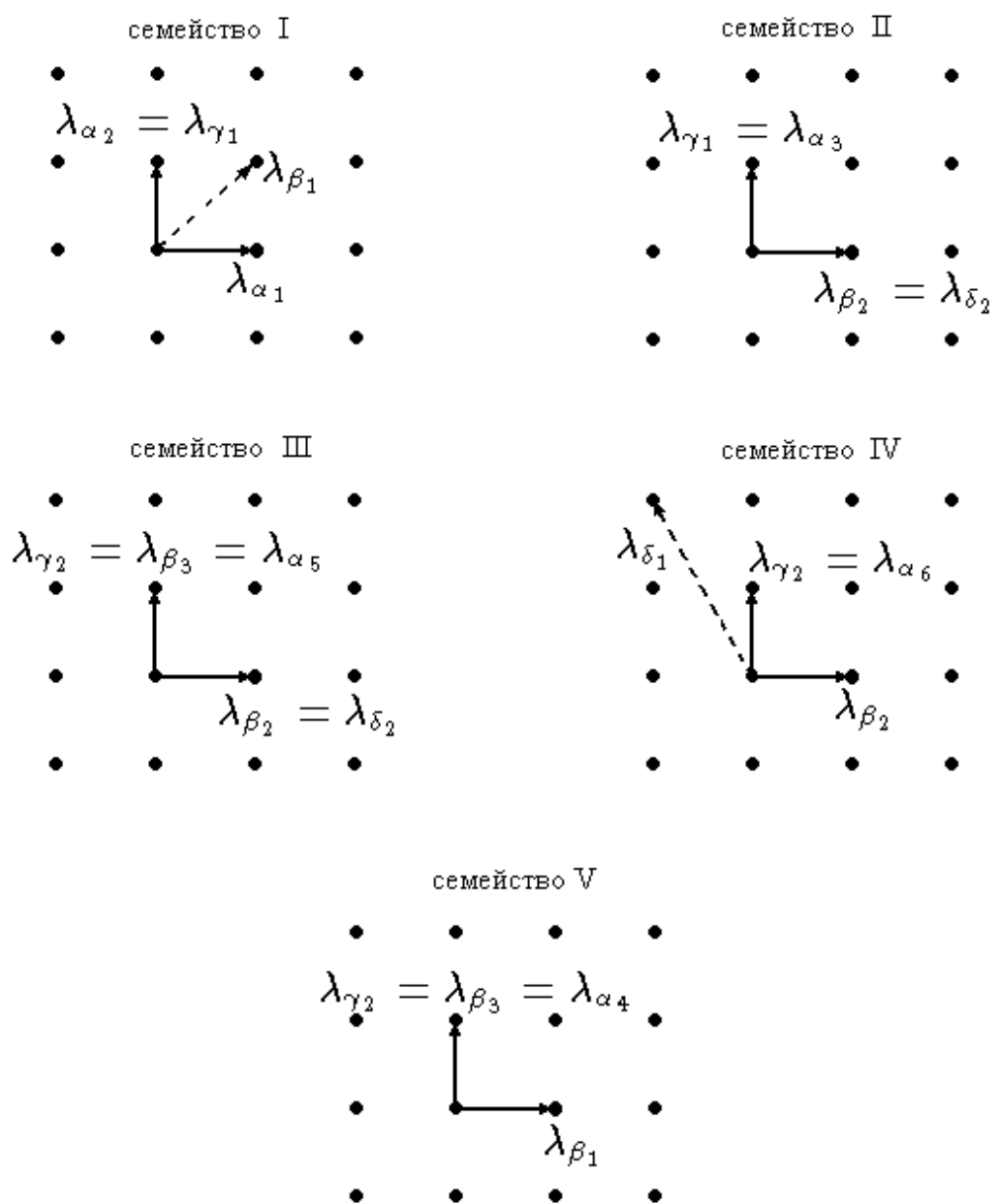


рис. 14

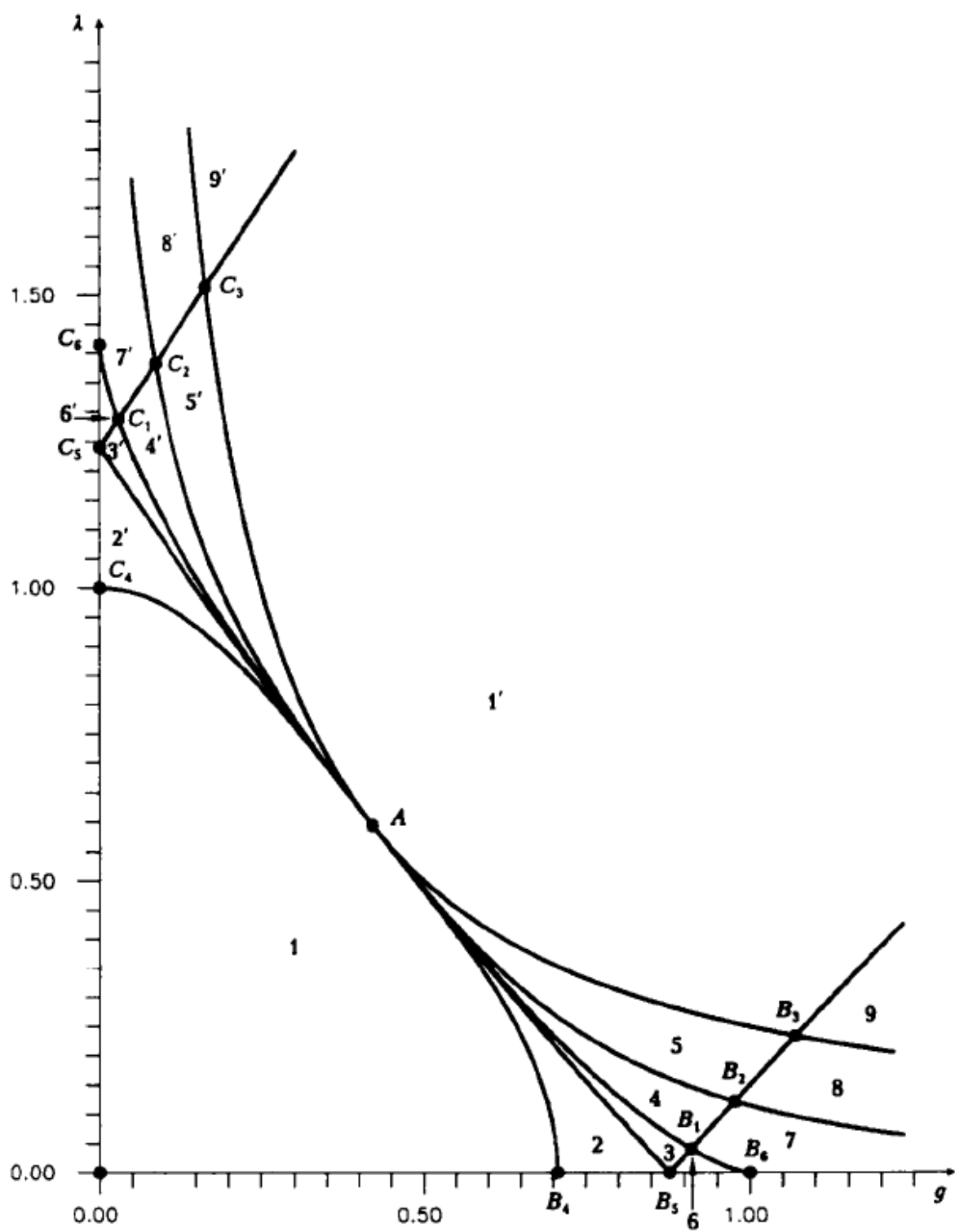


рис. 15

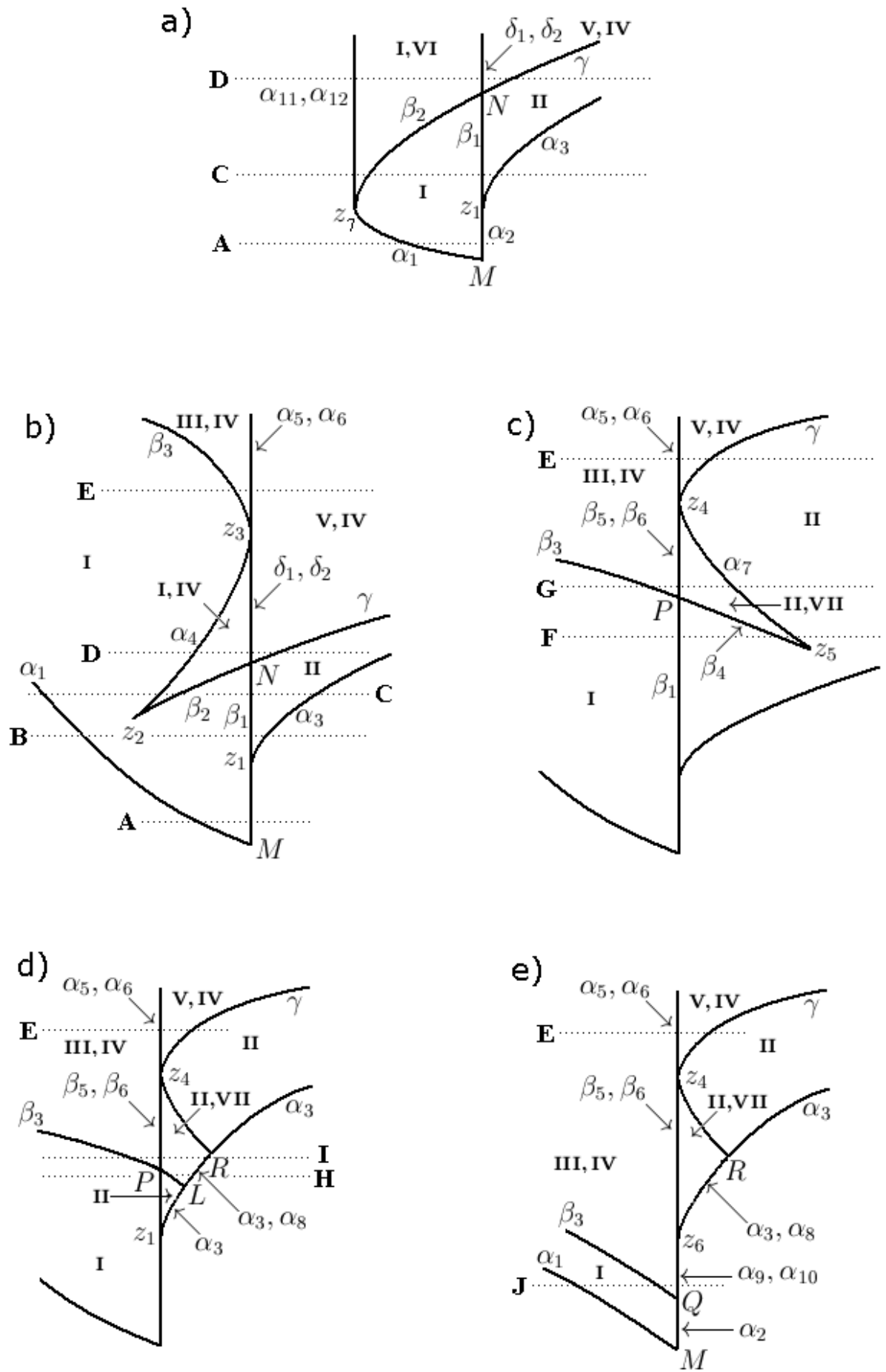


рис. 16

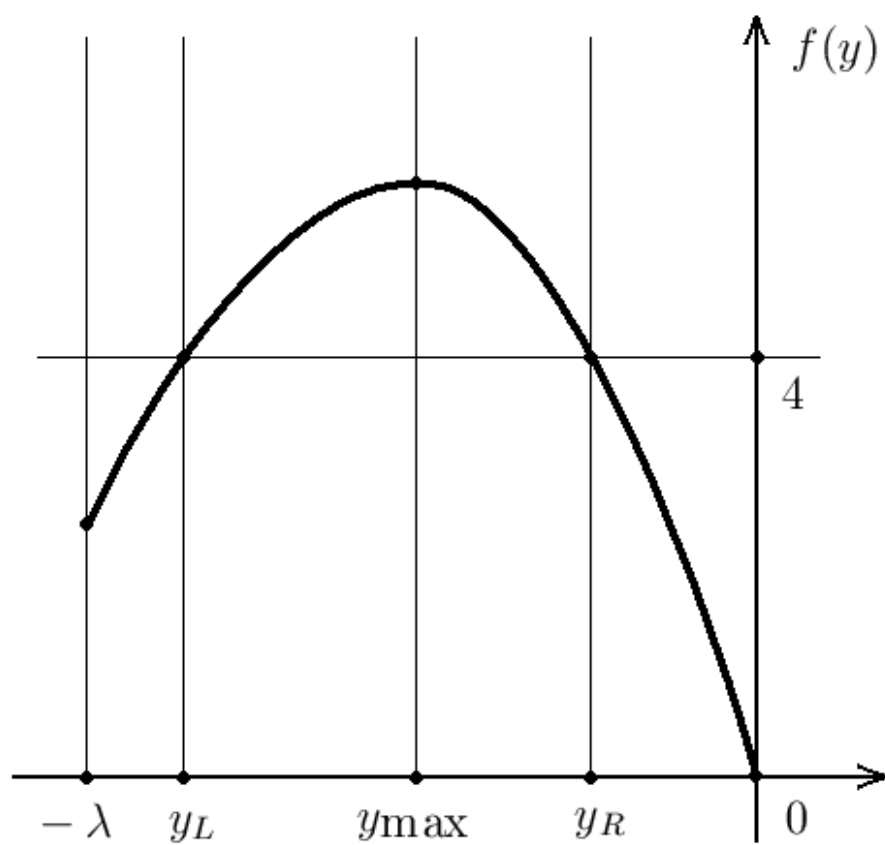


рис. 17

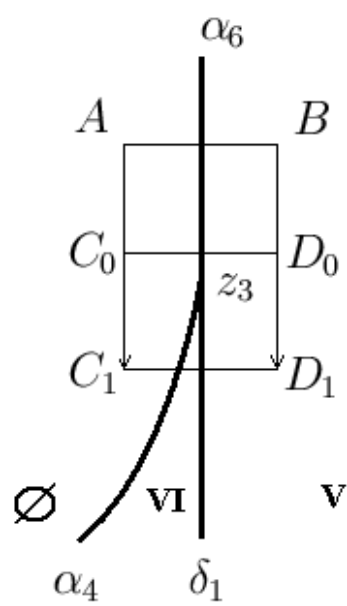


рис. 18

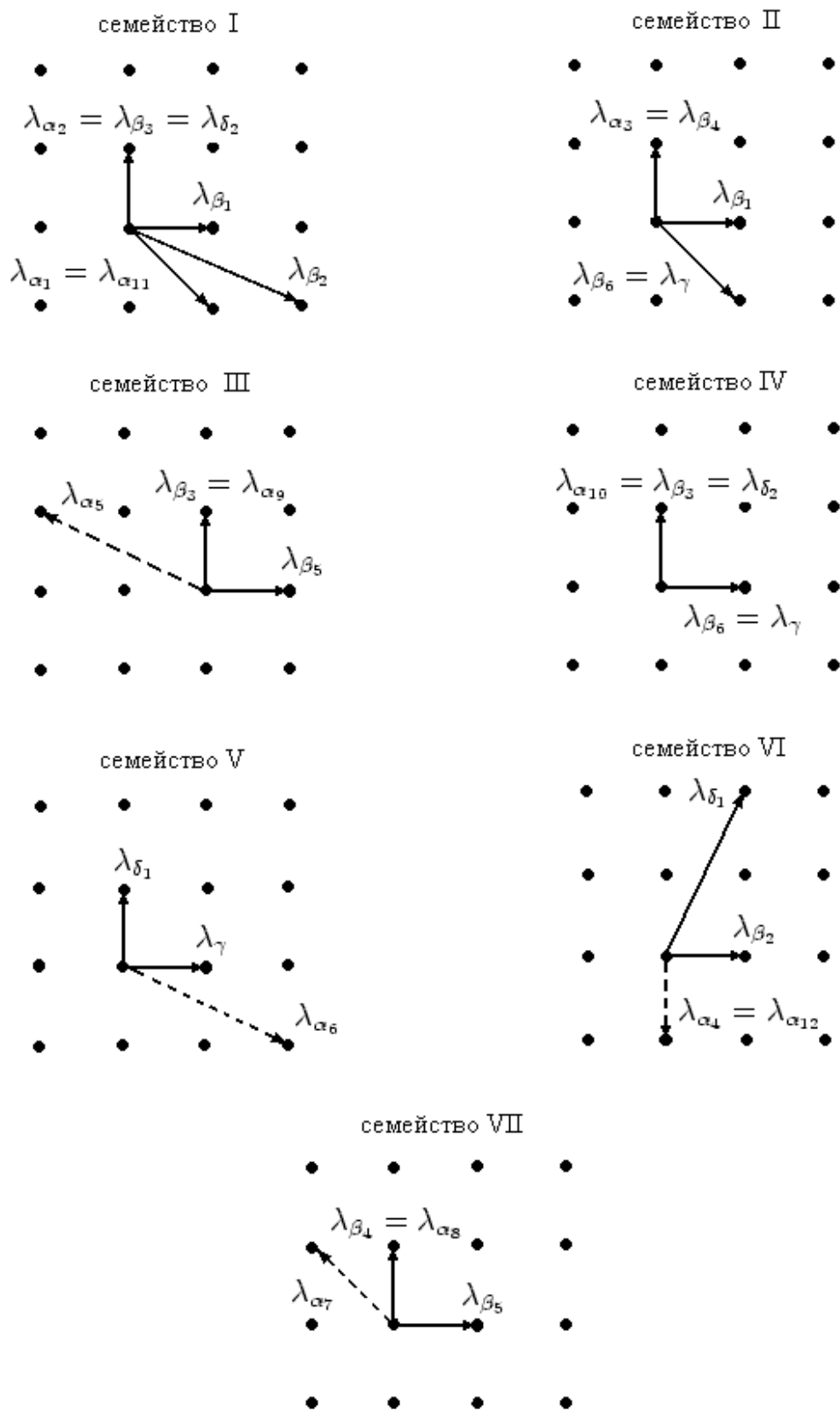


рис. 19