

Московский Государственный университет  
им. М.В. Ломоносова  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
*на правах рукописи*

МАТВЕЕВ ВЛАДИМИР СЕРГЕЕВИЧ

УДК 514.7  
Особенности отображения момента и  
топологическое строение  
интегрируемых геодезических потоков  
(01.01.04 — геометрия и топология)

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук*

Научные руководители:  
доктор физико-математических  
наук А.В. Болсинов,  
академик РАН А.Т. Фоменко

Москва–1996.

Оглавление.

**Введение.**

Глава 1. Полный топологический инвариант невырожденных окрестностей слоев, содержащих точки типа седло-седло.

§1. Основные определения.

§2. Предварительные сведения: действие Пуассона и топологическое строение интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности невырожденных особых точек.

§3. Топологическое строение в шаровой окрестности невырожденных точек типа седло-седло.

§4. Сведение задачи топологической классификации невырожденных насыщенных окрестностей точек типа седло-седло к задаче классификации седловых окрестностей.

§5. Атомно-седловые связи.

§6. Седловой комплекс.

§7.  $l$ -тип седловой окрестности.

§8. Свойства  $Cl$ -типов седловых окрестностей.

§9. Теорема реализации.

§10. Теорема Зунга.

§11. Количество неэквивалентных седловых окрестностей малых весов.

§12. Круговая молекула и гипотеза Фоменко.

Глава 2. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

§1. Основные определения.

§2. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе.

§3. Доказательство теорем классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе.

§4. Линейно интегрируемые потоки на торе.

§5. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна.

§6. Доказательство теорем классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

§7. Линейно интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна.

§8. Что мы будем понимать под описанием топологического строения геодезических потоков.

§9. Невырожденные геодезические потоки.

§10. Меченые молекулы квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

§11. Меченые молекулы геодезических потоков квазилинейных метрик на бутылке Клейна.

§12. Топологическое описание линейно интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

§13. Число Эйлера и его связь с  $n$ -метками.

§14. Доказательство теорем топологической классификации геодезических потоков на бутылке Клейна.

Глава 3. Семейство примеров 4-метрик на бутылке Клейна.

§1. Основные определения.

§2. Построение.

§3. Отсутствие квадратичных по импульсам интегралов.

§4. Отсутствие интегралов степени 3.

§5. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков метрик  $G_{abf}$ .

Приложение. Таблица допустимых атомно-седловых связей и соответствующих круговых молекул.

ВВЕДЕНИЕ.

Тема диссертации и ее основные результаты лежат в рамках топологической механики — одного из важных и интересных направлений развития современной математики, основы которого были заложены в работе А.Т. Фоменко [?]. В дальнейшем это направление интенсивно развивалось в работах А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко, Х. Ципанга (H. Zieschang) (например, [?], [?]) и других математиков.

Рассмотрим гамильтонову систему на четырехмерном симплектическом многообразии  $M^4$ , порожденную гамильтонианом  $H$ . Эта система называется *интегрируемой*, если существует функция  $f$ , постоянная на траекториях системы и функционально независимая с гамильтонианом  $H$ . Под *отображением момента* будем понимать отображение  $\Phi : M^4 \rightarrow R^2$ , задаваемое формулой  $\Phi(x) = (H(x), f(x))$ . Отображение момента определяет слоение Лиувилля многообразия  $M^4$ . Слоями Лиувилля называются связные компоненты поверхностей уровня отображения момента.

Подмножество  $N \subset M^4$  называется *насыщенным*, если оно состоит из целых слоев Лиувилля, два насыщенных множества называются *топологически эквивалентными*, если между ними существует гомеоморфизм, переводящий слои Лиувилля в слои Лиувилля, критические окружности в критические окружности, и сохраняющий ориентацию критических окружностей гамильтоновым векторным полем.

Для теоретической механики особый интерес представляют натуральные интегрируемые гамильтоновы системы, то есть системы, симплектическими многообразиями которых являются кокасательные расслоения к двумерной римановой поверхности, а гамильтонианы представляются в виде суммы положительно определенной квадратичной формы (кинетической энергии) на поверхности и функции на поверхности (потенциальной энергии).

Подходить к изучению топологического строения натуральных интегрируемых гамильтоновых систем можно следующим образом. Обозначим через  $Q_h$  "изоэнергетическую поверхность"  $\{H = h\}$ . Максимальное значение потенциальной энергии обозначим через  $a$ . Известно (принцип Мопертои), что изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  при  $h > a$  топологически эквивалентна геодезическому потоку подходящей метрики. Значение  $a$  является критическим значением гамильтониана  $H$ . При переходе через него поверхность  $Q_h$  перестраивается. При переходе через следующий критический уровень поверхность снова перестраивается, и так далее. Поэтому для того, чтобы изучить топологическое строение системы, достаточно изучить топологическое строение интегрируемых геодезических потоков и такие перестройки.

На поверхности  $Q_h$  лежат сингулярные точки интегрируемой гамильтоновой системы. Все перестройки происходят в окрестностях *сингулярных слоев* Лиувилля, то есть слоев, содержащих точки, в которых обнуляются и дифференциал функции  $H$ , и дифференциал функции  $f$ .

Ясно, что эти перестройки тесно связаны с топологическим строением таких окрестностей.

Таким образом, один из подходов к изучению топологического строения

интегрируемых гамильтоновых систем состоит в изучении топологического строения интегрируемых геодезических потоков и топологического строения систем в окрестностях слоев, содержащих сингулярные точки.

Первая глава диссертации посвящена описанию строения интегрируемых гамильтоновых систем в насыщенной окрестности сингулярного слоя, содержащего точки типа седло-седло.

Вводится определение невырожденной окрестности такого слоя и строится топологический инвариант невырожденных окрестностей. Этот инвариант (называемый *Cl-типом*) был введен А.В. Болсиновым и автором в [?]. Оказывается, *Cl-тип* является полным топологическим инвариантом.

**ТЕОРЕМА (А)** (Топологической классификации невырожденных окрестностей точек типа седло-седло) *Две невырожденные окрестности точек типа седло-седло топологически эквивалентны тогда и только тогда, если если их Cl-типы естественно изоморфны.*

В случае, когда слой содержит ровно одну сингулярную точку типа седло-седло, такое топологическое описание было дано Л.М. Лерманом и Я.Л. Уманским в работе [?]. Результаты первой главы можно рассматривать как обобщение их результатов на слои содержащие две и больше точек типа седло-седло.

Заметим, что топологическое описание интегрируемых гамильтоновых систем в насыщенных окрестностях невырожденных точек остальных типов намного проще и было последовательно осуществлено в работах [?], [?], [?] и [?].

Интересным следствием теории *Cl-типа* стали результаты о круговых молекулах. Напомним, что, как следует из работ [?], [?], топологическое строение изоэнергетической поверхности  $Q_h$  описывается так называемыми мечеными молекулами. Как было отмечено в работе [?], топологическое строение границы невырожденной насыщенной окрестности особого слоя также можно описывать в терминах меченых молекул.

Поясним на примере. Рассмотрим новую гамильтонову систему, гамильтонианом которой является функция  $H^2 + f^2$ . Эта система, очевидно, интегрируема, в качестве интеграла можно взять функцию  $H$ . Слои Лиувилля новой системы совпадают со слоями Лиувилля старой системы. Так как множество  $\{H^2 + f^2 = \varepsilon\}$  одновременно является границей окрестности  $\{H^2 + f^2 < \varepsilon\}$  и "изоэнергетической" поверхностью новой системы, то топологическое строение границы окрестности  $\{H^2 + f^2 < \varepsilon\}$  описывается в терминах меченых молекул. Эта ситуация является типичной: при подходящем выборе гамильтониана границу невырожденной окрестности можно рассматривать как изоэнергетическую поверхность и описывать ее топологическое строение меченой молекулой.

Такие меченые молекулы называются круговыми молекулами. Очевидно, что круговая молекула является топологическим инвариантом. В работах [?], [?] было показано, что круговая молекула является полным топологическим инвариантом невырожденной насыщенной окрестности слоя, содержащего точки типа центр-центр, центр-седло и фокус-фокус. Это, а так же другие аргументы, позволили А.Т. Фоменко сформулировать гипотезу о том, что круговая молекула является полным топологическим инвариантом топологического

строения регулярной насыщенной окрестности слоя, содержащего невырожденные сингулярные точки. К сожалению, автору не удалось доказать или опровергнуть эту гипотезу. Однако доказана теорема, что для слоев, содержащих не более двух точек типа седло-седло, гипотеза Фоменко верна. В частности, были построены круговые молекулы для всех слоев, содержащих ровно две точки типа седло-седло. Заметим, что в классических интегрируемых гамильтоновых системах не встречаются слои, содержащие более двух точек типа седло-седло.

Вторая глава посвящена исследованию топологического строения квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях. Известно, что на поверхностях с отрицательной эйлеровой характеристикой полиномиально интегрируемых геодезических потоков нет. Квадратично и линейно интегрируемые геодезические потоки на сфере описаны в работах В.Н. Колокольцева [?], [?], на торе — в работах И.К. Бабенко и Н.Н. Нехорошева [?]. Топологическое описание геодезических потоков на торе начато в работе Е.Н. Селивановой [?] и закончено в работе В.В. Калашникова [?].

В диссертации полностью описаны метрики на бутылке Клейна, геодезический поток которых квадратично интегрируем. Более подробно, каждой тройке  $(L, f, h)$ , где  $L$  — положительное число,  $f, h$  — периодические положительные функции, причем функция  $h$  четна, а функция  $f$  отлична от константы, сопоставляется метрика  $G_{(L, f, h)}$  на бутылке Клейна. Доказывается следующая теорема.

**ТЕОРЕМА (В)** *Геодезический поток метрики  $G$  на бутылке Клейна квадратично интегрируем, если и только если метрика  $G$  переводится диффеоморфизмом в некоторую метрику  $G_{(L, f, h)}$ .*

Каждой тройке  $(L, f, h)$  сопоставлена меченая молекула  $M(L, f, h)$ . Напомним, что меченая молекула — полный топологический инвариант интегрируемой гамильтоновой системы. Доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА (С)** *Меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{(L, f, h)}$  совпадает с  $M(L, f, h)$ .*

Дополнительным любопытным результатом изучения топологического строения квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна, изложению которого посвящена третья глава диссертации, стало построение семейства метрик на бутылке Клейна, геодезические потоки которых интегрируемы полиномом четвертой степени от импульсов и не интегрируемы никакими полиномами от импульсов меньшей степени. Заметим, что геодезические потоки с таким свойством ранее были известны только для сферы [?]. Исследование таких геодезических потоков позволило найти чисто аналитическое доказательство неинтегрируемости никаким полиномом от импульсов третьей и меньшей степени. Третья глава посвящена построению этого семейства и его топологической классификации.

Автор пользуется случаем поблагодарить своих научных руководителей Анатолия Тимофеевича Фоменко и Алексея Викторовича Болсинова за постановку задач и за постоянное внимание к работе.

Глава 1. Полный топологический инвариант невырожденных окрестностей словес, содержащих точки типа седло-седло.

### §1. Основные определения.

Под *интегрируемой гамильтоновой системой* мы будем понимать четверку  $(M^4, \omega, H, f)$ , где  $M^4$  — такое гладкое четырехмерное многообразие,  $\omega$  — такая замкнутая невырожденная 2-форма на нем,  $H$  и  $f$  — такие гладкие функции  $H, f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , что выполняются следующие условия:

- 1) скобка Пуассона функций  $H$  и  $f$  тождественно равна 0;
- 2) функции  $H$  и  $f$  функционально независимы.

Под функциональной независимостью здесь понимается линейная независимость дифференциалов функций почти во всех точках многообразия. Заметим, что первое условие эквивалентно постоянности функции  $f$  на траекториях гамильтоновой системы, порожденной гамильтонианом  $H$ , см., например, [?].

*Отображением момента* называется отображение  $\Phi: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определяемое следующим образом:  $\Phi(x) = (H(x), f(x))$ . Точка  $x_1 \in M^4$  называется *особой*, если ранг дифференциала отображения момента в этой точке меньше двух. Точка  $x_0 \in M^4$  называется *сингулярной*, если ранг дифференциала отображения момента в этой точке равен нулю. Образ множества особых точек при отображении момента называется *бифуркационной диаграммой*. Бифуркационную диаграмму удобно представлять, как подмножество плоскости с координатами  $H, f$ .

*Слоем Лиувилля* называется связная компонента поверхности уровня отображения момента. Известно, (см. например, [?]), что компактный слой Лиувилля, не содержащий особых точек, диффеоморфен двумерному тору. Строчение слоев Лиувилля, содержащих особые точки, существенно сложнее.

Пусть  $L^2 \subset M^4$  — слой Лиувилля. Простая замкнутая кривая  $O \subset L^2$  называется *критической окружностью*, если

- 1) она состоит из особых точек, не являющихся сингулярными и
- 2) в ее некоторой окрестности  $U_O^2 \subset L^2$  нет других особых точек.

Если дифференциал функции  $H$  не обращается в ноль в на критической окружности, то касательное к ней векторное поле  $sgrad(H)$  также не обращается в ноль. В этом случае ориентируем эту окружность векторным полем  $sgrad(H)$ . В противном случае оставим критическую окружность неориентированной.

*Насыщенным множеством* мы будем называть подмножество  $U \subset M^4$ , состоящее из целых слоев Лиувилля. Другими словами, насыщенное множество вместе с любой точкой слоя Лиувилля содержит весь слой Лиувилля. Соответственно, *насыщенной окрестностью* мы будем называть открытое насыщенное подмножество многообразия  $M^4$ . Если не оговорено противное, то насыщенные окрестности будем предполагать связными.

Две насыщенные окрестности называются *топологически эквивалентными*, если между ними существует гомеоморфизм, сохраняющий слой Лиувилля и переводящий критические окружности в критические окружности с сохранением

ориентации.

Пусть  $x_0 \in M^4$  — сингулярная точка. Рассмотрим пространство  $\mathcal{B}$  билинейных форм в точке  $x_0$ . Это пространство является алгеброй Ли со скобкой  $[\alpha, \beta] = \alpha\omega\beta - \beta\omega\alpha$ .

Если в окрестности точки  $x_0$  фиксирована система координат, то билинейные формы  $\alpha, \beta$  и  $\omega$  задаются матрицами. Пусть  $\alpha$  задается матрицей  $A$ ,  $\beta$  — матрицей  $B$ ,  $\omega$  — матрицей  $\Omega$ . Тогда скобка  $[\alpha, \beta]$  задается матрицей  $[A, B] = A\Omega B - B\Omega A$ .

Такая алгебра Ли изоморфна алгебре Ли  $sp(2, \mathbb{R})$ , [?]. Действительно, если фиксирована система координат, то в качестве канонического (по отношению к выбранной системе координат) изоморфизма можно взять умножение слева на матрицу  $\Omega$ . Легко проверяется, что если взять другую систему координат, то композиция канонического изоморфизма в первой системе координат и изоморфизма, обратного каноническому для второй системы координат, есть просто сопряжение алгебры  $\mathcal{B}$ .

Так как функции  $H$  и  $f$  коммутируют, то подалгебра, порождаемая вторыми дифференциалами функций  $H$  и  $f$ , коммутативна.

**Определение 1** *Сингулярная точка  $x_0 \in M^4$  называется невырожденной, если подалгебра алгебры  $sp(4, \mathbb{R})$ , задаваемая вторыми дифференциалами функций  $H$  и  $f$ , является подалгеброй Картана.*

Известно, (см., например, [?]), что, с точностью до сопряжения, в  $sp(4, \mathbb{R})$  существует ровно 4 подалгебры Картана. Аналогичный факт верен и для алгебры  $\mathcal{B}$ . Если в качестве координат в окрестности точки  $x_0$  взять симплектические, то в качестве представителей классов сопряжения можно взять следующие 4 подалгебры:

- 1) (*центр-центр*) — подалгебра, порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- 2) (*центр-седло*) — подалгебра, порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 3) (*седло-седло*) — подалгебра, порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4) (*фокус-фокус*) — подалгебра, порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем примеры интегрируемых гамильтоновых систем, содержащих невырожденные сингулярные точки каждого из упомянутых типов.

Рассмотрим симплектическое пространство  $R^4$  с координатами  $p_1, p_2, q_1, q_2$ . Рассмотрим четыре интегрируемые гамильтоновы системы  $(R^4, \omega, H_i, f_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , где

1)  $H_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1^2 + q_1^2$ ,  $f_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_2^2 + q_2^2$ . Такую интегрируемую гамильтонову систему будем называть *модельной системой типа центр-центр*.

2)  $H_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1^2 + q_1^2$ ,  $f_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_2 q_2$ . Такую интегрируемую гамильтонову систему будем называть *модельной системой типа центр-седло*.

3)  $H_3(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1 q_1$ ,  $f_3(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_2 q_2$ . Такую интегрируемую гамильтонову систему будем называть *модельной системой типа седло-седло*.

4)  $H_4(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1 q_2 - p_2 q_1$ ,  $f_4(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_2 q_2 + p_1 q_1$ . Такую интегрируемую гамильтонову систему будем называть *модельной системой типа фокус-фокус*.

Для каждой из этих систем точка  $(0, 0, 0, 0)$  является невырожденной сингулярной точкой соответствующего типа.

Заметим, что бифуркационная диаграмма модельной системы типа седло-седло состоит из двух пересекающихся прямых  $\{H = 0\}$  и  $\{f = 0\}$ .

**Определение 2** Пусть  $x_0$  невырожденная сингулярная точка типа седло-седло. Насыщенную окрестность  $U^4$  точки  $x_0$  будем называть *невырожденной*, если выполнены следующие условия.

1) Бифуркационная диаграмма ограничения гамильтоновой системы на окрестность  $U^4$  состоит из пары трансверсально пересекающихся по одной точке (обозначим эту точку  $A$ ) гладких кривых, причем каждая кривая может быть задана графиком функции от переменной  $H$ ; образ  $\Phi(U^4)$  диффеоморфен кругу  $\{x^2 + y^2 < 1\}$  и диффеоморфизм можно устроить так, что образ бифуркационной диаграммы совпадает с пересечением круга  $\{x^2 + y^2 < 1\}$  с осями координат  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ .

2) Все особые (в том числе, сингулярные) точки  $U^4$  невырождены. Пробраз  $\Phi^{-1}(A)$  связен. Все сингулярные точки  $U^4$  лежат в прообразе  $\Phi^{-1}(A)$ .

3) Ограничение отображения момента  $\Phi$  на окрестность  $U^4$  является собственным отображением.

Напомним, что под собственным отображением понимается такое отображение, что прообраз любого компактного множества компактен. В частности, все слои Лиувилля, лежащие в невырожденной окрестности точки типа седло-седло, компактны.

Две невырожденные насыщенные окрестности будем называть *топологически эквивалентными*, если они топологически эквивалентны как насыщенные окрестности.

Прокомментируем условия невырожденности. Необходимость первого условия вызвано тем, что топологическое строение в окрестности вырожденной сингулярной точки может быть очень сложным и не поддаваться описанию в финитных терминах. Второе и третье условие возникло в связи с натуральными системами. Слои Лиувилля натуральных систем компактны. Классические натуральные интегрируемые гамильтоновы системы аналитические (т.е. на многообразии  $M^4$  введена аналитическая структура и функции  $H$ ,  $f$  и форма  $\omega$  аналитические). Для аналитических систем бифуркационная диаграмма окрестности слоя, содержащего точку типа седло-седло, обязательно состоит из пары трансверсально пересекающихся гладких кривых. Если предположить, что касательные векторы к этим кривым неперпендикулярны в точке пересечения, то прообраз некоторой шаровой окрестности на бифуркационной диаграмме удовлетворяет условиям 2, 3.

Постановка проблем.

**1) Проблема распознавания** Существует ли алгоритм, который по двум заданным невырожденным насыщенным окрестностям определяет, топологически эквивалентны они или нет?

**2) Проблема перечисления** Существует ли алгоритм, перечисляющий седловые окрестности с точностью до топологической эквивалентности?

Корректность постановки указанных проблем требует уточнения. Нужно объяснить, как лиувиллево слоение можно задавать финитным образом. Поступим как в работе [?]. Назовем кусочно-линейное четырехмерное многообразие  $U_{PL}^4$  с заданным разбиением на подполиэдры *кусочно-линейным лиувиллевым слоением*, если существует кусочно-гладкий гомеоморфизм многообразия  $U_{PL}^4$  на "гладкий оригинал", то есть на многообразии  $U^4$  с заданной на нем интегрируемой гамильтоновой системой, переводящий элементы разбиения многообразия  $U_{PL}^4$  в слои Лиувилля. В дальнейшем мы постоянно будем иметь в виду это замечание, не повторяя его каждый раз заново.

Основными результатами первой главы диссертации является положительный ответ на обе поставленные проблемы. А именно, каждой невырожденной насыщенной окрестности сопоставляется ее *Cl-тип*, который представляет собой пару  $(C, l)$ , где  $C$  — конечный двумерный клеточный комплекс,  $l$  — пара атомов. При этом две невырожденные насыщенные окрестности точек типа седло-седло топологически эквивалентны если и только если их *Cl-типы* изоморфны в естественном смысле.

Описано множество "реализуемых" *Cl-типов*, т.е. *Cl-типов*, которые отвечают невырожденным насыщенным окрестностям точек типа седло-седло.

**§2. Предварительные сведения: действие Пуассона и топологическое строение интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности невырожденных особых точек.**

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему  $(M^4, \omega, H, f)$ . Рассмотрим векторные поля  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$ . Напомним, что если  $g: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция на симплектическом многообразии  $(M^4, \omega)$ , то векторное поле  $sgrad(g)$  определяется условием  $\omega(sgrad(g), v) = v(g)$  для любого векторного поля  $v$ . Через  $v(g)$  здесь обозначена производная функции  $g$  вдоль векторного поля  $v$ . Легко проверяется, что векторные поля  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$  коммутируют. Действительно, достаточно проверить в точках, в которых они не коллинеарны. По теореме Дарбу в окрестности таких точек функции  $H$  и  $f$  можно дополнить до симплектической системы координат  $H, f, q_H, q_f$ . В этой системе координат выполняются равенства  $sgrad(H) = (0, 0, -1, 0)$ ;  $sgrad(f) = (0, 0, 0, -1)$ . Поэтому векторные поля  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$ , коммутируют.

Пусть траектории векторных полей  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$  продолжаемы на бесконечность. Это всегда так, если слои Лиувилля компактны. Определим действие группы Ли  $(\mathbb{R}^2, +)$  на многообразии  $M^4$  следующим образом. Элемент  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  действует сдвигом вдоль траектории векторного поля  $sgrad(aH) + sgrad(bf)$  на время 1. Так как векторные поля  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$  коммутируют, композиция сдвигов на время 1 вдоль векторных полей  $sgrad(a_1H) + sgrad(b_1f)$  и  $sgrad(a_2H) + sgrad(b_2f)$  дает сдвиг вдоль векторного поля  $sgrad((a_1 + a_2)H) + sgrad((b_1 + b_2)f)$ , поэтому определение корректно.

**Определение 3** *Определенное выше действие группы  $(\mathbb{R}^2, +)$  на  $M^4$  будем называть действием Пуассона.*

Заметим, что сдвиги вдоль векторных полей  $sgrad(H)$  и  $sgrad(f)$  сохраняют значения функций  $H, f$  и форму  $\omega$ . Следовательно, пуассоново действие сохраняет  $H, f$  и  $\omega$ .

Известно, (см., например, [?]) что любая орбита действия группы  $(\mathbb{R}^2, +)$  диффеоморфна одному из следующих шести многообразий: 1)  $\mathbb{R}^2$ , 2)  $\mathbb{R}^1 \times S^1$ , 3)  $S^1 \times S^1$ , 4)  $\mathbb{R}^1$ , 5)  $S^1$  и 6) одна точка.

**ЛЕММА 1** *Пусть в точке  $x \in M^4$  для некоторых вещественных  $\lambda$  и  $\mu$  выполняется равенство  $\lambda dH + \mu df = 0$ . Тогда на всей орбите пуассонова действия  $O(x)$ , содержащей точку  $x$ ,  $\lambda dH + \mu df = 0$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g = \lambda H + \mu f$ . По условию,  $dg|_x = 0$ . Так как действие Пуассона сохраняет функции  $H$  и  $f$ , то оно сохраняет и любую их линейную комбинацию. Следовательно, дифференциал функции  $g$  равен 0 во всех точках орбиты  $O(x)$ . Лемма доказана.

**Следствие** *Размерность орбиты  $O(x)$  равна рангу отображения момента  $\Phi$  в точке  $x$ .*

Дадим определение невырожденности одномерной орбиты. Пусть  $\lambda, \mu$  — коэффициенты зависимости между дифференциалами функций  $H$  и  $f$  на одномерной орбите  $O^1$ . Одно число из пары  $\lambda, \mu$  отлично от 0, предположим для определенности, что  $\mu \neq 0$ . Тогда дифференциал функции  $H$  отличен от нуля в точках орбиты  $O^1$ . Рассмотрим произвольную точку  $x$  орбиты

$O^1$ . Ограничим функцию  $f$  на поверхность  $Q_x = \{y \in M^4 : H(y) = H(x)\}$ . Так как пуассоново действие сохраняет функцию  $H$ , то орбита  $O^1$  лежит в  $Q_x$ . Рассмотрим диск  $D^2 \subset Q_x$ , трансверсально пересекающий  $O^1$  в точке  $x$ . Точка  $x$  является особой точкой ограничения функции  $f$  на диск  $D^2$ .

**Определение 4** *Орбита  $O^1$  называется невырожденной, если ограничение функции  $f$  на диск  $D^2$  имеет морсовскую особенность в точке  $x$ .*

Так как сдвиги вдоль векторного поля  $sgrad(H)$  сохраняют функции  $H$  и  $f$ , то это определение не зависит от выбора точки  $x$  на орбите. Проекция вдоль векторного поля  $sgrad(H)$  на трансверсальный диск является диффеоморфизмом сохраняющим функцию  $f$ . Следовательно, определение не зависит от выбора двумерной трансверсали.

Невырожденную одномерную орбиту будем называть *гиперболической*, если ограничение функции  $f$  на диск  $D^2$  имеет особенность индекса  $(1, -1)$  в точке  $x$ .

Пусть орбита  $O_1$  точки  $x_1$  одномерна и невырождена и пусть для ненулевой пары чисел  $(\lambda, \mu)$  дифференциалы функций  $H$  и  $f$  линейно зависимы с коэффициентами линейной зависимости  $\lambda$  и  $\mu$ , то есть  $(\lambda H + \mu f)|_{O_1} = 0$ . Рассмотрим множество особых точек  $K$  в некоторой малой окрестности  $W^4$  какой-нибудь точки из  $O_1$ .

**ЛЕММА 2** *Множество  $K$  в некоторой окрестности точки  $x$  из невырожденной одномерной орбиты диффеоморфно  $\mathbb{R}^2$ . Образ  $\Phi(K \cup W^4)$  является гладкой кривой, причем вектор  $(\mu, -\lambda)$  касается этой кривой в точке  $\Phi(x_1)$ .*

**Следствие** *Пусть точка  $x$  лежит на невырожденной гиперболической орбите. Тогда существуют такие функции  $\tilde{H}, \tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и такие координаты  $p_1, p_2, q_1, q_2$  в окрестности точки  $x$ , что в окрестности точки  $x$   $H = \tilde{H}(p_1, p_2, q_2)$ ,  $f = \tilde{f}(p_1, p_2, q_2)$ .*

*Доказательство* этой леммы приведено в [?]. Напомним его. Для определенности будем предполагать, что  $\mu \neq 0$ . Тогда  $dH \neq 0$ . По теореме Дарбу в окрестности точки  $x$  можно ввести симплектические координаты  $H, p, q_H, q$ . В этих координатах форма  $\omega$  равна  $dH \wedge dq_H + dp \wedge dq$ , а координаты дифференциалов функций  $H$  и  $f$  записываются, соответственно, как  $(1, 0, 0, 0)$  и  $(\frac{\partial f}{\partial H}, \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q_H}, \frac{\partial f}{\partial q})$ . Следовательно,  $\frac{\partial f}{\partial q_H} \equiv 0$ , и для линейной зависимости дифференциалов функций  $H$  и  $f$  необходимо и достаточно выполнения равенств  $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$  и  $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$ .

Рассмотрим систему уравнений  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \end{cases}$ . Так как орбита  $O_1$  невырождена,

то якобиан этой системы уравнений отличен от 0. Следовательно, существует однопараметрическое семейство одномерных орбит в окрестности точки  $x_1$ . Функция  $H$  является параметром этого семейства. Поэтому бифуркационная диаграмма окрестности точки  $x$  действительно представляет собой гладкую кривую. Для нахождения касательного вектора к этой кривой заметим, что, если  $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$  и  $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$ , то координатная запись дифференциалов функций

$H$  и  $f$  имеет вид  $(1, 0, 0, 0)$  и  $(\frac{\partial f}{\partial H}, 0, 0, 0)$ , соответственно. Следовательно, коэффициенты линейной зависимости (с точностью до умножения на константу) равны  $\lambda = \frac{\partial f}{\partial H}$ ,  $\mu = 1$ . По теореме о неявной функции, тангенс угла наклона касательного вектора к кривой бифуркационной диаграммы равен  $-\frac{\lambda}{\mu}$ . Лемма доказана.

### §3. Топологическое строение в шаровой окрестности невырожденных точек типа седло-седло.

Топологическое строение в окрестностях невырожденных точек изучали многие математики. В данной работе мы будем использовать результаты Л.М. Лермана, Я.Л. Уманского и Л. Элиассона (L. Eliasson).

Будем говорить, что одномерная орбита *примыкает* к сингулярной точке, если эта сингулярная точка лежит в замыкании этой орбиты.

**ЛЕММА 3** ([?]) *Одномерная орбита, примыкающая к невырожденной сингулярной точке ранга 0, невырождена.*

Отметим, что Л.М. Лерман и Я.Л. Уманский рассматривали аналитически интегрируемые гамильтоновы системы. Однако, в доказательстве этой леммы аналитичность фактически не используется.

Л. Элиассон рассматривал топологическое строение интегрируемых гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы в шаровых окрестностях невырожденных сингулярных точек. Ограничение его результатов на интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы сформулируем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1** ([?]) *Существует сохраняющий слоение Лиувилля диффеоморфизм некоторой окрестности невырожденной сингулярной точки на некоторую окрестность сингулярной точки модельной интегрируемой гамильтоновой системы такого же типа.*

Из этой теоремы вытекает ряд полезных следствий.

**Следствие 1** Одномерная орбита, примыкающая к сингулярной точке типа седло-седло, гиперболическая.

Действительно, такими орбитами на модельной системе являются только орбиты  $\{p_1 = 0, q_1 = 0, p_2 = 0\}$ ,  $\{p_1 = 0, q_1 = 0, q_2 = 0\}$ ,  $\{p_2 = 0, q_2 = 0, q_1 = 0\}$  и  $\{p_2 = 0, q_2 = 0, p_1 = 0\}$ , а они, очевидно, гиперболические. Следовательно, слой Лиувилля, содержащий эту орбиту, в окрестности точек орбиты локально гомеоморфен произведению креста (паре трансверсально пересекающихся интервалов) на интервал. Из невырожденных орбит только гиперболические обладают этим свойством. Следствие доказано.

**Следствие 2** Пусть бифуркационная диаграмма окрестности точки типа седло-седло гомеоморфна кресту. Тогда существует диффеоморфизм некой окрестности этой точки на модельную интегрируемую гамильтонову систему

типа седло-седло, сохраняющий совместные поверхности уровня функций  $H$  и  $f$ .

Заметим, что для аналитических интегрируемых гамильтоновых систем условие следствия 2 автоматически выполняется, а утверждение следует из теоремы Дж. Вильямсона (J. Williamson), [?].

Доказательство. Обозначим через  $U^4$  окрестность точки типа седло-седло, топологически эквивалентную модельной. Удобно предполагать, что окрестность  $U^4$  является прообразом некоего круга малого радиуса на бифуркационной диаграмме. Разобьем  $U^4$  на слои Лиувилля. Рассмотрим пространство  $\Gamma$  этого разбиения. Напомним, что пространством разбиения, по определению, называется топологическое пространство, точками которого являются элементы разбиения (т.е., в нашем случае, слои Лиувилля), с самой тонкой топологией из тех, в которых естественное отображение, переводящее точку в содержащий эту точку слой, непрерывно.

По теореме Л. Элиассона пространство разбиения  $\Gamma$  гомеоморфно прямому произведению креста на крест. Действительно, именно такое пространство разбиения у модельной системы. Обозначим этот гомеоморфизм через  $\xi$ . Крест будем рассматривать как одномерный клеточный комплекс, состоящий из четырех одномерных ребер с одной общей для всех ребер вершиной. Тогда на прямом произведении креста на крест естественно вводится структура двумерного клеточного комплекса. Заметим, что ребра этого комплекса состоят из особых слоев слоения Лиувилля.

Так как функции  $H$  и  $f$  постоянны на слоях Лиувилля, то можно рассматривать эти функции как функции на пространстве разбиения  $\Gamma$ . Можно ввести гладкую структуру на внутренностях двумерных граней так, что отображение  $(H, f) : \Gamma \rightarrow R^2$  является гладким отображением на объединении внутренностей двумерных граней и что естественное отображение окрестности  $U$  в  $\Gamma$  является гладким на его прообразе.

Заметим, что прообраз бифуркационной диаграммы при отображении  $(H, f)$  совпадает с одномерным остовом комплекса  $\Gamma$ . Действительно, так как бифуркационная диаграмма, по определению, является образом особых точек, то прообраз линий бифуркационной диаграммы включает в себя все особые слои. С другой стороны, слой, не содержащий особых точек, не может лежать в прообразе бифуркационной диаграммы. Действительно, это так для окрестностей точек невырожденных одномерных невырожденных орбит, а любой слой, пересекающийся с малой окрестностью точки типа седло-седло пересекается с малой окрестностью одномерной орбиты, примыкающей к этой особой точке. Из тех же соображений получаем, что прообраз луча креста бифуркационной диаграммы на  $\Gamma$  состоит из двух ребер одномерного остова.

Легко видеть, что на одномерном остове можно поправить гомеоморфизм  $\xi$  автотиффеоморфизмом так, чтобы он сохранил прообразы точек при отображении  $(H, f)$ , и что можно продолжить эту поправку на двумерные грани комплекса. Следствие доказано.

**§4. Сведение задачи топологической классификации невырожденных насыщенных окрестностей точек типа седло-седло к задаче классификации седловых окрестностей.**

В этом параграфе мы сведем задачу топологической классификации невырожденных окрестностей точек типа седло-седло к задаче классификации близких, но технически более удобных объектов, называемых для краткости седловыми окрестностями. Седловая окрестность также является интегрируемой гамильтоновой системой. Отличие состоит в том, что бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из пересекающихся интервалов координатных осей плоскости  $R^2$ . При этом ни одна из кривых бифуркационной диаграммы не представляется в виде графика некоторой функции другой координаты. Поэтому мы выбираем другой способ ориентации критических окружностей: каждая из них ориентируется косым градиентом соответствующей координаты.

**Определение 5** *Седловой окрестностью называется интегрируемая гамильтонова система  $(U^4, \omega, f_1, f_2)$ , удовлетворяющая следующим условиям.*

1) *Образ многообразия  $U^4$  при отображении момента есть единичный круг  $\{f_1^2 + f_2^2 < 1\}$ ; бифуркационная диаграмма состоит из пары интервалов:  $\{f_1 = 0, |f_2| < 1\}$  и  $\{f_2 = 0, |f_1| < 1\}$ ;*

2) *Все особые (в том числе сингулярные) точки  $U^4$  невырождены. Преобраз  $\Phi^{-1}(0, 0)$  связан. Все сингулярные точки  $U^4$  лежат в прообразе  $\Phi^{-1}(0, 0)$ .*

3) *Отображение момента  $\Phi$  является собственным отображением.*

Отметим еще раз, что так как множество  $\{f_1 = 0, |f_2| < 1\}$  на плоскости с координатами  $f_1, f_2$  нельзя задать графиком функции от переменной  $f_1$ , то седловая окрестность не является невырожденной окрестностью точки типа седло-седло.

Две седловые окрестности будем называть *эквивалентными*, если между соответствующими многообразиями существует гомеоморфизм, переводящий слои Лиувилля в слои Лиувилля, критические окружности в критические окружности с сохранением ориентации векторным полем  $sgrad(f_1 + f_2)$ .

Заметим, что для седловых окрестностей понятие эквивалентности отличается от понятия топологической эквивалентности насыщенных окрестностей интегрируемых гамильтоновых систем, так как критические окружности ориентируются разными векторными полями.

Следующая лемма говорит, что задача классификации седловых окрестностей эквивалентна задаче топологической классификации невырожденных окрестностей точек типа седло-седло.

**ЛЕММА 4** *Существует отображение из множества невырожденных окрестностей точек типа седло-седло на множество седловых окрестностей, переводящее топологически эквивалентные невырожденные насыщенные окрестности точек типа седло-седло в эквивалентные седловые окрестности, а топологически неэквивалентные — в неэквивалентные.*

Доказательство. Напомним, что невырожденную насыщенную окрестность можно рассматривать как интегрируемую гамильтонову систему на симплектическом

многообразии  $U^4$  с гамильтонианом  $H$  и интегралом  $f$ . Образ многообразия  $U^4$  (обозначим образ  $D^2$ , по определению,  $D^2$  гомеоморфен диску) лежит в плоскости с координатами  $H, f$ . Образ точки типа седло-седло будем обозначать  $A$ .

Бифуркационная диаграмма невырожденной окрестности состоит из двух трансверсально пересекающихся кривых, каждая из которых может быть задана графиком гладкой функции переменной  $H$ . Обозначим эти кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .  $H$  является гладким параметром на кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Не вызывает сомнения, что существует диффеоморфизм  $\xi : D^2 \rightarrow \{f_1^2 + f_2^2 < 1\}$ , переводящий диск  $D_2$  в круг  $\{f_1^2 + f_2^2 < 1\}$  так, что

1) кривая  $\gamma_1$  переходит в интервал  $\{f_1 = 0, |f_2| < 1\}$ , причем для любых точек  $X_1, X_2 \in \gamma_1$  из  $H(X_1) > H(X_2)$  следует  $f_2(\xi(X_1)) > f_2(\xi(X_2))$ .

2) кривая  $\gamma_2$  переходит в интервал  $\{f_2 = 0, |f_1| < 1\}$ , причем для любых точек  $X_1, X_2 \in \gamma_2$  из  $H(X_1) > H(X_2)$  следует  $f_1(\xi(X_1)) > f_1(\xi(X_2))$ .

Пусть этот диффеоморфизм задается парой функций  $f_1 = f_1(H, f)$ ,  $f_2 = f_2(H, f)$ . Рассмотрим гамильтонову систему на симплектическом многообразии  $U^4$ , задаваемую гамильтонианом  $f_1$ . Легко проверяется, что она интегрируемая, причем в качестве дополнительного интеграла можно выбрать функцию  $f_2$ . Четверка  $(U^4, \omega, f_1, f_2)$  задает седловую окрестность. Слои Лиувилля новой системы совпадают со слоями Лиувилля старой системы. Критические окружности новой системы совпадают с критическими окружностями старой системы. Если ориентировать критические окружности новой системы векторным полем  $sgrad(f_2) + sgrad(f_1)$ , то тогда тождественное отображение  $id : M^4 \rightarrow M^4$  суть диффеоморфизм, сохраняющий слоение Лиувилля, критические окружности и ориентацию критических окружностей. Лемма доказана.

**§5. Атомно-седловые связки.**

В этом параграфе вводится достаточно сложный комбинаторный объект, называемый *атомно-седловой связкой*.

Под *атомом* мы будем понимать пару  $(P^2, G)$ , где  $P^2$  — двумерная возможно несвязная поверхность,  $G$  — вложенный в нее ориентированный граф степени 4, причем

1) в каждой связанной компоненте поверхности  $P^2$  лежит ровно одна связная компонента графа  $G$ .

2) Разность  $P^2 \setminus G$  распадается в объединение колец  $S^1 \times (0, 1)$ .

3) Кольца  $P^2 \setminus G$  так разбиты на два класса (положительные кольца и отрицательные кольца), что к каждому ребру графа  $G$  подходит ровно по одному кольцу из каждого класса.

4) Граф ориентирован так, что в каждую вершину графа входит два и выходит два ребра, причем малая шаровая окрестности любой вершины графа устроена как на рис. 1.

Это определение отличается от оригинального определения из работы [?] тем, что наши атомы не содержат вершин степени 0 и 2, графы атомов ориентированы и что мы допускаем несвязные атомы, фиксируя при этом





Рис. 1: Окрестность вершины в атоме.

разбиение их колец на два класса.

Дадим определение абстрактного седлового комплекса. Слово "абстрактный" используется для того, чтобы подчеркнуть, что пока абстрактный седловой комплекс никак не связан с седловыми окрестностями.

Вершину комплекса будем называть модельной, если пересечение комплекса с некоторой малой окрестностью вершины гомеоморфно прямому произведению двух крестов. Напомним, что под крестом мы понимаем пару пересекающихся в одной точке интервалов.

Точку  $x_1$ , лежащую на ребре комплекса, будем называть модельной, если пересечение комплекса с некоторой малой окрестностью точки  $x_1$  гомеоморфно прямому произведению креста на интервал.

**Определение 1** *Абстрактным седловым комплексом называется такой двумерный (возможно, бесконечный) CW-комплекс, ребра одномерного остова которого так ориентированы и разбиты на два класса (белый и черный), что выполняются следующие условия.*

- 1) Все вершины комплекса модельны.
- 2) Все точки, лежащие внутри ребер комплекса, тоже модельны.
- 3) В каждую вершину входят два белых и два черных ребра и выходят два белых и два черных ребра.

Рассмотрим абстрактный седловой комплекс  $C$  и такую пару атомов  $(P_w, G_w)$  и  $(P_b, G_b)$ , что граф  $G_w$  гомеоморфен с сохранением ориентации объединению белых ребер комплекса  $C$ , а граф  $G_b$  гомеоморфен с сохранением ориентации объединению черных ребер комплекса  $C$ . Фиксируем отождествление графа  $G_w$  и объединение белых ребер комплекса  $C$ , отождествление графа  $G_b$  и объединение черных ребер комплекса  $C$ .

Тройку  $(C, (P_w, G_w), (P_b, G_b))$  будем называть атомно-седловой связкой.

Две атомно-седловые связки  $(C, (P_w, G_w), (P_b, G_b))$  и  $(\tilde{C}, (\tilde{P}_w, \tilde{G}_w), (\tilde{P}_b, \tilde{G}_b))$  будем считать изоморфными, если существует гомеоморфизм  $\psi : C \cup P_b \cup P_w \rightarrow \tilde{C} \cup \tilde{P}_b \cup \tilde{P}_w$ , сохраняющий ориентацию одномерного остова комплекса и разбиение колец атомов на два класса.

Заметим, что любой гомеоморфизм  $\psi : C \cup P_b \cup P_w \rightarrow \tilde{C} \cup \tilde{P}_b \cup \tilde{P}_w$  переводит комплекс  $C$  в комплекс  $\tilde{C}$  и является клеточным отображением комплексов. Однако мы не требуем, чтобы гомеоморфизм  $\psi$  переводил атом  $(P_b, G_b)$  в атом  $(\tilde{P}_b, \tilde{G}_b)$ ; гомеоморфизм  $\psi$  может менять местами  $(P_b, G_b)$  и  $(P_w, G_w)$ .

Неупорядоченную пару букв  $((P_w, G_w), (P_b, G_b))$  будем называть *абстрактным  $l$ -типом*.

## §6. Седловой комплекс.

Цель следующих двух параграфов состоит в построении отображения из множества седловых окрестностей в множество атомно-седловой связки.

Пусть четверка  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  задает седловую окрестность. Рассмотрим прообраз  $\Phi^{-1}(0, 0)$ . По определению он связан и, следовательно, является слоем Лиувилля. Как и любой слой, он состоит из орбит действия Пуассона.

**ЛЕММА 5** *Пусть орбита  $O_1$  действия Пуассона содержит в своем замыкании орбиту действия Пуассона  $O_2$ . Тогда стабилизатор второй орбиты содержит в себе стабилизатор первой.*

**Доказательство.** Будем обозначать через  $(a, b)x$  образ точки  $x$  при действии элемента  $(a, b)$  группы Ли  $(R^2, +)$ . Рассмотрим последовательность  $x_i$  точек из орбиты  $O_1$ , сходящуюся к некоторой точке  $y \in O_2$ . Предположим, что элемент  $(a, b)$  группы Ли  $(R^2, +)$  лежит в стабилизаторе орбиты  $O_1$ , то есть  $(a, b)x_i = x_i$ . По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных условий получаем, что  $(a, b)y = y$ , что и требовалось доказать.

Отметим, что стабилизатор одномерной орбиты суть прямая  $\lambda a + \mu b = 0$ . Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  этой прямой совпадают с коэффициентами линейной зависимости дифференциалов функций  $f_1$  и  $f_2$  на орбите.

**ЛЕММА 6** *Все двумерные орбиты, содержащие в замыкании точку типа седло-седло, гомеоморфны  $R^2$ .*

**Доказательство.** Пусть двумерная орбита  $O^2$  содержит в своем замыкании точку типа седло-седло. Тогда орбита  $O^2$  содержит в своем замыкании две одномерные орбиты, гомеоморфные  $R$ , с непропорциональными коэффициентами зависимости между дифференциалами функций  $f_1$  и  $f_2$ . Используя предыдущую лемму, получаем, что стабилизатор двумерной орбиты содержится в пересечении двух прямых, и, следовательно, он тривиален. Лемма доказана.

**ЛЕММА 7** *Слой  $C$  имеет естественную структуру двумерного CW-комплекса,  $k$ -мерными клетками которого являются замыкания орбит размерности  $k$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим множество критических и сингулярных точек  $K = \{x \in M^4, \text{rank}(d\Phi_x) \leq 1\}$ . Рассмотрим пересечение множеств  $K$  и  $C$ . Обозначим через  $L$  компоненту связности множества  $K \cap C$ , содержащую

точку типа седло-седло. Докажем, что все сингулярные точки, лежащие в этой компоненте связности, невырождены и имеют тип седло-седло. Действительно, они невырождены по определению комплекса, а из невырожденных точек в замыкании гиперболической орбиты может лежать только точки типа седло-седло.

Обозначим через  $D$  объединение множества тех двумерных орбит, в замыкании которых лежит хотя бы одна точка из  $L$ . Докажем, что  $D \cup L = C$ . Действительно, пусть последовательность точек некоторой двумерной орбиты сходится к некоторой точке из  $L$ . Тогда ее замыкание лежит в объединении этой орбиты и  $L$ . Следовательно, эта двумерная орбита гомеоморфна  $R^2$ , из связности  $C$  получаем утверждение леммы.

Ориентируем ребра одномерного остова комплекса  $\Phi^{-1}(0, 0)$  векторным полем  $sgrad(f_1 + f_2)$ .

Ребра одномерного остова естественно разбиваются на два класса (назовем их белый и черный). Белые ребра определяются условием  $df_1 \equiv 0$ , черные — условием  $df_1 \equiv 0$ .

**Определение 6** *Клеточный комплекс  $\Phi^{-1}(0, 0)$  с естественными разбиением на клетки, ориентацией ребер и разбиением ребер на два класса назовем седловым комплексом и будем обозначать  $C$ .*

Легко проверяется, что седловой комплекс является абстрактным седловым комплексом. Действительно, в окрестности вершин он устроен модельно по теореме Л. Элиассона, а в окрестности ребер — так как ребра являются невырожденными гиперболическими орбитами.

### §7. $l$ -тип седловой окрестности.

Множество особых точек седловой окрестности будем обозначать через  $P$ . Докажем, что  $P$  имеет естественную структуру пары атомов пересекающихся по вершинам вложенных графов. Действительно, рассмотрим  $P_w = \{x \in M^4 : df_2|_x = 0\}$ ,  $P_b = \{x \in M^4 : df_1|_x = 0\}$ . Множество  $P_w$  образует гладкую двумерную поверхность. Действительно, из леммы 2 следует, что в некоторой окрестности несингулярной точки  $P_w$  диффеоморфно двумерному диску. Из теоремы Л. Элиассона следует, что  $P_b$  в некоторой окрестности сингулярной точки диффеоморфно двумерному диску.

Слой  $C$  пересекается с поверхностью  $P_b$  по графу степени 4. Рассмотрим ограничение функции  $f_1$  на поверхность  $P_b$ . Ее типический слой является критической окружностью, следовательно, граф  $C \cap P_b$  разбивает  $P_b$  на набор колец. Положительные кольца этого набора определяются условием  $f_1 > 0$ , отрицательные —  $f_1 < 0$ . Из локального топологического строения в окрестности точек типа седло-седло следует, что к каждому ребру графа примыкает ровно одно положительное и одно отрицательное кольцо.

Следовательно, пара  $(P_b, G_b)$  образует атом. Аналогично, пара  $(P_w, G_w)$  тоже образует атом. Поверхности  $P_b$  и  $P_w$  пересекаются по точкам, в которых дифференциалы функций  $f_1$  и  $f_2$  равны 0, то есть по вершинам комплекса.

**Определение 7** *Пару ориентированных атомов  $l = ((P_b, G_b), (P_w, G_w))$  назовем  $l$ -типом седловой окрестности.*

Заметим, что тройка  $(C, (P_b, G_b), (P_w, G_w))$  является атомно-седловой связкой. Действительно, графы  $G_b$  и  $G_w$  суть, соответственно, черная и белая части одномерного остова седлового комплекса  $C$ . Из локальной структуры в окрестности точек типа седло-седло и невырожденных точек гиперболических орбит следует, что ориентация ребер графов в окрестности любой вершины выглядит как на рис. 1, так что тройка  $(C, (P_b, G_b), (P_w, G_w))$  действительно образует атомно-седловую связку.

То есть, мы построили отображение (обозначим его  $\mathcal{F}$ ) из множества седловых окрестностей в множество атомно-седловых связок.

**Определение 8**  *$Cl$ -типом седловой окрестности  $U^4$  назовем образ этой седловой окрестности при отображении  $\mathcal{F}$ .*

Отметим, что атом  $(P_b, G_b)$  пересекается с черным подграфом одномерного остова седлового комплекса  $C$  по графу  $G_b$ . Аналогично, атом  $(P_w, G_w)$  пересекается с белым подграфом седлового комплекса  $C$  по графу  $G_w$ .

**ТЕОРЕМА 2** *Две седловые окрестности эквивалентны если и только если их  $Cl$ -типы изоморфны.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна: если окрестности эквивалентны, то ограничение устанавливающего эквивалентность гомеоморфизма является естественным изоморфизмом  $Cl$ -типов. Действительно, так как только один слой Лиувилля седловой окрестности в окрестности некоторых точек этого слоя гомеоморфен прямому произведению креста на крест, то то гомеоморфизм, сохраняющем слои переводит седловой комплекс в седловой комплекс. Так как в окрестности точек атомов  $l$ -типа слой, содержащий эту точку гомеоморфен прямому произведению креста на интервал, то гомеоморфизм переводит атомы в атомы и критические графы атомов в критические графы. Докажем, что гомеоморфизм сохраняет разбиение колец атомов на два класса. Будем называть два тора Лиувилля  $T_1$  и  $T_2$  седловой окрестности похожими, если их образы при отображении момента лежат в одном квадранте. Устанавливающий эквивалентность седловых окрестностей гомеоморфизм переводит похожие торы в похожие. Действительно, определим "похожесть" в инвариантных относительно гомеоморфизма терминах. Соединим два тора путем 1) не проходящим через седловой комплекс и 2) который пересекает прообраз бифуркационной диаграммы трансверсально. Посчитаем количество пересечений прообраза вертикальной линии бифуркационной диаграммы и количество пересечений прообраза горизонтальной линии бифуркационной диаграммы. Легко видеть, что торы похожие если и только если оба количества четны. Следовательно, свойство торов быть похожими сохраняется при гомеоморфизме. сохраняющем слоение. Пусть два кольца атома  $l$ -типа лежат в одном классе. Тогда к этим кольцам можно подойти сколь угодно близко по точкам похожих торов. Если два кольца атома  $l$ -типа лежат в разных классах, тогда нельзя.

Отсюда следует, что разбиение колец на два класса сохраняется при устанавливаемом соответствии гомеоморфизма. В одну сторону теорема доказана.

В другую сторону доказательство существенно более сложное.

Докажем, что можно продолжить гомеоморфизм седловых комплексов до устанавливающего эквивалентность гомеоморфизма седловых окрестностей. Нам удобно предполагать, что седловая окрестность является многообразием с краем. Соответственно, образ седловой окрестности при отображении  $\Phi$  состоит из круга  $\{f_1^2 + f_2^2 \leq 1\}$ .

Пусть  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  — седловая окрестность с  $Cl$ -типом  $(C, ((P_b, G_b), (P_w, G_w)))$ .

Следующим образом построим метрику  $G$  на  $M^4$ .

У каждой сингулярной точки рассмотрим окрестность, в которой в некоторых *модельных* координатах  $p_1, p_2, q_1, q_2$  функции  $f_1, f_2$  равны, соответственно,  $p_1 q_1$  и  $p_2 q_2$ . Существование такой окрестности следует из теоремы Л. Элиассона.

У каждой особой точки, не являющейся сингулярной, рассмотрим окрестность, замыкание которой не содержит сингулярных точек, и в которой существуют такие *модельные* координаты  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , что функции  $f_1, f_2$  в этих координатах равны, соответственно,  $p_1$  и  $p_2 q_2$ . Существование такой окрестности и таких координат следует из леммы 2.

У каждой неособой точки рассмотрим окрестность, не содержащую особых точек.

Мы получили открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие. В каждой окрестности, содержащей сингулярную точку, рассмотрим метрику  $g$ , в *модельных* координатах  $p_1, p_2, q_1, q_2$  задаваемую единичной матрицей. В каждой окрестности, содержащей особые, но не содержащей сингулярные точки рассмотрим метрику  $g$ , в *модельных* координатах  $p_1, p_2, q_1, q_2$  задаваемую единичной матрицей. В оставшихся окрестностях выберем произвольную метрику.

Рассмотрим разбиение единицы, подчиненное этому подпокрытию. Пусть  $i$ -ому элементу подпокрытия соответствует функция  $\phi_i$  этого разбиения и метрика  $g_i$ . Определим метрику  $G$  как сумму  $\sum_i g_i \phi_i$ .

Рассмотрим множество  $M^4 \setminus C$ . Построим гладкое векторное поле  $v$  на  $M^4 \setminus C$ .

Пусть точка  $x$  лежит в  $M^4 \setminus C$ . Пусть значения функций  $f_1$  и  $f_2$  в точке  $x$  равны, соответственно,  $a$  и  $b$ . На плоскости  $R^2$  с координатами  $(f_1, f_2)$  рассмотрим прямую  $q_{a,b} = \{af_2 - bf_1 = 0\}$ . Пусть сначала  $x$  — неособая точка. Пробраз прямой  $q_{a,b}$  при отображении момента обозначим через  $Q_{a,b}$ . В окрестности точки  $x$  множество  $Q_{a,b}$  является гладким трехмерным подмногообразием многообразия  $M^4$ . Рассмотрим ограничение метрики  $G$  на это подмногообразие. Рассмотрим функцию  $af_1 + bf_2$ . Векторное поле  $v$  в точке  $x$  положим равным  $\frac{grad(af_1 + bf_2)}{\|grad(af_1 + bf_2)\|}$ . Под градиентом функции мы понимаем векторное поле, которое получается, если опустить с помощью метрического тензора индекс у дифференциала, рассматриваемого как тензор  $(1,0)$ . В качестве метрики берется ограничение метрики  $G$  на подмногообразие  $Q_{a,b}$ . Через  $\|\cdot\|$  обозначаем норму вектора.

Если точка  $x$  особая, то к ней сколь угодно близко можно подойти по неособым точкам  $Q_{a,b}$ . Доопределим векторное поле  $v$  в точке  $x$  по непрерывности.

Легко проверяется, что предел последовательности касательных векторов не зависит от выбора последовательности, по которой мы подходим к особой точке.

Векторное поле  $v$  обладает следующими свойствами.

Пусть значения функций  $f_1$  и  $f_2$  в точке  $x$  равны  $a$  и  $b$ . Через  $v_t(x)$  будем обозначать точку, получаемую из точки  $x$  сдвигом вдоль траектории векторного поля  $v$  на время  $t$ .

**Свойство 1** *Траектория продолжима в течении времени  $t < a^2 + b^2$ , причем для  $t < a^2 + b^2$  выполняется равенство:  $f_1^2(v_t(x)) + f_2^2(v_t(x)) = a^2 + b^2 - t$ .*

Доказательство тривиально, действительно, из собственности отображения  $\Phi$  следует продолжимость решения в точках  $M^4 \setminus C$ . Так как дифференциал функции  $f_1^2 + f_2^2$  пропорционален  $adf_1 + bdf_2$ , то  $f_1^2(v_t(x)) + f_2^2(v_t(x)) = a^2 + b^2 - t$ .

Из определения следует, что если начальная точка траектории векторного поля лежит на  $Q_{a,b}$ , то и вся траектория векторного поля  $v$  лежит на  $Q_{a,b}$ . Из свойства 1 вытекает, что сдвиг вдоль траекторий векторного поля  $v$  сохраняет топологическое строение.

Пусть  $0 < t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  — последовательность вещественных чисел, сходящаяся к  $a^2 + b^2$ . Рассмотрим последовательность  $v_{t_1}(x), v_{t_2}(x), \dots, v_{t_n}(x), \dots$  точек из  $M^4$ .

**Свойство 2** *Последовательность  $v_{t_1}(x), v_{t_2}(x), \dots, v_{t_n}(x), \dots$  сходится к точке, лежащей на  $C$ .*

В частности, из этого свойства следует, что предел не зависит от выбора последовательности  $0 < t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \rightarrow a^2 + b^2$ .

Доказательство. Из компактности  $C$  и из свойства 1 следует, что на  $C$  лежит предельная точка последовательности  $v_{t_1}(x), v_{t_2}(x), \dots, v_{t_n}(x), \dots$ . Обозначим предельную точку через  $x$ . Пусть точка  $x$  совпадает с вершиной комплекса. В окрестности  $x$  в координатах  $p_1, p_2, q_1, q_2$  метрика задается единичной матрицей, дифференциальное уравнение, определяемое векторным полем  $v$ , явно решается и из анализа решения вытекает, что в этой окрестности точки  $x$  других предельных точек нет.

Пусть теперь точка  $x$  лежит на ребре комплекса  $C$ . Известно, что в окрестности гиперболических орбит в замыкании любой траектории градиента гамильтониана лежит не более одной точки из гиперболической орбиты.

Наконец, если точка  $x$  лежит внутри двумерной грани, то единственность предельной точки вытекает из теоремы единственности для дифференциальных уравнений. Свойство доказано.

Определим отображение  $c: M^4 \rightarrow C$  следующим образом.



Рис. 2:

Пусть сначала точка  $x$  лежит на слое  $C$ . По определению считаем  $c(x) = x$ . Пусть точка  $x$  не лежит на слое  $C$ . Определим  $c(x)$  равным пределом последовательности  $v_{t_1}(x), v_{t_2}(x), \dots, v_{t_n}(x), \dots$ . Легко видеть, что отображение  $c: M^4 \rightarrow C$  непрерывно.

Как и прежде, будем обозначать, соответственно, через  $a$  и  $b$  значения функций  $f_1$  и  $f_2$  в точке  $x$ . Ограничение отображения  $c$  на прообраз  $Phi^{-1}(a, b)$  будем обозначать  $c_{ab}$ .

**Свойство 3** Пусть  $a \neq 0, b \neq 0$ . Тогда число точек в прообразе  $c^{-1}(y)$  точки  $y \in C$  равно 1, если точка  $y$  лежит внутри 2-клетки, равно 2, если точка  $y$  лежит внутри ребра, и равно 4, если точка  $y$  — вершина комплекса.

**Свойство 4** Пусть  $a = 0, b \neq 0$ . Тогда число точек в прообразе  $c^{-1}(y)$  точки  $y \in C$  равно 1, если точка  $y$  лежит либо внутри 2-клетки, либо внутри черного ребра равно 2, если точка  $y$  лежит на белом ребре.

**Свойство 5** Пусть  $a \neq 0, b = 0$ . Тогда число точек в прообразе  $c^{-1}(y)$  точки  $y \in C$  равно 1, если точка  $y$  лежит либо внутри 2-клетки, либо внутри белого ребра равно 2, если точка  $y$  лежит на черном ребре.

Фактически, свойства 3,4,5 были доказаны выше.

Окрестность любой вершины критического графа атома  $l$ -типа устроена как на рис. 2. На рисунке положительные кольца затемнены. Обозначим вершину через  $A$ . Назовем  $A$ -углом пару ребер, одно из которых входящее, а другое выходящее из вершины  $A$ . Угол будем называть положительным (отрицательным), если в окрестности вершины к обоим ребрам примыкает положительное (отрицательное) кольцо. Для каждой вершины  $A$  существует ровно два положительных и два отрицательных угла. Пометим один отрицательный угол каждой вершины графов  $l$ -типа  $((P_b, G_b), (P_w, G_w))$  числом  $+1$ , другой — числом  $-1$ . То же самое сделаем с положительными углами.

Сопоставим каждой точке  $x$  многообразия  $M^4$  некий числовой набор ("код") по следующему правилу. Пусть значения функций  $f_1$  и  $f_2$  от этой точки равны, соответственно,  $f_1^0$  и  $f_2^0$ .

Рассмотрим 5 случаев.

1. Точка  $c(x)$  лежит внутри двумерной грани комплекса  $C$ . Тогда сопоставим точке  $x$  код  $(f_1^0, f_2^0, c(x))$ .

2. Точка  $c(x)$  лежит внутри ребра комплекса  $C$ , точка  $x$  — особая точка. Тогда сопоставим точке  $x$  код  $(f_1^0, f_2^0, c(x))$ .

3. Точка  $c(x)$  лежит внутри ребра  $e$  комплекса  $C$ , точка  $x$  — неособая точка. Пусть, для определенности, ребро  $e$  черное. Рассмотрим слой Лиувилля  $L^2$ , содержащий точку  $x$ , и малую окрестность  $U^2 \subset L^2$  точки  $x$  в слое Лиувилля  $L^2$ . Рассмотрим образ  $c(U^2)$  окрестности  $U^2$  обозначим через  $c(U^2)$ .  $c(U^2)$  лежит в двух соприкасающихся по ребру  $e$  двумерных гранях (обозначим эти грани  $\alpha$  и  $\beta$ ). Рассмотрим вершину  $A$  комплекса  $C$ , откуда выходит ребро  $e$ . Среди больших ребер граней  $\alpha$  и  $\beta$  будут два крылых ребра, одно из которых входит, а другое выходит из вершины  $A$ . Сопоставим точке  $x$  код  $(f_1^0, f_2^0, c(x), +1)$ , если эта пара ребер на соответствующем атоме помечена числом  $+1$ , и  $(f_1^0, f_2^0, c(x), -1)$ , если эта пара ребер помечена числом  $-1$ .

4. Пусть точка  $c(x)$  является вершиной комплекса  $C$ , и пусть точка  $x$  — особая точка. Рассмотрим критическую окружность  $O^1$ , содержащую точку  $x$ . Рассмотрим малую окрестность точки  $x$  в окружности  $O^1$ . Образ этой окрестности лежит внутри пары ребер, образующей  $c(x)$ -углы критического графа атома. Сопоставим точке  $x$  код  $(f_1^0, f_2^0, c(x), +1)$ , если эта пара ребер помечена числом  $+1$ , и код  $(f_1^0, f_2^0, c(x), -1)$ , если эта пара ребер помечена числом  $-1$ .

5. Пусть точка  $c(x)$  является вершиной комплекса  $C$ , и пусть точка  $x$  — неособая точка. Рассмотрим слой Лиувилля  $L^2$ , содержащий точку  $x$ , и малую окрестность  $U^2 \subset L^2$  точки  $x$  в слое Лиувилля  $L^2$ . Образ при сдвиге на время  $(f_1^0)^2 + (f_2^0)^2$  окрестности  $U^2$  обозначим через  $c(U^2)$ .  $c(U^2)$  содержит белый и черный углы. Пусть их метки равны, соответственно,  $n_b$  и  $n_w$ . Сопоставим точке  $x$  код  $(f_1^0, f_2^0, c(x), n_b, n_w)$ .

Пусть  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  и  $(\tilde{M}^4, \tilde{\omega}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$  — две седловые окрестности,  $Cl$ -типы  $(C, ((P_b, G_b), (P_w, G_w)))$  и  $(\tilde{C}, ((\tilde{P}_b, \tilde{G}_b), (\tilde{P}_w, \tilde{G}_w)))$  которых естественно изоморфны. Пометим углы атомов  $l$ -типа  $((\tilde{P}_b, \tilde{G}_b), (\tilde{P}_w, \tilde{G}_w))$  так, чтобы естественный изоморфизм сохранял метки. Гомеоморфизм между комплексами обозначим через  $\xi$ . Переименованием функций  $f_2$  и  $f_1$  и сменой знака этих функций добьемся, чтобы гомеоморфизм  $\xi$  сохранял цвет ребер и переводил положительные кольца атомов в положительные.

Поставим в соответствие точке  $x \in M^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, c(x))$  точку из  $\tilde{M}^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, \xi(c(x)))$ . Поставим в соответствие точке  $x \in M^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, c(x), n)$  точку из  $\tilde{M}^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, \xi(c(x)), n)$ . Поставим в соответствие точке  $x \in M^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, c(x), n_b, n_w)$  точку из  $\tilde{M}^4$  с кодом  $(f_1^0, f_2^0, \xi(c(x)), n_b, n_w)$ .

Описанное отображение обозначим через  $\pi$ . Очевидно, что  $\pi$  — биекция. Действительно, из свойств отображения  $c$  вытекает, что для каждой точки из  $M^4$  существует точка из  $\tilde{M}^4$  с соответствующим кодом. Докажем, что  $\pi$



Рис. 3: Квадрат.

— непрерывно.

Действительно, если точка  $x$  лежит вне комплекса, то из непрерывности решения дифференциального уравнения от начальных условий вытекает, что отображение  $\pi$  непрерывно в точке  $x$ . Пусть точка лежит на комплексе  $C$ . Рассмотрим последовательность точек, сходящуюся к точке  $x$ . Для того, чтобы последовательность точек сходилась к точке  $x$  необходимо и достаточно, чтобы  $c(x)$ -члены,  $f_1^0$ -члены и  $f_2^0$ -члены кодов точек последовательности сходились, соответственно, к точке  $x$ , к значению 0 и к значению 0. Следовательно, отображение  $\pi$  переводит последовательность точек, сходящуюся к точке  $x$ , в последовательность точек, сходящуюся к точке  $\pi(x)$ .

Теорема доказана.

### §8. Свойства $Cl$ -типов седловых окрестностей.

Отображение  $\mathcal{F}$ , переводящее седловую окрестность в ее  $Cl$ -тип, не является отображением на. Цель этого и следующего параграфа состоит в описании образа множества всех седловых окрестностей при отображении  $\mathcal{F}$ . В этом параграфе описываются свойства атомно-седловых связок, отвечающих седловым окрестностям. В следующем параграфе доказывается, что описанных свойств и конечности абстрактного седлового комплекса "хватает" для того, чтобы атомно-седловая связка была  $Cl$ -типом некоторой седловой окрестности.

Двумерные грани комплекса представляют собой многоугольники, стороны которых ориентированы и раскрашены. Двумерную грань будем называть *квадратом*, если она ограничивается ровно четырьмя сторонами, причем их ориентация и раскраска такая же, как на рис. 3.

**Свойство 1** *Каждая двумерная грань комплекса  $C$  — квадрат.*

Вероятно, впервые этот факт был замечен Лерманом и Уманским. Различные доказательства были приведены в [?], [?] и [?].

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку  $A$  двумерной клетки  $O_2$ . Выпустим из этой точки две интегральные траектории: интегральную траекторию векторного поля  $sgrad(f_1)$  и интегральную траекторию векторного поля  $sgrad(f_2)$ . Рассмотрим предельные точки каждой такой траектории при времени  $t$  стремящемся к  $+\infty$  и  $-\infty$ . Так как мы рассматриваем две

траектории и устремляем время к двум различным пределам, то мы имеем 4 различные предельные точки. Очевидно, что такие предельные точки лежат внутри ребер. Действительно, пусть траектория векторного поля  $sgrad(f_1)$  "втыкается" в вершину при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда независимо от того, какую точку мы взяли за начальную точку  $A$ , траектория векторного поля  $sgrad(f_1)$ , выходящая из этой точки, будет "втыкаться" в ту же вершину. Следовательно, эта вершина является вершиной двух белых ребер, а это невозможно из-за топологического строения в окрестности вершин комплекса.

Из коммутативности группы Ли  $R^2$  следует, что на каждом ребре клетки  $O_2$  лежит хотя бы одна из четырех предельных точек, и что две предельные точки не могут лежать на одном ребре. Следовательно, клетка  $O_2$  — четырехугольник. Очевидно, что ориентация и раскраска этого четырехугольника как у квадрата. Свойство доказано.

Как мы видим, все стороны квадрата по своему индивидуальны. (То есть существует клеточного кусочно-линейного отображения квадрата на себя, сохраняющего цвет и ориентацию ребер. Две стороны квадрата белые, две стороны квадрата черные. Две стороны одного цвета отличаются одна от другой тем, что в вершины одной стороны (будем называть эту сторону *притягивающей* стороной) входят ребра противоположного цвета, а из вершин другой (*отталкивающей* стороны) выходят).

Рассмотрим два квадрата ( $\alpha$  и  $\beta$ ), склеенных по ребру  $e$ . Пересечение регулярной окрестности ребра с квадратами ( $\alpha$  и  $\beta$ ) гомеоморфно двум склеенным прямоугольникам  $\hat{\alpha} = \{|x| \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$  и  $\hat{\beta} = \{|x| \leq 1, 1 \geq y \geq 0\}$ , при этом гомеоморфизм переводит ребро  $e$  в отрезок  $\{y = 0\}$ . Отождествим пересечение регулярной окрестности ребра с квадратами с прямоугольниками  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  с помощью этого гомеоморфизма. Вертикальными сторонами прямоугольников назовем стороны  $\{x = +1\}$  и  $\{x = -1\}$ . Ориентация и раскраска ребер квадратов индуцирует ориентацию и раскраску вертикальных сторон прямоугольников.

Будем говорить, что пара склеенных по ребру квадратов образует двугранный угол (по отношению к ребру  $e$ ), если вертикальные стороны квадратов ориентированы либо вверх, либо вниз. (Запрещается ребрам быть ориентированными навстречу друг другу или в разные стороны.) Другими словами, ребро  $e$  является отталкивающей стороной одного квадрата и притягивающей стороной другого квадрата. Очевидно, что определение не зависит от выбора гомеоморфизма между квадратами  $\alpha, \beta$  и прямоугольниками  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ .

Вертикальные стороны прямоугольников раскрашены в одинаковый цвет. Рассмотрим атом  $l$ -типа, соответствующий этому цвету. Напомним, граф атома разрезает атом на набор колец, и что фиксировано разбиение колец на два класса.

Существует кольцо  $K_1$  этого атома, примыкающее к паре ребер  $\{x = 1\}$  в окрестности вершины  $(0, 1)$ . Существует кольцо  $K_2$  этого атома, примыкающее к паре ребер  $\{x = -1\}$  в окрестности вершины  $(0, -1)$ .

**Определение 9** *Двугранный угол называется согласованным, если кольца  $K_1$  и  $K_2$  лежат в одном классе.*



Рис. 4: а) Окрестность вершины в атоме. б) Окрестность вершины в меченом графе.

**Свойство 2** Любой двугранный угол комплекса  $L$ -типа  $(C; ((P_b, G_b), (P_w, G_w)))$  согласован.

Действительно, рассмотрим ребро  $e$  и двугранный угол по отношению к ребру  $e$ . Пусть, для определенности, ребро  $e$  белого цвета. Рассмотрим множество  $\{f_2 = 0\}$ . Рассмотрим кольцо  $K_1$ . Из невырожденности точек этого кольца следует, что для любой точки существует траектория векторного поля  $sgrad(f_1)$ , замыкание которой содержит эту точку. Но эта же траектория в замыкании содержит и точку из  $K^2$ . Действительно, выпустив траекторию векторного поля  $sgrad(f_1)$  из черного ребра квадрата мы попадем на другое ребро, а дальше по теореме непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. Доказано.

### §9. Теорема реализации.

**Определение 10** Атомно-седловая связка называется допустимой, если она удовлетворяет свойствам 1, 2 предыдущего параграфа. Атомно-седловая связка называется конечной, если ее абстрактный седловой комплекс конечен.

**ТЕОРЕМА 3** Образ отображения  $\mathcal{F}$  состоит из всех конечных допустимых атомно-седловых связок.

Другими словами, любая конечная допустимая атомно-седловая связка "реализуется" как  $Cl$ -тип некоторой седловой окрестности.

Доказательство теоремы реализации. В этом параграфе удобнее вместо атомов рассматривать меченые графы. Рассмотрим ориентированный граф степени 4, окрестность каждой вершины которого выглядит как на рис. 4(б).

В каждой вершине выделим пару ребер, одно из которых входит в эту вершину, а другое выходит из этой вершины, и пару дополнительных ребер ("вертикальный угол"). Такое выделение будем называть вертикальным оснащением, на рисунках выделенные пары ребер будут обозначаться дужкой. По определению, в окрестности каждой вершины граф устроен как на рис. 4(а). Полученный объект будем называть меченым графом, два меченых графа эквивалентны, если между ними существует сохраняющий ориентацию

гомеоморфизм, переводящий все выделенные пары ребер в выделенные пары, либо переводящий все выделенные пары ребер в невыделенные пары.

Пусть  $(P, G)$  — ориентированный атом.

Множество ориентированных атомов находится в естественной биекции с множеством меченых графов. Действительно, покажем, как по ориентированному атому однозначно (с точностью до эквивалентности) строится меченый граф, и как по меченому графу однозначно строится ориентированный атом.

Назовем один класс колец положительным. По определению, окрестность каждой вершины выглядит как на рис. 4(а). Пару ребер графа  $G$  будем считать выделенными по отношению к вершине, если в окрестности этой вершины к ним прилетает положительное кольцо. Из определения ориентированного атома следует, что критический граф атома с таким выделением ребер суть меченый граф.

В другую сторону. Ориентированным циклом на меченом графе будем называть такую конечную последовательность  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ребер меченого графа, что ребро  $e_i$  входит в вершину, из которой выходит ребро  $e_{i+1}$  для  $i < n$  и ребро  $e_n$  входит в вершину, из которой выходит ребро  $e_1$ . Считается, что две последовательности  $e_1, e_2, \dots, e_n$  задают один и тот же путь, если одна последовательность переводится в другую циклической перестановкой ребер длиной  $n$ .

Ориентированный цикл будем называть положительным, если каждая пара ребер  $e_i, e_{i+1}$  для  $i < n$  выделена по отношению к вершине, в которую входит ребро  $e_i$ , и пара ребер  $e_n, e_1$  выделена по отношению к вершине, в которую входит ребро  $e_n$ . Соответственно, ориентированный цикл будем называть отрицательным, если каждая пара ребер  $e_i, e_{i+1}$  для  $i < n$  выделена по отношению к вершине, в которую входит ребро  $e_i$ , и пара ребер  $e_n, e_1$  выделена по отношению к вершине, в которую входит ребро  $e_n$ . Приклеим по границе полуоткрытое кольцо к каждому положительному циклу. Приклеенные кольца назовем положительными. Приклеим по границе полуоткрытое кольцо к каждому отрицательному циклу. Приклеенные кольца назовем отрицательными. Мы построили ориентированный атом. Легко проверяется, что описанная операция построения атома по меченому графу обратна операции построения меченого графа по атому.

Заменим в атомно-седловой связке атомы на раскраску одномерного остова в два цвета (белый и черный) и вертикальное оснащение белого и черного графа. Полученный объект назовем меченым комплексом. Так как по меченому графу однозначно восстанавливается атом, то теорему можно переформулировать следующим образом: каждый конечный допустимый меченый комплекс реализуем. Для доказательства нам потребуется несколько лемм.

Пусть  $A, B$  — допустимые меченые комплексы (возможно, бесконечные). Клеточное отображение  $B$  в  $A$  назовем правильным, если оно сохраняет цвета и ориентацию ребер и переводит вертикальное оснащение первого комплекса в вертикальное оснащение второго комплекса. Напомним, что под клеточным отображением называется отображение, переводящее клетки

в клетки и линейное на клетках.

**ЛЕММА 8** Пусть  $U$  — односвязный допустимый меченый комплекс,  $A$  — произвольный допустимый меченый комплекс. Рассмотрим двумерную клетку  $u$  комплекса  $U$  и двумерно клетку  $a$  комплекса  $A$ . Существует и единственно правильное отображение  $\xi : U \rightarrow A$ , переводящее клетку  $u$  в клетку  $a$ .

Доказательство. Рассмотрим путь  $\gamma$  на  $U$ , соединяющий середину клетки  $u$  с серединой произвольной 2-клетки  $u \subset U$ . Его можно выбрать так, что он трансверсально пересекает одномерный остов в внутренних точках ребер. Пусть  $\gamma$  последовательно пересекает ребра  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и последовательно проходит через клетки  $b_0 = a, b_1, b_2, \dots, b_n = u$ . Сопоставим этому пути последовательность четверок  $(l_i, \beta_i, o_i, n_i)$ , где

- $l_i$  равна координате точки пересечения пути  $\gamma$  и ребра  $e_i$ ;
- $\beta_i = 1$ , если ребро  $e_i$  белое,  $\beta_i = -1$ , если ребро  $e_i$  черное;
- $o_i = 1$  если ребро  $e_i$  является отталкивающим по отношению к квадрату  $b_i$ , в противном случае  $o_i = -1$ ;
- $n_i = 0$  если ребра  $e_{i-1}$  и  $e_i$  являются одновременно являются отталкивающими или притягивающими ребрами квадрата  $b_i$ ,  $n_i = 1$  если квадраты  $b_{i-1}$  и  $b_i$  образуют положительный угол,  $n_i = -1$  в противном случае.

Легко видеть, что существует такой начинающийся в центре клетки  $a$  путь  $\gamma_1$  на  $A$ , что соответствующая ему последовательность четверок совпадает с последовательностью четверок пути  $\gamma$ . Пусть конец пути  $\gamma_1$  лежит в клетке  $a$ . Рассмотрим линейную сохраняющую цвета ориентацию биекцию  $\xi_u : u \rightarrow a$ . Так как комплекс  $U$  односвязен, то биекция  $\xi : u \rightarrow a$  не зависит от выбора пути  $\gamma$  на комплексе  $U$ . Очевидно, что если клетки  $u_1$  и  $u_2$  комплекса  $U$  имеют общее ребро или вершину, то  $\xi_{u_1|_{\bar{v}_1 \cap \bar{v}_2}} = \xi_{u_2|_{\bar{v}_1 \cap \bar{v}_2}}$ .

**Следствие** С точностью до правильного биективного отображения, существует ровно один односвязный допустимый комплекс.

Односвязный допустимый комплекс  $U$  достаточно просто представить. Рассмотрим бесконечное дерево степени 4. Ориентируем ребра так, чтоб в каждую вершину входило и из каждой вершины выходило ровно два ребра. В каждой вершине рассмотрим произвольное вертикальное оснащение. Рассмотрим два таких меченых графа: белый и черный. Рассмотрим их прямое произведение. Это двумерный комплекс. Одномерным остовом этого комплекса состоит из произведения вершин одного графа на другой граф. На каждой такой компоненте одномерного остова введем ориентацию, вертикальное оснащение и цвет как на соответствующем графе. Легко проверяется, что полученный меченый комплекс допустимый, очевидно, что он односвязный.

Рассмотрим группу правильных автоморфизмов  $U \rightarrow U$ . Эта группа имеет достаточно простую структуру: она изоморфна прямому произведению групп автоморфизмов белого и черного меченого графа. Под автоморфизмом меченого графа здесь понимаем сохраняющее ориентацию и вертикальное оснащение клеточное отображение. Представление группы автоморфизмов бесконечного



Рис. 5: Восьмерка.

дерева степени 4 в виде образующих и соотношений есть  $\langle a, s | s^2 = 1 \rangle$ . Действительно, с одной стороны, аналогично доказательству леммы 8, проверим, что стабилизатор любого ребра тривиален. Рассмотрим меченый граф, изображенный на рис. 5.

На универсальном накрытии  $U_1$  рассмотрим автоморфизмы, порожденные элементом  $a$  фундаментальной группы "восьмерки" и центральной симметрией  $s$ . Любое ребро  $e_1$  графа  $U_1$  можно перевести в любое ребро  $e_2$  композицией автоморфизмов  $a$  и  $s$ . Действительно, действуя элементами фундаментальной группы "восьмерки" можно перевести начальную точку ребра  $e_1$  в начальную точку ребра  $e_2$ , а дальше применяем, если нужно, автоморфизм  $s$ . Используя тривиальность стабилизатора каждого ребра, получаем, что любой автоморфизм "восьмерки" реализуется композицией автоморфизмов  $a$  и  $s$ . С другой стороны, так как фундаментальная группа "восьмерки" порождена образующими  $a$  и  $s$  и свободна от соотношений, то группа автоморфизмов бесконечного дерева изоморфна группе  $Aut = \langle a, s | s^2 = 1 \rangle$ . Следовательно, группа автоморфизмов односвязного меченого комплекса изоморфна  $Aut \times Aut$ .

Фундаментальная группа любого меченого комплекса можно рассматривать как подгруппу группы  $Aut \times Aut$ . Для того, чтобы подгруппа  $S$  группы  $Aut \times Aut$  была фундаментальной группой некоторого допустимого конечного комплекса необходимо и достаточно, чтобы 1)  $S$  была подгруппой конечного индекса и 2)  $S$  действовала свободно. Действительно, если выполняется первое условие, то факторкомплекс конечен, а если выполняется второе условие, то локальная структура факторкомплекса именно та, которая нам нужна.

Перейдем собственно к доказательству утверждения теоремы. Рассмотрим конечный допустимый меченый комплекс  $C$ . Реализуем его как седловой комплекс некоторой седловой окрестности.

Рассмотрим плоскость  $R^4$  с координатами  $x_1, y_1, x_2, y_2$  и формой  $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ . Рассмотрим две функции  $f_1, f_2 : R^4 \rightarrow R$ , определяемые формулами  $f_i = ((x_i - 1)^2 + y_i^2)((x_i + 1)^2 + y_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ . Ограничим эти функции на множество  $M^4 = \{0.5 < f_1 < 1.5, 0.5 < f_2 < 1.5\}$ . Четверка  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  образует интегрируемую гамильтонову систему. Заметим, что первая функция зависит только от  $x_1, y_1$ , вторая — только от  $x_2, y_2$ . Удобно представлять слоение Лиувилля как прямое произведение слоев функции  $f_1 : R^2 \rightarrow R$ ,  $f_1 = ((x_1 - 1)^2 + y_1^2)((x_1 + 1)^2 + y_1^2)$  на слое функции  $f_2 : R^2 \rightarrow R$ ,

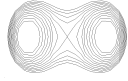


Рис. 6: *Линии уровня функции  $f_1$ .*

$f_2 = ((x_2 - 1)^2 + y_2^2)((x_2 + 1)^2 + y_2^2)$ . Линии уровня функций  $f_i$  изображены на рис. 6. Критический уровень 1 функции  $f_1$  гомеоморфен "восьмерке".

Легко проверяется, что интегрируемая гамильтонова система  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  является седловой окрестностью. Слой  $\{f_1 = 0, f_2 = 0\}$  содержит точку типа седло-седло  $(0, 0, 0, 0)$ .

Рассмотрим универсальное накрытие  $\pi : \tilde{M}^4 \rightarrow M^4$ . Поднимем на  $\tilde{M}^4$  функции  $f_i$  и форму  $\omega$ . Слой  $\{\pi^*(f_1) = 0, \pi^*(f_2) = 0\}$  суть односвязный меченый комплекс  $U$ . Рассмотрим  $\Gamma$  — группу автоморфизмов интегрируемой гамильтоновой системы (то есть автодиффеоморфизмов, сохраняющих значения функций и форму). Группа  $\Gamma$  содержит в качестве своей подгруппы группу  $Aut \times Aut$ , порожденную фундаментальной группой  $M^4$  и симметриями  $s_i : M^4 \rightarrow M^4, s_i(x_i, y_i) = (-x_i, -y_i)$ .

Рассмотрим фундаментальную группу  $\pi(C)$  комплекса  $C$ . Ее можно отождествить с подгруппой  $Aut \times Aut$ . Эта подгруппа действует свободно на  $M^4$  и сохраняет форму и значения функций. Рассмотрим факторпространство  $\tilde{M}^4/\pi(C)$ . Так как действие подгруппы сохраняет функции  $\pi^*(f_i)$ , то функции  $f_i$  индуцируют функции  $\pi^*(f_i)/\pi(C)$  на  $\tilde{M}^4/\pi(C)$ . Так как действие подгруппы свободно, то гладкая структура на  $\tilde{M}^4$  и форма  $\pi^*(\omega)$  индуцируют гладкую структуру и форму  $\pi^*(\omega)/\pi(C)$  на  $\tilde{M}^4/\pi(C)$ . Так как четверка  $(M^4, \omega, f_1, f_2)$  образовывала интегрируемую гамильтонову систему, то четверка  $(\tilde{M}^4/\pi(C), \pi^*(\omega)/\pi(C), \pi^*(f_i)/\pi(C))$  суть интегрируемая гамильтонова система. Покажем, что  $(\tilde{M}^4/\pi(C), \pi^*(\omega)/\pi(C), \pi^*(f_i)/\pi(C))$  — седловая окрестность с седловым комплексом  $C$ . Действительно, так как группа  $\pi(C)$  есть группа конечного индекса в  $Aut \times Aut$ , то слои Лиувилля построенной интегрируемой гамильтоновой системы компактны, и по построению седловой комплекс седловой окрестности  $(\tilde{M}^4/\pi(C), \pi^*(\omega)/\pi(C), \pi^*(f_i)/\pi(C))$  естественно гомеоморфен  $C$ . Теорема доказана.

#### §10. Теорема Зунга.

В 1995 году Нгуен Тьен Зунг предложил интересный способ описания

топологического строения интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности невырожденных точек. Если ограничиться случаем седловых окрестностей, то теорему Зунга можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим две связанные ориентированные поверхности  $P_i^2$ , где  $i = 1, 2$ . Ориентирующую форму на поверхности  $P_i^2$  будем обозначать  $\sigma_i$ . Рассмотрим такие функции Морса  $f_i : P_i^2 \rightarrow R$ , что

- 1) они имеют единственное критическое значение, прообраз этого критического значения связен;
- 2) все критические точки имеют индекс (1,-1)
- 3) прообраз любого значения компактен.

Рассмотрим прямое произведение  $P_1 \times P_2$ , рассмотрим на нем интегрируемую гамильтонову систему  $(P_1 \times P_2, \sigma_1 + \sigma_2, f_1, f_2)$ . То есть, многообразием интегрируемой гамильтоновой системы является прямое произведение поверхностей. Симплектической формой является сумма ориентирующих форм первой и второй поверхности. Если в локальных координатах  $x_i, y_i$  на поверхностях форма  $\sigma_i$  записывается  $dx_i \wedge dy_i$ , то в координатах  $x_1, y_1, x_2, y_2$  на поверхности форма

$$\sigma_1 + \sigma_2 \text{ записывается } dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$$

Эта система является седловой окрестностью, седловые окрестности, которые можно получить таким способом назовем *прямыми седловыми* окрестностями.

Предположим, что некоторая конечная группа  $\Gamma$  действует на  $P_1 \times P_2$ , причем действие удовлетворяет следующим условиям. Во первых, действие сохраняет структуру седловой окрестности, то есть сохраняет значения функций и форму. Во вторых, действие действует покомпонентно. Это означает, что любой элемент действует как прямое произведение автодиффеоморфизмов  $P_i$ . В третьих, действие группы свободно. Рассмотрим фактормногообразие  $P_1 \times P_2/\Gamma$  с индуцированной структурой седловой окрестности. Такие седловые окрестности будем называть *квасипрямыми седловыми* окрестностями.

**ТЕОРЕМА 4 (ZUNG)** *Любая седловая окрестность эквивалентна некоторой квазипрямой седловой окрестности.*

Эта теорема, оказывается, легко следует из доказательства теоремы реализации. Действительно, реализуем седловую окрестность описанным в предыдущем параграфе способе. Отождествим фундаментальную группу  $\pi(C)$  седловой окрестности с подгруппой конечного индекса в  $Aut \times Aut$ . Нам достаточно доказать, что в  $\pi(C)$  существует подгруппа вида  $A_1 \times A_2$ , где  $A_1$  лежит в первой компоненте группы  $Aut \times Aut$ , а  $A_2$  — во второй. А это очевидно, действительно, рассмотрим пересечение подгрупп  $Aut \times 1$  и  $\pi(C)$ . Это пересечение является подгруппой конечного индекса в  $Aut \times 1$ . Рассмотрим пересечение подгрупп  $1 \times Aut$  и  $\pi(C)$ . Это пересечение является подгруппой конечного индекса в  $1 \times Aut$ . Объединение этих пересечений, очевидно, является подгруппой конечного индекса в  $\pi(C)$  и имеет нужный нам вид. Доказано.

Заметим, что в нашем подгруппа группы  $Aut \times Aut$  действует свободно если и только если эта подгруппа не содержит элементов конечного порядка,



### §11. Количество неэквивалентных седловых окрестностей малых весов.

Весом седловой окрестности мы будем называть число точек типа седло-седло в ней. Так как, с точностью до эквивалентности, седловая окрестность задается  $Cl$ -типом, при этом вес в точности равен количеству вершин комплекса  $Cl$ -типа, то, с точностью до топологической эквивалентности, количество седловых окрестностей веса  $n$  конечно и равно количеству седловых комплексов с  $n$  вершинами.

**ТЕОРЕМА 5** *С точностью до топологической эквивалентности, существует ровно*

- 4 седловые окрестности веса 1,*
- 39 седловых окрестностей веса 2,*
- 256 седловых окрестностей веса 3.*

Доказательство этой теоремы основана на простом переборе. Для веса 1 теорема была доказана Л.М. Лерманом и Я.Л. Уманским в [?]. Для веса 2 эта теорема была доказана А.В. Болсиновым в [?]. Перечисление допустимых абстрактно седловых связок веса 3 было выполнено на компьютере Н.А. Максимовой по предложенному автором алгоритму. Результат опубликован в [?].

### §12. Круговая молекула и гипотеза Фоменко.

Рассмотрим невырожденную окрестность точки типа седло-седло. Образ точки типа седло-седло на бифуркационной диаграмме обозначим через  $A$ .

Рассмотрим окружность малого радиуса  $\epsilon$  с центром в точке  $A$ . Прообраз этой окружности будем обозначать  $Q_\epsilon$ . Так как в малой окрестности точки  $A$  касательное к кривым бифуркационной диаграммы не вертикальны, то дифференциал функции  $H$  не обращается в 0 на  $Q_\epsilon$ . Следовательно, векторное поле  $sgrad(H)$  является гамильтоновым векторным полем на  $Q_\epsilon$ . Очевидно, что оно интегрируемое. В качестве интеграла можно выбрать, например, угол  $\phi$  на окружности. Так как окружность пересекает линии бифуркационной диаграммы трансверсально, то интеграл  $\phi$  боттовский. Поэтому, топологическое строение многообразия  $Q_\epsilon$  можно описать меченой молекулой  $W^*(Q_\epsilon)$ .

**Определение 11** *Меченую молекулу  $W^*(Q_\epsilon)$  будем называть круговой молекулой.*

Очевидно, что меченая молекула является топологическим инвариантом, то есть если две насыщенные регулярные окрестности невырожденных слоев типа седло-седло топологически эквивалентны, то круговые молекулы одинаковы. Инвариант  $\mathcal{I}$  некоторого семейства объектов называется *полным*, если из совпадения инвариантов следует эквивалентность объектов.

**ГИПОТЕЗА (Фоменко А.Т.)** *Круговая молекула является полным топологическим инвариантом насыщенных регулярных окрестностей невырожденных сингулярных точек.*

Из результатов [?] и [?] следует, что гипотеза верна для окрестностей точек типа центр-центр, центр-седло, фокус-фокус. Так что осталось разобраться со случаем седло-седло.

К сожалению, автору не удалось доказать или опровергнуть эту гипотезу в общем виде. Однако для окрестностей веса 1 и 2 гипотеза верна.

**ТЕОРЕМА 6 ([?])** *Круговая молекула является полным топологическим инвариантом насыщенных регулярных окрестностей невырожденных слоев типа седло-седло веса 1 и 2.*

Доказательство состоит в построении круговых молекул для всех седловых окрестностей веса 1 и 2. Результат построения приведен в таблице 1. Как следует из таблицы, круговые молекулы топологически различных седловых окрестностей веса 1, 2 различны, что и составляет утверждение теоремы.

Глава 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА.

### §1. Основные определения.

Линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе описаны в [?]. Чтобы описать линейно и квадратично интегрируемые потоки на бутылке Клейна, нам придется повторить это описание.

Пусть  $M^2$  — гладкая замкнутая поверхность с заданной на ней римановой метрикой  $G$ . Наличие метрики позволяет каноническим образом отождествить касательное пространство  $TM^2$  поверхности  $M^2$  с кокасательным пространством  $T^*M^2$  и, тем самым, ввести риманову метрику на  $T^*M^2$ . Рассмотрим на  $T^*M^2$  стандартную замкнутую невырожденную 2-форму  $\omega = dp \wedge dx$  и функцию  $H = |p|^2$ , где через  $p$  обозначен вектор импульс. Геодезическим потоком метрики  $G$  называется гамильтонова система на  $T^*M^2$  с гамильтонианом  $H = |p|^2$ . Хорошо известно, что траектории этой системы проектируются в геодезические кривые на  $M^2$ .

Геодезический поток называется *интегрируемым*, если он интегрируем как гамильтонова система, то есть существует функция  $F : T^*M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , постоянная на решениях системы и функционально независимая с  $H$ . Под функциональной независимостью двух функций мы будем понимать линейную независимость дифференциалов этих функций почти всюду. Функция  $F$  при этом называется *интегралом*.

Геодезический поток называется *линейно интегрируемым*, если у него существует интеграл, который в некоторой окрестности каждой точки имеет вид  $F(x, y, p_x, p_y) = a(x, y)p_x + b(x, y)p_y$ , где  $x, y$  — локальные координаты на поверхности,  $p_x, p_y$  — канонически сопряженные им импульсы, а  $a, b$  — гладкие функции.

Геодезический поток называется *квадратично интегрируемым* если, во-первых, он не является линейно интегрируемым и, во-вторых, у него существует интеграл, который в некоторой окрестности каждой точки имеет вид  $F(x, y, p_x, p_y) = a(x, y)p_x^2 + b(x, y)p_x p_y + c(x, y)p_y^2$ , где  $a, b, c$  — гладкие функции. Линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых поверхностях полностью описаны. А именно, известно, что на поверхностях с отрицательной эйлеровой характеристикой таких геодезических потоков нет, см. [?]. Замкнутая ориентируемая поверхность с неотрицательной эйлеровой характеристикой гомеоморфна либо тору, либо сфере  $S^2$ . Квадратично и линейно интегрируемые геодезические потоки на торе описаны в статье И. К. Бабенко и Н. Н. Нехорошева [?], на сфере — в работах В. Н. Колокольцева [?], [?].

Топологическое строение линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе описано в работах Е.Н. Селивановой [?], [?] и в статье В.В. Калашикова [?].

### §2. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе.

Пусть  $L$  — положительное число,  $\frac{k}{m}$  — положительное рациональное

число, меньшее 1,  $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие положительные отличные от константы функции, причем функция  $f$  периодична с периодом  $L$ , функция  $h$  периодична с периодом 1. Рассмотрим плоскость на  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$  и метрикой  $ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$  пару векторов  $u = (1, kL)$  и  $v = (0, mL)$ . Рассмотрим действие  $\zeta$  группы  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , порожденное сдвигами вдоль векторов  $u$  и  $v$ . Легко проверяется, что это действие свободно и сохраняет метрику  $ds^2$ . Рассмотрим факторпространство  $\mathbb{R}^2/\zeta$ . Очевидно, что  $\mathbb{R}^2/\zeta$  гомеоморфно двумерному тору. Так как действие  $\zeta$  свободно и сохраняет метрику, то метрика  $ds^2$  индуцирует метрику (обозначим ее  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$ ) на торе  $\mathbb{R}^2/\zeta$ .

**Определение 1** Метрику  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$  на торе  $\mathbb{R}^2/\zeta$  назовем *псевдолиувиллево метрикой*. Если  $\frac{k}{m} = 0$  то псевдолиувиллева метрика  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})} = G_{(L, f, h, 0)}$  называется *лиувиллево метрикой*.

Заметим, что лиувиллеву метрику можно представлять себе как метрику на торе  $S^1 \times S^1$ , задаваемую формулой  $(f(\phi_1) + h(\phi_2))(d\phi_1^2 + d\phi_2^2)$ , где  $\phi_1 \in \mathbb{R} \pmod{L}$  и  $\phi_2 \in \mathbb{R} \pmod{1}$  — координаты на первой и второй окружностях, соответственно.

**ТЕОРЕМА 1** Геодезический поток метрики  $G$  на торе  $T^2$  квадратично интегрируем, если и только если существует псевдолиувиллева метрика  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$  и диффеоморфизм  $\kappa : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\zeta$ , переводящий метрику  $G$  в метрику  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$ .

**Следствие** Геодезический поток метрики  $G$  на торе  $T^2$  квадратично интегрируем, если существуют тор  $T^2_{\text{лиув}}$  с лиувиллево метрикой  $G_{\text{лиув}}$  и накрытие  $\rho : T^2 \rightarrow T^2_{\text{лиув}}$ , переводящее метрику  $G$  в метрику  $G_{\text{лиув}}$ .

Отметим, что данное в теореме описание отличается от описания, предложенного в статье [?]. В статье [?] было доказано, что для любого квадратично интегрируемого геодезического потока на торе существует такое конечно накрытие этого тора, что геодезический поток поднимается до геодезического потока некоторой лиувиллево метрики.

Оказывается, что различные четверки  $(L, f, h, \frac{k}{m})$  могут, вообще говоря, задавать одинаковые метрики. На множестве четверок  $(L, f, h, \frac{k}{m})$ , где  $L$  — целое число,  $f$  и  $h$  — периодические функции с периодами, соответственно, равными 1 и  $L$ , а  $\frac{k}{m}$  — рациональное положительное число, меньшее единицы, зададим четыре операции:  $\alpha_v$ , где  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta_c$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha_v((L, f, h, \frac{k}{m})) = (L, \hat{f}, h, \frac{k}{m}), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(x - v)$$

$$\beta(L, f, h, \frac{k}{m}) = (L, \hat{f}, h, \frac{m-k}{m}), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(-x)$$

$$\gamma(L, f, h, \frac{k}{m}) = (\frac{1}{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m}), \quad \text{где } \hat{f}(x) = L^2 h(Lx), \quad \hat{h}(y) = L^2 f(Ly), \quad \text{и}$$

$$m > \hat{k} \geq 0 \quad \text{а} \quad \hat{k} = 0, \text{ если } k = 0, \text{ и } \hat{k} = 1 \pmod{m}$$

$$\delta_c(L, f, h, \frac{k}{m}) = (L, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m}), \quad \text{где} \quad \hat{f}(x) = f(x) + c, \quad \hat{h}(y) = h(y) - c.$$

Операции  $\alpha$  и  $\beta$  можно интерпретировать как перенос и симметрию координатной оси  $x$ , операция  $\gamma$  переставляет местами  $x$  и  $y$ , операция  $\delta$  не меняет метрику.

Поэтому тор с метрикой  $(L, f, h, \frac{k}{m})$  изометричен тору с любой из метрик  $\alpha((L, f, h, \frac{k}{m}))$ ,  $\beta((L, f, h, \frac{k}{m}))$  и  $\gamma((L, f, h, \frac{k}{m}))$ .

Пусть  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$  и  $G_{(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m})}$  — псевдолиувиллевы метрики на торах  $R^2/\zeta$  и  $R^2/\hat{\zeta}$ , соответственно.

**ТЕОРЕМА 2** *Существует диффеоморфизм  $\kappa : R^2/\zeta \rightarrow R^2/\hat{\zeta}$ , переводящий метрику  $G_{(L, f, h, \frac{k}{m})}$  в метрику  $G_{(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m})}$  если и только если четверку  $(L, f, h, \frac{k}{m})$  можно перевести в четверку  $(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m})$  операциями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ .*

Теоремы 1 и 2 мы будем называть теоремами классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе.

**Замечание** Можно легко показать, что если четверки  $(L, f, h, \frac{k}{m})$  и  $(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m})$  задают одну и ту же метрику, то существует последовательность операций  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , переводящая четверку  $(L, f, h, \frac{k}{m})$  в четверку  $(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h}, \frac{k}{m})$  и содержащая не более двух операций  $\alpha$ , не более двух операций  $\beta$ , не более двух операций  $\gamma$  и не более одной операции  $\delta$ . Аналогичный факт, а именно ограниченность сверху числа операций, переводящих одно допустимое задание метрики в другую, будет верен в похожих ситуациях для линейно интегрируемых геодезических потоков на торе и линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

### §3. Доказательство теорем классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе.

Для удобства будем рассматривать римановы поверхности с точностью до изометрического диффеоморфизма, то есть если существует диффеоморфизм  $\phi : M^2 \rightarrow \hat{M}^2$ , переводящий метрику  $G$  в метрику  $\hat{G}$ , то пары  $(M^2, G)$  и  $(\hat{M}^2, \hat{G})$  будем считать одинаковыми.

Пусть, как и прежде,  $R^2$  — двумерная плоскость с координатами  $(x, y)$ . Рассмотрим два вектора  $u$  и  $v$ . Пусть функция  $\lambda : R^2 \rightarrow R$  положительна и сохраняется при сдвигах на вектора  $u$  и  $v$ . Метрику на плоскости, задаваемую формулой  $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ , будем обозначать  $G_\lambda$ . Действие группы  $Z \times Z$ , порожденное сдвигами вдоль векторов  $u$  и  $v$ , будем обозначать  $\zeta_{u, v}$ . Рассмотрим двумерный тор  $R^2/\zeta_{u, v}$ . Так как функция  $\lambda$  инвариантна при сдвигах на вектора  $u, v$ , то метрика  $G_\lambda$  порождает метрику (обозначим  $G_{u, v, \lambda}$ ) на торе  $R^2/\zeta_{u, v}$ .

Для доказательства теорем классификации нам понадобятся несколько лемм.

**ЛЕММА 1** *Любая метрика  $G$  на торе  $T^2$  является метрикой  $G_{u, v, \lambda}$  для подходящих векторов  $u, v$  и функции  $\lambda$ .*

Эта лемма, фактически, является переформулировкой теоремы Кобе. По теореме Кобе тор  $T^2$  с метрикой  $G$  конформно эквивалентен некоторому плоскому тору  $T_{\text{плоск}}$  с плоской метрикой  $G_{\text{плоск}}$ . Это означает, что существует диффеоморфизм  $\Phi : T^2 \rightarrow T_{\text{плоск}}$ , переводящий метрику  $G$  в метрику, в каждой точке отличающуюся от метрики  $G_{\text{плоск}}$  умножением на гладко зависящее от точки число (называемое *конформным множителем*). Известно, что плоский тор суть тор  $R^2/\zeta_{(u, v)}$  с метрикой  $G_{u, v, 1}$  (для подходящих векторов  $u$  и  $v$ ). Следовательно, композиция этого диффеоморфизма и диффеоморфизма  $\Phi$  есть сохраняющий метрику диффеоморфизм между тором  $T^2$  с метрикой  $G$  и модельным тором  $R^2/\zeta_{u, v}$  со модельной  $(u, v, \lambda)$  метрикой, где функция  $\lambda$  есть конформный множитель. Лемма доказана.

Пусть некоторая метрика на плоскости записывается в координатах  $x, y$  в виде  $\lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ , а в координатах  $\hat{x}, \hat{y}$  — в виде  $\hat{\lambda}(\hat{x}, \hat{y})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2)$ . Мы утверждаем, что тогда координаты  $\hat{x}, \hat{y}$  связаны с координатами  $x, y$  либо формулой  $\hat{z} = Z_0 z + Z_1$ , либо  $\hat{z} = Z_0 \bar{z} + Z_1$ , где  $z = x + iy$ ,  $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}$  — комплексные переменные,  $Z_0$  и  $Z_1$  — комплексные константы, а черта сверху означает комплексное сопряжение. Действительно, автодиффеоморфизм  $\Psi : R^2 \rightarrow R^2$ , связывающий координаты  $x, y$  и  $\hat{x}, \hat{y}$  конформен. Следовательно, он либо голоморфен, либо антиголоморфен как функция переменной  $z = x + iy$ . Известно, что голоморфные автодиффеоморфизмы комплексной плоскости есть линейные преобразования, антиголоморфные автодиффеоморфизмы комплексной плоскости есть антилинейные преобразования, что и требовалось доказать.

Такие координаты  $\hat{x}, \hat{y}$  будем называть голоморфными.

Ясно, что сдвиги на вектора  $u$ ,  $v$  в координатах  $\hat{x}, \hat{y}$ , суть сдвиги на вектора  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ , координаты которых связаны с координатами векторов  $u$ ,  $v$  формулами  $\hat{u}_1 + i\hat{u}_2 = Z_0(u_1 + iu_2)$  и  $\hat{v}_1 + i\hat{v}_2 = Z_0(v_1 + iv_2)$ . В голоморфных координатах метрика  $ds^2 = \lambda(z)(dx^2 + dy^2)$  имеет вид  $ds^2 = |Z_0^{-2}| \lambda(\frac{z}{Z_0})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2)$ , причем тор  $R^2/\zeta_{u, v}$  совпадает с тором  $R^2/\zeta_{\hat{u}, \hat{v}}$ .

**ЛЕММА 2** *Пусть геодезический поток метрики  $G_{u, v, \lambda}$  на торе  $R^2/\zeta_{u, v}$  имеет нетривиальный квадратичный интеграл  $F$ . Тогда в некоторых голоморфных координатах  $(\hat{x}, \hat{y})$  функция  $\lambda$  имеет вид  $\lambda(\hat{x}, \hat{y}) = f(\hat{x}) + h(\hat{y})$  для некоторых функций  $f$  и  $h$ , а интеграл  $F$  имеет вид  $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y) = \frac{(F(\hat{x}) - C_0)\hat{p}_x^2 - (h(\hat{y}) + C_0)\hat{p}_y^2}{f(\hat{x}) + h(\hat{y})}$ , где  $C_0$  — константа, а  $\hat{p}_x$  и  $\hat{p}_y$  — обобщенные импульсы, канонически сопряженные переменным  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , соответственно.*

Доказательство. Гамильтониан геодезического потока имеет вид  $H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{\lambda(x, y)}$ . Пусть интеграл имеет вид  $F(x, y, p_x, p_y) = a(x, y)p_x^2 + b(x, y)p_x p_y + c(x, y)p_y^2$ , где коэффициенты  $a, b$  и  $c$  сохраняются при сдвигах на вектора  $u$  и  $v$ . Рассмотрим функцию  $R_{x, y}(z) = a(x, y) - c(x, y) + ib(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ . Пусть координаты  $(\hat{x}, \hat{y})$  связаны с координатами  $(x, y)$  соотношением  $\hat{z} = Z_0 z$ , где  $Z_0$  — комплексная константа, а  $\hat{z} = x + iy$ . Пусть в координатах  $(\hat{x}, \hat{y})$  интеграл  $F$  имеет вид  $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y) = \hat{a}(\hat{x}, \hat{y})\hat{p}_x^2 + \hat{b}(\hat{x}, \hat{y})\hat{p}_x \hat{p}_y + \hat{c}(\hat{x}, \hat{y})\hat{p}_y^2$ , где  $\hat{p}_x$  и  $\hat{p}_y$  — обобщенные импульсы, канонически сопряженные к переменным  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  соответственно. Рассмотрим функцию  $R_{\hat{x}, \hat{y}}(z) = \hat{a}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{c}(\hat{x}, \hat{y}) + i\hat{b}(\hat{x}, \hat{y})$ . По теореме Колокольцова ([?], см., также [?]) функции  $R_{x, y}$  и  $R_{\hat{x}, \hat{y}}$  являются голоморфными функциями переменной  $z$  и связаны соотношением  $R_{x, y} = Z_0^2 R_{\hat{x}, \hat{y}}$ . Так как функция  $R_{x, y}$  ограничена в силу ее инвариантности относительно сдвигов вдоль векторов  $u$  и  $v$ , то по теореме Лиувилля она равна константе. Докажем, что  $R_{x, y} \neq 0$ . Рассуждая от противного, допустим, что  $R = 0$ . Запишем условие  $\{H, F\} = 0$ .

$$\begin{aligned} \{H, F\} &= H_{p_x} F_x + H_{p_y} F_y - F_{p_x} H_x - F_{p_y} H_y = \\ &= 2\lambda^{-2}((a_x \lambda + a \lambda_x) p_x^2 + (a_y \lambda + a \lambda_y) p_x p_y + (a_x \lambda + a \lambda_x) p_x p_y^2 + (a_y \lambda + a \lambda_y) p_y^3) = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем систему  $\begin{cases} (a\lambda)_x = 0 \\ (a\lambda)_y = 0 \end{cases}$ . Следовательно, для некоторой константы

$D$ ,  $a = \frac{D}{\lambda(x, y)}$ , подставив  $a = \frac{D}{\lambda(x, y)}$  в формулу для функции  $R$ , получаем, что  $F = DH$ , что противоречит функциональной независимости интеграла и гамильтониана.

Так как  $R_{x, y} \neq 0$ , то можно подобрать константу  $Z_0$  так, что в соответствующих этой константе голоморфных координатах  $(\hat{x}, \hat{y})$  функция  $R_{\hat{x}, \hat{y}} \equiv 1$ . Тогда  $\hat{b}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv 0$ ,  $\hat{a}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{c}(\hat{x}, \hat{y}) + 1$ . Условие  $\{H, F\} = 0$  запишется в виде системы  $\begin{cases} (\hat{a}(\hat{x}, \hat{y})\lambda)_{\hat{x}} = 0 \\ (\hat{a}(\hat{x}, \hat{y})\lambda)_{\hat{y}} = \lambda_{\hat{y}} \end{cases}$ . Отсюда непосредственно вытекает, что  $(a\lambda)_{xy} - \lambda_{xy} - (a\lambda)_{yx} = 0$ ,  $\lambda = f(x) + h(y)$  и  $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y) = \frac{(f(\hat{x}) - C_0)\hat{p}_x^2 - (h(\hat{y}) + C_0)\hat{p}_y^2}{f(\hat{x}) + h(\hat{y})}$ , что и требовалось доказать.

**ЛЕММА 3** Пусть  $f : R \rightarrow R$ ,  $h : R \rightarrow R$  — ограниченные функции и вектор  $u = (u_1, u_2)$  таков, что  $f(x + u_1) + h(y + u_2) = f(x) + h(y)$  для любых  $x, y$ . Тогда  $f(x + u_1) = f(x)$  и  $h(y + u_2) = h(y)$ .

Доказательство. По условию  $f(x + u_1) - f(x) = h(y) - h(y + u_2)$ . Следовательно, для некоторой константы  $C$ ,  $f(x + u_1) - f(x) = h(y) - h(y + u_2)$ . Докажем, что  $C = 0$ . Предположим противное. Тогда  $f(x + nu_1) = f(x) + nC$ , что противоречит ограниченности функции  $f$ . Лемма доказана.

**ЛЕММА 4** Пусть координаты  $(\hat{x}, \hat{y})$  на плоскости  $R^2$  связаны с координатами  $(x, y)$  либо формулой  $\hat{z} = Z_0 z + Z_1$  (голоморфный случай), либо  $\hat{z} = Z_0 \bar{z} + Z_1$  (антиголоморфный случай), где, как и выше,  $z = x + iy$ ,  $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}$  — комплексные переменные,  $Z_0 \neq 0$  и  $Z_1$  — комплексные константы. Если

функция  $\lambda$  ограничена и отлична от константы, и если  $\lambda_{xy} = \lambda_{\hat{x}\hat{y}} = 0$ , то число  $Z_0$  либо чисто вещественное, либо чисто мнимое.

Для простоты проведем доказательство только для голоморфного случая. Пусть координаты  $(\hat{x}, \hat{y})$  связаны с координатами  $(x, y)$  формулой  $\hat{z} = Z_0 z + Z_1$ . Пусть  $Z_0 = re^{i\phi}$ . Тогда переход от координат  $x, y$  к координатам  $\hat{x}, \hat{y}$  задается формулами  $\hat{x} = r(x \cos \phi + y \sin \phi)$ ,  $\hat{y} = r(-x \sin \phi + y \cos \phi)$  и  $\lambda_{\hat{x}\hat{y}} = r^2 \cos \phi \sin \phi (\lambda_{xx} - \lambda_{yy}) = 0$ . Поэтому  $Z_0$  — чисто вещественное либо чисто мнимое  $Z_0$  число, либо  $\lambda_{xx} - \lambda_{yy} = 0$ . Предположим, что  $\lambda_{xx} - \lambda_{yy} = 0$ . Так как функция  $\lambda_{xx}$  зависит только от переменной  $x$ , функция  $\lambda_{yy}$  зависит только от переменной  $y$ , то  $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \text{const}$ . Из ограниченности функции  $\lambda$  получаем, что  $\lambda = \text{const}$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

**Следствие.** Пусть положительная функция  $\lambda : R^2 \rightarrow R$  ограничена и отлична от константы и пусть диффеоморфизм  $\chi : R^2 \rightarrow R^2$  сохраняет метрику  $\lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ . Тогда диффеоморфизм  $\chi : R^2 \rightarrow R^2$  представляется в виде композиции сдвигов, симметрий относительно координатных осей, гомететий и поворотов на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть геодезический поток метрики  $G_{u, v, \lambda}$  квадратично интегрируем. По лемме 2 существуют голоморфные координаты  $x, y$ , в которых метрика имеет вид  $ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$ . Следовательно, функция  $(f(x) + h(y))$  сохраняется при сдвигах на вектора  $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$ . Из леммы 3 следует, что  $f(x + u_1) = f(x) = f(x + v_1)$ ,  $h(y + u_2) = h(y) = h(y + v_2)$ .

Докажем, что  $u_1$  и  $v_1$  соизмеримы, то есть их отношение либо рационально, либо равно бесконечности. Предположим противное: пусть их отношение иррационально. Тогда целочисленной комбинацией чисел  $u_1$  и  $v_1$  можно получить сколь угодно малое число, добавление которого к аргументу не меняет значения функции  $f$ . Следовательно,  $f \equiv \text{const}$ . Но тогда гамильтониан  $H$  не зависит от  $x$  и линейная по импульсам функция  $F = p_x$  является интегралом геодезического потока. Действительно,  $\{H, p_x\} = H_x = 0$ . Получаем противоречие с определением квадратичной интегрируемости.

Аналогично доказывается соизмеримость  $u_2$  и  $v_2$ .

Таким образом, существуют положительные константы  $e_1, e_2$  и такие пары взаимно простых целых чисел  $k_1, k_2$  и  $m_1, m_2$ , что  $u_1 = k_1 e_1$ ,  $u_2 = m_1 e_2$ ,  $v_1 = k_2 e_1$ ,  $v_2 = m_2 e_2$ . Следовательно, функция  $(f(x) + h(y))$  сохраняется при сдвиге на вектора  $(e_1, 0)$  и  $(0, e_2)$ . С другой стороны, вектора  $u$  и  $v$  есть целочисленные линейные комбинации векторов  $\bar{e}_1 = (e_1, 0)$  и  $\bar{e}_2 = (0, e_2)$ . Рассмотрим голоморфные координаты  $(\hat{x}, \hat{y})$ , связанные с координатами  $(x, y)$  преобразованием  $(\hat{x}, \hat{y}) = (\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_2})$ . В них  $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1)$ . Рассмотрим фактор плоскости  $R^2$  по действию,  $\zeta_{\bar{e}_1}, \zeta_{\bar{e}_2}$ , порожденному сдвигами на вектора  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ . Очевидно, что это — тор с лиувиллевой метрикой. С другой стороны, тор  $T^2$  конечно покрывает его, причем матрица накрытия  $A$  имеет вид  $\begin{pmatrix} k_1 & m_1 \\ k_2 & m_2 \end{pmatrix}$ . Для доказательства теоремы в одну сторону осталось

доказать, что матрицу  $A$  можно привести к виду  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & m \end{pmatrix}$ , где  $m > k \geq 0$ , умножением слева на целочисленные обратимые  $2 \times 2$ -матрицы. Приведем соответствующее рассуждение. Заметим, что преобразования матрицы, при которых строка заменяется на сумму обеих строк реализуются умножением на матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, используя алгоритм

Эвклида, можно привести матрицу  $A$  к виду  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ . Далее, вычитая из первого столбца второй, можно привести ее к нужному нам виду.

Одну сторону теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы в другую сторону нам нужно доказать, что у геодезического потока метрики  $G_{(L,f,h,\frac{k}{m})}$  есть квадратичный и нет линейного интеграла. Очевидно, что квадратичный интеграл есть. Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{f(x)p_x^2 - h(y)p_y^2}{f(x)+h(y)}$  является квадратичным интегралом. Рассуждая от противного, допустим, что линейная по импульсам функция  $a(x, y)p_x + b(x, y)p_y$  является интегралом. Тогда квадрат ее является квадратичным интегралом. Используя то, что общий вид квадратичных интегралов описан в лемме 2, получаем, что для некоторых констант  $0 < C_1$  справедливо равенство  $\frac{a^2(x,y)}{C_1}p_x^2 + 2\frac{a(x,y)b(x,y)}{C_1}p_xp_y + \frac{b^2(x,y)}{C_1}p_y^2 = \frac{(f(x)-C_0)p_x^2 - (h(y)+C_0)p_y^2}{f(x)+h(y)}$ . Откуда следует справедливость равенства  $(h(y)+C_0)(f(x)-C_0) \equiv 0$ , и постоянность одной из функций  $f, h$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что операции  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  реализуются автодиффеоморфизмами тора  $T^2$ . В силу теоремы 1 тор  $T^2$  можно считать тором  $R^2/\zeta_{(1,kL),(0,mL)}$  тором со метрикой  $G_{(f+h,(1,kL),(0,mL))}$ . Непосредственной проверкой устанавливаем, что диффеоморфизмы,  $A_a, B$  и  $C$ , на модельном накрытии задаваемые формулами  $A_a(x, y) = (x + a, y)$ ,  $B(x, y) = (-x, y)$ ,  $C(x, y) = (\frac{x}{L}, \frac{y}{L})$  переводит  $(L, f, h, \frac{k}{m})$ -метрику в метрики  $\alpha_a(L, f, h, \frac{k}{m})$ ,  $\beta(L, f, h, \frac{k}{m})$ ,  $\gamma(L, f, h, \frac{k}{m})$ , соответственно. Операция  $\delta$  не меняет метрику, так как замена функций  $f(x), h(y)$  на  $f(x) + c, h(y) - c$  не меняет функцию  $f(x) + h(y)$ .

Докажем теорему в другую сторону. Пусть существует диффеоморфизм  $R^2/\zeta_{(u,v)} \rightarrow R^2/\zeta_{(\hat{u},\hat{v})}$ , переводящий метрику  $G_{(L,f,h,\frac{k}{m})}$  в метрику  $G_{(\hat{L},\hat{f},\hat{h},\frac{\hat{k}}{\hat{m}})}$ . Через  $u, v, \hat{u}, \hat{v}$  обозначены, соответственно, вектора  $(1, kL), (0, mL), (1, \hat{k}\hat{L}), (0, \hat{m}\hat{L})$ . Поднимем его до диффеоморфизмов универсальных накрытий  $\xi: R^2 \rightarrow R^2$ . Диффеоморфизм  $\xi$  переводит метрику  $(f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$  в метрику  $(\hat{f}(\hat{x}) + \hat{h}(\hat{y}))(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2)$  и переводит решетку, задаваемую векторами  $u, v$  в решетку, задаваемую векторами  $\hat{u}, \hat{v}$ . Из леммы 4 следует, что диффеоморфизм  $\xi$  можно получить композицией сдвигов, гомотетий и симметрий относительно прямых  $y = 0$  и  $x = y$ . Композицией автодиффеоморфизмов  $A, B$  и  $C$  можно получить любой сдвиг и такие симметрии. Поэтому можно считать, что точка  $(0, 0)$  системы координат  $x, y$  совпадает с точкой  $(0, 0)$  системы

координат  $\hat{x}, \hat{y}$ , что прямая  $y = 0$  в системе координат  $\hat{x}, \hat{y}$  задается уравнением  $\hat{y} = 0$ , и что при возрастании  $x$  возрастает  $\hat{x}$ . Так как вектор  $v$  можно определить как простой вектор решетки, лежащий на полуоси  $\{y = 0, x > 0\}$ , то в этом случае вектор  $v$  совпадает с вектором  $\hat{v}$ . Теорема доказана.

#### §4. Линейно интегрируемые потоки на торе.

Доказанные в предыдущем параграфе леммы позволяют описать линейно интегрируемые геодезические потоки на торе. Пусть  $f: R \rightarrow R$  — гладкая положительная отличная от константы функция с периодом 1, а  $l$  и  $L$  — вещественные неотрицательные числа, причем  $0 \leq l < L$ . Рассмотрим вектора  $u$  и  $v$  с координатами, соответственно,  $(0, L)$  и  $(1, l)$ . Не опасаясь путаницы, будем обозначать через  $f$  функцию  $R^2 \rightarrow R$ ,  $f(x, y) = f(x)$ . Очевидно, что функция  $f$  сохраняется при сдвигах на вектора  $u$  и  $v$ . Рассмотрим метрику  $G_{u,v,f}$ . Напомним, что через  $G_{u,v,\lambda}$  обозначается метрика, индуцированная метрикой  $\lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$  на факторе плоскости по сдвигам на вектора  $u$  и  $v$ .

**ТЕОРЕМА 3** Пусть геодезический поток метрики  $G$  на торе  $T^2$  линейно интегрируем. Тогда метрика  $G$  либо плоская, либо существует положительная функция  $f$  с периодом 1, числа  $0 \leq l < L$  и диффеоморфизм  $\phi: T^2 \rightarrow R/\zeta_{u,v}$ , переводящий метрику  $G$  в метрику  $G_{u,v,f}$ .

Как и для квадратично интегрируемых геодезических потоков, некоторые тройки  $(f, l, L)$  задают одну и ту же метрику. На множестве троек  $(f, l, L)$  введем операции  $\alpha_c, \beta, \gamma$ .

$$\alpha_c(f, l, L) = (\hat{f}, l, L), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(x + c),$$

$$\beta(f, l, L) = (\hat{f}, \hat{l}, L), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(-x), \quad \hat{l} = L - l,$$

$$\gamma(f, l, L) = (f, \hat{l}, L), \quad \text{где } \hat{l} = L - l.$$

**ТЕОРЕМА 4** Существует диффеоморфизм  $\kappa: R^2/\zeta_{u,v} \rightarrow R^2/\zeta_{\hat{u},\hat{v}}$ , переводящий метрику  $G_{f,l,L}$  в метрику  $G_{\hat{f},\hat{l},\hat{L}}$  если и только если тройку  $(f, l, L)$  можно перевести в тройку  $(\hat{f}, \hat{l}, \hat{L})$  операциями  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

Доказательство теорем 3,4. Очевидно, что геодезический поток плоской метрики линейно интегрируем. Пусть геодезический поток метрики  $G$  линейно интегрируем и метрика  $G$  не является плоской. Тогда, по леммам 1 и 2 существует (для подходящих векторов  $u, v$  и функций  $f: S_1 \rightarrow R, h: S_L \rightarrow R$ ) диффеоморфизм между тором  $T^2$  и тором  $R^2/\zeta_{(u,v)}$ , переводящий метрику  $G$  в метрику  $G_{u,v,f+h}$ . Докажем, что либо  $f = \text{const}$ , либо  $h = \text{const}$ . Действительно, пусть линейный интеграл имеет вид  $a(x, y)p_x + b(x, y)p_y$ . Тогда функция  $(a(x, y)p_x + b(x, y)p_y)^2$  является квадратичным интегралом. По лемме 2 любой квадратичный интеграл имеет вид  $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{(f(x)-C_0)p_x^2 - (h(y)+C_0)p_y^2}{f(x)+h(y)}$ .

для подходящей константы  $C_0$ . Поэтому  $2a(x, y)b(x, y) = 0$ ,  $a^2(x, y) = -\frac{h(y)+C_0}{f(x)+h(y)}$ ,  $b^2(x, y) = \frac{f(x)-C_0}{f(x)+h(y)}$ , откуда либо  $f(x) = C_0$ , либо  $h(y) = -C_0$ .

Без ограничения общности можно считать, что  $h \equiv 0$ ,  $f \neq \text{const}$ . Пусть вектора  $u, v$  имеют координаты  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$ , соответственно. Докажем, что первые координаты векторов соизмеримы. Действительно, по лемме 3 функция  $f$  сохраняется при добавлении к аргументу целочисленной линейной комбинации чисел  $u_2$  и  $v_2$ , и из несоизмеримости чисел вытекало бы постоянство функции  $f$ .

Поэтому, существует такая ненулевая пара взаимно простых чисел  $m, n \in \mathbb{Z}$ , что  $mv + nu = (w_1, 0)$ , где  $w_1 > 0$ . В решетке, порожденной векторами  $u, v$ , выберем вектор  $s = (s_1, s_2)$ , дополнительный к вектору  $(w_1, 0)$ . Его можно выбрать так, что  $0 \leq s_1 < w_1$ . Рассмотрим систему координат  $(\hat{x}, \hat{y})$ , связанную с системой координат  $(x, y)$  формулами  $x = w_1\hat{x}$ ,  $y = w_1\hat{y}$ . В ней метрика  $G$  имеет вид  $w_1^2 f(w_1\hat{x})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2)$ . Обозначим  $l = \frac{s_1}{w_1}$ ,  $L = \frac{s_2}{w_1}$ . Вектора решетки в координатах  $\hat{x}, \hat{y}$  имеют вид  $(0, L)$  и  $(1, l)$ . Поэтому метрика  $G$  является  $(f, l, L)$ -метрикой. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть диффеоморфизм  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  переводит метрику  $f(x)(dx^2 + dy^2)$  в метрику  $\hat{f}(\hat{x})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2)$ , и пусть при этом диффеоморфизме решетка, порожденная векторами  $(0, l)$  и  $(1, L)$  переходит в решетку, порожденную векторами  $(0, \hat{l})$  и  $(1, \hat{L})$ .

Тогда, в силу леммы 4, этот диффеоморфизм можно представить как композицию поворотов на угол  $\frac{\pi}{2}$ , гомотетий, симметрий относительно осей координат и сдвигов. Так как метрика  $f(x)(dx^2 + dy^2)$  не зависит от значения  $y$ -координаты точки, то повороты "запрещаются". Следовательно, гомотетии тоже "запрещаются". Остальные допустимые движения можно получить как композицию сдвигов  $(x, y) \rightarrow (x + c, y)$  и  $(x, y) \rightarrow (x, y + d)$ , симметрий  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$  и  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ . Первый сдвиг и симметрии суть "реализации", соответственно, операций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Так как метрика  $f(x)(dx^2 + dy^2)$  не зависит от значения  $y$ -координаты точки, то второй сдвиг не меняет тройку  $(f, l, L)$ . Теорема доказана.

### §5. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна.

Очевидно, что при ориентирующем накрытии бутылки Клейна тором метрика с квадратично интегрируемым геодезическим потоком поднимается до метрики на торе с квадратично или линейно интегрируемым геодезическим потоком.

**Определение 2** Метрика  $G$  на бутылке Клейна  $K^2$  называется *лиувиллеовой*, если поднятие на ориентирующее накрытие есть *лиувиллева метрика* на торе.

**Определение 3** Метрика  $G$  на бутылке Клейна  $K^2$  с квадратично интегрируемым геодезическим потоком называется *квазилинейной*, если геодезический поток ее поднятия на ориентирующее накрытие *линейно интегрируем*.

Мы не упомянули метрики на бутылке Клейна, которые при переходе к ориентирующему накрытию дают псевдолиувиллеовы, но не лиувиллеовы метрики на торе. Оказывается, таких метрик на бутылке Клейна нет.

**ТЕОРЕМА 5** *Любая метрика на бутылке Клейна  $K^2$  с квадратично интегрируемым геодезическим потоком является либо лиувиллеовой, либо квазилинейной.*

В силу теорем классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе, множество лиувиллевых метрик на  $K^2$  и множество квазилинейных метрик на  $K^2$  не пересекаются.

Пусть  $L$  — положительное число,  $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие положительные функции, причем функция  $f$  отлична от константы и периодична с периодом  $\frac{1}{2}$ , а функция  $h$  периодична с периодом  $L$  и четна, так что  $h(y) = h(-y) = h(y + L)$ . На плоскости  $\mathbb{R}^2$  со стандартными координатами  $x, y$  рассмотрим метрику  $ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$  и пару векторов  $u = (1, 0)$ ,  $v = (0, L)$ . Рассмотрим подгруппу  $\Gamma$  группы движений плоскости, порожденную сдвигами на вектора  $u$  и  $v$  и скользящей симметрией  $(x, y) \rightarrow (x + 1/2, -y)$ . Естественное действие  $\xi$  этой подгруппы свободно и сохраняет метрику  $ds^2$ . Рассмотрим факторпространство  $\mathbb{R}^2/\xi$ . Оно гомеоморфно бутылке Клейна. Действительно, так как скользящая симметрия меняет ориентацию, то  $\mathbb{R}^2/\xi$  неориентируемо. Так как действие сохраняет векторное поле  $(1, 0)$ , то на факторпространстве существует векторное поле без особенностей. Следовательно, Эйлерова характеристика  $\mathbb{R}^2/\xi$  равна 0 и  $\mathbb{R}^2/\xi$  гомеоморфно бутылке Клейна. Так как действие сохраняет метрику, то метрика  $ds^2$  индуцирует метрику (будем обозначать эту метрику  $G_{(L, f, h)}$ ) на бутылке Клейна  $\mathbb{R}^2/\xi$ . Заметим, что если функция  $h = \text{const}$ , то тогда метрика  $G_{(L, f, h)}$  квазилинейна, а если функция  $h$  отлична от константы, то метрика  $G_{(L, f, h)}$  лиувиллева.

**ТЕОРЕМА 6** *Геодезический поток метрики  $G$  на бутылке Клейна  $K^2$  квадратично интегрируем если и только если существует положительное число  $L$ , периодичная с периодом  $\frac{1}{2}$  гладкая положительная функция  $f$ , периодичная с периодом  $L$  гладкая положительная четная функция  $h$  и диффеоморфизм, переводящий бутылку Клейна  $K^2$  в бутылку Клейна  $\mathbb{R}^2/\xi$  и метрику  $G$  в метрику  $G_{(L, f, h)}$ .*

Как и в случае тора, разные тройки  $(L, f, h)$  могут задавать одну и ту же метрику. На множестве троек  $(L, f, h)$ , где  $L$  — положительное число, а  $f$  и  $h$  — функции на окружностях  $S^1$  и  $S^1$  соответственно, введем четыре операции:  $\alpha_c$ , где  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta_c$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha_c(L, f, h) = (L, \hat{f}, h), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(x + v)$$

$$\beta(L, f, h) = (L, f, \hat{h}), \quad \text{где } \hat{h}(y) = h(y + \frac{L}{2})$$

$$\gamma(L, f, h) = (L, \hat{f}, h), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(-x)$$

$$\delta(L, f, h) = (L, \hat{f}, \hat{h}), \quad \text{где } \hat{f}(x) = f(x) + c, \quad \hat{h}(y) = h(y) - c.$$

**ТЕОРЕМА 7** Существует сохраняющий метрику диффеоморфизм  $\chi : R^2/\xi \rightarrow R^2/\xi$ , переводящий метрику  $G_{(L,f,h)}$  в метрику  $G_{(\hat{L},\hat{f},\hat{h})}$  если и только если тройка  $(L, f, h)$  переводится в тройку  $(\hat{L}, \hat{f}, \hat{h})$  операциями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ .

### §6. Доказательство теорем классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

Доказательство теоремы 6. Пусть у геодезического потока метрики  $G$  на бутылке Клейна  $K^2$  есть квадратичный интеграл. Рассмотрим ориентирующее накрытие  $\theta : T^2 \rightarrow K^2$  и поднятие  $\theta^*(G)$  метрики  $G$ . В силу лемм 1 и 2 можно отождествить тор  $T^2$  с тором  $R^2/\zeta_{u,v}$ , а метрику  $\theta^*G$  с некоторой метрикой  $(f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$ , сохраняющейся при сдвигах на вектора  $u$  и  $v$ . Если  $f \equiv \text{const}_1$  и  $h \equiv \text{const}_2$ , то метрика  $G$  плоская, и, следовательно, ее геодезический поток линейно интегрируем. Для определенности предположим, что функция  $f$  отлична от константы. Тогда гомотетией и заменой базиса в решетке, порожденной векторами  $u$  и  $v$  можно добиться, чтобы вектор  $u$  имел координаты  $(1, 0)$  и чтобы первая координата вектора  $v$  лежала на полуинтервале  $[0, 1)$ . Пусть  $\sigma : R^2/\zeta_{u,v} \rightarrow R^2/\zeta_{u,v}$  — инволюция тора  $R^2/\zeta_{u,v}$ , двойственная к накрытию  $\theta$  (т.е. переставляющая точки в каждом слое накрытия). Поднимем эту инволюцию на универсально накрывающую плоскость  $R^2$ . Так как она меняет ориентацию и сохраняет конформную структуру, то поднятие инволюции (обозначим его через  $\sigma$ ) является скользящей симметрией. В силу леммы 4 ось этой симметрии 1) либо параллельна оси  $\{x = 0\}$ , 2) либо параллельна оси  $\{y = 0\}$ , 3) либо пересекает под углом  $\frac{\pi}{4}$  эти оси.

В первом случае функция  $h$  отлична от константы. Действительно, в противном случае линейный интеграл  $F = p_y$  сохранялся бы инволюцией и у геодезического потока на бутылке Клейна был бы линейный интеграл.

Из непостоянности функции  $h$  следует, что, заменив  $x$  на  $y$ , мы перейдем в ситуацию второго случая.

В третьем случае у геодезического потока полученной метрики нет квадратичного интеграла. Действительно, общий вид квадратичного интеграла описан в лемме 2 и задается формулой  $F(x, y, p_x, p_y) = C_1 \frac{f(x)p_x^2 - h(y)p_y^2}{f(x) + h(y)} + H(x, y, p_x, p_y)$ , где  $C_1 \neq 0$ ,  $C_0$  — произвольные константы. Легко проверяется, что скользящая симметрия меняет знак у первого элемента суммы и сохраняет второй элемент суммы. Следовательно, квадратично интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна получаются только во втором случае.

Пусть скользящая симметрия переводит точки  $(x, y)$  в точки  $(x + a, -y)$ . Так как она порождает инволюцию  $\sigma$ , то  $a = \frac{1}{2}$ . Из леммы 3 получаем, что  $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$  и  $h(y) = h(-y)$ . Так как у инволюции  $\sigma$  нет неподвижных точек, то вектор  $\sigma$  имеет вид  $(0, L)$ . Следовательно, функция  $h$  периодична с периодом  $L$ , то есть метрика  $G$  действительно переводится диффеоморфизмом в метрику  $G_{(L,f,h)}$ .

Нам осталось доказать, что геодезический поток метрики  $G_{(L,f,h)}$  квадратично

интегрируем. Квадратичный интеграл этого геодезического потока, очевидно, существует. Предположим, что существует линейный интеграл  $a(x, y)p_x + b(x, y)p_y$ . Квадрат его равен интегралу  $F(x, y, p_x, p_y) = C_1 \frac{f(x)p_x^2 - h(y)p_y^2}{f(x) + h(y)} + C_0 H(x, y, p_x, p_y)$ , где  $C_0$  и  $C_1$  — подходящие константы. Следовательно,  $h \equiv C_0$  и линейный интеграл имеет вид  $C_1 p_y^2$ . Но этот интеграл не сохраняется действием  $\xi$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 7. Поднимем диффеоморфизм, переводящий метрику  $G_{(L,f,h)}$  в метрику  $G_{(\hat{L},\hat{f},\hat{h})}$ , на универсальное накрытие. Действуя, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что этот диффеоморфизм (обозначим его  $\kappa$ ) можно реализовать композицией диффеоморфизмов  $A, B, C$ . Рассмотрим группу, порожденную диффеоморфизмами  $A, B, C$ . Так как диффеоморфизм  $\chi$  переводит ось абсцисс либо в себя, либо в ось  $\{y = \frac{L}{2}\}$ , то  $\kappa$  представляется в виде композиции переносов и симметрий относительно осей ординат и абсцисс. С другой стороны, очевидно, что операции реализуются сохраняющим метрику диффеоморфизмом. Теорема доказана.

### §7. Линейно интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна.

Пусть  $L$  — положительное число и  $f : R \rightarrow R$  — гладкая положительная четная функция с периодом 1. На плоскости  $R^2$  со стандартными координатами  $x, y$  рассмотрим метрику  $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$  и пару векторов  $u = (1, 0)$ ,  $v = (0, L)$ . Рассмотрим подгруппу  $\Gamma$  группы движений плоскости, порожденную сдвигами на вектора  $u$  и  $v$  и скользящей симметрией  $(x, y) \rightarrow (-x, \frac{L}{2} + y)$ . Естественное действие  $\xi$  этой подгруппы свободно и сохраняет метрику  $ds^2$ . Рассмотрим факторпространство  $R^2/\xi$ . Оно гомеоморфно бутылке Клейна. Так как действие сохраняет метрику, то метрика  $ds^2$  индуцирует метрику (будем обозначать ее  $G_{(L,f)}$ ) на бутылке Клейна  $R^2/\xi$ . В частности, если функция  $f$  — константа, то метрика  $G_{(L,f)}$  плоская.

**ТЕОРЕМА 8** Геодезический поток метрики  $G$  на бутылке Клейна  $K^2$  линейно интегрируем если и только если существует четная положительная функция  $f$  с периодом 1, положительное число  $L$  и диффеоморфизм  $\chi : K^2 \rightarrow R^2/\xi$ , переводящий метрику  $G$  в метрику  $G_{(L,f)}$ .

**ТЕОРЕМА 9** Существует диффеоморфизм, переводящий метрику  $G_{(L,f)}$  в метрику  $G_{(\hat{L},\hat{f})}$  если и только если  $L = \hat{L}$  и либо  $f = \hat{f}$ , либо  $f(x) = \hat{f}(-x)$ .

Доказательство теоремы 8. Пусть геодезический поток метрики  $G$  на бутылке Клейна линейно интегрируем. Рассмотрим ориентирующее накрытие бутылки Клейна тором  $T^2$ . Метрика  $G$  при этом накрытии поднимается до метрики на торе с линейно интегрируемым геодезическим потоком. Метрики на торе с линейно интегрируемыми геодезическими потоками описаны в теореме 3. В силу теоремы 3, тор  $T^2$  можно рассматривать как факторпространство плоскости  $R^2$  по действию группы  $Z^2$ , порожденному сдвигами на два вектора. Поднятие метрики на плоскость  $R^2$  в подходящих координатах имеет вид

$f(x)(dx^2 + dy^2)$ . Если  $f \equiv \text{const}$ , то метрика на бутылке Клейна плоская и утверждение теоремы верно. Пусть функция  $f$  отлична от константы.

Рассмотрим инволюцию  $\sigma$ , двойственную к накрытию бутылки Клейна тором. Эта инволюция индуцирует автоморфизм плоскости  $R^2$ . Так как инволюция сохраняет метрику, то и этот автоморфизм плоскости  $R^2$  сохраняет метрику. Используя неориентируемость бутылки Клейна и отсутствие неподвижных точек у инволюции  $\sigma$ , получаем, что этот автоморфизм является скользящей симметрией. По лемме 4 ось этой симметрии либо 1) параллельна координатной оси  $x$ , либо 2) параллельна координатной оси  $y$ . Первый случай невозможен, так как такая скользящая симметрия меняет знак линейного интеграла. Во втором случае используя отсутствие неподвижных точек получаем, что в качестве базисных векторов можно выбрать пару векторов, один из которых параллелен оси  $x$ , а другой параллелен оси  $y$ . Гомотетией и сменой знака координаты  $x$  приводим вектора к виду  $(1, 0)$  и  $(0, L)$ . Теорема 8 доказана.

Доказательство теоремы 9 полностью аналогично доказательству теоремы 7.

#### §8. Что мы будем понимать под описанием топологического строения геодезических потоков.

Очевидно, что интегрируемая гамильтонова система сама является насыщенной окрестностью. Две интегрируемые гамильтоновы системы будем называть *топологически эквивалентными*, если они топологически эквивалентны как насыщенные окрестности, т.е. если существует гомеоморфизм между соответствующими многообразиями, переводящий слои Лиувилля в слои Лиувилля, критические окружности — в критические окружности, и сохраняющий ориентацию критических окружностей гамильтоновым векторным полем.

Как и прежде, под *изоэнергетической поверхностью*  $Q_{\text{const}}$  мы будем понимать поверхность, определяемую уравнением  $H = \text{const}$ . При этом значение  $\text{const}$  называется *уровнем энергии*.

Новый подход как к изучению строения изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем, так и к изучению строения интегрируемых гамильтоновых систем в целом, был предложен в работах [?], [?]. В этих работах каждой невырожденной в некотором смысле ориентированной изоэнергетической поверхности гамильтоновой системы была сопоставлена так называемая меченая молекула. Причем существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм из одной невырожденной изоэнергетической поверхности в другую, переводящий

- 1) слои Лиувилля в слои Лиувилля,
- 2) критические окружности в критические окружности с сохранением ориентации гамильтоновым векторным полем,

если и только если меченые молекулы этих поверхностей одинаковы.

Подробное определение невырожденности изоэнергетических поверхностей и определение меченых молекул можно найти, например, в [?]. Здесь мы только напомним вкратце, что такое меченая молекула. Меченая молекула представляет собой достаточно сложный комбинаторный объект. Меченая

молекула — это ориентированный граф со следующей дополнительной структурой на нем.

- i) Вершинам графа сопоставлены атомы.
- ii) Ребрам — числовые "метки"  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  и  $r \in \{(Q \cap [0, 1]) \cup \infty\}$ .
- iii) Некоторые подмножества вершин объединены в так называемые семьи.

Семьям, не содержащим вершин, которым сопоставлены атомы  $A$ , сопоставлены метки  $n \in Z$ .

В этой работе мы будем пользоваться терминологией [?].

Мы видим, что условия 1) и 2) суть условия топологической эквивалентности изоэнергетических поверхностей как насыщенных множеств. Канонически ориентируем изоэнергетические поверхности геодезических потоков следующим образом. В качестве ориентирующей формы  $\sigma$  выберем такую форму, что форма  $\sigma \wedge dH$  ориентирует кокасательное расслоение к поверхности так же, как форма  $\omega \wedge \omega = 2dp_x \wedge dx \wedge dp_y \wedge dy$ . Этим условием ориентации изоэнергетической поверхности геодезического потока определяется однозначно.

Заметим, что топологическое строение изоэнергетической поверхности  $Q_{\text{const}} = \{H = \text{const} > 0\}$  полиномиально интегрируемого геодезического потока не зависит от выбора константы  $\text{const}$ . Действительно, пусть  $\text{const}_1$  и  $\text{const}_2$  — два положительных числа. Рассмотрим диффеоморфизм  $\varpi : Q_{\text{const}_1} \rightarrow Q_{\text{const}_2}$ , определяемый формулой  $\varpi(x, y, p_x, p_y) = (x, y, \frac{\sqrt{\text{const}_2}}{\sqrt{\text{const}_1}} p_x, \frac{\sqrt{\text{const}_2}}{\sqrt{\text{const}_1}} p_y)$ . Этот диффеоморфизм, очевидно, сохраняет топологическое строение.

Рассмотрим множество квадратично интегрируемых геодезических потоков, изоэнергетические поверхности которых невырождены в смысле определений [?].

Из того, что топологическое строение изоэнергетической поверхности не зависит от уровня энергии, и из результатов [?] следует, что топологическое строение геодезического потока полностью определяется меченой молекулой изоэнергетической поверхности этого потока: два интегрируемых геодезических потока топологически эквивалентны если и только если меченые молекулы изоэнергетических поверхностей (положительного уровня энергии) первого и второго геодезического потока одинаковы.

Под *топологическим описанием* семейства интегрируемых геодезических потоков мы будем понимать построение меченых молекул для невырожденного в смысле [?] подсемейства этого семейства. Этим самым мы как бы "забываем" о неботтовских потоках. В оправдание скажем, что при доказательстве теорем о меченых молекулах мы опишем все потоки, другое дело, что это описание не будет описанием в финитных терминах. Более того, если рассмотреть факторпространство всех квадратично интегрируемых потоков по топологической эквивалентности, то структура этого пространства будет достаточно сложной.

#### §9. Невырожденные геодезические потоки.

Напомним определение невырожденности изоэнергетических поверхностей из [?].

**Определение 4** *Изоэнергетическая поверхность*  $Q_{\text{const}}$  называется невырожденной



если

1. Ограничение интеграла  $F$  на эту поверхность является боттовской функцией.
2. Топологическое строение изоэнергетических поверхностей  $Q_{(const \pm \varepsilon)}$  при достаточно малых  $\varepsilon$  не отличается от топологического строения изоэнергетической поверхности  $Q_{const}$ .

Заметим, что для квадратично интегрируемых геодезических потоков условие 2 выполняется автоматически.

**ТЕОРЕМА 10** Ограничение на изоэнергетическую поверхность  $\{H = const > 0\}$  квадратичного интеграла геодезического потока метрики  $G_{(L,f,h)}$  на бутылке Клейна является боттовской функцией если и только если либо функции  $f$  и  $h$  являются функциями Морса, либо функция  $h$  постоянна, а функция  $f$  является функцией Морса. Ограничение на изоэнергетическую поверхность  $\{H = const > 0\}$  линейного интеграла геодезического потока метрики  $G_{(L,f)}$  на бутылке Клейна является боттовской функцией если и только если функция  $f$  является функцией Морса.

Эта теорема, фактически, является следствием теорем о боттовости из работы [?]. В [?] были проверены на боттовость квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе. Очевидно, что свойство геодезического потока быть боттовским сохраняется при конечных накрытиях.

Доказательство теоремы. Очевидно, что свойство геодезического потока быть боттовским не зависит от выбора изоэнергетической поверхности, рассмотрим изоэнергетическую поверхность  $\{H = 1\}$ . Обозначим через  $K(f)$  (соответственно,  $K(h)$ ) множество особых точек функции  $f$  (соответственно,  $h$ ). Докажем, что множество особых точек геодезического потока метрики  $G_{(L,h,f)}$  состоит из объединения множества  $\mathcal{O}_f$ , состоящего из точек вида  $(x \in K(f), y, 0, \pm\sqrt{f(x) + h(y)})$ , и множества  $\mathcal{O}_h = \{(x, y \in K(h), \pm\sqrt{f(x) + h(y)}, 0)\}$ . Действительно, точка  $A \in \{H = 1\}$  особая если и только если дифференциалы функций  $F$  и  $H$  как функций  $: M^4 \rightarrow R$  линейно зависимы в точке  $A$ . Дифференциал функции  $F$  равен

$$\frac{(p_x^2 + p_y^2)h(y)f'(x)}{(f(x) + h(y))^2} dx - \frac{(p_x^2 + p_y^2)f(x)h'(y)}{(f(x) + h(y))^2} dy + \frac{2p_y f(x)}{f(x) + h(y)} dp_y - \frac{2p_x h(y)}{f(x) + h(y)} dp_x.$$

Дифференциал функции  $H$  равен

$$-\frac{(p_x^2 + p_y^2)f'(x)}{(f(x) + h(y))^2} dx - \frac{(p_x^2 + p_y^2)h'(y)}{(f(x) + h(y))^2} dy + \frac{2p_y}{f(x) + h(y)} dp_x + \frac{2p_x}{f(x) + h(y)} dp_y.$$

Эти дифференциалы зависимы если и только если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -h(y)f'(x) & f(x)h'(y) & -p_x h(y) & p_y f(x) \\ f'(x) & h'(y) & p_x & p_y \end{pmatrix}$$

меньше двух. Исследуя миноры этой матрицы, получаем, что точка особая если и только если она лежит либо в множестве  $\mathcal{O}_f$ , либо в множестве  $\mathcal{O}_h$ . Действительно, предположим, что ранг матрицы меньше 2. Тогда все главные миноры равны 0. Но минор составленный из третьего и четвертого столбцов, равен  $-(f + h)p_x p_y$ . Используя положительность функций  $f$  и  $h$ , получаем, что  $p_x p_y = 0$ . Если предположить, что  $p_x = 0$ , то тогда  $p_y \neq 0$ . Минор, составленный из первого и четвертого столбцов, равен  $f'(x)p_y$ , следовательно,  $f'(x) = 0$ . Если предположить, что  $p_y = 0$ , то тогда  $p_x \neq 0$ . Рассматривая минор, составленный из второго и третьего столбца, получаем, что  $h'(y) = 0$ , откуда следует, что точка лежит в множестве  $\mathcal{O}_h$ . Аналогично, если  $p_y = 0$ , то точка лежит в множестве  $\mathcal{O}_f$ .

Связными компонентами множеств  $\mathcal{O}_f$  и  $\mathcal{O}_h$  являются окружности. Чтобы доказать теорему, необходимо показать, что эти окружности невырождены, то есть ограничение функции  $F$  на трансверсаль к ним является функцией Морса. Из-за симметричности ситуации это достаточно доказать только для критических окружностей, которые состоят из точек, лежащих в  $\mathcal{O}_f$ . Пусть  $\mathcal{O}_1$  такая окружность. Тогда поверхность  $\{x = const\}$  трансверсально пересекает орбиту, причем ограничение функции  $F$  на эту поверхность имеет вид  $\frac{f(0)p_x^2 - h(y)p_x^2}{f(0) + h(y)}$ . В качестве локальной гладкой системы координат на этой поверхности выберем функции  $p_x$  и  $p_y$ . В этой системе координат второй дифференциал функции  $F$  равен  $-2h(y)\frac{\partial F}{\partial p_x^2} + 2f(x)\frac{\partial F}{\partial p_y^2}$ , он, очевидно, невырожден. Теорема доказана.

## §10. Меченые молекулы квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

Удобно разделить квадратично интегрируемые геодезические потоки на бутылке Клейна на лиувилевы (функция  $h$  отлична от константы) и квазилинейные (функция  $h$  равна константе, которую в силу операции  $\delta$  можно считать нулевой). Сначала рассмотрим лиувилевы метрики.

Построим по каждой тройке  $(L, f, h)$ , где  $L$  — положительное число,  $f$  и  $h$  — положительные функции Морса на прямой, причем  $f$  периодична с периодом  $\frac{1}{2}$ , а  $h$  четна и периодична с периодом  $L$ , меченую молекулу  $M(L, f, h)$  следующим образом.

Рассмотрим действие  $\xi$  группы  $Z$  на прямой  $R$ , порожденное сдвигом  $x \rightarrow x + 1$ . Факторпространство  $R/\xi$  гомеоморфно окружности. Так как действие сохраняет функцию  $f$ , то функция  $f$  индуцирует функцию (обозначим через  $\tilde{f}$ ) на  $R/\xi$ . Так как функция  $f$  морсовская и положительна, то функция  $\tilde{f} : R/\xi \rightarrow R$  — морсовская положительная функция. Обозначим минимальное значение функции  $\tilde{f}$  через  $f_{\min}$ .

Рассмотрим существенный подграфик функции  $\tilde{f}$  — множество  $D_f = \{(x, y) : f_{\min} \leq y \leq f(x)\}$ . Введем на нем отношение эквивалентности  $\alpha$  следующим образом. Две точки,  $(x_1, y_1) \in D_f$  и  $(x_2, y_2) \in D_f$  будем считать эквивалентными если, во первых,  $y_1 = y_2$ , и, во вторых, для одной из двух дуг  $C$  окружности  $S^1$  с концами в точках  $x_1, x_2$  множество  $\{x \in C, y = f(x)\}$  целиком лежит в подграфике  $D_f$ . Классы эквивалентности

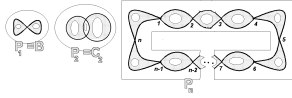


Рис. 7: Атомы  $P_n$ .

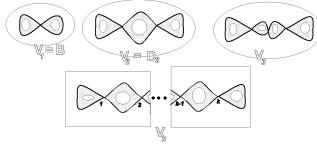


Рис. 8: Атомы  $V_k$ .

будем называть *горизонтальными сечениями*.

Факторпространство  $\Gamma = D_f/\alpha$  является деревом (графом без циклов). Вершинами этого дерева являются горизонтальные сечения, содержащие точки вида  $(x_0, f(x_0))$ , с условием  $f'(x_0) = 0$ . Введем на нем следующую дополнительную структуру.

- 1) Выделим вершину, соответствующую нижней дуге  $\{y = f_{\min}\}$  подграфика  $D_f$  и ориентируем ребра по направлению из выделенной вершины. Пусть степень выделенной вершины равна  $n$ . Выделенной вершине сопоставим атом  $P_n$ . Атомы  $P_n$  изображены на рис. 7.
- 2) Невыделенным вершинам степени 1 сопоставим атом  $A$ .
- 3) Невыделенным вершинам степени  $k > 1$  сопоставим атом  $V_{k-2}$ . Атомы  $V_k$  изображены на рис. 8.
- 4) Ребрам, входящим в невыделенную вершину степени 1, сопоставим метку  $r = 0$ , остальным ребрам сопоставим метку  $r = \infty$ .
- 5) Всем ребрам сопоставим метку  $\varepsilon = +1$ .

Полученный объект будем обозначать  $W_f$ . На рис. 9 изображены примеры  $W_f$  для разных функций  $f$ . Чтобы не загромождать рисунок, стрелки и  $\varepsilon$ -

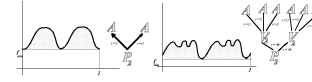


Рис. 9: Графики функций  $f$  и соответствующие  $W_f$ .

метки на ребрах частично опущены.

Ограничим функцию  $h$  на отрезок  $[0, \frac{L}{2}]$ . Пусть наименьшее значение функции  $h$  равно  $h_{\min}$ . Рассмотрим существенный подграфик  $D_h = \{(x, y) : h_{\min} \leq y \leq h(x)\}$  функции  $h$ . Введем на нем следующее отношение эквивалентности  $\beta$ . Точку  $(x_1, y_1)$  будем считать эквивалентной точке  $(x_2, y_2)$ , если  $y_1 = y_2$  и весь отрезок  $\{(x \in [x_1, x_2], y = y_1)\}$  лежит в  $D_h$ .

Факторпространство  $\Gamma = D_h/\beta$  является деревом. Снабдим его следующим оснащением.

- 1) Выделим вершину, соответствующую нижней дуге  $\{y = h_{\min}\}$ . Ориентируем граф  $\Gamma$  по направлению от выделенной вершины.
- 2) Всем невыделенным вершинам степени 1 сопоставим атом  $A$ .
- 3) Точки графа, соответствующие горизонтальным сечениям подграфика, проходящим через точки  $(0, h(0))$  и  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ , будем рассматривать как вершины (быть может, степени 2). Если точки  $(0, h(0))$  и  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$  эквивалентны (то есть лежат на одном сечении), а соответствующая им вершина графа имеет степень  $k$  и отлична от выделенной вершины, то сопоставим этой вершине атом  $V_{k-2}$ . Если точки  $(0, h(0))$  и  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$  эквивалентны, а соответствующая им вершина графа имеет степень  $k$  и является выделенной вершины, то сопоставим этой вершине атом  $V_{k-1}$ .

Если точки  $(0, \tilde{h}(0))$  и  $(\frac{L}{2}, \tilde{h}(\frac{L}{2}))$  не эквивалентны, двум вершинам графа, соответствующим проходящим через точки  $(0, \tilde{h}(0))$  и  $(\frac{L}{2}, \tilde{h}(\frac{L}{2}))$  сечениям, сопоставим атомы по следующему правилу. Если вершина не является выделенной вершиной, то сопоставим ей атом  $V_{k-2}$ . Если вершина является выделенной вершиной, то сопоставим ей атом  $V_{k-1}$ . Атомы  $V_k^*$  и  $V_k^{**}$  изображены на рис. 10.

- 4) Остальным невыделенным вершинам степени  $k > 1$  сопоставим атом  $V_{k-2}$ .
- 5) Ребрам, один из концов которых помечен атомом  $A$  и точками которых являются сечения, содержащие точки подграфа  $D_f$  с первой координатой 0 или  $\frac{L}{2}$ , сопоставим метку  $r = \frac{1}{2}$ . Остальным ребрам с концом в атоме  $A$ , сопоставим метки  $r = 0$ . Всем остальным ребрам сопоставим метки  $r = \infty$ . Всем ребрам сопоставим метки  $\varepsilon = +1$ .

Полученный объект будем обозначать  $U_h$ . Примеры  $U_h$  изображены на

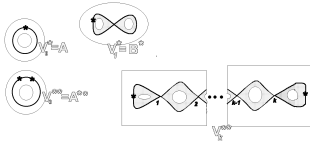


Рис. 10: Атомы  $V_k^*$  и  $V_k^{**}$ .

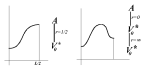


Рис. 11: График функции  $\tilde{h}$  и оснащенный граф  $U_h$ .

рис. 11.

Рассмотрим два экземпляра оснащенного графа  $U_h$  и один экземпляр оснащенного графа  $W_f$ . Соединим ребрами выделенные вершины оснащенных графов  $U_h$  с выделенной вершиной  $W_f$ . Ориентируем эти ребра как-нибудь, сопоставим им метки  $r = 0$  и  $\varepsilon = +1$ . Полученный оснащенный граф имеет 3 семьи.

Семье, состоящей из оснащенного графа  $W_f$  без окрестностей вершин степени 1, сопоставим метку  $n = 0$ . Семьям, состоящим из оснащенных графов  $U_h$  без окрестностей вершин степени 1, сопоставим метку  $n = -1$ .

**Определение 5** Полученную молекулу будем обозначать  $M(L, f, h)$ .

Примеры молекул  $M(L, f, h)$  изображены на рис. 12.

**ТЕОРЕМА 11** Меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{(L,f,h)}$ , где  $h \neq 0$ , есть  $M(L, f, h)$ .

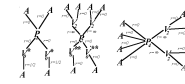


Рис. 12: Молекулы  $M(L, f, h)$ .

**§11. Меченые молекулы геодезических потоков квазилинейных метрик на бутылке Клейна.**

Пусть  $f : S_1 \rightarrow R$  — положительная функция Морса,  $L > 0$ . Рассмотрим оснащенный граф  $W_f$  и две точки, каждой из которых сопоставлен атом Топалова (см. [?])  $K^2$ . Соединим ребром выделенную вершину графа  $W_f$  с каждой из них. Как-нибудь ориентируем эти ребра. Сопоставим им метку Топалова  $(0 : 1)$ , ([?]). Единственной семье полученного оснащенного графа сопоставим метку  $n = 0$ .

**Определение 6** Полученную молекулу назовем  $M(L, f)$ -молекулой.

Пример молекулы  $M(L, f)$  молекулы изображен на рис. 13б.

**ТЕОРЕМА 12** Меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{(L,f,0)}$  есть  $M(L, f, 0)$ .

**§12. Топологическое описание линейно интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.**

Пусть  $f : R \rightarrow R$  — четная положительная функция Морса с периодом 1. Рассмотрим два экземпляра  $U_f$  и соединим их выделенные вершины отрезком. Ориентируем этот отрезок как-нибудь, сопоставим ему  $r$ -метку  $r = \infty$  и  $\varepsilon$ -метку  $\varepsilon = +1$ . Если разрежем граф молекулы по ребрам,  $r$ -метка которых отлична от бесконечности, то получим ровно одну семью, не содержащую атомов  $A$ . Сопоставим ей  $n$ -метку  $n = -2$ . Полученную молекулу будем обозначать  $M(L, f)$ . Пример изображен на рис. 13а.

**ТЕОРЕМА.** Меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{(L,f)}$  есть  $M(L, f)$ .

**§13. Число Эйлера и его связь с  $n$ -метками.**

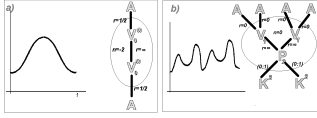


Рис. 13: а) Пример молекулы линейно интегрируемого геодезического потока на бутылке Клейна, б) Пример молекулы геодезического потока квазилинейной метрики.

Для вычисления  $n$ -меток нам понадобится некоторая информация о поведении  $n$ -меток при накрытиях.

Пусть  $M$  - замкнутое ориентированное многообразие Зейферта с ориентированными слоями. Выберем в  $M$  непустой набор  $O_1, O_2, \dots, O_s$  слоев, включающий все особые слои. Обозначим через  $N_i$  непересекающиеся послойные торические окрестности слоев  $O_i, 1 \leq i \leq s$ . Тогда многообразие  $M_0 = M - \bigcap_{i=1}^s \text{Int } N_i$  имеет вид  $M_0 = F \times S^1$ , где поверхность  $F_0$  получается из поверхности  $F$  удалением  $s$  открытых дисков. На каждом торе  $\partial N_i \subset F_0 \times S^1$  выберем систему координат, взяв в качестве меридиана  $m_i$  подходящую компоненту края поверхности  $F_0 \times \{*\}$ , в качестве параллели  $l_i$  - слой расслоения. Меридианы и параллели ориентируем так, чтобы вместе с внутренними нормальными к торам  $\partial N_i$  они давали выбранную ориентацию многообразия  $M$ . Тогда *ненормализованные инварианты* Зейферта  $\alpha_i, \beta_i, 1 \leq i \leq s$  многообразия  $M$  определяются условием, что для каждого  $i$  кривая  $m_i^{\alpha_i} l_i^{\beta_i}$  должна служить меридианом полнотория  $N_i$ . Разумеется, для любого  $i$  числа  $\alpha_i, \beta_i$  должны быть взаимно простыми.

**Определение 2** Число  $e(M) = -\sum_i \beta_i / \alpha_i$  называется *неприведенным числом Эйлера* многообразия  $M$ . Число  $\bar{e}(M) = \sum_i (\beta_i - \bar{\beta}_i) / \alpha_i$ , где  $0 \leq \bar{\beta}_i < \alpha_i$  и  $\bar{\beta}_i = \beta_i \bmod \alpha_i$  называется *приведенным числом Эйлера*.

Неприведенное число Эйлера обладает следующими свойствами, см. [?]:

1. Оно корректно определено, то есть не зависит от представления многообразия  $M_0$  в виде  $F_0 \times S^1$ ;

2.  $e(M) = -e(-M)$ , где  $-M$  обозначает многообразие  $M$  с противоположной ориентацией;

3. Если  $M$  не имеет особых слоев, то число  $e(M) = \bar{e}(M)$  совпадает с обычным числом Эйлера расслоения со слоем окружность.

Еще одно важное для нас свойство неприведенного числа Эйлера мы сформулируем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 13** ([?]) Пусть  $M, M'$  - ориентированные многообразия Зейферта с базами  $F, F'$ , и пусть  $f: M \rightarrow M'$  - сохраняющее ориентацию послойное отображение. Тогда  $e(M) = (m/n)e(M')$ , где  $n$  - степень индуцированного отображения на особом слое и  $m$  - степень индуцированного отображения баз.

Напомним, что зейфертова реализация семьи  $\xi$  молекулы представляет собой ориентированное многообразие Зейферта  $M(\xi)$ , в каждой компоненте края  $T_j$  которого указана простая замкнутая кривая  $\gamma_j$  - слой примыкающей семьи или меридиан полнотория, отвечающего атому  $A$ . Заклеим компоненты края многообразия  $M(\xi)$  полноториями так, чтобы их меридианы попали в кривые  $\gamma_j$ . Полученное многообразие Зейферта обозначим через  $\hat{M}(\xi)$ . Справедливость следующей теоремы легко следует из определения  $n$ -метки  $n(\xi)$  и определения приведенного числа Эйлера.

**ТЕОРЕМА 14**  $n(\xi) = \bar{e}(\hat{M}(\xi))$ .

#### §14. Доказательство теорем топологической классификации геодезических потоков на бутылке Клейна.

Пусть на компактной ориентируемой поверхности с краем  $P^2$  задана функция Морса  $g$ , причем все особые точки этой функции расположены внутри поверхности и значения функции на каждой связной компоненте края постоянно. Рассмотрим многообразие  $P^2 \times S^1 \times I$ , где через  $S^1$  обозначена окружность, а через  $I$  - отрезок  $[-1, 1]$ . Выберем какую-нибудь ориентирующую 2-форму  $\sigma$  на поверхности. На многообразии  $P^2 \times S^1 \times I$  рассмотрим 2-форму  $\omega = \sigma + d\phi \wedge dx$ , где через  $\phi$  обозначен угол на окружности, а через  $x$  - координата на отрезке  $I$ . Легко проверяется, что форма  $\omega$  замкнутая, так что пара  $(P^2 \times S^1 \times I, \omega)$  является симплектическим многообразием. Пусть  $p, q$  - координаты на поверхности  $P^2$ ; в качестве координат на многообразии  $M^4$  удобно взять координаты  $(p, q, \phi, x)$ .

Рассмотрим гамильтонову систему на симплектическом многообразии  $M^4$ , порожденную гамильтонианом  $\hat{H}(p, q, \phi, x) = x$ . Эта гамильтонова система интегрируема, причем в качестве интеграла можно взять функцию  $F(p, q, \phi, x) = g(p, q)$ . Рассмотрим изоэнергетическую поверхность  $Q_{(P^2, g)} = \{\hat{H} = \text{const} = 0\}$ . Ориентируем ее 3-формой  $d\rho \wedge dq \wedge d\phi$ . Изоэнергетическая поверхность  $Q_{(P^2, g)}$  неврождена. Действительно,

она, очевидно, топологически устойчива и, так как функция  $g$  — функция Морса, боттовская.

Топологическое строение изоэнергетической поверхности  $Q_{(F^2, g)} = \{\dot{H} = 0\}$  легко представить. Слоями Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q_{(F^2, g)}$  являются прямые произведения связных компонент линий уровня функции  $g$  на окружность  $S^1$ . Критическими окружностями являются произведения особых точек функции  $g$  на окружность  $S^1$ . Векторное поле  $sgrad(H)$  в координатах записывается как  $(0, 0, 1, 0)$  и ориентирует критические окружности в сторону возрастания угла  $\phi$ .

**Определение 7** Пусть на многообразии с краем  $M^4$  задана интегрируемая гамильтонова система, причем край состоит из торов Лиувилля этой системы. Будем говорить, что изоэнергетическая поверхность  $Q$  этой системы имеет топологический тип  $(F^2, g)$ , если она топологически эквивалентна поверхности  $Q_{(F^2, g)}$ .

Приступим к доказательству теорем топологической классификации квадратично и линейно интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

Напомним, что метрика с квадратично интегрируемым геодезическим потоком на бутылке Клейна переводится диффеоморфизмом в метрику  $G_{(L, f, h)}$ . Если функция  $h \neq \text{const}$ , то такая метрика называется лиувиллевой. Если  $h \equiv \text{const}$ , то такая метрика называется квазилинейной, причем применением операции  $\delta$  можно добиться, чтобы  $\text{const} = 0$ . Рассмотрим сначала лиувиллеву метрику  $G_{(L, f, h)}$ .

Рассмотрим плоскость  $R^2$  и действие группы  $Z^2$ , порожденное сдвигами вдоль векторов  $(1, 0)$  и  $(0, L)$ . Скользящая симметрия  $(x, y) \rightarrow (x + \frac{1}{2}, -y)$  порождает инволюцию (обозначим ее  $\sigma$ ) тора  $R^2/Z^2$ . Так как инволюция сохраняет метрику, то она порождает инволюцию изоэнергетической поверхности  $Q$ . Обозначим инволюцию изоэнергетической поверхности  $Q$  через  $\tilde{\sigma}$ . В координатах  $x, y, p_x, p_y$  инволюция  $\tilde{\sigma}$  записывается следующим образом:  $\tilde{\sigma}(x, y, p_x, p_y) = (x + \frac{1}{2}, -y, p_x, -p_y)$ . Так как инволюция  $\tilde{\sigma}$  сохраняет интеграл  $F$ , то она переводит торы Лиувилля в торы Лиувилля. Можно проверить, что инволюция  $\tilde{\sigma}$  переводит критические окружности в критические окружности с сохранением ориентации.

План доказательства теоремы будет таков. Сначала мы опишем (используя введенное понятие топологического строения типа  $(F^2, g)$ ) топологическое строение геодезического потока на торе. Затем изучим поведение слоев Лиувилля при инволюции  $\tilde{\sigma}$ , и, тем самым, опишем топологическое строение геодезического потока на бутылке Клейна. После этого переведем описание на язык меченых молекул.

Рассмотрим прямую  $R$  и функцию  $f$  на ней. Рассмотрим действие группы  $Z$ , порожденное сдвигами  $x \rightarrow x + 1$ . Факторпространство прямой по этому действию отождествим с окружностью  $S_1$ . Так как функция  $f$  сохраняется при сдвигах на единицу, то функция  $f$  индуцирует функцию (не опасаясь путаницы, будем обозначать эту функцию тоже через  $f$ ) на окружности  $S_1 = R/Z$ . Рассмотрим функцию  $\mathbf{f}$  на цилиндре  $S_1 \times R$ , определяемую

формулой  $\mathbf{f}(x, p_x) = f(x) - p_x^2$ . Рассмотрим часть цилиндра  $S_1 \times R$ , определяемую неравенством  $\mathbf{f} \geq 0$ . Обозначим ее  $\mathcal{W}_f$ . Это ориентируемое многообразие с краем, функция  $\mathbf{f}$  постоянна на связных компонентах края.

Рассмотрим геодезический поток метрики  $(f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$  на кокасательном расслоении к тору  $R^2/Z^2$ . Гамильтонианом этого геодезического потока является функция  $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{f(x) + h(y)}$ . В качестве интеграла выберем функцию  $F = \frac{f(x)p_x^2 - h(y)p_y^2}{f(x) + h(y)}$ .

Рассмотрим гиперповерхность (с краем)  $\{H = 1, F \leq 0\}$ .

**ЛЕММА 5** Гиперповерхность  $\{H = 1, F \leq 0\}$  состоит из состоит из двух связных компонент, каждая из которых имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ .

Доказательство. Слоями Лиувилля, по определению, являются связные компоненты решений системы 
$$\begin{cases} \frac{p_x^2 + p_y^2}{f(x) + h(y)} = 1 \\ \frac{h(y)p_y^2 - f(x)p_x^2}{f(x) + h(y)} = F. \end{cases}$$
 Эта система, очевидно, эквивалентна следующей: 
$$\begin{cases} F = f(x) - p_x^2 \\ F = p_y^2 - h(y) \end{cases}$$
. Заметим, что первое уравнение второй системы зависит только от переменных  $(x, p_x)$ , второе — только от  $(y, p_y)$ . Это означает, что слои Лиувилля являются прямым произведением слоев уровня функции  $f(x) - p_x^2$  на слои уровня функции  $p_y^2 - h(y)$ . Для завершения доказательства достаточно заметить, что слой уровня функции  $p_y^2 - h(y)$  (при  $F \leq 0$ ) состоит из двух окружностей. Первая окружность определяется неравенством  $p_y > 0$ , вторая —  $p_y < 0$ . Доказано.

Совершенно аналогично рассмотрим функцию  $\mathbf{h} = p_y^2 - h(y)$  на части  $\mathcal{W}_h$  цилиндра  $R/Z \times R$  (группа  $Z$  действует сдвигами на вектор  $(0, L)$ ), определяемой неравенством  $\mathbf{h} \leq 0$ . Множество  $\{H = 1, F \geq 0\}$  состоит из двух связных кусков, каждый из этих кусков имеет тип  $(\mathcal{W}_h, \mathbf{h})$ .

Заметим, что прямое произведение окружности на двумерную поверхность можно рассматривать как многообразие со структурой Зейферта. Из [?] следует, что невырожденная изоэнергетическая поверхность интегрируемой гамильтоновой системы канонически (с точностью до изотопии разбивающих поверхностей) разбивается на куски со структурой Зейферта. Зейфертовы структура на  $\{H = 1, F \geq 0\}$  как на прямом произведении и как на невырожденной изоэнергетической поверхности интегрируемой гамильтоновой системы совпадают. Для доказательства достаточно проверить, что критические окружности являются слоями прямого произведения, а это очевидно.

Инволюция  $\tilde{\sigma}$  действует на связных компонентах поверхности  $\{H = 1, F \leq 0\}$  следующим образом. Одна связная компонента определяется неравенством  $p_y > 0$ , вторая — неравенством  $p_y < 0$ . Так как инволюция  $\tilde{\sigma}$  меняет знак  $p_y$ , то она переставляет связные компоненты поверхности  $\{H = 1, F \leq 0\}$  местами. Так как инволюция сохраняет топологическое строение, то факторпространство по этой инволюции имеет топологическую структуру  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ .

Посмотрим, как инволюция действует на связных компонентах поверхности  $\{H = 1, F \geq 0\}$ . Так как на одной связной компоненте  $p_x$  положителен, а

на другой — отрицателен, а инволюция не меняет знак функции  $p_x$ , то инволюция переводит каждую связную компоненту в себя. Отождествив связную компоненту множества  $\{H = 1, F \geq 0\}$  с прямым произведением поверхности  $\mathcal{W}_f$  на окружность  $S_1$ . Тогда действие инволюции коммутирует с естественными проекциями прямого произведения на  $\mathcal{W}_f$  и на  $S_1$ . Действие инволюции на поверхности  $\mathcal{W}_f$  определяется формулой  $\tilde{\sigma}(y, p_y) = (-y, -p_y)$ . Действие инволюции на окружности  $S_1$  есть в точности поворот на половину длины окружности.

Заметим, что неподвижными точками инволюции  $(y, p_y) \rightarrow (-y, -p_y)$  являются только точки  $(0, 0)$  и  $(0, \frac{L}{2})$ . Временно выбросим эти точки вместе с малыми шаровыми окрестностями. Шаровые окрестности можно выбрать так, чтобы инволюция была корректно определена на их дополнении. Оставшуюся часть будем обозначать  $\hat{\mathcal{W}}_f$ . Так как на  $\hat{\mathcal{W}}_f$  инволюция действует без неподвижных точек, то факторпространство по этой инволюции есть прямое произведение факторпространства  $\hat{\mathcal{W}}_f$  по "центральной симметрии"  $(y, p_y) \rightarrow (-y, -p_y)$ . После факторизации окрестностей слоев  $(0, 0) \times S_1$  и  $(0, L) \times S_2$  по инволюции получаем стандартную окрестность особого слоя типа  $(2, 1)$  многообразия Зейферта.

Итак, мы описали "куски"  $\{H = 1, F \leq 0\}$  и  $\{H = 1, F \geq 0\}$  изоэнергетической поверхности  $Q = \{H = 1\}$  и действие инволюции на них. Приступим к построению меченой молекулы. Графом молекулы является пространство разбиения изоэнергетической поверхности  $Q$  на торы Лиувилля. (Напомним, что пространством разбиения называется топологическое пространство, точками которого являются слои разбиения.) Отождествим пространство разбиения с графом молекулы  $M(L, f, h)$ . Пусть сначала значение функции  $F$  на слое Лиувилля  $T$  не меньше  $f_{\min}$ . Напомним, что множество  $\{H = 1, F \geq 0\}$  отождествлено с частью прямого произведения  $S_1 \times R \times S^1$ . Проекцию прямого произведения на первую компоненту обозначим через  $\pi_1$ .

Рассмотрим образ  $\pi_1(T)$  слоя Лиувилля  $T$  на окружности  $S_1$ . Из связности слоя  $T$  следует, что образ  $\pi_1(T)$  связан. Пусть значение интеграла  $F$  на слое Лиувилля  $T$  равно  $F_0$ . Тогда образ  $\pi_1(T)$  совпадает с проекцией на  $S_1$  соответствующей компоненты связности решений уравнения  $\mathbf{f}(x, p_x) = F_0$ . Последнее уравнение переписывается как  $p_x^2 = F_0 + f(x)$ . Очевидно, что проекция на "ось"  $p_x = 0$  компоненты связности решений уравнения  $\mathbf{f} = F_0 + p_x^2$  состоит из дуги, причем функция  $f$  больше или равна  $F_0$  во внутренних точках дуги и принимает значение  $F_0$  на концах дуги. Около концов этой дуги разность  $f(x) - F_0$  меняет знак.

Следовательно, существует и единственно горизонтальное сечение существенного подграфика функции  $f$ , лежащее над дугой (т.е., состоящее из точек вида  $(x, const)$ , где  $x$  лежит на дуге. Сопоставим рассматриваемому слою Лиувилля это сечение. Напомним, что, по построению, горизонтальные сечения являются точками графа  $\Gamma_f$ . Легко видеть, что построенное отображение биективно.

Рассмотрим множество  $\{H = 1, F \leq 0\}$ . Выше мы отождествили это множество с двумя экземплярами подмножеств множества  $S_L \times R \times S^1/\tilde{\sigma}$ . Рассмотрим пространство разбиения на торы Лиувилля и отождествим его с двумя экземплярами графа  $\Gamma_h$ .

Пусть значение функции  $F$  на слое Лиувилля  $T$  меньше или равно  $-h_{\min}$ . Сопоставим этому слою точку графа  $\Gamma_h$  по следующему правилу. Так как инволюция  $\tilde{\sigma}$  коммутирует с проекциями прямого произведения, то проекция прямого произведения на первую компоненту порождает отображение на факторпространство первой компоненты по инволюции  $\tilde{\sigma}$ . Обозначим это отображение через  $\pi_1$ . Факторпространством окружности  $S_L$  по инволюции  $\tilde{\sigma}$  является отрезок. Так как координата  $y$  на этом отрезке изменяется, с точностью до инволюции, в промежутке от 0 до  $\frac{L}{2}$ , то естественно отождествить этот отрезок с отрезком  $[0, \frac{L}{2}]$ . Рассмотрим образ  $\pi_1(T)$  слоя  $T$ . Существует и единственно сечение существенного подграфика функции  $h$ , лежащее над полученным отрезком. Сопоставим слою Лиувилля это сечение.

Рассмотрим теперь множество  $\{H = 1, -h_{\min} < F < f_{\min}\}$ . Торы Лиувилля, значение функции  $F$  от которых лежит в интервале  $(-h_{\min}, f_{\min})$ , организуются в два однопараметрических семейства. Первое состоит из торов вида  $\{(x, y, \sqrt{f(x) - F}, \pm\sqrt{h(y) + F})\}$ , второе — из торов вида  $\{(x, y, \sqrt{f(x) - F}, \pm\sqrt{h(y) - F})\}$ . Первое семейство торов соединяет одну связную компоненту множества  $\{H = 1, F \leq 0\}$  с множеством  $\{H = 1, F \geq 0\}$ . Второе семейство торов соединяет вторую связную компоненту  $\{H = 1, F \leq 0\}$  с  $\{H = 1, F \geq 0\}$ . Этим семействам торов, очевидно, соответствуют соединяющие выделенные вершины графов  $\Gamma_h$  и  $\Gamma_f$  ребра.

Докажем, что оснащение молекулы  $M(L, f, h)$  атомами правильное. Напомним, что атом, соответствующий критическому слою, строится следующим образом. В окрестности критического слоя существует такая единственная (с точностью до изотопии) структура расслоения Зейферта, что критические окружности этого слоя являются слоями Зейферта. Изотопией можно добиться, чтобы слои Лиувилля состояли из целых слоев Зейферта. Тогда поверхностью атома является база расслоения Зейферта, а критическим графом, вложенным в атом, является проекция критического слоя.

Пусть сначала значение функции  $F$  на критическом слое не меньше  $f_{\min}$ . Тогда окрестность критического слоя топологически эквивалентна прямому произведению окрестности соответствующей критической линии уровня функции  $\mathbf{f}$  на поверхности  $\mathcal{W}_f$ . Следовательно, атом, соответствующий поверхности есть пара (критический слой функции  $\mathbf{f}$ , его регулярная окрестность в цилиндре  $S^1 \times R$ ). Так как  $\mathbf{f} = f(x) - p_x^2$ , то любая образующая вида  $\{x = const\}$  пересекает граф не более чем в двух точках. Легко видеть, что такому свойству среди вложенных в цилиндр графов с вершинами степени 4, удовлетворяют только графы, регулярная окрестность которых является (для подходящего  $n$ ) либо атомом  $V_n$ , либо атомом  $P_n$ . Причем если нет образующих, которые не пересекают граф, то это — атом  $P_n$ , а если есть, то это — атом  $V_n$ .

Пусть теперь значение функции  $F$  на критическом слое не больше  $-h_{\min}$ . Базой расслоения Зейферта служит диск, причем прямые вида  $\{y = const\}$  пересекают критический граф не более чем в двух точках. Следовательно, в вершинах графа молекулы степени 2 и больше стоят либо атомы  $V_n$ , либо атомы, получаемые из атомов  $V_n$  добавлением звездочек (вершин степени

2).

Пусть сечение существенного подграфика, соответствующее критическому слою, содержит точку  $(0, h(0))$ . Тогда точка ветвления лежит на графе атома  $V_n$ . Выше мы получили, что точкам ветвления соответствуют особые слои типа (2,1) расслоения Зейферта. Следовательно, на критическом графе атома находится звездочка. Аналогично, слой содержит звездочку, если на соответствующем сечении лежит точка  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ . Соответственно, если сечение содержит одновременно и точку  $(0, h(0))$ , и точку  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ , то соответствующий атом является (для подходящего  $n$ ) атомом  $V_n^{**}$ .

Других звездочек на критических графах атомов нет, действительно, особыми слоями расслоения Зейферта являются только слои, проектирующиеся в точки  $(0, h(0))$  и  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ .

Покажем, что метки на молекуле  $M(L, f, h)$  вычислены правильно. Как и прежде, будем отождествлять  $\{H = 1, F \geq 0\}$  с прямым произведением  $\mathcal{W}_f$  на окружность  $S^1$ . В качестве сечения расслоения Зейферта выберем прообраз фиксированной точки на окружности  $S^1$  при естественной проекции. На каждом торе Лиувилля выберем базис, параллелью которого является слой Зейферта, а меридианом — пересечение с выбранным сечением. Этот базис будет допустимым (по определению), матрицы перехода, которые оснащают входящие в вершины степени 1 ребра, равны  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . На остальных

ребрах оснащающие матрицы равны  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Следовательно, на ребрах графа  $\Gamma_f$ , соединяющих невыделенную вершину степени 1 с произвольной вершиной, стоит  $g$ -метка  $r = 0$ , а на остальных ребрах стоит  $g$ -метка  $r = \infty$ , а все  $\varepsilon$ -метки равны  $\varepsilon = +1$ .

Найдем  $g$ - и  $\varepsilon$ -метки на ребрах графа  $\Gamma_h$ . Пусть сначала ребро графа соединяет две вершины, каждая из которых имеет степень, большую единицы. Параллелью допустимого базиса, по определению, является слой расслоения Зейферта, порожденного соответствующими критическими окружностями. Так как многообразие Зейферта  $\{H = 1, F \geq 0\}$  допускает глобальное слоение Зейферта, и так как критические окружности гамилтоновой системы являются слоями расслоения Зейферта, то  $g$ -метки на таких ребрах равны  $\infty$ , а  $\varepsilon$ -метки равны 1.

Рассмотрим ребро, входящее в вершину степени 1 и рассмотрим сечение существенного подграфика, соответствующее этой вершине. Это сечение состоит из одной точки. Если эта точка отлична от точек  $(0, h(0))$  и  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ , то тогда слой Зейферта пересекает меридиан в одной точке, поэтому  $r = 0$  и  $\varepsilon = 1$ . Если эта точка совпадает либо с точкой  $(0, h(0))$ , либо с точкой  $(\frac{L}{2}, h(\frac{L}{2}))$ , то соответствующая критическая окружность является слоем типа (2,1) расслоения Зейферта. Тогда слой Зейферта пересекает меридиан в двух точках, откуда  $r = \frac{1}{2}$  и  $\varepsilon = 1$ .

Рассмотрим ребро, соединяющее графы  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_h$ . Для определенности рассмотрим ребро, торы Лиувилля этого ребра в координатах записываются  $\{(x, y, \sqrt{f(x) - F}, \pm\sqrt{h(y) + F})\}$ . В качестве параллелей допустимого базиса,

пришедшего с  $\{H = 1, F \geq 0\}$ , можно взять окружности  $\{x = const\}$ . В качестве параллелей допустимого базиса, пришедшего с  $\{H = 1, F \leq 0\}$ , можно взять окружности  $\{y = const\}$ . Окружность вида  $\{x = const\}$  пересекает окружность вида  $\{y = const\}$  ровно в одной точке. Следовательно,  $g$ -метка на этих ребрах равна 0.

Разобьем молекулу на семьи и найдем  $n$ -метку каждой семьи. Множество ребер с  $g$ -метками, отличными от  $\infty$ , состоит из всех ребер, входящих в вершины степени 1, и из ребер, соединяющих граф  $\Gamma_f$  с графами  $\Gamma_h$ . Если разрезать граф молекулы по этим ребрам, то возникают три связные компоненты, не содержащие вершин с атомом  $A$ . Рассмотрим сначала семью, состоящую из графа  $\Gamma_f$  с отрезанными невыделенными вершинами степени 1. Рассмотрим соответствующую часть  $D_f$  гиперповерхности  $\{H = 1\}$ . Как было показано выше,  $D_f$  представляется в виде прямого произведения поверхности  $\mathcal{W}_f$  без малых шаровых окрестностей точек индекса (1,1) функции  $f$ . Оснащение граничных торов циклами изотопно (на каждом торе) оснащению, порожденному прообразом произвольной точки окружности при естественной проекции  $\pi : S^1 \times R \rightarrow S^1$ . Следовательно,  $n$ -метка этой семьи равна 0.

Найдем  $n$ -метку семьи, состоящей из графа  $\Gamma_h$  с отрезанными невыделенными вершинами степени 1. Рассмотрим соответствующую часть  $D_h$  гиперповерхности  $\{H = 1\}$ . Удалим из  $\mathcal{W}_h$  окрестности точек индекса (1,1) функции  $h$ . Оставшуюся часть обозначим  $\hat{\mathcal{W}}_h$ . Как было показано выше,  $\hat{\mathcal{W}}_h \times S^1$  двулистно накрывает  $D_h$ . Легко проверяется, что оснащение граничных торов  $D_h$  поднимается при этом на покрытие до оснащения граничных торов  $\hat{\mathcal{W}}_h \times S^1$ , порожденного прообразом произвольной точки окружности при естественной проекции. Действительно, оснащение граничных торов строится по топологическому строению, а инволюция, двойственная к описанному двулистному накрытию сохраняет топологическое строение.

Так как  $n$ -метка пространства  $\hat{\mathcal{W}}_h \times S^1$  равна 0, и на  $\hat{\mathcal{W}}_h \times S^1$  нет особых слоев Зейферта, то класс Эйлера  $\xi$  многообразия Зейферта  $\hat{\mathcal{W}}_h \times S^1$  равен 0. По теореме о поведении класса Эйлера при накрытиях, получаем, что класс Эйлера многообразия Зейферта  $D_h$  равен 0. Так как многообразие Зейферта  $D_h$  содержит ровно 2 критические окружности, причем обе имеют тип (2,1), то приведенный класс Эйлера равен  $\hat{\xi} = 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ . Из теоремы о связи класса Эйлера и  $n$ -метки вытекает, что метка  $n$  равна  $-1$ .

Итак, молекула геодезического потока метрики  $G_{(L,f,h)}$  на бутылке Клейна совпадет с молекулой  $M(L, f, h)$ . Теорема доказана.

Доказательство теоремы топологической классификации геодезических потоков метрик  $G_{(L,f,0)}$ .

В качестве интеграла геодезического потока возьмем функцию  $F(x, y, p_x, p_y) = p_y^2$ . Рассуждая аналогично доказательству теоремы топологической классификации геодезического потока лиувиллевых метрик, получаем, что многообразие с краем  $\{H = 1, F \geq 0\}$  имеет топологический тип  $\mathcal{W}_f$ . Множество  $\{H = 1, F \leq 0\}$  гомеоморфно двум бутылкам Клейна. Действительно, в касательном расслоении к тору  $R^2/Z^2$  множество  $\{H = 1, F \leq 0\}$  описывается системой

$$\begin{cases} \frac{p_x^2 + p_y^2}{f(x)} = 1. \\ p_y^2 \leq 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $p_y^2 = 0$  и решение состоит из двух связных компонент:  $\{(x, y, \sqrt{f(x)}, 0)\}$  и  $\{(x, y, -\sqrt{f(x)}, 0)\}$ . Каждая из этих компонент гомеоморфна тору.

Так как инволюция  $\tilde{\sigma}$  задается формулой  $\tilde{\sigma}(x, y, p_x, p_y) = (x + \frac{1}{2}, -y, p_x, -p_y)$ , то факторпространство торов  $\{(x, y, \sqrt{f(x)}, 0)\}$ ,  $\{(x, y, -\sqrt{f(x)}, 0)\}$  по этой инволюции гомеоморфно двум бутылкам Клейна.

Топологическое строение интегрируемых гамильтоновых систем, некоторые слои Лиувилля которых гомеоморфны бутылке Клейна, было изучено в статье [?]. Из результатов этой работы следует, что к каждой такой бутылке Клейна примыкает однопараметрическое семейство торов Лиувилля. На этих торах канонически строится базис (с точности до изотопии и смены направления сразу на обоих циклах базиса) следующим образом. На окрестности бутылки Клейна единственным (с точностью до изотопии и смены ориентации) вводится структура многообразия Зейферта с двумя особыми слоями типа (2,1). Если выбросить окрестности этих слоев и оснастить вновь полученные граничные торы меридианами полноторий, то существует единственное (с точностью до послышной изотопии) сечение расслоения Зейферта, пересекающее эти граничные торы по оснащающим циклам.

Параллельно канонического базиса на торах Лиувилля является слой расслоения Зейферта, меридианом — пересечения выбранного сечения с торами Лиувилля.

Как было показано выше, в нашем случае слое на окружности вида  $\{y = const\}$  является сечением Зейферта типа (2,1). Допустимым сечением является сечение  $\{x = const\}$ . Следовательно, оснащение граничных торов многообразия Зейферта с краем  $\{H = 1, F \geq 0\}$  такое же, какое было в случае геодезических потоков Лиувиллевой метрики. Поэтому  $n$ -метка на графе  $\Gamma_f$  совпадает с  $n$ -меткой на графе  $\Gamma_f$  для Лиувиллевых метрик и равна 0, а на соединяющих соответствующие бутылкам Клейна вершины ребрах стоит метка Топалова (0 : 1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы топологической классификации для линейно интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна аналогично предыдущим доказательствам. Возведем линейный интеграл в квадрат. Множество  $\{H = 1, F = 0\}$  состоит из одного тора. Этот тор разделяет изоэнергетическую поверхность  $\{H = 1\}$  на два куска, каждый из них имеет топологический тип факторпространства  $W_f \times S_1$  по инволюции  $\tilde{\sigma}$ . Так как параллели, пришедшие с обоих кусков на разделяющий тор, изотопны, то топологическое строение порождает глобальную Зейфертову структуру на  $\{H = 1\}$ . Следовательно,  $g$ -метка на ребре, соединяющем два экземпляра графа  $\Gamma_h$ , равна  $\infty$ . В каждом куске лежат ровно 2 особых слоя, каждый имеет тип (2,1). Следовательно, во всем многообразии лежит 4 особых слоя и по теореме о поведении класса Эйлера при накрытиях  $n$ -метка равна -2.

### ГЛАВА 3. СЕМЕЙСТВО ПРИМЕРОВ 4-МЕТРИК НА БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА.

#### §1. Основные определения.

Пусть  $M^2$  — риманова поверхность.

Функция  $F : T^*M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется *однородным полиномом по импульсам*, если в окрестности каждой точки в локальных координатах  $x, y, p_x, p_y$ , где  $x, y$  — координаты на поверхности, а  $p_x$  и  $p_y$  — канонически сопряженные им импульсы, функция  $F$  представляется в виде

$$F(x, y, p_x, p_y) = \sum_{i+j=k} A_{ij}(x, y) p_x^i p_y^j,$$

где коэффициенты  $A_{ij}(x, y)$  есть гладкие функции двух переменных. При этом число  $k$  называется степенью полинома. Ясно, что это определение не зависит от выбора системы локальных координат.

Геодезический поток называется *полиномиально степени  $k$  интегрируемым*, если некоторый однородный полином степени  $k$  по импульсам является интегралом, и не существует полиномиального по импульсам интеграла меньшей степени.

Полиномиально степени 1 интегрируемые геодезические потоки называются также линейно интегрируемыми, полиномиально степени 2 интегрируемые геодезические потоки называются также квадратично интегрируемыми.

Эта глава диссертации посвящена построению и топологическому описанию семейства полиномиально степени 4 интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна.

Построение описано в первом параграфе, во втором предьявляется полиномиальный интеграл четвертой степени и доказывается отсутствие линейных и квадратичных интегралов. Отсутствие полиномиального интеграла третьей степени доказано в третьем параграфе. В четвертом строятся меченые молекулы таких геодезических потоков, и, тем самым, описывается их топологическое строение.

#### §2. Построение.

Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные взаимно простые числа,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая положительная отличная от константы функция с периодом 1. Рассмотрим плоскость  $\mathbb{R}^2$  со стандартными координатами  $x, y$ , метрику  $ds^2 = (f(x) + f(x + \frac{b}{2}))(dx^2 + dy^2)$  на ней и пару векторов  $\bar{a} = (a, -a)$ ,  $\bar{b} = (b, b)$ . Легко поверяется, что метрика  $ds^2$  сохраняется как при сдвигах на вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , так и при скользящей симметрии  $(x, y) \rightarrow (y + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2})$ . Рассмотрим действие  $\alpha$  группы  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ , порожденное сдвигами на вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию  $\alpha$  обозначим  $T_{ab}$ . Очевидно, что  $T_{ab}$  гомеоморфен двумерному тору. Так как действие  $\alpha$  сохраняет метрику  $ds^2$ , то метрика  $ds^2$  индуцирует метрику (обозначим ее  $G_{ab}^T$ ) на торе  $T_{ab}$ . Рассмотрим автоморфизм  $\beta$  тора  $T_{ab}$ , порожденный скользящей симметрией  $(x, y) \rightarrow (y + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2})$ . Фактор тора  $T_{ab}$  по циклическому действию этого диффеоморфизма гомеоморфен бутылке Клейна (обозначим ее  $K_{ab}$ ). Это следует из того, что инволюция  $\beta$  не имеет неподвижных точек и меняет



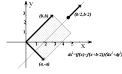


Рис. 14:

ориентацию. Так как инволюция  $\beta$  сохраняет метрику  $G_{abf}^T$ , то метрика  $G_{abf}^T$  индуцирует метрику (обозначим ее  $G_{abf}$ ) на бутылке Клейна  $K_{ab}$ .

На рис. 14 изображены вектора  $\hat{a}, \hat{b}$ , ось и вектор скользящей симметрии  $(x, y) \rightarrow (y + \frac{b}{2}, x + \frac{a}{2})$  и затемнен фундаментальный параллелограмм действия  $\alpha$ .

**Замечание** Можно показать, что между бутылками Клейна  $K_{ab}$  и  $K_{\hat{a}\hat{b}}$  существует диффеоморфизм, переводящий метрику  $G_{abf}$  в метрику  $G_{\hat{a}\hat{b}f}$ , если и только если  $a = \hat{a}$ ,  $b = \hat{b}$  и  $\hat{f}(x) = f(x + l)$  для некоторого  $l$ .

**ТЕОРЕМА 1** *Геодезический поток метрики  $G_{abf}$  полиномиально степени 4 интегрируем.*

Другими словами, у геодезического потока метрики  $G_{abf}$  есть полиномиальный интеграл степени 4 и нет полиномиальных интегралов степени 1, 2 и 3. Доказательство этой теоремы будет проведено в параграфах 2 и 3.

### §3. Отсутствие квадратичных по импульсам интегралов.

Предъявим полиномиальный интеграл геодезического потока метрики  $G_{abf}$ . Рассмотрим функцию  $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 f(y + \frac{b}{2}) - p_y^2 f(x)}{f(y + \frac{b}{2}) + f(x)}$ , где, как и прежде, через  $p_x$  и  $p_y$  обозначены обобщенные импульсы, канонически сопряженные, соответственно, к координатам  $x$  и  $y$ . Функция  $F^2$  является интегралом геодезического потока. Это можно проверить непосредственно, посчитав скобку Пуассона функции  $F^2$  и гамильтониана  $H$ . Несколько более легким выглядит следующее доказательство этого факта. Рассмотрим поднятие  $F_T$  функции  $F$  на тор  $T_{ab}$ . Это поднятие будет интегралом геодезического потока метрики  $G_{abf}^T$ . Инволюция  $\beta$  переводит  $F_T$  в  $-F_T$ , и, следовательно, сохраняет  $F_T^2$ . Следовательно,  $F^2$  есть интеграл геодезического потока метрики  $G_{abf}$  на бутылке Клейна  $K_{ab}$ . Очевидно, что  $F^2$  является однородным полиномом степени 4 по импульсам.

Докажем отсутствие полиномиальных степени 2 интегралов. Этим самым мы одновременно докажем отсутствие полиномиальных степени 1 интегралов,

так как квадрат полиномиального степени 1 интеграла является однородным полиномом степени 2 по импульсам и, очевидно, тоже является интегралом.

Из леммы 3 главы 2 следует, что любой полиномиальный степени 2 интеграл геодезического потока метрики  $G_{abf}^T$  на торе  $T_{ab}$  имеет вид  $c_1 F_T + c_2 H$ , где  $c_1 \neq 0$  и  $c_2$  — константы.

Пусть поднятие полиномиального степени 2 интеграла на тор имеет вид  $K = c_1 F_T + c_2 H$ . Тогда при инволюции  $\beta$ , с одной стороны,  $K$  сохраняется, а с другой стороны,  $\beta(F_T) = -F_T$ ,  $\beta(H) = H$ . Следовательно,  $c_1 = 0$ . Полученное противоречие доказывает, что у геодезического потока метрики  $G_{abf}$  нет полиномиальных степени 1 и 2 интегралов.

### §4. Отсутствие интегралов степени 3.

Нам осталось доказать, что у геодезического потока метрики  $G_{abf}$  нет полиномиальных степени 3 интегралов. Мы докажем более сильный факт.

**ЛЕММА 1** *У геодезического потока лиувиллевой метрики на торе нет полиномиального третьей степени интеграла.*

**Следствие** У геодезического потока метрики  $G_{abf}$  на бутылке Клейна  $K_{ab}$  нет полиномиального третьей степени интеграла.

Доказательство следствия (в предположении, что лемма верна). Предположим противное. Тогда на торе  $T_{ab}$  у геодезического потока метрики  $G_{abf}^T$  есть полиномиальный третьей степени интеграл. Рассмотрим вектора  $(0, ab)$  и  $(ab, 0)$ . Факторпространство плоскости  $R^2$  по действию группы  $Z+Z$ , порожденному сдвигами на эти вектора, гомеоморфен тору. Обозначим его  $T_{\text{Big}}$ . Метрика плоскости индуцирует лиувиллеву метрику на этом торе. Он естественно накрывает тор  $T_{ab}$ , так как вектора  $(0, ab)$  и  $(ab, 0)$  есть целочисленные линейные комбинации векторов  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ . Следовательно, у геодезического потока метрики на торе  $T_{\text{Big}}$  тоже есть полиномиальный степени 3 интеграл. Получаем противоречие с леммой 1.

Приведем два доказательства леммы 1. Первое из них проще, но проходит только в предположении, что число точек на окружности, в которых достигается глобальный минимум функций  $g$  и  $h$ , конечно, и что число значений локального минимума функций  $g$  и  $h$  тоже конечно. Это всегда так, например, если функции  $f$  и  $h$  являются функциями Морса. Далее будет показано, что интеграл четвертой степени боттовский если и только если функции  $f$  и  $h$  являются функциями Морса, так что можно ограничиться этим случаем.

Второе доказательство в полном виде довольно громоздко, поэтому мы приводим сокращенный вариант, опуская часть выкладок.

**Доказательство 1.** Обозначим наименьшее значение функции  $g$  через  $g_{\min}$ .

Предположим, что однородный степени 3 полином

$$K(x, y, p_x, p_y) = A_1(x, y)p_x^3 + B_1(x, y)p_x^2 p_y + A_2(x, y)p_x p_y^2 + B_2(x, y)p_y^3$$

является интегралом геодезического потока стандартной лиувиллевой метрики. Доказав, что все коэффициенты полинома тождественно равны 0, мы докажем лемму. Пусть сначала точка  $(x_0, y_0)$  такова, что  $g(x_0) \neq g_{\min}$ . Докажем, что  $A_1(x_0, y_0) = A_2(x_0, y_0) = 0$ .

Легко проверяется, что функция  $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{h(y)p_x^2 - g(x)p_y^2}{g(x) + h(y)}$  является интегралом геодезического потока.

Существуют такие  $x_+, x_- \in S^1$ , что  $g(x_+) = g(x_-) = g_{\min}$  и на той дуге  $\gamma$  окружности  $S^1$  с концами в точках  $x_+, x_-$ , на которой лежит точка  $x_0$ , нет точек глобального минимума функции  $g$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число. Пусть  $x_{\varepsilon+} \in \gamma$ ,  $x_{\varepsilon-} \in \gamma$  такие точки на дуге  $\gamma$ , что  $g(x_{\varepsilon+}) = g(x_{\varepsilon-}) = g_{\min} + \varepsilon$ , и точка  $x_{\varepsilon+}$  лежит с той же стороны относительно точки  $x_0$ , что и  $x_+$ , соответственно, точка  $x_{\varepsilon-}$  лежит с той же стороны относительно точки  $x_0$ , что и  $x_-$ .

Обозначим через  $L_\varepsilon$  следующее подмножество пространства  $T^*(S^1 \times S^1)$ :

$$L_\varepsilon = \{(x, y, \pm\sqrt{g(x) - g_{\min} - \varepsilon}, \sqrt{h(y) + g_{\min} + \varepsilon}), \\ \text{где } x \in [x_{\varepsilon-}, x_{\varepsilon+}], y \in S^1\}.$$

$L_\varepsilon$  — тор Лиувилля (по отношению к функции  $F$ ). Действительно, с одной стороны, подставив координаты любой точки множества  $L_\varepsilon$  в выражение для  $F$ , получаем, что  $F(L_\varepsilon) = -g_{\min} - \varepsilon$ . С другой стороны,  $L_\varepsilon$  действительно гомеоморфен тору, так как подмножества

$$L_{\varepsilon, \text{up}} = \{(x, y, \sqrt{g(x) - g_{\min} - \varepsilon}, \sqrt{h(y) + g_{\min} + \varepsilon}), \\ \text{где } x \in [x_{\varepsilon-}, x_{\varepsilon+}], y \in S^1\}, \text{ и}$$

$$L_{\varepsilon, \text{down}} = \{(x, y, -\sqrt{g(x) - g_{\min} - \varepsilon}, \sqrt{h(y) + g_{\min} + \varepsilon}), \\ \text{где } x \in [x_{\varepsilon-}, x_{\varepsilon+}], y \in S^1\},$$

очевидно, гомеоморфны кольцу. Кольца  $L_{\varepsilon, \text{up}}$  и  $L_{\varepsilon, \text{down}}$  склеиваются в  $L_\varepsilon$  по граничным окружностям

$$\{(x_{\varepsilon+}, y, 0, \sqrt{h(y) + g_{\min} + \varepsilon}), \text{ где } y \in S^1\} \text{ и} \\ \{(x_{\varepsilon-}, y, 0, \sqrt{h(y) + g_{\min} + \varepsilon}), \text{ где } y \in S^1\}.$$

Из доказательства теоремы 10 главы 2 следует, что все точки  $L_\varepsilon$  являются невырожденными точками векторного поля геодезического потока.

Можно выбрать такие малые  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ , что торы  $L_{\varepsilon_1}$  и  $L_{\varepsilon_2}$  нерезонансны. Действительно, из работы [?] следует, что функция вращения  $\rho$  от тора  $L_\varepsilon$  имеет вид

$$\rho(L_\varepsilon) = \frac{\int_{x_{\varepsilon-}}^{x_{\varepsilon+}} \frac{1}{\sqrt{g(\xi) - g_{\min} - \varepsilon}} d\xi}{\int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{h(\xi) + g_{\min} + \varepsilon}} d\xi}.$$

Поэтому, в окрестности  $\varepsilon = 0$  функция  $\rho(\varepsilon) = \rho(L_\varepsilon)$  не постоянна и, следовательно, принимает сколь угодно много иррациональных значений. Возьмем пару любых положительных  $\varepsilon$ , значения функции  $\rho$  от которых иррациональны. Соответствующие им торы Лиувилля будут нерезонансны.

Для краткости обозначим  $p_1 = \sqrt{g(x_0) - g_{\min} - \varepsilon_1}$ ,  $p_2 = \sqrt{g(x_0) - g_{\min} - \varepsilon_2}$ ,  $q_1 = \sqrt{h(y_0) + g_{\min} + \varepsilon_1}$  и  $q_2 = \sqrt{h(y_0) + g_{\min} + \varepsilon_2}$ . Так как точки  $(x_0, y_0, p_1, q_1)$  и  $(x_0, y_0, -p_1, q_1)$  лежат на одном нерезонансном торе  $L_{\varepsilon_1}$ , то  $K(x_0, y_0, p_1, q_1) = K(x_0, y_0, -p_1, q_1)$ . Вычитая из правой части левую, получаем равенство  $A_1(x_0, y_0)p_1^3 + A_2(x_0, y_0)p_1q_1^2 = 0$ . Аналогично, из равенства значений функции  $K$  в точках  $(x_0, y_0, p_2, q_2)$  и  $(x_0, y_0, -p_2, q_2)$ , получаем  $A_1(x_0, y_0)p_2^3 + A_2(x_0, y_0)p_2q_2^2 = 0$ . Легко проверяется, что  $p_1^3p_2q_2^2 \neq p_2^3p_1q_1^2$ , поэтому система

$$\begin{cases} A_1(x_0, y_0)p_1^3 + A_2(x_0, y_0)p_1q_1^2 = 0 \\ A_1(x_0, y_0)p_2^3 + A_2(x_0, y_0)p_2q_2^2 = 0 \end{cases}$$

с неизвестными  $A_1(x_0, y_0), A_2(x_0, y_0)$  имеет только нулевое решение. Следовательно,  $A_1(x_0, y_0) = A_2(x_0, y_0) = 0$ .

Мы доказали, что во всех точках, отличных от точек глобального минимума функции  $g$  коэффициенты  $A_1, A_2$  равны 0. По непрерывности они равны 0 на всем торе  $S^1 \times S^1$ .

Аналогично доказывается равенство 0 коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$ . Лемма доказана.

Теперь докажем лемму в общем случае. Для удобства переобозначим  $p_x$  через  $p$ ,  $p_y$  — через  $q$ . Как и в предыдущем доказательстве, предположим, что однородный степени 3 полином

$$K(x, y, p, q) = A_1(x, y)p^3 + B(x, y)p^2q + A(x, y)pq^2 + B_2(x, y)q^3$$

является интегралом геодезического потока стандартной лиувиллевой метрики. По теореме Колокольцева ([?] или [?]) функция  $A_1(x, y) - A(x, y) + i(B(x, y) - B_2(x, y))$  голоморфна как функция переменной  $z = x + iy$ . Так как она периодична, то она равна некой комплексной константе  $-\alpha + i\beta$ . Заменив  $A_1$  на  $A - \alpha$ ,  $B_2$  на  $B - \beta$ , перепишем интеграл  $K$  в виде

$$K(x, y, p, q) = (A(x, y) - \alpha)p^3 + B(x, y)p^2q + A(x, y)pq^2 + (B(x, y) - \beta)q^3.$$

Скобка Пуассона интеграла  $K$  и гамильтониана  $H$  является однородным полиномом по импульсам. Приравняв коэффициенты этого полинома к 0 и произведя необходимые сокращения, получаем следующую систему уравнений в частных производных

$$\begin{cases} ((f(x) + h(y))B(x, y))_x + ((f(x) + h(y))A(x, y))_y = 0 \\ 2((f(x) + h(y))B(x, y))_y - 2((f(x) + h(y))A(x, y))_x = \\ = \beta(f(x) + h(y))_y - \alpha(f(x) + h(y))_x \\ 2(f(x) + h(y))B_y(x, y) + 3((f(x) + h(y))_x A(x, y)) + \\ + B(x, y)(f(x) + h(y))_y - \alpha(f(x) + h(y))_x = 0 \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение по  $x$  и второе — по  $y$  и сложим результаты. Получим уравнение  $\Delta((f(x) + h(y))B(x, y)) = \beta h_{yy}(y)$ , где  $\Delta$  обозначает оператор Лапласа. По теореме Лиувилля функция  $(f(x) + h(y))B(x, y) - \beta h(y)$  равна константе. Обозначим эту константу  $C$ . Продифференцировав первое уравнение по  $y$ , а второе по  $x$ , и вычтя результаты, получим, что функция  $(f(x) + h(y))A(x, y) - \alpha(f_{xx}(x))$  тоже равна константе, которую обозначим  $D$ . Имеем  $(f(x) + h(y))A(x, y) = \alpha f_{xx}(x) + D$  и  $(f(x) + h(y))B(x, y) = \beta h(y) + C$ . Подставив эти выражения в третье уравнение системы, получим, что  $f_x(x)A(x, y) + h_y(y)B(x, y) = 0$ . Умножив это уравнение на  $f(x) + h(y)$  и еще раз подставив выражения для  $(f(x) + h(y))A(x, y)$  и  $(f(x) + h(y))B(x, y)$ , получаем  $(\alpha f(x) + D)f_x(x) = -(\beta h(y) + C)h_y(y)$ . Так как правая часть последнего равенства зависит только от  $x$ , а левая — только от  $y$ , то  $(\alpha f(x) + D)f_x(x) = \text{const}$ . Заметим, что  $(\alpha f(x) + D)f_x(x) = (\frac{\alpha}{2}f^2(x) + Df(x))_x$ . Из ограниченности функции  $f$  получаем, что  $\text{const} = 0$  и либо  $\alpha = 0$ , либо функция  $f$  постоянна. Аналогично, либо функция  $h$  постоянна, либо  $\beta = 0$ . Но одновременно  $\alpha$  и  $\beta$  не могут быть равными 0. Действительно, в этом случае интеграл  $K$  распадается на произведения гамильтониана и однородного полинома степени 1. Тогда этот однородный полином тоже является интегралом и из классификации линейно интегрируемых геодезических потоков на торе следует, что либо  $f$ , либо  $h$  равна константе. Полученное противоречие доказывает лемму.

### §5. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков метрик $G_{abf}$ .

Как и в главе 2, под топологической классификацией мы будем понимать построение меченых молекул для боттовских интегрируемых геодезических потоков.

**ТЕОРЕМА 2** *Ограничение интеграла  $F^2$  геодезического потока метрики  $G_{abf}$  на изонергетическую поверхность  $\{H = \text{const}\}$  является боттовской функцией если и только если функция  $f$  является функцией Морса.*

Действительно, свойство интеграла быть боттовским сохраняется при накрытиях. Из теоремы 10 главы 2 следует, что интеграл  $F_T$  боттовский. Так как уровень  $\{F = 0\}$  этого интеграла не является критическим, то квадрат интеграла  $F_T$  тоже является боттовским интегралом. Теорема доказана.

Если  $a, b$  — взаимно простые положительные числа, то через  $k(a, b)$ , или просто через  $k$ , мы будем обозначать такое лежащее на интервале  $(0, 2ab)$  целое число, что

- 1)  $2a$  делит  $k - 1$  и
- 2)  $2b$  делит  $k + 1$ .

Докажем, что число, удовлетворяющее условиям 1) и 2) существует и единственно на интервале  $(0, 2ab)$ .

**Существование.** Так как числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, то существует такая пара целых чисел  $x, y$ , что  $xa - yb = 1$ . Тогда рассмотрим число  $xa + yb - 1$ . Оно, очевидно, удовлетворяет условиям 1, 2, так как  $xa + yb - 1 = xa + yb -$

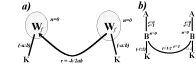


Рис. 15: а) Молекула геодезического потока метрики  $G_{abf}$ . б) Молекула геодезического потока метрики  $G_{12f}$ , где  $f$  — простая функция.

$(xa - yb) = 2xa$  и  $xa + yb + 1 = xa + yb + (xa - yb) = 2yb$ . Для произвольного целого числа  $l$  верно равенство  $(x + bl)a - (y - al)b = 1$ , следовательно, число  $xa + yb + 2abl$  тоже удовлетворяет условиям 1, 2. Подбором числа  $l$  можно добиться, чтобы число  $xa + yb + 2abl$  лежало в нужном интервале.

**Единственность.** Пусть числа  $k_1$  и  $k_2$  удовлетворяют условиям 1, 2. Тогда число  $k_1 - k_2$ , с одной стороны, делится на  $2a$ , с другой стороны, делится на  $2b$ . Следовательно, число  $k_1 - k_2$  делится на  $2ab$ .

Заметим, что условия 1, 2 в определении числа  $k$  можно заменить на следующее условие:  $k^2 \equiv 1 \pmod{2ab}$ .

Рассмотрим два экземпляра оснащенного графа  $W_f$ , построенного в предыдущей главе. Соединим их выделенные вершины ребром, ориентируем его в произвольном направлении, сопоставим ему метку  $r = -\frac{k}{2ab}$ . Рассмотрим еще две точки, сопоставим им атом Топалова  $K^2$ . Соединим одну точку с выделенной вершиной первого экземпляра оснащенного графа  $W_f$ , другую — с выделенной вершиной второго экземпляра оснащенного графа  $W_f$ . Сопоставим новым ребрам метку Топалова  $(-a, b)$ . Полученный объект будем обозначать  $M(a, b, f)$ , см. рис. 15(a).

**ТЕОРЕМА 3** *Меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{abf}$  есть  $M(a, b, f)$ .*

Например, если функция  $f$  простая, то есть имеет всего один локальный максимум на отрезке  $[0, 1]$ , а пара  $(a, b) = (1, 2)$ , то меченая молекула геодезического потока метрики  $G_{abf}$  изображена на рис. 15b.

**Доказательство теоремы 3.** Рассмотрим действие группы  $Z^2$  на плоскости  $R^2$ , порожденное сдвигами вдоль векторов  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ . Факторпространство по этому действию гомеоморфно тору. Обозначим его  $T_{\text{small}}$ . Так как вектора  $(a, -a)$  и  $(b, b)$  являются линейными комбинациями векторов  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ , то тор  $T_{ab}$  канонически покрывает тор  $T_{\text{small}}$ . Отображение накрытия переводит точку с координатами  $(x, y)$  в точку с координатами (дробная часть  $x$ , дробная часть  $y$ ).

Так как действие сдвигами на вектора  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  сохраняет метрику  $(f(x) + f(x + \frac{a}{2}))(dx^2 + dy^2)$ , то она индуцирует на торе  $T_{\text{small}}$  некоторую

метрику  $G_{\text{small}}$ . Поднятие метрики  $G_{\text{small}}$  каноническим накрытием есть метрика  $G_{\text{abf}}$ . Заметим, что метрика  $G_{\text{small}}$  Лиувиллева, поэтому ее геодезический поток интегрируем. Квадратичный по импульсам интеграл индуцируется функцией  $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 f(y + \frac{b}{2}) - p_y^2 f(x)}{f(y + \frac{b}{2}) + f(x)}$  на кокасательном расслоении к плоскости  $R^2$ . Накрытие тора  $T_{\text{small}}$  тором  $T_{\text{ab}}$  порождает накрытие изохергетической поверхности  $\{H = 1\}$  изохергетической поверхностью  $\{H_{\text{small}} = 1\}$ . Это накрытие, очевидно, переводит торы Лиувилля в торы Лиувилля и сохраняет ориентацию критических окружностей.

Топологическое строение лиувиллевых метрик, фактически, было описано при доказательстве теоремы 11 главы 2. В частности, было показано, что множество  $\{H_{\text{small}} = 1, F_{\text{small}} \geq 0\}$  имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ . Докажем, что множество  $\{H = 1, F \geq 0\}$  тоже имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ .

Будем рассматривать прямое произведение окружности на двумерную поверхность как многообразие Зейферта без особых слоев. Слоями Зейферта являются сечения слоев Лиувилля поверхностями  $\{x = \text{const}\}$ . Поднимем структуру расслоения Зейферта на  $\{H = 1, F \geq 0\}$ . Из того, что числа  $a$  и  $b$  взаимно просты следует, что кратность накрытия слоев Зейферта равна  $2ab$  и совпадает с кратностью накрытия множества  $\{H = 1, F \geq 0\}$  множеством  $\{H_{\text{small}} = 1, F_{\text{small}} \geq 0\}$ . Следовательно, накрытие порождает гомеоморфизм баз расслоений Зейферта множеств  $\{H = 1, F \geq 0\}$  и  $\{H_{\text{small}} = 1, F_{\text{small}} \geq 0\}$ , и так как накрытие интеграл  $F_{\text{small}}$  поднимается до интеграла  $F_{\text{ab}}$ , то множество  $\{H_{\text{small}} = 1, F_{\text{small}} \geq 0\}$  имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ .

Удобно представлять себе устройство этого накрытия с помощью естественных проекции на торы  $T_{\text{ab}}$  и  $T_{\text{small}}$ . Под естественной проекцией  $T^*P \rightarrow P^2$  кокасательного расслоения к поверхности мы понимаем отображение, переводящее пару (точка на поверхности; ковектор) в точку на поверхности. В нашем случае слои Зейферта проектируются (при естественной проекции) в окружности вида  $\{x = \text{const}\}$ . Глобальное сечение слоев проектируется в окружность  $\{x = \text{const}\}$ . В качестве базиса решетки, порожденной векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , выберем пару векторов  $(1, k)$  и  $(0, 2ab)$ . Тогда сечением расслоения Зейферта будет являться прообраз при естественной проекции отрезка, соединяющего точки  $(0, 0)$  и  $(k, m)$ .

Мы получили, что множество  $\{H_T = 1, F_T \geq 1\}$  состоит из двух компонент связности, каждая из которых имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ . Одна компонента связности (будем называть ее первой) определяется условием  $p_y > 0$ , вторая —  $p_y < 0$ .

Заметим, что естественная проекция сечения расслоения Зейферта на тор  $T_{\text{ab}}$ , с точностью до изотопии, состоит из отрезка, соединяющего точку  $(0, 0)$  с точкой  $(1, k)$ .

Совершенно аналогично, множество  $\{H_T = 1, F_T \leq 1\}$  состоит из двух компонент связности, каждая из этих компонент имеет топологический тип  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ . Одна компонента связности (будем называть ее первой) определяется условием  $p_x > 0$ , — определяется условием  $p_y > 0$ .

Рассмотрим инволюцию  $\hat{\alpha}$  кокасательного расслоения тора  $T_{\text{ab}}$ , порожденную инволюцией  $\alpha$ . Инволюция  $\hat{\alpha}$  переводит точку с координатами  $(x, y, p_x, p_y)$  в точку с координатами  $(y + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2}, p_y, p_x)$ .

Очевидно, инволюция  $\hat{\alpha}$  переводит первую связную компоненту множества  $\{H_T = 1, F_T \leq 1\}$  в первую связную компоненту множества  $\{H_T = 1, F_T \geq 1\}$ , вторую компоненту  $\{H_T = 1, F_T \leq 1\}$  — во вторую связную компоненту множества  $\{H_T = 1, F_T \geq 1\}$ .

Рассмотрим торы Лиувилля, соответствующие нулевому значению интеграла  $F_T$ . Их четыре:

$$\{x, y, \sqrt{f(x)}, \sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}, \{x, y, \sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}, \\ \{x, y, -\sqrt{f(x)}, \sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\} \text{ и } \{x, y, -\sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}.$$

Инволюция  $\hat{\alpha}$  переводит тор  $\{x, y, \sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  в тор

$\{x, y, -\sqrt{f(x)}, \sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  и оставляет на месте торы

$\{x, y, \sqrt{f(x)}, \sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  и  $\{x, y, -\sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$ . Очевидно, факторпространство

торов  $\{x, y, \sqrt{f(x)}, \sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  и

$\{x, y, -\sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  по инволюции  $\hat{\alpha}$  гомеоморфно двум бутылкам Клейна. Следовательно, молекула геодезического потока метрики  $G_{\text{abf}}$  состоит из двух экземпляров  $W_f$ , соединенных ребром, и двух атомов Топалова, первый атом Топалова соединен ребром с первым экземпляром  $W_f$ , второй атом Топалова соединен со вторым экземпляром  $W_f$ .

Нам осталось посчитать  $g$ -метки на "новых" ребрах и  $n$ -метки. Для того, чтобы посчитать метки, найдем допустимые на торах, соответствующих "новым ребрам". Заметим, что тор  $\{x, y, +\sqrt{f(x)}, -\sqrt{f(x + \frac{b}{2})}\}$  диффеоморфна проектируется на тор  $T_{\text{ab}}$ . Выше мы построили проекции допустимого сечения расслоения Зейферта, порожденных топологическим строением множеств  $\{H_T = 1, F_T \geq 1\}$  и  $\{H_T = 1, F_T \leq 1\}$ . Ими являются, соответственно, отрезки, соединяющие точки  $(0, 0)$  с точкой  $(1, k)$ ,  $(0, 0)$  с точкой  $(1, 2ab - k)$ . Обозначим через  $k^*$  разность  $m - k$ . Матрица перехода от одного допустимого базиса к другому равна  $\begin{pmatrix} -k & 2ab \\ \frac{1-kk^*}{2ab} & k^* \end{pmatrix}$ . Поэтому,  $g$ -метка на ребре, соединяющем выделенные вершины графов  $(\mathcal{W}_f, \mathbf{f})$ , равна  $-\frac{k}{2ab}$ .

Для подсчета  $n$ -меток и меток на ребрах с вершиной в атоме  $K$  необходимо вычислить матрицу перехода на ребрах с вершиной в атоме  $K$ . Она равна

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{k+1}{2b} & \frac{k-1}{2a} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что на этих ребрах стоят метки  $(-a : b)$ , и все метки  $n = 0$ . Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТАБЛИЦА АТОМНО-СЕДЛОВЫХ СВЯЗОК ВЕСА 1,2 И СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРУГОВЫХ МОЛЕКУЛ.

**Комментарий** Напомним, что под атомно-седловой связкой мы понимаем тройку  $(C, (P_b, G_b), (P_w, G_w))$ , где  $C$  — абстрактный седловой комплекс,  $(P_b, G_b)$  и  $(P_w, G_w)$  — ориентированные атомы, причем указано отождествление графа  $G_b$  и объединения черных ребер комплекса  $C$ , графа  $G_w$  и объединения белых ребер комплекса  $C$ . В первой и второй колонке таблицы перечислены (с точностью до естественного изоморфизма) все допустимые атомно-седловые связки веса 1 и 2. А именно, седловой комплекс получается, если склеить нарисованные в первой колонке квадраты по сторонам, отмеченным одинаковыми буквами или цифрами. Подразумеваем, что стороны квадратов ориентированы снизу вверх и слева направо. Вертикальные стороны квадратов считаем белыми, горизонтальные — черными.

Во второй колонке изображены соответствующие  $l$ -типы. Мы не указали ориентацию графов атомов и отождествление графов атомов и одномерного остова комплекса, так как атомы малой сложности в некотором смысле симметричны. С точностью до симметрий атомов и комплексов, порожденных естественными автоизоморфизмами атомно-седловых связок, ориентация и отождествление определяется однозначно.

В третьей колонке изображена соответствующая круговая молекула. Предполагается, что ребра этой молекулы ориентированы по часовой стрелке. Подходящим выбором ориентации соответствующей изоэнергетической поверхности можно добиться, чтобы все  $\varepsilon$ -метки были равны  $+1$ . Метки  $n$  однозначно восстанавливаются по атомам и  $r$ -меткам. Покажем, как.

Пусть некая вершина круговой молекулы седловой окрестности помечена атомом  $R$ , содержащим  $k$  звездочек. Пусть в эту вершину входят  $v$  и выходят  $u$  ребер. Обозначим входящие ребра  $e_1, \dots, e_v$ , а выходящие —  $e_{v+1}, \dots, e_{v+u}$ . Пусть  $r$  метка на  $i$ -ом ребре равна  $\frac{p_i}{q_i}$ .

Тогда метка  $n$  на этой вершине равна минус сумме

$$\frac{k}{2} + \sum_1^v \left( \frac{p_i}{q_i} \right) + \sum_{v+1}^{v+u} \left( \frac{p_i}{q_i} \right),$$

где  $p_i^*$  означает такое целое число, что  $p_i p_i^* = -1 \pmod{q_i}$  и  $q_i > p_i^* \geq 0$ .

Таким образом, оснащение круговой молекулы седловой окрестности  $n$ -метками элементарно строится по атомному и  $r$ -меточному оснащению.

На круговых молекулах, соответствующих атомно-седловым связкам веса 1 и 2, не встречаются атомы, граф которых содержит более четырех вершин. Атомы с одной, двумя и тремя вершинами перечислены в работе [?].

Встречающиеся в таблице 1 атомы с четырьмя вершинами перечислены в таблице 2.

## Список литературы

- [1] Матвеев В.С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло. // Матем. сб. 187, N4, с. 29–58. 1996.
- [2] Матвеев В.С. Вычисление значений инварианта Фоменко для точки типа седло-седло интегрируемой гамильтоновой системы. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. N24, с. 75–104. 1993.
- [3] Матвеев В.С. Пример геодезического потока на бутылке Клейна, интегрируемого полиномом по импульсам четвертой степени. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. Сдано в печать.
- [4] Матвеев В.С. Описание квадратично интегрируемых геодезических потоков на замкнутых поверхностях с нулевой эйлеровой характеристикой. // Топологические методы в теории механики. Изд-во Факториал. 1996.
- [5] Матвеев В.С. Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна. // Топологические методы в теории механики. Изд-во Факториал. 1996.
- [6] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. // М., Наука. 1974.
- [7] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. // М., Изд-во Моск. ун-та. 1988.
- [8] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. // Изв. АН СССР, N 6, с. 1276–1305. 1986.
- [9] Фоменко А.Т., Ципанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР, т. 54, N 3, с. 546–575. 1990.
- [10] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // Успехи матем. наук., т. 45, вып. 2, с. 49–77. 1990.
- [11] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева-Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела. // Мат. заметки, 1994. Т. 56, вып. 2. С. 139–142.

- [12] **Лерман Л.М., Уманский Я.Л.** Структура пуассонова действия на четырехмерном многообразии.1. //Горький: Горьковский университет. Деп. в ВИНТИ N3427. 1981.
- [13] **Лерман Л.М., Уманский Я.Л.** Классификация четырехмерных гамильтоновых систем и пуассоновских действий  $R^2$  в расширенных простых окрестностях особых точек.3.Реализация.// Матем. сб. 186. N10, с. 89–102.
- [14] **Бабенко И.К., Нехорошев Н.Н.** О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики с нетривиальным квадратичным интегралом.// Мат. заметки. Т. 58, N5, с. 643–652. 1995.
- [15] **Нгуен Тьен Зунг, Полякова Л.С., Селиванова Е.Н.** Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых многообразиях. // Функциональный анализ и его приложения, 1991, т. 27, вып.3, с. 42–56.
- [16] **Козлов В.В.** Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем. //ДАН СССР. 1979.Т.249,N6,с.1299–1302.
- [17] **Тайманов И.А.** Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях.//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т.51, N2. С. 429–435.
- [18] **Колокольцов В.Н.** Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом.//Изв. АН СССР, сер. матем., 1982. Т. 46, N5. С. 994–1010.
- [19] **Колокольцов В.Н.** Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф.-м. наук, 1984.
- [20] **Селиванова Е.Н.** Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности.//Матем. Сб., 183, N4, 1992. С. 69–86.
- [21] **Селиванова Е.Н.** Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе.//Матем. Сб., 1995, N10.
- [22] **Топалов П.** Включение бутылок Клейна в теорию топологической классификации гамильтоновых систем. //Успехи матем. наук. 1994, т. 49, вып.1, с. 227–228
- [23] **Калашников В.В.** Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе. //Успехи матем. наук. 1995, т. 50, вып. 1, с.201–202
- [24] **L. Eliasson.** Normal form for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case.// Comm. Math. Helv., 65, pp. 4–35, 1990.
- [25] **J. Williamson.** On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems.// Amer. J. Math. Vol. 58, N1, pp.141–163. 1936.
- [26] **Nguyen Tien Zung.** Arnold-Liouville with singularities.//Preprint SISSA-ISAS. 1995.
- [27] **A.V. Bolsinov.** Methods of calculations of the Fomenko-Ziechang invariant. //Topological classification of Integrable Hamiltonian systems. Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6, pp. 147–183. 1991.
- [28] **W. Neumann, F. Raymond.** Seifert manifolds, plumbing,  $\mu$ -invariant and orientation reversing maps, Lecture Notes in Mathematics, 664(1978), 163–196.