МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ЛЕ НГОК ТЬЕУЕН

ПОЛНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ НАБОРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

(01.01.04 - геометрия и топология)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
проф. А.Т.Фоменко

Москва - 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительное внимание привлечено к задаче интегрирования гамильтоновых систем на симплектических многообразиях, в частности на орбитах коприсоединенного представления в алгебрах Ли и симметрических пространствах. Большое число новых результатов в этой области объясняется открытием нескольких новых методов интегрирования таких систем. Особо отметим введенное В.И.Арнольдом [1] представление геодезических потоков в терминах уравнений Эйлера, в тесной связи которого впервые была указана Марсденом и Вайнштейном [40] схема редукции гамильтоновой системы с помощью конечномерной алгебры интегралов к уравнениям Эйлера на симплектическом многообразии меньшей размерности, и метод сдвига орбитальных инвариантов на ковектор общего положения. Метод сдвига позволяет получить коммутативный набор интегралов на орбитах коприсоединенного представления в алгебрах Ли. Он впервые был использован в работе [18] С.В.Манаковым для получения интегралов уравнений Эйлера n-мерного твердого тела на группе $SO(n)$ и развит затем в работах А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко [21]. Напомним, что после работ П.Лакса [36] и В.Е.Захарова, Л.Д.Фаддеева [28], в которых изучается интегрирование нелинейных уравнений методом обратной задачи рассеяния, впервые были найдены С.В.Манаковым [17] и Г.Фляшка [39] нетривиальные конечномерные лаксовы представления. Они построили L-M пару для цепочки Тоды (системы n частиц на прямой). Конечномерное лаксово представление с дополнительным спектральным параметром встретилось в работе С.П.Новикова [24] при описании стационарных решений высших уравнений Кортевега - де Фриза. Из работы Б.А.Дубровина [8], в которой результаты С.П.Новикова были распространены на операторы произвольного матричного ранга, С.В.Манакову удалось (как написано выше путем сдвига инвариантов) извлечь интегралы уравнений Эйлера, которые пишутся в виде $\dot{M} = [M,\Omega]$, $M = A(\Omega)$, $\Omega \in so(n)$ В случае свободного вращения n-мерного твердого тела оператор A имеет вид: $A(\Omega) = J\Omega + \Omega J$, J - симметрическая положительно определенная матрица (тензор инерции) и уравнение Эйлера перепишется в виде $[J\dot{\Omega} + \dot{\Omega} J] = [J, \Omega^2]$. Среди найденных С.В.Манаковым интегралов содержатся и квадратичные интегралы А.С.Мищенко [19], $L_s(x) = \mathrm{Tr} \sum_{k=0}^{s} X J^k X J^{s-k}$. Инволютивность этих интегралов доказана позже в работе [6] П.А.Диким. Полнота этой системы интегралов впервые доказана А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко как для $SO(n)$, так и для произвольной полупростой алгебры Ли. Уравнение Эйлера в этом обобщенном случае имеет вид: $\dot{x} = [x, \varphi x]$, где $x \in G$, φ - оператор определенный следующим образом. Если H - подалгебра Картана, $G = H + V$ - разложение Картана, тогда $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ где $\varphi_1 : H \to H$ произвольный самосопряженный оператор, а $\varphi_2(x) = (ad_b)^{-1} ad_a(x)$, $a, b \in H$. Кроме отмеченных выше работ [36], [28], в [44] лаксово представление для обобщенной цепочки тоды было найдено О.И.Боягавленским, а в работах [46], [45] М.А.Ольшанецким, А.М.Переломовым и Дж.Мозером было найдено лаксово представление для систем одномерных частиц, обобщающих системы Ф.Калоджеро и Б.Сазерлендо.

В работе [5] И.М.Гельфанд и Л.А.Дикий построили новую гамильтонову механику в пространстве дифференциальных операторов от одной переменной. Обобщив свои результаты для уравнения Кортевета - де Фриза [4], они предложили набор гамиальтонианов, определенных на подпространстве операторов с фиксированным старшим символом, для которых уравнение имеет лаксов вид. Эта конструкция формулирована М.Адлером [38] и Д.Р.Лебедевым, Ю.И.Маниным [12], в терминах скобки Кириллова для алгебры вольттеровых операторов.

Изложение и развитие схемы Адлера на основе метода гамильтоновой редукции и применения этой схемы к грандуированным алгебрам Ли даны А.Г.Реиманом, М.А.Семеновым-Тян-Шанским и И.И.Френкелем [23 , 25,26].

В работе [35] (см. также [37, 33]) А.Т.Фоменко ввел новый важный объект: секционные операторы. Он построил секционные операторы следующим образом. Пусть задано произвольное линейное представление конечномерных групп Ли $\mathcal{H}$ в пространстве V . Тогда V естественным образом представляется в виде объединения орбит $\mathcal{H}(x)$, $x \in V$, этого действия. На этих орбитах можно построить некоторый естественный класс динамических систем, которые часто оказываются вполне интегрируемыми и включают в себя некоторые важные примеры гамильтоновых систем. Пусть $\rho : H \longrightarrow End(V)$ - представление алгебры Ли H группы $\mathcal{H}$, индуцированное представлением группы, и пусть $Q: V \to H$ - произвольный линейный оператор, отображающий V в алгебру Ли H. Тогда на орбитах действия группы $\mathcal{H}$ можно определить естественную динамическую систему $\dot{x}_Q = (\rho(Qx))x$, где $\rho(Qx): V \to V$, а также некоторую билинейную кососимметрическую форму на V . Такие операторы Q А.Т.Фоменко называет секционными операторами. Оказывается среди системы $\dot{x}_Q$, на орбитах коприсоединенного представления ad^* на $V = H^*$, где $H = E(n)$ - алгебра Ли группы движений $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{E}(n)$, $Q: H^* \to H$ - секционный оператор, содержится система, обобщающая классические уравнения движения твердого тела по инерции в идеальной жидкости в остутствие потенциала. Указанная система $\dot{x}_Q$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения алгебры $E(n)$ (В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко). Для случая $E(n)$, при $n=3$ получаются некоторые новые случаи интегрируемости классических систем, отличные от известных ранее.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации. Первая глава диссертации посвящена построению полных инволютивных полиномиальных функций на расширенных коммутативными, ассоциативными алгебрами алгебрах Ли. Пусть G - произвольная алгебра Ли, А - коммутативная, ассоциативная алгебра. Тогда тензорное произведение $G \otimes A$ является (расширенной) алгеброй Ли, обладающей естественным коммутатором: для любых элементов $\xi, \eta \in G$, $a, b \in A$ выполнено равенство

$$[\xi \otimes a, \eta \otimes b] = [\xi, \eta] \otimes ab$$

Для многих алгебр Ли G удалось построить на дуальных пространствах G^* к G полные инволютивные наборы функций, т.е. наборы $\mathcal{R}$, $|\mathcal{R}| = \frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$ функционально независимых функций, находящихся попарно в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления.

Естественно возникает вопрос: существует ли метод, который позволяет построить полный инволютивный набор функций на пространстве $(G \otimes A)^*$ из полного инволютивного набора на G^*?

Для алгебр А типа $A = k[\varepsilon_1]/(\varepsilon_1^{n_1}) \otimes \dots \otimes k[\varepsilon_k]/(\varepsilon_k^{n_k})$ в работе [31] (см. также [32]) В.В.Трофимов нашел алгоритм, который для каждой полиномиальной функции F на G^* и элемента $a \in A$ $a = \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_k^{i_k}$ построит расширенную функцию F^a на $(G \otimes A)^*$. Этот алгоритм дает эффективный результат, т.е. из полного инволютивность набора полиномиальных функций $F_1, \dots, F_s$ на G^* построится полный инволютивный набор функций

$$F_i^a, \quad 1 \le i \le s, \quad a = \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_k^{i_k}$$

на расширенном пространстве $(G \otimes A)^*$.

Скоро после работы В.В.Трофимова А.В.Браилову [3] (см. также [2]) удалось распространить этот метод расширения (т.е. описанный выше алгоритм) для произвольной алгебры с двойственностью Пуанкаре. Коммутативная, ассоциативная грандуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_d$ с единицей $\varepsilon_1 \in A_0$ называется алгеброй с двойственностью Пуанкаре, если $\dim A_0 = I$ и существует линейный функционал α на А равной 0 на A_i при $i<d$ и такой, что билинейная симметрическая форма $\alpha(ab)$, $a,b \in A$ невырождена. Всегда можно выбрать базис $B = \{\varepsilon_i\}$ в А, оператор $T\colon A \to A$ и α так, что $\alpha(\varepsilon_i \cdot T(\varepsilon_j)) = \delta_{ij}$, $T^2 = id_A$, и $T(B) = B$. Метод расширения определяется следующим образом. Для линейной функции F на G^* функция F^a на $(G \otimes A)^*$ определяется формулой $F^a = F \otimes a$, $a \in A$. Для полиномиальной функции $F(0)=0$ на G^* степени $\geqslant 2$ функция F^a на $(G \otimes A)^*$ определяется по индуктивным соотношениям:

$$(\Phi + H)^a = (\Phi^a + H^a),\ (\Phi H)^a = \sum_{\varepsilon_i \in B} \Phi^{a\varepsilon_i} H^{T(\varepsilon_i)},$$

где Φ, H – произвольные полиномиальные функции.

Таким образом для произвольной алгебры с двойственностью Пуанкаре из полного инволютивного набора полиномиальных функций на G^* построится полный инволютивный набор функций на $(G \otimes A)^*$. Более того, в [3] было доказано тождество

$$\{F^a, \Phi^b\} = \{F, \Phi\}^{ab} \qquad (I)$$

для любых полиномиальных функций F, Φ и для элементов $a, b \in A$. Оказывается, что тождество (I) появится не случайно, сущность которого обнаружится в первой главе диссертации (см. теорему 4.4).

В §3 описанный выше метод расширения естественным образом определится для произвольной коммутативной, ассоциативной алгебры с единицей А. А именно, пусть А – коммутативная, оссоциативная алгебра с единицей, $\Omega\colon A \to A$ – инволютивное отображение, сохраняющее некоторый базис $\{\varepsilon_i\}$, $\Omega\varepsilon_i = \varepsilon_{\omega i}$. Объекты А, Ω, $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяющие этим свойствам называются тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Тогда для любой полиномиальной функции $P = P_I X_I$ на G^* и элемента $a \in A$ расширенная относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$

функция P^a определяется формулой: $P^a = (\Omega a, \widetilde{P})$, где $\widetilde{P} = P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}$, $(,)$ - естественное скалярное произведение на A относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$, $x_i^\alpha = x_i \otimes \varepsilon_\alpha$ - система координат на $(G \otimes A)^* \simeq G^* \otimes A$.

В §2 было определено понятие самосопряженной алгебры. В теореме 2.I доказываются некоторые эквивалентные определения самосопряженных алгебр, в частности эквивалентность понятий самосопряженных алгебр и алгебр Фробениуса.

Теорема 4.3 в §4 показывает, что класс алгебр Фробениуса охватывает все алгебры, для которых наш метод расширения был эффективен, т.е. выполнено тождество (I). Этот результат является окончательным решением для поставленной выше задачи.

В §5 доказано, что методом расширения из полного инволютивного набора полиномиальных функций на G^* построится полный инволютивный набор на $(G \otimes A)^*$. В частности для произвольной коммутативной, ассоциативной алгебры Фробениуса A и для любой алгебры Ли G:

$$\operatorname{ind} G \otimes A = \operatorname{ind} G \dim A$$

Это доказывает частный случай нашей гипотезы, формулированной в конце §I4: для любой алгебры G и произвольной самосопряженной алгебры A (алгебры Фробениуса) место имеет равенство

$$\operatorname{ind} G \otimes A = \operatorname{ind} G \dim A$$

В §6 показано, что с помощью невырожденного скалярного произведения на алгебре Фробениуса A метод расширения можно реализовать относительно произвольного базиса этой алгебры (т.е. при отсутствований инволютивного отображения Ω). Далее установлено, что расширенные относительно различных базисов функций превращаются друг в друга заменой систем координат, соответствующей замене данных базисов. Отсюда следует, что если тождество (I) верно для одного базиса, то оно верно для другого.

В качестве примера общей конструкции в §7 мы рассматриваем алгебру $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_N$. В этом случае удалось определить расширение для всех аналитических функций на дуальном пространстве G^* к G.

В §8 доказано тождество (I) для бесконечномерных алгебр Фробениуса. Полученный результат переформулирован для бесконечномерной алгебры Кац-Муди.

Вторая глава посвящена построению полных инволютивных наборов функций на подалгебрах расширенных алгебр Ли $G \otimes A$. В частности удалось простым методом доказать полноту инволютивных наборов на этих подалгебрах Ли.

В §9 обнаружена связь между методом расширения и методом сдвига. А именно оператор сдвига и оператор расширения коммутируют, при этом если f - вектор сдвига на пространстве G^* тогда $f \otimes \Omega 1$ - соответствующий вектор сдвига на расширенном пространстве $G^* \otimes A$. Таким образом, если для алгебр Ли G (например редуктивных) на G^* методом сдвига из набора полиномиальных инвариантов построится полный инволютивный набор функций, то на расширенном пространстве $G^* \otimes A$ методом сдвига из инвариантов также построится полный инволютивный набор функций, где А - алгебра Фробениуса (см.теорему 9.2). Напомним, что метод сдвига, который впервые встречается в работе [18], систематически изучен в работах А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [20-22]. Ими был сформулирован следующий общий способ построения системы функций в инволюции. Пусть G - алгебра Ли, G^* - дуальное пространство к G, $I(G^*)$ - алгебра инвариантных функций коприсоединенного представления на G^*. Фиксируем элемент $f \in G^*$. Тогда функции на G^* вида: $F_\lambda(x) = F(x + \lambda f)$, $F(x) \in I(G^*)$ находятся в инволюции относительно скобки Кириллова на G^*.

В §10 изучены разложения алгебр Ли и алгебр Фробениуса в прямые суммы подпространств. Найдено условие (см. теорему 10.1) для того, чтобы ограничения коммутирующих функций на подалгебру Ли находились в инволюции на этой подалгебре. Далее доказана классификация разложений алгебр Фробениуса.

В §11 построены на подалгебрах типа $G\Lambda A$ расширенных алгебр Ли $G\otimes A$ полные инволютивные наборы, в частности найдены индексы этих подалгебр.

В §12 рассмотрено разложение Картана $G_u = G_n + V$ компактной вещественной формы G_u полупростой алгебры Ли G. Согласно теореме А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [22] это разложение является модельным примером для доказанных в §11 теорем. Пусть G - полупростая алгебра Ли, H - подалгебра Картина. Пусть $E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha$ - базис Веиля G, тогда алгебра Ли G_u обладает базисом iH'_α, $E_\alpha + E_{-\alpha}$; $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$, а G_n обладает базисом $E_\alpha + E_{-\alpha}$. В [22] доказано, что ограничения функций типа $P(x+\lambda a)$, $P\in I(G)$ ($a\in H_0'$ - элемент общего положения) на G_u и G_n соответственно образуют полные инволютивные наборы на них. Таким образом теоремы 11.1 и 11.2 дают нам богатый класс нередуктивных алгебр Ли, на которых построятся полные инволютивные наборы полиномиальных функций (см. теоремы 12.1 и 12.2).

В третьей главе диссертации доказываются некоторые дополнительные результаты, связанные с изученными в предыдущих главах проблемами.

В §13 изучены некоторые свойства множества регулярных точек на $\mathbb{Z}_2$-грандуированных алгебрах Ли.

В §14 построены инварианты для сжатых алгебр $\mathbb{Z}_p$-грандуированных алгебр Ли.

В §15 построены поляризации, удовлетворяющие условию Пуканского для некоторых алгебр Ли. Эта конструкция обобщает конструкцию С.А.Камалина и А.М.Переломова [10, 41].

В §16 доказано, что на дуальном пространстве L^* к алгебре L треугольных матриц: $L = V + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{R} E_{ij}$, где V – подпространство пространства диагональных матриц, существует полный инволютивный набор полиномиальных функций. Напомним, что в работе [25] была формулированна А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко следующая

<u>Гипотеза</u>: На дуальном пространстве G^* к произвольной алгебре Ли G всегда существует полный инволютивный набор функций.

В работе [21] эта гипотеза была доказана для редуктивных алгебр Ли. После отдельных примеров первым продвижением в направлении доказательства гипотезы для произвольных разрешимых алгебр Ли была теорема В.А.Архангельского [34]. На дуальном пространстве T_n^* к алгебре Ли всех верхнетреугольных матриц T_n А.А.Архангельский построил полный инволютивный набор полиномиальных функций методом сдвига полуинвариантов (т.е. собственных функций) алгебры T_n. Используя явный вид построенного А.А.Архангельским этого набора, мы доказали гипотезу для всех подалгебр типа $L = V + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{R} E_{ij}$ алгебры Ли T_n. Далее в работах [46–47] гипотеза была доказана В.В.Трофимовым для борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли. Результаты в первой и второй главах настоящей диссертации доказывают справедливость гипотезы для широкого класса новых разрешимых алгебр Ли.

Перечислим коротко основные результаты:

I) доказаны эквивалентность понятий самосопряженных алгебр и коммутативных, ассоциативных алгебр Фробениуса и основные свойства этих алгебр;

2) доказано, что самосопряженность алгебры A является необходи-

мым и достаточным условием для выполнения тождества $\{P^a, Q^b\} = \{P,Q\}^{ab}$, $P, Q \in k[G^*]$, $a, b \in A$ на дуальном пространстве $(G \otimes A)^*$ к произвольной расширенной алгебре Ли $G \otimes A$;

3) найдено условие полноты инволютивных наборов полиномиальных функций на подалгебрах расширенных алгебр Ли;

4) построены инварианты сжатых алгебр $\mathbb{Z}_p$ - грандуированных алгебр Ли, поляризации, удовлетворяющие условию Пуканского, на расширенных алгебрах Ли;

5) построены полные инволютивные наборы полиномиальных функций на алгебрах треугольных матриц.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13--16].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору А.Т.Фоменко за внимание к работе и поддержку.

Глава I

АЛГЕБРЫ ФРОБЕНИУСА И ИНВОЛЮТИВНОСТЬ ФУНКЦИЙ НА РАСШИРЕННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

§1. Основные понятия и подстановка задачи

Пусть $\mathcal{G}$ – конечномерная (комплексная или вещественная) группа Ли, G – ее алгебра Ли, G^* – пространство, дуальное к алгебре G. Как обычно, Ad_g и ad_ξ, где $g \in \mathcal{G}$, $\xi \in G$ – операторы присоединенного представления группы и соответственно алгебры, Ad_g^* и ad_ξ^* – сопряженные им операторы (операторы коприсоединенного представления) на пространстве G^*. Ковекторы $ad^*_\xi x$, где $x \in G^*$, будем также обозначать через $\{x, \xi\}$. Пусть $O(x)$ – орбита коприсоединенного представления группы $\mathcal{G}$ на пространстве G^*, проходящая через точку $x \in G^*$. Число $r = \max\limits_{x \in G^*} \dim O(x)$ является рангом алгебры Ли G и обозначается через $rk\, G$. Тогда $x \in G^*$ называется регулярной точкой (относительно коприсоединенного представления) если $\dim O(x) = rk\, G$. Множество регулярных точек всюду плотно и открыто на G^* (см. [7]).

Индексом алгебры Ли G называется число $ind\, G = \dim G - rk\, G$. Пусть $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$ – базис алгебры Ли G с структурными константами C_{ij}^k, $1 \leq i, j, k \leq n$, $\{e^i\}$, $1 \leq i \leq n$, – сопряженный ему базис на G^*, если точка $x \in G^*$ имеет координаты $(x_1, \dots, x_n)$ относительно этого базиса, тогда

$$\dim O(x) = rk \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k C_{ij}^k \right\|_{i,j=1,\dots,n}$$

Функция $F(x)$, определенная на G^*, называется инвариантом (относительно коприсоединенного представления) если она постоянна на каждой орбите коприсоединенного представления на G^*. Известно, что функция $F(x)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\sum_{k,i=1}^{n} x_k C_{ij}^k \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \{x_i\}, \ 1 \leq i \leq n,$$

– система координат пространства G^* относительно базиса $\{e^i\}$, $1 \le i \le n$. На орбитах коприсоединенного представления на пространстве G^* имеется естественная симплектическая структура – форма Кириллова (см. [II]).

Всякая гладкая функция $F: G^* \to \mathbb{R}$ порождает на каждой орбите $O(x)$ гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониалу $F|_{O(x)}$.

Получающееся таким образом векторное поле на пространстве G^*, касательное ко всем орбитам, обозначается через $\operatorname{sgrad} F(x)$. Оно может быть записано в виде

$$\operatorname{sgrad} F(x) = \{x, dF(x)\}$$

где $\operatorname{sgrad} F(x)$ – вектор поля в точке $x \in G^*$, $dF(x)$ – дифференциал функций F в точке x, который мы считаем лежащим в алгебре G.

Уравнение

$$\dot{x} = \operatorname{sgrad} F(x) = \{x, dF(x)\}$$

на пространстве G^* называется уравнением Эйлера (см. [I]). Скобка Пуассона $\{F, \Phi\}$ функций F и Φ на пространстве G^* определяется естественным образом. Она будет иметь следующий вид:

$$\{F(x), \Phi(x)\} = \langle \operatorname{sgrad} F(x), d\Phi(x) \rangle = \langle x, [dF(x), d\Phi(x)] \rangle$$

где $\langle x, \xi \rangle$ обозначает значения функционала $x \in G^*$ на векторе $\xi \in G$.

Две функции F и Φ на G^* называются находящимися в инволюции, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю $\{F, \Phi\}(x) \equiv 0$. Набор гладких функций $F_1, \dots, F_s$ на пространстве G^* называется инволютивным, если эти функции попарно находятся в инволюции: $\{F_i, F_j\} \equiv 0$, $1 \le i, j \le s$. Мы имеем следующие основное

<u>Определение I.I</u>. Инволютивный набор гладких функций на G^* называется полным, если в нем содержится $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2} \operatorname{rk} G + \operatorname{ind} G$ функционально независимых функций.

Если набор функций $F_1, F_2, \ldots F_m$ на G^* является полным инволютивным тогда уравнение Эйлера $\dot{x} = \{x, dF(x)\}$, где гамильтониан $F(x) = F_1(x)$, на орбитах общего положения вполне интегрируемо по Лиувиллю и все функции $F_1, F_2, \ldots, F_m$ являются его интегралами.

В последнее время многие работы посвящены изучению и построению инволютивных наборов (в частности полных) функций на дуальных пространствах G^* к алгебрам Ли G. Во многих случаях полные инволютивные наборы функций существуют и состоят из полиномиальных функций. Их ограничения на орбитах коприсоединенного представления дают полную интегрируемость по Лиувиллю многих важных систем уравнений.

В связи с этим возникают разные методы построения полных инволютивных наборов на пространствах G^*. В этой работе мы будем рассматривать один из этих методов и давать полный ответ на вопросы, связанные с этим методом.

Пусть A является коммутативной, ассоциативной (конечномерной) алгеброй с единицей. Рассмотрим тензорное произведение $G \otimes A$, являющееся расширением алгебры Ли G , с следующим коммутатором:

$[\xi \otimes a, \eta \otimes b] = [\xi, \eta] \otimes ab$ для всех $\xi, \eta \in G,\ a, b \in A$

Легко видеть, что этот коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби и пространство $G \otimes A$ при этом превращается в алгебру Ли, которая называется расширенной.

<u>Вопрос</u>: Когда на дуальном пространстве ($G \otimes A$)* существуют полные инволютивные наборы функций и как их найти?

Эта задача изучена сначала В.В.Трофимовым (см. [31], [32]) для алгебр A = $k[x_1, \ldots, x_n] / (x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})$ где $k[x_1, \ldots, x_n]$ - кольцо полиномиальных функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а потом А.Б.Брайловым (см. [2], [3]) для алгебр A с двойственностью

Пуанкаре. Для полного решения этой задачи мы должны изучать свойства одного класса алгебр A, а именно класса всех самосопряженных алгебр (алгебр Фробениуса).

§2. Самосопряженные алгебры (алгебры Фробениуса)

Как выше A является конечномерной ассоциативной, коммутативной алгеброй с единицей, обозначающейся через I. Пусть размерность алгебры A равна N. Фиксируем некоторый базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ в A. Пусть Ω есть линейный инволютивный оператор, сохраняющий базис $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq N$, т.е. $\Omega : A \to A$, $\Omega^2 = id$ и $\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_{\omega i}$, $1 \leq i \leq N$, где ω - некоторая перестановка индексов, ω: $\{1, 2, \ldots, N\} \to \{1, 2, \ldots, N\}$, $\omega^2 = id$. В дальнейшем под тройкой (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) мы понимаем, что A есть ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей, $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq n$, - ее базис, и оператор Ω удовлетворяет этим свойствам. Определим на A относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$ естественное скалярное произведение (,), т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$.

Мы формулируем основное понятие этого параграфа.

<u>Определение 2.1</u>. Ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей A называется самосопряженной относительно тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$), если естественное скалярное произведение на A относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq N$, удовлетворяет условию:

$$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k), \quad 1 \leq i, j, k \leq N.$$

Алгебра A называется самосопряженной если она самосопряжена относительно некоторой тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$).

Самосопряженные алгебры играют главную роль в нашем методе расширения, поэтому нам полезно подробно изучать их свойства. Для этой цели в этом параграфе мы докажем следующие основные теоремы.

Теорема 2.1. Пусть для ассоциативной, коммутативной с единицей алгебра A задана тройка $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, тогда следующие условия эквивалентны

1. Алгебра A самосопряжена относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, т.е. выполняется равенство:

$$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k), \quad 1 \le i, j, k \le N = \dim A$$

2. В алгебре A существует такой элемент a, что

$$(a, \varepsilon_i \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k), \quad 1 \le i, k \le N$$

3. В алгебре A существует единственный элемент $\Omega 1$ такой, что

$$(\Omega 1, \varepsilon_i \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k), \quad 1 \le i, k \le N$$

4. Тензорное произведение $A \otimes A$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a \otimes \varepsilon_{\omega i} b = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a b \otimes \varepsilon_{\omega i} \qquad \text{для всех } a, b \in A$$

5. Тензорное произведение $A \otimes A$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a \otimes \varepsilon_{\omega i} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \otimes a \varepsilon_{\omega i} \qquad \text{для любого } a \in A$$

Доказательство: Докажем сначала, что из первого условия следует второе. Действительно, пусть единичный элемент I алгебры A имеет относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$ разложение $I = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varepsilon_j$. Тогда из самосопряженности алгебры A относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, т.е. из равенств $(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k)$, $1 \le i, j, k \le N$ следует равенство $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k)$.

Преобразуя левую часть тождества, мы имеем $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) =$
$= (\varepsilon_{\omega i}, (\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varepsilon_j) \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, 1 . \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k)$

С другой стороны правая часть тождества имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k) = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k\right) = \left(\Omega\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varepsilon_j\right), \varepsilon_i \varepsilon_k\right) = (\Omega 1, \varepsilon_i \varepsilon_k)$$

Следовательно, при $a = \Omega 1$ алгебра A удовлетворяет условию $(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = (a, \varepsilon_i \varepsilon_k)$, $1 \le i, k \le N$ для данной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$.

Докажем, что из второго условия следует третье. Аналогично выше разлагаем единичный элемент 1 по базису $\{\varepsilon_i\}$: $1 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varepsilon_j$

Из тождества $(a, \varepsilon_i \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k)$, $1 \le i, k \le N$, следует:

$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (a, \varepsilon_i \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k)$. Это равенство в свою очередь эквивалентно тождеству: $(a, \varepsilon_k) = (\Omega 1, \varepsilon_k)$, $1 \le k \le N$. Следовательно, элемент a совпадает с элементом $\Omega 1$ в алгебре A.

Пусть алгебра A удовлетворяет третьему условию нашей теоремы относительно заданной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, т.е. выполняется равенство: $(\Omega 1, \varepsilon_i \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k)$, $1 \le i, k \le N$. Докажем, что из него вытекает условие 4. Мы имеем $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a \otimes \varepsilon_{\omega i} b =$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k,j=1}^{N} (\varepsilon_i a, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k)\, \varepsilon_{\omega j} \otimes \varepsilon_k =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i a, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k) \right] \varepsilon_{\omega j} \otimes \varepsilon_k$$

С другой стороны:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ab \otimes \varepsilon_{\omega i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k,j=1}^{N} (\varepsilon_i ab, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k)\, \varepsilon_{\omega j} \otimes \varepsilon_k =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i ab, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) \right] \varepsilon_{\omega j} \otimes \varepsilon_k$$

Поэтому равенство $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ab \otimes \varepsilon_{\omega i} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a \otimes \varepsilon_{\omega i} b$, $a, b \in A$ эквивалентно тождеству:

$$\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i ab, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i a, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k),$$
$$1 \le k, j \le N, \quad a, b \in A$$

А последнее следует из третьего условия теоремы, действительно:

$$\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i ab, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i \varepsilon_j ab, \Omega 1)(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_j ab, \varepsilon_{\omega i})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = (\varepsilon_j ab, \varepsilon_k) =$$

$$= (\varepsilon_{\omega k} ab, \varepsilon_{\omega j}) = \sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i a, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega k} b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i a, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_k, \varepsilon_{\omega i} b)$$

Это означает, что условие 4 выполняется.

Очевидно, что условие 5 следует из условия 4. Поэтому остается доказательство того, что из пятого условия следует первое условие. Как было показано выше, условие 5 эквивалентно условию:

$$\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i b, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k)$$

для любого $b \in A$. Заметим, что всегда выполняется равенство $(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega j})$, $1 \leq i, j \leq N$. Действительно, мы имеем:

$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j) = \delta_{\omega i, j} = \delta_{\omega(\omega i), \omega j} = \delta_{i, \omega j} = (\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega j})$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ если } i = j \\ 0 \text{ если } i \neq j \end{cases}$

Поэтому левая часть нашего тождества имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i b, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i b, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega k})$$

$= (\varepsilon_{\omega k} b, \varepsilon_{\omega j})$, а правая часть равна:

$$\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i, \varepsilon_{\omega j})(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j)(\varepsilon_{\omega i} b, \varepsilon_k) =$$

$= (\varepsilon_j b, \varepsilon_k)$. Следовательно $(\varepsilon_{\omega k} b, \varepsilon_{\omega j}) = (\varepsilon_j b, \varepsilon_k)$, $1 \leq k, j \leq N$ и $b \in A$. Легко видеть, что из последнего следует условие I. Теорема доказана.

Мы докажем еще одно свойство самосопряженных алгебр, а именно эквивалентность понятий сопряженных алгебр и алгебр Фробениуса.

Определение 2.2. Ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей A называется алгеброй Фробениуса, если на A существует невырожденное скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, которое удовлетворяет условию "инвариантности": $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ для всех $a, b, c \in A$.

Теорема 2.2. Ассоциативная, коммутативная алгебра A с единицей является самосопряженной тогда и только тогда, когда A является алгеброй Фробениуса.

Доказательство. Необходимость. Пусть ассоциативная, коммутативная алгебра A с единицей I самосопряжена относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, т.е. выполняется равенство $(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k)$

$1 \leq i,j \leq N$. Последнее эквивалентно равенству $(\Omega a, bc) = (\Omega b, ac)$ для всех $a,b,c \in A$. Определим на А новое невырожденное скалярное произведение $\langle a,b\rangle = (a, \Omega b)$ для всех $a, b \in A$. Тогда мы имеем $\langle ab, c\rangle = (ab, \Omega c) = (bc, \Omega a) = \langle a, bc\rangle$ т.е. $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$. Из этого следует, что А является алгеброй Фробениуса.

Достаточность. Пусть А есть коммутативная, ассоциативная алгебра Фробениуса с единицей. По определению 2.2 на А существует невырожденное скалярное произведение $\langle\,,\rangle$ такое, что $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ для всех $a,b,c \in A$. Выбираем в А некоторый базис $\{\tilde{\varepsilon}_i\}$, $1 \leq i \leq N$, относительно которого это произведение имеет диагональный вид:

$$\langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle = \pm \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq N$$

При этом можно предполагать, что $\langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_i \rangle = 1$, $1 \leq i \leq n$, $\langle \tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_j \rangle = -1$, $n+1 \leq j \leq N$ и кроме того, $n \geq N-n$, т.е. $n \geq N/2$.

Построим тройку $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ для алгебры А следующим образом. Положим

$$\varepsilon_i = \frac{\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{N+1-i} = \frac{\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq i \leq N-n$$

$$\varepsilon_i = \tilde{\varepsilon}_i, \quad N-n+1 \leq i \leq n$$

При этом линейный инволютивный оператор Ω в А, сохраняющий базис $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq N$, определяется равенствами:

$$\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_{N+1-i}, \quad 1 \leq i \leq N-n$$

$$\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_i, \quad N-n+1 \leq i \leq n$$

Рассмотрим на алгебре А новое скалярное произведение:

$$(a,b) = \langle a, \Omega b\rangle \qquad \text{для всех } a, b \in A$$

Проверим следующее свойство этого скалярного произведения: $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq N$, т.е. оно является естественным скалярным произведением на А относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq N$.

Действительно, при $N-n+1 \le i,j \le n$ мы имеем:

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \langle \varepsilon_i, \Omega \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Если $N-n+1 \le j \le n$ и $1 \le i \le N-n$, то

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \langle \varepsilon_i, \Omega \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \left\langle \frac{\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}}, \tilde{\varepsilon}_j \right\rangle = 0$$

и $(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \langle \varepsilon_j, \Omega \varepsilon_i \rangle = \langle \varepsilon_j, \varepsilon_{N+1-i} \rangle = \left\langle \tilde{\varepsilon}_j, \dfrac{\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}} \right\rangle = 0$

Аналогично мы имеем $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0$ при $N-n+1 \le j \le n$ и $n+1 \le i \le N$.

. Рассмотрим случай, когда $1 \le i,j \le N-n$. Тогда мы получаем равенства: $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \langle \varepsilon_i, \Omega \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_{N+1-j} \rangle =$

$$= \left\langle \frac{\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{\varepsilon}_j - \tilde{\varepsilon}_{N+1-j}}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle - \langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}, \tilde{\varepsilon}_{N+1-j} \rangle \right) = \delta_{ij}$$

т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$. Аналогично имеем равенство:

$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ при $n+1 \le i, j \le N$

Мы проверим тождество $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ в последнем случае, когда $1 \le i \le N-n$, $n+1 \le j \le N$. В этом случае $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =$

$$= \langle \varepsilon_i, \Omega \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_{N+1-j} \rangle = \left\langle \frac{\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{\varepsilon}_{N+1-j} + \tilde{\varepsilon}_j}{\sqrt{2}} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_{N+1-j} \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}, \tilde{\varepsilon}_{N+1-j} \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}, \tilde{\varepsilon}_j \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_{N+1-j} \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}, \tilde{\varepsilon}_j \rangle \right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,N+1-j} - \delta_{N+1-i,j} \right) = 0$ т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$.

Аналогично мы имеем равенства: $(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \langle \varepsilon_j, \Omega \varepsilon_i \rangle =$

$$= \langle \varepsilon_j, \varepsilon_{N+1-i} \rangle = \left\langle \frac{\tilde{\varepsilon}_{N+1-j} - \tilde{\varepsilon}_j}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{N+1-i}}{\sqrt{2}} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-j}, \tilde{\varepsilon}_i \rangle - \langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-j}, \tilde{\varepsilon}_{N+1-i} \rangle - \langle \tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_i \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_{N+1-i} \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \tilde{\varepsilon}_{N+1-j}, \tilde{\varepsilon}_i \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_{N+1-i} \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{N+1-j,i} - \delta_{j,N+1-i} \right) = 0$$

Таким образом новое скалярное произведение обладает свойством: $(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le N$. Отсюда следует, что $(a, b) = (b, a) = (\Omega a, \Omega b)$ для всех элементов $a, b \in A$. Докажем, что алгебра А является самосопряженной относительно построенной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры А. Для этого достаточно проверить равенство:

$$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k), \quad 1 \le i, j, k \le N,$$

при этом

$$\omega i = \begin{cases} N+1-i, & \text{если либо } 1 \le i \le N-n, \text{ либо } n+1 \le i \le N \\ i, & \text{если } N+1-n \le i \le n \end{cases}$$

Последнее равенство непосредственно получается из определения скалярного произведения, действительно:

$$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\Omega \varepsilon_i, \varepsilon_j \varepsilon_k) = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \varepsilon_k \rangle = \langle \varepsilon_j, \varepsilon_i \varepsilon_k \rangle$$

$$= (\Omega \varepsilon_j, \varepsilon_i \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k).$$

Теорема доказана.

§3. Метод расширения полиномиальных функций на алгебрах Ли

Пусть G является произвольной алгеброй Ли, А является конечномерной, ассоциативной, коммутативной алгеброй с единицей. Тогда тензорное произведение $G \otimes A$ является расширенной алгеброй Ли алгебры G с коммутатором

$$[\xi \otimes a, \eta \otimes b] = [\xi, \eta] \otimes ab, \quad \xi, \eta \in G, \ a, b \in A$$

Мы будем рассматривать фиксированную тройку $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ (см. параграф 2) для алгебры А, $\Omega : A \to A$ – линейный оператор, $\Omega^2 = id$, $\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_{\omega i}$, $1 \le i \le N$. Пусть $(\ ,\ )$ – естественное скалярное произведение на А относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$, $1 \le i \le N$, т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le N$. С помощью этого невырожденного произведения на А мы отождествляем два пространства $(G \otimes A)^*$ и $G^* \otimes A$: $(G \otimes A)^* \overset{(,)}{\approx} G^* \otimes A$, где G^* – дуальное пространство к алгебре Ли G.

Обозначим через $k[G^*]$ (и $k[G^* \otimes A]$) кольцо полиномиальных функций на G^* (и соответственно на $G^* \otimes A$). Для каждого элемента $a \in A$ мы построим некоторое (линейное) отображение из кольца $k[G^*]$ в кольцо $k[G^* \otimes A]$ относительно фиксированной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Тем самым мы определим метод расширения полиномиальных функций на G^* до функций на $G^* \otimes A$.

Пусть пространство G^* имеет декартовую систему координат x_i, $1 \le i \le n$, $n = \dim G$. Возьмем любую полиномиальную функцию P из кольца $k[G^*]$. Пусть в данной системе координат на G^*, функция P имеет вид:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} P_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

Для простоты мы будем писать $P = P_I X_I$ без знака $\sum$, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $P_I = P_{i_1 i_2 \dots i_k}$, $X_I = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$. Обозначаем декартовую систему координат на $G^* \otimes A$ через x_i^α, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le i \le n$, где $x_i^\alpha = x_i \otimes \varepsilon_\alpha$. Каждой полиномиальной функции P мы положим соответственно полиномиальную функцию $\tilde{P}$ из кольца $k[G^*] \otimes A$ всех полиномиальных функций с коэффициентами из алгебры A, а именно:

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{N} P_{i_1 i_2 \dots i_k} \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} \dots \varepsilon_{j_k} x_{i_1}^{\omega j_1} x_{i_2}^{\omega j_2} \dots x_{i_k}^{\omega j_k} =$$

$$= P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}$$

Отображение из кольца $k[G^*]$ в кольцо $k[G^* \otimes A]$ для каждого элемента $a \in A$ построить следующим образом: каждой полиномиальной функции $P \in k[G^*]$ соответствует функция $P^a \in k[G^* \otimes A]$, где $P^a = (\Omega a, \tilde{P})$, т.е. $P^a = (\Omega a, P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}) = (\Omega a, \varepsilon_J) P_I X_I^{\Omega J}$

Это отображение, очевидно, корректно определено для произвольной алгебры Ли G и ассоциативной, коммутативной алгебры A с фиксированной тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$.

В случае, когда A является самосопряженной алгеброй относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ данные расширения кольца $k[G^*]$ до кольца $k[G^* \otimes A]$ можно определить методом индукций. А именно, если P есть линейная функция на G^*, т.е. $P \in G$ тогда положим

$P^{(a)} = P \otimes a$ для любого элемента $a \in A$, $P \otimes a \in G \otimes A$ – линейная функция на $G^* \otimes A$. Пусть для полиномиальных функций $P, Q \in k[G^*]$ были определены расширенные функции $P^{(a)}$ и $Q^{(b)}$ для произвольных элементов $a, b \in A$ ($P(o) = Q(o) = o$) тогда мы определим расширенную функцию ($PQ)^{(a)}$ на пространстве $G^* \otimes A$ функций $P.Q$ следующим образом:

$$(PQ)^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} P^{(a\varepsilon_i)} Q^{(\varepsilon\omega_i)}, \quad a \in A$$

Мы имеем следующую:

<u>Теорема 3.I</u>. Расширение полиномиальных функций P на дуальном пространстве G^* к произвольной алгебре Ли G до функций $P^{(a)}$ на дуальном пространстве $G^* \otimes A$ к расширенной алгебре Ли $G \otimes A$ для любого элемента а коммутативной, ассоциативной с единицей алгебры А при фиксированой тройке (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) будет корректно определено тогда и только тогда, когда А является самосопряженной алгеброй относительно данной тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$).

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Пусть наше расширение кольца $k[G^*]$ было корректно определено для любого элемента а алгебры А с фиксированной тройкой (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$). Рассмотрим полиномиальную функцию второй степени $P = x_\alpha x_\beta$, где α, β – некоторые числа из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

По определению для произвольного элемента $a \in A$ мы имеем:
$P^{(a)} = (x_\alpha x_\beta)^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} x_\alpha^{a\varepsilon_i} x_\beta^{\varepsilon\omega_i}$. С другой стороны $P^{(a)} = (x_\beta x_\alpha)^{(a)} = \sum_{j=1}^{N} x_\beta^{a\varepsilon_j} x_\alpha^{\varepsilon\omega_j}$. Поэтому из корректности определения $P^{(a)}$ следует, что $\sum_{i=1}^{N} x_\alpha^{a\varepsilon_i} x_\beta^{\varepsilon\omega_i} = \sum_{j=1}^{N} x_\beta^{a\varepsilon_j} x_\alpha^{\varepsilon\omega_j}$

Это эквивалентно равенству:

$$\sum_{i=1}^{N} x_\alpha \otimes a\varepsilon_i \cdot x_\beta \otimes \varepsilon\omega_i = \sum_{i=1}^{N} (x_\alpha \otimes x_\beta)(a\varepsilon_i \otimes \varepsilon\omega_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} (x_\alpha \otimes x_\beta)(\varepsilon\omega_j \otimes a\varepsilon_j)$$

Последнее верно, по условию теоремы, для любой функции типа $x_\alpha x_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G. Следовательно мы получаем: $\sum_{i=1}^{N} a\varepsilon_i \otimes \varepsilon_{\omega i} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{\omega j} \otimes a\varepsilon_j$

Отсюда в силу теоремы 2.1, следует самосопряженность алгебры A относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$.

Достаточность. Пусть A является самосопряженной алгеброй относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Для доказательство корректности определения $P^{(a)}$ достаточно доказать, что $P^{(a)} = P^a$ для произвольной функции $P \in k[G^*]$ и элемента $a \in A$. Мы докажем это равенство по индукции. Если P является линейной функцией на G^* и $P = P_i x_i$, тогда

$$P^a = (\Omega a, \varepsilon_j) P_i x_i^{\omega j} = (a, \Omega \varepsilon_j) P_i x_i^{\omega j} =$$
$$= P_i x_i \otimes a = (P_i x_i) \otimes a = P \otimes a = P^{(a)}$$

Предположим, что наше равенство выполняется для двух полиномиальных функций P и Q на G^*, т.е. $P^a = P^{(a)}$ и $Q^b = Q^{(b)}$ для любых элементов $a, b \in A$. Пусть $P = P_I X_I$ и $Q = Q_{I'} X_{I'}$ тогда по определению мы имеем:

$$(PQ)^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} P^{(a\varepsilon_i)} Q^{(\varepsilon_{\omega i})} = \sum_{i=1}^{N} P^{a\varepsilon_i} Q^{\varepsilon_{\omega i}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} P_I X_I^{\Omega J} (\Omega(a\varepsilon_i), \varepsilon_J) Q_{I'} X_{J'}^{\Omega J'} (\varepsilon_i, \varepsilon_{J'})$$
$$= P_I Q_{I'} X_I^{\Omega J} X_{I'}^{\Omega J'} (\Omega(a\varepsilon_{J'}), \varepsilon_J)$$
$$= P_I Q_{I'} X_I^{\Omega J} X_{I'}^{\Omega J'} (a\varepsilon_{J'}, \Omega\varepsilon_J)$$
$$= P_I Q_{I'} X_I^{\Omega J} X_{I'}^{\Omega J'} (\varepsilon_J \varepsilon_{J'}, \Omega a) = (PQ)^a$$

при этом равенство $(a\varepsilon_{J'}, \Omega\varepsilon_J) = (\varepsilon_J \varepsilon_{J'}, \Omega a)$ выполняется в силу самосопряженности алгебры A относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Теорема доказана.

§4. Инволютивность расширенных функций

В третьем параграфе мы уже определили расширение кольца полиномиальных функций на G^* до кольца полиномиальных функций на расширенном пространстве $G^*\otimes A$. Оказывается, что этот метод расширения дает эффективный результат в построении полного инволютивного набора функций на $G^*\otimes A$ (см. п.I).

В этой части работы мы докажем необходимое и достаточное условие для инволютивности расширенных функций на $G^*\otimes A$, получающихся нашим методом расширения. В этом условии важную роль играет самосопряженность данной алгебры A. Напомним, что в работах Трофимова и Браилова была доказана инволютивность расширенных функций для класса алгебр A с двойственностью Пуанкаре. Наши теоремы являются окончательными результатами по этой проблеме, а именно самосопряженность алгебр A является не только достаточным условием, но и необходимым для эффективности (т.е. инволютивности расширенных функций) нашего метода расширения.

Итак, пусть A есть ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей. Мы фиксируем некоторую тройку $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры A. Если P - полиномиальная функция на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G, тогда для элемента $a \in A$ расширенная функция P^a на $G^*\otimes A$ определяется формулой

$$P^a = (\Omega a, \tilde{P}), \text{ где } P = P_I X_I \text{ и } \tilde{P} = P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}$$

Мы имеем следующую

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей и с фиксированной тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Пусть для каждой полиномиальной функции P на G^* и каждого элемента $a \in A$ была определена расширенная относительно этой тройки функция P^a на расширенном пространстве $G^*\otimes A$. Тогда для выполнения тождества $\{P^a, Q^b\}_{G^*\otimes A} = \{P, Q\}^{ab}_{G^*}$, где P, Q - две любых полиномиальных функции на дуальном пространстве G^* к произвольной алгебре Ли G, необходимо и достаточно, чтобы относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры A выполнялось равенство (ж):

$$\sum_{i=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_i)(\Omega d, b\varepsilon_{\omega i}) = (\Omega(ab), cd) \qquad (\text{ж})$$

для всех элементов $a, b, c, d \in A$

Следствие 4.1. Для самосопряженной алгебры А относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, место имеет равенство

$$\{P^{(a)}, Q^{(b)}\} = \{P, Q\}^{(ab)} \text{ где } P, Q \in k[G^*] \text{ и } a, b \in A.$$

(см. параграф 3).

Действительно, если А - самосопряженная алгебра относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ тогда мы имеем тождество $(\Omega a, bc) = (\Omega b, ac)$ для всех элементов $a, b, c \in A$. Следовательно $\sum_{i=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_i)(\Omega d, b\varepsilon_{\omega i}) = \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_{\omega i}, ac)(\Omega d, b\varepsilon_{\omega i}) = (\Omega d, abc) = (\Omega(ab), cd)$

т.е. равенство (ж) выполняется. В силу теоремы 3.1. $P^{(a)} = P^a$ для всех $P \in k[G^*], a \in A$, отсюда следует

$$\{P^{(a)}, Q^{(b)}\} = \{P, Q\}^{(ab)} \text{ для всех } P, Q \in k[G^*], a, b \in A$$

Для доказательства теоремы 4.1. нам требуется следующая

Лемма 4.1: Пусть А - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей и пусть $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ - ее тройка.

Тогда условие (ж) эквивалентно следующему условию (жж):

$$\sum_{j,j'=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega b, d\varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) = (\Omega(ab), cdh) \qquad (\text{жж})$$

для любых элементов $a, b, c, d, h \in A$.

Доказательство. Докажем сначала, что из равенства (ж) следует (жж). Действительно, пусть (ж) выполнено, тогда мы имеем:

$$\sum_{j,j'=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega b, d\varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) = \sum_{j=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_j)\Big[\sum_{j'=1}^{N}(\Omega b, d\varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'})\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}(\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega(hd), b\varepsilon_{\omega j}) = (\Omega(ab), cdh) \qquad \text{для всех}$$

элементов $a, b, c, d, h \in A$

Докажем обратно. Пусть для алгебры A с тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ тождество (жж) выполняется. Поставим в (жж) элемент $\alpha = I$, мы получим:

$$\sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega b, \varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) =$$

$$= \sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(b, \varepsilon_{\omega j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega h, b\varepsilon_{\omega j}) = (\Omega(ab), ch)$$

т.е. для алгебры A условие (ж) выполняется. Лемма доказана.

<u>Доказательство теоремы 4.I</u>. В силу леммы 4.I. мы можем заменить условие (ж) в теореме 4.I. новым условием (жж). Докажем сначала необходимое условие. Пусть P, Q - две произвольных полиномиальных функции на G^*, $P = P_I X_I$, $Q = Q_{I'} X_{I'}$. По определению скобки Пуассона двух функций на G^* мы имеем:

$$\{P,Q\}_{G^*} = \{P,Q\} = \{P_I X_I, Q_{I'} X_{I'}\} = P_I Q_{I'} \{X_I, X_{I'}\} =$$

$$= \sum_{\substack{i,i' \\ I=\tilde I\cup i,\, I'=\tilde I'\cup i'}} P_I Q_{I'} X_{\tilde I} X_{\tilde I'} \{x_i, x_{i'}\} = \sum_{\substack{i,i',k \\ I=\tilde I\cup i,\, I'=\tilde I'\cup i'}} P_I Q_{I'} X_{\tilde I} X_{\tilde I'} C^k_{ii'} x_k$$

где C^k_{ij} - структурные константы алгебры Ли G. Тогда, по определению, функция $\{P,Q\}^{ab}_{G^*}$ $(a, b \in A)$ имеет вид:

$$\{P,Q\}^{ab}_{G^*} = \{P,Q\}^{ab} = (\Omega(ab), \widetilde{\{P,Q\}}) =$$

$$= \Big(\Omega(ab), \widetilde{\sum_{\substack{i,i',k \\ I=\tilde I\cup i,\, I'=\tilde I'\cup i'}} P_I Q_{I'} X_{\tilde I} X_{\tilde I'} C^k_{ii'} x_k}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{i,i',k,\ \tilde J, \tilde J', j_0 \\ I=\tilde I\cup i,\ I'=\tilde I'\cup i'}} P_I Q_{I'} C^k_{ij} X^{\Omega\tilde J}_{\tilde I} X^{\Omega\tilde J'}_{\tilde I'} x^{\omega j_0}_k (\Omega(ab), \varepsilon_{\tilde J}\varepsilon_{\tilde J'}\varepsilon_{j_0})$$

С другой стороны: $P^a = (\Omega a, \tilde P) = (\Omega a, P_I \varepsilon_J X^{\Omega J}_I)$,

$Q^b = (\Omega b, \tilde Q) = (\Omega b, Q_{I'} \varepsilon_{J'} X^{\Omega J'}_{I'})$. Следовательно их скобкой Пуассона на $G^* \otimes A$ будет:

$$\{P^a, Q^b\}_{G^*\otimes A} = \{P^a, Q^b\} = \Big\{\Big(\Omega a, \sum_{J=\tilde J\cup j} P_I \varepsilon_{\tilde J} \varepsilon_j X^{\Omega J}_I\Big), \Big(\Omega b, \sum_{J'=\tilde J'\cup j'} Q_{I'} \varepsilon_{\tilde J'} \varepsilon_{j'} X^{\Omega J'}_{I'}\Big)\Big\}$$

$$= \sum_{\substack{i,i' \\ J=\tilde{J}\cup j,\, J'=\tilde{J}'\cup j'}} (\Omega a, \varepsilon_{\tilde{J}}\varepsilon_j)(\Omega b, \varepsilon_{\tilde{J}'}\varepsilon_{j'}) P_I Q_{J'} X_{\tilde{I}}^{\Omega\tilde{J}} X_{\tilde{I}'}^{\Omega\tilde{J}'} \{x_i^{\omega j}, x_{i'}^{\omega j'}\}.$$

Так как: $\{x_i^{\omega j}, x_{i'}^{\omega j'}\} = \{x_i \otimes \varepsilon_{\omega j}, x_{i'} \otimes \varepsilon_{\omega j'}\} =$

$$= \{x_i, x_{i'}\} \otimes \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'} = \sum_{j_0} (\varepsilon_{\omega j_0}, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) C_{ii'}^k x_k^{\omega j_0}$$

поэтому мы получаем равенство $\{P^a, Q^b\}_{G^*\otimes A} =$

$$= \sum_{\substack{k,i,i',j_0 \\ J=\tilde{J}\cup j,\, J'=\tilde{J}'\cup j'}} P_I Q_{I'} C_{ii'}^k X_{\tilde{I}}^{\Omega\tilde{J}} X_{\tilde{I}'}^{\Omega\tilde{J}'} x_k^{\omega j_0} (\Omega a, \varepsilon_{\tilde{J}}\varepsilon_j)(\Omega b, \varepsilon_{\tilde{J}'}\varepsilon_{j'})(\varepsilon_{\omega j_0}, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'})$$

где все индексы принимают значения с I до N. Отсюда из равенства $\{P,Q\}^{ab} = \{P^a, Q^b\}$ для произвольных функций $P, Q \in k[G^*]$ на дуальном пространстве G^* следует тождество:

$$\sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, \varepsilon_{\tilde{J}}\varepsilon_j)(\Omega b, \varepsilon_{\tilde{J}'}\varepsilon_{j'})(\varepsilon_{\omega j_0}, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) = (\Omega(ab), \varepsilon_{\tilde{J}}\varepsilon_{\tilde{J}'}\varepsilon_{j_0}) \quad (\text{жжж})$$

для всех элементов $a, b \in A$ и наборов индексов J, J', j_0. Заметим, что последнее равенство (жжж) эквивалентно (жж):

$$\sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega b, d\varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) = (\Omega(ab), cdh)$$

для всех $a, b, c, d, h \in A$. Следовательно, необходимое условие теоремы 4.I. доказано. Обратно, если условие (жж) теоремы 4.I выполняется, тогда условие (жжж) также выполняется. Следовательно, для всех $P, Q \in k[G^*]$, $a, b \in A$ мы имеем равенство $\{P^a, Q^b\} = \{P, Q\}^{ab}$. Теорема доказана.

<u>Теорема 4.2.</u> Пусть A – ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей и $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ – ее тройка. Предположим, что алгебра A относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ удовлетворяет условию (ж):

$$\sum_{j=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega d, b\varepsilon_{\omega j}) = (\Omega(ab), cd)$$

для всех $a, b, c, d \in A$. Тогда алгебра А является алгеброй Фробениуса.

Из теорем 2.2. и 4.2 мы имеем следующее.

Следствие 4.2. Если алгебра А относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ удовлетворяет условию (ж), тогда существует некоторая тройка $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, относительно которой алгебра А является самосопряженной.

В качестве следствия теорем 4.I и 4.2 мы получаем.

Теорема 4.3. Пусть А – ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей. Для существования некоторой тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры А, относительно которой расширенные функции P^a и Q^b удовлетворяют равенству

$$\{P^a, Q^b\} = \{P, Q\}^{ab}$$

для всех $P, Q \in k[G^*]$, $a, b \in A$, где G – произвольная алгебра Ли, G^* – к ней дуальное пространство, необходимо и достаточно, чтобы А являлась алгеброй Фробениуса.

Перейдем к доказательству теоремы 4.2.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть для $\alpha, \beta = 1, 2, .., N$ мы обозначаем через $\lambda_{\alpha\beta}$ число $(\Omega 1, \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta)$. По условию теоремы алгебра А относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ удовлетворяет условию (ж): $\sum_{j=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega d, b\varepsilon_{\omega j}) = (\Omega(ab), cd)$ для всех элементов $a, b, c, d \in A$. Подставив в (ж) $a = d = 1$, $c = \varepsilon_i$, $b = \varepsilon_{\omega k}$, мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{N} (\Omega 1, \varepsilon_i \varepsilon_j)(\Omega 1, \varepsilon_{\omega k}\varepsilon_{\omega j}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \lambda_{\omega k, \omega j} =$$

$$= (\Omega(\varepsilon_{\omega k}), \varepsilon_i) = (\varepsilon_k, \varepsilon_i) = \delta_{ki}$$

т.е. $\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \lambda_{\omega k, \omega j} = \delta_{ki}$ для всех $k, i = 1, \dots, N$

Обозначаем матрицы (λ_{ij}) и ($\lambda_{\omega i,\omega j}$) через Λ и Λ_ω соответственно, тогда из последнего равенства следует $\Lambda\Lambda_\omega = E$. Поэтому, в частности, матрица Λ вырождена. Определим на алгебре A новое скалярное произведение $\langle a, b\rangle = (\Omega 1, ab)$,

Тогда мы имеем $\langle \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta\rangle = (\Omega 1, \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta) = \lambda_{\alpha\beta}$ В силу невырожденности матрицы $\Lambda = (\lambda_{\alpha\beta})$ новое скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ невырождено. Кроме того для всех элементов $a, b, c \in A$ выполняется равенство $\langle ab, c\rangle = (\Omega 1, abc) = \langle a, bc\rangle$

Следовательно алгебра A является алгеброй Фробениуса. Теорема доказана.

В силу теоремы 4.I из инволютивности полиномиальных функций P и Q на пространстве G^* следует инволютивность полиномиальных функций P^a и Q^b для всех $a, b \in A$ на расширенном пространстве $G^*\otimes A$, где A – алгебра Фробениуса.

Естественно возникает вопрос: в каком случае место имеет тождество $\{P^a, Q^b\} = \{P, Q\}^{\pi(a,b)}$ для всех $P, Q \in k[G^*]$ $a, b \in A$, где G – произвольная алгебра Ли, π – некоторое отображение множества AxA в A?

Простой ответ на этот вопрос дает следующая

<u>Теорема 4.4</u>. Пусть A – ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей и (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) – ее тройка. π : AxA → A – некоторое отображение. Пусть для каждой полиномиальной функции P на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G и элемента $a \in A$ была определена расширенная относительно тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) функция P^a на расширенном пространстве $G^*\otimes A$. Тогда если справедливо тождество $\{P^a, Q^b\} = \{P, Q\}^{\pi(a,b)}$ для всех полиномиальных функций P, Q на дуальном пространстве G^* к произвольной алгебре Ли G , то $\pi(a,b) = ab$.

<u>Доказательство</u>: Аналогично доказательству теоремы 4.I мы полу-

чаем, что тождество $\{P^a, Q^b\} = \{P, Q\}^{\pi(a,b)}$ эквивалентно равенству:

$$\sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, c\varepsilon_j)(\Omega b, d\varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) = (\Omega(\pi(a,b)), cd\, h) \quad (**)'$$

для всех элементов $a, b, c, d, h \in A$. Поэтому для доказательства теоремы 4.4. достаточно доказать, что из (**)' следует равенство $\pi(a,b) = ab$. Поставив в равенство (**)' элементы $c = d = I$, мы получим

$$(\Omega(\pi(a,b)), h) = \sum_{j,j'=1}^{N} (\Omega a, \varepsilon_j)(\Omega b, \varepsilon_{j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (\Omega a, \varepsilon_j)\Big[\sum_{j'=1}^{N} (b, \varepsilon_{\omega j'})(\Omega h, \varepsilon_{\omega j}\varepsilon_{\omega j'})\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (a, \varepsilon_{\omega j})(\Omega h, b\varepsilon_{\omega j}) = (\Omega h, ab)$$

Следовательно $(\pi(a,b), \Omega h) = (ab, \Omega h)$ для любого элемента h из алгебры А. Отсюда в силу невырожденности скалярного произведения (,) на А мы получаем равенство $\pi(a,b) = ab$. Теорема доказана.

§5. Эффективность метода расширения для алгебр Фробениуса

В этом параграфе мы докажем эффективность метода расширения относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, удовлетворяющей условию (*). А именно с помощью этого метода мы можем получить полный инволютивный набор функций на пространстве $G^* \otimes A$ из полного инволютивного набора полиномиальных функций на G^*.

Сначала мы докажем теорему о размерности орбит коприсоединенного представления.

<u>Теорема 5.I</u>. Пусть А – коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей, удовлетворяющая условию (*) относительно некоторой тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Пусть G – произвольная алгебра Ли. Тогда для произвольной точки f на дуальном пространстве G^* к G,

размерности орбит коприсоединенных представлений $\mathcal{O}(f)$ и $\mathcal{O}(f\otimes\Omega 1)$ соответственно на дуальных пространствах G^* и $G^*\otimes A$ к алгебрам Ли G и $G\otimes A$, удовлетворяют равенству

$$\dim \mathcal{O}(f\otimes\Omega 1) = \dim A \dim \mathcal{O}(f) = N \dim \mathcal{O}(f)$$

<u>Доказательство</u>: Обозначаем систему координат на G^* через x_i, $1\le i\le n$. Тогда системой координат на расширенном пространстве $G^*\otimes A$ будет x_i^α, $1\le i\le n$, $1\le\alpha\le N$, где $x_i^\alpha = x_i\otimes\varepsilon_\alpha$. Мы имеем $\dim\mathcal{O}(f) = rk\left(\{x_i,x_j\}\right)\big|_f = rk(v_{ij})$ где

$$v_{ij} = \{x_i,x_j\}\big|_f, \quad 1\le i,j\le n \quad \text{и}$$

$$\dim\mathcal{O}(f\otimes\Omega 1) = rk\left(\{x_i^\alpha, x_j^\beta\}\right)\big|_{f\otimes\Omega 1} = rk\left(\{x_i,x_j\}^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}\right)\big|_{f\otimes\Omega 1} =$$
$$= rk\left(\{x_i,x_j\}\big|_f(\Omega 1, \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)\right) = rk\left((M_{ij})_{\alpha\beta}\right)$$

где $(M_{ij})_{\alpha\beta} = v_{ij}\lambda_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta} = (\Omega 1, \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)$, $1\le\alpha,\beta\le N$

Как и в доказательстве теоремы 4.2 мы имеем $\det\Lambda\ne 0$, где матрица $\Lambda = (\lambda_{\alpha\beta})$, $1\le\alpha,\beta\le N$. Для доказательства теоремы 5.I достаточно доказать равенство

$$rk\left((M_{ij})_{\alpha\beta}\right) = rk(\lambda_{\alpha\beta})\ rk(v_{ij})$$

Это следует из следующей

<u>Лемма 5.I</u>. Пусть $M = ((M_{ij})_{\alpha\beta})$ - матрица с коэффициентами $(M_{ij})_{\alpha\beta} = v_{ij}\lambda_{\alpha\beta}$, $1\le i,j\le n$, $1\le\alpha,\beta\le N$. Пусть матрицы $\Lambda = (\lambda_{\alpha\beta})$ $1\le\alpha,\beta\le N$, $V = (v_{ij})$, $1\le i,j\le n$, тогда ранг матрицы M равен произведению рангов матриц Λ и V, т.е. $rk\,M = rk\,\Lambda\ rk\,V$.

<u>Доказательство</u>: Мы пишем матрицу M в явном виде

$$M = \begin{Vmatrix} (v_{ij})\lambda_{11} & \dots & (v_{ij})\lambda_{1N} \\ (v_{ij})\lambda_{21} & \dots & (v_{ij})\lambda_{2N} \\ & \dots & \\ (v_{ij})\lambda_{N1} & \dots & (v_{ij})\lambda_{NN} \end{Vmatrix}, \quad 1\le i,j\le n$$

Пусть $rk \Lambda = rk(\lambda_{\alpha\beta}) = r$, тогда элементарными преобразованиями $\Pi_1, \dots, \Pi_s$ матрицу Λ можно ввести к диагональному виду

$$\Pi_s \cdots \Pi_1 \Lambda = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & O & \\ & & 1 & & \\ & O & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{matrix} \right\| \Big\} r$$

Для каждого преобразования Π_k, $1 \le k \le s$ матрицы Λ мы осуществляем соответственное преобразование $\tilde{\Pi}_k$ матрицы M относительно коэффициентов $\lambda_{\alpha\beta}$, $1 \le \alpha, \beta \le N$ при этом матрица (ν_{ij}) играет роль как постоянные коэффициенты. Таким образом мы получаем:

$$\tilde{\Pi}_s \cdots \tilde{\Pi}_1 M = \left\| \begin{matrix} (\nu_{ij}) & & & & \\ & \ddots & & O & \\ & & (\nu_{ij}) & & \\ & O & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{matrix} \right\| \Big\} r$$

и $rk\, \tilde{\Pi}_s \cdots \tilde{\Pi}_1 M = rk M = r \cdot rk(\nu_{ij}) = rk \Lambda \; rk V$

Это доказывает лемму и тем самым теорему 5.I.

<u>Следствие 5.I</u>. Для произвольной алгебры Ли G и алгебры Фробениуса A место имеет неравенство:

$$\operatorname{ind} G \otimes A \le \dim A \operatorname{ind} G$$

<u>Доказательство</u>: Поскольку A является алгеброй Фробениуса, поэтому по теореме 2.2. существует тройка $(A, \Omega, \{\xi_i\})$, относительно которой алгебра A самосопряжена (в частности равенство (ж) выполняется), отсюда по теореме 5.I для регулярной точки $f \in G^*$ т.е. $\operatorname{codim} \mathcal{O}(f) = \operatorname{ind} G$, где $\mathcal{O}(f)$ – орбита коприсоединенного представления, мы имеем:

$$\operatorname{ind} G \otimes A = \inf_{X \in G^* \otimes A} \operatorname{codim} \mathcal{O}(X) \le \operatorname{codim} \mathcal{O}(f \otimes \Omega 1) =$$

$$= \dim A \operatorname{codim} \mathcal{O}(f) = \dim A \operatorname{ind} G.$$ Следовательно:

$$\operatorname{ind} G\otimes A \leq \dim A \operatorname{ind} G$$, ч.т.д.

Лемма 5.2. Пусть A - коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей, $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ - ее тройка. Пусть $P \in k[G^*]$ есть полиномиальная функция, определенная на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G, P^a - ее расширенная функция на $G^*\otimes A$ относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, $a\in A$. Тогда выполняется равенство:

$$\frac{\partial P^a}{\partial x_i^j}(f\otimes \Omega 1) = (\varepsilon_j, a)\frac{\partial P}{\partial x_i}(f),$$

где x_i, $1\leq i\leq n$ - система координат на G^*, $x_i^j = x_i\otimes \varepsilon_j$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq N = \dim A$, - система координат на $G^*\otimes A$.

В частности

$$\frac{\partial P^{\varepsilon_k}}{\partial x_i^j}(f\otimes\Omega 1) = \delta_{kj}\frac{\partial P}{\partial x_i}(f),\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq k,j\leq N.$$

Доказательство: Пусть полиномиальная функция P имеет вид $P = P_I X_I$. Тогда, по определению, расширенная функция $P^a = (\Omega a, P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J})$ и

$$\frac{\partial P^a}{\partial x_i^j} = \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i, \tilde J} P_{\tilde I i}\,\varepsilon_{\tilde J}\,\varepsilon_{\omega j}\, X_{\tilde I}^{\Omega \tilde J}\Big)$$

Следовательно: $\frac{\partial P^a}{\partial x_i^j}(f\otimes\Omega 1) = \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i,\tilde J} P_{\tilde I i}\varepsilon_{\tilde J}\varepsilon_{\omega j} X_{\tilde I}^{\Omega\tilde J}\Big|_{f\otimes\Omega 1}\Big)$

$$= \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i,\tilde J} P_{\tilde I i}\,\varepsilon_{\tilde J}\,\varepsilon_{\omega j}\, f_{\tilde I}\prod_{(j)\in\tilde J}(\Omega 1, \varepsilon_{\omega \tilde J})\Big)$$

$$= \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i} P_{\tilde I i}\,\varepsilon_{\omega j}\, f_{\tilde I}\prod_{(j)\in\tilde J}\sum_{\tilde J}(\Omega 1, \varepsilon_{\omega\tilde J})\,\varepsilon_{\tilde J}\Big)$$

$$= \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i} P_{\tilde I i}\,\varepsilon_{\omega j}\, f_{\tilde I}\prod_{(j)\in\tilde J}\Omega(\Omega 1)\Big)$$

$$= \Big(\Omega a, \sum_{I=\tilde I\cup i} P_{\tilde I i}\,\varepsilon_{\omega j}\, f_{\tilde I}\Big) = (\Omega a, \varepsilon_{\omega j})\frac{\partial P}{\partial x_i}(f) =$$

$$= (a, \varepsilon_j)\frac{\partial P}{\partial x_i}(f),\ \text{т.е.}\ \frac{\partial P^a}{\partial x_i^j}(f\otimes\Omega 1) = (a,\varepsilon_j)\frac{\partial P}{\partial x_i}(f)$$

В частности, при $a = \varepsilon_k$ мы имеем равенство

$$\frac{\partial P^{\varepsilon_k}}{\partial x_i^j}(f\otimes\Omega 1) = (\varepsilon_k, \varepsilon_j)\frac{\partial P}{\partial x_i}(f) = \delta_{kj}\frac{\partial P}{\partial x_i}(f)$$

Лемма доказана.

Следствие 5.2. Пусть A - коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей, $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ - ее тройка. Пусть на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G определено r полиномиальных, функционально независимых функций $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Тогда Nr, где $N = \dim A$ расширенных относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ функций $P_1^{\varepsilon_{k_1}}, \ldots, P_r^{\varepsilon_{k_r}}$, $1 \le k_1, \ldots, k_r \le N$ на расширенном пространстве $G^* \otimes A$ функционально независимы.

Доказательство: Пусть полиномиальные функции $P_1, \ldots, P_r$ независимы в точке $f_0 \in G^*$, т.е.

$$rk\left(\frac{\partial P_s}{\partial x_j}\right)(f_0) = r, \quad (1 \le s \le r, \ 1 \le j \le n)$$

По лемме 5.2. мы имеем равенство:

$$\frac{\partial P_s^{\varepsilon_{k_s}}}{\partial x_i^j}(f_0 \otimes \Omega 1) = \delta_{k_s j} \frac{\partial P_s}{\partial x_i}(f_0), \quad 1 \le s \le r, \ 1 \le k_s \le N.$$

Поэтому матрица $\left(\frac{\partial P_s^{\varepsilon_{k_s}}}{\partial x_i^j}\right)(f_0 \otimes \Omega 1)$, $1 \le s \le r$, $1 \le i \le n$, $1 \le j, k_s \le N$ имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial P_s}{\partial x_i}(f_0)\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\frac{\partial P_s}{\partial x_i}(f_0)\right) \end{matrix} \right\|$$

Следовательно мы получаем:

$$rk\left(\frac{\partial P_s^{\varepsilon_{k_s}}}{\partial x_i^j}\right)(f_0 \otimes \Omega 1) = N\, rk\left(\frac{\partial P_s}{\partial x_i}(f_0)\right) = Nr$$

Это означает, что полиномиальные функции $P_1^{k_1}, \ldots, P_r^{k_r}$, $1 \le k_1, \ldots, k_r \le N$, независимы в точке $f_0 \otimes \Omega 1$, и следовательно функционально независимы на пространстве $G^* \otimes A$, ч.т.д.

Перейдем к формулировке основных теорем этого параграфа.

Теорема 5.2. Пусть на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G существует полный набор полиномиальных инвариантных функций коприсоединенного представления $P_1, P_2, \ldots, P_r$, $r = \operatorname{ind} G$

Пусть А является конечномерной алгеброй Фробениуса, $\dim A = N$

Тогда место имеют следующие утверждения

I. $\operatorname{ind} G \otimes A = \operatorname{ind} G \dim A = N \operatorname{ind} G$

2. Если тройка $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебра А удовлетворяет условию (ж), тогда расширение функций $P_1^{k_1}, \ldots, P_r^{k_r}$, $1 \le k_1, \ldots, k_r \le N$ получающихся из функций $P_I, \ldots, P_r$ методом расширения относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, образуют полный набор полиномиальных инвариантов households коприсоединенного представления на расширенном пространстве $G^* \otimes A$.

<u>Доказательство:</u> Из следствия 5.2. и теоремы 4.3 следуют функциональная независимость и инвариантность относительно коприсоединенного представления полиномиальных функций $P_1^{k_1}, \ldots, P_r^{k_r}$, $1 \le k_1, \ldots, k_r \le N$ на $G^* \otimes A$. Поэтому, в частности, $\operatorname{ind} G \otimes A \geqslant N \operatorname{ind} G$.

С другой стороны в силу следствия 5.I мы имеем: $\operatorname{ind} G \otimes A \le N \operatorname{ind} G$.

Следовательно: $\operatorname{ind} G \otimes A = \dim A \operatorname{ind} G = N \operatorname{ind} G$ и функции $P_1^{k_1}, \ldots, P_r^{k_r}$, $1 \le k_1, \ldots, k_r \le N$, образуют полный набор инвариантов коприсоединенного представления на расширенном пространстве $G^* \otimes A$ пространства G^*, ч.т.д.

Аналогично мы имеем:

<u>Теорема 5.3.</u> Пусть на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G существует полный инволютивный набор полиномиальных функций $Q_1, \ldots, Q_s$. Пусть ассоциативная, коммутативная алгебра А с единицей удовлетворяет условию (ж) относительно некоторой тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ и $\operatorname{ind} G \otimes A = \operatorname{ind} G \dim A = N \operatorname{ind} G$. Тогда набор расширенных функций $Q_1^{k_1}, \ldots, Q_s^{k_s}$, $1 \le k_1, \ldots, k_s \le N$, получающихся из функций $Q_1, \ldots, Q_s$ методом расширения относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, является полным инволютивным набором на $G^* \otimes A$

§6. Независимость расширения кольца полиномиальных функций от выбора систем координат на дуальном пространстве к алгебре Ли

Пусть G - алгебра Ли, G^* - дуальное пространство к G. Как выше мы будем обозначать кольцо полиномиальных функций на G^* через $k[G^*]$. Пусть A является коммутативной, ассоциативной алгеброй с единицей, тензорное произведение которой с алгеброй Ли является алгеброй Ли $G\otimes A$.

В третьем параграфе мы построили метод расширения полиномиальных функций на G^* до функций на дуальном пространстве $(G\otimes A)^* \approx$ $\approx G^*\otimes A$ к алгебре Ли $G\otimes A$ относительно фиксированной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры A. В этой части работы мы покажем, что этот метод расширения можно реализовать относительного произвольного базиса $\{\epsilon_i\}$ алгебры A, причем результат расширения существенно не зависит от выбора базиса $\{\epsilon_i\}$ при фиксированном невырожденном скалярном произведении в алгебре A (см. теорему 6.I).

Пусть на алгебре A задано невырожденное скалярное произведение $\langle\, ,\rangle$ и $\{\epsilon_\alpha\}$, $1\le\alpha\le N$, - некоторый базис алгебры A. Пусть $\{e_i\}$, $1\le i\le n$ - базис алгебры Ли G, тогда $\{e_i\otimes\epsilon_\alpha\}$ $1\le i\le n$, $1\le\alpha\le N$ - базис расширенной алгебры Ли $G\otimes A$ и $\{(e_i\otimes\epsilon_\alpha)^*\}$ - дуальный базис к нему на пространстве $(G\otimes A)^*$. Обозначаем через x_i^α, $1\le i\le n$, $1\le\alpha\le N$, - систему координат на $(G\otimes A)^*$, соответствующую базису $\{(e_i\otimes\epsilon_\alpha)^*\}$, и x_i, $1\le i\le n$, - систему координат на G^*, соответствующую базису $\{e_i^*\}$, $1\le i\le n$. Относительно заданного невырожденного произведения алгебры A существует единственный базис $\{\bar\epsilon_i\}$, $1\le i\le N$, алгебры A такой, что $\langle\bar\epsilon_i, \epsilon_j\rangle=\delta_{ij}$, $1\le i,j\le N$

Пусть $P\in k[G^*]$ - полиномиальная функция на G^*, которая в системе координат x_i, $1\le i\le n$, имеет вид:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_k=n} P_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} = P_I X_I \quad \text{где } I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$$

Обозначаем через $\widetilde{P}_\epsilon$ функцию на пространстве $(G \otimes A)^*$ с коэффициентами из алгебры A: $\widetilde{P}_\epsilon = P_I \overline{\epsilon}_J X_I^J$, где

$\overline{\epsilon}_J = \overline{\epsilon}_{j_1} \dots \overline{\epsilon}_{j_k}$, $(j_1, \dots, j_k) = J$, $X_I^J = x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k}$, $P_I = P_{i_1 \dots i_k}$.

Для каждого элемента $a \in A$ мы определим расширенную функцию P_ϵ^a относительно базиса $\{\epsilon_i\}$ на дуальном пространстве $(G \otimes A)^*$ следующей формулой:

$$P_\epsilon^a = \langle a, \widetilde{P}_\epsilon \rangle = \langle a, P_I \overline{\epsilon}_J X_I^J \rangle = \langle a, \overline{\epsilon}_J \rangle P_I X_I^J.$$

В случае, когда на алгебре A задана некоторая тройка $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ определены расширенные функции P^a (см. параграф 3) для всех $P \in k[G^*]$ и $a \in A$ относительно этой тройки. Предположим, что естественное скалярное произведение (,) на алгебре A относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le N$, удовлетворяет условию $(a, \Omega b) = \langle a, b \rangle$, $a, b \in A$. Тогда имеет место равенство: $\langle \overline{\varepsilon}_j, \varepsilon_i \rangle = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le N$, для базиса $\overline{\varepsilon}_j = \varepsilon_{\omega j}$, $1 \le j \le N$ алгебры A. Заметим, что в этом случае функций $\widetilde{P}_\varepsilon$ и $\widetilde{P}$ для любой функции $P \in k[G^*]$ совпадают. ($\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$) и, следовательно, мы получаем следующую.

<u>Лемма 6.1</u>. Пусть A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей и $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ - ее тройка. Пусть на A задано невырожденное скалярное произведение $\langle , \rangle$ такое, что $(a, \Omega b) = \langle a, b \rangle$ для всех $a, b \in A$, где (,) - естественное скалярное произведение относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Тогда $P^a \equiv P_\varepsilon^a$ для любой функции $P \in k[G^*]$ и $a \in A$, где P^a - расширенная функция относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ на $(G \otimes A)^*$, P_ε^a - расширенная функция относительно базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $1 \le i \le N$, и скалярного произведения $\langle , \rangle$.

Пусть заданы два базиса $\{\epsilon_i\}$ и $\{\epsilon'_{i'}\}, 1\le i,i'\le N$, алгебры A и

$$\epsilon'_{i'} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{i'i}\, \epsilon_i = \lambda_{i'i}\, \epsilon_i, \quad 1\le i'\le N$$

Обозначим систему координат на $(G\otimes A)^*$ относительно базиса $\{(e_i\otimes\epsilon_\alpha)^*\}, 1\le i\le n,\ 1\le\alpha\le N$ (относительно базиса $\{(e_i\otimes\epsilon'_{\alpha'})^*\}$, $1\le i\le n,\ 1\le\alpha'\le N$) через x_i^α (соответственно через $y_i^{\alpha'}$).

Тогда мы имеем замену систем координат :

$$y_i^{\alpha'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_{\alpha'\alpha}\, x_i^\alpha = \lambda_{\alpha'\alpha}\, x_i^\alpha = y_i^{\alpha'}(x_i^\alpha),\ 1\le\alpha'\le N, 1\le i\le n$$

(будем писать без знака $\sum$)

<u>Лемма 6.2</u>. Пусть на алгебре A задано невырожденное скалярное произведение $\langle\,,\rangle$, тогда для тензорного произведения $A\otimes A$ выполняется тождество:

$$\sum_{i=1}^{N} a\bar\epsilon_i\otimes b\epsilon_i = \sum_{i'=1}^{N} a\bar\epsilon'_{i'}\otimes b\epsilon'_{i'},\quad a,b\in A$$

где сопряженные базисы $\{\bar\epsilon_i\}$, $\{\bar\epsilon'_{i'}\}, 1\le i,i'\le N$, определяются равенствами: $\langle\bar\epsilon_i,\epsilon_j\rangle = \delta_{ij}$, $\langle\bar\epsilon'_{i'},\epsilon'_{j'}\rangle = \delta_{i'j'}$, $1\le i,i',j,j'\le N$

<u>Доказательство</u>: Пусть $\epsilon'_{i'} = \lambda_{i'i}\,\epsilon_i$, $\bar\epsilon'_{j'} = \nu_{jj'}\,\bar\epsilon_j$, $1\le i',j'\le N$, тогда $\delta_{j'i'} = \langle\bar\epsilon'_{j'},\epsilon'_{i'}\rangle = \langle\nu_{jj'}\bar\epsilon_j, \lambda_{i'i}\epsilon_i\rangle =$

$= \lambda_{i'i}\,\nu_{jj'}\langle\bar\epsilon_j,\epsilon_i\rangle = \lambda_{i'i}\,\nu_{ij'}$, т.е. $\Lambda V = E$,

где матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$, $V = (\nu_{ij})$. Следовательно $V\Lambda = E$ и $\delta_{ij'} = \nu_{i'j}\,\lambda_{jj'}$. Отсюда мы имеем

$$\sum_{i'=1}^{N} a\bar\epsilon'_{i'}\otimes b\epsilon'_{i'} = a\bar\epsilon'_{i'}\otimes b\epsilon'_{i'} = \nu_{ii'}\, a\bar\epsilon_i\otimes\lambda_{i'j}\, b\epsilon_j =$$

$$= \nu_{ii'}\lambda_{i'j}\, a\bar\epsilon_i\otimes b\epsilon_j = \delta_{ij}\, a\bar\epsilon_i\otimes b\epsilon_j = a\bar\epsilon_i\otimes b\epsilon_i = \sum_{i=1}^{N} a\bar\epsilon_i\otimes b\epsilon_i$$

Лемма доказана.

Для каждой полиномиальной функции $P\in k[G^*]$ и для $a\in A$ при фиксированном невырожденном скалярном произведении $\langle\,,\rangle$ на алгебре A расширенные функции P^a_ϵ и $P^a_{\epsilon'}$ на $(G\otimes A)^*$ соответственно определяются относительно базисов $\epsilon = \{\epsilon_i\}$ и $\epsilon' = \{\epsilon'_{i'}\}, 1\le i,i'\le N$

<u>Теорема 6.I</u>. Расширенные функции P^a_ϵ и $P^a_{\epsilon'}$, удовлетворяют

тождеству: $P^a_\epsilon(x^\alpha_i) = P^a_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i(x^\alpha_i))$, где $y^{\alpha'}_i = y^{\alpha'}_i(x^\alpha_i)$, $1 \le \alpha, \alpha' \le N$, $1 \le i \le n$, есть замена систем координат на $(G \otimes A)^*$, соответствующая замене базисов $\{\epsilon_\alpha\}$ и $\{\epsilon'_{\alpha'}\}$, $1 \le \alpha, \alpha' \le N$ на A, т.е. $y^{\alpha'}_i - \lambda_{\alpha'\alpha} x^\alpha_i$ если $\epsilon'_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'\alpha}\epsilon_\alpha$, $1 \le i \le n$, $1 \le \alpha' \le N$

Доказательство: Пусть полимиальная функция $P \in k[G^*]$ имеет вид $P = P_I X_I$. Тогда мы имеем

$$P^a_\epsilon = \langle a, \tilde{P}_\epsilon \rangle = \langle a, P_I \bar{\epsilon}_J X^J_I \rangle = P^a_\epsilon(x^\alpha_i)$$

$$P^a_{\epsilon'} = \langle a, \tilde{P}_{\epsilon'} \rangle = \langle a, P_I \bar{\epsilon}'_J, Y^{J'}_I \rangle = P^a_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i)$$

Из леммы 6.2 следует, что $\bar{\epsilon}'_j, y^{j'}_i = \bar{\epsilon}'_j, y^{j'}_i(x^j_i) = \bar{\epsilon}_j x^j_i$, $1 \le i \le N$

Отсюда мы имеем:

$$\tilde{P}_{\epsilon'} = \tilde{P}_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i) = \tilde{P}_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i(x^\alpha_i)) = \tilde{P}_\epsilon(x^\alpha_i)$$

и $P^a_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i) = \langle a, \tilde{P}_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i(x^\alpha_i)) \rangle = \langle a, \tilde{P}_\epsilon(x^\alpha_i) \rangle =$

$= P^a_\epsilon(x^\alpha_i)$, т.е. $P^a_{\epsilon'}(y^{\alpha'}_i(x^\alpha_i)) = P^a_\epsilon(x^\alpha_i)$, ч.т.д.

Из теоремы 6.I мы получаем

Следствие 6.I. Пусть на алгебре A заданы два базиса $\{\epsilon_i\}$ и $\{\epsilon'_{i'}\}$, $1 \le i, i' \le N$, относительно которых при фиксированном невырожденном произведении $\langle , \rangle$ алгебры A были соответственно определены расширенные функции P^a_ϵ и $P^a_{\epsilon'}$ на $(G \otimes A)^*$ для всех $P \in k[G^*]$ и $a \in A$. Тогда если для $P, Q \in k[G^*]$ и $a, b \in A$ выполняется равенство $\{P^a_\epsilon, Q^b_\epsilon\} = \{P, Q\}^{ab}_\epsilon$, то выполняется равенство $\{P^a_{\epsilon'}, Q^b_{\epsilon'}\} = \{P, Q\}^{ab}_{\epsilon'}$

Теорема 6.2. Пусть A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей, $\epsilon = \{\epsilon_i\}$, $1 \le i \le N$, - базис алгебры A. Пусть на A задано невырожденное скалярное произведение $\langle , \rangle$, относительно которого и базиса ϵ определены расширенные функции P^a_ϵ

на $(G\otimes A)^*$ для всех полиномиальных функций $P\in k[G^*]$ и $a\in A$, где G^* - дуальное пространство к алгебре Ли G. Для произвольной алгебры Ли G и всех функций $P,Q\in k[G^*], a,b\in A$ тождество $\{P_\epsilon^a, Q_\epsilon^b\}=\{P,Q\}_\epsilon^{ab}$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{N}\langle a, c\epsilon_i\rangle\langle d, b\bar\epsilon_i\rangle=\langle ab, cd\rangle$$

для всех элементов $a,b,c,d\in A$, где $\{\bar\epsilon_i\}$, $1\le i\le N$ - сопряженный базис к базису $\epsilon=\{\epsilon_i\}$, $1\le i\le N$, относительно данного скалярного произведения.

<u>Доказательство</u>: Заметим, что для заданного невырожденного произведения $\langle\,,\rangle$ алгебры A существует тройка $(A,\Omega,\{\varepsilon\})$ такая, что: $(a,\Omega b)=\langle a,b\rangle$ для всех элементов $a,b\in A$, где $(\,,\,)$ - естественное скалярное произведение алгебры A относительно базиса $\varepsilon=\{\varepsilon_i\}$, $1\le i\le N$. Обозначаем $\varepsilon_{\omega i}=\bar\varepsilon_i$, $1\le i\le N$. Тогда мы получаем:

$$(*)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{N}\langle a, c\varepsilon_i\rangle\langle d, b\varepsilon_{\omega i}\rangle=\langle ab, cd\rangle$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{N}\langle a, c\varepsilon_i\rangle\langle d, b\bar\varepsilon_i\rangle=\langle ab, cd\rangle$$

(см. теорему 4.I.). По лемме 6.2. последнее равенство эквивалентно равенству:

$$\sum_{i=1}^{N}\langle a, c\epsilon_i\rangle\langle d, b\bar\epsilon_i\rangle=\langle ab, cd\rangle,\quad a,b,c,d\in A$$

С другой стороны в силу теоремы 4.I, леммы 6.I и следствия 6.I мы имеем:

$$(*)\Leftrightarrow\{P^a, Q^b\}=\{P,Q\}^{ab}\Leftrightarrow\{P_\varepsilon^a, Q_\varepsilon^b\}=\{P,Q\}_\varepsilon^{ab}$$

$$\Leftrightarrow\{P_\epsilon^a, Q_\epsilon^b\}=\{P,Q\}_\epsilon^{ab},\quad P,Q\in k[G^*],\ a,b\in A$$

Отсюда, равенство $\{P_\epsilon^a, Q_\epsilon^b\}=\{P,Q\}_\epsilon^{ab}$ выполняется для всех $P,Q\in k[G^*]$ и $a,b\in A$ тогда и только тогда, когда

$\sum_{i=1}^{N}\langle a, c\epsilon_i\rangle\langle d, b\epsilon_i\rangle = \langle ab, cd\rangle$. Теорема доказана.

Аналогично в силу теоремы 4.3 мы имеем

Теорема 6.3. Пусть A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей. Для существования некоторого базиса $\{\epsilon_i\}, 1\le i\le N$ и невырожденного скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ алгебры A, относительно которых все расширенные функции P^a_ϵ , Q^b_ϵ на расширенном пространстве $(G\otimes A)^*$, где $P, Q\in k[G^*]$, $a, b\in A$, G - произвольная алгебра Ли, удовлетворяют условию:

$$\{P^a_\epsilon, Q^b_\epsilon\} = \{P, Q\}^{ab}_\epsilon$$

необходимо и достаточно, чтобы алгебра A являлась алгеброй Фробениуса.

§7. Расширения алгебр Ли над полем комплексных чисел

В этой части основное поле является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть G - алгебра Ли над $\mathbb{C}$, G^*- дуальное пространство к G ; алгебра $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_{N_1}\otimes\ldots\otimes\mathbb{C}\mathbb{Z}_{N_\nu}$, где $\mathbb{Z}_{N_i}$, $1\le i\le\nu$ - N_i - циклическая группа. Ради простоты предпологаем $\nu = 1$ и $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_N$. Мы построим расширенные функции на дуальном пространстве $G^*\otimes A$ к алгебре Ли $G\otimes A$ из аналитических функций $f\in\mathcal{F}(G^*)$ на пространстве G^*. В этом случае эффективность метода расширения также сохраняется. В частности для подкольца $k[G^*]\subset\mathcal{F}(G^*)$ этот метод фактически является частным случаем общего метода расширения в параграфах §§3-6 (очевидно, что алгебра $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_N$ является самосопряженной алгеброй).

Обозначим через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ корни степени N от единицы: $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $1\le k\le N$. Пусть x_i, $1\le i\le n$, - система координат на G^*, $x_i^\alpha = x_i\otimes\varepsilon_\alpha$, $1\le i\le n$, $1\le\alpha\le N$,- система координат на $G^*\otimes A$. Для каждой аналитической функции $f\in\mathcal{F}(G^*)$ мы определим N расширенных функций $f^k,\ 1\le k\le N$, на пространстве $G^*\otimes A$ следующим образом:

$$f^k = f^k(X^1,\dots,X^N) = f(x_1^1,\dots,x_n^1,\dots,x_1^N,\dots,x_n^N)$$

$$= f(\varepsilon_k^{N-1}x_1^1+\varepsilon_k^{N-2}x_1^2+\dots+x_1^N,\dots,\varepsilon_k^{N-1}x_n^1+\varepsilon_k^{N-2}x_n^2+\dots+x_n^N)$$

$$= f(\varepsilon_k^{N-1}X^1+\varepsilon_k^{N-2}X^2+\dots+X^N)$$

где $X=(x_1,\dots,x_n)$, $X^i=(x_1^i,\dots,x_n^i)$, $1\le i\le N$

Очевидно, что все функции $f^k,\ 1\le k\le N$, являются аналитическими функциями на $G^*\otimes A$: $f^k\in\mathcal{F}(G^*\otimes A)$

Место имеет следующая

<u>Лемма 7.I.</u> Пусть G - алгебра Ли на $\mathbb{C}$, алгебра $A=\mathbb{C}\mathbb{Z}_N$. Тогда если аналитические функции $f,g\in\mathcal{F}(G^*)$ находятся в инволюции на пространстве G^*: $\{f,g\}\equiv 0$, то расширенные функции $f^k,g^l,\ 1\le k,l\le N$, также находятся в инволюции на расширенном пространстве $G^*\otimes A$: $\{f^k,g^l\}\equiv 0$

<u>Доказательство</u>: Пусть $C_{\beta,\gamma}^{\alpha},\ 1\le\alpha,\beta,\gamma\le n$,- структурные константы алгебры Ли G. По определению скобки Пуассона относительно формы Кириллова мы имеем

$$\{f,g\} = x_\alpha C_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}$$

$$\{f^k,g^l\} = x_\alpha^{\widetilde{i+j}} C_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x_\beta^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_\gamma^j},\quad 1\le k,l\le N$$

где

$$\widetilde{i+j} = \begin{cases} i+j & \text{если } 1\le i+j\le N \\ i+j-N & \text{если } i+j>N \end{cases}$$

для всех $i,j=1,2,\dots,N$

Пусть $\bar{X}_k=\varepsilon_k^{N-1}X^1+\varepsilon_k^{N-2}X^2+\dots+X^N,\ 1\le k\le N$, тогда

$$f^k = f^k(X^1,\dots,X^N) = f(\bar{X}_k)$$

$$g^l = g^l(X^1,\dots,X^N) = g(\bar{X}_l)$$

и $$\frac{\partial f^k}{\partial x^i_\beta}(X^1,\dots,X^N)=\varepsilon_k^{N-i}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)$$

$$\frac{\partial g^l}{\partial x^j_\gamma}(X^1,\dots,X^N)=\varepsilon_l^{N-j}\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

Следовательно: $$\{f^k,g^l\}=x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f^k}{\partial x^i_\beta}\cdot\frac{\partial g^l}{\partial x^j_\gamma}=$$

$$=x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\,\varepsilon_k^{N-i}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\,\varepsilon_l^{N-j}\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

$$=\varepsilon_k^{N-i}\varepsilon_l^{N-j}x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

Рассмотрим два случая.

I) $k=l$. В силу $\varepsilon_k^N=1$ мы имеем

$$\{f^k,g^k\}=\varepsilon_k^{2N-i-j}x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_k)$$

$$=\sum_{r_0=1}^{N}\sum_{i,j:\,\widetilde{i+j}=r_0}\varepsilon_k^{N-r_0}x_\alpha^{r_0}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_k)$$

$$=N\sum_{r_0=1}^{N}\varepsilon_k^{N-r_0}x_\alpha^{r_0}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_k)$$

$$=N\bar{x}_{k,\alpha}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_k)=0\quad\left(\bar{X}_k=(\bar{x}_{k,1},\dots,\bar{x}_{k,n})\right)$$

последнее равенство следует из условия $\{f,g\}\equiv 0$.

Следовательно $\{f^k,g^k\}\equiv 0,\quad 1\le k\le N$.

2) $k>l$. Мы имеем:

$$\{f^k,g^l\}=\varepsilon_k^{N-i}\varepsilon_l^{N-j}x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

$$=\varepsilon_1^{k(N-i)+l(N-j)}x_\alpha^{\widetilde{i+j}}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

$$=\sum_{r_0=1}^{N}\sum_{i,j:\,\widetilde{i+j}=r_0}\varepsilon_1^{N(k+l)-ik-jl}x_\alpha^{r_0}C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\bar{X}_k)\frac{\partial g}{\partial x_\gamma}(\bar{X}_l)$$

Так как: $$\sum_{i,j:\,\widetilde{i+j}=r_0}\varepsilon_1^{N(k+l)-ik-jl}=$$

$$=\sum_{i=1}^{r_0}\varepsilon_1^{N(k+l)-i(k-l)-lr_0}+\sum_{i=r_0+1}^{N}\varepsilon_1^{Nk-i(k-l)-lr_0}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_1^{Nk-lr_0-i(k-l)}=\varepsilon_1^{Nk-lr_0-(k-l)}\frac{\varepsilon_1^{-N(k-l)}-1}{\varepsilon_1^{-(k-l)}-1}=0,$$

поэтому $\{f^k,g^l\}\equiv 0$. Следовательно f^k,g^l находятся в инволюции на $G^*\otimes A$ для всех $k,l=1,2,\dots,N$

Лемма доказана.

<u>Лемма 7.2.</u> Пусть G - алгебра Ли над $\mathbb{C}$, алгебра $A = \mathbb{C}Z_N$. Тогда если аналитические функции $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{F}(G^*)$ функционально независимы на G^*, то расширенные функции $f_1^1, \dots, f_1^N, \dots, f_r^1, \dots, f_r^N$ функционально независимы на $G^* \otimes A$.

<u>Доказательство</u>: Так как расширенные функции $f_1^1, \dots, f_1^N, \dots, f_r^1, \dots, f_r^N$ аналитичны на $G^* \otimes A$, поэтому они будут функционально независимы на этом пространстве если независимы в одной точке. Предположим, что функции $f_1, \dots, f_r$ независимы в точке $y = (y_1, \dots, y_n) \in G^*$, для определенности, $\det \left\| \frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i} \right\|_{i,j=1,\dots,r} \neq 0$. Обозначаем через A_0 матрицу $\left\| \frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i} \right\|_{i,j=1,\dots,r}$

Рассмотрим на пространстве $G^* \otimes A$ точку, которая имеет следующие координаты:

$$x_i^\alpha = 0, \quad \alpha < N, \ 1 \le i \le n$$

$$x_i^N = y_i, \quad 1 \le i \le n$$

Легко видеть, что в этой точке матрица $\left\| \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right\|_{\substack{i,j=1,\dots,r \\ \alpha,\beta=1,\dots,N}}$ имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{N-1} A_0 & \varepsilon_1^{N-2} A_0 & \dots & \varepsilon_1 A_0 & A_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_N^{N-1} A_0 & \varepsilon_N^{N-2} A_0 & \dots & \varepsilon_N A_0 & A_0 \end{Vmatrix}$$

При этом матрица

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{N-1} & \varepsilon_1^{N-2} & \dots & \varepsilon_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_N^{N-1} & \varepsilon_N^{N-2} & \dots & \varepsilon_N & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет ненулевой определитель $\prod_{i<j} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)$. По лемме 5.I

$$\operatorname{rk} \left\| \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right\|_{\substack{i,j=1,\dots,r \\ \alpha,\beta=1 - N}} = N \operatorname{rk} A_0 = N r$$

, следовательно, в данной точке функции $f_1^1, \dots, f_1^N, \dots, f_r^1, \dots, f_r^N$ независимы.

Лемма доказана.

Из лемм 7.I, 7.2 и следствия 5.I мы получаем:

Теорема 7.I. Пусть G – алгебра Ли над $\mathbb{C}$, алгебра $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_N$. Пусть на дуальном пространстве G^* к G существует полный набор инвариантов коприсоединенного представления, состоящих из аналитических функций $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}(G^*)$. Тогда

I. $\operatorname{ind} G \otimes A = N \operatorname{ind} G$

2. Расширенные функции $f_1^1, \ldots, f_1^N, \ldots, f_r^1, \ldots, f_r^N$ на пространстве $G^* \otimes A$ образуют полный набор инвариантов коприсоединенного представления.

Теорема 7.2. Пусть на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G над $\mathbb{C}$ существует полный инволютивный набор аналитических функций $f_1, \ldots, f_s$ и алгебра $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_N$. Тогда если $\operatorname{ind} G \otimes A = N \operatorname{ind} G$ то расширенные функции $f_1^1, \ldots, f_1^N, \ldots, f_s^1, \ldots, f_s^N$ образуют полный инволютивный набор на пространстве $G^* \otimes A$.

§8. Бесконечномерные алгебры Фробениуса

Результаты параграфа §6 позволяют распространить метод расширения для бесконечномерных алгебр Фробениуса.

Пусть А – бесконечномерная, ассоциативная, коммутативная алгебра с счетным базисом $\epsilon = \{\epsilon_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Пусть А является алгеброй Фробениуса, т.е. существует невырожденное скалярное произведение $\langle\, ,\, \rangle$ на А такое, что $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ для всех элементов $a, b, c \in A$, кроме того, относительно этого произведения базис $\{\epsilon_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, обладает сопряженным базисом $\{\bar{\epsilon}_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\langle \bar{\epsilon}_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

Аналогично конечномерному случаю можно построить расширенные полиномиальные функции на бесконечномерном расширенном пространстве $(G \otimes A)^*$ из полиномиальных функций на пространстве G^*. При этом эффективность метода расширения также сохраняется.

Итак, пусть $P \in k[G^*]$ - произвольная полиномиальная функция на G^*, которая в некоторой системе координат пространства G^* представляет в виде: $P = P_I X_I$. Тогда для каждого элемента $a \in A$, расширенная функция P^a на пространстве $\underbrace{\quad}_{G^* \otimes A}$ определяется следующей формой: $P^a = \langle a, \tilde{P} \rangle$, где $\tilde{P} = P_I \epsilon_J x_I^J$, x_i^j, $j \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le n$, - система координат на $(G \otimes A)^*$, соответствующая системе x_i, $1 \le i \le n$, на G^*.

Аналогично результатам в параграфах §5-6 можно доказать следующую:

Теорема 8.1. Пусть A - бесконечномерная, ассоциативная, коммутативная алгебра Фробениуса с четным базисом $\{\epsilon_i\}, i \in \mathbb{Z}$, который обладает сопряженным базисом $\{\tilde{\epsilon}_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, относительно заданного невырожденного скалярного произведения на алгебре A. Тогда расширенные относительно базиса $\{\epsilon_i\}$ функции P^a, Q^b для всех P, $Q \in k[G^*]$ и $a, b \in A$, где G^* - дуальное пространство к алгебре Ли G, удовлетворяют тождеству: $\{P^a, Q^b\} \equiv \{P, Q\}^{ab}$ на бесконечномерном пространстве $(G \otimes A)^*$.

В качестве примера мы рассмотрим бесконечномерную ($\mathbb{Z}$-) грандуированную алгебру Ли (алгебру Кац-Муди) (см. [27])

$$\tilde{G} = \left\{ \xi = \sum_{n \le N(\xi)} \xi_n z^n, \ \xi_n \in G \right\} = G \otimes \mathbb{R}[z, z^{-1}]$$

Дуальное пространство $\tilde{G}^*$ к алгебре Ли $\tilde{G}$ можно отождествлять с пространством

$$\left\{ f = \sum_{n \le N(f)} f_n z^n, \ f_n \in G^* \right\} = G^* \otimes \mathbb{R}[z, z^{-1}]$$

где $$\langle f, \xi \rangle = \langle f, \xi \rangle_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f_n, \xi_{-n} \rangle$$

Пусть $P \in k[G^*]$ полиномиальная функция, определенная на пространстве G^*. Тогда расширенные функции P_i, $i \in \mathbb{Z}$ на бесконечномерном пространстве $\tilde{G}^*$ определяются формой:

$$P = P(f) = P\Big(\sum_{n\in N(f)} f_n z^n\Big) = \sum_{i\in \mathbb{Z}} P_i z^{-i}$$

Из теоремы 8.I мы получаем:

<u>Теорема 8.2</u>. Пусть G - алгебра Ли, $\tilde{G} = G \otimes \mathbb{R}[z, z^{-1}]$ - грандуированная алгебра Ли. Пусть P, $Q \in k[G^*]$ и функции P,Q и $\{P,Q\}$ имеют разложения:

$$P\Big(\sum_n f_n z^n\Big) = \sum_{i\in \mathbb{Z}} P_i z^{-i}, \quad P_i \in k[\tilde{G}^*], \ i \in \mathbb{Z}$$

$$Q\Big(\sum_n f_n z^n\Big) = \sum_{i\in \mathbb{Z}} Q_i z^{-i}, \quad Q_i \in k[\tilde{G}^*], \ i \in \mathbb{Z}$$

$$\{P,Q\}\Big(\sum_n f_n z^n\Big) = \sum_{i\in \mathbb{Z}} \{P,Q\}_i z^{-i}, \quad \{P,Q\}_i \in k[\tilde{G}^*], \ i \in \mathbb{Z}$$

Тогда на бесконечномерном пространстве $\tilde{G}^*$ выполняется равенство:

$$\{P_i, Q_j\} = \{P, Q\}_{i+j}, \quad i,j \in \mathbb{Z}$$

<u>Следствие 8.I</u>. Если функции P, $Q \in k[G^*]$ находятся в инволюции на G^*: $\{P,Q\} \equiv 0$ то функции $P_i, Q_j, \ i,j \in \mathbb{Z}$ находятся в инволюции на $\tilde{G}^*$.

<u>Следствие 8.2</u>. Если $P \in k[G^*]$ является инвариантом коприсоединенного представления на G^*, то $P_j, \ j \in \mathbb{Z}$ являются инвариантами коприсоединенного представления на $\tilde{G}^*$.

Глава II

ПОЛНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ НАБОРЫ ФУНКЦИЙ НА ПОДАЛГЕБРАХ РАСШИРЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ

§9. Метод сдвига

В работах Мищенко А.С. и Фоменко А.Т. [21] для построения системы попарно инволютивных функций на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G применялась следующая схема (метод сдвига): рассматривались функции F на G^*, постоянные на орбитах коприсоединенного представления (инварианты); затем фиксировался какой-либо ковектор $f \in G^*$ и рассматривались всевозможные функции F_λ (при любых $\lambda \in \mathbb{R}$), где $F_\lambda(x) = F(x+\lambda f)$. В полученном семействе все функции будут попарно находиться в инволюции на орбитах коприсоединенного представления. Следовательно, если P, Q - полиномиальные инварианты коприсоединенного представления и

$$P(x+\lambda f) = \sum_{i=0}^{k} P_i(x)\lambda^i, \quad Q(x+\lambda f) = \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(x)\lambda^j$$

тогда функции P_i, Q_j, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le \ell$, находятся в инволюции на орбитах коприсоединенного представления. На дуальном пространстве G^* к редуктивной (в частности, полупростой) алгебре Ли G существует полный набор полиномиальных инвариантов $I(G^*)$. В этом случае всех функций F_i, $F \in I(G^*)$, где F_i - коэффициент в полиномиальной функции $F(x+\lambda f)$ для фиксированного ковектора f общего положения на G^*, оказывалось, достаточно, чтобы набрать из них полный инволютивный набор.

Рассмотрим расширенную алгебру Ли $G \otimes A$, где A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей. Пусть задана некоторая тройка $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры A. Напомним, что $\{\varepsilon_i\}$, $1 \le i \le N$, - базис алгебры A, Ω - некоторое инволютивное отображение алгебры A, сохраняющий этот базис: $\Omega\varepsilon_i = \varepsilon_{\omega i}$, $1 \le i \le N$, где ω - перестановка индексов $\{1,2,\dots,N\}$ и $\omega^2 = id$.

В дальнейшем мы будем называть элемент $\Omega 1 \in A$ (относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$) главным элементом. Согласно определению если единица $I = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \varepsilon_i$, то главный элемент $\Omega 1 = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \varepsilon_{\omega i}$ Пусть (,) - естественное скалярное произведение на А относительно базиса $\{\varepsilon_i\}, 1 \le i \le N$, т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le N$ С помощью этого скалярного произведения мы отождествляем дуальное пространство $(G \otimes A)^*$ к алгебре Ли $G \otimes A$ с пространством $G^* \otimes A$. Напомним, что для каждой полиномиальной функции $P \in k[G^*]$ определяется функция $\tilde{P}$ с коэффициентами из алгебры А следующим образом: если функция Р представляется в виде: $P = P_I X_I$ (I - мультииндекс), то $\tilde{P} = P_I \varepsilon_J X_I^{\alpha J}$, где x_i, $1 \le i \le n$, - система координат на G^* , $x_i^\alpha = x_i \otimes \varepsilon_\alpha$, $1 \le i \le n$, $1 \le \alpha \le N$, - система координат на $G^* \otimes A$. Будем обозначать через ПР функцию $\tilde{P}$, т.е. П - отображение из кольца $k[G^*]$ в кольцо $A[G^*]$: П: $P \to \Pi P = \tilde{P}$, а расширенную функцию $P^a = (\Omega a, \tilde{P})$ через $\Pi^a P$, т.е. Π^a: $P \to \Pi^a P = P^a$, $a \in A$, отображает из кольца $k[G^*]$ в кольцо $k[G^* \otimes A]$. Пусть $C(f)$ - оператор сдвига на ковектор f кольца $k[G^*]$,т.е. если $P \in k[G^*]$ тогда $C(f)P(x) = P(x+f)$ и $C_s(f)P = P_s(x)$ - коэффициент при λ^s в функции $P(x+\lambda f)$. Таким образом

$$C(\lambda f)P(x) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s \lambda^s = \sum_{s=0}^{\infty} C_s(f)P \cdot \lambda^s$$

Оказывается, что операторы П и С (в частности, операторы Π^a и C_s для всех $a \in A$ и $s = 0, 1, \dots$) коммутативны, а именно мы имеем

<u>Теорема 9.1</u>. Пусть G - алгебра Ли, А - коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей, $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ - некоторая тройка алгебры А. Пусть определены оператор расширения П и оператор сдвига $C(f)$ кольца полиномиальных функций $k[G^*]$ на дуальном пространстве G^* к G . Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ \Pi\ } & \tilde{P} \\ \downarrow{\scriptstyle C(f)} & & \downarrow{\scriptstyle C(f\otimes\Omega 1)} \\ C(f)P & \xrightarrow{\ \Pi\ } & \Pi C(f)P = C(f\otimes\Omega 1)\tilde{P} \end{array}$$

для любой функции $P \in k[G^*]$

В частности: $\Pi^a C_s(f)P = (P_s)^a = (P^a)_s = C_s(f\otimes\Omega 1)\Pi^a P$

для любого элемента $a \in A$, $s = 0, 1 \ldots$

<u>Доказательство</u>: Пусть функция $P = P_I X_I$, тогда согласно определению мы имеем:

$$C(\lambda f)P = P_I (X+\lambda f)_I = \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')}} P_I X_{I'} f_{I''} \lambda^\alpha$$

где $d(I'')$ - длина мультиндекса I''. Следовательно

$$\Pi C(\lambda f)P = \Pi\Big(\sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} P_I X_{I'} f_{I''} \lambda^\alpha\Big)$$

$$= \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{J'} P_I \varepsilon_{J'} X_{I'}^{\Omega J'} f_{I''} \lambda^\alpha$$

С другой стороны $\Pi P = P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}$,

$$C(\lambda f\otimes\Omega 1)\Pi P = C(\lambda f\otimes\Omega 1)\left(P_I \varepsilon_J X_I^{\Omega J}\right) = P_I \varepsilon_J (X+\lambda f\otimes\Omega 1)_I^{\Omega J} =$$

$$= \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{\substack{J=J'\cup J'' \\ d(J'')=\alpha}} P_I \varepsilon_{J'} \varepsilon_{J''} X_{I'}^{\Omega J'} (f\otimes\Omega 1)_{I''}^{\Omega J''} \lambda^\alpha$$

Поставив элемент $\Omega 1 = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \varepsilon_{\omega i}$ в $(f\otimes\Omega 1)_{I''}^{\Omega J''}$, мы получим $(f\otimes\Omega 1)_{I''}^{\Omega J''} = f_{I''} \nu_{J''}$. Отсюда следует:

$$C(\lambda f\otimes\Omega 1)\Pi P = \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{J'} P_I \varepsilon_{J'} X_{I'}^{\Omega J'} \sum_{J''=(j_1'',\ldots,j_\alpha'')} \varepsilon_{J''} f_{I''} \nu_{J''} \lambda^\alpha =$$

$$= \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{J'} P_I \varepsilon_{J'} X_{I'}^{\Omega J'} \Big(\sum_{j_1''=1}^{N} \varepsilon_{j_1''} \nu_{j_1''}\Big) \ldots \Big(\sum_{j_\alpha''=1}^{N} \varepsilon_{j_\alpha''} \nu_{j_\alpha''}\Big) f_{I''} \lambda^\alpha =$$

$$= \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{J'} P_I \varepsilon_{J'} X_{I'}^{\Omega J'}\, 1.1 \ldots 1.\, f_{I''} \lambda^\alpha, \text{ т.е.}$$

$$C(\lambda f\otimes\Omega 1)\Pi P = \sum_I \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{I=I'\cup I'' \\ d(I'')=\alpha}} \sum_{J'} P_I \varepsilon_{J'} X_{I'}^{\Omega J'} f_{I''} \lambda^\alpha = \Pi C(\lambda f)P.$$

Итак, мы получаем равенство: $C(\lambda f\otimes\Omega 1)\Pi P = \Pi C(\lambda f)P$.

В частности: $(\Omega a, \Pi C(\lambda f) P) = (\Omega a, C(\lambda f \otimes \Omega 1) \Pi . P)$,

т.е. $\sum_{s=0}^{\infty} \Pi^a C_s(f) P. \lambda^s = \sum_{s=0}^{\infty} (C_s(f \otimes \Omega 1) \Pi^a P) \lambda^s$

для любого элемента $a \in A$.

Следовательно: $\Pi^a C_s(f) P = C_s(f \otimes \Omega 1) \Pi^a P$

Теорема доказана.

Теорема 9.2. Пусть А - самосопряженная относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебра, G - алгебра Ли, G^* - дуальное пространство к G . Пусть $I(G^*)$ - полный набор полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления и функции P_s, $s=0,1,\dots$, образуют полный инволютивный набор на G^*, где $P \in I(G^*)$, $P(x+\lambda f) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s \lambda^s$, f - некоторый вектор общего положения пространства G^*. Тогда расширенные функции P^{ε_α}, $1 \le \alpha \le N = \dim A$, $P \in I(G^*)$ относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ образуют полный набор полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления на $G^* \otimes A$. Кроме того, набор функций типа $P_s^{\varepsilon_\alpha} = C_s(f \otimes \Omega 1) P^{\varepsilon_\alpha}$, $1 \le \alpha \le N$ является полным инволютивным на $G^* \otimes A$.

Доказательство: Первое утверждение следует из теоремы 5.2. Второе утверждение следует из теорем 5.3, 9.1 и того, что набор функций типа P_s, $P \in I(G^*)$, $s=0,1,\dots$, является полным инволютивным на G^*. Теорема доказана.

§10. Разложения алгебр Ли и алгебр Фробениуса в прямые суммы подпространств

Пусть Θ - конечная группа, G - алгебра Ли. Пусть алгебра G разлагается в прямую сумму подпространств G_σ, $\sigma \in \Theta$: $G = \sum_{\sigma \in \Theta} G_\sigma$, причем коммутатор алгебры Ли G удовлетворяет условию $[G_\sigma, G_{\sigma'}] \subset G_{\sigma\sigma'}$ для всех элементов $\sigma, \sigma' \in \Theta$. Так как $[G_e, G_e] \subset G_e$ где е - единица группы Θ , поэтому подпространство G_e является подалгеброй Ли. Заметим, что если $\sigma\sigma' \neq \sigma'\sigma$ тогда $[G_\sigma, G_{\sigma'}] \subseteq G_{\sigma\sigma'} \cap G_{\sigma'\sigma} = 0$, т.е. $[G_\sigma, G_{\sigma'}] = 0$. Дуальное пространство G^* к алгебре Ли G разлагается в прямую сумму подпространств G_σ^*, $\sigma \in \Theta$: $G^* = \sum_{\sigma\in\Theta} G_\sigma^*$, где

$$G_\sigma^* = \{ x \in G^* \mid \langle x, G_{\sigma'} \rangle = 0,\ \sigma' \neq \sigma,\ \sigma' \in \Theta \}$$

Предполагается, что для всех элементов σ данной группы Θ соответственно определяются автоморфизмы π_σ алгебры Ли G, удовлетворяющие условиям:

1) $\pi_\sigma \pi_{\sigma'} = \pi_{\sigma\sigma'}$, $\pi_e = id$, $\sigma, \sigma' \in \Theta$

2) $\pi_\sigma \xi = \xi$, $\xi \in G$ для любого $\sigma \in \Theta$ тогда и только тогда, когда $\xi \in G_e$.

3) Подпространство $\mathcal{L} = \{ \xi - \pi_\sigma \xi \mid \xi \in G,\ \sigma \in \Theta \}$ совпадает с пространством $\sum_{\substack{\sigma \neq e \\ \sigma\in\Theta}} G_\sigma \approx G/G_e$

В дальнейшем мы будем обозначать через (G, Θ, π_Θ) алгебру Ли G с заданным разложением: $G = \sum_{\sigma\in\Theta} G_\sigma$, ($\Theta$ - конечная группа) и группу автоморфизмов $\pi_\Theta = \{ \pi_\sigma \mid \sigma \in \Theta \}$, удовлетворяющих условиям I–3. Пусть π - автоморфизм алгебры G^*, тогда соответственно определяется отображение π^* дуального пространства G^* к G : $\langle \pi^* x, \xi \rangle \equiv \langle x, \pi^{-1} \xi \rangle$, $x \in G^*$, $\xi \in G$

<u>Лемма I0.I.</u> Условие 3 группы автоморфизмов π_Θ эквивалентно условию:

3'. $\pi_\sigma^* x = x$ для любого элемента $\sigma \in \Theta$ тогда и только тогда, когда $x \in G_e^*$.

<u>Доказательство</u>: Выполняются следующие эквивалентные соотношения:

$$\pi_\sigma^* x = x \quad \text{для любого } \sigma \in \Theta$$
$$\iff \langle \pi_\sigma^* x, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle, \quad \xi \in G,\ \sigma \in \Theta$$
$$\iff \langle x, \pi_\sigma^{-1} \xi - \xi \rangle = 0, \quad \xi \in G,\ \sigma \in \Theta$$
$$\iff \langle x, \pi_{\sigma^{-1}} \xi - \xi \rangle = 0, \quad \xi \in G,\ \sigma \in \Theta$$
$$\iff \langle x, \mathcal{L} \rangle = 0$$

Следовательно $\pi^*_\sigma x = x \ , \sigma \in \Theta \Leftrightarrow \langle x, \mathcal{L} \rangle = 0$

Поэтому условия 3 и 3' эквивалентны. Лемма доказана.

Мы перейдем к формулировке основной теоремы этой части.

Теорема I0.I. Пусть задана тройка (G, Θ, π_Θ), где π_Θ - группа автоморфизмов алгебры Ли $G = \sum_{\sigma \in \Theta} G_\sigma$, удовлетворяющих условиям I.-3. , e - единица группы Θ. Пусть F и Φ - две функции, инвариантных относительно коприсоединенного представления на дуальном пространстве $G^* = \sum_{\sigma \in \Theta} G^*_\sigma$ к алгебре Ли G, а $a \in G^*$ - ковектор такой, что $\pi^*_\sigma a = a_\sigma = \lambda_\sigma a, \ \lambda_\sigma \in k$ (k - основное поле), $\sigma \in \Theta$. Тогда ограничения функций $F(x+\lambda a)$, $\Phi(x+\nu a)$ на подпространстве G^*_e находятся в инволюции:

$$\{\bar F(x+\lambda a), \ \bar\Phi(x+\nu a)\}_{G^*_e} \equiv 0 \quad , x \in G^*_e$$

$$\bar F(x+\lambda a) = F(x+\lambda a)\big|_{G^*_e} \ , \quad \bar\Phi(x+\nu a) = \Phi(x+\nu a)\big|_{G^*_e}$$

Для доказательства теоремы нам требуются следующие леммы.

Лемма I0.2. Для произвольных автоморфизмов π, π' алгебры Ли G выполняются тождества:

$$\pi^*\{x, \xi\} = \{\pi^* x, \pi\xi\}, \quad \pi^*\pi'^* = (\pi\pi')^*,$$

где $\{x, \xi\} = ad^*_\xi x, \ \xi \in G, \ x \in G^*$, π^*, π'^* - соответственные отображения автоморфизмов π, π' на G^*.

Доказательство: Пусть η - произвольный вектор на G . Тогда согласно определению мы имеем:

$$\langle \pi^*\{x, \xi\}, \eta \rangle = \langle \{x, \xi\}, \pi^{-1}\eta \rangle =$$

$$= \langle x, [\xi, \pi^{-1}\eta] \rangle = \langle x, \pi^{-1}[\pi\xi, \eta] \rangle =$$

$$= \langle \pi^* x, [\pi\xi, \eta] \rangle = \langle \{\pi^* x, \pi\xi\}, \eta \rangle$$

Следовательно $\pi^*\{x, \xi\} = \{\pi^* x, \pi\xi\}$. Далее:

$$\langle \pi^*\pi'^* x, \eta \rangle = \langle x, (\pi')^{-1}\pi^{-1}\eta \rangle =$$

$= \langle x, (\pi\pi')^{-1}\eta \rangle = \langle (\pi\pi')^* x, \eta \rangle$, поэтому

$\pi^* \pi'^* x = (\pi\pi')^* x$. Лемма доказана.

<u>Лемма 10.3</u>. Пусть задана тройка (G, Θ, π_Θ), F - некоторая гладкая функция на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G. Тогда выполняется равенство:

$$d\bar{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma (dF(x))$$

где $\bar{F}(x) = F(x)\big|_{G_e^*}$, $x \in G_e^*$, е - единица группы Θ.

<u>Доказательство</u>: По лемме 10.1 $\pi_{\sigma^{-1}}^* y = y$ для всех $y \in G_e^*$, $\sigma \in \Theta$. Следоватеьно $\langle y, d\bar{F}(x) \rangle = \langle y, dF(x) \rangle =$ $= \langle \pi_{\sigma^{-1}}^* y, dF(x) \rangle = \langle y, \pi_\sigma(dF(x)) \rangle$, $x, y \in G_e^*$, $\sigma \in \Theta$. Отсюда мы имеем равенство: $\langle y, d\bar{F}(x) \rangle = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \langle y, \pi_\sigma(dF(x)) \rangle =$

$= \langle y, \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma(dF(x)) \rangle$,

$x, y \in G_e^*$. Заметим, что $\pi_{\sigma'}\left(\frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma (dF(x))\right) =$

$= \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_{\sigma'} \pi_\sigma (dF(x)) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_{\sigma'\sigma} (dF(x)) =$

$= \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma''\in\Theta} \pi_{\sigma''} (dF(x))$, следовательно, $\frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma (dF(x)) \in G_e^*$.

Тогда $d\bar{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma (dF(x))$, $x \in G_e^*$ ч.т.д.

<u>Следствие 10.1</u>. Пусть задана тройка (G, Θ, π_Θ), F - некоторая гладкая функция на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G. Тогда выполняется равенство:

$$\operatorname{sgrad}_{G_e} \bar{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma^* (\operatorname{sgrad}_G F(x))$$

где $\bar{F}(x) = F(x)\big|_{G_e^*}$, $x \in G_e^*$, е - единица группы Θ.

<u>Доказательство</u>: Векторное поле $\operatorname{sgrad}_{G_e} \bar{F}(x)$ на G_e^* определяется формулой: $\operatorname{sgrad}_{G_e} \bar{F}(x) = \{x, d\bar{F}(x)\}_{G_e^*}$, $x \in G_e^*$

В силу леммы 10.3

$$\operatorname{sgrad}_{G_e} \overline{F}(x) = \{x, d\overline{F}(x)\}_{G_e^*} = \{x, d\overline{F}(x)\} =$$

$$= \{x, \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma(dF(x))\} = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\{x, \pi_\sigma(dF(x))\}$$

Так как $\pi_\sigma^* x = x, \quad x \in G_e^*, \quad \sigma\in\Theta$, поэтому в силу леммы 10.2

$$\operatorname{sgrad}_{G_e}\overline{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\{x, \pi_\sigma(dF(x))\} = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\{\pi_\sigma^* x, \pi_\sigma(dF(x))\}$$

$$= \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\pi_\sigma^*\{x, dF(x)\} = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\pi_\sigma^*(\operatorname{sgrad}_G F(x)).$$

Итак, $\operatorname{sgrad}_{G_e}\overline{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta}\pi_\sigma^*(\operatorname{sgrad}_G F(x))$, ч.т.д.

Лемма 10.4. Для любой функции $F(x)$ на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G и любого автоморфизма π алгебры Ли G выполняется тождество:

$$\pi(dF(x)) = d(F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^*(x)), \quad x\in G^*$$

Доказательство: Пусть $\{e_i\}$, $1\le i\le n$, – базис алгебры Ли G. $\{e^i\}$, $1\le i\le n$, – сопряженный базис на G^*: $\langle e^i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $1\le i,j\le n$, $\pi e_i = \pi_i^k e_k$, $\pi^* e^i = \pi^{*i}_k e^k$, $1\le i\le n$.

Тогда: $\pi^{*i}_j = \langle \pi^{*i}_k e^k, e_j\rangle = \langle \pi^* e^i, e_j\rangle =$

$$= \langle e^i, \pi^{-1} e_j\rangle = \langle e^i, (\pi^{-1})_j^k e_k\rangle = (\pi^{-1})_j^i$$

Следовательно $\pi^{*i}_j = (\pi^{-1})_j^i$, $1\le i,j\le n$. Рассмотрим вектор $v = v^i e_i \in G$. Согласно определению мы имеем $\langle\pi(dF(x)), v\rangle = v^i\pi_i^k \frac{\partial F(x)}{\partial x^k}$, где x^i, $1\le i\le n$ – система координат на G^* относительно базиса $\{e^i\}$. Введем новую переменную $\pi^* x = y$, $x = (\pi^{-1})^* y$, $x^k = (\pi^{-1})^{*k}_i y^i$, тогда $\langle d(F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x), v\rangle =$

$$= v^i \frac{\partial(F\circ(\pi^{-1})^*)(y)}{\partial y_i} = v^i \frac{\partial(F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^i} =$$

$$= v^i (\pi^{-1})^{*k}_i \frac{\partial F(x)}{\partial x^k} = v^i \pi_i^k \frac{\partial F(x)}{\partial x^k} = \langle \pi(dF(x)), v\rangle,$$

т.е. $d(F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x) = \pi(dF(x))$, что и требовалось.

Здесь x - произвольный элемент G^*.

<u>Следствие I0.2</u>. Для любой гладкой функции $F(x)$ на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G и любого автоморфизма π алгебры Ли G выполняется тождество:

$$\pi^*(\operatorname{sgrad}_G F(x)) = \operatorname{sgrad}_G (F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x), \ x\in G^*$$

<u>Доказательство</u>: В силу леммы I0.2

$$\pi^*(\operatorname{sgrad}_G F(x)) = \pi^*(\{x, dF(x)\}) = \{\pi^* x, \pi(dF(x))\}.$$

Так как $\operatorname{sgrad}_G (F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x) = \{\pi^* x, d(F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x)\}$,

то в силу леммы I0.4

$$\operatorname{sgrad}_G (F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x) = \{\pi^* x, \pi(dF(x))\} =$$

$= \pi^*(\operatorname{sgrad}_G F(x))$, т.е.

$\operatorname{sgrad}_G (F\circ(\pi^{-1})^*)(\pi^* x) = \pi^*(\operatorname{sgrad}_G F(x)), \ x\in G^*$, ч.т.д.

<u>Следствие I0.3</u>. Пусть задана тройка (G, Θ, π_Θ). Тогда для любой гладкой функции F на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G выполняется тождество

$$\operatorname{sgrad}_{G_e} \overline{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \operatorname{sgrad}_G (F\circ(\pi_{\sigma^{-1}})^*)(x)$$

где $\overline{F}(x) = F(x)\big|_{G_e^*}$, $x\in G_e$, е - единица группы Θ.

<u>Доказательство</u>: Так как элемент $x\in G_e^*$, то $\pi_\sigma^* x = x$ для всех элементов $\sigma\in\Theta$. В силу следствий 9.I и 9.2:

$$\operatorname{sgrad} \overline{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma^*(\operatorname{sgrad}_G F(x)) =$$

$$= \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \operatorname{sgrad}_G (F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}})(\pi^* x)$$

$$= \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \operatorname{sgrad}_G (F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}})(x)$$, т.е.

$$\mathrm{sgrad}_{G_e} \bar{F}(x) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\sigma \in \Theta} \mathrm{sgrad}_G (F \circ \pi^*_{\sigma^{-1}})(x)$$, ч.т.д.

Лемма 10.5. Пусть G - алгебра Ли, π - ее автоморфизм. Пусть F - некоторая функция, инвариантная относительно коприсоединенного представления на дуальном пространстве G^* к G, тогда функция $F \circ \pi^*$ инвариантна относительно коприсоединенного представления.

Доказательство: Известно, что функция F на G^* инвариантна относительно коприсоединенного представления тогда и только тогда, когда $\mathrm{sgrad}\, F(x) \equiv 0$, $x \in G^*$. В силу следствия 10.2:

$$\mathrm{sgrad}\,(F \circ \pi^*)((\pi^{-1})^* x) = \mathrm{sgrad}\,(F \circ \pi^*)(y) =$$

$$= (\pi^{-1})^* (\mathrm{sgrad}\, F(x))$$, где $x \in G^*$, $y = (\pi^{-1})^* x$

Следовательно $\mathrm{sgrad}\,(F \circ \pi^*)((\pi^{-1})^* x) = (\pi^{-1})^* (\mathrm{sgrad}\, F(x)) = 0$, $x \in G^*$. Это означает, что функция $F \circ \pi^*$ инвариантна относительно коприсоединенного представления.

Лемма 10.6. Пусть задана тройка (G, Θ, Π_Θ). Тогда $\mathcal{O}_{G_e}(x) \equiv \mathcal{O}_G(x) \cap G_e^*$, где $x \in G_e^*$, $\mathcal{O}_G(x)$ ($\mathcal{O}_{G_e}(x)$) является орбитой коприсоединенного представления на G^* (на G_e^*), проходящей через x.

Доказательство. Достаточно доказать, что касательные пространства $T_x \mathcal{O}_G(x)$ и $T_x \mathcal{O}_{G_e}(x)$ к орбитам $\mathcal{O}_G(x)$ и $\mathcal{O}_{G_e}(x)$ обладают свойством $T_x \mathcal{O}_{G_e}(x) \equiv T_x \mathcal{O}_G(x) \cap G_e^*$. Так как:

$$\langle \{x, v\}, w \rangle = \langle x, [v, w] \rangle = 0, \quad x \in G_e^*, \ v \in G_e, \ w \in G_\sigma, \ \sigma \neq e$$

$$\langle \{x, v\}, w \rangle = \langle x, [v, w] \rangle = \langle x, [v, w]_{G_e} \rangle = \langle \{x, v\}_{G_e}, w \rangle, \quad x \in G_e^*, \ v, w \in G_e$$, то:

$$ad^*_G v(x) = \{x, v\} = \{x, v\}_{G_e} = ad^*_{G_e} v(x), \quad x \in G_e^*, \ v \in G_e$$

Следовательно мы имеем $T_x O_{G_e}(x) \subset T_x O_G(x) \cap G_e^*$

С другой стороны, если $v \in G_\sigma$, $\sigma \neq e$, тогда

$\langle \{x, v\}, G_e \rangle = \langle x, [v, G_e] \rangle \equiv 0$, откуда

$T_x O_{G_e}(x) \equiv T_x O_G(x) \cap G_e^*$. Лемма доказана.

Следствие 10.4. Пусть задана тройка (G, Θ, π_Θ). Тогда если $I(G^*)$ является полным набором инвариантов относительно коприсоединенного представления на G^*, то набор $\{\bar F = F|_{G_e^*} \mid F \in I(G^*)\}$ является полным набором инвариантов на G_e^*, если $R_G(G_e^*) \neq \phi$.

Мы перейдем к доказательству теоремы 10.1.

Доказательство теоремы 10.1. Из лемм 10.3-10.4 следует, что в любой точке $x \in G^*$, скобка Пуассона функций $\bar F(x+\lambda a)$ и $\bar\Phi(x+\nu a)$ на G_e^* удовлетворяет свойству:

$$\{\bar F(x+\lambda a), \bar\Phi(x+\nu a)\}_{G_e} = \langle x, [d\bar F(x+\lambda a), d\bar\Phi(x+\nu a)]_{G_e}\rangle$$

$$= \langle x, [d\bar F(x+\lambda a), d\bar\Phi(x+\nu a)]\rangle_G$$

$$= \langle x, [\frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma\in\Theta} \pi_\sigma(dF(x+\lambda a)), \frac{1}{|\Theta|}\sum_{\sigma'\in\Theta} \pi_{\sigma'}(d\Phi(x+\nu a))]\rangle$$

$$= \frac{1}{|\Theta|^2}\sum_{\sigma,\sigma'\in\Theta} \langle x, [\pi_\sigma(dF(x+\lambda a)), \pi_{\sigma'}(d\Phi(x+\nu a))]\rangle$$

$$= \frac{1}{|\Theta|^2}\sum_{\sigma,\sigma'\in\Theta} \langle x, [d(F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}})(x+\lambda a_\sigma), d(\Phi\circ\pi^*_{\sigma'^{-1}})(x+\nu a_{\sigma'})]\rangle$$

$$= \frac{1}{|\Theta|^2}\sum_{\sigma,\sigma'\in\Theta} \langle x, [d(F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}}(x+\lambda\lambda_\sigma a), d(\Phi\circ\pi^*_{\sigma'^{-1}}(x+\nu\lambda_{\sigma'} a)]\rangle$$

Согласно лемме 10.5 функции $F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}}$ и $F\circ\pi^*_{\sigma'^{-1}}$ являются инвариантными относительно коприсоединенного представления на G^*, т.е.

$$\langle x, [d(F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}})(x+\lambda\lambda_\sigma a), d(\Phi\circ\pi^*_{\sigma'^{-1}})(x+\nu\lambda_{\sigma'} a)]\rangle$$

$$= \{F\circ\pi^*_{\sigma^{-1}}(x+\lambda\lambda_\sigma a), \Phi\circ\pi^*_{\sigma'^{-1}}(x+\nu\lambda_{\sigma'} a)\} \equiv 0$$

Окончательно $\{\bar F(x+\lambda a), \bar\Phi(x+\nu a)\}_{G_e} \equiv 0$

Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 10.1 мы имеем следующее утверждение.

Теорема 10.2. Пусть G - алгебра Ли над $\mathbb{C}$ (или над $\mathbb{R}$ в случае $p = 2$), которая разлагается в прямую сумму $G = \sum_{\sigma\in \mathbb{Z}_p} G_\sigma$, $[G_\sigma, G_{\sigma'}] \subset G_{\sigma+\sigma'}$, $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}_p$, т.е. G является $\mathbb{Z}_p$ - циклической алгеброй Ли. Пусть $F(x)$, $\Phi(x)$ - инвариантные функции относительно коприсоединенного представления на $G^* = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G_\sigma^*$. Тогда функции $\bar F(x+\lambda a) = F(x+\lambda a)|_{G_0^*}$, $\bar\Phi(x+\nu a) = \Phi(x+\nu a)|_{G_0^*}$, $a \in G_{\sigma_0}^*$, $\sigma_0 \in \Theta$, находятся в инволюции на пространстве G_0^*.

Доказательство: В силу теоремы 9.1, достаточно построить тройку $(G, \mathbb{Z}_p, \pi_{\mathbb{Z}_p})$, удовлетворяющую всем условиям теоремы 10.1. Пусть $\varkappa_0 = 1, \varkappa_1, \dots, \varkappa_{p-1}$ - разные корни p -ой степени единицы ($\varkappa_\sigma = \varkappa_1^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$). Автоморфизмы π_σ, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$ алгебры Ли G определяются следующим образом:

$$\pi_0 = id, \quad \pi_1(x) = \varkappa_\sigma x \quad \text{если} \quad x \in G_\sigma, \ \sigma \in \mathbb{Z}_p$$

и $\pi_\sigma = \pi_1^\sigma$. Очевидно выполняются свойства:

1. $\pi_\sigma \pi_{\sigma'} = \pi_{\sigma+\sigma'}$, $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}_p$

2. $\pi_\sigma \xi = \xi$ $(\xi \in G)$, $\sigma \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow \xi \in G_0$

3. $\mathcal{L} = \{\xi - \pi_\sigma \xi \mid \xi \in G, \sigma \in \mathbb{Z}_p\} = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} G_\sigma$

Кроме того, если элемент $a \in G_{\sigma_0}$, $\sigma_0 \in \mathbb{Z}_p$, тогда

$$\pi_\sigma^* a = a_\sigma = (\pi_1^\sigma)^* a = (\pi_1^*)^\sigma a =$$

$= (\varkappa_{\sigma_0}^{-1})^\sigma a = \varkappa_1^{-\sigma\sigma_0} a$. Таким образом в силу теоремы 10.1 $\{\bar F(x+\nu a), \bar\Phi(x+\nu a)\}_{G_0} = 0$. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию разложений алгебр Фробениуса.

Пусть задана алгебра Фробениуса А, самосопряженная относительно фиксированной тройки $(A, \Omega, \{e_i\})$, $1 \le i \le N$. Предположим, что алгебра А разлагается в прямую сумму подпространств:

$A = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} A_\sigma$, так, что $A_\sigma A_{\sigma'} \subset A_{\sigma+\sigma'}, \sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}_p$, другими словами, алгебра A является $\mathbb{Z}_p$ - циклической алгеброй. Кроме того, пусть подпространство $A_\sigma, \sigma \in \mathbb{Z}_p$, обладает базисом $\{\varepsilon_{i_\sigma}\}$, $i_\sigma = \tilde{M}_\sigma + 1, \ldots, \tilde{M}_\sigma + M_{\sigma+1}$, где $0 = M_0$, $M_1 + M_2 + \cdots + M_p = N = \dim A$, т.е. $\dim A_\sigma = M_{\sigma+1}$. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ - циклическую алгебру Ли $G = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma$. Тогда тензорное произведение $G \otimes A$ является $\mathbb{Z}_p$ - циклической алгеброй Ли с разложением $G \otimes A = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} (G \otimes A)_\sigma$, где $(G \otimes A)_\sigma = \sum_{\sigma' \in \mathbb{Z}_p} G_{\sigma'} \otimes A_{\sigma+\sigma'}$.

Мы обозначаем через $G \wedge A$ подалгебру Ли $(G \otimes A)_0$ алгебры Ли $G \otimes A$, т.е. $G \wedge A = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma \otimes A_\sigma$. С помощью естественного скалярного произведения на алгебре A мы отождествляем дуальное пространство $(G \otimes A)^*$ к $G \otimes A$ с пространством $G^* \otimes A$ и пространство $(G \otimes A)^*_\sigma$ с $(G^* \otimes A)_\sigma = \sum_{\sigma' \in \mathbb{Z}_p} G^*_{\sigma'} \otimes A_{\sigma+\sigma'}$, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$. В частности: $(G \wedge A)^* \cong (G \otimes A)^*_0 \cong (G^* \otimes A)_0 = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G^*_\sigma \otimes A_\sigma$

Подпространство $G^* \otimes \Omega 1$ в $G^* \otimes A$ будем называть основным. Оно играет большую роль в построении полного инволютивного набора функций на подпространстве $(G^* \otimes A)_0 \cong (G \wedge A)^*$

<u>Предположение 10.1</u>. Пусть заданы $\mathbb{Z}_p$ - циклические алгебра Ли G и алгебра Фробениуса A с фиксированной тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Основное подпространство $G^* \otimes \Omega 1$ имеет ненулевое сечение с пространством $(G^* \otimes A)_0 \cong (G \wedge A)^*$. на $G^* \otimes A$ тогда и только тогда, когда элемент $\Omega 1 \in A_{\sigma_0}$ для некоторого элемента $\sigma_0 \in \mathbb{Z}_p$. При этом единичный элемент $1 \in A_0$ и Ω взаимно однозначно отображает пространство A_σ на пространство $A_{\bar{\sigma}}$, для всех элементов $\sigma, \bar{\sigma} \in \mathbb{Z}_p : \sigma + \bar{\sigma} = \sigma_0$.

<u>Доказательство</u>: Если элемент $\Omega 1$ принадлежит A_{σ_0} для некоторого $\sigma_0 \in \mathbb{Z}_p$, тогда ненулевое подпространство $G^*_{\sigma_0} \otimes \Omega 1 \subset (G^* \otimes \Omega 1) \cap (G^* \otimes A)_0$, т.е. подпространства $G^* \otimes \Omega 1$ и $(G^* \otimes A)_0 \cong (G \wedge A)^*$ имеют ненулевое сечение. Обратно, пусть

ненулевой вектор $\xi\otimes\Omega 1\in(G^*\otimes A)_0$, $\xi\in G$, тогда $\xi\otimes\Omega 1\in G^*_{\sigma_0}\otimes A_{\sigma_0}$ для некоторого элемента $\sigma_0\in Z_p$, т.е. $\Omega 1\in A_{\sigma_0}$. Таким образом первое утверждение доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что если $\Omega 1\in A_{\sigma_0}$, $\sigma\in Z_p$, тогда $(\Omega 1, A_\sigma)=0$ для любого элемента $\sigma\in Z_p$, $\sigma\neq\sigma_0$. В частности: $(\Omega A_\sigma, A_{\sigma'}) = (\Omega 1, A_\sigma A_{\sigma'}) = 0$ если $\sigma+\sigma'\neq 0$, $\sigma,\sigma'\in Z_p$. Следовательно $\Omega A_{\bar\sigma}\subset A_\sigma$, $\Omega A_{\bar\sigma}\subset A_\sigma$ для любого элемента $\sigma\in Z_p$, $\sigma+\bar\sigma=\sigma_0$. В силу $\Omega^2=id$, откуда следует, что Ω взаимно отображает A_σ в $A_{\bar\sigma}$,где $\sigma,\bar\sigma\in Z_p$, $\sigma+\bar\sigma=\sigma_0$. В частности $\Omega(\Omega 1)=1\in\Omega A_{\sigma_0}=A_0$. Предложение доказано. В качестве примера мы формулируем частный случай ($p=2$) предложения I0.I.

Предложение I0.2. Пусть G - Z_2 - циклическая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$; $G = H+V$, $A = A_0+A_I$ - Z_2- циклическая алгебра Фробениуса самосопряжена относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Тогда основное пространство $G^*\otimes\Omega 1$ имеет ненулевое сечение с пространством $(G\wedge A)^*\cong H^*\otimes A_0+V^*\otimes A_1$, тогда и только тогда, когда либо $\Omega 1\in A_0$, либо $\Omega 1\in A_1$. При этом единичный элемент $I\in A_0$ и если $\Omega 1\in A_0$, то $\Omega: A_i\leftrightarrow A_i$, $i = 0,I$, если $\Omega 1\in A_1$, то $\Omega: A_0\leftrightarrow A_I$.

§II. Разложения общего положения грандуированных алгебр Ли и полные инволютивные наборы функций на подалгебрах расширенных алгебр Ли

В этом параграфе мы построим полные инволютивные наборы функций на подалгебрах грандуированных алгебр Ли. Сначала рассмотрим Z_2 - грандуированные алгебры. В этом случае основное поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пусть A - ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей самосопряжена относительно некоторой фиксированной тройки $(A, \Omega, \{\xi\})$ Далее алгебра A разлагается в прямую сумму подпространств: $A = A_0 + A_I$ так, что A является $\mathbb{Z}_2$ - грандуированной алгеброй. Предполагается, что подпространство A_0 обладает базисом $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{M_1}\}$ а подпространство A_I - $\{\xi_{M_1+1}, \dots, \xi_{M_1+M_2}\}$, где $M_I + M_2 = N = \dim A$. Пусть $G = H + V$ - $\mathbb{Z}_2$ - грандуированная алгебра Ли. Дуальное пространство G^* к G имеет соответственное разложение $G^* = H^* + V^*$. Согласно предложению 10.2, если основное подпространство имеет ненулевое сечение с пространством $(G \wedge A)^* \cong$ $\cong H^* \otimes A_0 + V^* \otimes A_1$, то либо $\Omega 1 \in A_0$, либо $\Omega 1 \in A_1$. Рассмотрим сначала первый случай, когда элемент $\Omega 1 \in A_0$. Тогда, согласно предложению 10.2, Ω взаимно однозначно отображает множество A_0 на A_I. В частности: $M_I = \dim A_0 = \dim A_I = M_2 = N/2 = M$. Пусть $R(G^*)$ - множество всех регулярных точек (т.е. точек общего положения коприсоединенного представления) на G^*, $R_G(V^*) = R(G^*) \cap V^*$, $R_G(H^*) = R(G^*) \cap H^*$

Введем одно из основных определений.

Определение II.I. Разложение $\mathbb{Z}_2$- грандуированной алгебры Ли $G = H + V$ (и следовательно $G^* = H^* + V^*$) называется разложением общего положения 2-го типа, если на подпространстве V^* существует регулярная точка пространства G^*, т.е. $R_G(V^*) \neq \phi$

В третьей главе мы докажем, что если множество $R_G(V^*)$ непусто, то оно открыто и всюду плотно на V^*.

Предположим, что на дуальном пространстве G^* к G существует полный набор полиномиальных инвариантов $I(G^*) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ относительно коприсоединенного представления такой, что для некоторого ковектора $f \in V^*$ функции типа $P_{i,s} = C_s(f) P_i$, $P_i \in I(G^*)$, $1 \le i \le r$, $s = 0, 1, \dots$, где $C_s(f)$ - оператор сдвига, т.е. $P_i(x + \lambda f) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{i,s} \lambda^s$, образуют полный инволютивный набор функций на G^*. Далее, пусть существует точка $x_0 \in R_G(V^*)$

такая, что среди этих функций $P_{i,s}$, $1 \le i \le r$, $s=0,1,\dots$ можно выбрать m ($m = \frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$) функций, независимых в точке x_0. Тогда согласно теореме 9.2 расширенные относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ функции $P_i^{\varepsilon_\alpha}$, $1 \le i \le r$, $1 \le \alpha \le N$ образуют на пространстве $(G \otimes A)^* \cong G^* \otimes A$ полный набор полиномиальных инвариантов. Кроме того набор функций типа $P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha} = C_s(f \otimes \Omega 1) P_i^{\varepsilon_\alpha}$, где $C_s(f \otimes \Omega 1)$ – оператор сдвига на $G^* \otimes A$ является полным инволютивным набором на $G^* \otimes A$. Далее, аналогично доказательству следствия 5.2. среди функции $P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le i \le n$, $s=0,1,\dots$ можно выбрать Nm, ($N = \dim A$, $m = \frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$) функции, независимых в точке $x_0 \otimes \Omega 1 \in G^* \otimes A$.

Согласно определению подалгебра Ли $G \wedge A \equiv (G \otimes A)_0 = H \otimes A_0 + V \otimes A_1$, $(G \wedge A)^* \cong H^* \otimes A_0 + V^* \otimes A_1$. В силу следствия 10.4 функций $\overline{P_i^{\varepsilon_\alpha}} = P_i^{\varepsilon_\alpha}\big|_{(G\wedge A)^*}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le i \le r$, образуют полный набор инвариантов на пространстве $(G \wedge A)^*$. Заметим, что $f \otimes \Omega 1 \in (G \wedge A)^*$, $x_0 \otimes \Omega 1 \in (G \wedge A)^*$ так как $\Omega 1 \in A_1$ и $f, x_0 \in V^*$. Следовательно $\overline{P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}} = \overline{P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}}\big|_{(G\wedge A)^*} = C_s(f \otimes \Omega 1)\overline{P_i^{\varepsilon_\alpha}}$, где $C_s(f \otimes \Omega 1)$ – оператор сдвига на $(G \wedge A)^*$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le i \le r$, $s=0,1,\dots$ Отсюда согласно общей теореме А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко (см. §9) функции $\overline{P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}}$ находятся в инволюции на пространстве $(G \wedge A)^*$. Мы докажем полноту этого инволютивного набора.

<u>Теорема II.I</u>. Пусть $\mathbb{Z}_2$ – грандуированная алгебра Ли $G = H + V$ и $\mathbb{Z}_2$ -грандуированная алгебра Фробениуса A, удовлетворяют всем написанным выше условиям. Пусть разложение $G = H + V$ является разложением общего положения 2-го типа. Тогда функции типа $\overline{P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}} = P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}\big|_{(G\wedge A)^*}$, $1 \le \alpha \le N$, $P_i \in I(G^*)$, $1 \le i \le r$, $s=0,1,\dots$ образуют полный инволютивный набор функций на пространстве $(G \wedge A)^*$, где $P_{i,s}^{\varepsilon_\alpha}$ – определенные выше расширенные относительно тройки

$(A, \Omega, \{\xi_i\})$ функции. Кроме того

$$\operatorname{ind}(G \wedge A) = \frac{1}{2} \operatorname{ind} G \otimes A = M \operatorname{ind} G$$

Для доказательства теоремы нам требуются следующие леммы.

Лемма II.I. Пусть все условия теоремы II.I выполняются, тогда $\operatorname{ind}(G \wedge A) \geqslant M \operatorname{ind} G = \frac{N}{2} \operatorname{ind} G$, $N = \dim A$

Доказательство: Обозначаем через x_i, $1 \leq i \leq m$, – систему координат пространства H^*; x_j, $m+1 \leq j \leq n$, – систему координат пространства V^*. Тогда x_i, $1 \leq i \leq n$, – система координат пространства $G^* = H^* + V^*$; $x_i^\alpha = x_i \otimes \varepsilon_\alpha$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq N$, – система координат расширенного пространства $G^* \otimes A$ и $x_{i'}^{\alpha'}$, где либо $1 \leq i' \leq m$, $1 \leq \alpha' \leq M$, либо $m+1 \leq i' \leq n$, $M+1 \leq \alpha' \leq N$, – система координат пространства $(G \wedge A)^* = H^* \otimes A_0 + V^* \otimes A_1$
В силу полноты набора полиномиальных инвариантов $\overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq \alpha \leq N$, на пространстве $(G \wedge A)^*$ относительно коприсоединенного представления

$$\operatorname{ind} G \wedge A = \max_{X \in (G \wedge A)^*} \operatorname{rk} \left\| \frac{\partial \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (X) \right\|$$

Так как разложение $G = H + V$ является разложением общего положения 2-го типа, то существует точка $x_0' \in R_G(V^*)$ такая, что

$$\operatorname{rk} \left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_i} (X_0') \right\| = \operatorname{ind} G, \quad (1 \leq k \leq r, \ 1 \leq i \leq n)$$

Для доказательства неравенства $\operatorname{ind}(G \wedge A) \geqslant M \operatorname{ind} G$ достаточно доказать, что в точке $X_0' = x_0' \otimes \Omega 1$

$$\operatorname{rk} \left\| \frac{\partial \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (X_0') \right\| \geqslant M \operatorname{ind} G$$

Согласно теореме 5.I $\dim \mathcal{O}(x_0' \otimes \Omega 1) = N \dim \mathcal{O}(x_0')$, где $\mathcal{O}(x_0')$ и $\mathcal{O}(x_0' \otimes \Omega 1)$ – соответственные орбиты коприсоединенных представлений на G^* и $G^* \otimes A$. В силу теоремы 5.2 $\operatorname{ind} G \otimes A = N \operatorname{ind} G$

следовательно, точка $X_0' = x_0' \otimes \Omega 1$ является регулярной точкой на пространстве $G^* \otimes A$. Отсюда выполняется равенство

$$\mathrm{rk} \left\| \frac{\partial P_k^{\varepsilon_\beta}}{\partial x_i^\alpha} (X_0') \right\| = 2M \operatorname{ind} G \quad (1 \le \alpha, \beta \le N,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le r)$$

Матрица $\left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_i} (x_0') \right\| = \| U, W \|$, где $U = \left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_{i_1}} (x_0') \right\|$,

$1 \le k \le r,\ 1 \le i_1 \le m,\quad W = \left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_{i_2}} (x_0') \right\|,\ 1 \le k \le r,\ m+1 \le i_2 \le n.$

и $\mathrm{rk} \| U, W \| = \operatorname{ind} G$. Так как точка $X_0' = x_0' \otimes \Omega 1 \in$ $\in (G \wedge A)^*$, то для любой координаты $x_{i'}^{\alpha'}$ пространства $(G \wedge A)^*$:

$$\frac{\partial P_k^{\varepsilon_\alpha}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (X_0') = \frac{\partial \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (X_0'), \quad \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}} = P_k^{\varepsilon_\alpha} \Big|_{(G \wedge A)^*}.$$

Следовательно в силу леммы 5.2.

$$\left\| \frac{\partial \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (x_0' \otimes \Omega 1) \right\| = \left\| \frac{\partial P_k^{\varepsilon_\alpha}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (x_0' \otimes \Omega 1) \right\| = \left\| \delta_{\alpha\alpha'} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_{i'}} (x_0') \right\|$$

Заметим, что если $1 \le \alpha \le M$, тогда

$$\left\| \delta_{\alpha\alpha'} \frac{\partial P_k}{\partial x_{i'}} (x_0') \right\| = \delta_{\alpha\alpha'} U;$$

если $M+1 \le \alpha \le 2M = N$, тогда

$$\left\| \delta_{\alpha\alpha'} \frac{\partial P_k}{\partial x_{i'}} (x_0') \right\| = \delta_{\alpha\alpha'} W,$$

Отсюда

$$\mathrm{rk} \left\| \frac{\partial \overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}}}{\partial x_{i'}^{\alpha'}} (x_0' \otimes \Omega 1) \right\| = M\, \mathrm{rk} \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & W \end{matrix} \right\| \ge$$

$\ge M\, \mathrm{rk} \| U, W \| = M \operatorname{ind} G$, т.е.

$$\operatorname{ind} (G \wedge A) \ge M \operatorname{ind} G.$$

Лемма доказана.

Лемма II.2. Пусть все условия теоремы II.I выполняются. Тогда $\operatorname{ind}(G \wedge A) \leq M \operatorname{ind} G$

Доказательство: Мы сохраняем все обозначения в доказательстве леммы II.I. В силу того, что точка $X_0' = x_0' \otimes \Omega 1$ является регулярной точкой на пространстве $G^* \otimes A$:

$$\dim \mathcal{O}(x_0' \otimes \Omega 1) = \operatorname{rk} \| \{x_i^\alpha, x_j^{\omega\beta}\}(x_0' \otimes \Omega 1) \| =$$

$$= 2M(\dim G - \operatorname{ind} G) \quad (1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad 1 \leq i, j \leq n).$$

С другой стороны $\{x_i^\alpha, x_j^{\omega\beta}\}(x_0' \otimes \Omega 1) = \{x_i, x_j\}^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\omega\beta}}(x_0' \otimes \Omega 1) =$

$$= \{x_i, x_j\}(x_0')(\Omega 1, \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\omega\beta}) = \delta_{\alpha\beta}\{x_i, x_j\}(x_0') =$$

$= \delta_{\alpha\beta} \Gamma_{ij}, \quad \Gamma_{ij} = \{x_i, x_j\}(x_0')$, по этому

$$\dim \mathcal{O}(x_0' \otimes \Omega 1) = \operatorname{rk} \|\delta_{\alpha\beta}\Gamma_{ij}\| = 2M \operatorname{rk} \Gamma,$$

где матрица $\Gamma = \|\Gamma_{ij}\|, \quad 1 \leq i, j \leq n$.

В силу свойств $[H, H] \subset H, \ [H, V] \subset V, \ [V, V] \subset H$ матрица

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & \{x_{k_1}, x_{k_2}'\}(x_0') \\ \{x_{k_2}, x_{k_1}'\}(x_0') & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 \end{Vmatrix}$$

где x_{k_1}, x_{k_1}' - координаты пространства H^*, x_{k_2}, x_{k_2}' - координаты пространства V^*. Следовательно

$$\dim \mathcal{O}(x_0' \otimes \Omega 1) = 2M(\dim G - \operatorname{ind} G) = 2M \operatorname{rk} \Gamma$$

В то время на пространстве $(G \wedge A)^*$ в системе координат $x_i^{\alpha'}$:

$$\dim \mathcal{O}_{G \wedge A}(x_0' \otimes \Omega 1) = \operatorname{rk} \| \{x_i^{\omega\alpha'}, x_j^{\beta'}\}(x_0' \otimes \Omega 1) \| =$$

$$= \operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & & \Gamma_1 \\ & \ddots & \\ \Gamma_1 & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & \Gamma_2 \\ & \ddots & \\ \Gamma_2 & & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \}M \\ \\ \}M \end{matrix} = \operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} 0 & & \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ & \ddots & \\ \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$= M \operatorname{rk} \Gamma = M(\dim G - \operatorname{ind} G)$. Следовательно:

$$\operatorname{ind} G\wedge A \leq \dim G\wedge A - \dim O_{G\wedge A}(x_0\otimes\Omega 1) = M \dim G$$

т.е. $\operatorname{ind} G\wedge A \leq M \operatorname{ind} G$. **Лемма доказана.**

Из лемм II.I и II.2 мы получаем

<u>Следствие II.I.</u> Пусть все условия теоремы II.I выполняются. Тогда:

$$\operatorname{ind} G\wedge A = M \operatorname{ind} G = \frac{1}{2}\dim A \dim G .$$

<u>Лемма II.3</u>. Пусть $\overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}$, $1\leq \alpha\leq N$, $1\leq k\leq r$, $s=0,1,\dots$ - определенные в теореме II.I функции. Тогда

$$\operatorname{rk}\left\| \frac{\partial \overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}}(X_0)\right\| = \frac{1}{2}(\operatorname{ind} G + \dim G)M,$$ где $x^{\alpha'}_{i'}$ - система координат пространства $(G\wedge A)^*$, $X_0 = x_0\otimes\Omega 1$, $x_0\in R_G(V^*)$ - определенная в теореме II.I точка.

<u>Доказательство</u>: Как написано выше, набор $P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}$ является полным инволютивным набором функций на пространстве $G^*\otimes A$ и в регулярной точке $x_0\otimes\Omega 1 = X_0 \in G^*\otimes A$:

$$\operatorname{rk}\left\| \frac{\partial P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}}(X_0)\right\| = \frac{1}{2}(\operatorname{ind} G + \dim G)\, N , \quad N = 2M$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы II.I, мы получаем:

$$\operatorname{rk}\left\| \frac{\partial \overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}}(X_0)\right\| \geq \frac{1}{2}(\operatorname{ind} G + \dim G)M$$

С другой стороны согласно следствию II.I $\operatorname{ind} G\wedge A = M \operatorname{ind} G$

и $\frac{1}{2}(\operatorname{ind} G\wedge A + \dim G\wedge A) = \frac{1}{2}(\operatorname{ind} G + \dim G)M$

Следовательно в силу инволютивности функций $\overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}$ на пространстве $(G\wedge A)^*$:

$$\operatorname{rk}\left\| \frac{\partial \overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}}(X_0)\right\| \leq \frac{1}{2}(\operatorname{ind} G + \dim G)M$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{rk} \left\| \frac{\partial \overline{P}^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}{\partial x^{\alpha'}_{i}} (X_0) \right\| = \frac{1}{2} (\operatorname{ind} G + \dim G) M$$

Лемма доказана.

<u>Доказательство теоремы II.I</u>. В силу лемм II.I–II.3 утверждение следует из того, что функции $P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$ полиномиальны на $(G \wedge A)^*$.

Теорема доказана.

Рассмотрим второй случай, когда элемент $\Omega 1 \in A_0$. В силу предложения IO.I:

$$\Omega : A_0 \leftrightarrow A_0, \quad \Omega : A_1 \leftrightarrow A_1$$

где $A = A_0 + A_1$ – разложение $\mathbb{Z}_2$- грандуированной алгебры A. Пусть A самосопряжена относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ и подпространство A_0 имеет базис ε_i, $1 \le i \le M$, A_I имеет базис ε_j, $M_I + I \le j \le M_I + M_2$, где $M_I + M_2 = N = \dim A$. Пусть $\mathbb{Z}_2$-грандуированная алгебра Ли G разлагается в прямую сумму: $G = H + V$. Мы введем аналогично определению II.I новое понятие

<u>Определение II.2</u>. Разложение $\mathbb{Z}_2$- грандуированной алгебры Ли $G = H + V$ (и следовательно $G^* = H^* + V^*$) называется разложением общего положения I-го типа, если на подпространстве H^* существует регулярная точка пространства G^*, т.е. $R_G(H^*) \ne \emptyset$

В третьей главе мы докажем, что если множество $R_G(H^*)$ непусто, то оно открыто и всюду плотно на H^*.

Аналогично теореме II.I предположим, что на дуальном пространстве G^* к G существует полный набор полиномиальных инвариантов $P_I, \dots, P_r$ такой, что для некоторого ковектора $f \in V^*$ функции типа $P_{k,s} = C_s(f) P_k$, $s = 0, 1, \dots$, $1 \le k \le r$, (т.е. $P_k(x + \lambda f) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{k,s} \lambda^s$) образуют полный инволютивный набор на G^*. Кроме того, пусть ограничения $\overline{P}_{k,s} = P_{k,s}|_{H^*}$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$ также образуют на пространстве H^* полный инволютивный набор функций. Далее, существует точка $x_0 \in R_G(H^*)$ такая, что среди функций $P_{k,s}$ (функций $\overline{P}_{k,s}$) можно выбрать $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$ (соответственно $\frac{1}{2}(\dim H + \operatorname{ind} H)$) функций, независимых в точке x_0 на G^* (на H^*).

Согласно теореме 9.2 расширенные относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ функции $P_k^{\varepsilon_\alpha}$, $1 \le k \le r$, $1 \le \alpha \le N$, образуют на пространстве $G^* \otimes A$ полный набор полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления, а функции $P_{k,s}^{\varepsilon_\alpha} = C_s(f \otimes \Omega 1) P_k^{\varepsilon_\alpha}$ (т.е. $P_k^{\varepsilon_\alpha}(X + f \otimes \Omega 1) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{k,s}^{\varepsilon_\alpha} \lambda^s$), $1 \le k \le r$, $1 \le \alpha \le N$, $s = 0, 1, \ldots$ – полный инволютивный набор. По определению мы получаем разложения :

$$G \otimes A = (G \otimes A)_0 + (G \otimes A)_1, \quad (G \otimes A)_0 \cong G \wedge A$$

$$G^* \otimes A \cong (G^* \otimes A)_0 + (G^* \otimes A)_1$$

Заметим, что в данном случае ковектор $f \otimes \Omega 1 \in (G^* \otimes A)_1$ и точка $X_0 = x_0 \otimes \Omega 1 \in (G^* \otimes A)_0 \cong (G \wedge A)^*$

В силу следствия 10.4 функции типа $\overline{P_k^{\varepsilon_\alpha}} = P_k^{\varepsilon_\alpha}\big|_{(G \wedge A)^*}$ образуют полный набор инвариантных функций коприсоединенного представления на пространстве $(G \wedge A)^*$.

Аналогично теореме 11.1 мы получаем.

<u>Теорема 11.2</u>. Пусть $\mathbb{Z}_2$ – грандуированная алгебра Ли $G = H + V$ и $\mathbb{Z}_2$ – грандуированная алгебра Фробениуса A удовлетворяют всем написанным выше условиям, в частности, разложение $G = H + V$ является разложением общего положения I-го типа. Тогда функции типа $\overline{P_{ks}^{\varepsilon_\alpha}} = P_{k,s}^{\varepsilon_\alpha}\big|_{(G \wedge A)^*}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \ldots$ образуют полный инволютивный набор на пространстве $(G \wedge A)^*$, где $P_{k,s}^{\varepsilon_\alpha}$ – определенные выше расширенные функции на $G^* \otimes A$. Кроме того:

$$\operatorname{ind}(G \wedge A) = \dim A_1 \operatorname{ind} G + (\dim A_0 - \dim A_1) \operatorname{ind} H =$$
$$= M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$$

Для доказательства нам требуются следующие леммы:

Лемма II.4. Пусть все условия теоремы II.2 выполняются. Тогда функции $P^{\overline{\varepsilon_\alpha}}_{k,s}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$, попарно находятся в инволюции на пространстве $(G \wedge A)^*$.

Доказательство: По определению мы имеем:

$$(G\wedge A)^* \cong (G \otimes A)^*_0 \cong (G^* \otimes A)_0 = H^* \otimes A_0 + V^* \otimes A_\perp$$

$$(G \otimes A)^*_1 \cong (G^* \otimes A)_1 = H^* \otimes A_1 + V^* \otimes A_0$$

и $\quad (G^* \otimes A) = (G \wedge A)^* + (G \otimes A)^*_1$

Заметим, что в данном случае вектор $\xi \otimes \Omega 1 \in (G^* \otimes A)_1$ и точка $x_0 \otimes \Omega 1 \in (G \wedge A)^* \cong (G \otimes A)^*_0$. Наше утверждение является частным случаем следствия I0.4.

Лемма доказана.

Лемма II.5. Пусть все условия теоремы II.2 выполняются. Тогда

$$\operatorname{ind} G \wedge A \geqslant M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$$

Доказательство: Рассуждая аналогично доказательству леммы II.I и сохраняя все обозначения, в данном случае мы получаем:

$$\mathcal{U} = \left\| \frac{\partial P^{\overline{\varepsilon_\alpha}}_{k,s}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}} (x_0 \otimes \Omega 1) \right\| = \left\| \begin{matrix} \begin{pmatrix} U & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} W & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W \end{pmatrix} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \}\, M_1 \\ \\ \}\, M_2 \end{matrix}$$

где $\quad U = \left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_{i_1}} (x_0) \right\|, \; 1 \le i_1 \le m, \quad W = \left\| \frac{\partial P_k}{\partial x_{i_2}} (x_0) \right\|, \; m+1 \le i_2 \le n, \; 1 \le k \le r.$

Следовательно

$$\operatorname{rk} \left\| \frac{\partial P^{\overline{\varepsilon_\alpha}}_{k,s}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}} (x_0 \otimes \Omega 1) \right\| = M_2 \operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & W \end{matrix} \right\| + (M_1 - M_2) \operatorname{rk} U.$$

Так как

$$\operatorname{rk} U = \operatorname{ind} H, \quad \operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & W \end{matrix} \right\| \geqslant \operatorname{rk} \| U, W \| = \operatorname{ind} G,$$

то $\quad \operatorname{rk} \mathcal{U} \geqslant M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H.$

т.е. $\operatorname{ind} G \wedge A \geq M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$.

Лемма доказана.

Лемма II.6. Пусть все условия теоремы II.2 выполняются. Тогда $\operatorname{ind} G \wedge A \leq M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$.

Доказательство: Рассуждая аналогично доказательству леммы II.2 и сохраняя все обозначения, в данном случае мы получаем:

$$\Gamma = (\Gamma_{ij}) = \left\| \begin{matrix} \{x_{k_1}, x_{k_1'}\}(x_0) & 0 \\ 0 & \{x_{k_2}, x_{k_2'}\}(x_0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Gamma_1' & 0 \\ 0 & \Gamma_2' \end{matrix} \right\|$$

и $\operatorname{rk} \Gamma = (\dim G - \operatorname{ind} G)$, $\operatorname{rk} \Gamma_1' = (\dim H - \operatorname{ind} H)$.

Следовательно $\dim \mathcal{O}_{G\wedge A}(x_0 \otimes \Omega 1) = \operatorname{rk} \left\| \{x_i^{\alpha}, x_j^{\omega\beta}\}(x_0 \otimes \Omega 1) \right\| =$

$$= \operatorname{rk} \left\| \delta_{\alpha\beta} \Gamma_{ij} \right\| = \operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} \left.\begin{pmatrix} \Gamma_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_1' \end{pmatrix} \quad 0 \quad \right\} M_1 \\ \left. 0 \quad \begin{pmatrix} \Gamma_2' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_2' \end{pmatrix} \right\} M_2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= M_2 \operatorname{rk} \Gamma + (M_1 - M_2) \operatorname{rk} \Gamma_1' = M_2(\dim G - \operatorname{ind} G) + (M_1 - M_2)(\dim H - \operatorname{ind} H).$$

Отсюда выполняется неравенство

$$\operatorname{ind} G \wedge A \leq M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$$

Лемма доказана.

Из лемм II.5-II.6 мы получаем:

Следствие II.2. Пусть все условия теоремы II.2 выполняются. Тогда $\operatorname{ind} G \wedge A = M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} H$

Лемма II.7. Пусть $P_{k,s}^{\overline{\varepsilon_\alpha}}$, $1 \leq \alpha \leq N$, $1 \leq k \leq r$, $s = 0, 1, \ldots$ - определенные в теореме II.2 функции. Тогда

$$\operatorname{rk}\left\| \frac{\partial \overline{p^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}}{\partial x^{\alpha'}_{i'}}(X_0) \right\| = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ind} G\wedge A + \dim G\wedge A \right) =$$

$$= \frac{1}{2} M_2 \left(\operatorname{ind} G + \dim G \right) + \frac{1}{2}(M_1 - M_2)(\operatorname{ind} H + \dim H)$$

где $x^{\alpha'}_{i'}$ - система координат пространства $(G\wedge A)^*$, $X_0 = x_0 \otimes \Omega 1$ $x_0 \in R_G(H^*)$ - определенная в теореме II.2 точка.

<u>Доказательство</u>. Лемма доказывается аналогично лемме II.3.

Доказательство теоремы II.2 следует из лемм II.4-II.7.

Перейдем к случаю $\mathbb{Z}_p$ - грандуированных алгебр Ли G и самосопряженных алгебр А при $p>2$. В этом случае основное поле $k=\mathbb{C}$.

Итак, рассмотрим алгебру Ли $G = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G_\sigma$ и алгебру $A = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} A_\sigma$ с фиксированной тройкой $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$, относительно которой алгебра А самосопряжена. Пусть подпространство A_σ, $\sigma\in\mathbb{Z}_p$ обладает базисом ε_{i_σ}, $\widetilde{M}_\sigma + 1 \le i_\sigma \le \widetilde{M}_\sigma + M_{\sigma+1}$, где $\widetilde{M}_0 = 0$, $\widetilde{M}_p = N$ и $\widetilde{M}_\sigma = M_0 + M_1, \dots, M_\sigma$, $\dim A_\sigma = M_{\sigma+1}$. При этом расширенная алгебра Ли $G\otimes A$ имеет разложение $G\otimes A = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p}(G\otimes A)_\sigma$ где $(G\otimes A)_\sigma = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G_{\sigma'} \otimes A_{\sigma+\sigma'}$, $\sigma\in\mathbb{Z}_p$ и подпространство $(G\wedge A) \equiv (G\otimes A)_0 = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G_\sigma \otimes A_\sigma$ является подалгеброй Ли.

Предположим, что основное подпространство $G^*\otimes\Omega 1$ имеет ненулевое сечение с пространством $(G\wedge A)^*$, тогда согласно предложению IO.I элемент $\Omega 1 \in A_{\sigma_0}$ для некоторого элемента $\sigma_0\in\mathbb{Z}_p$ и Ω взаимно однозначно отображает подпространство A_σ в подпространство $A_{\bar\sigma}$ для любого $\sigma\in\mathbb{Z}_p$: $\sigma+\bar\sigma = \sigma_0$, $\bar\sigma\in\mathbb{Z}_p$. Аналогично случаю $\mathbb{Z}_2$ - грандуированных алгебр введем понятие разложения общего положения.

<u>Определение II.3</u>. Разложение $\mathbb{Z}_p$ -грандуированной алгебры Ли $G = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G_\sigma$, $p>2$ (и следовательно $G^* = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} G^*_\sigma$) назы-

вается разложением общего положения σ_0 -типа ($\sigma_0 \in \mathbb{Z}_p$) если на пространстве $G^*_{\sigma_0}$ существует регулярная точка пространства G^* (относительно коприсоединенного представления), т.е.

$$R_G\,(G^*_{\sigma_0}) = R(G^*) \cap G^*_{\sigma_0} \neq \emptyset$$

Рассмотрим первый случай, когда элемент $\sigma_0 \neq 0$. Аналогично теореме II.I для случая $\mathbb{Z}_2$ -грандуированных алгебр предположим, что на дуальном пространстве G^* к G существует полный набор полиномиальных инвариантов $P_I, \dots, P_r$ такой, что для некоторого ковектора $f \in G^*_{\sigma_1}$ $(\sigma_1 \in \mathbb{Z}_p)$ функции типа $P_{k,s} = C_s(f)\,P_k$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$ образуют полный инволютивный набор. Кроме того, существует точка $x_0 \in R_G(G^*_{\sigma_0})$,такая, что среди функций $P_{k,s}$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$ можно выбрать m $(m = \frac{1}{2}\,(\dim G + \operatorname{ind} G))$ функций, независимых в точке x_0 Мы получаем

<u>Теорема II.3</u>. Пусть $\mathbb{Z}_p$ - грандуированная алгебра Ли G и $\mathbb{Z}_p$ - грандуированная самосопряженная относительно тройки (А, Ω , $\{\varepsilon_i\}$) алгебра А ($p > 2$) удовлетворяют всем написанным выше условиям, в частности, разложение $G = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma$ является разложением общего положения σ_0 -типа ($\sigma_0 \neq 0$, $\sigma_0 \in \mathbb{Z}_p$ и точка $x_0 \in G^*_{\sigma_0}$) и элемент $\Omega 1 \in A_{\sigma_0}$. Пусть подпространства A_σ , $\sigma \in \mathbb{Z}_p$, алгебры $A = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} A_\sigma$ удовлетворяют условию $\dim A_\sigma = M = N/p$. Тогда функции типа $\overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}} = P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}\Big|_{(G \wedge A)^*}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \dots$ образуют полный инволютивный набор на пространстве $(G \wedge A)^*$,где $P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}$ - расширенные относительно тройки (А, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) функции на $G^* \otimes A$. Кроме того:

$$\operatorname{ind}(G \wedge A) = \frac{\operatorname{ind} G \otimes A}{p} = M \operatorname{ind} G$$

<u>Доказательство</u>. То, что функции $\overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}$ попарно находятся в инволюции на пространстве $(G \wedge A)^*$ следует из теоремы I0.2.

Остальная часть теоремы доказывается аналогично теореме II.I.

Перейдем к случаю, когда элемент $\sigma_0 = 0$. Аналогично теореме II.2 формулируем все условия для алгебры Ли $G = \sum_{\sigma\in \mathbb{Z}_p} G_\sigma$ и самосопряженной относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебры A. Итак, пусть на G^* существует полный набор полиномиальных инвариантов $P_1, P_2, \ldots, P_r$ такой, что для некоторого ковектора $f \in G^*_{\sigma_1}$ $(\sigma_1 \in \mathbb{Z}_p)$ функции типа $P_{k,s} = C_s(f) P_k$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \ldots$ где $C_s(f)$ - оператор сдвига, образуют полный инволютивный набор на G^*. Кроме того, пусть ограничения $\overline{P}_{k,s} = P_{k,s}\big|_{G_0^*}$, $1 \le k \le r$, $s = 0, 1, \ldots$ также образуют на пространстве G_0^* полный инволютивный набор функций. Далее, существует точка $x_0 \in R_G(G_0^*)$ такая, что среди функций $P_{k,s}$ (функций $\overline{P}_{k,s}$) можно выбрать $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$ (соответственно $\frac{1}{2}(\dim G_0 + \operatorname{ind} G_0)$) функций, независимых в точке x_0 на G^* (на G_0^*).

Аналогично теореме II.2 мы получаем.

<u>Теорема II.4</u>. Пусть $\mathbb{Z}_p$ -грандуированная алгебра Ли G и $\mathbb{Z}_p$ -грандуированная самосопряженная относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ алгебра A $(p > 2)$ удовлетворяют всем написанным выше условиям, в частности, разложение $G = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma$ является разложением общего положения o-типа (точка $x_0 \in G_0^*$) и элемент $\Omega 1 \in A_0$. Пусть подпространства A_σ, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$, алгебры $A = \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_p} A_\sigma$ удовлетворяют условию: $\dim A_0 = M_1$, $\dim A_\sigma = M_2$ для всех $\sigma \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$, где $M_1 + (p-1) M_2 = N = \dim A$. Тогда функции типа $P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s} = P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}\big|_{(G\wedge A)^*}$, $1 \le \alpha \le N$, $1 \le k \le s$, $s = 0, 1, \ldots$ образуют полный инволютивный набор функций на $(G \wedge A)^*$, где $P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}$ - расширенные относительно тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$ функции на $G^* \otimes A$. Кроме того

$$\operatorname{ind}(G\wedge A) = M_2 \operatorname{ind} G + (M_1 - M_2) \operatorname{ind} G_0$$

В качестве следствия теоремы II.3 мы рассмотрим алгебру $A = \sum_{i=0}^{p-1} A_i$, где $A_i = \mathbb{C}\varepsilon_i$ - одномерные пространства и

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{i+j}, & i+j<p \\ 0, & i+j \geq p \end{cases}, \quad 0 \leq i,j \leq p-1$$

Пусть алгебра Ли $G = \sum_{6 \in \mathbb{Z}_p} G_6$ тогда подалгебра Ли $(G \otimes A)_0 = G \wedge A$ в расширенной алгебре Ли $G \otimes A$ имеет вид:

$G \wedge A = G_0 \dotplus G_1 \dotplus \dots \dotplus G_{p-1}$, т.е. $[G_i, G_j]_0 \equiv 0$ если $i+j \geq p$, $0 \leq i,j \leq p-1$, где $[\,,\,]_0$ – коммутатор алгебры $G \wedge A$. Из теоремы II.3 мы получаем:

<u>Теорема II.5.</u> Пусть $\mathbb{Z}_p$-грандуированная алгебра Ли G удовлетворяет всем написанным в теореме II.3 условиям и разложение $G = \sum_{6 \in \mathbb{Z}_p} G_6$ является разложением общего положения ($p-1$)-типа ($6_0 = p-1$). Тогда функции типа $\overline{P^{\varepsilon_\alpha}_{k,s}}$, $1 \leq \alpha \leq N$, $1 \leq k \leq r$, $s = 0, 1, \dots$ образуют полный инволютивный набор функций на дуальном пространстве $(G \wedge A)^*$ к $(G \wedge A)^*$, где $(G \wedge A) = G_0 \dotplus G_1 \dotplus \dots \dotplus G_{p-1}$ Кроме того $\mathrm{ind}\,(G \wedge A) = \mathrm{ind}\, G$

<u>Доказательство</u>. Алгебра A является самосопряженной относительно тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) алгеброй, где отображение: $\Omega: A \to A$, $\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_{p-1-i}$, $0 \leq i \leq p-1$. В частности $\Omega \varepsilon_0 = \Omega 1 = \varepsilon_{p-1}$ Таким образом теорема II.5 является частным случаем теоремы II.3.

Теорема доказана.

§12. Примеры.

В этом параграфе мы рассматриваем модельные примеры полупростых алгебр Ли. Пусть G – полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Тогда согласно результатам в работах А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко (см. [22]) компактная вещественная форма G_u алгебры G является $\mathbb{Z}_2$ - грандуированной алгеброй Ли и разложение Картана: $G_u = G_n + V = H + V$ ($H = G_n$ - нормальная вещественная форма) является разложением общего положения I-го и 2-го типа. Более того, все условия для алгебры G_u в теоремах II.I и II.2 выполняются. Следовательно теоремы II.I и II.2 дают нам новые примеры алгебр Ли (вообще разрешимых), на которых построятся полные инволютивные наборы полиномиальных функций.

I. Как в теореме II.5 рассмотрим самосопряженную алгебру A с базисом ε_i, $0 \le i \le d$, и умножением

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{i+j}, & 0 \le i+j \le d \\ 0 & i+j > d \end{cases}$$

Инволютивное отображение $\Omega: A \to A$, $\Omega \varepsilon_i = \varepsilon_{d-i}$, $0 \le i \le d$. Единичный элемент $\varepsilon_0 = 1$ и $\Omega 1 = \varepsilon_d$. Таким образом алгебра A самосопряжена относительно данной тройки $(A, \Omega, \{\varepsilon_i\})$. Пусть

$A = A_{чет}$ – подалгебра с базисом $\{\varepsilon_{2k}\}$, $0 \le k \le [\frac{d}{2}]$

$A_I = A_{неч}$ – подпространство с базисом $\{\varepsilon_{2l+1}\}$, $0 \le l \le [\frac{d-1}{2}]$,

тогда алгебра A имеет $\mathbb{Z}_2$-грандуированное разложение: $A = A_0 + A_I$. По определению $G_u \wedge A = H \otimes A_0 + V \otimes A_1 = (G_u \wedge A)_d$ имеет вид

$$(G_u \wedge A)_d = \begin{cases} \underbrace{H \dotplus V \dotplus \dots \dotplus H}_{2s+1} & \text{если } d = 2s \\ \underbrace{H \dotplus V \dotplus \dots \dotplus V}_{2s} & \text{если } d = 2s-1 \end{cases}$$

Следующая теорема является следствием теорем II.I и II.2.

<u>Теорема I2.I.</u> Пусть G – полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$: G_u – компактная вещественная форма алгебры Ли G, $G_u = H + V (H = G_n)$ – разложение Картана. Пусть алгебра Ли

$$(G_u \wedge A)_d = \begin{cases} \underbrace{H \dotplus V \dotplus \dots \dotplus H}_{2s+1} & \text{если } d = 2s \\ \underbrace{H \dotplus V \dotplus \dots \dotplus V}_{2s} & \text{если } d = 2s-1 \end{cases}$$

Тогда на дуальном пространстве $(G_u \wedge A)^*_d$ к $(G_u \wedge A)_d$ существует полный инволютивный набор полиномиальных функций. Кроме того

$$\operatorname{ind}(G_u \wedge A)_d = \begin{cases} s \operatorname{ind} G & \text{если } d = 2s-1 \\ s \operatorname{ind} G + \operatorname{ind} H & \text{если } d = 2s \end{cases}$$

Замечание: Индекс алгебры Ли $(G_u \wedge A)_d$ был найден также в работе Реимана А.Г. (см.[27]).

В случае $d=1$ $(G_u \wedge A)_1 = H \dot{+} V$, т.е. $[V,V]_1 \equiv 0$ Легко видеть, что разложение $(G_u \wedge A)_1 = H \dot{+} V$ является разложением общего положения 2-го типа. Пусть $\{x_\alpha, y_\beta\}$ – система координат на $G_u^* = H^* + V^*$, $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha\}$ – система координат на $(G_u \wedge A)_1^* = H^* + V^*$. Тогда, по определению,

$$Q(\tilde{X}, \tilde{Y}) \equiv \overline{P^{\varepsilon_\alpha}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = P^{\varepsilon_\alpha}\Big|_{(G_u \wedge A)_1^*}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = P(0, \tilde{Y})$$

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y}) \equiv \overline{P^{\varepsilon_\alpha}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = P^{\varepsilon_1}\Big|_{(G_u \wedge A)_1^*}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{\partial P(0, \tilde{Y})}{\partial x_\alpha} \tilde{x}_\alpha,$$

где $\tilde{X} = (\tilde{x}_\alpha)$, $\tilde{Y} = (\tilde{y}_\beta)$, P – произвольная полиномиальная функция на G_u^* и P^{ε_α}, P^{ε_1} – расширенные функции на $(G_u^* \otimes A)$.

Из теоремы I2.I мы имеем

Следствие I2.I. Пусть $G_u = G_n + V$ – разложение Картана компактной вещественной формы G_u полупростой алгебры Ли G. Пусть $P_{k,s}(X, Y)$, $1 \le i \le r = \operatorname{ind} G_u$, $s = 0, 1, \ldots$ – полный инволютивный набор полиномиальных функций на G_u^* определенных в работе [22]($X = (x_\alpha)$, $Y = (y_\beta)$). Тогда полиномиальные функции $Q_{k,s}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ и $R_{k,s}(\tilde{X}, \tilde{Y})$, где $Q_{k,s}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = P_{k,s}(0, \tilde{Y})$, $R_{k,s}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{\partial P_{k,s}(0, \tilde{Y})}{\partial x_\alpha} \tilde{x}_\alpha$ образуют на $(G_u \wedge A)_1^* = G_n^* \dot{+} V^*$ полный инволютивный набор. Кроме того, $\operatorname{ind}_{\mathbb{R}}(G_u \wedge A)_1 = \operatorname{ind}_{\mathbb{C}} G = \operatorname{ind}_{\mathbb{R}} G_u = r$.

2. Рассмотрим алгебру А с базисом ε_i, $0 \le i \le 2p-1$, где $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}_{2p}$. Тогда алгебра А имеет разложение $A = A_0 + A_I$, где $A_0 = A_{\text{чет}}$ – пространство с базисом ε_{2k}, $0 \le k \le p-1$, $A = A_{\text{нечет}}$ – пространство с базисом ε_{2l+1}, $0 \le l \le p-1$. Пусть $G_u = G_n + V$ – разложение Картана компактной вещественной формы G_u полупростой алгебры Ли G. Тогда алгебра Ли $(G_u \wedge A)$

имеет вид

$$(G_u \wedge A) = \underbrace{H + V + \dots + H + V}_{2p} \qquad (H \equiv G_n)$$

<u>Теорема I2.2</u>. На дуальном пространстве $(G_u \wedge A)^*$, где $A = \mathbb{R}\,\mathbb{Z}_{2p}$ к алгебре Ли $G_u \wedge A = \underbrace{H + V + \dots + H + V}_{2p}$ существует полный инволютивный набор полиномиальных функций. Кроме того: $\operatorname{ind}_{\mathbb{R}} G_u \wedge A = p \operatorname{ind}_{\mathbb{R}} G_u = p \operatorname{ind}_{\mathbb{C}} G$.

Глава III

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРБИТ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

В этой главе мы докажем некоторые дополнительные результаты, связанные с изученными в первой и второй главах преблемами. Доказываются сначала некоторые свойства разложений общего положения $\mathbb{Z}_2$- грандуированных алгебр Ли. Найдем инварианты коприсоединенного представления некоторых алгебр Ли. Далее, рассмотрим поляризации, удовлетворяющие условию Пуканского для расширенных алгебр Ли типа $G \oplus A$. И наконец мы докажем существование полных инволютивных наборов полиномиальных функций для серии разрешимых алгебр Ли (алгебр треугольных матриц).

§13. Регулярные точки на $\mathbb{Z}_2$- грандуированных алгебрах Ли

В этом параграфе мы рассмотрим $\mathbb{Z}_2$ - грандуированную алгебру Ли G с разложением $G = H+V$, $[H,H] \subset H$, $[V,H] \subset V$, $[V,V] \subset H$. Обозначаем через G_0 алгебру Ли $H \dotplus V$, т.е. G_0 является "сужением" алгебры Ли G : $[V,V]_0 \equiv 0$, где $[\ ,\ ]_0$- скобка Ли алгебры Ли G_0 . Мы имеем соответственные разложения дуальных пространств $G^* = H^* + V^*$ и $G_0^* = H^* \dotplus V^*$.

Пусть:

$R(G^*)$ - множество регулярных точек пространства G^* (относительно коприсоединенного преставления)

$R(H^*)$ - множество регулярных точек пространств H^*

$R_G(H^*) = R(G^*) \cap H^*$, $R_G(V^*) = R(G^*) \cap V^*$

$R_H(V^*)$- множество регулярных точек действия ρ на V^*, где ρ - ограничение коприсоединенного представления ad^* подалгебры Ли H на V^* и пусть мы имеем аналогичные обозначения для G_0.

Согласно определению II.2 (определению II.I) разложение $G = H + V$ является разложением общего положения I-го типа (2-го типа) если $R_G(H^*) \neq \phi$ $(R_G(V^*) \neq \phi)$

<u>Теорема I3.I</u>. Пусть алгебра Ли G имеет $\mathbb{Z}_2$ - грандуированное разложение: $G = H+V$. Тогда

I. Если множество $R_G(H^*) \neq \phi$ (т.е. разложение $G = H+V$ является разложением общего положения I-го типа), то $R_G(H^*)$ всюду плотно и открыто на H^*.

2. Если множество $R_G(V^*) \neq \phi$ (т.е. разложение $G = H+V$ является разложением общего положения 2-го типа), то $R_G(V^*)$ всюду плотно и открыто на V^*, $R_G(V^*) \equiv R_H(V^*)$

3. $R_G(H^*) \subset R(H^*)$

<u>Доказательство</u>. Пусть x_i, $1 \leq i \leq n_0 = \dim H$ - система координат на H^*, y_α, $1 \leq \alpha \leq n_1 = \dim V$, - система координат на V^*, $\{C_{ij}^k, C_{i\beta}^\alpha, C_{\alpha\beta}^k\}$, $1 \leq i,j,k \leq n_0$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n_1$ - - структурные константы алгебры $G = H+V$. Если точка $x \in H^* + V^*$ имеет координаты (x_i, y_α), тогда

$$\dim \mathcal{O}_G(x) = rk \begin{Vmatrix} x_k C_{ij}^k & y_\alpha C_{i\beta}^\alpha \\ y_\alpha C_{\beta j}^\alpha & x_k C_{\alpha\beta}^k \end{Vmatrix} = rk \begin{Vmatrix} A(x) & B(y) \\ C(y) & D(x) \end{Vmatrix}$$

где $\mathcal{O}_G(x)$ - орбита коприсоединенного представления на G^*, проходящей через точку x.

I. Пусть $R_G(H^*) \neq \phi$, т.е. найдется регулярная точка $x_0 = (x_i^0, 0) \in R_G(H^*)$ такая, что

$$\dim \mathcal{O}_G(x_0) = \max_{x \in G^*} \dim \mathcal{O}_G(x) = rk\ G$$

Это означает, что

$$\mathrm{rk}\begin{Vmatrix} x_k^0 C_{ij}^k & 0 \\ 0 & x_k^0 C_{\alpha\beta}^k \end{Vmatrix} = \mathrm{rk}\begin{Vmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & D^0 \end{Vmatrix} = \mathrm{rk}\, G$$

где $A^0 = A(x^0)$, $D^0 = D(x^0)$.

В частности $\mathrm{rk}\begin{Vmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & D^0 \end{Vmatrix} = \max\limits_{x \in H^*} \mathrm{rk}\begin{Vmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{Vmatrix}$

Так как элементы матрицы $\begin{Vmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{Vmatrix}$ являются линейными функциями от переменных x_i, $1 \le i \le n_0$, то равенство $\mathrm{rk}\begin{Vmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{Vmatrix} = \mathrm{rk}\begin{Vmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & D^0 \end{Vmatrix}$ выполняется для всюду плотного и открытого множества $x \in H^*$, т.е. для множества $R_G(H^*)$. Таким образом множество $R_G(H^*)$ – всюду плотно и открыто на H^*. Первое утверждение доказано.

2. Аналогично первому утверждению множество $R_G(V^*)$ либо пусто, либо всюду плотно, открыто на V^* и $R_G(V^*) = R_H(V^*)$

3. Если $R_G(H^*) = \emptyset$ тогда, очевидно, $R_G(H^*) \subset R(H^*)$, поэтому предположим, что $R_G(H^*) \neq \emptyset$, следовательно, в силу первого утверждения $R_G(H^*)$ всюду плотно и открыто на H^*. Заметим, что множества

$$R(H^*) = \{ x \in H^* \mid \mathrm{rk}\, A(x) = \max_{x' \in H^*} \mathrm{rk}\, A(x') \}$$ и

$$W^* = \{ x \in H^* \mid \mathrm{rk}\, D(x) = \max_{x' \in H^*} \mathrm{rk}\, D(x') \}$$ всюду

плотны и открыты на H^*. Следовательно :

$R_G(H^*) = R(H^*) \cap W^*$, в частности $R_G(H^*) \subset R(H^*)$

Теорема доказана.

<u>Теорема I3.2</u>. Пусть алгебра Ли $G_0 = H \dotplus V$ является полупрямым произведением подалгебры Ли H с пространством V. Множество $R_{G_0}(V^*)$ непусто, тогда и только тогда, когда для всех элементов $f \in R_H(V^*)$ подалгебра Ли H^f коммутативна, где

$H^f = \{\xi \in H \mid ad^*_\xi f = 0\}$

Доказательство. По теореме Раиса (см. [42, 43])

$\operatorname{ind} G_0 = \operatorname{ind} \rho + \operatorname{ind} H^f$, где $f \in R_H(V^*)$,

где $\operatorname{ind} \rho = \dim V - (\dim H - \dim H^f)$. Следовательно:

$rk\, G_0 = \dim G_0 - \operatorname{ind} G_0 = 2\dim H - \dim H^f - \operatorname{ind} H^f$, $f \in R_H(V^*)$

Так как $f \in V^*$, то $\langle f, [H,H] \rangle = \langle f, [V,V] \rangle \equiv 0$, отсюда $\dim H - \dim H^f = \dim V - \dim V^f$, где $V^f = \{\eta \in V \mid ad^*_\eta f = 0\}$. Пусть $\mathcal{O}_{G_0}(f)$ – орбита коприсоединенного представления на G_0^*. В силу $G^f = H^f + V^f$,

$\dim G^f = \dim H^f + \dim V^f$, где $G^f = \{\xi \in G \mid ad^*_\xi f = 0\}$

$\dim \mathcal{O}_{G_0}(f) = \dim G - \dim G^f = 2(\dim H - \dim H^f)$.

Итак, мы получаем эквивалентные условия:

$$f \in R_{G_0}(V^*) \Leftrightarrow \dim \mathcal{O}_{G_0}(f) = rk\, G_0 = \dim G_0 - \operatorname{ind} G_0$$

$$\Leftrightarrow 2(\dim H - \dim H^f) = 2\dim H - \dim H^f - \operatorname{ind} H^f$$

$$\Leftrightarrow \dim H^f = \operatorname{ind} H^f$$

$\Leftrightarrow$ H^f – коммутативная подалгебра Ли.

Кроме того в силу второго утверждения теоремы 13.1, если $R_{G_0}(V^*)$ не пусто, то $R_G(V^*) \equiv R_H(V^*)$. Отсюда $R_G(V^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $[H^f, H^f] \equiv 0$ для всех элементов $f \in R_H(V^*)$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{E}(n)$ группы движений евклидова пространства, т.е. $\mathcal{E}(n) = so(n) \dotplus \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}^*(n) = so(n)^* \dotplus (\mathbb{R}^n)^*$.

Так как $(so(n))^f \cong so(n-1)$, $f \in R_{so(n)}((\mathbb{R}^n)^*)$, то $so(n)^f$ коммутативна тогда и только тогда, когда $n = 3$. Отсюда следует, что $R_{\mathcal{E}(n)}((\mathbb{R}^n)^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow n = 3$

Следствие 13.1. Пусть H – алгебра Ли, тогда $\operatorname{ind} G = 2 \operatorname{ind} H$ где алгебра Ли $G = H \dotplus H$

Доказательство: Пусть алгебра Ли $G = H \dot{+} H = H_1 \dot{+} H_2$, где $H_1 \equiv H_2 \equiv H$. Тогда $G^* = H_1^* \dot{+} H_2^*$ и $R_{H_1}(H_2^*) \equiv$ $\equiv R(H_2^*)$ $(\equiv R(H^*))$ Следовательно, если $f \in R_{H_1}(H_2^*)$, тогда подалгебра Ли $H_1^f (\equiv H^f)$ коммутативна (см. [9]), отсюда в силу теоремы 13.2 $f \in R_G(H_2^*)$, т.е. $\dim O_G(f) = \dim G - \operatorname{ind} G$. Заметим, что $G = H \otimes A$ где $A = \{1, \varepsilon\}$ - самосопряженная алгебра ($\varepsilon^2 = 0$). Поэтому в силу теоремы 5.1.

$$\dim O_G(f) = 2 \dim O_H(f) = 2(\dim H - \operatorname{ind} H)$$

следовательно $\operatorname{ind} G = 2 \operatorname{ind} H$. Утверждение доказано.

Замечание. В первой главе было доказано, что

$\operatorname{ind} H \otimes A = \dim A \operatorname{ind} H$. для произвольной самосопряженной алгебры A (алгебры Фробениуса) с единицей, если на пространстве H^* существует полный набор полиномиальных инвариантов относительно коприсоединенного представления.

Гипотеза. Для любой алгебры Ли H и произвольной самосопряженной алгебры A с единицей:

$$\operatorname{ind} H \otimes A = \dim A \operatorname{ind} H .$$

§14. Инвариантные функции на сжатых алгебрах Ли

Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$- грандуированную алгебру Ли $G = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma =$ $= G_0 + G_1 + \cdots + G_{p-2} + G_{p-1}$. Пусть $\tilde{G} = G_0 \dot{+} G_1 \dot{+} \cdots \dot{+} G_{p-1}$ является сжатой алгеброй Ли алгебры G, т.е. $[G_i, G_j]_0 \equiv 0$ если $i+j \geq p$, $1 \leq i, j \leq p-1$, где $[\ ,\ ]_0$ - коммутатор алгебры Ли $\tilde{G}$. Дуальные пространства G^* и $\tilde{G}^*$ имеют соответственные разложения: $G^* = G_0^* + G_1^* + \cdots + G_{p-1}^*$ и $\tilde{G}^* = G_0^* \dot{+} G_1^* \dot{+} \cdots \dot{+} G_{p-1}^*$. Оказывается, что из полиномиального инварианта P относительно коприсоединенного представления на G^* можно построить инварианты на пространстве $\tilde{G}^*$ следующим образом. Пусть x_{k_σ}, $\bar{K}_\sigma + 1 \leq k_\sigma \leq$

$\leq \overline{K}_\sigma + K_{\sigma+1}$, – система координат на подпространстве $G_\sigma^*, \sigma \in \mathbb{Z}_p$,
где $K_0 = 0$, $\overline{K}_p = n = \dim G$, $\overline{K}_\sigma = K_0 + K_1 + \dots + K_\sigma$
$\dim G_\sigma^* = K_{\sigma+1}$ и $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{-1}, \dots, \mathcal{X}_{p-1})$,
$\mathcal{X}_\sigma = (x_{\overline{K}_\sigma+1}, \dots, x_{\overline{K}_\sigma + K_{\sigma+1}}), \sigma \in \mathbb{Z}_p$. Тогда место имеет следующая

Теорема 14.1. Пусть $G = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_p} G_\sigma = G_0 + G_1 + \dots + G_{p-1}$ – $\mathbb{Z}_p$ – грандуированная алгебра Ли, $\widetilde{G} = G_0 \dot{+} G_1 \dot{+} \dots \dot{+} G_{p-1}$ – ее сжатая алгебра Ли. Пусть $P = P(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{-1}, \dots, \mathcal{X}_{p-1})$ – полиномиальный инвариант на пространстве G^* и функция $P(\mu^{p-1}\mathcal{X}_0, \mu^{p-2}\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{p-1})$ имеет разложение (относительно переменного μ):

$$P(\mu^{p-1}\mathcal{X}_0, \mu^{p-2}\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{p-1}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} P^\alpha \mu^\alpha$$

Тогда для каждого элемента $\sigma \in \mathbb{Z}_p$ функция типа P^{r_σ} является инвариантной функцией (относительно коприсоединенного представления) на $\widetilde{G}^*$, где число $r_\sigma = \sigma + s_\sigma \cdot p$ такое, что $P^{\sigma + jp} \equiv 0$, $0 \leq j \leq s_\sigma - 1$ и $P^{\sigma + s_\sigma \cdot p} \equiv P^{r_\sigma} \not\equiv 0$, $s_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Обозначаем через $C^{k_{\sigma+\sigma'}}_{k_\sigma, k_{\sigma'}}$, $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}_p$ структурные константы алгебры Ли G. Для каждого индекса k_σ, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$ рассмотрим оператор :

$$\mathcal{F}_{k_\sigma} = \sum_{k_{\sigma'}} x_{k_{\sigma+\sigma'}} C^{k_{\sigma+\sigma'}}_{k_\sigma, k_{\sigma'}} \frac{\partial}{\partial x_{k_{\sigma'}}} \quad \text{на пространстве } G^*.$$

Так как P является инвариантной функцией на G, то $\mathcal{F}_{k_\sigma} P = 0$ для любого k_σ, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$. С другой стороны для любого $i = 0, 1, \dots, p-1$

$$\mathcal{F}_{k_i} = \sum_{j \leq p-i-1} x_{k_{i+j}} C^{k_{i+j}}_{k_i, k_j} \frac{\partial}{\partial x_{k_j}} + \sum_{j > p-i-1} x_{k_{i+j-p}} C^{k_{i+j-p}}_{k_i, k_j} \frac{\partial}{\partial x_{k_j}}$$

Следовательно

$$0 = \mathcal{F}_{k_i} P(\mu^{p-1}\mathcal{X}_0, \mu^{p-2}\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{p-1}) =$$

$$= \sum_{j \leq p-i-1} \mu^{p-(i+j)-1} x_{k_{i+j}} C^{k_{i+j}}_{k_i, k_j} \frac{\partial P(\mu^{p-1}\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_{p-1})}{\partial(\mu^{p-1-j} x_{k_j})} +$$

$$+ \sum_{j > p-i-1} \mu^{p-(i+j-p)-1} x_{k_{i+j-p}} C^{k_{i+j-p}}_{k_i, k_j} \frac{\partial P(\mu^{p-1}\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_{p-1})}{\partial(\mu^{p-1-j} x_{k_j})} =$$

$$= \sum_{j \le p-i-1} \mu^{-i} x_{k_{i+j}} C_{k_i k_j}^{k_{i+j}} \frac{\partial P(\mu^{p-1} X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} +$$

$$+ \sum_{j > p-i-1} \mu^{p-i} x_{k_{i+j-p}} C_{k_i k_j}^{k_{i+j-p}} \frac{\partial P(\mu^{p-1} X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} =$$

$$= \sum_{\substack{j \le p-i-1 \\ \alpha \ge 0}} \mu^{\alpha-i} x_{k_{i+j}} C_{k_i k_j}^{k_{i+j}} \frac{\partial P^{\alpha}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} +$$

$$+ \sum_{\substack{j > p-i-1 \\ \beta \ge 0}} \mu^{p-i+\beta} x_{k_{i+j-p}} C_{k_i k_j}^{k_{i+j-p}} \frac{\partial P^{\beta}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in Z_p} \Big[\Big(\sum_{j \le p-i-1} x_{k_{i+j}} C_{k_i, k_j}^{k_{i+j}} \frac{\partial P^{r_\sigma}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} \Big) \mu^{r_\sigma - i} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j \le p-i-1} C_{k_i k_j}^{k_{i+j}} \frac{\partial P^{r_\sigma + mp}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} +$$

$$+ \sum_{j > p-i-1} x_{k_{i+j-p}} C_{k_i, k_j}^{k_{i+j-p}} \frac{\partial P^{r_\sigma + (m-1)p}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} \Big) \mu^{r_\sigma - i + mp} \Big]$$

Следовательно, все коэффициенты при λ^s равны нулю, в частности

$$\sum_{j \le p-i-1} x_{k_{i+j}} C_{k_i, k_j}^{k_{i+j}} \frac{\partial P^{r_\sigma}(X_0, \ldots, X_{p-1})}{\partial x_{k_j}} \equiv 0, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1$$

Последнее означает, что P^{r_σ} является инвариантной функцией относительно коприсоединенного представления на пространстве $\tilde{G}^*$.

Теорема доказана.

В качестве примера мы рассмотрим $\mathbb{Z}_2$ - грандуированную алгебру Ли $G = so(n+1) = so(n) + \mathbb{R}^n$ и сжатую алгебру Ли $\tilde{G} = \mathcal{E}(n) = so(n) + \mathbb{R}^n$. Отождествляем пространство $so(n+1)^*$ с $so(n+1)$ с помощью скалярного произведения $(X, Y) = Sp(XY)$

$X, Y \in so(n+1)$. Тогда известно, что полиномиальные функции

$$P_s(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_s} M^{i_1 \dots i_s}_{i_1 \dots i_s}(X), \quad s = 2, 4, \dots$$

где $M^{i_1 \dots i_s}_{i_1 \dots i_s}(X)$ – минор матрицы X, состоящий в строках и столбцах с номерами $i_1, \dots, i_s$, образуют полный набор инвариантов на $so(n+1)^* \cong so(n+1)$. Пусть относительно разложения $G = so(n) + \mathbb{R}^n$ вектор X имеет вид: $X = x + y$ тогда

$$P_s(\mu x, y) = \lambda^{s-2}\left(\sum_{i_1 < \dots < i_{s-1}} M^{i_1 \dots i_{s-1}, n+1}_{i_1 \dots i_{s-1}, n+1}(X)\right) + \lambda^s P^s_s$$

Следовательно в силу теоремы 14.I функция типа

$$P^{s-2}_s(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_{s-1}} M^{i_1, \dots, i_{s-1}, n+1}_{i_1 \dots i_{s-1}, n+1}(X)$$

является инвариантной функцией на $\mathcal{E}(n)^*$.

§15. Поляризации, удовлетворяющие условию Пуканского, на расширенных алгебрах Ли

Пусть G – алгебра Ли, G^* – дуальное пространство к G, $f \in G^*$. Подалгебра p в алгебре Ли G называется поляризацией относительно ковектора f если $\langle f, [p, p] \rangle \equiv 0$ и $\dim p = \frac{1}{2}(\dim G + \dim G^f)$, где $G^f = \{\xi \in G \mid ad^*_\xi f = 0\}$. Если поляризация p относительно ковектора f удовлетворяет условию: $f + p^\perp \subset \mathcal{O}(f)$, где $\mathcal{O}(f)$ – орбита коприсоединенного представления на G^*, $p^\perp = \{x \in G^* \mid \langle x, p \rangle = 0\}$, тогда говорят, что поляризация p удовлетворяет условию Пуканского. С помощью поляризации p в работах С.А.Комалина и А.М.Переломова (см. 4I) были построены конанические координаты на орбите $\mathcal{O}(f)$, $f \in G^*$. Пусть $\mathcal{G}$ – группа Ли с алгеброй Ли G. Поляризация $\mathfrak{p}$ относительно $f\in G^*$ определяет $\mathcal{G}$ - инвариантное лагранжево слоение на орбите $\mathcal{O}(f)\equiv \mathcal{G}.f$: слоениями будут подмногообразия $\mathcal{P}_x \cdot x$ где $\mathcal{P}_x = g.\mathcal{P}g^{-1}$, $x = Ad^*_g \cdot f = g.f$ и $\mathcal{P}\subset\mathcal{G}$ - замкнутая подгруппа, соответствующая $\mathfrak{p}$. Следующее предложение позволяет привести симплектическую форму к каноническому виду .

Предложение I5.I (см. [41]). Пусть поляризация $\mathfrak{p}$ относительно $f\in G^*$ удовлетворяет условию Пуканского $f+\mathfrak{p}^\perp\subset\mathcal{O}(f)\equiv \equiv\mathcal{G}.f$ и существует лагранжево подмногообразие $Q\subset\mathcal{G}.f$, пересекающее каждый слой лагранжева слоения, определяемого поляризацией $\mathfrak{p}$, не более чем в одной точке. Тогда для любых координат q^k на многообразии Q из соотношения $x = q(q^k) + p_k\, ad^*_{d q^k(q)} \cdot q$, $q = q(q^k)\in Q$ однозначно определяются канонические координаты q^k, p_k на орбите $\mathcal{O}(f)\equiv\mathcal{G}.f$

В этом параграфе мы построим поляризации, удовлетворяющие условию Пуканского для некоторых алгебр Ли.

Теорема I5.I. Пусть алгебра Ли G разлагается в прямую сумму подпространств $G = H + V$, при этом $[G,V]\subset V$. Пусть ковектор $f\in G^*$ такой, что $\langle f,[H,H]\rangle = \langle f,[V,V]\rangle \equiv 0$ Тогда подалгебра $\mathfrak{p} = H^f + V$, где $H^f = \{\xi\in H \mid ad^*_\xi f = 0\}$ является поляризацией относительно f , удовлетворяющей условию Пуканского, т.е. $f+\mathfrak{p}^\perp\subset\mathcal{O}(f)$

Доказательство. В силу $\langle f,[H,H]\rangle = \langle f,[V,V]\rangle \equiv 0$ $G^f = H^f + V^f$ и $\dim V - \dim V^f = \dim H - \dim H^f$, где $G^f = \{\xi\in G \mid ad^*_\xi f = 0\}$, $V^f = \{\xi\in V \mid ad^*_\xi f = 0\}$. Следовательно

$$\dim\mathfrak{p} = \dim H^f + \dim V = \dim(H^f + V^f) + \dim V - \dim V^f = \dim G^f + \tfrac{1}{2}(\dim G - \dim G^f) = \tfrac{1}{2}(\dim G + \dim G^f)$$

т.е. $\dim\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim G + \dim G^f)$. С другой стороны $\mathfrak{p}$ является подалгеброй Ли, действительно, в силу $[G,V]\subset V$ $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] =$

$= [H^f + V, H^f + V] = [H^f, H^f] + [H^f + V, V] \subset H^f + V = \mathfrak{p}$, так как H^f является подалгеброй. Таким образом $\mathfrak{p} = H^f + V$ является поляризацией относительно ковектора $f \in G^*$. Докажем, что поляризация $\mathfrak{p}$ удовлетворяет условию Пуканского, т.е. $f + \mathfrak{p}^\perp \subset \mathcal{O}(f)$. Так как $\langle ad^*_{\mathfrak{p}} f, \mathfrak{p} \rangle = \langle f, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \rangle \equiv 0$, т.е. $ad^*_{\mathfrak{p}} f \subset \mathfrak{p}^\perp$ и

$$\dim ad^*_{\mathfrak{p}} f = \dim \mathfrak{p} - \dim G^f = \frac{1}{2} (\dim G - \dim G f) =$$

$= \dim \mathfrak{p}^\perp$, то $ad^*_{\mathfrak{p}} f \equiv \mathfrak{p}^\perp$. Пусть вектор $\xi + \eta \in H^f + V = \mathfrak{p}$, тогда

$$ad^*_{\xi + \eta} f = ad^*_{\xi} f + ad^*_{\eta} f = ad^*_{\eta} f$$

Следовательно достаточно доказать $ad^*_{\eta} f + f \subset \mathcal{O}(f)$ для любого вектора $\eta \in V$. Рассмотрим разложение

$$Ad^*_{\exp \eta} f = f + ad^*_{\eta} f + \frac{1}{2} (ad^*_{\eta})^2 f + \dots$$

Пусть $g = ad^*_{\eta} f$, тогда в силу $\langle f, [V, V] \rangle = \langle ad^*_V f, V \rangle \equiv 0$ ковектор g принадлежит подпространству H^*. Следовательно

$$\langle (ad^*_{\eta})^2 f, G \rangle = \langle ad^*_{\eta} g, G \rangle = \langle g, [\eta, G] \rangle = 0,$$

так как $[\eta, G] \subset V$. Таким образом $(ad^*_{\eta})^2 f \doteq 0$, отсюда $Ad^*_{\exp \eta} f = f + ad^*_{\eta} f$. Это означает, что

$f + ad^*_{\eta} f \in \mathcal{O}(f)$. Теорема доказана.

<u>Замечание I5.I</u>. Пусть алгебра Ли G является грандуированнный алгеброй, т.е. $G = \sum_{\alpha=0}^{2s+1} G_\alpha$, $[G_\alpha, G_\beta] \subset G_{\alpha+\beta}$ если $\alpha + \beta \leq 2s+1$ и $[G_\alpha, G_\beta] \equiv 0$ если $\alpha + \beta > 2s+1$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 2s+1$. Положив $H = \sum_{\alpha=0}^{s} G_\alpha$, $V = \sum_{\alpha=s+1}^{2s+1} G_\alpha$, мы получим разложение алгебры Ли G в прямую сумму подпространств: $G = H + V$, $[G, V] \subset V$. Дуальное пространство G^* имеет соответственное разложение $G^* = \sum_{\alpha=0}^{2s+1} G_\alpha \cong H^* + V^*$. Для любого ковектора $f \in G^*_{2s+1}$ выполняются тождества $\langle f, [H, H] \rangle = \langle f, [V, V] \rangle \equiv 0$. Таким образом все условия теоремы I5.I выполняются, следовательно, пространство

$\mathfrak{p} = H^f + V = \sum_{\alpha=0}^{s} G_\alpha^f + \sum_{\beta=s+1}^{2s+1} G_\beta$ является поляризацией относительно ковектора f, удовлетворяющей условию Пуканского. Этот результат был доказан в [10].

Теорема 15.2. Пусть алгебра Ли G разлагается в прямую сумму подпространств $G = H + L + V$ и $[G, V] \subset V$,

$$[L, L] \subset V, \quad [L, H] \subset L + V$$

Пусть ковектор $f \in G^*$ такой, что

$$\langle f, [H, H] \rangle = \langle f, [V, V] \rangle = \langle f, [L, H + V] \rangle \equiv 0$$

Предположим, что существует подпространство: $L' \subset L$,

$[H, L'] \subset L' + V$, $\dim L' = \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^f)$ и $\langle f, [L', L'] \rangle = 0$.

Тогда подпространство $\mathfrak{p} = H^f + L' + V$ является поляризацией относительно ковектора f, удовлетворяющей условию Пуканского, т.е. $f + \mathfrak{p}^\perp \subset O(f)$

Доказательство: В силу $\langle f, [H, H] \rangle = \langle f, [V, V] \rangle =$
$= \langle f, [L, H + V] \rangle \equiv 0$. $G^f = H^f + L^f + V^f$ и
$\dim V - \dim V^f = \dim H - \dim H^f$, где $G^f = \{\xi \in G \mid ad_\xi^* f = 0\}$
$G^f \cap V = V^f$, $G^f \cap L = L^f$, $G^f \cap H = H^f$. Следовательно

$$\dim \mathfrak{p} = \dim H^f + \dim L' + \dim V = (\dim H^f + \dim L^f + \dim V^f) +$$
$$+ (\dim L' - \dim L^f) + (\dim V - \dim V^f) = \dim G^f +$$
$$+ \frac{1}{2}(\dim L - \dim L^f) + \frac{1}{2}(\dim (H + V) - \dim (H + V)^f) =$$
$$= \dim G^f + \frac{1}{2}(\dim G - \dim G^f) = \frac{1}{2}(\dim G + \dim G^f)$$

т.е. $\dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim G + \dim G^f)$. С другой стороны, в силу

$[G, V] \subset V$, $[L, L] \subset V$, $[L, H] \subset L + V$ мы

получаем $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = [H^f + L' + V, H^f + L' + V] \subset$

$$\subset H^f + [H^f, L' + V] + [L' + V, L' + V] \subset H^f + L' + V = \mathfrak{p}$$

Это означает, что $\mathfrak{p}$ является поляризацией относительно ковектора f. Докажем, что поляризация $\mathfrak{p}$ удовлетворяет условию Пуканского, т.е. $f + \mathfrak{p}^\perp \subset O(f)$. Так как $ad_{\mathfrak{p}}^* f = \mathfrak{p}^\perp$, то достаточно доказать $f+ad^*_{\mathfrak{p}} f\subset \mathcal{O}(f)$. Пусть вектор $\xi+\eta+\zeta\in H^f+L'+V=\mathfrak{p}$, тогда

$$ad^*_{(\xi+\eta+\zeta)} f = ad^*_{\eta+\zeta} f \qquad (1)$$

Заметим, что если $\eta\in L'\subset L$, то $ad^*_\eta f\in L^*$ в силу тождества $\langle f,[L,H+V]\rangle\equiv 0$. Следовательно,

$\langle (ad^*_\eta)^2 f, L+V\rangle = \langle ad^*_\eta f,[\eta,L+V]\rangle = 0$ из того, что $\eta\in L'\subset L$, $[\eta,L+V]\subset V$. Таким образом ковектор $(ad^*_\eta)^2 f\in H^*$. Отсюда в силу $[L,G]\subset L+V$

$\langle (ad^*_\eta)^3 f, G\rangle = \langle (ad^*_\eta)^2 f,[\eta,G]\rangle\equiv 0$, т.е. $(ad^*_\eta)^3 f=0$, и тем самым $(ad^*_\eta)^s f=0$, $s\geq 3$. Итак, мы получаем

$$Ad^*_{\exp\eta} f = f+ad^*_\eta f + \frac{1}{2}(ad^*_\eta)^2 f$$

Пусть подпространство $(H^f)^\perp_H=\{h\in H^* \mid \langle h,H^f\rangle\equiv 0\}\subset H^*$

Заметим, что ковектор $(ad^*_\eta)^2 f\in (H^f)^\perp_H$. Действительно, в силу $[\eta,H^f]\subset[L',H^f]\subset\mathfrak{p}$, $\langle f,[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\rangle\equiv 0$ мы получаем $\langle (ad^*_\eta)^2 f, H^f\rangle = \langle f,[\eta,[\eta,H^f]]\rangle\equiv 0$

С другой стороны: $ad^*_V f\subset (H^f)^\perp_H$ и

$\dim ad^*_V f = \dim V - \dim V^f = \dim H - \dim H^f = \dim (H^f)^\perp_H$, т.е.

$ad^*_V f\equiv (H^f)^\perp_H$. Таким образом ковектор $(ad^*_\eta)^2 f\in ad^*_V f$

Отсюда следует, что для каждого вектора $\eta\in L'$ существует вектор $v(\eta)\in V$ такой, что

$$\frac{1}{2}(ad^*_\eta)^2 f = ad^*_{v(\eta)} f$$

Следовательно, мы получаем

$$Ad^*_{\exp\eta} f = f+ad^*_\eta f + ad^*_{v(\eta)} f,\ \eta\in L',\ v(\eta)\in V \qquad (2)$$

В силу $[L',G]\subset L+V$

$\langle f,[V,[L',G]]\rangle = \langle ad^*_{L'} ad^*_V f, G\rangle\equiv 0$, поэтому в частности $ad^*_\eta \, ad^*_{v(\eta)} f = 0$

Отсюда $$Ad^*_{\exp\eta} \, ad^*_{v(\eta)} f = ad^*_{v(\eta)} f \qquad (3).$$

Так как $v(\eta) \in V$, $[V, G] \subset V$, $\langle f, [V, V] \rangle \equiv 0$,

то $(ad^*_{v(\eta)})^2 f = 0$ и $Ad^*_{\exp(-v(\eta))} f = f - ad^*_{v(\eta)} f$

Следовательно, из тождеств (2), (3) мы получаем:

$$Ad^*_{\exp\eta} \, Ad^*_{\exp(-v(\eta))} f = Ad^*_{\exp\eta} \left(f - ad^*_{v(\eta)} f \right) =$$

$$= f + ad^*_\eta f + ad^*_{v(\eta)} f - ad^*_{v(\eta)} f = f + ad^*_\eta f,$$ т.е.

$$Ad^*_{\exp(\eta - v(\eta))} f = f + ad^*_\eta f \qquad (4)$$

Из того, что $[G, V] \subset V$, $\langle f, [V, V] \rangle \equiv 0$, $\langle f, [L', V] \rangle \equiv 0$

выполняются тождества: $(ad^*_\zeta)^s f = 0$, $s \geq 2$, $ad^*_\zeta \, ad^*_\eta f = 0$

для любого $\zeta \in V$. Отсюда в силу (I) и (4) мы получаем:

$$Ad^*_{\exp(\eta - v(\eta) + \zeta)} f = Ad^*_{\exp\zeta} \, Ad^*_{\exp(\eta - v(\eta))} f =$$

$$= Ad^*_{\exp\zeta} (f + ad^*_\eta f) = Ad^*_{\exp\zeta} f + Ad^*_{\exp\zeta} \, ad^*_\eta f =$$

$$= (f + ad^*_\zeta f) + ad^*_\eta f = f + ad^*_{(\eta+\zeta)} f = f + ad^*_{(\xi+\eta+\zeta)} f$$

Итак

$$Ad^*_{\exp(\eta - v(\eta) + \zeta)} f = f + ad^*_{(\xi+\eta+\zeta)} f, \quad \xi + \eta + \zeta \in p,$$

т.е. $f + ad^*_p f \subset O(f)$. Теорема доказана.

<u>Замечание I5.2</u>. Рассмотрим грандуированную алгебру Ли

$$G = \sum_{\alpha=0}^{2s} G_\alpha, \quad [G_\alpha, G_\beta] \subset G_{\alpha+\beta} \quad \text{если} \quad \alpha + \beta \leq 2s,$$

$$[G_\alpha, G_\beta] \equiv 0 \quad \text{если} \quad \alpha + \beta > 2s, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 2s.$$

Положив $$H = \sum_{\alpha=0}^{s-1}, \quad L = G_s, \quad V = \sum_{\beta=s+1}^{2s} G_\beta,$$ мы

получим разложение $G = H + L + V$, $[G, V] \subset V$,

$[L, L] \subset V$, $[L, H] \subset L + H$. Дуальное пространство G^* имеет

соответственное разложение: $G^* = \sum_{\alpha=0}^{2s} G_\alpha^* = H^* + L^* + V^*$

Легко видеть, что для ковектора $f \in G_{2s}^*$ выполняются тождества $\langle f, [H,H]\rangle = \langle f,[V,V]\rangle = \langle f, [L, H+V]\rangle \equiv 0$

Пусть существует подпространство $L' \subset L = G_s$ такое, что $\dim L' = \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^f)$, $[G_0, L'] \subset L'$, $\langle f, [L', L']\rangle = 0$

Тогда из теоремы I5.2 следует, что пространство $p = H^f + L' + V$ является поляризацией относительно f, удовлетворяющей условию Пуканского. Этот результат был доказан в [I0].

Перейдем к изучению поляризации тензорного произведения $G \otimes A$ алгебры Ли G и алгебры Фробениуса A. Пусть алгебра A самосопряжена относительно тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$). Обозначается через (,) естественное скалярное произведение на A относительно базиса $\{\varepsilon_i\}$ $1 \le i \le N$, т.е. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ для всех $i,j = 1,2,\ldots,N$

В силу самосопряженности алгебры A относительно тройки (A, Ω, $\{\varepsilon_i\}$) мы имеем:

$$(\varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j \varepsilon_k) = (\varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i \varepsilon_k), \quad 1 \le i,j,k \le N$$

Это равносильно тождеству $(\Omega a, bc) = (\Omega b, ac)$ для всех элементов $a, b, c \in A$.

<u>Лемма I5.I</u>. Для любого ковектора $f \in G^*$, выполняется тождество:

$$ad^*_{\xi \otimes b} f \otimes a = \{f \otimes a, \xi \otimes b\} = \{f, \xi\} \otimes \Omega(b\,\Omega a),$$
$$\xi \in G, \quad a, b \in A$$

<u>Доказательство:</u> Согласно определению для любого элемента $\eta \otimes c \in G \otimes A$:

$$\langle ad^*_{\xi\otimes b} f \otimes a, \eta \otimes c\rangle = \langle \{f\otimes a, \xi \otimes b\}, \eta \otimes c\rangle =$$
$$= \langle f \otimes a, [\xi \otimes b, \eta \otimes c]\rangle = \langle f \otimes a, [\xi, \eta] \otimes bc\rangle =$$
$$= \langle f, [\xi, \eta]\rangle (a, bc) = \langle \{f, \xi\}, \eta\rangle (\Omega c, (\Omega a) b) =$$
$$= \langle \{f, \xi\}, \eta\rangle (\Omega(b\,\Omega a), c) = \langle \{f, \xi\} \otimes \Omega(b\,\Omega a), \eta \otimes c\rangle$$

т.е. $\langle \{f\otimes a, \xi \otimes b\}, \eta \otimes c\rangle = \langle \{f, \xi\} \otimes \Omega(b\,\Omega a), \eta \otimes c\rangle$

Следовательно: $ad^*_{\xi \otimes b} f \otimes a = \{f \otimes a, \xi \otimes b\} =$

$= \{f, \xi\} \otimes \Omega(b\Omega a)$. Лемма доказана.

<u>Следствие I5.I.</u> Место имеет тождество :

$\{f \otimes \Omega 1, \xi \otimes b\} = \{f, \xi\} \otimes \Omega(b)$ для любого элемента $b \in A$.

Пусть $A^a = \{ b \in A \mid b\Omega(a) = 0\}$, $a \in A$, тогда мы получаем

<u>Лемма I5.2</u>. Для любого ковектора $f \in G^*$ и любого элемента $a \in A$, выполняется тождество:

$$(G \otimes A)^{f \otimes a} = G^f \otimes A + V \otimes A^a \text{ ,где } G^f = \{\xi \in G \mid ad^*_\xi f = 0\},$$

V - дополнительное подпространство к G^f на G : $G = G^f + V$

<u>Доказательство</u>: По лемме I5.I $\{f \otimes a, \xi \otimes b\} = \{f, \xi\} \otimes \Omega(b\Omega a)$ для любого $\xi \otimes b \in G \otimes A$

Следовательно подпространство $G^f \otimes A + V \otimes A^a$ содержит в $(G \otimes A)^{f \otimes a}$. Осталось доказать, что

$$G^f \otimes A + V \otimes A^a \supset (G \otimes A)^{f \otimes a}$$

Пусть $\{e_i\}$, $1 \le i \le s$ - базис пространства V и элемент

$$\sum_{i=1}^{s} e_i \otimes b_i \in (G \otimes A)^{f \otimes a}, \quad b_i \in A$$

Тогда:

$$\{f \otimes a, \sum_{i=1}^{s} e_i \otimes b_i\} = \sum_{i=1}^{s} \{f, e_i\} \otimes \Omega(b_i \Omega a) = 0$$

Допустим $b_i \Omega a = \sum_{\alpha=1}^{N} \nu_{i\alpha} \varepsilon_\alpha$, $1 \le i \le s$, тогда мы получаем

$$\sum_{i=1}^{s} \{f, e_i\} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N} \nu_{i\alpha} \varepsilon_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \{f, \sum_{i=1}^{s} e_i \nu_{i\alpha}\} \otimes \varepsilon_\alpha = 0$$

Следовательно

$$\{f, \sum_{i=1}^{s} e_i \nu_{i\alpha}\} = 0, \quad 1 \le \alpha \le N,$$

отсюда в силу $\sum_{i=1}^{s} e_i \nu_{i\alpha} \in V$ $\sum_{i=1}^{s} e_i \nu_{i\alpha} = 0$, $1 \le \alpha \le N$,

т.е. $\nu_{i\alpha} = 0$ для всех i, α, $1 \le i \le s$, $1 \le \alpha \le N$

Это означает, что $b_i \Omega a = 0$, тем самым $b_i \in A^a$, $1 \le i \le s$

Итак, если $\sum_{i=1}^{s} e_i \otimes b_i \in (G\otimes A)^{f\otimes a}$ тогда $b_i \in A^a$, $1 \le i \le s$

Следовательно $(G\otimes A)^{f\otimes a} \subset G^f \otimes A + V \otimes A^a$. Лемма доказана.

Следствие I5.2. Для любого ковектора $f \in G^*$:

$$(G\otimes A)^{f\otimes \Omega 1} = G^f \otimes A$$

Замечание I5.3. Пусть $\operatorname{ind} f = \dim G^f$, $\operatorname{ind} a = \dim A^a$

$f \in G^*$, $a \in A$. Тогда в силу леммы I5.2 $\operatorname{ind} f\otimes a =$

$= \dim A \operatorname{ind} f + (\dim G - \operatorname{ind} f)\operatorname{ind} a = \operatorname{ind} f(\dim A - \operatorname{ind} a) + \dim G \operatorname{ind} a$

В частности $\operatorname{ind} f\otimes \Omega 1 = \dim A \operatorname{ind} f$

Алгебра Ли G называется фробениусовой если $\operatorname{ind} G$

Из леммы I5.2 мы имеем

Следствие I5.3. Если алгебра Ли G является фробениусовой тогда алгебра Ли $G\otimes A$ также является фробениусовой.

Теорема I5.3. Пусть G - алгебра Ли, A - алгебра Фробениуса, p - поляризация относительно ковектора $f \in G^*$, тогда подпространство $\mathcal{P} = p\otimes A + W \otimes A^a$, где W - дополнительное подпространство к p на G, $a \in A$, является поляризацией относительно ковектора $f\otimes a \in G^* \otimes A$

Доказательство. В силу

$$[p\otimes A, p\otimes A] \subset [p, p] \otimes A \subset p\otimes A,$$

$$[G\otimes A, W\otimes A^a] \subset [G, W]\otimes A \cdot A^a \subset G\otimes A^a \subset \mathcal{P}$$

подпространство $\mathcal{P}$ является подалгеброй Ли.

Так как

$$\dim W = \dim G - \dim p =$$

$$= \dim G - \tfrac{1}{2}(\dim G + \dim G^f) = \tfrac{1}{2}(\dim G - \dim G^f) = \tfrac{1}{2}\dim V$$

где V - дополнительное подпространство к G^f на G, то

$$\dim \mathcal{P} = \dim p \cdot \dim A + \dim W \cdot \dim A^a =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dim G + \dim G^f\right)\dim A + \frac{1}{2}\dim V \dim A^a =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dim G \cdot \dim A + \dim G^f \otimes A + \dim V \otimes A^a\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dim (G \otimes A) + \dim \left(G^f \otimes A + V \otimes A^a\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dim (G \otimes A) + \dim (G \otimes A)^{f \otimes a}\right)$$ в силу леммы I5.2,

т.е. $\dim \mathcal{P} = \frac{1}{2}\left(\dim (G \otimes A) + \dim (G \otimes A)^{f \otimes a}\right)$

Осталось проверить $\langle f \otimes a, [\mathcal{P}, \mathcal{P}] \rangle \equiv 0$

Действительно:

$\langle f \otimes a, [p \otimes A, p \otimes A] \rangle = \langle f, [p, p] \rangle (a, A \cdot A) = 0$ и

$\langle f \otimes a, G \otimes A^a \rangle = \langle f, G \rangle (a, A^a) =$

$= \langle f, G \rangle (\Omega 1, A^a \Omega a) = \langle f, G \rangle (\Omega 1, 0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема I5.4. Пусть выполняются все условия теоремы I5.I (или теоремы I5.2). Пусть A - самосопряженная относительно тройки (A, Ω, $\{\xi_i\}$) алгебра. Тогда пространство

$\mathcal{P} = p \otimes A + W \otimes A^a$, где W - дополнительное подпространство к p на G, является поляризацией относительно ковектора $f \otimes a \in G^* \otimes A$, удовлетворяющей условию Пуканского.

Доказательство. Сначала рассмотрим случаи, когда выполняются все условия теоремы I5.I, в частности, $G = H \dot{+} V$. Тогда расширенная алгебра Ли $G \otimes A$ имеет соответственное разложение: $G \otimes A = H \otimes A + V \otimes A$. Таким образом, достаточно доказать $\mathcal{P} = (H\otimes A)^{f\otimes a} + V\otimes A$. Это эквивалентно тождеству $(H\otimes A)^{f\otimes a} = H^f\otimes A + W\otimes A^a$. Пусть $\widetilde{W}$ - дополнительное пространство к G^f на G такое, что $\widetilde{W}\cap H = W$. Тогда в силу леммы 15.2 $(G\otimes A)^{f\otimes a} = G^f\otimes A + \widetilde{W}\otimes A^a$ мы получаем

$$(H\otimes A)^{f\otimes a} = (G\otimes A)^{f\otimes a} \cap (H\otimes A) =$$

$$= (H^f\otimes A + \widetilde{W}\otimes A^a + V^f\otimes A)\cap(H\otimes A) = H^f\otimes A + W\otimes A^a,$$

что требовалось. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема доказана.

§16. Алгебры треугольных матриц.

Пусть T_n - алгебра Ли всех верхнетреугольных матриц порядка п. А.А.Архангельский в [34] построил полный инволютивный набор полиномиальных функций на дуальном пространстве T_n^* к T_n. Напомним основные результаты этой работы. Пусть G - произвольная алгебра Ли, G^* - дуальное пространство к G. Функция F на G^* называется полуинвариантом (относительно коприсоединенного представления) если она удовлетворяет условию: $F(Ad^*_g f) = \chi(g)\, F(f)$ для любого элемента $g\in \mathcal{G}$, $f\in G^*$, где $\mathcal{G}$ - группа Ли с алгеброй Ли G, χ - некоторое одномерное представление группы $\mathcal{G}$ (характер). Пусть $F_1,\ldots, F_s$ - набор полуинвариантов, находящихся попарно в инволюции на G^*, тогда при любом $a\in G^*$ в инволюции находятся также функции

$F_{i,\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $1\le i\le s$, где $F_{i,\lambda}(x) = F_i(x+\lambda a)$.

Дуальное пространство T_n^* к T_n отождествляется с нижнетреугольными матрицами сопоставлением нижнетреугольной матрице X функционала на T_n, действующего по формуле: $(X,Y) = Sp(X\cdot Y)$, $Y\in T_n$. Обозначаем минор матрицы X, состоящий в строках с номерами $i_1,\ldots,i_k$ и столбцах с номерами $j_1,\ldots,j_k$

через $X\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix}$. Пусть $n = 2k-1,\ 2k\ (k \geq 1)$
Рассмотрим на пространстве нижетреугольных матриц порядка n:

$$S_i(X) = \sum_{j=i}^{n-i+1} X\begin{pmatrix} j, & n-i+2, & \dots, & n-1, n \\ 1, & 2 & , \dots, & i-1, j \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$S_i(X) = X\begin{pmatrix} i, i+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n-i+1 \end{pmatrix}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

и следующие гомоморфизмы группы $\exp(T_n)$ в группу вещественных чисел по умножению (т.е. характеры):

$$\Phi_i(g) = g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-i+1 \\ 1 & 2 & \dots & n-i+1 \end{pmatrix} g^{-1}\begin{pmatrix} i & i+1 & \dots & n \\ i & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_{11}\, g_{22} \dots g_{n-i+1,\, n-i+1}}{g_{ii}\, g_{i+1,i+1}, \dots g_{n,n}}$$

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & & 0 & g_{nn} \end{pmatrix} \in \exp(T_n)$$

В [34] доказывается, что функции $S_i,\ 1 \leq i \leq n$ на пространстве T_n^* являются полуинвариантами с гомоморфизмам Φ_i. Кроме того, все они находятся попарно в инволюции: $\{S_i, S_j\} \equiv 0$, $1 \leq i,j \leq n$. Отсюда следует, что в инволюции находятся и сдвиги этих функций, т.е. $\{S_i(X+\lambda A), S_j(X+\mu A)\} \equiv 0$, $1 \leq i,j \leq n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A \in T_n^*$. Более того, пусть ковектор $A \in T_n^*$ $(n = 2k-1, 2k)$ удовлетворяет условию $S_i(A) \neq 0$, $n-k+1 \leq i \leq n$, тогда семейство функций $S_i(X+\lambda A)$, $1 \leq i \leq n$, является полным инволютивным набором на T_n^*. Коразмерность орбиты общего положения на T_n^* равна $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Обозначаем через E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$), матрицу порядка n, элемент которого равен I если он принадлежит i-ой строке и j - ому столбцу и равен 0 в остальных случаях. При этом обозначении

$$T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R} E_{ij} , \quad T_n^* = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \mathbb{R} E_{ij}$$

В качестве ковектора A, удовлетворяющего условию $S_i(A) \neq 0$, $n-k+1 \leq i \leq n$, мы возьмем ковектор

$$A = E_{n,1} + E_{n-1,2} + \dots + E_{n-[\frac{n}{2}]+1, [\frac{n}{2}]}$$

Перейдем к построению полных инволютивных наборов функции для серий подалгебр L алгебры Ли T_n.

Пусть алгебра Ли $L + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R} E_{ij}$, где V - произвольное подпространство n-мерного пространства диагональных матриц: $V \subset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R} E_{i,i}$

Сначала мы докажем следующую

Лемма 16.I. Пусть x_{ij}, $1 \leq j \leq i \leq n$, - система координат на пространстве T_n^* относительно базиса E_{ij}, $1 \leq j \leq i \leq n$. Тогда на T_n^* существует полный инволютивный набор полиномиальных функций:

$$\mathcal{P} = \{ P_i = P_i(X) , 1 \leq i \leq m = \tfrac{1}{2} (\dim T_n + \operatorname{ind} T_n) , X = (x_{\alpha\beta}), 1 \leq \beta \leq \alpha \leq n \}$$ такой, что

$$P_i(X) = x_{ii} + x_{jj} , \quad 1 \leq i \leq [\tfrac{n+1}{2}], \; j = n+1-i$$

$P_k(X)$ не зависит от переменных $x_{\alpha,\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq n$, для каждого $k > [\frac{n+1}{2}]$.

Доказательство. Как напомнено выше, набор полиномиальных функций $\mathcal{G} = \{ S_{i,r_i}(X) \}$, $1 \le i \le n$, $0 \le r_i \le N_i$ где $S_{i,r_i}(X)$ - коэффициент при λ^{r_i} в $S_i(X+\lambda A)$:

$$S_i(X+\lambda A) = \sum_{r_i=0}^{N_i} S_{i,r_i}\lambda^{r_i},\ S_{i,N_i} \ne 0,\ A = E_{n,1} + \cdots + E_{n-[\frac{n}{2}]+1,[\frac{n}{2}]}$$

является полным инволютивным набором на T_n^*.

Заметим, что :

$$S_{i,N_i}(X) = \sum_{\alpha=i}^{n-i+1} x_{\alpha,\alpha}, \quad 1 \le i \le [\tfrac{n+1}{2}],\ N_i = N_{n+2-i},$$

$$S_i(X+\lambda A) = S_{i,N_i}(X)\, S_{n+2-i}(X+\lambda A) + \sum_{r_i=0}^{N_i} P_{i,r_i}(X)\lambda^{r_i}, \quad 1 \le i \le [\tfrac{n+1}{2}]$$

где полиномиальные функции $P_{i,r_i}(X)$ не зависят от переменных $x_{\alpha,\alpha}$, $1 \le \alpha \le n$. Следовательно:

$$S_i(X+\lambda A) = S_{i,N_i}(X)\sum_{r_i=r_{n+2-i}=0}^{N_i} S_{n+2-i,\,r_i}(X)\lambda^{r_i} + \sum_{r_i=0}^{N_i} P_{i,r_i}(X)\lambda^{r_i}$$

т.е. $$S_{i,r_i}(X) = S_{i,N_i}(X)\, S_{n+2-i,\,r_i}(X) + P_{i,r_i}(X)$$

$$1 \le i \le [\tfrac{n+1}{2}], \quad 0 \le r_i \le N_i,$$

где полиномиальные функции $S_{n+2-i,\,r_i}(X)$ не зависят от переменных $x_{\alpha,\alpha}$, $1 \le \alpha \le n$.

Отсюда не трудно видеть, что новый набор функций

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{ \tilde{S}_{i,r_i} \},\ 1 \le i \le n,\ 0 \le r_i \le N_i \qquad \text{, где}$$

$$\tilde{S}_{i,N_i}(X) \equiv S_{i,N_i}(X) = \sum_{\alpha=i}^{n-i+1} x_{\alpha,\alpha}, \quad 1 \le i \le [\tfrac{n+1}{2}] \quad (N_1 = 0)$$

$$\tilde{S}_{i,r_i}(X) \equiv S_{i,r_i}(X), \quad [\tfrac{n+1}{2}] < i \le n, \quad 0 \le r_i \le N_i$$

$$\tilde{S}_{i,r_i}(X) \equiv P_{i,r_i}(X), \quad 2 \le i \le [\tfrac{n+1}{2}],\ 0 \le r_i \le N_i - 1.$$

является полным инволютивным набором на пространстве T_n^*.

Заменяя функции $\widetilde{S}_{i,N_i}$, $1 \le i \le [\frac{n+1}{2}]$ в наборе $\widetilde{\mathcal{F}}$ функциями $x_{i,i} + x_{j,j}$, $j = n+1-i$ мы получаем набор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий требованию.

Лемма доказана.

Теорема 16.I. Пусть L – алгебра Ли треугольных матриц:

$$L = V + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{R} E_{ij} ,$$

где V – подпространство пространства диагональных матриц: $V \subset \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{R} E_{\alpha,\alpha}$. Тогда на дуальном пространстве L^* к L существует полный инволютивный набор полиномиальных функций.

Доказательство: Мы докажем теорему для случая, когда $n = 2k$. Для нечетного n теорема доказывается аналогично. Наша цель: построить полный инволютивный набор функций $\widetilde{\mathcal{P}} = \{ \widetilde{P}_i \}$ (для некоторого семейства индексов i) на L^*.

Пусть

$$L = V + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{R} E_{ij} , \quad \dim V = k_0$$

Как и для алгебры T_n, с помощью скалярного произведения $(X, Y) = Sp(XY)$ на пространстве матриц порядка n мы отождествляем пространства L^* и $V + \sum_{1 \le j < i \le n} \mathbb{R} E_{ij}$ Пусть $\bar{E}_{\alpha,\alpha}$, $1 \le \alpha \le k_0$ – ортонормированный базис пространства V :

$$(\bar{E}_{\alpha,\alpha} , \bar{E}_{\beta,\beta}) = \delta_{\alpha\beta} , \quad 1 \le \alpha, \beta \le k_0$$

$$\bar{E}_{\alpha,\alpha} = \sum_{i=1}^{n} M_{\alpha,i} E_{i,i} \qquad (I)$$

тогда $L = \sum_{\alpha=1}^{k_0} \mathbb{R} \bar{E}_{\alpha,\alpha} + \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{R} E_{ij}$, $L^* = \sum_{\alpha=1}^{k_0} \mathbb{R} \bar{E}_{\alpha,\alpha} + \sum_{1 \le j < i \le n} \mathbb{R} E_{ij}$

Обозначаем через $\bar{C}^{u'v'}_{\alpha'\beta', \gamma'\theta'}$ (где индексы u', v',

$\alpha', \beta', \gamma', \theta'$ принимают всевозможные значения) структурные константы алгебры Ли L относительно базиса $\{E_{ij}, \overline{E}_{\alpha\alpha}\}$, $1 \le i < j \le n$, $1 \le \alpha \le k_0$, и через $\overline{x}_{\alpha\beta}$, $\overline{x}_{\gamma\gamma}$, $1 \le \beta < \alpha \le n$, $1 \le \gamma \le k_0$ систему координат на пространстве L^* относительно базиса $\{E_{ij}, \overline{E}_{\alpha\alpha}\}$, $1 \le j < i \le n$, $1 \le \alpha \le k_0$

Сохраняем для T_n все обозначения в лемме 16.1. Пусть $C^{uv}_{\alpha\beta,\gamma\theta}$ (где индексы $u, v, \alpha, \beta, \gamma, \theta$ принимают всевозможные значения) – структурные константы алгебры Ли T_n относительно базиса $\{E_{ij}\}$, $1 \le i \le j \le n$ Обозначаем через $\overline{x}^0_{v'u'}$ (и x^0_{vu}) координаты точки A:

$A = E_{n1} + E_{n-1,2} + \dots + E_{n-[\frac{n}{2}]+1, [\frac{n}{2}]}$ на пространстве L^* (и соответственно на пространстве T_n^*). Заметим, что $\overline{x}^0_{vu} = x^0_{vu}$ для всех $u \ne v$, $1 \le u, v \le n$ и

$$\overline{x}^0_{u'u'} = x^0_{uu} = 0, \quad 1 \le u' \le k_0, \; 1 \le u \le n$$

Из определения T_n и A мы получаем

$$C^{uv}_{\alpha\beta,\gamma\theta} = \left(\delta_{\beta\gamma}\delta^u_\alpha \delta^v_\theta - \delta_{\alpha\theta}\delta^u_\gamma \delta^v_\beta\right)\left(1 - \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\theta}\right) \qquad (2)$$

$$C_{\alpha\beta,\gamma\theta} \equiv C^{uv}_{\alpha\beta,\gamma\theta} x^0_{vu} = \left(\delta_{\beta\gamma}\delta^{n+1}_{\alpha+\theta} - \delta_{\alpha\theta}\delta^{n+1}_{\beta+\gamma}\right)\left(1 - \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\theta}\right)$$

где

$$\delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \ne j \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{ind} T_n = \operatorname{cork} \left\| C^{uv}_{\alpha\beta,\gamma\theta} x^0_{vu} \right\| = \operatorname{cork} \left\| C_{\alpha\beta,\gamma\theta} \right\| = \operatorname{cork} M$$

где матрица M (относительно базиса ($E_{11} E_{22} \dots E_{nn} E_{n1} \dots E_{k+1,k}$)) имеет вид:

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & D \\ -D^T & 0 \end{Vmatrix}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_{n1} & E_{n-1,2} & \dots & E_{k+1,k} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc|l} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & E_{11} \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 & E_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & E_{kk} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & E_{k+1,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & E_{n-1,n-1} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & E_{n,n} \end{array} \right\| \end{array} = \left\| \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \\ \theta_{k+1} \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{array} \right\|$$

$\theta_s,\ 1 \le s \le n$ - строки матрицы D

Аналогично на пространстве L^* :

$$\operatorname{codim} \widetilde{O}(A) = \operatorname{cork} \left\| \widetilde{C}^{u'v'}_{\alpha'\beta',\gamma'\theta'} \overline{X}^{0}_{v'u'} \right\| = \operatorname{cork} \left\| \widetilde{C}_{\alpha'\beta',\gamma'\theta'} \right\|$$

$= \operatorname{cork} \widetilde{M}$, где $\widetilde{O}(A)$ - орбита коприсоединенного представления на L^* , матрица $\widetilde{M}$ имеет вид

$$M = \left\| \begin{array}{cc} 0 & C \\ -C^T & 0 \end{array} \right\| \qquad \text{(относительно } (\overline{E}_{11} \dots \overline{E}_{k_0k_0}\ E_{n1} \dots E_{k+1,k}))$$

$C = \left\| \begin{array}{c} \widetilde{\theta}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\theta}_s \\ \vdots \\ \widetilde{\theta}_{k_0} \end{array} \right\|$, где s - строка $\widetilde{\theta}_s\ (1 \le s \le k_0)$ матрицы C

имеет вид: $$\widetilde{\theta}_s = \sum_{i=1}^{n} M_{s,i}\, \theta_i \qquad \text{(см.(I)).} \qquad (3)$$

Перейдем к построению набора $\widetilde{P}$. Пусть $\operatorname{cork} C = k_0 - k_1$

т.е. $\operatorname{rk} C = k_1 \le k_0$ и $\widetilde{\theta}_{r_i},\ i = 1, 2, \dots, k_1$

- линейно независимые строки матрицы C:

$$rk\, C = rk \begin{Vmatrix} \tilde{\theta}_{r_1} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{r_{k_1}} \end{Vmatrix} = k_1$$

Для каждого s : $1 \le s \le k_0$, $s \ne r_i$, $1 \le i \le k_1$ мы определим функцию $\tilde{P}_s = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_{s,i} \bar{x}_{r_i, r_i} - \bar{x}_{s,s}$ (4)
на L^*, где коэффициенты $\lambda_{s,i}$ определяются тождеством:

$$\tilde{\theta}_s = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_{s,i} \tilde{\theta}_{r_i}$$

Из (4) следует, что все линейные функции $\tilde{P}_s$ на L^* (их количество равно $k_0 - k_1$) функционально независимы. Кроме того, для каждого $i > [\frac{n+1}{2}]$, $P_i \in \mathcal{P}$ функция $P_i(x)$ не зависит от переменных $x_{\alpha,\alpha}$, $1 \le \alpha \le n$. Поэтому, мы определим на L^* функцию $\tilde{P}_i \equiv P_i$, считая, что функция P_i определена на L^*. Итак, мы получим набор функций $\tilde{\mathcal{P}}$ на L^* :

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{ \tilde{P}_s, \tilde{P}_i \}, \quad i > [\tfrac{n+1}{2}], 1 \le s \le k_0, s \ne r_i, 1 \le i \le k_1$$

Нетрудно видеть, что все функции набора $\tilde{\mathcal{P}}$ функционально независимы и их количество равно

$$|\tilde{\mathcal{P}}| = \frac{1}{2}(\dim L + \mathrm{ind}_L A) \qquad (5),$$

где $\mathrm{ind}_L A = \mathrm{codim}_{L^*} \bar{\mathcal{O}}(A)$, $\bar{\mathcal{O}}(A)$ - орбита коприсоединенного представления на L^*. Докажем, что набор $\tilde{\mathcal{P}}$ является инволютивным на L^*, т.е. все функции $\tilde{P}_s$, $\tilde{P}_i \in \mathcal{P}$ попарно находятся в инволюции. Для этого мы перепишем функции $\tilde{P}_s$, $1 \le s \le k_0$, $s \ne r_i$, $1 \le i \le k_1$, в системе координат x_{ij}, $1 \le j \le i \le n$ пространства T_n^* и в силу (I) получим: $\tilde{P}_s \to \tilde{P}_s'$,

$$\tilde{P}_s' = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_{s,i} \sum_{j=1}^{n} \mu_{r_i,j}\, x_{j,j} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{s,j}\, x_{j,j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{s,i}\mu_{r_i,j}-\alpha_{s,j}\Big)x_{j,j} \quad \text{на } T_\Pi^*; \quad \tilde P_s = \tilde P_s'\big|_{L^*}$$

С другой стороны, из соотношений (3) и (4) следует, что

$$\tilde\theta_s = \sum_{j=1}^{n}\mu_{s,j}\theta_j = \sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{s,i}\tilde\theta_{r_i} = \sum_{j=1}^{n}\mu_{r_i,j}\theta_j ,$$

т.е. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k_1}\mu_{r_i,j}\lambda_{s,i}-\mu_{s,j}\Big)\theta_j \equiv 0,\ 1\le s\le k_0$

$s\ne r_i$, $1\le i\le k_1$. В силу свойств строк $\theta_j\ (1\le j\le n)$, отсюда мы получаем

$$\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{s,i}\mu_{r_i,j}-\mu_{s,j} = \sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{s,i}\mu_{r_i,n+1-j}-\mu_{s,n+1-j}$$
$$1\le j\le k=\frac{n}{2}$$

Следовательно, $\tilde P_s'$ имеет вид:

$$\tilde P_s' = \sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{s,i}\mu_{r_i,j}-\mu_{s,j}\Big)\big(x_{j,j}+x_{n+1-j,n+1-j}\big)$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\beta_j P_j, \quad \beta_j = \sum_{i=1}^{k}\lambda_{s,i}\mu_{r_i,j}-\mu_{s,j},\ P_j\in\mathcal{P},\ 1\le j\le k.$$

Таким образом, из инволютивности функции набора $\mathcal{P}$ на T_Π^* следует инволютивность функции набора $\tilde{\mathcal{P}}$ на L^*. Отсюда, в силу (5) и того, что

$$|\tilde{\mathcal{P}}|\ge\frac{\dim L+\operatorname{ind}L}{2}, \quad |\tilde{\mathcal{P}}| = \frac{\dim L+\operatorname{ind}L}{2},$$

т.е. $\mathcal{P}$ является полным инволютивным набором полиномиальных функций на L^*. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 16.1 мы получаем.

Следствие 16.1. Пусть алгебра Ли

$$L = \sum_{s=1}^{k_0}\mathbb{R}\bar E_{s,s} + \sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{R}E_{ij}$$

и $\overline{E}_{s,s} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{s,i} E_{i,i}, 1 \le s \le k_0, n = 2k$, тогда

$$\operatorname{ind} L = k + k_0 - 2rk \begin{Vmatrix} (\alpha_{11} - \alpha_{1,n}) & \dots & (\alpha_{1,k} - \alpha_{1,k+1}) \\ (\alpha_{21} - \alpha_{2n}) & \dots & (\alpha_{2,k} - \alpha_{2,k+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{k_0,1} - \alpha_{k_0,n}) & \dots & (\alpha_{k_0,k} - \alpha_{k_0,k+1}) \end{Vmatrix}$$

$$= k + k_0 - 2rk \,\|(\alpha_{s,j} - \alpha_{s,n+1-j})\|_{\substack{1 \le j \le k \\ 1 \le s \le k_0}}$$

В частности, $\operatorname{ind} L = 0$ тогда и только тогда, когда $k_0 = k$ и

$$\det \|(\alpha_{s,j} - \alpha_{s,n+1-j})\|_{1 \le s, j \le k} \ne 0 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва, "Наука", 1974.
2. Браилов А.В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширение кольца скаляров. Вестник МГУ, матем., I - 1983.
3. Браилов А.В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутативными интегралами. ДАН СССР, 1983, т.271, № 2, 273-276.
4. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских операторов и алгебра уравнений. Кортевега-де Фриза. МН, 1975, т.30, № I, 67-100.
5. Гельфанд М.М., Дикий Л.А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы. Функц. анализ, 1976, т.10, № 4, 13-19.
6. Дикий Л.А. Замечания о гамильтоновых системах, связанные с группой вращений. Функц. анализ, 1972, т.6, № 4, 83-84.
7. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. Москва,"Мир", 1978.
8. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега - де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. МН, 1976, т.31, вып.I, 51-136.
9. Дюфло М., Верны. Свойства представления, двойственного к присоединенному представлению алгебры Ли. Сборник переводов "Математика", 1971, т.15, № 2, 8-9.
10. Камалин С.А., Переломов А.М. О построении канонических координат на орбитах коприсоединенного представления градуированных групп Ли. Функ. анализ, 1984, т.18, № 3.

11. Кириллов А.А. Элементы теорий представлений. Москва,"Наука", 1972.

12. Лебедев Д.Р., Манин Ю.И. Гамильтонов оператор Гельфанда-Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра. Функц. анализ, 1979, т.13, № 4, 40-46.

13. Ле Нгок Тьеуен. Коммутативные наборы функций на орбитах общего положения конечномерных алгебр Ли. УМН, 1983, т.38, вып.1, 179-180.

14. Ле Нгок Тьеуен. Алгебры Фробениуса и расширения многочленов на алгебрах Ли. - В кн.: "Геометрия и дифференциальные уравнения в механике", МГУ, 1986 (в печати).

15. Ле Нгок Тьеуен. Алгебры Фробениуса и инволютивность функций на расширенных алгебрах Ли. Труды семинара по век. и тенз. анализу, 1986, вып.22 (в печати).

16. Ле Нгок Тьеуен Коммутативные наборы функций на орбитах общего положения конечномерных алгебр Ли. - В кн.: "Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей", МГУ, 1984, 139-140.

17. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стихастизации в дискретных динамических системах. ЖЭТФ, 1974, т.67, № 2, 543-555.

18. Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики и n-мерного твердого тела. Функц. анализ, 1976, т.10, № 4, 93-94.

19. Мищенко А.С. Интегралы геодезических потоков на группах Ли. Функц. анализ, 1970, т.4, № 3, 73-78.

20. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, т.42, 396-415.

21. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. ДАН СССР, 1976, т.231, № 3, 536-538.

22. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. Труды семинара по век. и тенз. анализу, 1979, вып.19, 3-94.

23. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями. Труды семинара по век. и тенз. анализу, 1981, вып.20, 5-54.

24. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега- де Фриза I. Функц. анализ., 1974, т.8, № 3, 54-66.

25. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А., Френкель И.И. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы. ДАН СССР, 1979, т.247, № 4, 802-805.

26. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебра токов и нелинейные уравнения в частных производных. ДАН СССР, 1980, т.251, № 6, 1310-1314.

27. Рейман А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. Дифференциальная геометрия группы Ли и механики Ш, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1980, т.95, 3-54.

28. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега - де Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система. Функц. анализ, 1971, т.35, № 4, 18-27.

29. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли. Изв. АН СССР, сер. матем., 1979, т.43, № 3, 714-732.

30. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли. Изв. АН СССР, сер. мат., 1980, т.44, № 56, 1191-1199.

31. Трофимов В.В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными грандуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре, 1982, ДАН СССР, т.263, № 4, 812-816.

32. Трофимов В.В. Расширения алгебр Ли и гамильтоновы системы. Изв. АН СССР, 1983, т.47, № 6.

33. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли. УМН, 1984, т.39,вып.2,

34. Архангельский А.А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц. Матем. сборник, 1979, т.108, № I, 134-142.

35. Фоменко А.Т. О симметрических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах. Матем. сборник, 1981, т.115, № 2, 263-280.

36. Лакс П.Д. Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны. Математика, 1969, т.13, № 5, 128-150.

37. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений группы Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем. - Функц. анализ., 1983, т.17, вып.I, 31-39.

38. Adler M. On trace functional for formal preudodifferential operators and the symplectic struture for Korteweg - de Vies type equations. Invent Math, 1979, v.50, 219-248.

39. Flaschka H. Toda lattice II. Progr. Theor. Phys., 1974, v.51, 703-716.

40. Marsden J., Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. Reports Math. Phys., 1974, v.5, №1,121-130.

41. Kamalin S.A., Perelomov A.M. Construction of canonical coordindtes on polarized condjont orbits of Lie groups. Institut of theoreical and experimental physics, Moscow. 1984, ITE P-39.

42. Rais M. La representation coadjonte du group affinc. - Ann Inst. Fourrer, 1978, v.28, N°1.

43. Rais M. L'indice des produits semi-product $E \times_s \mathfrak{g}$, C.R.Acad. Sci., 1978, v.237, N°4 A.

44. Bogoyarlensky O.I. On perturbations of the Periodic Toda Lattice, Commun. Math. Phys., 1976, v.51, 201-209.

45. Moser. J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectial deformation - Adv. in Math, 1975, v.16, 19-220.

46. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Completely integrable Hamiltionian systems connected with semisimple Lie algebras. Invent Math, 1976, v.37, 93-109.