

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 517.938.5+514.756.4

Лепский Тимур Александрович

Интегрируемость комплексных
гамильтоновых систем
с неполными потоками в \mathbb{C}^2

01.01.04 — геометрия и топология
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
Академик А.Т. Фоменко,
Доцент Е.А. Кудрявцева

Москва — 2011

Оглавление

Введение	4
1 Интегрируемые гамильтоновы системы с неполными потоками и многоугольники Ньютона	25
1.1 Основные понятия и утверждения	25
1.2 Обзор известных результатов по топологии слоев	29
1.2.1 Достаточные условия связности слоя	29
1.2.2 Топология слоя невырожденного многочлена	30
1.3 Поведение гамильтонова поля в бесконечно удаленных точках на пополненном слое	33
1.4 Примеры	44
2 Гамильтонова классификация систем с эллиптическим гамильтонианом степени 1,2,3,4	49
2.1 Основные понятия и утверждения	49
2.2 Гиперэллиптический гамильтониан степени один	55
2.3 Гиперэллиптический гамильтониан степени два	56
2.4 Гиперэллиптический гамильтониан степени три	61
2.5 Гиперэллиптический гамильтониан степени четыре	73

3	Топология лагранжевых слоений	87
3.1	Основные понятия и утверждения	87
3.1.1	Важный класс комплексных гамильтоновых систем . . .	89
3.1.2	Гиперэллиптические многочлены: топология неособого слоя, локальная классификация особенностей лагранже- ва слоения	91
3.1.3	Наборы кратностей критических точек на особых слоях .	94
3.2	Топология слоения в окрестности особой точки (локальная то- пологическая классификация особенностей)	95
3.3	Топология слоения в окрестности слоя (полулокальная топологическая классификация особенностей) .	106
4	Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических га- мильтонианов	116
4.1	Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических га- мильтонианов нечетной степени	116
4.1.1	Периодичность интегральных траекторий на нулевом слое	119
4.1.2	Семейства геодезических с концами в бесконечно уда- ленных точках на слоях, близких к нулевому	125
4.1.3	Комплексные координаты “действие-угол” и функции пе- рехода. Комплексная теорема Лиувилля	129
4.2	Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических га- мильтонианов четной степени	139
4.2.1	Периодичность интегральных траекторий на нулевом слое	141

4.2.2	Семейства геодезических с концами в бесконечно удаленных точках на слоях, близких к нулевому	148
4.2.3	Комплексные координаты “действие-угол” и функции перехода. Комплексная теорема Лиувилля	151

Литература		161
-------------------	--	------------

Введение

Диссертационная работа посвящена решению ряда проблем в активно развивающейся в настоящее время теории гамильтоновых систем, которые играют важную роль при описании физических процессов без диссипации. Важными вопросами в теории гамильтоновых систем являются задачи исследования полноты потока, описывающего систему (необходимое условие интегрируемости системы по Лиувиллю), и задачи классификации (с точностью до различных отношений эквивалентности) таких систем.

Пусть M^{2n} — гладкое многообразие, ω — симплектическая структура на M^{2n} , $H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, называемая *гамильтонианом*, и пусть $\text{sgrad } H$ — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H на M^{2n} . Следуя [7, §1.5], гамильтонову систему (M^{2n}, ω, H) назовем *вполне интегрируемой* (или *интегрируемой по Лиувиллю*), если существует набор гладких функций $f_1 = H, f_2, \dots, f_n : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, такой что:

- 1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы $\text{sgrad } H$;
- 2) f_1, \dots, f_n функционально независимы на M^{2n} , то есть почти всюду на M^{2n} их градиенты линейно независимы;
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых $i, j = 1, \dots, n$;
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i, i = 1, \dots, n$ полны, то есть естественный пара-

метр на их траекториях определен на всей числовой прямой.

Если выполнены лишь условия 1–3 (а условие полноты потоков не обязательно выполнено), то систему с соответствующим набором первых интегралов f_1, \dots, f_n назовем *интегрируемой*.

Если естественный параметр на траекториях хотя бы одного из коммутирующих векторных полей $\text{sgrad } f_i, i = 1, \dots, n$ определен не на всей числовой прямой, то набор векторных полей и набор соответствующих потоков назовем *неполными*, а систему — *интегрируемой гамильтоновой системой с неполными потоками*.

Простейшим примером интегрируемой гамильтоновой системы с неполными потоками является система $(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, dx \wedge dy, -y)$, заданная на $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ векторным полем $v = (1, 0)$ в стандартных координатах x, y на \mathbb{R}^2 , где $O \in \mathbb{R}^2$ — некоторая точка, см. рис. 1. Однако в данном примере особенность векторного поля v в точке O является *устранимой*, поскольку можно так определить векторное поле v в точке $O \in \mathbb{R}^2$, что, во-первых, векторное поле v будет определено корректно на всем \mathbb{R}^2 , а, во-вторых, поток, соответствующий векторному полю v , будет полным. Данный пример можно также рассматривать как пример динамической системы, заданной векторным полем $v = (1, 0)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, для которой векторные поля $v = (1, 0)$ и $u = (0, 1)$ всюду линейно независимы, коммутируют и обладают неполными потоками. Примером динамической системы с *неустранимой особенностью* и неполными коммутирующими потоками является система на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, заданная векторным полем $v = z^{-(n+1)}$ в стандартной координате z на \mathbb{C} , с парой коммутирующих векторных полей v и iv , где $n \in \mathbb{N}$. Такая особенность называется *полюсом*

порядка $n + 1$, ее интегральные траектории представлены на рис. 2.

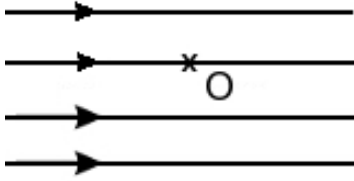


Рис. 1: Устранимая особенность

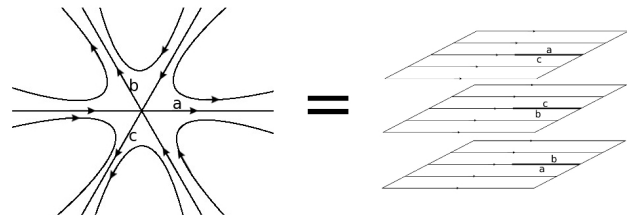


Рис. 2: Полюс порядка 2

В классических работах по исследованию интегрируемых гамильтоновых систем:

1) систем, возникающих в механике и описывающих движение твердого тела,
 2) систем, заданных уравнениями Эйлера на компактных алгебрах Ли (см. [1], [2], [8], [6], [5], [11], [13], [17], [18]) безусловно выполнялось условие полноты потоков, что позволяло использовать классическую теорему Лиувилля (см. [7]) для описания свойств таких интегрируемых систем. Так как для интегрируемых систем с *неполными потоками*, по-видимому, неизвестны никакие аналоги теоремы Лиувилля, то класс таких систем представляется весьма трудным для изучения. В связи с этим А.Т. Фоменко поставил задачу об обобщении теоремы Лиувилля на случай интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками, а именно: описание топологии слоя, описание лагранжева слоения в окрестности слоя, построение аналога переменных действие-угол. Отметим также, что задача доказательства интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновой системы сама по себе нетривиальна. Этим, по-видимому, объясняется то, что исследования условия полноты потоков для интегрируемых гамильтоновых систем появились совсем недавно в работах W. Gordon [39], А.Ю. Москвина, Д.В. Новикова.

В настоящей работе рассматривается класс интегрируемых гамильтоновых систем

$$(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w))), \quad (0.0.1)$$

обладающих в “большинстве случаев” неполными потоками, где $f(z, w)$ — многочлен двух комплексных переменных и $\operatorname{Im}(f(z, w))$ — первый интеграл системы. Такой класс систем был предложен для исследования А.Т. Фоменко и А.И. Шафаревичем, поскольку он тесно связан с квантованием комплексных многообразий, в частности, с описанием квантовых систем Калоджеро–Строкки, см. [12]. Под \mathbb{C} -гамильтоновой системой

$$(M_{\mathbb{C}}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f),$$

где $M_{\mathbb{C}}^2$ — двумерное комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{C}}^2 = 2$, $\omega_{\mathbb{C}}$ — замкнутая невырожденная голоморфная 2-форма на $M_{\mathbb{C}}^2$, $f : M_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, будем понимать динамическую систему, заданную “комплексными” уравнениями Гамильтона $\dot{x}(t) = \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{x(t)}$, где $x = (x^1, x^2)$ — локальные комплексные координаты, $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f := (\omega_{\mathbb{C}}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j})_{i=1}^2$, $\omega_{\mathbb{C}}^{ij}$ — компоненты обратной матрицы к матрице 2-формы $\omega_{\mathbb{C}}$ в координатах (x^1, x^2) , параметр t предполагается вещественным. В этом случае гамильтонова система (0.0.1) с точки зрения уравнений Гамильтона равносильна \mathbb{C} -гамильтоновой системе

$$(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w)), \quad (0.0.2)$$

см. определение 2.1.5 и лемму 2.1.7.

Как правило, условие полноты векторного поля исследовалось в терминах алгебраических и аналитических свойств координатных функций векторного поля. Вместе с тем представляет интерес задача исследования условия

полноты в геометрических терминах, например, в терминах *многоугольника Ньютона*, представляющего собой выпуклую оболочку целочисленных точек — индексов ненулевых коэффициентов полиномиального гамильтониана (см. пример на рис. 3). Эта задача решается в первой главе диссертационной работы для систем (0.0.2) с гамильтонианом $f(z, w)$, невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона (теорема 11 и следствие 1.3.4(Б)). Кроме того, в этой же главе в терминах многоугольника Ньютона вычисляются типы особенностей гамильтонова векторного поля в “бесконечно удаленных” точках пополненного слоя (следствия 1.3.2 и 1.3.4(В)). Многогранники Ньютона (многомерный аналог многоугольников Ньютона) применялись в работах А.Д. Брюно (см. [9]) для описания локальных свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Это лежит в стороне от задач настоящей работы, так как в диссертации система рассматривается глобально и, в частности, описаны топология и окрестность неособого слоя $f^{-1}(\xi)$ в терминах многоугольника Ньютона многочлена f .

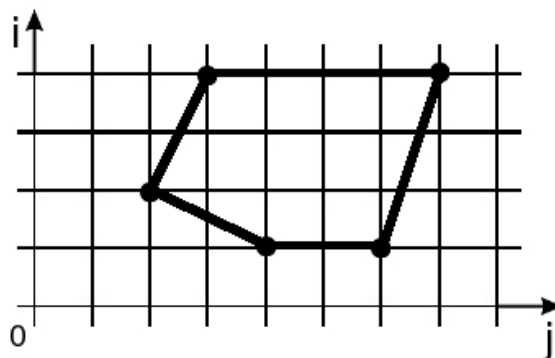


Рис. 3: Пример многоугольника Ньютона

В четвертой главе диссертационной работы доказан аналог теоремы Ливилля для класса систем (0.0.2) с *гиперэллиптическим гамильтонианом*

$f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, отвечающим многочлену $P_n(w)$ степени $n \in \mathbb{N}$ с простыми вещественными корнями, в окрестности нулевого уровня $f^{-1}(0)$ (см. теоремы 25 и 26). Для таких систем лагранжевы слои $f^{-1}(\xi)$ гомеоморфны сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками и $n - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ проколами, а при $n \geq 3$ система обладает неполными потоками.

Другой важной проблемой в теории гамильтоновых систем является задача классификации систем с точностью до различных отношений эквивалентности. В теории интегрируемых гамильтоновых систем рассматривается несколько отношений эквивалентности систем: гамильтонова эквивалентность (означающая существование симплектоморфизма фазовых пространств, переводящего гамильтониан одной системы в гамильтониан другой системы с точностью до аддитивной константы), топологическая сопряженность, траекторная эквивалентность, топологическая послойная эквивалентность и другие. Перечисленные выше отношения эквивалентности упорядочены от наиболее сильного до наиболее слабого. Задачи классификации интегрируемых гамильтоновых систем в последние годы исследовались в работах А.Т. Фоменко [23], [25], [26], А.В. Болсинова [3], [4], А.А. Ошемкова [19], М. Адлера, П. ван Мербеке [31], [32], Л. Гаврилова [38], В.В. Козлова [14] и других.

Важным классом гамильтоновых систем (0.0.2) являются системы с полиномиальным гамильтонианом f малой степени. Это обусловлено прежде всего тем, что такие системы либо являются интегрируемыми по Лиувиллю, либо допускают “вложение в интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы”. Поэтому являются актуальными задача о классификации таких систем с точностью до *гамильтоновой эквивалентности*, а также задача о построе-

нии канонических *координат действие-угол* (или их аналогов) в окрестности неособого лагранжева слоя такой системы. Решению этих задач, в случае гиперэллиптических гамильтонианов малой степени, посвящена вторая глава диссертации (см. теоремы 12, 13, 14, 15, 19, лемму 2.5.2 и следствия 2.2.2, 2.4.6, 2.4.7, 2.5.7, 2.5.8).

Более слабым отношением эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем является *топологическая послойная эквивалентность*, под которой будем понимать существование гомеоморфизма фазовых пространств, переводящего лагранжевы слои одной системы в лагранжевы слои другой системы. Такая эквивалентность обобщает известную *лиувиллеву эквивалентность* для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. Лиувиллева эквивалентность исследовалась в работах А.Т. Фоменко [23], [25], [26], А.В. Болсинова [3], [4], А.А. Ошемкова [19], Нгуен Тьен Зунг [41], [42], Л. Гаврилова [38], И.А. Тайманова [20], Л. Бейтса [33] и других. В отличие от большинства этих работ, в настоящей диссертации не предполагается полнота гамильтоновых потоков. Более того, в “большинстве случаев” гамильтоновы потоки не являются полными. В частности, представляет интерес исследование топологии лагранжева слоения в окрестности критических точек, не являющихся, вообще говоря, морсовскими (*локальная классификация особенностей лагранжева слоения*), а также классификация лагранжева слоения в окрестности особого слоя (*полулокальная классификация особенностей лагранжева слоения*). Решению этих задач, в случае гиперэллиптических гамильтонианов, посвящена третья глава диссертации (см. предложения 3.2.1, 3.2.3, теорему 24).

Диссертационная работа состоит из четырех глав.

В первой главе изучается топология неособого слоя $\{f(z, w) = \xi\} \subset \mathbb{C}^2$, $\xi \in \mathbb{C}$, четырехмерная окрестность неособого слоя и четырехмерная окрестность бесконечно удаленных точек, для невырожденного многочлена двух комплексных переменных $f(z, w) - \xi$, то есть многочлена, ограничение $(f - \xi)|_\Gamma$ которого на любую грань Γ многоугольника Ньютона не имеет критических точек в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid (f - \xi)|_\Gamma = 0\}$, удовлетворяющему следующему условию (i): для любой точки $(u, v) \in P$ прямоугольник $\text{conv}\{(0, 0), (u, 0), (0, v), (u, v)\} \subset P$, где P — многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) - \xi$. Также изучается пополнение данного слоя относительно метрики пополнения ρ_ξ , порожденной кососимметричным векторным полем. Топология слоя и особенности кососимметричного векторного поля описаны в терминах многоугольника Ньютона исходного многочлена.

Обозначим через $T_\xi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = \xi\}$ — неособый слой невырожденного многочлена $f(z, w)$, через n_g — количество целочисленных точек строго внутри многоугольника Ньютона, через n_μ — увеличенное на единицу количество целочисленных точек на сторонах многоугольника Ньютона с положительными координатами. Тогда верна следующая теорема, вытекающая из работы А.Г. Хованского [29].

Теорема 1 (А.Г. Хованский). *Пусть $f(z, w) - \xi$ — невырожденный многочлен. Тогда неособый слой T_ξ связан и диффеоморфен сфере с n_g ручками, без n_μ точек.*

Возникает задача уточнения теоремы 1 в случае, когда $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ — интегрируемая гамильтонова система. В диссертационной работе был пред-

ложен метод пополнения исходного слоя относительно метрики естественным образом связанной с гамильтоновым векторным полем, а именно: интегральные траектории гамильтонова векторного поля совпадают с геодезическими метрики как параметризованные кривые. Заметим, что похожие конструкции использовались в работах С.П. Новикова ([43], [44]) и Л. Бейтса ([34]). Такой подход позволил связать задачу уточнения теоремы 1 с задачей исследования полноты интегрируемой гамильтоновой системы.

Теорема 2. Пусть $f(z, w) - \xi_0$ — невырожденный многочлен относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi_0}$, причем многоугольник Ньютона $P_{f-\xi_0}$ удовлетворяет условию (i) выше, и $\dim P_{f-\xi_0} = 2$ (см. определение 1.1.1). Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $R > 0$, такие что

1) для любой стороны Γ_l многоугольника Ньютона, не лежащей на координатных осях, существуют ровно n_{Γ_l} голоморфных вложений $J_{\Gamma_l, n} : (D_{\xi_0, \varepsilon}^2) \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$, $1 \leq n \leq n_{\Gamma_l}$, таких что

$$f \circ J_{\Gamma_l, n}(\xi, u) = \xi, \quad J_{\Gamma_l, n}^* \omega_{\mathbb{C}} = u^{(1-u_0)\alpha_{\Gamma_l} + (1-v_0)\beta_{\Gamma_l} - 1} d\xi \wedge du,$$

$(\xi, u) \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\})$, где $n_{\Gamma_l} + 1$ равно количеству точек с целочисленными координатами на стороне Γ_l , $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$ — несократимый вектор внешней нормали стороны Γ_l , и $(u_0, v_0) \in \Gamma_l$ — любая точка на Γ_l ;

2) образы всех этих $n_{\mu} = \sum_l n_{\Gamma_l}$ вложений (отвечающих одной и той же стороне, но разным значениям n , либо разным сторонам многоугольника Ньютона) попарно не пересекаются, и объединение этих образов содержит $f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus D_{0, R}^4$ (т.е. дополнение этого объединения в $f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2)$ ограничено, а потому компактно).

К результатам первой главы относятся теорема 11, в которой были введены координаты (ξ, u) в четырехмерной окрестности бесконечно удаленных точек, причем координата ξ постоянна на слое, а координата u задает окрестность бесконечно удаленной точки на слое T_ξ , следствие 1.3.4, описывающее пополнение \overline{T}_ξ неособого слоя T_ξ относительно метрики g_ξ , а также описывающее в терминах многоугольника Ньютона классификацию систем на слоях с точностью до траекторной эквивалентности.

Во второй главе исследуется классификация гамильтоновых систем с точностью до гамильтоновой эквивалентности в случае гиперэллиптической функции Гамильтона вида $f = z^2 + P_n(w)$, $n = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, в этой главе доказана полнота гамильтоновых векторных полей при $n = 1, 2$, построено вложение при $n = 3, 4$ таких систем во вполне интегрируемые гамильтоновы системы, описана топология неособых слоев, а также построены канонические координаты в окрестности неособых слоев, см. теоремы 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Обозначим через $\mathcal{H}_n(a, b_n, \dots, b_0)$ \mathbb{C} -гамильтонову систему $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ с гамильтонианом $f(z, w) = az^2 + b_n w^n + \dots + b_1 w + b_0$, $a, b_n, \dots, b_0 \in \mathbb{C}$, $ab_n \neq 0$.

В следующей теореме собраны результаты настоящей главы, относящиеся к классификации гамильтоновых систем с точностью до гамильтоновой эквивалентности.

Теорема 3. *Пусть дана \mathbb{C} -гамильтонова система с гиперэллиптическим гамильтонианом степени n , $n \leq 4$. Тогда:*

- *Каждая \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” \mathbb{C} -гамильтоновой системе*

$(\mathbb{C}^2(p, q), dp \wedge dq, f_0(p, q) = p)$. Все слои \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ являются неособыми, \mathbb{C} -диффеоморфными \mathbb{C} .

- Каждая \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$, для $a = a_1 b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Все неособые слои \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ \mathbb{C} -диффеоморфны $\mathbb{R} \times S^1$.
- Каждая невырожденная \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ для некоторых $r, s \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. Все неособые слои \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$.
- Каждая невырожденная \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_3(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$ для некоторых $r, s, p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. Все неособые слои \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$.

Во второй главе также определена пополненная система при $n = 3, 4$, см. определения 2.4.4, 2.5.5. Это пополнение определено корректно, поскольку функция Гамильтона является аналитической, продолжение симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}}$ невырожденно. Отметим, что ограничения неособых слоев пополненной системы на исходную систему являются неособыми слоями исходной системы.

Одним из основных результатов этой главы являются следствия 2.4.5, 2.5.6 об интегрируемости по Лиувиллю пополненной системы, как вещественной гамильтоновой системы. При этом вещественные канонические координаты для исходной системы получаются ограничением вещественных координат

действие-угол, определенных для пополненной системы в окрестности любого неособого слоя, см. следствия 2.4.6, 2.5.7.

В третьей главе изучается топология лагранжевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, отвечающих \mathbb{C} -гамильтоновым системам с одной комплексной степенью свободы на \mathbb{C}^2 с гиперэллиптическими функциями Гамильтона $f = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Такая система является интегрируемой (вещественной) гамильтоновой системой $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C},i}, H = \operatorname{Re} f)$ с двумя степенями свободы с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im} f$, причем неособые лагранжевы слои $f^{-1}(\xi)$ гомеоморфны сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками и $n - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ проколами, а гамильтоновы векторные поля с гамильтонианами H и F неполны на каждом слое при $n \geq 3$. В этой главе развиваются методы, предложенные в работах [16], [21], [22], [24].

Две голоморфные функции $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{C}$ назовем топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ h + \operatorname{const}$. В третьей главе описаны классы топологической эквивалентности гиперэллиптических функций f в малых окрестностях особых слоев $f^{-1}(\xi)$ в зависимости от n и комбинаторного типа слоя — набора кратностей критических точек в слое (полулокальная топологическая классификация слоения Лиувилля). Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_i^4, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C},i}, H_i = \operatorname{Re} f_i)$ с дополнительным первым интегралом $F_i = \operatorname{Im} f_i$, $i = 1, 2$, называют послойно эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_1 : M_1 \rightarrow M_2$ и $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $f_1 = h_2 \circ f_2 \circ h_1$. Результаты главы показывают, что в малой окрестности любого лагранжева слоя $f^{-1}(\xi)$ послойная эквивалентность систем равно-

сильна топологической эквивалентности функций f и полностью определяется комбинаторным типом слоя, см. теорему 24. На основе теоремы Р. Тома (1965) описаны реализуемые наборы комбинаторных типов особых слоев для гиперэллиптических гамильтонианов.

Одним из основных результатов главы является описание слоения в локальной окрестности особой точки систем с комплекснозначными полиномиальными гамильтонианами вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$ отдельно для четного и нечетного n . Отдельно исследован случай морсовской особенности. В частности, для четного n описание слоения сформулировано в следующем предложении.

Предложение 0.0.1. *При четном $n \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ функция $g : \overline{V}_\varepsilon^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\overline{V}_\varepsilon^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon^n, |w| \leq 2\varepsilon\}$, $g(z, w) = z^2 + w^n + \xi_0$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, эквивалентна функции $q = q_n : M_\varepsilon^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_\varepsilon^4 = ([0, \varepsilon^n] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$, отношение эквивалентности \sim в определении M_ε^4 порождено следующими $n + 1$ отношениями:*

$$\begin{cases} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi+t+2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_-) \sim_{1,k} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi-t+2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_+), \\ (0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) \sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h), \end{cases} \quad (0.0.3)$$

где $0 \leq k \leq n - 1$, $\varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $h \in [-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1]$, $q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = r e^{i(\varphi \bmod 2\pi)} + \xi_0$. Здесь $0_+ := 0 \in [0_+, 1]$, $0_- := 0 \in [-1, 0_-]$ и $g(\overline{V}_\varepsilon^4) = q(M_\varepsilon^4) = \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$.

Это предложение имеет следующий “геометрический” смысл. В пространстве M_ε^4 каждый слой является несвязным объединением двух полуцилиндров $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([0_+, 1] \sqcup [-1, 0_-])$, причем первые соотношения

$\sim_{1,k}$ формулы (0.0.3) превращает его в сферу с $n - 1$ -ой ручкой и двумя проколами. Второе соотношение \sim_2 в (0.0.3) отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([0_+, 1] \sqcup [-1, 0_-])) / \sim_{1,k}, \varphi \bmod 2\pi \in S^1$ (особый слой). Из соотношений в (0.0.3) следует, что на этом слое окружность $\{(0, 0)\} \times S^1 \times \{0_+\}$ стягивается в точку (“перетяжка” на особом слое). Данное пояснение проиллюстрируем следующими рис. 4 и 5.

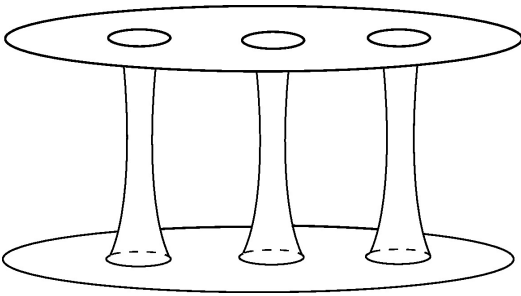


Рис. 4: Слой близкий к особому

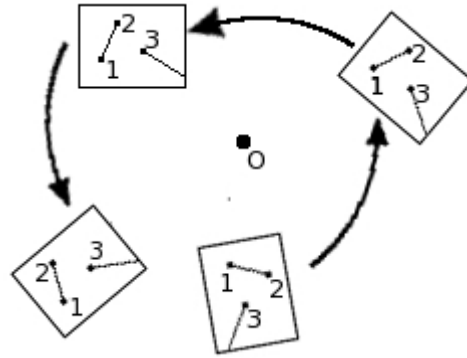


Рис. 5: Монодромия слоя

Кроме того, в третьей главе описано слоение в окрестности особого слоя систем с комплекснозначными полиномиальными гамильтонианами вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Полученная конструкция классификации слоения является четырехмерным аналогом понятия атома, введенного А.Т. Фоменко, то есть окрестности особого слоя, расслоенной на линии уровня гамильтониана и рассматриваемой с точностью до послышной эквивалентности. Атомы были классифицированы в работах А.Т. Фоменко [36], [37], А.В. Болсинова [35] и других. Кроме того, в этом случае усложняется конструкция так называемого креста (см. [7]), а склейки не имеют столь наглядного вида. Однако при пересечении \bar{V}_ε^4 окрестности неособого слоя T_{ξ_0} с плоскостью $\Pi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{Im } z = 0, \text{Im } w = 0\}$ возникает стандартный крест и атом,

см. рис. 6 и 7.

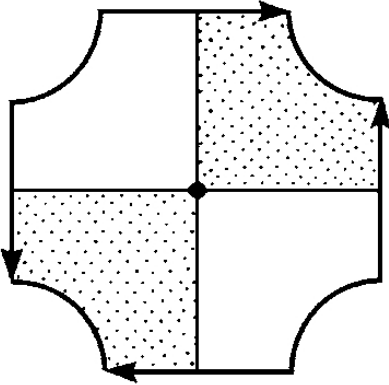


Рис. 6: Двумерный крест

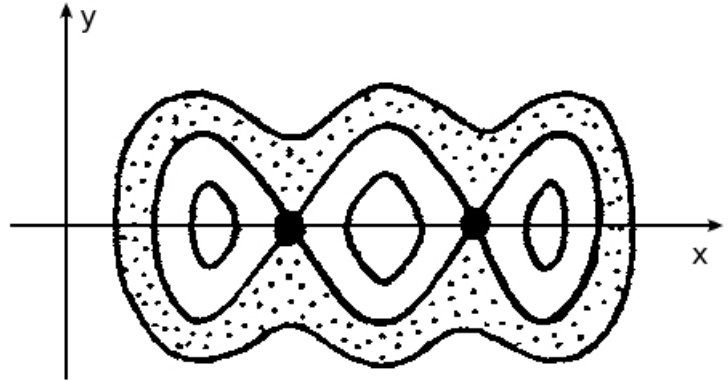


Рис. 7: Двумерный атом

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon} := \mathbb{T}_{\xi_0} \setminus (\bigcup_{i=1}^k U_{i,\varepsilon}^4)$ — комплексное многообразие с краем, $\dim_{\mathbb{C}} L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon} = 1$, гомеоморфное $M_{g,h,b}^2$ при $n > l$, $M_{0,1,1}^2 \sqcup M_{0,1,1}^2$ при четном $n = \sum_{i=1}^k l_i$, и $M_{0,1,1}^2$ при нечетном $n = \sum_{i=1}^k l_i$, $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - \sum_{i=1}^k \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor$, $h = \frac{3+(-1)^n}{2}$, $b = \sum_{i=1}^k \frac{3+(-1)^{l_i}}{2}$, $M_{0,1,1}^2$ — проколотый замкнутый двумерный диск. Тогда верна следующая теорема о полулокальной топологической классификации слоения гиперэллиптической голоморфной функции в окрестности особого слоя с несколькими критическими точками, являющаяся одним из основных результатов третьей главы.

Теорема 4. Пусть \mathbb{T}_{ξ_0} — особый слой гиперэллиптического многочлена $f(z, w)$ степени $n \geq 2$, содержащий ровно k критических точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{T}_{\xi_0}$, причем кратности этих точек равны l_1-1, \dots, l_k-1 , $l_1, \dots, l_k \geq 2$, соответственно. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ функция $f_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)}$ топологически эквивалентна функции $f_{n,k,l_1,\dots,l_k} : M_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}^4 \rightarrow$

С. Здесь $M_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}^4 = \left(\bigsqcup_{i=1}^k \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4 \right) \bigcup_{\phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}} (\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}) := \left(\bigsqcup_{i=1}^k \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4 \right) \sqcup (\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}) / (x \sim \phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}(x))$ получено из несвязного объединения $\bigsqcup_{i=1}^k \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4$ и $\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}$ отождествлением любой точки $x \in \partial^+ \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4$, $1 \leq i \leq k$, с ее образом $\phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}(x) \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}$ при гомеоморфизме $\phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon} : \bigsqcup_{i=1}^k \partial^+ \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4 \rightarrow \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}$, задаваемом формулой

$$\phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}(z, w) := (z^2 + w^{l_i} + \xi_0, \alpha((\arg w) \bmod 2\pi, \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{z}{w^{l_i}})),$$

$(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4$, $1 \leq i \leq k$, при l_i четном,

$$\phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}(z, w) := (z^2 + w^{l_i} + \xi_0, \alpha(\arg w + (l_i \arg w + \pi - 2 \arg z) \bmod 4\pi)),$$

$(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4$, $1 \leq i \leq k$, при l_i нечетном, а функция $f_{n,l}$ задается формулами

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \big|_{\bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4} (z, w) = z^2 + w^{l_i} + \xi_0, (z, w) \in \bar{V}_{l_i,\varepsilon}^4, 1 \leq i \leq k,$$

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \big|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}} (\xi, x) = \xi, (\xi, x) \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}.$$

При этом $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(M_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}^4) = \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$.

В пятой главе доказан аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполным гамильтоновым векторным полем в случае гамильтониана вида $f(z, w) = z^2 + (w - w_1) \dots (w - w_n)$, где $w_i \in \mathbb{R}$, $w_i \neq w_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, в окрестности нулевого слоя.

Доказательство теоремы основано на разрезании окрестности нулевого слоя $T_0 = \{f(z, w) = 0\}$ на четырехмерные ручки, на каждой из которых вводятся канонические координаты, вычисляются периоды и вид интегральных траекторий на нулевом слое изображен на рисунке. Теорема доказана отдельно для четного и нечетного n . В частности, ниже сформулирована теорема для нечетного n .

Теорема 5 (комплексная теорема Лиувилля). Для \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f)$ с функцией Гамильтона $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$ и соответствующего лагранжева слоения (см. определение 3.1.6), где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\varepsilon > 0$, такое что выполнены следующие свойства:

1) для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ является неособым и гомеоморфен сфере с n ручками и одним проколом;

2) лагранжево слоение в четырехмерной ε -окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 тривиально, т.е. послойно гомеоморфно прямому произведению слоя T_0 на открытый двумерный диск $D_{0,\varepsilon}^2 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < \varepsilon\}$;

3) в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ существуют $2n$ голоморфных функций

$$I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C},$$

а для каждой четырехмерной ε -ручки $G_{\varepsilon,k} \subset U_\varepsilon(T_0)$, $k = 1, \dots, n$, существует голоморфное вложение (задаваемое при $k > 1$ “комплексными координатами действие-угол”)

$$(I_k|_{G_{\varepsilon,k}}, \varphi_k \bmod 2\pi) : G_{\varepsilon,k} \hookrightarrow \begin{cases} \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), & 2 \leq k \leq n; \\ \bigcup_{I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}} \{I_1\} \times \overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))) \setminus \gamma_{I_1}}, & k = 1, \end{cases}$$

где при $k = 1$ функция $\varphi_1 \bmod 2\pi$ является многозначной аналитической функцией, через $T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)) := \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus \frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\mathbb{Z})$ обозначен комплексный тор с параметром $\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, через $\gamma_{I_1} \subset T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ обозначен образ прямолинейного отрезка $A_3^{(1)}(I_1)A_4^{(1)}(I_1) \subset \mathbb{C}$ (вырождающегося в точку в случае $n = 1$, см. п.б) ниже) при проекции $\mathbb{C} \rightarrow T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$, и через $\overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))) \setminus \gamma_{I_1}}$ обозначено пополнение “надрезанного тора” $(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))) \setminus$

γ_{I_1} относительно римановой метрики $d\varphi_1\overline{d\varphi_1}$, со следующими свойствами:

а) каждая функция $I_k, J_k : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C}$ является голоморфной функцией $I_k = I_k(f)$ и $J_k = J_k(f)$ от f без критических точек, ее множество значений

$$\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(U_\varepsilon(T_0)) = I_k(G_{\varepsilon,k}), \quad \widehat{D}_{\varepsilon,k} := J_k(U_\varepsilon(T_0)) = J_k(G_{\varepsilon,k}) \subset \mathbb{C}$$

открыто в \mathbb{C} и гомеоморфно открытому кругу, она выражается в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ через любую другую такую функцию формулами

$$I_k = I_k(f(I_\ell)), \quad I_k = I_k(f(J_\ell)), \quad J_k = J_k(f(I_\ell)), \quad J_k = J_k(f(J_\ell));$$

где $f(I_k)$ и $f(J_k)$ — функции, обратные к функциям $I_k(f)$ и $J_k(f)$ соответственно ($k = 1, \dots, n$);

б) при любых $k = 1, \dots, n$ и $I_k \in \tilde{D}_{\varepsilon,k}$ множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_{f(I_k)}}$ получается из некоторой замкнутой области $W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}$, ограниченной шестиугольником с вершинами $A_1^{(k)}(I_k), \dots, A_6^{(k)}(I_k) \in \mathbb{C}$ (вырождающимся при $k = n$ в параллелограмм с вершинами $A_1^{(k)}(I_k), A_2^{(k)}(I_k), A_3^{(n)}(I_k) = A_4^{(n)}(I_k), A_5^{(n)}(I_k) = A_6^{(n)}(I_k)$) и сторонами, соответствующими геодезическим $d_k(f(I_k)), s_{2k-1}(f(I_k)), s_{2k-2}(f(I_k)) \subset T_{f(I_k)}$, а также геодезическим $s_{2k}(f(I_k)), s_{2k+1}(f(I_k)) \subset T_{f(I_k)}$ в случае $k < n$, следующим образом: (i) выкидыванием всех вершин (соответствующих бесконечно удаленной точке $p_{f(I_k)}$), и (ii) отождествлением (т.е. склеиванием) при помощи параллельного переноса любой пары сторон, отвечающих одной и той же геодезической (либо $d_k(f(I_k))$, либо $s_1(f(I_1))$ при $k = 1$); причем шестиугольник (соответственно параллелограмм при $k = n$) однозначно задается следующими условиями (см. рис. 4.5, 4.6 при $1 \leq k < n, 1 \leq k = n$ соответственно):

- шестиугольник (или параллелограмм) $\partial W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}$ образован тремя парами равных и параллельных сторон, соответствующим следующим геодезическим и получающимся друг из друга следующими сдвигами в плоскости \mathbb{C} :

$$A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)) \xrightarrow{2\pi} A_5^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)),$$

$$A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-1}(\xi)) \xrightarrow{\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_1^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-2}(\xi)),$$

$$A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k}(\xi)) \xrightarrow{\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k+1}(\xi)), \quad k < n,$$

где $\xi := f(I_k) \in D_{0,\varepsilon}^2$, через $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначен параллельный перенос на вектор $\delta \in \mathbb{C}$ в плоскости \mathbb{C} , $s_0(\xi) := s_1(\xi)$,

$$\langle D_k(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dJ_k}{dI_k}(I_k) - \frac{dJ_{k-1}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{dJ_1}{dI_k}(I_k) \right),$$

- при любом $k < n$ выполнено

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)} = \overrightarrow{A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)} \\ & = \langle S_{k+1}(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dI_{k+1}}{dI_k}(I_k) - \frac{dI_{k+2}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{dI_n}{dI_k}(I_k) \right), \end{aligned}$$

- точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac{1}{2}(A_1^{(k)}(I_k) + A_3^{(k)}(I_k)) = 0 = \varphi_k(0, a_{2k}(f(I_k)))$ (откуда точка пересечения диагоналей (вырождающегося в отрезок при $k = n$) параллелограмма $A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac{1}{2}(A_3^{(k)}(I_k) + A_5^{(k)}(I_k)) = \pi = \varphi_k(0, a_{2k+1}(f(I_k)))$, а при $k = 1$ центры отождествляемых сторон $A_2^{(1)}(I_1)A_3^{(1)}(I_1)$ и $A_1^{(1)}(I_1)A_6^{(1)}(I_1)$ суть отождествляемые точки $\pm \frac{1}{2} \langle D_1(f(I_1)) \rangle_1 = \varphi_1(0, a_1(f(I_1)))$);

в частности, при $k = 1$ для любого $I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}$ образом комплексной угловой координаты $\varphi_1 \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,1} \cap \Gamma_{f(I_1)}} : G_{\varepsilon,1} \cap \Gamma_{f(I_1)} \rightarrow \overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}$ является весь “пополненный надрезанный тор” $\overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}$ (совпадающий с тором $T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ в случае $n = 1$) за исключением двух точек $A_3^{(1)}(I_1), A_4^{(1)}(I_1)$ (совпадающих друг с другом в случае $n = 1$), являющихся “концами линии надреза” и отвечающих бесконечно удаленной точке;

в) $(dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}} = dI_k \wedge d\varphi_k, k = 1, \dots, n;$

г) переменная “действие” $I_k = I_k(f)$ и функция $J_k = J_k(f)$ имеют вид

$$I_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy, \quad J_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2,$$

где в качестве функции $\sqrt{\quad}$ берутся ее ветви, такие что $\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+1}))} > 0$ в первом случае, и $i\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{1}{2}(a_{2k-1} + a_{2k}))} < 0$ во втором случае;

д) для любых двух ручек $G_{\varepsilon,k}, G_{\varepsilon,\ell}$, содержащих в своей границе одно и то же семейство геодезических $s_j(\xi)$, выполнено $k = \ell \pm 1$, причем в случае $1 \leq k < n$ пересечение $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1}$ является объединением геодезических

$$G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1} = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi)) = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (\text{Pr}_w|_{\Gamma_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi)),$$

и на этом пересечении комплексные координаты угол $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ связаны друг с другом формулами:

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi),$$

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi);$$

е) уравнения Гамильтона в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ на ручке $G_{\varepsilon,k}$,

$k = 1, \dots, n$, принимают вид:

$$\dot{I}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{df(I_k)}{dI_k};$$

4) антиканоническая инволюция $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (-z, w)$, сохраняющая Гамильтониан f , переводит каждую четырехмерную ε -ручку $G_{\varepsilon, k}$ в себя, и ограничение этой инволюции на эту ручку в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ имеет вид $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi) \mapsto (I_k, -\varphi_k \bmod 2\pi)$, $1 \leq k \leq n$.

Автор выражает глубокую и искреннюю признательность своим научным руководителям А.Т. Фоменко и Е.А. Кудрявцевой за большое внимание к работе и ряд ценных замечаний, определивших основные направления ее развития. Автор благодарен А.И. Шафаревичу, А.Б. Жеглову за полезные обсуждения в процессе работы на диссертацией, А.М. Степину и Д.А. Аносову за внимание к работе и ценные замечания.

Глава 1

Интегрируемые гамильтоновы системы с неполными потоками и многоугольники Ньютона

1.1 Основные понятия и утверждения

Определение 1.1.1 ([30, §2.1 и §3.4]). *Многоугольником Ньютона* $P_f \subset \mathbb{R}^2$ многочлена $f(z, w) = \sum_{l, m \geq 0} a_{l, m} z^l w^m$ называется выпуклая оболочка множества точек $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $a_{l, m} \neq 0$. *Размерностью* $\dim P_f$ многоугольника Ньютона P_f называется размерность минимального аффинного подпространства в \mathbb{R}^2 , содержащего многоугольник Ньютона P_f . *Многоугольником* $P_f^\eta \subset \mathbb{R}^2$, отвечающим многоугольнику Ньютона P_f и ковектору $\eta \in \mathbb{R}^{2*}$, назовем грань (размерности 0, 1 или 2) многоугольника Ньютона P_f , на которой достигает максимума функция $P_f \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle \eta, x \rangle$, $x \in P_f$, где через $\langle \eta, x \rangle \in \mathbb{R}$ обозначено значение ковектора η на векторе $x \in \mathbb{R}^2$ (в частности, сам многоугольник Ньютона $P_f^0 = P_f$ отвечает нулевому ковектору $\eta = 0$, а каждая сторона многоугольника P_f отвечает своему “вектору внешней нор-

мали”). По многочлену $f(z, w) = \sum_{l, m \geq 0} a_{l, m} z^l w^m$ и ковектору η определим *усеченный многочлен* $f^\eta(z, w) = \sum_{(l, m) \in P_f^\eta} a_{l, m} z^l w^m$, см. рис. 1.1.

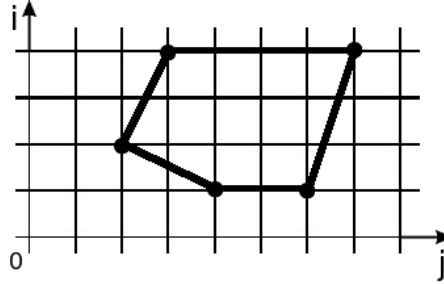


Рис. 1.1: Пример многоугольника Ньютона

Ниже (определения 1.1.2, 1.1.3 и 1.1.4) введены три понятия невырожденности для многочлена $f(z, w) - \xi$, а именно определены *невырожденность многочлена относительно своего многоугольника Ньютона*, *неособость слоя $f^{-1}(\xi)$ для функции f* и *неприводимость* многочлена $f(z, w) - \xi$. Любое из этих условий выполнено для многочленов “общего положения”. При выполнении данных условий удастся описать топологические свойства слоя $f^{-1}(\xi)$ (см. теоремы 7, 8, 9, 10 и следствие 1.2.3, а также теорему 11 и следствия 1.3.2 и 1.3.4 ниже). Как будет показано ниже, данные свойства являются независимыми (см. пример 1.1.6).

Определение 1.1.2 ([30, §2.1, определение]). Многочлен $f(z, w)$ называется *невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона P_f* , если для любого ковектора $\eta \in \mathbb{R}^{2*}$ выполнено следующее условие: для любого решения (z, w) уравнения $f^\eta(z, w) = 0$, лежащего в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$, дифференциал $df^\eta(z, w) \neq 0$.

Определение 1.1.3. Слоем $T_\xi \subset \mathbb{C}^2$ многочлена $f : \mathbb{C}^2(z, w) \rightarrow \mathbb{C}$ называется множество $T_\xi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = \xi\}$. Слой $T_\xi \subset \mathbb{C}^2$ называется *неособым* для функции f , если $df(z, w) \neq 0$ для любых $(z, w) \in T_\xi$.

Определение 1.1.4. Многочлен $f(z, w)$ называется *неприводимым*, если не существует его разложения на множители $f(z, w) = p_1(z, w)p_2(z, w)$, где $p_1(z, w)$ и $p_2(z, w)$ — многочлены, отличные от константы.

В дальнейшем в основном будут рассматриваться только неособые слои невырожденных неприводимых многочленов. Естественность этого предположения показывает следующее замечание 1.1.5.

Замечание 1.1.5. Для заданного многоугольника $P \neq \emptyset$ и почти всех многочленов f , таких что $P_f = P$, выполнены следующие свойства:

- 1) нулевой слой $T_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$ является неособым (см. теорему 6);
- 2) многочлен $f(z, w)$ является невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона P_f (см. [30, §2.2, теорема]);
- 3) многочлен $f(z, w)$ является неприводимым.

Пример 1.1.6. В таблице ниже для каждого из выписанных многочленов указано, выполнены ли для него свойства неособости нулевого слоя, невырожденности относительно своего многоугольника Ньютона и неприводимости.

Многочлен	Неособость T_0	Невырожденность	Неприводимость
z	+	+	+
$z^2 + w^3$	−	+	+
$z^2 + w^2 + 2zw + w$	+	−	+
$z^3 + (w + 1)^2$	−	−	+
$(z + 1)(z + 2)$	+	+	−
zw	−	+	−
$(z^2 + w^2 + 1)(z^2 + w^2 + 2)$	+	−	−
$(z + 1)^3$	−	−	−

Замечание 1.1.7. Как показано в примере 1.1.6, условия неособости слоя T_ξ многочлена f , невырожденности многочлена $f - \xi$ относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi}$, неприводимости многочлена $f - \xi$ являются независимыми, где $\xi \in \mathbb{C}$.

Теорема 6 (Конечность множества особых значений [28], [40]). Пусть $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексный многочлен двух комплексных переменных, отличный от константы. Тогда множество $\Sigma_f \subset \mathbb{C}$ особых значений конечно, т.е. имеет вид $\Sigma_f = \{\xi_i\}_{i=1}^N$, где $\xi_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Рассмотрим в \mathbb{C}^3 гладкое подмногообразие $X = \{(z, w, \xi) \in \mathbb{C}^3 \mid f(z, w) = \xi\} \subset \mathbb{C}^3$ и регулярное отображение $\text{Pr}_\xi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w, \xi) \mapsto \xi$. Регулярность отображения Pr_ξ следует из того, что, в частности, $\frac{\partial \text{Pr}_\xi(z, w, \xi)}{\partial \xi} = 1$. Образом отображения $F := \text{Pr}_\xi|_X$ является $F(X) = \mathbb{C}$, поскольку многочлен $f(z, w)$ отличен от константы. По усиленной теореме Бертини (для схем) отсюда следует (см. [28, Гл. III, следствие 10.7]), что существует открытое по Зарисскому непустое множество $U \subset \mathbb{C}$ такое, что $F|_{F^{-1}(U)} :$

$F^{-1}(U) \rightarrow U$ является гладким морфизмом соответствующих схем в смысле [28, Гл. III, §10, определение]. По теореме [28, Гл. III, теорема 10.2] схема $X_\xi := \text{Spec}(\mathbb{C}[z, w]/(f - \xi))$ является регулярной для любого $\xi \in U$, т.е., в частности, она регулярна в следующем смысле: для любой точки $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, такой что $(z, w, \xi) \in X$, локальное кольцо данной схемы в точке (z, w, ξ) регулярно в смысле [28, Гл. I, §5, определение]. Покажем, что отсюда следует, что $(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w)) \neq (0, 0)$, т.е. ξ является неособым значением функции f . Действительно, из теоремы (см. [40, теорема 36, с.121] или [28, Гл. I, упражнение 5.13]) о том, что локальное регулярное кольцо не имеет делителей нуля следует, что $f(z, w) - \xi$ — это произведение неприводимых многочленов $P_i(z, w)$ без общих нулей, поэтому неравенство $(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w)) \neq (0, 0)$ равносильно системе аналогичных неравенств для каждого неприводимого сомножителя $P_i(z, w)$. А для неприводимого многочлена $P(z, w)$ требуемое неравенство доказано в [28, Гл. I, теорема 5.1]. Всякое открытое по Зарисскому непустое подмножество $U \subset \mathbb{C}$ имеет вид $U = \mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^N$, откуда образ Σ_f множества особых точек содержится в $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, т.е. конечен. \square

1.2 Обзор известных результатов по топологии слоев

1.2.1 Достаточные условия связности слоя

Следующие две теоремы 7 и 8 устанавливают связность нулевого слоя многочлена, являющегося либо неприводимым, либо невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона, имеющего размерность 2.

Теорема 7 (Связность слоев неприводимого многочлена [28, Гл. I]). *Пусть*

многочлен $f = f(z, w)$ неприводим. Тогда нулевой слой $T_0 = f^{-1}(0)$ связан.

Доказательство. Согласно [28, Гл. I, следствие 1.4] слой T_0 неприводим тогда и только тогда, когда идеал, порожденный многочленом f , является простым. Это, в свою очередь эквивалентно тому, что многочлен f является неприводимым. Неприводимость слоя T_0 означает (см. [28, Гл. I, определение в §1, стр. 18]), что не существует $Y_1, Y_2 \subset T_0$ — собственных замкнутых (в смысле топологии Зарисского) в T_0 подмножеств, таких что $T_0 = Y_1 \cup Y_2$, что влечет связность T_0 . \square

Теорема 8 (Связность слоев невырожденного многочлена [29, §2.1]). *Пусть многочлен $f = f(z, w)$ невырожден относительно своего многоугольника Ньютона P_f , и $\dim(P_f) = 2$. Тогда подмножество $\hat{T}_0 := T_0 \setminus ((\mathbb{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}))$ нулевого слоя $T_0 = f^{-1}(0)$ связано.*

Доказательство. Пусть \tilde{X} — замыкание многообразия $X := \hat{T}_0$ в достаточно полной проективной торической компактификации $M \supset \mathbb{C}^2$. Согласно [29, §2.1, теорема], \tilde{X} связно. Так как \tilde{X}, X бирационально эквивалентны и имеют комплексную размерность 1, множество $\tilde{X} \setminus X$ конечно. Поэтому из связности \tilde{X} получаем связность X . \square

1.2.2 Топология слоя невырожденного многочлена

Определение 1.2.1. Пусть M — компактное аналитическое проективное многообразие размерности $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Арифметическим родом $p_a(M)$ многообразия M называется альтернированная сумма

$$p_a(M) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^k(M)),$$

где через $\Omega^k(M)$ обозначено пространство голоморфных дифференциальных k -форм на M (см. [29, §1.1]). Для некомпактного аналитического многообразия M' арифметический род определяется формулой $p_a(M') := p_a(M)$, где M — любое компактное аналитическое проективное многообразие, бирационально эквивалентное M' .

Известно, что для бирационально эквивалентных компактных алгебраических многообразий M_1, M_2 выполнено $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^k(M_1)) = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^k(M_2))$ и $p_a(M_1) = p_a(M_2)$ (см. [29, §1.1]). Поэтому определение 1.2.1 корректно для некомпактных аналитических многообразий. Если M_1 и M_2 бирационально эквивалентны и $\dim_{\mathbb{C}} M_1 = 1$, то имеются конечные подмножества $N_1 \subset M_1$ и $N_2 \subset M_2$, такие что $M_1 \setminus N_1$ и $M_2 \setminus N_2$ комплексно диффеоморфны.

Теорема 9 (Неособость и арифметический род слоя [29, §1.1, теорема 1 в §1.3, теорема в §2.1, теорема в §4.1]). *Слой $T_0 = f^{-1}(0)$, определенный невырожденным (относительно своего многоугольника Ньютона P_f) многочленом $f(z, w) \neq \text{const}$ с ненулевым свободным членом, является неособым для функции f . Его арифметический род $p_a(T_0)$ вычисляется по формуле $p_a(T_0) = 1 - (-1)^{\dim P_f} B^+(P_f)$, где $B^+(P_f)$ — количество целочисленных точек, лежащих строго внутри многоугольника Ньютона P_f (в топологии минимального линейного пространства, содержащего P_f). То есть, $p_a(T_0) = 1 - B^+(P_f)$ при $\dim P_f = 2$, и $p_a(T_0) = 1 + B^+(P_f)$ при $\dim P_f = 1$.*

Пример 1.2.2. Для $f(z, w) = z^n - 1$ слой $T_0 = f^{-1}(0) \approx \mathbb{C} \times \{1, \dots, n\}$ имеет арифметический род $p_a(T_0) = 1 + B^+(P_f) = n$ в силу теоремы 9. Соответствующая компактная аналитическая проективная кривая $M \supset T_0$, биголоморфно эквивалентная слою T_0 , является несвязным объединением n

экземпляров сфер Римана: $M = \overline{\mathbb{C}} \times \{1, \dots, n\}$.

Согласно [27, §19.14], если X — компактное связное 1-мерное комплексное многообразие (т.е. *риманова поверхность*), гомеоморфная сфере с n_g ручками, то размерность пространства голоморфных 1-форм на ней равна n_g . Отсюда получаем следующее следствие теорем 8 и 9.

Следствие 1.2.3 (Количество ручек у слоя). *Пусть многочлен $f(z, w) - \xi$ невырожден относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi}$, причем $\dim P_{f-\xi} = 2$ и $f(0, 0) \neq \xi$. Тогда слой T_ξ является неособым для функции f и гомеоморфен сфере с $n_g = B^+(P_{f-\xi})$ ручками и конечным числом проколов, где $B^+(P_{f-\xi})$ как в теореме 9.*

Определение 1.2.4. Векторным полем *косой градиент* $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f \in \text{Vect}(\mathbb{C}^2)$ голоморфной функции $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ относительно голоморфной 2-формы $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ называется векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = \left(-\frac{\partial f(z, w)}{\partial w}, \frac{\partial f(z, w)}{\partial z}\right)$, заданное в координатах (z, w) .

Определение 1.2.5. (А) *Римановой метрикой пополнения g_ξ неособого слоя T_ξ для функции f назовем риманову метрику $g_\xi = \text{Sym}(\Delta_\xi \otimes \overline{\Delta_\xi})$, где голоморфная 1-форма Δ_ξ определена на слое T_ξ соотношением $\Delta_\xi(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_\xi}) = 1$. Отметим, что риманова метрика g_ξ является плоской, и интегральные траектории векторных полей $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_\xi}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_\xi}$ являются ее геодезическими.*

(Б) На слое T_ξ определена *функция расстояния* $\rho_\xi : T_\xi \times T_\xi \rightarrow \mathbb{R}$, где для любых $x, y \in T_\xi$, $\rho_\xi(x, y)$ — нижняя грань длин всех кривых, лежащих в T_ξ и соединяющих точки x, y , расстояние в смысле римановой метрики пополнения g_ξ .

Теорема 10 (Количество ручек и голоморфные 1-формы на слое [29, утверждение и пример в §2.2]). Пусть многочлен $f(z, w) - \xi$ невырожден относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi}$, причем $\dim P_{f-\xi} = 2$. Тогда подмножество $\hat{T}_\xi := T_\xi \setminus ((\mathbb{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}))$ слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ гомеоморфно сфере с $n_g = B^+(P_{f-\xi})$ ручками и конечным числом проколов, где $B^+(P_{f-\xi})$ как в теореме 9. Более того, 1-формы $\Delta_0 z^l w^m$ на X , где $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$ — внутренние целочисленные точки многоугольника Ньютона P_f , образуют базис пространства голоморфных 1-форм на некоторой компактной связной аналитической проективной кривой $\tilde{X} \supset \hat{T}_\xi$, биголоморфно эквивалентной многообразию \hat{T}_ξ .

1.3 Поведение гамильтонова поля в бесконечно удаленных точках на пополненном слое

Определение 1.3.1. (А) Скажем, что мероморфное векторное поле v , определенное на некоторой комплексной кривой, имеет *полюс порядка* $k \geq 0$ в точке x , если в некоторой окрестности U точки x выполнено соотношение: $v = h(u)u^{-k} \frac{d}{du}$, где $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ — локальная координата в окрестности точки x , $h(u)$ — некоторая голоморфная функция на $u(U)$, такие что $u(x) = 0$ и $h(0) \neq 0$.

(Б) Скажем, что голоморфная 1-форма Δ , определенная на некоторой комплексной кривой, имеет *ноль порядка* $k \geq 0$ в точке x , если в некоторой окрестности U точки x выполнено соотношение: $\Delta = h(u)u^k du$, где $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ — локальная координата в окрестности точки x , $h(u)$ — некоторая голоморфная функция на $u(U)$, такие что $u(x) = 0$ и $h(0) \neq 0$.

Из определения 1.3.1 легко следует, что если голоморфная 1-форма Δ на комплексной кривой имеет ноль порядка k в точке x , то в некоторой окрестности U точки x выполнено соотношение: $\Delta = u^k du$ для некоторой локальной координаты $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ в окрестности точки x . Полюс порядка $k = 0$ является устранимой особенностью векторного поля. Интегральные траектории векторного поля v , имеющего полюс порядка 2, изображены на рис. 1.2.

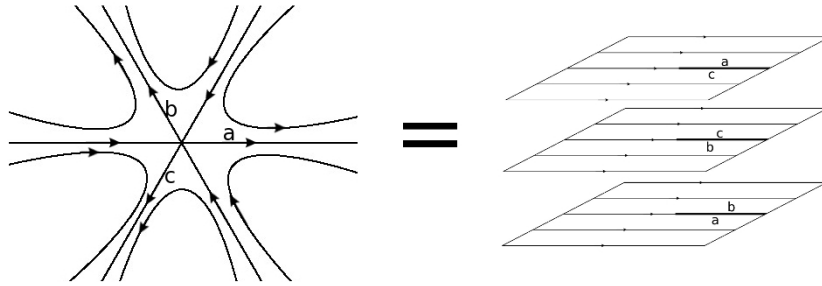


Рис. 1.2: Полюс порядка 2

Пусть многоугольник Ньютона $P_{f-\xi_0}$ удовлетворяет следующему условию:

(i) многоугольник Ньютона $P = P_{f-\xi_0}$ содержит вместе с каждой своей точкой $(u, v) \in P$ прямоугольник $\text{conv}\{(0, 0), (u, 0), (0, v), (u, v)\} = P_{z^u w^v + z^u + w^v + 1}$.

Условие (i) эквивалентно тому, что $P_{z^l + w^{m+1}} \subseteq P_{f-\xi_0} \subseteq P_{z^l w^m + z^l + w^{m+1}}$ для некоторых неотрицательных $l, m \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $D_{z_0, \varepsilon}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, открытый двумерный диск.

Теорема 11 (Нормализация невырожденного многочлена и 2-формы $dz \wedge dw$ в “бесконечно удаленных точках” слоев). Пусть $f(z, w) - \xi_0$ — невырожденный многочлен относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi_0}$, причем многоугольник Ньютона $P_{f-\xi_0}$ удовлетворяет условию (i) выше, и $\dim P_{f-\xi_0} = 2$ (см. определение 1.1.1). Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $R > 0$, такие что

1) для любой стороны Γ_l многоугольника Ньютона, не лежащей на координатных осях, существуют ровно n_{Γ_l} голоморфных вложений $J_{\Gamma_l, n} : D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$, $1 \leq n \leq n_{\Gamma_l}$, таких что

$$f \circ J_{\Gamma_l, n}(\xi, u) = \xi, \quad J_{\Gamma_l, n}^*(dz \wedge dw) = u^{(u_0-1)\alpha_{\Gamma_l} + (v_0-1)\beta_{\Gamma_l}-1} d\xi \wedge du,$$

$(\xi, u) \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\})$, причем $\lim_{u \rightarrow 0} |J_{\Gamma_l, n}(\xi, u)| = \infty$ равномерно по $\xi \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2$, $1 \leq n \leq n_{\Gamma_l}$, где $n_{\Gamma_l} + 1$ равно количеству целочисленных точек на стороне Γ_l , $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$ — несократимый вектор внешней нормали стороны Γ_l , и $(u_0, v_0) \in \Gamma_l$ — любая точка на Γ_l ;

2) образы всех этих $n_\mu = \sum_l n_{\Gamma_l}$ вложений (отвечающих одной и той же стороне, но разным значениям n , либо разным сторонам многоугольника Ньютона) попарно не пересекаются, и объединение этих образов содержит $f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus D_{0, R}^4$ (т.е. дополнение этого объединения в $f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2)$ ограничено, а потому его замыкание в \mathbb{C}^2 компактно).

Следствие 1.3.2. Пусть выполнены условия теоремы 11. Имеется комплексное 2-мерное связное многообразие $\widetilde{M}^4 = \widetilde{M}_{\xi_0, \varepsilon}^4$ с комплексно аналитическим атласом из $n_\mu + 1$ карт, полученное из $M^4 = M_{\xi_0, \varepsilon}^4 := f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2) \subset \mathbb{C}^2$ приклеиванием n_μ экземпляров множества $D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times D_{0, \varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}^2$ при помощи вложений $J_{\Gamma_l, n}$ (см. теорему 11), такое что $\widetilde{M}^4 \setminus M^4 \approx D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times \{0\} \times \{1, \dots, n_\mu\}$ (“бесконечно удаленные” точки $p_{\xi, \Gamma_l, n}$) и замыкание $\widetilde{T}_\xi \subset \widetilde{M}^4$ каждого слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ в \widetilde{M}^4 , является неособым компактным связным слоем $\widetilde{T}_\xi = \widetilde{f}^{-1}(\xi)$ некоторой голоморфной функции $\widetilde{f} : \widetilde{M}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2$, такой что $\widetilde{f}|_{M^4} = f$. В $U_{\Gamma_l, n} := J_{\Gamma_l, n}(D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\})) \subset M^4$ векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$, 1-форма Δ_ξ и риманова метрика пополнения g_ξ (см. определения 1.2.4 и 1.2.5(A)) имеют следующий вид в координатах

$(\xi, u) \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times (D_{0, \varepsilon}^2 \setminus \{0\})$ из теоремы 11:

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{U_{\Gamma_l, n}} = u^{(1-u_0)\alpha_{\Gamma_l} + (1-v_0)\beta_{\Gamma_l} + 1} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\Delta_{\xi}|_{U_{\Gamma_l, n}} = u^{(u_0-1)\alpha_{\Gamma_l} + (v_0-1)\beta_{\Gamma_l} - 1} du, \quad \xi \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2,$$

$$g_{\xi}|_{U_{\Gamma_l, n}} = (u\bar{u})^{(u_0-1)\alpha_{\Gamma_l} + (v_0-1)\beta_{\Gamma_l} - 1} du d\bar{u}, \quad \xi \in D_{\xi_0, \varepsilon}^2.$$

При этом $(u_0 - 1)\alpha_{\Gamma_l} + (v_0 - 1)\beta_{\Gamma_l} - 1 \geq 0$ тогда и только тогда, когда многоугольник Ньютона $P_{f-\xi_0}$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку с целыми координатами (т.е. когда $\tilde{T}_{\xi_0} \not\cong S^2$).

Замечание 1.3.3. При $|\xi - \xi_0| < \varepsilon$ векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{\tilde{T}_{\xi}}$ на компактной связной поверхности $\tilde{T}_{\xi} = \tilde{f}^{-1}(\xi)$ имеет ровно n_{μ} особых точек, индексы которых равны $(1 - u_0)\alpha_{\Gamma_l} + (1 - v_0)\beta_{\Gamma_l} + 1$, см. следствие 1.3.2. Поэтому сумма индексов равна $n_{\mu} - 2S(P_{f-\xi})$, где $S(P_{f-\xi})$ — площадь многоугольника $\text{conv}\{(1, 1)\} \cup (\cup_l \Gamma_l)$. С другой стороны, по следствию 1.2.3 род поверхности \tilde{T}_{ξ} (т.е. количество ручек) равен $n_g = B^+(P_{f-\xi})$. Так как сумма индексов особых точек векторного поля равна $2 - 2n_g$, получаем равенство $n_{\mu} - 2S(P_{f-\xi}) = 2 - 2B^+(P_{f-\xi})$, равносильное известной теореме Пика.

Доказательство теоремы 11. Сначала отметим, что в силу условия (i) выполнено $\alpha_{\Gamma_l} \geq 0$ и $\beta_{\Gamma_l} \geq 0$, причем по крайней мере одно неравенство строгое. Пусть для определенности (u_0, v_0) — начальная вершина стороны $\Gamma_l \subset \partial\Delta_{f-\xi_0}$ по отношению к положительной ориентации (против часовой стрелки) замкнутой ломаной $\partial\Delta_{f-\xi_0} \subset \mathbb{C}$. Тогда целочисленные точки стороны Γ_l имеют координаты $(u_n, v_n) := (u_0 - n\beta_{\Gamma_l}, v_0 + n\alpha_{\Gamma_l})$, $n = 0, 1, \dots, n_{\Gamma_l}$. Далее, рассмотрим вектор $\eta := (\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$ внешней нормали стороны Γ_l и отвечающий ему

усеченный многочлен $f^n(z, w) = \sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} z^{u_n} w^{v_n} = z^{u_0} w^{v_0} P_{\Gamma_l} \left(\frac{w^{\alpha_{\Gamma_l}}}{z^{\beta_{\Gamma_l}}} \right)$, где

$$P_{\Gamma_l}(y) := \sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} y^n = \sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_0 - n\beta_{\Gamma_l}, v_0 + n\alpha_{\Gamma_l}} y^n.$$

Пусть $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n_{\Gamma_l}}$ — корни уравнения $P_{\Gamma_l}(y) = 0$. Заметим, что все корни уравнения $P_{\Gamma_l}(y) = 0$ различны (так как $f(z, w)$ — невырожденный многочлен) и не равны нулю (так как $a_{u_0, v_0} \neq 0$ и $a_{u_{n_{\Gamma_l}}, v_{n_{\Gamma_l}}} = a_{u_0 - n_{\Gamma_l}\beta_{\Gamma_l}, v_0 + n_{\Gamma_l}\alpha_{\Gamma_l}} \neq 0$ в силу того, что (u_0, v_0) и $(u_{n_{\Gamma_l}}, v_{n_{\Gamma_l}}) = (u_0 - n_{\Gamma_l}\beta_{\Gamma_l}, v_0 + n_{\Gamma_l}\alpha_{\Gamma_l})$ — вершины многоугольника Ньютона). Положим $\hat{y} := \hat{y}_n$, где $n = 1, \dots, n_{\Gamma_l}$.

Шаг 1. Пусть $\alpha_{\Gamma_l} \neq 0$. Рассмотрим отображение

$$I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}} : (D_{0, \varepsilon_2}^2 \setminus \{0\}) \times D_{0, \varepsilon_3}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (u, g) \mapsto (u^{-\alpha_{\Gamma_l}}, u^{-\beta_{\Gamma_l}}(\hat{y} + g)^{1/\alpha_{\Gamma_l}}),$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ — некоторые числа. Покажем, что существует функция $g_n(\xi, u)$, такая что выполнены соотношения

$$g_n(\xi, 0) = 0, \quad f \circ I_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g_n(\xi, u)) = \xi.$$

В самом деле, значение любого монома $a_{k, m} z^k w^m$ многочлена $f(z, w)$ на паре $(z, w) = I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g)$ равно $a_{k, m} z^k w^m = a_{k, m} u^{-k\alpha_{\Gamma_l} - m\beta_{\Gamma_l}} (\hat{y} + g)^{m/\alpha_{\Gamma_l}} = a_{k, m} u^{-\alpha_{\Gamma_l} u_0 - \beta_{\Gamma_l} v_0} u^{\alpha_{\Gamma_l}(u_0 - k) + \beta_{\Gamma_l}(v_0 - m)} (\hat{y} + g)^{m/\alpha_{\Gamma_l}}$. Заметим, что $\alpha_{\Gamma_l}(u_0 - k) + \beta_{\Gamma_l}(v_0 - m) \geq 0$, поскольку $(k, m) \in P_{f-\xi_0}$, и $\alpha_{\Gamma_l}(u_0 - k) + \beta_{\Gamma_l}(v_0 - m) = 0$ тогда и только тогда, когда $(k, m) \in \Gamma_l$, поскольку $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$ — внешняя нормаль к Γ_l . Отсюда следует, что $f \circ I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g) - \xi = u^{-\alpha_{\Gamma_l} u_0 - \beta_{\Gamma_l} v_0} (P_{\Gamma_l}(\hat{y} + g) + \dots)$, где невыписанные мономы имеют степень по переменной u больше либо равную единице. Рассмотрим в области $\mathbb{C} \times D_{0, \varepsilon_2}^2 \times D_{0, \varepsilon_3}^2$ голоморфную функцию

$$F(\xi, u, g) := (f \circ I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g) - \xi) u^{\alpha_{\Gamma_l} u_0 + \beta_{\Gamma_l} v_0} = P_{\Gamma_l}(\hat{y} + g) + \dots$$

и рассмотрим уравнение $F(\xi, u, g) = 0$. Заметим, что для любого ξ при $u = 0$ подстановка $g = 0$ дает решение, поскольку \hat{y} — корень уравнения $P_{\Gamma_l}(y) = 0$, т.е. $F(\xi, 0, 0) = 0$. Далее, $(\partial F / \partial g)|_{(\xi, 0, 0)} = (P'_{\Gamma_l}(\hat{y} + g) + \dots)|_{(\xi, 0, 0)} = P'_{\Gamma_l}(\hat{y}) \neq 0$, так как (в силу невырожденности многочлена $f - \xi_0$ относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi_0}$) многочлен $P_{\Gamma_l}(y)$ не имеет кратных корней. Поэтому, по теореме о неявной функции, существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, такие что существует единственная функция $g_{\Gamma_l, n} : D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2 \times D_{0, \varepsilon_2}^2 \rightarrow D_{0, \varepsilon_3}^2 \subset \mathbb{C}$ со свойством

$$g_{\Gamma_l, n}(\xi, 0) = 0, \quad F(\xi, u, g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)) = 0,$$

а, стало быть, $I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)) \in T_\xi$. Более того, согласно теореме о неявной функции, функция $g_{\Gamma_l, n} = g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)$ является голоморфной.

Шаг 2. Далее, положим

$$J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi, u) := I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u, g_{\Gamma_l, n}(\xi, u))$$

и вычислим

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}^*(dz \wedge dw) &= d(u^{-\alpha_{\Gamma_l}}) \wedge d(u^{-\beta_{\Gamma_l}}(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u))^{1/\alpha_{\Gamma_l}}) \\ &= (-\alpha_{\Gamma_l} u^{-\alpha_{\Gamma_l}-1} du) \wedge \left(\frac{(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u))^{(1-\alpha_{\Gamma_l})/\alpha_{\Gamma_l}}}{\alpha_{\Gamma_l}} u^{-\beta_{\Gamma_l}} \frac{\partial g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)}{\partial \xi} d\xi \right) \\ &= (\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u))^{(1-\alpha_{\Gamma_l})/\alpha_{\Gamma_l}} u^{-\alpha_{\Gamma_l}-\beta_{\Gamma_l}-1} \left(-\frac{\partial F(\xi, u, g_{\Gamma_l, n})}{\partial \xi} / \frac{\partial F(\xi, u, g_{\Gamma_l, n})}{\partial g} \right) d\xi \wedge du \\ &= u^{\alpha_{\Gamma_l}(u_0-1)+\beta_{\Gamma_l}(v_0-1)-1} \frac{(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u))^{(1-\alpha_{\Gamma_l})/\alpha_{\Gamma_l}}}{P'_{\Gamma_l}(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)) + \dots} d\xi \wedge du, \end{aligned}$$

где невыписанные мономы, как и прежде, имеют степень по u больше либо равную единице. Поэтому

$$J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}^*(dz \wedge dw) = u^{\alpha_{\Gamma_l}(u_0-1)+\beta_{\Gamma_l}(v_0-1)-1} h(\xi, u) d\xi \wedge du,$$

где $h(\xi, u)$ — голоморфная отделенная от нуля функция двух комплексных переменных в некоторой окрестности точки $(\xi_0, 0)$. Отсюда существуют $\varepsilon > 0$ и замена координат $\psi : U(\xi_0, 0) \rightarrow D_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times D_{0, \varepsilon}^2$, $\psi : (\xi, u) \mapsto (\tilde{\xi}, \tilde{u})$, причем $\tilde{\xi} = \xi$, такие что

$$(J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}} \circ \psi^{-1})^*(dz \wedge dw) = \tilde{u}^{\alpha_{\Gamma_l}(u_0-1) + \beta_{\Gamma_l}(v_0-1)-1} d\tilde{\xi} \wedge d\tilde{u},$$

где $U(\xi_0, 0) \subset \mathbb{C}^2$ — некоторая окрестность точки $(\xi_0, 0)$ в \mathbb{C}^2 .

Шаг 3. Докажем, что $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}$ — вложение. Допустим противное, тогда существуют (ξ_1, u_1) и (ξ_2, u_2) , такие что $(\xi_1, u_1) \neq (\xi_2, u_2)$ и $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi_1, u_1) = J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi_2, u_2)$. Отсюда $\xi_1 = \xi_2$, так как $\xi_1 = f(J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi_1, u_1)) = f(J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi_2, u_2)) = \xi_2$, обозначим $\xi := \xi_1 = \xi_2$. С другой стороны, так как $(u_1^{-\alpha_{\Gamma_l}}, u_1^{-\beta_{\Gamma_l}}(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u_1)))^{1/\alpha_{\Gamma_l}} = (u_2^{-\alpha_{\Gamma_l}}, u_2^{-\beta_{\Gamma_l}}(\hat{y} + g_{\Gamma_l, n}(\xi, u_2)))^{1/\alpha_{\Gamma_l}}$, то $g_{\Gamma_l, n}(\xi, u_1) = g_{\Gamma_l, n}(\xi, u_2)$ и (в силу взаимной простоты α_{Γ_l} и β_{Γ_l}) $u_1 = u_2$, противоречие.

Аналогично определяются отображения $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}$, если $\alpha_{\Gamma_l} = 0$ и $\beta_{\Gamma_l} \neq 0$ (как следствие, $\beta_{\Gamma_l} = 1$). Тем самым пункт 1) доказан. Докажем пункт 2).

Шаг 4. Докажем, что образы построенных вложений попарно не пересекаются и что каждое из них инъективно. Пусть $\Gamma_{l_1} \neq \Gamma_{l_2}$.

Случай 1. Пусть $\alpha_{\Gamma_{l_i}} \neq 0$, $i = 1, 2$. Допустим, что существуют $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_1 \leq n_{\Gamma_{l_1}}$, $1 \leq n_2 \leq n_{\Gamma_{l_2}}$, такие что для любых сколь угодно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существуют (ξ_i, u_i) , $|\xi_i - \xi_0| < \varepsilon_1$, $|u_i| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2$, такие что выполнено соотношение: $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_{l_1}}, \beta_{\Gamma_{l_1}}, \hat{y}_1}(\xi_1, u_1) = J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_{l_2}}, \beta_{\Gamma_{l_2}}, \hat{y}_2}(\xi_2, u_2)$.

Тогда

$$u_1^{-\alpha_{\Gamma_{l_1}}} = u_2^{-\alpha_{\Gamma_{l_2}}}, \quad u_1^{-\beta_{\Gamma_{l_1}}}(\hat{y}_1 + g_{\Gamma_{l_1}, n_1})^{1/\alpha_{\Gamma_{l_1}}} = u_2^{-\beta_{\Gamma_{l_2}}}(\hat{y}_2 + g_{\Gamma_{l_2}, n_2})^{1/\alpha_{\Gamma_{l_2}}}.$$

Отсюда $u_2^{\alpha_{\Gamma_{l_1}}\beta_{\Gamma_{l_2}} - \alpha_{\Gamma_{l_2}}\beta_{\Gamma_{l_1}}} = \frac{(\hat{y}_2 + g_{\Gamma_{l_2}, n_2})^{\alpha_{\Gamma_{l_1}}/\alpha_{\Gamma_{l_2}}}}{\hat{y}_1 + g_{\Gamma_{l_1}, n_1}}$, а, значит, $u_2^{\alpha_{\Gamma_{l_1}}\beta_{\Gamma_{l_2}} - \alpha_{\Gamma_{l_2}}\beta_{\Gamma_{l_1}}}$ ограничено и отделено от нуля (при сколь угодно малых u_2), следовательно $\alpha_{\Gamma_{l_1}}\beta_{\Gamma_{l_2}} - \alpha_{\Gamma_{l_2}}\beta_{\Gamma_{l_1}} = 0$, откуда векторы $(\alpha_{\Gamma_{l_1}}, \beta_{\Gamma_{l_1}})$ и $(\alpha_{\Gamma_{l_2}}, \beta_{\Gamma_{l_2}})$ пропорциональны, а потому совпадают, противоречие.

Случай 2. Пусть $\alpha_{\Gamma_{l_1}} \neq 0$ и $\alpha_{\Gamma_{l_2}} = 0$ (заметим, что одновременно равенства нулю $\alpha_{\Gamma_{l_i}} = 0$, $i = 1, 2$, невозможны, в силу условия $\Gamma_{l_1} \neq \Gamma_{l_2}$). Допустим, что существуют $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_1 \leq n_{\Gamma_{l_1}}$, $1 \leq n_2 \leq n_{\Gamma_{l_2}}$, такие что для любых сколь угодно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существуют (ξ_i, u_i) , $|\xi_i - \xi_0| < \varepsilon_1$, $|u_i| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2$, такие что выполнено соотношение: $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_{l_1}}, \beta_{\Gamma_{l_1}}, \hat{y}_1}(\xi_1, u_1) = J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 0, 1, \hat{y}_2}(\xi_2, u_2)$. Тогда $u_1^{-\alpha_{\Gamma_{l_1}}} = (\hat{y}_2 + g_{\Gamma_{l_2}, n_2})^{1/\beta_{\Gamma_{l_2}}}$. Отсюда $u_1^{-\alpha_{\Gamma_{l_1}}}$ ограничено и отделено от нуля (при сколь угодно малых u_1), что невозможно в силу условия $\alpha_{\Gamma_{l_1}} > 0$, противоречие.

Далее, рассмотрим сторону Γ_l . Пусть $\alpha_{\Gamma_l} \neq 0$. Допустим, что существуют $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_1 < n_2 \leq n_{\Gamma_{l_1}}$, такие что для любых сколь угодно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существуют (ξ_i, u_i) , $|\xi_i - \xi_0| < \varepsilon_1$, $|u_i| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2$, такие что выполнено соотношение: $J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}_1}(\xi_1, u_1) = J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}_2}(\xi_2, u_2)$. Тогда $\hat{y}_1 - \hat{y}_2 = g_{\Gamma_l, n_2}(\xi_2, u_2) - g_{\Gamma_l, n_1}(\xi_1, u_1)$, что невозможно, в силу того, что $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$ и $g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)$ — ограниченная голоморфная функция, причем $g_{\Gamma_l, n}(\xi, 0) = 0$, противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда $\beta_{\Gamma_l} \neq 0$.

Шаг 5. Докажем, что при $0 < \varepsilon_1 < |a_{0,0} - \xi_0|/2$ множество

$$f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2) \setminus \bigcup_{\Gamma_l, n} J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}_n}(D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2 \times (D_{0, \varepsilon_2}^2 \setminus \{0\}))$$

ограничено в \mathbb{C}^2 . Обозначим $X := \bigcup_{\Gamma_l, n} J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}_n}(D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2 \times (D_{0, \varepsilon_2}^2 \setminus \{0\}))$.

Осталось показать, что $f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2) \setminus X$ ограничено. Допустим противное, тогда существует последовательность $(z_j, w_j) \in f^{-1}(D_{\xi_0, \varepsilon_1}^2) \setminus X$, $j \in \mathbb{N}$, такая что либо $z_j \rightarrow \infty$, либо $w_j \rightarrow \infty$. Тогда $|z_j| = e^{\alpha_j}$, $|w_j| = e^{\beta_j}$, где $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ и $\max\{\alpha_j, \beta_j\} \rightarrow +\infty$. Возможны два случая.

Случай 1. Допустим, что для любой стороны Γ_l многоугольника Ньютона последовательность (α_j, β_j) отделена с точностью до пропорциональности от вектора нормали $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$. Тогда $|f(z_j, w_j) - \xi_j| = e^{u_0\alpha_j + v_0\beta_j}(|\tilde{a}_{u_0, v_0}| + o(1))$ при $j \rightarrow \infty$, где $\xi_j := f(z_j, w_j)$, $\tilde{a}_{u, v} := a_{u, v}$ при $(u, v) \neq (0, 0)$, $\tilde{a}_{0, 0} := a_{0, 0} - \xi_j$, $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ — координаты вершины многоугольника Ньютона, на которой значение выражения $\alpha_j u_0 + \beta_j v_0$ наибольшее (такая вершина в рассматриваемом случае, без ограничения общности, не зависит от j при достаточно большом j). Левая часть полученного равенства равна нулю, а правая отлична от нуля, противоречие.

Случай 2. Таким образом, последовательность (α_j, β_j) с точностью до пропорциональности стремится к вектору внешней нормали $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l})$ некоторой стороны Γ_l многоугольника Ньютона. Возможны два подслучая.

Подслучай 2а. Допустим, что $(\alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}) = (-1, 0)$. Тогда $|z_j| = e^{-t_j} \rightarrow 0$, $|w_j| = e^{o(t_j)} \rightarrow +\infty$, где $t_j \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$, и для любого монома $|z_j^p w_j^q| = e^{t_j(-p+o(1))}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $0 = f(z_j, w_j) - \xi_j = o(1) + f(0, w_j) - \xi_j$, где $\xi_j := f(z_j, w_j)$, поэтому, ввиду того, что $|w_j| \rightarrow \infty$, имеем $f(0, w) \equiv \text{const}$, то есть $f(z, w) - \xi = zL(z, w)$ для некоторых константы $\xi \in \mathbb{C}$ и многочлена $L = L(z, w)$, противоречие ввиду условий (i) и $\dim P_{f-\xi_0} = 2$.

Подслучай 2б. Таким образом, $\alpha_{\Gamma_l} \geq 0$ и $\beta_{\Gamma_l} \geq 0$. Напомним, что целочисленные точки стороны Γ_l имеют координаты $(u_0 - n\beta_{\Gamma_l}, v_0 + n\alpha_{\Gamma_l})$,

$n = 0, 1, \dots, n_{\Gamma_l}$, где (u_0, v_0) — начальная вершина стороны $\Gamma_l \subset \partial\Delta_{f-\xi_0}$ по отношению к положительной ориентации (против часовой стрелки) замкнутой ломаной $\partial\Delta_{f-\xi_0} \subset \mathbb{C}$. Пусть для определенности $\alpha_{\Gamma_l} \neq 0$ (тогда $\alpha_{\Gamma_l} > 0$, $\beta_{\Gamma_l} \geq 0$ и $|z_j| \rightarrow \infty$), рассмотрим (α_{Γ_l} -значное) отображение

$$h_{\Gamma_l} : (x, y) \mapsto (z, w) = (x^{\alpha_{\Gamma_l}}, x^{\beta_{\Gamma_l}} y^{1/\alpha_{\Gamma_l}})$$

области $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ в себя. Тогда $z_j = x_j^{\alpha_{\Gamma_l}}$, $w_j = x_j^{\beta_{\Gamma_l}} y_j^{1/\alpha_{\Gamma_l}}$ для некоторых $x_j, y_j \in \mathbb{C}$. Имеем $x_j \rightarrow \infty$, $|y_j| = |x_j|^{o(1)}$, откуда

$$|f(z_j, w_j) - f_{\Gamma_l}(z_j, w_j) - \xi_j| = O(|x_j|^{u_0\alpha_{\Gamma_l} + v_0\beta_{\Gamma_l} - 1/2}),$$

$$f_{\Gamma_l}(z_j, w_j) = x_j^{u_0\alpha_{\Gamma_l} + v_0\beta_{\Gamma_l}} \left(\sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} y_j^{v_n/\alpha_{\Gamma_l}} \right) = x_j^{u_0\alpha_{\Gamma_l} + v_0\beta_{\Gamma_l}} y_j^{v_0/\alpha_{\Gamma_l}} \left(\sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} y_j^n \right),$$

где $u_n := u_0 - n\beta_{\Gamma_l}$, $v_n := v_0 + n\alpha_{\Gamma_l}$. Поэтому

$$0 = f(z_j, w_j) - \xi_j = x_j^{u_0\alpha_{\Gamma_l} + v_0\beta_{\Gamma_l}} \left(O(|x_j|^{-1/2}) + y_j^{v_0/\alpha_{\Gamma_l}} \sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} y_j^n \right)$$

при $j \rightarrow \infty$. Отсюда получаем, что последовательность $y_j \in \mathbb{C}$ может стремиться только к бесконечности (при $v_0 < 0$, $v_{n_{\Gamma_l}} < 0$), к нулю (при $v_0 > 0$, $v_{n_{\Gamma_l}} > 0$) и к корням многочлена $P_{\Gamma_l}(y) := \sum_{n=0}^{n_{\Gamma_l}} a_{u_n, v_n} y^n$. Первое невозможно, так как $f(z, w)$ является обычным многочленом (а не многочленом Лорана), а потому $v_0 \geq 0$ и $v_{n_{\Gamma_l}} \geq 0$. Второе тоже невозможно, так как в противном случае выполнялось бы $|x_j| \rightarrow \infty$ и $|y_j| = |x_j|^{-\varepsilon_j} \rightarrow 0$ для некоторого $\varepsilon_j \rightarrow 0$, откуда $\varepsilon_j > 0$ (начиная с некоторого j), и $|x_j|^{-1/2} = |y_j|^{1/(2\varepsilon_j)} = o(|y_j|^{v_0/\alpha_{\Gamma_l}})$, что приводит к противоречию. Поэтому последовательность $y_j \in \mathbb{C}$ ограничена и может иметь своими предельными точками только корни многочлена $P_{\Gamma_l}(y)$.

Без ограничения общности будем считать, что $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \hat{y}_n =: \hat{y} \in \mathbb{C}$ и $P_{\Gamma_l}(y) = (y - \hat{y})Q(y)$, где Q — многочлен степени $n_{\Gamma_l} - 1$, тогда $\hat{y} \neq 0$ в силу условия невырожденности.

Определим переменные $(u, g) = h_{\Gamma_l, \hat{y}}(x, y) := (x^{-1}, y - \hat{y})$, тогда в этих переменных в окрестности начала координат отношение $(f \circ h_{\Gamma_l} - \xi)/x^{u_0 \alpha_{\Gamma_l} + v_0 \beta_{\Gamma_l}}$ является голоморфной функцией $F(\xi, u, g)$, совпадающей с введенной на шаге 1. Так как $(u_j, g_j) \rightarrow (0, 0)$ (в силу $x_j \rightarrow \infty$ и $y_j \rightarrow \hat{y}$ по доказанному выше), $|\xi_j - \xi_0| < \varepsilon_1$ и $F(\xi_j, u_j, g_j) = 0$, то в силу шага 1 имеем $g_j = g_{\Gamma_l, n}(\xi_j, u_j)$, начиная с некоторого j , где $\xi_j := f(z_j, w_j)$ и $g_{\Gamma_l, n}(\xi, u)$ — функция из шага 1. Отсюда и из шага 2 имеем

$$\begin{aligned} (z_j, w_j) &= h_{\Gamma_l} \circ h_{\Gamma_l, \hat{y}}^{-1}(u_j, g_j) = (u_j^{-\alpha_{\Gamma_l}}, u_j^{-\beta_{\Gamma_l}}(\hat{y} + g_j)^{1/\alpha_{\Gamma_l}}) \\ &= I_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(u_j, g_j) = J_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha_{\Gamma_l}, \beta_{\Gamma_l}, \hat{y}}(\xi_j, u_j). \end{aligned}$$

Отсюда $(z_j, w_j) \in X$, начиная с некоторого j , противоречие. \square

Следствие 1.3.4 (Условие компактности пополненных слоев, типы особенностей поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_\xi}$). Пусть $f(z, w) - \xi_0$ — невырожденный многочлен относительно своего многоугольника Ньютона $P_{f-\xi_0}$, удовлетворяющий условию (i), причем $\dim P_{f-\xi_0} = 2$, где $\dim P_{f-\xi_0}$ — размерность минимального линейного пространства в \mathbb{R}^2 , содержащего $P_{f-\xi_0}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi - \xi_0| \leq \varepsilon$, выполнено:

(А) многочлен $f(z, w) - \xi$ — невырожден относительно своего многоугольника Ньютона $\dim P_{f-\xi}$, ξ — неособое значение, $\dim P_{f-\xi} = 2$;

(Б) при $n_g := B^+(P_{f-\xi}) \geq 1$ пополнение \overline{T}_ξ слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ относительно метрики пополнения g_ξ является компактной связной поверхностью с плоской метрикой и коническими особенностями; эта поверхность

гомеоморфна слою $\tilde{T}_\xi = \tilde{f}^{-1}(\xi)$ (см. следствие 1.3.2), гомеоморфна сфере с n_g ручками, причем $|\overline{T}_\xi \setminus T_\xi| = n_\mu$, и в точках множества $\overline{T}_\xi \setminus T_\xi$, называемых бесконечно удаленными, метрика имеет конические особенности; при $n_g = 0$ пополнение \overline{T}_ξ любого слоя T_ξ относительно метрики пополнения d_ξ совпадает с самим слоем T_ξ и изометрично евклидовой плоскости или плоскому цилиндру;

(В) различным сторонам многоугольника Ньютона соответствуют различные бесконечно удаленные точки на \overline{T}_ξ ; количество различных бесконечно удаленных точек, отвечающих одной и той же стороне многоугольника Ньютона, равно n_{Γ_l} ; при $n_g \geq 1$ (соответственно $n_g = 0$) в каждой из этих точек векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_\xi}$ имеет особенность полюс порядка $(1 - u_0)\alpha_{\Gamma_l} + (1 - v_0)\beta_{\Gamma_l} + 1 \geq 0$ (соответственно ноль порядка $(u_0 - 1)\alpha_{\Gamma_l} + (v_0 - 1)\beta_{\Gamma_l} - 1 > 0$); при $n_g \geq 1$ плоская метрика на пополненном слое \overline{T}_ξ имеет в каждой бесконечно удаленной точке коническую особенность с полным углом $2\pi((1 - u_0)\alpha_{\Gamma_l} + (1 - v_0)\beta_{\Gamma_l} + 2)$.

Доказательство. Пункт (А) следует из теоремы 6 и того факта, что в силу условия (i) многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) - \xi_0$ совпадает с многоугольником Ньютона многочлена $f(z, w) - \xi$. Пункт (Б) следует из следствия 1.2.3, теоремы 7 и следствия 1.3.2. Пункт (В) следует из теоремы 7 и следствия 1.3.2. \square

1.4 Примеры

Пример 1.4.1. Пусть $f(z, w) = z^3 + w^3$, тогда особое значение одно и равно 0. Для любого $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ неособый слой $T_\xi \approx \mathbb{T}^2 \setminus \{p_{\xi,1}, p_{\xi,2}, p_{\xi,3}\}$ — тор без

трех бесконечно удаленных точек. В каждой бесконечно удаленной точке $p_{\xi,i}$, $i = 1, 2, 3$, векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ имеет устранимую особенность. Действительно, критическая точка равна $(0, 0)$, особое значение равно 0 , множество неособых значений совпадает с $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Многоугольник Ньютона для многочлена $f(z, w) - \xi = z^3 + w^3 - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, является треугольником с вершинами в точках $A_1(3, 0)$, $A_2(0, 3)$, $A_3(0, 0)$, см. рис. 1.3. Проверим, что многочлен $f(z, w) - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, является невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона. Обозначим сторону A_2A_3 многоугольника Ньютона через Γ_1 , сторону A_1A_3 через Γ_2 , сторону A_1A_2 через Γ_3 . Многочлен, отвечающий граням Γ_1 и Γ_2 , равен $P_{\Gamma_1}(y) = P_{\Gamma_2}(y) = y^3 - \xi$ и не имеет кратных корней. Многочлен, отвечающий стороне Γ_3 , равен $P_{\Gamma_3}(y) = y^3 + 1$ и не имеет кратных корней. Отсюда следует, что условия теоремы 11 выполнены. Количество целочисленных точек строго внутри многоугольника Ньютона равно $n_g = 1$, количество целочисленных точек на стороне Γ_3 равно 2, поэтому $n_\mu = 3$. По теореме 11 слой T_ξ имеет требуемые свойства.

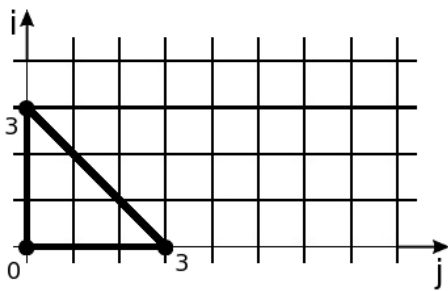


Рис. 1.3: Многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) = z^3 + w^3 - \xi$

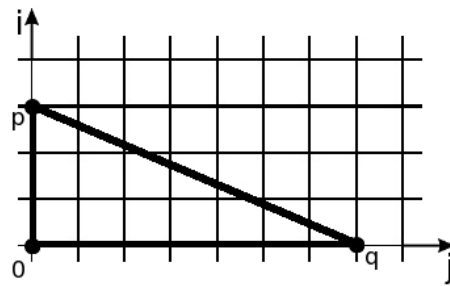


Рис. 1.4: Многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) = z^p + w^q - \xi$

Пример 1.4.2. Пусть $f(z, w) = z^p + w^q$, $p, q \in \mathbb{N}$, тогда особое значение одно

и равно 0. Для любого $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ неособый слой T_ξ гомеоморфен сфере с $((p-1)(q-1) - (\gcd(p,q) - 1))/2$ ручками и без $\gcd(p,q)$ бесконечно удаленных точек. В каждой бесконечно удаленной точке $p_{\xi,i}$, $i = 1, \dots, \gcd(p,q)$, векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ имеет особенность полюс порядка $\frac{(p-1)(q-1)-1}{\gcd(p,q)} - 1$. Действительно, критическая точка равна $(0,0)$, особое значение равно 0, множество неособых значений совпадает с $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Многоугольник Ньютона для многочлена $f(z,w) - \xi = z^p + w^q - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, является треугольником с вершинами в точках $A_1(p,0)$, $A_2(0,q)$, $A_3(0,0)$, см. рис 1.4. Проверим, что многочлен $f(z,w) - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, является невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона. Обозначим сторону A_2A_3 многоугольника Ньютона через Γ_1 , сторону A_1A_3 через Γ_2 , сторону A_1A_2 через Γ_3 . Многочлен, отвечающий стороне Γ_1 , равен $P_{\Gamma_1}(y) = y^p - \xi$ и не имеет кратных корней. Многочлен, отвечающий стороне Γ_2 , равен $P_{\Gamma_2}(y) = y^q - \xi$ и не имеет кратных корней. Многочлен, отвечающий стороне Γ_3 , равен $P_{\Gamma_3}(y) = y^{\gcd(p,q)} + 1$ и не имеет кратных корней. Отсюда следует, что условия теоремы 11 выполнены. Количество целочисленных точек строго внутри многоугольника Ньютона равно $n_g = ((p-1)(q-1) - (\gcd(p,q) - 1))/2$, количество целочисленных точек на стороне Γ_3 равно $\gcd(p,q) - 1$, поэтому $n_\mu = \gcd(p,q)$. По теореме 11 слой T_ξ имеет требуемые свойства.

Пример 1.4.3. Пусть $f(z,w) = z^2 + P_n(w)$, где $P_n(w)$ — многочлен одной переменной степени n , $P_n(w) = \sum_{k=0}^n a_k w^k$, $a_0 \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, тогда особые значения равны $\xi_i = P_n(w_i^0)$, где w_i^0 — корень уравнения $P_n'(w) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Для любого $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$ неособый слой T_ξ гомеоморфен сфере с $[(n-1)/2]$ ручками и без $(3 + (-1)^n)/2$ бесконечно удаленных точек.

В каждой бесконечно удаленной точке $p_{\xi,i}$, $i = 1, \dots, (3 + (-1)^n)/2$, векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ имеет особенность полюс порядка $\frac{(n-2)}{\gcd(n,2)} - 1$. Действительно, критическая точка равна $(0, w_i^0)$, где w_i^0 — корень уравнения $P'_n(w) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, отсюда особые значения равны $\xi_i = f(0, w_i^0) = P_n(w_i^0)$, множество неособых значений совпадает с $\mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$. Многоугольник Ньютона для многочлена $f(z, w) - \xi = z^2 + P_n(w) - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$, является треугольником с вершинами в точках $A_1(2, 0)$, $A_2(0, n)$, $A_3(0, 0)$, если $a_0 - \xi \neq 0$, см. рис 1.5, и треугольником с вершинами в точках $A_1(2, 0)$, $A_2(0, n)$, $A_3(0, 1)$, если $a_0 - \xi = 0$, причем в этом случае $a_1 \neq 0$, так как ξ — неособое значение, см. рис. 1.6. Проверим, что многочлен $f(z, w) - \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$, является невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона. Обозначим сторону A_2A_3 многоугольника Ньютона через Γ_1 , сторону A_1A_3 через Γ_2 , сторону A_1A_2 через Γ_3 . Многочлен, отвечающий стороне Γ_1 , равен либо $P_{\Gamma_1}(y) = y^2 + a_0 - \xi$, если $a_0 - \xi \neq 0$, либо $P_{\Gamma_1}(y) = y^2 + a_1$, если $a_0 - \xi = 0$. В силу того, что ξ — неособое значение, $a_0 - \xi = 0$ и $a_1 = 0$ не могут выполняться одновременно, поэтому P_{Γ_1} не имеет кратных корней. Многочлен, отвечающий стороне Γ_2 , равен $P_{\Gamma_2}(y) = P_n(y) - \xi$ и не имеет кратных корней. Многочлен, отвечающий стороне Γ_3 , равен $P_{\Gamma_3}(y) = y^2 + a_n$ и не имеет кратных корней. Отсюда следует, что условия теоремы 11 выполнены. Количество целочисленных точек строго внутри многоугольника Ньютона $n_g = [(n-1)/2]$, количество целочисленных точек на стороне Γ_3 равно $(1 + (-1)^n)/2$, поэтому $n_\mu = (3 + (-1)^n)/2$. По теореме 11 слой T_ξ имеет требуемые свойства.



Рис. 1.5: Многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w) - \xi$ при $\xi \neq a_0$

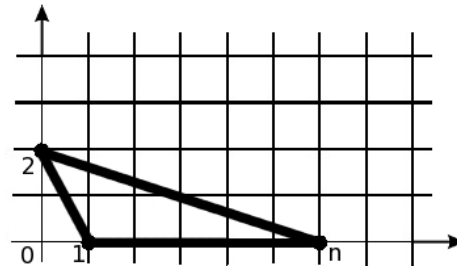


Рис. 1.6: Многоугольник Ньютона многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w) - \xi$ при $\xi = a_0$

Глава 2

Гамильтонова классификация систем с эллиптическим гамильтонианом степени 1,2,3,4

2.1 Основные понятия и утверждения

Определение 2.1.1. *Гамильтоновой системой* называется тройка (M^{2n}, ω, H) , где M^{2n} — гладкое многообразие, ω — симплектическая структура на M^{2n} , $H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая вещественнозначная функция, называемая гамильтонианом. Система называется *интегрируемой*, если существует набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, называемых *первыми интегралами*, такой что выполнены условия:

1) набор f_1, \dots, f_n функционально независим на M^{2n} , то есть df_1, \dots, df_n линейно независимы в каждой точке всюду плотного подмножества в M^{2n} , и $f_1 = H$;

2) при любых $i, j = 1, \dots, n$ f_i и f_j находятся в инволюции относительно симплектической структуры ω , то есть $\{f_i, f_j\} = \omega^{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^l} = 0$ в локальных

координатах x^1, \dots, x^n .

Определение 2.1.2. Векторным полем *косой градиент* функции $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется поле $\text{sgrad } f$, такое что для любой функции $g : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено соотношение $\{f, g\} = \text{sgrad } g(f)$. В локальных координатах x^1, \dots, x^n векторное поле $\text{sgrad } f$ имеет вид $(\text{sgrad } f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

С каждой гамильтоновой системой связано уравнение Гамильтона.

Определение 2.1.3. Уравнением Гамильтона гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) называется дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = \text{sgrad } H|_{x(t)}$, где $t \in I$ — параметр в некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Если гамильтонова система является интегрируемой и все решения уравнения Гамильтона существуют глобально, то есть допускают продолжение параметра t на \mathbb{R} , то система называется *интегрируемой по Лиувиллю* или *вполне интегрируемой*.

Описание невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем см. в [7].

Определение 2.1.4. Слой (или листом) интегрируемой гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) с первыми интегралами f_1, \dots, f_n называется компонента связности подмножества $\Gamma_{\xi_1, \dots, \xi_n} = \{x \in M^{2n} | f_1(x) = \xi_1, \dots, f_n(x) = \xi_n\}$. Слой $\Gamma_{\xi_1, \dots, \xi_n}$ называется *неособым*, если в каждой его точке df_1, \dots, df_n линейно независимы. Отображение $\Phi : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ называется *отображением момента*. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma_{f_1, \dots, f_n} \subset \mathbb{R}^n$ называется множество критических значений отображения момента.

Определение 2.1.5. Аналогично, комплексная \mathbb{C} -гамильтонова система $(M^{2n}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ и векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ определяются, когда на M^{2n} введена

комплексная структура, $\omega_{\mathbb{C}}$ — замкнутая, невырожденная комплекснозначная дифференциальная 2-форма на M^{2n} над \mathbb{C} , $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексно дифференцируемая функция.

Важный класс комплексных гамильтоновых систем. Пусть $M = \mathbb{C}^2(z, w)$. Рассмотрим четырехмерное многообразие $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и диффеоморфизм $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \mathbb{C}^2(z, w)$, $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (z, w)$. На \mathbb{R}^4 введем симплектическую структуру $\omega = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$, заметим, что $\omega = \operatorname{Re}(dz \wedge dw)$, также введем функцию $H = \operatorname{Re}(f(z, w)) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(z, w)$ — комплексный многочлен двух комплексных переменных. Согласно следующей лемме, гамильтонова система

$$(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2(z, w), \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w))) \quad (2.1.1)$$

имеет дополнительный первый интеграл $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$.

Лемма 2.1.6. *Если многочлен $f(z, w)$ отличен от константы на \mathbb{C}^2 , то гамильтонова система (2.1.1) является интегрируемой с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$, причем $\operatorname{sgrad} F = -i \operatorname{sgrad} H$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$.

Докажем, что F является первым интегралом системы (2.1.1). В координатах

$$x_1, y_1, x_2, y_2 \text{ имеем } \operatorname{sgrad} H = (-H_{x_2}, H_{y_2}, H_{x_1}, -H_{y_1}), \operatorname{sgrad} F = (-F_{x_2}, F_{y_2}, F_{x_1}, -F_{y_1}).$$

Поскольку $f(z, w) = H + iF$ — многочлен, имеют место условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} H_{x_1} = F_{y_1}, \\ H_{y_1} = -F_{x_1}, \\ H_{x_2} = F_{y_2}, \\ H_{y_2} = -F_{x_2}. \end{cases}$$

Отсюда $\text{sgrad } F = (H_{y_2}, H_{x_2}, -H_{y_1}, -H_{x_1}) = -i \text{sgrad } H$. Если H и F являются функционально зависимыми на непустом открытом подмножестве $D \subset \mathbb{R}^4$ с коэффициентами пропорциональности $\lambda, -\mu \in \mathbb{R}$, зависящими от точки на D , причем $\lambda \neq 0$, то $H_{x_1} = -\frac{\mu}{\lambda} F_{x_1} = \frac{\mu}{\lambda} H_{y_1} = -(\frac{\mu}{\lambda})^2 F_{y_1} = -(\frac{\mu}{\lambda})^2 H_{x_1}$ на D , откуда $\frac{\partial f(z,w)}{\partial z} = 0$ на D . Аналогично $\frac{\partial f(z,w)}{\partial w} = 0$ на D . Значит, $f(z, w)$ постоянна на D , противоречие.

Осталось доказать, что функции H и F находятся в инволюции относительно ω . Скобка Пуассона $\{H, F\}$ равна $\{H, F\} = H_{x_2} F_{x_1} - H_{x_1} F_{x_2} - H_{y_2} F_{y_1} + H_{y_1} F_{y_2} = -H_{x_2} H_{y_1} + H_{x_1} H_{y_2} - H_{y_2} H_{x_1} + H_{y_1} H_{x_2} = 0$. \square

Лемма 2.1.7. *Векторное поле $\text{sgrad } H$ совпадает с косым градиентом $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ комплекснозначной функции $f(z, w)$ относительно комплекснозначной симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ на $\mathbb{C}^2(z, w)$, то есть $\text{sgrad } H = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ (см. определение 2.1.5).*

Доказательство. Так как $\text{sgrad } H = (-H_{x_2}, H_{y_2}, H_{x_1}, -H_{y_1}) = (-H_{x_2}, -F_{x_2}, H_{x_1}, F_{x_1})$, то в переменных z, w выполнено $\text{sgrad } H = (-f_w, f_z) = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. \square

По лемме 2.1.7 уравнения Гамильтона систем $(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2, \text{Re}(\omega_{\mathbb{C}}), \text{Re } f)$ и $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ совпадают. Далее будем рассматривать только \mathbb{C} -гамильтоновы системы. Леммы 2.1.6 и 2.1.7 приводят к следующим определениям.

Определение 2.1.8. Две \mathbb{C} -гамильтоновы системы $(M_1, \omega_{\mathbb{C},1}, f_1)$ и $(M_2, \omega_{\mathbb{C},2}, f_2)$ назовем *гамильтоново эквивалентными*, если существует комплексно дифференцируемое отображение $h : M_1 \rightarrow M_2$ такое, что:

- 1) отображение h является диффеоморфизмом гладких многообразий;
- 2) выполнено соотношение $\omega_{\mathbb{C},1} = h^*(\omega_{\mathbb{C},2})$;
- 3) $f_1 = f_2 \circ h + \text{const}$.

Определение 2.1.9. Две динамические системы $(T_a, (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a})$ и $(T_b, (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b})$ на неособых слоях T_a и T_b , $a, b \in \mathbb{C}$, \mathbb{C} -гамильтоновой системы называют *сопряженными*, если существует комплексно дифференцируемое отображение $h : T_a \rightarrow T_b$ такое, что:

- 1) отображение h является диффеоморфизмом гладких многообразий;
- 2) выполнено соотношение $h_*((\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a}) = (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b}$;

и *почти сопряженными*, если:

- 2') выполнено соотношение $h_*((\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a}) = \lambda(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 2.1.10. Пусть $\dim_{\mathbb{C}} M^4 = 2$. Метрикой пополнения слоя T_{ξ} \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(M^4, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ назовем риманову метрику $g_{\xi} = \text{Sym}(\Delta_{\xi} \otimes \overline{\Delta}_{\xi})$, где 1-форма Δ_{ξ} над \mathbb{C} определена на слое с проколами $T_{\xi} \setminus C$ соотношением $\Delta_{\xi}(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_{\xi} \setminus C}) = 1$, где $C \subseteq M^4$ — множество критических точек функции f . На слое T_{ξ} определена функция расстояния $\rho_{\xi} : T_{\xi} \times T_{\xi} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, где для любых $x, y \in T_{\xi}$, $\rho_{\xi}(x, y)$ — точная нижняя грань длин всех кривых, лежащих в T_{ξ} и соединяющих точки x, y , в смысле метрики g_{ξ} , $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Если $x \in C$ и $x \neq y$, то будем полагать $\rho_{\xi}(x, y) = \rho_{\xi}(y, x) = \infty$.

Лемма 2.1.11. Для любого комплексного многочлена $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ степени $n \in \mathbb{N}$ и любого комплексного числа $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число

$R > 0$ такое, что на множестве $V_R := \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R^2$ многозначная функция $g = g(w) := \sqrt[n]{P_n(w) - \xi}$, имеет однозначную ветвь $g_0 : V_R \rightarrow \mathbb{C}$, которая является гомеоморфизмом на образ, где D_R^2 — открытый двумерный диск радиуса $R = R(\xi)$, причем R непрерывно зависит от ξ .

Доказательство. Пусть $P_n(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0$. Положим $u = u(x, \xi) := \frac{1}{a_n} (a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \dots + a_1 x^{n-1} + (a_0 - \xi) x^n)$, $x \in \mathbb{C}$. Так как $u(0, \xi) = 0$ и функция $u(x, \xi)$ непрерывна, существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi) > 0$ такое, что $|u(x, \xi)| < 1$ при $|x| < \varepsilon_0$. Положим $y(x) := \frac{x}{\sqrt[n]{a_n(1+u(x, \xi))^{1/n}}}$, $|x| < \varepsilon_0$, где число $\sqrt[n]{a_n}$ отвечает некоторой (произвольной) ветви функции $\sqrt[n]{}$, а функция $(1+u)^{1/n}$ определяется как сумма сходящегося ряда $1 + \frac{1}{n}u + \frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1)(\frac{1}{n} - 2)\frac{u^3}{3!} + \dots$ при $|u| < 1$. По построению функция $y = y(x)$ является аналитической в круге $|x| < \varepsilon_0$. Так как $y'(0) = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \neq 0$, существует $\varepsilon = \varepsilon(\xi) \leq \varepsilon_0(\xi)$ такое, что отображение $x \mapsto y(x)$, $|x| < \varepsilon$, является гомеоморфизмом на образ. Нетрудно показать, что числа $\varepsilon_0, \varepsilon$ могут быть выбраны непрерывно зависящими от ξ . Положим $R = R(\xi) := \frac{1}{\varepsilon}$, $g_0(w) := \frac{1}{y(1/w)} = w \sqrt[n]{a_n} (1 + u(\frac{1}{w}, \xi))^{1/n}$, $|w| > R$, тогда $(g_0(w))^n = P_n(w) - \xi$, то есть функция $g_0 = g_0(w)$ является ветвью функции $g = g(w)$. По доказанному функция g_0 является гомеоморфизмом области $|w| > R$ на образ. \square

Определение 2.1.12. Комплексный полиномиальный гамильтониан вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ будем также называть гиперэллиптическим гамильтонианом степени n (имеется в виду степень по w).

2.2 Гиперэллиптический гамильтониан степени один

Определение 2.2.1. \mathbb{C} -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени один называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$, $f(z, w) = az^2 + bw + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$ и $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$; обозначим эту гамильтонову систему через $\mathcal{H}_1(a, b, c)$.

Теорема 12 (Комплексные канонические координаты). *Каждая система $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” \mathbb{C} -гамильтоновой системе $(\mathbb{C}^2(p, q), dp \wedge dq, f_0(p, q) = p)$. Более того, имеется \mathbb{C} -симплектоморфизм h из $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}})$ в себя, задаваемый формулами $(z, w) \mapsto (f(z, w), -\frac{\bar{z}}{b}) = (az^2 + bw + c, -\frac{\bar{z}}{b}) =: (p, q)$, такой что в канонических комплексных координатах p, q функция Гамильтона и уравнения Гамильтона имеют вид $f \circ h^{-1}(p, q) = p$, $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 1$. В частности, функция Гамильтона $f_0 = f \circ h^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ сюръективна и не имеет критических точек.*

Доказательство. Отображение h является \mathbb{C} -симплектоморфизмом, поскольку h взаимно однозначно. Имеем $h^*(dp \wedge dq) = (2az dz + b dw) \wedge (-\frac{1}{b} dz) = dz \wedge dw = \omega_{\mathbb{C}}$, $h^*p = p \circ h = f$. □

Следствие 2.2.2. *Все \mathbb{C} -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ являются гамильтоново эквивалентными друг другу. Все слои \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ являются неособыми, \mathbb{C} -диффеоморфными \mathbb{C} , а ограничения на них системы являются сопряженными друг другу. Векторные поля $\text{sgrad } H = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $\text{sgrad } F = -i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ полны. Для любого слоя T_{ξ} существует комплексный диффеоморфизм $f_{\xi} : T_{\xi} \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексную плоскость, такой что $(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_{\xi}} = \frac{d}{df_{\xi}}$, где $\frac{d}{df_{\xi}} \in \text{Vect}(T_{\xi})$ — координатное*

векторное поле на слое T_ξ , отвечающее координатному диффеоморфизму f_ξ , то есть диффеоморфизм f_ξ выпрямляет интегральные траектории на T_ξ , изображенные на рис. 2.1.



Рис. 2.1: Интегральные траектории системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$

Следствие 2.2.3. *\mathbb{C} -гамильтонова система с гиперэллиптическим гамильтонианом степени один является вполне интегрируемой по Лиувиллю.*

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f , на каждом слое имеет одну неподвижную точку, а в комплексных координатах p, q из теоремы 12 имеет вид $(p, q) \mapsto (p, -q)$.

2.3 Гиперэллиптический гамильтониан степени два

Определение 2.3.1. *\mathbb{C} -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени два называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$ и $f(z, w) = az^2 + bw^2 + cw + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$; обозначим эту \mathbb{C} -гамильтонову систему через $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$.*

Теорема 13. *Две \mathbb{C} -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ и $\mathcal{H}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $a_1 b_1 = a_2 b_2$.*

Доказательство. Пусть $a_1b_1 = a_2b_2$, определим отображение $h : \mathbb{C}^2(z_1, w_1) \rightarrow \mathbb{C}^2(z_2, w_2)$ формулами $z_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}z_1$, $w_2 = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}(w_1 + \frac{c_1 - c_2\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}{2b_1})$. Тогда h — гамильтонова эквивалентность. Действительно, $f_2(z_2, w_2) = a_2z_2^2 + b_2w_2^2 + c_2w_2 + d_2 = a_1z_1^2 + b_1w_1^2 + c_1w_1 + \frac{(c_1 - c_2\sqrt{\frac{b_1}{b_2}})^2}{4b_1} + \frac{c_2(c_1 - c_2\sqrt{\frac{b_1}{b_2}})}{2\sqrt{b_1b_2}} + d_2 = f_1(z_1, w_1) + d_2 - d_1 + \frac{c_1^2 - c_2^2\frac{b_1}{b_2}}{4b_1}$, $h^*(\omega_{\mathbb{C},2}) = dz_2 \wedge dw_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}dz_1 \wedge dw_1 = \omega_{\mathbb{C},1}$ в силу $a_1b_1 = a_2b_2$ (для согласованных выборов ветвей обеих функций корень).

Обратно, пусть h — гамильтонова эквивалентность между $\mathcal{H}_2(a_1, 1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_2(a_2, 1, 0, 0)$, $\Pi_{j,\varepsilon} = \{(z, -\varepsilon\sqrt{-a_j}z) \mid z \in \mathbb{C}\}$, где $\varepsilon = \pm 1$, $j = 1, 2$. Тогда $\oint_{\gamma} \Delta_1 = \oint_{h \circ \gamma} \Delta_2$, где Δ_j — 1-форма над \mathbb{C} на особом слое $f_j^{-1}(0) = \Pi_{j,+} \cup \Pi_{j,-}$ без особой точки $(0, 0)$, двойственная векторному полю $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_j$, γ — замкнутый путь $\gamma(t) = (e^{2\pi it}, \sqrt{-a_1}e^{2\pi it})$, $t \in [0, 1]$. Так как $f_j^{-1}(0) = \Pi_{j,+} \cup \Pi_{j,-}$, где $\Pi_{j,+} \approx \Pi_{j,-} \approx \mathbb{C}$ и $\Pi_{j,+} \cap \Pi_{j,-} = \{(0, 0)\}$ и кривая γ простая и нестягиваемая в $f_1^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$, то $h \circ \gamma$ гомологична в $f_2^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ одной из кривых $\gamma_{\pm}(t) = (e^{2\pi it}, \pm\sqrt{a_2}e^{2\pi it})$, или полученных из них сменой ориентации. Отсюда и из $\Delta_j = \frac{1}{2a_j z} dw|_{f_j^{-1}(0) \setminus \{(0,0)\}}$ имеем $\oint_{\gamma} \Delta_1 = -\frac{\pi i}{\sqrt{-a_1}} = \pm \oint_{\gamma_{\pm}} \Delta_2 = \pm \frac{\pi i}{\sqrt{-a_2}}$, откуда $a_1 = a_2$. \square

Следствие 2.3.2. \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ с гиперэллиптическим гамильтонианом степени два гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” системе $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$, для $a = a_1b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Лемма 2.3.3. Существует ровно один особый слой $\Gamma_{d - \frac{c^2}{4b}}$. Он является объединением двух трансверсальных комплексных прямых $\{z = i\sqrt{\frac{b}{a}}(w + \frac{c}{2b})\}$ и $\{z = -i\sqrt{\frac{b}{a}}(w + \frac{c}{2b})\}$.

Доказательство. Сначала докажем лемму для \mathbb{C} -гамильтоновых систем $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$.

Векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (-2w, 2az)$, откуда равенство $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = 0$ равно-

сильно $z = w = 0$. Поэтому особый слой — это $T_0 = f^{-1}(0)$, трансверсальное пересечение двух комплексных прямых $\{z = \pm \frac{w}{\sqrt{a}}\}$.

Для произвольной \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ доказательство получается применением гамильтоновой эквивалентности из доказательства теоремы 13. \square

Теорема 14 (Комплексные координаты действие-угол вне особого слоя). *Векторные поля $\text{sgrad } H = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $\text{sgrad } F = -i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ полны. На дополнении к особому слою $V := T_{d - \frac{c^2}{4b}}$ система $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” \mathbb{C} -гамильтоновой системе $((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}))(p, q \bmod 2\pi)$, $dp \wedge dq$, $f_0(p, q \bmod 2\pi) = 2\sqrt{ab}p$. Более того, имеется \mathbb{C} -симплектоморфизм $h : (\mathbb{C}^2 \setminus V, \omega_{\mathbb{C}}) \rightarrow ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge dq)$, задаваемый каноническими комплексными координатами*

$$(p, q \bmod 2\pi) := \left(\frac{f(z, w) - (d - \frac{c^2}{4b})}{2\sqrt{ab}}, -i \ln \left(\sqrt{a}z + i\sqrt{b}(w + \frac{c}{2b}) \right) \bmod 2\pi \right).$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для \mathbb{C} -гамильтоновых систем $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$. Рассмотрим уравнения Гамильтона на некотором неособом слое T_{ξ} , $\xi \neq 0$:

$$\begin{cases} \dot{z} = -2w, \\ \dot{w} = 2az. \end{cases}$$

Решение имеет вид $(z(t), w(t)) = (Ce^{2\sqrt{-a}t} + De^{-2\sqrt{-a}t}, -\sqrt{-a}Ce^{2\sqrt{-a}t} + \sqrt{-a}De^{-2\sqrt{-a}t})$, где $C, D \in \mathbb{C}$ — константы, заданные начальной точкой траектории, $4aCD = \xi$. Поскольку решение определено данной формулой при любом $t \in \mathbb{C}$, то векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $-i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ полны.

Покажем, что h — вложение. Пусть $h(z, w) = (p, q \bmod 2\pi)$. Выразим (z, w) через $(p, q \bmod 2\pi)$: $z = \frac{e^{iq+2\sqrt{a}p}e^{-iq}}{2\sqrt{a}}$ и $w = \frac{e^{iq-2\sqrt{a}p}e^{-iq}}{2i}$.

Отображение h сюръективно, так как для любых $p \neq 0$ и $q \bmod 2\pi$ существует решение (z, w) уравнения $h(z, w) = (p, q \bmod 2\pi)$, выражающееся через $(p, q \bmod 2\pi)$ по вышеприведенным формулам.

Симплектическая структура $(h^{-1})^*(\omega_{\mathbb{C}}) = (h^{-1})^*(dz \wedge dw) = \frac{1}{4\sqrt{ai}}d(e^{iq} + 2\sqrt{a}pe^{-iq}) \wedge d(e^{iq} - 2\sqrt{a}pe^{-iq}) = dp \wedge dq$. Функция Гамильтона $h^*(2\sqrt{a}p) = 2\sqrt{a}p \circ h = f$.

Для произвольной \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ доказательство получается применением гамильтоновой эквивалентности из доказательства теоремы 13. \square

Следствие 2.3.4. *В канонических комплексных координатах $p, q \bmod 2\pi$ на дополнении к особому слою функция Гамильтона и уравнения Гамильтона имеют вид $f(p, q \bmod 2\pi) = 2\sqrt{ab}p$, $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 2\sqrt{ab}$. Ограничения \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2 = (a, b, c, d)$ на любые неособые слои сопряжены друг другу, и для любого неособого слоя T_ξ существует комплексный диффеоморфизм $f_\xi = f_\xi \bmod 2\pi : T_\xi \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ на цилиндр, такой что $(\text{sgrad}_{\mathbb{C}}f)|_{T_\xi} = 2\sqrt{ab}\frac{d}{df_\xi}$, где $\frac{d}{df_\xi} \in \text{Vect}(T_\xi)$ — координатное векторное поле на слое T_ξ , отвечающее координатному диффеоморфизму $f_\xi \bmod 2\pi$, то есть диффеоморфизм $f_\xi \bmod 2\pi$ выпрямляет интегральные траектории на T_ξ .*

На рис. 2.2 изображены неособый слой и интегральные траектории системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ на вложении слоя в \mathbb{R}^3 и соответствующей развертке в \mathbb{R}^2 .

Замечание 2.3.5. (А) Доказательство теоремы 14 показывает, что канонические координаты $p, q \bmod 2\pi$ продолжаются до канонических координат на дополнении к прямой $\Pi_+ = \{z = -i\sqrt{\frac{a}{b}}(w + \frac{c}{2b})\} \subset T_{d-\frac{c^2}{4b}}$, задающих гамиль-

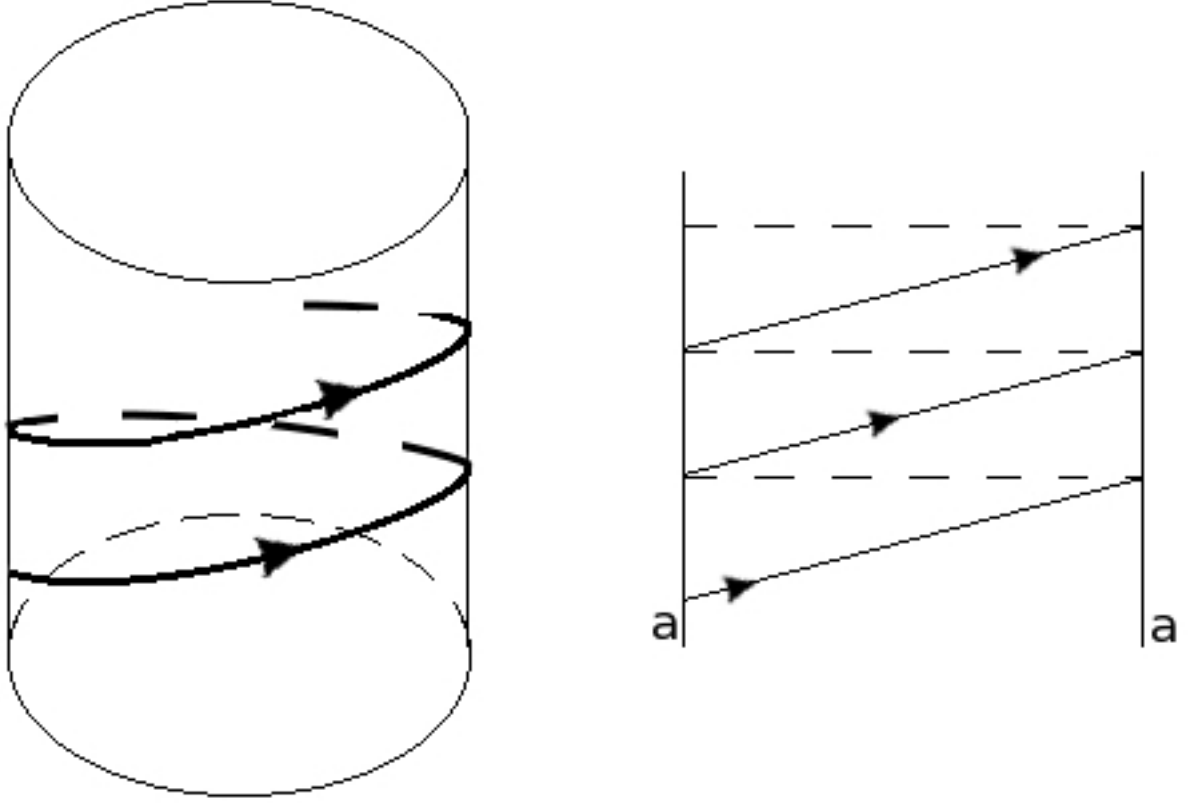


Рис. 2.2: Интегральные траектории системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$

тонову эквивалентность $h_- : (\mathbb{C}^2 \setminus \Pi_+, \omega_{\mathbb{C}}, f) \rightarrow (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge dq, 2\sqrt{ab}p)$.

Аналогично определим гамильтонову эквивалентность $h_+ : (\mathbb{C}^2 \setminus \Pi_-, \omega_{\mathbb{C}}, f) \rightarrow (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge d\hat{q}, 2\sqrt{ab}p)$ формулами

$$(p, \hat{q} \bmod 2\pi) := \left(\frac{f(z, w) - (d - \frac{c^2}{4b})}{2\sqrt{ab}}, i \ln \left(\sqrt{a}z - i\sqrt{b}(w + \frac{c}{2b}) \right) \bmod 2\pi \right).$$

Функция перехода $h_+ \circ h_-^{-1} : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ имеет вид $(p, q \bmod 2\pi) \mapsto (p, \hat{q} \bmod 2\pi) = (p, q + i \ln(2\sqrt{ab}p) \bmod 2\pi)$ и задает послойный автоморфизм тривиального расслоения $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, который послойно не гомотопен тождественному автоморфизму. Поэтому $h_-|_{\mathbb{C}^2 \setminus V}$ и $h_+|_{\mathbb{C}^2 \setminus V}$ определяют “топологически различные” тривиализации лагранжева слоения в $\mathbb{C}^2 \setminus V \approx (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ с базой $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(Б) В случае $a = b = 1/2, c = d = 0$ гиперплоскость $\mathbb{P}^3 := \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ инвариантна и является объединением “исчезающих циклов” (см. замечание 3.2.2) и особой точки $(0, 0)$. Здесь “исчезающий цикл” на неособом слое T_ξ — это образ периодической траектории $\gamma_\xi(t) := (\sqrt{r}e^{i\varphi/2} \cos t, \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, где $\xi = re^{i\varphi}$, $r > 0$. Он называется исчезающим, так как $\gamma_\xi(t) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} (0, 0)$ равномерно по $t \in [0, 2\pi]$. При гамильтоновой эквивалентности h_\pm исчезающий цикл γ_ξ переходит в $h_\pm(\gamma_\xi(t)) = (\xi, t \pm \frac{i}{2} \ln \frac{\xi}{2} \bmod 2\pi)$, $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому объединение $\mathbb{P}^3 \setminus \{(0, 0)\}$ исчезающих циклов переходит в $\{(re^{i\varphi}, \psi \pm \frac{i}{2} \ln \frac{r}{2} \bmod 2\pi) \mid r > 0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi \in S^1\} \approx \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$.

2.4 Гиперэллиптический гамильтониан степени три

Определение 2.4.1. \mathbb{C} -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени три называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$, $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ и $f(z, w) = az^2 + bw^3 + cw^2 + dw + e$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$. Обозначим эту систему через $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$. Систему $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ назовем невырожденной, если критическим точкам функции f соответствуют два различных критических значения (это равносильно условию $c^2 \neq 3bd$, то есть тому, что f — комплекснозначная функция Морса, см. доказательство теоремы 15).

Теорема 15. *Всякая невырожденная \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ для некоторых $r, s \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ невырождена при любых $r \neq 0, s \neq 0$. Две невырожденные \mathbb{C} -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_3(r_1, s_1, s_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_3(r_2, s_2, s_2, 0, 0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, ко-*

где $r_1 = r_2$ и $s_1 = \pm s_2$.

Доказательство. Пусть w_0 — критическая точка функции $bw^3 + cw^2 + dw + e$, тогда $f(z, w) = az^2 + b(w - w_0)^2(w - \alpha) + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq w_0$. Определим отображение $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой $h(z, w) = ((w_0 - \alpha)z, \frac{w - w_0}{w_0 - \alpha})$. Отображение h — искомая гамильтонова эквивалентность.

Особые точки p_1 и p_2 векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ системы $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ таковы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (0, -\frac{2}{3})$, откуда $f(p_1) = 0$ и $f(p_2) = -\frac{2}{9}s$. Выражение $f(p_1) \neq f(p_2)$ равносильно $s \neq 0$, что, согласно определению 2.4.1, выполнено.

Пусть между системами $\mathcal{H}_3(r_1, s_1, s_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_3(r_2, s_2, s_2, 0, 0)$ задана гамильтонова эквивалентность h . Заметим, что либо $h(p_{1,j}) = h(p_{2,j})$, либо $h(p_{1,j}) = h(p_{2,3-j})$, $j = 1, 2$, где $p_{i,1}, p_{i,2}$ — особые точки векторных полей $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i$, $i = 1, 2$. Поэтому h сохраняет разность критических значений: либо $f_1(p_{1,1}) - f_1(p_{1,2}) = f_2(p_{2,1}) - f_2(p_{2,2})$, либо $f_1(p_{1,1}) - f_1(p_{1,2}) = f_2(p_{2,2}) - f_2(p_{2,1})$, соответственно. Так как $p_{i,1} = (0, 0)$, $p_{i,2} = (0, -\frac{2}{3})$, то либо $s_1 = s_2$ и $h(p_{1,j}) = p_{2,j}$, либо $s_1 = -s_2$ и $h(p_{1,j}) = p_{2,3-j}$ соответственно.

Для получения равенства $r_1 = r_2$ рассмотрим линейный оператор $A_{i,j}$ в $T_{p_{i,j}}\mathbb{C}^2$ — оператор линеаризации векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i = (-s_i(3w + 2)w, 2r_i z)^T$ в точке $p_{i,j}$; в координатах z, w он задается матрицей

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & -2s_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{i,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2s_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\det A_{i,1} = 4r_i s_i$ и $\det A_{i,2} = -4r_i s_i$, $i = 1, 2$. Из доказанного выше следует, что $s_1 = \pm s_2$, причем при $s_1 = s_2$ имеем $h(p_{1,j}) = p_{2,j}$ и $A_{2,j} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j}$, откуда $\det A_{1,j} = \det A_{2,j}$, поэтому $r_1 = r_2$. При $s_1 = -s_2$ имеем $h(p_{1,j}) = p_{2,3-j}$ и $A_{2,3-j} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j}$, откуда $\det A_{1,j} = \det A_{2,3-j}$,

поэтому $r_1 = r_2$. □

Теорема 16. Пусть \overline{T}_ξ — пополнение произвольного (необязательно неособого) слоя T_ξ системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ относительно метрики пополнения g_ξ (точнее, относительно функции расстояния ρ_ξ , см. определение 2.1.10).

Тогда:

- 1) выполнено $\overline{T}_\xi = T_\xi \cup \{p_\xi\}$, где p_ξ — точка, называемая бесконечно удаленной;
- 2) если T_ξ — неособый слой, то существует гомеоморфизм $\overline{T}_\xi \approx \mathbb{T}^2$;
- 3) существует комплексная координата в окрестности бесконечно удаленной точки $p_\xi \in \overline{T}_\xi$ в \overline{T}_ξ , являющаяся \mathbb{C} -дифференцируемой в проколотой окрестности.

Доказательство использует две леммы, приведенные ниже.

Лемма 2.4.2. Для любого (не обязательно неособого) слоя T_ξ , $\xi \in \mathbb{C}$, существует такое покрытие пространства \mathbb{C}^2 замкнутыми подмножествами $U_{\xi,i} \subset \mathbb{C}^2$, гомеоморфными $\mathbb{C} \times \overline{D}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, что $U_{\xi,i} \subset U_{\xi,j}$ при $i < j$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\xi,i} = \mathbb{C}^2$ и для любого i выполнено $T_\xi \setminus U_{\xi,i} \approx D^2 \setminus \{*\}$, где D^2 — открытый двумерный диск.

Доказательство. Шаг 1. Согласно лемме 2.1.11, для любого $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число $r_0(\xi) > 0$ такое, что определена ветвь $\sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}$ $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, являющаяся гомеоморфизмом на образ, где $\overline{D}_{r_0}^2 \subset \mathbb{C}_w$ — замкнутый двумерный шар радиуса $r_0(\xi)$ с центром в 0. Положим $r_0 := r_0(\xi)$.

Определим отображение $h_\xi : \mathbb{C}_z \times (\mathbb{C}_w \setminus \overline{D}_{r_0}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой $h_\xi(z, w) = (\sqrt{az}, \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi})$, где фиксирована одна из ветвей у $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$.

Тогда h_ξ определено корректно и является гомеоморфизмом на образ, координатами на образе являются

$$\tilde{z} = \sqrt{az}, \quad \tilde{w} = \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}. \quad (2.4.1)$$

Положим $\tilde{r}_0 := \sqrt[3]{\max_{|w| \leq r_0} |bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi|}$. Докажем, что $U_{\xi,i} := (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \cup h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_i(\xi)}^2)$ — искомая последовательность, где $r_i = r_i(\xi) = \tilde{r}_0 + i$.

Рассмотрим отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}} : \mathbb{C}_{\tilde{z}, \tilde{w}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\text{Pr}_{\tilde{z}}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}$.

Шаг 2. Докажем, что $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i}) = \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)\frac{3}{2}}^2 \approx D^2 \setminus \{0\}$.

Покажем сначала, что $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i}) \subseteq \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)\frac{3}{2}}^2$. Пусть $\tilde{z}_0 \in \text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i})$, рассмотрим \tilde{w}_0 такое, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i})$, откуда $|\tilde{w}_0| > r_i$, а значит, $|\tilde{z}_0| > r_i^{\frac{3}{2}}$.

Обратно, пусть $\tilde{z}_0 \in \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i^{\frac{3}{2}}}^2$, тогда существует \tilde{w}_0 такое, что $\tilde{z}_0^2 + \tilde{w}_0^3 = 0$ и $|\tilde{w}_0| > r_i$. Все корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi = \tilde{w}_0^3$ различны и по модулю больше r_0 , откуда $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i})$ и отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i}}$ является неразветвленным трилистным накрытием с базой $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^{\frac{3}{2}}}^2 \approx D^2 \setminus \{*\}$.

Шаг 3. Докажем, что накрывающее пространство $h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i})$ связно. Рассмотрим поднятие $\tilde{\gamma}(t) = (r_i^{\frac{3}{2}} e^{\pi i t}, r_i^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi i t + \pi i}{3}})$ замкнутого пути $\gamma(t) = r_i^{\frac{3}{2}} e^{\pi i t}$, $0 \leq t \leq 6$, при накрытии $\text{Pr}_{\tilde{z}}|_{h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi,i})}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ — простой замкнутый путь, трилистно накрывающий простой замкнутый путь $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2$, откуда накрывающее пространство связно. \square

Лемма 2.4.3. *Выполнено соотношение $\rho_\xi(x, y) = o(1)$, где $R \rightarrow \infty$, $x, y \in \mathbb{T}_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3$, $\tilde{\omega}_{\mathbb{C}} = d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$ и $\tilde{\xi} = 0$, тогда $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \tilde{f} = -3\tilde{w}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + 2\tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}$ и $\tilde{\Delta}_0 = \frac{-3\tilde{w}^2 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w}}{9\tilde{w}^4 + 4\tilde{z}^2} \Big|_{T\tilde{\mathbb{T}}_0}$. Поскольку $\tilde{z}^2 + \tilde{w}^3 = 0$

на $\tilde{\Gamma}_0$, $-3\tilde{w}^2 d\tilde{z} + 2\tilde{z}d\tilde{w} = \frac{9\tilde{w}^4 d\tilde{w}}{2\tilde{z}} + 2\tilde{z}d\tilde{w} = \frac{9\tilde{w}^4 + 4\tilde{z}^2}{2\tilde{z}} d\tilde{w}$ на $\tilde{\Gamma}_0$, значит $\tilde{\Delta}_0 = \frac{d\tilde{w}}{2\tilde{z}}$, откуда $\tilde{g}_0 = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{z}|^2} = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{w}|^3}$.

Далее, пусть x_0 и y_0 такие, что $|x| = |x_0|$, $|y| = |y_0|$ и $x_0 = (iR_x^{3/2}, R_x)$, $y_0 = (iR_y^{3/2}, R_y)$ для некоторых $R_x > 0$ и $R_y > 0$. Согласно доказательству леммы 2.4.2, такие $x_0, y_0 \in \tilde{f}^{-1}(0) =: \tilde{V}$ существуют. Верно неравенство $\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \tilde{\rho}_0(x, x_0) + \tilde{\rho}_0(x_0, y_0) + \tilde{\rho}_0(y_0, y)$.

Оценим $\tilde{\rho}_0(x, x_0)$ и $\tilde{\rho}_0(y, y_0)$. Рассмотрим двулистное накрытие $p : \tilde{V} \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R^2$, $p(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{w}$, откуда $\tilde{\rho}_0(x, x_0) \leq \oint_{|\tilde{w}|=R_x} \frac{1}{\sqrt{4R_x^3}} |d\tilde{w}| = \frac{\pi}{\sqrt{R_x}}$. Аналогично $\tilde{\rho}_0(y, y_0) \leq \frac{\pi}{\sqrt{R_y}}$.

Оценим $\tilde{\rho}_0(x_0, y_0) = \left| \int_{R_x}^{R_y} \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{4\tilde{w}^3}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}}$. Отсюда $\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \frac{\pi}{\sqrt{R_x}} + \frac{1}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}} + \frac{\pi}{\sqrt{R_y}} \leq \frac{8}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}}$.

Согласно доказательству леммы 2.4.2, шаг 1, в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2)$ существует замена координат $h_\xi(z, w) = (\tilde{z}, \tilde{w}) = (\sqrt{a}z, \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi})$, откуда $(f - \xi) \circ h_\xi^{-1} = \tilde{f} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3$. Оценим Δ_ξ : имеем $(h_\xi|_{T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)})^* \tilde{\Delta}_0 = A_\xi \Delta_\xi$, где функция $A_\xi : T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}$ определена условием $A_\xi \omega_{\mathbb{C}} = h_\xi^* \tilde{\omega}_{\mathbb{C}}$. Так как $A_\xi = \sqrt{a} \frac{3bw^2 + 2cw + d}{3(bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi)^{2/3}} = A(1 + o(1))$ при $R \rightarrow \infty$, где $A = \sqrt{a} \sqrt[3]{b} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\rho_\xi < \frac{2}{|A|} \tilde{\rho}_0$. Осталось заметить, что $\frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} = O(\frac{1}{R})$ при $R \rightarrow \infty$. \square

Доказательство теоремы 16. Пункт 1 является прямым следствием лемм 2.4.2 и 2.4.3. Докажем пункты 2 и 3. Из лемм следует, что любой слой \overline{T}_ξ компактен. Рассмотрим отображение $p : \overline{T}_\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, где $p(z, w) = w$ — разветвленное двулистное сохраняющее ориентацию накрытие. Особыми значениями (то есть образами точек, в которых p не является локальным гомеоморфизмом) являются корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi = 0$ и бесконечно удаленная

точка. Согласно формуле Римана-Гурвица, имеем $\chi(\overline{T}_\xi) = 2\chi(\overline{\mathbb{C}}) - 4 = 0$, откуда \overline{T}_ξ гомеоморфно тору.

Введем координату u_ξ на слое \overline{T}_ξ в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки соотношением

$$\begin{cases} \tilde{z} = iu_\xi^{-3}, \\ \tilde{w} = u_\xi^{-2}, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

где $u_\xi : T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{\tilde{r}_0(\xi)}^2) \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)^{-\frac{1}{2}}}^2 \setminus \{0\}$. Продолжим диффеоморфизм u_ξ до гомеоморфизма $\bar{u}_\xi : \overline{T}_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{\tilde{r}_0(\xi)}^2) \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)^{-\frac{1}{2}}}^2$ в бесконечно удаленную точку соотношением $\bar{u}_\xi(p_\xi) = 0$. \square

Определение 2.4.4. \mathbb{C} -гамильтоновым пополнением \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$, обозначаемым $\overline{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$, назовем \mathbb{C} -гамильтонову систему $(M^4, \overline{\omega}_{\mathbb{C}}, \overline{f})$, где

- множество $M^4 = \bigcup_{\xi \in \mathbb{C}} \overline{T}_\xi := \{(\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{C}, x \in \overline{T}_\xi\}$ обладает структурой \mathbb{C} -гладкого многообразия, задаваемой следующим набором карт $U \approx V$, $U_{\xi_0} \approx V_{\xi_0}$, где $U, U_{\xi_0} \subset M^4$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, и функций перехода: карта $U \approx V := \mathbb{C}^2(z, w)$, семейство карт $U_{\xi_0} \approx V_{\xi_0} = \{(\xi, u) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u| < \varepsilon\}$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, где $\varepsilon = \varepsilon(\xi_0) > 0$, а функция перехода $\phi_{\xi_0} : V'_{\xi_0} \rightarrow V'$, где $V' := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |f(z, w) - \xi_0| < \varepsilon, (z, w) \in h_{f(z, w)}^{-1}(\mathbb{C}_{\tilde{z}} \times (\mathbb{C}_{\tilde{w}} \setminus \overline{D}_{\tilde{r}_0(f(z, w))}^2))\}$ и $V'_{\xi_0} := V_{\xi_0} \setminus \{(\xi, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\}$, определена с помощью преобразований (2.4.1) и (2.4.2): $(\xi, u) \mapsto (z, w) := h_\xi^{-1}(\tilde{z} = iu^{-3}, \tilde{w} = u^{-2})$;
- выполнено $\overline{\omega}_{\mathbb{C}}|_U = \varphi^* \omega_{\mathbb{C}}$ и $\overline{f}|_U = f \circ \varphi$, где $\varphi : U \rightarrow V$ — координатный гомеоморфизм для карты $U \approx V$.

Отметим, что по определению M^4 точки $p_{\xi_1} \neq p_{\xi_2}$ различны при $\xi_1 \neq \xi_2$. Далее будем отождествлять множество $\mathbb{C}^2 = V$ с открытым подмножеством $U \subset M^4$ при помощи координатного гомеоморфизма $\varphi : U \rightarrow V$.

Теорема 17 (Существование \mathbb{C} -гамильтонова пополнения). *Для любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ выполнены следующие свойства:*

1) для любого $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $\phi_{\xi_0} : V'_{\xi_0} \rightarrow V'$ инъективна и имеет всюду ненулевой якобиан;

2) на комплексном многообразии M^4 \mathbb{C} -дифференциальная 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ и функция Гамильтона \bar{f} определены корректно и являются аналитическими;

3) 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ невырождена, то есть всюду отлична от нуля на M^4 и является \mathbb{C} -симплектической структурой.

Таким образом, любая \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ имеет единственное \mathbb{C} -гамильтоново пополнение $(M^4, \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \bar{f})$.

Теорема 18. *Для любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ выполнены следующие свойства:*

1) критические точки функции \bar{f} содержатся в \mathbb{C}^2 и совпадают с критическими точками функции f ; $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ слой $\bar{\Gamma}_{\xi}$ \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\bar{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$ является неособым;

2) векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 и не имеют нулей вне точек $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$.

Доказательство теорем 17 и 18. Из доказательства леммы 2.4.2, шаг 1, и формулы (2.4.2) следует, что ϕ_{ξ_0} инъективно, и что в координатах $(\tilde{z}, \tilde{w}) :=$

$h_{\xi_0}(z, w)$ в $\mathbb{C}_{z,w}^2 \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ 2-форма $(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = B_{\xi_0} d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$, где функция $B_{\xi_0} = \frac{1}{A_{\xi_0} \circ h_{\xi_0}^{-1}}$ определена в области $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ определения (\tilde{z}, \tilde{w}) , $B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w}) \neq 0$ и $|B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w})|$ ограничен на области определения (\tilde{z}, \tilde{w}) .

Координаты $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ выражаются через (ξ, u) посредством отображения $h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0} : (\xi, u) \mapsto (\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0} \circ h_{\xi}^{-1}(iu^{-3}, u^{-2})$ так: $\phi_{\xi_0} : (\xi, u) \mapsto (z, w) = h_{\xi}^{-1}(iu^{-3}, u^{-2})$, $\tilde{z} = iu^{-3}$, $\tilde{w} = (\xi - \xi_0 + u^{-6})^{\frac{1}{3}}$, откуда $(h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})^* d\tilde{z} \wedge d\tilde{w} = i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-\frac{2}{3}} d\xi \wedge du$ и $\phi_{\xi_0}^* \omega_{\mathbb{C}} = (h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})^* (h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = i(B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-\frac{2}{3}} d\xi \wedge du$. Отсюда следует существование непрерывной и всюду невырожденной симплектической структуры $l_{\xi_0}(\xi, u) d\xi \wedge du$ на $V_{\xi_0} = \{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u| < \varepsilon\}$, совпадающей с $\varphi_{\xi_0}^* \omega_{\mathbb{C}}$ на $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u| < \varepsilon\}$, где $l_{\xi_0}(\xi, u) = i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-\frac{2}{3}} B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0}(\xi, u) = \frac{i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-\frac{2}{3}}}{A_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0}(\xi, u)}$ — ограниченная, всюду ненулевая функция, $l_{\xi_0}(\xi, 0) = \frac{i}{A} = \frac{i}{\sqrt{a^3 b}}$, см. доказательство леммы 2.4.3. Так как якобиан функции перехода ϕ_{ξ_0} равен $l_{\xi_0}(\xi, u)$, он всюду отличен от нуля.

Функция Гамильтона $f \circ h_{\xi_0}^{-1}$ в области $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_{\xi}| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^2(\tilde{z}, \tilde{w})$ имеет вид $f \circ h_{\xi_0}^{-1} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3 + \xi_0$, $f \circ \phi_{\xi_0} = \xi$, поэтому в координатах (ξ, u) функция f имеет вид $f = \xi$, значит \bar{f} корректно определена, является аналитической и не имеет критических точек в $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$.

Теорема 17 и теорема 18, пункт 1), доказаны.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ в координатах (ξ, u) , $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (0, \frac{1}{l_{\xi_0}(\xi, u)}) = \frac{1}{l_{\xi_0}(\xi, u)} \frac{\partial}{\partial u}$, откуда векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ не имеет нулей на $\overline{T}_{\xi} \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0}^2)$.

Векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 , будучи гладкими векторными полями на каждом инвариантном компактном подмножестве $M_{\mathbb{C}}^4 :=$

$\bigcup_{|\xi| \leq C} \bar{T}_\xi \subset M^4$, содержащем все особые слои, где $C > 0$ — любая константа, превосходящая $\max\{|f(p_1)|, |f(p_2)|\}$. \square

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ рассмотрим в абелевой группе $(\mathbb{C}, +)$ подгруппы $2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ и $2\pi\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Так как числа $2\pi, \lambda \in \mathbb{C}$ линейно независимы над \mathbb{R} , то фактор-пространство $\mathbb{T}_\lambda^2 := \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})$ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Следствие 2.4.5 (Координаты действие-угол для пополненной системы).
Для \mathbb{C} -гамильтонова пополнения $\overline{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$ любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны. Для любого неособого слоя \bar{T}_ξ существуют числа $\lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\omega_\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и комплексный диффеоморфизм $f_\xi = f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi)) : \bar{T}_\xi \rightarrow \mathbb{T}_{\lambda(\xi)}^2 = \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z})$ на двумерный тор, такие что $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}|_{\bar{T}_\xi} = \omega_\xi \frac{d}{df_\xi}$, где $\frac{d}{df_\xi} \in \text{Vect}(\bar{T}_\xi)$ — координатное векторное поле на слое \bar{T}_ξ , отвечающее координатному диффеоморфизму $f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$, то есть диффеоморфизм $f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$ выпрямляет интегральные траектории на \bar{T}_ξ . Вещественные канонические координаты действие-угол для пополненной системы $\overline{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$ определены (неоднозначным образом) в малой окрестности любого неособого слоя в M^4 .

Доказательство. Полнота векторных полей доказана в теореме 18, пункт 2). Согласно теореме 16, пункт 2), и доказательству вещественной теоремы Лиувилля для гамильтоновой системы $(M^4, \text{Re } \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \text{Re } \bar{f})$ с дополнительным интегралом $\text{Im } \bar{f}$ (см. лемму 2.1.6), слой \bar{T}_ξ гомеоморфен двумерному тору, при этом определено транзитивное и локально свободное \mathbb{C} -дифференцируемое

действие $\rho_\xi : \mathbb{C} \times \overline{T}_\xi \rightarrow \overline{T}_\xi$ плоскости \mathbb{C} на слое \overline{T}_ξ сдвигами вдоль интегральных траекторий векторных полей $c \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} \overline{f}$, $c \in \mathbb{C}$, за время 1. Стабилизатор точки для этого действия не зависит от точки и является решеткой в \mathbb{C} вида $\lambda_1(\xi)\mathbb{Z} + \lambda_2(\xi)\mathbb{Z}$, где числа $\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi) \in \mathbb{C}$ линейно независимы над \mathbb{R} . Поэтому для любой точки $P_\xi \in \overline{T}_\xi$ \mathbb{C} -дифференцируемое отображение $(\rho_\xi|_{\mathbb{C} \times \{P_\xi\}}) \circ \mu_\xi$ индуцирует \mathbb{C} -диффеоморфизм $j_\xi : \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z}) \rightarrow \overline{T}_\xi$, где $\mu_\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — оператор умножения на $\frac{2\pi}{\lambda_1(\xi)}$, $\lambda(\xi) := 2\pi \frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_1(\xi)}$. В качестве координаты $f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$ возьмем обратный диффеоморфизм $j_\xi^{-1} := f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$. Тогда $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} \overline{f}|_{\overline{T}_\xi} = \frac{\lambda_1(\xi)}{2\pi} \frac{d}{df_\xi} = \omega_\xi \frac{d}{df_\xi}$, где $\omega_\xi := \frac{\lambda_1(\xi)}{2\pi}$.

Существование вещественных координат действие-угол для пополненной системы следует, в силу теоремы Лиувилля, из существования пополненной системы (см. теорему 17) и компактности слоев $\overline{T}_\xi \subset M^4$ (см. теорему 16). \square

Аналогично доказательству следствия 2.4.5 рассматривается \mathbb{R} -линейный оператор $\mu_\xi^{\mathbb{R}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенный на базисе формулами $\mu_\xi^{\mathbb{R}}(\lambda_1(\xi)) = (2\pi, 0)$ и $\mu_\xi^{\mathbb{R}}(\lambda_2(\xi)) = (0, 2\pi)$. Тогда отображение $(\rho_\xi|_{\mathbb{C} \times \{P_\xi\}}) \circ \mu_\xi^{\mathbb{R}}$ индуцирует \mathbb{R} -диффеоморфизм $j_\xi^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2 \rightarrow \overline{T}_\xi$. Положим $\varphi_\xi \bmod 2\pi := (j_\xi^{\mathbb{R}})^{-1} : \overline{T}_\xi \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 =: \mathbb{T}^2$. С помощью этого строятся (см. доказательство теоремы Лиувилля) вещественные канонические координаты действие-угол

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) : \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow D^2 \times \mathbb{T}^2 \quad (2.4.3)$$

для “пополнения” $(M^4, \operatorname{Re} \overline{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \overline{f})$ гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$ с дополнительным первым интегралом $\operatorname{Im} f$, определенные в малой окрестности $\tilde{U}_{\xi_0} = \bigcup_{|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}} \overline{T}_\xi \subset M^4$ любого неособого слоя \overline{T}_{ξ_0} и принимающие значения в области $D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ — область, гомеоморфная открытому

кругу, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\xi_0) > 0$ — достаточно малое число. Покажем, что значение переменных угол на множестве бесконечно удаленных точек $p_\xi \in \tilde{U}_{\xi_0}$ может быть выбрано равным $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_\xi) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_\xi) = 0 \bmod 2\pi$. Тем самым интегральные траектории системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ изображены на рис. 2.3.

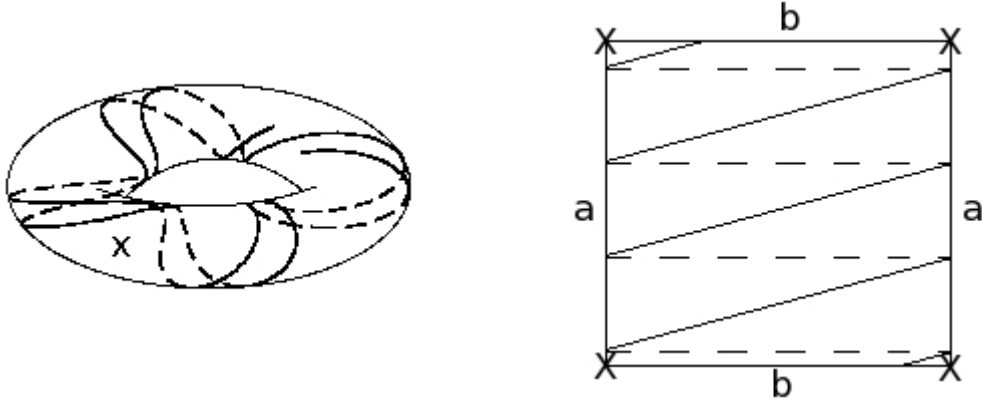


Рис. 2.3: Интегральные траектории системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$

Следствие 2.4.6 (Вещественные координаты действие-угол для исходной системы). *Вещественные координаты действие-угол $I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi$ в окрестности \tilde{U}_{ξ_0} неособого слоя \bar{T}_{ξ_0} в M^4 для “пополненной” системы $(M^4, \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \bar{f})$ могут быть выбраны таким образом, что их ограничение на $\mathbb{C}^2 \cap \tilde{U}_{\xi_0}$ задает вещественные канонические координаты в окрестности слоя T_{ξ_0} для гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$, принимающие значения в области $D^2 \times (\mathbb{T}^2 \setminus \{(0, 0) \bmod 2\pi\})$. При этом в указанной окрестности первые интегралы $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются функциями от I_1, I_2 .*

Доказательство. Рассмотрим поверхность $\Lambda := \{p_\xi \mid \xi \in \mathbb{C}\} = M^4 \setminus \mathbb{C}^2$, состоящую из бесконечно удаленных точек. Пусть $v \in T_{p_\xi} \Lambda$, $v \neq 0$, тогда пара (v, iv) — базис в $T_{p_\xi} \Lambda$. Симплектическая структура $\omega(v, iv) = \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}(v, iv) =$

0, откуда Λ — лагранжева поверхность в M^4 . Отсюда следует, что переменные угол можно выбрать (для заданных переменных действие) таким образом, что $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_\xi) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_\xi) = 0 \bmod 2\pi$, $|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}$. \square

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f и на каждом неособом слое \overline{T}_ξ имеет четыре неподвижные точки, включая бесконечно удаленную точку p_ξ . В координатах (ξ, u) из определения 2.4.4 эта инволюция имеет вид $(\xi, u) \mapsto (\xi, -u)$, см. (2.4.1) и (2.4.2). В вещественных координатах действие-угол из следствия 2.4.6 инволюция имеет вид $(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) \mapsto (I_1, I_2, -\varphi_1 \bmod 2\pi, -\varphi_2 \bmod 2\pi)$.

Следствие 2.4.7. *Для \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ в окрестности U_{ξ_0} неособого слоя $T_{\xi_0} \subset U_{\xi_0}$, $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$, значения координат действие (I_1, I_2) на слое $T_\xi \subset U_{\xi_0}$ могут быть вычислены по формулам:*

$$I_\ell(T_\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\gamma_{\xi, \ell}} z_\xi(w) dw, \quad \ell = 1, 2,$$

где $z_\xi(w) = \sqrt{\frac{\xi - bw^3 - cw^2 - dw - e}{a}}$ — одна из двух ветвей, непрерывно зависящая от ξ , $\gamma_{\xi, 1}, \gamma_{\xi, 2} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — простые пути, ведущие из $w_{\xi, 1}$ в $w_{\xi, 3}$ и из $w_{\xi, 2}$ в $w_{\xi, 3}$ соответственно, пересекающиеся только в конечной точке $w_{\xi, 3}$ и непрерывно зависящие от ξ , $w_{\xi, m}$, $m = 1, 2, 3$ — корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e = \xi$, непрерывно зависящие от ξ . Переменная действия I_ℓ отвечает циклу на T_ξ , полученному последовательному прохождению пути $(z_\xi(\gamma_{\xi, \ell}(t)), \gamma_{\xi, \ell}(t))$, $t \in [0, 1]$, и пути $(-z_\xi(\gamma_{\xi, \ell}(1-t)), \gamma_{\xi, \ell}(1-t))$, $t \in [0, 1]$, $\ell = 1, 2$.

2.5 Гиперэллиптический гамильтониан степени четыре

Определение 2.5.1. \mathbb{C} -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени четыре называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$, $f(z, w) = az^2 + bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k$, $a, b, c, d, e, k \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$ и $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$. Обозначим эту систему через $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$. Систему $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ назовем невырожденной, если функция f имеет ровно три различных критических значения (это равносильно тому, что f — комплекснозначная простая функция Морса, см. лемму 2.5.2 ниже).

Лемма 2.5.2. *Всякая \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$, $r, s, p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$, имеет не более трех особых слоев $\Gamma_{f(0, t_j)}$, $j = 1, 2, 3$, некоторые из которых могут совпадать, где $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{-3(p+1) - \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}}{8}$, $t_3 = \frac{-3(p+1) + \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}}{8}$. \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0, 0)$ невырождена тогда и только тогда, когда $rs \neq 0$ и $p \notin \{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\}$. Для любого $j \in \{1, 2, 3\}$ существует \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), s_1 p_1, 0, 0)$, гамильтоново эквивалентная $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$ с гамильтоновой эквивалентностью h_j такой, что $h_j(0, t_j) = (0, 0)$.*

Доказательство. Положим $q = \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}$ для произвольной ветви $\sqrt{\quad}$. Особые слои системы отвечают значениям $f(p_j)$, $j = 1, 2, 3$, где $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (0, t_2)$, $p_3 = (0, t_3)$, где $t_2 = \frac{-3(p+1) - q}{8}$, $t_3 = \frac{-3(p+1) + q}{8}$. Так как $f(z, w) = rz^2 + sw^2(w+1)(w+p)$, то $f(0, t_2) = s \frac{(q+3p+3)^2(-q+5p-3)(q+3p-5)}{2^{12}}$ и $f(0, t_3) = s \frac{(q-3p-3)^2(q+5p-3)(-q+3p-5)}{2^{12}}$. Невырожденность системы означает, что значения $f(p_j)$, $j = 1, 2, 3$ попарно различны. Вычисления показывают, что последнее условие равносильно тому, что $p \notin \{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\}$. Рассмотрим три

канонических преобразования: $h_1 : (z, w) \mapsto (z, w)$,

$h_2 : (z, w) \mapsto \left(\frac{z-t_2}{-\alpha}, -\alpha w\right)$, где $\alpha = \frac{1}{8}(7+9p^2+q+3pq+2\sqrt{2}\sqrt{5-6p+5p^2+q+pq})$,

$h_3 : (z, w) \mapsto \left(\frac{z-t_3}{-\alpha}, -\alpha w\right)$, где $\alpha = \frac{1}{8}(7+9p^2+q+3pq-2\sqrt{2}\sqrt{5-6p+5p^2+q+pq})$.

Данные преобразования удовлетворяют требованиям леммы. \square

Теорема 19. *Всякая невырожденная \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$ для некоторых $r, s, p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$, $p \notin \{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\}$. Две невырожденные \mathbb{C} -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), p_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_4(r_2, s_2, s_2(p_2+1), s_2p_2, 0, 0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ и $p_1 = p_2$, либо $r_1 = \frac{r_2}{p_2^2}$, $s_1 = s_2p_2^4$ и $p_1 = \frac{1}{p_2}$, при условии того, что образ особой точки $(0, 0)$ относительно гамильтоновой эквивалентности равен $(0, 0)$.*

Доказательство. Пусть w_1 — критическая точка функции $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k$, тогда $f(z, w) = az^2 + b(w - w_1)^2(w - \alpha)(w - \beta) + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \neq w_1$ и $\alpha \neq \beta$, $f(0, w_2) \neq f(0, w_3)$, где w_2 и w_3 — две другие критические точки функции $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k$. Определим отображение $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой $h : (z, w) \mapsto (z(w_1 - \alpha), \frac{w-w_1}{w_1-\alpha})$. Отображение h — искомая эквивалентность для $r = \frac{a}{(w_1-\alpha)^2}$, $s = b(w_1 - \alpha)^4$, $p = \frac{w_1-\beta}{w_1-\alpha}$.

Пусть между системами $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), s_1p_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_4(r_2, s_2, s_2(p_2+1), s_2p_2, 0, 0)$ задана гамильтонова эквивалентность h . Особые слои систем отвечают значениям $f_i(p_{i,j})$, $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3$, где $p_{i,1} = (0, 0)$, $p_{i,2} = (0, t_{i,2})$, $p_{i,3} = (0, t_{i,3})$, где $t_{i,2} = \frac{-3(p_i+1)-q_i}{8}$, $t_{i,3} = \frac{-3(p_i+1)+q_i}{8}$, $i = 1, 2$, где q_i определено как в доказательстве леммы 2.5.2. Так как $f_i(z, w) = r_i z^2 + s_i w^2(w+1)(w+p_i)$, то $f_i(0, t_{i,2}) = s_i \frac{(q_i+3p_i+3)^2(-q_i+5p_i-3)(q_i+3p_i-5)}{2^{12}}$ и $f_i(0, t_{i,3}) = s_i \frac{(q_i-3p_i-3)^2(q_i+5p_i-3)(-q_i+3p_i-5)}{2^{12}}$.

Рассмотрим линейный оператор $A_{i,j}$ в $T_{p_{i,j}}\mathbb{C}^2$ — оператор линеаризации векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i = (-s_i(4w^3 + 3(p_i + 1)w^2 + 2p_i w), 2r_i z)^T$ в точке $p_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$; в координатах z, w он задается матрицей

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & -2s_i p_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}, A_{i,2} = \begin{pmatrix} 0 & -s_i q_i \frac{q_i + 3 + 3p_i}{8} \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}, A_{i,3} = \begin{pmatrix} 0 & -s_i q_i \frac{q_i - 3 - 3p_i}{8} \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\det A_{i,1} = 4r_i s_i p_i$, $\det A_{i,2} = r_i s_i q_i \frac{q_i + 3 + 3p_i}{4}$ и $\det A_{i,3} = r_i s_i q_i \frac{q_i - 3 - 3p_i}{4}$, где $i = 1, 2$.

Пусть при отображении h выполнено $h(p_{1,j}) = p_{2,\sigma(j)}$, где $j = 1, 2, 3$ и $\sigma \in S_3$ — некоторая перестановка. Имеем $A_{2,\sigma(j)} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j}$, поэтому $\det A_{1,j} = \det A_{2,\sigma(j)}$, и $f_1(p_{1,k}) - f_1(p_{1,l}) = f_2(p_{2,\sigma(k)}) - f_2(p_{2,\sigma(l)})$, где $j, k, l = 1, 2, 3$. Отсюда получаем систему уравнений на величины $r_2, s_2, p_2, \sigma \in S_3$ при заданных r_1, s_1, p_1 , вытекающую из гамильтоновой эквивалентности. Эта система имеет ровно два различных решения со свойством $\sigma(1) = 1$, а именно решение $r_2 = r_1, s_2 = s_1, p_2 = p_1, \sigma = \text{id}$, и решение $r_2 = \frac{r_1}{p_1^2}, s_2 = s_1 p_1^4, p_2 = \frac{1}{p_1}, \sigma = (23)$.

Решение $r_2 = r_1, s_2 = s_1, p_2 = p_1, \sigma = \text{id}$ соответствует гамильтоновой эквивалентности $(z_1, w_1) \mapsto (z_1, w_1) = (z_2, w_2)$, а решение $r_2 = \frac{r_1}{p_1^2}, s_2 = s_1 p_1^4, p_2 = \frac{1}{p_1}, \sigma = (23)$ соответствует гамильтоновой эквивалентности $(z_1, w_1) \mapsto (p_1 z_1, \frac{w_1}{p_1}) = (z_2, w_2)$. \square

Теорема 20. Пусть \bar{T}_ξ — пополнение произвольного (необязательно неособого) слоя T_ξ системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ относительно метрики пополнения g_ξ (точнее, относительно функции расстояния ρ_ξ , см. определение 2.1.10).

Тогда:

- 1) выполнено $\bar{T}_\xi = T_\xi \cup \{p_{\xi,1}, p_{\xi,2}\}$, где $p_{\xi,1}, p_{\xi,2}$ — две точки, называемые

бесконечно удаленными;

2) если T_ξ — неособый слой, то существует гомеоморфизм $\overline{T}_\xi \approx \mathbb{T}^2$;

3) существует комплексная координата в окрестности каждой из бесконечно удаленных точек $p_{\xi,j} \in \overline{T}_\xi$, $j = 1, 2$ в \overline{T}_ξ , являющаяся \mathbb{C} -дифференцируемой в проколотой окрестности.

Доказательство использует две леммы, аналогичные леммам 2.4.2 и 2.4.3 и приведенные ниже.

Лемма 2.5.3. Для любого (не обязательно неособого) слоя T_ξ , $\xi \in \mathbb{C}$, существует такое покрытие пространства \mathbb{C}^2 замкнутыми подмножествами $U_{\xi,i} \subset \mathbb{C}^2$, гомеоморфными $\mathbb{C} \times \overline{D}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, что $U_{\xi,i} \subset U_{\xi,j}$ при $i < j$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\xi,i} = \mathbb{C}^2$, и для любого i выполнено $T_\xi \setminus U_{\xi,i} \approx (D^2 \setminus \{*\}) \sqcup (D^2 \setminus \{*\})$, где D^2 — открытый двумерный диск.

Доказательство. Шаг 1. Согласно лемме 2.1.11, для любого $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число $r_0(\xi) > 0$ такое, что определена ветвь $\sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi}$ $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, являющаяся гомеоморфизмом на образ, где $\overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \subset \mathbb{C}_w$ — замкнутый двумерный шар радиуса $r_0(\xi)$ с центром в 0. Положим $r_0 := r_0(\xi)$.

Определим отображение $h_\xi : \mathbb{C}_z \times (\mathbb{C}_w \setminus \overline{D}_{r_0}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой $h_\xi(z, w) = (\sqrt{az}, \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi})$, где фиксирована одна из ветвей у $\sqrt{\quad}$ и $\sqrt[4]{\quad}$. Тогда h_ξ определено корректно и является гомеоморфизмом на образ, координатами на образе являются

$$\tilde{z} = \sqrt{az}, \quad \tilde{w} = \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi}. \quad (2.5.1)$$

Положим $\tilde{r}_0 := \sqrt[4]{\max_{|w| \leq r_0} |bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi|}$. Докажем, что $U_{\xi,i} :=$

$(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \cup h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_i(\xi)}^2)$ — искомая последовательность, где $r_i = r_i(\xi) = \tilde{r}_0 + i$. Рассмотрим отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}} : \mathbb{C}_{\tilde{z}, \tilde{w}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\text{Pr}_{\tilde{z}}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}$.

Шаг 2. Докажем, что $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i}) = \mathbb{C}_z \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)^2}^2 \approx D^2 \setminus \{0\}$.

Покажем сначала, что $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i}) \subseteq \mathbb{C}_z \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)^2}^2$. Пусть $\tilde{z}_0 \in (\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i}})$, рассмотрим \tilde{w}_0 такое, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i})$, откуда $|\tilde{w}_0| > r_i$, а значит, $|\tilde{z}_0| > r_i^2$.

Обратно, пусть $\tilde{z}_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^2}^2$, тогда существует \tilde{w}_0 такое, что $\tilde{z}_0^2 + \tilde{w}_0^4 = 0$ и $|\tilde{w}_0| > r_i$. Все корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi = \tilde{w}_0^4$ различны и по модулю больше r_0 , откуда $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i})$ и отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}_0} \circ h_\xi|_{\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i}}$ является неразветвленным четырехлистным накрытием с базой $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^2}^2 \approx D^2 \setminus \{*\}$.

Шаг 3. Докажем, что накрывающее пространство имеет две компоненты связности. Рассмотрим два поднятия $\tilde{\gamma}_\pm(t) = (r_i^2 e^{\pi i t}, r_i e^{\frac{2\pi i t + \pi}{4}})$ замкнутого пути $\gamma(t) = r_i^2 e^{\pi i t}$, $0 \leq t \leq 4$, при накрытии $\text{Pr}_{\tilde{z}}|_{h_\xi(\mathbb{T}_\xi \setminus U_{\xi, i})}$. Тогда каждый из $\tilde{\gamma}_\pm$ — простой замкнутый путь, двулистно накрывающий простой замкнутый путь $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2$, откуда накрывающее пространство имеет две компоненты связности. \square

Лемма 2.5.4. *Выполнено соотношение $\rho_\xi(x, y) = o(1)$, где $R \rightarrow \infty$, $x, y \in \mathbb{T}_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$ и x, y лежат в одной компоненте связности $\mathbb{T}_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4$, $\tilde{\omega}_{\mathbb{C}} = d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$ и $\tilde{\xi} = 0$, тогда $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \tilde{f} = -4\tilde{w}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + 2\tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}$ и $\tilde{\Delta}_0 = \frac{-4\tilde{w}^3 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w}}{16\tilde{w}^6 + 4\tilde{z}^2} |_{T\tilde{\mathbb{T}}_0}$. Поскольку $\tilde{z}^2 + \tilde{w}^4 = 0$ на $\tilde{\mathbb{T}}_0 = \tilde{f}^{-1}(0)$, $-4\tilde{w}^3 dz + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{16\tilde{w}^6 d\tilde{w}}{2\tilde{z}} + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{16\tilde{w}^6 + 4\tilde{z}^2}{2\tilde{z}} d\tilde{w}$ на $\tilde{\mathbb{T}}_0$, значит $\tilde{\Delta}_0 = \frac{d\tilde{w}}{2\tilde{z}}$, откуда $\tilde{g}_0 = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{z}|^2} = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{w}|^4}$.

Далее, пусть x_0 и y_0 такие, что $|x| = |x_0|$, $|y| = |y_0|$ и $x_0 = (iR_x^2, R_x)$,

$y_0 = (iR_y^2, R_y)$ для некоторых $R_x > 0$ и $R_y > 0$. Согласно доказательству леммы 2.5.3, такие $x_0, y_0 \in \tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{T}_0$, лежащие в одной компоненте связности $\tilde{T}_0 \setminus (\mathbb{C} \times D_R^2)$, существуют. Пусть $\tilde{T}_0 \setminus (\mathbb{C} \times D_R^2) = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$ и $x_0, y_0 \in \tilde{V}_1$. Верно неравенство $\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \tilde{\rho}_0(x, x_0) + \tilde{\rho}_0(x_0, y_0) + \tilde{\rho}_0(y_0, y)$.

Оценим $\tilde{\rho}_0(x, x_0)$ и $\tilde{\rho}_0(y, y_0)$. Рассмотрим двулистное накрытие $p : \tilde{V}_1 \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}$, $p(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{w}$, откуда $\tilde{\rho}_0(x, x_0) \leq \oint_{|\tilde{w}|=R_x} \frac{1}{\sqrt{4R_x^4}} |d\tilde{w}| = \frac{\pi}{R_x}$. Аналогично $\tilde{\rho}_0(y, y_0) \leq \frac{\pi}{R_y}$.

Оценим $\rho_\xi(x_0, y_0) \leq \left| \int_{R_x}^{R_y} \frac{dw}{\sqrt{4w^3}} \right| \leq \frac{1}{\min\{R_x, R_y\}}$. Откуда $\rho_\xi(x, y) \leq \frac{\pi}{R_x} + \frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} + \frac{\pi}{R_y} \leq \frac{8}{\min\{R_x, R_y\}}$.

Согласно доказательству леммы 2.5.3, шаг 1, в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2)$ существует замена координат $h_\xi(z, w) = (\tilde{z}, \tilde{w}) = (\sqrt{a}z, \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi})$, откуда $(f - \xi) \circ h_\xi^{-1} = \tilde{f} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4$. Оценим Δ_ξ : имеем $(h_\xi|_{T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)})^* \tilde{\Delta}_0 = A_\xi \Delta_\xi$, где функция $A_\xi : T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}$ определена условием $A_\xi \omega_{\mathbb{C}} = h_\xi^* \tilde{\omega}_{\mathbb{C}}$. Так как $A_\xi = \sqrt{a} \frac{4bw^3 + 3cw^2 + 2dw + e}{4(bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi)^{\frac{3}{4}}} = A(1 + o(1))$ при $R \rightarrow \infty$, где $A = \sqrt{a} \sqrt[4]{b} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\rho_\xi < \frac{2}{|A|} \tilde{\rho}_0$. Осталось заметить, что $\frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} = O(\frac{1}{R})$ при $R \rightarrow \infty$. \square

Доказательство теоремы 20. Пункт 1 является прямым следствием лемм 2.5.3 и 2.5.4. Докажем пункты 2 и 3. Из лемм следует, что любой слой \overline{T}_ξ компактен. Рассмотрим отображение $p : \overline{T}_\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, где $p(z, w) = w$ — разветвленное двулистное сохраняющее ориентацию накрытие. Особыми значениями (то есть образами точек в которых p не является локальным гомеоморфизмом) являются корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi = 0$. Бесконечно удаленная точка не является точкой ветвления, так как имеет ровно два прообраза. Так как существует хотя бы одна точка ветвления, накры-

вающее пространство \overline{T}_ξ связно. Согласно формуле Римана-Гурвица имеем $\chi(\overline{T}_\xi) = 2\chi(\overline{\mathbb{C}}) - 4 = 0$, откуда \overline{T}_ξ гомеоморфно тору.

Введем координату $u_{\xi,j}$ на слое \overline{T}_ξ в проколотовой окрестности бесконечно удаленной точки $p_{\xi,j}$, $j = 1, 2$, соотношением:

$$\begin{cases} \tilde{z} = (-1)^{j-1} i u_{\xi,j}^{-2}, \\ \tilde{w} = u_{\xi,j}^{-1}, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

где $u_{\xi,j} : V_j \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)}^2 \setminus \{0\}$, где V_j — связная компонента $T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D_{\tilde{r}_0(\xi)}^2}) \approx (D^2 \setminus \{*\}) \sqcup (D^2 \setminus \{*\})$, такая что $p_{\xi,j} \in \overline{V}_j$ (см. лемму 2.5.3). Продолжим диффеоморфизм $u_{\xi,j}$ до гомеоморфизма $\overline{u}_{\xi,j} : \overline{V}_j \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)}^2$ в бесконечно удаленную точку $p_{\xi,j}$ соотношением $\overline{u}_{\xi,j}(p_{\xi,j}) = 0$, $j = 1, 2$. \square

Определение 2.5.5. \mathbb{C} -гамильтоновым пополнением \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$, обозначаемым $\overline{\mathcal{H}}_4(a, b, c, d, e, k)$, назовем \mathbb{C} -гамильтонову систему $(M^4, \overline{\omega}_{\mathbb{C}}, \overline{f})$, где

- множество $M^4 = \bigcup_{\xi \in \mathbb{C}} \overline{T}_\xi := \{(\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{C}, x \in \overline{T}_\xi\}$ обладает структурой \mathbb{C} -гладкого многообразия, задаваемой следующим набором карт $U \approx V$, $U_{\xi_0,j} \approx V_{\xi_0,j}$, $j = 1, 2$, где $U, U_{\xi_0,j} \subset M^4$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, и функций перехода: карта $U \approx V := \mathbb{C}^2(z, w)$, семейство карт $U_{\xi_0,j} \approx V_{\xi_0,j} := \{(\xi, u_j) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u_j| < \varepsilon\}$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, где $\varepsilon = \varepsilon(\xi_0) > 0$, а функция перехода $\phi_{\xi_0,j} : V'_{\xi_0,j} \rightarrow V'$, где $V' := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |f(z, w) - \xi_0| < \varepsilon, (z, w) \in h_{f(z,w)}^{-1}(\mathbb{C}_{\tilde{z}} \times (\mathbb{C}_{\tilde{w}} \setminus \overline{D_{\tilde{r}_0(f(z,w))}^2}))\}$ и $V'_{\xi_0,j} := V_{\xi_0,j} \setminus \{(\xi, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\}$, определена с помощью преобразований (2.5.1) и (2.5.2): $(\xi, u_j) \mapsto (z, w) := h_\xi^{-1}(\tilde{z} = (-1)^{j-1} i u_j^{-2}, \tilde{w} = u_j^{-1})$;
- выполнено $\overline{\omega}_{\mathbb{C}}|_U = \varphi^* \omega_{\mathbb{C}}$ и $\overline{f}|_U = f \circ \varphi$, где $\varphi : U \rightarrow V = \mathbb{C}^2$ — коорди-

натный гомеоморфизм для карты $U \approx V$.

Отметим, что по определению M^4 точки $p_{\xi_1, j_1} \neq p_{\xi_2, j_2}$ различны при $\xi_1 \neq \xi_2$ или $j_1 \neq j_2$. Далее будем отождествлять $\mathbb{C}^2 = V$ с открытым подмножеством $U \subset M^4$ посредством координатного гомеоморфизма $\varphi : U \rightarrow V$.

Теорема 21 (Существование \mathbb{C} -гамильтонова пополнения). *Для любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ выполнены следующие свойства:*

1) для любого $\xi_0 \in \mathbb{C}$ и $j = 1, 2$ функция $\phi_{\xi_0, j} : V'_{\xi_0, j} \rightarrow V'$ инъективна и имеет всюду ненулевой якобиан;

2) на комплексном многообразии M^4 \mathbb{C} -дифференциальная 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ и функция Гамильтона \bar{f} определены корректно и являются аналитическими.

3) 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ невырождена, то есть всюду отлична от нуля на M^4 и является \mathbb{C} -симплектической структурой.

Таким образом, любая \mathbb{C} -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ имеет единственное \mathbb{C} -гамильтоново пополнение $(M^4, \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \bar{f})$.

Теорема 22. *Для любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ выполнены следующие свойства:*

1) критические точки функции \bar{f} содержатся в \mathbb{C}^2 и совпадают с критическими точками функции f ; в частности, для любого неособого слоя T_{ξ} \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ слой \bar{T}_{ξ} \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\bar{\mathcal{H}}_4(a, b, c, d, e, k)$ является неособым;

2) векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 и не имеют нулей вне точек $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$.

Доказательство теорем 21 и 22. Из доказательства леммы 2.5.3, шаг 1, и формулы (2.5.2) следует, что $\varphi_{\xi_0, j}$ инъективно, и что в координатах $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ в $\mathbb{C}_{z, w}^2 \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ 2-форма $(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = B_{\xi_0} d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$, где $B_{\xi_0} = \frac{1}{A_{\xi_0} \circ h_{\xi_0}^{-1}}$ определена в области $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ определения (\tilde{z}, \tilde{w}) , $B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w}) \neq 0$ и $|B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w})|$ ограничен на области определения (\tilde{z}, \tilde{w}) .

Координаты $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ выражаются через (ξ, u_j) посредством отображения $h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j} : (\xi, u_j) \mapsto (\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0} \circ h_{\xi}^{-1}((-1)^{j-1} i u_j^{-2}, u_j^{-1})$ так: $\varphi_{\xi_0, j} : (\xi, u_j) \mapsto (z, w) = h_{\xi}^{-1}((-1)^{j-1} i u_j^{-2}, u_j^{-1})$, $\tilde{z} = (-1)^{j-1} i u_j^{-2}$, $\tilde{w} = (\xi - \xi_0 + u_j^{-4})^{\frac{1}{4}}$, откуда $(h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j})^*(d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}) = (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-\frac{3}{4}} d\xi \wedge du_j$ и $\varphi_{\xi_0, j}^* \omega_{\mathbb{C}} = (h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j})^*(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j})(1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-\frac{3}{4}} d\xi \wedge du_j$. Отсюда следует существование непрерывной и всюду невырожденной симплектической структуры $l_{\xi_0, j}(\xi, u_j) d\xi \wedge du_j$ на $V_{\xi_0, j} = \{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u_j| < \varepsilon\}$, совпадающей с $\varphi_{\xi_0, j}^* \omega_{\mathbb{C}}$ на $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_j| < \varepsilon\}$, где $l_{\xi_0, j}(\xi, u_j) = (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-\frac{3}{4}} B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j}(\xi, u_j) = (-1)^{j-1} \frac{i(1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-\frac{3}{4}}}{2A_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j}(\xi, u_j)}$ — ограниченная, всюду ненулевая функция, $l_{\xi_0, j}(\xi, 0) = (-1)^{j-1} \frac{i}{2A} = (-1)^{j-1} \frac{i}{2\sqrt{a}^4 \sqrt{b}}$, см. доказательство леммы 2.5.4. Так как якобиан функции перехода $\varphi_{\xi_0, j}$ равен $l_{\xi_0, j}(\xi, u_j)$, он всюду отличен от нуля.

Функция Гамильтона $f \circ h_{\xi_0}^{-1}$ в области $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_j| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^2(\tilde{z}, \tilde{w})$ имеет вид $f \circ h_{\xi_0}^{-1} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4 + \xi_0$, $f \circ \varphi_{\xi_0, j} = \xi$, $j = 1, 2$, поэтому в координатах (ξ, u_j) функция f имеет вид $f = \xi$, значит \bar{f} корректно определена, является аналитической и не имеет критических точек в $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$.

Теорема 21 и теорема 22, пункт 1), доказаны.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ в координатах (ξ, u_j) , $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (0, \frac{1}{l_{\xi_0, j}(\xi, u_j)}) = \frac{1}{l_{\xi_0, j}(\xi, u_j)} \frac{\partial}{\partial u_j}$, откуда векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ не имеет

нулей на $\bar{T}_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \bar{D}_{r_0}^2)$.

Векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}\bar{f}}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}\bar{f}}$ полны на M^4 , будучи гладкими векторными полями на каждом инвариантном компактном подмножестве $M_C^4 := \bigcup_{|\xi| \leq C} \bar{T}_\xi \subset M^4$, содержащем все особые слои, где $C > 0$ — любая константа, превосходящая $\max\{|f(p_1)|, |f(p_2)|, |f(p_3)|\}$. \square

В следующем следствии использованы обозначения из следствия 2.4.5.

Следствие 2.5.6 (Координаты действие-угол для пополненной системы).
Для \mathbb{C} -гамильтонова пополнения $\overline{\mathcal{H}}_4(a, b, c, d, e, k)$ любой \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}\bar{f}}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}\bar{f}}$ полны. Для любого неособого слоя \bar{T}_ξ существуют числа $\lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\omega_\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и комплексный диффеоморфизм $f_\xi = f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi)) : \bar{T}_\xi \rightarrow \mathbb{T}_{\lambda(\xi)}^2 = \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z})$ на двумерный тор, такие что $\text{sgrad}_{\mathbb{C}\bar{f}}|_{\bar{T}_\xi} = \omega_\xi \frac{d}{df_\xi}$, где $\frac{d}{df_\xi} \in \text{Vect}(\bar{T}_\xi)$ — координатное векторное поле на слое \bar{T}_ξ , отвечающее координатному диффеоморфизму $f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$, то есть диффеоморфизм $f_\xi \bmod (2\pi, \lambda(\xi))$ выпрямляет интегральные траектории на \bar{T}_ξ . Вещественные канонические координаты действие-угол для пополненной системы $\overline{\mathcal{H}}_4(a, b, c, d, e, k)$ определены (неоднозначным образом) в малой окрестности любого неособого слоя в M^4 .

Доказательство. Доказательство данного следствия получается дословным повторением доказательства следствия 2.4.5, с использованием теоремы 22, пункт 2), теоремы 20, пункт 2), леммы 2.1.6, а также теорем 21 и 20. \square

Аналогично (2.4.3) и доказательству следствий 2.4.5 и 2.5.6, строятся ве-

ществленные координаты действие-угол

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) : \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow D^2 \times \mathbb{T}^2$$

для “пополнения” $(M^4, \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \bar{f})$ гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$ с дополнительным первым интегралом $\operatorname{Im} f$, определенные в малой окрестности $\tilde{U}_{\xi_0} = \bigcup_{|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}} \bar{T}_{\xi} \subset M^4$ любого неособого слоя \bar{T}_{ξ_0} и принимающие значения в области $D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ — область, гомеоморфная открытому кругу, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\xi_0) > 0$ — достаточно малое число. Покажем, что значения переменных угол в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,1} \in \tilde{U}_{\xi_0}$ могут быть выбраны равными $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_{\xi,1}) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_{\xi,1}) = 0$, а в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,2} \in \tilde{U}_{\xi_0}$ будут иметь специальный вид.

Следствие 2.5.7 (Вещественные координаты действие-угол для исходной системы). *Вещественные координаты действие-угол $I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi$ в окрестности \tilde{U}_{ξ_0} неособого слоя \bar{T}_{ξ_0} в M^4 для “пополненной” системы $(M^4, \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \bar{f})$ могут быть выбраны таким образом, что их ограничение на $\mathbb{C}^2 \cap \tilde{U}_{\xi_0}$ задает вещественные канонические координаты в окрестности слоя T_{ξ_0} для гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$, принимающие значения в области*

$$(D^2 \times (\mathbb{T}^2 \setminus \{(0, 0) \bmod 2\pi\})) \setminus \Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi},$$

где $\Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi} := \{(I_1, I_2, \frac{\partial J}{\partial I_1}(I_1, I_2) \bmod 2\pi, \frac{\partial J}{\partial I_2}(I_1, I_2) \bmod 2\pi) \mid (I_1, I_2) \in D^2\}$, $J : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция, такая что $\Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi} \cap (D^2 \times \{(0, 0) \bmod 2\pi\}) = \emptyset$. При этом в указанной окрестности первые интегралы $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются функциями от переменных действие I_1, I_2 .

Доказательство. Напомним, что переменные действие в \tilde{U}_{ξ_0} можно определить по формулам $I_j(\bar{T}_\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\xi,j}} \alpha$, $|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}$, где α — 1-форма на \tilde{U}_{ξ_0} такая, что $d\alpha = \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}$, $s_{\xi,j}$ — базисные циклы на торе \bar{T}_ξ , $j = 1, 2$. Рассмотрим множество $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$ бесконечно удаленных точек, оно состоит из двух поверхностей $\Lambda_j := \{p_{\xi,j} \mid \xi \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$. Пусть $v \in T_{p_{\xi,j}}\Lambda_j$, $v \neq 0$, тогда пара (v, iv) — базис в $T_{p_{\xi,j}}\Lambda_j$. Симплектическая структура $\operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}(v, iv) = 0$, откуда Λ_1 и Λ_2 — лагранжевы поверхности в M^4 . Отсюда следует, что переменные угол можно выбрать (для заданных переменных действие) таким образом, что $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(\Lambda_1) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(\Lambda_1) = 0$. Построенные переменные действие-угол в \tilde{U}_{ξ_0} являются каноническими и задают гомеоморфизм $\tilde{U}_{\xi_0} \approx D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 := I(\tilde{U}_{\xi_0})$, $I = (I_1, I_2)$. Определим функцию $\tilde{J} : \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\tilde{J}(\bar{T}_\xi) = \int_{\gamma_{\xi,1}\gamma_\xi\gamma_{\xi,2}^{-1}} \alpha$, $|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}$, где $\gamma_{\xi,j}$ — путь на поверхности Λ_j , $\gamma_{\xi,j}(t) := p_{(1-t)\xi_0+t\xi,j}$, $0 \leq t \leq 1$, $j = 1, 2$, γ_ξ — некоторый путь на торе \bar{T}_ξ , ведущий из бесконечно удаленной точки $p_{\xi,1}$ в бесконечно удаленную точку $p_{\xi,2}$ и такой, что замкнутый путь $\gamma_{\xi,1}\gamma_\xi\gamma_{\xi,2}^{-1}\gamma_{\xi_0}^{-1}$ стягиваем в $\tilde{U}_{\xi_0} \approx D^2 \times \mathbb{T}^2$. Указанный интеграл не зависит от выбора пути γ_ξ (при фиксированном пути γ_{ξ_0}) в силу лагранжевости тора \bar{T}_ξ . Определим функцию $J : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ условием $J \circ I = \tilde{J}$. Тогда $(\varphi_j \bmod 2\pi)(p_{\xi,2}) = \frac{\partial J}{\partial I_j}(I(p_{\xi,2})) \bmod 2\pi$, $|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}$, $j = 1, 2$. \square

Тем самым интегральные траектории системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ изображены на рис. 2.4.

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f , на каждом неособом слое \bar{T}_ξ имеет четыре неподвижные точки, принадлежащие T_ξ , и переставляет друг с другом бесконечно удален-

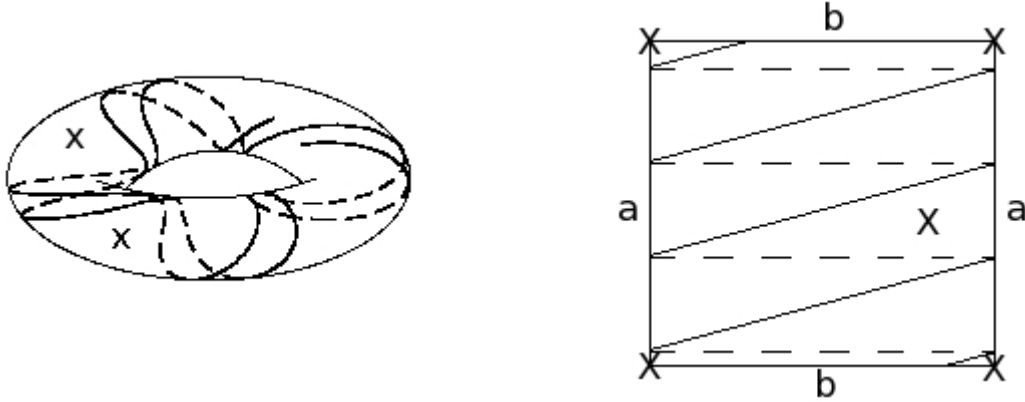


Рис. 2.4: Интегральные траектории системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$

ные точки $p_{\xi,1}$ и $p_{\xi,2}$. В координатах (ξ, u_1) и (ξ, u_2) из определения 2.5.5 эта инволюция имеет вид $(\xi, u_1) \mapsto (\xi, u_2 := u_1)$, см. (2.5.1) и (2.5.2). В вещественных координатах действие-угол из следствия 2.5.7 данная инволюция имеет вид $(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) \mapsto (I_1, I_2, \frac{\partial J}{\partial I_1}(I_1, I_2) - \varphi_1 \bmod 2\pi, \frac{\partial J}{\partial I_2}(I_1, I_2) - \varphi_2 \bmod 2\pi)$.

Следствие 2.5.8. Для \mathbb{C} -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ в окрестности U_{ξ_0} неособого слоя $T_{\xi_0} \subset U_{\xi_0}$, $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$, значения координат действие (I_1, I_2) и функции J из следствия 2.5.7 на слое $T_{\xi} \subset U_{\xi_0}$ могут быть вычислены по формулам:

$$I_\ell(T_\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\gamma_{\xi,\ell}} z_\xi(w) dw, \quad \ell = 1, 2,$$

$$J(T_\xi) = 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_\xi} \left(\frac{3}{5} z_\xi(w) dw - \frac{2}{5} w dz_\xi(w) \right),$$

где $z_\xi(w) = \sqrt{\frac{\xi - bw^4 - cw^3 - dw^2 - ew - k}{a}}$ — одна из двух ветвей, непрерывно зависящая от ξ , $\gamma_{\xi,1}, \gamma_{\xi,2} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — простые пути, ведущие из $w_{\xi,1}$ в $w_{\xi,4}$

и из $w_{\xi,2}$ в $w_{\xi,4}$ соответственно, пересекающиеся только в конечной точке $w_{\xi,4}$ и непрерывно зависящие от ξ , $w_{\xi,m}$, $m = 1, 2, 3, 4$ — корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k = \xi$, непрерывно зависящие от ξ , и $\gamma_\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — полупрямая, выходящая из $w_{\xi,1}$, не проходящая ни через один из $w_{\xi,m}$, $m = 2, 3, 4$ и непрерывно зависящая от ξ . Переменная действия I_ℓ отвечает циклу на \mathbb{T}_ξ , полученному последовательным прохождением пути $(z_\xi(\gamma_{\xi,\ell}(t)), \gamma_{\xi,\ell}(t))$, $t \in [0, 1]$, и пути $(-z_\xi(\gamma_{\xi,\ell}(1-t)), \gamma_{\xi,\ell}(1-t))$, $t \in [0, 1]$, $\ell = 1, 2$. Функция J отвечает простому пути на $\overline{\mathbb{T}}_\xi$, соединяющему бесконечно удаленные точки $p_{\xi,1}, p_{\xi,2}$ и полученному последовательным прохождением пути $(-z_\xi(\gamma_\xi(1-t)), \gamma_\xi(1-t))$, $t \in (0, 1]$, и пути $(z_\xi(\gamma_\xi(t)), \gamma_\xi(t))$, $t \in [0, 1)$.

Глава 3

Топология лагранжевых слоений

3.1 Основные понятия и утверждения

Определение 3.1.1. *Гамильтоновой системой* называется тройка (M^{2n}, ω, H) , где M^{2n} — гладкое многообразие, ω — симплектическая структура на M^{2n} , $H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая вещественнозначная функция, называемая *функцией Гамильтона* (или *гамильтонианом*). Система называется *интегрируемой*, если существует набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, называемых *первыми интегралами*, такой что выполнены следующие условия:

1) набор f_1, \dots, f_n функционально независим на M^{2n} , то есть df_1, \dots, df_n линейно независимы в каждой точке всюду плотного подмножества в M^{2n} , и $f_1 = H$;

2) при любых $i, j = 1, \dots, n$ функции f_i и f_j находятся в инволюции относительно симплектической структуры ω , то есть $\{f_i, f_j\} = \omega^{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^l} = 0$ в локальных координатах x^1, \dots, x^{2n} , где ω^{kl} — компоненты матрицы, обратной матрице $\|\omega_{kl}\|$.

Определение 3.1.2. Векторным полем *косой градиент* функции $f : M^{2n} \rightarrow$

\mathbb{R} называется поле $\text{sgrad } f$, такое что для любой функции $g : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено соотношение $\{f, g\} = \text{sgrad } g(f)$. В локальных координатах x^1, \dots, x^{2n} векторное поле $\text{sgrad } f$ имеет вид $(\text{sgrad } f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

С каждой гамильтоновой системой связано уравнение Гамильтона.

Определение 3.1.3. Уравнением Гамильтона гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) называется дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = \text{sgrad } H|_{x(t)}$, где $t \in I$ — параметр в некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Если гамильтонова система является интегрируемой и все решения уравнения Гамильтона существуют глобально, то есть допускают продолжение параметра t на \mathbb{R} , то систему назовем *интегрируемой по Лиувиллю* или *вполне интегрируемой*.

Определение 3.1.4. Точка $x \in M^{2n}$ называется *критической* (или *особой*), если $df_1(x), \dots, df_n(x)$ линейно зависимы. Отображение $\Phi : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, называется *отображением момента*. Образ $\Phi(x)$ любой критической точки $x \in M^{2n}$ называется *критическим значением* отображения момента. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma_\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется множество критических значений отображения момента.

Замечание 3.1.5. При $n = 1$ особые точки $x \in M^2$ совпадают с критическими точками функции Гамильтона.

Определение 3.1.6. *Лагранжевым слоением*, отвечающим вполне интегрируемой гамильтоновой системе, назовем разбиение многообразия M^{2n} на связанные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n . *Слоем* (или *листом*) интегрируемой гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) с первыми интегралами f_1, \dots, f_n назовем компоненту связности подмножества

$T_{\xi_1, \dots, \xi_n} = \{x \in M^{2n} | f_1(x) = \xi_1, \dots, f_n(x) = \xi_n\}$. (Слои являются лагранжевыми подмногообразиями с особенностями; подмножество T_{ξ_1, \dots, ξ_n} связно, если набор функций (f_1, \dots, f_n) состоит из вещественных и мнимых частей комплекснозначных многочленов Лорана n переменных, образующих “невырожденный для своих многогранников Ньютона” набор из $n/2$ многочленов, и если размерности многогранников Ньютона равны n [29, §2, теорема]; последние условия выполнены, например, для гиперэллиптического комплекснозначного многочлена $f(z, w)$, рассматриваемого в данной работе.) Слой T_{ξ_1, \dots, ξ_n} называется *неособым*, если все его точки неособые (то есть в каждой его точке df_1, \dots, df_n линейно независимы), иначе *особым*. Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_i^{2n}, \omega_i, H_i)$ с наборами первых интегралов $\Phi_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, такие что все слои $\Phi_i^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ связны, $i = 1, 2$, называют *послойно эквивалентными* [7, определение 1.29], если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_1 : M_1 \rightarrow M_2$ и $h_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\Phi_1 = h_2 \circ \Phi_2 \circ h_1$.

Определение 3.1.7. Аналогично определениям 3.1.1 и 3.1.2 определяются \mathbb{C} -гамильтонова система $(M^{2n}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ и векторное поле *косой градиент* $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$, где M^{2n} — комплексное многообразие размерности $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $\omega_{\mathbb{C}}$ — комплекснозначная замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на M^{2n} , $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция на M^{2n} .

3.1.1 Важный класс комплексных гамильтоновых систем

Пусть $M^4 = \mathbb{C}^2(z, w)$. Рассмотрим четырехмерное многообразие $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и диффеоморфизм $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \mathbb{C}^2(z, w)$, $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + iy_1, x_2 +$

$iy_2) = (z, w)$. На \mathbb{R}^4 введем симплектическую структуру $\omega = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$, заметим, что $\omega = \operatorname{Re}(dz \wedge dw)$, также введем функцию $H = \operatorname{Re}(f(z, w)) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(z, w)$ — комплексный многочлен двух комплексных переменных. Согласно следующей лемме, гамильтонова система

$$(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2(z, w), \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w))) \quad (3.1.1)$$

имеет дополнительный первый интеграл $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$.

Лемма 3.1.8 (Лемма 2.1.6). *Если многочлен $f(z, w)$ отличен от константы на \mathbb{C}^2 , то гамильтонова система (3.1.1) является интегрируемой с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$, причем $\operatorname{sgrad} F = -i \operatorname{sgrad} H$.*

Лемма 3.1.9 (Лемма 2.1.7). *Векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ совпадает с косым градиентом $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ комплекснозначной функции $f(z, w)$ относительно комплекснозначной симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ на $\mathbb{C}^2(z, w)$, т.е. $\operatorname{sgrad} H = \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ (см. определение 3.1.7).*

По лемме 3.1.9 уравнения Гамильтона систем $(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(\omega_{\mathbb{C}}), \operatorname{Re} f)$ и $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ совпадают. Далее будем рассматривать только \mathbb{C} -гамильтоновы системы. Леммы 3.1.8 и 3.1.9 приводят к следующему определению.

Определение 3.1.10. Две \mathbb{C} -дифференцируемые функции $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, будем называть *эквивалентными* (соответственно *топологически эквивалентными*), если существует комплексный диффеоморфизм (соответственно сохраняющий ориентацию гомеоморфизм) $h : M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $f_2 \circ h = f_1$.

В §3.2 и §3.3 исследуются классы топологической эквивалентности гиперэллиптических многочленов $f = f(z, w)$ в малых окрестностях критических точек (соответственно критических слоев), т.е. получена локальная (соответственно полулокальная) топологическая классификация особенностей таких функций. Ясно, что из топологической эквивалентности таких функций следует послойная эквивалентность соответствующих лагранжевых слоений (см. определения 3.1.6, 3.1.10).

Определение 3.1.11. (А) *Римановой метрикой пополнения* ds_ξ^2 на неособом слое $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ для функции f назовем риманову метрику $ds_\xi^2 := \Delta_\xi \bar{\Delta}_\xi = \frac{1}{2}(\Delta_\xi \otimes \bar{\Delta}_\xi + \bar{\Delta}_\xi \otimes \Delta_\xi)$ на T_ξ , где *голоморфная 1-форма* Δ_ξ определена на слое T_ξ соотношением $\Delta_\xi(\text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_\xi}) = 1$. Отметим, что риманова метрика ds_ξ^2 является плоской, и интегральные траектории векторных полей $\text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_\xi}$ и $i \text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_\xi}$ являются ее геодезическими.

(Б) На слое T_ξ определена *функция расстояния* $\rho_\xi : T_\xi \times T_\xi \rightarrow \mathbb{R}$, где для любых $x, y \in T_\xi$, $\rho_\xi(x, y)$ — нижняя грань длин всех кривых, лежащих в T_ξ и соединяющих точки x, y , длина в смысле римановой метрики пополнения ds_ξ^2 .

3.1.2 Гиперэллиптические многочлены: топология неособого слоя, локальная классификация особенностей лагранжева слоения

Для любых $r > 0$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$ обозначим

$$D_{\xi_0, r}^2 := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - \xi_0| < r\}, \quad \bar{D}_{\xi_0, r}^2 := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - \xi_0| \leq r\}.$$

Определение 3.1.12. Критическая точка $p \in \mathbb{C}^2$ многочлена $f(z^1, z^2)$, в которой матрица вторых частных производных $\|\frac{\partial^2 f(z^1, z^2)}{\partial z^i \partial z^j}\big|_p\|$ невырождена, называется *морсовской критической точкой*. Многочлен называется *морсовским*, если все его критические точки морсовские.

Определение 3.1.13. *Кратностью* критической точки $p \in \mathbb{C}^2$ многочлена $f(z, w)$ (числом Милнора) называется степень отображения $\Gamma : S_\varepsilon^3 \rightarrow S^3$, $(z, w) \mapsto \frac{(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w))}{|(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w))|}$, где S_ε^3 — сфера в \mathbb{C}^2 с центром в точке p достаточно малого радиуса ε (см. [15] и [10, Гл. I, §3, предложение 1]).

Определение 3.1.14. Комплексный многочлен вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, где $P_n(w)$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ от w , будем также называть *гиперэллиптическим многочленом степени n* (имеется в виду степень по w), а также *гиперэллиптическим гамильтонианом степени n* системы $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$.

Лемма 3.1.15. Пусть $\xi \in \mathbb{C}$ — неособое значение гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$. Тогда слой $T_\xi = f^{-1}(\xi) \subset \mathbb{C}^2$ гомеоморфен сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками и без $\frac{3+(-1)^n}{2}$ точек.

Доказательство. Рассмотрим двулистное разветвленное накрытие $\text{Pr}_w|_{T_\xi} : T_\xi \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$. Точки ветвления в конечной части плоскости совпадают с корнями уравнения $P_n(w) = \xi$, всего n конечных точек ветвления. Рассмотрим точку $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ и сделаем замену переменной $u = \frac{1}{w}$. Пусть $P_n(w) - \xi = (w - w_1) \dots (w - w_n)$, где $w_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $z(u) = \pm i \sqrt{u^{-n}} \sqrt{(1 - w_1 u) \dots (1 - w_n u)}$. Отсюда при четном n точка $u = 0$ не является точкой ветвления, а при нечетном n является точкой ветвления. Значит,

Σ_ξ имеет один прокол при нечетном n и два прокола при четном n . Эйлера характеристика $\chi(T_\xi) = 2\chi(\mathbb{C}) - n$, откуда $2 - 2g - \frac{3+(-1)^n}{2} = 2 - n$, где g — количество ручек. Отсюда $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.1.16 ((локальная классификация особенностей: особенность типа A_{k-1})). Для любого гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ и любой его критической точки $p \in \mathbb{C}^2$ кратности $k - 1$ существуют $\varepsilon > 0$ и замкнутая окрестность $\bar{U}^4 \subset \mathbb{C}^2$ точки p , такие что функция $f|_{\bar{U}^4}$ эквивалентна функции $g : \bar{V}_{\varepsilon, k}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $g(z, w) = z^2 + w^k + f(p)$,

$$\bar{V}_{\varepsilon, k}^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^k| \leq \varepsilon, |w| \leq (2\varepsilon)^{1/k}\}. \quad (3.1.2)$$

Доказательство. Пусть $p = (z_0, w_0)$ — критическая точка, тогда $z_0 = 0$ и $f(z, w) = z^2 + (w - w_0)^k Q_{n-k}(w) + f(p)$, где $Q_{n-k}(w)$ — многочлен степени $n - k$, причем $Q_{n-k}(w_0) \neq 0$. Рассмотрим окрестность $U_1^2 \subset \mathbb{C}$ точки w_0 такую, что для любой точки $w \in U_1^2$ выполнено $|Q_{n-k}(w) - Q_{n-k}(w_0)| < |Q_{n-k}(w_0)|$. В U_1^2 корректно определено отображение $\varphi : U_1^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto \tilde{w} = (w - w_0) \sqrt[k]{Q_{n-k}(w)}$, где $\sqrt[k]{}$ — одна из ветвей в U_1^2 . Существует окрестность $U_2^2 \subset U_1^2$ точки w_0 такая, что $\varphi|_{U_2^2} : U_2^2 \rightarrow \varphi(U_2^2)$ — диффеоморфизм. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\bar{V}_{\varepsilon, k}^4 \subset \mathbb{C} \times (\varphi(U_2^2)) = (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)(\mathbb{C} \times U_2^2)$. Положим $\bar{U}^4 := U_2^2 \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)^{-1}(\bar{V}_{\varepsilon, k}^4)$, тогда $(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)|_{\bar{U}^4} : \bar{U}^4 \rightarrow \bar{V}_{\varepsilon, k}^4$ — диффеоморфизм, и $g \circ (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)(z, w) = g(z, (w - w_0) \sqrt[k]{Q_{n-k}(w)}) = z^2 + (w - w_0)^k Q_{n-k}(w) + f(p) = f(z, w)$, $(z, w) \in \bar{U}^4$. Лемма доказана. \square

Замечание 3.1.17 ((комплексная лемма Морса)). Согласно лемме 3.1.16 при $k = 2$, для любого полиномиального гамильтониана $f(z, w)$ и любой его морсовской критической точки $p \in \mathbb{C}^2$ существует $\varepsilon > 0$ и замкнутая окрест-

ность $\bar{U}^4 \subset \mathbb{C}^2$ точки $p \in U^4$ такая, что функция $f|_{\bar{U}^4}$ эквивалентна функции $g : \bar{V}_\varepsilon^4 \rightarrow \mathbb{C}$ в окрестности $\bar{V}_\varepsilon^4 \subset \mathbb{C}^2$, где $g(z, w) = z^2 + w^2 + f(p)$ и $\bar{V}_\varepsilon^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^2| \leq \varepsilon, |w| \leq \sqrt{2\varepsilon}\}$. В действительности, указанные слоения в \bar{U}^4 и \bar{V}_ε^4 симплектоморфны относительно симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ [7]. Такие особенности лагранжева слоения имеют тип “фокус-фокус” [7]. Для компактных слоев лагранжево слоение с особенностью типа “фокус-фокус” описано в [7, приложение 3].

По лемме Морса в окрестности морсовской критической точки p многочлен f имеет вид $f = (z^1)^2 + (z^2)^2 + c$, в некоторых локальных координатах $z^1, z^2, c \in \mathbb{C}$. Поэтому кратность критической точки p равна 1 (см. определение 3.1.13).

3.1.3 Наборы кратностей критических точек на особых слоях

Теорема 23 ((Р. Том [45, теорема (1)]). *Любой системе $\{\xi_j\}_{j=1}^s$ различных комплексных чисел и любой системе наборов натуральных чисел $(p_j^i)_{i=1}^{k_j}$, $1 \leq j \leq s$, таких что при любом $j \in [1, s]$ выполнено $\sum_{i=1}^{k_j} (p_j^i + 1) \leq n$ и $\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{k_j} p_j^i = n - 1$, можно сопоставить многочлен $P = P_n(w)$ степени n , имеющий множество критических значений $\{\xi_j\}_{j=1}^s$ и набор кратностей $(p_j^i)_{i=1}^{k_j}$ критических точек из $P^{-1}(\xi_j)$ для каждого $j \in [1, s]$.*

Для гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ обозначим количество различных особых значений через $s(f)$, а количество критических точек на особом слое $T_{\xi_j} = f^{-1}(\xi_j)$ — через k_j , $1 \leq j \leq s(f)$. Набор кратностей критических точек на особом слое T_{ξ_j} обозначим $(p_j^i)_{i=1}^{k_j}$, а сумму этих

кратностей обозначим $\mu_j := \sum_{i=1}^{k_j} p_j^i$, $1 \leq j \leq s(f)$. Из теоремы Тома (см. теорему 23) получаем следующее утверждение о количествах критических точек на особых слоях для гиперэллиптических многочленов.

Следствие 3.1.18. *Пусть дан произвольный гиперэллиптический многочлен $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ степени $n \in \mathbb{N}$. Тогда:*

- 1) $\mu_1 + \dots + \mu_{s(f)} = n - 1$,
- 2) $k_j \leq \mu_j$, $k_j + \mu_j \leq n$ для любого $j = 1, \dots, s(f)$.

Верно обратное: для любых чисел $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1, \dots, k_s, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) выше, любого разбиения $(p_j^i)_{i=1}^{k_j}$ каждого μ_j в сумму k_j слагаемых, $1 \leq j \leq s$, и любых различных точек $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{C}$ существует гиперэллиптический многочлен степени $n = \mu_1 + \dots + \mu_s + 1$, имеющий ровно s различных критических значений, равных ξ_1, \dots, ξ_s , причем на особом слое T_{ξ_j} имеется ровно k_j критических точек, с кратностями $p_j^1, \dots, p_j^{k_j}$, $j = 1, \dots, s$.

3.2 Топология слоения в окрестности особой точки (локальная топологическая классификация особенностей)

Аналогично (3.1.2), для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\begin{aligned} \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 &:= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon, |w| \leq (2\varepsilon)^{1/n}\}, \\ V_{\varepsilon, n}^4 &:= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon, |w| < (2\varepsilon)^{1/n}\}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Предложение 3.2.1 ((топология слоения в замкнутой окрестности критической точки четной кратности)). *При четном $n \in \mathbb{N}$ для любых $\varepsilon > 0$ и*

$\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $g = g_n : \bar{V}_{\varepsilon,n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z, w) = z^2 + w^n + \xi_0$, топологически эквивалентна функции $q = q_n : M_{\varepsilon,n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_{\varepsilon,n}^4 = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$, отношение эквивалентности \sim порождено следующими $n + 1$ отношениями:

$$\begin{aligned} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi+t+2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_-) &\sim_{1,k} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{-\varphi+t-2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_+), \\ (0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) &\sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$0 \leq k < n$, $r \in [0, \varepsilon]$, $\varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $h \in [-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1]$, $q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0$. Здесь $0_+ := 0 \in [0_+, 1]$, $0_- := 0 \in [-1, 0_-]$ и $g(\bar{V}_{\varepsilon,n}^4) = q(M_{\varepsilon,n}^4) = \bar{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$.

Замечание 3.2.2. (А) (Исчезающая окружность или исчезающий граф). Пространство $M_{\varepsilon,n}^4 := ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$ получено из тривиально расслоенного пространства $\tilde{M}_{\varepsilon,n}^4 := [0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])$ путем отождествлений, описанных в (3.2.2) и имеющих следующий “геометрический” смысл. В пространстве $\tilde{M}_{\varepsilon,n}^4$ каждый слой $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])$ является несвязным объединением двух цилиндров, причем первое соотношение \sim_1 , порожденное набором соотношений $\sim_{1,k}$ формулы (3.2.2), $0 \leq k < n$, превращает слой в связную двумерную поверхность рода $\frac{n-2}{2}$ с краем из двух компонент, отождествляя “верхнее” основание первого цилиндра, разбитое на n равных дуг (которые пометим последовательно символами a_1, \dots, a_n при положительном обходе основания цилиндра), с “нижним” основанием второго цилиндра, разбитым на n равных дуг (которые пометим последовательно символами a_n, \dots, a_1 при положительном обходе основания цилиндра), причем первое разбиение на дуги по-

вернуто на угол φ/n в направлении своей ориентации, а второе разбиение — на тот же угол в направлении противоположном своей ориентации, при помощи попарного склеивания соответствующих дуг с учетом ориентации. На каждом слое $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim_1$ получаем граф $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times \{0_-, 0_+\}) / \sim_1$ с двумя вершинами и n ребрами a_1, \dots, a_n , каждое из которых соединяет обе вершины, гомеоморфный графу $K_{2,n}$ и называемый *исчезающим графом для функции g_n* . При $n = 2$ исчезающий граф гомеоморфен окружности и называется *исчезающей окружностью*. Оставшееся соотношение \sim_2 в (3.2.2) отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim_1$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$ (особый слой). Из соотношений в (3.2.2) следует, что на особом слое исчезающий граф склеивается в точку (“перетяжка” на особом слое). Таким образом, семейство исчезающих графов (исчезающих окружностей при $n = 2$) на неособых слоях стремится к особой точке (“исчезает”) при стремлении слоя к особому.

(Б) Из (А) и доказательства утверждения 3.2.1 следует, что исчезающий граф α_ξ на неособом слое $T_\xi = g_n^{-1}(\xi)$, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \setminus \{\xi_0\}$, имеет вид $\alpha_\xi = (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(\bigcup_{i=0}^{n-1} \gamma_{0, w_i, \xi})$, где $\text{Pr}_w : (z, w) \mapsto w$, $w_{i, \xi}$ — корни уравнения $w^n = \xi - \xi_0$, $0 \leq i < n$, через $\gamma_{a,b}$ обозначен прямолинейный отрезок на \mathbb{C} с концами $a, b \in \mathbb{C}$.

Доказательство утверждения 3.2.1. Шаг 1. Функция $q : M_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ определена корректно, так как при $0 \leq k < n$

$$q(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi \pm t + 2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_{\mp}) = r e^{i\varphi + \xi_0}, \quad q(0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = \xi_0.$$

Шаг 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ рассмотрим в

плоскости \mathbb{C} подмножества

$$A_{n,\varphi_0,a,b,\pm} := \{w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid a \leq r \leq b, 0 \leq \pm(\varphi - \varphi_0) \leq \frac{\pi}{n}\}, \quad B_{n,\varphi_0,b,\pm} := A_{n,\varphi_0,0,b,\pm}.$$

Введем вещественные координаты $(u = u_{n,\varphi_0,\pm}, v = v_{n,\varphi_0,\pm})$ на $B_{n,\varphi_0,b,\pm}$ соотношением $ue^{i(\varphi_0 \pm \frac{\pi}{n})} + ve^{i\varphi_0} = w$, где $0 \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq d_{n,b}(u)$, $d_{n,b}(u) := -u \cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{b^2 - u^2 \sin^2(\frac{\pi}{n})}$. Подмножество $A_{n,\varphi_0,a,b,\pm} \subset B_{n,\varphi_0,b,\pm}$ в координатах (u, v) задается соотношениями $d_{n,a}(u) \leq v \leq d_{n,b}(u)$ и $0 \leq u \leq b$. Определим гомеоморфизм $\alpha_{n,\varphi_0,a,b,\pm} : B_{n,\varphi_0,b,\pm} \rightarrow A_{n,\varphi_0,a,b,\pm}$ в координатах (u, v) формулой

$$\alpha_{n,\varphi_0,a,b,\pm}(u, v) = \begin{cases} (u, v), & u \geq a, \\ (u, d_{n,a}(u) + v \frac{d_{n,b}(u) - d_{n,a}(u)}{d_{n,b}(u)}), & u \leq a. \end{cases}$$

Отображение $\alpha_{n,\varphi_0,a,b,\pm}$ корректно определено и непрерывно, так как при $u = a$ выполнено $(u, d_{n,a}(u) + v \frac{d_{n,b}(u) - d_{n,a}(u)}{d_{n,b}(u)}) = (u, v)$ в силу $d_{n,a}(a) = 0$. Введем множества $A_{n,\varphi_0,a,b} := A_{n,\varphi_0,a,b,+} \cup A_{n,\varphi_0,a,b,-}$, $B_{n,\varphi_0,b} := B_{n,\varphi_0,b,+} \cup B_{n,\varphi_0,b,-}$, и гомеоморфизм $\alpha_{n,\varphi_0,a,b} : B_{n,\varphi_0,b} \rightarrow A_{n,\varphi_0,a,b}$, полагая $\alpha_{n,\varphi_0,a,b}(w) := \alpha_{n,\varphi_0,a,b,\pm}(w)$ при $w \in B_{n,\varphi_0,b,\pm}$.

Шаг 3. При четном n определим отображение $h_1 : \overline{V}_{\varepsilon,n}^4 \rightarrow M_{\varepsilon,n}^4$ формулой

$$h_1(z, w) := \begin{cases} \left(r, \varphi, -\eta \arg \alpha(w), \eta \frac{|\alpha(w)| - r^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} \right), & r \geq 0, w^n e^{-i\varphi} \notin [0, r], \\ (r, \varphi, -\eta \arg \alpha(w), 0_\eta), & r > 0, w^n e^{-i\varphi} \in [0, r], \\ (0, 0, 0, 0_-), & z = w = 0, \end{cases}$$

где вторая и третья координаты точки $h_1(z, w) \in M_{\varepsilon,n}^4$ рассматриваются по модулю 2π , $z^2 + w^n = re^{i\varphi}$, $r \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\varphi := 0$ при $r = 0$,

$$\eta = \eta(z, w) := \begin{cases} \operatorname{sgn} \left(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}} \right), & r \geq 0, w^n e^{-i\varphi} \notin [0, r], \\ -\operatorname{sgn} \left(\frac{z}{w^{n/2}} \right), & r > 0, w^n e^{-i\varphi} \in (0, r), \\ -, & r \geq 0, w^n = re^{i\varphi}, z = 0, \\ -\operatorname{sgn} \left(\frac{z}{e^{i\varphi/2}} \right), & r > 0, w = 0, \end{cases}$$

$\alpha(w) = \alpha_{r,\varphi,l}(w) := \alpha_{n, \frac{\varphi+\pi+2\pi l}{n}, r^{1/n}, (2\varepsilon)^{1/n}}(w)$, число $l = l(r, \varphi, w) \in \mathbb{Z} \cap [0, n-1]$ определяется условиями $l(r, \varphi, 0) := 0$, $\arg w \in [\frac{\varphi+2\pi l}{n}, \frac{\varphi+2\pi(l+1)}{n})$ при $w \neq 0$.

Проверим корректность определения знака $\eta(z, w) = \pm$. В первых двух случаях имеем $w \neq 0$, положим $\lambda = \lambda(z, w) := \frac{z}{w^{n/2}}$, откуда $re^{i\varphi} = z^2 + w^n = (\lambda^2 + 1)w^n$. Поэтому в первом случае $\lambda^2 \notin [0, +\infty)$, откуда $\lambda \notin \mathbb{R}$, а во втором случае $\lambda^2 > 0$, поэтому $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В четвертом случае из $w = 0$ имеем $z = \pm r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, поэтому $\frac{z}{e^{i\varphi/2}} = \pm r^{1/2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Значит, $\eta(z, w)$ и $h_1(z, w)$ определены корректно.

Отметим, что во втором случае определения $\eta(z, w)$ выполнено $\frac{z^2+w^n}{w^n} = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, откуда $d\frac{z^2+w^n}{w^n} = 2\lambda d\lambda$, и $\text{Im}(d\lambda(z, w)) = \frac{1}{2\lambda} \text{Im}(d\frac{z^2+w^n}{w^n})$.

Шаг 4. Проверим, что отображение h_1 непрерывно в каждой точке $(\hat{z}, \hat{w}) \in \overline{V}_{\varepsilon,n}^4$. Пусть $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}, \hat{\eta} := \eta(\hat{z}, \hat{w})$, $\hat{\alpha} := \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}}(\hat{w})$ и $r, \varphi, l, \eta = \eta(z, w)$, $\alpha := \alpha_{r,\varphi,l}(w)$ — соответствующие значения в точках (\hat{z}, \hat{w}) и (z, w) . Обозначим через $\tilde{l} \in \mathbb{Z}$ такое число, что $|\varphi + 2\pi\tilde{l} - \hat{\varphi} - 2\pi\hat{l}| < \pi$ (если $\varphi \notin \hat{\varphi} + \pi + 2\pi\mathbb{Z}$). Обозначим через $\overline{V}_{\varepsilon,n}^4(\hat{z}, \hat{w})$ множество всех точек $(z, w) \in \overline{V}_{\varepsilon,n}^4$, для которых $l := l(r, \varphi, w) = \tilde{l}$ и значения $h_1(z, w)$ и $\eta := \eta(z, w)$ вычисляются по тем же формулам, что $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ и $\hat{\eta}$. Тогда $h_1(z, w) \rightarrow h_1(\hat{z}, \hat{w})$ при $(z, w) \in \overline{V}_{\varepsilon,n}^4(\hat{z}, \hat{w})$ и $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$. Пусть далее точка $(z, w) \in \overline{V}_{\varepsilon,n}^4$ достаточно близка к (\hat{z}, \hat{w}) . Рассмотрим все возможные положения точки (\hat{z}, \hat{w}) .

А. Дополнение к исчезающему графу в неособом слое. Пусть $\hat{r} > 0$, $\hat{w}^n e^{-i\hat{\varphi}} \notin [0, \hat{r}]$. Тогда значения $h_1(z, w)$ и $\eta = \eta(z, w)$ вычисляются по своим первым формулам, откуда $\eta = \hat{\eta}$. Если $\arg \hat{w} > \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}}{n}$, то $l = \tilde{l}$, откуда $(z, w) \in \overline{V}_{\varepsilon,n}^4(\hat{z}, \hat{w})$ и все доказано (см. выше). Если $\arg \hat{w} = \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}}{n}$, то $\alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}}(\hat{w}) = \hat{w}$ и $\alpha_{r,\varphi,l}(w) = w$ для любой точки (z, w) из малой окрестности точки (\hat{z}, \hat{w})

(независимо от φ, l), в силу построения гомеоморфизма $\alpha_{n, \varphi_0, a, b}$ на шаге 2. Поэтому отображение $h_1(z, w)$ непрерывно в данной окрестности.

Б. Дополнение к исчезающему графу в особом слое. Пусть $\hat{r} = 0, \hat{w} \neq 0$. Тогда $\alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \alpha_{0, \varphi, l}(\hat{w}) = \hat{w} = \hat{\alpha}$ при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ (независимо от φ, l). В малой окрестности точки (\hat{z}, \hat{w}) значения $h_1(z, w)$ и $\eta = \eta(z, w)$ вычисляются по первым формулам, поэтому $\eta = \hat{\eta}$ и $h_1(z, w) \rightarrow h_1(\hat{z}, \hat{w})$ при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$.

В. Открытое ребро a_{i+1} исчезающего графа на неособом слое. Пусть $\hat{r} > 0, \hat{w}^n e^{-i\hat{\varphi}} \in (0, \hat{r}]$. Тогда значение $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по второй формуле, а значение $\hat{\eta} = \eta(\hat{z}, \hat{w})$ — по второй или третьей формуле. Имеем $\hat{w} \neq 0, \arg \hat{w} = \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l}}{n}, |\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}, \arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}$ для некоторого $\hat{t} \in [0, \pi)$.

Если $\hat{z} \neq 0$ и $(z, w) \notin \bar{V}_{\varepsilon, n}^4(\hat{z}, \hat{w})$, то $w^n e^{-i\varphi} \notin [0, r]$ и каждое значение $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ и $\eta(\hat{z}, \hat{w})$ (соответственно $h_1(z, w)$ и $\eta(z, w)$) вычисляется по своей второй (соответственно первой) формуле, причем выполнено либо $\arg w \in (\frac{\varphi + 2\pi\tilde{l}}{n}, \frac{\varphi + 2\pi(\tilde{l} + 1)}{n})$ и $l = \tilde{l}$, либо $\arg w \in (\frac{\varphi + 2\pi(\tilde{l} - 1)}{n}, \frac{\varphi + 2\pi\tilde{l}}{n})$ и $l = \tilde{l} - 1$. В первом случае при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ имеем, во-первых, $\alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}}(\hat{w}) = \hat{\alpha}$, откуда $|\alpha_{r, \varphi, l}(w)| \rightarrow |\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}$, а, во-вторых, значение $\eta := \eta(z, w) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda(z, w))$ (вычисленное по первой формуле) в силу $\hat{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и формулы для $\operatorname{Im}(d\lambda(\hat{z}, \hat{w}))$, см. шаг 3, равно значению $\operatorname{sgn}(\hat{\lambda} \operatorname{Im} \frac{\hat{z}^2 + w^n}{w^n}) = -\operatorname{sgn} \hat{\lambda} = \hat{\eta}$ (вычисленному по второй формуле). Поэтому значение $h_1(z, w)$, вычисленное по первой формуле, стремится к значению $(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}, 0_{\hat{\eta}}) = h_1(\hat{z}, \hat{w})$, вычисленному по второй формуле. Во втором случае при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ имеем, во-первых, $\alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}-1}(\hat{w})$, откуда $|\alpha_{r, \varphi, l}(w)| \rightarrow \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} - \hat{t}}{n}$, и, во-вторых, значение

$\eta(z, w) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda(z, w))$ (вычисленное по первой формуле) в силу $\hat{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и формулы для $\operatorname{Im}(d\lambda(\hat{z}, \hat{w}))$, см. шаг 3, равно значению $\operatorname{sgn}(\hat{\lambda} \operatorname{Im} \frac{z^2 + w^n}{w^n}) = \operatorname{sgn} \hat{\lambda} = -\hat{\eta}$ (вычисленному по второй формуле). Поэтому значение $h_1(z, w)$ (вычисленное по первой формуле) стремится к значению

$$(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} - \hat{t}}{n}, 0_{-\hat{\eta}}) \sim_{1, \hat{l}} (\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}, 0_{\hat{\eta}}) = h_1(\hat{z}, \hat{w})$$

(вычисленному по второй формуле). Здесь мы использовали соотношение $\sim_{1, \hat{l}}$ в пространстве $M_{\varepsilon, n}^4$, см. (3.2.2).

Пусть теперь $\hat{z} = 0$ (середина ребра $a_{\hat{l}+1}$ исчезающего графа) и $(z, w) \notin \overline{V}_{\varepsilon, n}^4(\hat{z}, \hat{w})$. Тогда значение $\hat{\eta} = \eta(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по третьей формуле в определении $\eta(z, w)$, поэтому либо каждое значение $h_1(z, w)$ и $\eta(z, w)$ вычисляется по своей первой формуле, либо каждое — по своей второй формуле. Дальнейшее доказательство аналогично приведенному выше, с учетом того, что $\hat{t} = 0$ (откуда $\arg \alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l}}{n} = \arg \hat{\alpha}$) и что пара точек $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \mp \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l}}{n}, 0_{\pm})$ отождествляется в одну точку в $M_{\varepsilon, n}^4$ ввиду соотношения $\sim_{1, \hat{l}}$ при $t = 0$.

Г. Вершина исчезающего графа на неособом слое. Пусть $\hat{r} > 0$, $\hat{w} = 0$. Тогда значение $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по второй формуле, а значение $\hat{\eta} = \eta(\hat{z}, \hat{w})$ — по четвертой формуле. Поскольку $\hat{l} = l(\hat{r}, \hat{\varphi}, 0) = 0$ и $\hat{\alpha} = \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, 0}(0)$, то $|\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi} + \pi}{n}$, откуда $\hat{\eta} = -\operatorname{sgn} \frac{\hat{z}}{e^{i\hat{\varphi}/2}}$ и $h_1(\hat{z}, \hat{w}) = (\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + \pi}{n}, 0_{\hat{\eta}})$. Если $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$, то из $w \rightarrow 0$ получаем $|\alpha_{r, \varphi, l}(w)| \rightarrow \hat{r}^{1/n}$ независимо от φ, l .

Покажем, что $\eta = (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2}})$ при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$. При $w = 0$ это следует из четвертой формулы для $\eta(z, w)$ ввиду $l = 0$. При $w^n e^{-i\varphi} \in (0, r)$ имеем $\arg w = \frac{\varphi + 2\pi l}{n}$, $\arg(w^{n/2}) = \frac{\varphi}{2} + \pi l$, откуда по второй формуле для

$\eta(z, w)$ имеем $\eta = -\operatorname{sgn}\left(\frac{z}{w^{n/2}}\right) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{e^{i\varphi/2}}{w^{n/2}} \cdot \frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right) = (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right)$. Наконец при $w^n e^{-i\varphi} \notin [0, r]$ имеем $\arg w \in \left(\frac{\varphi+2\pi l}{n}, \frac{\varphi+2\pi(l+1)}{n}\right)$, $\arg(w^{n/2}) \in \left(\frac{\varphi}{2} + \pi l, \frac{\varphi}{2} + \pi(l+1)\right)$, откуда по первой формуле для $\eta(z, w)$ имеем $\eta = \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}\right) = \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im} \frac{e^{i\varphi/2}}{w^{n/2}}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right) = (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right)$. Здесь мы применили равенство $\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im} \frac{u}{v}\right) = \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im} \frac{1}{v}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} u)$ при $u^2 + v^2 = 1$, $v \rightarrow 0$, $v \notin \mathbb{R}$, положив $u := \frac{z}{r^{1/2} e^{i\varphi/2}}$, $v := \frac{w^{n/2}}{r^{1/2} e^{i\varphi/2}}$. Отсюда $\eta = (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right) = (-1)^{l-\tilde{l}-1} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2+2\pi\tilde{l}}}\right) = (-1)^{l-\tilde{l}-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{\hat{z}}{e^{i\hat{\varphi}/2}}\right) = (-1)^{l-\tilde{l}} \hat{\eta}$ ввиду $\varphi + 2\pi\tilde{l} \rightarrow \hat{\varphi}$.

Для любого $l_0 \in \mathbb{Z} \cap [0, n-1]$ обозначим через $\bar{V}_{\varepsilon, n, l_0}^4$ множество всех точек $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon, n}^4$, для которых $l - \tilde{l} = l_0$. Тогда при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$ и $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon, n, l_0}^4$ имеем $\eta(z, w) = (-1)^{l_0} \hat{\eta} =: \eta_0$ (см. выше), и в силу $\varphi + 2\pi\tilde{l} \rightarrow \hat{\varphi}$ выполнено

$$\arg \alpha_{r, \varphi, l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi l_0}{n}, \quad h_1(z, w) \in (0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times \{\eta_0 h \mid h \in [0_{\eta_0}, 1]\},$$

и $h_1(z, w)$ вычисляется по первой или второй формуле, откуда $h_1(z, w) \rightarrow (\hat{r}, \hat{\varphi}, -\eta_0 \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi l_0}{n}, 0_{\eta_0})$. Полученная предельная точка $(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\eta_0 \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi l_0}{n}, 0_{\eta_0}) \sim (\hat{r}, \hat{\varphi}, \frac{\hat{\varphi} - \eta_0 \pi + 2\pi l_0}{n}, 0_-) \in M_{\varepsilon, n}^4$ не зависит от l_0 и совпадает с точкой $h_1(\hat{z}, \hat{w}) = (\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + \pi}{n}, 0_{\hat{\eta}}) \sim (\hat{r}, \hat{\varphi}, \frac{\hat{\varphi} - \hat{\eta} \pi}{n}, 0_-)$ в силу $\eta_0 = (-1)^{l_0} \hat{\eta}$ и соотношений $\sim_{1, k}$ при $t = \pm\pi$.

Д. Исчезающий граф (“перетяжка”) на особом слое — особая точка. Пусть $\hat{r} = 0$, $\hat{w} = 0$. Тогда $\hat{z} = 0$ и $h_1(\hat{z}, \hat{w}) = \hat{h}_1(0, 0) = (0, 0, 0, 0_-)$ по третьей формуле в определении $h_1(z, w)$. При $(z, w) \rightarrow (0, 0)$ имеем $r \rightarrow 0$ (т.е. слой стремится к особому) и $w \rightarrow 0$, откуда $|\alpha_{r, \varphi, l}(w)| \rightarrow 0$ независимо от φ, l , т.е. точка $h_1(z, w)$ стремится к исчезающему графу $\{(0, 0)\} \times S^1 \times \{0_-\}$ в особом слое $\{(0, 0)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \cup [0_+, 1])$. Так как в $M_{\varepsilon, n}^4$ указанный граф отождествляется в точку $(0, 0, 0, 0_-)$, имеем $h_1(z, w) \rightarrow (0, 0, 0, 0_-) = \hat{h}_1(0, 0)$.

Шаг 5. Покажем, что отображение h_1 инъективно. Пусть $h_1(z_1, w_1) =$

$h_1(z_2, w_2) =: (r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h)$. Тогда $z_1^2 + w_1^n = z_2^2 + w_2^n = re^{i\varphi}$. Если $h \notin \{0_-, 0_+\}$, то каждое $h_1(z_j, w_j)$ и каждое $\eta(z_j, w_j)$ вычисляются по первым формулам, $j = 1, 2$; в силу $h = \eta_1 \frac{|\alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1)|^{-r^{1/n}}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} = \eta_2 \frac{|\alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2)|^{-r^{1/n}}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} \neq 0$ и $\psi = -\eta_1 \arg \alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1) = -\eta_2 \arg \alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2)$ имеем $\operatorname{sgn} h = \eta_1 = \eta_2 =: \eta$ и $\alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1) = \alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2) =: \alpha$, отсюда $\arg \alpha \in [\frac{\varphi+2\pi l_j}{n}, \frac{\varphi+2\pi(l_j+1)}{n})$, $j = 1, 2$, поэтому $l_1 = l_2$ и (поскольку $\alpha_{n,\varphi_0,a,b}$ — гомеоморфизм, см. шаг 2) $w_1 = w_2$, а в силу $\eta = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z_1}{w_1^{n/2}}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z_2}{w_2^{n/2}})$ имеем $z_1 = z_2$, т.е. $(z_1, w_1) = (z_2, w_2)$. Если $h \in \{0_-, 0_+\}$ и $r = 0$, то каждое $h_1(z_j, w_j)$ вычисляется по третьей формуле и поэтому $(z_j, w_j) = (0, 0)$, $j = 1, 2$.

Пусть $h \in \{0_-, 0_+\}$ и $r > 0$, тогда каждое $h_1(z_j, w_j)$ вычисляется по второй формуле, $j = 1, 2$. Без ограничения общности считаем, что $h = 0_-$. По построению имеем $\arg(\alpha_{r,\varphi,l_j}(w_j)) = \frac{\varphi+t_j+2\pi l_j}{n}$ для некоторого $t_j \in [0, \pi]$, откуда $h_1(z_j, w_j) = (r, \varphi, -\eta_j \frac{\varphi+t_j+2\pi l_j}{n}, 0_{\eta_j}) \sim_{1,l_j} (r, \varphi, \frac{\varphi-\eta_j t_j+2\pi l_j}{n}, 0_-) \sim_1 (r, \varphi, \psi, 0_-)$, где $\eta_j := \eta(z_j, w_j)$, $j = 1, 2$. Поэтому в случае $\psi \in \frac{\varphi+\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$ имеем $t_1 = t_2 = \pi$ и $w_1 = w_2 = 0$, $l_1 = l_2 = 0$, $\psi = \frac{\varphi-\eta_j \pi}{n}$, $j = 1, 2$, откуда $\eta_1 = \eta_2$; а в случае $\psi \notin \frac{\varphi+\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$ имеем $0 \leq t_j < \pi$ и $w_j \neq 0$, откуда $\arg w_j = \frac{\varphi+2\pi l_j}{n}$, $\psi = \frac{\varphi+2\pi l_j - \eta_j t_j}{n}$, $j = 1, 2$, поэтому $l_1 = l_2 =: l$, $t_1 = t_2$, $\eta_1 = \eta_2$ (так как при $t_j = 0$ имеем $\eta_j = -1$ по третьей формуле), откуда $\alpha_{r,\varphi,l}(w_1) = \alpha_{r,\varphi,l}(w_2)$, поэтому $w_1 = w_2$ (так как $\alpha_{n,\varphi_0,a,b}$ — гомеоморфизм, см. шаг 2). Если $\psi \in \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$, то $t_1 = t_2 = 0$ и $z_1 = z_2 = 0$; а если $\psi \notin \frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ или $\psi \in \frac{\varphi+\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$, то $\eta_1 = \eta_2$ вычисляются по второй (соответственно четвертой) формуле, откуда $z_1 = z_2$. Значит, $(z_1, w_1) = (z_2, w_2)$.

Шаг 6. Докажем, что $h_1(\overline{V}_{\varepsilon,n}^4) = M_{\varepsilon,n}^4$. Рассмотрим любую точку $(r, \varphi, \psi, h) \in M_{\varepsilon,n}^4$. Аналогично шагу 5 показывается, что в каждом случае $h \notin \{0_-, 0_+\}$ и

$h \in \{0_-, 0_+\}$ имеется точка $(z, w) \in \overline{V}_{\varepsilon, n}^4$, такая что $h_1(z, w) = (r, \varphi, \psi, h)$.

Так как отображение h_1 непрерывно, биективно и определено на компакте $\overline{V}_{\varepsilon, n}^4$, то оно является гомеоморфизмом. Утверждение 3.2.1 доказано. \square

Предложение 3.2.3 ((топология слоения в замкнутой окрестности критической точки нечетной кратности)). *При нечетном $n \in \mathbb{N}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $g = g_n : \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z, w) = z^2 + w^n + \xi_0$, топологически эквивалентна функции $q = q_n : M_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_{\varepsilon, n}^4 = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim$, отношение эквивалентности \sim порождено следующими $n + 1$ отношениями:*

$$\begin{aligned} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi+t+2\pi k}{n} \bmod 4\pi, 0) &\sim_{1,k} (r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi-t+2\pi k}{n} + 2\pi \bmod 4\pi, 0), \\ (0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) &\sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h), \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$0 \leq k < n$, $r \in [0, \varepsilon]$, $\varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\psi \bmod 4\pi \in \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $h \in [-1, 0]$, $q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0$. При этом $g(\overline{V}_{\varepsilon, n}^4) = q(M_{\varepsilon, n}^4) = \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$.

Замечание 3.2.4. (А) (Исчезающий граф). Аналогично замечанию 3.2.2, пространство $M_{\varepsilon, n}^4 := ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim$ получено из тривиально расслоенного пространства $\tilde{M}_{\varepsilon, n}^4 := [0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]$ путем отождествлений, описанных в (3.2.3) и имеющих следующий “геометрический” смысл. В пространстве $\tilde{M}_{\varepsilon, n}^4$ каждый слой является цилиндром $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]$, причем первое соотношение \sim_1 , порожденное набором соотношений $\sim_{1,k}$ формулы (3.2.3), $0 \leq k < n$, превращает слой в связную двумерную поверхность рода $\frac{n-1}{2}$ с связным краем, отождествляя точки “верхнего” основания цилиндра, разбитого на $2n$ равных дуг (которые пометим после-

довательно символами $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ при положительном обходе основания цилиндра, причем разбиение на дуги повернуто на угол $\frac{\varphi}{2n} \bmod 2\pi$ в направлении ориентации этого основания), при помощи попарного склеивания соответствующих дуг с обращением ориентации. На каждом слое $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim_1$ получаем граф $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times \{0\}) / \sim_1$ с двумя вершинами и n ребрами a_1, \dots, a_n , каждое из которых соединяет обе вершины, гомеоморфный графу $K_{2,n}$ и называемый *исчезающим графом для функции g_n* . (При $n = 1$ исчезающий граф является отрезком.) Оставшееся соотношение \sim_2 в (3.2.3) отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim_1$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$ (особый слой). Из соотношений в (3.2.3) следует, что на особом слое исчезающий граф склеивается в точку (“перетяжка” на особом слое). Таким образом, семейство исчезающих графов на неособых слоях стремится к особой точке (“исчезает”) при стремлении слоя к особому.

(Б) Из (А) и доказательства утверждения 3.2.3 следует, что для исчезающего графа α_ξ на неособом слое $T_\xi = g_n^{-1}(\xi)$, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \setminus \{\xi_0\}$, верна та же формула что и в замечании 3.2.2(Б).

утверждения 3.2.3. Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 3.2.1. При этом гомеоморфизм $h_1 : \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow M_{\varepsilon, n}^4$ при нечетном n определяется формулой

$$h_1(z, w) := \begin{cases} \left(r, \varphi, 2 \arg(\sqrt{\alpha(w)}), -\frac{|\alpha(w)| - r^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} \right), & (z, w) \neq (0, 0), \\ (0, 0, 0, 0), & (z, w) = (0, 0), \end{cases}$$

где вторая и третья координаты точки $h_1(z, w) \in M_{\varepsilon, n}^4$ рассматриваются по модулю 2π и 4π соответственно, $z^2 + w^n = re^{i\varphi}$, $r \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$\varphi := 0$ при $r = 0$, функции $l = l(r, \varphi, w) \in \mathbb{Z} \cap [0, n - 1]$ и $\alpha(w) = \alpha_{r, \varphi, l}(w)$ определяются теми же формулами как в доказательстве утверждения 3.2.1 (см. шаг 3), причем в качестве функции $\sqrt{\alpha(w)}$ берется ее ветвь, такая что при $|w| = (2\varepsilon)^{1/n}$, $z^2 + w^n = re^{i\varphi}$ и $r \in [0, \varepsilon]$ выполнено $\operatorname{Im} \frac{z}{(\sqrt{\alpha(w)})^n} < 0$. \square

Следствие 3.2.5 ((топология слоения в окрестности морсовской критической точки)). *Для любого $\varepsilon > 0$ функция $g : \bar{V}_\varepsilon^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\bar{V}_\varepsilon^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^2| \leq \varepsilon, |w| \leq \sqrt{2\varepsilon}\} \subset \mathbb{C}^2$, $g(z, w) = z^2 + w^2 + \xi_0$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, топологически эквивалентна функции $q : M_\varepsilon^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_\varepsilon^4 = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$, отношение эквивалентности \sim в определении M_ε^4 порождено следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} (r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, 0_+) \sim_1 (r, \varphi \bmod 2\pi, -\psi + \varphi \bmod 2\pi, 0_-), \\ (0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, v) \sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, v), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$0_+ := 0 \in [0_+, 1]$, $0_- := 0 \in [-1, 0_-]$, $0 \leq r \leq \varepsilon$, $\varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\psi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $h \in [-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1]$, $q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = re^{i(\varphi \bmod 2\pi)} + \xi_0$, и $g(\bar{V}_\varepsilon^4) = q(M_\varepsilon^4) = \bar{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$.

3.3 Топология слоения в окрестности слоя

(полулокальная топологическая классификация особенностей)

На протяжении данного параграфа обозначим $l := \bigcup_{j=1}^k l_j$, где $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ — набор кратностей всех особых точек p_1, \dots, p_k на слое $T_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$. При $k = 0$ положим $l := 0$. Обозначим через $M_{g,b}^2$ компактную связную ориентированную поверхность рода $g \geq 0$, край которой состоит из $b \geq 0$ компонент.

Она гомеоморфна сфере с g ручками, из которой выкинуты внутренности b попарно непересекающихся замкнутых двумерных дисков. Обозначим через $M_{g,h,b}^2$ связную ориентированную поверхность, полученную из компактной поверхности $M_{g,b}^2$ выкидыванием h внутренних точек.

Лемма 3.3.1. Пусть $T_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$ — (особое или неособое) множество уровня гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ степени $n \geq 2$, содержащее ровно $k \geq 0$ критических точек $p_1, \dots, p_k \in T_{\xi_0}$, причем кратности этих точек равны $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ соответственно, $l_1, \dots, l_k \geq 2$. Тогда $l \leq n$, $l < n + k$ и существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существуют замкнутые четырехмерные окрестности $\overline{U}_{j,\varepsilon}^4$ точек p_j , $1 \leq j \leq k$, такие что:

(А) функция $f|_{\overline{U}_{j,\varepsilon}^4}$ эквивалентна функции $g_{l_j} : \overline{V}_{\varepsilon,l_j}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $g_{l_j}(z, \tilde{w}) = z^2 + \tilde{w}^{l_j} + \xi_0$, см. (3.1.2) и (3.2.1), а также топологически эквивалентна функции $q_{l_j} : M_{\varepsilon,l_j}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ (см. утверждения 3.2.1 и 3.2.3), $j = 1, \dots, k$;

(Б) функция $f|_{\overline{(f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,\varepsilon}^4))}}$ топологически эквивалентна функции $f_0 :$

$\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \rightarrow \mathbb{C}$, $(\xi, x) \mapsto \xi$, где $L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} := \overline{T_{\xi_0} \setminus (\bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,\varepsilon}^4)}$ — комплексное многообразие с краем, $\dim_{\mathbb{C}} L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} = 1$, гомеоморфное либо $M_{g,h,b}^2$ при $n > l$ или существовании хотя бы одного нечетного l_j , либо $M_{0,1,k}^2 \sqcup M_{0,1,k}^2$ при $n = l$ (откуда $k > 0$) и всех четных l_j , где $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - \sum_{j=1}^k \lfloor \frac{l_j}{2} \rfloor$, $h = \frac{3+(-1)^n}{2}$,

$$b = \sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}.$$

Доказательство. Неравенства $l \leq n$, $l < n + k$ следуют из следствия 3.1.18.

Для каждой точки $p_j = (0, w_{0,j})$ рассмотрим замкнутые окрестности $\overline{U}_{j,\varepsilon}^2$ и $\overline{U}_{j,\varepsilon}^4 \subset \mathbb{C} \times \overline{U}_{j,\varepsilon}^2$ точек $w_{0,j}$ и p_j соответственно, а также диффеоморфизмы

$\varphi_j : \bar{U}_{j,\varepsilon}^2 \rightarrow \bar{D}_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2$, $\varphi_j : w \mapsto \tilde{w}$, и $(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi_j)|_{\bar{U}_{j,\varepsilon}^4} : \bar{U}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \bar{V}_{\varepsilon,l_j}^4$ как в лемме 3.1.16 и ее доказательстве, $1 \leq j \leq k$. Выберем столь малое $\varepsilon_1 > 0$, что $\bar{U}_{j,\varepsilon}^4$, $1 \leq j \leq k$, попарно не пересекаются. Пункт (А) следует из леммы 3.1.16 и утверждений 3.2.1 и 3.2.3. Докажем (Б). Положим $U_{j,\varepsilon}^2 := \varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2)$, $U_{j,\varepsilon}^4 := ((\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi_j)|_{\bar{U}_{j,\varepsilon}^4})^{-1}(V_{\varepsilon,l_j}^4)$, $1 \leq j \leq k$, см. (3.2.1).

Шаг 1. При любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\xi \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$ рассмотрим отображение $\text{Pr}_w|_{\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)} :$
 $\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^2)$, $(z, w) \mapsto w$. Оно является двулиственным разветвленным накрытием с $n-l$ точками ветвления над поверхностью $\mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^2) \approx M_{0,1,k}^2$. При $n > l$ накрывающее пространство $\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ связно, так как накрытие двулистно и имеет точки ветвления. При $n = l$ накрытие двулистно и не имеет точек ветвления; над компонентой края $\partial U_{j,\varepsilon}^2$ накрытие тривиально тогда и только тогда, когда l_j четно, в проколотовой окрестности “бесконечно удаленной точки” $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ накрытие тривиально тогда и только тогда, когда $l = \sum_{j=1}^k l_j$ четно, поэтому накрывающее пространство $\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ несвязно при всех четных l_j , и связно, если хотя бы одно l_j нечетно. Значит, при $n = l$ и всех четных l_j накрывающее пространство гомеоморфно несвязному объединению двух экземпляров поверхности $M_{0,1,k}^2$.

Пусть накрывающее пространство связно. Тогда количество h проколов равно $\frac{3+(-1)^n}{2}$, см. доказательство леммы 3.1.15, а количество $b = |\pi_0(\partial(\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)))|$ компонент связности границы равно $\sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}$ в силу утверждений 3.2.1 и 3.2.3. По формуле Гурвица имеем $\chi(\text{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)) = 2\chi(\mathbb{C} \setminus$

$(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^2)) - (n - l) = 2 - 2k - n + l$. Отсюда и из равенств $h = \frac{3+(-1)^n}{2}$,

$$b = \sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}, \quad \chi(\mathbb{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)) = 2 - 2g - h - b \text{ получаем } g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - \sum_{j=1}^k \lfloor \frac{l_j}{2} \rfloor.$$

Шаг 2. Для любого $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$ рассмотрим двулистное разветвленное накрытие $\text{Pr}_w|_{\mathbb{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)} : \mathbb{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^2), (z, w) \mapsto w$. Точки ветвления

задаются уравнениями $z = 0, P_n(w) = \xi$ и $(z, w) \notin \bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,\varepsilon}^4$. Последнее соот-

ношение равносильно $w \notin \bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,\varepsilon}^2$. Обозначим образы точек ветвления при отображении $\text{Pr}_w|_{\mathbb{T}_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)}$ через $w_i(\xi), 1 \leq i \leq n - l$. Рассмотрим $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_1]$

и $\tau > 0$ такие, что $w_i(\xi) \in D_{w_i(\xi_0),\tau}^2$ и $\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2 \cap (\bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,\varepsilon}^2) = \emptyset$ при $1 \leq i \leq n - l$,

а также $\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2 \cap \overline{D}_{w_{i_1}(\xi_0),\tau}^2 = \emptyset$ при $1 \leq i < i_1 \leq n - l$, для любого $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon_0}^2$.

Рассмотрим при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ семейство отображений

$$\tilde{\varphi}_\xi : (f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)) \setminus ((\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4) \cup (\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w)^{-1}(D_{w_i(\xi_0),\tau}^2))) \rightarrow$$

$$\mathbb{T}_{\xi_0} \setminus ((\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4) \cup (\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w)^{-1}(D_{w_i(\xi_0),\tau}^2))),$$

$(z, w) \mapsto (\sqrt{\xi_0 - P_n(w)}, w), \xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$, где ветвь $\sqrt{\quad}$ выбрана так, что $\tilde{\varphi}_{\xi_0} = \text{id}$.

Определим отображение $\tilde{\rho}_{\tau,r} : [-\tau, \tau] \rightarrow [-\tau, \tau]$ формулой $\tilde{\rho}_{\tau,r}(x) = \frac{\tau^2 x + r\tau^2}{rx + \tau^2}$ при любых $r \in \mathbb{R}, \tau > |r|$. Тогда отображение $\tilde{\rho}_{\tau,r}$ при $r \in (-\tau, \tau)$ является гомеоморфизмом, причем $\tilde{\rho}_{\tau,r}(0) = r$ и $\tilde{\rho}_{\tau,0} = \text{id}_{[-\tau,\tau]}$. Определим отображение

$\rho_{\tau,r} : \overline{D}_{0,\tau}^2 \rightarrow \overline{D}_{0,\tau}^2$ формулой

$$\rho_{\tau,r}(x, y) = \begin{cases} (\tilde{\rho}_{\tau,r}(\sqrt{\tau^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2})(x), y), & |y| \leq r; \\ (x, y), & |y| \geq r. \end{cases}$$

Тогда отображение $\rho_{\tau,r}$ при $r \in (-\tau, \tau)$ является гомеоморфизмом, причем $\rho_{\tau,r}|_{\partial D_{0,\tau}^2}$ — тождественное отображение, $\rho_{\tau,r}(0,0) = (r,0)$ и $\rho_{\tau,0} = \text{id}_{\overline{D}_{0,\tau}^2}$. Для каждого $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$ и $1 \leq i \leq n-l$ определим отображение

$$\tilde{\varphi}_{\xi,i} : \mathbb{T}_\xi \cap ((\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2)) \rightarrow \mathbb{T}_{\xi_0} \cap ((\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2))$$

формулой $\tilde{\varphi}_{\xi,i} : (z,w) \mapsto (\sqrt{\xi_0 - P_n(\tilde{w}_{\xi,i}(w))}, \tilde{w}_{\xi,i}(w))$, где ветвь функции $\sqrt{\quad}$ выбрана так, что $\tilde{\varphi}_{\xi_0,i} = \text{id}$, а гомеоморфизм $\tilde{w}_{\xi,i} : \overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2 \rightarrow \overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2$ определен условиями $\tilde{w}_{\xi,i} := \text{id}$ при $w_i(\xi) = w_i(\xi_0)$,

$$\tilde{w}_{\xi,i}(w) := e^{i \arg(w_i(\xi) - w_i(\xi_0))} (\rho_{\tau,|w_i(\xi) - w_i(\xi_0)|})^{-1} \left(e^{-i \arg(w_i(\xi) - w_i(\xi_0))} (w - w_i(\xi_0)) \right) + w_i(\xi_0)$$

при $w_i(\xi) \neq w_i(\xi_0)$. Тогда отображение $\tilde{\varphi}_{\xi,i}$ является гомеоморфизмом, причем $\tilde{\varphi}_{\xi,i}(0, w_i(\xi)) = (0, w_i(\xi_0))$.

Шаг 3. Определим семейство отображений $\varphi_\xi : \mathbb{T}_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \rightarrow \mathbb{T}_{\xi_0} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right)$, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$, формулой

$$\varphi_\xi(z,w) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_\xi(z,w), & (z,w) \in \mathbb{T}_\xi \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2) \right) \right); \\ \tilde{\varphi}_{\xi,i}(z,w), & (z,w) \in \mathbb{T}_\xi \cap (\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2), \quad 1 \leq i \leq n-l. \end{cases}$$

Тогда отображение φ_ξ корректно определено и является гомеоморфизмом.

Определим отображение $h_2 : (f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \rightarrow \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ формулой $h_2 : (z,w) \mapsto (f(z,w), \varphi_{f(z,w)}(z,w))$. Тогда h_2 является гомеоморфизмом и $f|_{(f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right)} = f_0 \circ h_2$. Лемма 3.3.1 доказана. \square

Пусть, как выше, $l := \sum_{j=1}^k l_j$, $\varepsilon > 0$, обозначим $\overline{V}_{j,\varepsilon}^4 := \overline{V}_{\varepsilon,l_j}^4$,

$$\partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^{l_j}| \leq \varepsilon, |w| = (2\varepsilon)^{1/l_j}\} = \overline{V}_{\varepsilon,l_j}^4 \setminus V_{\varepsilon,l_j}^4,$$

$1 \leq j \leq k$, см. (3.2.1), $L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \approx M_{n,k,l_1,\dots,l_k}^2$, где $M_{n,k,l_1,\dots,l_k}^2 := M_{g,h,b}^2$ (при $n > l$ или существовании нечетного l_j), $M_{n,k,l_1,\dots,l_k}^2 := M_{0,1,k}^2 \sqcup M_{0,1,k}^2$ (при $n = l$ и всех четных l_j) как в лемме 3.3.1. Фиксируем ориентацию на $M_{n,k,l_1,\dots,l_k}^2 \approx L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ и рассмотрим любой гомеоморфизм

$$\gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k} : \bigsqcup_{j=1}^k ((\mathbb{R}/(3 - (-1)^{l_j})\pi\mathbb{Z}) \times \{j\} \times \{(-1)^{l_j}, -1\}) \rightarrow \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k},$$

такой что поверхность $L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ лежит справа при прохождении вдоль каждого из своих граничных путей $\gamma_{j,\eta}(\psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi) := \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}(\psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi, j, \eta) \in \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$, $\eta \in \{(-1)^{l_j}, -1\}$, $1 \leq j \leq k$.

Теорема 24 ((топология слоения в замкнутой окрестности слоя)). Пусть $\Gamma_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$ – (особое или неособое) множество уровня гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ степени $n \geq 2$, содержащее ровно $k \geq 0$ критических точек $p_1, \dots, p_k \in \Gamma_{\xi_0}$, причем кратности этих точек равны $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ соответственно, $l_1, \dots, l_k \geq 2$. Тогда $l \leq n$, $l < n + k$ и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функция $f|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2)}$ топологически эквивалентна функции $f_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} : M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4 \rightarrow \mathbb{C}$. Здесь

$$\begin{aligned} M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4 &= \left(\bigsqcup_{j=1}^k \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \right) \bigcup_{\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}} (\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}) \\ &:= \left(\left(\bigsqcup_{j=1}^k \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \right) \bigsqcup (\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}) \right) / (x \sim \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(x)) \end{aligned}$$

получено из несвязного объединения множеств $\overline{V}_{j,\varepsilon}^4$, $1 \leq j \leq k$, и множества $\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ отождествлением любой точки $x \in \partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4$ с ее образом при гомеоморфизме $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} : \bigsqcup_{j=1}^k \partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$,

задаваемых формулами

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, w) := (z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}((\arg w) \bmod 2\pi, j, \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{l_j/2}})))$$

при четном l_j и $(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$,

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, w) := (z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}(2 \arg(\sqrt{w}) \bmod 4\pi, j, -1))$$

при нечетном l_j и $(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$, где ветвь \sqrt{w} при нечетном l_j и $(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ определена условием $\operatorname{Im} \frac{z}{(\sqrt{w})^{l_j}} < 0$, $1 \leq j \leq k$, а функция f_{n,k,l_1,\dots,l_k} задается формулами

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4}(z, w) = z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \quad (z, w) \in \bar{V}_{j,\varepsilon}^4, \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}}(\xi, x) = \xi, \quad (\xi, x) \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}.$$

При отождествлении $\bar{V}_{j,\varepsilon}^4 \approx M_{\varepsilon,l_j}^4$ с помощью топологической эквивалентности из утверждений 3.2.1 и 3.2.3 “приклеивающий” гомеоморфизм $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}|_{\partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4}$ имеет вид

$$((([0, \varepsilon] \times S^1) / \sim) \times S^1 \times \{(-1)^{l_j}, -1\}) \rightarrow \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k},$$

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi, \eta) \mapsto (re^{i\varphi} + \xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}(-\eta\psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi, j, \eta)),$$

$\eta \in \{(-1)^{l_j}, -1\}$, где отношение эквивалентности \sim порождено отношениями $(0, \varphi \bmod 2\pi) \sim (0, 0 \bmod 2\pi)$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$, а функция $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4}$ имеет вид

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi, h) \mapsto re^{i\varphi} + \xi_0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

При этом $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4) = \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что поверхность $L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \subset T_{\xi_0}$ определена как в лемме 3.3.1(Б), ориентация на ней индуцирована комплексной структурой, и гомеоморфизм $\gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k} = \gamma_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ (параметризующий $\partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$) определен формулой

$$\gamma_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(\psi \bmod (3 - (-1)^{l_j})\pi, j, \eta) = (\eta i \sqrt{2\varepsilon} e^{il_j\psi/2}, \varphi_j^{-1}((2\varepsilon)^{1/l_j} e^{i\psi})),$$

$\eta \in \{(-1)^{l_j}, -1\}$, где диффеоморфизмы $\varphi_j : w \mapsto \tilde{w}$ как в доказательстве лемм 3.1.16 и 3.3.1, $1 \leq j \leq k$. Приклеивающее отображение $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ определено корректно, так как из $(z, \tilde{w}) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ и $\frac{z}{\tilde{w}^{l_j/2}} =: \lambda \in \mathbb{R}$ следует $\varepsilon \geq |z^2 + \tilde{w}^{l_j}| = (\lambda^2 + 1)|\tilde{w}^{l_j}| = (\lambda^2 + 1)2\varepsilon \geq 2\varepsilon$; оно сюръективно, так как при четном l_j для $(\pm i\tilde{w}^{l_j/2}, \tilde{w}) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ выполнено $\text{sgn}(\text{Im} \frac{\pm i\tilde{w}^{l_j/2}}{\tilde{w}^{l_j/2}}) = \pm 1$. Легко проверяется инъективность $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$. Отображение $f_{n,k,l_1,\dots,l_k} : M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ определено корректно, так как для любой точки $(z, \tilde{w}) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ выполнено $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4}(z, \tilde{w}) = z^2 + \tilde{w}^{l_j} + \xi_0$ и $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}} \circ \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, \tilde{w}) = z^2 + \tilde{w}^{l_j} + \xi_0$.

Согласно леммам 3.1.16 и 3.3.1, существуют $\varepsilon_0 > 0$ и набор семейств замкнутых окрестностей $\bar{U}_{j,\varepsilon}^4$ точек p_j , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функция $f|_{\bar{U}_{j,\varepsilon}^4}$ эквивалентна функции $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4} : \bar{V}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$, $1 \leq j \leq k$, а функция $f|_{f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4)}$ топологически эквивалентна функции $f_0 = f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}}$. Построим топологическую эквивалентность h между функцией $f|_{f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)}$ и функцией f_{n,k,l_1,\dots,l_k} на всем $M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4$. Рассмотрим множество $f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) = (\bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4) \cup (f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4))$. При $(z, w) \in \bar{U}_{j,\varepsilon}^4$ положим $h(z, w) = (z, \varphi_j(w)) \in \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$, $1 \leq j \leq k$, см. доказательство леммы 3.1.16. При $(z, w) \in f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4)$ положим $h(z, w) = h_2(z, w) =$

$(f(z, w), \varphi_{f(z, w)}(z, w)) \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$, см. доказательство леммы 3.3.1(Б), шаг 3. Отображение $h : f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \rightarrow M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^4$ определено корректно, так как для любой точки $(z, w) \in \overline{U}_{j, \varepsilon}^4 \cap (f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus U_{j, \varepsilon}^4)$, $1 \leq j \leq k$, выполнено:

$$\begin{aligned} \phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k} \circ h|_{\overline{U}_{j, \varepsilon}^4}(z, w) &= \phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}(z, \varphi_j(w)) \\ &= (z^2 + (\varphi_j(w))^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}(\arg \varphi_j(w) \bmod 2\pi, j, \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{(\varphi_j(w))^{l_j/2}}))) \\ &= (z^2 + P_n(w), (i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{(\varphi_j(w))^{l_j/2}})(\varphi_j(w))^{l_j/2}, w)) = (f(z, w), \varphi_{f(z, w)}(z, w)) \\ &= h_2(z, w) = h|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus U_{j, \varepsilon}^4}(z, w) \end{aligned}$$

при четном l_j , и

$$\begin{aligned} \phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k} \circ h|_{\overline{U}_{j, \varepsilon}^4}(z, w) &= \phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}(z, \varphi_j(w)) \\ &= (z^2 + (\varphi_j(w))^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}(2 \arg(\sqrt{\varphi_j(w)}) \bmod 4\pi, j, -1)) \\ &= (z^2 + P_n(w), (-i(\sqrt{\varphi_j(w)})^{l_j}, w)) = (f(z, w), \varphi_{f(z, w)}(z, w)) = h|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus U_{j, \varepsilon}^4}(z, w) \end{aligned}$$

при нечетном l_j . Здесь мы использовали, что для любых $(z, \tilde{w}) \in \partial^+ \overline{V}_{j, \varepsilon}^4$, таких что $z^2 + \tilde{w}^{l_j} = 0$, выполнено $i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{\tilde{w}^{l_j/2}}) \tilde{w}^{l_j/2} = z$ при четном l_j , $-i(\sqrt{\tilde{w}})^{l_j} = z$ при нечетном l_j .

Проверим, что h — топологическая эквивалентность функций: при $(z, w) \in \overline{U}_{j, \varepsilon}^4$ выполнено $f_{n, k, l_1, \dots, l_k} \circ h(z, w) = f_{n, k, l_1, \dots, l_k}(z, \varphi_j(w)) = z^2 + (\varphi_j(w))^{l_j} + \xi_0 = z^2 + P_n(w) = f(z, w)$, при $(z, w) \in f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4)$ выполнено $h(z, w) = h_2(z, w) \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$, $f_{n, k, l_1, \dots, l_k} \circ h(z, w) = f_{n, k, l_1, \dots, l_k}(f(z, w), \varphi_{f(z, w)}(z, w)) = f(z, w)$, откуда $f = f_{n, k, l_1, \dots, l_k} \circ h$.

Вторая часть теоремы следует из того, что в доказательстве утверждений 3.2.1 и 3.2.3 ограничение гомеоморфизма $h_1 : \overline{V}_{\varepsilon, l_j}^4 \rightarrow M_{\varepsilon, l_j}^4$ на $\partial^+ \overline{V}_{\varepsilon, l_j}^4$

действует по формуле $(z, \tilde{w}) \mapsto (r, \varphi \bmod 2\pi, -\eta \arg(\tilde{w}) \bmod 2\pi, \eta)$ при четном l_j , и $(z, \tilde{w}) \mapsto (r, \varphi \bmod 2\pi, 2 \arg(\sqrt{\tilde{w}}) \bmod 4\pi, -1)$ при нечетном l_j , где $re^{i\varphi} = z^2 + \tilde{w}^{l_j}$, $\eta := \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{\tilde{w}^{l_j/2}})$ при четном l_j , $\operatorname{Im} \frac{z}{(\sqrt{\tilde{w}})^{l_j}} < 0$ при нечетном l_j . Теорема доказана. □

Глава 4

Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических гамильтонианов

4.1 Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических гамильтонианов нечетной степени

Введем некоторые обозначения и сформулируем технические леммы 4.1.1, 4.1.2 и вытекающие из них утверждения 4.1.4, 4.1.6 и следствия 4.1.3, 4.1.8, необходимые для понимания основного результата параграфа — теоремы 25.

Лемма 4.1.1. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_N(w)$, где $P_N(w)$ — любой многочлен степени $N \geq 1$ с комплексными коэффициентами, не имеющий кратных корней, $T_0 = f^{-1}(0)$. Тогда:

(A) Отображение $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$, является двулиственным разветвленным накрытием и переводит векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$ в векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0})$, корректно определенное с точностью до знака, т.е. для любых $(z_1, w), (z_2, w) \in T_0$ таких, что $z_1 \neq z_2$, верно $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_1, w)) = -(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_2, w))$;

(Б) Если все коэффициенты многочлена P_N вещественны, то определенное с точностью до знака векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0})$ на \mathbb{C}_w симметрично относительно отражения относительно вещественной прямой, т.е. инвариантно относительно диффеоморфизма $\mathbb{C}_w \rightarrow \mathbb{C}_w$, $w \mapsto \bar{w}$.

Доказательство. (А) В точке $(z, w) \in T_0$ выполнено $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w) = (-P'_N(w), 2z)$, поэтому $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w)) = 2z\partial/\partial w$. Очевидно, любые два прообраза $(z_1, w), (z_2, w) \in T_0$ точки $w \in \mathbb{C}_w$ связаны соотношением $z_1 = -z_2$. Поэтому $\text{Pr}_w|_{T_0}$ является разветвленным двулистным накрытием и $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_1, w)) = 2z_1\partial/\partial w = -2z_2\partial/\partial w = -(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_2, w))$.

(Б) Определим отображение $\text{sym} : T_0 \rightarrow T_0$, заданное формулой $(z, w) \mapsto (\bar{z}, \bar{w})$. Отображение sym определено корректно, поскольку если $z^2 + P_N(w) = 0$, то $\bar{z}^2 + P_N(\bar{w}) = \overline{z^2 + P_N(w)} = 0$, где первое равенство выполнено ввиду того, что все коэффициенты многочлена $P_N(w)$ вещественны. Из равенств

$$(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w)) = ((\text{Pr}_w)_*\text{sgrad}_{\mathbb{C}f})(\text{Pr}_w(w)) = ((\text{Pr}_w)_*\text{sgrad}_{\mathbb{C}f})(w),$$

$$\text{Sym} \circ \text{Pr}_w = \text{Pr}_w \circ \text{sym},$$

$$\text{sym}_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w)) = \overline{(-P'_N(w), 2z)} = \text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(\text{sym}(z, w))$$

следует, что

$$\begin{aligned} \text{Sym}_*((\text{Pr}_w)_*\text{sgrad}_{\mathbb{C}f})(w) &= \text{Sym}_*((\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w))) \\ &= (\text{Pr}_w)_*(\text{sym}_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w))) = (\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(\text{sym}(z, w))) \\ &= (\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(\bar{z}, \bar{w})) = ((\text{Pr}_w)_*\text{sgrad}_{\mathbb{C}f})(\bar{w}) = ((\text{Pr}_w)_*\text{sgrad}_{\mathbb{C}f})(\text{Sym}(w)). \end{aligned}$$

□

Лемма 4.1.2 ((нормализация гиперэллиптического многочлена нечетной степени и 2-формы $dz \wedge dw$ в “бесконечно удаленных точках”). Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w)$ — любой многочлен степени $2n + 1$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и голоморфное вложение $h : D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$, такие что

$$f \circ h(\xi, u) = \xi, \quad h^*(dz \wedge dw) = u^{2n-2} d\xi \wedge du, \quad (\xi, u) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}),$$

причем $\lim_{u \rightarrow 0} |h(\xi, u)| = \infty$ равномерно по $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$, и дополнение множества $h(D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}))$ в $M_\varepsilon^4 := f^{-1}(D_{0,\varepsilon}^2)$ ограничено в \mathbb{C}^2 . В частности, имеется комплексное 2-мерное связное многообразие $\widetilde{M}_\varepsilon^4$ с комплексно-аналитическим атласом из двух карт, полученное из $M_\varepsilon^4 \subset \mathbb{C}^2$ приклеиванием множества $D_{0,\varepsilon}^2 \times D_{0,\varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}^2$ при помощи вложения h . При этом $\widetilde{M}_\varepsilon^4 \setminus M_\varepsilon^4 \approx D_{0,\varepsilon}^2 \times \{0\}$ (“бесконечно удаленные” точки p_ξ , $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$).

Доказательство. См. следствие 1.3.4. □

Следствие 4.1.3. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w)$ — любой многочлен степени $2n + 1$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что поверхность уровня $\Gamma_\xi = f^{-1}(\xi)$ неособа при $\xi \in \mathbb{C}$, $0 < |\xi| < \varepsilon$. Более того, неособая поверхность уровня Γ_ξ гомеоморфна сфере с n ручками и одним проколом в бесконечно удаленной точке p_ξ . Векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{\Gamma_\xi}$ и риманова метрика пополнения ds_ξ^2 в достаточно малой проколотой окрестности $U_\xi \subset \Gamma_\xi$ бесконечно удаленной точки p_ξ имеют вид

$$\dot{u} = u^{2-2n}, \quad ds_\xi^2 = u^{2n-2} \bar{u}^{2n-2} du d\bar{u},$$

где $u : U_\xi \rightarrow D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ — “координатный” диффеоморфизм, такой что

$\lim_{g \rightarrow p_\xi} u(g) = 0$. В частности, пополнение $\overline{T_\xi} = T_\xi \cup \{p_\xi\}$ слоя T_ξ относительно римановой метрики пополнения ds_ξ^2 компактно, гомеоморфно сфере с n ручками. На $\overline{T_\xi}$ имеется гладкое поле неотрицательно определенных квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$, такое что $\overline{ds_\xi^2}|_{T_\xi} = ds_\xi^2$, $\overline{ds_\xi^2}(p_\xi) = 0$ при $n \geq 2$, и $\overline{ds_\xi^2}(p_\xi) \neq 0$ при $n = 1$.

4.1.1 Периодичность интегральных траекторий на нулевом слое

Предложение 4.1.4. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда все интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$, не являющиеся сепаратрисами (т.е. не входящие в бесконечно удаленную точку p_0 и не выходящие из нее, см. следствие 4.1.3), являются периодическими. Более того:

(A) интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ (и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$, см. лемму 4.1.1(A)), выглядят как на рис. 4.1 при $n = 3$; среди этих траекторий имеется ровно $2n - 1$ сепаратрис $s_1, \dots, s_{2n-1} \subset T_0$ (соответственно n сепаратрис $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{C}$, таких что $s_1 = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_1)$, $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$, $k = 2, \dots, n$), которые разбивают слой T_0 на n связных компонент c_1, \dots, c_n , гомеоморфных внутренности цилиндра $S^1 \times (0, 1)$ (соответственно разбивают плоскость \mathbb{C} на n областей $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{C}$, таких что $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset C_k$, $c_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n$); в каждой цилиндрической области c_k траек-

тории периодичны с периодом

$$T_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} \frac{dw}{\sqrt{-P_{2n+1}(w)}}, \quad k = 1, \dots, n;$$

всякая сепаратриса имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_0 \in \overline{T_0}$, и длины сепаратрис в метрике ds_0^2 равны $|s_{2k-2}| = |s_{2k-1}| = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} T_i$

при $k = 2, \dots, n$ и $|s_1| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} T_i$;

(Б) на слое T_0 существует набор сепаратрис d_1, \dots, d_n векторного поля $i \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$, имеющих начало и конец в бесконечно удаленной точке p_0 , таких что $d_k \subset c_k$ и их образы $\operatorname{Pr}_w|_{T_0}(d_k) = D_k$ при проекции $\operatorname{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$ содержатся в C_k , причем при $k = 1, \dots, n-1$ траектория D_k пересекает отрезок $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset \mathbb{C}_w$, а траектория D_n совпадает с лучом $[a_{2n+1}, +\infty) \subset \mathbb{C}_w$, см. рис. 4.2 при $n = 3$;

(В) упорядочивание пары сепаратрис $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\operatorname{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$ в п.(А) и выбор одной из двух сепаратрис $d_k \subset (\operatorname{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(D_k)$ в п.(Б) однозначно определены следующим условием: подмножество

$$T_0^{++} := \left\{ \left(\sqrt{-P_{2n+1}(w)}, w \right) \mid \operatorname{Im} w \geq 0 \right\} \subset T_0$$

(где в качестве функции $\sqrt{}$ выбрана ее ветвь, такая что $\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{1}{2}(a_2 + a_3))} > 0$) имеет непустое пересечение со следующими сепаратрисами: $I(d_1)$,

$$I(s_{4k}), I(d_{2k+1}), \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad s_{4k-2}, d_{2k}, \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2} \right],$$

где $I : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — инволюция, определяемая формулой $I(z, w) = (-z, w)$.

Доказательство. Обозначим множество точек, принадлежащих интегральным траекториям векторного поля $u := \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$, входящим в бесконечно

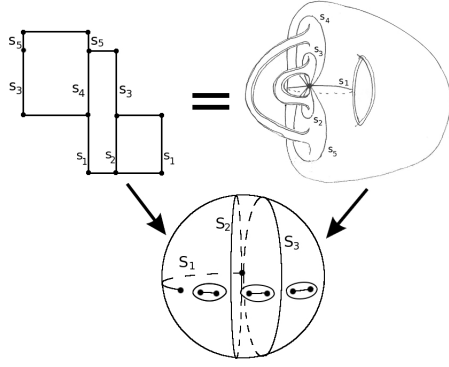


Рис. 4.1: Траектории поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$, при $n = 3$

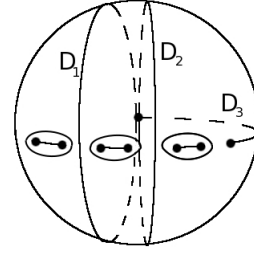


Рис. 4.2: Проекция интегральных траекторий поля $i \text{sgrad } f|_{T_0}$ на плоскость \mathbb{C}_w при $n = 3$

удаленную точку p_0 или исходящим из нее, через I_{p_0} . Пусть $T_0 \setminus I_{p_0} = \bigcup_{i=1}^N c_i$, где c_i — все различные компоненты линейной связности $T_0 \setminus I_{p_0}$, $i = 1, \dots, N$.

Из следствия 4.1.3 следует, что векторное поле $u|_{c_i}$ полно.

Шаг 1. Допустим, что существует периодическая интегральная траектория $\gamma_i \subset c_i$ для некоторого $1 \leq i \leq N$, период γ_i равен $T > 0$. Тогда покажем, что всякая интегральная траектория $\gamma \subset c_i$ является периодической с тем же периодом T .

Как выше, обозначим через u векторное поле $u = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$, через v ортогональное ему относительно римановой метрики $ds_0^2 := \text{Sym}(\Delta_0 \otimes \overline{\Delta_0})$ векторное поле $v = i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$. Поскольку $[u, v] = 0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполнено $g_v^\tau \gamma_i$ — периодическая траектория векторного поля u с периодом T , где g_v^τ — сдвиг вдоль векторного поля v на $\tau \in \mathbb{R}$. Отсюда объединение T -периодических интегральных траекторий векторного поля $u|_{c_i}$ является открытым подмножеством в T_0 (и в

c_i), которое обозначим через Γ_i .

Покажем, что множество $\Gamma_i \subset c_i$ замкнуто в c_i . Пусть точка $\hat{g} \in c_i$ является предельной точкой множества Γ_i . Так как векторное поле $u|_{c_i}$ полно и $\hat{g} \in c_i$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ определено отображение $\psi : [0, T] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow T_0$, $(t, \tau) \mapsto g_v^\tau g_u^t(\hat{g})$. В любой бесконечно малой окрестности точки \hat{g} существуют точки, через которые проходят периодические интегральные траектории поля u с периодом T (т.е. принадлежащие множеству Γ_i). Поэтому (заменяя каждую такую точку на пересечение соответствующей интегральной траектории с кривой $g_v^\tau(\hat{g})$, $\tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]$) получаем существование последовательности $\tau_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ (возможно, $\tau_j = 0$ для некоторых j), такой что $g_v^{\tau_j}(\hat{g}) \in \Gamma_i$. Поскольку $[u, v] = 0$, то $\psi : (t, \tau) \mapsto g_u^t g_v^\tau(\hat{g})$, откуда $\psi(T, \tau_j) = g_u^T g_v^{\tau_j}(\hat{g}) = g_v^{\tau_j}(\hat{g}) = \psi(0, \tau_j)$. Значит, $\psi(T, 0) = \psi(0, 0) = \hat{g}$, т.е. через точку \hat{g} проходит периодическая интегральная траектория $\gamma_{\hat{g}}$ с периодом T (и минимальным периодом T/k для некоторого $k \in \mathbb{N}$). Период T является минимальным периодом этой траектории (т.е. $k = 1$) в силу открытости объединения (T/k) -периодических траекторий, см. выше. Поэтому $\hat{g} \in \Gamma_i$, что доказывает замкнутость множества Γ_i в c_i .

Так как $\Gamma_i \neq \emptyset$, является открытым и замкнутым в c_i , то $\Gamma_i = c_i$.

Шаг 2. Рассмотрим проекцию $\text{Pr}_w : \bar{T}_0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}_w$, $(z, w) \mapsto w$. Данная проекция является двулистным разветвленным накрытием с точками ветвления $a_1, \dots, a_{2n+1}, \{\infty\} \in \bar{\mathbb{C}}_w$. Без ограничения общности пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, тогда $P_{2n+1}|_{(a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup \dots \cup (a_{2n+1}, +\infty)} > 0$ и $P_{2n+1}|_{(-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{2n}, a_{2n+1})} < 0$. Поэтому (определенное с точностью до знака) векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0}) = \pm 2\sqrt{-P_{2n+1}(w)}\partial/\partial w$ на $\bar{\mathbb{C}}_w$ касательно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{C}}$ на под-

множестве $(-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{2n}, a_{2n+1}) \subset \mathbb{R}$ и ортогонально этой прямой на подмножестве $(a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup \dots \cup (a_{2n+1}, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Шаг 3. Поскольку в окрестности точки $p_0 \in \overline{T}_0$ векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ имеет особенность полюс $2n - 2$ -го порядка, количество сепаратрис в точке p_0 равно $2(2n - 1)$, а так как точка p_0 является прообразом точки ветвления ∞ , то количество сепаратрис (определенного с точностью до знака) векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ в точке $\{\infty\} \in \overline{\mathbb{C}}_w$ равно $2n - 1$.

Изучим сепаратрисы векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$. Существует сепаратриса (обозначим ее S_1), совпадающая как множество с $(-\infty, a_1]$, см. шаг 2. Также существует n однопараметрических семейств периодических траекторий, обходящих вокруг отрезков $[a_{2k}, a_{2k+1}]$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда, применяя к векторному полю $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ и указанным n семействам периодических траекторий рассуждения, аналогичные приведенным на шаге 1, получаем, что при каждом $k = 2, \dots, n$ существует точка $a_{k,*} \in [a_{2k-1}, a_{2k}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, которая во-первых является точной верхней гранью множества точек пересечения с отрезком $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ периодических траекторий $(k - 1)$ -го семейства (обходящих вокруг отрезка $[a_{2k-2}, a_{2k-1}]$), а во-вторых принадлежит некоторой сепаратрисе, которую обозначим через S_k . Обозначим через C_k объединение всех периодических траекторий k -го семейства, $k = 1, \dots, n$. Заметим, что каждая сепаратриса S_2, \dots, S_n имеет не более одного пересечения с вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, так как в противном случае, ввиду симметричности интегральных траекторий относительно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, она была бы периодической, не проходящей через точку $\{\infty\} \in \overline{\mathbb{C}}_w$. Также, ввиду симметричности интегральных траек-

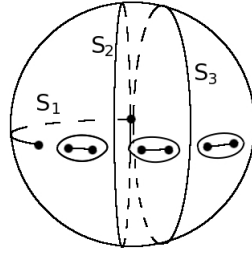


Рис. 4.3: Интегральные траектории поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{\mathbb{T}_0})$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$

торий относительно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, всякая сепаратриса S_k , проходящая через точку $a_{k,*}$, $k = 2, \dots, n$, имеет начало и конец в точке $\infty \in \overline{\mathbb{C}}_w$. Тем самым, выше описано строение всех сепаратрис векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{\mathbb{T}_0})$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$. Значит, \mathbb{C}_w есть объединение описанных выше сепаратрис S_1, \dots, S_n и заполненных периодическими траекториями областей C_1, \dots, C_n , и интегральные траектории имеют вид как на рис. 4.3.

Период периодических интегральных траекторий k -го семейства (из C_k) равен $T_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} \frac{dw}{\sqrt{-P_{2n+1}(w)}}$, $k = 1, \dots, n$, а длина $|S_k|$ сепаратрисы S_k равна $|S_k| = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} T_i$ при $k = 1, \dots, n$.

Поэтому интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{\mathbb{T}_0}$ выглядят как на рисунке 4.1. Среди этих траекторий имеется ровно $2n - 1$ сепаратрис s_i , $1 \leq i \leq 2n - 1$, которые разбивают слой \mathbb{T}_0 на n связных компонент c_k , $k = 1, \dots, n$, где каждая c_k состоит из периодических траекторий, образующих однопараметрическое семейство периодических траекторий. При этом всякая сепаратриса имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_0 \in \overline{\mathbb{T}_0}$; каждая из сепаратрис s_{2k-2} и s_{2k-1} имеет длину $|S_k|$ и биективно проецируется при двулистном накрытии $\text{Pr}_w|_{\overline{\mathbb{T}_0}} : \overline{\mathbb{T}_0} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ на сепаратрису

S_k векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$, $k = 2, \dots, n$, а сепаратриса s_1 имеет длину $|S_1|$ и двулистно проектируется на сепаратрису S_1 векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$. Также любая траектория в области c_k имеет период T_k и либо проектируется биективно на одну из периодических траекторий k -го семейства периодических траекторий векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ (из C_k), либо проектируется двулистно на отрезок $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset C_k$, $k = 1, \dots, n$.

Предложение 4.1.4 доказано. \square

Обозначение 4.1.5 ((разрезание нулевого слоя сепаратрисами на цилиндры)). В обозначениях утверждения 4.1.4 имеем разбиения

$$\mathbb{C}_w = S_1 \cup \dots \cup S_n \cup C_1 \cup \dots \cup C_n, \quad T_0 = s_1 \cup \dots \cup s_{2n-1} \cup c_1 \cup \dots \cup c_n$$

на сепаратрисы $s_1 = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_1)$, $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$, $k = 2, \dots, n$, и области-открытые цилиндры $c_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n$. Границы областей $C_k \subset \mathbb{C}$ имеют вид $\partial C_k = S_k \cup S_{k+1}$ при $k = 1, \dots, n-1$, $\partial C_n = S_n$, откуда при $n \geq 2$ границы цилиндрических областей c_k имеют вид $\partial c_1 = s_1 \cup s_2 \cup s_3$, $\partial c_k = s_{2k-2} \cup s_{2k-1} \cup s_{2k} \cup s_{2k+1}$ при $k = 2, \dots, n-1$, $\partial c_n = s_{2n-2} \cup s_{2n-1}$.

4.1.2 Семейства геодезических с концами в бесконечно удаленных точках на слоях, близких к нулевому

Предложение 4.1.6. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\overline{ds_0^2}$ — поле неотрицательно определенных квадратичных форм $\overline{ds_0^2}$ на пополнении $\overline{T_0}$ слоя $T_0 = f^{-1}(0)$ (см. определение 3.1.11 и следствие 4.1.3). Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{T_0}$ — геодезическая поля квадратичных форм $\overline{ds_0^2}$, имеющая на-

чало и конец в бесконечно удаленной точке p_0 (см. следствие 4.1.3 и пояснение 4.1.7(A)). Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, и существует геодезическая $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$ поля квадратичных форм \overline{ds}_ξ^2 (см. определение 3.1.11 и следствие 4.1.3), непрерывно зависящая от ξ , имеющая начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ (см. пояснение 4.1.7), удовлетворяющая соотношению $\gamma_0 = \gamma$.

Пояснение 4.1.7. (A) В формулировке утверждения 4.1.6 под геодезической поля квадратичных форм \overline{ds}_ξ^2 на \overline{T}_ξ , имеющей начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ , понимается непрерывное отображение $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$, такое что $\gamma_\xi(0) = \gamma_\xi(1) = p_\xi$, $\gamma_\xi(t) \in T_\xi$ при любом $t \in (0, 1)$, и $\gamma_\xi|_{(0,1)} : (0, 1) \rightarrow T_\xi$ является геодезической римановой метрики ds_ξ^2 на T_ξ .

(B) В формулировке утверждения 4.1.6 под условием о непрерывной зависимости геодезической $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$ от ξ понимается следующее: отображение

$$D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}_\varepsilon^4 = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{T}_\xi, \quad (\xi, t) \mapsto \gamma_\xi(t),$$

непрерывно по совокупности переменных $(\xi, t) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1]$ (см. лемму 4.1.2).

Доказательство. Согласно теореме 11 существуют $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, такие что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, существуют окрестность $U_\xi^2 \subset \overline{T}_\xi$ бесконечно удаленной точки $p_\xi \in \overline{T}_\xi$ и координата $u_\xi : U_\xi^2 \rightarrow D_{\varepsilon_1}^2$, причем $u_\xi(p_\xi) = 0$ и $(u_\xi)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{U_\xi^2}) = u^{2-2n} \frac{\partial}{\partial u}$, где u — координата в $D_{\varepsilon_1}^2 \subset \mathbb{C}$. Отсюда $((u_\xi)^{-1})^*(\overline{ds}_\xi^2|_{U_\xi^2}) = |u|^{4n-4} |du|^2$ — поле неотрицательно определенных квадратичных форм, пропорциональных евклидовой, в области $D_{\varepsilon_1}^2 \subset \mathbb{C}(u)$, определяющее функцию расстояния $(u_\xi^{-1}, u_\xi^{-1})^* \rho_\xi = \rho_\xi \circ (u_\xi^{-1}, u_\xi^{-1})$ в $D_{\varepsilon_1}^2$, и являющееся обратным образом поля форм ds_ξ^2 , определяющего функцию расстояния

ρ_ξ в U_ξ^2 . Поэтому геодезические, выходящие из точки $u = 0 \in D_{\varepsilon_1}^2$, содержат радиусы открытого круга $D_{\varepsilon_1}^2$, а граница $\partial D_{\varepsilon_1}^2$ этого круга является окружностью (в смысле функции расстояния $(u_\xi^{-1}, u_\xi^{-1})^* \rho_\xi$) радиуса $r_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1^{4n-3}}{4n-3} > 0$. Поскольку слой Γ_0 неособый и множество $\Gamma_0 \setminus U_0^2$ компактно по теореме 11, то $\Delta_0|_{\Gamma_0 \setminus U_0^2}$ — голоморфная и отделенная от нуля 1-форма. Поэтому существуют $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ и комплексно-аналитическое вложение $\psi_0 : \Pi_0 \rightarrow \Gamma_0$ прямоугольника

$$\Pi_0 := \{\tilde{z}_0 \in \mathbb{C} \mid \varepsilon_2 \leq \operatorname{Re} \tilde{z}_0 \leq 1 - \varepsilon_2, |\operatorname{Im} \tilde{z}_0| \leq \varepsilon_3\} \subset \mathbb{C},$$

такие что $\psi_0|_{[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_2]} = \gamma|_{[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_2]}$, образы всех вершин прямоугольника Π_0 при вложении ψ_0 принадлежат U_0^2 (т.е. $\psi_0(\varepsilon_2 \pm i\varepsilon_3), \psi_0(1 - \varepsilon_2 \pm i\varepsilon_3) \in U_0^2$) и $d\tilde{z}_0 = (\psi_0)^* \Delta_0$. Отсюда следует, что существуют $\varepsilon_4 > 0$ и семейство комплексно-аналитических вложений $\psi_\xi : \Pi_0 \rightarrow \Gamma_\xi$, $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon_4$, такие что образы всех вершин прямоугольника Π_0 при каждом вложении ψ_ξ , принадлежат U_ξ^2 , $d\tilde{z}_0 = (\psi_\xi)^* \Delta_\xi$, и отображение $(\xi, \tilde{z}_0) \mapsto \psi_\xi(\tilde{z}_0)$ является комплексно-аналитическим. Отсюда существует $\varepsilon_5 > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon_5$, существует единственный прямолинейный отрезок в прямоугольнике $\Pi_0 \subset \mathbb{C}(\tilde{z}_0)$ (а стало быть, геодезическая римановой метрики ds_ξ^2), ортогональный дугам $(\psi_\xi)^{-1} \circ (u_\xi)^{-1}(\partial D_{\varepsilon_1}^2)$ в обеих точках своего пересечения с дугами, и являющийся пересечением Π_0 с некоторой вещественной прямой в \mathbb{C} . Продолжая эту геодезическую в круге $U_\xi \approx D_{\varepsilon_1}^2$ до центра $u_\xi^{-1}(0) = p_\xi$ этого круга по радиусам, можно получить искомую геодезическую γ_ξ , см. рис 4.4. \square

Обозначим через $a_k(\xi)$ корень уравнения $P_{2n+1}(w) = \xi$, близкий к a_k , $1 \leq k \leq 2n + 1$. Используя утверждения 4.1.4 и 4.1.6, получаем следующее

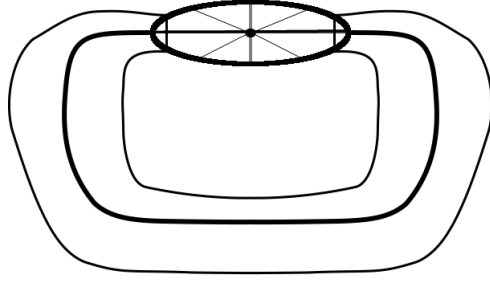


Рис. 4.4: Продолжение геодезических

следствие.

Следствие 4.1.8. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, а также существует набор геодезических $s_1(\xi), \dots, s_{2n-1}(\xi), d_1(\xi), \dots, d_n(\xi)$ поля квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$, $|\xi| < \varepsilon$, непрерывно зависящих от ξ , имеющих начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ (см. следствие 4.1.3 и пояснение 4.1.7), удовлетворяющих соотношениям $s_k(0) = s_k$, $k = 1, \dots, 2n-1$, $d_m(0) = d_m$, $m = 1, \dots, n$, и не проходящих через точки $(0, a_i(\xi)) \in T_\xi$, $i = 1, \dots, 2n+1$, где s_k, d_m как в утверждении 4.1.4.

Обозначение 4.1.9 ((разрезание слоя, близкого к нулевому, геодезическими на цилиндры)). Согласно следствию 4.1.8, при любом $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$ имеем следующие разбиения плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$ и слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$, аналогичные введенным в обозначении 4.1.5 при $\xi = 0$:

$$\mathbb{C} = S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi) \cup C_1(\xi) \cup \dots \cup C_n(\xi), \quad T_\xi = s_1(\xi) \cup \dots \cup s_{2n-1}(\xi) \cup C_1(\xi) \cup \dots \cup C_n(\xi),$$

где $C_k(\xi)$ — компонента связности $\mathbb{C}_w \setminus (S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi))$, содержащая точки $a_{2k}(\xi), a_{2k+1}(\xi)$, $1 \leq k \leq n$. При $n \geq 2$ границы цилиндрических областей

$c_k(\xi)$ имеют вид $\partial c_1(\xi) = s_1(\xi) \cup s_2(\xi) \cup s_3(\xi)$, $\partial c_k(\xi) = s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi)$ при $k = 2, \dots, n-1$, $\partial c_n(\xi) = s_{2n-2}(\xi) \cup s_{2n-1}(\xi)$.

4.1.3 Комплексные координаты “действие-угол” и функции перехода. Комплексная теорема Лиувилля

Определение 4.1.10. Пусть $\varepsilon > 0$ как в следствии 4.1.8. *Четырехмерной ε -окрестностью нулевого слоя T_0* назовем область $U_\varepsilon(T_0) := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} T_\xi \subset \mathbb{C}^2$, а *k -ой четырехмерной ε -ручкой $G_{\varepsilon,k}$* назовем ее подмножество

$$G_{\varepsilon,k} := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{c_k(\xi)} \subset U_\varepsilon(T_0), \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $\overline{c_k(\xi)}$ — замыкание цилиндрической области $c_k(\xi) \subset T_\xi$ из обозначения 4.1.9.

Отметим, что количество четырехмерных ε -ручек $G_{\varepsilon,k}$ равно n (см. обозначение 4.1.9), и ручки покрывают всю четырехмерную ε -окрестность $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 , т.е. $U_\varepsilon(T_0) = \bigcup_{k=1}^n G_{\varepsilon,k}$. В частности, для эллиптического многочлена ($n = 1$) ручка ровно одна и совпадает с ε -окрестностью $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 .

Теорема 25 ((комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптического гамильтониана нечетной степени)). *Для \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f)$ с функцией Гамильтона $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$ и соответствующего лагранжева слоения (см. определение 3.1.6), где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\varepsilon > 0$, такое что выполнены следующие свойства:*

1) для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ является неособым и гомеоморфен сфере с n ручками и одним проколом;

2) лагранжево слоение в четырехмерной ε -окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 тривиально, т.е. послойно гомеоморфно прямому произведению слоя T_0 на открытый двумерный диск $D_{0,\varepsilon}^2 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < \varepsilon\}$;

3) в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ существуют $2n$ голоморфных функций

$$I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C},$$

а для каждой четырехмерной ε -ручки $G_{\varepsilon,k} \subset U_\varepsilon(T_0)$, $k = 1, \dots, n$, существует голоморфное вложение (задаваемое при $k > 1$ “комплексными координатами действие-угол”)

$$(I_k|_{G_{\varepsilon,k}}, \varphi_k \bmod 2\pi) : G_{\varepsilon,k} \hookrightarrow \begin{cases} \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), & 2 \leq k \leq n; \\ \bigcup_{I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}} \{I_1\} \times \overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}, & k = 1, \end{cases}$$

где при $k = 1$ функция $\varphi_1 \bmod 2\pi$ является многозначной аналитической функцией, через $T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)) := \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus \frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\mathbb{Z})$ обозначен комплексный тор с параметром $\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, через $\gamma_{I_1} \subset T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ обозначен образ прямолинейного отрезка $A_3^{(1)}(I_1)A_4^{(1)}(I_1) \subset \mathbb{C}$ (вырождающегося в точку в случае $n = 1$, см. п.б) ниже) при проекции $\mathbb{C} \rightarrow T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$, и через $\overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}$ обозначено пополнение “надрезанного тора” $(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))) \setminus \gamma_{I_1}$ относительно римановой метрики $d\varphi_1 \overline{d\varphi_1}$, со следующими свойствами:

а) каждая функция $I_k, J_k : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C}$ является голоморфной функцией $I_k = I_k(f)$ и $J_k = J_k(f)$ от f без критических точек, ее множество значений

$$\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(U_\varepsilon(T_0)) = I_k(G_{\varepsilon,k}), \quad \widehat{D}_{\varepsilon,k} := J_k(U_\varepsilon(T_0)) = J_k(G_{\varepsilon,k}) \subset \mathbb{C}$$

открыто в \mathbb{C} и гомеоморфно открытому кругу, она выражается в окрест-

ности $U_\varepsilon(\mathbb{T}_0)$ через любую другую такую функцию формулами

$$I_k = I_k(f(I_\ell)), \quad I_k = I_k(f(J_\ell)), \quad J_k = J_k(f(I_\ell)), \quad J_k = J_k(f(J_\ell));$$

где $f(I_k)$ и $f(J_k)$ — функции, обратные к функциям $I_k(f)$ и $J_k(f)$ соответственно ($k = 1, \dots, n$);

б) при любых $k = 1, \dots, n$ и $I_k \in \tilde{D}_{\varepsilon, k}$ множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon, k} \cap \mathbb{T}_{f(I_k)}}$ получается из некоторой замкнутой области $W_{k, I_k} \subset \mathbb{C}$, ограниченной шестиугольником с вершинами $A_1^{(k)}(I_k), \dots, A_6^{(k)}(I_k) \in \mathbb{C}$ (вырождающимся при $k = n$ в параллелограмм с вершинами $A_1^{(k)}(I_k), A_2^{(k)}(I_k), A_3^{(n)}(I_k) = A_4^{(n)}(I_k), A_5^{(n)}(I_k) = A_6^{(n)}(I_k)$) и сторонами, соответствующими геодезическим $d_k(f(I_k)), s_{2k-1}(f(I_k)), s_{2k-2}(f(I_k)) \subset \mathbb{T}_{f(I_k)}$, а также геодезическим $s_{2k}(f(I_k)), s_{2k+1}(f(I_k)) \subset \mathbb{T}_{f(I_k)}$ в случае $k < n$, следующим образом: (i) выкидыванием всех вершин (соответствующих бесконечно удаленной точке $p_{f(I_k)}$), и (ii) отождествлением (т.е. склеиванием) при помощи параллельного переноса любой пары сторон, отвечающих одной и той же геодезической (либо $d_k(f(I_k))$, либо $s_1(f(I_1))$ при $k = 1$); причем шестиугольник (соответственно параллелограмм при $k = n$) однозначно задается следующими условиями (см. рис. 4.5, 4.6 при $1 \leq k < n$, $1 \leq k = n$ соответственно):

- шестиугольник (или параллелограмм) $\partial W_{k, I_k} \subset \mathbb{C}$ образован тремя парами равных и параллельных сторон, соответствующих следующим геодезическим и получающихся друг из друга следующими сдвигами в плоскости \mathbb{C} :

$$A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)) \xrightarrow{2\pi} A_5^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)),$$

$A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-1}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_1^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-2}(\xi)),$
 $A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k+1}(\xi)), \quad k < n,$
 где $\xi := f(I_k) \in D_{0,\varepsilon}^2$, через $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначен параллельный перенос на вектор $\delta \in \mathbb{C}$ в плоскости \mathbb{C} , $s_0(\xi) := s_1(\xi)$,

$$\langle D_k(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dJ_k}{dI_k}(I_k) - \frac{dJ_{k-1}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{dJ_1}{dI_k}(I_k) \right),$$

- при любом $k < n$ выполнено

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)} = \overrightarrow{A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)} \\ & = \langle S_{k+1}(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dI_{k+1}}{dI_k}(I_k) - \frac{dI_{k+2}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{dI_n}{dI_k}(I_k) \right), \end{aligned}$$

- точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac{1}{2}(A_1^{(k)}(I_k) + A_3^{(k)}(I_k)) = 0 = \varphi_k(0, a_{2k}(f(I_k)))$ (откуда точка пересечения диагоналей (вырождающегося в отрезок при $k = n$) параллелограмма $A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac{1}{2}(A_3^{(k)}(I_k) + A_5^{(k)}(I_k)) = \pi = \varphi_k(0, a_{2k+1}(f(I_k)))$, а при $k = 1$ центры отождествляемых сторон $A_2^{(1)}(I_1)A_3^{(1)}(I_1)$ и $A_1^{(1)}(I_1)A_6^{(1)}(I_1)$ суть отождествляемые точки $\pm \frac{1}{2} \langle D_1(f(I_1)) \rangle_1 = \varphi_1(0, a_1(f(I_1)))$);

в частности, при $k = 1$ для любого $I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}$ образом комплексной угловой координаты $\varphi_1 \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,1} \cap \Gamma_{f(I_1)}} : G_{\varepsilon,1} \cap \Gamma_{f(I_1)} \rightarrow \overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}$ является весь “пополненный надрезанный тор” $\overline{(T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))} \setminus \gamma_{I_1}$ (совпадающий с тором $T_{\mathbb{C}}^2(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ в случае $n = 1$) за исключением двух точек $A_3^{(1)}(I_1), A_4^{(1)}(I_1)$ (совпадающих друг с другом в случае $n = 1$), являющихся “концами линии надреза” и отвечающих бесконечно удаленной точке;

в) $(dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}} = dI_k \wedge d\varphi_k$, $k = 1, \dots, n$;

г) переменная “действие” $I_k = I_k(f)$ и функция $J_k = J_k(f)$ имеют вид

$$I_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy, \quad J_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2,$$

где в качестве функции $\sqrt{\quad}$ берутся ее ветви, такие что $\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+1}))} > 0$ в первом случае, и $i\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{1}{2}(a_{2k-1} + a_{2k}))} < 0$ во втором случае;

д) для любых двух ручек $G_{\varepsilon,k}, G_{\varepsilon,\ell}$, содержащих в своей границе одно и то же семейство геодезических $s_j(\xi)$, выполнено $k = \ell \pm 1$, причем в случае $1 \leq k < n$ пересечение $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1}$ является объединением геодезических

$$G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1} = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi)) = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi)),$$

и на этом пересечении комплексные координаты угол $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ связаны друг с другом формулами:

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi),$$

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi);$$

е) уравнения Гамильтона в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ на ручке $G_{\varepsilon,k}$, $k = 1, \dots, n$, принимают вид:

$$\dot{I}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{df(I_k)}{dI_k};$$

4) антиканоническая инволюция $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (-z, w)$, сохраняющая Гамильтониан f , переводит каждую четырехмерную ε -ручку $G_{\varepsilon,k}$ в себя, и ограничение этой инволюции на эту ручку в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ имеет вид $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi) \mapsto (I_k, -\varphi_k \bmod 2\pi)$, $1 \leq k \leq n$.

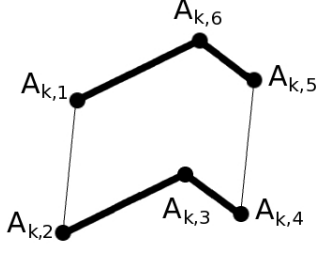


Рис. 4.5: Шестиугольник $\partial W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}_{\varphi_k}$ при $1 \leq k < n$

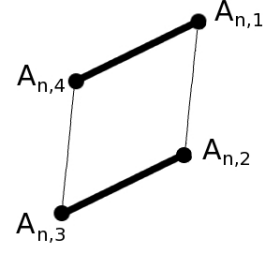


Рис. 4.6: Параллелограмм $\partial W_{n,I_n} \subset \mathbb{C}_{\varphi_n}$

Доказательство. Пункт 1) следует из следствия 4.1.3. Пункт 2) следует из частного случая леммы 3.3.1: когда на слое T_0 нет особых точек. Докажем пункт 3).

Шаг 1. Определим функции $I_k = I_k(\xi)$, $J_k = J_k(\xi)$ формулами пункта г). Докажем пункт а), т.е. голоморфность функций $I_k(\xi)$, $J_k(\xi)$. По построению значение “переменной действие” I_k зависит только от ξ . Далее,

$$\frac{dI_k(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \frac{d(\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)})}{d\xi} dw + a'_{2k+1}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+1}(a_{2k+1}(\xi))} - a'_{2k}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+1}(a_{2k}(\xi))} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)}}.$$

Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$, такое что при $|\xi| < \varepsilon$ производная $dI_k(\xi)/d\xi$ существует, поэтому $I_k = I_k(\xi)$ является голоморфной функцией.

Более того, поскольку $dI_k(0)/d\xi \neq 0$, то можно считать, что $I_k|_{D_{0,\varepsilon}^2}$ является диффеоморфизмом открытого круга $D_{0,\varepsilon}^2$ радиуса ε на область $\tilde{D}_{\varepsilon,k} :=$

$I_k(D_{0,\varepsilon}^2)$. Аналогично $J'_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)}}$. Пункт а) доказан.

Шаг 2. Для любой кусочно гладкой ориентированной кривой α_ξ на слое T_ξ обозначим

$$\langle \alpha_\xi \rangle := \int_{\alpha_\xi} \Delta_\xi, \quad \langle \alpha_\xi \rangle_k := \frac{\langle \alpha_\xi \rangle}{I'_k(\xi)}, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2, \quad (4.1.1)$$

где Δ_ξ — голоморфная 1-форма на слое T_ξ , см. определение 3.1.11(A). Так как форма Δ_ξ замкнута, то ее интеграл $\langle \alpha_\xi \rangle$ по любому ориентированному циклу $\alpha_\xi \subset T_\xi$ не меняется при любых гомотопиях цикла в слое. Рассмотрим непрерывные по ξ семейства ориентированных циклов

$$\alpha_{\xi,k} := (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(\gamma_{a_{2k}(\xi), a_{2k+1}(\xi)}) \subset T_\xi \cap G_{\varepsilon,k},$$

$$\hat{\alpha}_{\xi,k} := (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(\gamma_{a_{2k-1}(\xi), a_{2k}(\xi)}) \subset T_\xi$$

с такой ориентацией, что $\alpha_{0,k}$ и $\hat{\alpha}_{0,k}$ являются интегральными траекториями полей $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ соответственно, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\langle \alpha_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad \langle \hat{\alpha}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi) \quad (4.1.2)$$

в силу формул для $I'_k(\xi)$ и $J'_k(\xi)$, см. шаг 1. Поэтому $\langle \alpha_{\xi,k} \rangle_k = 2\pi$ и существует единственная функция $\varphi_k \bmod 2\pi : G_{\varepsilon,k} \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ при $2 \leq k \leq n$, $\varphi_1 \bmod 2\pi : G_{\varepsilon,1} \setminus \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} s_1(\xi) \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ при $k = 1$, такая что

$$d(\varphi_k|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi \setminus s_1(\xi)}) = \Delta_\xi / I'_k(\xi), \quad \varphi_k \bmod 2\pi(0, a_{2k}(\xi)) = 0 \bmod 2\pi, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2.$$

Пункт в) следует из того, что $dI_k \wedge d\varphi_k = I'_k(f(z, w)) df(z, w) \wedge \frac{dw}{2zI'_k(f(z, w))}|_{G_{\varepsilon,k}} = \frac{2z dz \wedge dw}{2z}|_{G_{\varepsilon,k}} = (dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}}$. Пункт е) следует из пунктов а) и в).

Шаг 3. Докажем пункт б). Согласно следствию 4.1.8, существуют геодезические $s_1(\xi), \dots, s_{2n-1}(\xi) : (0, 1) \rightarrow T_\xi$ римановой метрики ds_ξ^2 на $T_\xi \subset \overline{T_\xi} \subset \widetilde{M}_\varepsilon^4$ с концами $\lim_{t \rightarrow 0+} s_i(\xi)(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} s_i(\xi)(t) = p_\xi \in \overline{T_\xi}$, $1 \leq i \leq 2n - 1$,

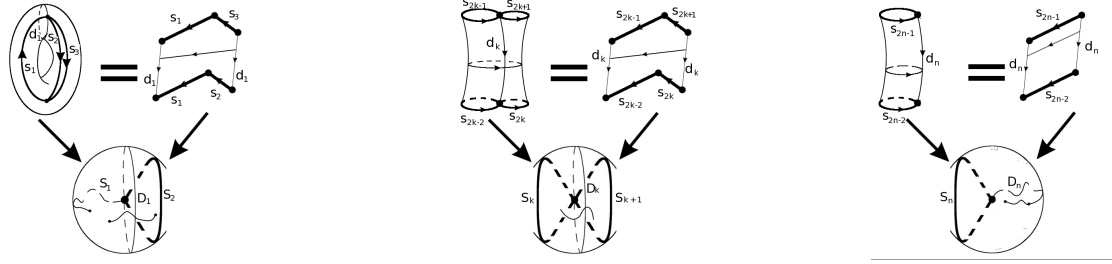


Рис. 4.7: Надрезанный или про- Рис. 4.8: Область–цилиндр Рис. 4.9: Область–цилиндр
 колотый тор $c_1(\xi) \cup s_1(\xi) \subset T_\xi$ $c_k(\xi) \subset T_\xi$ при $1 < k < n$ $c_n(\xi) \subset T_\xi$

замыкания которых в $\widetilde{M}_\varepsilon^4$ близки к замыканиям интегральных траекторий s_1, \dots, s_{2n-1} векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. Аналогично, существуют геодезические $d_1(\xi), \dots, d_n(\xi)$ на (T_ξ, ds_ξ^2) , замыкания которых близки к замыканиям интегральных траекторий d_1, \dots, d_n векторного поля $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. Поэтому указанные геодезические на слое T_ξ , их образы в \mathbb{C} при проекции $\text{Pr}_w|_{T_\xi} : T_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ и цилиндрические области $c_k(\xi)$, $1 \leq k \leq n$, выглядят как на рис. 4.7, 4.8, 4.9.

Разрежем цилиндрическую область $c_k(\xi) \subset T_\xi$ (см. обозначение 4.1.9) по геодезической $d_k(\xi)$ и рассмотрим образ полученной односвязной (разрезанной) области $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ при отображении φ_k , являющемся ветвью отображения $\varphi_k \bmod 2\pi$, введенного на шаге 2. Так как граница разрезанной области составлена из геодезических:

$$\partial(c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)) = \begin{cases} d_k(\xi) \cup s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi), & 1 \leq k < n, \\ d_k(\xi) \cup s_{2n-2}(\xi) \cup s_{2n-1}(\xi), & 1 \leq k = n, \end{cases}$$

где $s_0(\xi) := s_1(\xi)$, то граница ее образа $\varphi_k(c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)) \subset \mathbb{C}$ состоит из прямолинейных отрезков в плоскости \mathbb{C}_{φ_k} . Нетрудно показывается, что комплекснозначная функция $\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)} : c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ инъективна, поэтому ее образ является внутренностью некоторого 6-угольника (при $k < n$) или 4-угольника

(при $k = n$)

$$\partial W_{k,I_k} = A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$$

в плоскости \mathbb{C}_{φ_k} , где $I_k := I_k(\xi)$. Значит, множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)} : c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ на разрезанной цилиндрической области $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ является внутренностью этого шестиугольника. Поэтому множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi}$ на замыкании $\overline{c_k(\xi)} = G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi$ этой области получается из замкнутой области W_{k,I_k} , ограниченной этим шестиугольником, выкидыванием всех вершин и отождествлением пар сторон, отвечающих одной и той же геодезической.

Вычислим направляющие вектора сторон шестиугольника $\partial W_{k,I_k}$:

$$A_2^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) = A_4^{(k)}(I_k) - A_5^{(k)}(I_k) = \langle d_k(\xi) \rangle_k =: \langle D_k(\xi) \rangle_k,$$

$$A_3^{(k)}(I_k) - A_2^{(k)}(I_k) = A_6^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k-2}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k-1}(\xi) \rangle_k =: \langle S_k(\xi) \rangle_k,$$

$$A_4^{(k)}(I_k) - A_3^{(k)}(I_k) = A_5^{(k)}(I_k) - A_6^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k+1}(\xi) \rangle_k =: \langle S_{k+1}(\xi) \rangle_k,$$

где последняя цепочка равенств выполнена при $k < n$. Осталось заметить, что

$$\langle S_n(\xi) \rangle = \langle \alpha_{\xi,n} \rangle = 2\pi I'_n(\xi), \quad \langle S_k(\xi) \rangle + \langle S_{k+1}(\xi) \rangle = \langle \alpha_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad 1 \leq k < n,$$

$$\langle D_1(\xi) \rangle = \langle \hat{\alpha}_{\xi,1} \rangle = 2\pi J'_1(\xi), \quad \langle D_{k-1}(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle = \langle \hat{\alpha}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi), \quad 1 < k \leq n$$

в силу (4.2.2). С учетом (4.2.1), отсюда получаем требуемые равенства

$$\langle S_{k+1}(\xi) \rangle_k = 2\pi \frac{I'_{k+1}(\xi) - I'_{k+2}(\xi) + \dots + (-1)^{n-k-1} I'_n(\xi)}{I'_k(\xi)}, \quad 1 \leq k < n,$$

$$\langle D_k(\xi) \rangle_k = 2\pi \frac{J'_k(\xi) - J'_{k-1}(\xi) + \dots + (-1)^{k-1} J'_1(\xi)}{I'_k(\xi)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пункт б) доказан полностью.

Шаг 4. Докажем пункт д). Заметим, что в силу определения четырехмерных ручек $G_{\varepsilon,k}$ выполнено $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,l} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $l = k \pm 1$. В силу пункта б), координаты $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ на пересечении $s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi) = (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi))$ своих областей определения связаны друг с другом следующими соотношениями: на геодезической $s_{2k}(\xi)$ они связаны соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \frac{\langle S_{k+1}(\xi) \rangle + \langle D_{k+1}(\xi) \rangle}{2I'_{k+1}(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} \left(\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)} \right),$$

которое равносильно первой требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi),$$

а на геодезической $s_{2k+1}(\xi)$ они связаны соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} + \frac{\langle S_{k+1}(\xi) \rangle - \langle D_{k+1}(\xi) \rangle}{2I'_{k+1}(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} \left(\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle - \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)} \right),$$

которое равносильно второй требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi).$$

Пункт 3) полностью доказан.

Пункт 4) следует из того, что данная инволюция сохраняет гамильтониан f , меняет знак у \mathbb{C} -симплектической структуры $dz \wedge dw$, и сохраняет точку $(0, a_{2k}(\xi))$, в которой $\varphi_k(0, a_{2k}(\xi)) = 0 \bmod 2\pi$ ввиду 3),б). Теорема 25 доказана. \square

4.2 Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических гамильтонианов четной степени

Введем некоторые обозначения и сформулируем технические леммы 4.2.1, 4.2.2 и вытекающие из них утверждения 4.2.4, 4.2.6 и следствия 4.2.3, 4.2.8, необходимые для понимания основного результата параграфа — теоремы 26.

Лемма 4.2.1. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_N(w)$, где $P_N(w)$ — любой многочлен степени $N \geq 1$ с комплексными коэффициентами, не имеющий кратных корней, $T_0 = f^{-1}(0)$. Тогда:

(А) Отображение $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$, является двулиственным разветвленным накрытием и переводит векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$ в векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0})$, корректно определенное с точностью до знака, т.е. для любых $(z_1, w), (z_2, w) \in T_0$ таких, что $z_1 \neq z_2$, верно $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_1, w)) = -(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_2, w))$;

(Б) Если все коэффициенты многочлена P_N вещественны, то определенное с точностью до знака векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0})$ на \mathbb{C}_w симметрично относительно отражения относительно вещественной прямой, т.е. инвариантно относительно диффеоморфизма $\mathbb{C}_w \rightarrow \mathbb{C}_w$, $w \mapsto \bar{w}$.

Доказательство. (А) В точке $(z, w) \in T_0$ выполнено $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w) = (-P'_N(w), 2z)$, поэтому $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z, w)) = 2z\partial/\partial w$. Очевидно, любые два прообраза $(z_1, w), (z_2, w) \in T_0$ точки $w \in \mathbb{C}_w$ связаны соотношением $z_1 = -z_2$. Поэтому $\text{Pr}_w|_{T_0}$ является разветвленным двулистным накрытием и $(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_1, w)) = 2z_1\partial/\partial w = -2z_2\partial/\partial w = -(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}(z_2, w))$.

(Б) Определим отображение $\text{sym} : T_0 \rightarrow T_0$, заданное формулой $(z, w) \mapsto$

(\bar{z}, \bar{w}) . Отображение sym определено корректно, поскольку если $z^2 + P_N(w) = 0$, то $\bar{z}^2 + P_N(\bar{w}) = \overline{z^2 + P_N(w)} = 0$, где первое равенство выполнено ввиду того, что все коэффициенты многочлена $P_N(w)$ вещественны. Из равенств

$$(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z, w)) = ((\text{Pr}_w)_* \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)(\text{Pr}_w(w)) = ((\text{Pr}_w)_* \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)(w),$$

$$\text{Sym} \circ \text{Pr}_w = \text{Pr}_w \circ \text{sym},$$

$$\text{sym}_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z, w)) = (\overline{-P'_N(w)}, \bar{2z}) = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(\text{sym}(z, w))$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \text{Sym}_*((\text{Pr}_w)_* \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)(w) = \text{Sym}_*((\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z, w))) \\ & = (\text{Pr}_w)_*(\text{sym}_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z, w))) = (\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(\text{sym}(z, w))) \\ & = (\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(\bar{z}, \bar{w})) = ((\text{Pr}_w)_* \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)(\bar{w}) = ((\text{Pr}_w)_* \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)(\text{Sym}(w)). \end{aligned}$$

□

Лемма 4.2.2 ((нормализация гиперэллиптического многочлена четной степени и 2-формы $dz \wedge dw$ в “бесконечно удаленных точках”). Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$, где $P_{2n+2}(w)$ — любой многочлен степени $2n + 2$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и два голоморфных вложения $h_j : D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$, $j = 1, 2$, такие что

$$f \circ h_j(\xi, u) = \xi, \quad h_j^*(dz \wedge dw) = u^{n-1} d\xi \wedge du, \quad (\xi, u) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}),$$

причем $\lim_{u \rightarrow 0} |h_j(\xi, u)| = \infty$ равномерно по $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$, и дополнение множества $(h_1(D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}))) \cup (h_2(D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\})))$ в $M_\varepsilon^4 := f^{-1}(D_{0,\varepsilon}^2)$ ограничено в \mathbb{C}^2 . В частности, имеется комплексное 2-мерное связное многообразие $\widetilde{M}_\varepsilon^4$ с комплексно аналитическим атласом из трех карт, полученное

из $M_\varepsilon^4 \subset \mathbb{C}^2$ приклеиванием двух множеств $D_{0,\varepsilon}^2 \times D_{0,\varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}^2$ при помощи вложений h_j , $j = 1, 2$. При этом $\widetilde{M}_\varepsilon^4 \setminus M_\varepsilon^4 \approx (D_{0,\varepsilon}^2 \times \{0\}) \cup (D_{0,\varepsilon}^2 \times \{0\})$ (“бесконечно удаленные” точки $p_{\xi,j}$, $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$, $j = 1, 2$).

Доказательство. См. следствие 1.3.4. □

Следствие 4.2.3. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$, где $P_{2n+2}(w)$ — любой многочлен степени $2n + 2$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что поверхность уровня $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ неособа при $\xi \in \mathbb{C}$, $0 < |\xi| < \varepsilon$. Более того, неособая поверхность уровня T_ξ гомеоморфна сфере с n ручками и двумя проколами в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,j}$, $j = 1, 2$. Векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_\xi}$ и риманова метрика пополнения ds_ξ^2 в достаточно малой проколотой окрестности $U_{\xi,j} \subset T_\xi$ бесконечно удаленной точки $p_{\xi,j}$ имеют вид

$$\dot{u} = u^{1-n}, \quad ds_\xi^2 = u^{n-1} \bar{u}^{n-1} du \bar{d}u,$$

где $u : U_{\xi,j} \rightarrow D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ — “координатный” диффеоморфизм, такой что $\lim_{g \rightarrow p_{\xi,j}} u(g) = 0$. В частности, пополнение $\overline{T_\xi} = T_\xi \cup \{p_{\xi,1}\} \cup \{p_{\xi,2}\}$ слоя T_ξ относительно римановой метрики пополнения ds_ξ^2 компактно, гомеоморфно сфере с n ручками. На $\overline{T_\xi}$ имеется гладкое поле неотрицательно определенных квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$, такое что $\overline{ds_\xi^2}|_{T_\xi} = ds_\xi^2$, $\overline{ds_\xi^2}(p_{\xi,j}) = 0$ при $n \geq 2$, и $\overline{ds_\xi^2}(p_{\xi,j}) \neq 0$ при $n = 1$.

4.2.1 Периодичность интегральных траекторий на нулевом слое

Предложение 4.2.4. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$, где $P_{2n+2}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+2})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+2$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

все интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{\mathbb{T}_0}$, не являющиеся сепаратрисами (т.е. не входящие в бесконечно удаленные точки $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ и не выходящие из нее, см. следствие 4.2.3), являются периодическими. Более того:

(А) интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{\mathbb{T}_0}$ (и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{\mathbb{T}_0} : \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$, см. лемму 4.2.1(А)), выглядят как на рис. 4.10 при $n = 3$; среди этих траекторий имеется ровно $2n$ сепаратрис $s_1, \dots, s_{2n} \subset \mathbb{T}_0$ (соответственно n сепаратрис $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{C}$, таких что $s_{2k-1} \cup s_{2k} = (\text{Pr}_w|_{\mathbb{T}_0})^{-1}(S_k)$, $k = 1, \dots, n$), которые разбивают слой \mathbb{T}_0 на $n + 1$ связных компонент c_1, \dots, c_{n+1} , гомеоморфных внутренности цилиндра $S^1 \times (0, 1)$ (соответственно разбивают плоскость \mathbb{C} на $n + 1$ областей $C_1, \dots, C_{n+1} \subset \mathbb{C}$, таких что $[a_{2k-1}, a_{2k}] \subset C_k$, $c_k = (\text{Pr}_w|_{\mathbb{T}_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n + 1$); в каждой цилиндрической области c_k траектории периодичны с периодом

$$T_k = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{dw}{\sqrt{-P_{2n+2}(w)}}, \quad k = 1, \dots, n + 1;$$

всякая сепаратриса s_{2k-1} имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,1} \in \overline{\mathbb{T}_0}$, а всякая сепаратриса s_{2k} имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,2} \in \overline{\mathbb{T}_0}$, $k = 1, \dots, n$, и длины сепаратрис в метрике ds_0^2 равны $|s_{2k-1}| = |s_{2k}| = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} T_i$ при $k = 1, \dots, n$;

(Б) на слое \mathbb{T}_0 существует набор сепаратрис d_1, \dots, d_{n+1} векторного поля $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}f}$, причем d_1, d_{n+1} имеют начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,1}$, а d_2, \dots, d_n имеют начало в бесконечно удаленной точке $p_{0,1}$ и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,2}$, таких что $d_k \subset c_k$ и их образы

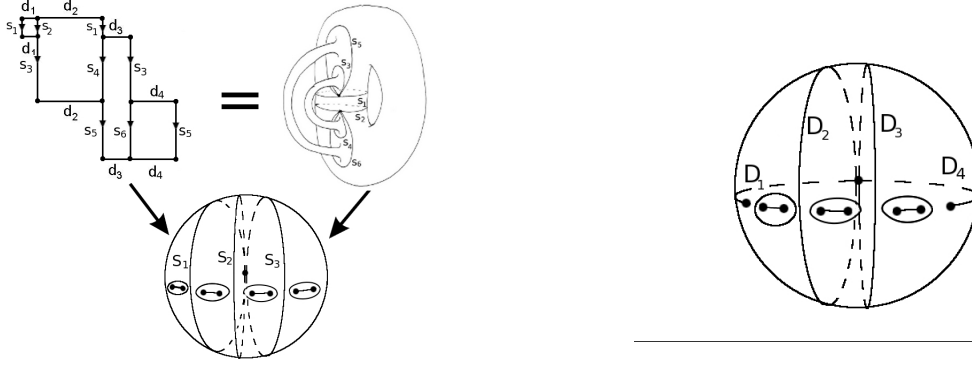


Рис. 4.10: Траектории поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$ и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$, при $n = 3$

Рис. 4.11: Проекция интегральных траекторий поля $i \text{sgrad } f|_{T_0}$ на плоскость \mathbb{C}_w при $n = 3$

$\text{Pr}_w|_{T_0}(d_k) = D_k$ при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0} : T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$ содержится в C_k , причем $D_1 = (\infty, a_1] \subset \mathbb{C}_w$, $D_{n+1} = [a_{2n+2}, \infty) \subset \mathbb{C}_w$, при $k = 2, \dots, n$ траектория D_k пересекает отрезок $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset \mathbb{C}_w$, см. рис. 4.11 при $n = 3$.

Доказательство. Обозначим множество точек, принадлежащих интегральным траекториям векторного поля $u := \text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$, входящим в бесконечно удаленные точки $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ или исходящие из них, через $I_{p_{0,1}, p_{0,2}}$. Пусть $T_0 \setminus I_{p_{0,1}, p_{0,2}} = \bigcup_{i=1}^N c_i$, где c_i — все различные компоненты линейной связности $T_0 \setminus I_{p_{0,1}, p_{0,2}}$, $i = 1, \dots, N$. Из следствия 4.2.3 следует, что векторное поле $u|_{c_i}$ полно.

Шаг 1. Допустим, что существует периодическая интегральная траектория $\gamma_i \subset c_i$ для некоторого $1 \leq i \leq N$, период γ_i равен $T > 0$. Тогда покажем, что всякая интегральная траектория $\gamma \subset c_i$ является периодической с тем же периодом T .

Как выше, обозначим через u векторное поле $u = \text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$, через v

ортогональное ему относительно римановой метрики $ds_0^2 := \text{Sym}(\Delta_0 \otimes \overline{\Delta_0})$ векторное поле $v = \text{isgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$. Поскольку $[u, v] = 0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполнено $g_v^\tau \gamma_i$ — периодическая траектория векторного поля u с периодом T , где g_v^τ — сдвиг вдоль векторного поля v на $\tau \in \mathbb{R}$. Отсюда объединение T -периодических интегральных траекторий векторного поля $u|_{c_i}$ является открытым подмножеством в T_0 (и в c_i), которое обозначим через Γ_i .

Покажем, что множество $\Gamma_i \subset c_i$ замкнуто в c_i . Пусть точка $\hat{g} \in c_i$ является предельной точкой множества Γ_i . Так как векторное поле $u|_{c_i}$ полно и $\hat{g} \in c_i$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ определено отображение $\psi : [0, T] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow T_0$, $(t, \tau) \mapsto g_v^\tau g_u^t(\hat{g})$. В любой бесконечно малой окрестности точки \hat{g} существуют точки, через которые проходят периодические интегральные траектории поля u с периодом T (т.е. принадлежащие множеству Γ_i). Поэтому (заменяя каждую такую точку на пересечение соответствующей интегральной траектории с кривой $g_v^\tau(\hat{g})$, $\tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]$) получаем существование последовательности $\tau_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ (возможно, $\tau_j = 0$ для некоторых j), такой что $g_v^{\tau_j}(\hat{g}) \in \Gamma_i$. Поскольку $[u, v] = 0$, то $\psi : (t, \tau) \mapsto g_u^t g_v^\tau(\hat{g})$, откуда $\psi(T, \tau_j) = g_u^T g_v^{\tau_j}(\hat{g}) = g_v^{\tau_j}(\hat{g}) = \psi(0, \tau_j)$. Значит, $\psi(T, 0) = \psi(0, 0) = \hat{g}$, т.е. через точку \hat{g} проходит периодическая интегральная траектория $\gamma_{\hat{g}}$ с периодом T (и минимальным периодом T/k для некоторого $k \in \mathbb{N}$). Период T является минимальным периодом этой траектории (т.е. $k = 1$) в силу открытости объединения (T/k) -периодических траекторий, см. выше. Поэтому $\hat{g} \in \Gamma_i$, что доказывает замкнутость множества Γ_i в c_i .

Так как $\Gamma_i \neq \emptyset$, является открытым и замкнутым в c_i , то $\Gamma_i = c_i$.

Шаг 2. Рассмотрим проекцию $\text{Pr}_w : \bar{T}_0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}_w$, $(z, w) \mapsto w$. Данная проекция является двулиственным разветвленным накрытием с точками ветвления $a_1, \dots, a_{2n+2}, \{\infty\} \in \bar{\mathbb{C}}_w$. Без ограничения общности пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+2}$, тогда $P_{2n+2}|_{(-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{2n+2}, +\infty)} > 0$ и $P_{2n+2}|_{(a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup \dots \cup (a_{2n+1}, a_{2n+2})} < 0$. Поэтому (определенное с точностью до знака) векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0}) = \pm 2\sqrt{-P_{2n+2}(w)}\partial/\partial w$ на $\bar{\mathbb{C}}_w$ касательно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{C}}$ на подмножестве $(a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup \dots \cup (a_{2n+1}, a_{2n+2}) \subset \mathbb{R}$ и ортогонально этой прямой на подмножестве $(-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{2n+2}, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Шаг 3. Поскольку в окрестностях точек $p_{0,1}, p_{0,2} \in \bar{T}_0$ векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ имеет особенность полюс $n-1$ -го порядка, количество сепаратрис в точке $p_{0,j}$, $j = 1, 2$, равно $2n$), а так как точки $p_{0,1}, p_{0,2}$ являются прообразами точки ∞ , то количество сепаратрис (определенного с точностью до знака) векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ в точке $\{\infty\} \in \bar{\mathbb{C}}_w$ равно $2n$.

Изучим сепаратрисы векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ на сфере $\bar{\mathbb{C}}_w$. Существует $n+1$ однопараметрических семейств периодических траекторий, обходящих вокруг отрезков $[a_{2k-1}, a_{2k}]$, $k = 1, \dots, n+1$. Отсюда, применяя к векторному полю $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ и указанным $n+1$ семействам периодических траекторий рассуждения, аналогичные приведенным на шаге 1, получаем, что при каждом $k = 1, \dots, n$ существует точка $a_{k,*} \in [a_{2k}, a_{2k+1}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, которая во-первых является точной верхней гранью множества точек пересечения с отрезком $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ периодических траекторий k -го семейства (обходящих вокруг отрезка $[a_{2k-1}, a_{2k}]$), а во-вторых принадлежит некоторой сепаратрисе, которую обозначим через S_k . Обозначим через C_k объединение всех периодических траекторий k -го семейства, $k = 1, \dots, n+1$. Заметим, что

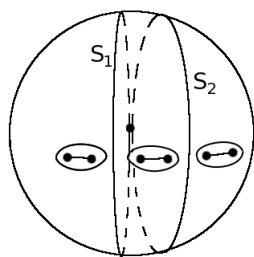


Рис. 4.12: Интегральные траектории поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ на сфере $\overline{\mathbb{C}_w}$

каждая сепаратриса S_1, \dots, S_{n+1} имеет не более одного пересечения с вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, так как в противном случае, ввиду симметричности интегральных траекторий относительно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, она была бы периодической, не проходящей через точку $\{\infty\} \in \overline{\mathbb{C}_w}$. Также, ввиду симметричности интегральных траекторий относительно вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, всякая сепаратриса S_k , проходящая через точку $a_{k,*}$, $k = 1, \dots, n+1$, имеет начало и конец в точке $\infty \in \overline{\mathbb{C}_w}$. Тем самым, выше описано строение всех сепаратрис векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ на сфере $\overline{\mathbb{C}_w}$. Значит, \mathbb{C}_w есть объединение описанных выше сепаратрис S_1, \dots, S_n и заполненных периодическими траекториями областей C_1, \dots, C_{n+1} , и интегральные траектории имеют вид как на рис. 4.12. Период периодических интегральных траекторий k -го семейства (из C_k) равен $T_k = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{dw}{\sqrt{-P_{2n+2}(w)}}$, $k = 1, \dots, n+1$, а длина $|S_k|$ сепаратрисы S_k равна $|S_k| = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} T_i$ при $k = 1, \dots, n$.

Поэтому интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}f}|_{T_0}$ выглядят как на рисунке 4.10. Среди этих траекторий имеется ровно $2n$ сепаратрис s_i , $1 \leq i \leq 2n$, которые разбивают слой T_0 на $n+1$ связных компонент c_k ,

$k = 1, \dots, n + 1$, где каждая c_k состоит из периодических траекторий, образующих однопараметрическое семейство периодических траекторий. При этом всякая сепаратриса S_{2k-1} имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,1} \in \overline{T_0}$, а всякая сепаратриса S_{2k} имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_{0,2} \in \overline{T_0}$, $k = 1, \dots, n$; каждая из сепаратрис s_{2k-1} и s_{2k} имеет длину $|S_k|$ и биективно проектируется при двулистом накрытии $\text{Pr}_w|_{\overline{T_0}} : \overline{T_0} \rightarrow \overline{C_w}$ на сепаратрису S_k векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$, $k = 1, \dots, n$. Также любая траектория в области c_k имеет период T_k и либо проектируется биективно на одну из периодических траекторий k -го семейства периодических траекторий векторного поля $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad } f|_{T_0})$ (из C_k), либо проектируется двулистно на отрезок $[a_{2k-1}, a_{2k}] \subset C_k$, $k = 1, \dots, n + 1$.

Предложение 4.2.4 доказано. \square

Обозначение 4.2.5 ((разрезание нулевого слоя сепаратрисами на цилиндры)). В обозначениях утверждения 4.2.4 имеем разбиения

$$\mathbb{C}_w = S_1 \cup \dots \cup S_n \cup C_1 \cup \dots \cup C_{n+1}, \quad T_0 = s_1 \cup \dots \cup s_{2n} \cup c_1 \cup \dots \cup c_{n+1}$$

на сепаратрисы $s_{2k-1} \cup s_{2k} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$, $k = 1, \dots, n$, и области—открытые цилиндры $c_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n + 1$. Границы областей $C_k \subset \mathbb{C}$ имеют вид $\partial C_k = S_k \cup S_{k+1}$ при $k = 2, \dots, n$, $\partial C_1 = S_1$, $\partial C_{n+1} = S_{n+1}$, откуда при $n \geq 2$ границы цилиндрических областей c_k имеют вид $\partial c_1 = s_1 \cup s_2$, $\partial c_k = s_{2k-3} \cup s_{2k-2} \cup s_{2k-1} \cup s_{2k}$ при $k = 2, \dots, n$, $\partial c_{n+1} = s_{2n-1} \cup s_{2n}$.

4.2.2 Семейства геодезических с концами в бесконечно удаленных точках на слоях, близких к нулевому

Предложение 4.2.6. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\overline{ds_0^2}$ — поле неотрицательно определенных квадратичных форм $\overline{ds_0^2}$ на пополнении $\overline{T_0}$ слоя $T_0 = f^{-1}(0)$ (см. определение 3.1.11 и следствие 4.2.3). Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{T_0}$ — геодезическая поля квадратичных форм $\overline{ds_0^2}$, имеющая начало в одной из бесконечно удаленных точек $p_{0,1}, p_{0,2}$ и конец в одной из бесконечно удаленных точек $p_{0,1}, p_{0,2}$ (см. следствие 4.2.3 и пояснение 4.2.7(A)). Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, и существует геодезическая $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T_\xi}$ поля квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$ (см. определение 3.1.11 и следствие 4.2.3), непрерывно зависящая от ξ , имеющая начало и конец в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,1}, p_{\xi,2}$ (см. пояснение 4.2.7), удовлетворяющая соотношению $\gamma_0 = \gamma$.

Пояснение 4.2.7. (A) В формулировке утверждения 4.2.6 под геодезической поля квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$ на $\overline{T_\xi}$, имеющей начало и конец в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,1}, p_{\xi,2}$, понимается непрерывное отображение $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T_\xi}$, такое что $\gamma_\xi(0), \gamma_\xi(1) \in \{p_{\xi,1}, p_{\xi,2}\}$, $\gamma_\xi(t) \in T_\xi$ при любом $t \in (0, 1)$, и $\gamma_\xi|_{(0,1)} : (0, 1) \rightarrow T_\xi$ является геодезической римановой метрики ds_ξ^2 на T_ξ .

(B) В формулировке утверждения 4.2.6 под условием о непрерывной зависимости геодезической $\gamma_\xi : [0, 1] \rightarrow \overline{T_\xi}$ от ξ понимается следующее: отображение

$$D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}_\varepsilon^4 = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{T_\xi}, \quad (\xi, t) \mapsto \gamma_\xi(t),$$

непрерывно по совокупности переменных $(\xi, t) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1]$ (см. лемму 4.2.2).

Доказательство. Согласно теореме 11 существуют $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0$, такие что для любого $\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < \varepsilon$, существуют окрестности $U_{\xi,j}^2 \subset \overline{T}_\xi$ бесконечно удаленных точек $p_{\xi,j} \in \overline{T}_\xi$, и координата $u_{\xi,j} : U_{\xi,j}^2 \rightarrow D_{\varepsilon_1}^2$, причем $u_{\xi,j}(p_{\xi,j}) = 0$ и $(u_{\xi,j})_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{U_{\xi,j}^2}) = u^{1-n} \frac{\partial}{\partial u}$, $j = 1, 2$, где u — координата в $D_{\varepsilon_1}^2 \subset \mathbb{C}$. Отсюда $((u_{\xi,j})^{-1})^*(\overline{ds_\xi^2}|_{U_{\xi,j}^2}) = |u|^{2n-2} |du|^2$ — поле неотрицательно определенных квадратичных форм, пропорциональных евклидовой, в области $D_{\varepsilon_1}^2 \subset \mathbb{C}(u)$, определяющее функцию расстояния $(u_{\xi,j}^{-1}, u_{\xi,j}^{-1})^* \rho_\xi = \rho_\xi \circ (u_{\xi,j}^{-1}, u_{\xi,j}^{-1})$ в $D_{\varepsilon_1}^2$, и являющееся обратным образом поля форм ds_ξ^2 , определяющего функцию расстояния ρ_ξ в $U_{\xi,j}^2$. Поэтому геодезические, выходящие из точки $u_j = 0 \in D_{\varepsilon_1}^2$, содержат радиусы открытого круга $D_{\varepsilon_1}^2$, а граница $\partial D_{\varepsilon_1}^2$ этого круга является окружностью (в смысле функции расстояния $(u_{\xi,j}^{-1}, u_{\xi,j}^{-1})^* \rho_\xi$) радиуса $r_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1^{4n-3}}{4n-3} > 0$. Поскольку слой T_0 неособый и множество $T_0 \setminus (U_{0,1}^2 \cup U_{0,2}^2)$ компактно по теореме 11, то $\Delta_0|_{T_0 \setminus (U_{0,1}^2 \cup U_{0,2}^2)}$ — голоморфная и отделенная от нуля 1-форма. Поэтому существуют $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ и комплексно-аналитическое вложение $\psi_0 : \Pi_0 \rightarrow T_0$ прямоугольника

$$\Pi_0 := \{ \tilde{z}_0 \in \mathbb{C} \mid \varepsilon_2 \leq \text{Re } \tilde{z}_0 \leq 1 - \varepsilon_2, |\text{Im } \tilde{z}_0| \leq \varepsilon_3 \} \subset \mathbb{C},$$

такие что $\psi_0|_{[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_2]} = \gamma|_{[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_2]}$, образы всех вершин прямоугольника Π_0 при вложении ψ_0 принадлежат U_0^2 (т.е. $\psi_0(\varepsilon_2 \pm i\varepsilon_3), \psi_0(1 - \varepsilon_2 \pm i\varepsilon_3) \in U_0^2$) и $d\tilde{z}_0 = (\psi_0)^* \Delta_0$. Отсюда следует, что существуют $\varepsilon_4 > 0$ и семейство комплексно-аналитических вложений $\psi_\xi : \Pi_0 \rightarrow T_\xi, \xi \in \mathbb{C}, |\xi| < \varepsilon_4$, такие что образы всех вершин прямоугольника Π_0 при каждом вложении ψ_ξ , принадлежат $U_{\xi,1}^2 \cup U_{\xi,2}^2$, $d\tilde{z}_0 = (\psi_\xi)^* \Delta_\xi$, и отображение $(\xi, \tilde{z}_0) \mapsto \psi_\xi(\tilde{z}_0)$ является комплексно-аналитическим. Отсюда существует $\varepsilon_5 > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < \varepsilon_5$, существует единственный прямолинейный отрезок в прямоугольнике $\Pi_0 \subset$

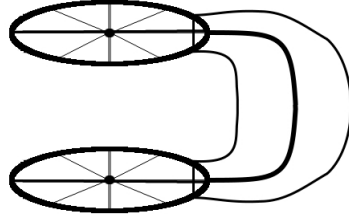


Рис. 4.13: Продолжение геодезических

$\mathbb{C}(\tilde{z}_0)$ (а стало быть, геодезическая римановой метрики ds_ξ^2), ортогональный дугам $(\psi_\xi)^{-1} \circ (u_{\xi,j})^{-1}(\partial D_{\varepsilon_1}^2)$, $j = 1, 2$, в обеих точках своего пересечения с дугами, и являющийся пересечением Π_0 с некоторой вещественной прямой в \mathbb{C} . Продолжая эту геодезическую в круге $U_{\xi,j}^2 \approx D_{\varepsilon_1}^2$ до центра $u_{\xi,j}^{-1}(0) = p_{\xi,j}$ этого круга по радиусам, можно получить искомую геодезическую γ_ξ , см. рис 4.13. \square

Обозначим через $a_k(\xi)$ корень уравнения $P_{2n+2}(w) = \xi$, близкий к a_k , $1 \leq k \leq 2n + 2$. Используя утверждения 4.2.4 и 4.2.6, получаем следующее следствие.

Следствие 4.2.8. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$, где $P_{2n+2}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+2})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+2$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, а также существует набор геодезических $s_1(\xi), \dots, s_{2n}(\xi), d_1(\xi), \dots, d_{n+1}(\xi)$ \overline{T}_ξ поля квадратичных форм $\overline{ds_\xi^2}$, $|\xi| < \varepsilon$, непрерывно зависящих от ξ , имеющих начало и конец в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,j}$ (см. следствие 4.2.3 и пояснение 4.2.7), удовлетворяющих соотношениям $s_k(0) = s_k$, $k = 1, \dots, 2n$, $d_m(0) = d_m$, $m = 1, \dots, n + 1$, и не проходящих через точки $(0, a_i(\xi)) \in T_\xi$,

$i = 1, \dots, 2n + 2$, где s_k, d_m как в утверждении 4.2.4.

Обозначение 4.2.9 ((разрезание слоя, близкого к нулевому, геодезическими на цилиндры)). Согласно следствию 4.2.8, при любом $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$ имеем следующие разбиения плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$ и слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$, аналогичные введенным в обозначении 4.2.5 при $\xi = 0$:

$$\mathbb{C} = S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi) \cup C_1(\xi) \cup \dots \cup C_{n+1}(\xi), \quad T_\xi = s_1(\xi) \cup \dots \cup s_{2n}(\xi) \cup c_1(\xi) \cup \dots \cup c_{n+1}(\xi),$$

где $C_k(\xi)$ — компонента связности $\mathbb{C}_w \setminus (S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi))$, содержащая точки $a_{2k-1}(\xi), a_{2k}(\xi)$, $1 \leq k \leq n + 1$. При $n \geq 2$ границы цилиндрических областей $c_k(\xi)$ имеют вид $\partial c_1(\xi) = s_1(\xi) \cup s_2(\xi)$, $\partial c_k(\xi) = s_{2k-3}(\xi) \cup s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi)$ при $k = 2, \dots, n$, $\partial c_n(\xi) = s_{2n-1}(\xi) \cup s_{2n}(\xi)$.

4.2.3 Комплексные координаты “действие-угол” и функции перехода. Комплексная теорема Лиувилля

Определение 4.2.10. Пусть $\varepsilon > 0$ как в следствии 4.2.8. *Четырехмерной ε -окрестностью нулевого слоя T_0* назовем область $U_\varepsilon(T_0) := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} T_\xi \subset \mathbb{C}^2$, а *k -ой четырехмерной ε -ручкой $G_{\varepsilon,k}$* назовем ее подмножество

$$G_{\varepsilon,k} := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{c_k(\xi)} \subset U_\varepsilon(T_0), \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $\overline{c_k(\xi)}$ — замыкание цилиндрической области $c_k(\xi) \subset T_\xi$ из обозначения 4.2.9.

Отметим, что количество четырехмерных ε -ручек $G_{\varepsilon,k}$ равно $n + 1$ (см. обозначение 4.2.9), и ручки покрывают всю четырехмерную ε -окрестность $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 , т.е. $U_\varepsilon(T_0) = \bigcup_{k=1}^{n+1} G_{\varepsilon,k}$.

Теорема 26 ((комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптического гамильтониана четной степени)). Для \mathbb{C} -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f)$ с функцией Гамильтона $f(z, w) = z^2 + P_{2n+2}(w)$ и соответствующего лагранжева слоения (см. определение 3.1.6), где $P_{2n+2}(w) = (w - a_1) \dots (w - a_{2n+2})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n + 2$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\varepsilon > 0$, такое что выполнены следующие свойства:

1) для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой $T_\xi = f^{-1}(\xi)$ является неособым и гомеоморфен сфере с n ручками и двумя проколами;

2) лагранжево слоение в четырехмерной ε -окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 тривиально, т.е. послойно гомеоморфно прямому произведению слоя T_0 на открытый двумерный диск $D_{0,\varepsilon}^2 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < \varepsilon\}$;

3) в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ существуют $2n + 2$ голоморфных функций

$$I_1, \dots, I_{n+1}, J_1, \dots, J_{n+1} : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C},$$

а для каждой четырехмерной ε -ручки $G_{\varepsilon,k} \subset U_\varepsilon(T_0)$, $k = 1, \dots, n + 1$, существует голоморфное вложение (задаваемое “комплексными координатами действие-угол”)

$$(I_k|_{G_{\varepsilon,k}}, \varphi_k \bmod 2\pi) : G_{\varepsilon,k} \hookrightarrow \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), \quad 1 \leq k \leq n + 1;$$

со следующими свойствами:

а) каждая функция $I_k, J_k : U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C}$ является голоморфной функцией $I_k = I_k(f)$ и $J_k = J_k(f)$ от f без критических точек, ее множество значений

$$\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(U_\varepsilon(T_0)) = I_k(G_{\varepsilon,k}), \quad \hat{D}_{\varepsilon,k} := J_k(U_\varepsilon(T_0)) = J_k(G_{\varepsilon,k}) \subset \mathbb{C}$$

открыто в \mathbb{C} и гомеоморфно открытому кругу, она выражается в окрестности $U_\varepsilon(\mathbb{T}_0)$ через любую другую такую функцию формулами

$$I_k = I_k(f(I_\ell)), \quad I_k = I_k(f(J_\ell)), \quad J_k = J_k(f(I_\ell)), \quad J_k = J_k(f(J_\ell));$$

где $f(I_k)$ и $f(J_k)$ — функции, обратные к функциям $I_k(f)$ и $J_k(f)$ соответственно ($k = 1, \dots, n + 1$);

б) при любых $k = 1, \dots, n + 1$ и $I_k \in \tilde{D}_{\varepsilon, k}$ множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon, k} \cap \mathbb{T}_{f(I_k)}}$ получается из некоторой замкнутой области $W_{k, I_k} \subset \mathbb{C}$, ограниченной шестиугольником с вершинами $A_1^{(k)}(I_k), \dots, A_6^{(k)}(I_k) \in \mathbb{C}$ (вырождающимся при $k = 1$ в параллелограмм с вершинами $A_1^1(I_1) = A_6^1(I_1)$, $A_2^1(I_1) = A_3^1(I_1)$, $A_4^1(I_1)$, $A_5^1(I_1)$, и при $k = n + 1$ в параллелограмм с вершинами $A_1^{(n+1)}(I_{n+1})$, $A_2^{(n+1)}(I_{n+1})$, $A_3^{(n+1)}(I_{n+1}) = A_4^{(n+1)}(I_{n+1})$, $A_5^{(n+1)}(I_{n+1}) = A_6^{(n+1)}(I_{n+1})$) и сторонами, соответствующими геодезическим $d_1(f(I_1))$, $s_1(f(I_1))$, $s_2(f(I_1)) \subset \mathbb{T}_{f(I_1)}$ при $k = 1$, $d_k(f(I_k))$, $s_{2k-3}(f(I_k))$, $s_{2k-2}(f(I_k))$, $s_{2k-1}(f(I_k))$, $s_{2k}(f(I_k)) \subset \mathbb{T}_{f(I_k)}$ при $1 < k < n + 1$, $d_{n+1}(f(I_{n+1}))$, $s_{2n-1}(f(I_{n+1}))$, $s_{2n}(f(I_{n+1}))$ при $k = n + 1$, следующим образом: (i) выкидыванием всех вершин (соответствующих бесконечно удаленным точкам $p_{f(I_k), 1}, p_{f(I_k), 2}$), и (ii) отождествлением (т.е. склеиванием) при помощи параллельного переноса любой пары сторон, отвечающих одной и той же геодезической $d_k(f(I_k))$; причем шестиугольник (соответственно параллелограмм при $k = 1, n + 1$) однозначно задается следующими условиями (см. рис. 4.14, 4.15, 4.16 при $k = 1$, $1 < k < n + 1$, $k = n + 1$ соответственно):

- шестиугольник (или параллелограмм) $\partial W_{k, I_k} \subset \mathbb{C}$ образован тремя парами равных и параллельных сторон, соответствующих следующим

геодезическим и получающихся друг из друга следующими сдвигами в плоскости \mathbb{C} :

$$A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)) \xrightarrow{2\pi} A_5^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)),$$

$$A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-3}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_1^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-2}(\xi)), \quad k > 1,$$

$$A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-1}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k}(\xi)), \quad k < n+1,$$

где $\xi := f(I_k) \in D_{0,\varepsilon}^2$, через $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначен параллельный перенос на вектор $\delta \in \mathbb{C}$ в плоскости \mathbb{C} , $s_0(\xi) := s_1(\xi)$,

$$\langle D_k(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dJ_k}{dI_k}(I_k) - \frac{dJ_{k-1}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{dJ_1}{dI_k}(I_k) \right),$$

- при любом $k < n + 1$ выполнено

$$\overrightarrow{A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)} = \overrightarrow{A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)}$$

$$= \langle S_{k+1}(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dI_{k+1}}{dI_k}(I_k) - \frac{dI_{k+2}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{dI_n}{dI_k}(I_k) \right),$$

- точка пересечения диагоналей (вырождающегося в отрезок при $k = 1$)

параллелограмма $A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac{1}{2}(A_1^{(k)}(I_k) + A_3^{(k)}(I_k)) =$

$0 = \varphi_k(0, a_{2k-1}(f(I_k)))$ (откуда точка пересечения диагоналей (вырож-

дающегося в отрезок при $k = n+1$) параллелограмма $A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$

равна $\frac{1}{2}(A_3^{(k)}(I_k) + A_5^{(k)}(I_k)) = \pi = \varphi_k(0, a_{2k}(f(I_k)))$;

в) $(dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}} = dI_k \wedge d\varphi_k, \quad k = 1, \dots, n + 1;$

г) переменная “действие” $I_k = I_k(f)$ и функция $J_k = J_k(f)$ имеют вид

$$I_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+2}(y)} dy, \quad J_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k-2}(\xi)}^{a_{2k-1}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+2}(y)} dy, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2,$$

где $a_0(\xi) := -\infty$, и в качестве функции $\sqrt{\quad}$ берутся ее ветви, такие что $\sqrt{-P_{2n+2}(\frac{1}{2}(a_{2k-1} + a_{2k}))} > 0$ в первом случае, и $i\sqrt{-P_{2n+2}(\frac{1}{2}(a_{2k-2} + a_{2k-1}))} < 0$ во втором случае;

д) для любых двух ручек $G_{\varepsilon,k}, G_{\varepsilon,\ell}$, содержащих в своей границе одно и то же семейство геодезических $s_j(\xi)$, выполнено $k = \ell \pm 1$, причем в случае $1 \leq k < n+1$ пересечение $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1}$ является объединением геодезических

$$G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1} = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi)) = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(S_k(\xi)),$$

и на этом пересечении комплексные координаты угол $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ связаны друг с другом формулами:

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k-1}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k-1}(\xi)} - \pi),$$

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi);$$

е) уравнения Гамильтона в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ на ручке $G_{\varepsilon,k}$, $k = 1, \dots, n+1$, принимают вид:

$$\dot{I}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{df(I_k)}{dI_k};$$

4) антиканоническая инволюция $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (-z, w)$, сохраняющая Гамильтониан f , переводит каждую четырехмерную ε -ручку $G_{\varepsilon,k}$ в себя, и ограничение этой инволюции на эту ручку в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ имеет вид $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi) \mapsto (I_k, -\varphi_k \bmod 2\pi)$, $1 \leq k \leq n+1$.

Доказательство. Пункт 1) следует из следствия 4.1.3. Пункт 2) следует из частного случая леммы 3.3.1: когда на слое T_0 нет особых точек. Докажем пункт 3).

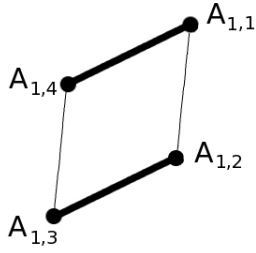


Рис. 4.14: Параллелограмм $\partial W_{1,I_1} \subset \mathbb{C}_{\varphi_1}$ при $n > 1$

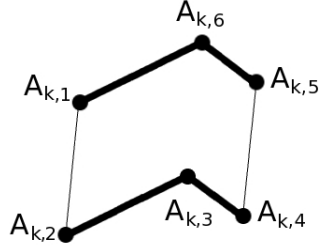


Рис. 4.15: Шестиугольник $\partial W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}_{\varphi_k}$ при $1 < k < n + 1$

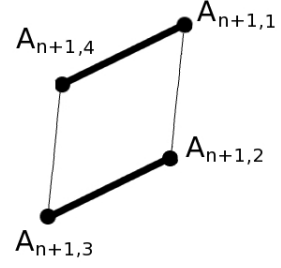


Рис. 4.16: Параллелограмм $\partial W_{n+1,I_{n+1}} \subset \mathbb{C}_{\varphi_{n+1}}$

Шаг 1. Определим функции $I_k = I_k(\xi)$, $J_k = J_k(\xi)$ формулами пункта г). Докажем пункт а), т.е. голоморфность функций $I_k(\xi)$, $J_k(\xi)$. По построению значение “переменной действии” I_k зависит только от ξ . Далее,

$$\begin{aligned} \frac{dI_k(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \frac{d(\sqrt{\xi - P_{2n+2}(w)})}{d\xi} dw + a'_{2k}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+2}(a_{2k}(\xi))} \right. \\ &\quad \left. - a'_{2k-1}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+2}(a_{2k-1}(\xi))} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+2}(w)}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$, такое что при $|\xi| < \varepsilon$ производная $dI_k(\xi)/d\xi$ существует, поэтому $I_k = I_k(\xi)$ является голоморфной функцией. Более того, поскольку $dI_k(0)/d\xi \neq 0$, то можно считать, что $I_k|_{D_{0,\varepsilon}^2}$ является диффеоморфизмом открытого круга $D_{0,\varepsilon}^2$ радиуса ε на область $\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(D_{0,\varepsilon}^2)$. Аналогично $J'_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k-2}(\xi)}^{a_{2k-1}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+2}(w)}}$. Пункт а) доказан.

Шаг 2. Для любой кусочно гладкой ориентированной кривой α_ξ на слое T_ξ обозначим

$$\langle \alpha_\xi \rangle := \int_{\alpha_\xi} \Delta_\xi, \quad \langle \alpha_\xi \rangle_k := \frac{\langle \alpha_\xi \rangle}{I'_k(\xi)}, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2, \quad (4.2.1)$$

где Δ_ξ — голоморфная 1-форма на слое T_ξ , см. определение 3.1.11(A). Так как форма Δ_ξ замкнута, то ее интеграл $\langle \alpha_\xi \rangle$ по любому ориентированному циклу $\alpha_\xi \subset T_\xi$ не меняется при любых гомотопиях цикла в слое. Рассмотрим непрерывные по ξ семейства ориентированных циклов

$$\alpha_{\xi,k} := (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(\gamma_{a_{2k-1}(\xi), a_{2k}(\xi)}) \subset T_\xi \cap G_{\varepsilon,k},$$

$$\hat{\alpha}_{\xi,k} := (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(\gamma_{a_{2k-2}(\xi), a_{2k-1}(\xi)}) \subset T_\xi$$

с такой ориентацией, что $\alpha_{0,k}$ и $\hat{\alpha}_{0,k}$ являются интегральными траекториями полей $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ соответственно, $k = 1, \dots, n+1$. Тогда

$$\langle \alpha_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad \langle \hat{\alpha}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi) \quad (4.2.2)$$

в силу формул для $I'_k(\xi)$ и $J'_k(\xi)$, см. шаг 1. Поэтому $\langle \alpha_{\xi,k} \rangle_k = 2\pi$ и существует единственная функция $\varphi_k \bmod 2\pi : G_{\varepsilon,k} \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ при $1 \leq k \leq n+1$, такая что

$$d(\varphi_k|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi}) = \Delta_\xi / I'_k(\xi), \quad \varphi_k \bmod 2\pi(0, a_{2k-1}(\xi)) = 0 \bmod 2\pi, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2.$$

Пункт в) следует из того, что $dI_k \wedge d\varphi_k = I'_k(f(z, w))df(z, w) \wedge \frac{dw}{2zI'_k(f(z, w))}|_{G_{\varepsilon,k}} = \frac{2zdz \wedge dw}{2z}|_{G_{\varepsilon,k}} = (dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}}$. Пункт е) следует из пунктов а) и в).

Шаг 3. Докажем пункт б). Согласно следствию 4.2.8, существуют геодезические $s_1(\xi), \dots, s_{2n}(\xi) : (0, 1) \rightarrow T_\xi$ римановой метрики ds_ξ^2 на $T_\xi \subset \overline{T_\xi} \subset \widetilde{M}_\varepsilon^4$ с концами $\lim_{t \rightarrow 0+} s_{2i-1}(\xi)(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} s_{2i-1}(\xi)(t) = p_{\xi,1} \in \overline{T_\xi}$, $\lim_{t \rightarrow 0+} s_{2i}(\xi)(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} s_{2i}(\xi)(t) = p_{\xi,2} \in \overline{T_\xi}$, $1 \leq i \leq n$, замыкания которых в $\widetilde{M}_\varepsilon^4$ близки к замыканиям интегральных траекторий s_1, \dots, s_{2n} векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. Аналогично, существуют геодезические $d_1(\xi), \dots, d_{n+1}(\xi)$ на (T_ξ, ds_ξ^2) , замыкания которых близки к замыканиям интегральных траекторий d_1, \dots, d_{n+1}

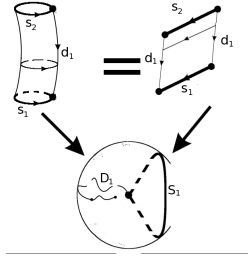


Рис. 4.17: Надрезанный или проколотый тор $c_1(\xi) \cup s_1(\xi) \subset T_\xi$

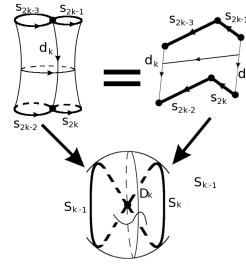


Рис. 4.18: Область-цилиндр $c_k(\xi) \subset T_\xi$ при $1 < k < n$

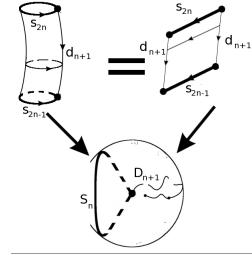


Рис. 4.19: Область-цилиндр $c_{n+1}(\xi) \subset T_\xi$

векторного поля $i \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. Поэтому указанные геодезические на слое T_ξ , их образы в \mathbb{C} при проекции $\operatorname{Pr}_w|_{T_\xi} : T_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ и цилиндрические области $c_k(\xi)$, $1 \leq k \leq n + 1$, выглядят как на рис. 4.17, 4.18, 4.19.

Разрежем цилиндрическую область $c_k(\xi) \subset T_\xi$ (см. обозначение 4.2.9) по геодезической $d_k(\xi)$ и рассмотрим образ полученной односвязной (разрезанной) области $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ при отображении φ_k , являющемся ветвью отображения $\varphi_k \bmod 2\pi$, введенного на шаге 2. Так как граница разрезанной области составлена из геодезических:

$$\partial(c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)) = \begin{cases} d_k(\xi) \cup s_{2k-3}(\xi) \cup s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi), & 1 < k < n + 1, \\ d_1(\xi) \cup s_1(\xi) \cup s_2(\xi), & k = 1, \\ d_{n+1}(\xi) \cup s_{2n-1}(\xi) \cup s_{2n}(\xi), & k = n + 1, \end{cases}$$

то граница ее образа $\varphi_k(c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)) \subset \mathbb{C}$ состоит из прямолинейных отрезков в плоскости \mathbb{C}_{φ_k} . Нетрудно показывается, что комплексно значная функция $\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)} : c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ инъективна, поэтому ее образ является внутренностью некоторого 6-угольника (при $1 < k < n + 1$) или 4-угольника (при

$k = 1, n + 1$)

$$\partial W_{k,I_k} = A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$$

в плоскости \mathbb{C}_{φ_k} , где $I_k := I_k(\xi)$. Значит, множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)} : c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ на разрезанной цилиндрической области $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ является внутренностью этого шестиугольника. Поэтому множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi}$ на замыкании $\overline{c_k(\xi)} = G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi$ этой области получается из замкнутой области W_{k,I_k} , ограниченной этим шестиугольником, выкидыванием всех вершин и отождествлением пар сторон, отвечающих одной и той же геодезической.

Вычислим направляющие вектора сторон шестиугольника $\partial W_{k,I_k}$:

$$A_2^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) = A_4^{(k)}(I_k) - A_5^{(k)}(I_k) = \langle d_k(\xi) \rangle_k =: \langle D_k(\xi) \rangle_k,$$

$$A_3^{(k)}(I_k) - A_2^{(k)}(I_k) = A_6^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k-3}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k-2}(\xi) \rangle_k =: \langle S_{k-1}(\xi) \rangle_k,$$

$$A_4^{(k)}(I_k) - A_3^{(k)}(I_k) = A_5^{(k)}(I_k) - A_6^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k-1}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k}(\xi) \rangle_k =: \langle S_k(\xi) \rangle_k,$$

где средняя цепочка равенств выполнена при $1 < k \leq n + 1$, и последняя цепочка равенств выполнена при $1 \leq k < n + 1$. Осталось заметить, что

$$\langle S_1(\xi) \rangle = \langle \alpha_{\xi,1} \rangle = 2\pi I'_1(\xi), \quad \langle S_n(\xi) \rangle = \langle \alpha_{\xi,n+1} \rangle = 2\pi I'_{n+1}(\xi),$$

$$\langle S_{k-1}(\xi) \rangle + \langle S_k(\xi) \rangle = \langle \alpha_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad 1 < k < n + 1,$$

$$\langle D_1(\xi) \rangle = \langle \hat{\alpha}_{\xi,1} \rangle = 2\pi J'_1(\xi), \quad \langle D_{k-1}(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle = \langle \hat{\alpha}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi), \quad 1 < k \leq n$$

в силу (4.2.2). С учетом (4.2.1), отсюда получаем требуемые равенства

$$\langle S_{k+1}(\xi) \rangle_k = 2\pi \frac{I'_{k+1}(\xi) - I'_{k+2}(\xi) + \dots + (-1)^{n-k-1} I'_n(\xi)}{I'_k(\xi)}, \quad 1 \leq k < n,$$

$$\langle D_k(\xi) \rangle_k = 2\pi \frac{J'_k(\xi) - J'_{k-1}(\xi) + \dots + (-1)^{k-1} J'_1(\xi)}{I'_k(\xi)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пункт б) доказан полностью.

Шаг 4. Докажем пункт д). Заметим, что в силу определения четырехмерных ручек $G_{\varepsilon,k}$ выполнено $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,l} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $l = k \pm 1$. В силу пункта б), координаты $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ на пересечении $s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi) = (\text{Pr}_w|_{\Gamma_\xi})^{-1}(S_k(\xi))$ своих областей определения связаны друг с другом следующими соотношениями: на геодезической $s_{2k}(\xi)$ они связаны соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \frac{\langle S_{k+1}(\xi) \rangle + \langle D_{k+1}(\xi) \rangle}{2I'_{k+1}(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)}),$$

которое равносильно первой требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi),$$

а на геодезической $s_{2k}(\xi)$ они связаны соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \frac{\langle S_k(\xi) \rangle - \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle - \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)}),$$

которое равносильно второй требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi).$$

Пункт з) полностью доказан.

f , меняет знак у \mathbb{C} -симплектической структуры $dz \wedge dw$, и Пункт 4) следует из того, что данная инволюция сохраняет гамильтониан сохраняет точку $(0, a_{2k-1}(\xi))$, в которой $\varphi_k(0, a_{2k-1}(\xi)) = 0 \bmod 2\pi$ ввиду з),б). Теорема 26 доказана. \square

Литература

- [1] Архангельский Ю.А. Аналитическая механика твердого тела. М.: Наука, 1977
- [2] Бобенко А.И. Уравнения Эйлера на $so(4)$ и $e(3)$. Изоморфизм интегрируемых случаев. // Функциональный анализ и его приложения, 1986, т. 20, вып. 1, с. 64-66
- [3] Болсинов А.В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Матем. сборник, 1995, т. 186, №1, с.3-28
- [4] Болсинов А.В. О классификации гамильтоновых систем на двумерных поверхностях. // УМН, 1994, т. 49, вып. 6, с. 195-196
- [5] Болсинов А.В., Дуллин Х. О случае Эйлера в динамике твердого тела и задаче Якоби. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, №1, с. 64-74
- [6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева-Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела. // Матем. заметки, 1994, т. 56, №2, с. 139-142

- [7] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Ижевск: ИД “Удмуртский университет”, 1999
- [8] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация интегрируемых систем типа Эйлера в динамике твердого тела. // УМН, 1993, т. 48, вып. 5, с. 163-164
- [9] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений М.: Наука, 1979
- [10] Васильев В.А. Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000
- [11] Горячев Д.Н. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$. // Матем. сборник, 1900, т. 21, №3
- [12] Зотов В.В., Шафаревич А.И. Интегрируемые гамильтоновы системы с инвариантными поверхностями произвольного рода и их квазиклассическое квантование. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 2005, т. XXVI, с. 285-301
- [13] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Издательство МГУ, 1980
- [14] Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем. // ДАН СССР, 1979, т. 249, №6, с. 1299-1302
- [15] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971

- [16] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем. // Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12(2), с. 49-59
- [17] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. // Известия АН СССР, сер. матем., 1978, т. 42, №2, с. 396-415
- [18] Ошемков А.А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$. // УМН, 1990, т. 42, вып. 2, с. 199-200
- [19] Ошемков А.А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1993, т. XXV, с. 23-109
- [20] Тайманов И.А. О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков. // Матем. заметки, 1988, т. 44, вып. 2, 283-284
- [21] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли. // УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с. 3-56
- [22] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН, 1989, т. 44, вып. 1, 145-173
- [23] Фоменко А.Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем. // Известия АН СССР, сер. матем., 1991, т. 55, №4, с. 747-779

- [24] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. // ДАН СССР, 1986, т. 287, №5, с. 1071-1075
- [25] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. // Функц. анализ и его приложения, 1988, т. 22, вып. 4, с. 38-51
- [26] Фоменко А.Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях. // Функц. анализ и его приложения, 1991, т. 25, вып. 4, с. 23-35
- [27] Форстер О. Римановы поверхности М.: Мир, 1980
- [28] Хартсхорн Р. // Алгебраическая геометрия, М.: Мир, 1981
- [29] Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений. // Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 1, с. 51-61
- [30] Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия. // Функц. анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 56-67
- [31] Adler M., van Moerbeke P. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves and linearization Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. // Adv. math., 1980, v. 30, pp. 267-379
- [32] Adler M., van Moerbeke P. The Kowalewski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs. // Somm. math. phys. 1988, v. 113, №4, pp. 659-700

- [33] Bates L. Monodromy in the champagne bottle. // Journal of app. math. and phys., 1991, v. 42, pp. 837-847
- [34] Bates L., Lerman E. Proper group actions and symplectic stratified spaces. // Pacific J. Math., 1997, v. 181(2), pp. 201–229
- [35] Bolsinov A.T. Fomenko's invariants in the theory of integrable Hamiltonian systems. // Topology and Applications. International Topological Conference dedicated to P.S. Alexandroff's 100-th birthday. Moscow, Phasis, 1996, pp. 27-34
- [36] Fomenko A.T. The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom. // In: Advances in Soviet Math. Amir. Math. Soc., 1991, v. 6, pp. 1-36
- [37] Fomenko A.T. Rough classification of integrable Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds. // In: "from Topology to Computation". Proceedings of the Smalefest., 1993, Springer-Verlag, pp. 561-586
- [38] Gavrilov L. Complex geometry of Lagrange top. // Prepublication N°61 du Laboratoire de Mathematiques Emile Picard. Universite Toulouse III, 1995
- [39] Gordon W. On the Completeness of Hamiltonian Vector Fields. // Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 2 (Oct. 1970), pp.329-331
- [40] Matsumura H. Commutative algebra. New York: W.A. Benjamin Co., 1970

- [41] Nguen T.Z. Singularities of integrable geodesic flows on multidimensional torus and sphere. // Journal of geometry and physics, 1996, v. 18, issue 2, pp. 147-162
- [42] Nguen T.Z., Polyakova L.S. A topological classification of integrable geodesic flows of the two-dimensional sphere with quadratic in momenta additional nitegral. // Journal of nonlinear sciences, 1992, v. 6, pp. 85-108
- [43] Novikov S.P. Dynamical Systems and Differential Forms. Low Dimensional Hamiltonian Systems. // Contemporary mathematics, v. 469, pp. 271-288
- [44] Novikov S.P. Topology of Generic Hamiltonian Foliations on Riemann Surfaces. // Moscow Math. J., 2005, v. 5(3), pp. 633-667
- [45] Thom R. L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome // Topology, 1965, v. 3(2), pp. 297-307