

Московский государственный областной университет

На правах рукописи

Мантуров Василий Олегович
Геометрия и комбинаторика виртуальных узлов

специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 2007

Оглавление

ГЛАВА 1. Обзор содержания диссертации	5
1.1. Введение	5
1.1.1. Основные определения и конструкции	9
1.2. Мотивация	33
1.3. Цели исследования	36
1.4. Методы исследования	36
1.5. Научная новизна	38
1.6. Положения диссертации, выносимые на защиту	38
1.6.1. Другие важные результаты	39
1.6.2. Примеры	39
1.7. Апробация диссертации. Публикации по теме диссертации	40
1.8. Структура и объем диссертации	41
ГЛАВА 2. Виртуальные узлы и трехмерная топология	44
2.1. Теорема Куперберга	49
2.2. Род виртуального узла	50
2.2.1. Два типа связного суммирования	55
2.2.2. План доказательства теоремы 2.5	56
2.2.3. Процесс дестабилизации	58
2.3. Распознавание виртуальных узлов	65
ГЛАВА 3. Дистрибутивные группоиды в теории виртуальных узлов	74
3.1. Группоиды и их обобщения	78
3.1.1. Виртуальный группоид	84
3.1.2. Инвариант раскрасок	95
3.1.3. Виртуальный модуль Александра	97
3.2. Длинные виртуальные узлы	114
3.2.1. Вопрос о коммутруемости длинных узлов	123
3.3. Виртуальные узлы и бесконечномерные алгебры Ли	127
3.4. Иерархия виртуальных узлов	133
3.4.1. Плоские виртуальные узлы	134
3.4.2. Алгебраический формализм	136
3.4.3. Примеры	142
ГЛАВА 4. Полином Джонса. Атомы	146
4.1. Основные определения	147
4.1.1. Атомы и узлы	153
4.1.2. Модель затягивающего дерева для скобки Кауфмана	165
4.2. Полином Ξ . Вопросы минимальности	170
4.2.1. Старший и младший коэффициенты скобки Кауфмана	179
4.2.2. Полином Ξ	181
4.2.3. Примеры применения полинома Ξ	189

4.2.4.	Поверхностная скобка и инвариант Ξ	193
ГЛАВА 5.	Комплекс Хованова для виртуальных узлов	198
5.1.	Введение	198
5.2.	Основные используемые конструкции	202
5.2.1.	Полином Джонса \hat{J} : другая нормировка	203
5.3.	Комплекс Хованова с коэффициентами в поле \mathbf{Z}_2	204
5.4.	Комплекс Хованова удвоенный узлов	218
5.5.	Атомы и комплекс Хованова	231
5.6.	Затягивающее дерево для комплекса Хованова	240
5.7.	Полином Хованова и фробениусовы расширения	242
5.7.1.	Фробениусовы расширения	242
5.7.2.	Описание конструкции Хованова для фробениусовых расширений	243
5.7.3.	Геометрические обобщения посредством атомов	246
5.7.4.	Алгебраические обобщения	247
5.8.	Минимальные диаграммы классических и виртуальных зацеплений	253
5.9.	Минимальные диаграммы длинных виртуальных узлов (согласно результатам гл.4)	256
ГЛАВА 6.	Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами	265
6.1.	Введение. Основной результат	266
6.2.	Атомы и скрученные виртуальные узлы	268
6.3.	Определение комплекса Хованова для виртуальных узлов	272
6.3.1.	Определение частных дифференциалов	275
6.4.	Формулировка и доказательство основной теоремы	279
6.5.	Обобщения	303
6.5.1.	Гомологии зацеплений и фробениусовы расширения	305
ГЛАВА 7.	Виртуальные косы	307
7.1.	Определения виртуальных кос	308
7.2.	Виртуальные косы и виртуальные узлы	311
7.2.1.	Представление Бурау и его обобщения	317
7.3.	Скобка Кауфмана для классических и виртуальных кос	320
7.4.	Нормальная форма виртуальных кос по В.Г.Бардакову	321
7.5.	Инвариант виртуальных кос	322
7.5.1.	Построение основного инварианта	324
7.5.2.	Представление группы виртуальных кос	327
7.5.3.	О полноте в классическом случае	328
7.5.4.	Некоторые следствия	329
7.5.5.	Насколько силен инвариант \mathcal{F} ?	331
ГЛАВА 8.	Инварианты Васильева	335
8.1.	Инварианты Васильева классических узлов	338
8.2.	Подход Гусарова-Поляка-Виро к инвариантам Васильева виртуальных узлов	347
8.3.	Подход Кауфмана	349
8.3.1.	Инварианты, порожденные полиномом Ξ	350
8.4.	Инварианты Васильева, порожденные инвариантом Ξ	351
8.5.	Графы, хордовые диаграммы и полином Кауфмана	354
8.6.	Доказательство гипотезы Васильева	357

8.7. Бесконечность количества длинных узлов, имеющих фиксированное замыкание	367
---	-----

Глава 1

Обзор содержания диссертации

1.1. Введение

Настоящая диссертация посвящена двум бурно развивающимся теориям — теории виртуальных узлов и теории гомологий Хованова.

Классическая теория узлов, насчитывающая более двухсот лет, за последние десятилетия обогатилась разнообразными методами и тонкими инвариантами, составляющими мощный аппарат современной теории узлов. Естественным образом классическая теория узлов (т.е. теория узлов в трехмерном евклидовом пространстве или в трехмерной сфере), является составной частью неизмеримо более широкой теории — узлов в трехмерных многообразиях. Для этой теории аппарат развит в гораздо меньшей степени.

Теория виртуальных узлов занимает промежуточное положение между теорией узлов в произвольных трехмерных многообразиях и классической теорией узлов. Она с одной стороны гораздо шире классической теории узлов, а с другой стороны близка к ней в силу некоторых причин, которые мы изложим ниже. Вследствие этого многие методы и инварианты классических узлов могут быть перенесены на “виртуальную” теорию. Это перенесение часто требует дополнительных идей, которые представлены в настоящей диссертации. Среди таких идей — мощные новые инварианты — гомологии Хованова (1997). Последние представляют собой гомологии цепного комплекса, который строится по диаграмме узла (зацепления); сами гомологии являются инвариантами узла (зацепления).

Для перенесения теории гомологий Хованова на виртуальные узлы потребовалось построение нового комплекса, имеющего те же гомологии, что

и комплекс Хованова. Такое построение потребовало ряда новых идей: ориентации и упорядочения окружностей в состояниях, скрученных коэффициентов в алгебре Фробениуса гомологий тривиального узла, использования внешних произведений вместо обычных тензорных (симметрических) произведений. Ключевую роль в построении теории гомологий Хованова для виртуальных узлов, в изучении свойств гомологий Хованова, а также в других задачах сыграло понятие атома (введенное А.Т.Фоменко [F] и активно изучаемое А.Т.Фоменко и его школой, см. сборник [ФБШ] и ссылки в нем). Независимо то же понятие атома было определено В.Г.Тураевым [Tur2]. Атомы и d -диаграммы (особый вид хордовых диаграмм с двумя семействами незацепленных хорд, стр. 163) сыграли ключевую роль также в доказательстве гипотезы В.А.Васильева (глава 8). Теория d -диаграмм разработана автором в работах [Ман-2], [Ман-3], [Ман-1]. Род атома (в других источниках называемый *родом Тураева*) оказался естественным образом связан не только с гомологиями Хованова, но и с гомологиями Ожвата-Сабо, [Low].

Опишем некоторую общую точку зрения, которая позволяет трактовать классические и виртуальные узлы единым образом. Классический узел (или зацепление) можно задать диаграммой узла. На диаграмме есть перекрестки и непересекающиеся между собой линии, соединяющие перекрестки друг с другом. Если расставить на плоскости перекрестки \otimes произвольным образом и указать, в каком порядке их концы соединяются друг с другом, то иногда соединяющие линии могут быть выбраны непересекающимися (в этом случае получается диаграмма классического узла), а в некоторых случаях установить непересекающиеся соединительные линии не удастся — получается “виртуальная” диаграмма, или диаграмма виртуального узла. Виртуальные перекрестки, обозначаемые кружочками, возникают всякий раз, когда четырехвалентный граф, определенный заданными перекрестками и заданным способом соединений этих перекрестков не является плоским, что представляет собой довольно частое явление. Пример виртуальной диаграммы изображен на рис. 1.1.

Таким образом, виртуальные узлы относятся к классическим примерно так же как произвольные графы к плоским графам.

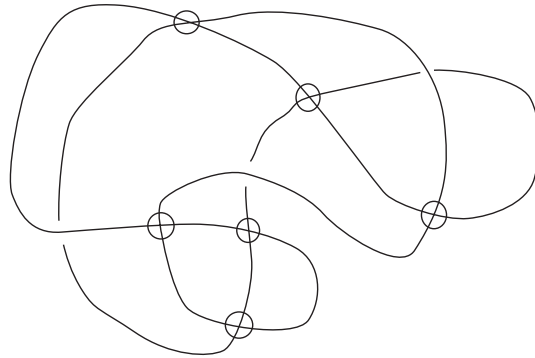


Рис. 1.1. Виртуальная диаграмма

При этом эквивалентность (изотопность) диаграмм классических узлов определяется посредством формальных комбинаторных преобразований (движений Рейдемейстера), которые относятся к близко стоящим перекресткам. Для виртуальных узлов, заданных посредством набора классических перекрестков с указанием способа соединения перекрестков друг с другом эквивалентность задается в точности теми же движениями Рейдемейстера (различные способы изображения соединения классических перекрестков приводят к диаграммам, отличающимся друг от друга *движением объезда*, см. далее).

Отметим, что на этом пути обобщения появились новые теории: виртуальных многомерных узлов (абстрактных узлов, Камада-Камада [KK]), а также пространственных виртуальных графов (Меллор, Флеминг, [FM]). Нетрудно показать, что виртуальные диаграммы происходят от узлов (зацеплений) в утолщенных двумерных поверхностях.

Теория узлов является одной из основных ветвей маломерной топологии. Как математическая теория, она восходит к концу восемнадцатого века. Важный вклад в развитие теории узлов внесли А.Т.Вандермонд, К.-Ф. Гаусс [Gau], Ф.Клейн, М.Ден [Dehn], Дж. Александер [Ale1, Ale2] и другие выдающиеся ученые.

При этом прорыв в теории узлов, приведший к современному ее состоянию, решению многих давно стоящих проблем, связан с открытиями Дж.Х.Конвея [Con] и В.Ф.Р.Джонса [Jon1], а позднее — В.А.Васильева [Vas1, Vas2] и других и относится к последней трети двадцатого века (по-

линомы Конвея, Джонса, инварианты Васильева конечного порядка). За открытия в теории узлов В.Ф.Р.Джонс, Э.Виттен, В.Г.Дринфельд (1990) и М.Л.Концевич (1998) были удостоены высшей математической награды — филдсовских медалей.

В 1997 году была предложена еще одна выдающаяся конструкция инвариантов узлов — гомологии Хованова [Kh]: каждой диаграмме узла сопоставляется алгебраический комплекс, все гомологии которого представляют собой инварианты узлов, а эйлерова характеристика этого комплекса совпадает с полиномом Джонса.

В девяностые годы XX века получили широкое развитие несколько направлений маломерной геометрии и топологии, связанных с теорией узлов, имеющих самостоятельный интерес. С одной стороны, получила широкое распространение теория лежандровых узлов, лежащая на стыке теории узлов и контактной геометрии [FT, EGH, Che, EH]. Она имеет многомерные аналоги и связана с различными областями геометрии и топологии.

Другим направлением является теория *гомологий зацеплений*, двумя важнейшими ветвями которой являются теория гомологий Хованова [Kh] и теория гомологий Хегора-Флоера, предложенная П.Ожватом и З.Сабо, см. [OzsSz].

Замечательным изобретением является теория виртуальных узлов, открытая Луисом Кауфманом в 1996 году, [Kau7]. С ее появлением стало понятно, что теория классических узлов является малой составной частью более широкой теории, изучение свойств которой помогает лучше понять некоторые явления в теории классических узлов, а также стимулирует постановку новых задач, см. [FKM]. Теория виртуальных узлов находит свои применения в классической теории узлов. Посредством теории виртуальных узлов была решена проблема существования комбинаторных формул для всех инвариантов конечного порядка классических узлов [GPV].

Проблема распознавания классических узлов была одной из центральных в маломерной топологии. Ее первое безупречное решение связано с именами Хакена, Хемииона, Матвеева и др. Результат об алгоритмической распознаваемости важен также и по причине того, что в маломерной топологии часто имеет место алгоритмическая нераспознаваемость. С появле-

нием теории виртуальных узлов естественно встал вопрос об их алгоритмической распознаваемости. Этот вопрос разрешен положительно в главе 2 настоящей диссертации; при этом помимо нескольких структурных положений теории Хакена-Матвеева потребовалась также нетривиальная теорема Куперберга и ряд рассуждений, специфических для виртуальных узлов.

Теория виртуальных узлов, ее конструкции и методы тесно взаимодействуют с различными разделами классической теории узлов, в частности, с инвариантами Васильева. Этому посвящена глава 8. В ней, с использованием атомов и d -диаграмм доказана гипотеза Васильева о планарности графов с крестовой структурой; эта гипотеза играет ключевую роль в работе Васильева [Вас] о существовании комбинаторных формул для инвариантов конечного порядка.

К теории виртуальных узлов проявили интерес многие известные ученые: О.Я.Виро, В.Г.Тураев, М.Н. Гусаров, М.Хованов, Л.Розанский Р.Фенн, К.Рурк, Ге Молинь, С.Картер, Б. Меллор, Г.Куперберг, В.В.Вершинин, В.Г.Бардаков, Н.Камада, С.Камада, Д. Рэдфорд, и др. Ей посвящено множество работ, см., напр., [APS, Bar, BF, DK1, FJK, FM, FRR, Dye, GKZ, GPV, H, HK], [Kad, Kam.N1, Kam.N2, Kam, Kau7, Kau8, Kau9, DK2, Kau1, KK], [Kau10, KL, KL2, KR, KhR3, Kup, Nel, Satoh, SW, SW2, Saw, Saw2, TuTu, Tur4, Ver, Viro2, Viro, W, ZZ1, ZZ2] и ссылки в них.

Упомянутые выше теории имеют связь с различными задачами комбинаторики, трехмерной и четырехмерной топологии, теорией представлений групп и алгебр Ли. На последней основано построение так называемых *квантовых инвариантов*, см. [Tur1, Oht].

1.1.1. Основные определения и конструкции

(Классический) узел представляет собой образ гладкого вложения окружности S^1 в сферу S^3 ; два узла называются *изотопными*, если один из них может быть получен из другого диффеоморфным отображением объемлющего пространства S^3 на себя, сохраняющим ориентацию сферы S^3 . (Общеизвестно, что каждый из таких диффеоморфизмов гладко гомотопен тождественному в классе гладких диффеоморфизмов). Если мы вкладываем в

сферу S^3 несвязное объединение нескольких окружностей $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$, то говорят о *классическом зацеплении*; образ каждой окружности — узел — называется *компонентой зацепления*. Классификация узлов в S^3 эквивалентна классификации узлов в \mathbf{R}^3 . В случае, если фиксирована ориентация окружности S^1 , говорят об *ориентированном узле* (соответственно, в случае *ориентированного зацепления* требуется ориентация окружностей — прообразов компонент зацепления); в случае изотопии ориентированных зацеплений требуется, чтобы диффеоморфизм объемлющего пространства сохранял как ориентацию сферы S^3 , так и ориентации всех компонент.

Если компоненты зацепления перенумеровать и при изотопии потребовать, чтобы номера компонент сохранялись, то мы получим *крашенные зацепления*.

Ориентированное зацепление называется *оснащенным*, если в каждой его точке задан некоторый единичный непрерывно зависящий от точки нормальный к компоненте зацепления вектор; два оснащенных зацепления называются (оснащенно) изотопными, если существует сохраняющее ориентацию отображение объемлющего пространства (сферы S^3) на себя, переводящее одно зацепление в другое, согласованное с векторными полями. Оснащенные зацепления можно трактовать как вложения набора лент $S^1 \times I$ в трехмерное пространство (трехмерную сферу); соответствующее векторное поле указывает, каким образом эти ленты перекручены.

Обычно узлы кодируются следующим образом. Фиксируем узел, т.е. образ отображения $f : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Рассмотрим некоторую плоскость $h \subset \mathbf{R}^3$ (скажем, $h = Oxy$) и проекцию узла на нее. Без ограничения общности можно считать, что проекция узла на плоскость представляет собой вложенный конечный четырехвалентный граф, являющийся образом гладкого погружения окружности в плоскость. Обычно мы будем называть отрезок зацепления (т.е. образ в трехмерном пространстве отрезка — части окружности) его *ветвью*. Иногда (когда из контекста ясно, о чем идет речь) ветвью мы будем называть также проекцию ветви на плоскость. Каждая вершина графа проекции (называемая *перекрестком диаграммы зацепления*) снабжена следующей структурой. Пусть a, b — две ветви зацепления, проекции которых пересекаются в точке V . Так как a и b не пересекаются

в \mathbf{R}^3 , два прообраза точки V имеют различные z -координаты. Таким образом, мы можем сказать, какая ветвь (a или b) проходит сверху (образует *переход*); а какая — снизу (образует *проход*) (см. рис. 1.2). Ребра переходов изображаются сплошными линиями, в то время как проход изображается линией, имеющей разрыв в перекрестке.

Все перекрестки диаграммы ориентированного зацепления делятся на *положительные* \otimes и *отрицательные* \otimes . Легко проверить, что в случае диаграммы *узла* знак перекрестка не зависит от ориентации узла.

Такое изображение узла на плоскости называется *плоской диаграммой узла*.

Плоская диаграмма зацепления называется *альтернированной*, если при движении вдоль любой из ее компонент проходы чередуются с переходами.

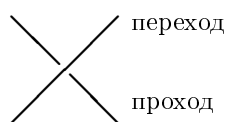


Рис. 1.2. Локальная структура перекрестка

Простейшие примеры классических узлов изображены на рис. 1.3.

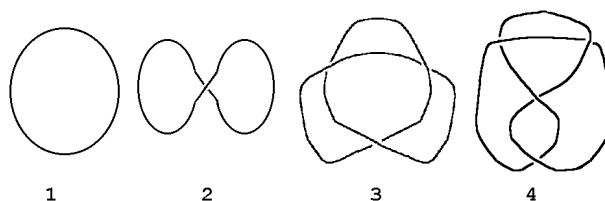


Рис. 1.3. Простейшие узлы

Первые две диаграммы представляют собой *тривиальный узел*; на третьей диаграмме изображен *трилистник*, на четвертой диаграмме — *восьмерка*. Все эти диаграммы являются альтернированными.

На рисунке 1.4.1. изображено тривиальное зацепление из двух компонент. На рисунках 1.4.2, 1.4.3 и 1.4.4 изображены *зацепление Хопфа*, *зацепление Уайтхеда* и *кольца Борромео* соответственно. Все эти три зацепления не тривиальны.

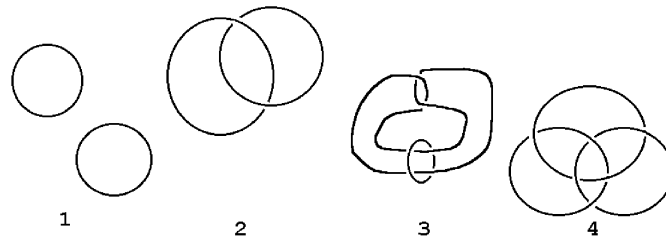


Рис. 1.4. Простейшие зацепления

Назовем *дугами* диаграммы компоненты связности диаграммы (при этом ветвь прохода предполагается разрывной, как и изображается на рисунках).

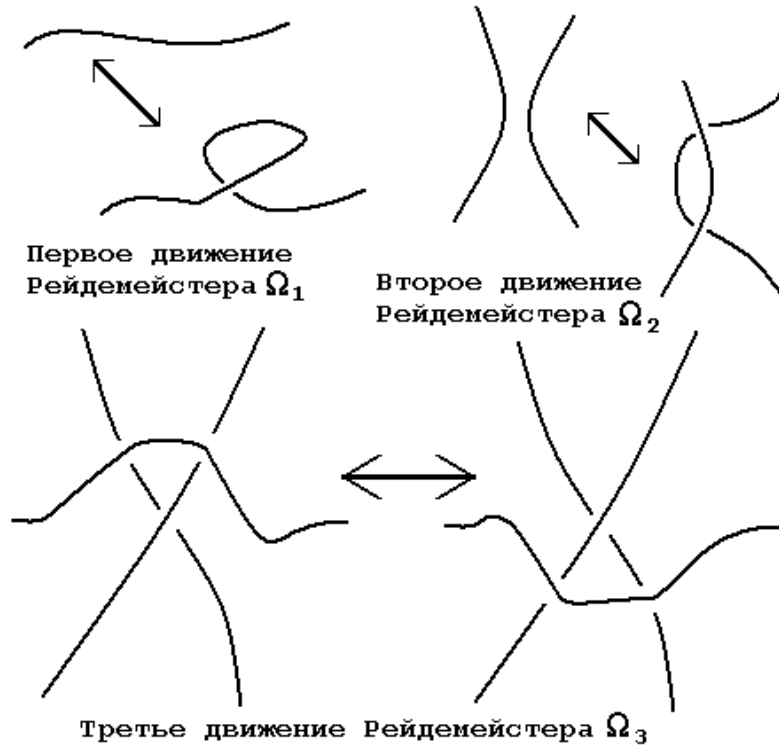
Четырехвалентный граф проекции без указания структуры проходов и переходов называется *тенью узла*. *Сложностью* узла называется минимальное количество перекрестков диаграмм узлов заданного изотопического типа. Будем далее называть диаграмму зацепления *связной*, если таковой является ее тень. В частности, связной является любая диаграмма любого узла.

В 1932 году немецкий тополог Курт Рейдемейстер [Rei] привел список локальных топологических перестроек (преобразований Рейдемейстера, известных ныне как движения Рейдемейстера, см. рис. 1.5) и доказал, что любые две плоские диаграммы задают одно и то же зацепление тогда и только тогда, когда они могут быть получены друг из друга конечной последовательностью этих движений, а также плоской изотопии — преобразования диаграммы посредством диффеоморфизма плоскости на себя, сохраняющего ориентацию плоскости. Это позволяет рассматривать изотопические классы узлов как комбинаторные объекты: они представляют собой классы эквивалентности плоских диаграмм по движениям Рейдемейстера.

Движения Рейдемейстера являются отправной точкой для комбинаторного определения виртуальных узлов (см. далее).

С тех пор доказательство инвариантности тех или иных функций на узлах (задаваемых на диаграммах узлов) основывается, как правило, на проверке инвариантности относительно движений Рейдемейстера.

Одним из наиболее ранних инвариантов в теории узлов является топо-

Рис. 1.5. Движения Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

логический инвариант — *группа узла*.

Группой узла $K \subset \mathbf{R}^3$ (обозначение $\pi(K)$) называется фундаментальная группа дополнения к узлу K , точнее говоря, к его малой трубчатой окрестности $N(K)$, а именно, мы полагаем $\pi(K) = \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus N(K))$.

Известно, что группа узла является очень сильным инвариантом: так, например, знаменитая теорема Дена-Палакирьякопулоса ([Пап]) утверждает, что единственный узел, имеющий группу, изоморфную группе \mathbf{Z} , — это тривиальный узел.

По диаграмме узла можно явно выписать некоторое копредставление группы узла (носящее название *копредставления Виртингера*).

Копредставление Виртингера задается следующим образом. Рассмотрим зацепление L , заданное некоторой плоской диаграммой \bar{L} . Рассмотрим некоторую точку x , “висящую” над плоскостью проекции зацепления. Будем классифицировать гомотопические классы петель в $\mathbf{R}^3 \setminus N(K)$, исходящих

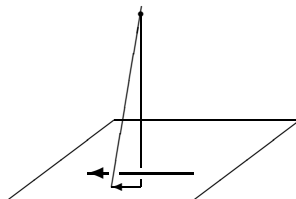


Рис. 1.6. Петли, соответствующие ребрам

из данной точки. В качестве образующих элементов можно выбрать следующие. Рассмотрим петли, исходящие из точки x и зацепляющие дуги диаграммы \bar{L} один раз в направлении, заданном правилом буравчика (каждая такая петля ограничивает диск, пересекающий ровно одну дугу узла ровно в одной точке), см. рис. 1.6.

Перейдем теперь к описанию определяющих соотношений.

Геометрическая связь между петлями-образующими имеет следующий вид (в смысле соотношения в группе): $b = cac^{-1}$, если дуга c отделяет дугу a от дуги b , см. рис. 1.7.

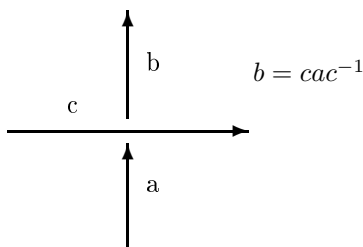


Рис. 1.7. Соотношение в перекрестке

Из геометрических соображений легко следует, что данный набор соотношений порождает все соотношения в группе узла.

Таким образом, копредставление Виртингера фундаментальной группы имеет следующий вид: дуги соответствуют образующим, в то время как определяющие соотношения происходят из перекрестков: мы полагаем $cac^{-1} = b$ для соседних дуг a и b , отделенных дугой c , если b лежит слева от c относительно ориентации дуги c .

Главный недостаток группы узла (зацепления) состоит в том, что груп-

пы, заданные различными копредставлениями, трудно сравнивать. В общем случае распознавание группы по копредставлению является неразрешимой проблемой. Тем не менее группа узла является основой для построения более удобных (хотя и менее мощных) инвариантов узлов и зацеплений и доказательства структурных теорем.

Фундаментальная группа является почти полным инвариантом узлов, в частности, она распознает простые узлы: узел называется *простым*, если он не представим в виде связной суммы двух нетривиальных узлов; определение связной суммы см. в гл.2. Более точно, два простых ориентированных узла имеют изоморфные фундаментальные группы, если они либо изотопны, либо получаются друг из друга посредством замены ориентации узла и/или объемлющего пространства.

Естественным формальным алгебраическим обобщением фундаментальной группы является понятие *дистрибутивного группоида* или *квандла* (*quandle*), введенного независимо С.В.Матвеевым [Мат] и (несколько позже) Д.Джойсом [Joy].

Идея состоит в замене группового соотношения в перекрестках вида $b = sac^{-1}$ формальным соотношением вида $a \circ c = b$.

Далее мы описываем формальный объект, образующими которого являются дуги диаграммы, подчиняющиеся заданным соотношениям. Непосредственная проверка инвариантности объекта, который мы строим, приводит к следующим необходимым аксиомам:

1. Идемпотентность: $a \circ a = a$;
2. Наличие левого обратного: для фиксированных b, c существует и единствен элемент x , такой что $x \circ b = c$. В этом случае будем писать $x = c/b$.
3. Правая самодистрибутивность: $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$.

Эти аксиомы отвечают первому, второму и третьему движениям Рейдемейстера соответственно.

Этот объект (точное аксиоматическое определение см. в гл. 3) получается более сильным, чем фундаментальная группа. Непосредственная проверка аксиом дистрибутивного группоида для операции $a \circ b = bab^{-1}$ в груп-

не показывает, что эта операция удовлетворяет всем аксиомам дистрибутивного группоида и определяет функтор из категории групп в категорию дистрибутивных группоидов, при этом естественным прообразом дистрибутивного группоида узла является фундаментальная группа дополнения к узлу (рассмотренная с точностью до изоморфизма).

Дистрибутивным группоидам в теории виртуальных и классических узлов посвящена глава 3 настоящей диссертации.

Главный объект теории Луиса Кауфмана (1996) см. [Kau1] и исследования настоящей диссертации — виртуальный узел (или — в случае многих компонент — виртуальное зацепление) представляет собой естественное комбинаторное обобщение обычного понятия узла: вводится новый тип перекрестка и пополняется список движений Рейдемейстера. Новый тип перекрестка (который называется виртуальным и изображается кружочком) не следует трактовать ни как переход одной ветви над другой, ни как проход одной ветви под другой (его следует понимать как диаграмматическое изображение на плоскости двух “далеко отстоящих” частей узла (зацепления), пересечение которых является дефектом изображения). В этом смысле естественным является следующий выбор обобщенных движений Рейдемейстера: все обычные движения Рейдемейстера, относящиеся к классическим перекресткам, а также движение объезда. Последнее состоит в том, что ветвь диаграммы узла, содержащая последовательно несколько виртуальных перекрестков, но не содержащая классических перекрестков, может быть преобразована в любую другую ветвь с теми же начальной и конечной точками; на месте новых пересечений и самопересечений ставятся виртуальные перекрестки, см. рис. 1.8.

Классические движения Рейдемейстера и объезд составляют набор *обобщенных движений Рейдемейстера*.

Определение 1.0. *Виртуальной диаграммой* (или *диаграммой виртуального зацепления*) называется вложенный в плоскость четырехвалентный граф с классическими и виртуальными перекрестками.

Определение 1.1. *Виртуальное зацепление* — это класс эквивалентности виртуальных диаграмм по обобщенным движениям Рейдемейстера.

Подобно классическому зацеплению, виртуальное зацепление обладает

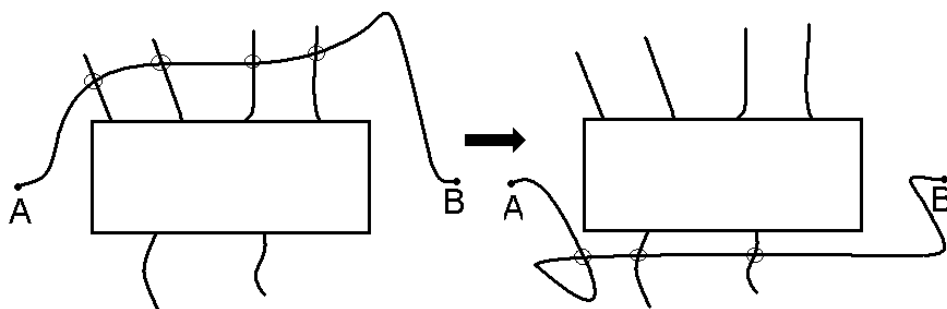


Рис. 1.8. Объезд

некоторым количеством *компонент*.

Виртуальный узел — это виртуальное зацепление с одной уникарсальной компонентой.

Компоненты виртуального зацепления можно описать комбинаторно, исходя из виртуальной диаграммы.

Под уникарсальной компонентой (диаграммы) виртуального зацепления понимается следующее. Рассмотрим виртуальную диаграмму L как одномерный комплекс на плоскости. Часть связных компонент этого комплекса представляет собой окружности; каждую такую компоненту назовем (уникарсальной) *компонентой* зацепления. Оставшаяся часть представляет собой четырехвалентный граф Γ с вершинами в классических и виртуальных перекрестках. *Уникарсальной компонентой* диаграммы назовем также (помимо компонент-окружностей) классы эквивалентности на множестве ребер графа: два ребра e, e' называются эквивалентными, если существует набор ребер $e = e_1, \dots, e_k = e'$ и набор вершин v_1, \dots, v_{k-1} (некоторые из которых, быть может, совпадают) графа Γ , такой, что ребра e_i, e_{i+1} подходят к вершине v_i с противоположных сторон.

Числом закрученности $w(L)$ виртуальной диаграммы называется количество положительных перекрестков \otimes минус количество отрицательных перекрестков \otimes .

Легко видеть, что количество компонент диаграммы зацепления является инвариантным при обобщенных движениях Рейдемейстера. В классическом случае это определение компонент зацепления согласуется с приве-

денным ранее.

Замечание 1.1. Отметим, что такой подход — стандартные движения внутри локальной евклидовой области и движения типа объезда — был использован Н.Камадой и С.Камадой [КК] для построения формальных теорий многомерных “виртуальных узлов” и их инвариантов.

Это подводит к следующей трактовке виртуальных узлов, описываемой в терминах гауссовых диаграмм.

Пусть узел K задан отображением f ориентированной окружности S^1 в трехмерное пространство.

Определение 1.2. Гауссовой диаграммой, соответствующей плоской диаграмме (виртуального) узла K называется диаграмма, состоящая из ориентированной окружности (с фиксированной точкой, которая не является прообразом перекрестка), на которой прообразы прохода и перехода (для каждого классического перекрестка) соединены стрелкой, направленной от прообраза перехода к прообразу прохода. Каждая стрелка снабжена знаком, который совпадает со знаком перекрестка, т.е. $+$ для перекрестка вида \otimes и $-$ для \otimes .

Так, для классического правого трилистника гауссова диаграмма выглядит следующим образом, см. рис. 1.9.

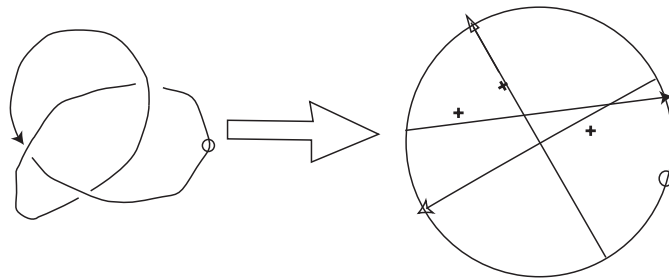


Рис. 1.9. Гауссова диаграмма правого трилистника

Произвольные гауссовы диаграммы, вообще говоря, не могут быть представлены в виде гауссовых диаграмм классических узлов. Это связано с невозможностью вложения в плоскость графа с некоторой комбинаторной структурой. Тем не менее, все гауссовы диаграммы можно реализовать посредством погружения общего положения, отмечая точки, имеющие боль-

ше одного прообраза (в случае общего положения — ровно два прообраза), виртуальными перекрестками, см. рис. 1.10.

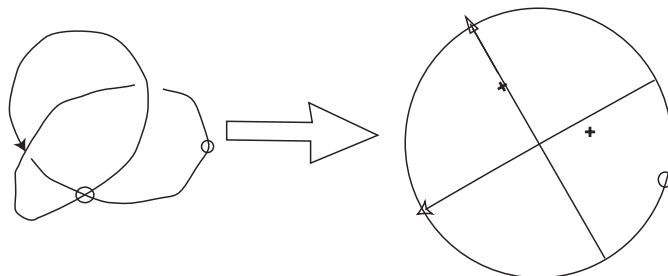


Рис. 1.10. Гауссова диаграмма виртуального узла

Это естественным образом приводит к следующему определению виртуальных узлов (не зацеплений): нужно рассмотреть все формальные гауссовы диаграммы и формально описать движения Рейдемейстера (как в случае классических диаграмм узлов): они будут представлять собой комбинаторные схемы преобразований гауссовых диаграмм. В этом случае классы эквивалентности гауссовых диаграмм по формальным движениям Рейдемейстера и будут представлять виртуальные узлы. Отметим, что нам не понадобится движение объезда, так как гауссова диаграмма “не знает” ничего о расположении виртуальных перекрестков на плоскости, а “знает” лишь классические перекрестки и то, как они соединены между собой. Это означает, что гауссовы диаграммы чувствительны только к классическим движениям Рейдемейстера и нечувствительны к движениям объезда. Точного списка движений Рейдемейстера для гауссовых диаграмм мы не приводим, см., напр., [GPV].

Ветви виртуального узла, имеющие виртуальное пересечение, относящиеся к двум “далеко отстоящим” частям узла, могут свободно двигаться по поверхности независимо одна от другой. Это приводит к определению виртуальных узлов как узлов в утолщенных ориентированных поверхностях $S \times I$, где S — двумерная ориентированная замкнутая поверхность, а I — отрезок с фиксированной ориентацией; при этом утолщенные поверхности должны рассматриваться с точностью до стабилизации, т.е. с точностью до добавления и удаления ручек из поверхности S так, чтобы добавляемые утолщенные ручки не затрагивали соответствующего узла (более подроб-

ное описание см. в гл. 2).

Здесь и далее предполагается, что на утолщенной ориентированной поверхности $S \times I$ фиксирована структура прямого произведения и указано, какой край является верхним, а какой — нижним.

В случае зацепления нужно разрешать также несвязные поверхности $S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$ (при этом иногда требуют, чтобы в каждом многообразии $S_j \times I$ лежала по крайней мере одна компонента виртуального зацепления, [Kur]). Зацепления в $S \times I$ описываются диаграммами на S с проходами и переходами. В этом смысле виртуальные диаграммы получаются с помощью регулярных проекций общего положения диаграмм с поверхности S на плоскость: перекрестки переходят в классические перекрестки, а новые пересечения (дефекты проекции) отмечаются виртуальными перекрестками; при этом требуется, чтобы при диффеоморфизме проекции окрестностей классических перекрестков все переходили на плоскость с сохранением ориентации. Движения Рейдемейстера для диаграмм на S (те же, что и в случае классических диаграмм узлов) соответствуют классическим движениям Рейдемейстера для виртуальных диаграмм; существуют также преобразования, которые не меняют комбинаторной структуры диаграммы на S , но меняют комбинаторную структуру проекции на плоскость: им соответствует движение объезда.

Теорема об эквивалентности различных определений виртуальных узлов была анонсирована в работе [Kau7] и доказана различными авторами, в том числе Кауфманом. Полное подробное доказательство можно найти, например, в [Ma1].

Наряду с обычными виртуальными узлами существует теория “скрученных узлов”, предложенная Бургуаном [Bou], которые представляют собой виртуальные узлы в ориентированных утолщениях неориентируемых поверхностей. Мы обратимся к скрученным виртуальным узлам в главе 6.

Реализация движений объезда движениями на утолщенных поверхностях и их проекциями изображена на рис. 1.11.

Это подводит нас к локальным версиям движения объезда, которые состоят из:

1. Чисто виртуальных движений Рейдемейстера $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$, которые полу-

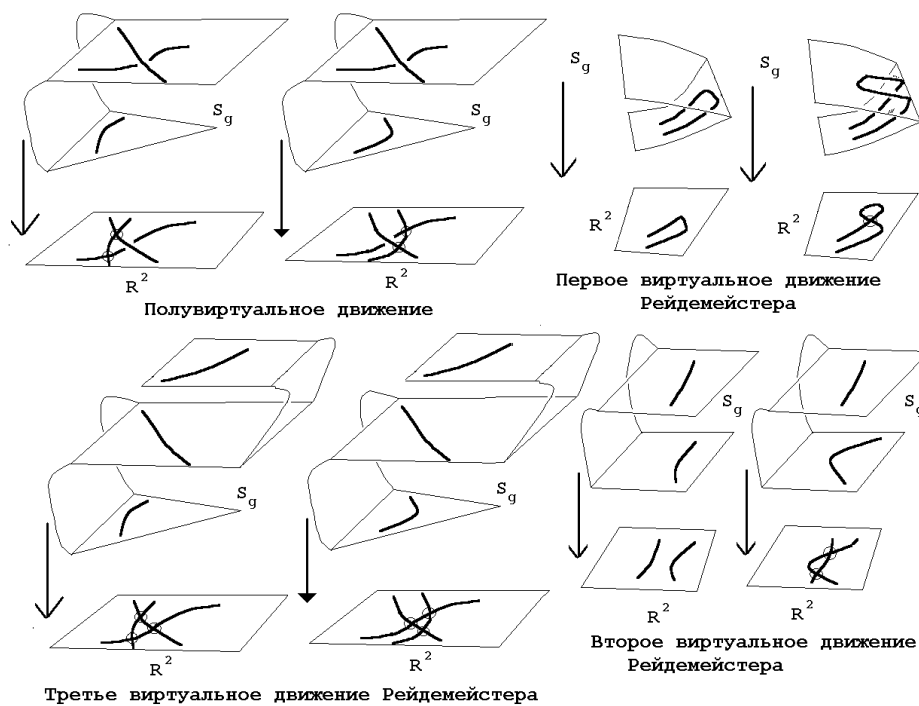
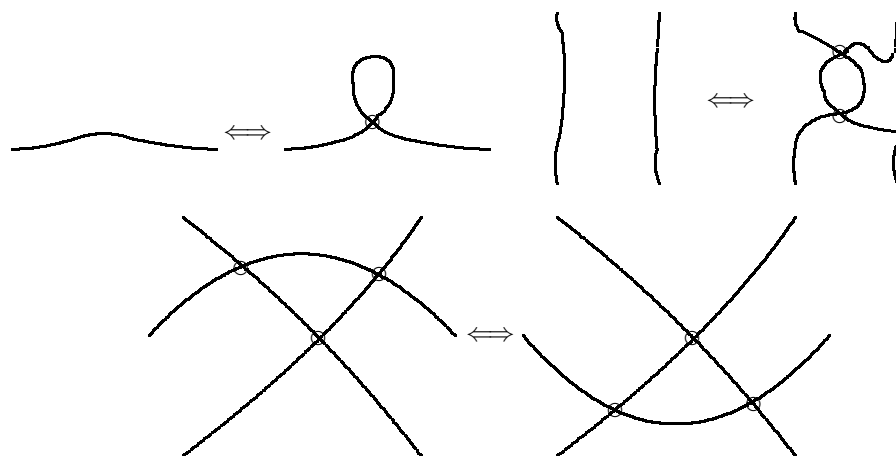


Рис. 1.11. Обобщенные движения Рейдемейстера и утолщенные поверхности

чаются из классических движений Рейдемейстера заменой всех участвующих в них классических перекрестков виртуальными перекрестками, см. рис. 1.12.

Рис. 1.12. Движения $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$

2. Полувиртуальной версии Ω_3'' третьего движения Рейдемейстера, которая состоит в том, что дуга, содержащая два виртуальных перекрестка, может быть перенесена сквозь классический перекресток, см. рис. 1.13.

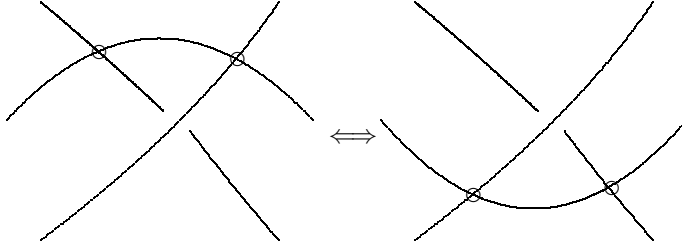


Рис. 1.13. Полувиртуальная версия Ω_3''

Назовем *увеличивающим* тот из вариантов движения Рейдемейстера, который увеличивает количество перекрестков (классических в классическом случае и виртуальных — в виртуальном). Так, движения $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1', \Omega_2''$ “в одну сторону” являются увеличивающими, а “в другую сторону” — уменьшающими.

Очевидно следующее

Утверждение 1.1. *Две виртуальные диаграммы K и K' получаются друг из друга последовательным применением движений оббеда тогда и только тогда, когда они получаются одна из другой последовательным применением движений $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3', \Omega_3''$.*

Восстановление диаграммы узла в утолщенной поверхности по виртуальной диаграмме на плоскости происходит следующим образом.

Пусть L — диаграмма виртуального зацепления на S^2 (мы компактифицируем \mathbf{R}^2 одной точкой). Каждый виртуальный перекресток этой диаграммы соответствует пересечению двух дуг. Выберем одну из них и создадим для ее поднятия “ручку”, см. рис. 1.14. В итоге мы получим диаграмму (с проходами, переходами и виртуальными перекрестками) на торе, у которой количество виртуальных перекрестков на единицу меньше, чем у изначальной диаграммы.

Отметим, что выбор расположения этой ручки — сверху или снизу — несуществен, так как утолщенная поверхность рассматривается нами сама по себе вне конкретного вложения поверхности в \mathbf{R}^3 .

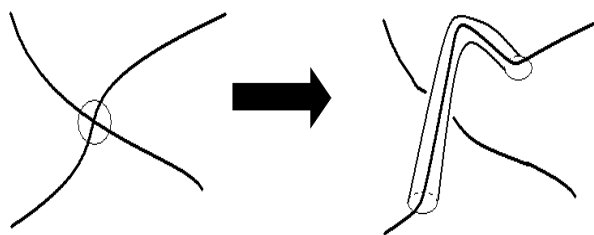


Рис. 1.14. Поднятие виртуального перекрестка на ручку

Легко проверяется также, что несуществен и выбор той из двух дуг, которая “поднимается” на вновь создаваемую ручку — две картинки-диаграммы K_1 и K_2 , соответствующие таким двум поднятиям на поверхности с ручками M_1 и M_2 , т.е. $K_1 \subset M_1$ и $K_2 \subset M_2$, будут комбинаторно эквивалентны (т.е. существует гомеоморфизм $f : M_1 \rightarrow M_2$ одного поднятия на другое, переводящий одну виртуальную диаграмму с перекрестками в другую $f(K_1) = K_2$).

Продолжая далее заменять виртуальные перекрестки на ручки, мы можем избавиться ото всех виртуальных перекрестков и получить диаграмму на S_g ($=S_g \times \{\frac{1}{2}\} \subset S_g \times [0, 1]$), где g — некоторое количество ручек. Такое преобразование объясняется движением объезда. Каждое такое движение состоит в “собрании” последовательно расположенных ручек в одну и дроблении этой ручки на новые ручки, расположенные в других местах, см. рис. 1.15

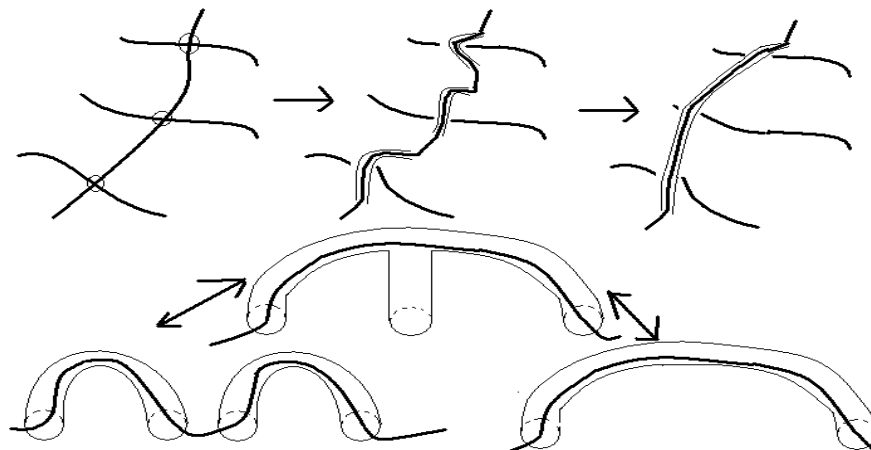


Рис. 1.15. Объезд и стабилизация

В нижней части рисунка 1.15 “собрание” (или, наоборот, дробление) состоит из элементарных движений, которые как раз представляют собой дестабилизацию (соотв., стабилизацию).

При этом классические движения Рейдемейстера производятся локально на некоторой части поверхности S_g , происходящей из сферы посредством добавления ручек.

Естественно, что поверхность $S_g \times I$ автоматически является ориентированной: ориентация для S_g происходит из ориентации сферы S^2 , к которой приклеиваются ручки.

Отметим, что на поверхности S_g нет никакой выделенной системы координат (параллелей и меридианов). Действительно, при применении первого виртуального движения Рейдемейстера эта поверхность подвергается скручиванию Дена, см. рис. 1.16.



Рис. 1.16. Скручивание Дена и движение Ω'_1

Отметим, что два похожих на движения Рейдемейстера преобразования, показанные на рисунке ниже, вообще говоря, не являются эквивалентностями виртуальных узлов. Они получили название *запрещенных движений*, см. рис. 1.17.

Оказывается (это впервые заметили Гусаров, Поляк и Виро [GPV]), что при добавлении обоих запрещенных движений любые два виртуальных узла (но не зацепления!) становятся эквивалентными. Если добавить только одно из этих движений, а другое оставить запрещенным, получится интересная теория трубчатых узлов. Эта теория была предложена Шином Сато, [Satoh], см. также [KM2].

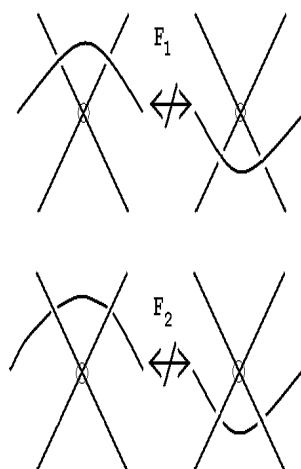


Рис. 1.17. Запрещенные движения

Общеизвестно (доказательство, см., напр., в [Ma1]), что каждый классический узел может быть перестроен в тривиальный узел последовательной заменой перекрестков $\otimes \iff \otimes$. Это является отправной точкой для построения инвариантов узлов (скейн-модули, алгебры Конвея, полином Кауфмана, инварианты Васильева и др.) Для виртуальных узлов это утверждение неверно, а именно, разрешение замены типа классического перекрестка приводит к нетривиальной теории *плоских виртуальных узлов*, см., напр., [KK]. Ее можно формализовать следующим образом. Вместо любого классического перекрестка — прохода или перехода — мы используем один тип перекрестка, называемый *плоским (классическим)*; он изображается обыкновенным пересечением двух линий на плоскости; кроме того, мы допускаем виртуальные перекрестки. Движения Рейдемейстера для плоских виртуальных узлов изображены на рис. 1.18.

Простейший пример плоского виртуального узла, который не может быть сведен к тривиальному, изображен на рис. 1.19.

Виртуальные узлы поднимаются на “утолщенные” поверхности. Если не обращать внимание на то, какая ветвь виртуального узла в классическом перекрестке проходит выше, а какая — ниже (забыть про структуру проходов/переходов), мы получим естественное поднятие плоских виртуальных узлов на двумерные поверхности (утолщение не требуется); здесь мы опи-

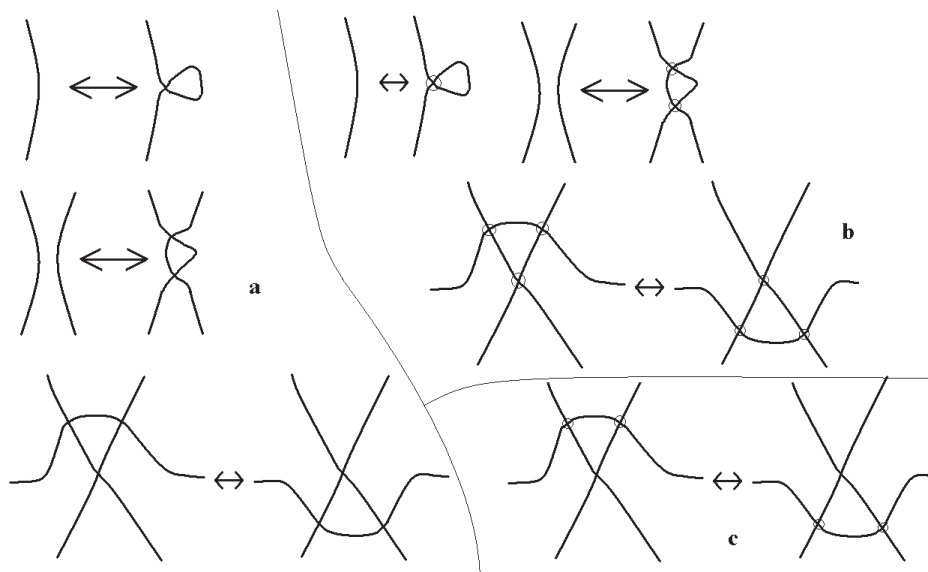


Рис. 1.18. Движения Рейдемейстера для плоских виртуальных узлов

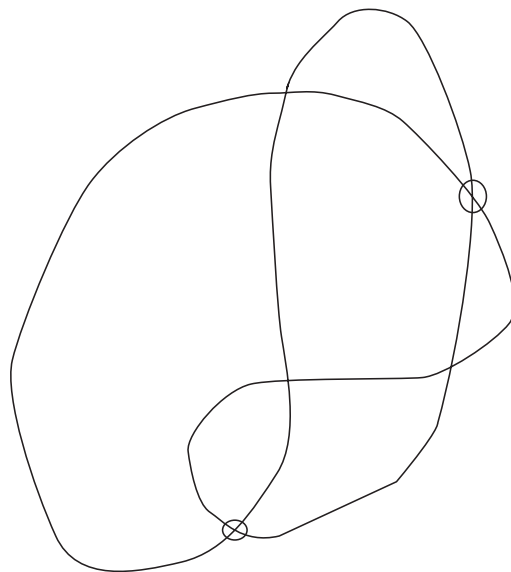


Рис. 1.19. Простейший нетривиальный плоский виртуальный узел

шем другой способ поднятия, отличный от описанного на стр. 22.

Поднятие происходит в два этапа. Сначала по виртуальной диаграмме L мы строим поверхность с краем следующим образом. В каждом классическом перекрестке диаграммы зацепления мы располагаем крест (верхняя часть рис. 1.20), а в каждом виртуальном перекрестке — пару непересека-

ющихся лент (нижняя картинка), ср. [КК]. Соединяя эти кресты и ленты лентами (не перекрученными), идущими вдоль дуг зацепления, мы получаем ориентируемое двумерное многообразие с краем, которое мы обозначим через M' .

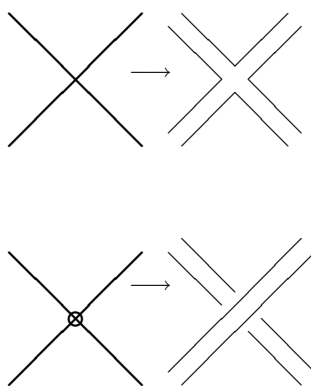


Рис. 1.20. Локальная структура поверхности M'

Естественным образом проекция диаграммы зацепления L отображается в M' таким образом, что дуги диаграммы отображаются в средние линии лент, а классические (плоские) перекрестки соответствуют перекресткам внутри крестов. Следовательно, мы получаем набор кривых $\delta \subset M'$. Заклеивая дисками граничные компоненты многообразия M' , мы получаем ориентируемое многообразие $M = M(L)$ без края с набором кривых δ , погруженных в него.

Это приводит нас к теореме, см. напр., [КК].

Теорема 1.1. *Плоские виртуальные зацепления — это классы эквивалентности конечных наборов ориентированных кривых в двумерных поверхностях, рассмотренных с точностью до свободной гомотопии, стабилизации и дестабилизации.*

Вопрос о том, являются ли два таких задания плоского виртуального зацепления эквивалентными в категории плоских виртуальных узлов легко распознается алгоритмически. Впервые это было сделано Б. Райнхартом [Rein]. Ниже мы приводим один алгоритм такого распознавания. Настоящий алгоритм и его связь с виртуальными узлами был сообщен автору

Е.А.Кудрявцевой. Здесь двумерная поверхность подразумевается ориентированной, замкнутой и имеющей конечное число компонент связности (если S несвязна, то ориентированной предполагается каждая из ее компонент связности).

Определим эквивалентность с точностью до свободной гомотопии и стабилизации более точно.

Пусть S — множество всех пар (M, δ) , где M — гладкая ориентированная замкнутая двумерная поверхность без края (возможно несвязная, но с конечным числом связных компонент), а δ — неупорядоченное конечное семейство замкнутых кривых, погруженных в M . В дальнейшем мы будем рассматривать лишь погружения общего положения.

Определим классы эквивалентности на множестве S посредством следующих элементарных отношений эквивалентности:

1. Если существует гомеоморфизм $M \rightarrow M'$, отождествляющий наборы δ и δ' , то две пары (M, δ) , (M', δ') эквивалентны,
2. Для фиксированного многообразия M если набор кривых δ свободно гомотопен набору кривых δ' в M , то пары (M, δ) и (M, δ') эквивалентны.
3. Если N является многообразием, полученным из M удалением двух дисков, не пересекающих кривых из δ , и вклеиванием ориентированных ручек на их место (*стабилизация*), то пары (M, δ) и (N, δ) эквивалентны.
4. Для каждого компактного замкнутого ориентированного двумерного многообразия N пары (M, δ) и $(M \sqcup N, \delta)$ являются эквивалентными.

Естественно, вместе с каждым элементарным преобразованием рассматривается также и обратное преобразование; так, преобразование, обратное к стабилизации называется *дестабилизацией*.

В п.4. \sqcup означает несвязную сумму многообразия M (со всеми кривыми из набора δ на этом многообразии) и многообразия N (с пустым набором кривых).

В дальнейшем такие комбинаторные объекты понадобятся нам для построения более сильных инвариантов виртуальных узлов (Ξ -полином, см. гл. 4, раздел 4.2.2).

Идея распознавания плоских виртуальных узлов состоит в том, что дестабилизация не препятствует движениям, уменьшающим количество перекрестков и наоборот. Таким образом, упрощение можно производить в любом порядке. Опишем это более подробно.

Рассмотрим элемент $(M, \delta) \in S$. Назовем *двуугольником* два отрезка I_1, I_2 кривых (или одной кривой) из δ , такие, что пересечение $I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2$ состоит из двух точек, при этом объединение $I_1 \cup I_2$ ограничивает диск на M . Под *петлей* будем понимать отрезок кривой из набора δ , концевые точки которого совпадают, при этом отрезок не имеет других точек самопересечения, кроме концевых, а получившаяся замкнутая кривая ограничивает диск на M .

Алгоритм распознавания сводится к поиску возможности дестабилизировать поверхность (уменьшить род) либо к уменьшению количества пересечений посредством разведения двуугольника или удаления петли, см. рис. 1.21. В случае, когда ничего из вышеперечисленного сделать невозможно, диаграмма называется *минимальной*.

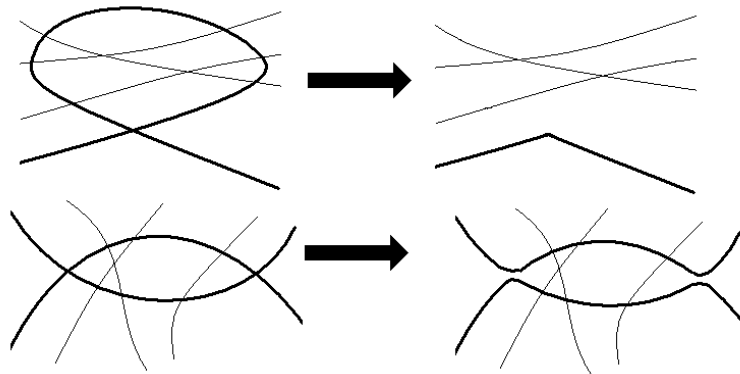


Рис. 1.21. Удаление петли и разведение двуугольника

Минимальные диаграммы получаются друг из друга последовательным применением третьего движения Рейдемейстера, которое не меняет ни поверхности, ни количества перекрестков. Поэтому распознавание двух эк-

вивалентных минимальных диаграмм представляет собой простую комбинаторную задачу, которая решается перебором.

Таким образом, плоские виртуальные узлы — нетривиальное (но полностью описанное алгоритмически) первое приближение виртуальных узлов, допускающее наглядную геометрическую интерпретацию.

Параллельно теории узлов строится теория кос (впервые понятие введено Э.Артином, [Art1]). Под *группой кос из n нитей* понимается фундаментальная группа конфигурационного пространства неупорядоченных наборов из n различных точек на комплексной прямой. Таким образом, для задания косы из n нитей нужно задать замкнутый путь в этом конфигурационном пространстве, т.е. описать траекторию движения набора n точек во времени так, чтобы они в конечный момент попали на место изначальных точек (в некотором порядке). При этом порядок точек не фиксирован. Если фиксировать порядок точек, мы приходим к понятию *крашенных кос*. Косы можно рассматривать в гладкой или в кусочно-линейной категории, при этом в гладкой категории стандартным образом определяется сглаживание при взятии операции произведения кос.

Обычно за точку отсчета (в конфигурационном пространстве) берут набор целых точек $1, \dots, n \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$.

Траектории движения отдельных точек представляют собой *нити* косы. Гомотопия в пространстве кос представляет собой гладкую (кусочно-линейную) деформацию всех нитей без пересечений.

Существует естественная операция замыкания кос: если соединить каждый верхний конец косы с ее соответствующим нижним концом, мы получим корректно определенный класс зацепления, см. рис. 1.22.

Классы эквивалентности кос имеют естественную структуру группы.

Параллельно с теорией виртуальных узлов существует теория виртуальных кос, впервые рассматривавшаяся в работах В.В.Вершинина, [Ver], С. Камады, [Kam], см. также [Ma3, KL, KL2]. Группа виртуальных кос из n нитей представляет собой группу с двумя семействами образующих: $n - 1$ классических (как у классических кос) и $n - 1$ виртуальных (как у группы перестановок); соотношения соответствуют обобщенным движениям Рейдемейстера (всем, кроме первого классического Ω_1 и первого виртуально-

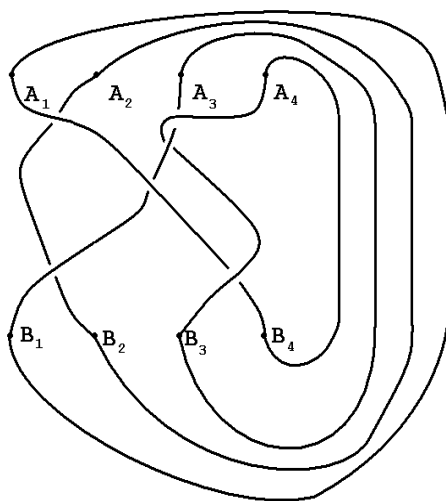


Рис. 1.22. Замыкание косы

го Ω'_1) и дальней коммутативности (см. далее). Они разделяются на три группы: классические соотношения (относящиеся к классическим образующим), соотношения группы перестановок (относящиеся к виртуальным образующим) и смешанные соотношения (соответствующие полувиртуальному движению Ω''_3).

Подобно тому, как замыкания классических кос задают классические узлы или зацепления, замыкания виртуальных кос дают виртуальные узлы или зацепления. При этом такие зацепления автоматически являются ориентируемыми: ориентация наследуется из косы, если все нити косы ориентировать сверху вниз. Пример виртуальной косы изображен на рис. 1.23.

Имеется ряд естественных аспектов теории классических и виртуальных кос. Отметим наиболее важные из них.

1. Любое ориентированное классическое зацепление может быть получено замыканием некоторой косы. Это доказано в [Ale3]. Любое виртуальное ориентированное зацепление может быть получено замыканием некоторой виртуальной косы [Kam, Ver].

2. Замыкания изотопных (в классическом случае) или эквивалентных (в виртуальном случае) кос задают изотопные (эквивалентные) зацепления. Это утверждение следует из определений.

3. Две классические косы, имеющие эквивалентные замыкания, полу-

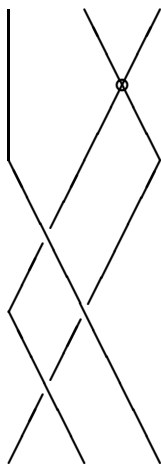


Рис. 1.23. Виртуальная коса

чаются друг из друга последовательным применением так называемых *движений Маркова* (Бирман [Bir2], Мортон [Mor] и др.), и т.д. Две виртуальные косы, имеющие эквивалентные замыкания, получаются друг из друга последовательным применением *виртуальных движений Маркова* (С.Камада); другой набор достаточных движений предложен Л.Кауфманом и С.Ламбропулу [KL].

Важное место принадлежит следующим вопросам.

4. Группа классических кос естественно вложена в группу виртуальных кос. Впервые этот факт был доказан Фенном, Риманьи и Рурком в [FRR], в настоящей диссертации в главе 7 мы приводим доказательство, основанное на инварианте \mathcal{F} [Ma3], построенном автором.

Отметим, что утверждение о взаимной однозначности естественного отображения множества классических узлов в подмножество множества виртуальных узлов не эквивалентно аналогичному вопросу о косах. Более того, никакое из этих двух утверждений не является прямым следствием другого.

5. Классические косы допускают множество алгоритмов распознавания, см., напр., [Art1, Deh1], явно описываемые полные инварианты, а также точные конечномерные представления [Big1, Kra]. Кроме того, для классической группы кос из произвольного числа нитей положительно решается проблема сопряженности [Gar]. Алгоритм Деорнуа приводит к упорядоче-

нию классических кос, см. [Deh1, MN].

Для случая виртуальных кос алгоритм распознавания построен В.Г. Бардаковым посредством приведения кос к *нормальной форме*, см. [Bar].

Автором настоящей диссертации построен инвариант виртуальных кос, являющийся обобщением одного полного инварианта классических кос. Является ли этот инвариант полным, до сих пор неизвестно.

К настоящему моменту не решена проблема сопряженности для виртуальных кос, а также открыт вопрос о том, являются ли группы виртуальных кос линейными.

6. Также актуален вопрос построения инвариантов узлов посредством кос. В классическом случае построению таких инвариантов положил начало В.Джонс [Jon2], построивший инвариант зацеплений с использованием теоремы Маркова. В дальнейшем это привело к теории *квантовых инвариантов классических узлов*. Теория квантовых инвариантов виртуальных узлов до конца не построена; важным препятствием для построения такой теории является первое виртуальное движение Рейдемейстера Ω'_1 . Если исключить это движение из списка, мы получим теорию *жестких виртуальных узлов*, на которые продолжаются все квантовые инварианты классических узлов (теорема Кауфмана из работы [Kau7]). Теория жестких узлов является более точным приближением к теории классических узлов, чем теория виртуальных узлов.

1.2. Мотивация

Основными темами диссертации являются виртуальные узлы и гомологии Хованова.

Виртуальные узлы представляют интерес по следующим причинам.

1. Являясь классическими объектами трехмерной топологии (узлы в утолщенных поверхностях, рассматриваемые с точностью до стабилизации), они допускают исследование объектов трехмерной топологии с использованием комбинаторной техники (плоских диаграмм с проходами-переходами, гауссовых диаграмм). Они также дают подход к изучению трехмерных многообразий с коническими особенностями (виртуальные трех-

мерные многообразия [DK1]), а также к узлам в трехмерных многообразиях. Таким образом, любая теорема о виртуальных узлах (доказанная, например, комбинаторными методами с использованием плоских диаграмм) является теоремой об узлах в утолщенных поверхностях вида $S_g \times I$ в силу теоремы Куперберга [Куп] (см. гл. 2).

2. Доказательство некоторых классических теорем использует виртуальные узлы. К таковым относится, например, теорема Гусарова [GPV] о существовании комбинаторных формул типа Виро-Поляка [PV] для вычисления инвариантов Васильева классических узлов. В этих формулах появляются нереализуемые гауссовы диаграммы, т.е. виртуальные узлы.

3. Теория гомологий Хованова узлов в утолщенных поверхностях строится с использованием идей теории виртуальных узлов (см. главы 5,6 настоящей диссертации).

4. Задача о планарности графов с крестовой структурой (происходящая из теории инвариантов Васильева классических узлов) решается методами, заимствованными из теории виртуальных узлов (атомы, d -диаграммы и др), подробнее см. главу 8.

5. Виртуальные узлы (и узлы в утолщенных поверхностях $S_g \times I$) стимулируют развитие и изучение различных алгебраических структур. К таковым относится, например, бивалгебра Ли Голдмана-Тураева, [Tur5, Gold] и теория виртуальных струн, см. [Tur4].

6. Некоторые инварианты виртуальных узлов, ограниченные на множество классических узлов, совпадают с хорошо известными классическими инвариантами (см. работы [Ma7, Ma8, DK1, DK2], обобщающими полином Джонса, фундаментальной группы, дистрибутивного группоида и квантовых инвариантов зацеплений). Эти инварианты освещают некоторые важные феномены теории виртуальных узлов, существование которых в классическом случае до сих пор является открытой проблемой: так, например, существует виртуальный узел K , имеющий группу, изоморфную группе \mathbf{Z} , полином Джонса которого нетривиален (не равен 1). Этот феномен показывает, что узел K не является классическим, а также указывает на сложность вычисления полинома Джонса по топологическим инвариантам узлов в классическом случае.

Систематический поиск виртуальных узлов с тривиальным полиномом Джонса и попытка выявить среди них классические является, с одной стороны, подходом [FKM] к классической давно стоящей задаче, которая до сих пор не решена, а с другой стороны стимулирует постановку новых задач о виртуальных узлах и, следовательно, об узлах в утолщенных поверхностях.

Другая такая задача — вопрос о распознавании инвариантами Васильева обратимости узлов — до сих пор не решена в классическом случае, но легко решается в виртуальном случае.

7. В задаче распознавания плоских виртуальных узлов важную роль играют *филаментации* (см. работы Д. Хренсесина и Л. Кауфмана [H, HK]). Это понятие было изначально введено С.Картером [Car] для изучения вопроса, когда иммерсированная в трехмерное пространство кривая ограничивает диск, погруженный в это пространство. Таким образом, изучение плоских виртуальных узлов дает (частичный) ответ на вопросы о погружениях.

8. Виртуальные узлы стимулируют развитие новых теорий, напр., теория виртуальных графов Б.Меллора и Т.Флеминга [FM]; в этой работе приводятся обобщения метода виртуальных группоидов, предложенного в настоящей диссертации.

9. В диссертации (главы 4,5,6,8) установлен единый подход к теории виртуальным и классическим узлам посредством *атомов*. С точки зрения *атомов* и *гауссовых диаграмм*, а также некоторых инвариантов (скобка Кауфмана, инварианты Васильева, гомологии Хованова) классические узлы естественно рассматривать как составную часть множества виртуальных узлов.

10. В работах [ZZ1, ZZ2] хорошо известные методы перечисления комбинаторных объектов посредством гауссовых интегралов нашли свое применение для перечисления альтернированных диаграмм виртуальных узлов, которые возникают естественным образом при перечислении неплоских четырехвалентных графов.

1.3. Цели исследования

Построить теорию гомологий Хованова для виртуальных узлов. Изучить свойства гомологий Хованова классических и виртуальных узлов применительно к оценкам характеристик узлов (сложность и др).

Выявить феномены теории виртуальных узлов, которые не имеют места для классических узлов.

С помощью новых и уже имеющихся инвариантов виртуальных узлов определять их неклассичность.

Выяснить связь между инвариантами Васильева классических и виртуальных узлов.

Доказать гипотезу Васильева о планарности графов с крестовой структурой.

Построить теорию инвариантов длинных виртуальных узлов.

Построить инварианты виртуальных кос и выявить их связь с классическими косами.

Доказать алгоритмическую распознаваемость виртуальных узлов.

1.4. Методы исследования

Одним из основных методов исследования настоящей диссертации является разработанный автором метод кодирования узлов и виртуальных узлов посредством так называемых атомов (А.Т.Фоменко, [F]) (а также d -диаграмм для классических узлов). Атомы были впервые предложены А.Т.Фоменко для классификации интегрируемых гамильтоновых систем малой сложности, и в дальнейшем использовались автором при решении различных задач теории классических и виртуальных узлов. Так, метод атомов использован автором при построении теории гомологий Хованова виртуальных узлов. Этот метод также широко применяется в проблемах распознавания минимальности диаграмм классических и виртуальных зацеплений и позволяет установить единую точку зрения на все виртуальные узлы, неотъемлемой частью которых являются классические узлы. Как оказалось, род атома, тесно связанный с толщиной гомологий Хованова (см. гл. 5) также дает оценки для гомологий Ожвата-Сабо [Low].

Кроме самих атомов, для построения теории гомологий Хованова с произвольными коэффициентами для произвольных виртуальных узлов в главе 6 потребовалось использовать набор новых идей: скрученные коэффициенты, взятие внешнего произведения вместо симметрического и замена базиса в алгебре Фробениуса.

В главах 4, 5 и 6 использовались также стандартные методы, используемые в теории гомологий Хованова: метод сокращения для комплексов, метод максимального дерева Тистлтуэйта (–Верли-Кофмана–Чампанеркара)

В теории длинных виртуальных узлов автором предложен метод длинных группоидов; с помощью этого метода решена проблема некоммутативности виртуальных узлов.

Также в диссертации использовались классические методы и их обобщения. Так, для доказательства алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений, а также для доказательства нетривиальности связной суммы виртуальных зацеплений были использованы методы трехмерной топологии — теория Хакена-Хемиона-Матвеева в сочетании со структурной теоремой Куперберга о единственности минимального представителя заданного класса виртуальных зацеплений.

При построении различных комбинаторных инвариантов виртуальных узлов автором предложено рассматривать дополнительную алгебраическую структуру в виртуальных перекрестках.

Отметим, что в диссертации, помимо предложенных автором новых методов, применяются также практически все основные направления, использовавшиеся другими авторами при исследовании виртуальных узлов: методы трехмерной топологии, алгебраические методы, связанные с дистрибутивным группоидом и его обобщениями, различные полиномиальные инварианты, в том числе матричные, формально комбинаторные, методы теории виртуальных кос и др.

Я глубоко признателен Луису Хиршу Кауфману, Виктору Анатольевичу Васильеву, Анатолию Тимофеевичу Фоменко и Михаилу Хованову за постоянное внимание к работе и многочисленные плодотворные консультации.

1.5. Научная новизна

Настоящая диссертация является первым достаточно полным систематическим исследованием, целиком посвященном новой бурно развивающимся ветвям маломерной топологии — теории виртуальных узлов и теории гомологий Хованова.

Все основные положения диссертации, выдвигаемые на защиту, являются новыми.

1.6. Положения диссертации, выносимые на защиту

Из второй главы диссертации на защиту выносится следующее положение:

- Теорема о том, что любая связная сумма двух виртуальных узлов нетривиальна, если хотя бы один из узлов нетривиален (теорема 2.3).

Из третьей главы на защиту диссертации выносится

- Построение теории виртуальных длинных узлов с использованием новой техники длинных группоидов (теорема 3.14, в частности, доказательство того, что длинные виртуальные узлы в общем случае не коммутируют, см. стр. 126).

Из главы 4 на защиту выносится:

- Построение инвариантного полинома Ξ (теорема 4.8), исследование свойств этого полинома для оценки минимальности некоторых диаграмм виртуальных зацеплений.

Из главы 5 на защиту выносятся следующие положения.

- Построение теории гомологий Хованова для виртуальных узлов с коэффициентами из \mathbf{Z}_2 (теорема 5.1) и произвольными коэффициентами в некоторых частных случаях (теорема 5.3). Обобщение конструкции Хованова фробениусовых расширений для получения теории гомологий виртуальных зацеплений (теоремы 5.9, 5.10, 5.11). Построение затягивающего дерева для комплекса Хованова. Применение гомологий Хованова к оценкам на минимальный род атома и минимальное количество перекрестков диаграммы (виртуального) зацепления. Доказательство минимальности нескольких бесконечных серий виртуальных диаграмм.

• Основным результатом главы 6 является построение для произвольного кольца коэффициентов по диаграмме произвольного виртуального зацепления комплекса, который в классическом случае имеет те же гомологии, что и обычный комплекс Хованова (теоремы 6.3,6.4,6.5).

Из главы 8 на защиту выносятся:

• Доказательство гипотезы Васильева о реализуемости сингулярных зацеплений на плоскости (теорема 8.6).

1.6.1. Другие важные результаты

Отметим также ряд новых результатов, полученных в диссертации.

• Теорема о том, что виртуальные узлы алгоритмически распознаваемы (теорема 2.6).

• Построение теории виртуальных группоидов, определение ряда инвариантов, с ними связанных, и установление некоторых свойств этих инвариантов (теоремы 3.3,3.12).

• Построение инвариантов виртуальных и классических узлов со значениями в (бесконечномерных) алгебрах Ли (теорема 3.16).

• Построение инвариантов иерархических виртуальных узлов (теорема 3.18).

• Построение инварианта виртуальных кос, обобщающего один полный инвариант классических кос (глава 7).

• Построение нескольких серий инвариантов Васильева классических и виртуальных узлов (теорема 8.4).

1.6.2. Примеры

Результаты настоящей диссертации подкрепляются примерами. Приведем отдельно список примеров, полученных автором впервые:

1. В [Man6] (см. главу 3 на стр. 102) впервые установлена неэквивалентность связных сумм двух трилистников (впервые изображенных на стр. 51).

2. В главе 3 на стр. 125 впервые приведен пример некоммутативности длинных узлов.

3. В главе 3 на стр. 144 автором впервые показана нетривиальность “иерархического трилистника” и “иерархических колец Борромео”.

4. В главе 5 на стр. 263 приведена бесконечная серия примеров минимальных диаграмм длинных виртуальных узлов. Построение этих примеров не опирается на построение гомологий Хованова для виртуальных узлов.

5. В главе 5 на стр. 215 приведен пример виртуального узла, не имеющего диаграммы с неориентируемым атомом. Этот пример не распознается скобкой Кауфмана, а распознается только гомологиями Хованова.

Отметим также важные примеры, принадлежащие другим авторам.

Так, на рис. 3.19 на стр. 114 изображен пример Г.Саволлека, обратимость которого различается инвариантом ζ . Этот инвариант был независимо от автора (и несколько раньше) предложен Саволлеком, Кауфманом и Рэдфордом, а также Сильвером и Уильямс. Саволлек показал, что этот инвариант сводится к инвариантам Васильева сингулярных узлов.

В главе 8 показано (теорема 8.7), что у для каждого компактного виртуального узла K имеется бесконечное число различных длинных узлов, имеющих узел K в качестве замыкания. Этот результат (на других примерах) был несколько ранее получен Д.Сильвером и С.Уильямс.

1.7. Апробация диссертации. Публикации по теме диссертации

Все основные положения диссертации, выдвигаемые на защиту, опубликованы в книгах автора [Ma1, Man1], статьях [Ma2, Ma3, Ma4, Ma5, Ma6, Ma7, Ma8, Ma9, Ma10, Ma11, Ma12, Ma13, Ma14, Ma15, Man2, Man3, Man4, Man5, Man6, Man7, Man8, Man9], а также совместных статьях [KM1, KM2]. В работе [KM1] автору принадлежит построение виртуальных группоидов и бигруппоидов, бигруппоидов, связанных с длинными виртуальными узлами, инвариантов узлов со значениями в бесконечномерных алгебрах Ли. В работе [KM2] автору принадлежат доказательства теоремы об алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений и о нетривиальности связной суммы нетривиальных виртуальных узлов.

В списке литературы встречаются другие работы автора; они добавлены

для полноты библиографии.

1.8. Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 8 глав и списка литературы. Глава первая является введением. В ней приводятся основные определения и известные факты из теории узлов, перечисляются основные достижения диссертации, выносимые на защиту.

Глава вторая посвящена методам трехмерной топологии в теории виртуальных узлов.

Доказаны две теоремы: об алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений и о нетривиальности связной суммы нетривиальных виртуальных узлов.

Третья глава посвящена инвариантам виртуальных узлов и зацеплений, связанных с дистрибутивным группоидом и различными его обобщениями.

Центральным в третьей главе является предложенная автором теория инвариантов длинных узлов и понятие длинного группоида.

Четвертая глава посвящена изучению инвариантов, связанных со скобкой Кауфмана. Построены различные инварианты виртуальных узлов, связанные со скобкой Кауфмана.

В четвертой главе построен инвариант Ξ , который приводит (см. гл. 8) к трехпараметрической серии инвариантов Васильева виртуальных узлов.

Основным результатом пятой главы является построение теории гомологий Хованова для виртуальных узлов для многих важных частных случаев (ориентируемые атомы, коэффициенты \mathbf{Z}_2), построения инвариантов произвольных виртуальных узлов с помощью геометрических конструкций и гомологий Хованова, а также доказательство ряда теорем минимальности (по количеству классических перекрестков) для произвольных виртуальных узлов.

Шестая глава — центральная в настоящей диссертации — посвящена построению теории гомологий Хованова с произвольными коэффициентами для виртуальных узлов (а также скрученных узлов). В ней построен комплекс, имеющий те же гомологии, что и комплекс Хованова в случае клас-

сических зацеплений, а также во всех частных случаях, описанных в главе 5. Многие приложения из главы 5 допускают обобщение на произвольные виртуальные зацепления посредством конструкции, предложенной в главе 6.

Седьмая глава посвящена виртуальным косам: в ней построен инвариант виртуальных кос, являющийся обобщением полного инварианта классических кос.

Восьмая глава посвящена инвариантам Васильева. Основными результатами являются: построение бесконечных серий инвариантов Васильева виртуальных узлов, а также доказательство гипотезы Васильева о планарности четырехвалентных графов с крестовой структурой, не имеющих пары циклов с ровно одной точкой трансверсального перекрестья.

Объем диссертации составляет 387 страниц. Список литературы содержит 204 наименования.

Результаты диссертации докладывались на:

- Международном математическом конгрессе-2002, Пекин.
 - Международном математическом конгрессе-2006, Мадрид.
 - Международной российско-французской конференции “Autour des tresses”, Москва, 2002.
 - Конференции “Knots in Poland”, Варшава-Бедлево, 2003, два доклада.
 - Конференции, посвященной столетию со дня рождения Л.В.Келдыш, Москва, 2004 (приглашенный доклад),
 - Конференции “Categorification in algebra and topology”, Uppsala, Швеция, 2006,
 - Конференции “Algebraic Topology: Old and New”, посвященной 80-летию со дня рождения М.М.Постникова, Бедлево, Польша, июнь 2007.
 - Конференции “Topology and Physics — In Memory of Xiao-Song Lin”, Тяньцзинь, Китай, июль 2007.
- а также на семинарах:
- семинаре “Узлы и дискриминанты” акад. В.А.Васильева (Независимый московский университет, 2002, дважды в 2004).
 - Семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, рук. акад. А.Т.Фоменко, МГУ, 2004, 2006, 2007 - многократно.

- Семинаре “Современные геометрические методы” под рук. акад А.Т.Фоменко, проф. А.С.Мищенко, проф. А.В.Болсинова, МГУ (2002,2003).
- семинаре по алгебраической топологии проф. В.М.Бухштабера и проф. А.В.Чернавского (МГУ, в 2005 трижды, 2007).
- семинаре под руководством акад. О.Б.Лупанова, МГУ, 2003, 2005.
- семинаре им. П.С.Александрова, МГУ, рук. проф. В.В.Федорчук, 2004.
- семинаре по теории особенностей акад. В.И.Арнольда, акад. В.А.Васильева, В.М.Закалюкина, С.М.Гусейн-Заде (МГУ, 2005).
- семинаре проф. А.С.Мищенко, И.К.Бабенко, Е.В.Троицкого, В.М.Мануйлова (МГУ, 2007, дважды).
- семинаре проф. О.М.Касим-Заде (2003).
- Петербургском городском топологическом семинаре им. В.А. Рохлина, рук. проф. Н.Ю.Нецветаев и проф. В.М.Нежинский (2005, дважды).
- семинаре Москва-Петербург (С.-Петербург, проф. С.В.Дужин, 2005).
- семинаре проф. В.М.Нежинского (С.-Петербург, 2005).
- семинаре под руководством проф. С.С.Рышкова, Н.П.Долбилина, Н.Г.Мощевитина, МГУ, 2004.
- семинарах в Ruhr-Universität Bochum (Hubert Flenner, Uwe Abresch), 2002.
- семинаре в Alfred Rényi Intézet, Budapest (András Szücs), 2005.
- семинаре О.Я.Виро (Uppsala Universitet), многократно в 2006.

Глава 2

Виртуальные узлы и трехмерная топология

Трехмерная топология играет важную роль в классической теории узлов. Самыми первыми инвариантами классических узлов и зацеплений были топологические инварианты, связанные с дополнением к трубчатой окрестности зацепления. К таковым относятся фундаментальная группа (дополнения к зацеплению) и полином Александера [Ale1, Ale2]. Как стало ясно позднее, топология дополнения к узлу полностью определяет его изотопический тип (теорема Гордона-Люкке [GL]; аналогичное утверждение для зацеплений неверно). Кроме того, благодаря топологической теореме Вальдхаузена [Wal] о том, что для некоторого класса трехмерных многообразий (которые называются *достаточно большими*) всякий изоморфизм фундаментальных групп порождается некоторым гомеоморфизмом многообразий, был построен формально-алгебраически полный инвариант классических зацеплений — см. работы С.В.Матвеева [Matv] и Д.Джойса [Joy]. Ключевым здесь является тот факт, что дополнение к открытой трубчатой окрестности нетривиального узла является достаточно большим трехмерным многообразием с краем.

Настоящая глава посвящена доказательству двух основных результатов: доказана алгоритмическая распознаваемость виртуальных зацеплений и показано, что всякая связная сумма двух нетривиальных узлов всегда нетривиальна. Эти результаты опубликованы в [Ma1, KM2].

Первый алгоритм распознавания классических узлов и зацеплений также связан с трехмерной топологией: а именно, он основан на *теории нормальных поверхностей*, предложенной В.Хакеном [Hak] и развитой Г.Хемионом [Hem] и С.В.Матвеевым [Matv]. Основная идея состоит в том, что в “хороших” трехмерных многообразиях (быть может, с краем) имеется

класс *нормальных поверхностей* — поверхностей, имеющих “правильное” расположение по отношению к подразбиению многообразия (например, к его триангуляции). Основное положение теории Хакена состоит в том, что такие поверхности получаются из конечного алгоритмически разрешимого набора *базисных* нормальных поверхностей. При этом для многих важных свойств P справедливо утверждение: если существует поверхность, обладающая свойством P , то существует базисная нормальная поверхность, обладающая тем же свойством. На множестве нормальных поверхностей определена так называемая операция *геометрического суммирования*; каждая поверхность определяется конечным набором неотрицательных целочисленных характеристик, которые складываются при таком суммировании. Нахождение базисных нормальных поверхностей сводится к нахождению базисных неотрицательных целочисленных решений конечной целочисленной системы уравнений. Эта проблема алгоритмически разрешима, но ее решение чрезвычайно громоздко в конкретных случаях, связанных с задачами трехмерной топологии.

Обзор теории нормальных поверхностей и ее применения к трехмерной топологии см. в книгах С.В.Матвеева [Matv] и А.Т.Фоменко и С.В.Матвеева [ФМ].

Следовательно, многие проблемы в трехмерной топологии могут быть алгоритмически разрешены, если переформулировать их на языке поверхностей и их свойств. К таким проблемам, в частности, относится проблема распознавания классических узлов. Первое полное безупречное доказательство всех основных утверждений теории Хакена можно найти в монографии Матвеева [Matv].

С самого начала была видна связь виртуальных узлов с трехмерной топологией. При построении теории Л.Кауфман опирался на теорию узлов в “утолщенных поверхностях”, развитую Л.Кауфманом, Ф.Жижером и Ю.Салером [JKS]. Важным шагом в понимании этой взаимосвязи стала теорема Г.Куперберга (теорема 2.1), утверждающая, что у каждого виртуального узла существует каноническая минимальная (по роду поверхности) реализация.

Мы используем этот факт, а также ключевые положения теории Хакена-

Матвеева для решения двух проблем теории виртуальных узлов: доказательства того, что связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна и алгоритмического распознавания виртуальных зацеплений.

Результат об алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений важен по следующим причинам:

1. С момента появления теории виртуальных узлов задача алгоритмического распознавания являлась центральной задачей всей теории.
2. В маломерной топологии часто имеет место алгоритмическая *нераспознаваемость*. Поэтому знание важного факта о том, что те или иные объекты алгоритмически распознаваемы, делает актуальной задачу о построении эффективного алгоритма.
3. Доказательство, помимо теоремы Куперберга и нескольких основных положений теории Хакена, включает также рассуждения, разработанные специально для случая виртуальных узлов (лемма 2.8 и пошаговый алгоритм дестабилизации в конце настоящей главы).

Отметим, что алгоритмическое распознавание зацеплений (как виртуальных, так и классических) принципиально является логическим результатом: хотя формальное описание всех шагов алгоритма (для классического или виртуального случая) и выписывается конструктивно (со ссылками на алгоритмы из [Matv]), но этот алгоритм имеет очень большую сложность и вряд ли (без дополнительных идей упрощения) может быть реализован на компьютере для практических целей.

В настоящей главе мы будем пользоваться следующим определением виртуальных узлов и зацеплений.

Определение 2.0. Виртуальное зацепление — это класс эквивалентности зацеплений в утолщенных поверхностях $M \times I$ с точностью до стабилизации/дестабилизации (см. далее).

Виртуальное зацепление $L = L_1 \sqcup L_2 \cdots \sqcup L_k$ называется *ориентированным*, если ориентировано соответствующее зацепление в $M \times I$, т.е. каждая из окружностей S^1, \dots, S^1 — прообразов компонент зацепления — снабжена ориентацией. При этом многообразии M и отрезок I предполагаются ориентированными, а ориентация — фиксированной.

Аналогично, оснащенные виртуальные зацепления (ср. опр. на стр. 10) можно задавать в виде наборов лент $S^1 \times I$, вложенных в утолщенные поверхности.

При эквивалентности ориентированных зацеплений мы требуем сохранения ориентации на всех компонентах.

Замечание 2.1. *Под утолщенной поверхностью мы понимаем декартово произведение $M \times I$, где I — отрезок $[0, 1]$, а M — замкнутое ориентированное двумерное многообразие, не обязательно связное. При этом мы требуем, чтобы для каждой связной компоненты M_i двумерного многообразия M утолщенная поверхность $M_i \times I$ содержала бы по крайней мере одну компоненту зацепления.*

В частности, когда мы имеем дело с узлами, многообразие всегда должно быть связным, т.е. поверхность M гомеоморфна сфере с некоторым количеством ручек.

Под *дестабилизацией* мы понимаем следующее. Пусть S — некоторая нестягиваемая окружность на поверхности M , для которой существует цилиндр C с краями на разных краях многообразия $M \otimes \{0, 1\}$, гомотопный (в классе *собственных* (см. стр. 48) вложений) цилиндру $C \times I$, не пересекающий зацепления с краем цилиндра). Тогда дестабилизация — это разрезание трехмерного многообразия $M \times I$ вдоль цилиндра с заклеиванием вновь появившихся компонент края шайбами $D^2 \times I$, см. рис. 2.1. При этом если разрезание приводит к образованию пустой компоненты, то эту компоненту следует удалить, чтобы не нарушать изначальной договоренности (замечание 2.1): в каждой компоненте $M_i \times I$ должна лежать хотя бы одна компонента зацепления.

Мы будем также использовать выражение *дестабилизация вдоль цилиндра (кольца) C* .

Под *стабилизацией* понимается операция, обратная к дестабилизации.

Иными словами, стабилизация и дестабилизация — это добавление и удаление ручек к поверхности M ; при этом добавляемые/удаляемые ручки не должны содержать общих точек с рассматриваемым зацеплением.

Очевидно, что стабилизацию (добавление ручек) можно применять к любой диаграмме.

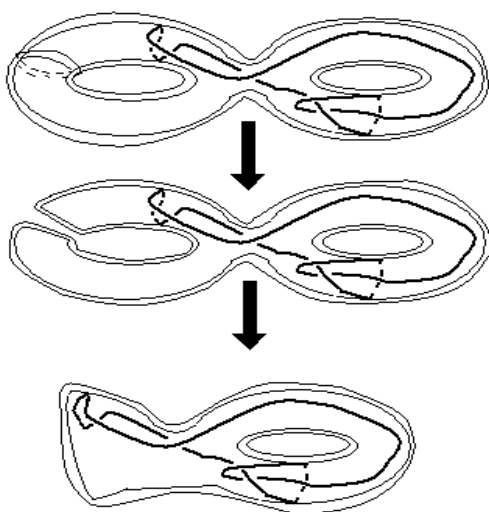


Рис. 2.1. Дестабилизация пары $(S_2 \times I, K)$

Важным является вопрос, насколько долго можно дестабилизировать диаграмму. Пусть виртуальное зацепление L задано зацеплением \bar{L} в утолщенной поверхности $M \times I$.

Назовем такое задание *минимальным*, если к нему нельзя применить дестабилизации.

На протяжении настоящей главы под словом “многообразие” мы будем понимать трехмерное многообразие M , быть может, с краем, под словом “поверхность” мы будем понимать двумерную поверхность $F \subset M$, при этом мы будем предполагать, если не оговорено противное, что поверхность является *собственной*. Это значит, что $F \cap \partial M = \partial F$, где ∂M и ∂F — граница многообразия M и граница поверхности F соответственно.

Более того, все трехмерные многообразия на протяжении настоящей главы предполагаются **ориентированными**, причем ориентация является фиксированной, и все дальнейшие определения и теоремы, формулируемые о трехмерных многообразиях, относятся к ориентированным многообразиям (как правило с краем); при этом под гомеоморфизмом всегда понимается гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

2.1. Теорема Куперберга

С использованием методов трехмерной топологии Грег Куперберг доказал следующую важную теорему [Кур]:

Теорема 2.1. *Минимальный представитель каждого виртуального зацепления K единствен с точностью до диффеоморфизма пары $(M \times I, K \subset M \times I)$ на себя, переводящего верхнюю компоненту края $M \times \{1\}$ в себя.*

В случае, когда мы имеем дело с узлом, или — более общо, с нераспадающимся зацеплением, соответствующая поверхность должна быть связной, т.е. иметь вид S_g — сферы с g ручками.

Определение 2.1. Назовем *подлежащим родом* нераспадающегося виртуального зацепления L род g минимальной поверхности S_g , такой что зацепление L реализуемо в $S_g \times I$.

Замечание 2.2. *Подлежащий род нуля имеют классические зацепления и только они.*

Замечание 2.3. *В дальнейшем нам понадобится ввести еще несколько характеристик классических и виртуальных зацеплений, называемых словом “род”: род подлежащей поверхности, род атома, род Зейферта. Иногда мы будем опускать характеристику “подлежащий” и писать просто “род”, если из контекста ясно, о каком роде идет речь. Под родом утолщенной поверхности $M \times I$ всегда понимается род поверхности M .*

Из теоремы Куперберга следует, что если два виртуальных узла K_1 и K_2 оба имеют род g , то они являются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них может быть перестроен в другой в классе виртуальных узлов рода g , т.е. изотопиями в $S_g \times I$ (и гомеоморфизмами S_g на себя). В частности, при $g = 0$ это означает, что две классические диаграммы узлов (зацеплений) являются виртуально эквивалентными тогда и только тогда, когда они задают изотопные зацепления.

Следовательно, имеет место

Теорема 2.2. *Классические зацепления образуют подмножество в множестве виртуальных зацеплений. Иными словами, если две классические*

диаграммы эквивалентны (как виртуальные диаграммы), то они задают изотопные классические зацепления.

Эта теорема была впервые доказана в работе [GPV] с помощью конструкции дистрибутивного группоида. К этому вопросу мы вернемся в главе 3.

2.2. Род виртуального узла

Несвязная сумма виртуальных диаграмм (узлов или зацеплений) K_1 и K_2 определяется как диаграмма на плоскости, разделенной прямой линией l на две полуплоскости, при этом пересечение диаграммы несвязной суммы с одной полуплоскостью состоит из диаграммы K_1 , а пересечение с другой полуплоскостью — из диаграммы K_2 . Обозначим полученную связную сумму через $K_1 \sqcup K_2$. Очевидно, что несвязная сумма виртуальных зацеплений корректно определена: класс виртуального зацепления $K_1 \sqcup K_2$ не зависит от выбора диаграмм-представителей зацеплений K_1 и K_2 .

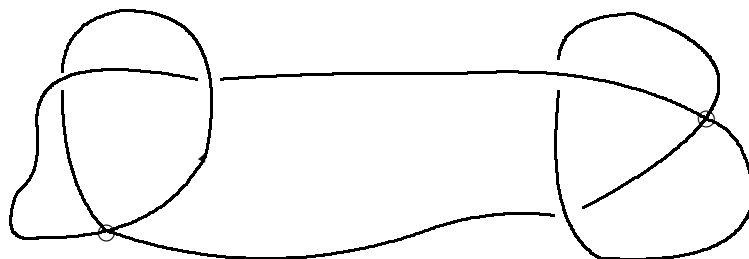
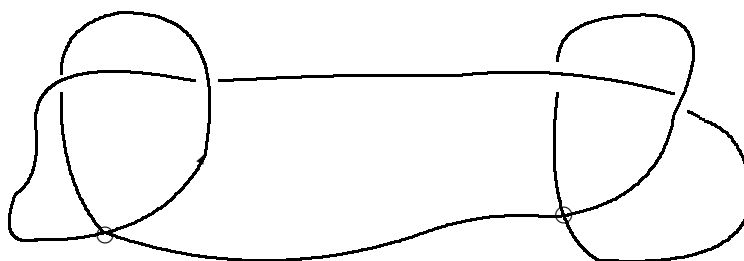
Назовем виртуальную диаграмму *связной*, если она не может быть получена из несвязной суммы двух непустых виртуальных диаграмм применением движения объезда.

Пусть K_1, K_2 — две непересекающиеся диаграммы ориентированных виртуальных узлов на ориентированной плоскости P , которые обладают тем свойством, что некоторый двумерный диск E пересекает $K_1 \sqcup K_2$ по двум дугам $AB \in K_1$ и $CD \in K_2$, имеющим противоположные ориентации, т.е. первая дуга ориентирована от A к B , а вторая — от C к D , при этом при обходе окружности ∂E по часовой стрелке четыре точки встречаются в порядке A, B, C, D . Предположим далее, что существует прямая l , пересекающая диск E и не пересекающая диаграмм K_1, K_2 , такая что диаграммы K_1 и K_2 лежат по разные стороны от l .

Определение 2.2. Назовем *связной суммой* диаграмм K_1 и K_2 (обозначение: $K_1 \# K_2$) диаграмму, полученную из диаграммы несвязной суммы $K_1 \sqcup K_2$ удалением дуг AB и CD и добавлением дуг DA и CB с распространением ориентации диаграмм K_1 и K_2 на получившуюся диаграмму $K_1 \# K_2$, см. рис. 2.4.

Отметим, что *связная сумма виртуальных узлов* не является корректно

определенной. На рисунках 2.2 и 2.3 изображены две неэквивалентные друг другу связные суммы виртуального трилистника с самим собой.

Рис. 2.2. Связная сумма $K \# K$ Рис. 2.3. Другая связная сумма $K \# K$

Не является корректно определенным и класс эквивалентности связной суммы двух виртуальных узлов. Поэтому будем употреблять термин *связная сумма* виртуальных узлов для **любой** из связных сумм, получаемых связным суммированием некоторых их диаграмм.

Интересно также рассмотрение *связной суммы длинных виртуальных узлов*: она определена корректно. Описанию длинных виртуальных узлов посвящена часть 3.2 главы 3.

Целью настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Для любых двух виртуальных узлов K_1, K_2 , хотя бы один из которых нетривиален, любая их связная сумма $K_1 \# K_2$ является нетривиальным виртуальным узлом.*

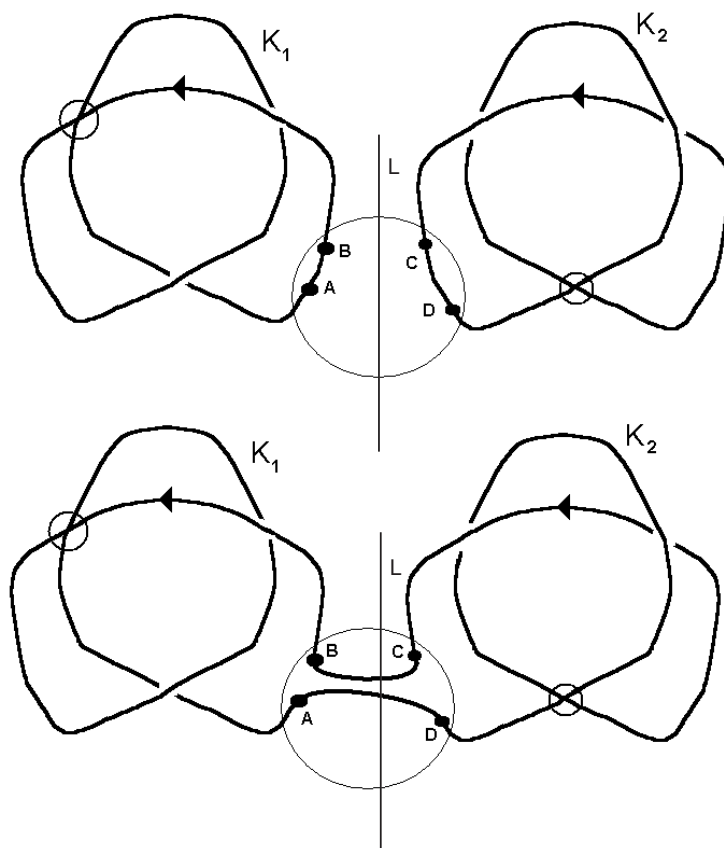


Рис. 2.4. Пример связной суммы виртуальных узлов

Эта теорема будет следствием теоремы 2.5 о (подлежащем) роде и леммы 2.1.

В случае классических зацеплений теорема, аналогичная теореме 2.3 о нетривиальности связной суммы узлов, была доказана Хорстом Шубертом [Schu].

В ней использовались соображения, аналогичные идее доказательства теореме 2.5. А именно, была доказана аддитивность *рода Зейферта* — неотрицательной характеристики классических узлов, принимающей значение нуль только на тривиальном узле.

Напомним, что всякое классическое зацепление $L \subset \mathbf{R}^3$ допускает ориентируемую связную поверхность $F \subset \mathbf{R}^3$, такую, что $\partial F = L$. Минимальный род такой поверхности называется *родом Зейферта* зацепления L .

В случае классических узлов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , классические диаграммы которых

лежат по разные стороны от некоторой прямой l мы выбираем классические диаграммы K_1 и K_2 этих узлов таким образом, чтобы для некоторого круга E , пересекающего l в двух точках на плоскости, пересечение $E \cap (K_1 \cup K_2)$ состояло из двух непересекающихся дуг AB и CD , лежащих по разные стороны от l , направленных внутри круга в противоположные стороны. После этого связная сумма $\mathbf{K}_1 \# \mathbf{K}_2$ определяется посредством диаграммы $K_1 \# K_2 = K_1 \sqcup K_2 \setminus (AB \cup CD) \cup (DA \cup CB)$ с очевидной ориентацией.

Это определение для классических узлов задает *классическую связную сумму*. Полученный классический узел является корректно определенным: его изотопический класс не зависит от выбора представителей K_1 и K_2 . Доказательство этого факта общеизвестно, см., напр., [BZ, Ma1].

Будем называть такую связную сумму *классической связной суммой* классических узлов. В отличие от общего случая *виртуальной* связной суммы (которую можно применять и к диаграммам классических узлов), классическая сумма является корректно определенной.

Теорема Шуберта состоит в следующем.

Теорема 2.4 ([Schu]). *Если классическая связная сумма двух классических узлов K_1, K_2 представляет собой тривиальный классический узел, то каждый из узлов $K_i, i = 1, 2$, тривиален.*

Определение 2.3. Скажем, что минимальная реализация виртуального узла K в виде узла в утолщенной поверхности $M \times I$ является *особой*, если существует такая гомотопически нетривиальная вложенная окружность $S \subset M$, не разделяющая поверхность M на две части и вложенное кольцо $C \subset M \times I$, такое что $\partial C = C \cap (M \times \{0, 1\})$, при этом $C \cap (M \times \{1\})$ гомотопно $S \times \{1\}$, а пересечение $C \cap K$ трансверсально и состоит ровно из одной точки.

Замечание 2.4. *Отметим, что из того, что пересечение состоит ровно из одной точки следует, что кольцо C не разделяет $M \times I$ на две связные компоненты.*

Пример особой реализации показан на рис. 2.5.

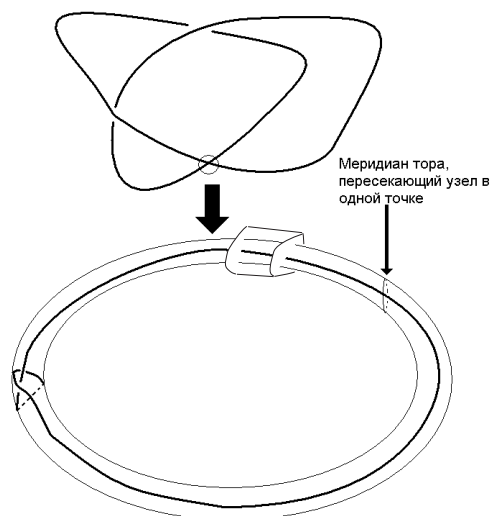


Рис. 2.5. Особая минимальная реализация на утолщенном торе

Ключевым утверждением в доказательстве теоремы 2.3 является следующая

Теорема 2.5. Для каждой двух виртуальных зацеплений K_1, K_2 и каждой их связной суммы $K_1 \# K_2$ имеет место неравенство

$$g(K_1 \# K_2) \geq g(K_1) + g(K_2) - 1, \text{ при этом}$$

$g(K_1 \# K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$, если минимальный представитель какого-либо из виртуальных узлов K_1, K_2 не является особым.

Замечание 2.5. Отметим, что эти неравенства нельзя заменить на равенства. В главе 4 будет описан узел Кишино, имеющий подлежащий род два и являющийся связной суммой двух тривиальных узлов (рода нуль).

В дальнейшем нам также понадобится следующая

Лемма 2.1. Если некоторая связная сумма двух виртуальных узлов K_1, K_2 рода нуль имеет род нуль (т.е. представляет собой классический узел), то оба узла K_1 и K_2 имеют род нуль, а эта связная сумма эквивалентна их классической связной сумме.

Доказательство леммы 2.1 будет следовать из доказательства теоремы 2.5.

Из теоремы 2.5 и леммы 2.1 следует теорема 2.3. Действительно, пусть K_1 и K_2 — два виртуальных узла. Если хотя бы один из них (скажем K_1) имеет (минимальный) подлежащий род больше нуля, то $K_1 \# K_2$ также имеет род больше нуля и, следовательно, не может представлять собой тривиальный узел. А именно, согласно теореме 2.5, единственная возможность, при которой $g(K_1 \# K_2) = 0$ — это случай, когда $g(K_1) = 0, g(K_2) = 1$ (или $g(K_1) = 1, g(K_2) = 0$), при этом оба минимальных представителя должны быть особыми, что по определению невозможно в случае рода нуля (так как на сфере нет нетривиальных циклов).

В случае, если оба узла являются классическими, мы можем в силу леммы 2.1 рассмотреть их классическую связную сумму. Последняя представляет собой нетривиальный узел в силу теоремы Шуберта (в предположении нетривиальности хотя бы одного из двух узлов).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.5.

Замечание 2.6. *В дальнейшем мы будем обозначать абстрактные виртуальные узлы и представляющие их узлы в утолщенных поверхностях одной и той же буквой. Так, например, виртуальный узел K задается узлом K в утолщенной поверхности $S_g \times I$.*

2.2.1. Два типа связного суммирования

Пусть два виртуальных узла K_1 и K_2 представлены посредством узлов в утолщенных поверхностях и фиксирована некоторая их связная сумма. В этом случае могут иметь место естественные возможности представить связную сумму представителей этих узлов в виде (представителя) узла в утолщенной поверхности, см. рис. 2.6, а.б.

Один способ состоит в следующем. Мы рассматриваем утолщенные поверхности $(M_1 \times I) \supset K_1$ и $(M_2 \times I) \supset K_2$ и вырезаем в них два вертикальных цилиндрических отверстия $D_i \times I$, где $D_i \subset M_i$, так что пересечение $(D_i \times I) \cap K_i$ гомеоморфно отрезку. После этого мы склеиваем полученные края вместе (отождествляя $\partial D_1 \times I$ и $\partial D_2 \times I$ способом, согласованным с ориентацией многообразия, направлением интервала I таким образом, чтобы концы узлов соединились, и это соединение было согласовано с ориентацией узлов). Тем самым мы получаем $(M \times I) = ((M_1 \# M_2) \times I)$ с

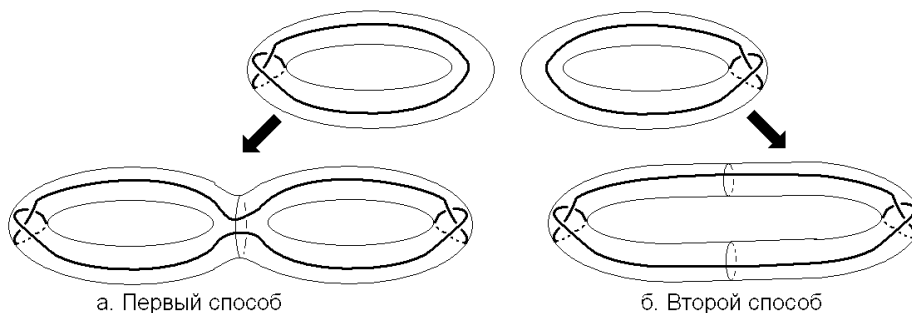


Рис. 2.6. Два типа связного суммирования

узлом $K_1 \# K_2$ внутри.

Очевидно, что при этом $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.

Другой способ построения связной суммы работает только в случае, когда реализации обоих узлов K_1 и K_2 являются особыми. Он состоит в следующем. Предположим, что K_1 и K_2 лежат в $M_1 \times I$ и $M_2 \times I$, причем каждый из двух родов $g(M_1)$ и $g(M_2)$ больше нуля, при этом существуют нетривиальные (негомотопные нулю) кривые $\gamma_1 \in M_1$ и $\gamma_2 \in M_2$, такие что множество $(\gamma_i \times I) \cap K_i$ состоит ровно из одной точки (отметим, что в этом случае кривая γ_i не является разделяющей). Следовательно, мы можем разрезать многообразия $(M_i \times I)$ вдоль колец $\gamma_i \times I$ и склеить их друг с другом (в этом случае склеиваются две пары цилиндров). Здесь мы также предполагаем, что склейка согласована с расположением точек пересечения с узлами и ориентацией узлов.

В результате мы получим многообразие $M \times I$, где $g(M) = g(M_1) + g(M_2) - 1$ для некоторой связной суммы $K_1 \# K_2$, лежащей в M .

В дальнейшем при дестабилизации и определении рода виртуального узла нам понадобятся только эти два типа связного суммирования.

Теорема Куперберга используется нами для корректной определенности понятия рода виртуального узла.

2.2.2. План доказательства теоремы 2.5

Рассмотрим два виртуальных узла K_1 и K_2 и некоторую их связную сумму $K_1 \# K_2$. Реализуем эту связную сумму кривыми в утолщенных поверхностях первым способом. Обозначим соответствующие поверхности через

$M_1, M_2, M_1 \# M_2$, а соответствующие узлы — через $K_1, K_2, K_1 \# K_2$. Будем трансформировать утолщенную поверхность $(M_1 \# M_2) \times I$ и узлы внутри нее.

Для упрощения обозначений мы будем писать $M = M_1 \# M_2$, а также $M = M_1 \cup M_2$. Мы предпочитаем второе обозначение, когда нам нужно подчеркнуть, что M_1 и M_2 являются частями многообразия M ; первое обозначение мы будем использовать при рассмотрении M_1 и M_2 как отдельно стоящих многообразий.

Будем применять процесс дестабилизации к узлу, полученному в виде связной суммы, описанной в предыдущем разделе.

Процесс дестабилизации будет состоять из нескольких шагов.

Мы покажем, что после каждого шага дестабилизации выполняются следующие утверждения (все обозначения остаются неизменными на протяжении всего процесса дестабилизации); далее M — замкнутая поверхность:

1. Объемлющее многообразие $M \times I$ может быть представлено в виде связной суммы двух частей $M_1 \# M_2$ или же в виде склейки M_1 и M_2 по двум вырезанным цилиндрам (как в случае второго способа связанного суммирования) таким образом, что $M_i \times I$ содержит узел $K_i, i = 1, 2$ (т.е. при соответствующем замыкании мы получим реализацию узла K_i).

Здесь под замыканием мы понимаем заклеивание образовавшихся цилиндрических отверстий $S_i^1 \times I$ трехмерными шайбами $D_i^2 \times I$, так чтобы получить две утолщенные поверхности.

2. Пересечение $M = M_1 \cap M_2$ состоит из одной или двух компонент; таким образом $(M_1 \times I) \cap (M_2 \times I)$ состоит из одного или двух колец.
3. Узел $K_1 \# K_2$ пересекает многообразие $(M_1 \cap M_2)$ в точности в двух точках; при этом если множество $M_1 \cap M_2$ несвязно, эти точки пересечения лежат в разных связных компонентах.
4. Процесс дестабилизации, останавливается за конечное количество шагов. В этот момент $g(M_1 \# M_2)$ задает минимальный род для узла $K_1 \# K_2$.

Здесь мы используем теорему Куперберга о том, что минимальный представитель единствен, и он задает минимальный род узла $K_1 \# K_2$. Процесс дестабилизации продолжается до тех пор, пока дестабилизация возможна, т.е. род не минимален.

Если мы организуем процесс так, как описано выше, мы докажем теорему 2.5. Действительно, после каждого шага дестабилизации мы будем иметь узлы K_1 и K_2 , представленные узлами в утолщенных поверхностях некоторых родов g_1 и g_2 соответственно. Узел $K_1 \# K_2$ лежит при этом в утолщенной поверхности рода $g_1 + g_2$, если мы имеем дело со связной суммой первого типа или же род $g_1 + g_2 - 1$, если мы имеем дело со связной суммой второго типа. То же самое имеет место и когда процесс останавливается. Следовательно, мы получаем $g(K_1 \# K_2) = g_1 + g_2$ или $g(K_1 \# K_2) = g_1 + g_2 - 1$, причем последнее равенство возможно только если мы имеем дело со связной суммой второго типа (следовательно, оба рода g_1 и g_2 строго больше нуля). Принимая во внимание, что g_i представляет собой род поверхности (не обязательно минимальной), представляющей узел K_i , мы получаем утверждение теоремы.

2.2.3. Процесс дестабилизации

В настоящем подразделе мы опишем, как процесс работает.

Рассмотрим сначала связную сумму типа j ($j = 1$ или $j = 2$) для двух виртуальных узлов K_1 и K_2 . Основное утверждение состоит в следующем.

Утверждение 2.1. *Если существует возможность дестабилизировать связную сумму $M_1 \# M_2$ (с узлом $K_1 \# K_2$ внутри), тогда верно одно из следующих утверждений:*

1. Мы можем провести дестабилизацию внутри M_i (для $i = 1$ или $i = 2$) без изменения M_{3-i} и типа связной суммы. Таким образом, мы уменьшаем род одного из M_i на единицу; род связной суммы $M_1 \# M_2$ при этом также уменьшается на единицу.
2. Пусть связная сумма является связной суммой первого типа. Тогда ее можно переделать в связную сумму второго типа. При этом род

$M_1 \# M_2$ уменьшается на единицу, а роды поверхностей M_1 и M_2 не меняются.

3. Пусть связная сумма является связной суммой второго типа. Тогда возможно переделать ее посредством дестабилизации в связную сумму первого типа. При этом каждая из трех величин $g(M_1)$, $g(M_2)$, $g(M_1 \# M_2)$ уменьшается ровно на единицу.

Вместе с приведенным выше планом, это утверждение приводит к завершению доказательства теоремы 2.5.

Доказательство утверждения 2.1. Рассмотрим сначала первый тип связной суммы. Мы имеем $M = M_1 \# M_2$. Пусть D — кольцо, разделяющее M на две части M_1 и M_2 . Как было сказано ранее, для упрощения обозначений будем писать иногда $M = M_1 \# M_2$, а иногда $M = M_1 \cup M_2$.

Предположим, что к паре $((M_1 \# M_2) \times I, K_1 \# K_2)$ возможно применить дестабилизацию. Тогда существует вертикальное кольцо C в $(M_1 \# M_2) \times I$ (т.е. кольцо, компоненты края которого лежат на разных компонентах края $(M_1 \# M_2) \times \{0\}$ и $(M_1 \# M_2) \times \{1\}$), которое не пересекает узла $K_1 \# K_2$. Если одно из таких колец не пересекает кольца D , то мы можем дестабилизировать либо (M_1, K_1) , либо (M_2, K_2) вдоль этого кольца C ; это представляет собой первый случай утверждения 2.1.

Предположим, что любое из (нетривиальных) колец, вдоль которых мы можем применить дестабилизацию, пересекает кольцо D . Будем рассматривать только такие кольца, пересечение которых с D трансверсально и, следовательно, состоит из конечного числа связных компонент. Пусть n — минимальное возможное число компонент пересечения $C \cap D$ (которое мы предполагаем ненулевым).

Так как C и D являются многообразиями с краем (вертикальными кольцами), их пересечение в общем положении может состоять из:

1. тривиальных окружностей;
2. тривиальных дуг;
3. горизонтальных окружностей;

4. вертикальных дуг;

При этом окружность называется *тривиальной*, если она задает единичный элемент фундаментальной группы кольца C ; в противном случае будем называть окружность *горизонтальной*. Дуга называется *тривиальной*, если она соединяет точки на одной и той же компоненте края кольца; в противном случае дуга называется *вертикальной*.

Если в пересечении $C \cap D$ имеется тривиальная окружность, то мы можем рассмотреть самую внутреннюю (по включению) окружность $\gamma = \partial\Delta$ (при этом $\Delta \subset C$). Внутренность этой окружности не содержит точек из D . Так как диск Δ вместе с диском из D ограничивает трехмерный шар (см. рис. 2.7), мы можем слегка модифицировать кольцо C таким образом, чтобы общее число компонент пересечения между C и D уменьшилось и при этом C осталось кольцом с нетривиальной средней линией (вдоль которого можно дестабилизировать). Та же самая ситуация имеет место в случае наличия тривиальной дуги, см. рис. 2.8.

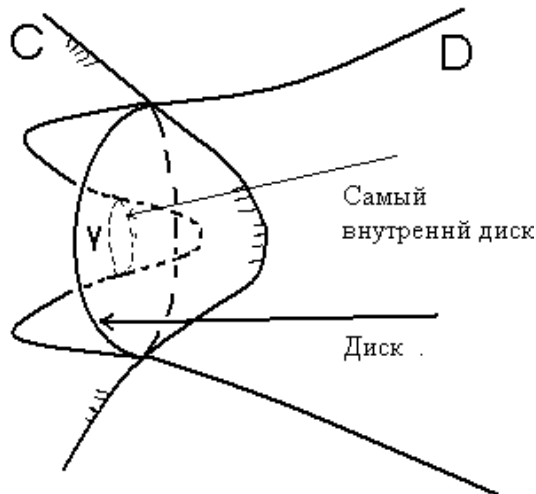


Рис. 2.7. Негоризонтальные дуги в A_1

Сформулируем теперь две вспомогательные леммы.

Лемма 2.2. Пусть S_g — ориентируемая поверхность рода g , и пусть Δ — диск, вложенный в S_g . Тогда если замкнутая несамопересекающаяся кривая $\gamma \subset S_g \setminus \Delta$ тривиальна в S_g и нетривиальна в $S_g \setminus \Delta$, то она

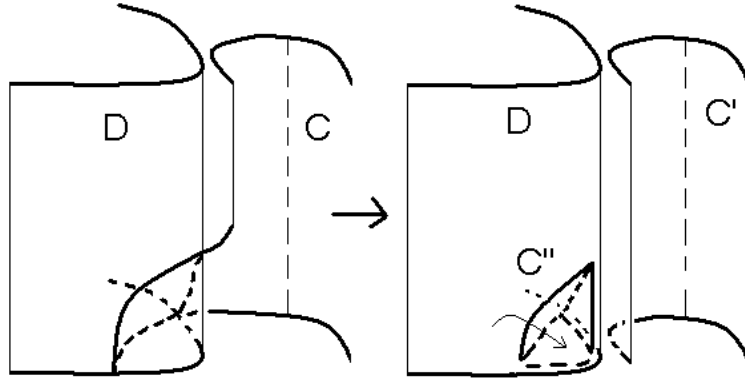


Рис. 2.8. Удаление пересечения вдоль невертикальной дуги

параллельна $\partial\Delta$ (т.е. $\gamma \cup \partial\Delta$ ограничивает цилиндр в S_g).

Действительно, если кривая γ , не имеющая общих точек с Δ , ограничивает диск в S_g , то γ стягивается в $S_g \setminus \Delta$ на край.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.3. *Если собственное кольцо C' свободно гомотопно кольцу D (в классе собственных колец), то кольцо C' имеет непустое пересечение с узлом $K_1 \# K_2$.*

Мы можем считать, что пересечение $C \cap D$ состоит либо только из вертикальных дуг, либо только из горизонтальных окружностей (в общем положении существование вертикальной дуги противоречит существованию горизонтальной окружности).

Предположим, что пересечение состоит только из горизонтальных окружностей. Тогда кольцо C гомотопно кольцу D и, согласно лемме 2.3, кольцо C пересекает узел $K_1 \# K_2$. Это приводит нас к противоречию.

Предположим теперь, что пересечение $C \cap D$ состоит только из вертикальных дуг. Тогда кольцо C разбивается вертикальными дугами на $2k$ частей C_1, \dots, C_{2k} таким образом, что части C_{2l+1} лежат в $M_1 \times I$, а части вида C_{2l} лежат $M_2 \times I$, где $l \in \{1, \dots, k\}$. Таким образом, кольцо $C \cap D$ разбивается на $2k$ секторов радиусами (более точно, радиальными сегментами); некоторые из полученных секторов содержат точки пересечения с

узлом, (они изображены жирными точками) см. рис. 2.9. Без ограничения общности будем считать, что эти точки не попадают на радиальные сегменты. Обозначим эти радиальные сегменты через r_1, \dots, r_{2k} .

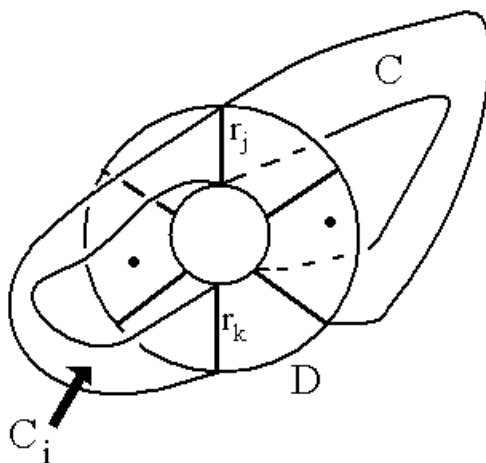


Рис. 2.9. Кольцо C , разбитое на сектора

Кольцо D делит $M \times I$ на две части. Назовем одну из них положительной, а другую — отрицательной. Далее, каждая часть C_i кольца C инцидентна двум радиусам r_j и r_k . Эти два радиуса разбивают кольцо D на две части; обозначим их (в произвольном порядке) через D_{jk}^+ и D_{jk}^- . Далее есть четыре возможных варианта ответа на следующие два вопроса:

1. Верно ли, что каждая из двух частей D_{jk}^+ и D_{jk}^- пересекает узел ровно в одной точке?
2. Верно ли, что кольцо, полученное приклейкой C_i к одной из частей D_{jk}^+ или D_{jk}^- , высекает шар (так что если мы приклеим C_i к другому из этих двух фрагментов, мы получим кольцо, гомотопное кольцу D)?

Замечание 2.7. *Здесь мы имеем в виду, что собственная поверхность (например, кольцо) $F \subset M$ высекает шар, если $M \setminus F$ состоит из двух связных компонент, одна из которых представляет собой топологический шар. Иными словами, F ограничивает шар вместе с некоторой частью P границы ∂M многообразия M , так что $P \cup F$ представляет собой сферу.*

Рассмотрим случай, когда ответ на первый вопрос отрицательный, т.е. одна из двух частей, скажем, D_{jk}^+ , не пересекает узел (в то время как вторая часть D_{jk}^- пересекает узел в двух точках).

Если кольцо, полученное склейкой C_i с D_{jk}^+ , высекает шар, то мы можем “протянуть” D_{jk}^+ сквозь C_i ; это уменьшит число компонент пересечения между C и D , что приводит к противоречию с предположением минимальности.

Если кольцо, полученное склейкой C_i и D_{jk}^- высекает шар, то кольцо $C_i \cup D_{jk}^-$ гомотопно D ; таким образом, оно должно пересекать узел. Это опять приводит к противоречию.

Если ответы на оба вопроса являются утвердительными, мы снова приходим к противоречию: узел не может пересекать границу шара ровно в одной точке.

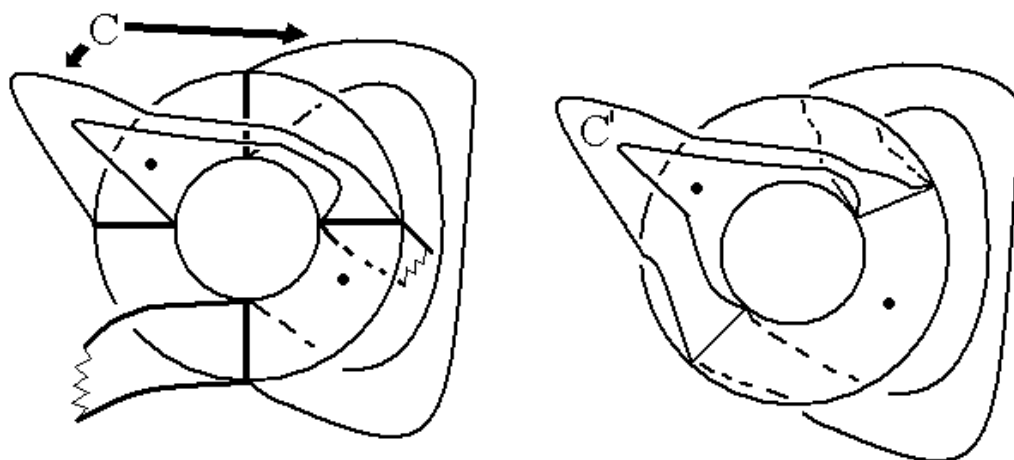
Если оба ответа являются отрицательными, то одна из склеек $C_i \cup D_{jk}^+$ или $C_i \cup D_{jk}^-$ задает нетривиальное кольцо, не пересекающее узла. Малым шевелением можно сделать это кольцо не пересекающим кольца D . Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что C имеет минимальное пересечение с D среди всех колец, вдоль которых можно дестабилизировать.

Наконец, если, скажем, D_{jk}^+ содержит в точности одну точку пересечения с узлом $K_1 \# K_2$, при этом ни одна из приклеек $D_{jk}^+ \cup C_i$ и $D_{jk}^- \cup C_i$ не высекает шар, то число компонент пересечения $C \cap D$ должно быть равно двум.

Действительно, если это число строго больше двух, то его можно уменьшить способом, изображенным на рис. 2.10. Более точно, среди всех частей C_i кольца C мы выберем лишь две части и составим из них нетривиальное кольцо C' , вдоль которого утолщенная поверхность $(M_1 \# M_2) \times I$ с узлом $K_1 \# K_2$ внутри может быть дестабилизирована.

Иными словами, если у нас есть более двух компонент в C_i , то мы можем найти две из них и переклеить их, так чтобы полученное кольцо C' пересекало кольцо D по меньшему числу кривых и при этом не пересекало узла $K_1 \# K_2$.

Таким образом, если пересечение $C \cap D$ является минимальным (по числу

Рис. 2.10. Упрощение кривой C

связных компонент), число связных компонент должно равняться двум.

В этом случае дестабилизация вдоль такого кольца C меняет тип связной суммы: после этого мы получим связную сумму второго типа.

Действительно, диск D разбивается после такой дестабилизации на две части, и две точки пересечения диска с узлом оказываются в разных связных компонентах.

Доказательство в случае, когда мы имеем связную сумму второго типа (и дестабилизация переводит ее в связную сумму первого типа) проходит в том же ключе. Либо есть возможность дестабилизировать одну из утолщенных поверхностей M_1 или M_2 с соответствующим узлом внутри, либо все кольца вдоль которых возможна дестабилизация, пересекают множество $M_1 \cap M_2$ (это множество состоит из двух компонент). Рассматривая кольцо, имеющее минимальное пересечение с $M_1 \cap M_2$, мы приходим к изменению типа связной суммы (со второго на первый).

Тем самым мы доказали не только теорему 2.5, но и лемму 2.1. Действительно, если мы получили связную сумму рода ноль в конце процесса дестабилизации, то эта связная сумма представляет собой связную сумму в утолщенной сфере $S^2 \times I$, что, очевидно, эквивалентно классической связной сумме классических узлов. \square

2.3. Теория Хакена и алгоритм распознавания виртуальных зацеплений

Основной целью настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.6. *Существует алгоритм, определяющий, являются ли два заданных виртуальных зацепления эквивалентными или нет.*

Главная идея доказательства — распознавание некоторого класса трехмерных многообразий (так называемых многообразий Хакена) и изучение “нормальных поверхностей” в этих многообразиях — ранее широко применялась для решения различных алгоритмических задач трехмерной топологии. В частности, в рамках этой теории была решена проблема распознавания классических зацеплений.

Известно [Mo1], что любое трехмерное многообразие триангулируемо. В дальнейшем все рассматриваемые трехмерные многообразия предполагаются триангулированными; при этом рассматриваемые подмножества трехмерных многообразий, например, собственные поверхности в них, предполагаются подполиэдрами заданной триангуляции.

В каждом триангулированном трехмерном многообразии M (быть может, с непустым краем) рассматриваются *собственные двумерные поверхности* F .

Напомним, что поверхность F называется *собственной*, если $F \cap \partial M = \partial F$. Из класса собственных поверхностей выделяется так называемый класс *нормальных поверхностей*.

Нормальные поверхности — это собственные поверхности, которые, грубо говоря, ведут себя нормально по отношению к триангуляции. В этом смысле определение **зависит от триангуляции**, хотя в дальнейшем описываемые нами свойства нормальных поверхностей являются универсальными.

Среди нормальных поверхностей выделяется класс *фундаментальных* или *базисных*, из которого все нормальные поверхности получаются посредством применения *геометрического суммирования* (подробнее см. [Matv]).

Понятие нормальной и фундаментальной поверхностей обобщается на многообразии с узором — графом без изолированных точек — на крае.

Основные положения теории Хакена нормальных поверхностей состоят в следующем:

1. Набор фундаментальных нормальных поверхностей конечен и строится алгоритмически.
2. Для многих естественных свойств a справедливо следующее утверждение: если в многообразии M существует *нормальная* поверхность F , обладающая свойством a , то существует и *фундаментальная* поверхность, обладающая свойством a .

Из этих положений вытекает, что нахождение нормальной поверхности, обладающей “естественными” свойствами, является алгоритмически разрешимой задачей.

К свойствам пункта 2 упомянутых основных положений Хакена относится, например, следующее: свойство поверхности F быть сферой и задавать нетривиальный элемент второй гомотопической группы многообразия M . К таким же свойствам относится возможность стабилизации/дестабилизации для заданного представителя виртуального зацепления (см. ниже).

Мы не будем давать точное определение нормальной поверхности и фундаментальной поверхности. Наше дальнейшее доказательство теоремы 2.6 будет основано на теореме Куперберга и ряде лемм из теории нормальных поверхностей, доказательство большинства из которых можно найти в книге С.В.Матвеева [Matv].

Нам понадобятся некоторые дополнительные определения.

Многообразии M называется *неприводимым*, если каждая вложенная сфера в M ограничивает шар в M .

Мы будем использовать определение виртуальных узлов как узлов в утолщенных поверхностях $\mathcal{M} \times I$, рассмотренных с точностью до стабилизаций/дестабилизаций. Здесь \mathcal{M} — это компактная двумерная поверхность, не обязательно связная. При этом мы требуем, чтобы для каждой связной компоненты \mathcal{M}_i поверхности \mathcal{M} , многообразии $\mathcal{M}_i \times I$ содержало по крайней мере одну компоненту зацепления L .

Напомним, что реализация виртуального зацепления называется *минимальной*, если ее нельзя дестабилизировать.

В дальнейшем нам понадобится теорема 2.1 Куперберга [Куп].

Для сравнения виртуальных зацеплений нам достаточно уметь находить их минимальных представителей и сравнивать их. Алгоритм, который мы приводим ниже, использует трехмерные многообразия с узором на крае (см. определения ниже), которые связаны с виртуальными зацеплениями.

Мы будем использовать следующие определения и теоремы из теории Хакена-Матвеева, см. [Matv] а также [ФМ].

Сжимающим диском для поверхности F в 3-многообразии M с краем ∂M называется вложенный (несобственный) диск $D \subset M$, пересекающий F по границе диска, т.е. $D \cap F = \partial D$.

Поверхность (быть может, несвязная) $F \subset M$ называется *сжимаемой* в одном из следующих двух случаев:

1. Она допускает сжимающий диск $D \subset M$, такой что кривая ∂D не ограничивает диска на поверхности F ;
2. Существует шар B в M , такой что $B \cap F = \partial B$.

Поверхность называется *несжимаемой*, если она не является сжимаемой.

Поверхность $F \subset M$ называется *границно сжимаемой*, если существует (несобственный) диск $D^2 \subset M$, такой что $D^2 \cap (\partial M \cup F) = \partial D^2$, при этом $D^2 \cap F$ представляет собой нетривиальную дугу в F (т.е. дугу, не высекающую диск из поверхности F).

Далее, многообразие M называется *границно неприводимым*, если для всякого собственного диска $D \subset M$, его край ∂D ограничивает диск в ∂M .

Пусть дано трехмерное многообразие. Под *узуром* (понятие впервые введено К. Иоганнсоном, см. [Joh]) мы понимаем фиксированный 1-полиэдр (граф) без изолированных вершин на крае многообразия (мы предполагаем, что этот граф является подполиэдром фиксированной триангуляции).

Существование узора на крае не меняет определений несжимаемой поверхности и неприводимого многообразия.

Понятия гранично несжимаемой поверхности и гранично неприводимого многообразия обобщаются на случай многообразий с узором на крае следующим образом. Диск $D \subset M$ называется *чистым*, если он не пересекает узора на крае.

Для граничной неприводимости мы требуем, чтобы для каждого чистого диска $D \subset M$, $\partial D \subset M$, край ∂D ограничивал диск в $F \subset M$.

Далее, *гранично сжимающий диск* (несобственный) для поверхности F — это чистый диск $D \subset M$, который пересекает F вдоль $l \subset \partial D$ и дуги $F \cap \partial M$. В этом случае диск D несущественный, если l высекает диск D' из F , т.ч. $\partial D'$ состоит из дуги l и чистой дуги в ∂M .

Поверхность $F \subset (M, \Gamma)$ назовем *гранично несжимаемой*, если у нее нет существенных гранично сжимающих дисков.

Ориентированное трехмерное многообразие M называется *достаточно большим*, если оно содержит собственную несжимаемую гранично несжимаемую поверхность, отличную от двумерной сферы и двумерного диска.

Естественно рассматривать понятие достаточно большого трехмерного многообразия вместе со свойствами неприводимости и граничной неприводимости. Это приводит нас к следующему определению.

В несвязном случае многообразие называется *многообразием Хакена*, если каждая его компонента является многообразием Хакена.

Определение 2.4. Связное трехмерное многообразие без узора на крае называется *многообразием Хакена*, если оно является неприводимым, гранично неприводимым и достаточно большим.

Связное неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие (M, Γ) с узором Γ на крае называется *многообразием Хакена*, либо если оно достаточно велико, либо если узор Γ непуст (при этом непусто и ∂M), а M является телом с ручками, но не шаром.

Определение 2.5. Пусть M — неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие (без узора на крае). Собственное кольцо $A \subset M$ называется *несущественным*, либо если оно параллельно относительно ∂ некоторому кольцу на крае ∂M , либо если ось этого кольца A стягиваема в многообразии M . В противном случае кольцо A называется *существенным*.

Существенное (относительно многообразия $S_g \times I$, из которого выкинуто зацепление, см. далее) кольцо, две компоненты края которого лежат на разных компонентах края $S_g \times \{0\}$ и $S_g \times \{1\}$ — это как раз такое кольцо, вдоль которого мы можем провести дестабилизацию.

Нам понадобится следующее

Предложение 2.1 (Джейко-Рубинштейн-Томпсон, см., напр., [Tho, Matv]). *Всякое связное неприводимое 3-многообразие с непустым краем является либо достаточно большим, либо телом с ручками.*

В дальнейшем мы будем иметь дело с многообразиями с непустым узором на крае. Чтобы такое многообразие было многообразием Хакена, нам достаточно проверить, что оно (точнее, всякая его связная компонента) является неприводимым и гранично неприводимым, но не является шаром.

Лемма 2.4 (Джейко-Рубинштейн-Томпсон, см., напр., [Tho, Matv]). *Существует алгоритм, распознающий, является ли заданное многообразие M приводимым; если многообразие является таковым, то алгоритм доставляет двумерную сферу $S \subset M$, не ограничивающую шара в M .*

Лемма 2.5. ([Matv]) *Классические зацепления алгоритмически распознаваемы.*

Эта лемма следует из теории Хакена нормальных поверхностей; доказательство основано на следующих идеях: для каждого нетривиального нераспадающегося зацепления дополнение к его открытой трубчатой окрестности в S^3 является многообразием Хакена. Снабжая это многообразие узором на крае, мы сможем восстановить исходное зацепление. После этого проблема сводится к проблеме распознавания многообразий Хакена, подробности см. в [Matv].

Лемма 2.6. ([Matv]) *Существует алгоритм, определяющий, имеет ли данное многообразие Хакена M чистое существенное кольцо. Если такое кольцо существует, оно строится алгоритмически. Более того, для компонент края U, V многообразия M алгоритмически решается и вопрос нахождения существенного кольца, у которого по крайней мере одна компонента лежит в U , при этом ни одна компонента края не лежит в V .*

Замечание 2.8. Мы будем использовать эту лемму для решения вопроса о том, можно ли дестабилизировать некоторую реализацию виртуального зацепления. Для этого в качестве множества V мы выберем компоненты края — границы трубчатых окрестностей компонент зацепления. Тем самым останутся лишь существенные кольца, компоненты края которых лежат на компонентах края утолщенной поверхности. Для дестабилизации нам потребуется, чтобы компоненты края нашего кольца лежали на разных компонентах края утолщенной поверхности.

Легко видеть, что вопрос существования и нахождения таких колец также распознается алгоритмически.

Лемма 2.7. (*[Matv]*) Существует алгоритм, который по двум многообразиям Хакена с узорами на крае — (M, Γ) и (M', Γ') — определяет, существует ли гомеоморфизм первого многообразия на второе, переводящий узор Γ в узор Γ' .

Перейдем теперь к построению процесса распознавания виртуальных зацеплений.

Рассмотрим виртуальное зацепление L и его произвольного представителя, т.е. пару (M, L) , где $M = \tilde{M} \times I$ для некоторой замкнутой двумерной поверхности \tilde{M} , а L — зацепление в M (мы используем одну и ту же букву L для обозначения исходного зацепления и зацепления в многообразии M для экономии обозначений). Пусть N — малая открытая трубчатая окрестность зацепления L . Вырежем N из M . Мы получим многообразие с краем, которое обозначим через M_L . Край этого многообразия состоит из компонент края многообразия M (двух, если многообразие M связно) и нескольких торов; количество торов равно количеству компонент зацепления L . Снабдим каждый такой тор узором Γ_L на крае: этот узор представляет собой меридиан соответствующей компоненты с тремя точками на нем: мы добавляем точки для того, чтобы превратить окружность в граф — подграф некоторой триангуляции. Таким образом мы получим многообразие (M_L, Γ_L) с узором на крае.

Очевидно, что виртуальное зацепление L (и пара (M, L)) восстанавливается по (M_L, Γ_L) , так как мы знаем способ построения многообразия M посредством приклейки полноторий к компонентам края многообразия M_L ,

у которого меридианы этих полноторий выделены узором.

Лемма 2.8. *Предположим, что зацепление L не представимо в виде несвязной суммы (непустого) классического зацепления и (быть может, пустого) виртуального зацепления. Тогда многообразие (M_L, Γ_L) с узором Γ_L является многообразием Хакена.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что многообразие M_L связно; действительно: рассмотрим связные компоненты многообразия M и, если у зацепления L нет классических отдельно стоящих компонент, то каждая из компонент многообразия (M_L, Γ_L) является многообразием Хакена; значит, таковым по определению является и (M_L, Γ_L) .

Мы рассматриваем связный случай. В силу предложения 2.1, нам достаточно показать, что это многообразие (любая его связная компонента) с узором на крае является неприводимым и гранично неприводимым: по определению, оно не может быть телом с ручками.

В случае $g = 0$ мы имеем дело с классическими зацеплениями. Предположим, что $g > 0$. Тогда для каждой связной ориентируемой двумерной поверхности S_g многообразие $S_g \times I$ является неприводимым. Таким образом, если зацепление L не является классическим (т.е. $g \neq 0$), то для его открытой окрестности $N(L)$ многообразие $(S_g \times I) \setminus N(L)$ может быть приводимым если и только если оно содержит сферу S , ограничивающую шар в $S_g \times \{0, 1\}$, содержащий некоторое непустое множество компонент зацепления L . Это означает, что эти компоненты образуют классическое подзацепление зацепления L , отделенное от остальных компонент. Противоречие доказывает приводимость.

Далее, так как L не является несвязной суммой тривиального узла с некоторым виртуальным узлом, многообразие M_L является гранично неприводимым.

Действительно, каждая кривая в $S_g \times \{0\}$ или в $S_g \times \{1\}$, которая может ограничивать диск в $S_g \times I$, является стягиваемой по краю. Таким образом, граничная приводимость может иметь место лишь в том случае, если имеется собственный диск с краем, лежащим на одном из торов — крае одного из вырезанных полноторий. Это означает, что компонента зацепления, соответствующая этому полноторию является отдельно стоящим

тривиальным узлом.

Таким образом, соответствующее многообразие является неприводимым и гранично неприводимым и, следовательно (согласно предложению 2.1), многообразием Хакена. \square

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Пусть L, L' — виртуальные зацепления. Алгоритм распознавания состоит в последовательном применении следующих четырех шагов:

Шаг 1. Рассмотрим некоторые реализации $(M, L), (M', L')$ виртуальных зацеплений L, L' . Построим соответствующие им многообразия с узорами на краях. Обозначим их через $(M_L, \Gamma), (M'_L, \Gamma')$.

Шаг 2. Определим, является ли одно из многообразий M_L или M'_L приводимым. Если одно из них является таковым, то, согласно лемме 2.4, мы можем найти сферу, не ограничивающую шара, и таким образом отделить некоторые отдельно стоящие классические компоненты от одного (или обоих) рассматриваемых зацеплений.

Сделаем замену обозначений: обозначим старыми именами M, M' многообразия, полученные из M, M' вырезанием шаров, содержащих компоненты зацепления (с последующим заклеиванием дыр шарами). Обозначим также через L, L' те подзацепления зацеплений L, L' , которые остались после удаления классических отдельно стоящих компонент.

Будем запоминать удаленные классические подзацепления.

Шаг 3. Определим (согласно лемме 2.6), возможно ли применить дестабилизацию к одному из многообразий (M, L) или (M', L') .

Если это возможно, применим такую дестабилизацию. Вернемся к шагу 2.

Будем применять шаги 2 и 3, пока это возможно. Очевидно, что процесс остановится за конечное время: на каждом шаге мы либо убираем некоторое количество компонент зацеплений, либо уменьшаем род одной из поверхностей.

Классические зацепления являются алгоритмически распознаваемыми. Таким образом, мы можем сравнить отдельно стоящие классиче-

ские подзацепления зацеплений L и L' . Если эти два зацепления не изотопны, мы останавливаемся: рассматриваемые виртуальные зацепления не являются эквивалентными. В противном случае мы продолжаем.

После применения первых трех шагов мы свеем проблему к случаю, когда у зацеплений нет отдельно стоящих классических компонент, а их реализации являются минимальными. С настоящего момента все многообразия являются многообразиям Хакена (с узором на крае) по лемме 2.8.

Шаг 4. Каждая связная компонента многообразий (M_L, Γ) и $(M'_{L'}, \Gamma')$ является многообразием Хакена с узором на крае. Таким образом, мы можем алгоритмически разрешить вопрос о том, существует ли гомеоморфизм $f : M_L \rightarrow M'_{L'}$, переводящий Γ в Γ' (по лемме 2.7). Если такой гомеоморфизм существует, то виртуальные зацепления L, L' являются эквивалентными. В противном случае зацепления L и L' не эквивалентны.

Выполняя шаги, описанные выше, мы решаем проблему распознавания. Теорема 2.6 доказана.

Замечание 2.9. *Доказательство, приведенное выше, проходит также для случая ориентированных виртуальных зацеплений и оснащенных виртуальных зацеплений.*

Глава 3

Дистрибутивные группоиды в теории виртуальных узлов

На начальном этапе развития теории узлов основным инвариантом был топологический инвариант — *фундаментальная группа дополнения к узлу* или *группа узла*. На ее основе был построен простой и удобный инвариант — полином Александера, [Ale1, Ale2].

Фундаментальная группа дополнения может быть задана комбинаторно — посредством *копредставления Виртингера*, которое было описано в первой главе. Из копредставления Виртингера фундаментальной группы можно получить полином Александера несколькими способами; один из них — свободное исчисление Фокса, см. [КФ]. Полином Александера и топологические инварианты узлов тесно связаны с *кручениями*, см. [Tur3].

Простейшим способом доказательства того, что трилистник нетривиален, является использование так называемого *инварианта раскрасок*. Рассматривается классическая диаграмма L и ее дуги — связные компоненты (мы считаем ветвь прохода разрывной, как она обычно изображается на плоскости). Будем раскрашивать все дуги диаграммы в три цвета, при этом назовем раскраску *правильной*, если в каждом перекрестке три инцидентные ему дуги либо покрашены в один цвет, либо имеют три разных цвета. Посчитаем количество правильных раскрасок и обозначим его через $CI(K)$. Каждый классический узел имеет три *одноцветных* правильных раскраски. Несложно доказывается [КФ], что **количество** правильных раскрасок является инвариантом зацепления (можно непосредственно показать это, проверяя, как “перестраиваются” раскраски при применении того или другого движения Рейдемейстера).

Замечание 3.1. Как будет следовать из общей теории, инвариант раскрасок продолжается и на виртуальные узлы и зацепления.

У простейшей диаграммы тривиального узла всего одна (циклическая) дуга, поэтому количество правильных раскрасок тривиального узла равно трем: тривиальная диаграмма имеет лишь три раскраски — одноцветные.

Таким образом, если диаграмма узла имеет неоднородную раскраску, то задаваемый ею узел нетривиален. Аналогично, для тривиального зацепления из m компонент количество правильных раскрасок равно 3^m .

Нетрудно заметить, что количество правильных раскрасок трилистника равно девяти, так как помимо трех одноцветных раскрасок у простейшей диаграммы трилистника имеется также шесть раскрасок в три цвета: мы имеем три дуги, причем в каждом перекрестке сходятся все три дуги (одна из них проходит сквозь перекресток, а две другие примыкают к нему).

Этот пример является простейшим вариантом глубокой алгебраической теории, которая приводит к многочисленным инвариантам классических и виртуальных узлов, рассматриваемым в настоящей главе.

Другое описание инварианта раскрасок таково: каждый цвет рассматривается как элемент из \mathbf{Z}_3 ; раскраска называется правильной, если в каждом перекрестке имеет место соотношение $c \equiv 2b - a \pmod{3}$, если дуга a проходит сверху, а дуги b и c примыкают к ней справа и слева согласно ориентации дуги a .

Как оказывается, количество раскрасок элементами произвольного кольца (с правильно подобранной операцией в перекрестках) является инвариантом. Это (в более общей форме) будет показано в дальнейшем.

Как фундаментальная группа, так и инвариант раскрасок обобщаются до **почти полного**¹ инварианта узлов — дистрибутивного группоида или квандла, предложенного в конце 70-х — начале 80-х годов независимо С.В.Матвеевым и Д.Джойсом.

Полнота дистрибутивного группоида следует из полноты фундаментальной группы с *периферической структурой*; последнее вытекает из знаменитой топологической теоремы Вальдхаузена, см. [Wal].

¹Узел рассматривается с точностью до одновременного обращения ориентации узла и ориентации объемлющего пространства.

Группоид, как и фундаментальная группа, может быть определен геометрически (как класс гомотопии путей, исходящих из фиксированной точки с концом, лежащим на крае трубчатой окрестности узла; при гомотопии требуется, чтобы первый конец оставался неподвижным, а второй двигался по трубчатой окрестности), так и алгебраически — с помощью формального “копредставления”, подобного копредставлению Виртингера.

Дистрибутивный группоид оказался удобен тем, что его частные случаи дают многие инварианты узлов, с которыми удобно работать. К числу этих инвариантов относятся фундаментальная группа и полином Александера, а также некоторые новые инварианты, открытие которых последовало сразу за изобретением дистрибутивного группоида.

В середине 80-х годов независимо О.Я.Виро [Viro3] и Р.Фенном [FRS1, FRS2] были предложены дальнейшие обобщения понятия группоида, основанные на более сложной структуре соотношений в классических перекрестках. Более сильные инварианты узлов построены не были, ибо уже дистрибутивный группоид представлял собой (почти) **полный инвариант узлов**, но это изобретение привело к некоторым новым методам поиска инвариантов узлов.

Интерес к дистрибутивным группоидам и их обобщениям возобновился с возникновением теории виртуальных узлов: обобщение полного инварианта классических узлов на случай виртуальных узлов дает мгновенное доказательство того, что в случае классических узлов классическая и виртуальная эквивалентности совпадают [GPV] (о чем уже было упомянуто в предыдущей главе).

Однако сам дистрибутивный группоид оказался весьма слабым инвариантом для распознавания виртуальных узлов, что привело автора [Ma4], [Ma6] к идее более глубокого подхода к алгебраическим структурам и введению новых операций в виртуальных перекрестках; получаемый таким образом инвариант называется *виртуальным группоидом* (другие авторы рассматривали некоторые иные обобщения структуры группоида, см. [KR, Saw, SW]).

Идеи, предложенные в [Ma6], были затем развиты Б.Меллором и Т.Флемингом для построения теории *виртуальных пространственных графов*,

[FM].

На указанном пути автору удалось построить ряд новых инвариантов виртуальных узлов и получить ряд результатов; так, например, некоторые инварианты обращаются в нуль на классических узлах, следовательно, позволяют легко установить неклассичность некоторых узлов. С другой стороны, наш подход к дистрибутивным группоидам (вкуче с некоторыми новыми конструкциями) привел к построению **инвариантов длинных виртуальных узлов**, основанных на понятии длинного группоида, речь о которых пойдет в разделе 3.2.

Построение инвариантов длинных узлов посредством дистрибутивных группоидов является центральным результатом настоящей главы. Конструкция раздела 3.2 позволила автору распознавать нетривиальность длинных виртуальных узлов простыми арифметическими методами, а также установить впервые тот факт, что длинные виртуальные узлы, вообще говоря, не коммутируют.

Далее в настоящей главе построена реализация дистрибутивного группоида, которая приводит к построению инвариантов классических и виртуальных зацеплений со значениями в (бесконечномерных) алгебрах Ли.

В настоящей главе строятся и исследуются инварианты виртуальных зацеплений исходя из плоских диаграмм. Наша цель — построить по диаграмме зацепления алгебраический объект, инвариантный относительно обобщенных движений Рейдемейстера. Общий метод заключается в следующем. Мы рассматриваем диаграмму виртуального зацепления как четырехвалентный граф, лежащий на плоскости.

Ребрам графа мы сопоставляем некоторые формальные элементы, которые будут играть роль образующих для инвариантного алгебраического объекта, а перекрестки будут указывать соотношения между элементами, соответствующими инцидентным им дугам. Инвариантность построенного объекта проверяется непосредственным рассмотрением обобщенных движений Рейдемейстера.

В конце настоящей главы мы приведем также некоторые приложения дистрибутивных группоидов к теории плоских виртуальных узлов.

Сверх того будут описаны иерархические виртуальные узлы — комбина-

торные обобщения плоских виртуальных узлов, для которых можно строить инварианты способами, похожими на те, которые использовались при изучении виртуальных узлов.

3.1. Группоиды и их обобщения

Пусть дана виртуальная диаграмма L . Удалим из нее все виртуальные перекрестки. Получим (несвязное) множество \tilde{L} , состоящее из связных компонент, которые мы назовем *дугами*. Каждая дуга представляет собой либо окружность — либо компоненту зацепления, которая не имеет виртуальных перекрестков, а в каждом классическом перекрестке проходит сверху, либо интервал. Начало и конец этого интервала представляют собой либо удаленный виртуальный перекресток, либо классический перекресток — проход; все внутренние перекрестки являются переходами. Подряд идущие дуги, разделяемые виртуальными перекрестками, образуют *длинные дуги*, идущие от прохода до следующего прохода. В случае диаграммы классического зацепления понятия дуги и длинной дуги совпадают.

Назовем диаграмму *правильной*, если она не имеет циклических длинных дуг. Применяя к диаграмме первое увеличивающее классическое движение Рейдемейстера, можно превратить циклическую длинную дугу в длинную дугу, не являющуюся циклической.

У любого виртуального зацепления существует правильная диаграмма. Действительно, любая диаграмма виртуального зацепления, имеющая циклическую длинную дугу преобразуется в правильную диаграмму применением первого классического движения Рейдемейстера так, как показано на рис. 3.1.

Имеет место следующее

Утверждение 3.1. *Две правильные диаграммы задают эквивалентные виртуальные зацепления в том и только в том случае, если одна из них может быть преобразована в другую в классе правильных диаграмм.*

Действительно, если при преобразовании диаграммы L к эквивалентной диаграмме L' будут встречаться диаграммы с циклическими дугами, мы можем добавлять петли (посредством движения Ω_1), а затем убирать

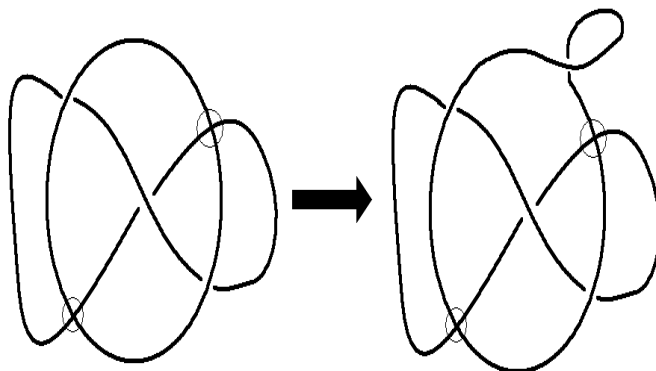


Рис. 3.1. Преобразование диаграммы с циклической длинной дугой
в правильную диаграмму

их. Таким образом, цепочка обобщенных преобразований Рейдемейстера $L = L_0 \rightarrow L_1 \cdots \rightarrow L_k = L'$ превратится в цепочку $L = L_0 = L_{01} \rightarrow \dots L_{0,i_0} \rightarrow L_1 \rightarrow \dots L_{1,i_1} \rightarrow \dots L_{k1} \rightarrow \dots L_{k,i_k} = L_k = L'$, где все диаграммы L_{ij} являются правильными, причем каждая из диаграмм L_{ij} получается из диаграммы L_i добавлением/удалением петель — последовательным применением первого движения Рейдемейстера. Тем самым утверждение доказано. Далее в настоящей главе все виртуальные диаграммы подразумеваются правильными, если не оговорено противное.

Длинные дуги разбиваются на дуги. Можно продолжить деление *дуг* и далее, разбивая каждую дугу во всех классических перекрестках, в которых она образует переход. В этом случае будем говорить о *коротких дугах*. Пример диаграммы с длинными дугами, дугами и короткими дугами изображен на рис. 3.2. Назовем этот виртуальный узел *виртуальным трилистником*. Итак, частью диаграммы, которой мы будем сопоставлять образующие алгебраического объекта, является дуга (или длинная дуга или короткая дуга).

Рассмотрим сначала все длинные дуги диаграммы L . В каждом классическом перекрестке сходятся (локально) три длинные дуги: одна образует переход, а две остальные — проход. Вообще говоря, глобально две из этих длинных дуг (или все три) могут совпадать.

Обозначим количество классических перекрестков диаграммы L через

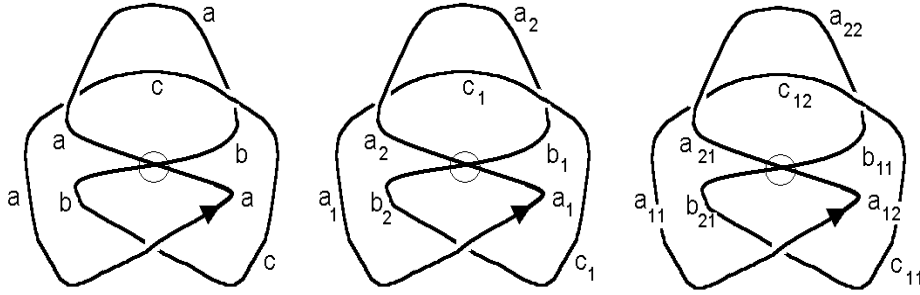


Рис. 3.2. Длинные дуги; дуги; короткие дуги

n . Тогда количество длинных дуг этой диаграммы также равно n (так как диаграмма L является правильной).

Отметим одно важное обстоятельство. При построении инвариантов с использованием *длинных дуг* мы игнорируем расположение виртуальных перекрестков. Тем самым объект, который мы будем строить таким образом, будет естественно инвариантен относительно движения объезда (см. стр. 17).

Сопоставим этим длинным дугам формальные буквы — образующие a_1, \dots, a_n . Наша цель — построить инвариантный относительно обобщенных движений Рейдемейстера алгебраический объект, удовлетворяющий некоторой аксиоматике. Соотношения на образующие этого объекта a_1, \dots, a_n мы будем брать из классических перекрестков диаграммы.

Согласно С.В.Матвееву [Мат], определим *дистрибутивный группоид* как множество M , снабженное бинарной операцией \circ , обладающей следующими свойствами:

1. (Идемпотентность:) Для каждого $a \in M$ имеет место $a \circ a = a$;
2. (Наличие левого обратного:) Для каждого $b, c \in M$ существует единственный элемент $x \in M$, такой что $x \circ b = c$. В этом случае будем писать: $x = c/b$;
3. (Правая самодистрибутивность:) Для любых $a, b, c \in M$ имеет место $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$.

Подобно группам, дистрибутивные группоиды можно задавать с помо-

пью образующих и соотношений. Это делается следующим образом. Пусть a_1, \dots, a_k — конечный набор букв (образующих). Определим индуктивно множество *Adm допустимых слов* как множество, получающееся из образующих многократным применением операций \circ и $/$. А именно, определим индуктивно множество допустимых слов по следующему правилу.

1. Все буквы a_i являются допустимыми словами.
2. Если x, y — допустимые слова, то слова $(x) \circ (y)$ и $(x)/(y)$ также являются допустимыми.
3. Не существует допустимых слов, за исключением слов, получающихся так, как описано в пунктах 1,2.

Замечание 3.2. Иногда для упрощения записи мы будем опускать скобки, когда ясно из контекста, какое выражение имеется в виду. Так, например, вместо $(a_1) \circ (a_2)$ мы будем писать просто $a_1 \circ a_2$.

Пусть теперь дан набор из l соотношений R_i (называемых *определяющими*) вида $r_{i1} = r_{i2}$ при $i = 1, \dots, l$, где r_{ij} — некоторые допустимые слова.

На множестве *Adm* всех допустимых слов естественным образом заданы операции \circ и $/$.

Определим теперь дистрибутивный группоид, заданный образующими a_1, \dots, a_k и соотношениями R_1, \dots, R_l и обозначаемый через $\Gamma\langle a_1, \dots, a_k | R_1, \dots, R_l \rangle$ как фактор–множество множества *Adm* по отношениям эквивалентности, задаваемым следующими элементарными эквивалентностями:

1. $\forall A \in Adm : A \circ A \sim A, A/A \sim A$
2. $\forall A, B \in Adm : (A \circ B)/B \sim (A/B) \circ B \sim A$
3. $\forall A, B, C \in Adm : (A \circ B) \circ C \sim (A \circ C) \circ (B \circ C)$
4. $\forall i = 1, \dots, l : r_{i1} \sim r_{i2}$.

На полученном множестве операции \circ и $/$ индуцированы из множества Γ ; аксиомы дистрибутивного группоида очевидно выполняются.

Вернемся к диаграмме L с n классическими перекрестками. В каждом классическом перекрестке (с номером i) этой диаграммы одна из дуг образует переход. Ей соответствует некоторая образующая a_{i_1} . Справа от этой (длинной) дуги (по отношению к ее ориентации) находится (длинная) дуга, образующая проход: ей соответствует образующая a_{i_2} , наконец, слева расположена (длинная) дуга, которой соответствует образующая a_{i_3} , см. рис. 3.3.

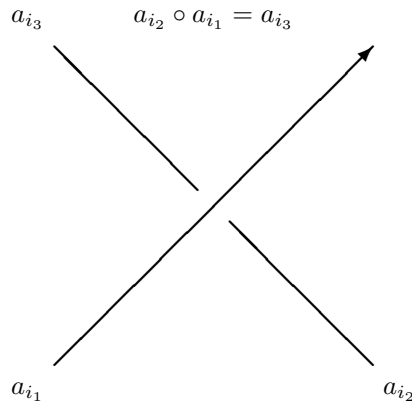


Рис. 3.3. Соотношение дистрибутивного группоида в классическом перекрестке

Сопоставим данному классическому перекрестку соотношение

$$a_{i_2} \circ a_{i_1} = a_{i_3}. \quad (3.1)$$

Обозначим это соотношение через R_i .

Замечание 3.3. Отметим, что на рисунке 3.3 ориентация дуг a_{i_2} и a_{i_3} не указана; она не имеет значения. Какая бы она ни была, мы выписываем одно и то же соотношение (3.1).

Сопоставим теперь диаграмме L дистрибутивный группоид $\Gamma(L) = \Gamma\langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_n \rangle$. Имеет место

Теорема 3.1. Для диаграмм L, L' , представляющих эквивалентные виртуальные узлы, дистрибутивные группоиды $\Gamma(L)$ и $\Gamma(L')$ изоморфны.

Доказательство этой теоремы основано на том факте, что аксиоматика дистрибутивного группоида отвечает его инвариантности относительно

преобразований Рейдемейстера. Здесь нужно проверять лишь инвариантность относительно классических преобразований Рейдемейстера, так как расположение виртуальных перекрестков на длинных дугах не учитывается. Далее в настоящей главе мы докажем более общую теорему (теорема 3.3).

В классическом случае эта теорема была впервые доказана С.В. Матвеевым [Mat] и (независимо) Д.Джойсом [Joy]. Обобщение дистрибутивного группоида на случай виртуальных узлов и зацеплений и доказательство его инвариантности принадлежит Кауфману [Kau1].

На самом деле, Матвеев и Джойс доказали гораздо большее:

Теорема 3.2 (Матвеев-Джойс). *Если для классических узлов L и L' группоиды $\Gamma(L)$ и $\Gamma(L')$ изоморфны, то либо узел L эквивалентен (изотопен) узлу L' , либо L эквивалентен узлу, получающемуся из L' заменой ориентации узла и заменой всех типов перекрестков (прохода на переход и наоборот).*

Последняя операция означает одновременную замену ориентации узла и объемлющего пространства. Замена ориентации пространства эквивалентна изменению направления оси Oz по отношению к плоскости Oxy ; это выражается в замене всех проходов на переходы и наоборот. Так, например, дистрибутивный группоид не различает правого и левого трилистников: операция обращения ориентации узла на каждом из трилистников тождественна, а обращение ориентации пространства переводит один из них в другой.

Следовательно, дистрибутивный группоид является почти полным инвариантом классических узлов. С другой стороны, дистрибутивный группоид имеет обобщение на виртуальные узлы согласно теореме 3.1. Из этого наблюдения следует теорема 2.2.

Замечание 3.4. *Учитывая то, что дистрибутивный группоид не является полным инвариантом классических узлов в строгом смысле, для его полноты нужно добавить еще инвариант, который следил бы за ориентацией узла и обобщался естественным образом на виртуальные узлы. Это и проделано в работе [GPV].*

Структура дистрибутивного группоида имеет естественные обобщения, которые возникают, если перейти от длинных дуг к дугам или к коротким дугам. В случае дуг мы будем вводить соотношения между дугами, сходящимися в виртуальных перекрестках, а переход к коротким дугам позволит нам модифицировать соотношения в классических перекрестках: вместо одной бинарной функции мы получим две бинарные функции: мы имеем две входящие дуги и две исходящие дуги. В отличие от случая, когда инвариант строится по *длинным* дугам, в случае дуг или коротких дуг инвариантность относительно объезда не является самоочевидной, и ее нужно проверять.

Это приводит нас к понятию виртуального группоида.

3.1.1. Виртуальный группоид

Понятие виртуального группоида было впервые предложено в работах автора [Ma4, Man6]. Приводимые ниже результаты опубликованы в [Ma4, Man6, Ma2, Ma10, Man2].

Определение 3.0. Назовем *виртуальным группоидом* дистрибутивный группоид (M, \circ) , на котором задан автоморфизм $f : M \rightarrow M$, т.е. взаимно однозначное отображение, такое что для любых $a, b \in M$ имеет место $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$.

Аналогично дистрибутивным группоидам виртуальные группоиды также можно задавать образующими a_α и определяющими соотношениями R_β , где индексы α и β пробегают некоторые конечные множества. Сначала мы определяем множество допустимых слов посредством операций $\circ, /$, а также f и f^{-1} .

Рассмотрим следующую аксиоматику построения инварианта виртуальных зацеплений. Пусть дано виртуальное зацепление L , и пусть a_1, \dots, a_k — множество его дуг. Мы будем использовать операцию \circ для записи соотношений между дугами, инцидентными одному и тому же классическому перекрестку так же, как и раньше, см. (3.1), рис. 3.3; кроме того, мы введем формальную (унарную) операцию f для виртуальных перекрестков (эта операция будет автоморфизмом группоида), а именно: пусть в некотором виртуальном перекрестке X_j сходятся четыре дуги, которым соответству-

ют образующие $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, a_{j_4}$ так, как показано на рис. 3.4.

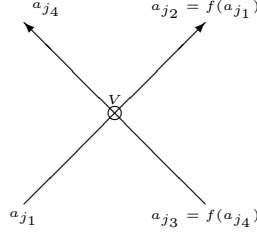


Рис. 3.4. Соотношение для виртуального перекрестка

Построим формальный “свободный виртуальный группоид” образующими a_i — сначала рассмотрим множество всех допустимых слов с учетом операций $\circ, /, f, f^{-1}$, а затем профакторизуем по естественным соотношениям виртуального группоида. Для полноты определения в число элементарных эквивалентностей нужно включить также соотношения вида $f(a\alpha b) = f(a)\alpha f(b)$ и $f(f^{-1}(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$, где a и b — произвольные допустимые слова, α — операция \circ или $/$, получаемые из образующих посредством операций $\circ, /, f, f^{-1}$.

Далее мы факторизуем по соотношениям:

$$a_{j_2} = f(a_{j_1}) \quad (3.2)$$

и

$$a_{j_3} = f(a_{j_4}) \quad (3.3)$$

Полученный после такой факторизации группоид обозначим через $\Gamma_f \langle a_\alpha | R_\beta \rangle$.

Определим теперь виртуальный группоид $\Gamma(L)$ как $\Gamma_f \langle a_1, \dots, a_n | R_i, R_{j_1}, R_{j_2} \rangle$; здесь соотношения R_i относятся к классическим перекресткам с номерами i (соотношения вида (3.1)), а пары соотношений R_{j_1}, R_{j_2} относятся к виртуальным перекресткам (в каждом виртуальном перекрестке с номером j мы имеем два соотношения вида (3.2, 3.3)).

Предлагаемая ниже теорема была впервые доказана в [Man6], см. также [Ma4].

Теорема 3.3. *Виртуальный группоид $\Gamma(L)$ является инвариантом виртуальных зацеплений. Более точно, пусть L, L' — две эквивалентные*

виртуальные диаграммы. Тогда существует изоморфизм виртуальных группоидов $\iota : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L')$, согласованный с операцией f .

Доказательство. Будем считать все диаграммы правильными (утверждение 3.1).

Нам нужно показать, что при применении движения Рейдемейстера к виртуальной диаграмме ее виртуальный группоид преобразуется в некоторый изоморфный ему виртуальный группоид.

Рассмотрим некоторое движение Рейдемейстера — классическое, виртуальное или полувиртуальное. Пусть L и L' — две виртуальные диаграммы, получающиеся одна из другой применением этого движения. Движение является локальным, т.е. происходит внутри некоторого маленького круга C . Разобьем все дуги диаграмм L и L' на три семейства: общее множество E внешних дуг, принадлежащих как диаграмме L , так и диаграмме L' , общее множество S дуг, пересекающих окружность круга C и множества I, I' внутренних (лежащих внутри C) дуг, принадлежащих соответственно к L и к L' . Таким образом, виртуальный группоид $\Gamma(L)$ имеет следующие образующие и соотношения.

Во-первых, мы имеем общие (для всех виртуальных группоидов) соотношения — дистрибутивность и идемпотентность. Обозначим это множество соотношений через ε .

Соотношения видов (3.1, 3.2, 3.3) — те, которые происходят из перекрестков — для диаграмм L, L' также подразбиваются на множества: внешние соотношения R_E являются общими для L и L' , а внутренние соотношения $R_I, R_{I'}$ относятся соответственно к L и к L' . Кроме них, каждый из двух виртуальных группоидов имеет общие для всех виртуальных группоидов соотношения ε (идемпотентность и правая самодистрибутивность). Далее в доказательстве соотношением мы будем называть только соотношение в некотором перекрестке (а не идемпотентность и не самодистрибутивность).

Легко видеть, что для каждого конкретного движения Рейдемейстера посредством соотношений R_I можно избавиться от образующих I , выразив их через S . Это приведет к добавлению некоторых “внутренних” соотношений R_S для S . То же самое может быть сделано и для I' . Обозначим полученные соотношения через R'_S . Таким образом, мы преобразуем

оба виртуальных группоида $\Gamma(L)$ и $\Gamma(L')$ к изоморфным им виртуальным группоидам $\tilde{\Gamma}(L)$ и $\tilde{\Gamma}(L')$. Последние порождены образующими E, S . У них есть общее множество внешних соотношений R_E (а также ε).

Единственное, что нам нужно доказать, — это то, что соотношения R_S и R'_S (вместе с соотношениями ε) определяют одно и то же отношение эквивалентности на S .

Выполним это для конкретных типов движений Рейдемейстера; другие случаи полностью аналогичны тем, которые будут описаны.

Инвариантность группоида Γ относительно всех классических движений Рейдемейстера может быть проверена тем же способом, что и в случае обычного дистрибутивного группоида, см. [Mat, Joy]. В случае первого классического движения Рейдемейстера вместо одной дуги a (и соотношения $a = a$) мы получаем две дуги; обозначим их через a' и a'' . Из соотношения в перекрестке ясно, что $a'' = a'$ (это следует из идемпотентности операции \circ). Следовательно, при добавлении петли так, как показано на рис. 3.5, мы получаем виртуальный группоид, изоморфный исходному.

Определение 3.1. Здесь и далее под *изоморфизмом* виртуальных группоидов (длинных группоидов) мы понимаем изоморфизм, сохраняющий операцию f .

Остальные случаи первого движения Рейдемейстера рассматриваются аналогично.

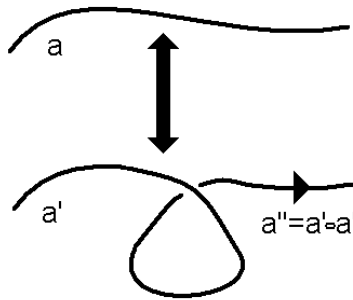


Рис. 3.5. Инвариантность группоида относительно Ω_1

В случае второго движения Рейдемейстера мы имеем четыре “внешние

дуги” из множества дуг E , см. рис. 3.6 а именно, a, b, c, d . На рисунке сверху слева соотношения имеют вид $a = c, b = d$. На рисунке справа снизу соотношения выглядят следующим образом. Мы имеем, $a = c = e$, т.е. e выражается через внешние образующие. Далее $b \circ a = g, d \circ e = g$, откуда следует $b = d$ (здесь используется свойство левой обратимости операции \circ).

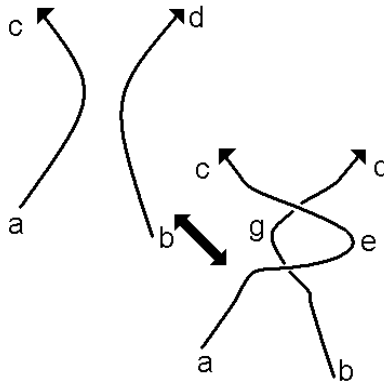


Рис. 3.6. Инвариантность группоида относительно Ω_2

Аналогичным образом в случае третьего движения Рейдемейстера, см. рис. 3.7, мы имеем три входящие дуги a, b, c и три исходящие дуги d, e, g . Мы не будем выписывать промежуточные дуги; в случае левой картинке мы имеем $a = d, b \circ a = g, (c \circ a) \circ (b \circ a) = e$, в то время как справа мы получаем соотношения $a = d, b \circ a = g, (c \circ b) \circ a = e$.

Инвариантность следует из соотношения дистрибутивности $(c \circ b) \circ a = (c \circ a) \circ (b \circ a)$.

Проверим теперь инвариантность виртуального группоида Γ при применении чисто виртуальных движений Рейдемейстера.

Первое виртуальное движение Рейдемейстера изображено на рис. 3.8. На левом рисунке мы имеем одну образующую a . Мы добавляем еще одну образующую b и два совпадающих соотношения $a = f(b)$ и $b = f^{-1}(a)$. Новая образующая выражается через имеющиеся ранее (а именно, через образующую a); на старые образующие не накладывается никаких новых соотношений; тем самым виртуальный группоид преобразуется в изоморфный ему виртуальный группоид.

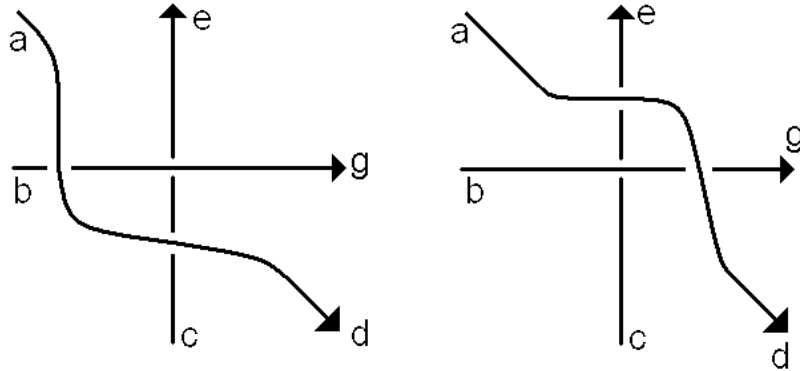


Рис. 3.7. Инвариантность группоида относительно Ω_3

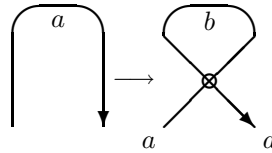


Рис. 3.8. Инвариантность Γ относительно первого движения

В случае, если дуга, изображенная на рис. 3.8, ориентирована справа налево, аналогичным образом приводит к соотношению $b = f(a)$, что не меняет ситуации.

Для каждого из последующих соотношений мы будем проверять только один случай (другие случаи отличаются от выбранного заменой ориентации некоторых компонент). Проверка полностью аналогична.

Второе виртуальное движение Рейдемейстера (см. рис. 3.9) добавляет две образующие c и d и четыре соотношения, точнее, две пары совпадающих соотношений: $c = f(a), d = f^{-1}(b)$. Таким образом, виртуальный группоид Γ переходит в виртуальный группоид, ему изоморфный.

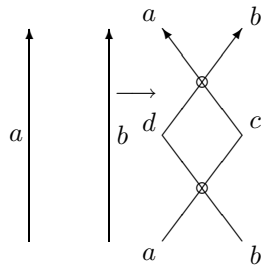


Рис. 3.9. Инвариантность Γ относительно второго виртуального движения

В случае третьего виртуального движения Рейдемейстера мы имеем шесть “внешних дуг”: три входящие дуги (a, b, c) и три исходящие дуги (p, q, r) , см. рис. 3.10. В обоих случаях элементы группоида, соответствующие трем внутренним дугам, выражены через a, b, c , соотношения между внешними дугами имеют вид $p = f^2(a), q = b, r = f^{-2}(c)$.

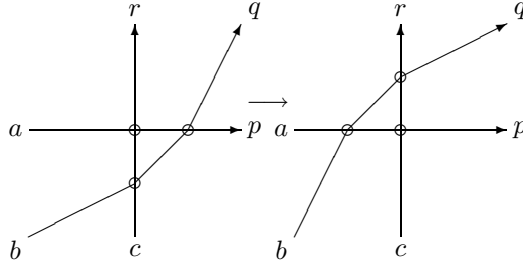


Рис. 3.10. Инвариантность Γ относительно третьего виртуального движения

Рассмотрим движение Ω'_3 . Мы проверим только одну версию этого движения, см. рис. 3.11.

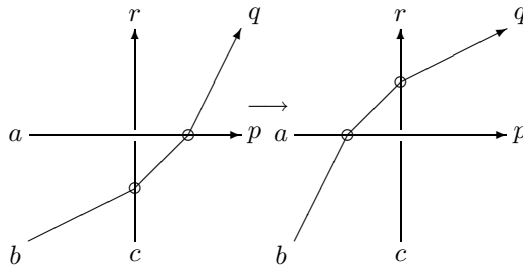


Рис. 3.11. Инвариантность Γ относительно смешанного движения

На обеих картинках мы имеем три входящих ребра a, b, c и три исходящих ребра p, q, r . В первом случае имеем соотношение: $p = f(a), q = b, r = f^{-1}(c) \circ a$. Во втором случае мы имеем: $p = f(a), q = b, r = f^{-1}(c \circ f(a))$.

Из соотношений дистрибутивности $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ вытекает соотношение $f^{-1}(c) \circ a = f^{-1}(c \circ f(a))$. Следовательно, два виртуальных группоида, соответствующие диаграммам до применения смешанного движения и после применения смешанного движения, совпадают.

Другие случаи смешанного движения ведут к другим соотношениям, при этом все они эквивалентны $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$.

Это завершает доказательство теоремы. \square

Как и дистрибутивные группоиды, виртуальные группоиды являются объектами, с которыми трудно работать. А именно, если имеются две виртуальные диаграммы L и L' , и мы знаем некоторые копредставления их дистрибутивных группоидов (виртуальных группоидов), то мы не можем сразу сказать, являются соответствующие дистрибутивные группоиды (виртуальные группоиды) изоморфными или нет. Проблема распознавания изоморфности дистрибутивных группоидов, заданных копредставлениями, по видимому, не проще проблемы распознавания изоморфности групп, которая, как известно, в общем случае является алгоритмически неразрешимой.

Поэтому имеет смысл искать некоторые более простые инварианты, которые реализуются с помощью морфизмов в категорию дистрибутивных группоидов из некоторой более простой категории.

Проще говоря, мы рассматриваем какую-нибудь категорию (скажем, группы или модулей) и пытаемся найти в ней операции, которые обладают аксиомами дистрибутивного группоида (виртуального группоида). Найдя их, мы можем построить более простые инвариантные объекты, инвариантность которых будет следовать из общекатегорных соображений.

Приведем несколько примеров виртуальных группоидов.

1. Группа с выделенным элементом x , является виртуальным группоидом относительно операции \circ вида $a \circ b = b^n a b^{-n}$ для некоторого фиксированного натурального n , где $f(a) = x a x^{-1}$.
2. Группа с выделенным элементом x , является виртуальным группоидом при $a \circ b = b a^{-1} b$, $f(a) = x a x^{-1}$, а также при $f(a) = x a^{-1} x$ ($a \circ b = b a^{-1} b$).
3. Модуль над коммутативным кольцом $\mathbf{Q}[t, t^{-1}, s, s^{-1}]$, в которой $a \circ b = t a + (1 - t) b$, $f(a) = s a$.

В этих случаях аксиомы виртуальных группоидов (а, следовательно, и дистрибутивных группоидов) проверяются непосредственно.

Это позволяет строить инварианты классических и виртуальных узлов (зацеплений) двумя способами: первый из них — фиксировать заданный дистрибутивный группоид (виртуальный группоид) Γ и изучать свойства семейства морфизмов из дистрибутивного (виртуального) группоида за-

цепления в Γ . В случае, когда Γ имеет конечное число элементов, имеет смысл говорить о количестве таких морфизмов как об инварианте.

С другой стороны, каждому узлу (зацеплению) можно сопоставлять инвариантный дистрибутивный группоид (виртуальный группоид) в той или иной категории. Так, например, в категории групп дистрибутивный группоид представляется фундаментальной группой, т.е. при записи соотношений группоида узла на языке групп, где в качестве соотношения $a \circ b$ берется bab^{-1} , задает фундаментальную группу узла.

Виртуальный группоид задает следующее обобщение фундаментальной группы дополнения к узлу.

Лемма 3.1. [Мапб] Для каждой группы G группа $G * \{q\}$ (свободное произведение группы G с бесконечной циклической группой, порожденной образующей q) является виртуальным группоидом относительно операций $\circ, f(\cdot)$, определенных как $a \circ b = bab^{-1}$, $f(c) = qcq^{-1}$ для всех $a, b, c \in G * \{q\}$.

Доказательство. Обратимость операции f , как и обратимость сопряжения очевидна. Действительно, нам нужно показать лишь, что $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$. В самом деле, $f(a \circ b) = f(bab^{-1}) = qbab^{-1}q^{-1} = qbq^{-1}(qaq^{-1})qb^{-1}q^{-1} = f(b)f(a)f(b^{-1}) = f(a) \circ f(b)$. \square

Построим теперь виртуальную группу виртуального зацепления $G(L)$ по виртуальной диаграмме L . Обозначим все дуги диаграммы L через $a_i, i = 1, \dots, n$. Группа $G(L)$ — это группа, порожденная образующими a_1, \dots, a_n, q с определяющими соотношениями видов (3.1), (3.2), (3.3), в которых мы полагаем $f(x) = qxq^{-1}, y \circ z = zyz^{-1}$. Назовем классической группой виртуального зацепления факторгруппу виртуальной группы по соотношению $q = 1$.

В случае классической диаграммы мы получим в точности копредставление Виртингера с одной лишней образующей q (которая не участвует в соотношениях); таким образом, описанная выше виртуальная группа будет представлять собой свободное произведение группы узла на бесконечную циклическую группу, порожденную образующей q .

Некоторые виртуальные зацепления (и их инварианты) могут обладать свойствами, которые не имеют места в случае классических зацеплений.

Например, как в классическом, так и в виртуальном случае можно определить верхнюю и нижнюю группы (в классическом случае — фундаментальные группы дополнения); нижняя группа для виртуальных узлов определяется как группа зеркального образа виртуального узла. Для классических узлов эти группы являются изоморфными по геометрическим причинам. В виртуальном случае верхнее и нижнее копредставления могут задавать неизоморфные классические группы. В приводимом ниже примере приводится группа без дополнительной образующей q . Первый такой пример был приведен в [GPV]. Он выглядит следующим образом.

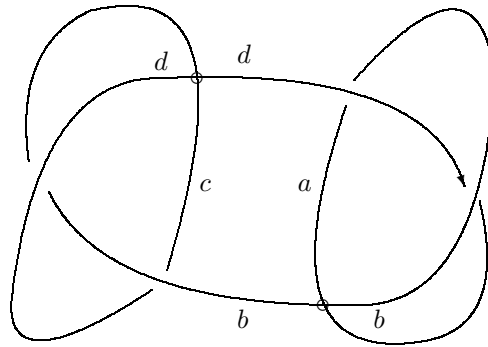


Рис. 3.12. Виртуальный узел с неизоморфными верхней и нижней группами

Рассмотрим виртуальный узел \mathcal{K} , изображенный на рис 3.12. Его четыре длинные дуги a, b, c, d , указанные на рис. 3.12, можно выбрать в качестве образующих группы узла. Здесь длинная дуга идет от прохода до следующего прохода, по ходу образуя переходы и виртуальные перекрестки. Мы получим следующие соотношения:

$$b = dad^{-1}, \quad a = bdb^{-1}, \quad d = bcb^{-1}, \quad c = dbd^{-1}.$$

Таким образом, образующие a и c выражаются через образующие b и d . Следовательно, мы получаем копредставление $\langle b, d | bdb = dbd \rangle$, которое задает группу, изоморфную группе трилистника (группе кос из трех нитей).

Нетрудно заметить, что группа соответствующего зеркального узла изоморфна группе \mathbf{Z} — группе тривиального узла.

Из теоремы Дена-Папакирьякопулоса [Пап] следует, что среди нетривиальных классических узлов нет узла, имеющего фундаментальную группу

дополнения, изоморфную \mathbf{Z} , поэтому узел \mathcal{K} не является классическим.

Теорема 3.4. (*[Man6]*) *Пара: (группа $G(L)$, элемент $q \in G(L)$) является инвариантом виртуальных зацеплений. Другими словами, если диаграммы L и L' задают эквивалентные виртуальные зацепления, то существует изоморфизм $h : G(L) \rightarrow G(L')$, такой что $h(q_L) = q_{L'}$.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 3.3 и леммы 3.1.

Очевидно, что для тривиального узла U мы имеем $G(U) = \langle a, q \rangle$; это — свободная группа с двумя образующими.

Из приведенных выше рассуждений следует нетривиальность виртуального трилистника: его виртуальный группоид не является изоморфным виртуальному группоиду тривиального узла посредством изоморфизма, сохраняющего элемент q .

Существует и другие копредставления виртуального группоида в группах. Например, копредставление

$$x \circ y = y^p x y^{-p}, \quad f(x) = q x q^{-1},$$

где p — фиксированное целое число, а q — фиксированный элемент группы. Доказательство инвариантности такое же, как в общем случае, только вместо абстрактных операций \circ, f нужно использовать их явные групповые реализации.

Кроме того, для получения инвариантов можно воспользоваться одним из следующих копредставлений:

$$x \circ y = y x^{-1} y, \quad f(x) = q x q^{-1}$$

или

$$x \circ y = y x^{-1} y, \quad f(x) = q x^{-1} q.$$

Замечание 3.5. *Рассмотрим группу с образующими, соответствующими дугам классического узла и соотношениями в перекрестках, которые получаются из соотношений группоида по правилу $x \circ y \rightarrow y x^{-1} y$. Как известно, эта группа изоморфна фундаментальной группе двулистного накрытия, ветвящегося над узлом.*

3.1.2. Инвариант раскрасок

Идея построения инварианта раскрасок (элементами некоторого виртуального группоида) очень проста. Инвариант раскрасок равен количеству гомоморфизмов виртуального группоида рассматриваемого зацепления в некоторый конечный виртуальный группоид. Более точно, имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть Γ' — виртуальный группоид. Тогда множество гомоморфизмов $\Gamma(L) \rightarrow \Gamma'$ является инвариантом зацепления L . В частности, если множество элементов виртуального группоида Γ' конечно, то количество гомоморфизмов $\Gamma(L) \rightarrow \Gamma'$ также конечно, и это количество является инвариантным относительно обобщенных движений Рейдемейстера.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно по построению. Для доказательства второго утверждения рассмотрим виртуальное зацепление L и его правильную диаграмму \bar{L} . Для построения гомоморфизма $h : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma'$ нам нужно определить лишь элементы $h(a_i)$ — образы элементов виртуального группоида $\Gamma(L)$, соответствующего дугам диаграммы \bar{L} , т.е. образующим. Так как количество дуг у диаграммы конечно, искомое количество гомоморфизмов также конечно. \square

Таким образом, для конечного виртуального группоида Γ' мы имеем целочисленный инвариант зацеплений, определяемый как число гомоморфизмов $\Gamma(L) \rightarrow \Gamma'$. Смысл этого инварианта очень прост: он представляет собой число *раскрасок* дуг диаграммы \bar{L} элементами виртуального группоида Γ' ; раскраска называется *правильной*, если она удовлетворяет соотношениям виртуального группоида в классических и виртуальных перекрестках.

Приведем пример виртуального группоида из четырех элементов. Определим операцию \circ по следующему правилу (на пересечении строки a_i и столбца a_j стоит элемент $a_i \circ a_j$):

\circ	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_3	a_4	a_2
a_2	a_4	a_2	a_1	a_3
a_3	a_2	a_4	a_3	a_1
a_4	a_3	a_1	a_2	a_4

(3.4)

Важным является вопрос о том, где брать (конечные) виртуальные группоиды. Приведем обобщения конструкций дистрибутивных группоидов, предложенных в [Mat], на виртуальный случай. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть G — конечная группа, $g \in G$ — фиксированный элемент в этой группе, а n — фиксированное целое число. Тогда множество всех элементов группы G , снабженное операциями $x \circ y = y^n x y^{-n}$, $f(x) = g x g^{-1}$, является виртуальным группоидом.

Иначе можно строить виртуальные группоиды следующим образом: для (конечной) группы G с фиксированным элементом $g \in G$ мы полагаем $x \circ y = y x^{-1} y$, $f(x) = g x g^{-1}$.

Пусть дано коммутативное кольцо R с единицей, и пусть $t, s \in R$ — обратимые элементы.

Из непосредственной проверки вытекает

Теорема 3.5. [Man6] Кольцо R , снабженное операциями $\circ, /, f, f^{-1}$, заданными по правилу $x \circ y = t x + (1-t)y$, $f(x) = s x$, является виртуальным группоидом.

Эти примеры дают две серии целочисленных инвариантов виртуальных зацеплений.

Список дистрибутивных группоидов малой сложности приведен в монографии Скотта Картера, Сейичи Камады и Масахико Сайто, [CKS2]. В этой книге также описана теория гомологий группоидов (quandle homology), которая имеет применение в обычной теории виртуальных узлов, а также в высших размерностях (например, для построения инвариантов двумерных узлов в \mathbf{R}^4).

3.1.3. Виртуальный модуль Александера и его обобщения

Полином Александера можно определить через фундаментальную группу дополнения к узлу или через свободное дифференциальное исчисление Фокса, см., напр., [КФ].

Мы будем определять полином Александера посредством *модуля Александера*.

Модуль Александера (виртуальной или классической) диаграммы представляет собой модуль над $\mathbf{Z}[t]$, порожденный всеми *длинными дугами* диаграммы (которые в классическом случае совпадают с ее обычными дугами) и соотношениями (3.1) в классических перекрестках так, как показано на рис. 3.3, где операция $a \circ b$ означает $ta + (1 - t)b$.

Эти соотношения могут быть записаны в виде квадратной матрицы, строки которой соответствуют перекресткам диаграммы, а столбцы — (длинным) дугам диаграммы.

Пусть дана ориентированная диаграмма зацепления L с n классическими перекрестками. Построим соответствующую ей *матрицу Александера* $M(L)$ следующим образом. (Мы вернемся к таким матрицам в дальнейшем, когда будем рассматривать виртуальные узлы).

Перенумеруем все классические перекрестки диаграммы натуральными числами от единицы до n . В общем случае из каждого перекрестка исходит ровно одна длинная дуга (если только в диаграмме нет отдельных циклических дуг). Напомним, что мы рассматриваем только правильные диаграммы. Сопоставим каждой длинной дуге номер i того перекрестка, из которого она выходит. Теперь можно построить матрицу инцидентности, в которой перекрестки соответствуют строкам, а дуги соответствуют столбцам.

Допустим, что никакой перекресток не инцидентен одной и той же длинной дуге дважды. Тогда каждое пересечение принадлежит ровно трем длинным дугам: дуга, образующая переход (номер j), исходящая дуга (номер i), и входящая дуга (номер k), см. рис. 3.13.

При этом i -я строка матрицы Александера состоит из трех ненулевых элементов, расположенных на местах i, j, k . Если i -ый перекресток поло-

жителен (\otimes) , то $m_{ii} = 1, m_{ik} = -t, m_{ij} = t - 1$. В противном случае полагаем $m_{ii} = t, m_{ik} = -1, m_{ij} = 1 - t$.

Очевидно, что определитель этой матрицы равен нулю, поскольку сумма элементов в каждой строке равна нулю.

Тем самым мы построили *классическую матрицу Александра*, соотношения в которой задают *классический модуль Александра*; образующие в последнем соответствуют длинным дугам исходной виртуальной диаграммы.

Есть два естественных способа обобщения классического модуля Александра на виртуальный случай. Один из них (аддитивный способ) состоит в добавлении новой образующей ε в сам модуль, при этом операция f имеет вид $x \rightarrow x + \varepsilon$; второй — мультипликативный, т.е. мы добавляем новую переменную к основному кольцу (в случае зацеплений из многих компонент — новые переменные, в количестве, равном числу компонент), и операция f состоит в умножении на одну из этих переменных. Естественно, что в случае многих компонент это является некоторой модификацией виртуального группоида.

Аддитивный подход

Приводимые ниже результаты опубликованы в работах [Ma2, Ma13, Ma1].

Пусть R — кольцо полиномов Лорана от переменной t . Иногда нам будет удобно считать, что R является кольцом над \mathbf{Z} , а иногда — над \mathbf{Q} . Это будет оговариваться отдельно. Будем сопоставлять диаграммам виртуальных зацеплений модули над кольцом R , при этом среди образующих модуля помимо элементов, соответствующих дугам узла, будет также фиксированный элемент ε . Этот элемент будет играть роль выделенной дополнительной образующей. Более точно, рассмотрим виртуальную диаграмму L . Обозначим ее дуги через a_1, \dots, a_n . Построим теперь модуль над кольцом R , порожденный образующими-дугами a_1, \dots, a_n и образующей ε , построенный по правилу виртуального группоида, операции в котором имеют вид:

$$\begin{cases} x \circ y = tx + (1-t)y \\ f(x) = x + \varepsilon \end{cases} \quad (3.5)$$

Легко проверяется, что эти операции удовлетворяют аксиомам виртуального группоида.

Эти операции задают соотношения в модуле \mathcal{M} .

Таким образом, каждой виртуальной диаграмме L соответствует пара $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ — модуль и выделенный элемент в нем.

Из приведенных выше рассуждений вытекает

Теорема 3.6. *Для двух эквивалентных виртуальных диаграмм L и L' существует изоморфизм модулей $\mathcal{M}(L) \rightarrow \mathcal{M}(L')$, переводящий элемент $\varepsilon(L)$ в $\varepsilon(L')$.*

Этот модуль позволяет получить более простые (полиномиальные) инварианты зацеплений. Например, можно рассмотреть идеал $I(L)$ в кольце R , аннулирующий элемент ε из модуля $\mathcal{M}(L)$. Из теоремы 3.6 следует, что идеал $I(L)$ также является инвариантом зацепления.

Важен случай, когда идеал $I(L)$ является *главным*. Рассмотрим случай евклидова кольца $R = \mathbf{Q}[t, t^{-1}]$. В этом случае этот идеал порожден некоторым полиномом, который, будучи рассмотрен с точностью до единиц кольца R , сам является инвариантом зацепления L . Обозначим этот полином через VA и будем называть VA -полиномом.

Из построения вытекает следующая

Теорема 3.7. *Полином VA является инвариантом виртуальных зацеплений с точностью до умножения на λt^k , $k \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{Q}$*

Перейдем к явному описанию того, как вычислять полином VA .

Рассмотрим (правильную) ориентированную виртуальную диаграмму K с n классическими перекрестками. Перенумеруем ее классические перекрестки натуральными числами от 1 до n , при этом каждой длинной дуге сопоставим номер того классического перекрестка, из которого она выходит.

Каждая длинная дуга l начинается с некоторой дуги $s(l)$. Обозначим элемент модуля \mathcal{M} , соответствующий начальной дуге $s(k)$ длинной дуги

с номером k , через a_k . Тогда все остальные дуги длиной дуги с номером k представлены в модуле \mathcal{M} элементами вида $a_k + p_{ki}\varepsilon$, где p_{ki} — некоторые целые числа. Следовательно, элементы $\{a_1, \dots, a_n, \varepsilon\}$ составляют набор образующих модуля $\mathcal{M}(K)$. Для задания \mathcal{M} нам осталось лишь описать соотношения в классических перекрестках. В классическом перекрестке с номером i сходятся три длинные дуги: длинная дуга с номером i выходит из него, длинная дуга с некоторым номером j проходит сквозь, а длинная дуга с номером k входит в этот перекресток, см. рис. 3.13.

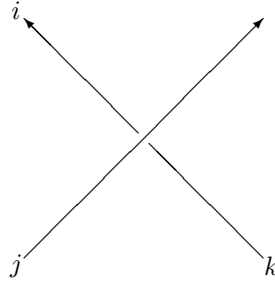


Рис. 3.13. Три дуги, инцидентные перекрестку

При этом перекрестку инцидентны три дуги, являющиеся частями длинных дуг с номерами i, j, k . По построению им соответствуют элементы группоида вида $a_i, a_j + p_{ji}\varepsilon, a_k + p_{ki}\varepsilon$. Соотношение в перекрестке имеет вид

$$-a_i + t^{\pm 1}a_k + (1 - t^{\pm 1})a_j = ((t^{\pm 1} - 1)p_{ji} - t^{\pm 1}p_{ki})\varepsilon, \quad (3.6)$$

при этом знак в показателе выбирается равным $+1$ в случае положительного перекрестка (\otimes), а знак -1 выбирается в случае отрицательного перекрестка (\otimes).

Здесь мы уже перенесли все члены, содержащие ε , в правую часть.

Выпишем таким образом соотношения для всех классических перекрестков. Мы получим квадратную матрицу неоднородных уравнений

$$(M) \cdot (a) = (b) \cdot \varepsilon. \quad (3.7)$$

Эта матрица M носит название *матрицы Александра* виртуальной диаграммы K , а (a) — столбец, состоящий из a_1, \dots, a_n .

Матрица Александра определена с точностью до перестановки строк и соответствующей ей перестановки столбцов.

Матрица Александра вырождена (см., напр, [КФ]): сумма элементов в каждой ее строке равна нулю. Это означает, что некоторая линейная комбинация ее строк равна нулю. Из уравнения (3.7) следует, что, взяв соответствующую линейную комбинацию элементов b_i и умножив ее на ε , мы получим нуль. Из таких линейных комбинаций и состоит идеал I . В случае, если идеал I тривиален, мы полагаем полином VA равным нулю.

Теорема 3.8. *Для классического зацепления L виртуальный модуль Александра разлагается в прямую сумму двух слагаемых, одним из которых является модуль, порожденный элементом ε . Следовательно, имеет место $VA(L) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму зацепления L , не имеющую виртуальных перекрестков, и выпишем для нее соотношения модуля Александра. В них не будет участвовать ε . Из этого следуют оба утверждения теоремы. \square

Пример 3.1. *Рассмотрим виртуальный трилистник и вычислим его виртуальный группоид. На рис. 3.14 справа, мы имеем два классических перекрестка: I и II . Они задают систему из двух соотношений:*

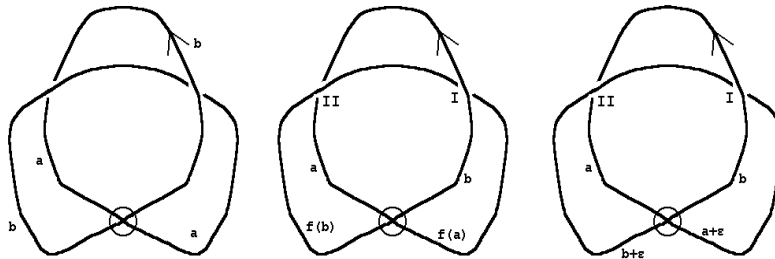


Рис. 3.14. Размеченный виртуальный трилистник

$$I : (a + \varepsilon)t + b(1 - t) = b + \varepsilon$$

$$II : bt + (b + \varepsilon)(1 - t) = a,$$

или, что эквивалентно:

$$\begin{aligned} at - bt &= (1 - t)\varepsilon \\ b - a &= (t - 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на t и прибавляя его к первому, мы получаем: $0 = \varepsilon(1 - t)^2$. Нетрудно проверить, что других соотношений вида $a\varepsilon = 0$ в модуле нет. Таким образом, мы имеем $VA(K) = (1 - t)^2$.

Рассмотрим две связанные суммы виртуального трилистника с самим собой из главы 2, изображенные на рис. 2.2 и 2.3. Явное вычисление показывает, что их VA -полиномы равны соответственно $(t-1)^2(t+1)$ и $(t-1)^2(t^2+1)$, подробнее см. [Мапб].

Имеет место

Теорема 3.9 ([Ма2]). *Для любого виртуального узла (не зацепления) K полином $VA(K)$ делится на $(t - 1)^2$.*

Доказательство. Пусть \bar{K} — диаграмма виртуального узла. В случае, если все ее перекрестки виртуальные, \bar{K} является диаграммой тривиального узла и имеет VA -полином, равный нулю. В противном случае рассмотрим классический перекресток V_1 диаграммы \bar{K} . Пусть X — длинная дуга, исходящая из перекрестка V_1 , и пусть x — первая дуга длинной дуги X , инцидентная перекрестку V_1 (по ходу ориентации узла). Обозначим эту дугу через a_1 . По построению, всем дугам, принадлежащим длинной дуге X , соответствуют элементы $a_1 + k\varepsilon$, $k \in \mathbf{N}$. Предположим, что последняя дуга длинной дуги X (вдоль ориентации узла) помечена как $a_1 + k_1\varepsilon$. Обозначим конечный перекресток этой дуги через V_2 . Рассмотрим теперь первую дугу, выходящую из V_2 и припишем ей $a_2 + k_1\varepsilon$ (т.е. мы можем ввести “по правилу” образующую a'_2 , а затем сделать замену переменной $a'_2 = a_2 + k_1\varepsilon$). Далее мы установим метки вида $a_2 + k\varepsilon$ для всех дуг, принадлежащих той же длинной дуге. Предположим, что последняя из них имеет метку $a_2 + k_2\varepsilon$ и оканчивается в перекрестке V_3 . Далее, сопоставим метку $a_3 + k_2\varepsilon$ первой дуге, выходящей из V_3 , и т.д, см. рис. 3.15.

В дальнейшем под “меткой” мы будем понимать коэффициент при ε .

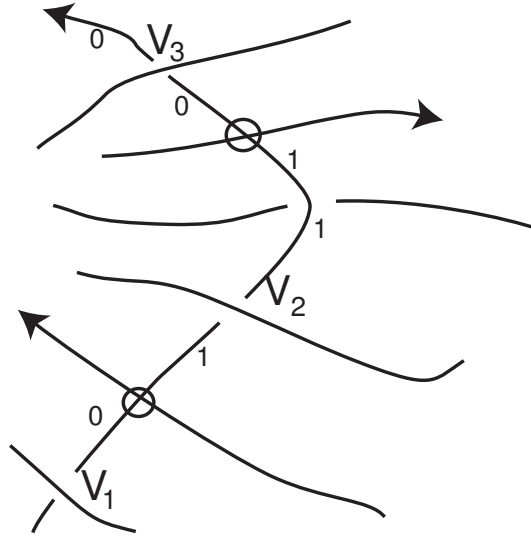


Рис. 3.15.

В конце мы придем к перекрестку V_1 . Покажем, что процесс сойдется, т.е. метка, которую нам следует приписать дуге, первой выходящей из V_1 , должна быть равна нулю.

Действительно, будем рассматривать ε -столбец из меток при прохождении от перекрестка V_1 к нему же вдоль ориентации узла. В самом начале мы имели метку 0 по определению. Затем, при прохождении через каждый следующий виртуальный перекресток, она увеличивается (уменьшается) на единицу. Но так как каждый виртуальный перекресток проходится нами два раза, то каждое вхождение $+\varepsilon$ компенсируется соответствующим $-\varepsilon$ и наоборот. Таким образом, придя в конце в V_1 , мы получим метку $0 \cdot \varepsilon$.

Заметим, что процесс сойдется, если мы будем делать то же самое, стартуя с любой дуги с любой наперед заданной меткой.

В этом случае каждое соотношение в виртуальном модуле Александера имеет правую часть, делящуюся на $\varepsilon(t-1)$, так как соотношение

$$(a_i + p\varepsilon)t + (a_j + q\varepsilon)(1-t) = (a_k + p\varepsilon)$$

эквивалентно соотношению

$$a_it + a_j(1-t) - a_k = (t-1)(q-p)\varepsilon. \quad (3.8)$$

Этим мы доказали, что $VA(K)$ делится на $(t - 1)$.

Обозначим элементы q и p в правой части уравнения (3.8), соответствующего i -му перекрестку, через q_i и p_i соответственно.

Будем искать соотношения на строки виртуальной матрицы Александра. Каждое соотношение должно иметь место при любом t , следовательно, и при $t = 1$.

Обозначим строки матрицы M через M_i . Если для матрицы M имеет место $\sum_{i=1}^n c_i M_i = 0$, то $\sum_{i=1}^n c_i|_{t=1} M_i|_{t=1} = 0$.

Матрица $M(\bar{K})|_{t=1}$ выглядит очень просто. Каждая ее строка (также, как и каждый столбец) содержит одну единицу, одну минус единицу и остальные нули. Соотношение на строки матрицы очевидно: сумма их всех равна нулю, а других соотношений нет. Таким образом, для любых $i, j = 1 \dots, n$ мы имеем $c_i|_{t=1} = c_j|_{t=1}$.

Каждое такое соотношение имеет вид

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i (q_i - p_i) \right) (t - 1)\varepsilon = 0 \quad (3.9)$$

Рассматривая вопрос о делимости левой части на $(t - 1)^2$, мы можем вынести $(t - 1)$ за скобку, а в оставшейся сумме заменить все c_i на $c_i|_{t=1}$.

Достаточно показать, что $\sum_{i=1}^n (q_i - p_i) = 0$ для заданной диаграммы \bar{K} .

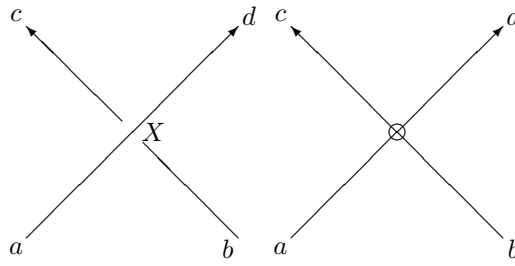
Будем доказывать этот факт индукцией по количеству n классических перекрестков.

В случае $n = 0$ доказывать нечего.

Пусть теперь \bar{K} — диаграмма с n классическими перекрестками, а \bar{K}' — диаграмма, полученная из \bar{K} заменой одного классического перекрестка на виртуальный.

Мы рассмотрим лишь случай, когда замененный перекресток X является положительным (“отрицательный” случай рассматривается полностью аналогично), см. рис. 3.16.

Обозначим нижнюю левую дугу на обеих диаграммах через a , а все остальные — через b , c и d (для диаграммы \bar{K} мы имеем $a = d$), см. рис. 3.16. Припишем метку нуль дуге a на обеих диаграммах. Подсчитаем сумму $\sum (q_i - p_i)$ для обеих диаграмм \bar{K}' и \bar{K} . По предположению индукции,

Рис. 3.16. Метки на диаграммах \bar{K} и \bar{K}'

для \bar{K}' эта сумма равна нулю.

Обозначим метку на дуге b на первой диаграмме через l_{b1} , а соответствующую метку на второй диаграмме — через l_{b2} .

Для перекрестка X диаграммы \bar{K} мы имеем $q = l_{b1}, p = 0$. Таким образом, его вклад в общую сумму равен l_{b1} .

Остальные перекрестки диаграммы \bar{K} находятся в естественном однозначном соответствии с перекрестками диаграммы \bar{K}' . Посчитаем сумму всех слагаемых вида $p_i - q_i$ для этих двух диаграмм. Разность этих двух сумм складывается из классических перекрестков диаграмм \bar{K} и \bar{K}' . Их метки отличаются только на части диаграммы, расположенной между d и b (вдоль ориентации узла). Двигаясь от d к b , мы встречаем классические и виртуальные перекрестки. Общее алгебраическое (с учетом знаков; знак прохождения через перекресток — классический или виртуальный — зависит от того, переходим мы с правой стороны на левую или с левой на правую по отношению к ориентации пересекаемой ветви) число этих перекрестков, очевидно, равно нулю. При этом алгебраическое число виртуальных перекрестков равно $(-q)$. Значит, алгебраическое число классических перекрестков равно q . Каждый из них дает вклад -1 в разность между \bar{K} и \bar{K}' . Поэтому мы имеем $q - q = 0$, что завершает шаг индукции и, следовательно, доказательство теоремы. \square

Мультипликативный подход

Описываемые ниже результаты опубликованы в статье [Ma13] и в книге [Ma1].

Пусть R — кольцо полиномов Лорана от коммутирующих переменных

t, s (мы будем рассматривать это кольцо над \mathbf{R} или над \mathbf{Q} в зависимости от обстоятельств). Пусть L — виртуальная диаграмма. Сопоставим этой диаграмме модуль \mathcal{M} над кольцом R следующим образом. Пусть a_1, \dots, a_n — дуги диаграммы L (мы будем использовать те же буквы a_1, \dots, a_n , для обозначения образующих модуля, соответствующих дугам). Рассмотрим теперь виртуальный группоид над кольцом R , порожденный a_1, \dots, a_n и соотношениями (3.1, 3.2, 3.3) в классических и виртуальных перекрестках согласно следующим формулам:

$$\begin{cases} a \circ b = ta + (1-t)b \\ f(a) = sa. \end{cases} \quad (3.10)$$

Обозначим полученный модуль через $\mathcal{M}(L)$.

Теорема 3.10. *Полученный модуль $\mathcal{M}(L)$ является инвариантом виртуальных зацеплений.*

Эта теорема следует из более сильной теоремы 3.11, доказательство которой мы приведем позднее.

В случае виртуального зацепления с k перенумерованными компонентами (крашеного виртуального зацепления) аналогично строится модуль над кольцом $R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_k^{\pm 1}, s_1^{\pm 1}, \dots, s_k^{\pm 1}]$. Опишем эту конструкцию более подробно. Пусть дана виртуальная диаграмма L зацепления с n дугами, компоненты которого занумерованы натуральными числами от единицы до k . Сопоставим всем дугам диаграммы элементы a_1, \dots, a_n . Модифицируем теперь соотношения между дугами, соседствующими в классических/виртуальных перекрестках, заменяя в соотношениях (3.10) каждое вхождение образующей t на некоторую из образующих t_i , а образующую s — на некоторую из s_i . Более точно, будем действовать по следующему правилу: двум дугам a_k, a_l , разделяемым в виртуальном перекрестке длиной дугой A , относящейся к компоненте i , мы ставим в соответствие соотношение $a_k = s_i a_l$ в случае, если дуга a_k расположена справа по отношению к ориентации длиной дуги A и $a_k = s_i^{-1} a_l$, если дуга a_k расположена слева. В классических перекрестках мы будем использовать соотношения (3.1) в виде $a \circ b = t_j a + (1 - t_j) b$, где i — номер компоненты, соответствующей

дуге перехода, к которой относится соотношение, j — номер компоненты, соответствующей двум дугам прохода.

Таким образом, мы получаем модуль $\mathcal{M}_k(L)$.

Теорема 3.11. *Модуль $\mathcal{M}_k(L)$ является инвариантом крашенных виртуальных зацеплений.*

В случае зацеплений, компоненты которых не упорядочены, мы можем рассмотреть набор модулей $\mathcal{M}_k(L)$ при всех возможных упорядочениях компонент. Этот набор модулей, очевидно, будет инвариантом.

Очевидно, что из теоремы 3.11 следует теорема 3.10. Так как в теореме 3.11 присутствует несколько иная, нежели виртуальные группоиды, структура, а именно, структура, на которой задано множество различных зависящих от компоненты зацепления операций, инвариантность соответствующего модуля \mathcal{M}_k требует отдельного доказательства.

Доказательство теоремы 3.11. Доказательство проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 3.3. Единственное отличие состоит в том, что в данном случае в движениях Рейдемейстера могут участвовать разные компоненты зацеплений, что выражается в наличии различных переменных s_i, t_i . Если положить все s_i равными одной переменной s , а все переменные t_i равными одной и той же переменной t , то доказываемая теорема доказывается полностью аналогично теореме 3.3.

Таким образом, вся суть доказательства сводится к тем случаям, когда в том или ином движении Рейдемейстера принимают участие разные компоненты зацепления. Мы имеем классические, виртуальные и полувиртуальное движения.

Рассмотрим самый сложный случай — третье классическое движение Рейдемейстера и проведем подробно доказательство.

Это доказательство повторяет известное в классическом случае доказательство инвариантности аналогичного модуля для классических зацеплений (без участия образующих s_i).

В нашем случае мы имеем метки — мономы от переменных s_i на всех компонентах; без ограничения общности мы можем предположить, что все они равны единице.

Рассмотрим две диаграммы, изображенные на рис. 3.17.

Номера перекрестков на этом рисунке помечены римскими цифрами, номера дуг — арабскими цифрами, номера компонент — обведены в кружочек, а мономы, соответствующие входящим дугам, обозначены буквами P, Q, R , см. рис. 3.17.

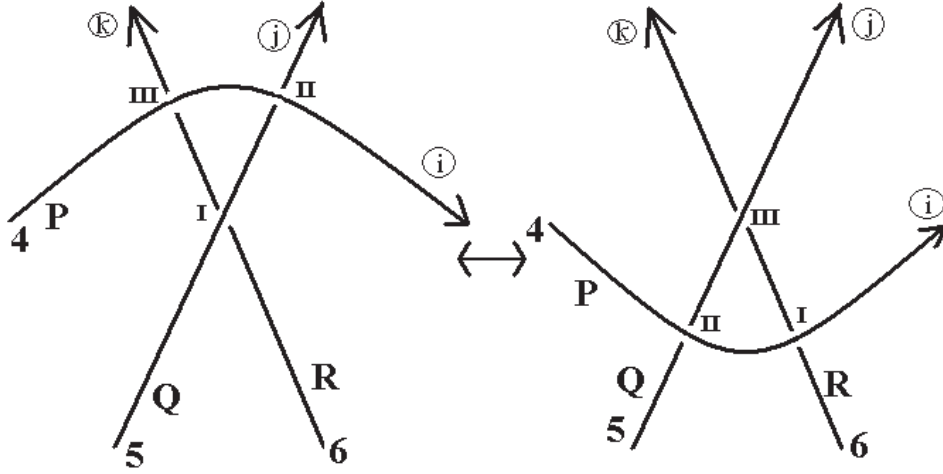


Рис. 3.17. Разметка дуг для Ω_3

Рассмотрим матрицы соотношений, соответствующие диаграмме до применения движения Рейдемейстера и диаграмме после применения движения. Первой диаграмме соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (t_k - 1)Q & -t_j R & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_j - 1)P & -t_i Q & 0 & 0 \dots 0 \\ -t_i & 0 & 1 & (t_k - 1)P & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & W & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Матрица, соответствующая второй диаграмме, выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (t_k - 1)P & 0 & -t_i R & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_j - 1)P & -t_i Q & 0 & 0 \dots 0 \\ -t_j & (t_k - 1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & W & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Буквой W обозначается часть матрицы из $n - 1$ столбцов и $n - 3$ строк.

Мы будем производить элементарные преобразования над матрицами; очевидно, что это не будет менять самого модуля.

Вторые строки этих матриц совпадают. Рассмотрим их третьи строки. В первой матрице прибавим первую строку, умноженную на t_i , к третьей строке. Во второй матрице прибавим первую строку, умноженную на t_j , а также вторую строку, умноженную на $(1 - t_k)$, к третьей строке. Мы получим две матрицы, у которых совпадают третьи строки. Их общая третья строка имеет вид

$$(0, 0, 1, (t_k - 1)P, t_i(t_k - 1)Q, -t_i t_j R, 0, \dots, 0).$$

Первые столбцы новых двух матриц совпадают и имеют ровно один ненулевой элемент, а именно, единицу на первом месте. Таким образом, посредством прибавления этого столбца можно сделать первые строки двух матриц равными. По этой причине исходные модули изоморфны. \square

Рассмотрим следующее описание модуля $\mathcal{M}_k(L)$. Пусть у диаграммы L количество классических перекрестков равно m . Тогда количество длинных дуг этой диаграммы также равно m . Каждая длинная дуга разбивается на некоторое количество дуг. Метки, сопоставленные этим дугам, получаются друг из друга умножением на некоторые мономы от переменных s_i . Таким образом, мы можем сделать следующее: сначала учесть все соотношения в виртуальных перекрестках, тем самым оставив вместо всех образующих по одной образующей-дуге на каждую длинную дугу. Затем мы выпишем соотношения в классических перекрестках, в которых будут участвовать лишь оставшиеся m образующих, соответствующие длинным

дугам. В итоге мы получим m образующих и m соотношений, которые можно записать в матрицу. Определитель этой матрицы (с точностью до обратимых элементов кольца R) будет представлять собой инвариант узлов. Дело в том, что движения Рейдемейстера не меняют модуля $\mathcal{M}_k(L)$. Это выражается в том, что каждое движение Рейдемейстера приводит матрицу к матрице, получающейся из исходной элементарными преобразованиями, не меняющими определителя или умножающими его на некоторый обратимый элемент из кольца R .

При этом можно добиться того, что при правильной нормировке мы получим инвариант зацеплений с точностью до умножения на степени переменных t_i , но не s_i .

Перейдем к описанию этой конструкции более подробно.

Пусть L — (правильная) диаграмма ориентированного зацепления из k компонент с m классическими перекрестками X_1, \dots, X_m . Сопоставим ее компонентам “переменные–номера” i_1, \dots, i_k . Соответственно мы будем использовать переменные s_{i_1}, \dots, s_{i_k} , которые после подстановки индексов дают переменные s_1, \dots, s_k в некотором порядке. В дальнейшем мы будем подставлять в качестве (i_1, \dots, i_m) всевозможные перестановки из k элементов, что позволит нам иметь набор модулей (и набор соответствующих полиномов) в качестве инварианта зацепления L . Перенумеруем дуги диаграммы L . Перенумеруем ее перекрестки произвольным образом числами от 1 до m . Сопоставим теперь каждому классическому перекрестку длинную дугу, которая из него исходит.

Будем сопоставлять дугам диаграммы L метки (мономы от переменных $s_{i_1}^{\pm 1}, \dots, s_{i_k}^{\pm 1}$) по следующему правилу. Выберем некоторую длинную дугу a_i и фиксируем ее начальную дугу, т.е. дугу, исходящую из перекрестка X_i . Сопоставим этой начальной дуге единицу. Далее будем сопоставлять последующим дугам данной длинной дуги мономы, определяемые следующим образом. Метки двух подряд идущих дуг длинной дуги, разделяемые в виртуальном перекрестке i_l -й компонентой зацепления K_{i_l} , отличаются друг от друга умножением на $s_{i_l}^{\pm 1}$, более точно, метка, лежащая справа от компоненты K_{i_l} , равна метке, лежащей слева от нее, умноженной на s_{i_l} , см. рис. 3.18.

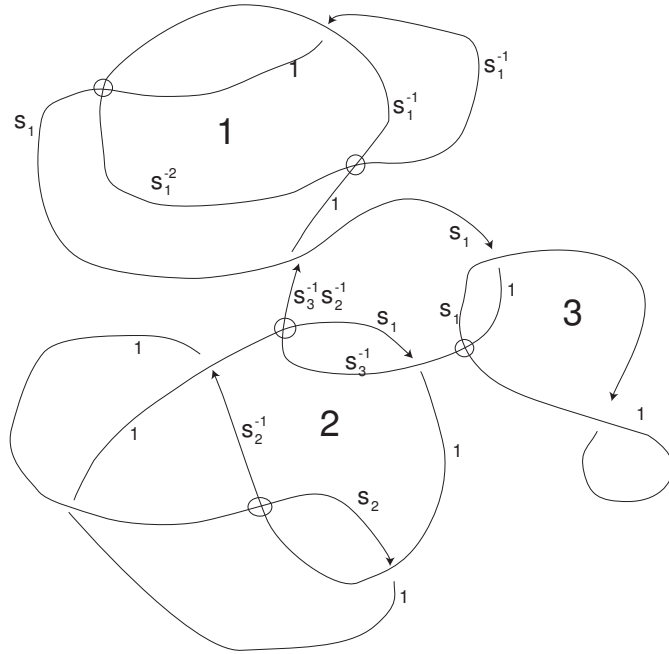


Рис. 3.18. Разметка дуг виртуальной диаграммы

Тем самым мы сопоставили метки — мономы от $s_{i_1}^{\pm 1}, \dots, s_{i_k}^{\pm 1}$ — всем дугам диаграммы L .

Каждому классическому перекрестку с номером l инцидентны ровно три дуги. Одна из них принадлежит длинной дуге с номером l и имеет метку, равную единице по построению, другая принадлежит длинной дуге с номером j , имеющей метку $\Gamma(l)$, проходящей сквозь перекресток и лежащей на a_j -й компоненте зацепления, третья дуга принадлежит длинной дуге k , входящей в перекресток и лежащей на a_i -й компоненте зацепления; метка дуги равна $P(l)$. Отметим, что дуги k, l принадлежат одной компоненте; обозначим ее через a_i . Вообще говоря, некоторые из чисел i, j, k могут совпадать. Выпишем теперь *обобщенную матрицу Александра* $M(L)$, соответствующую диаграмме L , следующим образом. В каждой строке l ненулевыми будут не более трех элементов; а именно, все элементы в этой строке, кроме элементов с номерами l, j, k , равны нулю. Эта строка является суммой трех строк, каждая из которых имеет ровно по одному ненулевому элементу. Одна из них имеет метку 1 на месте l . Вторая строка имеет элемент $-t_{a_j}^{\pm 1} P(l)$ на месте k , а третья строка — элемент $(t_{a_i}^{\pm 1} - 1)\Gamma(l)$

на месте j , при этом в качестве знака \pm выбирается $+1$, если рассматриваемый перекресток положителен и -1 , если рассматриваемый перекресток отрицателен.

Построенная таким образом матрица в точности является матрицей соотношений модуля $\mathcal{M}_k(L)$ для крашеного зацепления (т.е. зацепления с фиксированным упорядочением компонент).

Таким образом, мы построили набор матриц $M(L)$, зависящих от перестановки i_1, \dots, i_m компонент зацепления L . Обозначим набор определителей этих матриц через $\zeta(L)$.

Теорема 3.12. *Набор определителей матрицы $\zeta(L)$, получаемый при всевозможных перестановках компонент зацепления L инвариантен относительно движений Рейдемейстера с точностью до умножения на мономы от переменных t_{i_1}, \dots, t_{i_m} .*

Если фиксировать нумерацию компонент зацепления L , то полученный определитель $\zeta(L)$ представляет собой инвариант крашеного зацепления с точностью до умножения на мономы от переменных t_1, \dots, t_m .

Рассмотрим случай крашенных зацеплений. Понятно, что в общем случае набор значений инварианта при всевозможных раскрасках компонент представляет собой инвариант зацеплений. Инвариантность определителя в случае крашеного зацепления с точностью до умножения на обратимые элементы рассматриваемого кольца (т.е. мономы от $t_j^{\pm 1}, s_k^{\pm 1}$ со знаком ± 1) следует из тех соображений, что матрица является матрицей определяющих соотношений модуля, который, в свою очередь, инвариантен.

Замечание 3.6. *Далее под “естественной” нормировкой мы понимаем нормировку, при которой нормировочные множители определяются комбинаторикой диаграммы зацепления; бывает также нормировка, которая строится уже исходя из имеющегося полинома; так например, имея полином, инвариантный относительно умножения на некоторый моном, его можно нормировать так, чтобы старший моном (скажем, по всем переменным в лексикографическом порядке) стал равен константе.*

Теорема 3.12 следует из леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Определитель $\zeta(L)$ является инвариантным относительно всех обобщенных движений Рейдемейстера, за исключением Ω_1 . При применении движения Ω_1 он умножается на моном от переменных $t_1, \dots, t_m, t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1}$ со знаком $+1$.*

Доказательство леммы 3.3, в свою очередь, вытекает из доказательства теоремы 3.11.

Полином ζ можно легко нормировать относительно переменных t_1, \dots, t_k , чтобы получить инвариант виртуальных зацеплений.

Теорема 3.13. *Полином ζ мультипликативен относительно несвязной суммы зацеплений: $\zeta(L \sqcup K) = \zeta(L) \cdot \zeta(K)$.*

Доказательство. Действительно, это следует из того, что несвязной сумме зацеплений соответствует блочная матрица, блоки которой представляют собой матрицы, соответствующие исходным зацеплениям. \square

Отметим, что аналогичные структуры возникали в работах Л.Кауфмана и Д.Рэдфорда [KR], Д.Сильвера и С.Уильямс [SW] и Г.Саволлека [Saw], однако, в отличие от настоящей работы в них использовался другой подход: вместо рассмотрения дополнительной структуры в виртуальных перекрестках использовалась более сложная структура в классических перекрестках. В итоге оказалось, что ζ -полином эквивалентен (с точностью до замены переменных и нормировки) полиномам, рассматриваемым в [KR, SW, Saw], но эта эквивалентность не очевидна. Она была доказана Р.Фенном в [BF].

В некоторых случаях различные подходы к одному и тому же инварианту позволяют выявлять разные его свойства. Так, например, в своей работе [Saw2] Г.Саволлек показал, что его инвариант распознает *обратимость виртуальных узлов*, т.е. неэквивалентность некоторых ориентированных узлов своим образам, полученным обращением ориентации.

А именно, для узла K , изображенного на рис. 3.19 мы имеем $\zeta(K) = \frac{(s^2-1)(t-1)(1+s-2st+s^2t(t-1))}{s^2t}$.

Из определения полинома ζ вытекает

Утверждение 3.2. *Если виртуальный узел K_2 получается из виртуального узла K_1 заменой ориентации, то для некоторых m, l имеет место $\zeta(K_1)(s, t) = s^m t^l \zeta(K_2)(s^{-1}, t^{-1})$.*

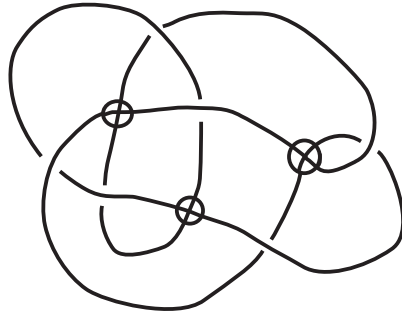


Рис. 3.19. Пример Саволлека

Легко видеть, что полином $\zeta(K)$ и полином $\zeta(K')$, полученный из него заменой s на s^{-1} и t на t^{-1} , не могут быть получены друг из друга умножением на некоторый моном $s^m t^l$. Следовательно, узел K не является обратимым.

Кроме того, в этой же работе Саволлек показал, что его полином сводится к инвариантам Васильева виртуальных зацеплений (см. определение в главе 8), и тем самым показал, что в виртуальном случае инварианты Васильева могут различать узлы, которые отличаются ориентацией. В классическом случае вопрос о том, существует ли инвариант Васильева, распознающий обратимость некоторых узлов, является открытым, см., напр., [CDBook, DuK].

Отметим, что в случае виртуальных узлов даже инварианты Васильева порядка ноль могут распознавать обратимость: об этом будет сказано подробнее в главе 8.

Перейдем к описанию бигруппоидов и их обобщений — виртуальных бигруппоидов.

3.2. Длинные виртуальные узлы

Настоящий раздел содержит центральный результат главы 3 — построение сильных инвариантов длинных виртуальных узлов, распознающих некоммутуруемость длинных виртуальных узлов.

Результаты автора, приводимые в настоящем разделе, опубликованы в книге [Ma1] и в статьях [Ma5, Ma9].

Назовем *длинной виртуальной диаграммой* погружение общего положения ориентированной вещественной прямой \mathbf{R} на плоскость Oxy , совпадающее вне некоторого большого круга с тождественным отображением \mathbf{R} на прямую Ox и снабженное в каждом пересечении (которое в случае общего положения является двойным и трансверсальным) структурой классического или виртуального перекрестка. Длинные виртуальные диаграммы мы будем предполагать ориентированными согласно ориентации прямой слева направо; при изображении их на рисунках мы ориентацию не будем указывать.

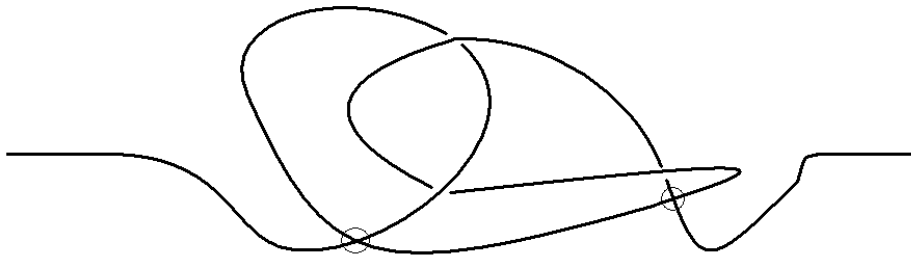


Рис. 3.20. Диаграмма длинного виртуального узла

У длинной виртуальной диаграммы имеются две выделенные *некомпактные* дуги (соответственно, длинные дуги, короткие дуги). Здесь дуга называется некомпактной, если она содержит образ точки $x \in \mathbf{R}$, такой что ограничение отображения $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ на интервалы $(-\infty, -|x|]$ и $[|x|, \infty)$ является тождественным вложением $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$.

Назовем *длинным виртуальным узлом* класс эквивалентности длинных виртуальных диаграмм относительно обобщенных движений Рейдемейстера. *Классическим* называется длинный виртуальный узел, имеющий диаграмму без виртуальных перекрестков. *Тривиальным* называется длинный виртуальный узел, имеющий диаграмму без перекрестков. Этот узел является единственным, у которого есть диаграмма, две некомпактные дуги которой совпадают.

Пример 3.2. *Пример длинного узла изображен на рис. 3.20*

Обычные виртуальные узлы (не длинные) мы будем называть также *компактными виртуальными узлами*.

Имеются две операции, превращающие длинный узел в компактный и наоборот. Первая из них называется *замыканием* длинного узла, $K \mapsto Cl(K)$, см. рис. 3.21.

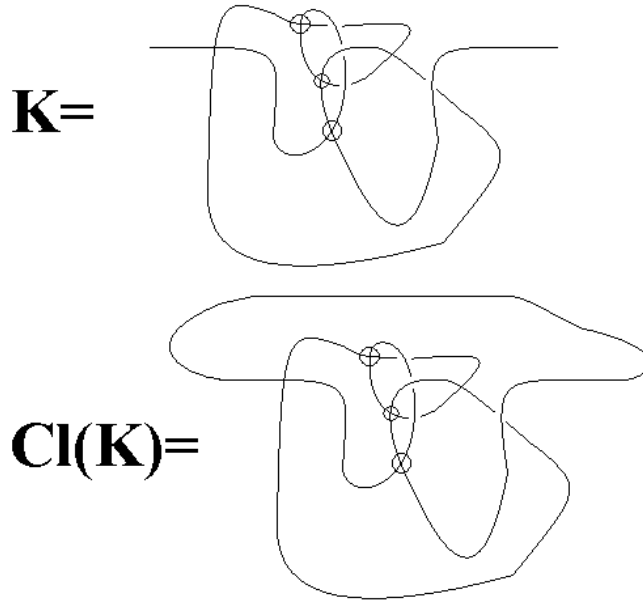


Рис. 3.21. Замыкание длинного виртуального узла

Эта операция определена корректно и сопоставляет длинному виртуальному узлу ориентированный компактный виртуальный узел. Она состоит в том, что две некомпактные дуги обрываются “в окрестности бесконечности” и соединяются. При этом получившийся компактный узел наследует ориентацию длинного узла.

Вторая операция, являющаяся обратной к первой, — *разрывание* — является менее естественной. Она состоит в том, что мы выбираем на диаграмме ориентированного виртуального узла L точку, отличную от перекрестка, разрываем этот узел в данной точке и вытягиваем концы на бесконечность так, чтобы получить длинный узел. В случае, если концы можно вытянуть на бесконечность, чтобы не возникло дополнительных перекрестков, мы будем делать это именно таким образом; в случае, если таковые возникают, все эти перекрестки нужно определить, как виртуальные перекрестки. Обозначим эту операцию через $Brk : L \rightarrow Brk(L) = K$.

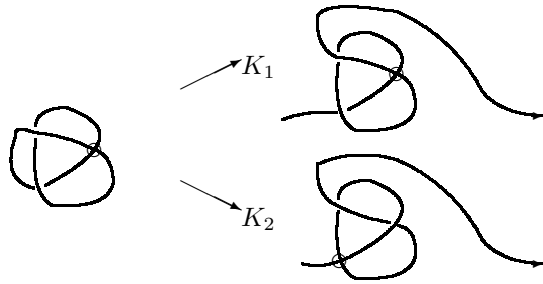


Рис. 3.22. Получение длинной виртуальной диаграммы разрыванием

На рис. 3.22 показана процедура разрывания диаграммы виртуального узла в некоторой точке и получения длинной виртуальной диаграммы.

Очевидно, что вторая операция является обратной к первой в том смысле, что $Cl(Brk(L)) = L$. С другой стороны, операция Brk не является корректно определенной, а именно, получающийся длинный виртуальный узел (его класс эквивалентности) существенно зависит от выбора точки разрыва.

В дальнейшем (глава 8) мы покажем, что для каждого компактного виртуального узла L существует бесконечно много попарно неэквивалентных длинных виртуальных узлов K , таких что $Cl(K) = L$. Впервые это явление было замечено Д.Сильвером и С.Уильямс; в книге [Ma1] оно было доказано исходя из простых соображений, связанных с инвариантами Васильева компактных виртуальных узлов.

К длинным узлам (классическим и виртуальным) можно применять технику, развитую ранее в настоящей главе, при этом стоит обратить внимание на два обстоятельства:

1. У длинного узла имеются фиксированные начальная и конечная некомпактные дуги, тем самым инвариантными будет не только сам алгебраический объект (группоид или его обобщение), а алгебраический объект с выделенной в нем парой элементов.
2. У длинного узла есть порядок обхода, тем самым его классические перекрестки делятся на два вида в зависимости от того, какая дуга была пройдена раньше: образующая проход или образующая переход.

В первом случае мы будем говорить, что перекресток является *ранним проходом*, а во втором — *ранним переходом*.

Последнее позволяет построить более тонкие инварианты, чем обычные виртуальные группоиды.

Хорошо известно, что в классическом случае классификации узлов (компактных) и длинных узлов совпадают. В виртуальном случае, как будет показано в настоящей главе, это не так. Приведенные выше соображения могут быть полезны как для построения инвариантов классических (длинных) узлов, так и для построения виртуальных длинных узлов. А именно, в классическом случае мы предлагаем новый подход к инвариантам узлов через длинные узлы с учетом двух видов перекрестков. В виртуальном же случае мы построим инварианты, которые будут различать длинные виртуальные узлы, замыкания которых представляют собой эквивалентные (компактные) виртуальные узлы.

Исходя из этих двух обстоятельств можно построить инвариантные конструкции, которые позволяют легко различать длинные узлы и обнаруживать феномены, не имеющие места в классическом случае: например, тот факт, что длинные виртуальные узлы, вообще говоря, не коммутируют.

Назовем *длинным группоидом* множество M с выделенными элементами a и b и заданными бинарными операциями \circ , $*$ и унарной операцией f , такое что:

1. Множество M является дистрибутивным группоидом относительно операции \circ (обратная операция обозначается через $/$) и виртуальным группоидом относительно f .
2. Множество M является дистрибутивным группоидом относительно $*$ (обратная операция обозначается через $//$) и виртуальным группоидом относительно f .
3. Операции \circ , $*$, $/$, $//$ являются право-дистрибутивными по отношению друг к другу.
4. Имеют место следующие *соотношения*. Пусть α , β — некоторые операции из списка $\{\circ, *, /, //\}$. Тогда для любых $x, y, z \in M$ имеют место тождества:

$$\begin{cases} x\alpha(y \circ z) = x\alpha(y * z) \\ x\alpha(y/z) = x\alpha(y//z) \end{cases} \quad (3.13)$$

Соотношения (3.13) мы назовем *странными*. На первый взгляд операции \circ и $/$ должны совпадать; на самом деле, существуют примеры, где различные операции \circ и $/$, удовлетворяющие странным соотношениям, задают нетривиальные инварианты виртуальных узлов.

Элементы a и b называются *начальным* и *конечным* элементами длинного группоида.

Приведенные выше аксиомы соответствуют построению инварианта длинных узлов следующим образом. Мы рассматриваем дуги длинного узла K и сопоставляем им элементы, которые впоследствии будут играть роль образующих длинного группоида. Из них выделенными являются образующие a и b , соответствующие начальной и конечной некомпактным дугам. В виртуальных перекрестках мы выписываем соотношения типа (3.2, 3.3), см. стр. 85, которые обозначим через R_{k1} и R_{k2} так же, как и в случае виртуального группоида. В классических перекрестках мы выписываем соотношения (аналогичные соотношениям (3.1), см. стр. 82) $R_{\circ,i}$ длинного группоида относительно операции \circ в случае раннего перехода или $R_{*,i}$ длинного группоида относительно операции $*$ в случае раннего прохода. А именно, под *ранним переходом* мы понимаем ситуацию, когда при обходе длинного узла от начала к концу в рассматриваемом перекрестке сначала обходится верхняя ветвь (переход), а затем — нижняя (проход). В противном случае имеет место *ранний проход*, см. рис. 1.2.

Зададим общую нумерацию $\{R_i\}$ для всех описанных выше соотношений. Каждое соотношение R_i имеет вид равенства $r_{i1} = r_{i2}$.

Как оказывается, приведенные выше аксиомы длинного группоида позволяют получить таким образом инвариант длинных узлов.

Перейдем к его детальному описанию. Отметим сначала, что длинный группоид, аналогично дистрибутивному группоиду или виртуальному группоиду, можно задавать с помощью образующих и определяющих соотношений. Для этого нужно взять образующие a_1, \dots, a_k , построить множество допустимых слов — слов, получаемых последовательно из образующих по-

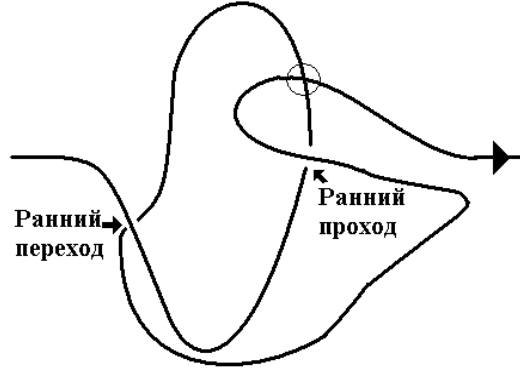


Рис. 3.23. Ранний переход и ранний проход

средством операций $\circ, /, *, //, f$. На полученном множестве $Admi(a_1, \dots, a_k)$ все операции длинного группоида естественным образом определены. Определим теперь дистрибутивный группоид, заданный образующими a_1, \dots, a_k и соотношениями R_1, \dots, R_l и обозначаемый через $ДГ\langle a_1, \dots, a_k | R_1, \dots, R_l | a, b \rangle$ как фактор–множество множества $Admi(M)$ по соотношениям эквивалентности, задаваемым следующими элементарными эквивалентностями:

1. $\forall A \in Admi : A \circ A \sim A, A/A \sim A, A * A \sim A, A//A \sim A,$
2. $\forall A, B \in Admi : (A \circ B)/B \sim (A/B) \circ B \sim A,$
 $\forall A, B \in Admi : (A * B)//B \sim (A//B) * B \sim A,$
3. $\forall A, B, C \in Admi : (A\alpha B)\beta C \sim (A\beta C)\alpha(B\beta C),$
 где $\alpha, \beta \in \{\circ, *, /, //\},$
4. $x\alpha(y \circ z) \sim x\alpha(y * z); x\alpha(y/z) \sim x\alpha(y//z),$
 для $\alpha \in \{\circ, *, /, //\}.$
5. $f(f^{-1}(A)) \sim f^{-1}(f(A)) \sim A$ для любых $A \in Admi;$
6. $f(A\alpha B) = f(A)\alpha f(B)$ для любых $A, B \in Admi$ и любой операции $\alpha \in \{\circ, *, /, //\}.$
7. $\forall i = 1, \dots, l : r_{i1} \sim r_{i2}.$

Элементы a и b мы задаем некоторыми допустимыми словами из множества $Admi(a_1, \dots, a_k).$

Пусть теперь дана диаграмма K длинного виртуального узла, и пусть a_1, \dots, a_k — ее дуги, причем $a = a_1$ — начальная дуга, $b = a_2$ — конечная дуга. Определим длинный группоид $\text{ДГ}(L)$ как $\text{ДГ}\langle a_1, \dots, a_k | R_{oi}, R_{*j}, R_{k,1}, R_{l,2} | a_1, a_2 \rangle$.

Имеет место

Теорема 3.14. Пусть K, K' — диаграммы эквивалентных длинных виртуальных узлов. Тогда существует гомоморфизм $h : (\text{ДГ}(K), a_K, b_K) \rightarrow (\text{ДГ}(K'), a_{K'}, b_{K'})$, согласованный с операциями $\circ, *$ и f и переводящий элемент a_K в $a_{K'}$, элемент b_K — в $b_{K'}$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству инвариантности виртуального группоида.

Инвариантность относительно чисто виртуальных движений Рейдемейстера очевидна. В случае объезда нам достаточно рассмотреть его локальную версию, в которой ветвь с двумя виртуальными перекрестками проходит через классический перекресток. В этом случае мы имеем дело с операцией f и лишь с одной из операций \circ или $*$. Далее, только одна из двух операций $*, \circ$ может возникнуть при рассмотрении первого или второго классического движения Рейдемейстера.

Самым интересным является здесь третье классическое движение Рейдемейстера. Достаточным является рассмотрение его случаев, указанных на рис. 3.24 (а, б, в, г).

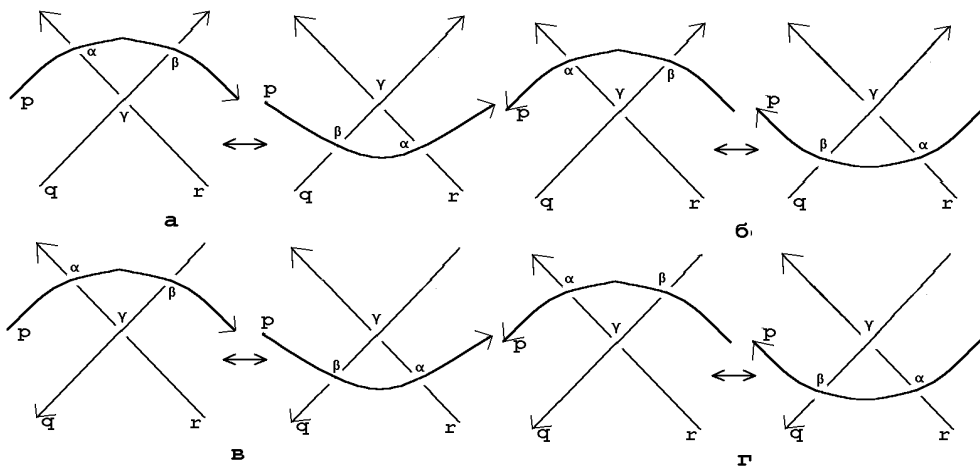


Рис. 3.24. Проверка инвариантности относительно Ω_3

В каждом из четырех вышеупомянутых случаев мы имеем три входящие дуги и три исходящие дуги. Одна из дуг (та, которой соответствует метка p) проходит сверху в обоих перекрестках; так что метка на входе совпадает с меткой на выходе. Другая дуга (которой соответствует метка q) подвергается действию дуги с меткой p ; это действие одинаково в обоих случаях, соответствующих конкретной версии движения Ω_3 . Таким образом, нам остается исследовать, что происходит с дугой, которой соответствует метка r .

На каждой из картинок в каждом перекрестке мы ставим некоторую операцию α, β и γ из множества операций $\{\circ, *, /, //\}$. Эта операция будет применена к дуге снизу, образующей проход, для получения соответствующей дуги сверху.

Рассмотрим случай а. Каждая из операций α, β, γ является “умножением”, т.е. \circ или $*$ (операции $/$ и $//$ будем называть “делениями”).

Таким образом, в левом верхнем углу мы получим: $(r\gamma q)\alpha p$ на левой картинке и $(r\alpha p)\gamma(q\beta p)$ на правой картинке. Но по определению $(r\gamma q)\alpha p = (r\alpha p)\gamma(q\alpha p)$. Последнее выражение равно $(r\alpha p)\gamma(q\beta p)$ согласно соотношению дистрибутивности или странному соотношению (так как обе операции β и α являются умножениями).

Рассмотрим теперь случай б. Здесь γ является умножением, а α, β — делениями. Таким образом, мы имеем то же самое соотношение: $(r\gamma q)\alpha p = (r\alpha p)\gamma(q\alpha p) = (r\alpha p)\gamma(q\beta p)$.

То же соотношение имеет место и для картинок в и г: единственное, что нужно заметить, это то, что либо обе операции α и β являются умножениями (случай в), либо обе являются делениями (случай г). Оставшаяся часть доказательства очевидна. \square

Как и в случае дистрибутивных группоидов или виртуальных группоидов, длинные группоиды позволяют строить инварианты более простые. Для этого можно фиксировать длинный группоид $(ДГ', a, b)$ и изучать множество гомоморфизмов из длинных группоидов длинных узлов в $ДГ$, согласованных со всеми операциями и переводящие начальный элемент длинного группоида в a , а конечный его элемент — в b .

Может показаться, что странные соотношения не выполнимы кроме как

в случае, если операция $*$ совпадает с операцией \circ . Однако это не так. В качестве примера ([Ma9]) длинного группоида можно рассмотреть кольцо \mathbf{Z}_m и в нем операции:

$$\begin{cases} x \circ y = px + (1-p)y \\ x * y = qx + (1-q)y \\ f(a) = ka, \end{cases} \quad (3.14)$$

где k, p, q — обратимые элементы в кольце, при этом $(1-p)(p-q) = (1-q)(p-q) = 0$; элементы a_1, a_2 выбираются произвольным образом. Аксиомы длинного группоида проверяются непосредственно.

Назовем длинными группоиды такого вида *линейными длинными группоидами*. Как оказывается, с помощью линейных длинных группоидов можно распознавать нетривиальность некоторых длинных узлов, имеющих тривиальное замыкание.

Пусть дано кольцо \mathcal{R} с единицей, в котором фиксированы обратимые элементы p и q , удовлетворяющие уравнению $(p-1)(p-q) = (q-1)(p-q) = 0$, а также обратимый элемент k . Для длинного виртуального узла обозначим через $\tilde{M}(K)$ модуль над \mathcal{R} , порожденный описанным выше способом (образующие — дуги, соотношения в перекрестках (3.14)) с выделенными двумя элементами, соответствующими начальной и конечной дуге.

Сравнение длинных группоидов двух узлов является сложной задачей. Поэтому имеет смысл рассматривать более простые инвариантные объекты, соответствующие длинным виртуальным узлам, которые инвариантны по той же причине, что и длинные группоиды.

По построению для фиксированного \mathcal{R} тройка (\tilde{M}, a, b) является инвариантом длинного узла.

Действительно, доказательство повторяет доказательство теоремы 3.14 с учетом того, что операции 3.14 удовлетворяют всем аксиомам длинных группоидов.

3.2.1. Вопрос о коммутуемости длинных узлов

Как известно (см., напр., [КФ]), классические длинные узлы коммутируют. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 3.15. Пусть длинный узел L не имеет виртуальных перекрестков. Тогда для любого длинного виртуального узла L' имеет место коммутативность: $L\#L'$ эквивалентно $L'\#L$.

Доказательство. Действительно, сделаем сначала диаграмму узла L очень маленькой и начнем протягивать ее сквозь диаграмму узла L' . При протаскивании ее через виртуальные перекрестки мы будем пользоваться движением объезда, см. рис. 3.25, а при протаскивании через классические перекрестки — классическими движениями Рейдемейстера.

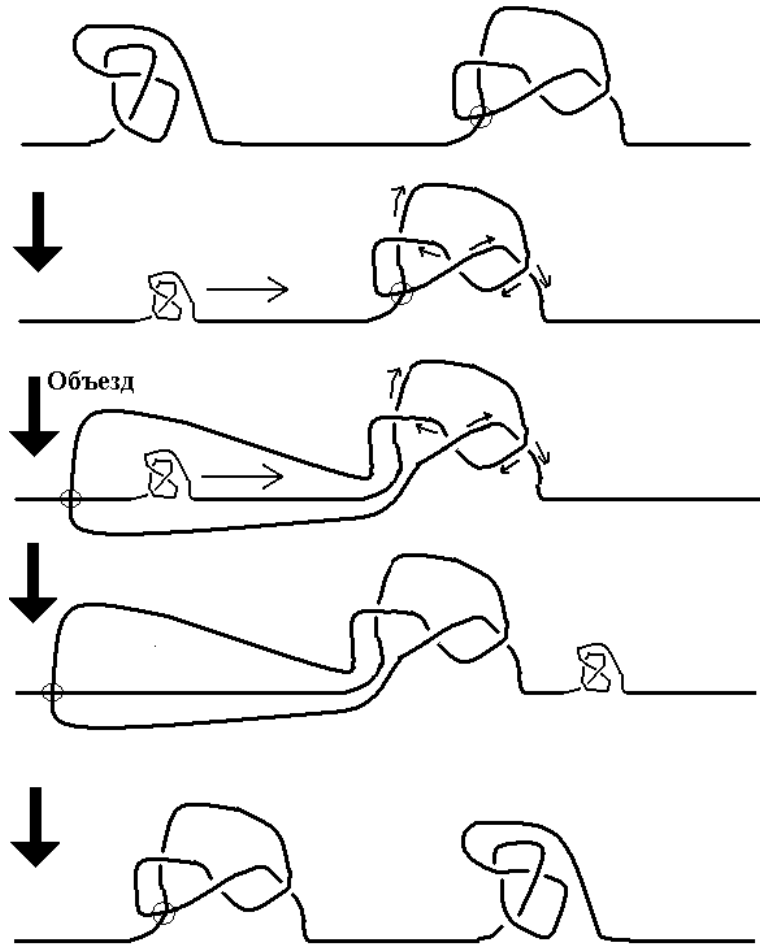


Рис. 3.25. Классический длинный узел коммутирует с любым длинным узлом

В итоге мы получим желаемую эквивалентность. □

Замечание 3.7. Это доказательство не проходит в том случае, когда диаграмма L имеет виртуальные перекрестки, так как в этом случае нельзя будет протягивать L сквозь дуги диаграммы L' , состоящие из классических перекрестков. В этом случае нам пришлось бы воспользоваться запрещенным движением, см. рис. 1.17.

Перейдем к установлению некоммутативности длинных виртуальных узлов. Это явление было впервые обнаружено в [Ма9].

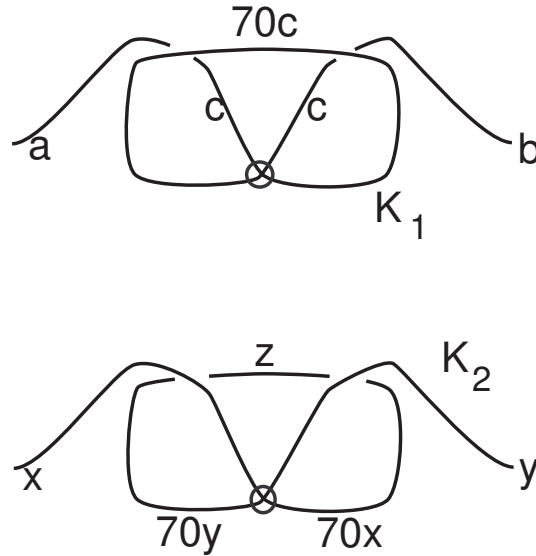
Рассмотрим длинные виртуальные узлы K_1 и K_2 , изображенные на рис. 3.26.

Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_{11^2 \cdot 19^2}$ в качестве \mathcal{R} и положим $p = 20 + 121 \cdot 19$, $q = 20$, $k = 70$. Таким образом, в $\tilde{M}(K)$ операции имеют вид $a * b = 20a - 19b$, $a \circ b = (20 + 121 \cdot 19)a - (122 \cdot 19)b$ и $f(a) = 70a$. Можно заметить, что в модуле \tilde{M} для узла $K_1 \# K_2$ начальная дуга обязательно должна делиться на 121, в то время как для модуля, соответствующего узлу $K_2 \# K_1$, существует гомоморфизм в кольцо $\mathbf{Z}_{11^2 \cdot 19^2}$, при котором начальная дуга переходит в $11 \cdot 19^2$.

А именно, для узла K_1 (см. верхнюю часть рис. 3.26) мы имеем следующие соотношения в $\tilde{M}(K_1)$: $a * (70c) = c = b \circ 70c$; первое соотношение означает, что $20a = (19 \cdot 70 + 1)c = 1331c$; так как элемент 20 обратим в кольце $\mathbf{Z}_{11^2 \cdot 19^2}$, элемент a делится на 121. Это свойство с очевидностью имеет место и в $\tilde{M}(K_1 \# K_2)$.

Для узла K_2 (см. нижнюю часть рис. 3.26) мы имеем: $(70x) * y = z = (70y) \circ x$. Это означает, что мы можем положить $x = 11 \cdot 19^2$, $y = 0$ (коэффициент при x в выражении $(70x) * y - (70y) \circ x$ делится на 11), т.е. отобразить $\mathcal{M}(K_2)$ в линейный группоид $\mathbf{Z}_{19^2 \cdot 11^2}$ с теми же операциями. Далее в узле $K_2 \# K_1$ мы можем положить остальные дуги (принадлежащие длинному узлу K_1) равными нулю; это можно сделать так как $y = 0$ (значение z вычисляется).

Иначе приведенные выше рассуждения можно сформулировать так: множество гомоморфизмов \mathcal{H} из $\text{ДГ}(K_1 \# K_2)$ в линейный группоид — кольцо $\mathbf{Z}_{11^2 \cdot 19^2}$ с операциями (3.14) при $p = 20 + 121 \cdot 19$, $q = 20$, $k = 70$, таких что $\mathcal{H}(a_1)$ не делится на 121, пусто, а для $\text{ДГ}(K_2 \# K_1)$ множество таких гомоморфизмов непусто.

Рис. 3.26. Разметка узлов K_1 и K_2

Следовательно, эти узлы не коммутируют, что еще раз подтверждает их различность, нетривиальность, а также то, что каждый из них не эквивалентен классическому.

Имеют место два очевидных случая коммутирования длинных виртуальных узлов: когда они совпадают либо когда один из них является классическим. Мы предполагаем, что, по существу, других причин коммутирования быть не может, т.е. мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза. Если два длинных виртуальных узла K, K' коммутируют, то существует такой длинный виртуальный узел L , такие неотрицательные целые числа m, n и классические длинные узлы M, M' , что

$$K = L^m \# M, K' = L^n \# M',$$

где степень понимается в смысле многократного взятия связной суммы.

Замечание 3.8. Подобно тому, как в случае компактных узлов понятие виртуального группоида обобщается до понятия виртуального бигруппоида, в случае длинных узлов понятие длинного группоида обобщается до понятия длинного бигруппоида. Мы не будем развивать эту тему в настоящей диссертации. Подробнее см. [Ман-4].

Результат о некоммутативности длинных узлов был позднее передоказан Д.Сильвером и С.Уильямс в работе [SW2].

3.3. Виртуальные узлы и бесконечномерные алгебры Ли

Приводимые в настоящем разделе результаты опубликованы в [Man7].

На любой группе G можно определить структуру дистрибутивного группоида одним из следующих способов:

1. $a \circ b = b^n a b^{-n}$, где n — некоторое фиксированное натуральное число.
2. $a \circ b = b a^{-1} b$,

где в первом случае структуру виртуального группоида можно определить посредством произвольного автоморфизма f группы G , а во втором случае в качестве f можно взять произвольный автоморфизм или антиавтоморфизм группы G . Для фиксированной группы G мы можем, например, выбрать элемент $q \in G$ и положить $f(a) = q a q^{-1}$.

Аналогично на группах задаются структуры бигруппоидов, виртуальных бигруппоидов, длинных группоидов и т.д.

В качестве группы G может служить и группа Ли.

Попытки сопоставлять каждому (виртуальному) узлу некоторую группу Ли, которая была бы инвариантной по причине инвариантности виртуальных группоидов, встречаются определенные трудности.

Однако алгебры Ли уже могут быть заданы аксиоматически с помощью образующих и соотношений: мы можем взять свободную алгебру Ли, порожденную формальными образующими, соответствующими дугам диаграммы. После этого нужно описать подходящие соотношения, которые делали бы из алгебры Ли дистрибутивный группоид (виртуальный группоид). Это возможно по той причине, что существует экспоненциальное отображение из алгебры Ли в группу Ли, и умножение в группе Ли может быть перенесено на алгебру Ли и там выражено в терминах чисто алгебраических операций. В этом состоит знаменитая формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Мы будем использовать эту формулу в форме, предложенной Е.Б.Дынкиным [Дын].

Эта формула выражает логарифм произведения экспонент элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ из алгебры Ли \mathfrak{g} через коммутаторы. Она имеет вид:

$$\log(e^x e^y) = \sum_k \sum_{p_i, q_i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{p_1! q_1! \dots p_k! q_k!} (x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_k} y^{q_k})^\circ. \quad (3.15)$$

Суммирование ведется по k от 1 до ∞ и всевозможным наборам целых неотрицательных чисел $(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)$, связанным соотношением $p_i + q_i > 0$.

Здесь операция $(x) \rightarrow (x)^\circ$ переводит формальное произведение некоммутующих переменных x_j в коммутатор согласно правилу

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k})^\circ = \frac{1}{k} [\dots [[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_k}] \quad (3.16)$$

и далее продолжается по линейности на произвольные линейные комбинации.

Для определения данной операции нам естественно потребуется, чтобы основное кольцо содержало кольцо \mathbf{Q} рациональных чисел.

В настоящем разделе мы предложим алгоритм, который ставит в соответствие узлу (виртуальному узлу) алгебру Ли или фактор-пространство алгебры Ли по подалгебре (фактор-алгебру по идеалу). Эти объекты будут инвариантными относительно (обобщенных) движений Рейдемейстера. Получающиеся далее алгебры Ли будут, вообще говоря, бесконечномерными по той причине, что изначальная алгебра (которую мы факторизуем) представляет собой свободную алгебру Ли, аддитивно порожденную всеми коммутаторами произвольных порядков от заданных образующих.

Получаемые с помощью формулы Дынкина и концепции виртуальных группоидов формулы приводят к возможности построения “похожих” дистрибутивных группоидов, которые явно не связаны с группами Ли.

Наш подход состоит в следующем. Если мы имеем алгебру Ли \mathfrak{g} и соответствующую ей группу Ли G , то экспонента представляет собой взаимнооднозначное отображение окрестности нуля алгебры Ли на окрестность единицы группы Ли. Таким образом, если формула $a \circ b = bab^{-1}$ задает виртуальный группоид в группе, то формула $a \circ b = \log(\exp(b) \exp(a) \exp(-b))$

задает виртуальный группоид на алгебре Ли (по крайней мере, в окрестности нуля). После этого можно подставить формулу Дынкина (3.15), тем самым получив выражение для операции группоида на алгебре Ли в терминах внутренних операций алгебры Ли (коммутаторов).

То, что эта формула удовлетворяет аксиомам группоида, проверяется непосредственно: мы получаем некоторое тождество, которое выполняется для любой алгебры Ли, заданной формально образующими и соотношениями. Далее мы можем использовать получившуюся формулу для аксиоматического определения инвариантного дистрибутивного (виртуального) группоида — алгебры Ли, соответствующей классическому или виртуальному зацеплению.

Более того, помимо исходной формулы-ряда, получаемой переносом стандартных группоеидов на алгебры Ли посредством экспоненциального отображения и логарифма, мы получаем возможность варьировать эту формулу и получать новые структуры дистрибутивных (виртуальных) группоеидов, которые уже не являются прямым обобщением структур дистрибутивных группоеидов, получаемых из групп.

Опишем эти конструкции более подробно.

Пусть L — диаграмма ориентированного виртуального зацепления с n классическими перекрестками. Перенумеруем ее длинные дуги натуральными числами от единицы до n . Выберем на длинной дуге с номером i первую (согласно ориентации зацепления) дугу и сопоставим дуге элемент a_i . Рассмотрим формальную свободную бесконечномерную алгебру Ли $G(n, q)$ над некоторым полем R , порожденную элементами a_1, \dots, a_n , соответствующими дугам диаграммы, и отдельным элементом q .

С помощью соотношений в виртуальных перекрестках видов R_{j1}, R_{j2} (по формулам (3.2,3.3), проинтерпретированным согласно формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа в форме Дынкина (3.15)) можно определить элементы алгебры $G(n, q)$, соответствующие всем дугам данной диаграммы.

Будем теперь факторизовать алгебру $G(n, q)$ по формальным соотношениям группоида вида R_i в классических перекрестках (3.1).

При этом как соотношения (3.2,3.3), так и соотношения (3.1), мы будем понимать в смысле операций группоида, определенных посредством фор-

мулы Дынкина (3.15).

А именно, рассмотрим следующие три случая.

1.

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{g} : \mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= \log(\exp(n \cdot \mathbf{b}) \exp(\mathbf{a}) \exp(-n \cdot \mathbf{b})), \\ f(\mathbf{a}) &= \log(\exp(q) \exp(\mathbf{a}) \exp(-q)),\end{aligned}$$

где n — некоторое натуральное число.

2.

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{g} : \mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= \log(\exp(\mathbf{b}) \exp(-\mathbf{a}) \exp(\mathbf{b})), \\ f(\mathbf{a}) &= \log(\exp(q) \exp(\mathbf{a}) \exp(-q)).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{g} : \mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= \log(\exp(\mathbf{b}) \exp(-\mathbf{a}) \exp(\mathbf{b})), \\ f(\mathbf{a}) &= \log(\exp(q) \exp(-\mathbf{a}) \exp(q)).\end{aligned}$$

В каждом из них соотношения в классических и виртуальных перекрестках порождают идеал в свободной бесконечномерной алгебре Ли, образованной коммутаторами.

Обозначим получившиеся фактор-алгебры Ли по соответствующим идеалам через $Lie_n(L)$, $Lie_+(L)$ и $Lie_-(L)$ соответственно.

Теорема 3.16. *Алгебры Ли $Lie_n(L)$, $Lie_+(L)$, $Lie_-(L)$ являются инвариантами виртуальных зацеплений.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 3.1 об инвариантности (виртуальных) группоидов.

Полученные алгебры являются инвариантами виртуальных узлов, но они бесконечномерны, и с ними трудно работать. Рассмотрим формулы для виртуальных группоидов, используемые в этих алгебрах, более детально и попробуем построить более простые и удобные инварианты виртуальных зацеплений.

Обобщения

Факторизация полученной алгебры Ли по идеалу, зависящему только от алгебры Ли, но не от копредставления (например, порожденному всеми коммутаторами порядка k) задает инвариант зацеплений. Эта операция приводит к конечномерным алгебрам Ли — инвариантам узлов.

Однако мы можем забыть о происхождении операции \circ и использовать только ее формальный вид, получаемый из формулы Дынкина, и модифицировать его. Как оказывается, это приводит к инвариантам виртуальных узлов со значениями в алгебрах Ли — конечномерных или бесконечномерных — которые, вообще говоря, не происходят из группоида, связанного с группами.

Рассмотрим самый первый член формулы Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа $\log(\exp(\mathbf{a}) \exp(\mathbf{b}))$. Первое приближение дает нам $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Таким образом, первое приближение для $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ (в форме $\log(\exp(\mathbf{b}) \exp(\mathbf{a}) \exp(-\mathbf{b}))$) имеет вид $\mathbf{a} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Приведенная выше формула задает операцию дистрибутивного группоида, если мы профакторизуем получившуюся алгебру Ли по идеалу, порожденному всеми коммутаторами вида $[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}]$. Это следует из общих соображений: инвариантный группоид-алгебра Ли факторизуется по идеалу, который не зависит от исходного зацепления.

Можно построить и более искусный пример. А именно, рассмотрим кольцо R всех формальных рядов от степеней переменной ε над \mathbf{Q} .

Положим

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} + \varepsilon[\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \quad (3.17)$$

Теорема 3.17. *Для любой алгебры Ли \mathfrak{g} над R и ее двустороннего идеала \mathfrak{h} , порожденного выражениями вида $[[\mathbf{x}, \mathbf{z}], [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$, операция (3.17) задает на соответствующей факторалгебре корректно определенный дистрибутивный группоид; обратная операция задается по правилу*

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a} + \sum_{k=1}^{\infty} -k(\varepsilon)^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^k)^{\circ}, \quad (3.18)$$

Доказательство. Существование и единственность обратной операции следует из формулы (3.18). Действительно, решая уравнение $\mathbf{c} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}$ шаг за шагом (по степеням ε), мы будем получать:

$$\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} \pmod{\varepsilon},$$

$$\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \pmod{\varepsilon^2},$$

$\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{b}] \pmod{\varepsilon^3}$ и т.д., причем каждое последующее приближение однозначно определяется подстановкой предыдущего в формулу $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c} \pmod{\varepsilon^2}$.

Идемпотентность очевидна, так как все коммутаторы переменной с самой собой равны нулю.

Проверим соотношение дистрибутивности.

Мы имеем

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = (\mathbf{a} + 2\varepsilon(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}) + 3\varepsilon^2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) \circ \mathbf{c}. \quad (3.19)$$

Аналогичным образом,

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + 2\varepsilon(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}) + 3\varepsilon^2(\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a})) \circ \mathbf{c} \quad (3.20)$$

В последнем равенстве мы использовали тот факт, что $[[\mathbf{a}, \mathbf{c}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = 0$ вследствие факторизации.

Утверждение теоремы теперь следует из тождества Якоби. \square

Обозначим полученную алгебру Ли через $Li(K)$. Тем самым получим отображение из множества (классических и виртуальных) узлов во множество (бесконечномерных) алгебр Ли.

Примеры.

Рассмотрим инвариант $Li(K)$ узлов (при построении которого мы игнорируем виртуальные перекрестки), профакторизованный по $\varepsilon = 1$. Отметим, что полученная алгебра Ли $Li(K)$ определена корректно: все соотношения в этой алгебре записываются в виде соотношений на дуги диаграмм с операцией \circ , при этом операция $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ является конечной суммой коммутантов (а не бесконечным рядом).

Для большинства узлов он дает бесконечномерную алгебру Ли.

Покажем, что этот инвариант задает конечномерные алгебры Ли для восьмерки и трилистника.

Действительно, в случае трилистника мы имеем три дуги a, b, c и три перекрестка; в последних мы выписываем коммутаторы. Мы получаем три соотношения: $a + [a, b] = c, b + [b, c] = a, c + [c, a] = b$. Таким образом, все первые коммутаторы выражаются через образующие, откуда следует, что алгебра является конечномерной.

В случае восьмерки мы имеем четыре образующие; в перекрестках выписываются соотношения согласно рис. 3.27.

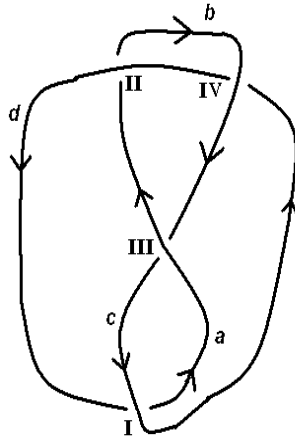


Рис. 3.27. Размеченная восьмерка

В первом перекрестке мы получаем соотношение $d \circ c = a$; второй перекресток нам дает $b \circ d = a$; в третьем перекрестке мы имеем $b \circ a = c$, а в четвертом получаем $d \circ b = c$. Таким образом, мы получили выражение для трех из шести первых коммутаторов. Следовательно, $[b, d] = a - b, [d, b] = c - d$, из чего легко следует конечномерность рассматриваемой алгебры.

3.4. Иерархия виртуальных узлов

Алгебраическая и комбинаторная техника, аналогичная развитой в настоящей главе, успешно применяется для других обобщений узлов и плоских кривых.

Настоящий раздел посвящен иерархическим плоским виртуальным уз-

лам. Понятие иерархических узлов было впервые введено Л.Кауфманом в [FKM]; им же была поставлена задача классификации этих объектов. В настоящем разделе приводятся принадлежащие автору результаты, впервые опубликованные в работе [Man8].

Основным результатом настоящего раздела является теорема 3.18.

3.4.1. Плоские виртуальные узлы

Возникающие на множестве виртуальных узлов (или, согласно терминологии [Tur4], виртуальных струн) алгебраические структуры (скобка Ли Голдмана и коскобка Ли Тураева, см. описание в [Tur4, Gold]) приводят к идее естественных обобщений плоских виртуальных узлов. Это служит мотивацией настоящего раздела.

Так, плоские виртуальные узлы (см. определение в гл. 1), задаваемые плоскими четырехвалентными графами, также имеют интерпретацию в виде кривых на поверхностях, рассмотренных с точностью гомотопии и стабилизации.

Классы гомотопий кривых на поверхностях имеют структуры алгебр Ли (Голдмана) и коалгебр Ли (Тураева), квантование которых приводит к описанию структур скейн-модулей узлов в утолщенных поверхностях [Tur4].

Плоские виртуальные узлы можно понимать следующим образом: мы рассматриваем четырехвалентные графы на плоскости и объявляем два графа эквивалентными, если один из них может быть перестроен в другой последовательным применением особых движений, которые мы для краткости называем движениями Рейдемейстера. При этом в случае первого движения Рейдемейстера перекресток может иметь произвольный тип, для второго движения Рейдемейстера мы требуем, чтобы либо оба перекрестка были классическими, либо оба — виртуальными; в случае третьего движения Рейдемейстера мы разрешаем дуге, содержащей классические перекрестки, проходить сквозь классический перекресток, а также дуге, содержащей виртуальные перекрестки, проходить как через классические, так и через виртуальные перекрестки, см. рис. 1.18.

Иными словами, правило для движений Рейдемейстера для плоских виртуальных узлов можно сформулировать следующим образом. На первое

движение Рейдемейстера не накладывает никаких ограничений. Для второго движения Рейдемейстера мы требуем, чтобы оба перекрестка были одного типа, а для третьего движения Рейдемейстера мы разрешаем ветви, содержащей два перекрестка типа i , проходить сквозь перекресток типа j если и только если $i \geq j$, где \geq является бинарным отношением (в нашем случае обычное отношение \geq на множестве $\{1, 2\}$). Здесь мы имеем два типа перекрестков: 1 соответствует классическим перекресткам, а 2 — виртуальным.

Вместо двух типов перекрестков мы можем разрешить расставлять перекрестки из произвольного частично упорядоченного множества M . В этом случае ветвь с классическими перекрестками, имеющими метки i , может проходить сквозь перекресток с меткой j если и только если $i \geq j$.

Итак, теория плоских виртуальных зацеплений имеет следующую переформулировку:

1. Основные объекты плоской иерархии — это четырехвалентные графы на плоскости, снабженные специальной структурой в перекрестках: классические перекрестки имеют метку 1, а виртуальные перекрестки имеют метку 2.
2. Два объекта называются *эквивалентными*, если один из них можно перестроить во второй последовательностью следующих вариантов движений Рейдемейстера, указанных на рис. 3.28.

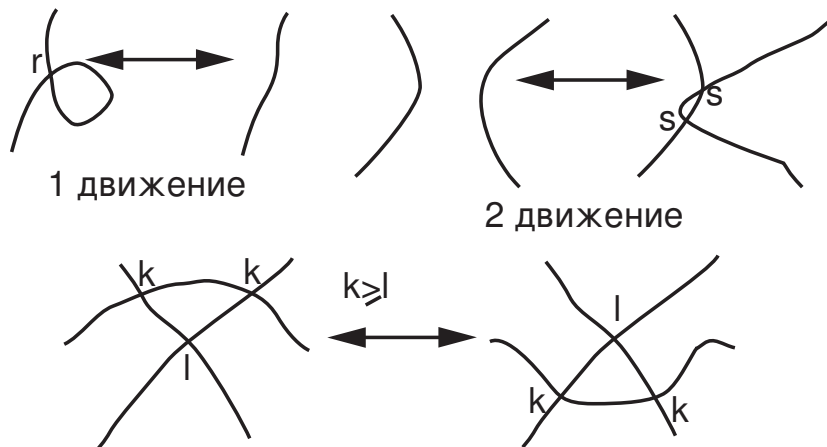


Рис. 3.28. Движения Рейдемейстера для иерархических узлов

В случае первого движения Рейдемейстера возможна любая метка для перекрестка.

В случае второго движения Рейдемейстера мы требуем, чтобы оба перекрестка имели одинаковые метки.

В случае третьего движения Рейдемейстера мы требуем, чтобы при прохождении ветви узла γ через вершину с меткой x , метки двух вершин, лежащих на γ оба были равны y , при этом $y \geq x$.

Последнее условие на третье движение Рейдемейстера означает, что ветви, содержащее лишь виртуальные перекрестки, могут проходить сквозь классические перекрестки, при этом ветви, состоящие из классических перекрестков, не могут проходить сквозь виртуальные перекрестки.

Как было сказано во введении, плоские виртуальные узлы легко классифицируются геометрически (они приводятся к минимальному представителю посредством дестабилизаций и уменьшающих движений Рейдемейстера; минимальный представитель определен с точностью до третьего движения Рейдемейстера).

Обобщим теперь понятие плоских виртуальных узлов (виртуальных струн) следующим образом. Пусть M — множество, на котором задано бинарное отношение $\alpha \leq \beta$ (не обязательно ациклическое, т.е. из соотношений $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, вообще говоря, не следует, что $\alpha = \beta$). При этом запись $\beta \geq \alpha$ эквивалентна записи $\alpha \leq \beta$.

Будем рассматривать чертырехвалентные графы на плоскости и сопоставлять перекресткам метки из множества M . При этом скажем, что два меченых четырехвалентных графа эквивалентны если и только если один из них получается из другого последовательным применением движений Рейдемейстера с ограничениями, описанными выше.

Будем строить инвариант таких объектов комбинаторным образом, аналогично виртуальным группоидам.

3.4.2. Алгебраический формализм

Фиксируем частично упорядоченное множество M с бинарным отношением \leq .

Пусть дан ориентированный плоский четырехвалентный граф D , все вершины которого помечены элементами из M . В дальнейшем мы будем такие графы называть M -иерархическими диаграммами. *Дугой* M -иерархической диаграммы мы называем связную компоненту множества, полученного удалением из D всех вершин. Тогда D задает *иерархическую диаграмму*.

Каждая иерархическая диаграмма задает иерархическое зацепление из некоторого количества компонент. Компоненты иерархического зацепления — это уникальные кривые соответствующего плоского графа.

Пусть мы имеем иерархическую диаграмму F зацепления из n компонент. Перенумеруем компоненты иерархического зацепления числами от 1 до n .

Каждая вершина (перекресток) этой диаграммы имеет метку j , а также два дополнительных числа — номера компонент зацепления: x , соответствующий ветви юго-запад — северо-восток и y , соответствующий ветви юго-восток — северо-запад, см. рис. 3.29.

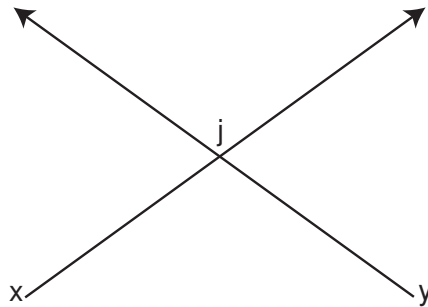


Рис. 3.29. Перекресток

Перенумеруем дуги натуральными числами (произвольным образом). Сопоставим теперь дуге с номером i элемент a_i . Эти элементы будут образующими того модуля N — инварианта иерархического зацепления, который мы строим.

После перенумерации всех дуг таким образом, зададим соотношения в перекрестках. Они задаются следующим образом.

Пусть дан перекресток с меткой j , который относится к дугам $\#x$ и $\#y$ (порядок дуг не имеет значения). Пусть элементы, соответствующие входящим дугам, равны a и b (соответственно, левый нижний и правый

нижний, если дуги ориентированы снизу вверх). Тогда соотношения будут выглядеть следующим образом:

$$c = b - P_{xy}^j a \quad (3.21)$$

и

$$d = a + P_{xy}^j b, \quad (3.22)$$

где c и d — исходящие дуги — левая и правая, см. рис. 3.30.

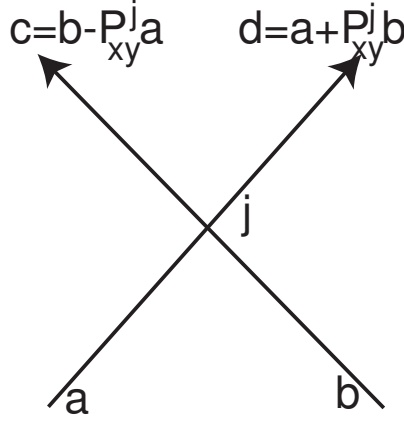


Рис. 3.30. Соотношение для иерархического узла

Мы еще не определили P_{xy}^j . Каким должны быть эти элементы, чтобы алгебраический формализм (подобный тому, который был развит для группоидов, виртуальных группоидов, бигруппоидов) приводил к инварианту иерархических зацеплений?

Рассмотрим формальную некоммутативную ассоциативную алгебру (над произвольным кольцом коэффициентов, например, над \mathbf{Q}), порожденную формальными элементами P_{xy}^i , где x, y пробегают множество S компонент зацепления, а i пробегает частично упорядоченное множество M , в котором имеют место следующие соотношения:

Для любых i, x, y :

$$P_{xy}^i = P_{yx}^i. \quad (3.23)$$

Для любых $i, j \in M : i \leq j$ и для любых x, y, z, t :

$$P_{xy}^i P_{zt}^j = 0. \quad (3.24)$$

Обозначим алгебру (над полем \mathbf{Q}), определенную соотношениями (3.24), (3.23), через $\mathcal{A}(C)$.

Как будет видно в дальнейшем, эти соотношения необходимы для инвариантности объекта, который мы строим, относительно движений Рейдемейстера.

Сопоставим теперь M -иерархической диаграмме D , компоненты которой занумерованы элементами из множества C , правый модуль над алгеброй $\mathcal{A}(C)$ следующим образом.

Выберем все дуги a_1, \dots, a_k этой диаграммы в качестве образующих над кольцом $\mathcal{A}(C)$. Профакторизуем свободный модуль, порожденный дугами a_1, \dots, a_k , по соотношениям (3.21) и (3.22) в перекрестках, а также по соотношениям вида (3.25), состоящим в следующем.

Для любых $i, j, i > j$, для любых $x, y, z, t \in C$ и для любых $l, m = 1, \dots, k$ при фиксированных i, j все элементы модуля вида

$$P_{xy}^i P_{zt}^j a_l \quad (3.25)$$

равны между собой. Для краткости мы будем обозначать все эти элементы через $P^i P^j *$.

Иными словами, мы требуем, чтобы попарные произведения равнялись нулю в некоторых частных случаях (3.24), а именно, при $i \leq j$, это входит в определение кольца $\mathcal{A}(C)$. При этом в случае, если такое произведение не равно нулю, мы требуем, чтобы оно было некоторым элементом нашего модуля, зависящим только от индексов i и j .

Обозначим полученный модуль через $N(D)$.

Замечание 3.9. В случае, когда имеется всего одна компонента, мы можем забыть про нижние индексы и построить аналогичное кольцо \mathcal{A} (без C) и модуль, соответствующий зацеплению.

Теорема 3.18. Модуль $N(D)$ является инвариантом иерархических зацеплений.

Доказательство. Для каждого движения Рейдемейстера имеется часть диаграммы, претерпевающая изменения; у этой части диаграммы есть входящие и исходящие ребра. Нам нужно показать, что выражение элементов, соответствующих исходящим ребрам, через элементы, соответствующие входящим ребрам, не меняется при применении движений Рейдемейстера; при этом метки, соответствующие “промежуточным ребрам”, можно исключить из числа образующих, так как они выражаются через входящие ребра (рассуждение полностью аналогично доказательству теоремы 3.3).

Мы рассмотрим по одному случаю для каждого из трех движений Рейдемейстера. Все остальные случаи проверяются аналогично.

В случае первого движения Рейдемейстера мы имеем дело ровно с одной компонентой зацепления и одним перекрестком; таким образом, при проверке инвариантности будет фигурировать только одна образующая P_{pp}^i кольца, которую мы для краткости будем обозначать через P , см. рис. 3.31.

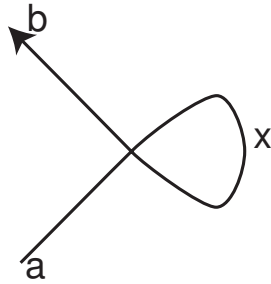


Рис. 3.31. Первое движение Рейдемейстера

Мы видим, что ребро на входе a связано с промежуточным ребром x и с ребром на выходе следующими соотношениями:

$$a + Px = x, x - Pa = b.$$

Таким образом мы приходим к соотношениям: $(1 - P)x = a$, откуда вытекает $x = (1 + P)a$. Отсюда мы заключаем, что $b = (1 + P)a - Px = a$, при этом x выражается через a , что завершает доказательство инвариантности относительно первого движения Рейдемейстера.

Рассмотрим теперь второе движение Рейдемейстера. Согласно опреде-

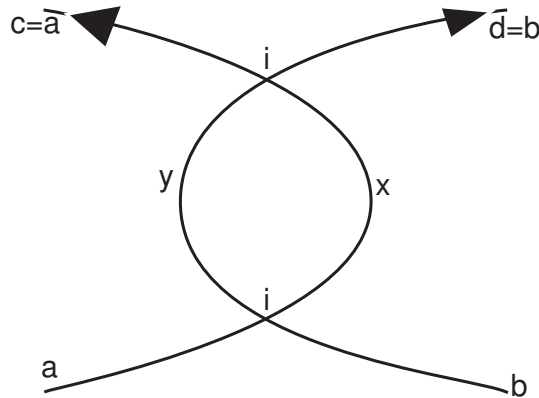


Рис. 3.32. Второе движение Рейдемейстера

лению, оба перекрестка, участвующие в движении, имеют одну и ту же метку; кроме того, мы имеем пару дуг с номерами k, l в первом перекрестке и эти же дуги во втором перекрестке. Таким образом, мы опять можем обойтись без верхних индексов и писать просто P^i вместо P_{kl}^i .

Второе движение Рейдемейстера изображено на рис. 3.32.

Мы имеем два входящих ребра a, b . Остальные ребра выражаются через них посредством следующих соотношений: $x = a + P^i b, y = b - P^i a, c = x - P^i y = a + P^i b - P^i b + P^i P^i a = a, d = y + P^i x = b$.

Следовательно, интересующий нас модуль порожден дугами a и b , а также внешними дугами (не изображенными на рисунке и одинаковыми до и после применения движения Рейдемейстера). Это приводит нас к инвариантности относительно второго движения Рейдемейстера.

Перейдем к третьему движению Рейдемейстера, изображенному на рис. 3.33.

Здесь мы имеем три входящих ребра a, b, c (которые на рисунке изображены наклонными буквами), метки в вершинах (при этом имеет место соотношение $r \geq s$), а также номера компонент (в нашем случае i, j, k), которые мы изображаем жирным шрифтом.

Легко видеть, что все промежуточные ребра как на левой картинке, так и на правой, выражаются через входящие ребра.

Таким образом, нам нужно проверить совпадение выражения исходящих ребер через входящие для левой и правой картинок (которые получаются одна из другой применением третьего движения Рейдемейстера).

На левой картинке исходящие ребра задаются соотношениями

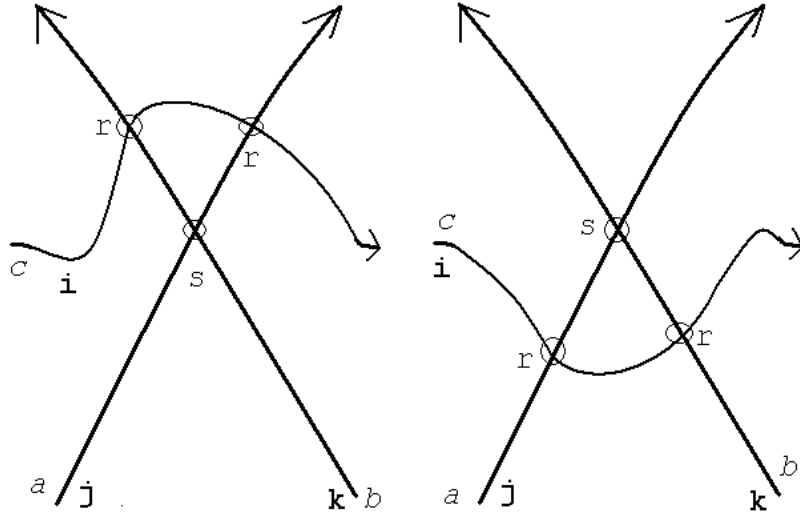


Рис. 3.33. Третье движение Рейдемейстера

$$\begin{aligned}
 & a + P_{jk}^s b - P_{ij}^r c, \\
 & b - P_{jk}^s a - P_{ik}^r c \text{ и} \\
 & c + P_{ik}^r (b - P_{jk}^s a) + P_{ij}^r (a + P_{jk}^s b).
 \end{aligned}$$

На правой картинке формулы для исходящих ребер выглядят так:

$$\begin{aligned}
 & a - P_{ij}^r c + P_{jk}^s b, \\
 & b - P_{ik}^r (c + P_{ij}^r a) - P_{jk}^s (a - P_{ij}^r c), \\
 & c + P_{ij}^r a + P_{ik}^r b
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что соответствующие значения совпадают ввиду аксиом (3.23,3.24) кольца M , а также соотношений (3.25). Тем самым мы завершили проверку инвариантности относительно третьего движения Рейдемейстера и, вместе с ней, доказательство теоремы. \square

3.4.3. Примеры

Простейшими примерами иерархических зацеплений являются тривиальные зацепления из произвольного числа компонент. Очевидно, что для тривиального k -компонентного иерархического зацепления мы получим свободный k -мерный модуль над \mathcal{A} .

Стандартная тень трилистника, у которой два из трех перекрестков имеют одинаковые метки, представляет собой иерархический узел, сводимый к тривиальному, см. рис. 3.34. Действительно, сначала мы применим вто-

рое движение Рейдемейстера к двум вершинам с одинаковыми метками, а затем уберем оставшуюся петлю посредством первого движения Рейдемейстера.

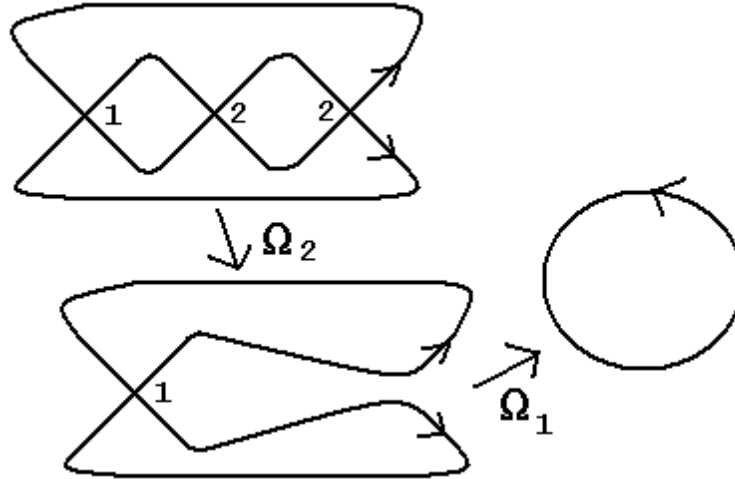


Рис. 3.34. Тривиальный иерархический узел

Однако, если мы поставим три различные метки, см. рис. 3.35, это будет уже не тривиальный иерархический узел.

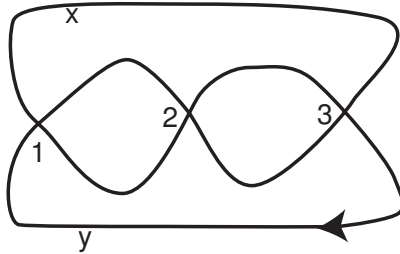


Рис. 3.35. Нетривиальный иерархический узел

А именно, обозначим две дуги слева через x и y , как показано на рис. 3.35.

Покажем, что модуль, соответствующий этому узлу, не является свободным. Действительно, так как у нас имеется ровно одна компонента, мы можем использовать обозначения P^j , где $j = 1, 2, 3$, вместо P_{11}^j .

Профакторизуем наш модуль по соотношениям вида $P^i P^j P^k = 0$.

После прохождения первого перекрестка пара дуг (x, y) переходит в пару

дуг $(y - P^1x, x + P^1y)$ (здесь и далее сначала указывается дуга, расположенная сверху, а затем дуга, расположенная снизу).

После второго перекрестка мы получим пару дуг $(x + (P^1 - P^2)y + P^2P^1*, y + (P^2 - P^1)x + P^2P^1*)$.

Наконец, после третьего перекрестка мы получим пару $(y + (P^2 - P^1 - P^3)x + (P^2P^1 + P^3P^2 - P^3P^1)y, x + (P^1 - P^2 + P^3)y + (P^2P^1 + P^3P^2 - P^3P^1)x)$,

Эти два элемента соответствуют двум дугам, расположенным справа — т.е. равны x и y соответственно.

Обозначим $P^1 - P^2 + P^3$ через \mathcal{P} и обозначим $P^2P^1 + P^3P^2 - P^3P^1$ через \mathcal{Q} . Заметим, что $\mathcal{P}^2 = -\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}^3 = 0$. Тогда мы получим

$$y - \mathcal{P}x + \mathcal{Q}* = x; x + \mathcal{P}y + \mathcal{Q}* = y \quad (3.26)$$

Записывая x в виде $y - \mathcal{P}y - \mathcal{Q}*$, мы получаем равенство $y - \mathcal{P}y + \mathcal{P}^2y = y - \mathcal{P}y + \mathcal{Q}*$. Это соотношение делает наш модуль нетривиальным. Более того, полученное соотношение не вытекает из соотношения, по которому мы факторизовали.

Следовательно, иерархическая плоская диаграмма, изображенная на рис. 3.35, нетривиальна.

Аналогичным образом можно показать, что “иерархические кольца Борромео”, размеченные так, как показано на рис. 3.36 не эквивалентны тривиальному трехкомпонентному зацеплению.

Изобразим кольца Борромео следующим образом (в виде “замыкания косы”), см. рис. 3.37.

Слева мы имеем три метки (a, b, c) . После первого перекрестка (помеченного как 1) они переходят в следующие три перекрестка (выписываем сверху вниз): $(b - P^1a, a + P^1b, c)$.

Далее мы имеем $(b - P^1a, c - P^3a - P^3P^1*, a + P^1b + P^3c)$, затем $(c - P^3a - P^3P^1* - P^2b + P^2P^1*, b - P^1a + P^2c, a + P^1b + P^3c)$, после этого (после перекрестка, помеченного как 1, мы получаем:

$(c - P^3a - P^3P^1* - P^2b + P^2P^1*, a + P^3c, b + P^2c)$, далее $(a + P^3P^2*, c - P^3P^1* - P^2b + P^2P^1*, b + P^2c)$ и, наконец,

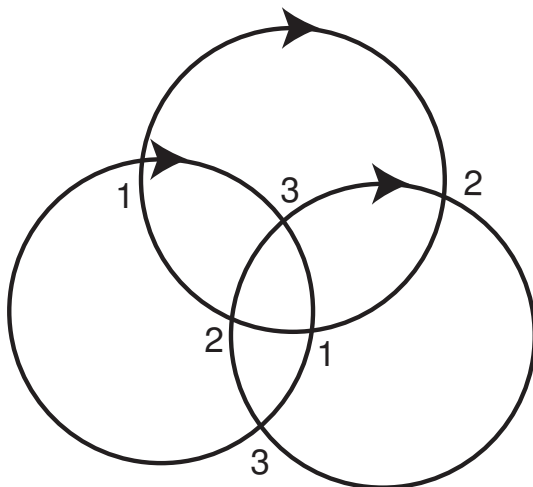


Рис. 3.36. Иерархические кольца Борромео не эквивалентны тривиальному зацеплению

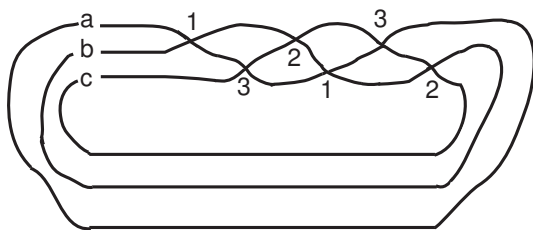


Рис. 3.37. Метки на кольцах Борромео

$$(a + P^3 P^2_*, b, c - P^3 P^1_* + P^2 P^1_*).$$

Из этого вытекают нетривиальные соотношения: $P^3 P^2_* = 0$, а также $P^3 P^1_* - P^2 P^1_* = 0$.

Глава 4

Полином Джонса-Кауфмана и его обобщения. Атомы

Полином Джонса (в форме нормированной скобки Кауфмана) является простой и вместе с тем фундаментальной конструкцией инварианта классических узлов. На ее основе в последнее время были построены несколько замечательных теорий инвариантов классических узлов — квантовые инварианты, гомологии Хованова и др, а также многочисленные обобщения полинома Джонса на случай виртуальных узлов. Оригинальная конструкция Джонса была предложена в [Jon1], версия в виде скобки Кауфмана впервые появилась в [Kau3]. В дальнейшем мы будем называть этот инвариант также *полиномом Джонса-Кауфмана*.

За последние несколько лет была предложена [Kh] и развита мощная конструкция, обобщающая полином Джонса — комплекс Хованова.

Эта конструкция относится к полиному Джонса в той же степени, в которой кольцо когомологий некоторого топологического пространства относится к его эйлеровой характеристике. Более точно, комплекс Хованова зацепления — это некоторый формальный алгебраический комплекс, все гомологии которого являются инвариантами рассматриваемого зацепления, а (градуированная) эйлерова характеристика совпадает с полиномом Джонса-Кауфмана¹. Гомологиям Хованова будет посвящены следующие две главы диссертации. Глава 4 является в известной степени подготовительной к главам 5 и 6.

В следующей главе мы опишем различные способы обобщения комплекса Хованова на случай виртуальных узлов, принадлежащие автору, см.

¹В несколько иной нормировке, предложенной Ховановым. Этот полином получается из полинома Джонса заменой переменной и умножением на постоянный полиномиальный множитель.

[Ma6, Ma1, Ma11]. На основе свойств полинома Джонса и гомологий Хованова в главе 5 будут доказаны теоремы, устанавливающие минимальность или неклассичность некоторых виртуальных зацеплений (т.е. отсутствие у данного виртуального зацепления классической диаграммы), оценивающие их характеристики (род атома и др.). Отметим, что в случае виртуальных узлов с неориентируемыми атомами (см. опр. ниже) конструкция Хованова требует весьма нетривиальных модификаций, и построенные в пятой главе геометрические обобщения связаны с геометрическими модификациями исходного узла.

В шестой главе (центральной в настоящей диссертации) каждой диаграмме произвольного виртуального зацепления будет сопоставлен цепной комплекс, гомологии которого будут инвариантны относительно движений Рейдемейстера. В случае классических зацеплений этот комплекс будет иметь те же гомологии, что и оригинальный комплекс Хованова.

Результаты глав 5 и 6 — центральные в настоящей диссертации.

При этом бóльшая часть результатов пятой главы, относящаяся к модификациям конструкции Хованова, будет верна и для нового комплекса.

Настоящая глава является подготовительной для построения гомологий Хованова для виртуальных узлов. В качестве самостоятельного результата — основного в настоящей главе — предлагается новый инвариант, уточняющий полином Джонса, обозначаемый через Ξ .

В последнее время появились новые инварианты, усиливающие полином Джонса для виртуальных узлов (и длинных виртуальных узлов), но использующих комбинаторные идеи (Миядзава [Miy], Камада, Ишии, [IKK]).

4.1. Полином Джонса–Кауфмана классических и виртуальных узлов

Пусть дана ориентированная диаграмма L виртуального зацепления с n классическими перекрестками. Рассмотрим неориентированную диаграмму $|L|$, получаемую из L забыванием ориентации. Каждый из перекрестков диаграммы $|L|$ можно *развести* одним из двух способов: положительным $A : \otimes \rightarrow \oslash$ или отрицательным $B : \otimes \rightarrow \ominus$. Выбор разведения всех перекрестков называется *состоянием* диаграммы. Таким образом, диаграмма

$|L|$ имеет 2^n состояний. После разведения диаграммы согласно некоторому состоянию, мы получим диаграмму виртуального зацепления без классических перекрестков. Таким образом получаемое виртуальное зацепление будет тривиальным. Сопоставим каждому состоянию s три числа: $\alpha(s)$ — число классических перекрестков, разведенных способом A , $\beta(s) = (n - \alpha(s))$ — число классических перекрестков, разведенных способом B и $\gamma(s)$ — число компонент (тривиального) зацепления в состоянии s .

Определим *скобку Кауфмана* $\langle \cdot \rangle$ неориентированной диаграммы $|L|$ по формуле:

$$\langle |L| \rangle = \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{(\gamma(s) - 1)}, \quad (4.1)$$

где сумма берется по всем состояниям s диаграммы $|L|$.

Скобка Кауфмана инвариантна относительно всех обобщенных движений Рейдемейстера, за исключением первого классического движения Рейдемейстера Ω_1 .

Из определения следует, что скобка Кауфмана удовлетворяет соотношению $\langle \text{X} \rangle = a \langle \text{Y} \rangle + a^{-1} \langle \text{Z} \rangle$

Скобка Кауфмана, которая является “почти” инвариантом неориентированных виртуальных зацеплений, приводит к построению инварианта ориентированных виртуальных зацеплений.

Для этого ее нужно нормировать следующим образом.

Пусть L — ориентированная виртуальная диаграмма. Положим

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle, \quad (4.2)$$

где $w(L)$ — число закрученности диаграммы L .

Известно [Kau7], что таким образом мы получаем инвариантный полином (Лорана) ориентированных зацеплений. По полиному Кауфмана зацеплений можно судить о следующем:

1. Является ли зацепление классическим?
2. Каким может быть род зацепления (в смысле атома, см. опр. на стр. 154)?

3. Каким может быть количество перекрестков диаграммы данного зацепления (оценка снизу)?

Опишем некоторые важные общеизвестные свойства полинома Джонса-Кауфмана.

Пример 4.1. Из определений непосредственно следует, что на тривиальном узле полином Джонса-Кауфмана равен единице, на тривиальном зацеплении из $n + 1$ компоненты он равен $(-a^2 - a^{-2})^n$.

Далее, полином Джонса-Кауфмана мультипликативен относительно операции взятия связной суммы: $X(L_1 \# L_2) = X(L_1) \cdot X(L_2)$.

Здесь имеется в виду, что для **любой** связной суммы виртуальных зацеплений $L_1 \# L_2$ его значение равно произведению значений полинома Джонса-Кауфмана на виртуальных зацеплениях, входящих в связную сумму в виде слагаемых.

Далее, для несвязной суммы (которая определена корректно) мы имеем $X(L_1 \sqcup L_2) = X(L_1) \cdot X(L_2) \cdot (-a^2 - a^{-2})$.

Полином Джонса-Кауфмана, однако, является не очень сильным инвариантом для виртуальных узлов: можно легко построить, например, нетривиальные (и не классические) узлы, на которых полином Джонса-Кауфмана равен единице.

Пример 4.2. Рассмотрим узел Кишино, изображенный на рис. 4.1.

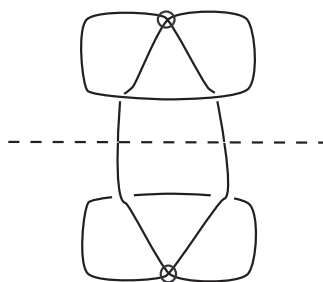


Рис. 4.1. Узел Кишино, разбитый на два длинных узла

Он представляет собой связную сумму двух тривиальных узлов. Отсюда следует, что его полином Джонса равен единице. В дальнейшем мы покажем нетривиальность узла Кишино с использованием полинома Ξ

— обобщения полинома Джонса, учитывающего геометрию виртуальных узлов.

Каждая из двух частей узла Кишино задает тривиальный узел при замыкании (см. рис. 3.26); однако каждая из этих частей нетривиальна как длинный узел, см. стр. 126; если бы хоть один из этих длинных узлов был тривиальным, то тривиальным был бы и сам узел Кишино.

Вопрос о том, существуют ли нетривиальные классические узлы, на которых полином Джонса-Кауфмана равен единице, до сих пор является открытым.

В настоящем разделе мы приведем ряд результатов, позволяющих частично отвечать на приведенные выше вопросы, а также некоторые гипотезы, связанные с распознаванием тривиального узла полиномом Джонса-Кауфмана.

Отметим, что для любого $n \geq 2$ существует нетривиальное классическое зацепление из n компонент, имеющее тот же полином Джонса-Кауфмана, что и тривиальное n -компонентное зацепление, а именно, $(-a^2 - a^{-2})^{n-1}$. Эти примеры построены в работе Л.Кауфмана, М. Тистлтуэйта и Ш.Элиаху, [ЕКТ].

Более того, в той же работе показано, что для каждого классического зацепления L из n компонент существует бесконечно много различных $(n + 1)$ -компонентных зацеплений, имеющих полином Джонса-Кауфмана, равный $X(L) \cdot (-a^2 - a^{-2})$.

В настоящей главе мы приведем обобщения полинома Джонса-Кауфмана, которые являются более сильными в случае виртуальных узлов. Эти результаты опубликованы в книге [Ma1] и статьях [Ma7, Maп3, Ma13].

Несложно доказывается

Предложение 4.1 (см., напр, [Кам.N1]). *Для классического зацепления из n компонент все ненулевые мономы полинома Джонса-Кауфмана $X(L)$ имеют степени, сравнимые с $2n + 2$ по модулю четыре.*

В случае виртуальных зацеплений можно сказать лишь, что все мономы имеют степени, сравнимые по модулю два. Это явно следует из формулы 4.1. Отсюда немедленно вытекает общеизвестное

Следствие 4.1. Пусть K — виртуальное зацепление, для которого полином $X(K)$ имеет хотя бы один ненулевой моном степени $4k$ и хотя бы один ненулевой моном степени $4l + 2$ для некоторых целых k, l . Тогда виртуальное зацепление K не может быть представлено диаграммой без виртуальных перекрестков.

Это — простейший пример того, как можно определить, что то или иное виртуальное зацепление не является классическим.

Свойство полинома Лорана иметь степени мономов, сравнимые по модулю четыре, присуще не только классическим зацеплениям, но и виртуальным зацеплениям, имеющим диаграммы, которым соответствуют ориентированные атомы, см. определение далее, хотя это свойство не является критерием ориентируемости соответствующего атома, см. [pagerefPRIMER5](#). Отметим, что *ориентируемость атома* является ключевым свойством для определения комплекса Хованова. Об этом будет сказано в следующей главе.

Виртуализация и мутации

Существуют преобразования, меняющие диаграмму виртуального зацепления и сам класс эквивалентности виртуального зацепления, но не меняющие соответствующего ему полинома Джонса-Кауфмана. Эти преобразования важны для изучения свойств полинома Джонса-Кауфмана классических и виртуальных узлов и построения более сильных инвариантов.

Одно такое преобразование состоит в замене одного классического перекрестка одним классическим и двумя виртуальными перекрестками так, как показано на рис. 4.2.

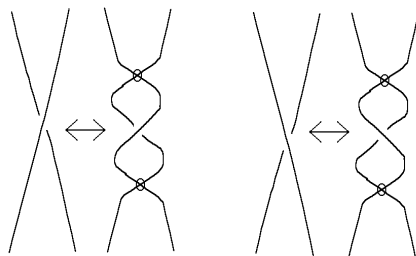


Рис. 4.2. Два варианта виртуализации

Это преобразование называется *виртуализацией* или *выворачиванием*. Легко видеть, что каждый из двух вариантов виртуализации выражается в виде комбинации другого варианта виртуализации и движений объезда.

Множество классических узлов представляет собой подмножество множества всех виртуальных узлов. При этом и классические, и виртуальные узлы задаются посредством атомов. Возникает естественный вопрос [ФКМ] об уточнении (упрощении) понятия виртуального узла с помощью атомов, чтобы эквивалентность классических узлов при этом не изменилась. А именно, мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 4.1. (*Гипотеза о виртуализации*) *Верно ли, что если два классических зацепления K_1 и K_2 эквивалентны посредством обобщенных движений Рейдемейстера и виртуализации, то они изотопны?*

Отметим, что виртуализация, примененная дважды к одному и тому же перекрестку X диаграммы L (т.е. к перекрестку X диаграммы L , а затем к появившемуся вместо него перекрестку X' диаграммы L'), приводит к диаграмме L'' , получающейся из диаграммы L двукратным применением объезда. Хорошо известно следующее

Утверждение 4.1 (Кауфман, [Kau7]). *Виртуализация не меняет значения полинома Джонса-Кауфмана.*

Более интересным примером преобразования, не меняющего полинома Джонса-Кауфмана, являются *мутации*. Впервые мутации были рассмотрены Дж.Х. Конвеем в [Con].

Они состоят в удалении из диаграммы некоторого содержащегося в ней фрагмента (называемого танглом типа $2 - 2$) и вставкой в нее этого же тангла (т.е. части диаграммы узла или зацепления, имеющей четыре исходящих конца), повернутого на угол π , см. рис. 4.3.

Диаграммы, получающиеся друг из друга применением мутации, называются (взаимными) *мутантами*.

Понятие мутации и мутанта дословно обобщается на случай виртуальных узлов и зацеплений (при этом танглы типа $2 - 2$, встречающиеся в виде поддиаграммы, могут быть и виртуальными).

Общеизвестно (доказательство см., напр., в [Ma1]) следующее

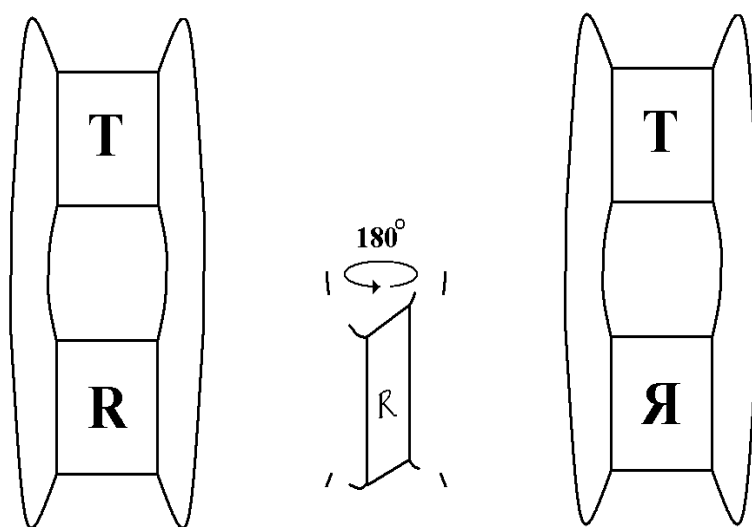


Рис. 4.3. Мутация

Предложение 4.2. *Мутация не меняет значения полинома Джонса-Кауфмана.*

Это следует из того, что существует однозначное соответствие между состояниями мутантов L_1 и L_2 такое, что количество окружностей в состоянии s для диаграммы L_1 равно количеству окружностей в соответствующем ему состоянии s' диаграммы L_2 . Так как числа закрученности у (ориентированных) мутантов совпадают, то совпадают и значения на них полинома Джонса-Кауфмана, см. рис. 4.3.

Отметим, что комплекс Хованова, которому будет посвящена следующая глава, иногда различает мутации в случае зацеплений. Это было впервые обнаружено Штефаном Верли [Weh1].

4.1.1. Атомы и узлы

Пусть дана классическая альтернированная диаграмма L . Ее тень разбивает плоскость на клетки C_1, \dots, C_n , которые можно раскрасить шахматным образом. При этом набор окружностей в A -состоянии (состоянии, в котором все перекрестки разведены способом A , см. стр. 147) взаимно однозначно соответствуют клеткам одного цвета, а набор окружностей в B -состоянии (когда все перекрестки разведены способом B) соответству-

ет оставшимся окружностям. Таким образом, альтернированная диаграмма задает четырехвалентный граф, порождающий черно-белую раскраску двумерной сферы (плоскости с добавленной бесконечной точкой).

В случае произвольной классической диаграммы окружности, соответствующие состояниям A и B не задают разбиения сферы. Как оказывается, с каждой виртуальной диаграммой можно связать некоторую двумерную поверхность, разбитую на клетки и раскрашенную шахматным образом, чтобы белые клетки соответствовали окружностям в состоянии A , а черные клетки — окружностям в состоянии B . Частным случаем этой конструкции является разбиение сферы, описанное в начале настоящего подраздела.

Эта поверхность (вместе с графом и шахматной раскраской) называется *атомом*. По атому восстанавливается большая часть информации о зацеплении, в частности, его скобка Кауфмана (полинома Джонса), а также гомологии Хованова.

Важными характеристиками диаграммы зацепления являются *ориентируемость соответствующего атома* и его *род*.

Понятие атома впервые было введено А.Т.Фоменко в [F] для классификации интегрируемых гамильтоновых систем малой сложности.

В дальнейшем связь между атомами и узлами исследовалась автором в ряде работ [Ман-1, Ман-2, Ман-3, Ма1].

В [Tur2] В.Г.Тураев использовал схожую конструкцию (поэтому род атома в некоторых источниках, напр., [Low], называют *родом Тураева*).

Определение 4.0. Назовем *атомом* двумерное замкнутое многообразие M , в которое вложен четырехвалентный граф $\Gamma \in M$, делящий многообразие M на клетки с фиксированной шахматной раскраской двумерных клеток. Граф Γ называется *остовом атома*. *Вершинами* атома называются вершины его остова.

Родом (соответственно, *эйлеровой характеристикой*) атома называется род (эйлерова характеристика) соответствующего двумерного многообразия. Атом называется *ориентируемым*, если таковым является соответствующее многообразие. Атомы рода 0 называются *сферическими*, ориентируемые атомы рода один — *торическими*.

Замечание 4.1. Атом можно представлять себе в виде двумерной по-

верхности (с краем), на которой задана функция Морса с выделенным критическим уровнем с несколькими седловыми точками при условии отсутствия других седловых точек (изначальное определение А. Т. Фоменко [F]); в этом случае остов атома представляет собой критический уровень, черные клетки — области значений выше критического (послекритические), а белые клетки — области значений ниже критического (докритические). Далее также будут использоваться термины “докритические окружности” и “послекритические окружности” для описания окружностей в состояниях соответствующего узла.

Пример торического атома изображен на рис. 4.4.

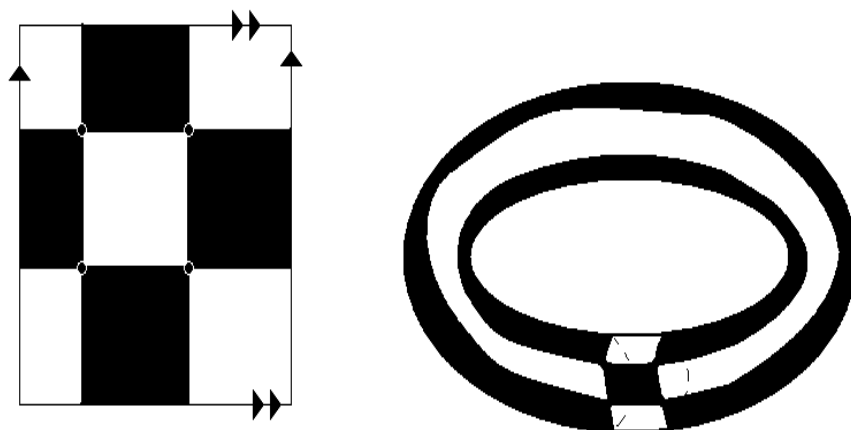


Рис. 4.4. Торический атом

Если атом ориентируем, то можно снабдить его ориентацией. Таким образом, имеет смысл говорить об ориентированных и неориентированных атомах.

Атомы рассматриваются с точностью до эквивалентности, т.е. гомеоморфизма, переводящего остов — в остов, черные клетки — в черные, а белые — в белые.

Каждый атом (более точно, его класс эквивалентности) может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

1. Остов (четырёхвалентный граф);

2. A -структура (делящая четыре полуребра, исходящие из каждой вершины, на две пары, называемые противоположными; отношение противоположности определяется в соответствии с расположением полуребер на поверхности) и
3. B -структура (в каждой вершине выделены две пары соседних полуребер (или двух углов), которые образуют границы черных клеток).

Замечание 4.2. *Обычно атомы предполагаются связными, но мы допускаем, что атом имеет более одной связной компоненты.*

Если атом (V, Γ) не является ориентируемым, то можно рассмотреть его *ориентирующее накрытие*, т.е. атом, $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma})$, являющийся прообразом пары (V, Γ) при двулистном ориентирующем накрытии; в случае, когда атом (V, Γ) ориентируем, определим атом $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma})$ как два отдельно стоящих экземпляра атома (V, Γ) (с фиксированным изоморфизмом одного атома на другой).

Атомы удобны для описания зацеплений и виртуальных зацеплений.

Среди атомов выделяется класс *высотных*, которые соответствуют диаграммам классических зацеплений. Согласно [Ман-1], назовем *высотным* такой атом, остов которого может быть вложен в плоскость таким образом, что A -структура атома соответствует A -структуре, наследуемой атомом из плоскости, т.е. в каждой вершине атома противоположные полуребра остаются противоположными при вложении остова на плоскость.

В общем случае *высотностью* h ориентируемого атома (M, Γ) называется минимальный род ориентируемой поверхности G , в которую остов Γ атома может быть вложен с сохранением A -структуры. Высотность ориентируемого атома не превосходит его рода: $h(M, \Gamma) \leq g(M, \Gamma)$. Действительно, атом рода g по определению задает вложение остова в поверхность рода g с сохранением A -структуры.

Виртуальные диаграммы и атомы.

Сопоставим каждой виртуальной диаграмме L атом $V(L)$ следующим образом. Вершины атома $V(L)$ находятся в однозначном соответствии с *классическими* перекрестками диаграммы L . Эти классические перекрестки соединяются *ветвями диаграммы*, которые могут пересекаться (и самопересекаться) в виртуальных перекрестках. В каждом классическом пе-

рекрестке мы имеем четыре исходящих ветви. Этим ветвям мы сопоставим четыре ребра атома, соединяющие соответствующие вершины. Правило приклейки черных (соотв., белых) клеток определяется диаграммой L . А именно, пусть X — классический перекресток диаграммы L . Перенумеруем исходящие ребра по часовой стрелке x_1, x_2, x_3, x_4 так, чтобы локально ребра, соответствующие x_1 и x_3 образовывали проход, а ребра, соответствующие x_2 и x_4 , — переход. Тогда для приклейки черных клеток мы локально выбираем пары полуребер атома (x_1, x_2) и (x_3, x_4) , т.е. цикл, являющийся границей черной клетки, содержащей ребро x_1 будет в перекрестке X переходить с ребра x_1 на ребро x_2 , а цикл — граница черной клетки, содержащей x_3 , будет переходить в вершине X с x_3 на x_4 .

Назовем *родом* виртуального зацепления L минимум значения рода атома $g(M, \Gamma)$ по всем атомам (M, Γ) , соответствующим диаграммам зацепления L , а *высотностью* — минимум значения $h(M, \Gamma)$ по всем атомам (M, Γ) , соответствующим диаграммам зацепления L .

Из определения следует, что классические зацепления имеют высотность нуль. Действительно, если зацепление является классическим, то его тень представляет собой вложенный в плоскость четырехвалентный граф, который является остовом соответствующего атома. По построению A -структура атома совпадает с A -структурой, индуцируемой из плоскости. Таким образом, **всякой классической диаграмме соответствует высотный атом.**

Обратная операция к данной (построение диаграммы по атому) является неоднозначной.

Имея атом (V, Γ) , можно построить неориентированную диаграмму виртуального зацепления следующим образом. Рассмотрим погружение общего положения остова Γ в плоскость с сохранением A -структуры. Образ погружения будет представлять собой четырехвалентный граф, вершинами которого будут образы вершин атома и пересечения образов внутренних точек ребер. Последние будем рассматривать как виртуальные перекрестки, а образы вершин — как классические. Для уточнения классических перекрестков воспользуемся B -структурой атома. А именно, выберем ребро перехода так, что при движении внутри угла послекритического уровня

по часовой стрелке мы идем от ребра прохода к ребру перехода.

Обозначим всевозможные классы виртуальных зацеплений, получающихся из атома V , через $L(V)$.

Произвол здесь возникает при выборе погружения, см. рис.4.5.

В случае высотных атомов можно ограничиться вложениями. Обозначим соответствующее подмножество множества $L(V)$ через $L_{emb}(V)$.

Имеет место

Теорема 4.1 (Теорема об атомах и узлах, [Ман-1]). *Изотопический тип зацепления $L_{emb}(V)$ не зависит от способа вложения остова атома V в плоскость с сохранением A -структуры.*

Отметим, что при таком подходе тавтологическому вложению в плоскость остовов плоских атомов соответствуют альтернированные диаграммы — они разбивают плоскость (сферу) на черные и белые клетки.

В случае погружений однозначность уже не имеет места.

Теорема 4.2 ([Ma1]). *Диаграммы из множества $L(V)$, определенные по атому V , получаются друг из друга применением движений объезда и виртуализации.*

Доказательство. Погружение остова в плоскость начнем с вложения окрестностей его вершин с сохранением A -структуры. После этого ребра, соединяющие вершины атома, могут быть погружены в плоскость произвольным образом. Это отвечает тому, что диаграмма виртуального узла определена с точностью до объезда.

При этом выбор вложения окрестностей вершин определен неоднозначно. А именно, для каждой вершины X с циклическим порядком исходящих полурёбер p, q, r, s на атоме мы можем выбрать два способа вложения с сохранением A -структуры: в одном случае порядок исходящих рёбер на плоскости по часовой стрелке имеет вид p, q, r, s , а в другом случае — p, s, r, q , см. рис. 4.5.

Получаемые таким образом диаграммы отличаются виртуализацией в соответствующем перекрестке. \square

Важную роль во многих задачах теории узлов (в особенности при изу-

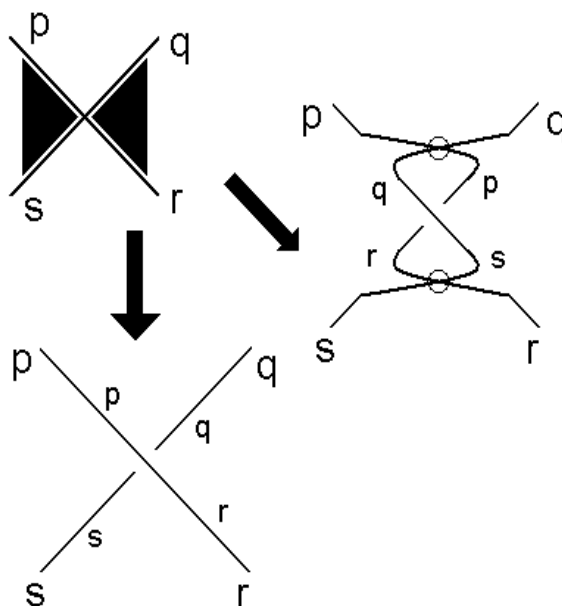


Рис. 4.5. Различные погружения остова атома и виртуализация

чении комбинаторной структуры инвариантов Васильева) играют так называемые хордовые диаграммы.

Хордовые диаграммы.

Определение 4.1. Пусть \mathcal{M} — ориентированное одномерное многообразие (не обязательно связное). *Хордовой диаграммой* порядка n на \mathcal{M} называется вложение неупорядоченной несвязной суммы n нульмерных окружностей $S^0 \sqcup \dots \sqcup S^0 \rightarrow \mathcal{M}$, рассматриваемое с точностью до изотопии.

Обычно многообразие \mathcal{M} изображается как набор окружностей и прямых на плоскости, а пары точек — образы нульмерных окружностей — соединяются между собой отрезками — хордами.

Оснащенной хордовой диаграммой называется хордовая диаграмма, на всех хордах которой расставлены метки $+1$ или -1 .

Если метки на хордовой диаграмме не обозначены, предполагается, что все они равны единице.

В теории узлов наиболее часто встречаются хордовые диаграммы на окружности.

А именно, удобно следующее

Определение 4.2. *Хордовой диаграммой* называется трехвалентный граф, у которого выделен ориентированный цикл, проходящий через все вершины по одному разу. Этот цикл также называется *окружностью хордовой диаграммы*. Ребра, не принадлежащие выделенному циклу, не ориентированы; они называются *хордами* хордовой диаграммы.

Ребра хордовой диаграммы, не являющиеся хордами, назовем *дугами*.

Замечание 4.3. *В дальнейшем, если не оговорено противное, под хордовой диаграммой мы будем понимать хордовую диаграмму на одной окружности.*

Переход от атомов к хордовым диаграммам.

Особенный интерес представляют атомы, имеющие ровно одну черную клетку. В этом случае они могут быть закодированы (оснащенной, т.е. имеющей знаки на хордах) хордовой диаграммой следующим образом. Рассмотрим единственную черную клетку C . Рассмотрим окружность K , лежащую внутри этой клетки и проходящую вблизи края клетки. К каждой вершине атома эта окружность подходит с двух сторон. Выберем вблизи каждой вершины пару точек на окружности и соединим их хордой. Поставим на хордах метки $+1$ или -1 следующим образом. Ориентируем окружность некоторым способом. Если окрестности двух точек, соединенных хордой, ориентированы согласованно (т.е. либо обе по часовой стрелке, либо обе против часовой стрелки при некоторой локальной ориентации окрестности хорды), то сообщим этой хорде знак плюс, в противном случае сопоставим ей знак минус.

Пример согласованной и несогласованной ориентаций показан на рис. 4.6.а) и 4.6.б) соответственно.

Если рассмотреть окружность с хордами как абстрактный граф, мы получим меченую хордовую диаграмму. В случае ориентированного атома все метки хордовой диаграммы будут положительными при согласованных ориентациях окружностей.

Определение 4.3. Пусть дана хордовая диаграмма D с окружностью C , и пусть даны две ее хорды a и b ; обозначим концы хорды a через a_1, a_2 ,

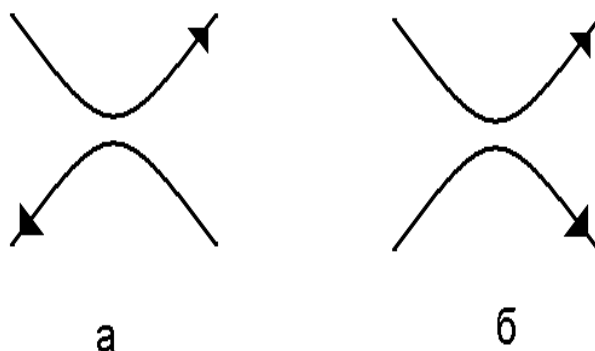


Рис. 4.6. Согласованная и несогласованная ориентации

а концы хорды b — через b_1, b_2 .

Скажем, что хорды a и b *зацеплены*, если точки b_1 и b_2 лежат в разных связных компонентах множества $C \setminus (\{a_1\} \cup \{a_2\})$.

Замечание 4.4. Обычно в теории узлов хордовые диаграммы изображаются в виде евклидовой окружности, некоторые точки которой соединены между собой прямолинейными хордами. В этом смысле зацепленными являются те пары хорд, изображения которых на плоскости пересекаются.

Имеет место

Теорема 4.3. Для каждого класса эквивалентности виртуальных зацеплений существует виртуальная диаграмма L , которой соответствует атом с ровно одной черной клеткой. При этом в случае классического зацепления такая диаграмма может быть выбрана классической.

Доказательство. Рассмотрим произвольную диаграмму зацепления L и соответствующий ей высотный атом V_1 . Предположим, что атом V_1 имеет k послекритических окружностей. Если $k = 1$, то доказывать нечего.

Если $k > 1$, то существует вершина A атома V_1 , в малой окрестности которой проходят две различные послекритические окружности.

Применим к этой диаграмме движение Ω_2 , как показано на рис. 4.7.

Легко видеть, что после такого преобразования две окружности, показанные на рис. 4.7, переходят в одну окружность: послекритические окруж-

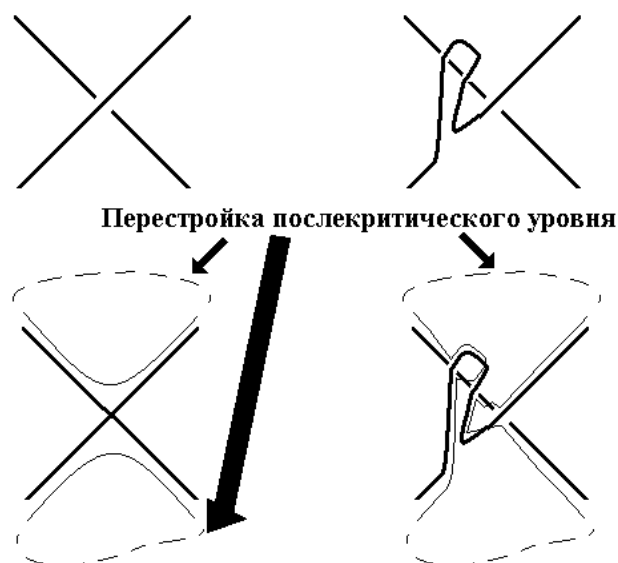


Рис. 4.7. Диаграмма зацепления (сверху) и послекритические окружности (снизу)

ности изображены на рис. 4.7 тонкими линиями, а их поведение вне области перестройки — пунктирной линией. Таким образом, мы уменьшаем число послекритических окружностей на единицу, не изменяя при этом изотопического класса зацепления. Повторяя эту операцию многократно, мы получим диаграмму ровно с одной послекритической окружностью. \square

Виртуальный узел с точностью до объезда и виртуализаций определяется по (оснащенной) хордовой диаграмме (на нескольких окружностях, см. опр. на стр. 159). При этом в случае неоснащенной хордовой диаграммы мы получим ориентированный атом и соответствующий ему виртуальный узел (с точностью до виртуализации и объезда).

В дальнейшем (см. стр. 259) мы приведем уточнение построения виртуального узла по неоснащенной хордовой диаграмме D : посредством разбиения ее хорд на два семейства. В этом случае виртуальная диаграмма будет определена корректно (с точностью до объезда), следовательно, корректно будет определено само виртуальное зацепление.

Как было показано ранее (см. стр. 156), по диаграмме виртуального зацепления можно восстановить соответствующий атом (напомним, что операция построения атома по диаграмме виртуального зацепления однознач-

на), причем если диаграмма является классической, то атом будет высотным. Действительно, в случае классической диаграммы мы по определению имеем остов атома, вложенный в плоскость с сохранением A -структуры.

Следствие 4.2. *Если атом V , соответствующий виртуальной диаграмме L , является высотным (т.е. имеет высотность нуль), то диаграмма L получается из классической диаграммы виртуализацией некоторых перекрестков и применением движения объезда.*

Действительно, некоторая диаграмма L' , соответствующая высотному атому V , является классической по построению. Диаграммы L и L' получаются друг из друга применением объездов и виртуализаций согласно теореме 4.2.

Определение 4.4. d -Диаграммой назовем хордовую диаграмму, хорды которой допускают разбиение на два семейства таким образом, чтобы хорды из одного семейства не были зацеплены. Примеры хордовых диаграмм, не являющихся d -диаграммами, показаны на рис. 4.8.

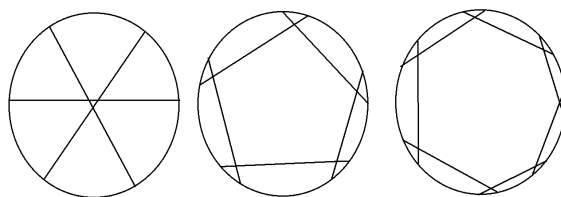


Рис. 4.8. Хордовые диаграммы, не являющиеся d -диаграммами

Если атом является высотным и имеет ровно одну черную клетку, то получающаяся хордовая диаграмма будет d -диаграммой, при этом все метки будут положительными. По теореме Жордана окружность делит плоскость на две части. Далее, все хорды соответствуют примыканиям вложенной в плоскость окружности к самой себе; все такие примыкания делятся на внутренние и внешние (относительно окружности), это соответствует двум семействам хорд d -диаграммы; при этом все примыкания являются согласованными, из чего следует положительность всех меток.

По (оснащенной) хордовой диаграмме атом восстанавливается однозначно. Действительно, хордовая диаграмма задает остов атома с A -структурой

и правило приклейки единственной черной клетки, т.е. B -структуру.

В случае, если у атома количество черных клеток больше единицы, то нужно расположить по одной окружности внутри каждой клетки, ориентировать эти окружности произвольным образом и сообщить хордам метки в зависимости от согласованности ориентаций частей окружностей, примыкающих к данной вершине.

Переход от атомов к трехвалентным графам с метками был предложен А.А.Ошемковым [Ош]. Построенный граф носит название f -графа.

Абстрактный f -граф представляет собой оснащенную хордовую диаграмму (т.е. диаграмму со знаками) на нескольких окружностях. f -Граф определен с точностью до следующей операции: замена ориентации некоторой окружности и замена меток на каждой хорде, соединяющих вершину на данной окружности с вершиной на некоторой другой окружности. В случае, если поверхность ориентируема, ориентации окружностей можно выбрать согласованным образом, так чтобы все метки были положительными.

По f -графу (точнее, по его классу эквивалентности) атом восстанавливается однозначно, см. [Ош].

В дальнейшем, если ориентация окружностей и метки на ребрах не указаны, будем считать окружности всех f -графов ориентированными согласованно, а метки — положительными. При изображении на плоскости ориентация окружностей хордовых диаграмм и f -графов указываться не будет. Если метки на диаграмме отсутствуют, то они предполагаются положительными.

При изображении одной окружности на плоскости мы не будем указывать ее ориентации, предполагая, что она ориентирована против часовой стрелки.

Для ориентируемых диаграмм L, L' виртуальных зацеплений имеют место два (формально разных) отношения эквивалентности: обычная виртуальная эквивалентность, а также *ориентируемая эквивалентность*, в которой требуется наличие цепочки диаграмм $L = L_0, \dots, L_n = L'$, которым соответствуют ориентируемые атомы, при этом две соседние диаграммы отличаются одним из обобщенных движений Рейдемейстера.

Гипотеза 4.2 (Гипотеза ориентируемости, [FKM]). *Эти два отноше-*

ния эквивалентности совпадают.

Эта гипотеза верна. Ее доказательство вытекает из теоремы Куперберга 2.1.

4.1.2. Модель затягивающего дерева для скобки Кауфмана

Приведем быстрый способ вычисления скобки Кауфмана, предложенный М.Тистлтуэйтом [Th1] для классических узлов. На случай виртуальных узлов он обобщается непосредственно. В дальнейшем этот способ будет особенно полезен для работы с гомологиями Хованова.

Пусть дана диаграмма L виртуального зацепления.

Соотношение $\langle \text{X} \rangle = a \langle \text{Y} \rangle + a^{-1} \langle \text{Z} \rangle$ позволяет разводить классические перекрестки шаг за шагом. Если, выбрав некоторый порядок разведения перекрестков, мы разведем диаграмму до конца, то мы получим набор окружностей, не имеющих классических перекрестков (т.е. набор погруженных окружностей, имеющих точки пересечения и самопересечения в виртуальных перекрестках).

Иными словами, таким образом мы сведем скобку Кауфмана исходного зацепления к линейной комбинации значений скобки Кауфмана на простейших диаграммах тривиальных зацеплений, которые имеют вид $(-a^2 - a^{-2})^{\gamma-1}$, где γ равно количеству окружностей в соответствующем состоянии. Таким образом мы получим формулу (4.1), где сумма берется по всем состояниям.

Идея Тистлтуэйта состоит в том, что можно разводить зацепление не до диаграммы без классических перекрестков, а до некоторых промежуточных диаграмм, у которых все еще есть классические перекрестки, но которые представляют собой тривиальные узлы.

Эта конструкция дословно проходит и для случая виртуальных узлов: мы точно так же разводим классические перекрестки и в итоге получаем набор диаграмм тривиального узла с некоторым набором классических и виртуальных перекрестков.

Опишем эту конструкцию более подробно. Пусть Q — куб состояний диаграммы L , т.е. множество состояний, записанное в виде дискретного

куба $\{0, 1\}^n$, где каждый нуль или единица отвечает A - или B -разведению соответствующего перекрестка.

Назовем *подкубом* исходного куба набор состояний, получаемых фиксацией значений некоторых координат — единица или нуль. Пусть Q_1, \dots, Q_k — подкубы куба Q , не имеющие общих вершин такие, что множество вершин кубов Q_i исчерпывает множество вершин куба Q , см. рис. 4.9.

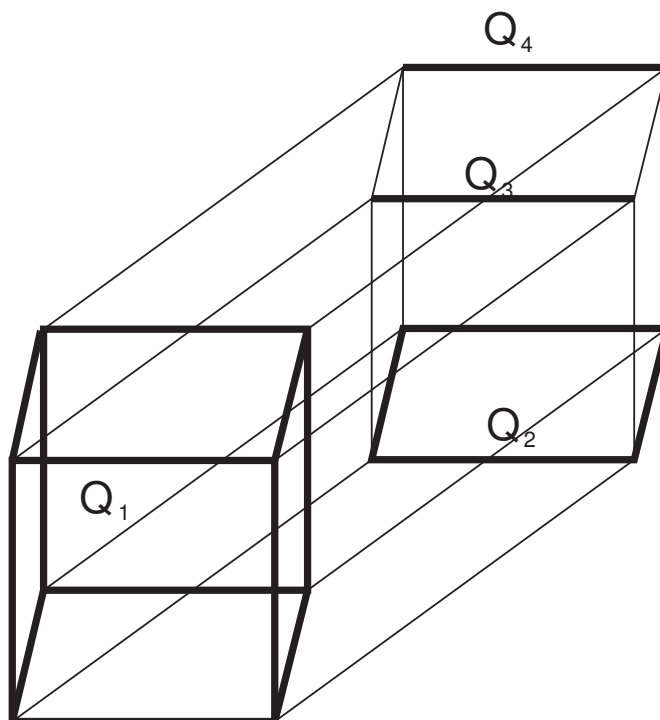


Рис. 4.9. Разбиение четырехмерного куба на подкубы

Каждый подкуб получается из Q заданием значений для некоторого набора координат, т. е. выбор разведения во всех вершинах этого набора. Каждый подкуб Q_i задает зацепление L_{Q_i} , получающееся из исходного зацепления разведением тех перекрестков диаграммы, которым соответствуют координаты, постоянные на всех вершинах подкуба Q_i . В дальнейшем мы будем писать $\langle Q_i \rangle$, имея в виду $\langle L_{Q_i} \rangle$.

При этом каждое разведение диаграммы L лежит в некотором из кубов Q_i . Тогда по определению скобки Кауфмана мы имеем $\langle L \rangle = \langle Q \rangle = \sum a^{f(i)} \langle Q_i \rangle$, где $f(i)$ означает сумму знаков тех перекрестков, разведения

вдоль которых соответствуют i -му кубу.

Рассмотрим куб Q и обозначим через \mathcal{K}_1 множество тех его вершин — состояний, в которых количество окружностей равно единице.

Перенумеруем теперь классические перекрестки диаграммы L числами от 1 до n . Обычный процесс разведения состоит в том, что на i -м шаге мы разводим классический перекресток с номером i двумя возможными способами. В итоге мы приходим ко всем 2^n состояниям.

Вместо этого на некоторых шагах мы будем не разводить классические перекрестки, а оставлять их неизменными. Таким образом, на i -м шаге каждая диаграмма либо перейдет в две диаграммы, получаемые из нее двумя возможными разведениями в i -м перекрестке на две диаграммы, либо перейдет на следующий уровень с неразведенным i -м перекрестком. Более точно, на k -м шаге мы получим набор диаграмм, у каждой из которых разведено некоторое количество перекрестков из числа $\{1, \dots, k\}$.

На каждом шаге каждой такой диаграмме соответствует некоторый подкуб, при этом объединение подкубов на каждом уровне составляет весь исходный куб состояний.

Отметим, что дальнейшие формулы и алгоритм действий **зависят** от нумерации перекрестков, но в конце мы всегда получим формулу для вычисления скобки Кауфмана исходного зацепления, т.е. конечный результат всегда будет одним и тем же.

Определение 4.5. Назовем *точкой распада* связной (см. опр. на стр. 50) виртуальной диаграммы такой ее перекресток X , что при удалении соответствующей вершины X' из остова Γ соответствующего атома $V(L)$ этот остов распадется на более чем одну связную компоненту.

Правило для разведения или не разведения перекрестков таково. При этом мы будем разводить те перекрестки, которые не являются точками распада диаграммы, т.е. такие, ни одно из разведений которых не приводит к распадению остова соответствующего атома на две связные компоненты.

Таким образом, в конце мы получим некоторый набор “промежуточных разведений” (диаграмм), который мы обозначим через D_L . Каждое из таких разведений задает некоторую виртуальную диаграмму, при этом со-

ответствующие этим виртуальным диаграммам подкубы исчерпывают весь куб. Каждому промежуточному разведению $S \in D_L$ соответствует диаграмма D_S , которая задает зацепление L_S . Следуя [Th1], мы утверждаем, что:

1. Каждое зацепление L_S представляет собой тривиальный узел.
2. Элементы множества D_L находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества \mathcal{K}_1 .

Действительно, каждая из диаграмм множества L_S обладает тем свойством, что в каждом классическом перекрестке одно из разведений этой диаграммы приводит к распадению. Из этого легко следует, что каждая такая диаграмма тривиализуется посредством только первых классических уменьшающих движений Рейдемейстера (а также движений объезда в виртуальном случае).

Если мы будем разводить диаграмму L_S далее, то “разбивающее” разведение в каком-либо из перекрестков приведет к распадению диаграммы. Следовательно, из всех состояний диаграммы L_S только одно будет соответствовать ровно одной окружности. А именно, это будет состояние, получающееся разведением всех перекрестков “нераспадающимся” способом. Легко видеть, что в этом случае мы действительно получим ровно одну окружность.

Отметим, что конструкция Тистлтуэйта работает не только в случае, когда мы разбиваем куб состояний на подкубы, соответствующие тривиальным диаграммам. Какое бы разбиение куба на подкубы мы ни взяли, мы получим аналогичное разложение для скобки Кауфмана.

Так как все состояния диаграммы L получаются дальнейшим разведением диаграмм L_S , мы получаем искомое соответствие.

Для состояния s из \mathcal{K}_1 обозначим через D_s диаграмму из множества D_L , дальнейшее разведение которой приводит к состоянию s .

Таким образом, при вычислении скобки Кауфмана исходного зацепления L мы можем провести суммирование по всем состояниям из \mathcal{K}_1 , подразумевая при этом соответствующие диаграммы из множества D_L . Как диаграммы в состояниях \mathcal{K}_1 , так и диаграммы из D_S задают тривиаль-

ные узлы (именно узлы, т.е. зацепления из одной компоненты). При этом у диаграммы D_s , соответствующей состоянию $s \in \mathcal{K}_1$, есть некоторое (не обязательно равное нулю) число закрученности $w(D_s)$, что приводит нас к дополнительному множителю $(-a)^{3w(D_s)}$. Кроме того, при переходе от диаграммы L к диаграмме D_s мы разводим некоторое количество перекрестков положительно, а некоторое — отрицательно. Обозначим соответствующую разницу через $r(s)$.

В итоге мы получаем формулу для вычисления скобки Кауфмана:

$$\langle L \rangle = \sum_{s \in \mathcal{K}_1} (-a)^{3w(D_s)} a^{r(s)}. \quad (4.3)$$

Пример вычисления скобки Кауфмана методом Тистлтуэйта для трилистника изображен на рис. 4.10.

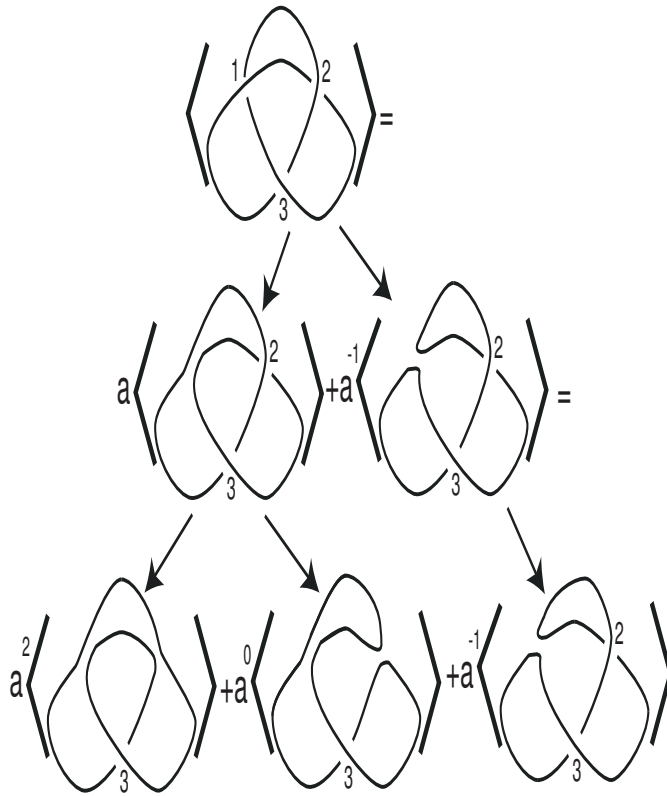


Рис. 4.10. Вычисление скобки Кауфмана методом Тистлтуэйта

Из этого рисунка мы получаем:

$\langle L \rangle = (-a)^3 a^2 + (-a)^{-3} + (-a)^{-6} a^{-1} = -a^5 - a^{-3} + a^{-7}$ — значение скобки Кауфмана на правом трилистнике.

4.2. Полином Ξ .

Вопросы минимальности диаграмм классических и виртуальных зацеплений

Определение 4.6. *Редуцированной* называется простая связная диаграмма виртуального зацепления, не имеющая точек распадаения.

В настоящем разделе все диаграммы зацеплений предполагаются связными и редуцированными, если не оговорено противное.

Назовем *длиной* полинома Лорана P одной переменной разницу между показателями старшей и младшей степеней мономов, входящих в него с ненулевыми коэффициентами. Обозначение: $\text{span}P$.

Теорема 4.4. *Пусть L — редуцированная диаграмма виртуального зацепления с n классическими перекрестками. Тогда $\text{span}\langle L \rangle \leq 4n + 2(\chi - 2)$, где χ — эйлерова характеристика соответствующего атома.*

Доказательство. Нам нужно оценить разность старшей и младшей степеней мономов, входящих в разложение скобки Кауфмана.

Рассмотрим A - и B -состояния диаграммы L : в первом из них все перекрестки разведены положительным способом, а во втором — отрицательным. Обозначим количества окружностей в этих состояниях через γ_{\max} и γ_{\min} соответственно. Легко видеть, что никакое состояние не может содержать монома, имеющего степень выше, чем старшая степень монома в A -состоянии ($\alpha = n, \beta = 0$), и никакое состояние не может содержать монома степени меньшей, чем младшая степень монома в B -состоянии (противоположном состоянию A во всех перекрестках).

В максимальном состоянии рассмотрим старший моном степени $n + (\gamma_{\max} - 1)$, а в минимальном — младший моном степени $-n - (\gamma_{\min} - 1)$.

Очевидно, что длина скобки Кауфмана $\langle \bar{L} \rangle$ не превосходит $2n + 2(\gamma_{\max} + \gamma_{\min} - 2)$.

Учитывая, что $\chi = n - 2n + (\gamma_{\max} + \gamma_{\min})$, получаем требуемое. \square

Назовем виртуальную диаграмму L с n перекрестками *1-полной*, если $\text{span}\langle L \rangle = 4n + 2(\chi - 2)$.

Определение 4.7. Назовем *минимальной* диаграмму виртуального зацепления с n перекрестками такую, что любая диаграмма данного зацепления имеет не меньше перекрестков, чем n .

Минимальности диаграмм виртуальных зацеплений посвящен конец главы 5. Отметим, что явные примеры минимальности диаграмм длинных виртуальных узлов, приведенные в главе 5, опираются только на результаты главы 4.

Замечание 4.5. Отметим, что на множестве классических зацеплений есть два формально различных определения минимальных диаграмм. Одно из них означает минимальность в классической категории, второе — минимальность в виртуальной категории. Если классическая диаграмма является минимальной в виртуальной категории, то она по определению является минимальной и в классической категории. Верно ли обратное, до сих пор не известно. Этот вопрос составляет одну из проблем из списка [FKM].

В дальнейшем, говоря о минимальности *диаграммы классического узла* мы будем точно указывать — в какой категории рассматривается минимальность.

Из теоремы 4.4 можно вывести ряд следствий, относящихся к оценке числа классических перекрестков того или иного виртуального зацепления.

Пусть виртуальная диаграмма K имеет диаграмму с n классическими перекрестками, и пусть также соответствующий атом имеет эйлерову характеристику χ , а $\text{span}\langle K \rangle = 4n + 2(\chi - 2)$.

Тогда, если существует диаграмма K' с меньшим количеством классических перекрестков $n' < n$, то соответствующий диаграмме K' атом должен иметь бóльшую эйлерову характеристику, чем атом, соответствующий диаграмме K . Из этого следует минимальность многих диаграмм, имеющих неотрицательную эйлерову характеристику (например, лежащих на сфере, торе, бутылке Клейна, проективной плоскости). Частным случаем этого является знаменитая теорема Кауфмана-Мурасуги о минимальности

альтернированных диаграмм классических зацеплений.

Эта теорема была доказана независимо Кауфманом, Мурасуги [Mur1] и Тистлтуэйтом [Th1] в 1987 году.

Теорема 4.5 (Теорема Кауфмана–Мурасуги). *Длина полинома Джонса–Кауфмана для классических зацеплений со связной тенью и n перекрестками меньше или равна $4n$. Равенство достигается только для альтернированных диаграмм без точек распада или для связных сумм таких диаграмм.*

Теорема Кауфмана–Мурасуги была доказана для классических зацеплений. В настоящей диссертации мы приведем принадлежащее автору доказательство этой теоремы для случая виртуальных зацеплений (в этом случае помимо альтернированных зацеплений рассматривается также класс квазиальтернированных зацеплений).

Однако иногда длина скобки Кауфмана по тем или иным причинам оказывается меньше, чем $4n + 2(\chi - 2)$ (обращается в нуль старший или младший коэффициент). В этом случае можно прибегнуть к более сильным инвариантам: полиному Ξ или гомологиям Хованова, которые будут определены далее.

С другой стороны, старший коэффициент скобки Кауфмана имеет самостоятельный интерес: об этом пойдет речь в главе 8, посвященной графам и инвариантам Васильева узлов и плоских кривых.

Приведем пример “простой” теоремы минимальности.

Теорема 4.6 ([Ma1]). *Пусть L — виртуальная диаграмма с n классическими перекрестками, задающая виртуальное зацепление, не имеющее несвязных диаграмм. Пусть выполнено одно из двух условий:*

a) $\text{span}\langle L \rangle = 4n - 2;$

b) $\text{span}\langle L \rangle \geq 4n - 4$, при этом в $\langle L \rangle$ входят мономы, имеющие степени, не сравнимые по модулю четыре. Тогда диаграмма L является минимальной (в классе связных диаграмм).

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует диаграмма L' , количество перекрестков которой равно $m \leq (n - 1)$.

В случае а) рассмотрим атом, соответствующий диаграмме L' . Так как диаграмма L' является связной, соответствующий ей атом является связным и имеет эйлерову характеристику не превышающую двух. Из теоремы 4.4 получаем, что $\text{span}\langle L \rangle = \text{span}\langle L' \rangle \leq 4(n - 1)$. Противоречие.

Во случае б) атом, соответствующий диаграмме L' , является неориентируемым, так как $\langle L' \rangle = \langle L \rangle$ имеет мономы, степени которых не сравнимы по модулю четыре. Следовательно, эйлерова характеристика χ этого атома не превышает единицы (в силу связности диаграммы). Значит, согласно теореме 4.4, имеет место $\text{span}\langle L \rangle = \text{span}\langle L' \rangle \leq 4(n - 1) - 2$. Противоречие. \square

Назовем *квазиальтернированной* диаграмму виртуального зацепления, получающуюся из альтернированной диаграммы классического зацепления виртуализацией некоторых перекрестков и применением движения объезда, см. рис. 4.11.

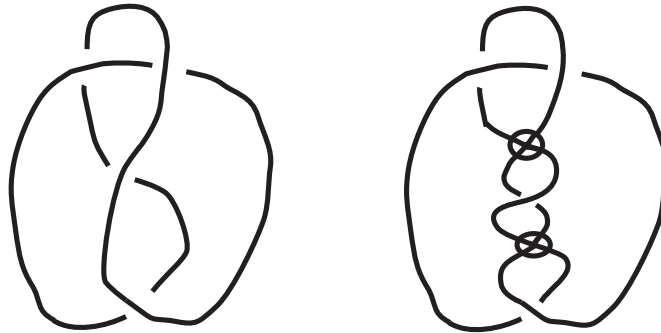


Рис. 4.11. Альтернированная классическая диаграмма (восьмерка) и квазиальтернированная диаграмма

Из определения сферического атома и теоремы 4.2 вытекает

Предложение 4.3. *Атом, соответствующий связной диаграмме L виртуального зацепления, является сферическим тогда и только тогда, когда диаграмма L является квазиальтернированной.*

В терминах атомов определение связной диаграммы (см. стр. 50) переформулируется так:

Определение 4.8. Виртуальная диаграмма называется *связной*, если остов соответствующего ей атома связан.

Чтобы оценка теоремы 4.4 была точна, достаточно, чтобы в разложении Кауфмана коэффициент при старшей степени $n + (\gamma_{max} - 1)$ и коэффициент при младшей степени $(-n - (\gamma_{min-1}))$ были оба не равны нулю. Это условие удобным образом формулируется в терминах атомов. Более того, из несокращаемости в старшем и младшем членах можно получить также несокращаемость старшего и младшего коэффициентов для *кабелей* — см. определение далее.

Виртуальная диаграмма L является *адекватной* (ср. [Th1]), если у соответствующего атома $V(L)$ каждая вершина инцидентна четырем различным клеткам. Иными словами, никакая клетка не подходит сама к себе ни в какой вершине.

Адекватность является достаточным (но не необходимым) условием для того, чтобы старший моном в A -состоянии скобки Кауфмана не сокращался с другими мономами, а также младший моном в B -состоянии не сокращался с другими мономами. Это следует из того, что в разложении (4.1) ни одно из состояний, отличных от A -состояния, не дает мономов, имеющих степень, равную старшей. Аналогично ни одно из состояний, отличных от B -состояния, не дает мономов, имеющих степень, равную младшей.

Это свойство является одним из ключевых при определении минимальности той или иной диаграммы.

Фиксируем один из двух цветов — белый или черный. *Полуадекватной* (белой или черной) называется диаграмма, для которой в каждой вершине две примыкающие белые (соотв., черные) клетки различны. Адекватная диаграмма является одновременно белой полуадекватной и черной полуадекватной.

Важное место в теории классических и виртуальных узлов, а также в теории кодирования трехмерных многообразий занимает понятие *оснащенного зацепления*.

Под *оснащенным зацеплением* (ср. стр. 10) мы понимаем класс эквивалентности виртуальных диаграмм по всем обобщенным движениям Рейдемейстера, где вместо первого классического движения Рейдемейстера Ω_1 введено движение Ω_1^2 , изображенное на рис. 4.12.

Будем называть преобразования $\Omega_1^1, \Omega_2, \Omega_3$ и преобразование объезда (обоб-

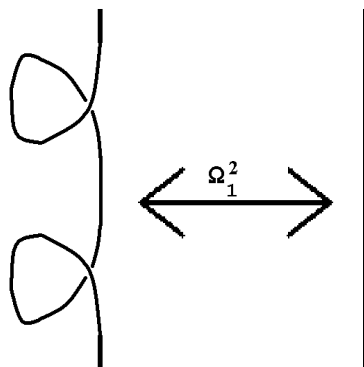


Рис. 4.12. Двойная петля

щенными) *обобщенными оснащенными движениями Рейдемейстера.*

Оснащенные классические диаграммы имеют следующий геометрический смысл: каждой компоненте зацепления, заданного такой диаграммой, можно сопоставить число — индекс самозацепления. Это число будет инвариантным относительно всех оснащенных движений Рейдемейстера.

Для каждой виртуальной диаграммы L с m классическими и k виртуальными перекрестками можно определить ее кабели: удвоенную диаграмму $D_2(L)$, утроенную диаграмму $D_3(L)$ и так далее. Это делается следующим образом. Рассмотрим диаграмму L и параллельно ей нарисуем $(n-1)$ “точно такую же диаграмму”. Можно считать, например, что каждая точка на ветви диаграммы сдвинулась на маленькие отрезки длин $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (n-1)\varepsilon$ вдоль нормали. У полученной диаграммы $D_n(L)$ будет n^2m классических и n^2k виртуальных перекрестков: вместо каждого перекрестка мы получим n^2 новых; если в классическом перекрестке диаграммы L некоторая ветвь a образовывала переход при пересечении ветви b , то в диаграмме $D_n(L)$ каждая из семейства n параллельных ветвей, соответствующих a , будет образовывать переход при пересечении каждой из n параллельных ветвей, соответствующих b ; пример удвоения для стандартной диаграммы классического трилистника показан на рис. 4.13.

Геометрический смысл запрещения первого движения Рейдемейстера состоит в следующем. Рассмотрим классическую диаграмму узла L и удвоенную диаграмму $D_2(L)$. Последнюю можно представить себе как способ

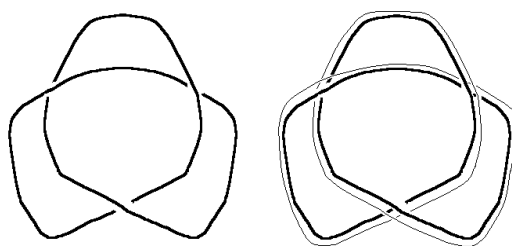


Рис. 4.13. Удвоение трилистника: параллельная копия изображена тонкой линией

задания локально плоской ленты в трехмерном пространстве, краями которой являются два “параллельных узла” — L и L' . Лента в трехмерном пространстве однозначно определяет узел (как одну из компонент края) и также число закрученности между компонентами края.

Таким образом, первое движение Рейдемейстера Ω_1 не меняет изотопического класса узла, но меняет изотопический класс ленты, так как изменяет на единицу коэффициент зацепления компонент края этой ленты.

Аналогичным образом, в случае виртуальных узлов замена Ω_1 на Ω_1^2 приводит к оснащенным виртуальным узлам, задаваемым лентами в стабилизированных трехмерных многообразиях вида $S_g \times I$.

Применение к диаграмме L движения объезда задает движение объезда для диаграммы $D_n(L)$, какова бы ни была исходная диаграмма L . Если применить к L второе или третье классическое движение Рейдемейстера или удвоенную версию первого классического движения Ω_1^2 , то диаграмма $D_n(L)$ также перейдет в эквивалентную ей диаграмму. Следовательно, для произвольного натурального n операция взятия n -кабеля $L \mapsto D_n(L)$ является корректно определенной операцией для оснащенных виртуальных зацеплений.

Как уже было отмечено, эта операция не является корректно определенной для обычных виртуальных зацеплений: при применении преобразования Ω_1 к диаграмме L две “параллельные” компоненты зацепления $D_2(L)$ изменят коэффициент зацепления.

Лемма 4.1. *Пусть виртуальная диаграмма L с t классическими перекрестками адекватна. Тогда для каждого натурального n имеет место равенство*

$$\text{span}\langle D_n(L) \rangle = 4n^2m + 2(\chi_n - 2), \quad (4.4)$$

где χ_n — эйлерова характеристика атома, соответствующего диаграмме D_n .

Доказательство. Каждый перекресток X диаграммы $D_n(L)$ происходит из некоторого перекрестка X' диаграммы L : последнему соответствуют n^2 перекрестков диаграммы $D_n(L)$.

Покажем, что для любого n диаграмма $D_n(L)$ адекватна. Действительно, если бы существовал перекресток X диаграммы $D_n(L)$, к которому, скажем, некоторая белая окружность подходила с двух сторон, то к перекрестку X' также подходила бы с двух сторон одна и та же белая окружность. Таким образом была бы неадекватной и диаграмма L . Далее описываемое в лемме равенство следует из подсчета разности степени старшего и младшего мономов, входящих в скобку Кауфмана $\langle L \rangle$ адекватной диаграммы L . \square

Из леммы 4.1 вытекает следующая

Теорема 4.7. Пусть (нераспадающаяся) диаграмма L оснащенного виртуального \mathbf{L} зацепления адекватна. Тогда у оснащенного зацепления \mathbf{L} нет (нераспадающихся) диаграмм с числом классических перекрестков меньшим, чем у диаграммы L .

В случае классических узлов эта теорема была известна М. Тистлтуэйту [Th2]; это утверждение вытекает также из теории гомологий Хованова. Мы приведем элементарное доказательство этой теоремы. Техника доказательства будет использована в дальнейшем.

Доказательство. Рассмотрим диаграммы $D_2(L), D_3(L), \dots$. Им соответствуют оснащенные зацепления — кабели оснащенного зацепления \mathbf{L} — удвоения, утроения и т.д. Мы будем изучать длину $\text{span}\langle D_m(L) \rangle$, которая является инвариантом зацепления L , зависящим от параметра m .

Пусть атом, соответствующий диаграмме L , имеет эйлерову характеристику χ . Это значит, что количество Γ клеток атома равно $\Gamma = \chi + n$. Рассмотрим атом, соответствующий диаграмме $D_m(L)$. Мы имеем m^2n вершин, $2m^2n$ ребер и $m\Gamma$ двумерных клеток (каждой вершине исходного

атома соответствует m^2 вершин для кабеля, количество ребер в два раза больше, чем количество вершин, а количество до- и послекритических окружностей при взятии кабеля увеличивается в m раз, см. рис. 5.21). Таким образом, эйлерова характеристика этого атома равна

$$\chi_m = -m^2n + mn + m\chi. \quad (4.5)$$

Из леммы 4.1 следует, что старшая и младшая степени скобки Кауфмана для диаграмм D_m не сокращаются (все кабели исходной диаграммы являются адекватными диаграммами). Поэтому, согласно теореме 4.4, длина скобки Кауфмана диаграммы D_m равна

$$\text{span}\langle D_m(L) \rangle = 4m^2n + 2(\chi_m - 2) = 2(m^2 + m)n + 2m\chi - 4. \quad (4.6)$$

Предположим, что у оснащенного зацепления \mathbf{L} имеется диаграмма L' , имеющая n' перекрестков, такая что эйлерова характеристика соответствующего атома равна χ' , причем $n' < n$. Тогда согласно теореме 4.4, рассуждая как и раньше, мы получим:

$$\text{span}\langle D_m(L') \rangle \leq 2(m^2 + m)n' + 2m\chi' - 4. \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$(2m + 2)(n' - n) \geq 2(\chi - \chi'). \quad (4.8)$$

Так как $n' - n \leq (-1)$, а m может быть выбрано сколь угодно большим, мы получаем, что эйлерова характеристика χ' больше сколь угодно большого наперед заданного числа. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Замечание 4.6. Отметим, что при доказательстве нам достаточно выполнения свойства адекватности лишь для некоторого множества диаграмм $D_{n_i}(L)$, $i \in \mathbf{N}$. При этом не обязательно, чтобы сама диаграмма L была адекватной.

Теоремы минимальности 4.6 и 4.7 могут быть усилены после введения более мощных инвариантов, обобщающих полином Джонса — полинома Ξ , гомологий Хованова.

Для этого нам достаточно заменить длину скобки Кауфмана на длину (относительно переменной a) полинома Ξ или на величину $2(h - 2)$, где h — высота гомологий Хованова, см. опр. на стр. 214.

4.2.1. Старший и младший коэффициенты скобки Кауфмана

Пусть K — виртуальная диаграмма. Вычислим младший коэффициент разложения скобки Кауфмана $\langle K \rangle$ согласно формуле (4.1). В случае квазиальтернированных (см. стр. 173) диаграмм зацепления (без точек распада) он равен единице по причине того, что у соответствующего атома (лежащего на сфере) послекритическая окружность не может подходить сама к себе; по тем же причинам он равен единице в случае адекватных диаграмм.

Нам важны случаи, когда он не равен нулю (но не обязательно равен единице).

В общем случае виртуальной диаграмме K соответствует атом $V(K)$, который уже не обязательно будет сферическим. Если диаграмма не является адекватной, некоторая послекритическая окружность уже может подходить сама к себе, не образуя при этом точек распада на атоме. Способ подхода окружности самой к себе естественно описывать хордовой диаграммой (которая в классическом случае будет d -диаграммой). Если мы имеем ровно одну послекритическую окружность, то младший коэффициент полинома Джонса-Кауфмана описывается некоторой функцией на таких d -диаграммах, которая, будучи естественным образом продолжена на произвольные хордовые диаграммы, задает символы некоторых инвариантов Васильева.

Описание этой функции приведено в [ВаМо], [Mnch] и [Avd]. Эта функция связана с инвариантами Васильева. Эта тема будет обсуждена в главе 8 настоящей диссертации.

Пусть K — диаграмма зацепления с n классическими перекрестками, V — соответствующий ей высотный атом с n вершинами. Рассмотрим по-

слекритические окружности c_1, c_2, \dots, c_k атома V . Пусть эти окружности соответствуют B -состоянию атома V . Вклад этого состояния младшую степень разложения (4.1) скобки Кауфмана, равен $(-1)^{k-1} a^{-n-2k+2}$. Вычислим коэффициент при этой степени в $\langle K \rangle$.

Замечание 4.7. *Этот коэффициент, вообще говоря, не является инвариантом узла. Дело в том, что, говоря “младший” коэффициент полинома, мы обычно имеем в виду его младший ненулевой коэффициент. Однако может оказаться, что вычисляемый по явной формуле (4.1) “младший коэффициент” для скобки Кауфмана равен нулю, в то время как для некоторой другой диаграммы (например, с меньшим числом перекрестков) аналогичное разложение даст “настоящий”, т.е. ненулевой, младший коэффициент.*

Состояние s' , в котором l перекрестков разведены способом A , задает минимальную возможную степень монома, если и только если в этом состоянии количество окружностей равно $k+l$. Это значит, что при переходе от B -состояния к состоянию s' последовательным изменением разведений в классических перекрестках мы должны на каждом шаге делать преобразования, “разбивающие” одну окружность на две. Соединим в состоянии s' хордами дуги окружностей, проходящие в окрестностях классических перекрестков (вершин атома). Получится хордовая диаграмма на нескольких окружностях.

Рассмотрим перекрестки, в которых состояние s' отличается от B -состояния, и соответствующие этим перекресткам хорды. Ясно, что каждая такая хорда соединяет точки на одной и той же окружности, иначе, изменив разведение в соответствующем перекрестке, мы на первом шаге получили бы $k-1$ окружность, откуда следует, что на l -м шаге мы не можем получить больше, чем $k+l-2$ окружностей.

Рассмотрим одну окружность C в B -состоянии и одну хорду s , соединяющую пару точек на окружности C . Если мы перестроим B -состояние по хорде s , мы получим две окружности. Далее, чтобы после перестройки по хорде полученное состояние давало моном минимальной возможной степени, оба конца каждой последующей хорды d в диаграмме C должны лежать по одну сторону от хорды s , так как иначе, изменив состояние s' по

хордам c и d , мы получим не $k + 2$ окружности, а k окружностей, следовательно, любое изменение по l хордам, среди которых есть c и d , даст не более, чем $k + l - 2$ окружности. Продолжая рассуждать аналогичным образом, мы приходим к следующему. Каждой из окружностей B -состояния соответствует хордовая диаграмма. Допустимым, т.е. приводящим к минимальной степени монома, набором хорд является набор хорд, в котором любые две хорды, соответствующие одной и той же окружности (хордовой диаграмме), не зацеплены (не пересекаются). Имея допустимый набор хорд, состоящий из a_1 хорд на первой окружности, a_2 хорд на второй окружности, и т.д., a_k хорд на k -й окружности, мы получим состояние, которое дает вклад в младший коэффициент $a^{-n-2k+2}$, равный $(-1)^{\sum_i a_i} (-1)^{k-1}$. Вынося $(-1)^{k-1}$ за скобку (в дальнейшем мы не будем учитывать этот коэффициент), мы получим, что младший коэффициент скобки Кауфмана равен сумме $\sum_{l=0}^n (-1)^l N_l$, где N_l — количество допустимых наборов из l хорд. Таким образом, для вычисления младшего коэффициента скобки Кауфмана хорды, соединяющие разные окружности, не играют роли, и задача сводится к рассмотрению набора не связанных друг с другом хордовых диаграмм. Очевидно, что результирующий коэффициент $M_1(D)$ равен произведению коэффициентов по всем хордовым диаграммам, где для каждой хордовой диаграммы D он равен

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (\text{количество наборов } i \text{ непересекающихся хорд}) \quad (4.9)$$

Аналогичным образом считается старший коэффициент скобки Кауфмана.

4.2.2. Полином Ξ

Оказывается, что в формулу (4.1) для скобки Кауфмана можно “добавить геометрию виртуальных узлов”, что приводит (после нормировки, аналогичной (4.2) к более сильному инварианту виртуальных зацеплений. Приводимые в настоящей главе результаты опубликованы в книге [Ma1] и статьях [Ma7, Man3].

Это делается следующим образом. Рассмотрим множество S пар (ориентированная двумерная поверхность — конечный набор замкнутых кривых на ней). Здесь двумерная поверхность подразумевается ориентированной, замкнутой и имеющей конечное число компонент связности (если S несвязна, то ориентированной предполагается каждая из ее компонент связности). Зададим на множестве таких пар из S эквивалентность так же, как описано в главе 1 с некоторыми уточнениями следующим образом.

Будем рассматривать элементы из S с точностью до отношения эквивалентности, порождаемого следующими элементарными эквивалентностями:

1. Сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами поверхностей, переводящими кривые в кривые.
2. Стабилизациями, т.е. добавлениями ручек согласованных с ориентацией поверхности и не пересекающих кривые, а также дестабилизациями — операциями, обратными к стабилизациям.
3. Свободными гомотопиями кривых по поверхности.
4. Добавлениями (удалениями) простых кривых, ограничивающих диск на поверхности и не пересекающихся с другими кривыми.

Обозначим множество классов эквивалентности через \mathcal{S} . Очевидно, что это множество счетно.

Вопрос о том, представляют ли два элемента из S один и тот же класс эквивалентности в \mathcal{S} , легко распознается алгоритмически (см. первую главу).

Аналогично алгоритму, описанному в первой главе, стр. 28, в данном случае алгоритм минимизации сводится к поиску возможности дестабилизировать поверхность (применить к ней эквивалентность, уменьшающую род) либо к уменьшению ее посредством разведения двуугольника или удаления петли, см. рис. 1.21, либо к удалению отдельно стоящей тривиальной окружности, которая не имеет пересечений с другими кривыми. В случае, когда ничего из вышеперечисленного сделать невозможно, диаграмма является минимальной.

Минимальные диаграммы отличаются друг от друга применением третьего (плоского) движения Рейдемейстера, которое не меняет ни поверхности, ни количества перекрестков. Поэтому распознавание двух эквивалентных минимальных диаграмм представляет собой комбинаторную задачу.

Основная идея построения нашего инварианта состоит в следующем. Мы строим функцию на ориентированных виртуальных зацеплениях со значениями в модуле $\mathcal{SZ}[a, a^{-1}]$; значения этой функции представляют собой линейные комбинации элементов из \mathcal{S} с коэффициентами из $\mathbf{Z}[a, a^{-1}]$, при этом коэффициенты строятся так же, как слагаемые в разложении скобки Кауфмана (4.1), а элементы из \mathcal{S} представляют собой “геометрию” виртуальных узлов.

Пусть дана виртуальная диаграмма K . Рассмотрим представление виртуального узла в виде диаграммы на ориентированной двумерной поверхности M , приведенное в главе 1, см. стр. 29.

Более точно, каждое виртуальное зацепление L представимо зацеплением в некоторой утолщенной поверхности $S_g \times I$. При проекции на S_g вдоль I оно задает набор кривых — в количестве, равном количеству компонент зацепления L .

В этом случае все разведения диаграммы можно производить непосредственно на поверхности M . Зафиксируем тень зацепления K на поверхности M . Она представляет собой некоторый набор δ замкнутых кривых. Далее, каждому состоянию s неориентированной диаграммы $|K|$ (которое также можно рассматривать на поверхности M) соответствует некоторый набор $\delta'(s)$ неориентированных замкнутых кривых на M .

Таким образом, мы получаем набор кривых (часть из них — ориентирована, часть — не ориентирована) $p(s) = \delta \sqcup \delta'(s)$, который можно рассматривать как элемент из множества \mathcal{S} и, следовательно, как элемент из множества классов эквивалентности \mathcal{S} . Рассмотрим теперь формальный свободный модуль $\mathcal{M} = \mathcal{SZ}[a, a^{-1}]$ над кольцом полиномов Лорана от переменной a ; образующими этого модуля будут элементы из \mathcal{S} .

Сопоставим теперь диаграмме L элемент $\Xi(L) \in \mathcal{M}$ согласно следующей формуле:

$$\Xi(L) = (-a)^{-3w(s)} \sum_s p(s) a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{(\gamma(s)-1)}. \quad (4.10)$$

Теорема 4.8. *Функция Ξ , определенная формулой (4.10), задает инвариант виртуальных зацеплений.*

Доказательство. Очевидно, что как чисто виртуальные движения Рейдемейстера, так и полувиртуальное движение (т.е. варианты движения объезда), примененные к L , не меняют значения $\Xi(L)$: по построению все члены в сумме (4.10) остаются неизменными.

Доказательства инвариантности функции $\Xi(L)$ при первом и третьем классических движениях Рейдемейстера полностью аналогичны соответствующим доказательствам для классического полинома Джонса-Кауфмана, см., напр., [Ma1]; нужно лишь аккуратно проследить, что сокращающиеся в обычном полиноме Джонса-Кауфмана слагаемые играют роль коэффициентов при одном и том же элементе из \mathcal{S} и, следовательно, сокращаются и в формуле для $\Xi(L)$.

Действительно, если L и L' — две виртуальные диаграммы, полученные одна из другой применением первого или третьего движения Рейдемейстера, то поверхности с краем $M'(L)$ и $M'(L')$, соответствующие диаграммам $|L|$ и $|L'|$, гомеоморфны, при этом поведение системы кривых δ для $M(L)$ и для $M(L')$ отличается только внутри малой области, относящейся к движению Рейдемейстера.

При движении Ω_1 доказательство для случая $\textcircled{\mathcal{R}}$ полностью аналогично доказательству для случая $\textcircled{\mathcal{L}}$ (они соответствуют локальным числам закрученности $+1$ и -1).

Пусть L — виртуальная диаграмма, и пусть L' — виртуальная диаграмма, полученная из L добавлением петли $\textcircled{\mathcal{R}}$. Каждому состоянию s диаграммы $|L|$ естественно соответствуют два состояния диаграммы $|L'|$. Фиксируем одно из них и обозначим его через s' . Пусть $L' = L \sqcup \bigcirc$ — несвязная сумма диаграммы L и малой окружности (тривиального узла). Мы утверждаем, что $p(s) = p(s')$.

Действительно, поверхности, соответствующие диаграммам $|L|$ и $|L'|$, гомеоморфны, при этом соответствующие системы кривых либо совпада-

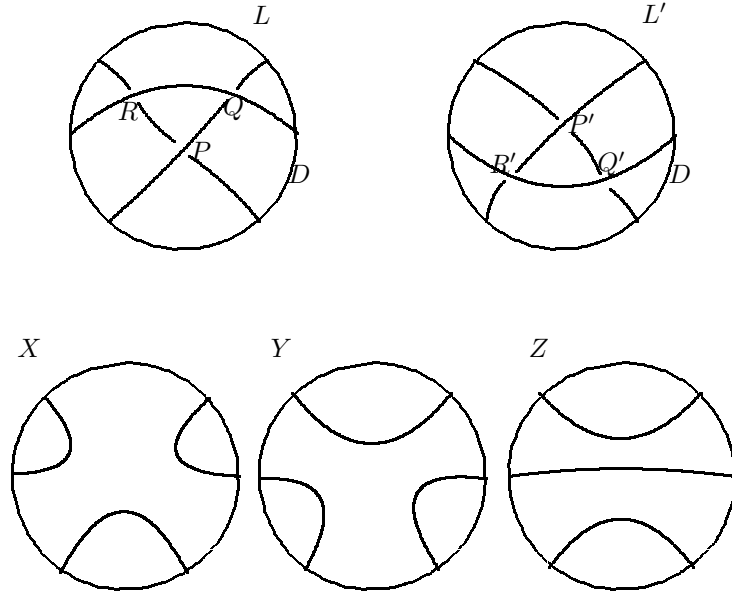


Рис. 4.14. Диаграммы и линии кривых после сглаживания

ют, либо единственная разница между соответствующими системами кривых состоит в добавлении окружности (элементарная эквивалентность номер 3, см. стр. 182). Таким образом, нам нужно сравнивать коэффициенты при одних и тех же элементах из \mathcal{S} . Это делается точно так же, как и в случае обычного полинома Джонса-Кауфмана. А именно, $\langle \textcircled{\circlearrowleft} \rangle = a \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle + a^{-1} \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle = (-a)^3 \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle$, при этом $(-a)^3$ компенсируется соответствующим множителем $-a^{-3}$, происходящим из числа закрученности.

Пусть теперь диаграммы L и L' получаются друг из друга применением третьего классического движения Рейдемейстера. В этом случае соответствующие поверхности M также совпадают. Выберем три перекрестка P, Q, R диаграммы L и три перекрестка P', Q', R' диаграммы L' , к которым относится третье движение Рейдемейстера, см. рис. 4.14.

Диаграммы L, L' отличаются лишь внутри малого диска D на плоскости, а соответствующие им поверхности $M(L)$ и $M(L')$ также отличаются внутри некоторого малого диска D_M в M . Следовательно, можно указать шесть точек на крае ∂D таких, что диаграммы сглаживаний (в M) для L, L' проходили через эти и только эти точки на ∂D .

Рассмотрим три возможности X, Y, Z соединения этих точек, как пока-

зано на рис. 4.14. Можно соединить эти точки и другими способами, но именно упомянутые выше способы будут возникать в разложении (4.10).

Пусть $|L_X|, |L_Y|, |L_Z|$ — три плоские диаграммы неориентированных зацеплений, совпадающие с диаграммой $|L|$ вне диска D и совпадающие с фрагментами X, Y и Z внутри D соответственно. При этом X, Y, Z представляют собой части *окружностей состояний*, соответствующих некоторым состояниям.

Нам понадобятся три элемента из \mathcal{S} , представимые элементами K_X, K_Y и K_Z в \mathcal{S} , см. рис. 4.15. Элемент K_X содержит три линии — части окружностей, соответствующие третьему движению Рейдемейстера (имеющие концами шесть выделенных точек) внутри D_M , а также содержит множество X . Аналогично, система кривых K_Y содержит те же три линии и Y , а K_Z содержит те же три линии и Z . Единственное, что нам нужно знать о поведении K_X, K_Y и K_Z вне диска D_M , — это то, что эти диаграммы совпадают.

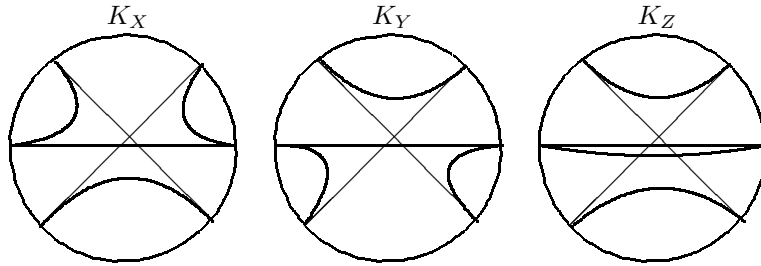


Рис. 4.15. Части диаграмм K_X, K_Y, K_Z

Покажем, что $\Xi(L) = \Xi(L')$. С очевидностью мы имеем $w(L) = w(L')$. Нам нужно сравнить члены в разложении (4.10) для диаграмм $|L|$ и $|L'|$. Каждому состоянию диаграммы L можно естественным образом сопоставить состояние диаграммы L' : мы сопоставляем перекресткам P, Q, R перекрестки P', Q', R' и естественным образом отождествляем все остальные перекрестки диаграмм L и L' . Для каждого состояния диаграммы $|L|$, у которого перекресток P разведен способом A , соответствующее состояние диаграммы $|L'|$ вносит тот же вклад в разложение (4.10), что и состояние для диаграммы $|L|$, так как диаграммы $|L|$ и $|L'|$ после разведения в перекрестке P (соответственно, P') способом A совпадают.

Таким образом, нам достаточно сравнивать члены в разложении (4.10), соответствующие разведению перекрестка P в состоянии B . Будем группировать эти члены (для $|L|$ и для $|L'|$) в четверки; члены в одной четверке различаются только разведением в перекрестках R и S . Фиксируем теперь разведения для диаграмм $|L|$ и $|L'|$ вне диска D одинаковым образом и будем сравнивать соответствующие четверки. Если мы удалим части кривых внутри диска D и заменим их на X, Y или Z , мы получим систему кривых на поверхности M . Обозначим количества кривых в соответствующих трех системах через ν_X, ν_Y и ν_Z соответственно.

Четыре члена, соответствующие диаграмме $|L|$, в сумме дают следующее:

$$\begin{aligned} & aK_X(-a^2 - a^{-2})^{(\nu_X-1)} + a^{-1}(K_Z(-a^2 - a^{-2})^{(\nu_Z-1)} + \\ & + K_X(-a^2 - a^{-2})^{\nu_X}) + a^{-3}K_X(-a^2 - a^{-2})^{(\nu_X-1)} = \\ & = a^{-1}(-a^2 - a^{-2})^{(\nu_Z-1)}K_Z. \end{aligned}$$

Для $|L'|$ мы имеем аналогичную формулу с K_Z и K_Y . Коэффициенты при K_Y сократятся, следовательно, мы получим то же самое выражение:

$$a^{-1}(-a^2 - a^{-2})^{(\nu_Z-1)}K_Z.$$

Проверим теперь инвариантность полинома Ξ при втором классическом движении Рейдемейстера. Пусть L' — диаграмма, получаемая из L применением увеличивающего второго классического движения Рейдемейстера. Мы имеем $w(L) = w(L')$.

Рассмотрим многообразие $M(L)$. Проекция зацепления L разбивает $M(L)$ на связные компоненты. Имеются две принципиально различные возможности. В одном случае движение Рейдемейстера применяется к одной и той же компоненте. Более точно, в этом случае на поверхности $M(L)$ существует связная компонента \mathfrak{K} , такая что две участвующие в движении Рейдемейстера ветви проекции диаграммы L являются частями границы компоненты \mathfrak{K} , при этом при втором движении Рейдемейстера обе эти ветви направляются внутрь \mathfrak{K} .

Тогда $M(L')$ гомеоморфно многообразию $M(L)$, а кривые из множеств $\delta(L)$ и $\delta(L')$ представляют один и тот же гомотопический тип, но при при-

менении движения появляются два новых перекрестка. В этом случае доказательство равенства $\Xi(L) = \Xi(L')$ проходит точно так же, как и в классическом случае (сокращение относится здесь к полиномиальным коэффициентам при элементах из \mathcal{S}). Кроме того, доказательство в этом случае даже проще, чем доказательство инвариантности при Ω_3 : нам нужно рассмотреть лишь четыре слагаемых для $|L'|$, соответствующих одному слагаемому для $|L|$.

В каждом случае три из них совместно сокращаются, а оставшееся слагаемое для $|L'|$ совпадает с соответствующим слагаемым для L , а именно,

$$\langle \textcircled{\times} \rangle = a \langle \textcircled{\smile} \rangle + a^{-1} \langle \textcircled{\frown} \rangle = (a^2 + a^{-2}) \langle \textcircled{\smile} \rangle + 1 \langle \textcircled{\times} \rangle + 1 \langle \textcircled{\frown} \rangle = \langle \textcircled{\smile} \textcircled{\frown} \rangle.$$

Принимая во внимание равенство $w(L) = w(L')$, мы получаем требуемое.

Во втором случае движение Ω_2 относится к двум различным областям на многообразии $M(L)$, тем самым многообразие $M(L')$ получается из $M(L)$ добавлением ручки. На этой ручке мы имеем два новых перекрестка P и Q , см. рис. 4.16.

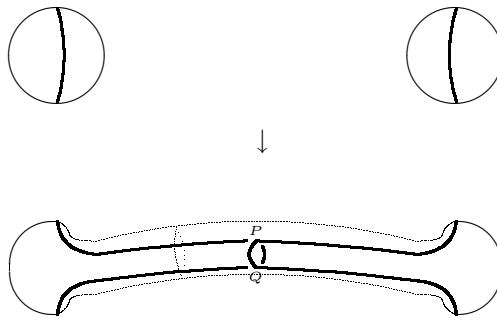


Рис. 4.16. Добавление ручки при применении Ω_2

Рассмотрим все состояния диаграммы $|L'|$. Они могут быть разбиты на четыре типа в зависимости от способа разведения перекрестков P и Q . Таким образом, каждое состояние s диаграммы $|L|$ порождает четыре состояния s_{++} , s_{--} , s_{+-} и s_{-+} диаграммы $|L'|$. Заметим, что $p(s) = p(s_{+-})$ (а

именно, представитель $p(s)$ в S получается из представителя элемента $p(s')$ в S удалением ручки, см. рис. 4.16), а также $p(s_{++}) = p(s_{--}) = p(s_{-+})$.

Кроме того, для каждого s мы имеем следующие равенства:

$$\alpha(s) - \beta(s) = \alpha(s_{+-}) - \beta(s_{+-}), \gamma(s) = \gamma(s_{+-}),$$

$$\gamma(s_{++}) = \gamma(s_{--}) = \gamma(s_{-+}) - 1.$$

Таким образом, все члены разложения (4.10) для L' , соответствующие состояниям s_{--} , s_{++} и s_{-+} , сократятся по причине тождества $a^2 + a^{-2} + (-a^2 - a^{-2}) = 0$. Члены, соответствующие s_{+-} , дадут как раз то же самое, что и (4.10) для диаграммы L . \square

Важно отметить, что этот инвариант является конструктивным, так как элементы множества \mathcal{S} алгоритмически распознаваемы.

4.2.3. Примеры применения полинома Ξ

С одной стороны, полином Ξ построен с использованием инвариантов Васильева виртуальных зацеплений порядка 0.

С другой стороны, он представляет собой обобщение полинома Джонса-Кауфмана. Мы приведем примеры, показывающие, что полином Ξ сильнее, чем инварианты Васильева порядка ноль и полином Джонса-Кауфмана вместе взятые, т.е. приведем примеры зацеплений, не отличимых друг от друга посредством инвариантов Васильева порядка ноль и полинома Джонса-Кауфмана, на которых полином Ξ принимает различные значения.

Кроме того, инвариант Ξ задает *препятствие к дестабилизации*.

Утверждение 4.2. *Если виртуальное зацепление L может быть представлено зацеплением на поверхности рода g , при этом в разложении $\Xi(S)$ встречается с ненулевым коэффициентом элемент $s \in \mathcal{S}$, минимальный представитель которого в \mathcal{S} имеет род g , то зацепление L имеет подлежащий род g .*

Это утверждение следует из определения полинома Ξ .

Рассмотрим пример. Пусть P — элемент из \mathcal{S} , представимый сферой с пустым множеством кривых на ней. Очевидно, что для каждого классиче-

ского зацепления K мы имеем $\Xi(K) = P \cdot X(K)$. Таким образом, для тривиального зацепления из двух компонент L мы имеем $\Xi(L) = P \cdot (-a^2 - a^{-2})$.

Тривиальное зацепление L из двух компонент и зацепление Λ , изображенное на рис. 4.17, имеют один и тот же полином Джонса. Действительно, зацепление Λ получается из L применением виртуализации.

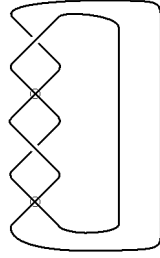


Рис. 4.17. Зацепление с тривиальным полиномом Джонса-Кауфмана

Рассмотрим следующие элементы из \mathcal{S} (на рисунках мы будем изображать представляющие их элементы из S), см. рис. 4.18. Двумерным многообразием M в этих случаях является тор, изображенный в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами.

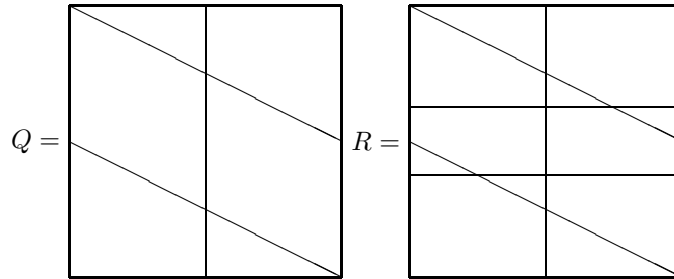


Рис. 4.18. Два элемента из S

Элемент $Q \in \mathcal{S}$ представлен диаграммой, изображенной на рис. 4.18; две дополнительные неориентированные окружности (которые появляются при построении Q из диаграммы S и не изображены на рисунке) могут быть удалены с помощью элементарной эквивалентности номер 4, см. стр. 182. Для упрощения обозначений мы не будем делать различия между элементом из \mathcal{S} и представляющим его минимальным элементом из S .

Покажем, что в \mathcal{S} имеет место $Q \neq P, R \neq P$, а также что $Q \neq R$.

Действительно, $Q \neq P$, так как Q имеет две кривые с ненулевым алгебраическим пересечением ($+2$ или -2 в зависимости от того, как мы ориентируем эти кривые); таким образом, ни одна из этих кривых не может быть удалена, если мы будем применять преобразования эквивалентности для \mathcal{S} . Далее, мы также видим, что $R \neq P$. Кроме того, $R \neq Q$, так как R содержит три негомоторные кривые на торе (в координатах на рис. 4.18 их направляющие векторы имеют вид $(0, 1)$, $(1, 0)$, и $(2, -1)$); каждые две из них имеют ненулевое алгебраическое пересечение, значит, ни одна из них не может быть удалена. Поэтому простейшая диаграмма, представляющая класс R в \mathcal{S} , не может состоять менее, чем из трех кривых.

Далее, для зацепления Λ мы имеем

$$\Xi(\Lambda) = Qa^2 + 2R(-a^2 - a^{-2}) + Qa^{-2} = (2R - Q)(-a^2 - a^{-2}).$$

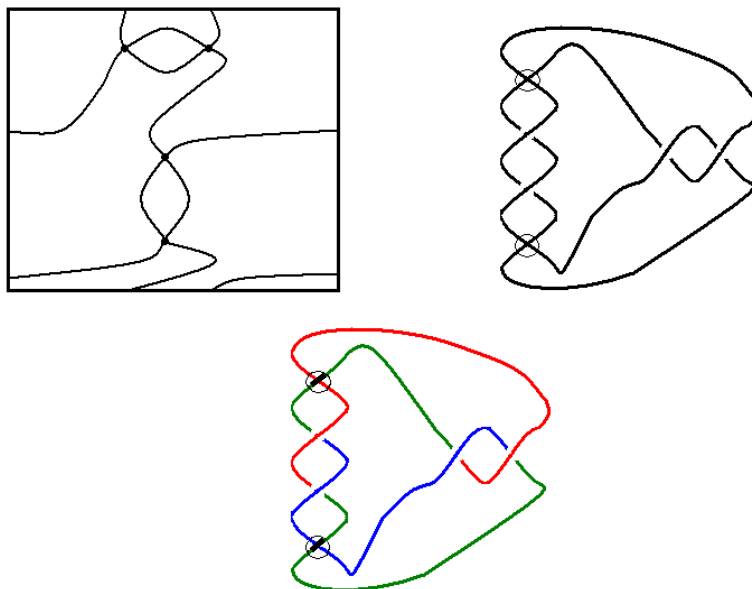
Таким образом, $\Xi(\Lambda) \neq \Xi(L)$.

Обсуждение. Инвариант Ξ имеет особенность. Дело в том, что для каждого состояния s элемент $p(s)$ в формуле (4.10) встречается только один раз, т.е. кривые $\delta'(s)$ рассматриваются отдельно от кривых $\delta'(\tilde{s})$ какого-либо другого состояния. Это может привести к тому, что по отдельности каждый элемент $p(s)$ подвергается упрощающей эквивалентности (дестабилизации) в \mathcal{S} , в то время, как исходный узел не может быть дестабилизирован.

Так, например, узел K , приведенный на рис. 4.19 сверху справа, имеет Ξ -полином, сводящийся к полиному Джонса, т.е. равен $X(K) \cdot P$.

Действительно, достаточно лишь проверить, что для узла K в каждом состоянии s элемент $p(s)$ является тривиальным. Отметим, что элемент $p(s)$ состоит из двух наборов кривых, один из которых — $\delta'(s)$ состоит из непересекающихся друг с другом кривых; следовательно, в \mathcal{S} элемент $\delta'(s)$ является тривиальным. Таким образом, если δ состоит из стягиваемых окружностей, то, каковы бы ни были кривые в состояниях s , Ξ -полином будет иметь “классический” вид $X(K) \cdot P$.

Тривиальность набора δ в данном конкретном случае легко проверяется. Из нее следует то, что $\Xi(K) = X(K) \cdot P$.

Рис. 4.19. Нетривиальный виртуальный узел, имеющий тривиальный полином Ξ

Таким образом, имеется существенная особенность — вырождение полинома Ξ всякий раз, когда набор остовных кривых $\delta'(s)$ стягивается на поверхности.

Поэтому с помощью полинома Ξ мы не можем сказать, эквивалентен ли узел K классическому узлу (например, трилистнику) или нет.

Неклассичность узла K может быть выведена из поверхностной скобки Кауфмана и инварианта, который мы построим далее в настоящей главе; для этого нам понадобится построить инвариант, который учитывал бы *все состояния* $\delta(s)$ для *разных* s *одновременно* и был бы тем самым более устойчив к такого рода вырождениям: кривые из состояния $\delta(s)$ для одного и того же s между собой не пересекаются, но кривые из наборов $\delta(s)$ и $\delta(s')$ при $s' \neq s$ могут пересекаться, что при аккуратном построении инварианта (с привлечением некоторых новых идей) может составить препятствие к дестабилизации.

Поэтому актуальной является задача нахождения путей, как использовать информацию о кривых $\delta'(s)$ всех состояний одновременно. Такая идея принадлежит Луису Кауфману и Хизер Дай [DK1]. Далее в настоящей главе мы приведем принадлежащее автору обобщение, которое сочетает ее с

идеей построения инварианта Ξ и приводит к более сильному инварианту.

4.2.4. Поверхностная скобка и инвариант Ξ

Пусть $g \geq 0$ — целое число. Мы начнем с построения инварианта узлов в утолщенных поверхностях вида $S_g \times I$, где S_g — замкнутая двумерная ориентированная поверхность фиксированного рода g .

Рассмотрим следующий модуль $SurfM$ над кольцом $\mathbf{Z}[a, a^{-1}]$, образующими которого являются гомотопические классы неупорядоченных наборов неориентированных кривых на S_g (пустой набор называется единицей) с единственным соотношением: $\alpha = (-a^2 - a^2)\beta$, если β получается из α удалением гомотопной нулю замкнутой кривой. В настоящем разделе мы построим инвариант узлов в утолщенных поверхностях со значениями в $SurfM$.

Ориентированные зацепления в таких утолщенных поверхностях, так же, как и ориентированные зацепления в \mathbf{R}^3 задаются своими диаграммами на двумерных поверхностях, при этом эквивалентность определяется движениями Рейдемейстера. Диаграммы таких зацеплений представляют собой четырехвалентные графы на поверхности S_g с указанием структуры прохода/перехода в каждом перекрестке и ориентации для каждой уникальной компоненты. Движения Рейдемейстера являются локальными и выглядят так же, как и обычные (классические) движения Рейдемейстера.

Для неориентированных зацеплений можно определить поверхностную скобку Кауфмана [DK1] следующим образом. Пусть $|L|$ — диаграмма неориентированного зацепления на поверхности S_g с n перекрестками (все перекрестки являются классическими; виртуальных перекрестков на поверхности нет). Определим ее состояния таким же образом, как и в классическом случае. В каждом состоянии мы имеем $\alpha(s)$ перекрестков, разведенных положительным способом и $\beta(s) = n - \alpha(s)$ перекрестков, разведенных отрицательным способом. Для каждого состояния s мы имеем некоторый набор замкнутых кривых $C(s)$ (будем обозначать его, как и в случае полинома Ξ , через $\delta'(s)$), соответствующих этому состоянию. Некоторые из этих кривых стягиваются в точку на поверхности S_g , а некоторые — не

стягиваются. Выберем из $C(s)$ все гомотопически тривиальные окружности; заменим каждую из них множителем $(-a^2 - a^{-2})$. Просуммировав по всем состояниям, мы получим элемент модуля $SurfM$, который обозначим через $\tilde{C}(s)$. Положим теперь (для упрощения обозначений мы будем использовать скобки $\langle \cdot \rangle$ для обозначения нового инварианта, отличного от скобки Кауфмана. До конца настоящего раздела обычная скобка Кауфмана встречаться не будет).

$$\langle |L| \rangle = \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} \tilde{C}(s). \quad (4.11)$$

После этого для ориентированного зацепления L можно задать *поверхностный полином Кауфмана* $SurfK$ по той же формуле, что и (4.2):

$$SurfK(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle, \quad (4.12)$$

Полученная функция $SurfK$ является инвариантом зацеплений в утолщенных поверхностях. Ее можно несколько упростить, придав $C(s)$ (и, соответственно, $\tilde{C}(s)$) *гомологический*, а не гомотопический смысл, при этом нужно будет заменять на $(-a^2 - a^{-2})$ все гомологически тривиальные окружности.

Главным недостатком этой функции является то, что ее нельзя трактовать как *инвариант виртуальных зацеплений*, потому что она не инвариантна относительно стабилизации/дестабилизации и гомоморфизмов поверхностей. Имея конкретную поверхность, мы можем задать на ней, некоторые координаты (например, выбрать базис в линейном пространстве одномерных гомологий), и в этих координатах выписывать значения инварианта $SurfK$. Но если мы применим многократно стабилизацию и автоморфизмы поверхностей, то уследить за этими координатами будет затруднительно.

Преимущество этой функции состоит в том, что ее можно рассматривать как *препятствие к дестабилизации*, как и полином Ξ .

Рассмотрим множество минимальных реализаций виртуальных зацеплений (в смысле главы 2). На этом множестве поверхностная скобка, посчитанная на такой минимальной поверхности представляет собой инвариант

виртуального зацепления в силу теоремы 2.1 Куперберга.

Пусть L — виртуальное зацепление, имеющее реализацию на поверхности $S_g \times I$. Пусть $SurfK(L)$ в этой реализации имеет вид $\sum \alpha_i \gamma_i$, где γ_i — наборы нетривиальных кривых (получаемые из $\tilde{C}(s)$), а α_i — ненулевые коэффициенты из $\mathbf{Z}[a, a^{-1}]$. Пусть $\Psi = \cup_i \gamma_i$ — набор всех кривых из всех наборов γ_i .

Основным результатом работы [DK1] является следующая

Теорема 4.9. *Если дестабилизация $L \subset S_g \times I$ возможна, то существует не гомотопная нулю кривая ψ на S_g и представители гомотопических классов всех элементов из Ψ : ψ_1, \dots, ψ_N , такие что ψ не пересекается ни с одной из кривых ψ_i .*

В отличие от полинома Ξ , который также является препятствием к дестабилизации, полином $SurfK$ учитывает одновременно все нетривиальные кривые состояний.

Основываясь на этих идеях (полинома Ξ и поверхностной скобки), построим **инвариант** зацеплений (поверхностная скобка не является таким) следующим образом.

Пусть T — множество наборов вида $(M, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \delta, \delta_1, \dots, \delta_n)$, где M — ориентированная двумерная замкнутая поверхность, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — элементы из кольца полиномов Лорана $\mathbf{Z}[a, a^{-1}]$, δ — (конечный) набор ориентированных замкнутых кривых на M , $\delta_1, \dots, \delta_k$ — наборы замкнутых неориентированных кривых на M , которым поставлены в соответствие полиномы Лорана α_i . Поверхность M подразумевается замкнутой, имеющей конечное число компонент связности.

Определим множество \mathcal{T} классов эквивалентности на множестве T с помощью следующих элементарных эквивалентностей.

1. Перенумеровки наборов δ_i с соответствующей перенумеровкой коэффициентов α_i .
2. Сохраняющего ориентацию гомеоморфизма многообразий, переводящего соответствующие наборы кривых в соответствующие наборы кривых и сохраняющего ориентацию многообразий и кривых на них.

3. Свободной гомотопией кривых на многообразии M .
4. Удаления гомотопически тривиальной кривой из некоторого набора δ_i с умножением соответствующего элемента α_i на $(-a^2 - a^{-2})$.
5. Операции, обратной к предыдущей.
6. Пусть два набора δ_i и δ_j гомотопны. Удаляем эти два набора и оставляем вместо них один, которому сопоставляем коэффициент $\alpha_i + \alpha_j$ и перенумеруем соответствующие индексы (в произвольном порядке). Полагаем получившийся набор эквивалентным исходному.
7. Операция, обратная к предыдущей.
8. Удаления (добавления) набора с нулевым коэффициентом.
9. Добавления к поверхности (удаление из поверхности) M ручек, которые не пересекаются ни с одной кривой ни из одного набора.

Пусть L — диаграмма виртуального зацепления с n классическими перекрестками. Рассмотрим реализацию диаграммы L (посредством заклейки лент и крестов) на двумерной поверхности M . Поверхность M наследует ориентацию из плоскости, и образ L' зацепления L на поверхности представляет собой конечный набор ориентированных кривых. Его мы выберем в качестве δ . Далее, для каждого состояния $s_i, i = 1, \dots, 2^n$, мы имеем набор кривых δ_i . Положим по определению

$$\alpha_i = (-a)^{-3w(s_i)} a^{\alpha(s_i) - \beta(s_i)} \quad (4.13)$$

$$\kappa(L) = (M, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}, \delta, \delta_1, \dots, \delta_{2^n}). \quad (4.14)$$

Как и значения функции Ξ , мы будем называть значения функции κ полиномами.

Полностью аналогично теореме 4.8 доказывается следующая

Теорема 4.10. *Полином κ является инвариантом виртуальных зацеплений.*

В случае движения объезда значение k не меняется по построению. Доказательство инвариантности k при классических движениях Рейдемейстера аналогично доказательству теоремы 4.8.

Таким образом, инвариант k является инвариантом более сильным, чем полином Ξ и, вместе с тем, он не слабее поверхностной скобки в качестве препятствия к уменьшению рода.

Глава 5

Комплекс Хованова для виртуальных узлов

5.1. Введение

Одним из самых ярких достижений теории узлов последних лет была предложенная Михаилом Ховановым [Kh] конструкция, которая сопоставляет каждой диаграмме ориентированного зацепления некоторый биградуированный цепной комплекс, при этом все гомологии этого комплекса являются инвариантами исходного зацепления.

Этот переход от полиномов к (би)градуированным комплексам называется также *категорификацией*: комплексы образуют категорию, в которой имеются естественные морфизмы, порожденные, например, кобордизмами узлов.

Эта теория имеет много обобщений, и с ее помощью были решены некоторые задачи классической теории узлов (в их числе и простое доказательство гипотезы Милнора о роде Зейферта торических зацеплений, [Ras]).

Подробнее см. работы [Kh, Kh2, Kh3, BN2, BN3, Weh2, APS, Ras, Shu, KhR1, KhR2, KhR3] и ссылки в них.

Как стало ясно из работы Бар-Натана [BN3], комплекс Хованова допускает “топологическую интерпретацию” в виде комплекса кобордизмов: пространства цепей вместо абстрактных градуированных модулей представляют собой оснащенные состояния (окружности с выбранными метками \pm), а дифференциалы — линейные комбинации кобордизмов. Эта точка зрения привела Бар-Натана к “универсальной топологической” теории гомологий Хованова. Отметим, что в универсальной топологической теории цепи, вообще говоря, не являются цепями клеточного комплекса; они лишь допускают комбинаторное описание посредством топологии двумерных кобордизмов, связанных с узлом.

Частными случаями — реализациями — этой теории являются различные алгебраические теории гомологий зацеплений.

После этого появилась работа Хованова [Kh2], в которой с использованием идей, схожих с идеями Бар-Натана, была построена универсальная алгебраическая теория. В ней рассматриваются два кольца \mathcal{R} и \mathcal{A} , причем \mathcal{A} имеет структуру алгебры Хопфа над \mathcal{R} . Оказывается, что при некоторых естественных алгебраических условиях на структуру кольца \mathcal{A} можно построить экстраординарную теорию гомологий зацеплений, в которой \mathcal{R} представляет собой кольцо коэффициентов, а \mathcal{A} — кольцо гомологий тривиального узла. При этом дальнейшие построения в этой теории в точности повторяют начальную конструкцию Хованова. Это кольцо является градуированным, и его градуировка (называемая также квантовой) определяет вторую градуировку во всем комплексе.

В работе [Kh3] Хованов — на основании теории кобордизмов и комбинаторики представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 построил теорию гомологий для *крашенных* зацеплений, связанную с полиномом Джонса для кабелей узлов.

Важной вехой в теории экстраординарных гомологий зацеплений было построение Розанским и Ховановым [KhR1, KhR2] категорификации для серии полиномов типа HOMFLY: в отличие от обычного комплекса Хованова, который строится посредством скобки Кауфмана, имеющей достаточно простую аксиоматику $\langle \text{crossing} \rangle = a \langle \text{positive crossing} \rangle + a^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle$, полиномы типа HOMFLY имеют более сложные соотношения; проблема категорификации для них была изящно решена с помощью аппарата *матричных факторизаций* и *комплексов Кошуля*.

Отметим также недавнюю работу Хованова и Розанского [KhR3], посвященную категорификации $so(N)$ -версий полинома Кауфмана, в которой помимо матричных факторизаций используются также виртуальные узлы.

Гомологии Хованова обладают важными свойствами, присущим гомологиям топологических пространств — (проективной) функториальностью. В данном случае в качестве морфизмов выступают кобордизмы узлов. Таким образом, гомологии Хованова продолжают до инвариантов кобордизмов узлов, представляющих собой двумерные поверхности с краем в $\mathbf{R}^3 \times I$.

Функториальность позволяет строить по комплексу Хованова инвари-

анты кобордизмов двумерных поверхностей в \mathbf{R}^4 ; частным случаем кобордизмов являются кобордизмы между двумя зацеплениями из пустого множества компонент. В случае проективной функториальности инвариант кобордизма определен с точностью до обратимого элемента основного кольца. В этом случае конструкция Хованова дает инвариант двумерных узлов — двумерных поверхностей, вложенных в $\mathbf{R}^3 \times I \subset \mathbf{R}^4$. Точная функториальность была установлена С.Моррисоном и К.Уокером [MW].

В работе [BN3] была предложена интересная конструкция, описывающая *топологический* комплекс Хованова — формальный цепной комплекс, в котором в роли цепей выступают линейные комбинации меченых наборов окружностей на плоскости, а в роли дифференциалов — линейные комбинации кобордизмов. Для инвариантности на такие комплексы кобордизмов налагаются некоторые соотношения, происходящие из топологии двумерных кобордизмов. Обычный (алгебраический) комплекс Хованова получается из геометрического “подстановкой” конкретных градуированных пространств вместо наборов окружностей и конкретных отображений вместо элементарных кобордизмов; при этом требуется, чтобы выполнялись соотношения, происходящие из соотношений на кобордизмы.

Отметим также работу [Kh2], в которой Хованов предложил универсальную алгебраическую конструкцию, описывающую обобщения комплекса Хованова, связанные с полиномом Джонса-Кауфмана.

Одной из самых естественных задач в теории виртуальных узлов является задача обобщения комплекса Хованова на виртуальный случай.

Непосредственная попытка обобщить теорию наталкивается на определенные трудности алгебраического характера: при выписывании всех необходимых уравнений для того, чтобы комплекс Хованова был корректно определен, мы приходим к выводу, что основным кольцом коэффициентов должно быть кольцо характеристики 2. Указанное обобщение было сделано в работе [Ma6]. Некоторых трудностей непосредственного подхода можно избежать, используя геометрические конструкции, связанные с атомами.

Теория Хованова для виртуальных узлов (с некоторыми ограничениями) была впервые построена в [Ma1]. Приводимые в настоящей главе результаты опубликованы в [Ma1, Ma6, Ma11].

Без обращения к дополнительным геометрическим конструкциям теория гомологий Хованова для виртуальных узлов построена в главе 6.

Отметим, что гомологии Хованова для узлов в утолщенных поверхностях, а также в расслоениях над поверхностями S_g со слоем отрезок (с использованием некоторых дополнительных градуировок для кривых на **заданной** поверхности) были построены также М.Асаэдой, Й.Пржитицким и А.Сикорой в [APS]. Эти гомологии не приводят к гомологиям Хованова для виртуальных узлов, ибо зависят от конкретной поверхности S_g и не инвариантны при дестабилизациях и гомоморфизмах поверхности на себя.

Отметим также недавнюю работу В.Г.Тураева и П.Тернера [TuTu], в которой была построена “топологическая” теория кобордизмов для виртуальных узлов (с различными ограничениями). А именно, в работе [TuTu] была построена теория гомологий с коэффициентами в \mathbf{Z}_2 , а также различные теории с коэффициентами в \mathbf{Z} , в которых пропадает одна из градуировок.

В настоящей главе мы опишем три способа построения комплекса Хованова для виртуальных узлов. В первом из них мы построим комплекс Хованова для произвольных виртуальных зацеплений с коэффициентами в поле \mathbf{Z}_2 , во втором разделе мы покажем, как можно построить комплекс Хованова для оснащенных виртуальных зацеплений (посредством удвоения диаграмм виртуальных зацеплений), а в третьем разделе — комплекс Хованова двулистных накрытий над виртуальными узлами (в смысле атомов).

Во втором случае коэффициенты можно брать в произвольном кольце, а в третьем — в произвольном поле. Более точно, в третьем случае можно построить гомологии Хованова с коэффициентами в *произвольном кольце*, но их инвариантность доказана только в случае, когда коэффициенты берутся из поля. Вопрос об их инвариантности в случае коэффициентов из произвольного кольца вытекает из *гипотезы ориентируемости*, см. стр. 165. Кроме того, этот вопрос явно следует из инвариантности гомологий комплекса, построенного в следующей главе. А именно, в следующей главе для каждого кольца \mathbf{R} каждой диаграмме виртуального зацепления будет сопоставлен комплекс, гомологии которого в случае диаграмм с ориентруемыми атомами изоморфны гомологиям, которые строятся в настоящей

главе. Из инвариантности гомологий, доказываемой в следующей главе и их совпадении для диаграмм, которым соответствуют ориентируемые атомы, с гомологиями, построенными в настоящей главе, следует инвариантность гомологий, построенных в настоящей главе.

В конце настоящей главы мы покажем [Ma11], что подход, использующий атомы, применим для общей теории гомологий Хованова (фробениусовых расширений), а также опишем алгебраические уравнения и структуры, которые возникают при попытке обобщить универсальную теорию гомологий Хованова непосредственно (как оказывается, в отличие от простейшего (начального) комплекса Хованова эта теория является более богатой).

Важным вопросом в теории классических и виртуальных узлов является задача определения минимальных диаграмм зацеплений — диаграмм с минимальным количеством перекрестков в данном классе.

В конце настоящей главы мы приведем конструкцию затягивающего дерева для комплекса Хованова, впервые предложенную Ш.Верли [Weh2] для классических узлов (более сильный результат в классическом случае был получен И.Кофманом и А.Чампанеркаром [ChK]) и автором [Ma14] (для виртуальных узлов). Мы покажем, как с помощью комплекса Хованова можно устанавливать минимальность тех или иных зацеплений с использованием конструкции атомов. Будут сформулированы различные теоремы минимальности [Ma14, Ma1], опирающиеся как на полином Джонса, так и на комплекс Хованова.

Отметим, что каждая из приводимых здесь конструкций гомологий Хованова для виртуальных узлов задает также и *гомологии Хованова* для узлов в утолщенных поверхностях; тем самым мы получаем инвариант классического объекта трехмерной топологии.

5.2. Основные используемые конструкции

В дальнейшем мы будем рассматривать биградуированные комплексы $\mathcal{C} = \bigoplus_{i,j} \mathcal{C}^{i,j}$, где i называется *высотой*, а j — *градуировкой*. Дифференциал в комплексе сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу.

Ввиду того, что дифференциал повышает градуировку, правильнее было

бы говорить о *когомологиях*, но в литературе устоялось название *гомологии Хованова*, поэтому мы будем придерживаться терминологии *цепи, циклы, границы* вместо *коцепи, коциклы, кограницы*.

Пусть линейное пространство (или свободный модуль M над кольцом \mathcal{R}) имеет выделенную градуировку q , называемую *квантовой*. Тогда имеет место разложение $M = \bigoplus_i M_i$, где M_i — однородная компонента градуировки q . Назовем *градуированной размерностью* пространства M полином $q\dim(M) = \sum_i q^i \dim M_i$.

На таких комплексах естественным образом определены операции сдвига высоты $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}[k]$ и сдвига градуировки $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}\{l\}$ определенные по правилам: $(\mathcal{C}[k])^{i,j} = \mathcal{C}^{i-k,j}$; $(\mathcal{C}\{l\})^{i,j} = \mathcal{C}^{i,j-l}$. В первом случае вместе с цепями соответственным образом сдвигаются все дифференциалы. *Градуированной эйлеровой характеристикой* комплекса $\mathcal{C}^{i,j}$ называется альтернированная сумма градуированных размерностей пространств цепей или, что то же самое, групп гомологий. Для пространств цепей мы имеем: $\chi(\mathcal{C}^{i,j}) = \sum_i (-1)^i q\dim \mathcal{C}^i = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim \mathcal{C}^{i,j}$.

У таких комплексов для каждой биградуировки (i, j) имеется группа (ко)гомогий $H(\mathcal{C})$, определяемая как факторгруппа соответствующего пространства циклов по подпространству границ.

Здесь $q\dim$ — градуированная размерность пространства A с одной (квантовой) градуировкой.

Два градуированных (биградуированных) комплекса \mathcal{C} и \mathcal{C}' называются *квазиизоморфными*, если существуют сохраняющие (би)градуировку отображения $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ и отображение u , понижающее высоту на единицу (и сохраняющее вторую градуировку, если таковая имеется), такие что $f \circ g = Id_{\mathcal{C}'}$, а $g \circ f - Id_{\mathcal{C}} = d \circ u + u \circ d$.

У квазиизоморфных комплексов гомологии изоморфны.

5.2.1. Полином Джонса \hat{J} : другая нормировка

Опишем нормировку полинома Джонса, предложенную Ховановым (и отличающуюся от общепринятой).

Сделав в скобке Кауфмана замену переменной $a = \sqrt{(-q^{-1})}$, мы получим вместо полинома Джонса V его модифицированную версию J . Рас-

смотрим также полином $\hat{J} = J \cdot (q + q^{-1})$. Более подробно \hat{J} определяется следующим образом. Пусть L — ориентированная виртуальная диаграмма, $|L|$ — соответствующая неориентированная виртуальная диаграмма, n_+ и n_- — количества положительных и отрицательных классических перекрестков, n — общее число классических перекрестков. Таким образом $n = n_+ + n_-$. Тогда имеем

$$\hat{J}(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} [L], \quad (5.1)$$

где $[L]$ — модифицированная скобка Кауфмана, определяемая по правилу $[\bigcirc] = (q + q^{-1})$, $[L \sqcup \bigcirc] = (q + q^{-1}) \cdot [L]$, $[\text{X}] = [\text{X}] - q[\text{X}]$.

Полином \hat{J} имеет следующее концептуально важное описание в терминах куба состояний. Вынося за скобку нормирующий множитель $(-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-}$ мы получаем (слегка модифицированную) скобку Кауфмана $\sum_s (-q)^{\beta(s)} ((q + q^{-1})^{\gamma(s)})$. То есть, мы берем сумму по всем вершинам куба произведений $(-q)^h \times (q + q^{-1})^{\#\bigcirc}$, где h — высота вершины, а $\#\bigcirc$ — количество окружностей, в состоянии, соответствующем данной вершине куба.

Таким образом, для вычисления полинома нам нужно сопоставить каждой окружности полином Лорана $(q + q^{-1})$, а затем перемножить эти полиномы, взятые с некоторыми коэффициентами, равными $\pm q^k$, и взять сумму получившихся полиномов по всем вершинам куба.

Следовательно, полином Джонса восстанавливается по информации о *количестве* окружностей в каждом из состояний куба. Если мы также примем во внимание то, *как эти окружности перестраиваются* при переходе от одного состояния к соседнему, мы сможем построить комплекс Хованова.

5.3. Комплекс Хованова виртуальных узлов с коэффициентами в поле \mathbf{Z}_2

В настоящем разделе приводится результат автора, впервые опубликованный в [Ма6].

Пусть L — ориентированная диаграмма виртуального зацепления с n классическими перекрестками. Под *кубом перестроек* мы понимаем куб

$\{0, 1\}^n$, в каждой вершине которого указано количество окружностей в соответствующем состоянии (как у куба состояний), а на каждом ребре указано, какие окружности перестраиваются при переходе от состояния к соседнему согласно этому ребру (новая информация). *Высотой* $\beta(s)$ состояния s (вершины) куба называется количество разведений типа B . Ориентируем ребра куба вдоль возрастания суммы координат (т.е. от разведения типа A к разведению типа B). Сопоставим каждой окружности в каждом состоянии линейное пространство V над полем \mathbf{Z}_2 , порожденное двумя векторами v_+ и v_- , где вектора v_{\pm} имеют градуировку ± 1 . Таким образом, $\text{qdim} V = (q + q^{-1})$. Каждой вершине куба $s = \{a_1, \dots, a_n\}$ соответствует некоторое количество окружностей, которое мы обозначим через $\gamma(s)$. Сопоставим каждой такой вершине векторное пространство $V^{\otimes \gamma(s)}\{\beta(s)\}$, получающееся из тензорной степени пространства V сдвигом градуировки.

Замечание 5.1. *В дальнейшем мы будем использовать то же обозначение V для двумерного градуированного свободного модуля, порожденного элементами v_+, v_- градуировок ± 1 , рассмотренного над произвольным кольцом коэффициентов.*

Замечание 5.2. *В настоящей главе мы рассматриваем симметрическое тензорное произведение, при котором для элементов $x_i \in V_i, i = 1, \dots, n$ имеет место $x_{\sigma_j} \otimes \dots \otimes x_{\sigma_n} = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$. Это произведение мы назовем также неупорядоченным. В следующей главе мы будем рассматривать тензорное произведение, в котором при отождествлении знак будет задаваться четностью подстановки.*

Замена $(q + q^{-1})$ на пространство V , такое что $\text{qdim} V = (q + q^{-1})$, представляет собой важный шаг категорификации. Определим пространство цепей высоты k как прямую сумму пространств, относящихся ко всем вершинам высоты k куба перестроек.

Мы корректно задали цепи градуированного комплекса. Из этого следует, что, как бы мы ни задали дифференциалы этого комплекса (с условием $\partial^2 = 0$, его эйлерова характеристика от этого зависеть не будет. А именно, $\chi(Kh(L)) = \hat{J}(L)$, где $Kh(L)$ означает биградуированную группу гомологий того комплекса, который мы собираемся строить.

Определим *частичные* дифференциалы на цепях, действующие вдоль ребер куба по направлению стрелок, т.е. от разведения типа A к разведению типа B , следующим образом. Пусть ребро a куба перестроек соответствует переходу из состояния s в состояние s' , при этом имеется l окружностей, не инцидентных перекрестку, к которому относится перестройка. Эти окружности не претерпевают изменений при переходе из состояния s в состояние s' . В перекрестке диаграммы $|L|$, отвечающем ребру a , происходит перестройка либо одной окружности в две, либо двух окружностей в одну, либо одной окружности в одну. В первых двух случаях мы определим частичный дифференциал так, как он определяется в случае классических узлов [BN2], а именно, на ребре, увеличивающем количество окружностей мы положим $\Delta \otimes Id^{\otimes l}\{1\}$, а на ребре, уменьшающем количество окружностей, мы положим $m \otimes Id^{\otimes l}\{1\}$. Здесь тождественное отображение относится к окружностям, которые не инцидентны рассматриваемому перекрестку, а отображения $m : V \otimes V \rightarrow V$ и $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ определяются по правилу:

Отображение m :

$$\begin{cases} v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+, v_+ \otimes v_- \mapsto v_-, \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_-, v_- \otimes v_- \mapsto 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Отображение Δ :

$$\begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_-. \end{cases} \quad (5.3)$$

Для цепей, соответствующих фиксированной вершине куба, дифференциал ∂ представляет собой сумму всех частичных дифференциалов (которые мы будем обозначать через ∂' , быть может, с индексом, указывающим на ребро, вдоль которого частичный дифференциал действует) по всем ребрам, исходящим из данной вершины куба (в направлении увеличения суммы координат).

В общем случае корректное определение частичного дифференциала вида $(1 \rightarrow 1)$ согласованным с дифференциалами типов $(1 \rightarrow 2)$ и $(2 \rightarrow 1)$ представляет собой главную трудность. Для коэффициентов из \mathbf{Z}_2 эта трудность легко преодолевается.

Именно, в случае перестройки типа $(1 \rightarrow 1)$ мы определим частичный дифференциал на ребре как отображение, переводящее все пространство, отвечающее вершине куба, в нуль. Таким образом, мы получили *куб перестроек*, в котором по сравнению с кубом состояний еще дополнительно указано, как действуют частичные дифференциалы ∂' . Обозначим получившееся пространство цепей (куб) через $[[L]]$. Для того, чтобы дифференциал был определен корректно, куб должен быть *антикоммутативен*, т.е. для каждой двумерной грани куба композиция отображений, соответствующая одной паре последовательно идущих ребер, равна минус композиции отображений, соответствующих другой паре ребер. Отметим, что в данном случае (для поля \mathbf{Z}_2) антикоммутативность равносильна коммутативности.

Определим дифференциал ∂ как сумму всех дифференциалов ∂' .

Лемма 5.1. *Определенный выше куб $[[L]]$ коммутативен.*

Это утверждение доказывается рутинной проверкой, аналогичной той, которую проделал Бар-Натан в работе [BN2]. А именно, проверяется, что имеет место (анти)коммутативность на каждой двумерной грани куба.

Мы приведем лишь один пример такой проверки (самый интересный), см. рис. 5.1.

Далее мы увидим (стр. 223,284), что каждая двумерная грань куба перестроек задает некоторый атом.

В настоящем случае (рис. 5.1) нужно проверить, что отображение $m \circ \Delta : V \rightarrow V$ переводит все пространство V в нуль. Действительно, при таком отображении мы имеем: $v_- \mapsto v_- \otimes v_- \mapsto 0$, $v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \mapsto 2v_- = 0$ над полем \mathbf{Z}_2 .

Отметим, что это — единственный существенный “неклассический” случай, в котором встречается перестройка типа $1 \rightarrow 1$. Действительно, из соображений четности следует, что на каждой двумерной грани куба перестроек число перестроек типа $1 \rightarrow 1$ либо равно нулю, либо не менее двух. Если их нет, то дело сводится к одному из классических случаев (все такие случаи были рассмотрены Бар-Натаном).

Действительно, в случае, если таких перестроек две или четыре, то на двумерной грани рассматриваемого куба

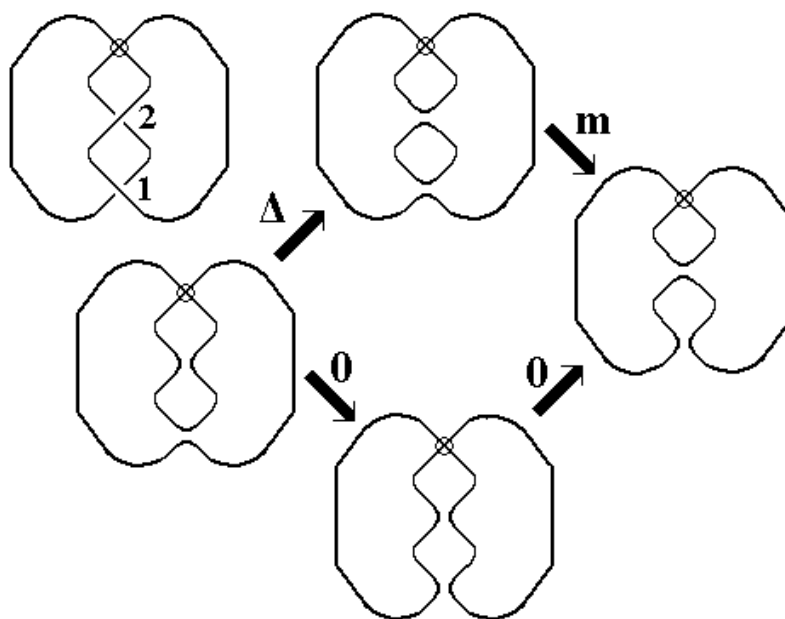


Рис. 5.1. Проверка коммутативности двумерной грани куба

$$\begin{array}{ccc}
 V^{\otimes a}\{1\} & \xrightarrow{s} & V^{\otimes b}\{2\} \\
 r \uparrow & & \uparrow q \\
 V^{\otimes c} & \xrightarrow{p} & V^{\otimes d}\{1\}
 \end{array} \tag{5.4}$$

либо каждая из композиций $q \circ p$ и $s \circ r$ содержит нулевое отображение, отвечающее переходу вида $1 \rightarrow 1$ (например, в случае $a = b, c = d$ отображения p и s — нулевые), либо имеет место случай, разобранный выше.

Положим (ср. [Kh]), $\mathcal{C}(L) = [[L]]\{n_+ - 2n_-\}[-n_-]$. В этом случае $\mathcal{C}(L)$ является корректно определенным комплексом. Обозначим линейное пространство гомологий комплекса $\mathcal{C}(L)$ через $Kh(L)$ (или $Kh_{\mathbf{Z}_2}(L)$ в случае, если нужно подчеркнуть, что комплекс Хованова рассматривается именно над полем \mathbf{Z}_2).

Теорема 5.1. [Ma1, Ma6] *Градуированная группа гомологий $Kh(L)$ является инвариантом зацепления L ; градуированная эйлерова характеристика $\chi(Kh(L))$ равна полиному Джонса.*

Второе утверждение теоремы следует из того факта, что эйлерова характеристика, определенная как альтернированная сумма (градуированных)

размерностей групп гомологий равна альтернированной сумме градуированных размерностей пространств цепей.

Доказательство инвариантности гомологий относительно движений Рейдемейстера полностью повторяет доказательство инвариантности гомологий Хованова для случая классических зацеплений.

Для доказательства инвариантности в работе Бар-Натана используется так называемый “принцип сокращения”, который состоит в следующем.

Пусть \mathcal{C} — (биградуированный) цепной комплекс, и пусть \mathcal{C}' — подкомплекс комплекса \mathcal{C} .

Тогда:

1. Если комплекс \mathcal{C}' ацикличен, то $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$.
2. Если комплекс \mathcal{C}/\mathcal{C}' ацикличен, то $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}')$.

Здесь H обозначает группу гомологий. Далее для каждого из движений Рейдемейстера кубы перестроек (отвечающие диаграмме до применения движения Рейдемейстера и диаграмме после применения движения Рейдемейстера) разбиваются на подкубы (множество вершин куба представляет собой дизъюнктивное объединение множеств вершин составляющих его подкубов), отвечающие разведениям в тех ребрах, к которым относится то или иное движение Рейдемейстера. Так, например, в случае движения Ω_3 куб размерности n разбивается на восемь подкубов, каждый из которых имеет размерность $(n - 3)$. Далее, применяя принцип сокращения и имея в виду “локальность” частичных дифференциалов (соответствующих отображениям Δ и m), мы можем свести гомологии куба размерности n к более простому виду. Оказывается, что этот более простой вид — один и тот же для диаграммы до применения движения Рейдемейстера и для диаграммы после применения движения Рейдемейстера.

При этом в доказательстве **нигде не используется глобальная информация о дифференциалах**, т.е. нигде не говорится, что некоторой стрелке в кубе отвечает дифференциал вида Δ или m , если это не видно явно из картинки.

Инвариантность при первом классическом движении Рейдемейстера дословно повторяет рассуждения из [BN1]. Комплекс, соответствующей диа-

грамме с добавленным завитком, имеет вид

$$[[\textcircled{\mathcal{Q}}]] = \left([[\textcircled{\mathcal{Q}}]] \xrightarrow{m} [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]\{1\} \right). \quad (5.5)$$

Отображение m является сюръективным, при этом подкомплекс комплекса $\textcircled{\mathcal{Q}}$ слева, в котором на малой окружности стоит $\pm v_+$, переводится отображением m на весь комплекс $\textcircled{\mathcal{Q}}$ справа. Поэтому мы приходим к тому, что весь комплекс имеет те же гомологии, что и его факторкомплекс по описанной выше ациклической части. Этот факторкомплекс имеет те же гомологии, что и $[[\textcircled{\mathcal{Q}}]]$.

Аналогичным образом рассматривается и другой завиток; в этом случае используется инъективность отображения Δ .

Как и в случае первого движения Рейдемейстера, доказательство инвариантности при втором движении Рейдемейстера повторяет соответствующее доказательство Бар-Натана в классическом случае. Мы приведем его здесь потому, что оно нам понадобится при доказательстве инвариантности относительно третьего движения Рейдемейстера.

Изначальный комплекс \mathcal{C} выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]\{1\} & \xrightarrow{m} & [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]\{2\} \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \\ [[\textcircled{\mathcal{Q}}]] & \longrightarrow & [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]\{1\} \end{array}. \quad (5.6)$$

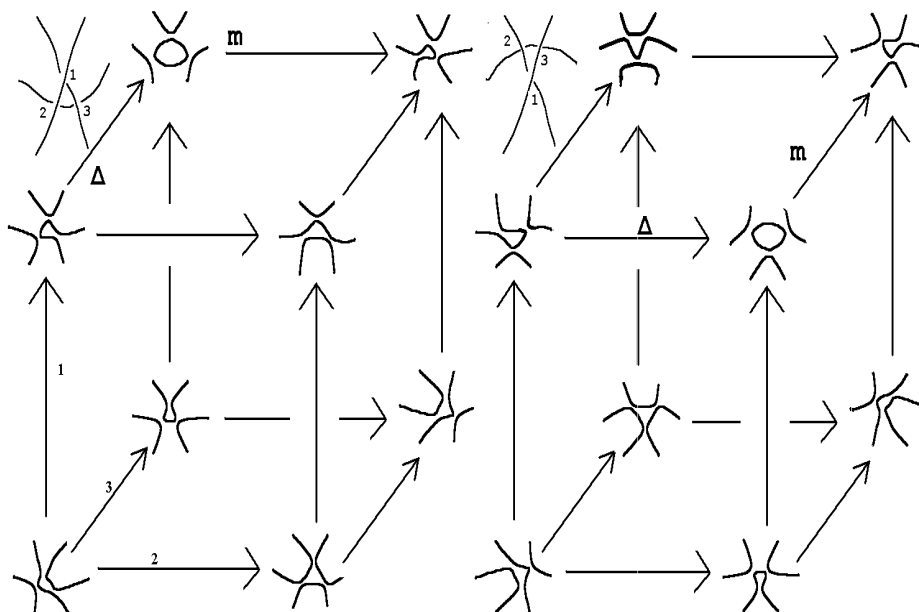
Этот комплекс содержит подкомплекс \mathcal{C}' :

$$\mathcal{C}' = \begin{array}{ccc} [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]_{v_+}\{1\} & \xrightarrow{m} & [[\textcircled{\mathcal{Q}}]]\{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.7)$$

Здесь и далее нижний индекс v_+ в левом верхнем углу означает метку на малой окружности.

Ациклическость комплекса \mathcal{C}' очевидна.

Факторизуя \mathcal{C} по \mathcal{C}' , мы получаем

Рис. 5.2. Изменение комплекса Хованова при движении Ω_3

$$\begin{array}{ccc}
 \beta & \longrightarrow & 0 \\
 \mathcal{C}''' = \Delta \uparrow & \begin{array}{c} \tau = d_{*0} \Delta^{-1} \\ \searrow \\ d_{*0} \end{array} & \uparrow \\
 \alpha & \xrightarrow{d_{*0}} & \tau\beta,
 \end{array} \tag{5.9}$$

Последний является ациклическим, так как отображение Δ является изоморфизмом.

Замечание 5.3. Здесь стрелка τ не является частичным дифференциалом. В дальнейшем стрелка по диагонали вида $\beta \rightarrow \pm\tau\beta$ означает, что мы отождествляем два элемента в кубе. Знак \pm появляется в зависимости от того, где на данной двумерной грани стоит добавочный знак минус. В случае коэффициентов из \mathbf{Z}_2 наличие этого знака ни на что не влияет.

В случае коэффициентов в кольце характеристики отличной от двух знак может появиться; все рассуждения полностью аналогичны рассуждениям Бар-Натана. Мы подробно рассмотрим вопрос со знаками при третьем движении Рейдемейстера в шестой главе для более общей кон-

струкции.

После этого мы видим, что комплекс \mathcal{C} имеет те же гомологии, что и комплекс

$$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''' = \begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & \searrow & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \gamma. \end{array} \quad (5.10)$$

В силу принципа сокращения, мы можем применить эту операцию (факторизуя верхнюю грань трехмерного куба по соответствующим ей комплексам \mathcal{C}' и по \mathcal{C}''') для двух кубов, изображенных на рис. 5.2 (только для их верхних граней). В итоге получим кубы, показанные на рис. 5.3.

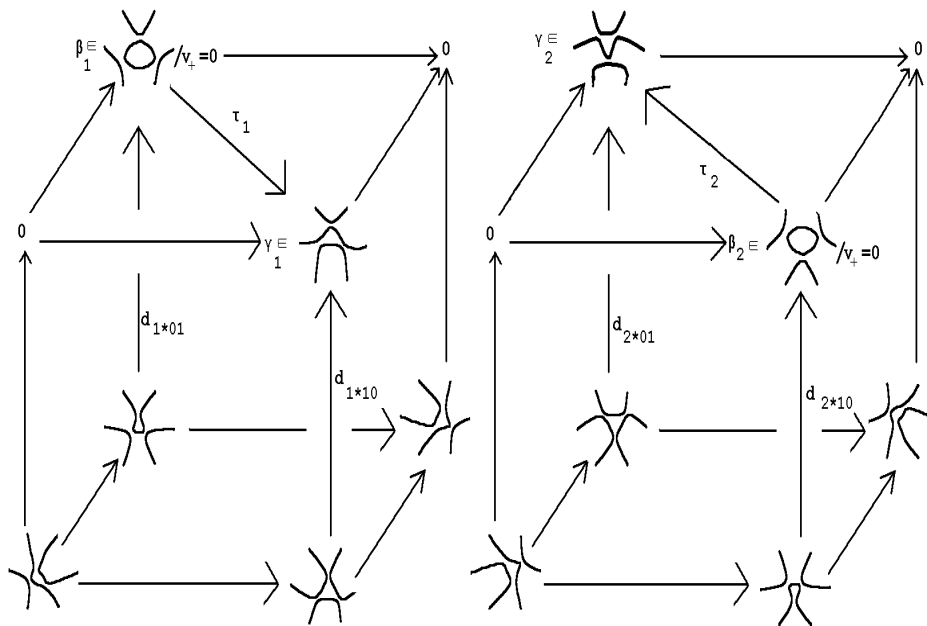


Рис. 5.3. Инвариантность относительно Ω_3

Имеет место изоморфизм пространств цепей полученных двух комплексов (изоморфизм устанавливается посредством отображения \mathfrak{N} , которое оставляет неизменными нижние уровни, показанные на рис. 5.3. и отображает пару (β_1, γ_1) в пару (β_2, γ_2) на верхнем уровне).

Тот факт, что \mathfrak{N} в действительности является изоморфизмом линейных пространств, очевиден. Для того, чтобы доказать, что это отображение до-

ставляет изоморфизм гомологий комплексов, нам необходимо установить его коммутативность с отображениями на вертикальных ребрах. Достаточно заметить, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$ и $d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}$.

Теорема 5.1. доказана.

Замечание 5.4. *Все те же рассуждения могут быть применены к любым кубам (например, к таким, у которых имеются дифференциалы произвольного вида, относящиеся к перестройкам вида $1 \rightarrow 1$).*

Назовем *высотой* $h(Kh(K))$ гомологий Хованова виртуального зацепления K разность между старшей и младшей ненулевой квантовыми градуировками ненулевых гомологий Хованова виртуального зацепления K .

Высота гомологий Хованова является уточнением длины скобки Кауфмана: последняя отвечает за несокращаемость старшего и младшего мономов в разложении (4.1); в то же время цепи комплекса Хованова находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с мономами той же скобки, умноженной на $(-a^2 - a^{-2})$.

По построению ясно, что $h(Kh(K)) - 2 \geq \frac{\text{span}(K)}{2}$.

Отметим, что комплекс $\mathcal{C}(L)$ распадается в прямую сумму двух комплексов: четной градуировки и нечетной градуировки (напомним, что дифференциал сохраняет градуировку).

Мы получаем **два** типа гомологий Хованова: четный Kh^e и нечетный Kh^o .

Они соответствуют мономам полинома Джонса, имеющим степени, дающие остаток два при делении на четыре (Kh^e) и мономам, степени которых делятся на четыре без остатка (Kh^o). У классического зацепления встречаются гомологии только одного из этих двух типов, более точно, имеет место следующая

Теорема 5.2. *Для классического зацепления с четным числом компонент имеет место $Kh^o \cong 0$, для классического зацепления с нечетным числом компонент $Kh^e \cong 0$.*

Эта теорема полностью аналогична предложению 4.1 о степенях мономов, входящих в полином Джонса.

Более того, легко проверяется, что эта теорема верна не только для классических зацеплений, но и для виртуальных зацеплений, имеющих диаграмму с ориентируемым атомом.

Рассмотрим диаграмму зацепления L , изображенную в правом нижнем углу на рис. 5.4.

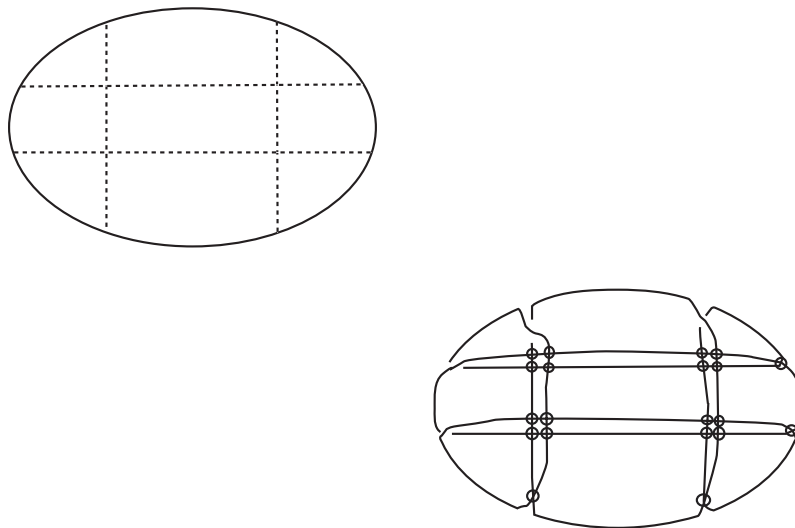


Рис. 5.4. Виртуальный узел с неориентируемым атомом рода 2

В левом верхнем углу того же рисунка изображена хордовая диаграмма, соответствующая старшему состоянию скобки Кауфмана данной диаграммы. В этом состоянии имеется одна окружность, и в любом из четырех перекрестков она перестраивается по пунктирной (отрицательной) хорде в одну окружность.

Мы утверждаем, что это зацепление не имеет диаграмм, которым соответствуют ориентируемые атомы. Действительно, у данной диаграммы оба комплекса Kh_o и Kh_e (с коэффициентами в \mathbf{Z}_2) имеют нетривиальные группы гомологий. Действительно, A -состояние диаграммы с одной окружностью с меткой 1 задает нетривиальный цикл (ибо все дифференциалы, исходящие из A -состояния в соседние состояния, ненулевые). Далее, в состояниях, где один перекресток разведен способом B , а остальные три — способом A , имеется ровно одна окружность. Рассмотрим цепь, равную сумме цепей, имеющих метку 1 в каждом из этих четырех состояний. Легко проверяется, что эта цепь представляет собой цикл. Далее, она не может

быть границей, ибо все цепи в состоянии A являются циклами.

Квантовая градуировка приведенных выше цепей отличается на единицу, следовательно, зацепление L не имеет диаграмм, которым соответствуют ориентируемые атомы.

В частности, мы показали, что род атома (род Тураева) приведенного выше зацепления равен единице.

Отметим, что этот факт не может быть обнаружен посредством скобки Кауфмана. Действительно, в A -состоянии (как и в B -состоянии) имеется ровно одна окружность, в состояниях с одним (или тремя) перекрестком, разведенным способом A , мы имеем по одной окружности, наконец, из шести состояний, в которых два перекрестка разведены способом A , а два — способом B , в двух случаях мы имеем по одной окружности, а в оставшихся четырех — по две окружности. Следовательно, скобка Кауфмана диаграммы L имеет вид

$$\langle L \rangle a^4 + 4a^2 + 2 + 4(-a^2 - a^{-2}) + 4a^{-2} + a^{-4} = a^4 + 2 + a^{-4}. \quad (5.11)$$

Все члены этой скобки Кауфмана имеют степени, сравнимые по модулю 4. Поэтому в данном случае гомологии Хованова чувствительнее к неориентируемости виртуальных узлов, чем скобка Кауфмана.

Отметим, что построенный нами комплекс Хованова с коэффициентами в поле \mathbf{Z}_2 полностью определяется структурой куба перестроек и числами n_+, n_- . Следовательно, \mathbf{Z}_2 -гомологии Хованова не меняются при виртуализациях исходной диаграммы.

В следующем разделе мы приведем другой подход к построению комплекса Хованова (для оснащенных зацеплений), который чувствителен к виртуализациям. Построенный выше комплекс Хованова в классическом случае совпадает с обычным комплексом Хованова с коэффициентами в \mathbf{Z}_2 ; в этом случае легко преодолевается трудность с перестройками вида $1 \rightarrow 1$. В двух следующих разделах мы будем строить комплекс Хованова не для всех виртуальных диаграмм, а лишь для “хороших” виртуальных диаграмм — тех, у которых на кубе не возникает частичных дифференциалов типа $1 \rightarrow 1$. Как будет видно далее, хорошие виртуальные диаграммы — в точности те, которым соответствуют ориентируемые атомы.

Далее мы будем по каждой виртуальной диаграмме строить некоторым инвариантным способом хорошую диаграмму и смотреть, как преобразуются гомологии Хованова соответствующей хорошей диаграммы при применении обобщенных движений Рейдемейстера к изначальной диаграмме. Так, в следующем разделе будет построен комплекс Хованова для оснащенных зацеплений, где в качестве хорошей диаграммы будет выступать диаграмма удвоения.

Пример. (Кауфман) Рассмотрим виртуальный узел K_1 , изображенный на рис. 5.5.

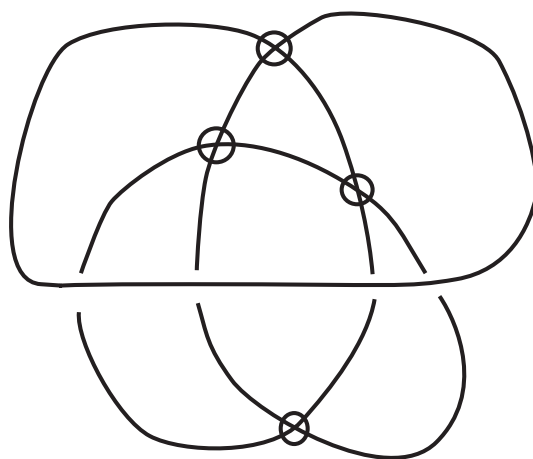


Рис. 5.5. Виртуальный узел, сводимый к тривиальному виртуализациями и обобщенными движениями Рейдемейстера

Этот узел можно свести к тривиальному узлу виртуализациями и обобщенными движениями Рейдемейстера, см. рис. 5.6.

На рисунке 5.6 преобразованием B' мы называем движение, применяемое к одному классическому и одному виртуальному перекрестку; оно представляет собой композицию виртуализации и второго виртуального движения Рейдемейстера, см. рис. 5.7. Для каждого из преобразований, указанных на рис. 5.6, мы выделяем на рисунке область, к которому оно применяется.

Таким образом, \mathbf{Z}_2 -гомологии Хованова узла, изображенного на рис. 5.5 совпадают с \mathbf{Z}_2 -гомологиями Хованова тривиального узла. Можно показать (например, используя технику виртуальных группоидов), что этот

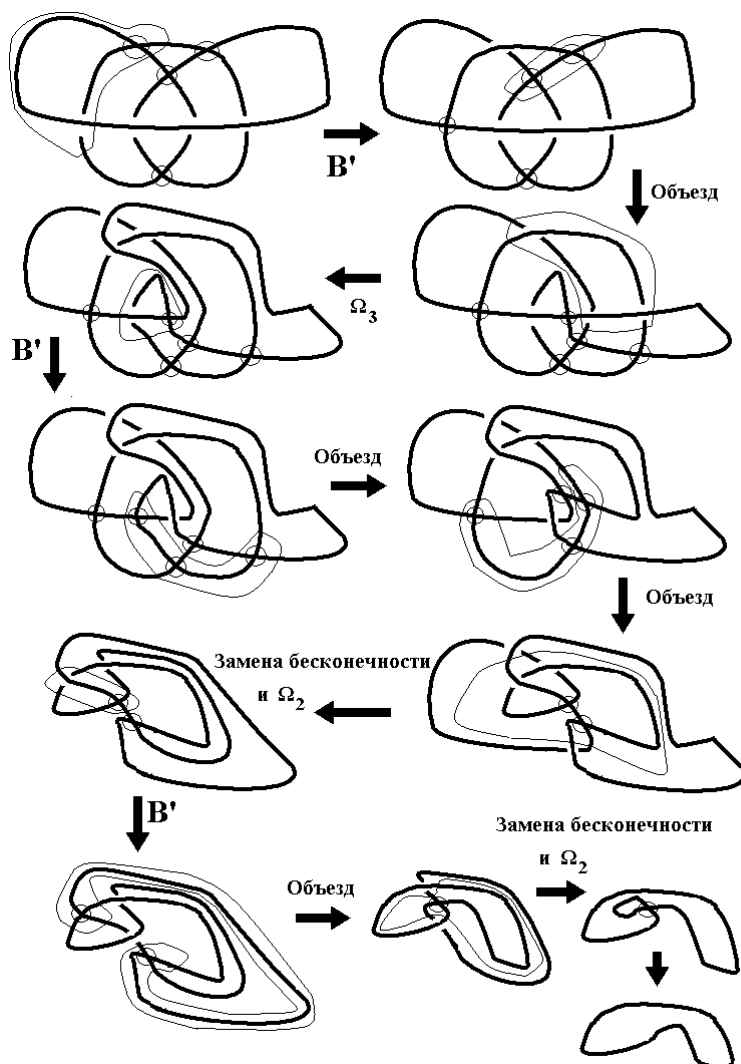
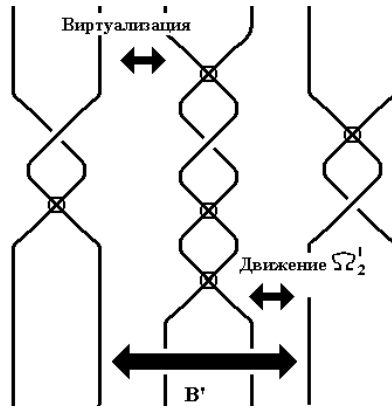


Рис. 5.6. Сведение к тривиальному узлу виртуализациями и обобщенными движениями Рейдемейстера

виртуальный узел нетривиален.

5.4. Комплекс Хованова удвоений узлов

В оставшейся части настоящей главы мы будем использовать конструкцию, связывающую атомы с виртуальными узлами. Напомним конструкцию, сопоставляющую высотному атому классическое зацепление, приве-

Рис. 5.7. Преобразование V' выражается через виртуализацию

денную в главе 4. Она состоит в том, что остов атома V вкладывается в плоскость с сохранением его A -структуры, а далее каждый перекресток снабжается структурой проход-переход согласно B -структуре атома.

Пусть дан произвольный атом V . Погрузив его остов в плоскость с сохранением A -структуры, построим по атому V диаграмму L виртуального зацепления так, как указано в главе 4 на стр. 157.

Как показано в теореме 4.2, класс эквивалентности виртуального зацепления L определен с точностью до виртуализации.

Назовем диаграмму виртуального зацепления *ориентируемой*, если соответствующий ей атом является ориентируемым и *неориентируемой* в противном случае. Назовем виртуальное зацепление *ориентируемым*, если оно может быть задано ориентируемой диаграммой.

Понятие *ориентируемой* диаграммы под другим названием встречалось также у Наоко Камады [Cam.N1, Cam.N2, KNS]; там говорилось о возможности изменить некоторые классические перекрестки (проход на переход и наоборот), чтобы получить альтернированную диаграмму. Нетрудно проверяется, что класс таких диаграмм в точности совпадает с классом ориентируемых диаграмм.

Замечание 5.5. Не стоит смешивать понятия ориентируемости диаграммы (в смысле ориентируемости соответствующего атома) и ориентированности (в смысле наличия ориентации у компонент зацепления).

Пусть L — виртуальная диаграмма, которой соответствует ориентируе-

мый атом.

Определим комплекс $\mathcal{C}(L)$ следующим образом. Фиксируем кольцо R коэффициентов и двумерный свободный модуль V над ним, $\text{qdim} V = q + q^{-1}$.

Пространство цепей нашего комплекса определяется так же, как и в случае коэффициентов \mathbf{Z}_2 . После этого дифференциал определяется как сумма частных дифференциалов со знаками, а частичные дифференциалы определяются с помощью отображений m и Δ .

Куб с частичными дифференциалами ∂' (определяемыми согласно формулам (5.2,5.3), идущими вдоль ребер в направлении возрастания координаты, называется *коммутативным*, если каждая двумерная грань этого куба представляет собой коммутативную диаграмму, и *антикоммутативным*, если каждая двумерная грань представляет собой антикоммутативную диаграмму.

В случае коэффициентов из поля \mathbf{Z}_2 коммутативность каждой грани куба равносильна его антикоммутативности. В случае коэффициентов из \mathbf{Z} из коммутативного куба можно сделать антикоммутативный следующим образом.

Сопоставим ребрам куба $\{0, 1\}^n$ последовательности, состоящие из $\{0, 1, *\}$, длины n ровно с одним элементом $*$. Каждое такое ребро соединяет две вершины, получающиеся подстановкой единицы или нуля вместо $*$.

Определение 5.0. Высотой $|\xi|$ ребра ξ назовем меньшую из двух высот его концов.

Таким образом, если мы обозначим отображение, соответствующие ребру ξ , через ∂'_ξ , то дифференциал будет иметь вид $\partial^r = \sum_{\{|\xi|=r\}} (-1)^\xi \partial'_\xi$.

Нам теперь нужно объяснить, что означает знак $(-1)^\xi$ и определить отображения ∂'_ξ . То есть, для того, чтобы корректно определить оператор ∂ , чтобы выполнялось условие $\partial \circ \partial = 0$, достаточно показать, что частичные дифференциалы ∂'_ξ на двумерных гранях куба представляют собой антикоммутативные диаграммы.

Коммутативный куб может быть преобразован в антикоммутативный следующим образом. Сначала нужно построить отображения на ребрах таким образом, чтобы каждая двумерная грань представляла собой ком-

мутативную диаграмму, а затем снабдить частичные дифференциалы ∂'_ξ знаками. Знак определяется по следующему правилу. Каждой вершине куба сопоставим номера всех ее единичных координат в возрастающем порядке: i_1, i_2, \dots, i_k и формальное внешнее произведение $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$. Так, например, при $n = 3$ мы сопоставляем вершине $\{1, 0, 1\}$ внешнее произведение $x_1 \wedge x_3$. Каждое ребро куба, увеличивающее некоторую j -ю координату, можно рассматривать как внешнее умножение на x_j . Если в результате применения такого внешнего умножения к “нижней” вершине мы получаем внешнее произведение, сопоставленное верхней вершине, мы ставим на ребре знак “плюс”, в противном случае — “минус”. Так, например, на ребре $\{1, *, 1\}$ мы имеем знак минус, поскольку $(x_1 \wedge x_3) \wedge x_2 = -x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Таким образом, мы получили набор групп цепей $[[L]]$ с дифференциалом ∂ .

Пусть дан некоторый атом V . Предположим, что для A -структуры атома существует ориентация всех ребер атома V такая, что в каждой вершине по два противоположных ребра являются исходящим, а два других — входящими.

Определение 5.1. Назовем такую структуру структурой *источник-сток*.

Замечание 5.6. Та же самая структура исследовалась в теории виртуальных узлов Н. Камадой, см., напр, [Кат. N2]. Там эта структура называлась альтернированной ориентацией для графа, который в настоящей работе называется остовом атома.

Предложение 5.1. Остов атома допускает структуру источник-сток, тогда и только тогда, когда атом является ориентируемым.

Доказательство. Действительно, пусть A -структура атома обладает структурой источник-сток. Рассмотрим черные (послекритические) клетки этого атома. Мы зададим ориентацию всех черных клеток таким образом, чтобы в каждой вершине атома две локальные ориентации, заданные черными клетками, примыкающими к этой вершине, были согласованы (т.е. в вершине соприкосновения двух черных клеток две ориентации, задаваемые подряд идущими ребрами, были либо обе направлены по часовой стрелке,

либо обе — против часовой стрелки). Легко видеть, что из этого следует ориентируемость атома.

Граница каждой черной клетки атома представляет собой цикл, состоящий из подряд идущих ребер, при этом каждое следующее ребро не является противоположным предыдущему согласно A -структуре. Так как в каждой вершине выполнено условие источник-сток, то цикл является ориентированным, т.е. представимым в виде отображения ориентированной окружности, при этом ориентация ребер согласована с ориентацией окружности. Ориентация границы клетки задает ориентацию и на внутренности этой клетки: для этого достаточно выбрать репер, первый вектор которой ориентирован по одному из ребер границы, а второй направлен внутрь клетки. Прделаем это для каждой черной клетки. Наличие структуры источник-сток в каждой вершине означает, что ориентации клеток, соседствующих по вершине, согласованы. Ориентация легко продолжается и на белые клетки.

Предположим теперь, что атом ориентирован. Фиксируем ориентацию атома произвольным образом и зададим ориентацию ребер атома таким образом, чтобы для каждой черной клетки C и каждого ребра e , ей инцидентного, ориентация пары векторов \vec{e}, ν была положительной, где ν — нормальный вектор, направленный от точки на ребре e внутрь клетки C , а \vec{e} — вектор, направленный вдоль ребра согласно выбранной ориентации.

Очевидно, что полученная ориентация ребер будет задавать структуру источник-сток. \square

Замечание 5.7. Из предложения 5.1 следует, что если некоторый атом (M, Γ) с остовом Γ ориентируем, то таковым является и любой другой атом (M', Γ) с тем же остовом и той же A -структурой).

Замечание 5.8. Структура источник-сток, заданная на всем атоме, определяет ориентацию для окружностей во **всех** состояниях скобки Кауфмана соответствующего узла. Таким образом, если построить некоторую диаграмму, полученную сглаживанием некоторых перекрестков и удалением свободных окружностей, не инцидентных выбранным перекресткам, то остов атома, соответствующего новой диаграмме, будет

наследовать структуру источник-сток из исходной, следовательно, полученный атом будет ориентированным.

Из предложения 5.1 вытекает, что если атом, соответствующий виртуальной диаграмме L ориентируем, то на кубе перестроек, соответствующем диаграмме L , нет перестроек типа $1 \rightarrow 1$. Действительно, рассмотрим остов Γ соответствующего атома. Каждое состояние диаграммы L представляет собой некоторый атом, имеющий остов Γ : окружности состояния служат для приклейки черных клеток для остова Γ . Согласно предложению 5.1 новый атом также является ориентируемым. Следовательно, у этого атома не может существовать черной клетки, подходящей к себе неориентируемым способом (так, что перестройка в перекрестке, где эта клетка подходит к себе не меняет количества окружностей).

Обратно, наличие перестройки типа $1 \rightarrow 1$, очевидно, противоречит существованию структуры источник-сток.

Таким образом, для виртуальных диаграмм, которым соответствуют ориентируемые атомы, кубы перестроек корректно определены, а именно, все перестройки имеют вид $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$, частичные дифференциалы определяются посредством отображений m и Δ , дифференциал задается в виде суммы частичных дифференциалов со знаками, а корректная определенность проверяется аналогично классическому случаю.

Отметим следующие две важные леммы.

Лемма 5.2. Пусть L — виртуальная диаграмма, которой соответствует ориентируемый атом. Тогда набор групп $[[L]]$ вместе с дифференциалом ∂ задает комплекс, т.е. $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Нам нужно проверить, что каждая двумерная грань куба $[[L]]$ является антикоммутативной. Это равносильно проверке коммутативности двумерных граней до внесения знаков ± 1 .

Каждая двумерная грань куба $[[L]]$ задает атом с двумя вершинами. Каждая двумерная грань куба соответствует некоторому способу сглаживания некоторых $(n-2)$ классических перекрестков диаграммы L , см. рис. 6.7. Оставшиеся два перекрестка могут быть сглажены произвольным образом; четыре возможности такого сглаживания соответствуют вершинам

двумерной грани.

Для этих четырех состояний имеется некоторое количество общих окружностей, не инцидентных никакому из двух рассматриваемых перекрестков. После удаления этих окружностей мы получаем атом с двумя вершинами.

Таким образом, нам нужно проверить, что каждая двумерная грань, которая может соответствовать некоторому атому с двумя вершинами, задает антикоммутативную диаграмму.

Так как атом, соответствующий диаграмме L , является ориентируемым, то таковым является и атом, соответствующий любой двумерной грани соответствующего комплекса (согласно замечанию 5.8).

Воспользуемся теперь теоремой из [Ман-1] о том, что все ориентируемые атомы с двумя вершинами являются высотными.

Это значит, что каждый атом, соответствующий двумерной грани куба перестроек, отвечающей ориентируемому атому, встречается в случае классических узлов. Все такие двумерные грани перебраны в [BN1] и для них доказана коммутативность соответствующей диаграммы (до внесения знаков дифференциалов).

После этого доказательство корректной определенности комплекса дословно повторяет доказательство в классическом случае (см., напр., [BN1]) и следует из проверки свойств отображений m и Δ . \square

Тем самым показано, что набор цепей $[[K]]$ с дифференциалом ∂ задает антикоммутативный куб.

Таким образом, корректно определен комплекс $\mathcal{C}(L)$.

Обозначим гомологии полученного комплекса через $Kh(L)$.

Лемма 5.3. *Пусть L, L' — две виртуальные диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы, при этом L' отличается от L применением объезда или одного из трех классических движений Рейдемейстера. Тогда имеет место изоморфизм гомологий Хованова $Kh(L) \cong Kh(L')$.*

Перейдем к доказательству леммы. При применении движений объезда не меняется куб состояний, и, следовательно, не меняется и весь комплекс. В случае **классических движений Рейдемейстера** мы используем в

точности то же доказательство (по Бар-Натану), использующее принцип сокращения, которое ранее было использовано для гомологий Хованова по модулю \mathbf{Z}_2 . Оно локальное, т.е. использует только локальную структуру движения Рейдемейстера (вне зависимости от того, как выглядит неподвижная часть зацепления). Отметим также, что в этом доказательстве нигде не использовалось то, что кольцом коэффициентов является поле \mathbf{Z}_2 (использовалась инъективность отображения Δ и сюръективность отображения m). Следовательно, оно дословно проходит и для виртуальных узлов при условии, что все комплексы корректно определены. Тем самым лемма доказана.

Предложение 5.2. *Пусть L — произвольная диаграмма виртуального зацепления. Тогда атом, соответствующий удвоению $D_2(L)$, является ориентируемым.*

Доказательство предложения 5.2 выводится из предложения 5.1 следующим образом.

Пусть L — виртуальная диаграмма. Ориентируем диаграмму $D_2(L)$ так, чтобы для каждой точки A на диаграмме зацепления репер $(\partial L_A, \tau_A)$, задавал положительную ориентацию плоскости, см. рис. 5.8.

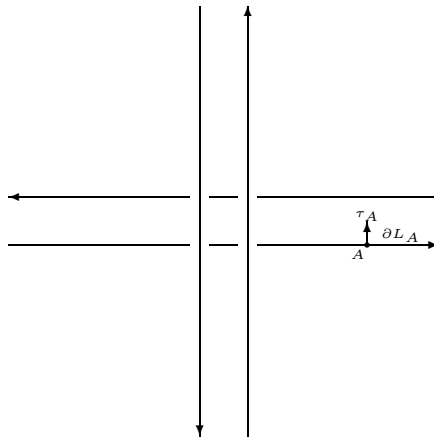


Рис. 5.8. Локальная ориентация для удвоенной диаграммы

Здесь ∂L — касательный вектор к зацеплению, а τ_A — перпендикулярный вектору ∂L вектор от точки A к близкой точке на соседней компоненте.

Искомая структура источник-сток получается так: все ребра (т.е. образы ребер соответствующего атома) тени диаграммы $D_2(L)$ делятся на “длинные” (которые происходят из ребер атома, соответствующего диаграмме L) и “короткие” (четыре коротких ребра соответствуют каждому перекрестку диаграммы L , см. рис. 5.8). Сменим ориентацию всех коротких ребер, оставив ориентацию длинных неизменной. Полученная ориентация с очевидностью задает структуру источник-сток.

Учитывая предложение 5.2 и лемму 5.2, мы приходим к выводу, что комплекс Хованова для кабелей $D_{2n}(L)$ корректно определен над любым кольцом коэффициентов. Отображение $L \mapsto D_{2n}(L)$ является почти инвариантным (оно инвариантно относительно всех комбинаций преобразований Рейдемейстера, которые не меняют числа закрученности w). По этой причине естественно ожидать, что гомологии комплекса Хованова для удвоенного (удвоение, утроение и, более общо, операция взятия k -кабеля диаграммы $K \rightarrow D_k(K)$ было определено на стр. 174) узла являются инвариантами оснащенных зацеплений. А именно, имеет место следующая

Лемма 5.4. Пусть L, L' — две диаграммы эквивалентных оснащенных виртуальных зацеплений. Тогда существует набор диаграмм $D_2(L) = L_0, L_1, \dots, L_n = D_2(L')$, такой что:

1. Все атомы, соответствующие диаграммам L_i , ориентируемы.
2. Для каждого $i = 0, \dots, n-1$ диаграмма L_{i+1} получается из диаграммы L_i применением одного из обобщенных движений Рейдемейстера.

Доказательство леммы 5.4. Движение объезда, примененное к диаграмме D , индуцирует композицию движений объезда для диаграммы $D_m(L)$.

Перейдем к рассмотрению классических движений Рейдемейстера.

Воспользуемся предложением 5.2. Для каждого удвоенного Рейдемейстера из цепочки от $D_2(L)$ к $D_2(L')$ укажем, как изменяется структура источник-сток. Это сделано на рис. 5.9, 5.10, 5.11.

В некоторых очевидных случаях стрелки на рис. 5.9, 5.11 означают не одно, а два “симметричных” классических движения Рейдемейстера или же несколько движений, последовательность применения которых очевидна. Их можно применить одно за другим, и при этом в случае любого из

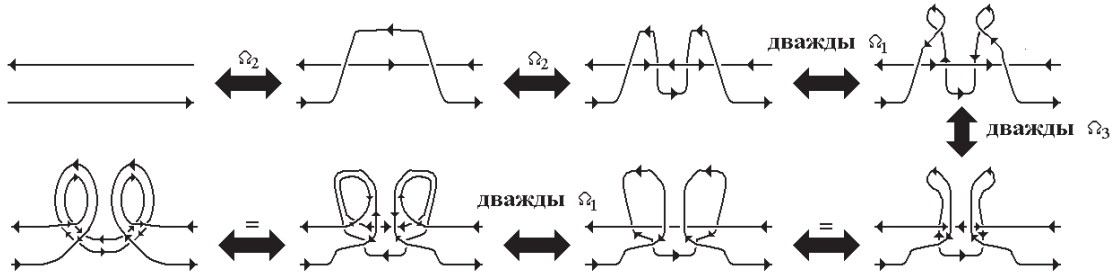


Рис. 5.9. Удвоенное движение Ω_1

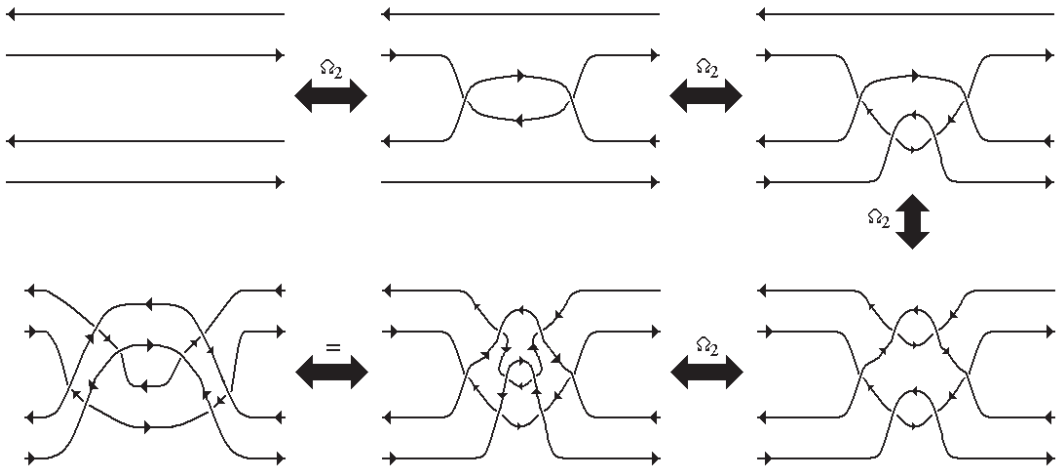


Рис. 5.10. Удвоенное движение Ω_2

изображенных на рис. 5.9,5.10,5.11 преобразований легко видеть, что такое последовательное перестраивание влечет и однозначное перестраивание структуры источник-сток. \square

Отметим следующее. При построении комплекса \mathcal{C} для виртуальных диаграмм имеет смысл рассматривать лишь классические движения Рейдемейстера, так как движение объезда не меняет атома.

Итак, рассмотрим все классические движения Рейдемейстера.

Если диаграммы K и K' отличаются применением первого или третьего движения Рейдемейстера, то локальная структура источник-сток для диаграммы K однозначно соответствует локальной структуре источник-сток

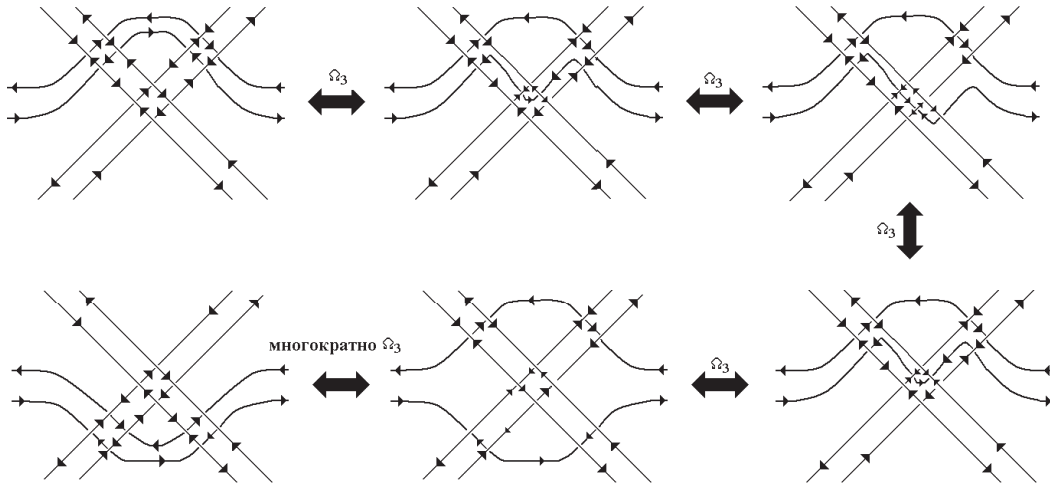


Рис. 5.11. Удвоенное движение Ω_3

для K' таким образом, что вне области применения движения Рейдемейстера эти диаграммы совпадают. Здесь на линиях, изображенных пунктиром, структура источник-сток задается как противоположная к примыкающим к ним сплошным” линиям, см. рис. 5.12.

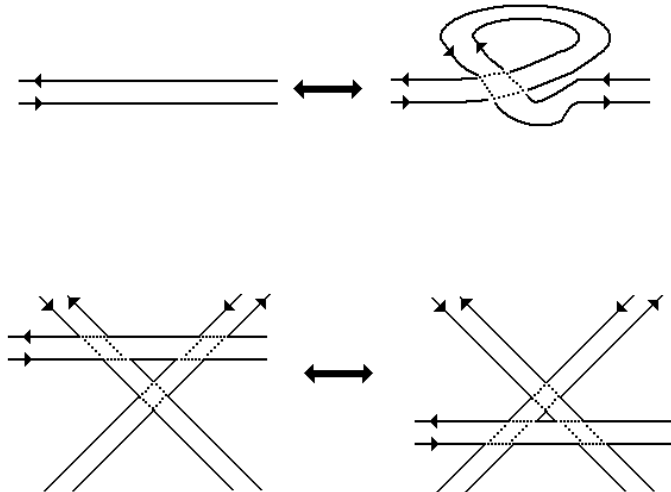


Рис. 5.12. Разметка для удвоенных движений Ω_1 и Ω_3

У второго движения Рейдемейстера есть два принципиально разных слу-

чая. Они приведены на рис. 5.13.



Рис. 5.13. Разметка для удвоенных движений Ω_2

В первом из них (верхняя картинка) мы имеем две противоположенные дуги (согласно ориентации источник-сток), а во втором случае — две сонаправленные.

В первом случае указано, как перестраивается локальная разметка ребер диаграммы и структура источник-сток.

Второй случай не допустим, т.е. может привести к тому, что при применении второго движения Рейдемейстера атом перестанет быть ориентируемым.

Таким образом, из классических движений Рейдемейстера только один случай (увеличивающего) второго движения может нарушить ориентируемость атома. При преобразованиях, описываемых в доказательстве леммы 5.4, этот случай не встречается.

Замечание 5.9. *Можно рассмотреть множество диаграмм виртуальных узлов с ориентируемыми атомами и набор движений на нем, состоящий из всех обобщенных движений Рейдемейстера, не нарушающих свойства ориентируемости (т.е. движение объезда, первое и третье классические движения Рейдемейстера и “ориентируемая” версия второго классического движения Рейдемейстера).*

Полученное множество исследовалось Наоко Камадой, см. [Кат. N1, Кат. N2, KNS].

В частности, из приведенных выше рассуждений (лемма 5.3) следу-

ет, что комплекс Хованова корректно определен над любым кольцом коэффициентов и инвариантен в категории ориентируемых виртуальных зацеплений.

Теорема 5.3. Пусть n — натуральное число. Тогда $Kh(D_{2n}(L))$ является инвариантом оснащенных виртуальных зацеплений.

Доказательство. Согласно предложению 5.2, $\mathcal{C}(D_{2n}(L))$ является корректно определенным комплексом. Пусть теперь L, L' — две эквивалентные диаграммы оснащенных виртуальных зацеплений. Тогда в силу леммы 5.4 существует набор виртуальных диаграмм $D_{2n}(L) = L_0, \dots, L_n = D_{2n}(L')$, соответствующих ориентируемым атомам, при этом диаграмма L_{i+1} получается из диаграммы L_i применением обобщенных движений Рейдемейстера. По лемме 5.2, для каждой из диаграмм L_j корректно определены гомологии $Kh(D_{2n}(L_j))$. Инвариантность гомологий Kh относительно движения объезда очевидна по построению. Таким образом, в силу леммы 5.3 (в которой утверждается инвариантность относительно классических движений Рейдемейстера), мы имеем $Kh(D_{2n}(L)) = Kh(L_1) = \dots = Kh(D_{2n}(L'))$. Теорема доказана. \square

Отметим, что удвоение диаграммы L и удвоение диаграммы L' , полученной из L виртуализацией одного из перекрестков, имеют различные кубы состояний. Так что построенный в настоящем разделе комплекс может а priori различать оснащенные виртуальные диаграммы, полученные друг из друга виртуализацией.

Однако построенный в настоящем разделе “удвоенный” комплекс Хованова существенно отличается от “обычного” комплекса Хованова классических узлов: как в классическом, так и в виртуальном случае нам нужно брать удвоение, и после этого считать гомологии Хованова.

Естественным является вопрос о том, инвариантны ли “обычные” гомологии Хованова $Kh(L)$ в случае диаграмм, которым отвечают ориентированные атомы. Положительный ответ на этот вопрос дается (с некоторыми ограничениями) в следующем разделе и (полностью) в следующей главе.

5.5. Атомы и комплекс Хованова двулистных накрытий

Основной целью настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.4. *Пусть \mathbf{F} — поле. Пусть L, L' — две эквивалентные виртуальные диаграммы, которым отвечают ориентируемые атомы. Тогда имеет место изоморфизм градуированных групп гомологий $Kh_{\mathbf{F}}(L) \cong Kh_{\mathbf{F}}(L')$.*

Основная идея доказательства состоит в следующем. Для каждой виртуальной диаграммы L можно рассмотреть соответствующий ей атом $V(L)$. Далее будем использовать технику *ориентирующего накрытия*. А именно, если атом $V(L)$ — ориентируем, рассмотрим две копии атома $V(L)$, если нет, то рассмотрим атом $\tilde{V}(L)$ — ориентирующее двулистное накрытие над атомом $V(L)$. Оно определяется как двулистное накрытие над соответствующей поверхностью, при этом прообразом остова является граф, который мы берем за остов, прообразом черных клеток — пары черных клеток, а прообразом белых клеток — пары белых клеток. Полученный атом может быть либо двухкомпонентным, либо однокомпонентным, в зависимости от того, является исходный атом ориентированным или нет.

Обозначим виртуальное зацепление, соответствующее полученному атому $\tilde{V}(L)$, через $K(\tilde{V}(L))$.

Если применять классическое движение Рейдемейстера Ω_i к исходной диаграмме L , к диаграмме $K(\tilde{V}(L))$ будет применяться движение Ω_i в двух местах, при этом в случае движения Ω_2 к диаграмме $K(\tilde{V}(L))$ будет два раза применяться **допустимый** вариант второго движения Рейдемейстера.

Эту конструкцию можно трактовать так: мы рассматриваем два набора перекрестков атома с A -структурой в них и соединяем перекрестки ребрами.

Таким образом, для каждого виртуального узла можно рассмотреть его “накрытую версию”:

$$L \rightarrow V(L) \rightarrow \tilde{V}(L) \rightarrow Kh_{\mathbf{F}}(K(\tilde{V}(L))) \quad (5.12)$$

Исходя из диаграмм узлов эта конструкция описывается так. Пусть дано виртуальное зацепление L , у которого имеется n классических перекрестков X_1, \dots, X_n . Эти перекрестки как-то соединяются между собой. Таким образом, мы имеем граф Γ , погруженный на плоскость. У каждого из перекрестков X_i имеется по четыре конца $X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}$ перенумерованные, скажем, по часовой стрелке, при этом перекрестки соединяются ветвями узла, которым соответствуют ребра атома. Пусть ребро l_j соединяет концы $X_{j_1 j_2}$ и $X_{j_3 j_4}$, где $j_2, j_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Диаграмма $K(\tilde{V}(L))$ строится следующим образом. Она содержит $2n$ перекрестков $X'_1, \dots, X'_n, X''_1, \dots, X''_n$, которые соединяются ветвями. У каждой ветви l_j исходной диаграммы появляются два образа: l_j^1 и l_j^2 . Каждое из двух ребер l_j^i соединяет конец $X'_{j_1 j_2}$ или $X''_{j_1 j_2}$ с концом $X'_{j_3 j_4}$ или $X''_{j_3 j_4}$. Для каждого ребра l_j^1 нам нужно указать, какие именно концы оно соединяет (X' или X''). Здесь у нас имеется произвол в описании. Дело в том, что до того, как мы начали описывать ребра, мы не имели естественного упорядочения вершин: какая из вершин X'_i или X''_i — “первая”, а какая — “вторая”. Для преодоления этой трудности выберем некоторое максимальное дерево Δ в графе Γ и скажем, что все ребра l_j^1 , соответствующие ребрам этого дерева, соединяют концы $X'_{j_1 j_2}$ с $X'_{j_3 j_4}$ (тем самым, ребра l_j^2 соединяют концы $X''_{j_1 j_2}$ и $X''_{j_3 j_4}$).

Выбор другого дерева будет соответствовать смене обозначений: в некоторых парах X'_j и X''_j поменяются местами. После этого правило соединения оставшихся концов ребрами l_i^1 и l_i^2 таково. Мы опять позволим себе некоторый произвол: указывая, какие пары концов нужно соединить ребром l_i , мы не будем указывать, соединяем мы их ребром l_i^1 или ребром l_i^2 : соответствующая им “симметричная” пара концов, получающаяся заменой $X' \longleftrightarrow X''$ будет также соединена ребром, при этом для построения диаграммы узла нам не важно, как эти два ребра обозначаются.

Также мы не будем следить за тем, как именно на плоскости расположены ребра l_i^α : результирующий класс виртуального зацепления от этого зависеть не будет (по построению диаграммы будут получаться друг из

друга многократным применением движения объезда).

Итак, мы фиксировали максимальное дерево $\Delta \subset \Gamma$. Каждое ребро l_j , не принадлежащее этому дереву, задает минимальный цикл на подграфе $\Delta \cup l_j \subset \Gamma$. В случае, если этот цикл — *хороший* (см. далее), соединим ребром l_j^1 концы $X'_{j_1j_2}$ и $X'_{j_3j_4}$, а ребром l_j^2 — концы $X''_{j_1j_2}$ и $X''_{j_3j_4}$. В случае плохого цикла соединим ребром l_j^1 концы $X'_{j_1j_2}$ и $X''_{j_3j_4}$, а ребром l_j^2 — концы $X''_{j_1j_2}$ и $X'_{j_3j_4}$. Понятия *хорошего* и *плохого* ребер восходят к ориентирующим и неориентирующим циклам на соответствующем атоме: хорошим называется ребро, соответствующее ориентируемому циклу. При накрытии атома ориентирующие циклы переходят в циклы, а неориентирующие — в незамкнутые пути (с некоторыми концами в X'_k, X''_k). Определим теперь понятие хорошего ребра (для ребер, не входящих в Δ), а также понятие ориентирующего цикла, исходя из диаграммы виртуального зацепления. Для этого рассмотрим все ребра данного цикла $l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_k}, l_{j_{k+1}} = l_{j_1}$, где ребра $l_{j_i}, l_{j_{i+1}}$ сходятся в вершине X_{n_i} (индексы i берутся по модулю k) и попробуем вдоль них локально определить структуру источник-сток. Ориентируем некоторым образом ребро l_{j_1} . Далее, если ребро l_{j_2} противоположно ребру l_{j_1} в вершине X_{n_1} , то мы ориентируем l_{j_2} так, чтобы либо оба ребра l_{j_1} и l_{j_2} стали входящими в вершину X_{n_1} , либо оба стали исходящими из нее; в случае, если ребра не являются противоположными, мы сделаем так, чтобы одно из них было входящим в данную вершину, а другое — исходящим. Далее поступим точно так же при ориентации ребер l_{j_3}, l_{j_4}, \dots . Если процесс сойдется, т.е. мы определим на ребре $l_{j_{i+1}} = l_{j_1}$ ориентацию, совпадающую с исходной, назовем цикл *хорошим*, в противном случае назовем его *плохим*. Именно, цикл называется хорошим (ориентирующим), если количество его трансверсальных прохождений через классические перекрестки — вершины атома — четно.

Замечание 5.10. *На плоской диаграмме четность количества трансверсальных прохождений через классические перекрестки совпадает с четностью прохождений через виртуальные перекрестки (все такие прохождения трансверсальны).*

Легко проверить, что такое определение хорошего цикла совпадает с определением ориентирующего цикла на атоме, заданного A -структурой:

задавая последовательно ориентацию ребер согласно правилу источник-сток, мы задаем ориентацию примыкающих к этим ребрам черных клеток (локально): первый вектор репера направлен вдоль ориентации ребра, а второй — внутрь черной клетки. Если мы возвращаемся на исходное ребро с той же ориентацией, то это означает, что мы прошли по ориентирующему пути, а если с противоположной, — то по неориентирующему. Действительно, если мы проходим сквозь классический перекресток, то задаваемые таким образом ориентации соседствующих в нем клеток противоположны друг другу. Таким образом, согласованность ориентации после прохождения по заданному пути зависит от четности количества классических перекрестков, пройденных трансверсально.

Итак, мы определили понятие *ориентирующего* цикла и *хорошего* ребра (для ребер, не входящих в дерево Δ). Следовательно, мы полностью построили диаграмму виртуального узла $K(\tilde{V}(L))$. Отметим, что определение хорошего цикла не зависит (с точностью до объезда) от выбора дерева Δ .

Более того, по атому $\tilde{V}(L)$ узел, соответствующий двулистному накрытию, восстанавливается с точностью до виртуализаций (что, впрочем, не меняет гомологий Хованова) и объездов; мы же указали явный способ построения диаграммы $K(\tilde{V}(L))$ по диаграмме L ; он соответствует некоторому погружению остова атома $\tilde{V}(L)$ (с сохранением A -структуры).

Легко видеть, что применение объезда к исходной диаграмме зацепления L на диаграмме $K(\tilde{V}(L))$ индуцирует некоторую комбинацию объездов. Кроме того, имеет место следующая

Лемма 5.5. *При применении одного из классических движений Рейдемейстера к диаграмме L диаграмма $K(\tilde{V}(L))$ будет изменяться следующим образом: к ней будет применяться то же самое движение Рейдемейстера в двух местах. При этом атом, соответствующий “промежуточной” диаграмме, полученной из $K(\tilde{V}(L))$ применением второго движения Рейдемейстера в одном месте (любом из двух) является ориентируемым.*

Доказательство. Мы будем обозначать зацепления до и после применения движения Рейдемейстера через L, L' , остовы соответствующих атомов через Γ, Γ' , а соответствующие диаграммы накрытий — через \tilde{L}, \tilde{L}' .

Каждое движение Рейдемейстера представляет собой перестройку диаграммы узла внутри некоторой области; внутри этой области диаграмма L имеет некоторый вид P , а диаграмма L' — некоторый вид Q . При этом мы имеем некоторый набор хвостиков t_1, \dots, t_n , соединяющих поддиаграмму P (диаграммы L) или поддиаграмму Q (диаграммы L') с оставшейся (неподвижной) частью диаграммы. В случае первого движения Рейдемейстера n равно двум, в случае второго — четырем, в случае третьего — шести. На диаграммах \tilde{L} и \tilde{L}' каждый хвостик t_i поднимается до двух хвостиков t'_i, t''_i . В случае, если поддиаграмма P или поддиаграмма Q не содержит неориентирующих циклов, на \tilde{L} мы получаем две копии поддиаграмм P , а на \tilde{L}' — две копии диаграммы Q . Суть теоремы состоит в том, что эти копии согласованным образом подсоединены к хвостикам. Пример согласованного и несогласованного соединений приведен на рис. 5.14.

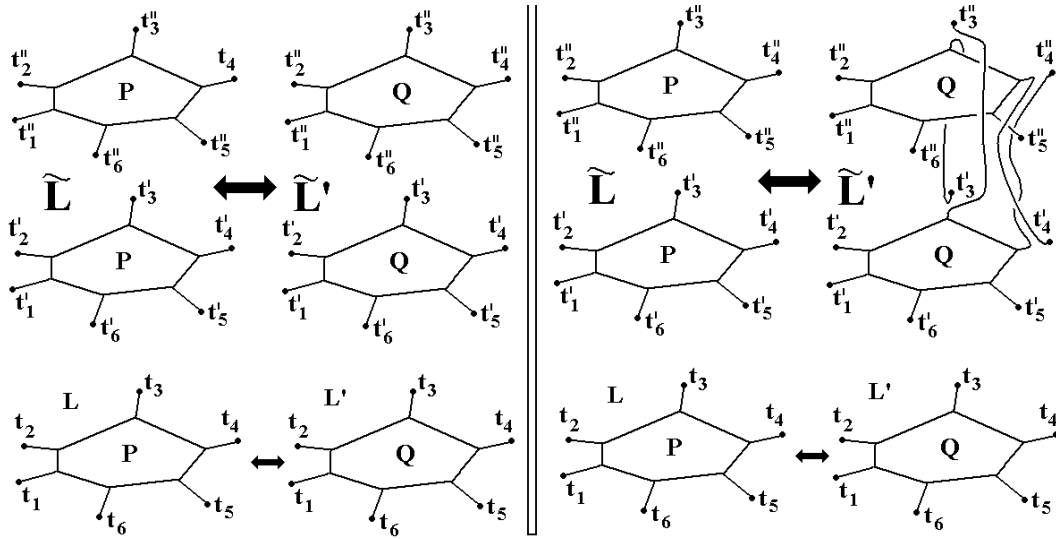


Рис. 5.14. Согласованное и несогласованное соединения

В согласованном случае все вершины t'_i, t''_i соединяются одинаковым способом в случае поднятия диаграммы L и в случае поднятия L' , а именно, при некотором переобозначении все t'_j соединяются между собой, а t''_k — между собой. В несогласованном случае на рис. 5.14 соединение при поднятии L такое же, как и в согласованном случае, а соединение при поднятии L' может быть другим, например: один экземпляр Q соединяется с вершинами $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5, t'_6$, а второй — с $t''_1, t''_2, t'_3, t'_4, t''_5, t''_6$. Нам нужно показать,

что второй случай не имеет места.

В случае применения увеличивающего первого движения Рейдемейстера, возникает петля, состоящая из одного ребра l_j , начальная (она же конечная) точка которого разбивает некоторое ребро l_k . Очевидно, что ребро l_j , рассмотренное как цикл, является хорошим. Кроме того, ребро l_k разбивается на два ребра l_{k_1} и l_{k_2} , которые не являются противоположными в перекрестке разбиения. Рассмотрим цикл s на графе Γ' , содержащий ребро l_k . Ему естественным образом соответствует цикл s' , содержащий ребра l_{k_1} и l_{k_2} на графе Γ' . Если цикл s ориентируем, то ориентируем и цикл s' и наоборот. Это следует из того, что если ребра l_{k_1} и l_{k_2} не являются противоположными, следовательно, при определении цикла на этих ребрах можно задать последовательную ориентацию, происходящую из ориентации ребра l_k . Поэтому если на диаграмме $K(\tilde{V}(L))$ ребро l_k^1 соединяет, скажем, концы X'_{pq} с X''_{rs} , то пара ребер $l_{k_1}^1, l_{k_2}^1$ будет соединять соответствующие им концы (с теми же обозначениями) X'_{pq} и X''_{rs} . Это и означает согласованность соединения.

Аналогично обстоит дело и с двумя оставшимися движениями Рейдемейстера. Каждое из этих движений Ω_2 или Ω_3 представляет собой перестройку некоторой области на плоскости; из этой области выходит несколько ветвей (в случае второго движения Рейдемейстера их четыре, а в случае третьего — шесть). Рассмотрим набор концов $\{X_{ij}\}$ этих ветвей.

Рассмотрим сначала второе движения Рейдемейстера. У диаграммы L имеется двуугольник cd и четыре исходящих ребра a, b, e, f , см. рис. 5.15.

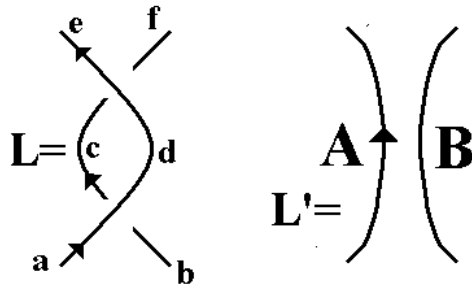


Рис. 5.15. Случай второго движения Рейдемейстера

Этот двуугольник является хорошим, ибо как цикл он не имеет трансверсальных проходов через вершины. Таким образом, весь набор ребер однозначно поднимается на диаграмму $K(\tilde{V}(L'))$. В итоге мы получим два набора ветвей a', b', c', d', e', f' и $a'', b'', c'', d'', e'', f''$. Ветви c', d' образуют двуугольник, к которому можно применить уменьшающее движение Рейдемейстера. То же можно сказать и о двуугольнике $c''d''$. Применяя к ним уменьшающие движения вторые движения Рейдемейстера, мы получим диаграмму $K(\tilde{V}(L))$. Для этого достаточно заметить, что после такого уменьшающего движения Рейдемейстера ребро a' соединится с ребром e' , а ребро b' — с ребром f' (при этом a'' соединяется с e'' , а b'' — с f''). Последнее вытекает из того соображения, что любой цикл на L , проходящий последовательно через a, c, e имеет столько же трансверсальных проходов через перекрестки, сколько и соответствующий ему цикл на L' , проходящий через ребро A .

Из этого следует также и второе утверждение леммы.

В случае третьего движения Рейдемейстера как на диаграмме L , так и на диаграмме L' мы имеем по треугольнику (h, i, f) и (k, m, n) и по шесть внешних ветвей (a, b, g, d, c, e) и (a, b, l, d, c, j) .

Оба треугольника представляют собой хорошие циклы, так как не содержат трансверсальных проходов через классические перекрестки. Следовательно, соответствующие области P и Q поднимаются до двойных копий областей P и Q . Осталось проверить, что они поднимаются согласованно.

Для этого нужно показать, что любые два пути $\gamma \in L$ и $\gamma' \in L'$, соединяющие концы t_i, t_j , “одинаково” поднимаются на L и \tilde{L} . Например, если один из двух прообразов $\tilde{\gamma}$ пути γ соединяет точки t'_i, t'_j и проходит внутри области P , то у каждого пути γ' , имеющего те же концы, что и путь γ , один из прообразов $\tilde{\gamma}'$ соединяет те же точки t'_i, t'_j (а не t''_i, t''_j). На рис. 5.16 показан пример двух таких путей.

А именно, рассмотрим два пути между точками X и Y на диаграммах L и L' (отмеченные стрелками). Мы утверждаем, что они поднимаются одинаковым образом на \tilde{L} и \tilde{L}' соответственно. Это следует из того, что количество точек трансверсального прохода на этих путях одинако-

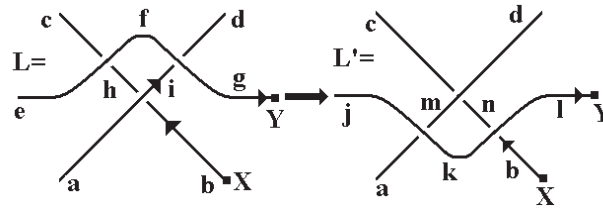


Рис. 5.16. Случай третьего движения Рейдемейстера

во (равно нулю). Аналогично доказывается одинаковость поднятия любых двух путей на рис. 5.16 с одинаковыми концами. \square

Согласно лемме 5.2, имеют смысл гомологии $Kh(\tilde{V}(L))$.

Следовательно, по лемме 5.3 гомологии Хованова “накрытого узла” не меняются при применении движений Рейдемейстера к исходному. Отсюда получаем теорему.

Теорема 5.5. *Отображение $L \rightarrow Kh(K(\tilde{V}(L)))$ задает корректно определенный инвариант виртуальных зацеплений.*

Замечание 5.11. *Отметим, что только второе классическое движение Рейдемейстера Ω_2 может изменить тип соответствующего атома (т.е. превратить неориентируемый атом в ориентируемый и наоборот). Так например, если мы имели ориентированный атом $V(K)$ и две компоненты атома $\tilde{V}(K)$, то применение (недопустимого варианта) второго движения Рейдемейстера к K может “соединить” эти компоненты в одну (что соответствует тому, что после применения второго движения Рейдемейстера атом может перестать быть ориентируемым).*

При этом движения Ω_1, Ω_3 оставляют ориентируемый атом ориентируемым.

Пусть теперь атом, соответствующий диаграмме L , ориентируем. Тогда $K(\tilde{V}(L))$ состоит из двух экземпляров атома L . Поскольку \mathbf{F} является полем, мы имеем $Kh_{\mathbf{F}}(K(\tilde{V}(L))) = Kh_{\mathbf{F}}(L)^{\otimes 2}$.

Следовательно, гомологии $Kh(L)$ получаются из инвариантных гомологий $Kh(K(\tilde{V}(L)))$ “извлечением тензорного квадратного корня”. В случае, когда кольцо коэффициентов является полем, мы имеем полином Пуанкаре

\mathfrak{R} от двух переменных со всеми целыми неотрицательными коэффициентами. Из него нужно извлечь “квадратный корень”, т.е. найти такой полином (Лорана) \mathfrak{Q} от тех же двух переменных с целыми неотрицательными коэффициентами (коэффициенты неотрицательны, ибо являются рангами групп гомологий Хованова), чтобы имело место равенство $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$. Очевидно, что если это и можно сделать, то можно сделать единственным образом. Так как эта операция однозначна, если определена, мы получаем утверждение теоремы 5.4.

Кроме того, из этих рассуждений мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.6. *Пусть \mathbf{F} — поле, и пусть зацепление L таково, что градуированная группа гомологий $Kh_{\mathbf{F}}(K(\tilde{V}(L)))$ не представима в виде тензорного квадрата. Тогда L не имеет диаграммы, которой соответствовал бы ориентируемый атом. В частности, зацепление L не является классическим.*

Естественно, что комплекс Хованова, построенный в настоящем разделе, не может определить нетривиальность виртуального узла, изображенного на рис. 5.5, поскольку этот узел получается из тривиального узла обобщенными движениями Рейдемейстера и виртуализацией.

Важной и интересной гипотезой является вопрос о том, могут ли два неизотопных классических зацепления L, L' быть получены друг из друга последовательностью обобщенных движений Рейдемейстера и виртуализаций. Комплекс Хованова дает частичный ответ на этот вопрос.

Из теоремы 5.4 и инвариантности гомологий Хованова относительно виртуализаций вытекает следующая

Теорема 5.7. *Если классическое зацепление L' получается из классического зацепления L применением обобщенных движений Рейдемейстера и виртуализаций, то L и L' имеют одинаковые гомологии Хованова с коэффициентами в любом наперед заданном поле.*

В следующей главе будет показано, что эта теорема верна и для произвольных коэффициентов (например, в кольце \mathbf{Z}), см. теоремы 6.4 и 6.5.

5.6. Затягивающее дерево для комплекса Хованова

В настоящем разделе мы покажем, как модель затягивающего дерева для скобки Кауфмана, приведенная в разделе 4.1.2 главы 4, категорифицируется. Мы опишем несколько иной подход к вычислению (правильнее сказать, к оценке) гомологий Хованова для классических и виртуальных зацеплений, благодаря которому становятся ясными некоторые свойства гомологий Хованова.

Сформулируем лемму из теории алгебраических комплексов в том виде, в котором она была сформулирована Штефаном Верли [Weh2].

Лемма 5.6. *Пусть C_0 и C_1 — градуированные комплексы вида $C_i = A_i \oplus B_i$, причем комплексы B_i имеют тривиальные гомологии. Пусть $w : C_0 \rightarrow C_1$ — отображение цепей, сохраняющее градуировку, и пусть $w_{AA} : A_0 \rightarrow A_1$ — “часть” отображения w , т.е. композиция отображения w с очевидными проекцией и вложением. Пусть A — конус отображения w_{AA} , C — конус отображения w , а B — (стягиваемый) комплекс вида $B_0 \oplus B_1[1]$. Тогда комплексы C и $A \oplus B$ имеют одинаковые гомологии.*

Доказательство этой теоремы чисто алгебраическое, оно не затрагивает внутренней структуры дифференциалов в комплексах A_i и B_i . Лемма является ключевым пунктом в доказательстве теоремы 5.8 о затягивающем дереве для комплекса Хованова классических зацеплений.

Основная идея построения затягивающего дерева, приводящая к доказательству теоремы, — такая же, как идея Тистлтуэйта, используемая при построении затягивающего дерева для скобки Кауфмана: нужно взять куб перестроек и разбить его на малые подкубы, соответствующие состояниям из \mathcal{K}_1 (см. стр. 167), после чего рассмотреть гомологии Хованова каждого из этих подкубов — т.е. экземпляры групп гомологий тривиального узла, и применить к ним лемму 5.6 многократно: при каждом разбиении куба на две части нам придется применять эту лемму.

Мы утверждаем, что такое доказательство проходит также и для всех моделей комплекса Хованова виртуальных узлов в тех случаях, когда этот комплекс является корректно определенным.

Опишем эту конструкцию более подробно. Мы будем рассматривать ненор-

мированный комплекс Хованова виртуальных узлов. В дальнейшем нужно будет вынести “общий нормировочный множитель”, т.е. сдвинуть высоту и градуировку.

Пусть L — связная виртуальная диаграмма. Рассмотрим ее ненормированный куб перестроек $[[L]]$ с дифференциалом ∂ . Занумеруем перекрестки диаграммы L и будем разбивать куб $[[L]]$ последовательно на кубы согласно схеме Тистлтуэйта (см. гл. 4, стр. 165). А именно, на первом шаге мы смотрим, является ли первый перекресток перекрестком распада (мы называем перекресток перекрестком распада, если при удалении соответствующей вершины из остова атома остов перестает быть связным) и, если он не является таковым, переходим к рассмотрению двух кубов, получающихся из $[[L]]$ фиксацией первой координаты. Эти два куба представляют собой ненормированные комплексы Хованова для диаграмм L_0 и L_1 , получающихся из диаграммы L разведениями типов A и B . У комплекса Хованова для L_i (ненормированного) есть некоторый набор гомологий; если мы рассмотрим L_0 и L_1 не как отдельные комплексы, а как составные части комплекса Хованова, соответствующего зацеплению L , мы получим некоторые новые дифференциалы, соответствующие переходу от L_0 к L_1 . Лемма 5.6 утверждает, что исходный (ненормированный) комплекс Хованова для диаграммы L имеет те же гомологии, что и комплекс, составленный только из гомологий комплексов L_0 и L_1 (а также некоторой ациклической части).

Далее мы применяем второй шаг: рассматриваем комплексы L_0 и L_1 (уже как составные части нового комплекса, гомологии которого совпадают с гомологиями Хованова зацепления L) и смотрим, распадаются ли соответствующие диаграммы во втором перекрестке. Если какая-то из них (например, L_0) не распадается, то мы перестраиваем комплекс L_0 и получаем комплекс вида $(L_{00} \rightarrow L_{01}) \oplus \langle \text{ациклическая часть} \rangle$.

Мы продолжаем до тех пор, пока не дойдем до диаграмм из множества D_L (см. стр. 167). Каждая такая диаграмма представляет собой тривиальный узел, поэтому мы приходим к выводу, что гомологии Хованова можно вычислять с помощью комплекса, состоящего из гомологий Хованова тривиального узла. Формульно это выглядит следующим образом:

Теорема 5.8. *Ненормированный комплекс Хованова диаграммы виртуального зацепления D изоморфен некоторому комплексу, группа цепей которого имеют вид*

$$\bigoplus_{s \in \mathcal{K}_1} \mathcal{A}[\beta(s) + w(D_s)]\{\beta(s) + 2w(D_s)\} \quad (5.13)$$

где \mathcal{A} — группа гомологий Хованова тривиального узла.

Отметим, что здесь мы нигде не использовали, что зацепление является классическим, так что все дословно проходит для виртуальных зацеплений в случае поля, над которым исходный комплекс Хованова корректно определен.

В дальнейшем мы будем также использовать словосочетание *комплекс Верли*, имея в виду комплекс, имеющий те же гомологии, что и комплекс Хованова, существование которого утверждается леммой 5.8.

5.7. Полином Хованова и фробениусовы расширения

Теория Хованова виртуальных узлов, описанная ранее в настоящей главе — не единственное, что можно получить с помощью модели Кауфмана и (анти)коммутативных кубов состояний. Обобщению теории Хованова, использующему фробениусовы расширения, на классический и виртуальный случаи посвящен настоящий раздел диссертации. Основные результаты настоящего раздела опубликованы в [Ma11].

5.7.1. Фробениусовы расширения

Пусть \mathcal{R}, \mathcal{A} — коммутативные кольца, и пусть $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ — вложение коммутативных колец, причем $\iota(1) = 1$. Функтор ограничения, переводящий \mathcal{A} -модули в \mathcal{R} -модули имеет правый и левый сопряженные функторы: функтор индукции $Ind(M) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} M$ и функтор коиндукции $CoInd(M) = Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, M)$. Говорят, что ι является фробениусовым вложением, если функторы индукции и коиндукции изоморфны. Эквивалентно: вложение ι является фробениусовым, если функтор ограничения имеет двусторонне двойственный функтор. В этом случае говорят также, что кольцо \mathcal{A} представляет собой *фробениусово расширение* над \mathcal{R} посредством ι .

Имеет место следующее

Предложение 5.3 ([Kadi]). *Вложение ι является фробениусовым, если существует отображение \mathcal{A} -бимодулей $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}$ и отображение \mathcal{R} -модулей $\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$, такие что Δ является коассоциативным и коммутативным коумножением, при этом $(\varepsilon \otimes Id)\Delta = Id$.*

Фробениусово расширение вместе с выбором ε и Δ обозначается через $\mathcal{F} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, \varepsilon, \Delta)$ и называется *фробениусовой системой*, [Kadi].

Фробениусовы расширения удобны для построения теории когомологий Хованова по следующим причинам. В модуле \mathcal{A} , определенном над кольцом \mathcal{R} , есть две естественные операции: операция умножения и операция коумножения — операция Δ .

Мы собираемся использовать эти операции для построения теории гомологий Хованова для виртуальных зацеплений. При этом мы (по очевидным причинам) ограничиваемся лишь случаем коммутативных колец; кроме того, мы забываем про оператор ε (этот оператор используется при определении инвариантов кобордизмов и доказательстве функториальности). В остальном мы придерживаемся работы Хованова [Kh2].

5.7.2. Описание конструкции Хованова для фробениусовых расширений

Как было описано ранее в настоящей главе, стандартная теория гомологий Хованова строится над некоторым произвольным кольцом \mathcal{R} (в качестве которого могут выступать, например, кольцо \mathbf{Z} или поле \mathbf{Q} или \mathbf{Z}_p), при этом гомологии тривиального узла представляют собой градуированный двумерный модуль \mathcal{A} над этим кольцом, порожденный векторами v_+ и v_- градуировки $+1$ и -1 соответственно. На этих векторах определены два отображения: умножение m и коумножение Δ . Если сдвинуть градуировки векторов (что потребует незначительных изменений (перенормировок) в построении теории гомологий), то можно положить $\deg v_+ = 0$, $\deg v_- = 2$. Тогда элемент v_+ можно считать единицей (обозначим его через 1 , а v_- обозначим через X), а определенные ранее умножение и коумножение превратят модуль \mathcal{A} в алгебру Хопфа над \mathcal{R} , в

которой умножение задается по правилу $X^2 = 0$, а коумножение имеет вид $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1$, $\Delta(X) = X \otimes X$.

В работе [Kh2] М.Хованов поставил вопрос: какой может быть пара линейных пространств $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$, чтобы, взяв \mathcal{R} в качестве основного кольца коэффициентов, а \mathcal{A} — некоторую алгебру Хопфа над кольцом \mathcal{R} — в качестве кольца гомологий тривиального узла — основного строительного элемента, — мы могли бы “точно так же” построить инвариантную теорию гомологий для классических зацеплений. Под “точно так же” имеется в виду, что мы рассматриваем куб состояний, в каждую вершину которого ставим тензорную степень пространства \mathcal{A} (над \mathcal{R}), соответствующую количеству окружностей в данном состоянии, определяем частичные дифференциалы с помощью отображений умножения и коумножения, а затем ставим знаки на ребрах куба и нормируем всю конструкцию сдвигами.

Хованов показал, что инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера требует двумерности пространства \mathcal{A} как \mathcal{R} -модуля и привел необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовала такая теория гомологий.

В той же работе [Kh2] показано, что каждое такое решение получается с помощью некоторых операций (замена базиса, скручивание и двойственность) из следующего решения, называемого *универсальным*:

1. $\mathcal{R} = \mathbf{Z}[h, t]$;
2. $\mathcal{A} = \mathcal{R}[X]/(X^2 - hX - t)$;
3. $\deg X = 2, \deg h = 2, \deg t = 4$;
4. $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - h1 \otimes 1$;
5. $\Delta(X) = X \otimes X + t1 \otimes 1$.

Как мы видим, умножение в алгебре \mathcal{A} сохраняет градуировку, а коумножение повышает ее на два.

Мы опускаем нормализации, регулирующие градуировки.

Назовем эту конструкцию *универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцией*. Соответствующие гомологии (классического ориентированного) зацепления L будем обозначать через $Kh_U(L)$.

Хованов доказал, что все остальные случаи вытекают из универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкции. Сначала он исследует структуру фробениусовых расширений на предмет инвариантности получающейся теории гомологий относительно первого классического движения Рейдемейстера Ω_1 . Это приводит его к двумерности \mathcal{A} как \mathcal{R} -модуля.

Далее Хованов рассматривает универсальную топологическую конструкцию Бар-Натана, предложенную в [BN3], и строит “функтор” из топологической категории Бар-Натана в категорию фробениусовых расширений ранга два. Построенный им “функтор” не является ни инъективным, ни сюръективным, но он устроен таким образом, что сохраняет все свойства, необходимые для инвариантности гомологий относительно движений Рейдемейстера.

Таким образом, Хованов показывает, что любое фробениусово расширение ранга два корректно определяет экстраординарную теорию гомологий зацеплений. После этого он показывает, что любая такая теория без потери информации сводится к универсальной теории с помощью некоторых алгебраических операций.

Мы не будем вдаваться в подробности описания конструкций Хованова и Бар-Натана, а возьмем универсальную $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцию и структурные положения теории Хованова за основу для построения теории гомологий виртуальных зацеплений.

Отметим, что Хованов также исследовал функториальность его новой теории гомологий — ее “хорошее поведение” при кобордизмах. Для этого помимо операций умножения и коумножения были определены также отображения единицы и коединицы и рассмотрены преобразования всех операций в алгебре Фробениуса; этот аспект мы затрагивать не будем. Мы будем использовать лишь тот факт, что доказательство Хованова *локально*, т.е. при том или ином движении Рейдемейстера инвариантность не использует предположений о строении узла вне участка плоскости, на котором данное движение происходит (и, по сути повторяет приведенное ранее доказательство инвариантности “обычных” гомологий Хованова, в котором использовалась инъективность отображения Δ и сюръективность отображения m).

5.7.3. Геометрические обобщения посредством атомов

В настоящем разделе мы показываем, что универсальная конструкция Хованова работает в случае виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы, в явном виде, а также выписываем соответствующие алгебраические уравнения для случая произвольных виртуальных зацеплений.

Каждой диаграмме зацепления, которой соответствует ориентируемый атом, универсальная $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкция сопоставляет некоторый куб перестроек — биградуированное пространство цепей с частичными дифференциалами, гомологии которого после некоторого сдвига задают инвариант зацеплений.

Здесь кубу состояний и кубу перестроек мы сопоставляем градуированные комплексы-кубы, в вершинах которых стоят тензорные степени кольца \mathcal{A} над кольцом \mathcal{R} — согласно количеству окружностей в данном состоянии; частичные дифференциалы в этих кубах определяются отображениями m и Δ , а дифференциал — как сумма частичных дифференциалов со знаками.

Из теории Хованова [Kh2] следует, что существует *локальное* доказательство инвариантности гомологий универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкции, т.е. набор алгебраических действий (аналогично принципу сокращения и коротких точных последовательностей алгебраических комплексов), который приводит к следующему.

Фиксируем классическое движение Рейдемейстера Ω_i . Тогда каковы бы ни были две (классические) диаграммы L и L' , локально отличающиеся друг от друга движением Ω_i , существует описанная выше последовательность алгебраических преобразований, переводящих $Kh_U(L)$ в $Kh_U(L')$ и не зависящих явным образом от видов частных дифференциалов комплексов Хованова зацеплений L и L' , кроме тех, которые явно определяются из локальной структуры данного движения Рейдемейстера Ω_i .

Из этого соображения следует, что универсальная $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкция обобщается на виртуальные диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы. А именно, если задана ориентируемая диаграмма L , мы

можем построить соответствующий куб перестроек с дифференциалами, соответствующими операциям умножения и коумножения (со знаками) и вычислить гомологии. Далее, если две ориентируемые виртуальные диаграммы L, L' получаются друг из друга применением некоторого классического движения Рейдемейстера Ω_i , то, в силу описанного выше принципа, имеет место изоморфизм градуированных гомологий $Kh_U(L) \cong Kh_U(L')$. Так как универсальная $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкция тавтологически инвариантна при движениях объезда (куб перестроек остается неизменным), верен следующий аналог леммы 5.3:

Лемма 5.7. *Пусть L, L' — две диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы, при этом L' отличается от L применением объезда или одного из трех классических движений Рейдемейстера. Тогда $Kh_U(L)$ изоморфно $Kh_U(L')$.*

Из этого рассуждения, а также лемм 5.4, 5.5 вытекает, что универсальная $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкция работает для

1. построения теории гомологий Хованова Kh_U для оснащенных виртуальных зацеплений посредством взятия $2k$ параллельных копий;
2. построения теории гомологий Хованова Kh_U для виртуальных узлов посредством взятия двулистных накрытий над соответствующими атомами.

Более точно, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 5.9. *Пусть n — натуральное число. Тогда $Kh_U(D_{2n}(L))$ является инвариантом оснащенных виртуальных зацеплений.*

а также

Теорема 5.10. *Отображение $L \rightarrow Kh_U(K(\tilde{V}(L)))$ является корректно определенным инвариантом виртуальных зацеплений.*

5.7.4. Алгебраические обобщения

Как было показано ранее, для неориентируемых виртуальных узлов явно применима \mathbf{Z}_2 -теория гомологий Хованова для виртуальных узлов, в

которой все частичные дифференциалы, соответствующие перестройкам типа $1 \rightarrow 1$, полагаются равными нулю.

Рассмотрим теперь универсальную $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцию и постараемся обобщить ее на случай неориентируемых виртуальных узлов.

Отметим, что если мы каждому узлу сопоставим **корректно определенный комплекс**, то гомологии этого комплекса будут автоматически инвариантны относительно классических движений Рейдемейстера (согласно локальности доказательства инвариантности) и движения объезда (так как при применении движения объезда не изменяется сам комплекс).

Таким образом, мы свели задачу нахождения расширения кольца \mathcal{A} для построения теории гомологий Хованова для произвольных виртуальных зацеплений к следующей задаче. Найти такой оператор (гомоморфизм \mathcal{R} -модулей) $\mathfrak{J} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, соответствующий отображению вида $1 \rightarrow 1$, чтобы для каждой виртуальной диаграммы L куб перестроек, с частичными дифференциалами, получаемыми из отображений m, Δ, \mathfrak{J} был (анти)коммутативным.

То есть мы требуем коммутативности куба до того, как на ребрах представлены знаки — точно такие же, как и в обычном случае.

Эта задача является чисто алгебраической. Для ее решения нужно рассмотреть всевозможные грани куба перестроек диаграммы L ; типов таких граней конечное число (каждой такой грани соответствует некоторый атом с двумя вершинами). Для каждой из них нужно проверить некоторое конкретное алгебраическое условие на отображения \mathfrak{J}, Δ и m .

Зададим на пространстве \mathcal{A} базис $\{1, X\}$, а на пространстве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ базис $\{1 \otimes 1, 1 \otimes X, X \otimes 1, X \otimes X\}$.

Тогда в этих базисах отображения Δ и m будут иметь вид следующих матриц:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -h & t \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

После этого мы будем использовать значок умножения матриц вместо

композиции операторов. Так, например, мы будем писать $\mu \cdot \Delta$ вместо $\mu \circ \Delta$.

Мы ищем матрицу

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

которая соответствовала бы перестройкам типа $1 \rightarrow 1$, обеспечивая при этом (анти)коммутативность куба перестроек.

Пусть дано кольцо коэффициентов \mathcal{R} , содержащее элементы h и t градуировок 2 и 4 соответственно. Обозначим полученный куб перестроек через $[[K]]_F$. Определим в нем дифференциал как сумму частичных дифференциалов, соответствующих ребрам (типов m, Δ, \mathfrak{J}) со знаками, расставленными так же, как на стр. 221.

Лемма 5.8 ([Ma11]). *Чтобы куб перестроек (пространство цепей с дифференциалом) $[[K]]_{\mathcal{R}}$ был антикоммутативным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$m \cdot \Delta = (\mathfrak{J})^2; \quad (5.16)$$

$$\Delta \cdot \mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \mathfrak{J}) \cdot \Delta; \quad (5.17)$$

$$\mathfrak{J} \cdot m = m \cdot (\mathfrak{J} \otimes 1) = m \cdot (1 \otimes \mathfrak{J}). \quad (5.18)$$

Доказательство леммы 5.8. Для проверки (анти)коммутативности куба состояний нам необходимо рассмотреть всевозможные виды двумерных граней куба. Далее мы пренебрегаем дополнительными знаками на ребрах и доказываем коммутативность.

В “простом” случае с полем \mathbf{Z}_2 и нулевыми дифференциалами, соответствующими перестройкам типа $1 \rightarrow 1$, все сводилось к “классическим” случаям, а также к случаю, изображенному на рис. 5.1.

Для $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -теории нам нужно проверять больше случаев, так как отображение типа $1 \rightarrow 1$ более не предполагается нулевым, а отображения m

(умножение) и Δ (коумножение) устроены более сложно, чем в случае гомотологий Kh .

Каждая двумерная грань куба представляет собой набор из четырех состояний, см. стр. 223. В переходе из одного такого состояния в другое некоторые окружности перестраиваются, а другие окружности остаются. Обозначим эти четыре состояния через s_{00} , s_{01} , s_{10} и s_{11} в зависимости значений двух изменяющихся координат. Удалим “общие компоненты” разведений s_{ij} , т.е. те компоненты разведения s_{00} , которые не примыкают к перекресткам, в которых происходит замена разведения. Тогда данная двумерная грань куба будет задавать некоторый виртуальный узел, а с ним — атом. Этот атом будет иметь ровно две вершины. Если атом — высотный, то соответствующая диаграмма реализуется перестройкой вложенных окружностей на плоскости, таким образом, (анти)коммутативность соответствующей грани принадлежит к числу классических случаев, проверенных Ховановым.

Для атомов с несвязным остовом проверка очевидна. Далее, каждый ориентируемый атом со связным остовом с двумя вершинами является высотным. Таким образом, искомая проверка сводится к перебору неориентируемых атомов с двумя вершинами (все они, по определению, невысотны). Перебирая такие атомы, иногда мы будем приходиться к соотношениям, которые выполняются тождественно, как, например, $\mathfrak{J} \circ \mu = \mathfrak{J} \circ \mu$, см. рис. 5.17. Три атома, дающие нетривиальные соотношения, которые указаны в формулировке доказываемой леммы, приведены на рис. 5.18, 5.19 и (пример, рассмотренный ранее) рис. 5.1.

□

Первое уравнение нам уже встречалось в случае обычных гомотологий Хованова \mathcal{C} (там композиция $m \cdot \Delta$ имеет более простой вид). В случае универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -теории мы имеем:

$$m \cdot \Delta = \begin{pmatrix} -h & 2t \\ 2 & h \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Если мы хотим построить \mathbf{Z} -градуированную теорию, то нам нужно, чтобы матрица \mathfrak{J} повышала градуировку элементов кольца \mathcal{R} на единицу

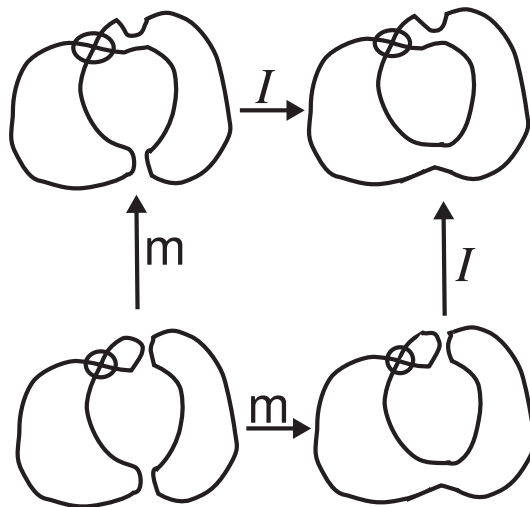


Рис. 5.17. Перестройка, соответствующая тавтологическому соотношению

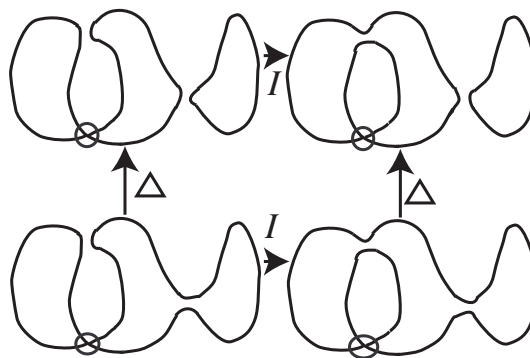


Рис. 5.18. Соотношение $\Delta \cdot \mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \mathfrak{J}) \cdot \Delta$

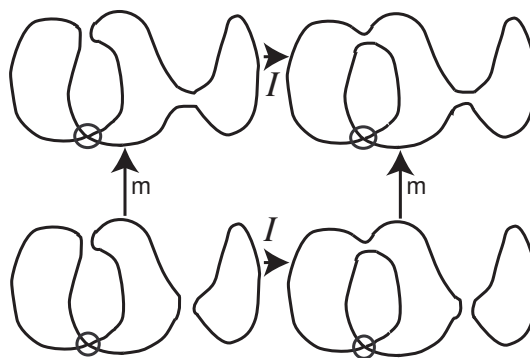


Рис. 5.19. Соотношение $\mathfrak{J} \cdot m = m \cdot (\mathfrak{J} \otimes 1) = m \cdot (1 \otimes \mathfrak{J})$

(затем этот сдвиг градуировки компенсируется понижением на единицу). Это значит, что все элементы $p, q, r, s \in \mathcal{R}$ должны быть однородными. В этом случае $\deg p = 1, \deg q = 2, \deg r = 0, \deg s = 1$, при этом возможно, что какие-либо из элементов p, q, r, s равны нулю (в этом случае градуировка была бы не определена). Тогда из равенства $(\mathfrak{J})^2 = m \cdot \Delta$ следует $\deg(2t) = \deg t = 3$, что приводит нас к противоречию, если $2 \neq 0$.

Таким образом, (как и в случае обычных гомологий Хованова) $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ -биградуированная теория гомологий при таком подходе возможна лишь в случае поля характеристики два.

Рассмотрим случай поля характеристики два. Оказывается, что в этом случае имеет место простое нетривиальное решение. А именно, в случае $2 = 0$ матрица $m \cdot \Delta$ превращается в диагональную матрицу вида

$$m \cdot \Delta = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Добавим к кольцу \mathcal{R} новый элемент $u = \sqrt{h}$, $\deg u = 1$. Положим теперь $\mathcal{R}' = \mathbf{Z}_2[u, t]$, при этом алгебра \mathcal{A} приобретает вид $\mathcal{A}' = \mathcal{R}'[X]/(X^2 - u^2 X - t)$, где $\deg X = 2, \deg t = 4, \deg u = 1$.

Положим

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

В этом случае матрица \mathfrak{J} является скалярной, и уравнения (5.17, 5.18) выполняются автоматически.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 5.11. *Над полем \mathbf{Z}_2 пара алгебр $(\mathcal{R}', \mathcal{A}')$ вместе с умножением m , коумножением Δ , заданным по правилу $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - u^2 \cdot 1 \otimes 1$; $\Delta(X) = X \otimes X + t \cdot 1 \otimes 1$ и скалярным отображением \mathfrak{J} , имеющим вид (5.21), задают инвариантную теорию гомологий для виртуальных зацеплений.*

5.8. Минимальные диаграммы классических и виртуальных зацеплений

При классификации и составлении таблиц (виртуальных) узлов важным шагом является установление диаграмм, имеющих минимальное количество перекрестков (классических перекрестков). Важной вехой в развитии теории узлов является теорема Кауфмана-Мурасуги (теорема 4.5) и последовавшая за ней классификация альтернированных зацеплений Менаско и Тистлтуэйтом [МТ]. В главе 4 мы доказали также обобщения теоремы Мурасуги (теоремы 4.6, 4.7, 4.4).

Далее в настоящей главе мы докажем теоремы, устанавливающие минимальность виртуальных и классических диаграмм, и приведем примеры.

В настоящем разделе мы усилим результаты о минимальности диаграмм виртуальных зацеплений, описанные в разделе 4.2, с использованием комплекса Хованова. Основная идея состоит в следующем. Теорема 4.4 (неравенство $\text{span}\langle L \rangle \leq 4n + 2(\chi - 2)$) для виртуальной диаграммы L с n перекрестками и атомом эйлеровой характеристики χ позволяла доказывать минимальность в тех случаях, когда эйлерову характеристику невозможно увеличить: если неравенство превращается в строгое равенство, то для того, чтобы уменьшить число перекрестков n , нам нужно увеличить эйлерову характеристику атома или, что то же самое, уменьшить его род. Оказывается, с помощью гомологий Хованова можно делать оценки на род атома, при этом в ряде случаев можно явно наблюдать, что этот род не уменьшаем. В этом случае предыдущие рассуждения вместе с неуменьшаемостью рода приводят к минимальности рассматриваемой виртуальной диаграммы.

Отметим очевидную общеизвестную теорему минимальности. Из построения гомологий Хованова вытекает

Теорема 5.12. *Пусть K — диаграмма с n классическими перекрестками. Тогда разница $i_1 - i_2$ между высотами (гомологическими градуировками) нетривиальных групп гомологий Хованова $Kh^{i_1, i_1}(K)$ и $Kh^{i_2, i_2}(K)$ не превосходит n .*

Диаграммы с n перекрестками, у которых разница между высотами нетривиальных групп гомологий равна n , имеют сложность n .

Приводимые далее примеры минимальных диаграмм не удовлетворяют условиям теоремы 5.12.

Приводимые ниже оценки опубликованы в [Ma14].

На протяжении настоящего раздела все зацепления предполагаются не представимыми в виде нетривиальной связной суммы.

Рассмотрим виртуальную диаграмму L , соответствующую ориентируемому атому, и гомологии Хованова $Kh(L)$ над некоторым кольцом R . Обозначим через t_{max} и t_{min} максимальное и минимальное значения величины $2x - y$ по всем парам x, y таким, что группа гомологий Хованова зацепления L с биградуировкой (x, y) нетривиальна. Назовем *толщиной* (см. [AP]) комплекса Хованова $T_R(L)$ величину $\frac{t_{max}-t_{min}}{2} + 1$. Эта величина является целой в случае виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы, и может быть полуцелой в случае произвольных виртуальных зацеплений (в этом случае имеет смысл говорить о \mathbf{Z}_2 -толщине).

Далее *диагональю* будем называть множество пар целых чисел (x, y) , для которых $2x - y$ постоянно. Среди диагоналей имеются крайне левая и крайне правая — на которых значение $2x - y$ минимально (соотв., максимально). Таким образом, толщина измеряет количество диагоналей между двумя крайними диагоналями.

Назовем *толщиной* $T(L)$ виртуальной диаграммы L , которой соответствует ориентируемый атом, максимум значения толщины по всем кольцам коэффициентов (в классической категории). В ориентируемой категории определяется толщина T_{or} как максимум толщины по всем полям (в ориентируемой виртуальной категории), а в общей категории определяется \mathbf{Z}_2 -толщина $T_{\mathbf{Z}_2}(L)$. Пусть $g(L)$ — род атома, соответствующего диаграмме L .

Из приведенных выше рассуждений и определения атома вытекает следующая

Лемма 5.9. *Для каждой диаграммы виртуального зацепления L имеем: $T_{\mathbf{Z}_2}(L) \leq g(L) + 2$, при этом для ориентируемой диаграммы мы имеем $T_{or}(L) \leq g(L) + 2$, для классических диаграмм имеет место $T(L) \leq g(L) + 2$.*

Понятие 1-полной виртуальной диаграммы было определено в главе 4

на стр. 171; оно означало, что длина скобки Кауфмана $\text{span}\langle L \rangle = 4n - 4g$. Назовем виртуальную диаграмму L *2-полной*, если $T(L) = 2g + 2$.

Действительно, для оценки числа диагоналей комплекса Верли (см. стр. 242) нам нужно оценить амплитуду чисел $\beta(s)$ по всем состояниям $s \in \mathcal{K}_1(L)$. Легко видеть, что в случае альтернированной диаграммы зацепления все такие числа равны (что приводит к наличию двух диагоналей t_{max} и t_{min} , таких, что $t_{max} = t_{min} + 2$), в случае атома рода 1 числа $\beta(s)$ могут принимать значения $x, x + 1, x + 2$ для некоторого x ; в случае атома эйлеровой характеристики χ они могут принимать значения в промежутке от некоторого числа x до $x + (2 - \chi)$.

Суммируя сказанное в теореме 4.4 и лемме 5.9, мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.13. *Пусть $T(Kh(K)) = g + 2$, $\text{span}\langle K \rangle = s$. Тогда количество классических перекрестков связной диаграммы виртуального зацепления, эквивалентного зацеплению K , не может быть меньше, чем $\frac{s}{4} + g$.*

В частности, если диаграмма с n перекрестками и атомом рода g является 1-полной и 2-полной, то она минимальна в классе связных диаграмм.

Последнее утверждение означает, что минимальными являются все диаграммы, для которых выполняются два свойства “естественной несократимости”: в разложении скобки Кауфмана старший член и младший член не равны нулю, а в комплексе Верли каждая из двух крайних диагоналей имеет по крайней мере один нетривиальный элемент гомологий Хованова. Эта теорема имеет место и в более широком контексте, см. теорему 6.6.

Теорема 5.13 имеет место в любой ситуации категории, в которой корректно определен и инвариантен комплекс Хованова. Так, если нас интересует инвариантность некоторой классической диаграммы в классе классических диаграмм, мы можем рассматривать толщину T — максимум по всевозможным кольцам коэффициентов, если нас интересует инвариантность в категории ориентируемых виртуальных зацеплений, мы можем взять толщину T_{or} ; в неориентируемом случае нужно брать толщину $T_{\mathbf{Z}_2}$.

5.9. Минимальные диаграммы длинных виртуальных узлов (согласно результатам гл.4)

Основной задачей теории узлов (классических и виртуальных) является задача классификации узлов. Эквивалентные узлы могут быть заданы диаграммами с различным количеством (классических) перекрестков. Установление факта минимальности диаграммы является как правило трудной задачей. Свойство минимальности позволяет упростить задачу классификации.

В случае классической теории узлов теорема 4.7 приводит к доказательству классической теоремы Тистлтуэйта, утверждающей минимальность адекватных диаграмм классических зацеплений. Для того, чтобы избавиться от условия оснащенности в теореме 4.7, можно перейти к взятию связной суммы узла с его зеркальным образом (подробности см. далее). Поэтому техника определения минимальных диаграмм узлов, описанная в четвертой главе (теоремы 4.4, 4.6, 4.7), проходит в случае длинных виртуальных узлов по той причине, что для длинных виртуальных узлов корректно определена операция связной суммы. При этом в отличие от случая классических узлов, в котором данному критерию удовлетворяют лишь *адекватные* диаграммы (см. определение на стр. 174), минимальность которых была доказана еще Тистлтуэйтом с использованием скобки Кауфмана (и может также быть доказана с помощью гомологий Хованова), здесь имеются бесконечные серии длинных виртуальных узлов, которые не являются адекватными, но минимальность которых доказывается теми же самыми методами.

Перейдем к описанию этих классов более подробно. Рассмотрим длинные узлы и их замыкания (см. опр. на стр. 115,116).

Напомним, что диаграмма кабеля $D_n(L)$ была определена на стр. 176.

Имеет место

Теорема 5.14. Пусть K — диаграмма длинного виртуального узла, такая что для всякого $n > 1$ виртуальная диаграмма $D_n(Cl(K))$ является 1-полной. Тогда диаграмма K является минимальной по количеству классических перекрестков.

Доказательство. Будем доказывать теорему аналогично теореме 4.7. Пусть $L = K \# K'$ — связная сумма длинного виртуального узла с его зеркальным образом. По определению положим $Cl(D_n(K)) = D_n(Cl(K))$. Очевидно, что $D_n(L) = D_n(K) \# D_n(K')$. Более того, каждой диаграмме длинного виртуального узла K однозначно соответствует виртуальная диаграмма L с нулевым оснащением. Таким образом, операция $K \rightarrow D_n(L)$ является корректно определенной.

Далее, можно проверить, что из 1-полноты диаграммы $Cl(D_n(K))$ следует полнота диаграммы $Cl(D_n(L))$ (замыкание для кабеля берется аналогично замыканию косы). Это следует из того, что каждая окружность в A -состоянии диаграммы $Cl(D_n(L))$ разбивается на окружность из A -состояния диаграммы $Cl(D_n(K))$ и окружности из B -состояния диаграммы $Cl(D_n(K'))$. В силу 1-полноты диаграмм B и B' самоинцидентность каждой из этих диаграмм дает ненулевой коэффициент (M_1) , аналогичным образом, ненулевым будет и старший коэффициент в разложении скобки Кауфмана $\langle Cl(D_n(K')) \rangle$.

Повторяя рассуждения из теоремы 4.7, приходим к выводу, что уменьшение количества классических перекрестков диаграммы K привело бы к уменьшению рода атома, соответствующего $Cl(L)$, на сколь угодно большое число. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Естественно, что существование нетривиальных классов таких длинных узлов должно быть доказано. Например, в случае компактных классических узлов 1-полнота для диаграмм $D_n(K)$ может иметь место лишь в случае, если исходная диаграмма является адекватной и все диаграммы $D_n(K)$ также являются адекватными (стр. 174). В рассматриваемом нами далее случае не предполагается даже 1-полноты для исходной диаграммы, в то время, как диаграммы $D_n(K)$ могут быть 1-полными, но **не адекватными** (и даже не полуадекватными).

Дело в том, что “старший” коэффициент скобки Кауфмана (как и младший ее коэффициент) для всех диаграмм $D_n(K)$ при всех $n > 1$ вычисляется по одной и той же формуле. Здесь мы имеем в виду старший коэффициент разложения (4.1); в случае, если диаграмма $D_2(K)$ не является 1-полной, т.е. этот коэффициент равен нулю, “настоящий” старший коэф-

эффициент вычисляется гораздо сложнее.

Поэтому важной является задача нахождения старшего и младшего коэффициентов скобки Кауфмана (4.1) для кабелей $D_n(K)$.

Этот коэффициент тесно связан с функцией M_1 (см. стр. 181). Более точно, пусть дана хордовая диаграмма на окружности (на нескольких окружностях) D . Разобьем хорды диаграммы D на два множества, образующие хордовые диаграммы D' и D'' (наборы хордовых диаграмм) и затем сосчитать коэффициенты $M_1(D')$ и $M_1(D'')$. Это приводит нас к вычислению старшего коэффициента разложения (4.1) для всех диаграмм $D_n(L)$ при $n > 1$ одновременно.

Последнее легко вытекает из утверждения (впервые доказанного в работе [Mnch]) о том, что если хордовая диаграмма \mathcal{D}' получается из хордовой диаграммы \mathcal{D} добавлением параллельной хорды к одной из хорд (безразлично, к какой именно), то $M_1(\mathcal{D}') = M_1(\mathcal{D})$. Из этого следует, в частности то, что значение функции M_1 не изменится, если вместо каждой хорды взять набор из k параллельных хорд.

При взятии n -го кабеля $D_n(K)$ в старшем состоянии мы получим две окружности, хордовые диаграммы которых — это диаграммы, получаемые из D' и D'' операцией взятия n параллельных хорд на месте каждой хорды. Последнее изображено на рис. 5.21: тройной кабель для узла восьмерка в каждом перекрестке дает три хорды либо для самой внутренней окружности, либо для самой внешней окружности.

В классическом случае дело обстоит так, что исходная хордовая диаграмма является d -диаграммой (см. опр. на стр. 163), и получающееся разбиение — это как раз разбиение хорд на два семейства таким образом, что хорды, принадлежащие одному семейству, являются незацепленными. Таким образом, если у изначальной диаграммы имеется хотя бы одна хорда, соединяющая точки на одной и той же окружности, то ни одна из диаграмм $D_n(L)$, $n > 1$, не будет 1-полной. Из этого следует, что в классическом случае 1-полнота диаграммы $D_n(L)$ влечет адекватность диаграммы L .

Сосредоточимся на случае, когда у атома имеется ровно одна докритическая (соотв., послекритическая) окружность.

В случае виртуальных диаграмм это разбиение может быть (для задан-

ной хордовой диаграммы D) произвольным. Построение диаграмм, соответствующих произвольным разбиениям, достигается посредством виртуализации. А именно, при виртуализации некоторого перекрестка в исходной диаграмме L соответствующая этому перекрестку хорда в разбиении, отвечающем диаграмме $D_n(L)$, переходит из одного семейства в другое.

Нам понадобится следующая вспомогательная конструкция. Далее до конца настоящей главы все атомы, соответствующие диаграммам виртуальных зацеплений, предполагаются ориентируемыми.

Пусть D — хордовая диаграмма на одной окружности с n хордами, и пусть $V(D)$ — соответствующий ей атом с одной черной клеткой и n вершинами. Предположим, что остов атома $V(D)$ имеет одну уникарсальную компоненту, т.е. при любой проекции остова на плоскость с сохранением A -структуры мы получим узел, а не многокомпонентное зацепление.

Пусть далее D' и D'' — две хордовые диаграммы, полученные разбиением хорд диаграммы D некоторым образом на два подмножества.

Определим диаграмму $K_{D;D',D''}$ длинного виртуального узла следующим образом (с точностью до движений объезда). В качестве атома, задающего эту диаграмму, мы возьмем атом $V(D)$; по такому атому диаграмма узла восстанавливается **с точностью до виртуализации** (и объезда). Для устранения неоднозначностей, связанных с виртуализацией, воспользуемся разбиением диаграммы D на поддиаграммы D' и D'' .

А именно, погрузим хордовую диаграмму D в плоскость следующим образом: вложим окружность этой диаграммы стандартным образом и расположим хорды, принадлежащие поддиаграмме D' , внутри окружности, а хорды, принадлежащие поддиаграмме D'' , с внешней стороны (например, внутренние — в виде прямолинейных окружностей, а внешние — в виде образов прямолинейных отрезков при инверсии). Естественно, некоторые хорды диаграммы D' могут быть зацеплены (как и хорды диаграммы D''). Далее мы заменим окрестность каждой из погруженных хорд на две дуги, образующие классический перекресток. В тех точках, где хорды имели пересечения, возникнут четверки перекрестков; пометим все такие перекрестки как виртуальные, см. рис. 5.20.

Ясно, что полученная диаграмма определена (с точностью до объезда)

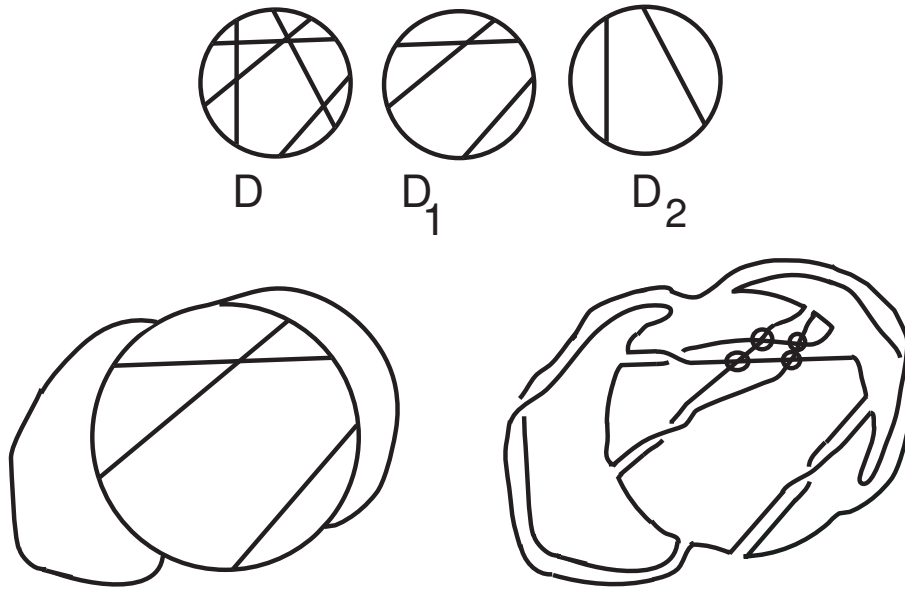


Рис. 5.20. Построение диаграммы узла $K_{D;D',D''}$

взаимным расположением пересечений хорд хордовых диаграмм D', D'' .

Полученную диаграмму мы и обозначим через $K_{D;D',D''}$. Эта конструкция понадобится нам в дальнейшем для построения минимальных диаграмм некоторых виртуальных зацеплений.

Рассмотрим n -й кабель $D_n(K_{D;D',D''})$.

Имеет место следующая

Лемма 5.10. *Для любого $n > 1$ для диаграммы $D_n(K_{D;D',D''})$ младший коэффициент в разложении скобки Кауфмана (4.1) и равен $\pm M_1(D') \cdot M_1(D'')$.*

Скажем, что в некотором состоянии окружность подходит сама к себе в перекрестке, если она инцидентна этому перекрестку дважды.

Лемма 5.10 вытекает из следующих соображений: у кабеля $D_n(K_{D;D',D''})$ в B -состоянии имеется по n окружностей, соответствующих каждой окружности B -состояния диаграммы $K_{D;D',D''}$. Две из них — “самая внутренняя” и “самая внешняя” могут подходить сами к себе в некоторых вершинах; все остальные “зажаты” между этими двумя окружностями, см. рис. 5.21. Одна из этих крайних окружностей подходит сама к себе согласно диаграмме D' , а другая — согласно диаграмме D'' . Отсюда получаем искомое

утверждение леммы 5.10.

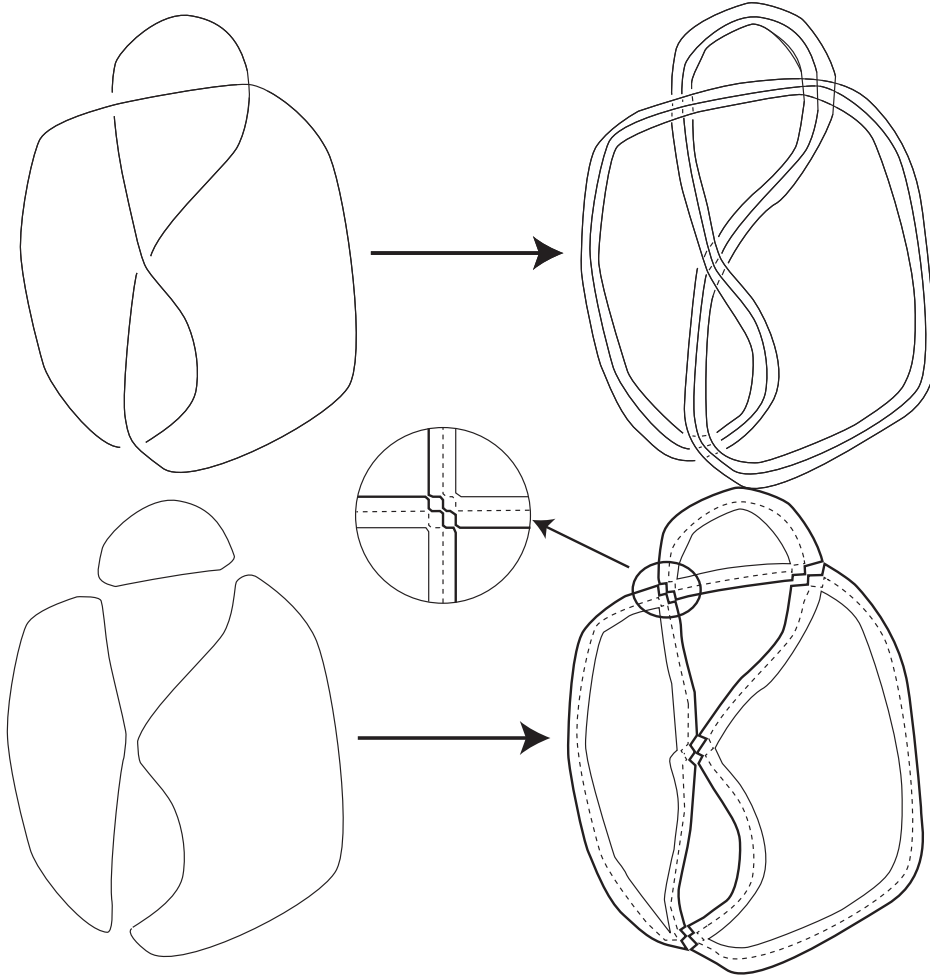


Рис. 5.21. *B*-состояние для тройного кабеля узла восьмерка

В виду леммы 5.10 актуальной является задача нахождения такого разбиения диаграммы D на две диаграммы D' и D'' , чтобы $M_1(D') \cdot M_1(D'') \neq 0$. Это часто бывает даже в том случае, когда $M_1(D) = 0$.

Естественной является задача построения таких примеров диаграмм виртуальных узлов D , для которых как старший, так и младший мономы в разложении по (4.1) не равны нулю.

Для того, чтобы удобно следить за обоими коэффициентами, предположим, что мы имеем дело с атомом с одной послекритической окружностью и одной докритической окружностью.

Кроме того, мы ограничимся случаем ориентируемых атомов. Более того, пусть дана диаграмма D , которой соответствует некоторый ориентируемый атом $V(D)$, имеющий одну послекритическую окружность (соответствующую обходу, задаваемому диаграммой D) и одну докритическую окружность. С точки зрения докритической окружности атом также может быть закодирован хордовой диаграммой — эта окружность получается из атома $V^*(D)$, который отличается от $V(D)$ цветами клеток.

Назовем эту хордовую диаграмму *двойственной* к диаграмме D и обозначим ее через D_* . Тогда имеется естественное взаимно однозначное соответствие между хордами диаграммы D и хордами диаграммы D_* (и те, и другие взаимно однозначно соответствуют вершинам атома $V(D)$). Таким образом, любое подразбиение хордовой диаграммы D на поддиаграммы D', D'' задает подразбиение диаграммы D_* на D'_*, D''_* .

Из изложенного выше вытекает

Лемма 5.11. *Пусть атом, соответствующий хордовой диаграмме D , имеет одну черную клетку и одну белую клетку. Тогда для диаграммы $D_n(K_{D;D',D''})$ старший коэффициент в разложении скобки Кауфмана (4.1) и равен $\pm M_1(D'_*) \cdot M_1(D''_*)$.*

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 5.15. *Пусть D — хордовая диаграмма, соответствующая атому с одной черной клеткой и одной белой клеткой, и пусть некоторое разбиение ее хорд на два семейства задает диаграммы D', D'' . Предположим, что диаграмме D соответствует узел (не зацепление), при этом $M_1(D') \cdot M_1(D'') \cdot M_1(D'_*) \cdot M_1(D''_*) \neq 0$. Тогда любая диаграмма длинного узла, получающаяся разрыванием диаграммы $K_{D;D',D''}$, является минимальной по количеству классических перекрестков.*

Данная теорема удобна для построения примеров к теореме 5.14.

Отметим, что если диаграмма D задает атом с одной черной клеткой и одной белой клеткой, то диаграмма $K_{D;D',D''}$ не является ни адекватной, ни полуадекватной (если множество хорд диаграммы D непусто).

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим хордовую диаграмму \mathcal{D} из $(6 + 4n) + 4$ хорд, устроенную следующим способом: первые $(6 + 4n)$ хорд образуют незамкну-

тую цепочку, в которой каждая хорда с номером i пересекается (зацеплена) с хордами с соседним(и) номерами $i-1$ (если $i > 1$) и $i+1$ (если $i < 6+4n$). Оставшиеся 4 обозначены буквами a, b, c, d , см. рис. 5.22.

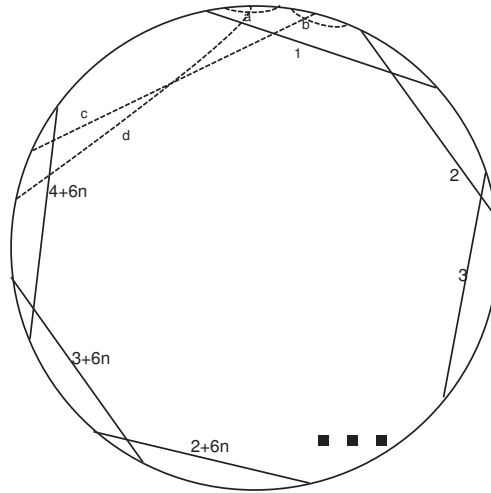


Рис. 5.22. Хордовая диаграмма, задающая минимальную виртуальную диаграмму

Замечание 5.12. Хорды a, b, c, d изображены пунктиром для наглядности. Они все являются положительными, равно как и все остальные хорды данной хордовой диаграммы.

Теперь мы можем разбить хорды диаграммы D на два семейства следующим образом: хорды a, d отнесем к D' , хорды b, c отнесем к поддиаграмме D'' , а остальные хорды распределены так: начальные три хорды $1, 2, 3$ — в семействе D' , далее две хорды $4, 5$ — в семействе D'' , следующие две хорды — в семействе D' , далее мы определяем пару соседних хорд то в одно, то в другое семейство, пока не останутся три хорды. Хорды $4n+4, 4n+5, 4n+6$ также попадут в одно семейство.

Двойственная диаграмма будет иметь вид, изображенный на рис. 5.23.

Несложно показать, что $M_1(D') \cdot M_1(D'') \cdot M_1(D'_*) \cdot M_1(D''_*) = \pm 1$.

Таким образом, мы получили бесконечный набор примеров минимальных диаграмм длинных виртуальных узлов, которые не являются ни адекватными, ни полуадекватными. Также легко видеть, что у (замыканий) этих диаграмм нет гомотопий Хованова в старшей и младшей высотах, из

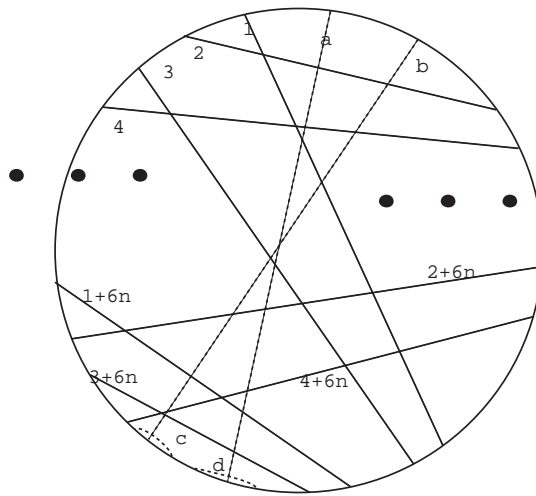


Рис. 5.23. Хордовая диаграмма, двойственная к предыдущей

чего следует, что минимальность этой диаграммы не вытекает из теоремы 5.12.

Глава 6

Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами

Целью настоящей главы является построение по диаграмме произвольного виртуального зацепления цепного комплекса, гомологии которого инвариантны при обобщенных движениях Рейдемейстера, при этом в случае классических узлов комплекс имеет те же гомологии, что и обычный комплекс Хованова, более того, построенные в предыдущей главе частные случаи (для виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы, а также для произвольных виртуальных узлов в случае коэффициентов в поле характеристики два) задают комплексы, гомологии которых изоморфны гомологиям комплекса, который строится в настоящей главе. Градуированная эйлерова характеристика этого комплекса совпадает с полиномом Джонса \hat{J} виртуального зацепления.

Конструкция, приводимая в настоящей главе, дает уточнение некоторых теорем предыдущих двух глав, в частности, теорем о затягивающем дереве для комплекса Хованова и теорем минимальности. Она является центральной в диссертации. Результаты настоящей главы опубликованы в работах [Man9] и [Ma15].

Кроме виртуальных узлов, приводимая в настоящей главе конструкция (вместе с конструкцией атомов, описанной в 4 главе) позволяет построить теорию гомологий Хованова для более широкого класса объектов — скрученных узлов (см. далее).

6.1. Введение. Основной результат.

В предыдущих главах мы построили теорию гомологий Хованова для виртуальных зацеплений при некоторых ограничениях. Более точно, комплекс Хованова над \mathbf{Z} был определен лишь для диаграмм виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы; в общем случае (для произвольных виртуальных диаграмм — которым могут соответствовать как ориентируемые, так и неориентируемые атомы) комплекс Хованова был определен лишь над полем \mathbf{Z}_2 (когда коммутативность граней куба совпадает с антикоммутативностью, и из этого вытекает тот факт, что квадрат дифференциала равен нулю). Атом (см. опр. на стр. 154) — его род, а также ориентируемость/неориентируемость — играет важную роль в построении и изучении свойств гомологий Хованова как классических, так и виртуальных узлов (при этом неориентируемость до сих пор являлась главным препятствием для построения общей теории). Для неориентируемых атомов были предложены две геометрические конструкции, переделывающие любое виртуальное зацепление в виртуальное зацепление, которому соответствует ориентируемый атом. Далее было показано, что гомологии Хованова полученного виртуального узла (зацепления) являются инвариантами исходного виртуального узла (зацепления).

Основной трудностью, которая преодолена в настоящей главе, является определение дифференциала для комплексов, соответствующих виртуальным узлам, когда приходится проверять значительно больше случаев, чем для классических узлов (соответствующие атомы были рассмотрены в разделе 5.7.1).

Эта трудность преодолевается посредством построения нового комплекса, имеющего те же гомологии, что и исходный комплекс Хованова. Первой ключевой идеей является следующая: при переходе от одного перекрестка узла к другому вдоль окружности состояния нужно менять базис алгебры Фробениуса, задающей гомологии Хованова тривиального узла (что связано с выбором локальной ориентации соответствующей окружности, происходящим из перекрестка). Вторая ключевая идея состоит в том, что вместо обычного тензорного произведения, соответствующего нескольким

окружностям в некотором состоянии, мы берем “упорядоченное произведение” соответствующих градуированных пространств. Это избавляет нас от “искусственной” операции переделывания коммутативного куба в антикоммутативный, как это проделано в работах [Kh, BN1] и в предыдущей главе.

Каждой диаграмме виртуального зацепления мы сопоставляем биградуированный комплекс, группы гомологий которого инвариантны при обобщенных движениях Рейдемейстера. Отметим некоторые важные свойства нашей конструкции.

1. Комплекс строится с использованием *атомов*; он является инвариантным при так называемой *виртуализации* (см. опр. на стр. 151). Это следует из леммы 6.1.
2. Существует естественное отображение из множества “скрученных виртуальных узлов” во множество виртуальных узлов по модулю виртуализации.

Поэтому приведенный выше подход приводит к инвариантам скрученных виртуальных узлов.

Частным случаем скрученных виртуальных узлов (узлов в ориентированных утолщениях неориентируемых двумерных поверхностей с точностью до стабилизации) являются узлы в проколоте трехмерном проективном пространстве.

Таким образом, приводимая в настоящей главе теория приводит к построению гомологий Хованова и для узлов в $\mathbf{R}P^3$.

3. В случае коэффициентов над полем \mathbf{Z}_2 комплекс в точности совпадает с комплексом, построенным в предыдущей главе.
4. Для узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы (в частности, классических узлов) этот комплекс имеет те же гомологии, что и комплекс, построенный в предыдущей главе.
5. Доказательство инвариантности является локальным; оно повторяет доказательство инвариантности в классическом случае, см., напр., [BN1]; главная трудность состоит в корректном определении дифференциала

— таком подборе знаков, при котором куб становится антикоммутативным.

Дальнейшие свойства гомологий Хованова.

Можно считать (подробнее см. [BN3]), что сам комплекс Хованова строится из комплексов элементарных кобордизмов, которые в свою очередь состоят из элементарных комплексов, порожденных окружностями. Эта теория является топологическим аналогом алгебраической теории, описанной выше: объектами категории являются наборы окружностей с метками, а морфизмами — кобордизмы.

Заметим, что построенная нами явно теория гомологий Хованова обладает рядом важных свойств. В частности, гомологии Хованова инвариантны при виртуализациях, из чего следует то, что гомологии Хованова восстанавливаются по атому, соответствующему диаграмме виртуальных узлов.

Это приводит к теории гомологий Хованова для “скрученных виртуальных узлов” в смысле Бургуана и Виро [Воц, Viro2], частным случаем которых являются узлы в трехмерном проективном пространстве $\mathbf{R}P^3$.

Отметим, что скобка Кауфмана для узлов в $\mathbf{R}P^3$ была построена Ю.В.Дроботухиной в [Дро].

Кроме того, эта теория допускает различные обобщения, построенные ранее для обычных гомологий Хованова: теория Ле, затягивающее дерево Верли-Кофмана-Чампанеркара, [Weh2, ChK] (комплекс Верли) и др.

6.2. Атомы и скрученные виртуальные узлы

Перестройки типа $2 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 2$ в комплексе Хованова будут (см. стр. 273) соответствовать *частичным дифференциалам* ∂' , из которых составляется дифференциал ∂ (см. далее); перестройка $2 \rightarrow 1$ соответствует умножению m , а перестройка $1 \rightarrow 2$ — коумножению Δ .

Напомним, что ненормированная версия полинома Джонса, выражаемая по формуле $\sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$, называется *скобкой Кауфмана*; скобка Кауфмана, как и полином Джонса, представляет собой полином Лорана от одной переменной. Полином Джонса является инвариантным при (обобщенных) движениях Рейдемейстера, [Kau7].

В предыдущей главе в результате замены переменной $a = \sqrt{-q^{-1}}$ мы получили вместо полинома Джонса X его модифицированную версию J , а также полином $\hat{J} = J \cdot (q + q^{-1})$ (см. стр. 204).

Далее в настоящей главе (как и в главе 5) мы будем иметь дело с полиномом \hat{J} и называть его *полиномом Джонса*.

Как показано в главе 4, вся необходимая для вычисления полинома Джонса информация содержится в *атоме*, соответствующем виртуальной диаграмме.

Напомним, что *атомом* (см. опр. на стр. 154) называется пара (M, Γ) : замкнутое двумерное многообразие M и четырехвалентный граф (называемый остовом) $\Gamma \subset M$, разбивающий M на черные и белые клетки с заданием шахматной раскраски двумерных клеток. Атомы рассматриваются с точностью до естественной комбинаторной эквивалентности — диффеоморфизмов соответствующих двумерных многообразий, переводящих остов в остов и сохраняющих раскраску клеток.

Вся информация о количестве окружностей в состояниях диаграммы может быть получена из атома. Иными словами, куб состояний восстанавливается по атому.

Актуальной является задача нахождения *рода виртуального зацепления* — минимального значения рода атомов, соответствующих диаграммам данного зацепления. Из определения следует, что диаграммы классических зацеплений, имеющие род нуль, представляют собой связные суммы альтернированных диаграмм.

Также этот род называется *родом Тураева*, вследствие работы [Tur2]. Как оказалось [Low], этот род имеет важное значение в изучении гомологий Хегора-Флоера классических зацеплений.

Мы будем строить комплекс Хованова исходя из виртуальной диаграммы. При этом мы покажем, что гомологии такого комплекса на самом деле инвариантны относительно виртуализации (и, следовательно, восстанавливаются по атому). Это согласуется с *гипотезой о виртуализации* (стр. 152), состоящей в следующем: если классическая диаграмма L может быть получена из классической диаграммы L' применением цепочки обобщенных движений Рейдемейстера и виртуализаций, то классические зацепления L

и L' изотопны¹. Из сказанного выше следует, что соответствующие зацепления имеют изоморфные гомологии Хованова.

Скрученные виртуальные узлы [Воц, Vigo2] являются обобщением виртуальных узлов. Они задаются узлами в ориентированных утолщениях двумерных поверхностей (не обязательно ориентируемых) и рассматриваются с точностью до стабилизации.

Частным случаем теории скрученных узлов является теория узлов в $\mathbf{R}P^3$. Ориентированным утолщением двумерности M называется ориентированное трехмерное пространство \mathcal{M}^3 расслоения над M со слоем отрезок. Рассмотрим неориентируемую поверхность S и построим расслоение над ней со слоем отрезок, тотальное пространство которого ориентируемо. Оно будет представлять собой трехмерное многообразие $S \tilde{\times} I$ с краем.

Хорошим примером такой утолщенной поверхности является $\mathbf{R}P^2 \tilde{\times} I$, что гомеоморфно $\mathbf{R}P^3 \setminus \{*\}$. Таким образом, частным случаем рассматриваемого является теория гомологий Хованова для узлов в $\mathbf{R}P^3$.

Пусть дана поверхность M и ее утолщение $\mathcal{M} = M \tilde{\times} I$. Тогда зацепления в \mathcal{M} можно рассматривать посредством их диаграмм — проекций на M .

Существуют два вида стабилизации/дестабилизации узлов в таких утолщенных поверхностях: вдоль ориентируемых циклов и вдоль неориентируемых циклов. Во втором случае к поверхности добавляется/удаляется пустая утолщенная пленка Мебиуса.

В общем положении проекция на M задает некоторый четырехвалентный граф. Для восстановления зацепления нужно указать поведение двух ветвей узла в окрестности каждого перекрестка. При этом мы не имеем корректно определенного везде направления вверх: при прохождении вдоль дезориентирующего пути направление вверх сменяется направлением вниз. Поэтому понятия “проход” и “переход” нужно считать условными. Однако, можно придать им и безусловный смысл, взяв некоторую аффинную карту, покрывающую всю двумерную поверхность, кроме некоторой одномерной ее части. На аффинной карте зададим направление навверх. При этом при переходе через границу направление может меняться в зависимости от того, является ли путь дезориентирующим. Так, например, узлы

¹Отметим, что если две классические диаграммы являются эквивалентными как виртуальные, то они эквивалентны в обычном смысле; это следует, например, из теоремы Куперберга [Куп].

в $\mathbf{R}P^3 \setminus * = \mathbf{R}P^2 \tilde{\times} I$ могут быть заданы диаграммами на $\mathbf{R}P^2$, у которых все перекрестки находятся внутри круга $D^2 \subset \mathbf{R}P^2$; при переходе через границу круга направление меняется, см. рис. 6.1.

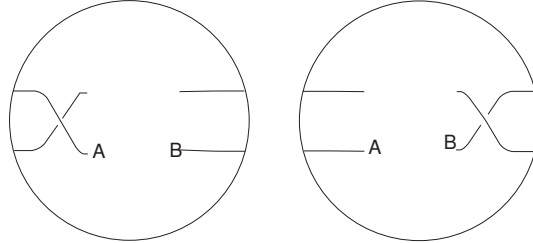


Рис. 6.1. Ветвь AB образует переход на левой картинке и проход на правой

Заметим, что узлы в таких поверхностях хорошо описываются атомами. Действительно, фиксируем ориентацию утолщенной поверхности $M \tilde{\times} I$. Далее, для диаграммы зацепления на M мы имеем остов атома — четырехвалентный граф со структурой противоположных полуребер в каждом перекрестке.

Способ приклейки черных клеток таков. Для каждой вершины X атома рассмотрим два исходящих из нее не противоположных полуребра a и b . Соответствующее виртуальное зацепление содержит две точки, проектирующиеся в вершину X , одна из которых инцидентна ребру, соответствующему a , а другая — ребру, соответствующему b . Выберем в утолщенной поверхности маленький вектор c , идущий от точки на ребре a к точке на ребре b . Если теперь базис из трех векторов $[a, b, c]$ задает локально выбранную нами ориентацию трехмерного многообразия, то мы скажем, что угол, порожденный полуребрами a и b , должен быть белым, как и противоположный ему угол. Оставшиеся два угла объявляются черными. В противном случае угол между a и b определяется как черный (для приклейки черной клетки).

Отметим, что этот выбор не зависит ни от пары (a, b) , ни от порядка, в котором берутся ребра a, b .

В случае обычных виртуальных узлов, которые являются частным случаем скрученных виртуальных узлов, описанный выше способ приклейки черных клеток согласуется со способом, описанным в главе 4.

Это приводит к следующей теореме.

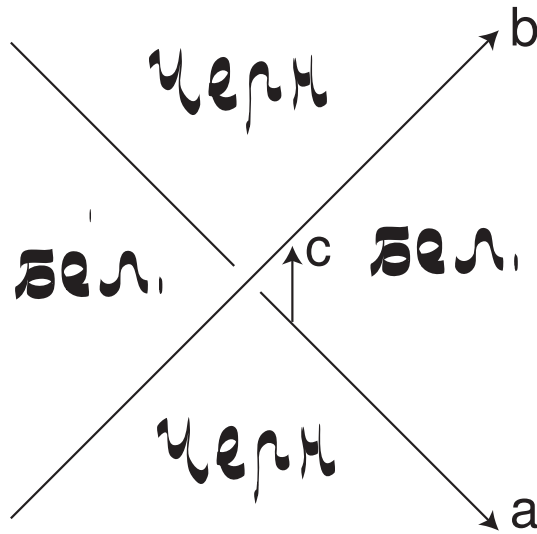


Рис. 6.2. Построение атома по диаграмме

Теорема 6.1. *Существует корректно определенное отображение из множества скрученных виртуальных узлов во множество виртуальных узлов, рассмотренных с точностью до виртуализации.*

Узлы в таких поверхностях рассматривались кроме М.Бургуана также М.Асаэдой, Й.Пржитицким и А. Сикорой в [APS] и О.Я. Виро [Viro2]. В работе [APS] была построена теория гомологий Хованова для узлов в таких поверхностях, которая существенно опиралась на дополнительную топологическую информацию, происходящую из поверхности.

Из теоремы 6.1 и инвариантности гомологий Хованова относительно виртуализации (лемма 6.1, см. далее) непосредственно следует, что теория гомологий Хованова для виртуальных узлов, к построению которой мы приступаем, обобщается на скрученные виртуальные узлы.

6.3. Определение комплекса Хованова для виртуальных узлов

Нашей целью является построение теории гомологий (с произвольными коэффициентами) для виртуальных узлов, такой, что:

1. Гомологии должны быть инвариантными относительно (обобщенных) движений Рейдемейстера.

2. В случае узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы, гомологии изоморфны гомологиям Хованова, построенным в предыдущей главе.
3. Тензорное произведение нашего комплекса на \mathbf{Z}_2 дает комплекс, построенный в разделе 5.3.
4. Градуированная эйлерова характеристика комплекса, который мы построим, совпадает с полиномом Джонса.

Замечание 6.1. *В настоящей работе в роли кольца коэффициентов может служить любое кольцо с единицей, например, \mathbf{Z} .*

При этом для простоты мы будем иногда называть модули над кольцами “векторными пространствами”, вне зависимости от того, является кольцо полем или нет.

В предыдущей главе была построена теория гомологий Хованова (с произвольными коэффициентами) для виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы. Основным препятствием в случае неориентируемых атомов является возможность перестройки типа $1 \rightarrow 1$ вдоль ребра куба. При этом мы использовали двумерный градуированный модуль V градуированной размерности $(q + q^{-1})$ над основным кольцом коэффициентов.

Если перестроек типа $1 \rightarrow 1$ не возникает, можно построить куб перестроек с использованием обычных частных дифференциалов, соответствующих умножению m (для перестроек типа $2 \rightarrow 1$) и коумножению Δ (для перестроек типа $1 \rightarrow 2$).

Наличие перестроек типа $1 \rightarrow 1$ (существенный феномен теории виртуальных узлов, возникающий именно в связи с неориентируемостью атома) серьезно усложняет проблему. Действительно, для построения биградуированной теории (без привнесения новой градуировки в основное кольцо), нам нужно построить отображение из V в V , понижающее градуировку на единицу (затем мы компенсируем это изменение градуировки, повышая ее на единицу). В пространстве V базис состоит из двух элементов градуировок $+1$ и -1 . Поэтому единственное отображение, удовлетворяющее описанным выше условиям, является нулевым.

В настоящей главе для решения этой проблемы мы привлечем две дополнительные конструкции: замена базиса в пространстве V , соответствующем окружности и порожденном $\{1, X\}$, — группе гомологий тривиального зацепления — при переходе от одного перекрестка к другому, а также использование “внешней” степени окружностей вместо их симметрической степени.

Соглашение об обозначениях. Пусть дан неупорядоченный набор векторных пространств. Упорядочим их произвольным образом: V_1, \dots, V_n .

Определим новое пространство, не зависящее от порядка, которое будем обозначать² через $V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_n$, следующим образом. Рассмотрим тензорные произведения этих пространств во всех упорядочениях и отождествим их элементы согласно следующему правилу. Пусть $x_i \in V_i, i = 1, \dots, n$. Положим $x_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma_n} = \text{sign}(\sigma)x_1 \otimes \dots \otimes x_n$.

Мы будем обозначать такое тензорное произведение $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ элементов $x_i \in X_i$ через $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$. Назовем такое тензорное произведение *упорядоченным*.

Замечание 6.2. *Чтобы избежать путаницы, заметим, что когда мы пишем $X \wedge X$, мы всегда имеем в виду, что первый элемент X и второй элемент X принадлежат разным (пусть даже изоморфным) пространствам. Таким образом $X \wedge X$ не равно нулю (в отличие от внешних произведений 1-форм на себя).*

Рассмотрим теперь виртуальную диаграмму K .

Для того, чтобы куб перестроек был антикоммутативным, нам нужно добавить две новые составляющие:



1. Каждой окружности C сопоставляется векторное пространство градуированной размерности $q + q^{-1}$ с базисом, зависящим от ориентации. А именно, пусть дана ориентация o некоторой окружности C в некотором состоянии; сопоставим этой окружности градуированное векторное пространство, порожденное элементами 1 и $X_{C,o}$. При замене ориентации o окружности на противоположную, $-o$, мы имеем $X_{C,-o} = -X_{C,o}$.

²В случае совпадения пространств $V = V_1 = \dots = V_n$ мы будем использовать также обозначение $V^{\wedge n}$.

2. Пусть дано состояние s диаграммы виртуального зацепления с k окружностями C_1, \dots, C_k в нем. Этому состоянию мы сопоставим упорядоченное тензорное произведение $V^{\wedge k}$; в качестве базиса этого произведения выберем упорядоченные тензорные произведения $(p^1)_{C_{a_1}} \wedge (p^2)_{C_{a_2}} \wedge \dots \wedge (p^k)_{C_{a_k}}$, где $(p^i)_{C_{a_i}}$ означает элемент базиса пространства $V_{C_{a_i}}$.

Таким образом, мы определили пространство цепей комплекса, соответствующего виртуальной диаграмме K , которое мы обозначим через $[[K]]$. Все базисные элементы этого пространства соответствуют состояниям диаграммы K с дополнительным выбором элементов вида ± 1 или $\pm X$ на каждой из окружностей состояния. Пусть s — состояние диаграммы K с набором окружностей C_1, \dots, C_l , при этом на данных окружностях выбраны элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Эти элементы образуют цепь комплекса $[[K]]$, которой мы сопоставляем высоту h , где h — количество разведений типа B в состоянии s , и градуировку, равную $h + (\#1) - (\#X)$, где $\#1$ — это количество элементов вида ± 1 среди $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, а $\#X$ — это количество элементов $\pm X$ среди $\gamma_1, \dots, \gamma_l$.

Нашей следующей целью является описание действия дифференциала ∂ на данном комплексе, который повышал бы высоту на единицу и не менял градуировки.

Положим $n_+ =$ число перекрестков типа , $n_- =$ число перекрестков типа .

Обозначим через $\mathcal{C}(K)$ комплекс, полученный из $[[K]]$ сдвигом высоты и градуировки: $\mathcal{C}(K) = [[K]]\{n_+ - 2n_-\}[-n_-]$, т.е. высота каждой цепи уменьшается на n_- , а градуировка увеличивается на $(n_+ - 2n_-)$; все дифференциалы сдвигаются согласованно. Здесь мы предполагаем, что $[[K]]$ является комплексом, что будет доказано ниже.

Каков бы ни был дифференциал ∂ , из построения цепей комплекса $\mathcal{C}(K)$ вытекает

Теорема 6.2. *Для любого виртуального зацепления K имеет место $\chi(\mathcal{C}(K)) = \hat{J}(K)$.*

6.3.1. Определение частичных дифференциалов

Примем, что ветви классических перекрестков ориентированы снизу вверх.

Рассмотрим некоторое состояние s диаграммы ориентированного виртуального зацепления. Выберем классический перекресток и рассмотрим все окружности состояния s , инцидентные этому перекрестку. Этим окружностей может быть либо одна, либо две. Фиксируем ориентации этих окружностей согласно ориентации ребра, исходящего в направлении направо вверх и против ориентации ребра, входящего в перекресток слева снизу, см. верхнюю часть рис. 6.3. Как мы увидим далее, в случае одной окружности эти две заданные локально ориентации могут не быть согласованными, но именно такой (несогласованный) случай мы рассматривать не будем.

Таким образом, полученная ориентация окружностей состояния s согласуется локально с ориентацией ребра, исходящего локально в направлении направо вверх (а также ребра, входящего справа снизу) и противоположно направлению ребер с левой стороны перекрестка: **Мы ориентируем полуребра, инцидентные перекрестку, так, как указано в левой нижней части рис. 6.3.** Тем самым мы фиксировали выбор образующей X на каждой окружности, инцидентной выбранному перекрестку. Отметим, что в другом перекрестке для той же окружности в том же состоянии выбор образующей X может отличаться от исходного знаком.

Частичные дифференциалы определяются согласно ориентациям окружностей в перекрестках и локальному упорядочению компонент по следующему правилу.

Описанная выше ориентация окружностей состояний является корректно определенной за исключением случая, когда ребро куба, соответствующее перекрестку, переводит одну окружность в одну окружность. **В таких ситуациях мы полагаем частичный дифференциал, соответствующий ребру, равным нулю.**

Пусть теперь мы имеем перестройку типа $1 \rightarrow 2$ или $2 \rightarrow 1$ в некотором перекрестке.

Если мы имеем дело с двумя окружностями, инцидентными перекрестку с противоположных сторон, мы упорядочиваем их таким образом, чтобы верхняя (соотв., левая) окружность считалась первой; нижняя (соотв., правая) окружность будет считаться второй. В дальнейшем при определении частичных дифференциалов мы предполагаем, что все окружности

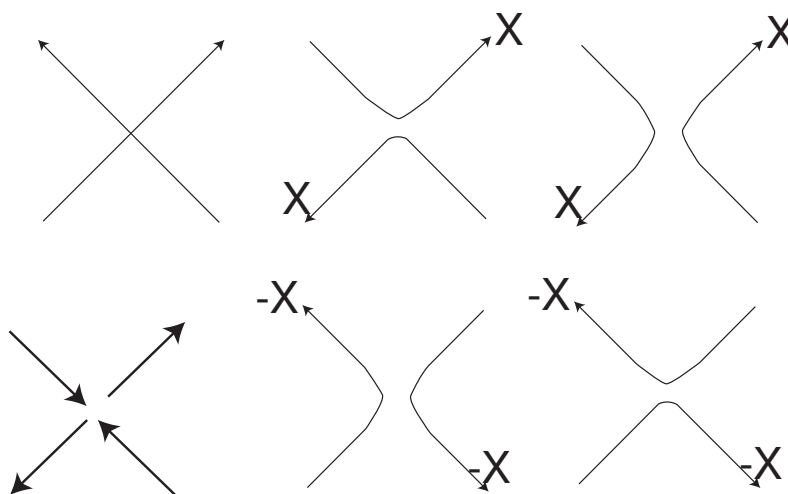


Рис. 6.3. Задание базиса в перекрестке

упорядочены таким образом, что те окружности, которые участвуют в перестройке, находятся на самых начальных местах в нашем упорядоченном тензорном произведении; этого всегда можно добиться посредством предварительной перестановки, которая приведет, быть может, к замене знака. На остальных окружностях отображение действует тождественно.

Пусть дано ребро куба перестроек, которому соответствует изменение количества окружностей в состояниях на единицу. Эта перестройка происходит в некотором перекрестке, таким образом, возможны два случая — либо две окружности перестраиваются в одну, либо одна в две. В том из двух состояний, где имеются две окружности, инцидентные данному перекрестку, они упорядочены. Кроме того, все три окружности ориентированы, тем самым выбран базис для пространства, соответствующего каждой из этих окружностей.

Зададим теперь отображения $\Delta : V \rightarrow V \wedge V$ и $m : V \wedge V \rightarrow V$ локально согласно предписанному выше выбору образующих в перекрестке и предписанному упорядочению:

$$\Delta(1) = 1_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge 1_2; \Delta(X) = X_1 \wedge X_2 \text{ и}$$

$$m(1_1 \wedge 1_2) = 1; m(X_1 \wedge 1_2) = m(1_1 \wedge X_2) = X; m(X_1 \wedge X_2) = 0, \text{ см. рис. 6.4.}$$

Отметим, что отображение m является сюръективным, а отображение

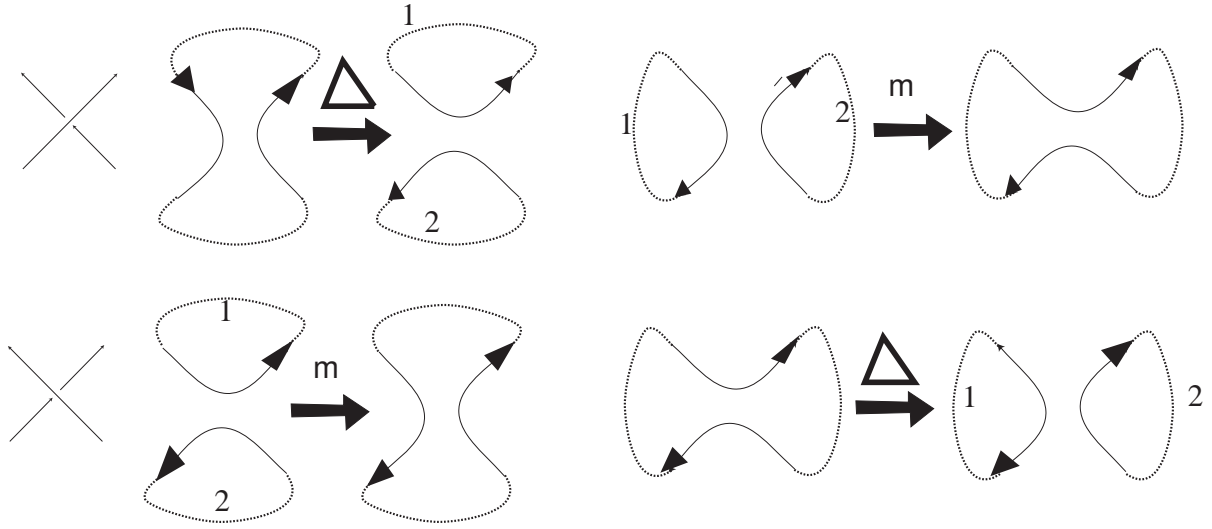


Рис. 6.4. Определение операций m и Δ

Δ — инъективным.

При наличии окружностей C_1, \dots, C_l , не инцидентных перекрестку, в котором происходит перестройка, и элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ на них, формулы частных дифференциалов ∂' переписываются в виде:

$$\begin{aligned} \partial'(1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \\ \Delta(1) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k &= 1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k + X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \partial'(X \wedge \\ \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \Delta(X) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k \\ & \text{(в случае отображения типа } 1 \rightarrow 2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \partial'(1_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \\ m(1_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k &= 1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \partial'(X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) = \\ \partial'(1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= m(X_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = m(1_1 \wedge X_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = \\ X \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \partial'(X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= m(X_1 \wedge X_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = 0 \\ & \text{(в случае отображения типа } 2 \rightarrow 1). \end{aligned}$$

После этого мы определяем дифференциал ∂ на пространстве цепей, соответствующих состоянию s как сумму всех частных дифференциалов, действующих на состояние s .

Пример. Таким образом, если мы хотим подвергнуть коумножению второй сомножитель X_2 в $X_1 \wedge X_2$, мы получим $X_1 \wedge X_2 = -X_2 \wedge X_1 \rightarrow$

$-X_2 \wedge X_3 \wedge X_1 = -X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$, где X_3 принадлежит новообразованной (третьей) компоненте (при условии, что в перекрестке, в котором происходит перестройка, после перестройки, окружность с меткой X_2 является локально первой (т.е. верхней или левой), а окружность с меткой X_3 — локально второй).

6.4. Формулировка и доказательство основной теоремы

Мы построили по заданной ориентированной диаграмме K виртуально-го зацепления пространство цепей $[[K]]$ — набор биградуированных групп с дифференциалом ∂ . По построению дифференциал повышает высоту, не меняет градуировку (напомним, что высота для состояния s определяется как количество классических перекрестков в состоянии s , разведенных способом B , а градуировка равна сумме высоты и градуировки, задаваемой окружностями).

В настоящем разделе будет доказана основная теорема.

Теорема 6.3. *Набор групп $[[K]]$ вместе с дифференциалом ∂ является корректно определенным биградуированным комплексом, т.е. $\partial^2 = 0$, при этом дифференциал сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу.*

По построению комплекс $\mathcal{C}(K)$ получается из $[[K]]$ сдвигом высоты и градуировки. Будет доказано (теорема 6.5), что гомологии комплекса $\mathcal{C}(K)$ совпадают с гомологиями, построенными в предыдущей главе для случая виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы.

Далее, из доказательства теоремы 6.3 по построению вытекает утверждение теоремы 6.2.

Комплекс с коэффициентами в поле \mathbf{Z}_2 совпадает с комплексом над \mathbf{Z}_2 , описанными в предыдущей главе, см. стр. 204.

Теорема 6.4. *Группы гомологий биградуированного комплекса $\mathcal{C}(K)$ являются инвариантами зацепления K относительно обобщенных движений Рейдемейстера.*

Мы сначала докажем теорему 6.3. После этого мы докажем теорему 6.4; ее доказательство будет более техническим и проходить по стандартной

схеме [BN1], правда, с учетом дополнительной проверки совпадения знаков частичных дифференциалов, возникающих при упорядочении и ориентации окружностей.

Перейдем к доказательству теоремы 6.3.

Сначала мы докажем две леммы, устанавливающие некоторые свойства комплекса $\mathcal{C}(K)$ и упрощающие дальнейшие рассуждения.

Пусть дана виртуальная диаграмма K . Рассмотрим некоторый ее классический перекресток U . Пусть диаграмма K' получается из K виртуализацией перекрестка U . Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между множествами классических перекрестков диаграмм K и K' . Оно порождает взаимнооднозначное соответствие ϕ между состояниями, которое задается одинаковым (в обоих случаях способом A или в обоих случаях способом B) выбором сглаживаний для соответствующих перекрестков. Отметим, что такое взаимнооднозначное соответствие не меняет количества окружностей в состояниях; это проверяется локальным сравнением разведения перекрестка U на диаграмме K и на диаграмме K' (например, это с очевидностью следует из того факта, что окружности в состояниях полностью описываются атомом, а атом не меняется при виртуализации). Ориентируем окружности соответствующих состояний *одинаково* вне окрестности перекрестка U . Отождествление состояний задает отображение $g : [[K]] \rightarrow [[K']]$ пространств цепей согласно следующему правилу. Для каждого состояния s и соответствующего ему состояния $\phi(s)$ разведения диаграммы K способом s и разведение диаграммы K' способом $\phi(s)$ вне окрестности перекрестка U совпадают. Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между ориентированными окружностями состояния s и ориентированными окружностями состояния $\phi(s)$ с согласованными (вне окрестности перекрестка) ориентациями, что приводит к корректно определенному отображению g . То же обозначение g мы будем использовать и для отображения векторных пространств (модулей), соответствующих окружностям в состояниях s и $\phi(s)$.

Каждому состоянию s диаграммы K соответствует подпространство пространства цепей комплекса $[[K]]$, которое мы обозначим через C_s . Обозначим соответствующее пространство для K' через $C_{s'}$.

Лемма 6.1. Пусть K, K' — две виртуальные диаграммы, получающиеся одна из другой посредством виртуализации. Тогда существует сохраняющее градуировку отображение пространств цепей $f : [[K]] \rightarrow [[K']]$, переводящее C_s изоморфно в $C_{s'}$ и коммутирующее с частичными дифференциалами.

В частности, если $[[K]]$ является комплексом, то таковым является и $[[K']]$; при этом их группы градуированных гомологий изоморфны.

Доказательство. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K виртуализацией перекрестка U .

Будем строить отображение f в зависимости от знака перекрестка U (\otimes или \times). По построению частичные дифференциалы комплекса $[[K']]$ совпадают с образами частичных дифференциалов комплекса $[[K]]$ относительно отображения g , за исключением, быть может, частичных дифференциалов, соответствующих перекрестку U . Дифференциалы, соответствующие U , разбивают наш куб состояний на “верхний подкуб” и “нижний подкуб”, как показано на рис. 6.5.

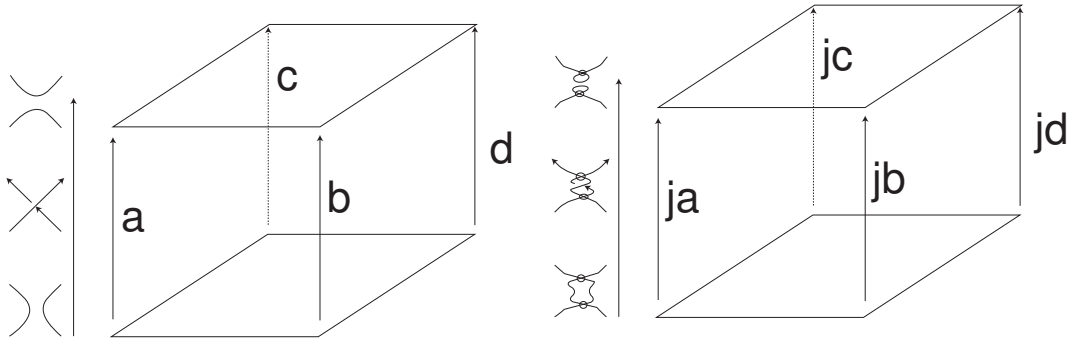


Рис. 6.5. Изменение куба при виртуализации; $j = \pm 1$.

Оставшиеся частичные дифференциалы отличаются, быть может, знаками на ребрах, соответствующих перекрестку U . Мы покажем, что эти частичные дифференциалы либо все согласуются, либо все отличаются знаком, как показано на рис. 6.5.

Действительно, базисы, в которых записываются частичные дифферен-

циалы во всех перекрестках, кроме U , согласуются для диаграмм K и K' . В этих базисах формулы для этих частичных дифференциалов выглядят одинаково. Это приводит к отождествлению цепей соответствующих комплексов. При этом изоморфизме для каждой окружности C , инцидентной перекрестку U диаграммы K , и соответствующей ей окружности $g(C)$ в соответствующем состоянии диаграммы K' мы имеем $g(X_{C,o_K}) = -X_{g(C),o_{K'}}$, где o_K и $o_{K'}$ — ориентации окружностей C и C' в перекрестке U диаграмм K и K' , выбранные согласно правилу, указанному на рис. 6.3. Последнее равенство имеет место потому, что в каждом состоянии s окружности C , подходящей справа сверху к перекрестку U диаграммы K , соответствует окружность $\phi_*(C)$ в состоянии $\phi(s)$, которая подходит к перекрестку U слева сверху, что соответствует замене X на $-X$ в базисах пространств V , отвечающих окружностям состояния, инцидентным данному перекрестку, см. рис. 6.3.

Если бы мы имели дело с обычным тензорным произведением и не обращали внимания на упорядочение окружностей, то переход $X \rightarrow -X$ оставлял бы локальные отображения типа m инвариантными и заменял Δ на $-\Delta$.

Сначала предположим, что перекресток U является положительным (\otimes). Все отображения типа m , отвечающие U , соответствуют перестройке двух окружностей (правой и левой) в одну. После виртуализации глобально левая окружность становится правой, а правая — левой, см. рис. 6.6.

Глобально мы получаем изменение знака частичных дифференциалов типа m в фиксированном базисе. Для частичных дифференциалов типа Δ мы имеем дело с одной окружностью, которая перестраивается в две — верхнюю и нижнюю; соотношение “верх–низ” не меняется при виртуализации, что оставляет частичный дифференциал типа Δ неизменным. В каждом из случаев первая компонента изображена на рисунке сплошной линией; вторая компонента изображена пунктирной линией.

Суммируя сказанное выше (и вспоминая о замене знака частичного дифференциала Δ в связи с переходом $X \rightarrow -X$), мы видим, что виртуализация положительного перекрестка меняет знаки всех частичных дифференциалов, соответствующих данному перекрестку.

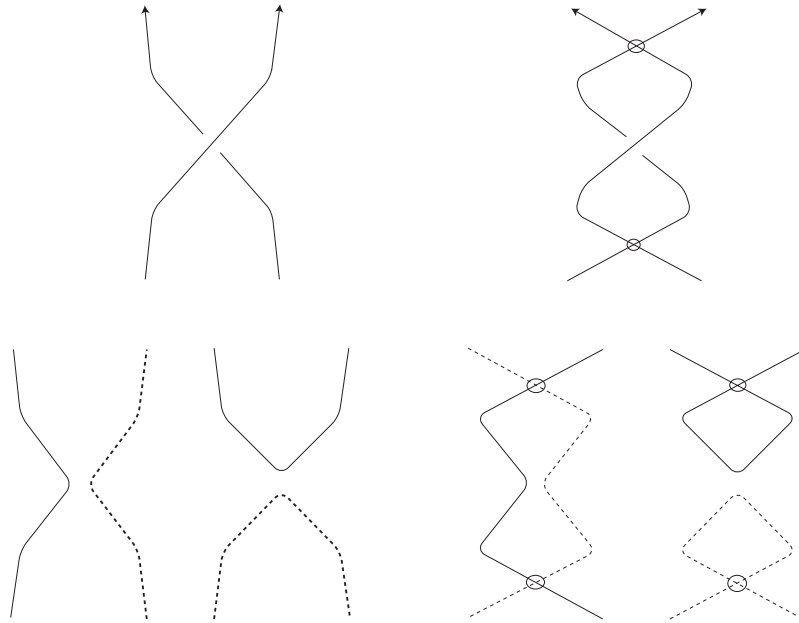


Рис. 6.6. Виртуализация

Разделим теперь кубы $[[K]]$ и $[[K']]$ на две части каждый соответственно сглаживанию в U : будем считать одну часть кубов верхней, а вторую — нижней. Определим отображение $f : [[K]] \rightarrow [[K']]$ как g на всех элементах из нижнего подкуба и как $-g$ на всех элементах из верхнего подкуба.

По построению такое отображение коммутирует с частичными дифференциалами. Действительно, коммутирование отображения f с частичными дифференциалами внутри одного из подкубов следует из того, что отображение g коммутирует с такими частичными дифференциалами. С частичными дифференциалами, идущими из нижнего подкуба в верхний подкуб, отображение g антикоммутирует, поэтому отображение f коммутирует.

Следовательно, если исходный куб был антикоммутиративным, то построенное отображение будет изоморфизмом в гомологиях.

Аналогичные рассуждения показывают, что виртуализация отрицательного перекрестка не меняет куба вообще: знак минус, который появляется на ребрах, соответствующих дифференциалу Δ , затем сокращается со знаком минус, происходящим от перестановки окружностей (правой и левой).

Тем самым лемма доказана. \square

Лемма 6.1 означает, что гомологии комплексов для двух диаграмм, отличающихся виртуализацией, изоморфны.

Таким образом, для доказательства антикоммутативности построенного выше куба $[[K]]$ для диаграммы K мы можем применить виртуализации в некоторых классических перекрестках и рассмотреть аналогичный вопрос для получающейся диаграммы K' .

Для проверки антикоммутативности куба $[[K]]$ нам необходимо рассмотреть все его двумерные грани. Каждая двумерная грань куба отвечает четырем сглаживаниям в двух классических перекрестках при фиксированных сглаживаниях в остальных $(n-2)$ классических перекрестках диаграммы K , см. рис. 6.7. Оставшиеся два перекрестка могут быть сглажены произвольным образом; четыре возможности такого сглаживания соответствуют вершинам двумерной грани.

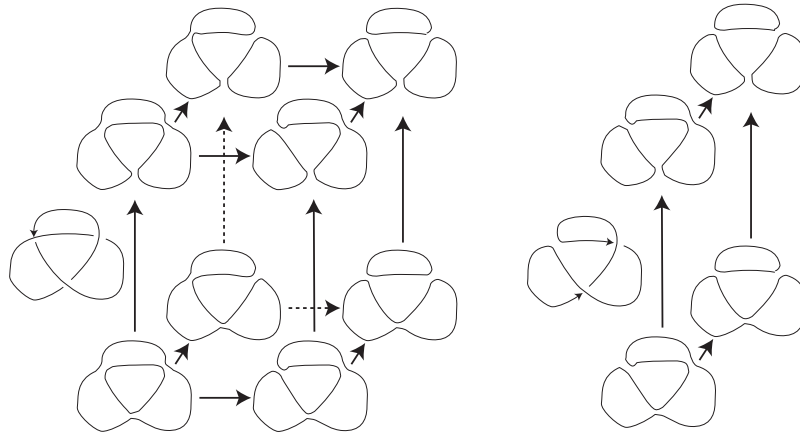


Рис. 6.7. Двумерная грань порождает атом

На рис. 6.7 куб перестроек изображен слева, а его двумерная грань и соответствующая диаграмма, порождающая атом, — справа. Атом восстанавливается по диаграмме узла, изображенной справа, по правилу, описанному на стр. 157.

Для этих четырех состояний имеется некоторое (возможно, пустое) множество общих окружностей, не инцидентных никакому из двух рассматриваемых перекрестков (в случае, изображенном на рис. 6.7, таких окружностей нет). После удаления этих окружностей мы получаем атом с двумя

вершинами.

Таким образом, нам нужно проверить, что каждая двумерная грань, которая может соответствовать некоторому атому с двумя вершинами, задает антикоммутиративную диаграмму.

В двух вершинах всякого такого атома мы имеем некоторые локальные ориентации зацепления (ориентации его ветвей). Определяя базисы, соответствующие окружностям состояний (см. рис. 6.3), можно вычислить частичные дифференциалы.

Отметим, что на полученном атоме при переходе от вершины к вершине ориентации могут не быть согласованными; а именно, ребро атома с двумя вершинами происходит из сглаживания нескольких подряд идущих ребер, каждое из которых имело свою ориентацию, происходящую из ориентации зацепления, см. рис. 6.8.

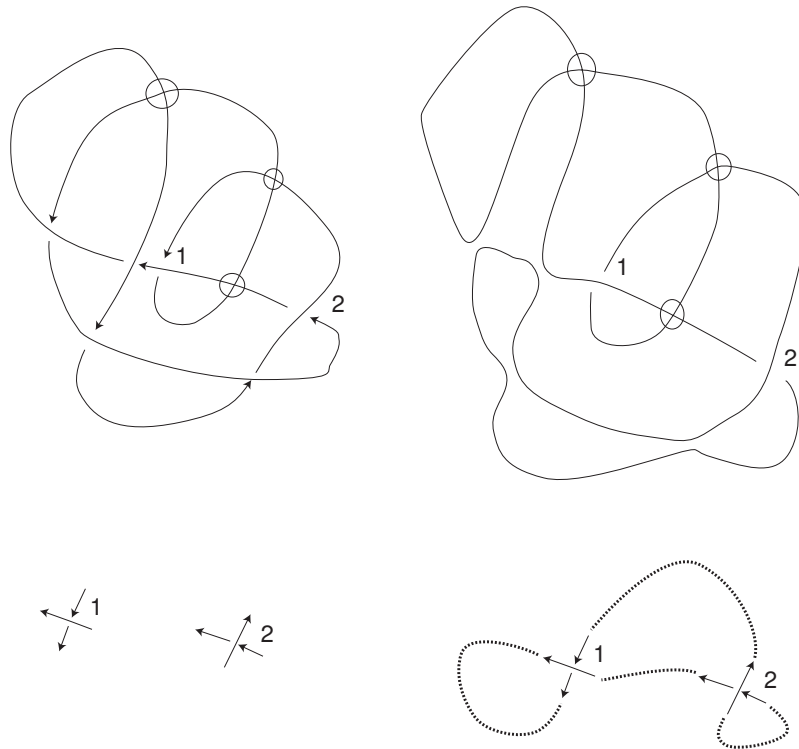
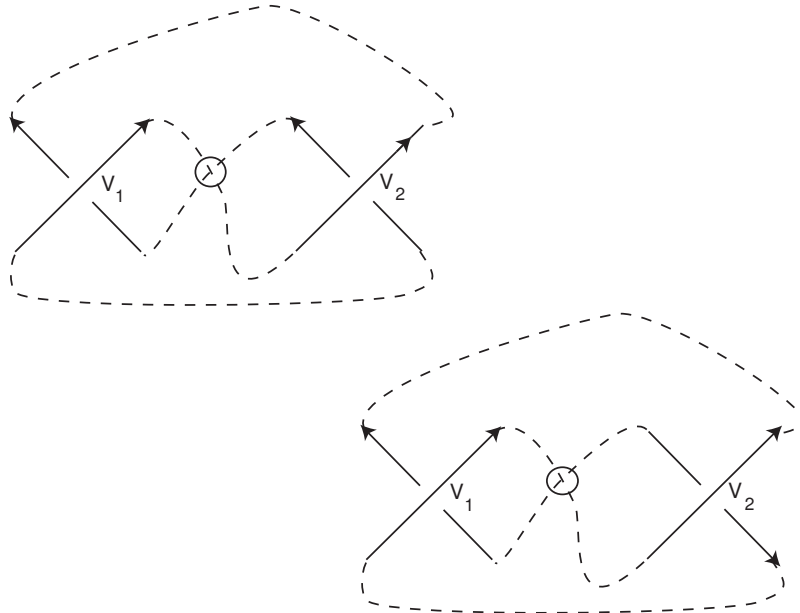


Рис. 6.8. Ориентация в перекрестках атома

Оказывается, что тип локальных ориентаций не ограничивает общности при проверке антикоммутиративности.

А именно, фиксируем атом с двумя вершинами. Всевозможные “вхождения” этого атома в куб задаются локальными ориентациями ребер в двух перекрестках. Фиксируем ориентацию одного перекрестка V_1 и выберем две различные ориентации второго перекрестка V_2 , отличающиеся друг от друга поворотом стрелок на $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке, см. рис. 6.9. Мы получим два квадрата (двумерных куба), Q_1 и Q_2 . Как наборы линейных пространств эти квадраты совпадают. Пусть C_s и $C_{s'}$ — линейные подпространства в Q_1, Q_2 , соответствующие некоторому фиксированному состоянию s и соответствующему ему состоянию s' .

Рис. 6.9. Q_1 и Q_2

Лемма 6.2. *Если Q_1 является антикоммутирующим, то антикоммутирующим и куб Q_2 . При этом существует сохраняющее градуировку отображение пространств цепей $f : Q_2 \rightarrow Q_2$, переводящее C_V изоморфно в $C_{V'}$ и коммутирующее с частичными дифференциалами.*

Доказательство леммы 6.2 во многом повторяет доказательство леммы 6.1.

После поворота направляющих стрелок по часовой стрелке в перекрестке V_2 мы получим смену знака образующей X для всех окружностей, инцидентных этому перекрестку. Для этого, как и в доказательстве леммы 6.1

мы рассматриваем два комплекса и отождествляем их пространства цепей посредством отображения g (аналогичного отображению g из леммы 6.1), так, чтобы дифференциалы, соответствующие другому перекрестку, совпадали.

После этого мы, как и в лемме 6.1, подправим отображение g до отображения f , согласующегося с частичными дифференциалами, из чего следует утверждение леммы. Если бы мы имели дело с обычным тензорным произведением, то замена $X \rightarrow -X$ привела бы к смене знака для всех частичных дифференциалов типа Δ , соответствующих перекрестку V_2 .

Далее, в случае положительного перекрестка V_2 все дифференциалы типа m , соответствующие этому перекрестку, также меняют знак.

В случае отрицательного перекрестка частичные дифференциалы вида $2 \rightarrow 1$ не меняются, а отображения вида $1 \rightarrow 2$ повторно меняют знак. Таким образом, имеет место та же ситуация, что и в лемме 6.1. Лемма 6.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 6.3.

Лемма 6.2 означает, что для проверки антикоммутативности всех возможных двумерных граней куба достаточно перечислить все атомы с двумя вершинами и проверить антикоммутативность для каждого из них: сначала мы фиксируем реализацию выбранного атома посредством погружения остова в плоскость с сохранением A -структуры; такие погружения отличаются возможной виртуализацией (которая не влияет на антикоммутативность и не меняет гомологий по лемме 6.1); в этом случае мы можем выбрать произвольную локальную ориентацию ребер и проверить соответствующий случай.

Отметим, что среди атомов с двумя вершинами есть несвязные, т.е. такие, у которых каждое ребро соединяет некоторую вершину с самой собой.

Для таких атомов в случае обычного тензорного произведения мы по очевидным причинам получаем коммутативные двумерные грани. В случае упорядоченных тензорных произведений соответствующие грани будут очевидным образом антикоммутировать.

Некоторые (связные) атомы являются несущественными в следующем смысле. Мы полагаем частичный дифференциал типа $1 \rightarrow 1$ равным ну-

лю. По причинам четности двумерная грань куба (атом) может иметь 0, 2 или 4 таких ребра. Легко проверить, что если таких ребер нет, то атом ориентируем. Если все четыре ребра задают дифференциалы типа $1 \rightarrow 1$, то доказательство следует из равенства $0 = 0$. То же самое имеет место в случае, когда в диаграмме, антикоммутативность которой проверяется, мы имеем две композиции отображений, в каждой из которых одно из двух отображений нулевое.

Остаются шесть существенных связных атомов с двумя вершинами; соответствующие им диаграммы виртуальных узлов (по одной на каждую) все изображены на рис. 6.10. Все эти атомы, за исключением первого, являются ориентируемыми.

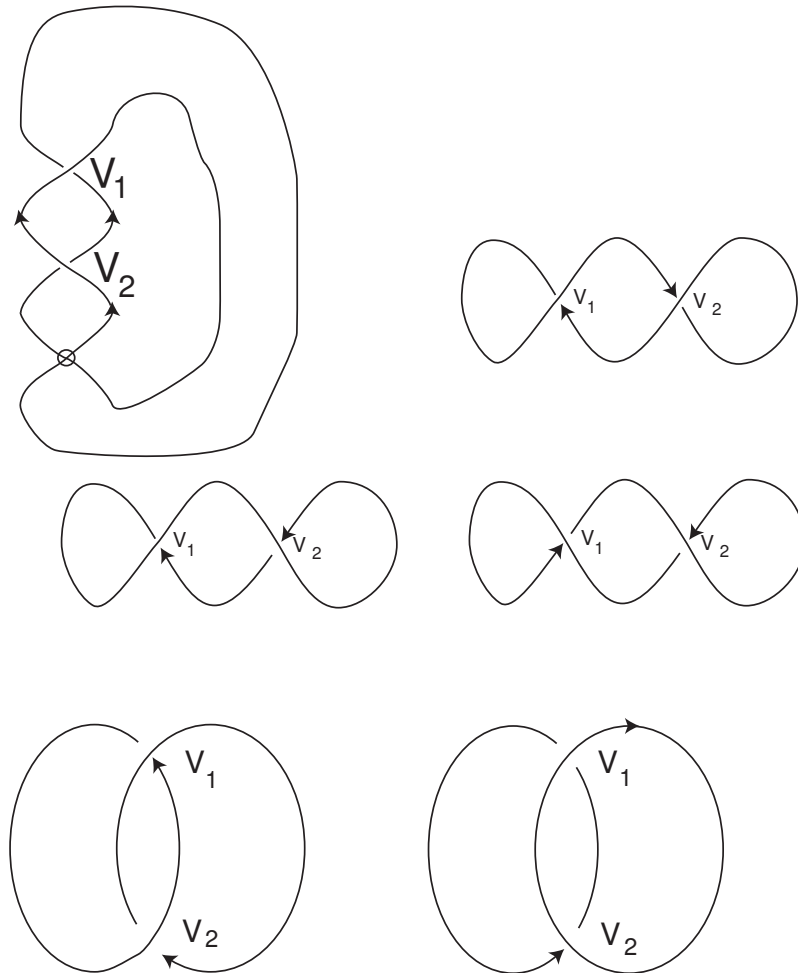


Рис. 6.10. Существенные атомы с двумя вершинами

В первом случае аккуратный подсчет, соответствующий рис. 6.11, показывает, что обе композиции дают нулевое отображение.

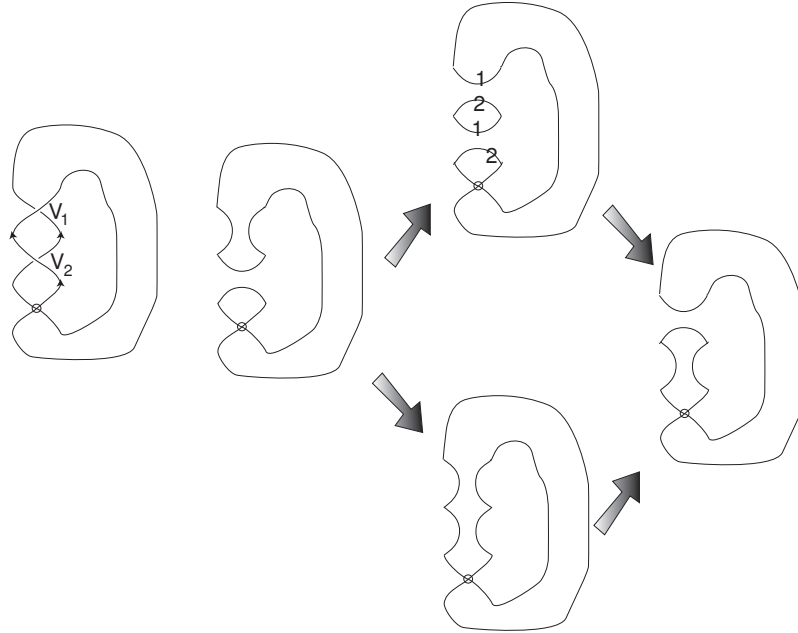


Рис. 6.11. Неориентируемый атом

Действительно, в нижней композиции мы имеем тождественно нулевое отображение. Подставляя в верхнюю композицию отображений элемент X , мы получим $\pm X \wedge X$ на первом шаге и нуль на втором шаге. При подстановке единицы мы получаем $1_{1,o_{V_1}} \wedge X_{2,o_{V_1}} + X_{1,o_{V_1}} \wedge 1_{2,o_{V_1}}$ на первом шаге; здесь первый индекс относится к номеру окружности (первая окружность — большая, вторая — малая), а второй индекс относится к номеру перекрестка. При переходе ко второму перекрестку V_2 первая и вторая окружности меняются ролями: окружность номер 1 становится нижней, а окружность номер 2 становится верхней. Кроме того, для первой окружности происходит замена базиса: X переходит в $-X$. Таким образом, мы имеем $-X \wedge 1 + 1 \wedge X$, что под действием умножения m переходит в 0.

Перейдем к проверке ориентируемых атомов. Для каждого из них фиксируем ориентацию ребер так, как показано на рис. 6.10. Такая ориентация задает согласованную ориентацию окружностей состояний в двух рассматриваемых перекрестках в смысле рис. 6.3. После этого мы можем фикси-

ровать базисы $\{1, X\}$ для всех окружностей в вершинах согласно правилу, указанному на рис. 6.3.

Далее антикоммутативность проверяется следующим образом. В случае обычного (неупорядоченного) тензорного произведения мы получили бы коммутативные диаграммы. Перенумерация окружностей может привести к появлению знака минус на некоторых ребрах. Нам нужно проверить, что для каждого атома все появляющиеся знаки в целом приведут к антикоммутативности.

Так, например, на рис. 6.12 мы имеем диаграмму узла, которой соответствует ориентированный атом с двумя вершинами. Проверка случая неупорядоченного тензорного произведения сводится к обычному свойству ассоциативности $m \circ (m \otimes 1) = m \circ (1 \otimes m)$, где окружности перенумерованы слева направо. В левой части рисунка одна пара номеров окружностей 1 2 изображена в перевернутом виде, чтобы отметить, что ребра ориентированы снизу вверх. При этом указывается, какая из окружностей является локально первой (левой), а какая — второй (правой) в соответствующем перекрестке.

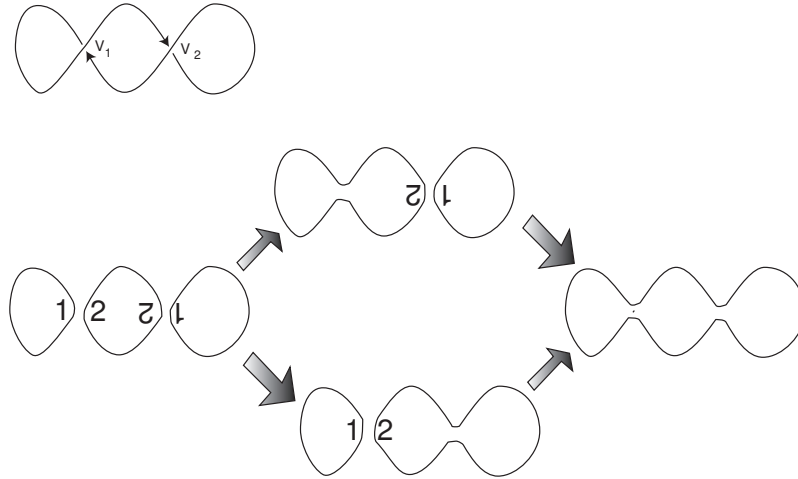


Рис. 6.12. Ориентируемый атом с двумя вершинами

Здесь нужно принять во внимание глобальное упорядочение компонент. Отметим, что в случае трех компонент умножение согласно определению должно применяться к первым двум, т.е. иметь вид $m \wedge Id$.

Поэтому, применяя $m \circ (m \wedge Id)$ к $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$, мы получим $m(m(A_1, A_2), A_3) =$

$-(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$; здесь \cdot означает обычное умножение: $X \cdot X = 0$; $X \cdot 1 = 1 \cdot X = X$; $1 \cdot 1 = 1$. Знак минус появляется по причине того, что во втором перекрестке V_2 самая правая окружность оказывается первой (левой) относительно перекрестка V_2 .

С другой стороны, если мы рассмотрим сначала второй перекресток V_2 , мы получим $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 = (A_2 \wedge A_3) \wedge A_1 = -(A_3 \wedge A_2) \wedge A_1 \rightarrow -(A_2 \cdot A_3) \wedge A_1 = A_1 \wedge (A_2 \cdot A_3)$. Применяя к полученному умножение m , мы имеем $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Антикоммутативность в случае всех остальных атомов проверяется аналогично. Отметим, что наша конструкция приводит непосредственно к антикоммутативному кубу, в отличие от исходной конструкции Хованова, где мы получали антикоммутативный куб путем добавления знаков на ребрах некоторого коммутативного куба. Тем самым теорема 6.3 доказана.

Тем самым доказана и теорема 6.2.

Замечание 6.3. *На протяжении доказательства теоремы 6.4 мы не будем заботиться о сдвиге высоты и градуировки соответствующих комплексов. Совпадение соответствующих градуировок для диаграмм, отличающихся движением Рейдемейстера, дословно повторяет классический случай, см., напр., [BN1].*

Доказательство теоремы 6.4. Заметим сначала, что комплекс $\mathcal{C}(K)$ не меняется при применении движения объезда. Следовательно, не меняются и гомологии.

Доказательство инвариантности гомологий комплекса при классических движениях Рейдемейстера проходит аналогично доказательству в предыдущей главе.

Инвариантность при первом классическом движении Рейдемейстера дословно повторяет рассуждения из предыдущей главы. Комплекс, соответствующей диаграмме с добавленным завитком имеет вид

$$[[\textcircled{\Omega}]] = \left([[\textcircled{\circlearrowleft}]] \xrightarrow{m} [[\textcircled{\Omega}]]\{1\} \right). \quad (6.1)$$

Таким образом, вспоминая, что отображение m является сюръективным, при этом подкомплекс комплекса $\textcircled{\circlearrowleft}$ слева, в котором на малой окружности стоит ± 1 , переводится отображением m на весь комплекс $\textcircled{\Omega}$ справа.

Поэтому мы приходим к тому, что весь комплекс имеет те же гомологии, что и его факторкомплекс по описанной выше ациклической части. Этот факторкомплекс имеет те же гомологии, что и $[[\textcircled{\Omega}]]$.

Аналогичным образом рассматривается и другой завиток; в этом случае используется инъективность отображения Δ .

Как и в случае первого движения Рейдемейстера, доказательство инвариантности при втором движении Рейдемейстера повторяет соответствующее доказательство Бар-Натана в классическом случае. Мы приведем его здесь потому, что оно нам понадобится при доказательстве инвариантности относительно третьего движения Рейдемейстера.

В отличие от предыдущей главы, нам нужно обратить внимание на ориентацию окружностей при доказательстве инвариантности при втором движении Рейдемейстера.

Для второго движения Рейдемейстера заметим, что можно выбрать ориентацию для всех окружностей, инцидентных данному перекрестку, локально согласованным образом (локальную структуру источник-сток, т. ч. при переходе по одной окружности от одного из двух перекрестков к другому переменная X не меняла знак), см. рис. 6.13.

Далее мы продолжаем рассуждения, учитывая, что знак при X не меняется при переходе от одного перекрестка ко второму перекрестку при движении вдоль окружности любого состояния. Для удобства чтения мы повторяем рассуждения, приведенные в гл. 5. Изначальный комплекс \mathcal{C} выглядит так (6.2):

$$\begin{array}{ccc} [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]]\{1\} & \xrightarrow{m} & [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]]\{2\} \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \\ [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]] & \longrightarrow & [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]]\{1\} \end{array} . \tag{6.2}$$

Этот комплекс содержит подкомплекс \mathcal{C}' :

$$\mathcal{C}' = \begin{array}{ccc} [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]]_1\{1\} & \xrightarrow{m} & [[\textcircled{\textcircled{\Omega}}]]\{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6.3}$$

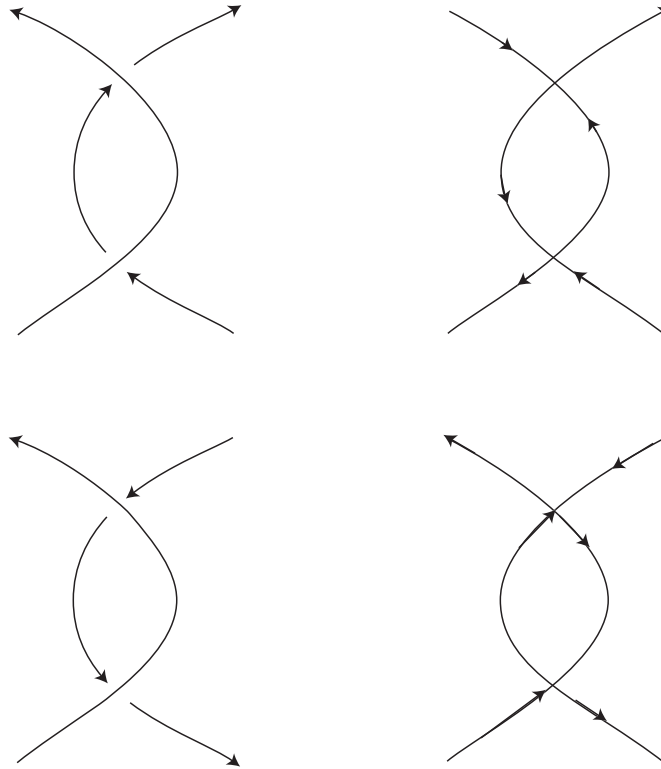


Рис. 6.13. Согласованные ориентации ребер при движении Ω_2

Здесь и далее нижний индекс 1 в левом верхнем углу означает метку на малой окружности.

Ацикличность комплекса \mathcal{C}' очевидна.

Факторизуя \mathcal{C} по \mathcal{C}' , мы получаем

$$\begin{array}{ccc}
 [[\text{loop}]]\{1\}/_{1=0} & \longrightarrow & 0 \\
 \Delta \uparrow & & \uparrow \\
 [[\text{loop}]] & \longrightarrow & [[\text{loop}]]\{1\}
 \end{array} \quad (6.4)$$

В левом верхнем углу $1 = 0$ означает, что пространство $\{1, X\}$, соответствующее малой окружности, профакторизовано по соотношению $1 = 0$, т.е. в соответствующем (упорядоченном) тензорном произведении вместо двумерного пространства стоит одномерное, порожденное элементом X .

В последнем комплексе стрелка Δ , направленная вверх, является изоморфизмом. Следовательно этот комплекс имеет те же группы гомологий, что и $[[\text{loop}]]$. Это завершает доказательство инвариантности относительно

Ω_2 (с точностью до сдвига высоты и градуировки).

Возвращаясь назад к исходному (6.2) комплексу \mathcal{C} , мы видим, что все его группы гомологий однозначно соответствуют группам гомологий комплекса, стоящего в правом нижнем углу диаграммы (6.4). Отметим также следующее обстоятельство. В изначальном комплексе все нетривиальные циклы имеют “локальную” высоту, соответствующую правому нижнему и левому верхнему углам диаграммы. Тем самым, в изначальном комплексе каждый элемент α , стоящий в левом верхнем углу, гомологичен ровно одному элементу $-\tau(\alpha)$, стоящему в правом нижнем углу. Отображение τ получается композицией отображения (Δ^{-1}) и стрелки направо, расположенной снизу на диаграмме (6.2). При третьем движении Рейдемейстера мы проведем упрощение **подкомплексов**, соответствующее второму движению Рейдемейстера. Такое упрощение будет проделано в двух местах, и приведет к двум отображениям, аналогичным τ , которые мы обозначим через τ_1 и τ_2 .

Рассмотрим теперь третье движение Рейдемейстера, изображенное на рис. 6.14.

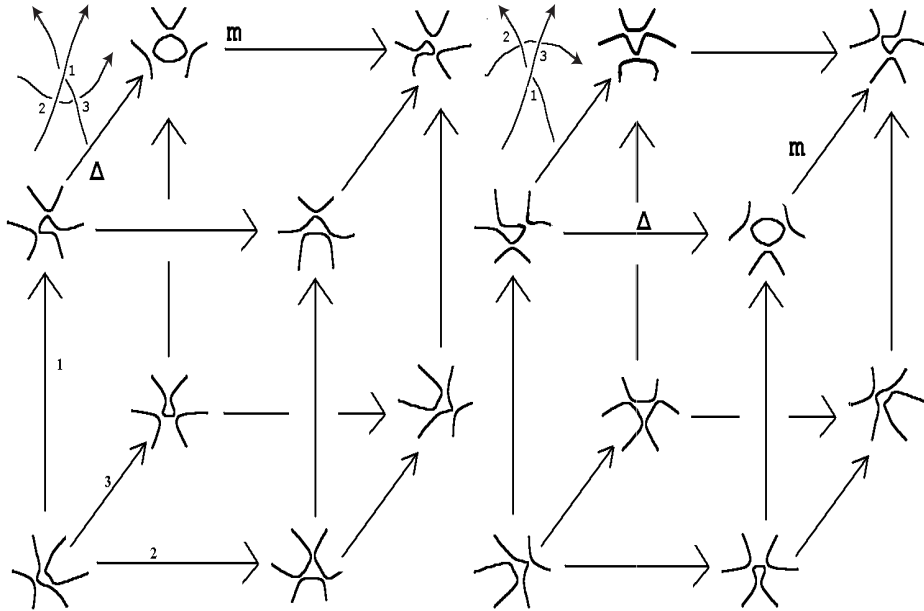


Рис. 6.14. Третье движение Рейдемейстера

Общеизвестно (см., напр., [Oht]), что любой вариант третьего движения Рейдемейстера получается композицией движений Ω_1, Ω_2 и какого-нибудь одного (заранее фиксированного) варианта третьего движения Рейдемейстера, в котором выбрана расстановка проходов-переходов и ориентации ребер. Достаточно рассмотреть только один случай, в котором ориентации выбраны как на рис. 6.16 сверху, а перекрестки разведены так как на рис. 6.14.

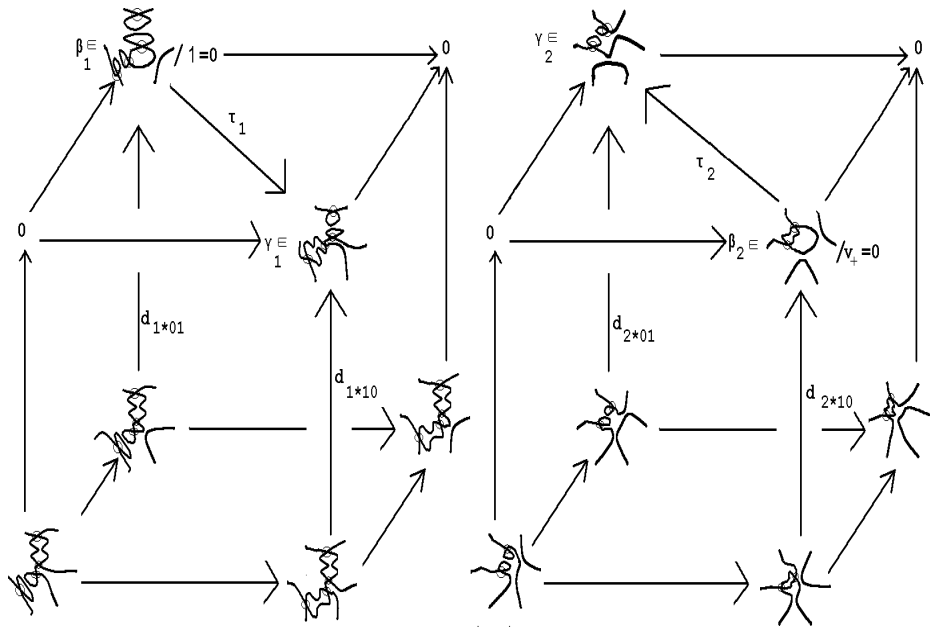
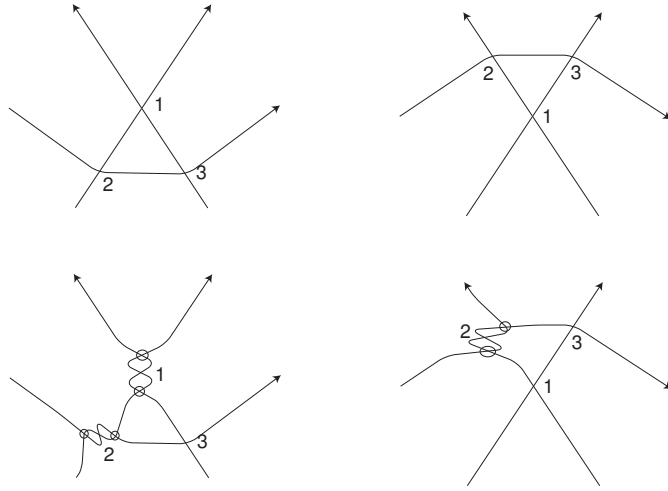


Рис. 6.15. Диаграммы после виртуализации

Применим виртуализацию к первому и второму перекресткам первой диаграммы и ко второму перекрестку второй диаграммы; после этого все локальные ориентации на двух диаграммах (в смысле образующей X) будут согласованы, см. рис. 6.15.

Положительное сглаживание обеих полученных диаграмм в первом перекрестке приводит к совпадающим (с точностью до виртуализации) диаграммам.

Отрицательные сглаживания приводят к диаграммам, получающимся одна из другой применением (виртуализаций и) вторых классических движений Рейдемейстера.

Рис. 6.16. Виртуализация перекрестков при Ω_3 для согласования базисов

Таким образом, мы можем перестроить комплексы, соответствующие двум диаграммам, так чтобы их нижние подкубы совпадали, а верхние имели одинаковые гомологии (в обоих случаях мы применили преобразование Ω_2).

В каждом перекрестке на рис. 6.16 есть локальное правило задания ориентации для всех инцидентных данному перекрестку ребер, согласно правилу, описанному на рис. 6.3. Если два перекрестка являются соседними, то такие ориентации ребра, соединяющего эти перекрестки, могут быть или не быть согласованными. Мы видим, что ориентация (определенная согласно рис. 6.3) в третьем перекрестке на левой картинке не согласуется с ориентациями в первом и втором перекрестках; аналогичным образом, на правом рисунке второй перекресток не согласуется с первым и третьим. Отметим, что правило выбора ориентации окружностей на рис. 6.3 не зависит от типа перекрестка, а лишь от направления ориентации ветвей.

В итоге мы получим куб перестроек, изображенный на рис. 6.15.

Нам остается проверить, что частичные дифференциалы, идущие снизу вверх, согласуются, т.е. отображения “снизу вверх” в обоих случаях либо совпадают, либо отличаются знаком.

В нашей ситуации единственное отличие от классического случая состоит в том, что могут возникнуть знаки “минус” в связи с упорядочением

тензорного произведения.

В обычном (классическом) случае окончательные комплексы (после факторизации) выглядят так, как показано на рис. 6.15.

Запись $1 = 0$ в левом верхнем углу рисунка 6.15 означает, что пространство, соответствующее данному состоянию, профакторизовано по подпространству, у которого на малой окружности выбран элемент 1. Здесь τ_1 и τ_2 не являются дифференциалами, а представляют собой отображения, которые переводят всякий элемент x в элемент, гомологичный элементу $-x$.

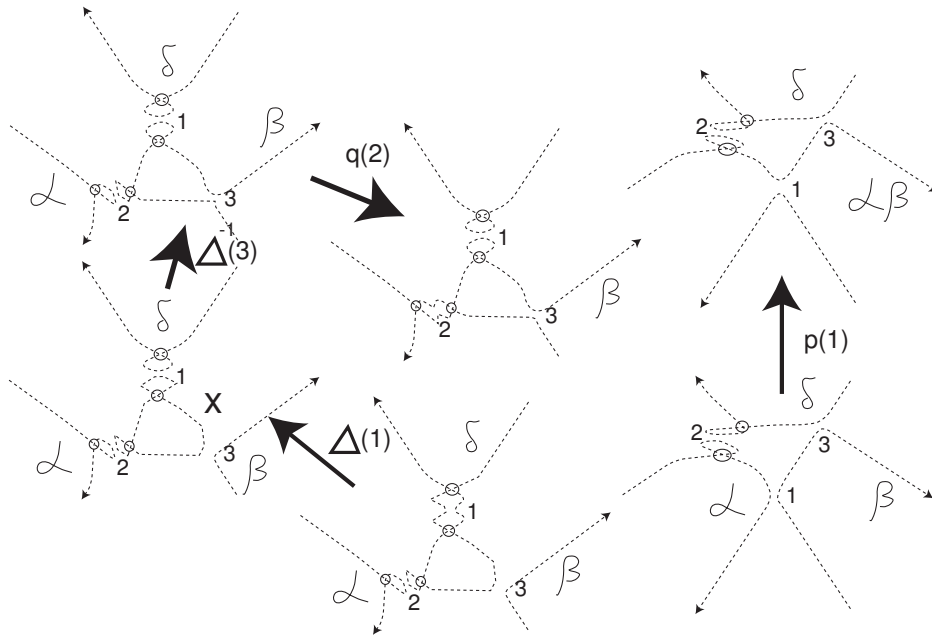
Чтобы установить изоморфизм в гомологиях, нам достаточно показать, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$ и $d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}$. В этом случае мы покажем, что отображения “снизу вверх” на обоих комплексах все отличаются знаком (ибо в обоих случаях τ_i в гомологиях представляет собой минус тождественное отображение). После этого изоморфизм гомологий двух комплексов, соответствующих третьему движению Рейдемейстера, доказывается так же, как и изоморфизм комплексов, описываемых в лемме 6.1: посредством естественного отображения, отождествляющего нижние подкубы и минус тождественного отображения, соответствующего комплексу, к которому редуцируется верхний подкуб.

Случай упорядоченного тензорного произведения отличается от “обычного” лишь знаками на ребрах.

Покажем, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$ (второй случай $d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}$ полностью аналогичен).

Рассмотрим рис. 6.15 и учтем виртуализации правой и левой диаграмм в перекрестках. Искомое равенство будет иметь вид $p = q \circ \Delta^{-1} \circ \Delta$, см. рис. 6.17.

Здесь d_{1*01} является отображением типа $1 \rightarrow 2$ (мы обозначили его через Δ); $\tau_1 = v \circ \Delta^{-1}$, где v — частичный дифференциал, а Δ^{-1} — операция, обратная к (другому) коумножению Δ (отметим, что подпространство пространства цепей, соответствующее верхнему углу куба, в котором стоит элемент β_1 , профакторизовано по соотношению $1 = 0$; т.е. маленькой окружности C мы сопоставляем одномерное пространство с образующей X). При этом соответствующее отображение коумножения становится изо-

Рис. 6.17. Проверка инвариантности относительно Ω_3

морфизмом.

Обратимся к рис. 6.17. Для каждого из отображений в скобках указан номер перекрестка, к которому оно применяется.

Отображения p и q — это обычные частичные дифференциалы; при этом либо оба являются умножениями, либо оба — коумножениями, либо оба нулями.

В случае $p = q = 0$ доказывать нечего.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Мы имеем три фрагмента окружностей α, β, δ . В исходном состоянии (к которому применяются отображения p на рисунке справа и Δ на рисунке слева) они могут принадлежать одной, двум или трем различным окружностям. Рассмотрим сначала случай, когда все фрагменты, содержащие α, β, δ , принадлежат трем разным окружностям.

Для простоты обозначений будем обозначать далее элементы алгебры V (вида 1 или $\pm X$), стоящие на этих окружностях, теми же буквами, что и фрагменты α, β, δ .

В этом случае обе операции p и q являются умножениями.

Начиная с $\alpha \wedge \beta \wedge \delta$, мы получаем на правой картинке отображение d_{2*01} :
 $p : \alpha \wedge \beta \wedge \delta \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \wedge \delta,$

где $(\alpha \cdot \beta)$ означает умножение в алгебре Фробениуса.

На левой картинке мы имеем:

$$\alpha \wedge \beta \wedge \delta = \delta \wedge \alpha \wedge \beta \xrightarrow{\Delta} \delta \wedge X \wedge \alpha \wedge \beta.$$

Здесь мы применили коумножение к δ , чтобы получить две окружности в перекрестке 1; получившиеся окружности, имеют метки, равные δ (верхняя) и X (нижняя).

Далее, $\delta \wedge X \wedge \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge X \wedge \alpha \wedge \delta$. Применим теперь Δ^{-1} к перекрестку 3: это отображение объединяет две окружности, которым соответствуют β и X .

В этом перекрестке образующая X относится к левой окружности, а β — к правой. Таким образом, мы имеем

$$-\beta \wedge X \wedge \alpha \wedge \delta = X \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \delta \xrightarrow{\Delta^{-1}} \beta \wedge \alpha \wedge \delta.$$

Далее, операция q представляет собой коумножение в перекрестке 2, в котором окружность, помеченная как β , является первой (верхней), а окружность, помеченная α , — второй. Таким образом, мы получаем: $(\alpha \cdot \beta) \wedge \delta$.

Предположим теперь, что α и β принадлежат одной окружности (в начальном положении), а δ образует другую окружность. Обозначим метку (элемент из V), соответствующую первой окружности, через A , а метку, соответствующую второй окружности, — через δ .

Отображение p имеет вид $A \wedge \delta \xrightarrow{\Delta} \sum_i A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \delta$, где $\sum_i A_{i,1} \otimes A_{i,2}$ является результатом применения коумножения к A в обычном смысле ($1 \mapsto 1 \otimes X + X \otimes 1$, $X \mapsto X \otimes X$), см. рис. 6.18.

В дальнейшем доказательстве мы для удобства записи не будем использовать знак суммирования \sum_i .

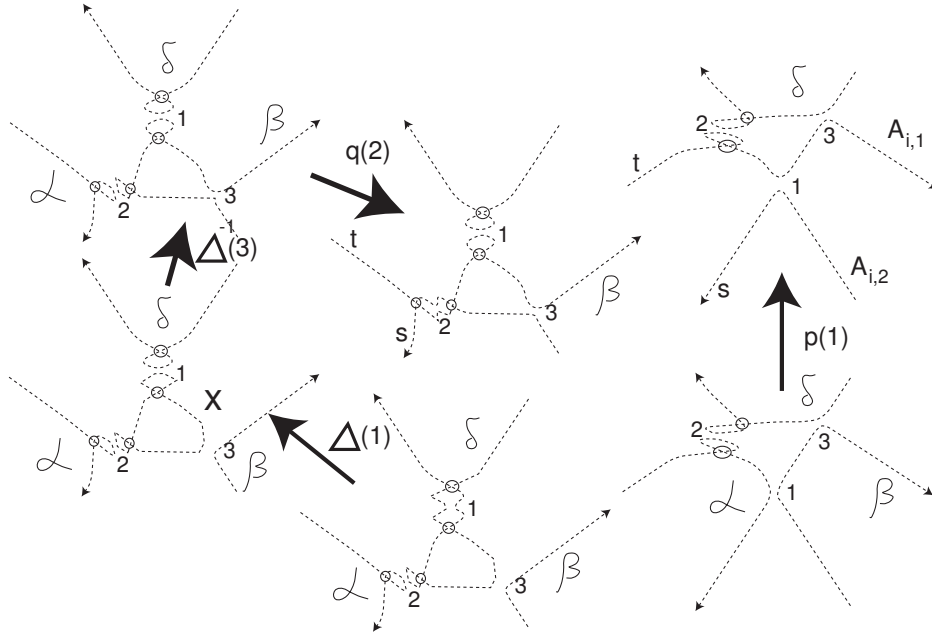
На левой картинке мы имеем

$A \wedge \delta = -\delta \wedge A \rightarrow -\delta \wedge X \wedge A$ (в первом перекрестке метка δ соответствует верхней окружности, а другая метка — всегда равная X — соответствует нижней окружности).

Тогда при отображении Δ^{-1} в третьем перекрестке мы имеем

$-\delta \wedge X \wedge A = -X \wedge A \wedge \delta \rightarrow -A \wedge \delta$. (здесь элемент X стоял на левой стороне, а A — на правой стороне).

Наконец, отображение q во втором перекрестке дает

Рис. 6.18. Проверка инвариантности при движении Ω_3

$$-A \wedge \delta \rightarrow -A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \delta,$$

Здесь $A_{i,1}$ соответствует компоненте s , которая локально проходит сверху (слева относительно второго перекрестка) в перекрестке 2, а $A_{i,2}$ соответствует локально нижней (правой относительно второго перекрестка) компоненте t . Но на правой картинке соответствующие окружности подходят друг к другу противоположным образом. Таким образом, мы имеем

$$-A_{i,1,s} \wedge A_{i,2,t} \wedge \delta.$$

В первом случае (отображение p) мы имели

$$A_{i,1,t} \wedge A_{i,2,s} \wedge \delta = -A_{i,2,s} \wedge A_{i,1,t} \wedge \delta.$$

Эти два результата совпадают по причине кокоммутативности операции Δ в обычном случае.

Аналогично можно рассмотреть все оставшиеся случаи.

Если α и δ принадлежат одной окружности (обозначим ее через α), а β — другой, мы получаем следующие отображения.

В простейшем случае (отображение p) мы имеем $\alpha \wedge \beta \rightarrow (\alpha \cdot \beta)$.

На левой картинке мы получаем $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \wedge X \wedge \beta = X \wedge \beta \wedge \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha \rightarrow (\beta \cdot \alpha) = (\alpha \cdot \beta)$.

В случае умножения, когда β и δ образуют одну окружность (обозначим

ее через β), мы получаем:

На картинке справа (отображение p): $\alpha \wedge \beta \rightarrow (\alpha \cdot \beta)$.

На левой картинке мы имеем:

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \rightarrow -\beta \wedge X \wedge \alpha = X \wedge \beta \wedge \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha \rightarrow (\beta \cdot \alpha).$$

Наконец, в случае, когда в начале мы имели всего одну окружность (обозначим ее через A), мы получим два коумножения:

$$A \rightarrow A_{i,1,t} \wedge A_{i,2,s} \text{ в простейшем случае (отображение } p)$$

и

$$A \rightarrow A \wedge X = -X \wedge A \rightarrow -A \rightarrow -A_{i,1,s} \wedge A_{i,2,t} = A_{i,2,t} \wedge A_{i,1,s}.$$

Таким образом, мы доказали равенство $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$. Доказательство равенства $d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}$ полностью аналогично. Теорема доказана. \square

Теорема 6.5. *Пусть K — диаграмма виртуального зацепления, которой соответствует ориентируемый атом. Тогда группы гомологий $Kh(K)$ совпадают с обычными группами гомологий Хованова диаграммы K , построенными в предыдущей главе.*

При доказательстве этой теоремы мы будем обозначать наш новый комплекс и его группы гомологий через $\mathcal{C}(K)$ и $Kh(K)$ соответственно, а комплекс и гомологии, определенные в предыдущей главе, — через $\mathcal{C}'(K)$ и $Kh'(K)$.

Доказательство. Сначала отметим, что нормировки для \mathcal{C} и \mathcal{C}' производятся одинаковым способом. Таким образом, мы можем забыть о дополнительных нормировках вида $[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$.

Предположим сначала, что диаграмма зацепления K выбрана таким образом, что все элементы X согласованы (т.е. при переходе по окружности C состояния от вершины P к вершине Q всегда имеет место $X_{C,o_P} = X_{C,o_Q}$, а не $X_{C,o_P} = -X_{C,o_Q}$). Это возможно, так как атом, соответствующий диаграмме K , является ориентируемым. Действительно, для ориентируемого атома можно задать глобально ориентацию всех ребер (структуру источник-сток), чтобы она соответствовала ориентации окружностей в каждом состоянии. Для заданной виртуальной диаграммы K в каждом перекрестке локальная ориентация ребер, задаваемая правилом, изображенным на рис. 6.3, может совпадать с ориентацией, происходящей из струк-

туры источник-сток атома или отличаться от нее. Применим ко всем перекресткам диаграммы K , где ориентации отличаются, виртуализацию. По лемме 6.1 гомологии комплекса $\mathcal{C}(K)$ не изменятся, а ориентации окружностей, задаваемые локально в перекрестках по правилу 6.3, будут совпадать.

После этого нам нужно лишь проследить знаки частичных дифференциалов и нумерацию окружностей во всех перекрестках.

Мы построим сохраняющее гомологии отображение между двумя кубами-комплексами. Фиксируем некоторую нумерацию классических перекрестков диаграммы K . Сопоставим ей максимальное дерево для кубов $\mathcal{C}(K)$ и $\mathcal{C}'(K)$. Это дерево состоит из всех ребер типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, *, 0, \dots, 0)$, где $\alpha_j \in \{0, 1\}$, т.е. ребро в направлении x_{k+1} принадлежит этому дереву, если все координаты x_{k+2}, \dots, x_n равны нулю, см. рис. 6.19.

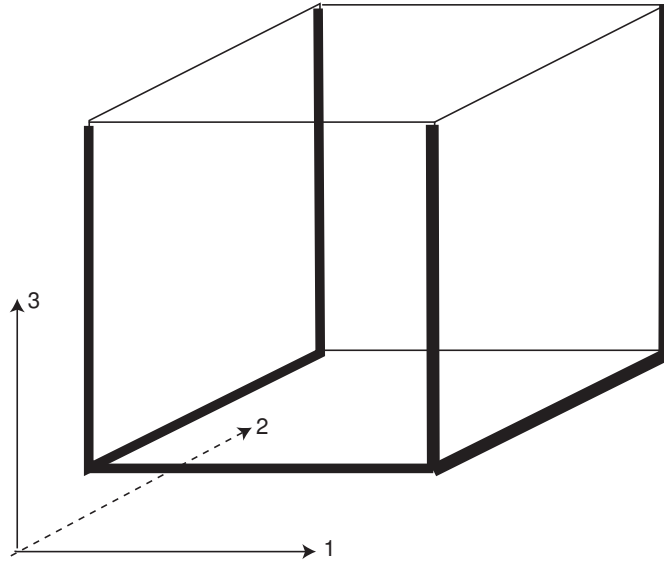


Рис. 6.19. Выбор максимального дерева

Далее, каждому состоянию s комплекса $\mathcal{C}(K)$ сопоставим упорядоченную тензорную степень $V^{\wedge k}$ (см. стр. 274), а соответствующему состоянию для комплекса $\mathcal{C}'(K)$ сопоставим $V^{\otimes k}$, где k обозначает количество окружностей в состоянии s . Перенумеруем окружности в A -состоянии некоторым образом. Тогда упорядочение определяет отображение из пространства, соответствующего A -состоянию s в $\mathcal{C}(K)$ в пространство, соответствующее некоторому состоянию $g(s)$ комплекса $\mathcal{C}'(K)$. После этого мы можем устро-

ить последовательно перенумерацию окружностей во всех вершинах дерева, чтобы отождествления цепей в соответствующих состояниях комплексов $\mathcal{C}(K)$ и $\mathcal{C}'(K)$ коммутировали с частичными дифференциалами, идущими вдоль ребер максимального дерева. Тем самым мы построим отображение всего пространства цепей куба $\mathcal{C}(K)$ в пространство цепей куба $\mathcal{C}'(K)$.

Это отображение g будет согласовано со всеми частичными дифференциалами по следующим соображениям. Для частичных дифференциалов ∂', ∂'' , соответствующих одному и тому же ребру комплексов-кубов \mathcal{C} и \mathcal{C}' , мы имеем $g \circ \partial' = \pm \partial'' \circ g$.

Если согласованность имеет место для трех из четырех ребер некоторой двумерной грани куба, то она имеет место и для четвертого ребра этой грани, ибо оба комплекса являются антикоммутиративными и ни один из частичных дифференциалов не является тождественно нулевым отображением.

Доказательство завершается рассуждением о том, что, начиная с затягивающего дерева и добавляя недостающие ребра на двумерных гранях (четвертое при наличии трех), можно последовательно исчерпать все ребра куба. Тем самым мы получим согласованность на всех ребрах. \square

Как и на стр. 214, назовем *высотой* гомологий Хованова виртуального зацепления $h(Kh(K))$ разность между старшей и младшей ненулевой квантовыми градуировками ненулевых групп гомологий Хованова виртуального зацепления K . Из теоремы 6.5 вытекает, что определение, данное в гл. 5. (использующее гомологии Хованова для ориентируемых атомов) согласуется с определением для общего случая, основанном на конструкции настоящей главы.

6.5. Обобщения

Некоторые конструкции и результаты, относящиеся к гомологиям Хованова, обобщаются на теорию гомологий для виртуальных узлов, построенную в настоящей главе.

К таким результатам относится, например, теорема о максимальном дереве для гомологий Хованова, предложенная независимо Ш. Верли, см. [Weh2] и И.Кофманом и А.Чампанеркаром [ChK], а также результаты о минимальности диаграмм, описанные в [Ma14] (см. предыдущую главу).

Более точно, в работе [Weh2] показано, что гомологии Хованова изоморфны гомологиям комплекса Верли. Напомним, что $\mathcal{K}_1(L)$ (см. стр. 167) — множество состояний диаграммы L , в которых количество окружностей равно единице. Повторяя дословно рассуждения главы 5 о затягивающем дереве, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 6.3. *Ненулевые гомологии Хованова $Kh(L)$ могут иметь биградуировки только вида $(C_1 + \beta + w, C_2 + \beta + 2w \pm 1)$, где w пробегает некоторое конечное множество целых чисел, β пробегает набор значений $\beta(s)$ для всех состояний $s \in \mathcal{K}_1(L)$, а C_1, C_2 — некоторые константы.*

Напомним (см. стр. 170), что длиной (*span*) полинома Лорана от одной переменной называется разность между показателями старшей и младшей степеней ненулевых мономов, в него входящих.

Скажем, что диаграмма L с n классическими перекрестками является *1-полной*, если $\text{span}\langle L \rangle = 4n - 4g(L)$, где g — род атома, соответствующего диаграмме L . Назовем ориентированную виртуальную диаграмму *1-полной*, если соответствующая ей неориентированная диаграмма является *1-полной*.

Доказательство леммы, приведенное в работе [Weh2] для случая классических узлов, дословно продолжается на случай виртуальных узлов. Важным частным случаем этой леммы является утверждение о толщине гомологий Хованова (понятие, введенное М.Асаэдой и Й.Пржитицким [AP]). Уточним это понятие, распространив его на все виртуальные зацепления с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим ориентированное зацепление L и его гомологии Хованова над некоторым не градуированным кольцом R . Обозначим через t_{\max} и t_{\min} максимальное и минимальное значения величины $2x - y$ по всем парам x, y таким, что группа гомологий Хованова зацепления L с биградуировкой (x, y) нетривиальна. Назовем *толщиной* (см. [Shu]) комплекса Хованова $T_R(L)$ величину $\frac{t_{\max} - t_{\min}}{2} + 1$. Эта величина является целой в случае

виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы, и может быть полуцелой в случае зацеплений, которым соответствуют неориентируемые атомы.

Назовем *толщиной* $T(L)$ виртуальной диаграммы L максимум значения толщины по всем кольцам коэффициентов.

Из леммы 6.3 и определения атома вытекает следующая

Лемма 6.4. *Для каждой связной (в смысле атома) диаграммы виртуального зацепления L имеем: $T(L) \leq g(L) + 2$.*

Скажем, что виртуальная диаграмма L является *2-полной*, если величина $g(L) + 2$ равна $T(L)$.

Теорема 4.4 утверждает, что для каждой связной виртуальной диаграммы L с n перекрестками имеет место неравенство $\text{span}\langle L \rangle \leq 4n - 4g(L)$.

Из теоремы 4.4 и леммы 6.4 вытекает следующая

Теорема 6.6. *Пусть связная виртуальная диаграмма L виртуального зацепления является 1-полной и 2-полной. Тогда она минимальна по количеству классических перекрестков в классе связных диаграмм.*

6.5.1. Гомологии зацеплений и фробениусовы расширения

В главе 5 были описаны некоторые естественные обобщения, начала которых были положены Ховановым. Оказывается, некоторые из них переносятся и на случай виртуальных узлов. Основные результаты настоящего раздела, относящиеся к случаю ориентируемых атомов, приведены в предыдущей главе.

Пусть \mathcal{R}, \mathcal{A} — коммутативные кольца, и пусть $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ — фробениусово расширение (см. стр. 242). Напомним, что *универсальная* $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкция (см. стр. 244) определяется следующим образом.

1. $\mathcal{R} = \mathbf{Z}[h, t]$.
2. $\mathcal{A} = \mathcal{R}[X]/(X^2 - hX - t)$,
3. $\deg X = 2, \deg h = 2, \deg t = 4$;
4. $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - h1 \otimes 1$

5. $\Delta(X) = X \otimes X + t1 \otimes 1$.

Теорема 6.7. *Ограничение универсальной конструкции Хованова на случай $h = 0$ (без ограничений на t) обобщается на виртуальные узлы методом, предложенным в настоящей главе.*

Основная идея доказательства теоремы 6.7 состоит в том, что Δ и m “хорошо ведут себя” при инволюции $I : 1 \rightarrow 1, X \rightarrow -X$, происходящей при замене ориентации окружности: отображение m не меняется, а Δ меняет знак. Отметим, что это имеет место только при $h = 0$ без ограничений на t . Напомним, что в предыдущей главе для коэффициентов из поля \mathbf{Z}_2 аналогичная теория была построена без ограничений на h и t .

Эта теория обобщается на случай, когда $h = 0$ (при этом все дифференциалы типа $1 \rightarrow 1$ предполагаются нулевыми). Как частный случай, это приводит к аналогу теории Ле, см. [Lee1].

Глава 7

Виртуальные косы

Настоящая глава диссертации посвящена виртуальным косам в связи с теорией виртуальных узлов. Основной результат ее — построение инварианта виртуальных кос, который является полным в случае классических кос. Этот инвариант представляет собой обобщение некоторого инварианта классических кос на виртуальный случай. (Доказательству инвариантности посвящена теорема 7.7). Утверждение о полноте этого инварианта в классическом случае следует из точности действия Гурвица, [Hur] на свободной группе; инвариантность была впервые доказана Артином [Art1].

Отметим, что к настоящему моменту проблема распознавания виртуальных кос решена. Геометрическое распознавание проходит аналогично геометрическому распознаванию виртуальных узлов, описанному в главе 2. Алгебраическое распознавание виртуальных кос впервые было получено В.Г.Бардаковым [Bar].

Приводимые в настоящей главе результаты автора впервые опубликованы в статье [Ma3], см. также [Ma1].

Вопрос о полноте предлагаемого в настоящей главе инварианта в настоящее время является открытым.

Из существования инварианта виртуальных кос, обобщающего полный инвариант классических кос, следует то, что естественное отображение группы классических кос в группу виртуальных кос является вложением. Этот результат не является новым. Другими методами он был доказан ранее Р.Фенном, Р.Риманьи и К.Рурком в работе [FRR].

Настоящая глава построена следующим образом. Сначала мы приводим все основные определения теории классических и виртуальных кос и формулируем известные результаты о виртуальных косах, в том числе и ре-

зультат В.Г.Бардакова о нормальной форме виртуальных кос. Дальнейшая часть настоящей главы посвящена предложенному автором инварианту и обсуждению его свойств.

Аналогично тому, как классические зацепления могут быть получены в виде замыкания классических кос, виртуальные зацепления представимы в виде замыкания *виртуальных кос*. Виртуальные косы были впервые упомянуты Кауфманом в его первом докладе о виртуальных узлах, [Kau1]. Первые работы о виртуальных косах принадлежат С.Камаде [Kam] и В.В.Вершинину, [Ver].

7.1. Определения виртуальных кос

Классические косы имеют много разных определений, — геометрическое (диаграммы на плоскости, рассмотренные с точностью до движений Рейдемейстера), алгебраическое (явное копредставление), алгебро-геометрическое (фундаментальная группа пространства многочленов без кратных корней) и топологическое (фундаментальная группа конфигурационного пространства набора попарно различных точек на плоскости).

Виртуальные косы — обобщения классических кос — допускают обобщение комбинаторным способом (геометрическим или алгебраическим). Они определяются как классы эквивалентности диаграмм виртуальных кос по виртуальным движениям Рейдемейстера (допускаются все движения Рейдемейстера, кроме первого классического и первого виртуального) или посредством явного копредставления. Тот факт, что мы запрещаем первое виртуальное движение Рейдемейстера, ведет к замечательной (и простой) конструкции обобщения **всех** квантовых инвариантов¹ классических узлов на случай “виртуальных узлов” с некоторой оговоркой. Здесь нужно рассматривать теорию, в которой виртуальные диаграммы факторизуются по всем обобщенным движениям, кроме первого виртуального. В этом случае говорят о теории *жестких виртуальных узлов*. При рассмотрении виртуальных *кос* существует канонический способ обобщения всех квантовых инвариантов (где k заданному оператору R — решению уравнения

¹Подробно изложение квантовых инвариантов и уравнений Янга-Бакстера см. в [Tur1, Oht]

Янга-Бакстера — добавляется оператор перестановки тензорных сомножителей, отвечающий виртуальному перекрестку). Однако такое обобщение не продолжается канонически на виртуальные узлы: в классическом случае существует некоторая нормализация, которая превращает инвариант кос в инвариант узлов — замыканий кос — и получается посредством добавления некоторого тензора, который регулирует инвариантность относительно первого классического движения Рейдемейстера. В виртуальном случае эта конструкция не проходит, потому что нужно при тех же условиях потребовать еще и инвариантность относительно первого виртуального движения Рейдемейстера. Однако в случае жестких виртуальных узлов теория квантовых инвариантов работает. Более подробно об этой теории см. в работе [Kau7].

Определение 7.1. *Диаграмма виртуальной косы* из n нитей — это набор из n гладких кривых общего положения на плоскости, соединяющих точки $(i, 1)$ с точками $(a_i, 0)$, монотонных относительно ординаты (здесь (a_1, \dots, a_n) — некоторая перестановка чисел $(1, \dots, n) \in S_n$), при этом некоторые перекрестки помечены как виртуальные, а в остальных (классических) перекрестках указано, какая ветвь задает проход, а какая — переход, см. рис. 7.1. В этом случае говорят, что коса реализует перестановку $a : 1 \mapsto a(1), \dots, n \mapsto a(n)$.

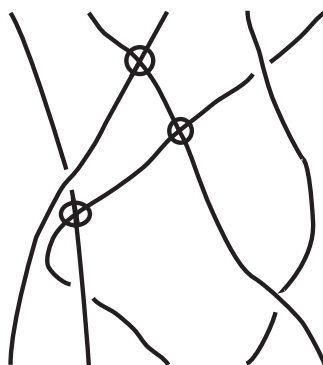


Рис. 7.1. Диаграмма виртуальной косы

Определение 7.2. *Виртуальной косой* называется класс эквивалентности диаграмм виртуальных кос по *плоским изотопиям* — непрерывным деформациям плоскости, оставляющим неподвижными все ее концевые точки

и преобразующим диаграмму косы в диаграмму косы, а также по всем движениям Рейдемейстера, оставляющим косу в классе кос, за исключением первого классического и первого виртуального.

Замечание 7.1. *Первое классическое и первое виртуальное движения Рейдемейстера невозможны по той причине, что нить косы, имеющая петлю, не может быть восходящей.*

Назовем виртуальную косу *крашеной*, если соответствующая ей перестановка тривиальна. Назовем виртуальную косу *четной*, если соответствующая ей перестановка четна.

Как и классические косы, виртуальные косы обладают естественной групповой структурой. Здесь умножение — расположение одной косы над другой (со сглаживанием в точках соединения), а взятие обратной — зеркальное отражение диаграммы относительно горизонтальной оси. Образующими группы виртуальных кос из n нитей являются: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ (классические перекрестки) и $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ (виртуальные перекрестки), см. рис. 7.2.

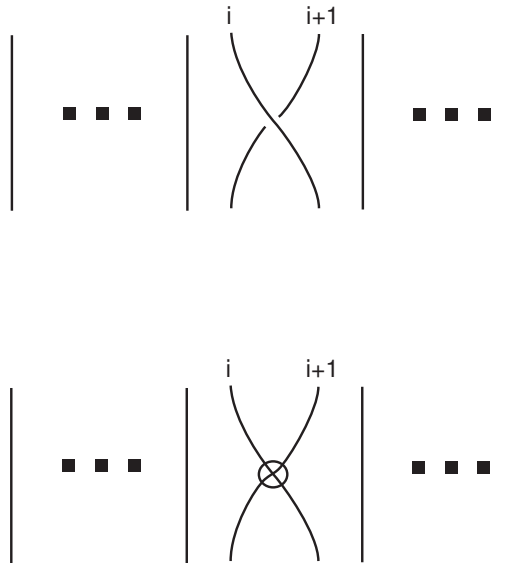


Рис. 7.2. Образующие группы виртуальных кос σ_i (сверху) и ζ_i (снизу)

Обратные элементы для образующих вида σ определены так же, как и в классическом случае. Очевидно, что для каждого $i = 1, \dots, n - 1$ справедливо $\zeta_i^2 = e$ (в силу второго виртуального движения Рейдемейстера).

Можно показать, что следующий набор соотношений [Ver] является порождающим для группы виртуальных кос:

1. (Соотношения группы кос:) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ для $i, j = 1, \dots, n-1, |i-j| \geq 2$;
 $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-2$;
2. (Соотношения группы перестановок:) $\zeta_i \zeta_j = \zeta_j \zeta_i$ для $i, j = 1, \dots, n-1, |i-j| \geq 2$;
 $\zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}, i = 1, \dots, n-2$;
 $\zeta_i^2 = e, i = 1, \dots, n-1$;
3. (Смешанные соотношения:) $\sigma_i \zeta_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \zeta_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-2$;
 $\sigma_i \zeta_j = \zeta_j \sigma_i$ для $i, j = 1, \dots, n-1, |i-j| \geq 2$.

Нетрудно заметить, что для порождения группы кос из перечисленных выше образующих можно оставить одну классическую образующую σ_1 и все виртуальные. Тогда остальные классические образующие σ_i будут сопряжены образующей σ_1 . Так, например, $\sigma_2 = \zeta_1 \zeta_2 \sigma_1 \zeta_2 \zeta_1$.

Другие вопросы, связанные с копредставлениями группы виртуальных кос и заданиями виртуальных узлов замыканием виртуальных кос (в частности с предложенным выше набором из n образующих) для произвольного числа n нитей, описаны в статьях Л.Кауфмана и С.Ламбропулу [KL, KL2].

Группа виртуальных кос из n нитей обозначаются через $VB(n)$. Если рассмотреть подгруппу группы виртуальных кос из n нитей, состоящую из кос, в записи которых не встречаются образующие σ_n и ζ_n , мы получим группу, изоморфную $VB(n-1)$. Поэтому имеют место вложения $VB(1) \subset VB(2) \subset \dots \subset VB(n) \subset \dots$

Таким образом можно говорить о *стабильной группе виртуальных кос* $VB(\infty)$ как о прямом пределе групп виртуальных кос по вложению.

7.2. Виртуальные косы и виртуальные узлы

Прежде, чем приступить к изложению основных результатов о косах и виртуальных косах, напомним несколько структурных моментов.

Аналогично случаю классических кос виртуальные косы имеют *замыкания*, см. рис. 7.3.

Скажем, что (гладкая) виртуальная диаграмма D на плоскости P *заплетается вокруг точки A* как коса, если $A \notin D$ и в каждой точке X

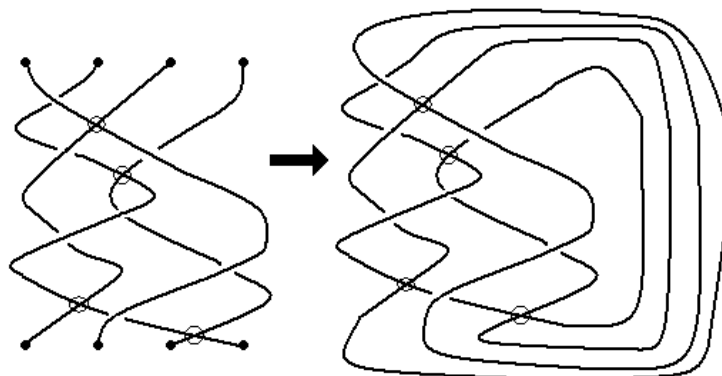


Рис. 7.3. Замыкание виртуальной косы

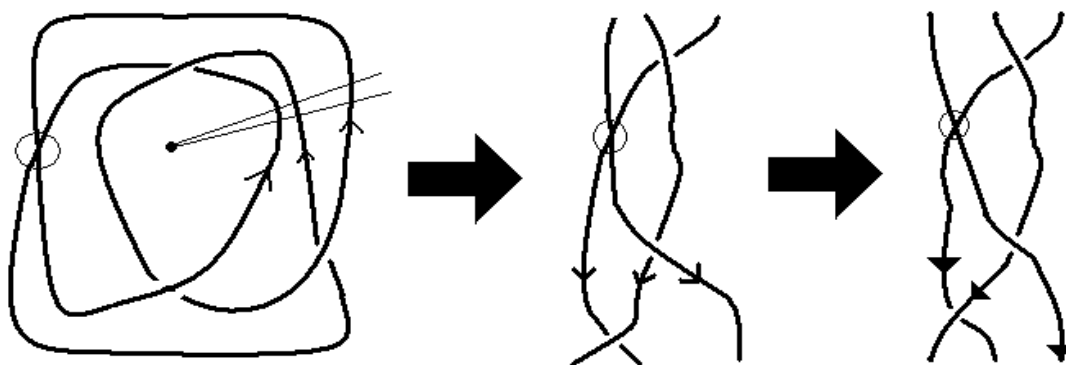


Рис. 7.4. Построение виртуальной косы по заплетающейся диаграмме

диаграммы D касательный вектор (заданный вдоль ориентации диаграммы D) направлен против часовой стрелки, если смотреть из точки A .

Заплетающаяся вокруг некоторой точки диаграмма может быть превращена в диаграмму замыкания виртуальной косы: для этого нужно “разрезать” диаграмму вдоль соседних радиусов, сектор между которыми не содержит перекрестков, и выпрямить ее, см. рис. 7.4.

Очевидно, что эквивалентные виртуальные косы задают изотопные виртуальные зацепления. Кроме того, все классы эквивалентности виртуальных зацеплений могут быть представлены как замыкания виртуальных кос.

Теорема Александра [Ale3] утверждает, что всякое зацепление может быть получено в виде замыкания некоторой косы. Ее виртуальный аналог (см., напр., [KL]) утверждает, что всякое виртуальное зацепление получа-

ется замыканием некоторой виртуальной косы.

Теорема Маркова устанавливает набор движений для кос (виртуальных кос) такой, что две косы β_1 и β_2 задают изотопные зацепления, то есть $Cl(\beta_1) \equiv Cl(\beta_2)$, тогда и только тогда, когда коса β_1 может быть перестроена в косу β_2 конечной цепочкой преобразований из фиксированного множества. В классическом случае этих преобразований два; они носят имя преобразований (движений) Маркова.

При этом в классическом случае можно считать все косы в цепочке от β_1 к β_2 являющимися классическими.

В классическом случае справедлива теорема Маркова:

Теорема 7.1. *Замыкания двух кос β_1 и β_2 представляют собой изотопные зацепления тогда и только тогда, когда β_1 может быть преобразована в β_2 последовательностью преобразований классических кос, показанных на рис. 7.5 (на правом рисунке снизу добавляемый перекресток может быть как типа \otimes , так и типа \otimes).*

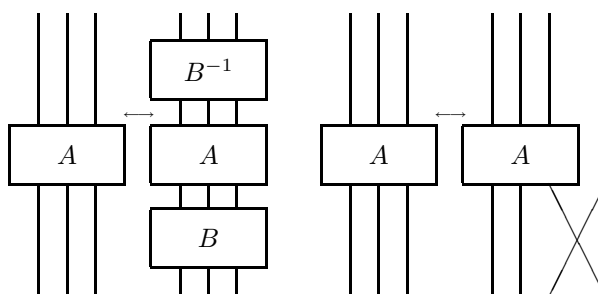


Рис. 7.5. Движения Маркова

Впервые доказательство этой теоремы было анонсировано А.А.Марковым [Mar], но это доказательство содержало пробелы. Первое безупречное доказательство (классической) теоремы Маркова принадлежит Джоан Бирман, см. [Bir2], см. также [Mor, Tra].

В русскоязычной литературе доказательство теоремы Маркова можно найти в книге автора [Ma1].

В работе [Kam] Сейичи Камада доказал аналог теоремы Маркова об эквивалентности виртуальных зацеплений, заданных замыканиями виртуальных кос в следующей формулировке.

Теорема 7.2. *Замыкания двух виртуальных кос задают изотопные виртуальные зацепления тогда и только тогда, когда эти две виртуальные косы связаны конечной последовательностью соотношений из списка (VM0)–(VM3).*

(VM0) *Эквивалентность кос.*

(VM1) *Сопряженность (в группе виртуальных кос).*

(VM2) *Правая стабилизация (добавление справа нити, которая образует с последней нитью внизу новый перекресток — положительный классический, отрицательный классический или виртуальный), а также дестабилизация (преобразование, обратное стабилизации);*

(VM3) *Правое и левое виртуальные перебрасывания, см. рис. 7.6.*

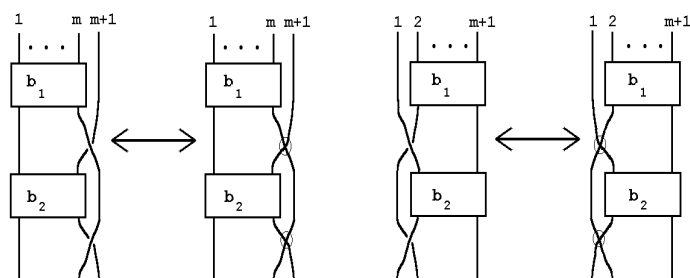


Рис. 7.6. Виртуальные перебрасывания

Движения (VM0)–(VM2) полностью аналогичны классическим преобразованиям Маркова с той лишь разницей, что в качестве сопрягающей косы (движение (VM1)) можно брать произвольную виртуальную косу, имеющую то же количество нитей, что и сопрягаемая коса. Новое движение (VM3) имеет два варианта: правый и левый. Каждое из виртуальных перебрасываний состоит в замене двух классических перекрестков, между которыми проходит нить косы, не имеющая перекрестков, двумя виртуальными перекрестками. Эти преобразования не меняют класса эквивалентности замыканий кос, так как соответствующие замыкания получаются друг из друга применением второго классического движения Рейдемейстера и второго виртуального движения Рейдемейстера.

Доказательство достаточности дано в работе [Кам].

Более удобным является набор преобразований кос, предложенный Луисом Кауфманом и Софией Ламбропулу в [KL2].

А именно, в этой работе доказана следующая

Теорема 7.3. *Замыкания двух виртуальных кос L и L' задают ориентированные виртуальные зацепления тогда и только тогда, когда коса L' получается из L применением цепочки преобразований следующих видов:*

1. Изотопия кос.
2. Сопряжение посредством классических кос,
3. Правое виртуальное L_v -преобразование,
4. Правое классическое L_v -преобразование,
5. Правое и левое L_v -прошивания.

Схематично эти движения изображены на рисунках 7.7, 7.8, 7.9.

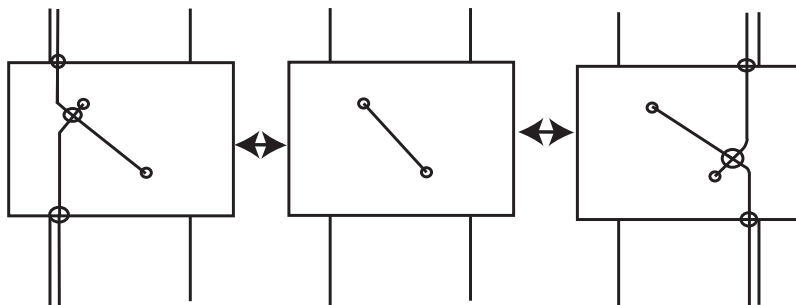


Рис. 7.7. Виртуальные L_v -преобразования L_v : правое и левое

Отметим, что доказательство теоремы Маркова в формулировке [KL2] проще и удобнее, чем доказательство [Кам]. Оно основано на так называемом L -преобразовании, которое используется как при построении замыкания виртуальной косы по виртуальному зацеплению, так и при описании простейших виртуальных эквивалентностей для зацеплений, переводимых на язык кос.

Отметим также, что в списке движений Кауфмана-Ламбропулу нет сопряжений виртуальными косами; с помощью остроумного приема авторы

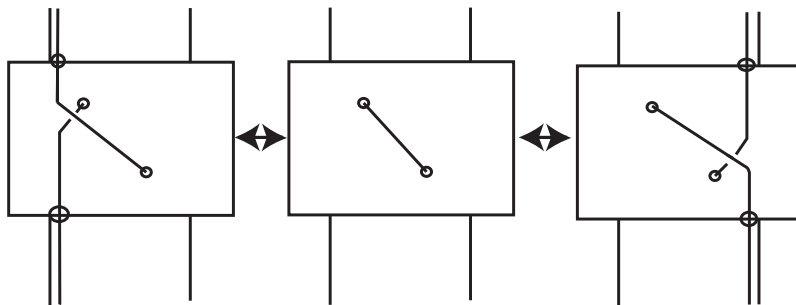
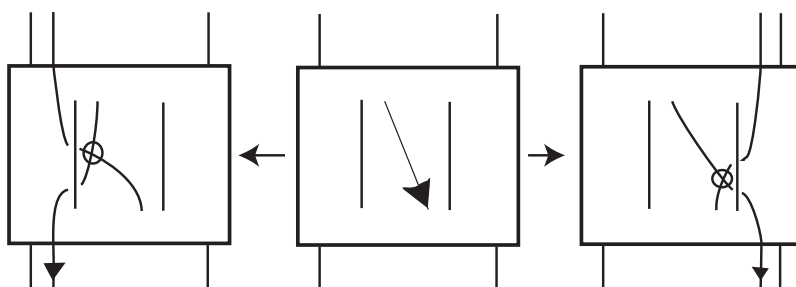
Рис. 7.8. Классические L_v -преобразования L_v : правое и левое

Рис. 7.9. Правое и левое прошивания

показали, что сопряжения посредством виртуальных кос выразимы через движения объезда и L -преобразования.

Кроме того, в работе [KL2] приведена следующая *алгебраическая* переформулировка теоремы Маркова, которая позволяет заменить движения из списка *локальными* движениями. А именно, список элементарных алгебраических эквивалентностей для виртуальных кос таков (помимо изотопий кос):

1. Виртуальные и классические сопряжения: $\zeta_i \alpha \zeta_i \sim \alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$.
2. Правая стабилизация (классическая и виртуальная): $\alpha \zeta_n \sim \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1}$
3. Алгебраическое прошивание справа (верхнее и нижнее):

$$\alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \zeta_{n-1} \sigma_n^{\mp 1}.$$

4. Алгебраическое прошивание слева (верхнее и нижнее):

$$\alpha \sim \alpha \zeta_n \zeta_{n-1} \sigma_{n-1}^{\mp 1} \zeta_n \sigma_{n-1}^{\pm 1} \zeta_{n-1} \zeta_n.$$

Во втором, третьем и четвертом случае исходная коса α имеет n нитей; преобразованная коса имеет $n + 1$ нить.

7.2.1. Представление Бурау и его обобщения

Классические группы кос обладают естественным представлением, которое носит название *представления Бурау*, [Bur]. Оно тесно связано с полиномом Александра зацеплений, получающихся замыканием соответствующих кос.

Наиболее естественным путем для поиска представлений группы кос является следующий. Можно рассмотреть группу кос $Br(n)$ и попытаться представить косы матрицами $n \times n$. Более точно, можно связать с элементом σ_i блочно-диагональную матрицу с блоком 2×2 , расположенным в двух строках $(i, i + 1)$ и двух столбцах $(i, i + 1)$ и остальными блоками размера (1×1) , равными 1 и расположенными на главной диагонали. Очевидно, что для такой матрицы выполняются соотношения коммутирования между образами σ_i, σ_j где $|i - j| \geq 2$. Если взять матрицы, соответствующие σ_i с одинаковыми диагональными (2×2) -блоками (но на разных местах), то останется только проверить соотношения $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ для матриц размера 3×3 . На этом пути легко получается представление, в котором блок матриц размера 2×2 выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 - t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Это представление называется представлением *Бурау* группы кос. Оно было впервые предложено В.Бурау, [Bur].

Полином Александра классического зацепления восстанавливается по представлению Бурау косы, замыкание которой задает данное зацепление.

Точность (т.е. мономорфность) этого представления была открытым вопросом на протяжении долгого времени. В работе [Vir2] Джоан Бирман

доказала точность этого представления для группы кос из трех нитей.

В работе [Моо91] Дж.Муди построил первый пример нетривиального элемента из ядра представления Бурау (группы кос с большим, чем три, количеством нитей).

К настоящему времени проблема точности представления Бурау решена положительно для $n \leq 3$ и отрицательно для $n \geq 5$; см., например, [Big1]. Случай $n = 4$ до сих пор открыт. В [Big2] Стивен Бигелов указал на связь между проблемой распознавания тривиального узла полиномом Джонса одной переменной и точностью представления Бурау для кос из четырех нитей.

Как известно, представление Бурау является приводимым. А именно, оно имеет собственный вектор вида $(1, \dots, 1)$.

В.В.Вершинин [Ver] предложил следующее обобщение \mathfrak{B} представления Бурау [Bur] для группы виртуальных кос. Группа виртуальных кос $VB(n)$ представляется матрицами $n \times n$; образующие σ_i, ζ_i представляются блочно-диагональными матрицами с единицами на диагонали и единственным нетривиальным блоком размера два на два в строках и столбцах $(n, n+1)$. Блочная матрица для образующей σ_i имеет вид (7.1). Для ζ_i мы используем матрицы транспозиций, а именно,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что это отображение действительно является гомоморфизмом.

Тривиальное обобщение представления Бурау на виртуальные косы, при котором виртуальной образующей соответствует транспозиция, приводит к обобщению на случай виртуальных кос *всех* квантовых инвариантов, см. [Kau7]. Тем самым мы получим представление группы виртуальных кос, которое обозначим через \mathfrak{B} .

У этого представления имеется ядро даже в случае двух нитей. Легко проверить, что для нетривиальной косы $b = (\sigma_1^2 \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1)^2$ мы имеем $\mathfrak{B}(b) = \mathfrak{B}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где e — единичная коса. Действительно, матрица

$\mathfrak{B}(\sigma_1)$ имеет следующие собственные значения: 1 и $1 - t$. Более точно,

$$C\mathfrak{B}(\sigma_1)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - t \end{pmatrix}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы имеем

$$C\mathfrak{B}(\zeta_1)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будем писать просто ζ вместо $C\mathfrak{B}(\zeta_1)C^{-1}$ и σ вместо $C\mathfrak{B}(\sigma_1)C^{-1}$.

Положим $H(k, l, m) = \sigma^k \zeta \sigma^l \zeta \sigma^m \zeta$. Тогда H является верхнетреугольной матрицей с 1 и -1 на главной диагонали если $k + l + m = 0$. Положим $k = 2, l = -1, m = -1$. Тогда $\mathfrak{B}(H(2, -1, -1)^2) = e$.

Далее будет показано, что виртуальная коса $b = (\sigma_1^2 \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1)^2$ нетривиальна.

Имеет место следующее обобщение этого представления Бурау [МаЗ]: мы рассматриваем полиномиальные матрицы от двух переменных t и q (и их обратных), берем тот же самый образ элементов σ_i , что и раньше, и матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & q \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

в качестве блока для выражения образов элементов ζ_i . Мы получим отображение, заданное на образующих группы виртуальных кос. Обозначим его через R .

Теорема 7.4. *Отображение R задает представление группы виртуальных кос.*

Доказательство. Для матрицы $R(\zeta_i)$ мы имеем $(R(\zeta_i))^2 = e$.

Далее, соотношения группы кос для образующих σ проверяются аналогично случаю представления Бурау.

Таким образом, нам нужно лишь проверить следующие соотношения:
 $R(\zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i) = R(\zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1})$ и $R(\zeta_i \zeta_{i+1} \sigma_i) = R(\sigma_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1})$.

Они проверяются непосредственно прямым вычислением для матриц размера 3×3 . \square

Отсюда вытекает следующая

Теорема 7.5. *Группа $Br(3)$ является естественно вложенной в группу $VB(3)$.*

Доказательство. Действительно, пусть β_1, β_2 — некоторые слова-косы, записанные в алфавите из букв $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$. Предположим, что они представляют одну и ту же косу в $VB(n)$. Тогда их матрицы Бурау совпадают. Так как представление Бурау для классических кос является точным для кос из трех нитей (см., напр., [Bir2, Big2]), мы видим, что β_1 и β_2 задают одну и ту же косу в $Br(3)$. \square

Вопрос о существовании точного представления группы виртуальных кос из произвольного числа нитей до настоящего времени остается открытым. Недавно независимо Д.Крамером и С.Бигеловом было построено точное представление группы классических кос для произвольного числа нитей [Кра, Big1].

7.3. Скобка Кауфмана для классических и виртуальных кос

Аналогично скобке Кауфмана для классических и виртуальных узлов определяется скобка Кауфмана для классических и виртуальных кос.

А именно, пусть D — диаграмма виртуальной косы из n нитей. Рассмотрим множество ее классических перекрестков. В каждом из них мы можем *развести* эту диаграмму одним из способов — $A : \otimes \rightarrow \oslash$ или $B : \otimes \rightarrow \ominus$ — так же, как мы разводили диаграммы зацеплений. После такого разведения диаграмма может перестать быть диаграммой косы. Разведя таким образом все перекрестки, мы получим некоторое состояние s диаграммы. В этом состоянии мы имеем (быть может пустое) множество замкнутых окружностей и набор из n отрезков, соединяющих концевые

точки изначальной косы. Таких концевых точек $2n$, следовательно, возможностей для их попарного соединения (быть может, с виртуальными перекрестками) имеется $(2n - 1)!!$. Обозначим такие диаграммы через α_i .

В отличие от виртуальных зацеплений, где диаграммы разводятся до набора окружностей, и скобка Кауфмана представляет собой полином Лорана, в случае кос конечными результатами разведения являются диаграммы, состоящие из одной из диаграмм α_i и конечного набора отдельно стоящих окружностей.



Определим теперь скобку Кауфмана для диаграммы b в состоянии s как соответствующую диаграмму α_i , взятую с коэффициентом, равным $(-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)}$, где $\gamma(s)$ — количество отдельно стоящих окружностей в состоянии s .

После этого для диаграммы косы b положим

$$\langle b \rangle = \sum_s a^{(\alpha(s) - \beta(s))} \langle b|s \rangle, \quad (7.2)$$

где $\langle |s \rangle$ — диаграмма, полученная из диаграммы косы b разведением согласно состоянию s , $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — количества перекрестков, разведенных положительным и отрицательным способом соответственно.

Полученная скобка Кауфмана является *инвариантом кос*, так как в изотопиях кос не участвует первое движение Рейдемейстера Ω_1 ; инвариантность относительно движений Ω_2, Ω_3 проверяется непосредственно.

Можно также рассматривать и скобку Кауфмана для замыканий кос; в этом случае ее нужно нормировать стандартным способом, умножив на $(-a)^{-3w}$, где w — число закрученности косы (количество перекрестков типа  минус количество перекрестков типа .

7.4. Нормальная форма виртуальных кос по В.Г.Бардакову

Среди виртуальных кос выделяются *крашенные косы*. А именно, зададим группу перестановок \mathcal{S}_n образующими — транспозициями p_i , где p_i переставляет элементы i и $i + 1$. Тогда имеется естественный гомоморфизм $VB(n) \rightarrow \mathcal{S}_n$, задаваемый по правилу $\sigma_i \mapsto p_i; \zeta_i \mapsto p_i$. Ядро этого гомо-

морфизма называется *группой крашенных виртуальных кос из n нитей* и обозначается через $PVB(n)$.

Крашенные виртуальные косы $PVB(n)$ образуют нормальную подгруппу в группе виртуальных кос $VB(n)$. Факторгруппа $PVB(n)/VB(n)$ изоморфна группе S_n перестановок из n элементов.

Очевидно, что если для двух виртуальных кос α, β , имеет место равенство $\alpha = \beta$, то $\alpha\beta^{-1} = 1$. Единичная коса лежит в $PVB(n)$, поэтому задача распознавания виртуальных кос сводится к задаче распознавания крашенных виртуальных кос.

В.Г.Бардаков в [Bar] доказал следующую теорему.

Теорема 7.6. ([Bar]) *Пусть $n \geq 1$. Тогда группа $PVB(n)$ изоморфна полупрямому произведению группы VP_{n-1} и группы V_{n-1}^* , причем группа V_{n-1}^* свободна и при $i > 1$ бесконечно порождена.*

В работе Бардакова явно выписывается способ разбиения группы крашенных кос в полупрямую сумму, описанный в теореме 7.6, что приводит к алгоритму распознавания крашенных виртуальных кос, а значит, и всех виртуальных кос.

Далее, имеет место следующий изоморфизм групп:

$$VP_n \cong V_{n-1}^* \wr VP_{n-1} \cong \dots \cong V_{n-1}^* \wr (V_{n-2}^* \wr (\dots \wr (V_2^* \wr V_1^*))) \dots, \quad (7.3)$$

при этом все группы V_j^* при $j = 1, \dots, n-1$ являются свободными.

Следовательно, в каждой из этих групп V_j^* проблема тождества слов разрешима, что по индукции приводит к разрешимости тождества слов в группах $PVB(2), PVB(3), PVB(4), \dots, PVB(n)$.

7.5. Инвариант виртуальных кос

В настоящем разделе мы приведем инвариант \mathcal{F} виртуальных кос. Его ограничение на классические косы является полным инвариантом; это следует из того, что такое ограничение соответствует точному действию группы классических кос на свободной бесконечнопорожденной группе. Из полноты ограничения инварианта \mathcal{F} на случай классических кос вытекает, что

классическая группа кос является подгруппой виртуальной группы кос из того же числа нитей. Более точно, так как мы имеем инвариант виртуальных кос, являющийся полным инвариантом для классических кос, то для любых двух классических кос, которые эквивалентны как элементы группы виртуальных кос, значения этого инварианта равны; в силу полноты мы заключаем, что эти классические косы представляют один и тот же элемент в соответствующей группе классических кос. До сих пор неизвестно, является ли этот инвариант полным или нет.

Назовем диаграмму виртуальной косы *регулярной*, если любые два ее перекрестка имеют различные ординаты.

Замечание 7.2. *В дальнейшем в настоящем разделе количество нитей косы будет обозначаться через n (считаться равным n), если не оговорено противное.*

Замечание 7.3. *Регулярные диаграммы виртуальных кос и соответствующие слова-косы будут обозначаться греческими буквами (возможно с индексами). Виртуальные косы будут обозначаться латинскими буквами (возможно с индексами).*

Замечание 7.4. *Мы также будем употреблять слово “нить” относительно слова-косы (записи косы по образующим), подразумевая под этим нить соответствующей косы.*

Опишем построение слова по заданной регулярной диаграмме виртуальной косы. Будем двигаться вдоль оси Oy от уровня $\{y = 1\}$ вниз до уровня $\{y = 0\}$ и следить за теми уровнями $\{y = t \in [0, 1]\}$, на которых имеются перекрестки. Каждый такой перекресток соответствует перестановке двух нитей с (локальными) номерами i и $(i + 1)$ для некоторого $i = 1, \dots, n - 1$. Если перекресток является виртуальным, мы будем писать ζ_i ; если он является классическим, мы выписываем σ_i в случае, если переход соответствует направлению “северо-запад — юго-восток” и σ_i^{-1} в противном случае.

Таким образом мы получаем слово по заданной регулярной диаграмме виртуальной косы, см. рис. 7.10.

Основным вопросом теории виртуальных кос является вопрос распознавания:

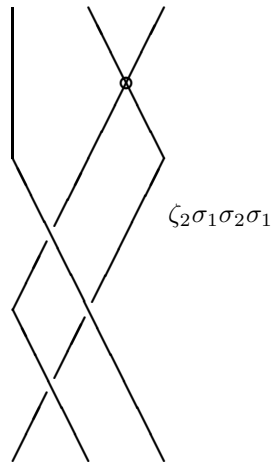


Рис. 7.10. Виртуальная коса и соответствующее ей слово

Как распознать, задают ли две (собственные) диаграммы β_1 и β_2 виртуальных кос одну и ту же косу b или нет. Как было сказано ранее в настоящей главе, ответ на этот вопрос дает работа Бардакова.

Естественным образом возникает задача построения **полного** инварианта виртуальных кос. Частичным ответом на эту задачу является предлагаемая ниже конструкция инварианта \mathcal{F} .

7.5.1. Построение основного инварианта

Пусть G — свободная группа, порожденная образующими a_1, \dots, a_n, t . Пусть E_i — фактор-множество правых смежных классов $\{a_i\} \setminus G$ при $i = 1, \dots, n$.

Определение 7.3. Виртуальной n -системой назовем множество элементов $\{e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \dots, e_n \in E_n\}$.

Нашей первоочередной целью является построение инвариантного отображения \mathcal{F} (не гомоморфного) из множества всех виртуальных кос из n нитей во множество виртуальных n -систем.

Пусть β — слово-коса. Будем строить соответствующую виртуальную n -систему $\mathcal{F}(\beta)$ шаг за шагом. А именно, мы будем выписывать значение $\mathcal{F}(\beta\phi)$ по значению $\mathcal{F}(\beta)$, где ϕ является одной из букв: σ_i, σ_i^{-1} или ζ_i .

Рассмотрим сначала n классов смежности единичного элемента G : (e, e, \dots, e) .

Положим для единичной косы e

$$\mathcal{F}(e) = (e, e, \dots, e).$$

Будем теперь читать слово β . Если его первой буквой является ζ_i , то на первом шаге все слова в виртуальной n -системе, кроме слов e_i, e_{i+1} , по определению остаются теми же, e_i становится равным t , а e_{i+1} становится равным t^{-1} (здесь и далее мы, естественно, имеем в виду классы смежности, т.е. $[t]$ и $[t^{-1}]$, но пишем для простоты t и t^{-1}).

Если первой буквой в слове является σ_i , то все классы смежности, кроме e_{i+1} , не изменяются, при этом e_{i+1} становится равным a_i^{-1} . Если же первой буквой была σ_i^{-1} , то единственное изменение относится к e_i : этот элемент становится равным a_{i+1} .

Процедура для каждого следующего шага (прочтения следующей буквы) такова. Предположим, что левая нить, подходящая к перекрестку, выходит из точки $(p, 1)$, а правая нить выходит из точки $(q, 1)$. Пусть до прохождения перекрестка соответствующие элементы имеют вид $e_p = P, e_q = Q$, где P, Q — некоторые элементы из E_p, E_q . После этого все классы смежности, кроме e_p, e_q , не изменяются.

Если рассматриваемой буквой является ζ_i , то слово e_p становится равным $P \cdot t$, а слово e_q становится равным $Q \cdot t^{-1}$. Если мы имеем σ_i , то e_p не изменяется, а e_q переходит в $QP^{-1}a_p^{-1}P$. Наконец, в случае буквы σ_i^{-1} класс смежности e_q остается тем же, в то время как e_p становится равным $PQ^{-1}a_qQ$. Эти операции корректно определены, т.е. не зависят от выбора представителей соответствующих классов смежности, что проверяется непосредственно.

Таким образом, мы определили отображение \mathcal{F} из множества виртуальных диаграмм кос из n нитей в множество виртуальных n -систем.

Теорема 7.7. *Отображение \mathcal{F} задает инвариант виртуальных кос. А именно, если β_1 и β_2 представляют одну и ту же виртуальную косу β , то $\mathcal{F}(\beta_1) = \mathcal{F}(\beta_2)$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что функция \mathcal{F} инвариантна при применении соотношений группы виртуальных кос. Оказывается, что для

слов $\beta_1 = \beta\gamma_1$ и $\beta_2 = \beta\gamma_2$, где $\gamma_1 = \gamma_2$ — определяющее соотношение, мы имеем $\mathcal{F}(\beta_1) = \mathcal{F}(\beta_2)$. Будем называть это утверждение *утверждением A*.

Доказав утверждение A, мы имеем также $\mathcal{F}(\beta_1\delta) = \mathcal{F}(\beta_2\delta)$ в случае $\mathcal{F}(\beta_1) = \mathcal{F}(\beta_2)$ для произвольного слова δ , так как наш алгоритм является пошаговым, т.е. $\mathcal{F}(\beta_1\delta)$ (как и $\mathcal{F}(\beta_2\delta)$) определяется перестраиванием виртуальной n -системы $\mathcal{F}(\beta_1) = \mathcal{F}(\beta_2)$ с помощью косы δ . Таким образом, для слов β, δ и для любого соотношения группы кос $\gamma_1 = \gamma_2$ мы имеем $\mathcal{F}(\beta\gamma_1\delta) = \mathcal{F}(\beta\gamma_2\delta)$, что завершит доказательство теоремы.

Вернемся теперь к доказательству утверждения A.

Рассмотрим соотношения группы виртуальных кос. Случай соотношений $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $\sigma_i\zeta_j = \zeta_j\sigma_i$, а также $\zeta_i\zeta_j = \zeta_j\zeta_i$ для $|i-j| \geq 2$ очевиден: порядок перестройки n -системы по “далеко отстоящим друг от друга” образующим не отражается на конечном результате. То же самое имеет место и в случае коммутирования одной образующей σ и одной образующей вида ζ или в случае коммутирования двух образующих вида ζ .

Рассмотрим теперь соотношение $\zeta_i^2 = e$.

Пусть дана слово-коса β , и пусть слово β_1 имеет вид $\beta\zeta_i^2$ для некоторого i . Пусть $\mathcal{F}(\beta) = (P_1, \dots, P_n)$, $\mathcal{F}(\beta_1) = (P'_1, \dots, P'_n)$. Пусть p и q — номера нитей (точнее, абсциссы верхних концов нитей), подходящих к рассматриваемому перекрестку слева и справа. Очевидно, что при $j \neq p, q$ мы имеем $P_j = P'_j$. Кроме того, $P'_p = (P_p \cdot t) \cdot t^{-1} = P_p$, $P'_q = (P_q \cdot t^{-1}) \cdot t = P_q$.

Рассмотрим теперь случай $\beta_1 = \beta \cdot \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$ (очевидно, что случай $b_1 = \beta\sigma_i^{-1}\sigma_i$ полностью ему аналогичен).

Обозначим $\mathcal{F}(\beta)$ через $(\dots P_i \dots)$, а набор $\mathcal{F}(\beta_1)$ — через $(\dots P'_i \dots)$, номера нитей, подходящие к перекрестку слева и справа, обозначим через p и q . При $j \neq p, q$ мы имеем $P'_j = P_j$. Более того, $P_p = P'_p$ по построению отображения \mathcal{F} (так как p -я нить дважды образует переход). Далее, $P'_q = (P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p) P_p^{-1} a_p P_p = P_q$.

Проверим теперь инвариантность относительно третьего виртуального движения Рейдемейстера. Пусть β — слово-коса, $\beta_1 = \beta\zeta_i\zeta_{i+1}\zeta_i$, а $\beta_2 = \beta\zeta_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}$. Пусть p, q, r — номера нитей (считая сверху), соответствующие положениям $n, n+1, n+2$ внизу косы b .

Обозначим $\mathcal{F}(\beta)$ через (P_1, \dots, P_n) , а $\mathcal{F}(\beta_1)$ через (P_1^1, \dots, P_n^1) . Обозна-

чим также $\mathcal{F}(\beta_2)$ через (P_1^2, \dots, P_n^2) . Очевидно, что $\forall i \neq p, q, r$ мы имеем $P_i = P_i^1 = P_i^2$. Из явных вычислений следует, что $P_p^1 = P_p^2 = P_p \cdot t^2$, $P_q^1 = P_q^2 = P_q$, а также $P_r^1 = P_r^2 = P_r \cdot t^{-2}$.

Рассмотрим теперь смешанное (полувиртуальное) соотношение. Мы будем пользоваться теми же обозначениями, что и прежде: P^1 и P^2 будут обозначать $\mathcal{F}(\beta\beta_1)$ и $\mathcal{F}(\beta\beta_2)$ соответственно, где $\beta_1 = \beta\zeta_i\zeta_{i+1}\sigma_i$, $\beta_2 = \beta\sigma_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}$. Как и ранее, $P_j^1 = P_j^2 = P_j$ для всех $j \neq p, q, r$. Из явных вычислений следует, что $P_p^1 = P_p t^2$, $P_q^1 = P_q t^{-1}$, $P_r^1 = P_r t^{-1}(P_q t^{-1})^{-1} a_q^{-1}(P_q t^{-1}) = P_r P_q a_q^{-1} P_q t^{-1}$ и $P_p^2 = P_p t^2$, $P_q^2 = P_q t^{-1}$, $P_r^2 = P_r P_q^{-1} a_q^{-1} P_q t^{-1}$.

Рассмотрим, наконец, третье классическое движение Рейдемейстера $\beta_1 = \beta\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$, $\beta_2 = \beta\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$; обозначения остаются прежними. Мы имеем: $\forall j \neq p, q, r : P_j^1 = P_j^2 = P_j$. Кроме того, так как p -я нить (в обоих случаях) образует два перехода, то $P_p^1 = P_p^2 = P_p$. Следовательно, мы имеем $P_q^1 = P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p$, $P_r^1 = (P_r P_p^{-1} a_p^{-1} P_p) \cdot (P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p)^{-1} a_q^{-1} (P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p) = P_r P_q^{-1} a_q^{-1} P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p$; по построению имеют место равенства

$$P_q^2 = P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p, P_r^2 = P_r P_q^{-1} a_q^{-1} P_q P_p^{-1} a_p^{-1} P_p.$$

Совпадение окончательных результатов завершает доказательство теоремы. \square

Таким образом мы доказали, что \mathcal{F} является инвариантом виртуальных кос, т.е. для заданной косы значение отображения \mathcal{F} не зависит от диаграммы, представляющей b . Таким образом мы можем писать просто $\mathcal{F}(b)$.

Замечание 7.5. На самом деле функцию \mathcal{F} можно рассматривать не как функцию, принимающую значения (E_1, \dots, E_n) , а как функцию, принимающую значения в n экземплярах группы G : по сути дела, в доказательстве доказывалась инвариантность элементов из (G, \dots, G) .

7.5.2. Представление группы виртуальных кос

Описанный выше инвариант \mathcal{F} задает представление ψ группы VB_n в группу автоморфизмов свободной группы F_{n+1} с образующими a_1, \dots, a_n, t по правилу ($i = 1, \dots, n - 1$):

$$\psi(\sigma_i) = \begin{cases} a_i \mapsto a_i a_{i+1} a_i^{-1} \\ a_{i+1} \mapsto a_i \\ a_l \mapsto a_l, l \neq i, i+1 \\ t \mapsto t \end{cases}; \psi(\zeta_i) = \begin{cases} a_i \mapsto t a_{i+1} t^{-1} \\ a_{i+1} \mapsto t^{-1} a_i t \\ a_l \mapsto a_l, l \neq i, i+1 \\ t \mapsto t. \end{cases} \quad (7.4)$$

Из явной проверки вытекает

Теорема 7.8. Пусть для слова-косы β , реализующей перестановку π , имеет место $\mathcal{F}(\beta) = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда отображение $a_i \mapsto e_{\pi(i)}^{-1} a_{\pi(i)} e_{\pi(i)}$, $t \mapsto t$ в точности совпадает с описанным выше действием ψ .

Таким образом, формула (7.4) задает точное представление группы кос в группу автоморфизмов свободной группы.

В классическом случае это представление, рассмотренное без учета образующей t , называется *представлением Артина*.

7.5.3. О полноте в классическом случае

В случае классических кос определим n -систему как следующее упрощение понятия виртуальной n -системы. Рассмотрим свободное произведение G n групп, изоморфных группе \mathbf{Z} , с образующими a_1, \dots, a_n . Обозначим через E'_i левые смежные классы G по группе, порожденной $\{a_i\}$, т.е., $g_1, g_2 \in G$ представляют собой один и тот же элемент в E'_i если и только если $g_1 = a_i^k g_2$ для некоторого k .

Определение 7.4. Под n -системой будем понимать набор элементов $\{e_1 \in E'_1, \dots, e_n \in E'_n\}$.

Определение 7.5. Под упорядоченной n -системой будем понимать пару: $\langle n$ -система и перестановка из $S_n \rangle$.

Естественным образом инвариант \mathcal{F} упрощается до инварианта f , принимающего значения в упорядоченных n -системах: мы “забываем” про образующую t . При этом для случая классических кос потери информации не происходит: для всякой классической косы β запись $\mathcal{F}(\beta)$ не содержит вхождений переменной t .

Таким образом, каждой классической косе β сопоставляется набор элементов $f(\beta) = (e_1, \dots, e_n)$. Каждый элемент e_i определен с точностью до

умножения слева на некоторую степень образующей a_i . Поэтому корректно задано преобразование образующих: $a_i \rightarrow e_{\pi(i)}^{-1} a_{\pi(i)} e_{\pi(i)}$. Таким образом, мы получаем действие группы кос на свободной группе; это действие известно; оно называется *действием Гурвица*. В работе Артина [Art1] доказано, что инвариант f полон, следовательно, действие Гурвица является точным. Отсюда следует, что инвариант f (и, вместе с ним, инвариант \mathcal{F}) является полным в случае классических кос.

7.5.4. Некоторые следствия

Как и классические узлы, классические косы (т.е. косы, имеющие представителей, в записи которых не встречается виртуальных перекрестков) допускают два отношения эквивалентности: классическое (посредством обычных движений Рейдемейстера) и виртуальное (посредством обобщенных движений Рейдемейстера). С помощью инварианта \mathcal{F} покажем, что на самом деле эти два соотношения эквивалентности совпадают. Впервые это было доказано Роджером Фенном, Ричардом Риманьи и Колином Рурком, см. [FRR].

Полагая $t = 1$ в инварианте \mathcal{F} и переходя к инварианту f , полному в случае классических кос, мы получаем обобщение полного инварианта f классических кос на случай виртуальных кос.

Таким образом, естественное отображение группы классических кос в группу виртуальных кос (переводящее σ_i в σ_i) является вложением. Более точно, имеет место

Теорема 7.9. *Две эквивалентные виртуальные слова-косы b_1 и b_2 , в записи которых нет образующих ζ_i , задают эквивалентные классические косы.*

Доказательство. Так как b_1 виртуально эквивалентна b_2 , мы имеем $f(b_1) = f(b_2)$. Принимая во внимание полноту инварианта f для классических кос, мы имеем $b_1 = b_2$ (в классическом смысле). \square

Запрещенное движение для виртуальных кос (соответствующее запрещенному движению для виртуальных узлов) имеет вид: $\sigma_i \sigma_{i+1} \zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, см. рис. 7.11.

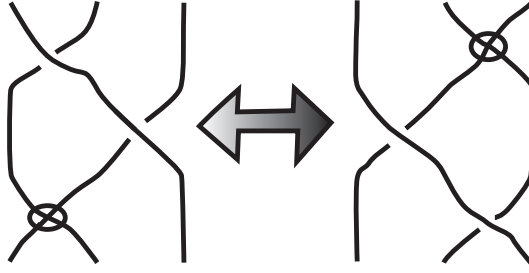


Рис. 7.11. Запрещенное движение для виртуальных кос

Покажем, что запрещенное движение не может быть представлено как композиция соотношений в группе виртуальных кос.

Теорема 7.10. *Запрещенное движение (соотношение) для виртуальных кос не является соотношением эквивалентности.*

Доказательство. Действительно, вычислим значения $\mathcal{F}(\sigma_1\sigma_2\zeta_1)$ и $\mathcal{F}(\zeta_2\sigma_1\sigma_2)$. В первом случае мы имеем:

$$(e, e, e) \rightarrow (e, a_1^{-1}, e) \rightarrow (e, a_1^{-1}, a_1^{-1}) \rightarrow (e, a_1^{-1}t, a_1^{-1}t^{-1}).$$

Во втором случае мы получаем:

$$(e, e, e) \rightarrow (e, t, t^{-1}) \rightarrow (e, t, t^{-1}a_1^{-1}) \rightarrow (e, ta_1^{-1}, t^{-1}a_1^{-1}).$$

Эти результаты (виртуальные n -системы) не совпадают; таким образом, виртуальные косы, переводимые друг в друга запрещенным движением, не могут быть эквивалентны. \square

Замечание 7.6. *При переходе от инварианта \mathcal{F} к инварианту f (если мы положим $t = 1$), мы получим $f(\sigma_1\sigma_2\zeta_1) = f(\zeta_2\sigma_1\sigma_2)$. Следовательно, переменная t существенна в построении инварианта \mathcal{F} .*

Приведем еще два примера, показывающих преимущества инварианта \mathcal{F} .

Рассмотрим косу из трех нитей $b = \zeta_2\sigma_2^{-1}\zeta_2\sigma_1\sigma_2\zeta_1\sigma_1\zeta_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$. Прямые вычисления показывают, что для этой косы $\mathcal{F}(b) \neq \mathcal{F}(e)$. Однако, эта коса не различается виртуальным полиномом Джонса, предложенным в [Kau1]. Более точно, рассмотрим зацепление $Cl(b)$, полученное замыканием косы b и полином Джонса $V(Cl(b))$ этого зацепления. Известно, что полином

Джонса не различает зацепления, отличающиеся друг от друга виртуализацией, см. стр. 151.

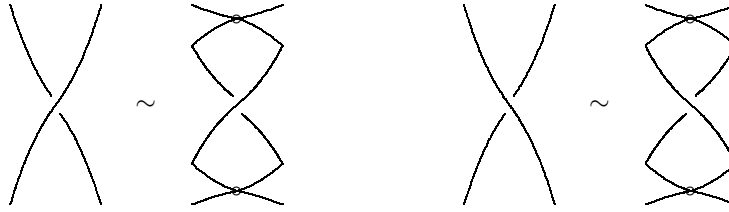


Рис. 7.12. Пары диаграмм, не различаемые скобкой

Виртуализация выражается на языке виртуальных кос. Если мы для некоторой косы мы сделаем замену $\sigma_i^{\pm 1}$ на $\zeta_i \sigma_i^{\pm 1} \zeta_i$, то замыкания обеих кос будут иметь одинаковые полиномы Джонса-Кауфмана, см. рис. 7.12.

В самом деле,

$$X(Cl(b)) = X(Cl(\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1})).$$

Преобразованная коса тривиальна, поэтому $X(Cl(b)) = X(Cl(e))$.

Замечание 7.7. *Здесь можно рассматривать как полином Джонса замыкания косы, так и скобку Кауфмана для кос, описанную в начале настоящей главы. В обоих случаях косы, получающиеся одна из другой виртуализацией, будут иметь одинаковые скобки.*

Приведем еще один пример, показывающий силу инварианта \mathcal{F} . Мы показали, что коса $b = (\sigma_1^2 \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1)^2$ лежит в ядре представления Бурау \mathfrak{B} . Легко видеть, что инвариант \mathcal{F} распознает нетривиальность этой косы.

7.5.5. Насколько силен инвариант \mathcal{F} ?

Как было показано выше, новый инвариант сильнее, чем коэффициент зацепления, иногда он различает виртуальные узлы, которые не различаются скобкой Кауфмана или представлением Бурау.

Кроме того, ограничение инварианта \mathcal{F} на случай классических кос (при факторизации $t = 1$) совпадает с полным инвариантом f классических кос.

Инвариант \mathcal{F} дает нам пример отображения из одного алгебраического объекта (группа кос) в другой алгебраический объект (n копий свободной

группы или n классов смежности свободной группы). Это отображение не является гомоморфизмом.

Для того, чтобы оценить силу инварианта \mathcal{F} , установим некоторые его свойства.

Из теоремы 7.8 вытекает следующая

Лемма 7.1. *Если $\mathcal{F}(b_1) = \mathcal{F}(b_2)$ для некоторых кос b_1, b_2 , то для любой пары кос a и c мы имеем $\mathcal{F}(ab_1c) = \mathcal{F}(ab_2c)$ (все косы предполагаются с одним и тем же количеством нитей).*

Важной характеристикой инварианта является множество его значений. Задача описания этого множества или — что то же самое — набора бесконечных матриц представления, однако, является очень сложной, и нам неизвестно ее решение даже для трех нитей. В качестве примера мы опишем множество значений для случая виртуальных кос из двух нитей и, тем самым, классифицируем эти косы. Впрочем, группа виртуальных кос из двух нитей устроена очень просто: она изоморфна группе $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}_2$.

Смена обозначений: вместо образующих a_1, a_2 виртуальных 2-систем мы будем писать a, b ; вместо образующих σ_1, ζ_1 группы кос мы будем писать σ, ζ .

Напомним, что f — инвариант, получаемый из \mathcal{F} “забыванием” образующей t . Обозначим свободную группу, порожденную a, b через G' . Пусть $E'_1 = \{a\} \setminus G', E'_2 = \{b\} \setminus G'$.

В случае двух нитей f отображает множество $VB(2)$ в (E'_1, E'_2) , или, проще, (G', G') .

Для заданной косы α из двух нитей обозначим $f(\alpha)$ через $(P(\alpha), Q(\alpha))$.

Рассмотрим сначала простейшие виртуальные косы из двух нитей и значения функции f на них:

1. Для тривиальной косы мы имеем (e, e) ;
2. Для σ мы имеем $(1, a^{-1})$;
3. Для косы σ^{-1} мы имеем $(b, 1)$;
4. Для ζ получаем $(1, 1)$.

Несложно доказывается следующая теорема.

Теорема 7.11. Пусть β — слово-коса (виртуальная коса из двух нитей). Тогда имеет место равенство $P(\beta)Q(\beta)^{-1} = a^k b^l$ для некоторых k, l .

Доказательство. Мы будем использовать индукцию по количеству букв в записи косы. В случае пустого слова нечего доказывать. Пусть теперь β — слово-коса из k букв, $\beta' = \beta\alpha$, где α — одна из букв ζ, σ или σ^{-1} . Пусть $P(\beta)Q(\beta)^{-1} = a^n b^m$.

Для $\alpha = \zeta$ мы имеем $P(\beta') = P, Q(\beta') = Q(\beta)$. Таким образом мы получаем $P(\beta')Q(\beta')^{-1} = a^n b^m$.

При $\alpha = \sigma$ если коса β является четной, мы получаем: $P \mapsto P, Q \mapsto QP^{-1}a^{-1}P, PQ^{-1} \mapsto aPQ^{-1}$; для нечетной косы β : $Q \mapsto Q, P \mapsto PQ^{-1}b^{-1}Q, PQ^{-1} \mapsto PQ^{-1}b^{-1}$.

В случае $\alpha = \sigma^{-1}$ и четной косы β мы имеем: $Q \mapsto Q, P \mapsto PQ^{-1}bQ, PQ^{-1} \mapsto PQ^{-1}b$, для нечетной косы β : $P \mapsto P, Q \mapsto QP^{-1}aP, PQ^{-1} \mapsto a^{-1}PQ^{-1}$.

Таким образом, мы осуществили шаг индукции и тем самым доказали теорему. \square

Условие на PQ^{-1} является вполне естественным. Оно означает, что существует элемент $g \in G'$ такой, что $g \in [P] \in E'_1$ и $g \in [Q] \in E'_2$. Такой элемент g единствен. Таким образом, этот элемент g представляет собой инвариант группы $VB(2)$.

Очевидно, что для каждой виртуальной косы b из двух нитей мы имеем $f(b) = f(b\zeta)$. Кроме того, все косы естественным образом делятся на пары: каждой четной виртуальной косе b в $VB(2)$ можно сопоставить ровно одну нечетную косу $b\zeta$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть подгруппу четных кос $EV B(2)$ группы $VB(2)$.

Теорема 7.12. Инвариант g (так же, как и инвариант f) группы виртуальных кос $EV B(2)$ является полным.

Нам достаточно доказать полноту инварианта g . Для этого нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 7.2. Для каждых двух виртуальных слов-кос $\pi, \rho \in VB(2)$ из двух нитей мы имеем: $g(\pi\rho) = g(\rho)g(\pi)$ и $g(\pi)^{-1} = g(\pi^{-1})$. Таким образом, отображение g антигомоморфно на $VB(2)$.

Доказательство. Группа $VB(2)$ является свободной группой двумя образующими $\alpha = \zeta\sigma$ и $\beta = \zeta\sigma^{-1}$.

Далее, $g(e) = e$, $g(\alpha) = b^{-1}$, $g(\beta) = a^{-1}$, $g(\alpha^{-1}) = b$, $g(\beta^{-1}) = a$.

Утверждение об антигомоморфности отображения g явно проверяется на образующих α и β . \square

Доказательство теоремы 7.12. Из леммы 7.2 следует, что отображение g антигомоморфно и отображает группу $EV B(2)$ в свободную группу с образующими a, b . Это отображение переводит α, β в образующие a, b^{-1} . Следовательно, оно не имеет ядра. Таким образом, g является полным инвариантом группы $EV B(2)$, поэтому полным является и инвариант f . \square

Итак, отображение \mathcal{F} также является полным инвариантом для $EV B(2)$. Учитывая, что этот инвариант чувствителен к умножению на ζ справа, мы видим, что \mathcal{F} распознает все элементы из $VB(2)$. Чтобы распознать, является ли пара элементов $(e_1 \in E_1, e_2 \in E_2)$ значением инварианта \mathcal{F} на некоторой косе, нам нужно лишь профакторизовать e_1 и e_2 по соотношению $t = 1$, взять косу-прообраз b (если таковой имеется) полученной пары (e'_1, e'_2) при отображении f , и определить, верно ли $\mathcal{F}(b) = (e_1, e_2)$ или $\mathcal{F}(b\zeta) = (e_1, e_2)$.

Простейшим примером пары $(e_1 \in E_1, e_2 \in E_2)$, не являющейся значением инварианта \mathcal{F} на виртуальных косах, является пара (b, a) . В этом случае $PQ^{-1} = ba^{-1}$, что не равно $a^k b^l$ ни для каких целых чисел k, l .

Глава 8

Инварианты Васильева классических и виртуальных узлов

В конце 80-х годов двадцатого века В.А.Васильевым [Vas1, Vas2] и М.Н.Гусаровым [Гус] было дано определение инвариантов классических узлов, которые впоследствии получили название *инвариантов Васильева* или *инвариантов конечного порядка*. Эти определения были очень удачными, поскольку все известные до того времени полиномиальные инварианты узлов [НОМFLY, Jon1], а также квантовые инварианты [Tur1] удалось выразить через инварианты конечного порядка, см. работы [BL, BN1]. Инварианты Васильева могут принимать значение в произвольной абелевой группе коэффициентов. В настоящей главе мы рассматриваем инварианты Васильева с коэффициентами в \mathbb{Q} .

Сразу стало понятно, что инварианты Васильева тесно связаны с функциями на *хордовых диаграммах* — так называемыми *системами весов* (см. определение на стр. 343): каждому инварианту сопоставляется такая функция. Возник вопрос: верно ли, что все системы весов задают инварианты Васильева?

Работа М.Л.Концевича [Kon] помогла понять структуру инвариантов Васильева: предложенная им интегральная формула приводит к *универсальному инварианту Васильева-Концевича*, восстанавливающему по любой наперед заданной системе весов соответствующий инвариант Васильева. В этом смысле интеграл Концевича равноценен набору всех инвариантов Васильева. Как оказалось, см., напр., [Bir3], интеграл Концевича является универсальным также и для *квантовых инвариантов* узлов; из этого следует, что квантовые инварианты **не сильнее** инвариантов Васильева

(в работе П.Вожеля [Vog] показано, что они строго слабее, т.е. приведены явные примеры инвариантов Васильева, которые не выразимы через квантовые инварианты). Комбинаторный подход к интегралу Концевича стал возможен благодаря работе Т.Ле и Дж.Мураками [LM], которые полностью перевели вычисление интеграла Концевича классических узлов на комбинаторный язык.

Затем такое комбинаторное описание было распространено на более широкий класс узлов, в частности, на узлы в утолщенных поверхностях с краем $M_2 \times I$ и утолщенную проективную плоскость $\mathbf{R}P^2 \times I$; это было сделано в работе Й.Либерума [Lieb].

Из обзоров, посвященных теории инвариантов Васильева (классических) узлов отметим [BN1].

После работы Концевича стало ясно, что должен быть некоторый комбинаторный подход к инвариантам Васильева; этот комбинаторный подход был четко сформулирован в работе М.Б.Поляка и О.Я.Виро [PV], после чего стал актуальным вопрос о существовании **комбинаторных формул** для всех инвариантов Васильева классических узлов — формул, выражающих значение данного инварианта узлов через его гауссову диаграмму подсчетом числа вхождений в эту гауссову диаграмму некоторых гауссовых диаграмм из фиксированного набора (со знаками).

С появлением виртуальных узлов теория инвариантов Васильева приобрела особый интерес. Здесь стоит отметить работу Гусарова, Поляка и Виро [GPV]. В этой работе была доказана теорема Гусарова о наличии комбинаторных формул для всех инвариантов Васильева классических узлов. Примечательно, что среди гауссовых диаграмм, которые появляются в такого рода формулах, нельзя обойтись без **нереализуемых** гауссовых диаграмм, т.е. гауссовы диаграммы, соответствующие виртуальным узлам. В ней авторы пришли к понятию виртуальных узлов путем, отличным от оригинального подхода Кауфмана.

В работе [Вас] В.А.Васильев привел уточнение этого результата, отвечающее на вопрос о существовании комбинаторных формул с **целочисленными** коэффициентами.

Наличие в комбинаторных формулах гауссовых диаграмм виртуальных

узлов побудило авторов работы [GPV] к поиску аналогичной конструкции инвариантов Васильева для виртуальных узлов; по сути дела, это был иной подход к определению виртуальных узлов, при котором инвариант конечного порядка трактовался как инвариант, имеющий комбинаторную формулу, учитывающую вхождение гауссовых диаграмм со знаками.

Естественным образом в этой работе была построена *алгебра Поляка* — универсальная алгебра, из которой получаются все инварианты виртуальных зацеплений конечного порядка; элементами этой алгебры являются формальные линейные комбинации виртуальных зацеплений.

Такое определение инвариантов (Васильева) конечного порядка для виртуальных узлов оказалось не очень удачным, хотя и хорошо поддающимся классификации. Дело в том, что каждый инвариант Васильева (в смысле Поляка и Виро) связан с некоторым инвариантом Васильева классических узлов, при этом далеко не все инварианты конечного порядка классических узлов обобщаются до определяемых таким образом инвариантов конечного порядка виртуальных узлов.

Ответом на эту работу послужила последняя версия пионерской работы Кауфмана [Kau7], в которой он предложил более формальный подход к инвариантам конечного порядка виртуальных узлов — с использованием понятия *жесткой изотопии*.

Стало ясно, что многие полиномиальные инварианты сингулярных виртуальных узлов укладываются в концепцию Кауфмана, и из них можно получать инварианты конечного порядка, однако стройной теории таких инвариантов до сих пор нет.

При этом множество виртуальных узлов более обширно, чем множество классических узлов, и, как оказалось, на виртуальных узлах можно легко найти примеры решения задач об инвариантах Васильева, до сих пор не решенных в классическом случае.

Так, например, инварианты Васильева виртуальных узлов позволяют различать обратимость узлов (это впервые было замечено Саволлеком, [Saw2]). О вопросе распознаваемости обратимости инвариантами Васильева в классическом случае см., напр., [CDBook, DuK].

Структура настоящей главы такова. Сначала мы даем определение инва-

риантов Васильева классических узлов и J -инвариантов плоских кривых, а также два определения инвариантов конечного порядка виртуальных узлов — согласно Гусарову-Поляку-Виро и согласно Кауфману. Затем мы приводим формулировки результатов работы [GPV], после чего переходим к обсуждению инвариантов конечного порядка согласно Кауфману.

В настоящей главе доказывается, что полином Ξ , определенный в главе 4, разлагается в ряд и дает трипараметрическую серию инвариантов Васильева (теорема 8.4).

После этого мы переходим к обсуждению результатов Б.Меллора и автора о связи виртуальных узлов, полинома Джонса-Кауфмана и инвариантов конечного порядка для классических узлов.

Центральным результатом настоящей главы является решение гипотезы Васильева о реализуемости хордовых диаграмм сингулярными узлами, вложимыми в плоскость (теорема 8.6). Эта гипотеза мотивирована задачей о существовании целочисленных комбинаторных формул для инвариантов Васильева, решенной Васильевым в [Вас]. Для доказательства гипотезы Васильева мы используем комбинаторную технику, описанную в предыдущих главах (атомы, d -диаграммы, структура источник-сток).

8.1. Инварианты Васильева классических узлов и J -инварианты кривых

На протяжении настоящего раздела все зацепления предполагаются ориентированными, если не оговорено противное.

Под *сингулярным* зацеплением из k компонент порядка n будем понимать погружение в трехмерное пространство несвязного набора из k ориентированных окружностей, особенностями которого являются лишь точки двойного трансверсального (само)пересечения, и их ровно n штук. Сингулярные зацепления рассматриваются с точностью до естественной изотопии, т.е. отображения объемлющего пространства \mathbf{R}^3 на себя, сохраняющего ориентацию.

Каждому сингулярному зацеплению из n компонент естественным образом соответствует хордовая диаграмма на n ориентированных окружностях (см. опр. на стр. 159). Каждая окружность параметризует вложение

одной из компонент зацепления. На этих окружностях мы соединяем хордами (или, что эквивалентно, отмечаем посредством выделения нульмерных окружностей) пары точек, имеющих одинаковый образ в трехмерном пространстве, см. рис. 8.1.

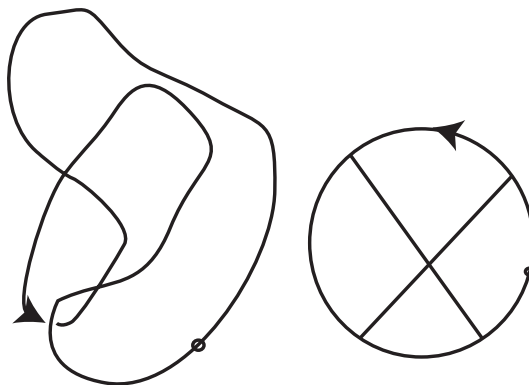


Рис. 8.1. Диаграмма сингулярного узла и соответствующая ей хордовая диаграмма

Каждую сингулярную точку (вершину) сингулярного зацепления можно развести двумя способами: положительным $\otimes \mapsto \otimes$ и отрицательным $\otimes \mapsto \otimes$. Таким образом, с каждым сингулярным зацеплением и выделенной особой его точкой связаны два сингулярных зацепления меньшего порядка, при этом эти два разведения корректно определены относительно изотопии.

Пусть дан инвариант f классических зацеплений со значениями в поле рациональных чисел \mathbf{Q} . В дальнейшем мы будем рассматривать формальное линейное пространство узлов с коэффициентами в этой абелевой группе и все инвариантные функции продолжать по линейности на линейные комбинации узлов. Инвариант f можно продолжить на сингулярные зацепления по следующей формуле:

$$f'(\otimes) = f(\otimes) - f(\otimes) \quad (8.1)$$

Эта формула означает, что мы определяем *производную* f' инварианта f как функцию на сингулярных зацеплениях первого порядка, значение которой на сингулярном зацеплении полагается равным разности значений на двух зацеплениях, получаемых из него положительным и отрицательным

разведениями. Формула (8.1) носит название *соотношения Васильева*.

Далее, имея производную f' функции f , мы можем определить вторую производную f'' функции f на сингулярных зацеплениях второго порядка: мы используем ту же формулу (8.1) в виде $f''(\textcircled{\times}) = f'(\textcircled{\times}) - f'(\textcircled{\times})$, подразумевая, что мы имеем дело с тремя сингулярными зацеплениями, устроенными одинаково вне некоторой малой окрестности сингулярного перекрестка одного из зацеплений; в этой окрестности второе зацепление разведено положительно, а третье — отрицательно, при этом вне этой малой окрестности имеется еще одно сингулярное пересечение. Далее мы определяем третью производную на сингулярных зацеплениях порядка три, затем четвертую производную и так далее.

Определение 8.0. Говорят, что инвариант f классических зацеплений является *инвариантом (Васильева) конечного порядка* не более n , если $(n + 1)$ -я производная $f^{(n+1)}$ этого инварианта тождественно равна нулю на сингулярных зацеплениях с $n + 1$ сингулярной вершиной. При этом инвариант имеет порядок ровно n , если он является инвариантом порядка не более n , но не является инвариантом порядка не более $(n - 1)$.

Обозначим линейное пространство инвариантов Васильева порядка не более n через \mathcal{V}_n . Имеет место очевидное вложение $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \dots$

Определение 8.1. Для инварианта Васильева f порядка n его n -я производная $f^{(n)}$ носит название *символа инварианта f* .

Так как соотношение Васильева относится к тройкам (сингулярных) зацеплений, имеющим одно и то же число компонент, имеет смысл говорить отдельно об инвариантах Васильева зацеплений с фиксированным количеством компонент. Например, об инвариантах Васильева узлов, инвариантах Васильева двухкомпонентных зацеплений и так далее.

Оказывается, что символ содержит в себе важную часть информации об инварианте Васильева. А именно, имеет место

Теорема 8.1. (В.А.Васильев) Пусть v_1 и v_2 — два инварианта Васильева порядка n на зацеплениях из k компонент, имеющие один и тот же символ. Тогда разность $v_1 - v_2$ является инвариантом Васильева порядка не более $n - 1$.

Таким образом, можно последовательно изучать структуру пространства инвариантов Васильева \mathcal{V}_n , зная \mathcal{V}_{n-1} и структуру пространства символов.

Пусть задан инвариант Васильева v порядка n (на зацеплениях с некоторым фиксированным количеством компонент k). Тогда $v^{(n+1)} = 0$, это означает, что для любых двух диаграмм сингулярных зацеплений из k компонент, отличающихся одной заменой перекрестка $\otimes \longleftrightarrow \otimes$ и имеющих порядок n мы имеем $v^{(n)}(\otimes) = v^{(n)}(\otimes)$.

Таким образом, значение символа инварианта v не зависит от структуры классических перекрестков диаграммы соответствующего сингулярного зацепления порядка n . Единственное, от чего оно зависит, — это комбинаторная структура сингулярных перекрестков на зацеплениях.

Последняя задается *хордовой диаграммой* на k окружностях следующим образом (хордовые диаграммы на одномерных многообразиях определены на стр. 159). Хордовая диаграмма состоит из k отдельно стоящих ориентированных окружностей — прообразов компонент зацепления, при этом два прообраза одной и той же сингулярной вершины соединены хордой.

Мы будем изображать такие хордовые диаграммы на плоскости, при этом мы не будем указывать ориентации окружностей, считая их ориентированными против часовой стрелки.

Пример хордовой диаграммы на двух окружностях изображен на рис. 8.2.

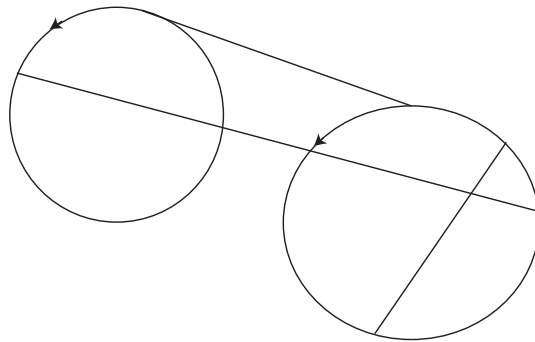


Рис. 8.2. Хордовая диаграмма на двух окружностях

Такая хордовая диаграмма рассматривается с точностью до комбинаторной эквивалентности как граф, на котором имеется k ориентированных циклов.

Таким образом, символ инварианта Васильева порядка n на зацеплениях из k компонент задается своим значением на хордовых диаграммах на k окружностях с n хордами, или, более точно, линейной функцией на линейном пространстве таких диаграмм.

Оказывается, что не любая линейная функция на этом линейном пространстве может играть роль символа инварианта Васильева.

А именно, каждая такая функция должна удовлетворять т.н. одночленному и четырехчленному соотношениям.

Одночленное соотношение состоит в следующем. Если имеется хордовая диаграмма $C = \bigcirc$ с произвольным числом хорд, из которых одна является отдельно стоящей, то любой символ инварианта Васильева соответствующего порядка на этой диаграмме равен нулю.

Четырехчленное соотношение выглядит следующим образом. Для каждого символа $v^{(n)}$ инварианта Васильева v порядка n имеет место соотношение

$$v^{(n)}(\text{diag}_1) - v^{(n)}(\text{diag}_2) - v^{(n)}(\text{diag}_3) + v^{(n)}(\text{diag}_4) = 0. \quad (8.2)$$

В этом соотношении участвуют хордовые диаграммы порядка n ; при этом оставшиеся $(n - 2)$ хорды, не изображенные в формуле (8.2), являются неподвижными (они одинаково расположены на всех диаграммах).

Аналогичным образом задается четырехчленное соотношение для *зацеплений*: в этом случае мы имеем четыре диаграммы на нескольких окружностях; эти четыре диаграммы отличаются взаимным расположением пары хорд, концы которых лежат на трех выделенных участках (которые, вообще говоря, могут принадлежать разным окружностям).

Теорема 8.2 (Теорема Васильева-Концевича [Кон]). *Линейная функция f на пространстве хордовых диаграмм с n хордами на k окружностях задает символ инварианта Васильева классических узлов тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одночленному и четырехчленному соотношениям.*

Эта теорема дает полное описание пространства $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ для инвариантов Васильева порядков n и $n - 1$ классических зацеплений.

Таким образом, любая линейная функция на хордовых диаграммах с фиксированным числом окружностей, удовлетворяющая одночленному и четырехчленному соотношениям, задает символ инварианта Васильева.

Важным является также рассмотрение линейных функций на хордовых диаграммах, удовлетворяющих четырехчленному соотношению, но, возможно, не удовлетворяющих одночленному соотношению. Такие функции называются *системами весов*, см., напр, [BN1].

Иногда под выражением *система весов* понимают функцию, удовлетворяющую также и одночленному соотношению. Любая такая система весов является символом некоторого инварианта Васильева узлов.

Системы весов (без учета одночленных соотношений) связаны с инвариантами конечного порядка *оснащенных зацеплений* с четным оснащением.

В дальнейшем мы будем оговаривать, какое из двух определений имеется в виду.

Параллельно с теорией инвариантов Васильева узлов существует теория J -инвариантов конечного порядка погруженных плоских кривых общего положения. Идея рассмотрения J -инвариантов принадлежит В.И. Арнольду, см. [Arn1, Arn2], подробнее см. [Лан].

Отметим, что до работы С.К.Ландо [Лан] независимо друг от друга существовали J -инварианты, отвечающие перестройкам при попутном касании (так называемые J^+ -инварианты) и J -инварианты, отвечающие перестройкам при противоположном касании. В.В.Горюнов [Goryu] дал полное описание J^+ -инвариантов конечного порядка; он отметил также, что J^- -инварианты допускают подобное описание.

В данном случае аналогом узлов являются наборы кривых, погруженные в плоскость без точек самокасания, аналогом сингулярных зацеплений — наборы кривых, имеющие точки (само)касания в конечном числе. Комбинаторное расположение точек самокасания также задается хордовой диаграммой, см. рис. 8.3.

При этом здесь имеются два существенно различных типа касаний: попутное и противоположное, см. рис. 8.4.

Сопоставим попутным касаниям знак плюс, а противоположным касаниям — знак минус. Мы будем также обозначать попутные касания сплош-

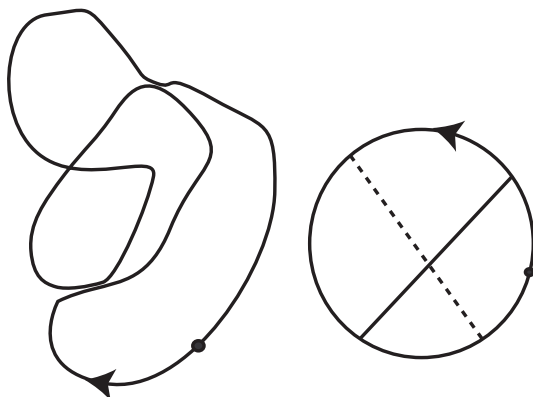


Рис. 8.3. Диаграмма с самокасаниями и соответствующая ей оснащенная хордовая диаграмма

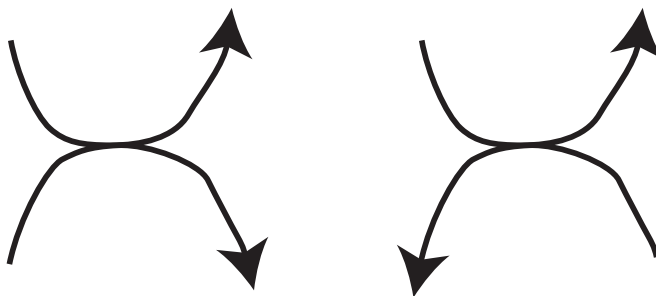


Рис. 8.4. Попутное и противоположное касания

ными хордами, а противоположные — пунктирными хордами.

Следовательно, для изучения инвариантов конечного порядка плоских кривых нужно рассматривать хордовые диаграммы с двумя типами хорд. Хордовые диаграммы, в которых один выделенный тип хорд называется *положительным* (и обозначается сплошной линией), а другой — *отрицательным* (и обозначается пунктирной линией), называются *оснащенными хордовыми диаграммам* (ср. гл. 4).

Как и в случае инвариантов Васильева классических узлов, значение производной некоторого инварианта на кривой с точкой касания определяется разностью значений инварианта на близких к ней кривых (см. рис. 8.6). Аналогично определяется и символ инварианта порядка n — значение его n -й производной. Это значение является весовой функцией на оснащенных хордовых диаграммах. Функции на оснащенных хордовых диаграммах, происходящие из J -инвариантов конечного порядка плоских кривых,

должны удовлетворять некоторым соотношениям, носящим название *обобщенного четырехчленного соотношения*, см. рис. 8.5.

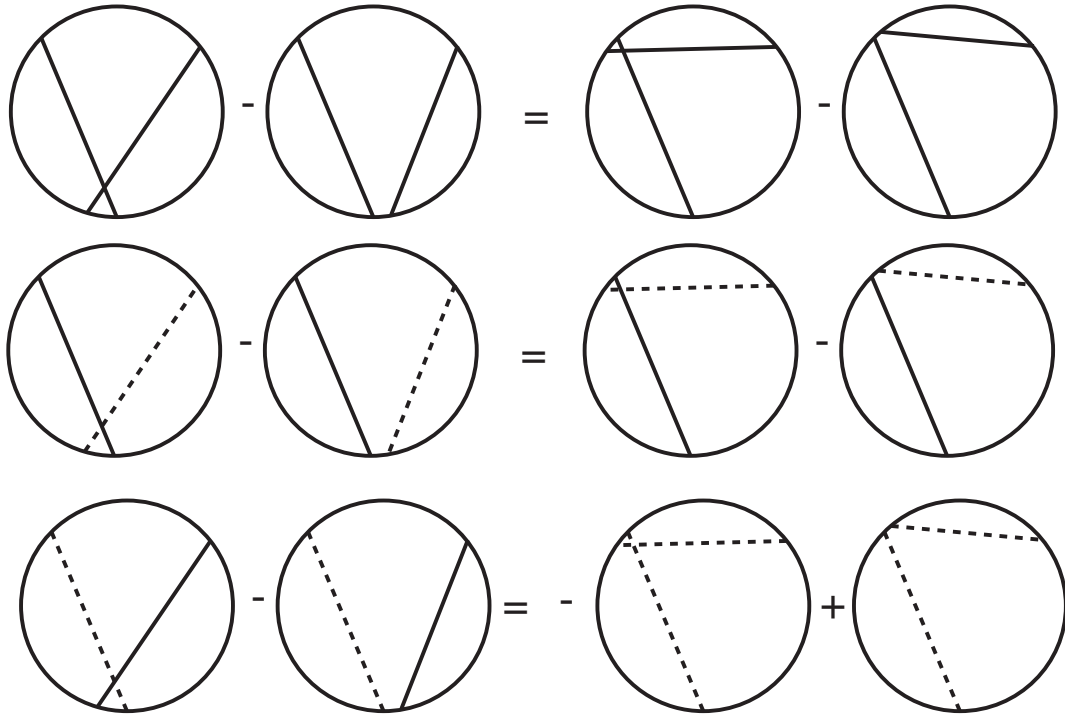


Рис. 8.5. Обобщенное четырехчленное соотношение

Обобщенное четырехчленное соотношение состоит из четверки оснащенных хордовых диаграмм, у которых все хорды, кроме двух, расположены одинаковым образом, а две хорды — так же, как в обычном четырехчленном соотношении. Отметим, что из этих двух хорд одну можно считать “неподвижной”: ее тип и расположение одинаково в каждой из четырех диаграмм, участвующих в соотношении (эта хорда изображена на диаграммах на рис. 8.5 наклонной).

При этом имеются два существенно различных случая. В первом из них (к которому относится и обычное четырехчленное соотношение без пунктирных хорд) неподвижная хорда является сплошной (положительной). В этом случае подвижная хорда на всех четырех хордовых диаграммах имеет один и тот же тип (либо сплошная, либо пунктирная, см. верхнюю и среднюю части рис. 8.5). Во втором случае неподвижная хорда является пунктирной. При переходе из правой части в левую подвижная хорда ме-

няет свой тип, а все выражение меняет знак, см. нижнюю картинку на рис. 8.5.

Приведем более точные определения. Мы рассматриваем погружения окружности в плоскость общего положения с точностью до изотопий плоскости, содержащей кривую, диффеоморфизмов окружности и прохождения кривой через тройные точки. Инварианты кривых при таких условиях называются *J-инвариантами*.

При произвольной деформации кривой помимо (разрешенной) деформации, состоящей в прохождении через тройную точку, есть еще одна деформация общего положения, состоящая в прохождении через точку касания. Такая особенность аналогична особенности прохождения через сингулярный узел.

Это является отправной точкой для определения *J-инвариантов* конечного порядка плоских кривых. А именно, рассмотрим множество всех плоских кривых с точностью до изотопий и прохождений через тройные точки. Введем *сингулярные кривые* — те, которые имеют конечное число точек простого касания. В этом случае на множестве сингулярных кривых ввести соотношение эквивалентности, разрешающее точки касания, см. рис. 8.6



Рис. 8.6. Разрешение особенности кривой

При этом каждый *J-инвариант* плоских кривых общего положения продолжается до некоторой функции на кривых, имеющих точки касания. *J-инвариант* называется инвариантом порядка n , если его значения на кривых с $n + 1$ точкой самокасания равно нулю. Аналогично рассматривается случай многих кривых с точками касания.

Расположение точек касания на диаграмме описывается оснащенной хордовой диаграммой.

Полностью аналогично случаю инвариантов Васильева узлов по *J-инварианту* n -го порядка плоских кривых строится *обобщенная весовая функция* на оснащенных хордовых диаграммах, т.е. функция, удовлетворяющая

обобщенному четырехчленному соотношению.

Имеет место

Теорема 8.3 (С.К.Ландо, [Лан]). *Любая функция на оснащенных хордовых диаграммах порядка n , полученная из J -инварианта порядка не выше n , удовлетворяет обобщенному четырехчленному соотношению (всех его версиям).*

На данный момент неизвестно, верен ли для J -инвариантов кривых аналог теоремы Концевича, т.е. верно ли, что по всякой обобщенной весовой функции можно восстановить некоторый J -инвариант конечного порядка. Подробнее см. [Лан].

Таким образом, нахождение систем весов для хордовых диаграмм или оснащенных хордовых диаграмм является важной задачей. В дальнейшем мы покажем, что некоторые частичные решения этих задач весьма неожиданно возникают благодаря изучению скобки Кауфмана классических и виртуальных зацеплений, а также благодаря кодированию узлов посредством атомов и d -диаграмм.

8.2. Подход Гусарова-Поляка-Виро к инвариантам Васильева виртуальных узлов

Введем некоторые вспомогательные определения. Под *полувиртуальным перекрестком* будем понимать формальную метку для перекрестка, в котором указывается, какая ветвь проходит формально “выше”, а какая — формально “ниже”, при этом сам перекресток обведен кружочком. Диаграмма с полувиртуальным перекрестком определяется как формальная разность двух диаграмм, одна из которых имеет классический перекресток, а другая — виртуальный.

The diagram shows an equation between three crossings. On the left is a semi-virtual crossing, represented by two lines crossing, with a small circle around the intersection. The top-left and bottom-right strands are solid, while the top-right and bottom-left strands are dashed. This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign are two crossings: first, a classical crossing where the top-left and bottom-right strands are solid and the top-right and bottom-left strands are dashed; second, a virtual crossing where all four strands are solid. These two crossings are separated by a minus sign.

Пусть D — диаграмма виртуального зацепления и пусть $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ — некоторый набор классических перекрестков этой диаграммы. Для набора $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ из единиц и нулей определим D_σ как диаграмму, получа-

ему из D преобразованием всех перекрестков d_i , для которых $\sigma_i = 1$, в виртуальные перекрестки. Обозначим через $|\sigma|$ число единиц в наборе σ . Формальная альтернированная сумма

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} D_{\sigma}$$

называется диаграммой с n полувиртуальными перекрестками.

Обозначим через \mathcal{K} множество всех виртуальных узлов. Пусть $\nu : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Q}$ — некоторый инвариант виртуальных узлов со значениями в \mathbf{Q} . Продолжим этот инвариант по линейности на $\mathbf{Q}[\mathcal{K}]$ — множество формальных линейных комбинаций виртуальных узлов. Скажем, что ν является инвариантом конечного порядка, если для некоторого натурального n инвариант ν обращается в нуль на каждом виртуальном узле K с более чем n полувиртуальными перекрестками. Если существует n , для которого это выполнимо, то минимальное из таких чисел n называется *порядком* инварианта ν .

Формальное соотношение Васильева $\textcircled{\times} = \textcircled{\otimes} - \textcircled{\otimes}$ вместе с соотношением, определяющим виртуальный перекресток, влечет соотношение

Замечание 8.1. Отметим, что сингулярные узлы рассматриваются здесь не как независимые объекты, имеющие геометрический смысл узлов с некоторыми особенностями, а лишь как линейные комбинации более простых объектов.

Очевидно, что для всякого инварианта ν порядка n в смысле, описанном выше, его ограничение на случай классических узлов является инвариантом конечного порядка в обычном смысле. Обратное, однако, неверно. Так, например, согласно приведенному выше определению, не существует инвариантов второго порядка для (компактных) виртуальных узлов, подробнее см. [GPV, Oht].

Исходя из формального соотношения, определяющего виртуальный пе-

рекресток, и соотношения Васильева, М.Б.Поляк построил так называемую *алгебру Поляка*, см. [GPV], дающую полное комбинаторное описание всех виртуальных узлов. Кроме того, в работе [GPV] приведены комбинаторные формулы для вычисления инвариантов конечного порядка для *длинных виртуальных узлов*.

8.3. Инварианты Васильева виртуальных узлов (по Л.Кауфману)

Подход Кауфмана связан с обобщением понятия сингулярного узла (зацепления) на виртуальный случай.

Определение 8.2. *Сингулярная виртуальная диаграмма* — это четырехвалентный граф на плоскости, снабженный ориентацией уникарсальных компонент, а также структурой в перекрестках: каждый перекресток этого графа является либо классическим (проход-переход), либо виртуальным, либо сингулярным.

Сингулярный перекресток изображается жирной точкой.

Определение 8.3. *Сингулярное виртуальное зацепление (узел)* — это класс эквивалентности диаграмм сингулярных виртуальных зацеплений (узлов) по обобщенным движениям Рейдемейстера и жестким изотопиям, см. рис. 8.7.

Определение 8.4. *Порядком* сингулярного виртуального зацепления называется количество его сингулярных перекрестков.

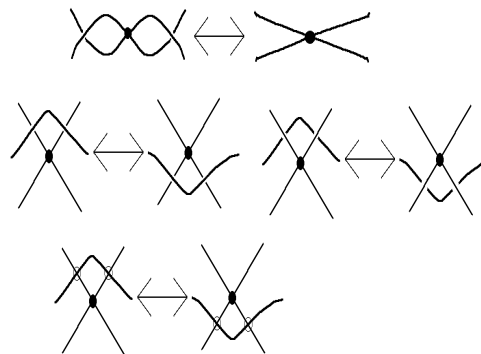


Рис. 8.7. Жесткая изотопия

После этого определение инварианта Васильева для виртуальных узлов (зацеплений) дословно совпадает с определением в классическом случае. А именно, для каждого инварианта f виртуальных зацеплений можно определить его формальные производные f', f'', \dots , согласно соотношению Васильева: $f^{(n)}(\text{⊗}) = f^{(n-1)}(\text{⊗}) - f^{(n-1)}(\text{⊗})$. Скажем, что инвариант f имеет порядок меньший или равный n , если $f^{(n+1)} \equiv 0$.

Из этого определения следует, что инварианты виртуальных узлов порядка нуль классифицируются ориентированными кривыми на ориентированных двумерных поверхностях, рассматриваемых с точностью до свободной гомотопии и стабилизаций/дестабилизаций (плоские виртуальные узлы, см. главу 1, теорему 1.1). Вопрос о классификации таких кривых обсуждался в первой главе.

8.3.1. Инварианты, порожденные полиномом Ξ

Две основные конструкции, используемые при определении полинома Ξ (4.10), — это полином Джонса-Кауфмана и инварианты Васильева порядка нуль. Покажем, что инвариант Ξ является более сильным, чем полином Джонса-Кауфмана и инварианты Васильева порядка нуль, рассмотренные вместе.

Обозначим диаграмму, изображенную на рис. 8.8, через \bar{M} ; обозначим соответствующее зацепление через M .

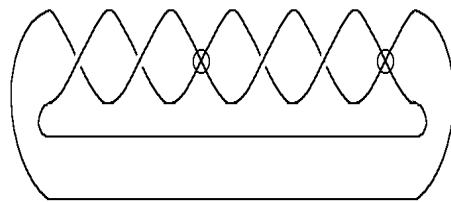


Рис. 8.8. Зацепление M

Очевидно, что это зацепление имеет те же инварианты порядка нуль, что и тривиальное двухкомпонентное зацепление: заменяя в двух местах типы классических перекрестков и применяя дважды движение Ω_2 , мы получаем двухкомпонентное зацепление без классических перекрестков.

Легко проверяется, что полином Джонса-Кауфмана на этом зацеплении такой же, как и на тривиальном зацеплении из двух компонент: это тривиальное зацепление получается из диаграммы \bar{M} применением виртуализации (дважды) и объезда.

При этом полином Ξ позволяет установить неклассичность зацепления M .

Легко видеть, что все элементы из множества \mathcal{S} (см. стр. 182), получаемые по диаграмме M , лежат на торе T^2 . Действительно, набор кривых δ выглядит так, как показано на рис. 8.9.

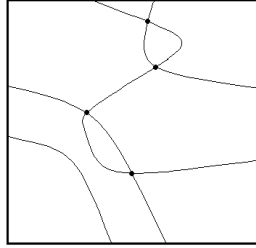


Рис. 8.9. Система кривых $\delta(\bar{M})$

Две кривые из δ на торе параллельны (набор кривых δ определен на стр. 183).

При этом для некоторых состояний s набор $\gamma'(s)$ содержит нетривиальные кривые, не параллельные кривым из δ . Нетрудно проверяется, что соответствующий элемент $p \in \mathcal{S}$ имеет в разложении (4.10) ненулевой коэффициент. Из этого следует, что $\Xi(M)$ имеет нетривиальный коэффициент при некоторых элементах из \mathcal{S} , отличных от P .

Нетривиальность зацепления M была установлена автором в 2003 году, [Ma8].

8.4. Инварианты Васильева, порожденные инвариантом Ξ

В настоящем разделе мы работаем с инвариантами Васильева виртуальных узлов в смысле Кауфмана. Результаты настоящего раздела опубликованы в [Man4, Ma8].

Инвариант Ξ , коэффициенты которого при элементах из \mathcal{S} являются по-

линомами Лорана от переменной a , можно преобразовать в формальный ряд заменой переменной $a = e^x$ и разложением экспоненты по формуле Тейлора. Для удобства мы будем использовать ту же букву Ξ для обозначения полученного ряда от переменной x .

Пусть L — виртуальное зацепление. Пусть $\Xi_m(L)$ — коэффициент в ряде $\Xi(L)$ при x^m . Он представляет собой линейную комбинацию элементов из \mathcal{S} с рациональными коэффициентами.

Докажем следующую теорему.

Теорема 8.4. *Для каждого $m \in \mathbf{N}_+$ инвариант Ξ_m является инвариантом Васильева виртуальных узлов порядка не более m .*

Эта теорема показывает, что инвариант Ξ в действительности слабее инвариантов Васильева виртуальных зацеплений: для каждого элемента $W \in \mathcal{S}$ коэффициент при W в Ξ может быть представлен как формальный ряд из инвариантов Васильева. С другой стороны, эта теорема явно описывает некоторые бесконечные серии инвариантов Васильева виртуальных зацеплений произвольных порядков.

Замечание 8.2. *Для удобства мы будем обозначать ориентированную и соответствующую неориентированную диаграмму виртуального зацепления одной и той же буквой. Так, мы будем писать L вместо $|L|$.*

Перейдем к доказательству теоремы 8.4. Для этого рассмотрим 2^n виртуальных диаграмм, которые отличаются ровно в n выбранных перекрестках: эти диаграммы получаются расстановкой положительных и отрицательных перекрестков всеми возможными 2^n способами. Обозначим эти диаграммы через L_η где $\eta \in \{0, 1\}^n$; пусть L — одна из этих диаграмм. Пусть $m(\eta)$ — количество единиц в η (они соответствуют отрицательным перекресткам \otimes , в то время как нули соответствуют положительным перекресткам \otimes).

Нам нужно доказать, что

$$\sum_{\eta} (-1)^{m(\eta)} \Xi_{n-1}(L_\eta) = 0 \quad (8.3)$$

Первое наблюдение состоит в том, что многообразие M , соответствующее всем этим диаграммам L_η по правилу построения инварианта Ξ (см. стр. 184), — одно и то же. Более того, по построению, набор кривых $\delta(L_\eta)$ не зависит от η . Кроме того, множество **всех** возможных $\delta'(s)$ взятых при всех различных s (и, соответственно, множество всех $p(s)$) одно и то же для всех диаграмм L_η . Единственная разность в формуле (4.10) для вычисления $\Xi(L_\eta)$ при разных η состоит в том, что **коэффициенты** при фиксированных $p(s) \in \mathcal{S}$ различны.

Покажем теперь, что эта разница коэффициентов обращается в нуль в формуле (8.3). Для этого нужно доказать, что соответствующие коэффициенты (при фиксированном $p(s)$) в формуле

$$\sum_{\eta} (-1)^{m(\eta)} \Xi(L_\eta) = 0. \quad (8.4)$$

делятся на $(a-1)^n$ (из чего следует делимость на x^n).

Пусть L_+ — та из диаграмм L_η , у которой все n перекрестков положительны. Фиксируем некоторое состояние s диаграммы L_+ . Рассмотрим элемент $p(s)$. Для каждого η существует состояние $s(\eta)$ для диаграммы L_η с тем же самым $p(s)$. Вообще говоря, может быть и более одного такого состояния, скажем, может существовать \tilde{s} такое, что $p(\tilde{s})$ эквивалентно $p(s)$ в \mathcal{S} . Но мы будем работать лишь с “естественными” состояниями, полученными посредством “того же самого” сглаживания, что и сглаживание s для диаграммы L_+ .

Нам нужно сосчитать коэффициент при $p(s)$ (альтернированную сумму 2^n коэффициентов, соответствующих диаграммам L_η). Предположим, что для состояния s диаграммы L_+ мы имеем m перекрестков, разведенных способом $A : \otimes \rightarrow \oslash$, еще $n-m$ перекрестков разведены способом $B : \otimes \rightarrow \ominus$. Остальные классические перекрестки (не из числа выбранных n) имеют одно и то же разведение для каждой диаграммы. Предположим, что сумма знаков оставшихся классических перекрестков (одна и та же для всех η) равна w , количество перекрестков в состоянии A (не из числа выбранных) равно α , а количество перекрестков в состоянии B равно β . Обозначим количество окружностей (уникурсальных компонент)

в состоянии s диаграммы L_+ через Γ .

Тогда искомый коэффициент равен

$$\begin{aligned} & (-a)^{-3w} a^{(\alpha-\beta)} (-a^2 - a^{-2})^{(\Gamma-1)} \times \\ & \times (-a^{-2} + a^2)^m (-a^{-4} + a^4)^{n-m}. \end{aligned}$$

Последнее выражение делится на $(a-1)^n$. Таковы и все другие коэффициенты, соответствующие различным $p(s)$. Этим завершается доказательство теоремы 8.4.

8.5. Графы, хордовые диаграммы и полином Кауфмана

В настоящем разделе все графы предполагаются не имеющими петель и кратных ребер.

Пусть дана хордовая диаграмма D с n хордами. Определим ее *граф пересечений* (см. [CDL]) $\Gamma(D)$ следующим образом. У графа $\Gamma(D)$ имеется n вершин; они находятся в однозначном соответствии с хордами диаграммы D . Две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие им хорды не зацеплены.

Назовем граф Γ *реализуемым*, если существует хордовая диаграмма D , такая что $\Gamma = \Gamma(D)$. Отметим, что далеко не всякий граф является реализуемым. Простейшим примером такого графа является полный граф на пяти вершинах. Критерий реализуемости графов в терминах отсутствия запрещенных подграфов приведен в работе [Воу].

Пусть дана хордовая диаграмма D . Построим по ней (точнее, по атому с единственной черной клеткой, для которого D служит f -графом) виртуальное зацепление, как описано в главе 4, стр.157. В случае, если D является d -диаграммой, это можно сделать корректно: мы получим классический узел. В противном случае мы можем получить ориентируемый (в смысле атома) виртуальный узел с точностью до виртуализации. В любом случае мы получаем объект, на котором корректно определены полином Кауфмана (и гомологии Хованова).

В случае, когда дана оснащенная хордовая диаграмма, мы также можем построить виртуальное зацепление с точностью до виртуализации (опр. см. стр. 151). Для него определена скобка Кауфмана и (так как атом, соответствующий полученному узлу, вообще говоря, не является ориентируемым). Скобка Кауфмана строится и по хордовой диаграмме на нескольких окружностях (посредством атома).

Следовательно, мы имеем сквозное отображение f , сопоставляющее хордовой диаграмме на одной или нескольких окружностях полином.

Теорема 8.5. *Отображение f удовлетворяет четырехчленному соотношению, а также обобщенному четырехчленному соотношению.*

Таким образом, **скобка Кауфмана** задает бесконечную трехпараметрическую серию инвариантов конечного порядка зацеплений. Один параметр этой серии — это степень монома, входящего в скобку Кауфмана. Другой параметр — это порядок хордовой диаграммы, третий — количество компонент рассматриваемого зацепления, равное количеству окружностей хордовой диаграммы.

Отметим, что первая часть этой теоремы (сформулированная в иных терминах, не использующих виртуальных узлов) была доказана в работе Б.Меллора [Mel] (и позднее — в терминах, изложенных выше, — в [Ma1]). Более того, он явно указал, что за инварианты Васильева получаются из этой системы весов — это инварианты Васильева, происходящие из полинома Кауфмана (двух переменных). Таким образом, имеется некоторая интересная связь между скобкой Кауфмана виртуальных узлов и полиномом Кауфмана классических узлов.

Назовем *перестройкой* оснащенной хордовой диаграммы на одномерном многообразии \mathcal{M} по хорде c следующее преобразование. Пусть хорда c соединяет точки A и B . Перестройка представляет собой удаление двух малых (не содержащих концов других хорд) окрестностей точек A и B и замену их двумя другими отрезками. А именно, обозначим эти окрестности через $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ и $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ согласно ориентациям окружностей, содержащих точки A и B . Тогда в результате перестройки вместо этих двух окрестностей появляются отрезки $(A - \varepsilon, B + \varepsilon)$ и $(A + \varepsilon, B - \varepsilon)$, если хорда является положительной или же $(A + \varepsilon, B + \varepsilon)$ и $(A - \varepsilon, B - \varepsilon)$, если хор-

да является отрицательной. Такие перестройки возникают при переходе из одного состояния скобки Кауфмана в соседнее.

Доказательство теоремы 8.5. Отметим следующие *двучленные соотношения*, см. рис. 8.10 и *обобщенные двучленные соотношения*, см. рис. 8.11.

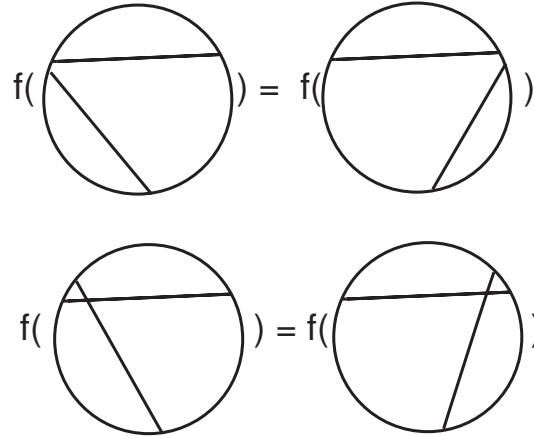


Рис. 8.10. Двучленные соотношения

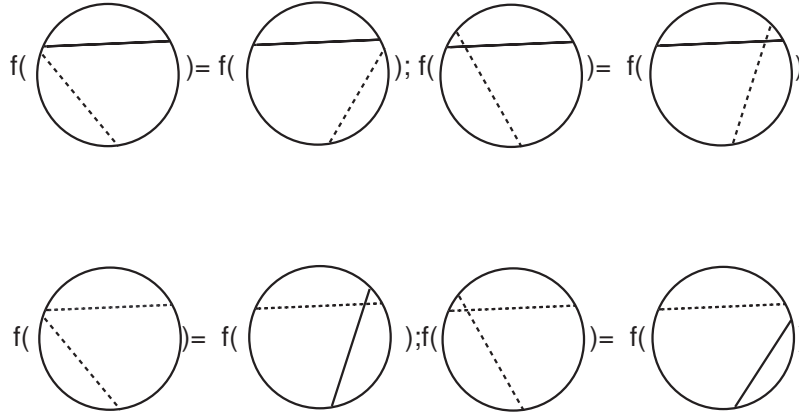


Рис. 8.11. Обобщенные двучленные соотношения

Каждое из них означает равенство значений некоторой функции на парах диаграмм, отличающихся локально как указано на рисунке.

Отметим, что (обобщенные) двучленные соотношения влекут четырехчленное соотношение: последнее разлагается в сумму двух соотношений.

Отметим теперь, что функция ϕ , сопоставляющая (оснащенной) хордовой диаграмме количество окружностей, получаемых перестройкой изна-

чальной окружности вдоль этой хордовой диаграммы, удовлетворяет двучленным и обобщенным двучленным соотношениям. Это было замечено С.К.Ландо [Лан]. Таким образом, двучленному соотношению удовлетворяет и функция $(-a^2 - a^{-2})^{\phi-1}$.

Рассмотрим теперь функцию $f(D)$. Она представляет собой линейную комбинацию значений функции $(-a^2 - a^{-2})^{\phi-1}$ на всевозможных поддиаграммах хордовой диаграммы D .

Каждое (обобщенное) четырехчленное соотношение можно записать в виде $A_1 - B_1 - A_2 + B_2 = 0$, где $A_1 - A_2 = 0$ и $B_1 - B_2 = 0$ представляют собой двучленные соотношения, а хордовая диаграмма A_i отличается от хордовой диаграммы B_i ($i = 1, 2$) лишь взаимным расположением двух хорд, которые участвуют в соотношении.

Между хордами диаграмм A_1, B_1, A_2, B_2 имеется естественное взаимно однозначное соответствие, состоящее в следующем: одна из хорд (неподвижная) является общей для всех четырех диаграмм — ее расположение и тип не меняются. Вторая из хорд, изображаемых на рисунке — подвижная; обозначим “подвижные” хорды через α (для диаграмм A) и β (для диаграмм B).

Разложим $f(A_1 + B_1 - A_2 - B_2)$ в сумму по поддиаграммам. Если поддиаграмма диаграммы A_1 не содержит ни одной из хорд α или β , все четыре соответствующие диаграммы тождественно совпадают. В случае, когда поддиаграмма содержит ровно одну хорду α или β , поддиаграмма диаграмм A_i совпадает с соответствующей поддиаграммой диаграммы B_i .

Наконец, в случае, когда в поддиаграмме присутствуют обе хорды α и β , мы получаем четверку диаграмм, которая разбивается на две пары, образующие двучленные соотношения.

Суммируя сказанное выше, приходим к доказательству теоремы. \square

8.6. Доказательство гипотезы Васильева о планарности сингулярных зацеплений

Каждый инвариант Васильева порядка n классических узлов является инвариантом первого порядка сингулярных узлов с $(n - 1)$ точкой самопересечения (обратное, вообще говоря, неверно). Как оказалось [Вас], ис-

следование инвариантов первого порядка $(n - 1)$ -сингулярных узлов дает важную информацию о комбинаторных формулах для инвариантов конечного порядка классических узлов.

Знаменитая теорема М.Н. Гусарова ([GPV]) утверждает, что комбинаторные формулы существуют для всех инвариантов конечного порядка классических узлов; при этом комбинаторные формулы могут иметь дробные коэффициенты; подробнее см. [GPV, Вас].

Напомним, что A -структура четырехвалентного графа (см. гл.4) представляет собой указание в каждой вершине разбиения четырех полуребер на две пары “противоположных”.

Для определения структуры когомологий пространства сингулярных узлов и решения задачи о том, имеются ли для данного инварианта Васильева комбинаторные формулы Поляка-Виро с целочисленными коэффициентами, В.А.Васильев [Вас] сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза 8.1. *4-Граф с фиксированной A -структурой не вложим в плоскость с сохранением A -структуры тогда и только тогда, когда у него найдутся два цикла, не имеющие общих ребер, имеющие ровно одну точку перекрестья.*

Доказательство этой гипотезы является центральным результатом настоящей главы.

Далее под *оснащенным графом* мы имеем в виду 4-валентный граф с A -структурой. Иными словами, гипотеза утверждает, что для заданной A -структуры B -структура, задающая плоский атом существует в том и только в том случае, когда отсутствует препятствие Васильева — два цикла, имеющие ровно одну точку перекрестья.

Будем записывать циклы в виде набора подряд идущих ребер. Здесь *точкой перекрестья* циклов $A = (A_0, A_1, \dots, A_n = A_0)$ и $B = (B_0, B_1, \dots, B_m = B_0)$, не имеющих общих ребер, мы называем вершину, в которой $a_i = b_j$ для некоторых индексов i, j , причем ребра A_{i-1}, A_i являются формально противоположными в смысле A -структуры (из чего следует, что ребра B_{j-1}, B_j также являются противоположными). *Точкой самоперекрестья* цикла A длины n называется такая вершина $a_i = a_j$ ($i \neq j \pmod n$) этого цикла, в

которой ребра A_{i-1}, A_i являются противоположными. Здесь и далее нумерация вершин и ребер цикла длины n берется по модулю n .

Целью настоящего раздела является доказательство этой гипотезы. Впервые этот результат опубликован в [Ma12]. Отметим, что методы, применяемые здесь, тесно связаны с теми методами, которые мы используем при построении комплекса Хованова для виртуальных узлов: а именно, мы используем графы с A -структурой и B -структурой (атомы), их ориентируемость (структура источник-сток), а также d -диаграммы.

В дальнейшем все 4-графы с A -структурой предполагаются связными. Случай несвязных графов очевидным образом сводится к случаю связных графов.

Заметим, что в одну сторону утверждение гипотезы очевидно: если граф вложим в плоскость с сохранением A -структуры, то он не может иметь двух циклов с ровно одной точкой перекрестья. Это следует из того, что индекс пересечения двух гладких кривых общего положения на плоскости четен.

Далее, если существуют два цикла A и B , имеющие ровно одну точку перекрестья, то существуют два простых цикла A' и B' с той же самой точкой перекрестья: этого легко достичь упрощающей перестройкой циклов A и B . Пусть, например, цикл A не является простым. Рассмотрим его точку самопересечения X . Тогда легко видеть, что цикл A разбивается вершиной X на два цикла A' и A'' , один из которых (A') имеет ровно одну точку перекрестья с циклом B — ту же, что и цикл A . Упрощающая перестройка состоит в замене A на A' , см. рис. 8.12.

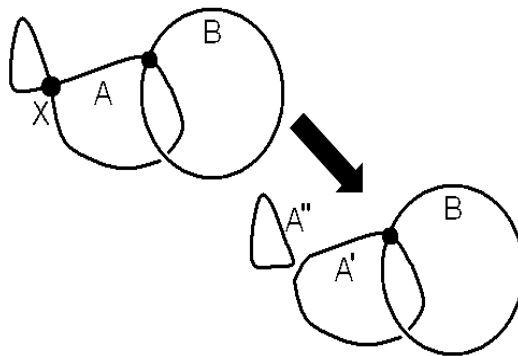


Рис. 8.12. Упрощение цикла A

Так можно продолжать до тех пор, пока оба рассматриваемых цикла A и B не станут простыми.

Мы будем доказывать сложную часть гипотезы Васильева не предполагая простоты графов.

А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 8.6. *Пусть G — 4-граф с A -структурой, не вложимый в плоскость с сохранением A -структуры. Тогда найдутся два цикла A, B на графе G , не имеющие общих ребер, у которых количество точек перекрестка циклов A и B равно единице.*

Определение 8.5. *Уникурсальным графом* назовем оснащенный граф, изоморфный образу иммерсии окружности в трехмерное пространство, все особенности которого исчерпываются конечным числом двойных точек самопересечения, никакая из которых не является точкой касания, с естественной структурой противоположных полуребер.

У уникурсального графа имеется естественная A -структура: каждая вершина (точка пересечения) делит образ дуги окружности на две части, которые и отвечают противоположным ребрам.

В этом случае имеет смысл говорить об уникурсальном цикле, т.е. таком цикле, который обходит все ребра, переходя с ребра на противоположное ему.

Таким графам (которые описывают вложения сингулярных узлов) естественным образом соответствуют хордовые диаграммы (на одной окружности). В дальнейшем мы будем часто пользоваться циклами — *обходами ребер всего графа*, но не уникурсальными. Хордовые диаграммы, которые будут появляться в тексте также соответствуют **не уникурсальным** обходам, см. ниже. В отличие от уникурсального обхода не уникурсальный обход у графа не единствен.

Замечание 8.3. Нигде в дальнейшем тексте мы не предполагаем уникурсальности графов и доказываем все утверждения вне зависимости от того, является граф уникурсальным или нет.

В дальнейшем нам будет важно наличие структуры источник-сток на графе с A -структурой. Мы будем задавать ориентацию ребер графа и в

каждой вершине смотреть, задает ли эта ориентация структуру источник-сток в данной вершине.

Определение 8.6. Цикл A d -графа Γ с A -структурой называется *поворачивающим*, если любые два последовательных ребра A_i, A_{i+1} в этом цикле не являются противоположными.

Обходом графа Γ назовем поворачивающий цикл, содержащий все ребра графа Γ .

Очевидна следующая

Лемма 8.1. *Каждый связный оснащенный d -граф Γ имеет обход.*

Важным свойством d -диаграмм является их вложимость в плоскость (как графов).

Лемма 8.2. *Пусть d -граф Γ с A -структурой не удовлетворяет условию источник-сток. Тогда найдутся два цикла A и B на графе Γ , имеющие ровно одну точку перекрестья и не имеющие общих ребер.*

Доказательство. Рассмотрим поворачивающий обход O графа Γ , при этом ориентируем ребро O_i от точки o_i к точке o_{i+1} , $i = 1, 2, \dots$. Мы предполагаем, что граф Γ не удовлетворяет условию источник-сток. Обход O задает некоторую ориентацию всех ребер графа Γ . По предположению найдется вершина, в которой для данной ориентации нарушается условие источник-сток. Пусть $o_j = o_k$ — такая вершина. Рассмотрим два цикла $A = \{O_j, O_{j+1}, \dots, O_{k-1}\}$ и $B = \{O_k, O_{k+1}, \dots, O_{j-1}\}$, на которые делится цикл O точкой $o_j = o_k$. В любой точке, отличной от данной, каждый из двух циклов является поворачивающим (так как совпадает с обходом O), поэтому количество точек перекрестья рассматриваемых циклов не превосходит единицы. Единственная точка, в которой такое перекрестье может иметь место — это $o_j = o_k$. Покажем, что она действительно является таковой. Для этого нужно проверить, что цикл A в точке $o_j = o_k$ переходит с ребра на противоположное. В этой точке цикл A переходит с ребра O_{k-1} на ребро O_j . В этой вершине сходятся четыре ребра: $O_{j-1}, O_j, O_{k-1}, O_k$. Ребро O_k не является противоположным ребру O_{k-1} по построению обхода O . Далее, ребро O_{j-1} не может быть противоположным ребру O_{k-1} , так как в этом случае в вершине $o_j = o_k$ выполнялось бы условие источник-сток: мы

имели бы два противоположных входящих ребра O_{k-1} и O_{j-1} и два исходящих ребра O_k и O_j . Это противоречит нашему предположению. Таким образом, $o_j = o_k$ — единственная точка перекрестья циклов A и B . \square

Пусть Γ — 4-граф с выделенной A -структурой и с m вершинами, A — его обход. Ему можно сопоставить следующую хордовую диаграмму. Расположим на окружности $2m$ точек $\{x_j\} = \{\frac{2\pi j}{2m}\}$ и соединим различные точки x_j и $x_{j'}$ хордой тогда и только тогда, когда $a_j = a_{j'}$. Здесь j пробегает значения от 1 до $2m$.

Лемма 8.3. Пусть 4-граф Γ с A -структурой таков, что для любых двух циклов A и B , не имеющих общих ребер, количество точек трансверсального перекрестья (в смысле A -структуры) отлично от единицы. Тогда для любого обхода O графа Γ хордовая диаграмма, соответствующая этому обходу, является d -диаграммой.

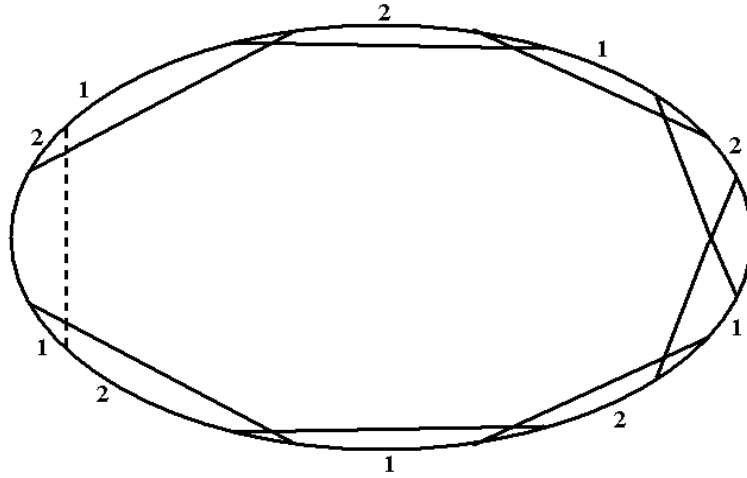
Замечание 8.4. Условие леммы 8.3 означает отсутствие препятствия, сформулированного в гипотезе Васильева.

Доказательство. Отметим сначала следующий факт [Ман-2]. Хордовая диаграмма является d -диаграммой тогда и только тогда, когда она не имеет поддиаграммы Δ_{2n+1} вида “правильный $(2n+1)$ -угольник”, т.е. хордовой диаграммы из $2n+1$ хорды ($n > 0$) в которой хорда j зацеплена лишь с хордами с номерами $j+1$ и $j-1$ (нумерация взята по модулю $2n+1$), см. рис. 8.13. Отметим, что для каждого n хордовая диаграмма, обладающая описанными выше условиями, единственна.

Пусть выполнено условие леммы. В силу леммы 8.2 4-граф Γ с его A -структурой обладает свойством источник-сток.

Таким образом, нам достаточно доказать, что в случае, если граф Γ обладает свойством источник-сток, наличие $(2n+1)$ -угольника в качестве поддиаграммы влечет наличие на исходном графе двух не имеющих общих ребер циклов, имеющих ровно одну точку перекрестья.

Ребрам графа соответствуют дуги хордовой диаграммы, а вершинам — ее хорды. Дугой хордовой диаграммы назовем часть ее окружности, находящаяся между двумя соседними вершинами.

Рис. 8.13. Хордовая диаграмма Δ_{2n+1} и циклы 1 и 2 на нем

При этом если граф обладает свойством источник-сток, то отношение противоположности ребер-дуг таково: для каждой хорды с концами X, Y дуга, входящая в вершину X , противоположна дуге, входящей в вершину Y . В дальнейшем мы будем говорить: “дуга хордовой диаграммы принадлежит некоторому циклу”, подразумевая, что этому циклу принадлежит соответствующее данной хорде ребро 4-графа с A -структурой.

Дальнейшее доказательство леммы 8.3 таково. Для каждого n мы строим явно два цикла A, B , состоящие из дуг хордовой диаграммы Δ_{2n+1} . Если хордовая диаграмма D содержит Δ_{2n+1} как поддиаграмму, то каждая дуга диаграммы Δ_{2n+1} подразбивается на дуги диаграммы D хордами. В этом случае наши циклы также подразбиваются: ребра, соответствующие дугам диаграммы Δ_{2n+1} , будут разбиты на ребра, соответствующие дугам диаграммы D . При таком разбиении появятся новые вершины, соответствующие концам хорд, входящих в D , но не в Δ_{2n+1} . Но эти вершины не влияют на количество точек перекрестья исследуемых циклов, ибо по построению рассматриваемые циклы в этих вершинах переходят с ребра на не противоположное, следовательно, если такая вершина и будет встречаться в обоих циклах, то она не будет учитываться.

Пример двух циклов для $2n + 1$ -угольника показан на рис. 8.13; дуги, соответствующие первому циклу помечены цифрой 1, а дуги, соответству-

ющие второму циклу, — цифрой 2. Хорда, соответствующая единственной их точке перекрестья, изображена пунктирной линией. \square

Следующая лемма доказана в работе [Кау7] в несколько иной формулировке.

Лемма 8.4. *Пусть d -граф Γ с A -структурой обладает свойством источник-сток. Пусть хордовая диаграмма D , соответствующая некоторому обходу графа Γ , является d -диаграммой. Тогда граф Γ допускает вложение в плоскость с сохранением A -структуры.*

Наглядное описание доказательства леммы приведено на рис. 8.14. В средней части рисунка показано, как по хорде восстанавливается окрестность вершины графа. В нижней части указано, что в случае d -диаграммы соответствующий граф укладывается на плоскость, причем структура противоположности ребер в вершинах (A -структура) сохраняется.

Доказательство леммы 8.4. Рассмотрим d -диаграмму D и вложим ее в плоскость следующим образом. Разобьем хорды этой диаграммы на два семейства хорд F_1, F_2 так, что любые две хорды из одного семейства не были зацеплены между собой (разбиение выбирается произвольным образом). Далее вложим окружность в плоскость стандартным образом, расположив концы хорд на окружности так, чтобы никакие два образа концов хорд не были диаметрально противоположными. Хорды первого семейства расположим внутри окружности, а хорды второго семейства — вне. Это можно сделать без пересечений, отобразив хорды первого семейства в прямолинейные отрезки, а хорды второго семейства — в образы прямолинейных отрезков относительно инверсии в рассматриваемой окружности.

Ориентируем окружность против часовой стрелки. Каждая хорда c соединяет пару точек на окружности: X и Y . Рассмотрим на окружности точки $X_1 = X - \varepsilon, X_2 = X + \varepsilon, Y_1 = Y - \varepsilon, Y_2 = Y + \varepsilon$. Здесь ε — некоторое малое число (угол), а операции $+$ и $-$ понимаются в смысле малого сдвига точки на угол $\pm\varepsilon$. Удалим теперь хорду c вместе с двумя дугами $[X_1, X_2]$ и $[Y_1, Y_2]$. Вместо нее разместим в окрестности удаленной хорды два (криволинейных) отрезка $[X_1, Y_1]$ и $[X_2, Y_2]$ так, чтобы они пересекались трансверсально ровно в одной точке Z (скажем, в середине удаленной

хорды). Прделав эту операцию для всех хорд диаграммы D , мы получим четырехвалентный граф Δ .

По построению граф Δ изоморфен графу Γ .

Нам осталось доказать, что они имеют одинаковую A -структуру.

Из того, что граф Γ обладает свойством источник-сток следует, что полученное вложение является реализацией, т.е. на 4-графе Γ с A -структурой ребро, соответствующее $[X_1, Z]$, противоположно ребру, соответствующему $[Z, Y_1]$.

Это вытекает из следующих соображений. Так как 4-граф Γ с A -структурой обладает свойством источник-сток, то любой его обход можно сделать *ориентированным* согласно правилу источник-сток: каждое ребро, входящее в вершину, продолжается ребром, исходящим из нее (и поворачивающим в одном из двух направлений).

Нам осталось заметить, что при любом поворачивающем обходе графа Δ ребро $[Z, X_2]$ следует за ребром $[X_1, Z]$ в том и только в том случае, если ребро $[Z, Y_2]$ следует за ребром $[Y_1, Z]$. Последнее вытекает из того, что любой поворачивающий обход четырехвалентного графа на плоскости аппроксимируется вложением окружности в плоскость.

Лемма доказана. □

Суммируя доказанное в леммах 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, мы получаем утверждение гипотезы Васильева.

Заметим, что в лемме 8.3 доказывається, что в случае отсутствия препятствия (двух циклов с единственной точкой самоперекрестья) хордовая диаграмма, соответствующая *любому обходу*, будет d -диаграммой, а в лемме 8.4 требуется лишь условие источник-сток и наличие d -диаграммы, соответствующей *некоторому обходу*. На самом деле в случае, если 4-граф с A -структурой удовлетворяет условию источник-сток, верно следующее утверждение.

Утверждение 8.1. *Если хордовая диаграмма, соответствующая некоторому поворачивающему обходу 4-графа с A -структурой, является d -диаграммой, то d -диаграммой является также диаграмма, соответствующая любому поворачивающему обходу.*

Приведем пример. Рассмотрим граф с A -структурой, изображенный в левом верхнем углу на рис. 8.15. Этот граф не вложим в плоскость с сохранением A -структуры. При этом обход $psqr$ его ребер, изображенный в правом верхнем углу на том же рисунке, задает хордовую диаграмму из двух зацепленных хорд, являющуюся d -диаграммой. Из этого следует, что вложенный в плоскость граф (левая нижняя часть рисунка 8.15) изоморфен изначальной графу. Однако обход $psqr$ не удовлетворяет условию источник-сток в вершине X : противоположные ребра p и r таковы, что p входит в вершину X , а r из нее выходит. Поэтому граф, изображенный в левом нижнем углу, имеет другую A -структуру в вершине X : у него противоположными в этой вершине являются ребра p и q , а не p и r , как у изначального графа.

Отметим, что описанный выше критерий реализует быстрый (квадратичной сложности) алгоритм определения, является ли граф с A -структурой вложимым в плоскость с сохранением A -структуры, и в случае, если он не является таковым, выдает два цикла с ровно одной такой точкой перекрестья. При этом сложность считается относительно числа вершин.

Основные шаги этого алгоритма таковы.

Перенумеруем ребра и вершины графа в произвольном порядке и выпишем в каждой вершине, какие ребра ей инцидентны, при этом также укажем соотношение противоположности ребер в этой вершине.

Перенумерация ребер имеет линейную сложность, как и перенумерация вершин и запоминание информации о ребрах, инцидентных вершине.

Далее мы строим обход графа. Эта операция также имеет линейную сложность.

Имея обход, мы можем проверить, задает ли он условие источник-сток в каждой вершине. Если нет, то, согласно лемме 8.2, мы получаем два цикла, имеющие ровно одну точку перекрестья. Эта операция — линейна.

Пусть обход имеет структуру источник-сток. Построим соответствующую ему хордовую диаграмму. Операция построения хордовой диаграммы линейна. Далее, определение зацепленности хорд хордовой диаграммы имеет квадратичную сложность (нужно рассмотреть все пары хорд). Тем самым мы получили матрицу пересечений хордовой диаграммы или, что

то же самое, *граф пересечений* хордовой диаграммы. После этого вопрос о том, является ли исходная диаграмма d -диаграммой переформулируется так: является ли граф пересечений двудольным графом?

Вопрос определения, является ли граф двудольным можно решить за квадратичное число операций. Более того, за квадратичное число операций в графе, не являющимся двудольным можно найти минимальный (по включению) цикл нечетной длины — в терминах хордовых диаграмм — $(2n + 1)$ -угольник. После этого пара циклов, имеющих единственную точку перекрестья, строится согласно лемме 8.3. Такое построение имеет линейную сложность.

8.7. Бесконечность количества длинных узлов, имеющих фиксированное замыкание

В завершение настоящей главы докажем следующую теорему (с использованием инвариантов Васильева виртуальных узлов порядка нуль). Приводимый здесь результат был впервые доказан Д.Сильвером и С.Уильямс в работе [SW2] (несколько раньше, чем его получил автор).

Теорема 8.7. *Для каждого изотопического класса узла K множество длинных узлов k , таких что $Cl(k) = K$, счетно.*

Доказательство. Рассмотрим компактный виртуальный узел и произвольный длинный узел K_1 , полученный некоторым разрыванием узла K . Таким образом мы имеем $Cl(K_1) = K$.

По каждому длинному узлу M мы можем построить новый длинный узел M' так как показано на рис. 8.16.

Очевидным образом мы имеем $Cl(M') = Cl(M)$.

Пусть теперь $K_2 = (K_1)'$, $K_3 = (K_2)'$ и так далее: для каждого натурального i положим $K_i = (K_{i-1})'$. Очевидно, что для каждого натурального i мы имеем $Cl(K_i) = Cl(K_1) = K$.

Покажем, что среди узлов K_i найдется бесконечно много различных. Для этого нам достаточно заметить, что различны их *замыкания Кишино*, которые определены так, как показано на рис. 8.17.

Легко проверить, что операция замыкания Кишино корректно определена: для эквивалентных длинных узлов мы получаем эквивалентные компактные узлы при таком замыкании. То, что среди замыканий Кишино узлов K_i встречается бесконечно много различных узлов, следует из того, что эти замыкания могут иметь любой сколь угодно большой наперед заданный род.

Последнее утверждение следует из того, что соответствующие виртуальные узлы имеют сколь угодно большой наперед заданный род в плоской категории, т.е. если мы разрешим помимо обобщенных движений Рейдемейстера применять замену типов классических перекрестков (т.е. будем работать с виртуальными узлами с точностью до инвариантов Васильева порядка 0). А именно, определяя по диаграмме K_i поверхность с системой кривых в ней мы получим минимальную реализацию (не имеющую ни петель, ни двуугольников). \square

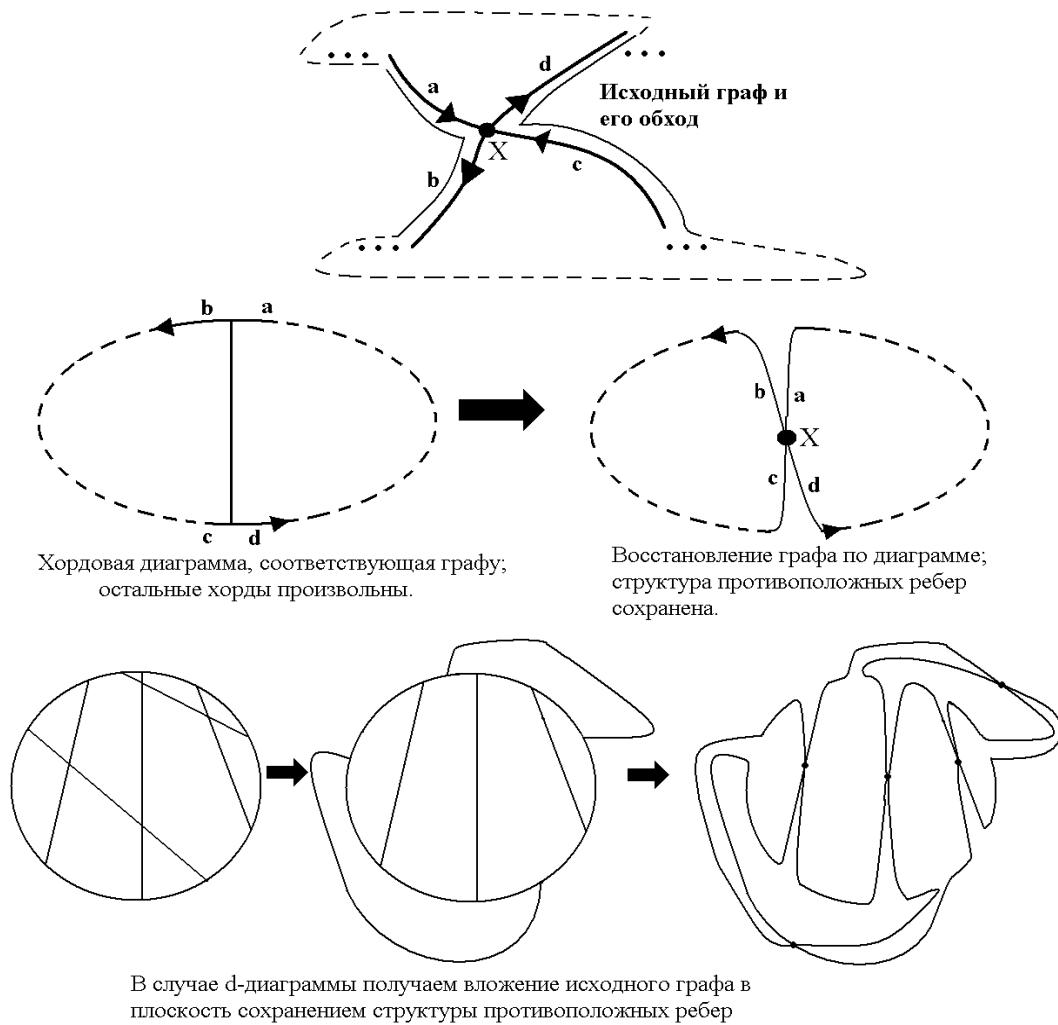


Рис. 8.14. Восстановление графа по d -диаграмме

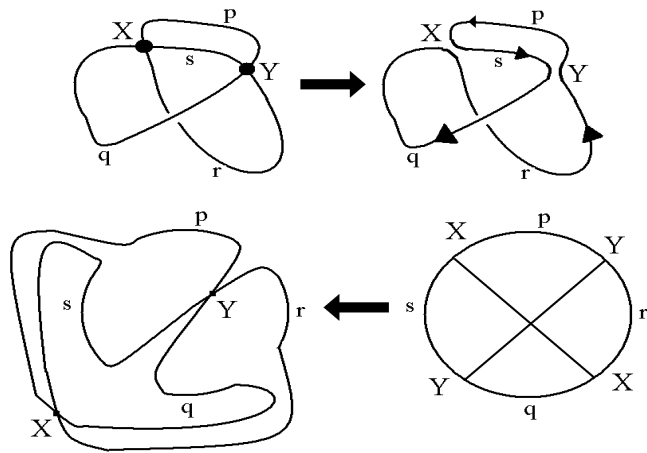


Рис. 8.15. Отсутствие структуры источник-сток влечет неволожимость с учетом A -структуры

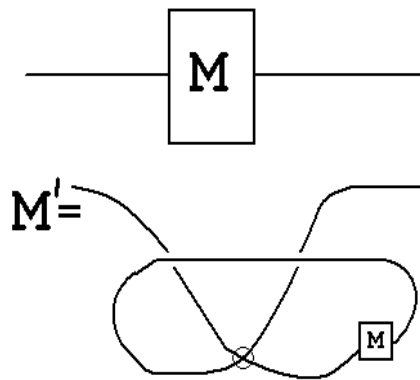


Рис. 8.16. Операция $'$

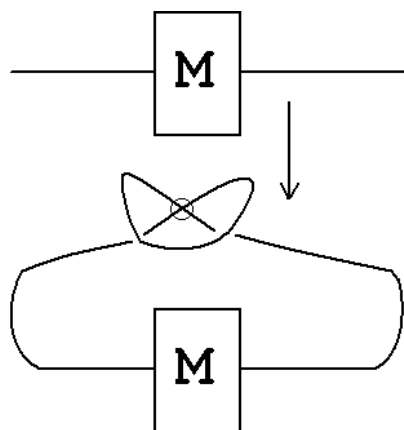


Рис. 8.17. Замыкание Кишино

Литература

Публикации автора по теме диссертации:

- [Ma1] Мантуров, В.О. (2005), Теория узлов, *Регулярная и хаотическая динамика*, Москва-Ижевск, 512 сс.
- [Ma2] Мантуров, В.О. (2004), О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений, *Труды ММО*, **65** (1), сс. 175-200.
- [Ma3] Мантуров, В.О. (2003), О распознавании виртуальных кос, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **299**. Геометрия и топология, **8**, сс. 267-286.
- [Ma4] Мантуров, В.О. (2002), Инварианты виртуальных зацеплений, *Доклады РАН*, **384** (1), сс. 11-13.
- [Ma5] Мантуров, В.О. (2003), Атомы и минимальные диаграммы виртуальных зацеплений, *Доклады РАН*, **391** (2), сс. 166-168.
- [Ma6] Мантуров, В.О. (2004), Полином Хованова для виртуальных узлов, *Доклады РАН*, **398**, (1). сс.15-18.
- [Ma7] Мантуров, В.О. (2003), Кривые на поверхностях, виртуальные узлы и полином Джонса-Кауфмана, *Доклады РАН*, **390** (2) сс. 155-157.
- [Ma8] Мантуров, В.О. (2004), Инварианты конечного порядка виртуальных зацеплений и полином Джонса-Кауфмана, *Доклады РАН*, **395** (1), сс. 18-21.
- [Ma9] Мантуров, В.О. (2005), О длинных виртуальных узлах, *Доклады РАН*, **401** (5), сс. 595-598.
- [Ma10] Мантуров, В.О. (2002), Инвариантный полином двух переменных для виртуальных зацеплений, *Успехи мат. наук*, **57**, No.5, сс. 141-142.

-
- [Ma11] Мантуров, В.О. (2005), Комплекс Хованова для виртуальных узлов, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 11, **4**, сс. 127-152.
- [Ma12] Мантуров, В.О. (2005), Доказательство гипотезы Васильева о планарности сингулярных зацеплений, *Известия РАН*, т. 69, **5**, сс. 169-178.
- [Ma13] Мантуров, В.О. (2003), Комбинаторные вопросы теории виртуальных узлов, *Математические вопросы кибернетики*, т. 12, сс. 147-178.
- [Ma14] Мантуров, В.О. (2006), Комплекс Хованова и минимальные диаграммы узлов, *Доклады РАН*, **406**, (3), сс. 308-311.
- [Ma15] Мантуров В.О. (2007), Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами, *Известия РАН*, **71** (5), pp. 111-148.
- [Man1] Manturov, V.O. (2004), *Knot Theory*, CRC-Press, Boca Raton, 416 pp.
- [Man2] Manturov, V.O. (2003), Multivariable polynomial invariants for virtual knots and links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12**,(8), pp. 1131-1144.
- [Man3] Manturov, V.O. (2003), Kauffman-like polynomial and curves in 2-surfaces, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12**, (8), pp.1145-1153.
- [Man4] Manturov, V.O. (2005), Vassiliev invariants for virtual links, curves on surfaces and the Jones-Kauffman polynomial, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **14**, (2), pp. 231-242.
- [Man5] Manturov, V.O. (2004), Long virtual knots and their invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13** (8), pp.1029-1039.
- [Man6] Manturov, V.O. (2002), On Invariants of Virtual Links, *Acta Applicandae Mathematicae*, **72** (3), pp. 295–309.
- [Man7] Manturov, V.O. (2004), Virtual Knots and Infinite-dimensional Lie algebras, *Acta Applicandae Mathematicae*, **83** (3), pp. 221-233.
- [Man8] Manturov, V.O. (2005), Flat Hierarchy, *Fundamenta Mathematicae*, vol 188, pp. 147-154.

- [Man9] Manturov, V.O. (2007), Khovanov Homology for Virtual Links with Arbitrary Coefficients, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **16** (3), pp. 345-377.
- [KM1] Kauffman, L.H., Manturov, V.O. (2005), Virtual Biquandles, *Fundamenta Mathematicae*, **188**, pp. 103-146.
- [KM2] Кауфман, Л.Х., Мантуров, В.О. (2006) Виртуальные узлы и зацепления, *Труды математического института РАН им. В.А.Стеклова*, т. 252, N. 1, 114-133.
- Другие цитируемые работы:
- [Ale1] Alexander, J. W. (1923), Topological invariants of knots and links. *Trans. AMS.*, **20**, pp. 257–306.
- [Ale2] Alexander, J.W. (1933), A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19**, pp. 222–275.
- [Ale3] Alexander, J.W. (1923), A lemma on systems of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19**, pp. 93–95.
- [AP] Asaeda, M., Przytycki, J. (2004), Khovanov homology: Torsion and Thickness, arxiv: math. GT/0402402
- [APS] Asaeda, M., Przytycki, J., Sikora, A. (2004), Categorification of the Kauffman bracket skein module of I-bundles over surfaces, *Algebraic and Geometric Topology*, **4**, No. 52, pp. 1177-1210.
- [Arn1] Arnold, V.I. (1994), Topological invariants of plane curves and caustics, *Univ. Lect. Series*, **5**, AMS Providence, R. I.
- [Arn2] Arnold, V.I. (1994), Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications, in: *Singularities and Bifurcations, Adv. Soviet Math.*, **21**, AMS, Providence, RI, pp. 33-91.
- [Art1] Artin, E. (1925), Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4**, pp. 27–72.

-
- [Avd] Avdeev, R.S. (2006), On extreme coefficients of the Jones–Kauffman polynomial for virtual links, *J. Knot Theory Ramifications*, **15**, (7), pp. 853–868.
- [BaMo] Bae, Y. and Morton, H.R. (2003) The spread and extreme terms of the Jones polynomial, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12**, (3), pp. 359–373.
- [Bar] Bardakov, V.G. (2004) The virtual and universal bradis, *Fundamenta Mathematicae*, **184**, 1–18.
- [BF] Bartholomew, A. and Fenn, R. (2003), Quaternionic Invariants of Virtual Knots and Links, www.maths.sussex.ac.uk/Staff/RAF/Maths/Current/Andy/equivalent.ps,
- [BL] Birman, J.S. and Lin, X.–S. (1993), Knot polynomials and Vassiliev’s invariants, *Inventiones Mathematicae*, **111**, pp. 225–270.
- [Big1] Bigelow, S. (2001). Braid groups are linear, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**, pp. 471–486.
- [Big2] Bigelow, S. (2002). Does the Jones polynomial detect the unknot, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **11**, pp 493–505.
- [Bir2] Birman, J.S. (1974), Braids, links and mapping class groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974 (Ann. Math. Stud., 1982).
- [Bir3] Birman, J.S. (1993), New points of view in knot theory, *Bull. AMS*, **28**, pp. 283–287.
- [BN1] Bar–Natan, D. (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34**, pp. 423–475.
- [BN2] Bar–Natan, D. (2002), On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial, *Algebraic and Geometric Topology*, **2**(16), pp. 337–370.
- [BN3] Bar–Natan, D. (2004), Khovanov’s homology for tangles and cobordisms, arXiv:mat.GT/0410495 *Geometry and Topology*, **9**, 1443–1499 (2005).
- [Bou] Bouchet, A. (1994), Circle graph obstructions, *J. Combinatorial Theory B*, **60**, pp. 107–144.

- [BuF] Budden, S., Fenn, R. (2004), The Equation $[B, (A - 1)(A, B)] = 0$ and Virtual Knots and Links, *Fundamenta Mathematicae* **184**, pp. 19-29.
- [Bur] Burau, W. (1936) Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrillte Verkettungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**, pp. 179–186.
- [BZ] Burde, G. and Zieschang, H. (2003), *Knots* (Berlin: Walter de Gruyter).
- [КФ] Кроуэлл, Р., Фокс, Р. (1967), *Введение в теорию узлов*, (М.: Мир).
- [Car] Carter, J.S. (1991), Closed curves that never extend to proper maps of disks, *Proc. AMS*, **113** (3), pp. 879-888.
- [CDBook] Chmutov, S. and Duzhin, S., Mostovoy, J. *CDBook. Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook.ps.gz>
- [CDL] Chmutov, S.V., Duzhin, S.V. and Lando, S.K. (1994), Vassiliev knot invariants *I – III*, *Advances in Soviet Mathematics*, **21**, pp. 117–147.
- [Che] Chekanov, Yu. (2002), Differential algebras of Legendrian links, *Inventiones Mathematicae*, **150**(3), pp. 441–483.
- [ChK] Champanerkar, A., Kofman, I., Spanning trees and Khovanov homology, arxiv: math. GT/0607510
- [CE1] Cairns, G., Elton, D., The planarity problem for signed Gauss words, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **2**, No.4. (1993), pp. 359-367.
- [CE2] Cairns, G., Elton, D., The planarity problem II, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **5**, No.2. (1996), pp. 137-144.
- [CS] J.S.Carter and M. Saito, Diagrammatic invariants of knotted curves and surfaces, (unpublished manuscript - 1992).
- [CKS] Carter, J.S., Kamada, S., Saito, M. (2002), Stable equivalence of knots on surfaces, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **11**, pp. 311-322.
- [CKS2] Carter, J.S., Kamada, S., Saito, M. (2004), *Surfaces in 4-space*, (N.Y: Springer Verlag).

-
- [Con] Conway, J.H. (1970), An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, In: *Computational Problems in Abstract Algebra* (New York, Pergamon Press), pp. 329–358.
- [Deh1] Dehornoy, P. (1995), From large cardinals to braids via distributive algebra, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **4**, pp. 33–79
- [Dehn] Dehn, M. (1914), Die beiden Kleeblattschlingen, *Mathematische Annalen*, **102**, ss. 402–413.
- [Dehn2] Dehn, M. (1910), Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Mathematische Annalen*, **69**, ss. 137–168.
- [DK1] Dye, H.A. and Kauffman, L.H. (2004), Virtual knot diagrams and the Witten-Reshetikhin-Turaev Invariants, arXiv:math. GT/0407407, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, Vol. 14, No. 8, pp. 1045–1075 (2005),
- [DK2] Dye, H.A., Kauffman, L.H. (2004), Minimal Surface Representation of Virtual Knots and Links, arXiv:math. GT/0401035 v1.
- [Дро] Дроботухина, Ю.В.. (1991), Аналог полинома Джоунса-Кауфмана для зацеплений в $\mathbf{R}P^3$ и обобщение теоремы Кауфмана-Мурасуги, *Алгебра и анализ*, **2**(3), сс. 613–630.
- [DuK] Duzhin, S.V., Karev, M.V., Detecting the orientation of long links by finite type invariants, arXiv:math.GT/0507015 v4 21 Jul 2005.
- [Dye] Dye, H.A. (2003), Detection and Characterization of Virtual Knot Diagrams, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Chicago.
- [Дын] Дынкин, Е.Б. (1947), О коэффициентах в формуле Campbell’а-Hausdorff’а, Доклады АН СССР, **57** (4), сс.323–326.
- [EGH] Eliashberg, Ya., Givental, A. and Hofer, H. (2002), An introduction to symplectic field theory, *Geom Funct. Anal.*, Special Volume, Part II, pp. 560–673.

-
- [EH] Etnyre, J., Honda, K. (2000), Knots and Contact Geometry, Part I, Part II, arXiv:mat.GT/0006112. Part I: Torus knots and the figure eight knot, *Journal of symplectic geometry*, (2001), **1**, pp, 63-120.
- [EKT] Eliahou, Sh., Kauffman, L.H., Thistlethwaite, M. (2003). Infinite families of links with trivial Jones polynomial, *Topology*, **42**, pp. 155–169.
- [F] Fomenko A. T. (1991), The theory of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom, *Adv. Sov. Math*, **6**, pp. 1-35.
- [ФМ] Фоменко, А.Т., Матвеев, С.В. (1991), Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии, М., Изд. МГУ.
- [ФБШ] Топологические методы в теории гамильтоновых систем (1998), под ред. А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова, А.А.Шафаревича., М, *Факториал*.
- [FJK] Fenn, R., Jordan-Santana, M. and Kauffman, L.H. (2004), Biracks and virtual links www.maths.sussex.ac.uk/Reports/TAGG/TAGG02-01.ps, *Topology & Appl.*, **145**, pp. 157-175.
- [FKM] Fenn, R.A., Kauffman, L.H, and Manturov, V.O. (2005), Virtual Knots: Unsolved Problems, *Fundamenta Mathematicae*, Proceedings of the Conference “Knots in Poland-2003”, **188**, pp. 293-323.
- [FM] Flemming, Th., Mellor, B., Virtual Spatial Graphs, arXiv:math.GT/0510158.
- [FRR] Fenn, R.A., Rimanyi, P. and Rourke, C.P. (1997), The braid-permutation Group, *Topology*, **36**(1), pp. 123–135.
- [FRS1] Fenn,R.A., Rourke, C.P., Sanderson, B. (1995), Truncs and classifying spaces, *Applied Categorical Structures* **3** pp. 321–356.
- [FRS2] Fenn,R.A., Rourke, C.P., Sanderson, B. (1993), An introduction to Species and the Rack Space *Topics in Knot Theory: Kluwer Academic Publishers*, pp. 33–55

- [FT] Fuchs, D. and Tabachnikov, S. (1997), Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space, *Topology*, **36**, pp. 1025–1053.
- [Ga] Garoufalidis, S. (2004), A conjecture on Khovanov’s invariants, *Fundamenta Mathematicae*, **184**, pp. 99-101.
- [Gar] Garside, F.A., The braid group and other groups (1969), *Quart. J. Math. Oxford*, **20**, (78), pp. 235-254.
- [Gau] Gauss, C.F. (1877), Zur Mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, Werke Königl. Gesell. Wiss. Göttingen **5** (1877), s. 605.
- [GKZ] Mo-Lin Ge, L.H. Kauffman, Yong Zhang, Virtual Extension of Temperley-Lieb Algebra, arXiv:math-ph /0610052 v1 22 Oct 2006
- [GL] Gordon., C. McA, and Luecke, J. (1989), Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.*, **2** (2), pp. 371–415.
- [Gold] Goldman, W. (1986), Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, *Inventiones Mathematicae*, **85**, pp. 263-302.
- [Goryu] Goryunov, V. (1998), Vassilive type invariants in Arnold’s J^+ -theory of plane curves without direct self-tangencies, *Topology* **37**, pp. 603-620.
- [GPV] Goussarov M., Polyak M., and Viro O.(2000), Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39**, pp. 1045–1068.
- [Гус] Гусаров, М.Н. (1991), Новая форма полинома Джонса-Конвея для ориентированных зацеплений. Зап. научных семинаров ЛОМИ, **193**, Геометрия и топология, 1, сс. 4–9.
- [H] Hrencecin, D., On Filamentations and Virtual Knot Invariant, Thesis www.math.uic.edu/~dhren/FINALCOPY.ps.
- [Hak] Haken, W. (1961), Theorie der Normalflächen, *Acta Mathematicae* **105**, pp. 245–375.
- [Hem] Hemion, G. (1992), *The classification of knots and 3–dimensional spaces*, (Oxford: Oxford Univ. Press).

-
- [HL] Hass, J., Lagarias, J. (2001), The number of Reidemeister moves needed for unknotting, *J. Amer. Math. Soc.*, **14** (2), pp. 399-428.
- [HK] Hrencecin, D. and Kauffman, L.H. (2003), On Filamentations and Virtual Knots, *Topology and its Applications*, **134**, pp. 23–52.
- [HOMFLY] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R, Millett, K.C. and Ocneanu A. (1985), A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**, pp. 239–246.
- [Hur] Hurwitz A (1891). Über Riemannsche Fläche mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, **39**, pp. 1-61.
- [IKK] Ishii, A., Kamada, N., Kamada, S. (2006), The virtual magnetic Kauffman bracket skein module and skein relations for the f-polynomial, available at <http://www4.ocn.ne.jp/~xyz/LvA03.pdf>
- [Jac] Jacobsson, M. (2002), An invariant of link cobordisms from Khovanov's homology theory, arXiv:mat.GT/0206303 v1.
- [Joh] Johannson, K.(1979), Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, *Lecture Notes in Mathematics*, **761**, (Berlin: Springer-Verlag).
- [Jon1] Jones, V. F. R. (1985), A polynomial invariant for links via Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **129**, pp. 103–112.
- [JKS] Jaeger, F., Kauffman, L.H., and H. Saleur (1994), The Conway Polynomial in S^3 and Thickened Surfaces: A new Determinant Formulation, *J. Combin. Theory. Ser. B.*, **61**, pp. 237-259.
- [Jon2] Jones, V. F. R. (1987), Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Annals of Mathematics*, **126**, pp. 335–388.
- [Joy] Joyce D. (1982), A classifying invariant of knots, the knot quandle, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23** (1), pp. 37–65.
- [Kad] Kadokami, S. (2003), Detecting non-triviality of virtual links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **6**, pp. 781-819.
- [Kadi] Kadison, L. (1999), New examples of Frobenius extensions, University Lecture series, AMS.

-
- [Kam.N1] Kamada, N. (2002), On the Jones polynomial of checkerboard colorable virtual knots, *Osaka Journal of Mathematics*, **39**, (2), pp. 325-333.
- [Kam.N2] Kamada, N. (2005), A relation of Kauffman's f -polynomials of virtual links, *Topology and Its Applications*, **146-147**, pp.123-132.
- [Kam] Kamada, S. (2000), Braid presentation of virtual knots and welded knots, arXiv:math. GT/0008092 v1, 2000.
- [Kau1] Kauffman, L.H. (1987), *On Knots*, (Annals of Math Studies, Princeton University Press).
- [Kau2] Kauffman, L.H. (1991), *Knots and Physics*, (Singapore: World Scientific).
- [Kau3] Kauffman, L.H. (1987), State Models and the Jones Polynomial, *Topology*, **26** (1987), pp. 395-407.
- [Kau4] Kauffman, L.H. (1983), Combinatorics and knot theory, *Contemporary Mathematics*, **20**, pp. 181-200.
- [Kau5] Kauffman, L.H. (2003), e-mail to the author, May, 2003.
- [Kau6] Kauffman, L.H. (1973), Link manifolds and periodicity, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**, pp. 570-573
- [Kau7] Kauffman, L. H. (1999), Virtual knot theory, *European Journal of Combinatorics*, **20**(7), pp. 662-690.
- [Kau8] Kauffman, L.H. (2001), Detecting virtual knots, *Atti. Sem. Math. Fis., Univ. Modena*, Supplemento al vol. IL, pp. 241-282.
- [Kau9] Kauffman, L.H., Diagrammatic Knot Theory, in preparation.
- [Kau10] L. H. Kauffman (2004), A Self-Linking Invariant of Virtual Knots. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 184, pp. 135-158.
- [Kau1] Kauffman, L. H. (1997), Virtual Knots , talks at MSRI Meeting, January 1997 and AMS meeting at University of Maryland, College Park, March 1997.

-
- [Kh] Khovanov, M. (1997), A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.*, **101** (3), pp.359-426.
- [Kh1] Khovanov, M. (2002) A functor-valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.* **2**, pp. 665-741 (electronic), arXiv:math.QA/0103190.
- [Kh2] Khovanov, M. (2004), Link homology and Frobenius extensions, Arxiv.Math:GT/0411447
- [Kh3] Khovanov, M. (2005), Categorifications of the colored Jones polynomial *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **14** (1), pp. 111-130.
- [KhR1] Khovanov, M., Rozansky, L., Matrix Factorizations and Link Homology, Arxiv.Math:GT/0401268
- [KhR2] Khovanov, M., Rozansky, L., Matrix Factorizations and Link Homology II, Arxiv.Math:GT/0505056
- [KhR3] Khovanov, M., Rozansky, L., Virtual crossings, convolutions and a categorification of the $SO(2N)$ Kauffman polynomial, Arxiv.Math:GT/0701333
- [KK] Kamada, N. and Kamada, S. (2000), Abstract link diagrams and virtual knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **9** (1), pp. 93–109.
- [KL] Kauffman, L.H., Lambropoulou, S. (2004), Virtual braids, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 184, pp. 159-186.
- [KL2] Kauffman, L.H., Lambropoulou, S. (2006), Virtual braids and the L-Move, *J. Knot Theory Ramifications* 15, No. 6, 773-811.
- [KNS] Kamada, N., Nakabo, S. and Satoh, S. (2002), A virtualized skein relation for Jones polynomial, *Illinois Journal of Mathematics*, **46** (2), pp. 467-475.
- [Kon] Kontsevich, M. (1993), Vassiliev's knot invariants, *Adv. in Soviet Math.*, **16**(2) (1993), pp. 137–150.
- [Kra] Krammer, D. (2002), Braid groups are linear, *Ann. of Math.*, **2** (155), pp. 131–156.

- [KR] Kauffman, L.H. and Radford, D. (2002), Bi-Oriented Quantum Algebras and a Generalized Alexander Polynomial for Virtual Links, *AMS Contemp. Math*, **318**, pp. 113–140.
- [Kup] Kuperberg, G. (2002), What is a Virtual Link?, www.arXiv.org, math-GT/0208039, *Algebraic and Geometric Topology*, 2003, **3**, 587–591.
- [Лан] Ландо, С.К. (2006), J -инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы, *Функциональный анализ и его приложения*, **40** (1), сс. 1–13.
- [Lee1] Lee, E. S. (2002) The support of the Khovanov’s invariants for alternating knots, arXiv: math.GT/0201105.
- [Lee2] Lee, E.S. (2003) On Khovanov invariant for alternating links, arXiv: math.GT/0210213.
- [Lieb] Lieberum, J. (2004), Universal Vassiliev invariants of Links in Coverings of 3-manifolds, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13** (4), pp. 515–556.
- [LM] Lovász, L., Marx, M., A forbidden substructure characterization of Gauss codes, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 38 (1976), no. 1–2, 115–119, short version: *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), no. 1, 121–122.
- [Low] Lowrance, A., Heegaard-Floer Homology and Turaev genus, arxiv: math.GT/0709.0720
- [Mnch] Manchón, P.M. (2004), Extreme coefficients of the Jones polynomial and the graph theory, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13**, N. 2, pp. 277–296.
- [Ман-1] Мантуров, В.О. (2000), Бифуркации, атомы и узлы, *Вестник МГУ. Сер. Матем.*, **1**, сс. 3–8.
- [Ман-2] Мантуров, В.О. (1998), Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0., *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, сс. 203–212, М.: Факториал, 1998.

- [Ман-3] Мантуров, В.О. (2000), Скобочная полугруппа узлов, *Мат. Заметки*, **67**, (4), сс. 449-462.
- [Ман-4] Мантуров, В.О., Компактные и длинные виртуальные узлы, *Труды ММО*, в печати.
- [Mar] Markoff, A. A. (1936), Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe, *Mat. Sbornik*, **1**, pp. 73–78.
- [Mat] Матвеев, С.В. (1982), Дистрибутивные группоиды в теории узлов, *Мат. Сборник*, **119** **1**, pp. 78–88.
- [Matv] Matveev, S.V. (2003), *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, (N.-Y.: Springer Verlag).
- [Mel] Mellor, B. (2003), A few weight systems arising from intersection graphs, *Michigan Math. J.* **51**, pp. 509-536.
- [Miy] Miyazawa, Y. (2006), Magnetic Graphs and an Invariant for Virtual Links, *J. Knot Theory & Ramifications*, **15** (10), pp. 1319-1334.
- [MN] Malyutin, A., Netsvetaev, N. (2004), Dehornoy's ordering of the braid group and braid moves, *St. Petersburg Mathematical Journal*, **15**, pp. 437-448.
- [Moi] Moise, E.E. (1952), Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Annals of Mathematics*, **57**, pp. 547–560.
- [Moo91] Moody, J.A. (1991), The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n , *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, pp. 379–284.
- [Mor] Morton, H.R. (1986), Threading knot diagrams, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **99**, pp. 247-260.
- [MT] Menasco, W. and Thistlethwaite, M. (1993), A classification of alternating links, *Annals of Mathematics*, **138**, pp. 113–171.
- [Mur1] Murasugi, K. (1987), The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory, *Topology* **26**, pp. 187–194.

- [MW] Morrison, S., Walker, K. Fixing the functoriality of Khovanov homology, arxiv: math. GT/0701339
- [Nel] Nelson, S. (2001), Unknotting virtual knots with Gauss diagram forbidden moves, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **10** (6), pp. 931–935.
- [Нов1] Новиков, С.П., *Топология*, М.-Ижевск: РХД, 2002.
- [Oht] Ohtsuki, T. (2002), Quantum Invariants. A Study of Knots, 3-Manifolds, and Their Sets, (Singapore: World Scientific).
- [OzsSz] Ozsváth, P., Szabó, Z. Heegaard diagrams and Floer homology, arxiv: math. GT/0602323
- [Ош] Ошемков, А.А. (1994), . Кодирование особенностей. *Труды МИРАН им В.А.Стеклова*, т. 205, сс. 131-141.
- [Пап] Папакирьякопулос, С.Д. (1958), О лемме Дена и асферичности узлов, *Сб. переводов “Математика”*, **2**, (4), сс. 32–49.
- [ПС] В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский (1997), Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия, МЦНМО.
- [PV] Polyak, M. and Viro, O. (1994), Gauss diagram formulae for Vassiliev invariants, *Int. Math Research Notices*, **11**, pp. 445–453.
- [Ras] Rasmussen, J. A. (2004), Khovanov Homology and the slice genus, ArXivMath:/GT. 0402131.
- [Ras2] Rasmussen, J., Some Differentials on Khovanov-Rozansky Homology (2006), arXiv: math. GT/0607544
- [Rei] Reidemeister, K. (1932) *нем.: Knotentheorie*, (Berlin: Springer)
англ.: Knot Theory, (New York: Chelsea Publ. & Co.).
- [Rein] Reinhart, B.L. (1962), Algorithms for Jordan Curves on Compact Surfaces, *Annals of Mathematics*, **75**, No. 2., pp, 209–222.
- [Satoh] Satoh, S. (2000), Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, *J. Knot Theory Ramifications*, **9** (4), pp. 531-542.

- [Saw] J. Sawollek (2003), On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links, arXiv:math.GT/9912173 21 Dec 1999. *J. Knot Theory Ramifications* 12, no. 6, 767–779.
- [Saw2] J.Sawollek (2002), An Orientation-sensitive Vassiliev invariants for virtual knots, arXiv:math.GT/0203123
- [Shu] Shumakovitch, A. (2004), Torsion of the Khovanov homology, Arxiv:GT/0405474.
- [Schu] Шуберт, Х. (1966), Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые, *Математика*, **10** (4), сс. 57–104.
- [SW] D. S. Silver and S. G. Williams (2001), Alexander Groups and Virtual Links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **10** (1), pp. 151-160.
- [SW2] Silver, D.S., Williams, S.G. (2006), Alexander Groups of Long Virtual Knots, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **15** 43-52.
- [Th1] Thistlethwaite, M. (1987), A spanning tree expansion for the Jones polynomial, *Topology*, **26**, pp. 297–309.
- [Th2] Thistlethwaite, M. (1988), On the Kauffman polynomial of an adequate link, *Invent. Math.* **93** (2) , 285-296.
- [Tho] Thompson, A. (1994), Thin position and the recognition problem for S^3 , *Math. Res. Letters*, **1** (5), pp. 613-630.
- [Tra] Traczyk, P. (1998) A simple proof of Markov's theorem, *Proceedings of the Conference "Knots in Poland — 1995*, Warszawa, Banach Centre Publications, pp. 409-419.
- [Tur1] Turaev V.G. (1992), The Yang–Baxter equation and invariants of links, *Inventiones Mathematicae*, **3**, pp. 527–553.
- [Tur2] Turaev, V.G. (1987) A simple proof of the Murasugi and Kauffman theorems on alternating links, *Enseignement Mathématique*, **2** (33), N. 3-4, pp. 203-225.
- [Tur3] Тураев, В.Г. (2004), Введение в комбинаторные кручения, МЦНМО, 2004.

-
- [Tur4] Turaev, V.G. (2003) Virtual strings and their cobordisms, Arxiv:Math.GT/0311185
- [Tur5] Turaev, V.G. (1989), Algebras of loops on surfaces, algebras of knots, and quantization, *Inventiones Mathematicae*, pp. 59-95.
- [TuTu] Turaev, V.G., Turner, P.(2005), Link homology and unoriented topological quantum field theory, arXiv: math. GT/0506229 v1.
- [Vas1] Vassiliev, V. A. (1990), Cohomology of knot spaces, in Theory of Singularities and its applications, *Advances in Soviet Mathematics*, **1**, pp. 23–70.
- [Vas2] Vassiliev, V. A. (1994), Complements of Discriminants of Smooth maps: Topology and Applications, Revised Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [Вас] Васильев, В.А. (2005), Инварианты первого порядка и кохомологии пространств вложений самопересекающихся кривых в \mathbf{R}^n , *Известия РАН*, т. 69 **5**, сс. 3–52.
- [Ver] Vershinin, V. (2001), On Homology of Virtual Braids and Bureau Representation, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **18**(5), pp. 795–812.
- [Viro] Viro, O. (2002), Remarks on definition of Khovanov Homology, arXiv: math. GT/0202199 v1.
- [Viro2] Viro, O. (2005), Virtual links and orientations of chord diagrams, Proceedings of the Gökova Conference-2005, International Press, pp. 187-212.
- [Viro3] Viro, O., (1988-1989), Обобщения модуля Александера (неопубликовано)
- [Vog] Vogel, P. (1995) Algebraic structures on modules of diagrams, Insutut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, revised in 1997, <http://www.math.jussieu.fr/vogel/>

-
- [Wal] Waldhausen, F. (1967), On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Annals of Mathematics*, **87**, (1), pp. 56–88.
- [Weh1] Wehrli, S. (2003), , Khovanov homology and Conway mutations, Arxiv: GT/ 0301312.
- [Weh2] Wehrli, S. (2004), A spanning tree model for the Khovanov homology, Arxiv: GT/ 0409328
- [W] S. Winker. PhD. Thesis (1984), University of Illinois at Chicago.
- [ZZ1] Zinn-Justin, P, Zuber, J.-B. (2004), Matrix integrals and the generation and counting of virtual tangles and links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13**, (3), pp. 325-355.
- [ZZ2] Zinn-Justin, P., Zuber, J.-B. (2005), Tables of Alternating Virtual Knots, <http://ipnwebin2pr3fr~lptms/membres/pzinn/virtlinks>