

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

на правах рукописи

УДК 514.77, 519.176, 517.982.22

ЛАУТ ИЛЬЯ ЛЕОНИДОВИЧ

СВЯЗЬ ВИДА НОРМЫ И ГЕОМЕТРИИ МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

01.01.04 — геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук А.О. Иванов

Москва – 2016

Содержание

Введение	3
1 Различимость нормированных пространств по устройству кратчайших и по точкам Ферма	8
1.1 Необходимые определения	8
1.2 Различимость нормированных пространств по устройству кратчайших	8
1.3 Различимость нормированных пространств по местоположению точек Ферма	11
2 Различимость нормированных пространств по устройству минимальных сетей Штейнера	21
2.1 Необходимые определения и предварительные результаты	21
2.2 Достаточное условие гомотетичности норм	39
3 Минимальные параметрические сети	47
Заключение	54
Список литературы	55

Введение.

Диссертация посвящена изучению связи между видом нормы и геометрией минимальных сетей в нормированных пространствах. Большинство задач, исследуемых в диссертации, являются частными случаями следующей общей постановки вопроса. Пусть дана некоторая информация о геометрии минимальных сетей Штейнера в нормированном пространстве. Требуется узнать, что тогда можно сказать про саму норму.

Неформально, сетью в метрическом пространстве называется набор кривых (будем называть их ребрами сети), некоторые из которых имеют общие концы. Будем говорить, что сеть соединяет граничное множество M точек, если, во-первых, M лежит в множестве концов ребер сети, и, во-вторых, можно перейти между любыми точками граничного множества, проходя по ребрам сети. Длина сети естественным образом определяется как сумма длин ее ребер. Сеть минимальной длины, соединяющая данное граничное множество, называется минимальной сетью Штейнера этого граничного множества.

Впервые формулировку задачи, равносильной задаче поиска минимальной сети Штейнера для трех точек на евклидовой плоскости, предложил Пьер Ферма (см. [1]). Ответом к задаче является сеть из трех отрезков, соединяющих данные точки с точкой, называемой точкой Ферма. Если у треугольника с вершинами в данных точках все углы меньше $\frac{2\pi}{3}$, то точка Ферма — это такая (единственная) точка, из которой все стороны треугольника видны под углом $\frac{2\pi}{3}$. Если же в треугольнике есть угол, больший либо равный $\frac{2\pi}{3}$, то точка Ферма совпадает с вершиной этого угла, а один из отрезков вырождается в точку. Обзор проблематики, связанной с точкой Ферма, можно найти в [10].

В 1934 году Ярник и Кесслер сформулировали задачу поиска минимальной сети Штейнера для произвольного числа точек на евклидовой плоскости (см. [2]); по традиции эта задача называется задачей Штейнера. Есть простая практическая интерпретация этой задачи: представим, что имеется несколько городов, и требует-

ся построить сеть дорог, чтобы из каждого города можно было доехать в каждый. Собственно, самым коротким (и, как правило, самым дешевым) вариантом будет минимальная сеть Штейнера.

Имеются и другие практические задачи, сводящиеся к решению задачи Штейнера, такие как поиск наиболее вероятных эволюционных цепочек в филогенетических пространствах или трассировка микросхем. Одной из задач оптимальной трассировки микросхем является минимизация длины дорожек проводника (здесь видно сходство с интерпретацией про дороги и города). Но в случае разводки микросхем присутствует ограничения на множество направлений, в которых могут прокладываться дорожки. В частности, если возможно прокладывать только вертикальные и горизонтальные отрезки, то задача минимизации длины дорожек проводника становится задачей Штейнера на плоскости с ℓ_1 -нормой, также называемой манхэттенской нормой: $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

Первые работы по изучению минимальных сетей Штейнера в нормированных плоскостях появились в шестидесятых годах XX века. В статьях [4, 9, 14, 15, 16] можно найти подробную историческую справку по данному вопросу.

Хорошо известно, что в некоторых нормированных пространствах кратчайшая линия, соединяющая две точки, не всегда единственна. Рассмотрим, например, двумерную манхэттенскую плоскость ℓ_1^2 . Для точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$, расстояние между которыми равно 2, любая непрерывная кривая с параметром t такая, что $x(t)$ и $y(t)$ — монотонно неубывающие функции ($x(0) = y(0) = 0, x(1) = y(1) = 1$), имеет длину 2. С другой стороны, для обычной евклидовой плоскости кратчайшая всегда единственна. Соответственно, манхэттенская и евклидова плоскости различимы по тому, какие кратчайшие кривые в них возможны. Однако, по виду возможных кратчайших можно различить между собой лишь некоторые нестрогие выпуклые нормы (см. критерий 1.1). Для любой же строго выпуклой нормы верно, что кратчайшая между двумя точками единственна и является прямолинейным отрезком между ними. Возникает естественный вопрос: нельзя ли использовать обобщение понятия кратчайшей для более детальной классификации нормирован-

ных пространств? В главе 1 изучается возможность различать нормы с точностью до гомотетии по устройству кратчайших сетей на трех точках. Две нормы будем называть F_3 -неразличимыми, если все кратчайшие сети на трех точках выглядят в них одинаково (строгое определение см. в разделе 1.3). Оказывается, существуют нормы на двумерной плоскости, F_3 -неразличимые с евклидовой нормой и отличные от нее (см. теорему 1.1). При этом, в размерности больше двух евклидова норма является в этом смысле уникальной (это прямое следствие из основной теоремы работы [7], приведенной здесь как теорема 1.3)

Из теоремы 1.1 следует, что знать положения точек Ферма всех троек точек недостаточно для того, чтобы отличить, например, евклидову норму от некоторых других двумерных норм. Естественным образом встает вопрос: можно ли гарантированно отличать друг от друга нормы, имея больше информации о них, а именно — основываясь на устройстве всех кратчайших сетей на всех конечных множествах точек? Теорема 2.5 положительно отвечает на этот вопрос в случае строго выпуклых дифференцируемых норм на плоскости.

Результаты главы 3 продолжают изучение минимальных параметрических сетей и их деформаций, проведенное в [4]. Рассматривается случай границ, порождающих единственную невырожденную минимальную параметрическую сеть в данной двумерной строго выпуклой дифференцируемой норме. Приводится альтернативное доказательство единственности минимальной параметрической сети для границ из малой окрестности границы рассматриваемого типа (этот факт впервые сформулирован и доказан в [4]), а также доказывается непрерывность координат подвижных вершин и естественность направления поворота при деформации границы рассматриваемого типа в ее малой окрестности (лемма 3.4 и теорема 3.1).

Структура работы

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Список основных результатов, выносимых на защиту

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

- (1) Получено достаточное условие F_3 -неразличимости данной нормы и евклидовой нормы на двумерной плоскости (см. теорему 1.1), а также необходимое условие этого для более узкого класса норм (см. теорему 1.2).
- (2) Получено достаточное условие гомотетичности двух норм в терминах минимальных сетей Штейнера (см. теорему 2.5).
- (3) Получены доказательства непрерывности координат подвижных вершин и естественности направления поворота при деформации границы рассматриваемого типа в ее малой окрестности (лемма 3.4 и теорема 3.1) для минимальных параметрических сетей в случае строго выпуклых норм.

Методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальной и метрической геометрии, геометрии нормированных пространств, топологии, теории графов, математического анализа.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре «Оптимальные сети» под руководством профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина (МГУ, 2010 — 2014 г.г.)
- на международных конференциях «Ломоносов» (МГУ, 2014 и 2015 г.г.)
- на международных конференциях «Александровские чтения» (МГУ, 2012 и 2016 г.г.)

- на семинаре «Геометрический анализ и вычислительная геометрия» в Волгоградском Государственном Университете, 2016 г.
- на семинаре кафедры математического анализа в ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2016 г.

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [17], [18], [19], [20] и [21], первые две — в журналах из перечня ВАК (для работы [17] в перечень входит версия журнала на английском языке).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постановку задачи, поддержку, внимание к работе и конструктивные замечания, А. О. Осиненко и З. Н. Овсянникову за продуктивные обсуждения и совместную работу, а также всем участникам и докладчикам семинара «Оптимальные сети» за внимание и полезные предложения.

1 Различимость нормированных пространств по устройству кратчайших и по точкам Ферма

1.1 Необходимые определения

Пусть X — нормированное пространство, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $\ell(\gamma)$ длин ломанных, вписанных в эту кривую, при стремящемся к 0 диаметру разбиения отрезка $[a, b]$ прообразами вершин ломанных. Число $\ell(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ .

Точкой Ферма трех точек A, B, C в метрическом пространстве (Y, ρ) называется точка $T \in Y$, минимизирующая сумму $\rho(A, T) + \rho(B, T) + \rho(C, T)$. В зависимости от метрического пространства, точка Ферма может не существовать или быть неединственной.

Норма в нормированном пространстве называется *строго выпуклой*, если единичный шар в этой норме является строго выпуклым множеством.

Напомним, что *банахово пространство* — полное нормированное векторное пространство, а *гильбертово пространство* — банахово пространство, норма которого порождена положительно определенным скалярным произведением.

Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если оно совпадает со своим вторым сопряженным пространством X^{**} при каноническом вложении.

Для удобства, будем иногда называть норму на n -мерном пространстве *n -мерной нормой*.

1.2 Различимость нормированных пространств по устройству кратчайших

В любом нормированном пространстве выполнено неравенство треугольника, поэтому прямолинейный отрезок между двумя точками всегда будет (возможно, не

единственной) кратчайшей между данными двумя точками.

Две нормы на векторном пространстве будем называть *неразличимыми по устройству кратчайших*, если для любых двух точек множества кратчайших между ними в первой и второй норме совпадают.

Как уже упоминалось во введении, для любых двух точек в любой строго выпуклой норме существует лишь одна кратчайшая, их соединяющая. То есть, для любых двух точек вид кратчайшей определен (это отрезок) и не зависит от нормы (при условии ее строгой выпуклости), а значит, все строго выпуклые нормы нельзя различить по виду кратчайших. Но для норм, заданных центрально симметричными выпуклыми многогранниками произвольной размерности, все же можно получить некоторую классификацию по видам кратчайших.

Будем называть норму *многогранной*, если ее единичная сфера является многогранником. Обозначим единичную сферу некоторой многогранной нормы n -мерного пространства N через Ω . Рассмотрим относительные внутренности всех граней Ω всех размерностей. Заметим, что они образуют разбиение Ω . Это означает, что конусы с исключенной вершиной в 0 и основаниями — относительными внутренностями граней Ω образуют разбиение $N \setminus \{0\}$, обозначим разбиение за $\tilde{\Omega}$. Теперь, для каждой точки $P \in N \setminus \{0\}$ обозначим за OG_P конус из $\tilde{\Omega}$, которому принадлежит открытый луч (OP) с началом в O (для удобства, будем обозначать 0 пространства N за O при его рассмотрении как точки); за G_P обозначим относительную внутренность грани, являющуюся основанием конуса OG_P .

Утверждение 1.1 Пусть N — нормированное пространство размерности n с многогранной нормой. Тогда для любого $P \in \Omega$ измеримая кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow N$, $\gamma(0) = O$, $\gamma(1) = P$ является кратчайшей между O и P тогда и только тогда, когда для любых a, b таких, что $a < b$, $a, b \in [0, 1]$, вектор $\gamma(a)\gamma(b)$ принадлежит $\overline{OG_P}$.

Доказательство. (\Leftarrow). Пусть T — любое разбиение отрезка $[0, 1]$, заданное последовательностью $\{t_i\}_{i=0}^m : t_0 = 0, t_m = 1, \forall i, j : 0 \leq i \leq j \leq m, t_i \leq t_j$. Обозначим

диаметр разбиения T за $s(T)$. Спроецируем все векторы $v_i := \gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})$ на вектор $v := OP$ параллельно любой гиперплоскости π , являющейся опорной к сфере Ω и такой, что $G_P = \Omega \cap \pi$, обозначим оператор проекции за A . Заметим, что A не меняет норму векторов, параллельных какому-либо вектору из $\overline{OG_P}$, и уменьшает норму остальных. Поскольку $\forall i \in [0, m-1]$ вектор $v_i \in \overline{OG_P}$, то $\|v_i\| = \|Av_i\|$. Это означает, что длина кривой $\ell(\gamma) = \lim_{s(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m \|v_i\| = \lim_{s(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m \|Av_i\| = \|OP\|$, что и требовалось доказать.

(\Rightarrow) Докажем от противного. Пусть γ — кратчайшая кривая между O и P , $\gamma(0) = O, \gamma(1) = P$. Пусть $\exists a, b \in [0, 1] : a < b, \gamma(a)\gamma(b) \notin \overline{OG_P}$. Покажем в этом случае, что длина кривой γ больше, чем $\|OP\|$. Действительно, длина γ не меньше длины ломаной $O\gamma(a)\gamma(b)P$, которая равна $\|O\gamma(a)\| + \|\gamma(a)\gamma(b)\| + \|\gamma(b)P\|$. По предположению, $\gamma(a)\gamma(b) \notin \overline{OG_P}$. Возможны два варианта:

1) $\gamma(b)\gamma(a) \in \overline{OG_P}$. Тогда длина ломаной больше либо равна, чем $\|OP\| + 2 \cdot \|\gamma(a)\gamma(b)\| = \|OP\| + 2 \cdot \|A(\gamma(a)\gamma(b))\| > \|OP\|$ (поскольку в этом случае, если ввести ориентацию на прямой OP « O левее P », то проекция $A(\gamma(b))$ окажется левее, чем $A(\gamma(a))$)

2) $\gamma(b)\gamma(a) \notin \overline{OG_P}$. Тогда длина ломаной больше, чем $\|A(O\gamma(a))\| + \|A(\gamma(a)\gamma(b))\| + \|A(\gamma(b)P)\| \geq \|OP\|$, противоречие.

Критерий 1.1 *Две многогранные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на линейном n -мерном пространстве N неразличимы по устройству кратчайших \Leftrightarrow у этих двух норм совпадают разбиения $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ на конусы.*

Доказательство. (\Leftarrow). По утверждению 1.1, кратчайшие в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ совпадают.

(\Rightarrow) Докажем от противного. Пусть нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ неразличимы, но у них не совпадают разбиения на конусы $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$. Это означает, что найдется такая точка $P \in N \setminus \{O\}$, что $OG_P^1 \neq OG_P^2$. Без ограничения общности можно считать, что $\exists v_1 \in OG_P^1, v_1 \notin OG_P^2$. Построим кривую, являющуюся кратчайшей в $\|\cdot\|_1$ и не являющуюся кратчайшей в $\|\cdot\|_2$.

Рассмотрим вектор $OP - \varepsilon v_1$. OG_P^1 — относительно открытый конус, поэтому найдется $\varepsilon > 0$: $OP - \varepsilon v_1 \in OG_P^1$. Обозначим точку $P - \varepsilon v_1$ за L . Тогда длина ломаной OLP в $\|\cdot\|_1$ равна $\|OP\|_1$, и OLP — кратчайшая. Вместе с тем, $v_1 \notin OG_P^2$, и по утверждению 1.1 ломаная OLP не является кратчайшей кривой между O и P , поскольку ее звено $LP = \varepsilon v_1$ не принадлежит конусу OG_P^2 ; значит, длина ломаной OLP в норме $\|\cdot\|_2$ больше $\|OP\|_2$, получаем противоречие.

1.3 Различимость нормированных пространств по местоположению точек Ферма

По устройству кратчайших отличить евклидову норму от остальных строго выпуклых норм невозможно. Оказывается, для этих целей полезно рассмотреть обобщение кратчайших кривых между двумя точками, а именно — кратчайшие сети на трех точках, «тройки» с разветвлением в точке Ферма этих трех точек.

Две нормы на векторном пространстве будем называть F_3 -неразличимыми, если для любых трех точек множества их точек Ферма в первой и второй норме совпадают.

Теорема 1.1 Пусть дано пространство \mathbb{R}^2 с евклидовой нормой. Тогда для любой строго выпуклой нормы, единичная окружность которой симметрична относительно поворота на $\frac{\pi}{3}$, верно, что эта норма и евклидова — F_3 -неразличимы.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.1, разберем необходимые для этого леммы.

Лемма 1.1 Пусть в векторной плоскости с заданной нормой заданы четыре попарно несовпадающие точки $\{u, v, w\}$ и t . Лучи с началом в t и направленные к $\{u, v, w\}$ обозначим, соответственно, через $\{R_{tu}, R_{tv}, R_{tw}\}$. Тогда t — точка Ферма для $\{u, v, w\}$, если и только если t — точка Ферма для $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ — любые точки на лучах $\{R_{tu}, R_{tv}, R_{tw}\}$, соответственно.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение справедливо для более узкого класса троек точек, а именно $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, полученные из данной тройки $\{u, v, w\}$ при помощи гомотетии с неотрицательным коэффициентом с центром в t (поскольку точка Ферма образов трои́ки точек при гомотетии будет образом точки Ферма изначальной трои́ки точек). Теперь, пусть есть две трои́ки точек $\{u_1, v_1, w_1\}$ и $\{u_2, v_2, w_2\}$ такие, что для первой трои́ки t является точкой Ферма, а для второй — нет. Тогда для второй трои́ки проведем сжимающую гомотетию с центром t так, чтобы образы точек $\{u_2, v_2, w_2\}$ при гомотетии оказались (назовем их, соответственно, $\{u'_2, v'_2, w'_2\}$), соответственно, на отрезках tu_1, tv_1 и tw_1 . Заметим, что точка t не является точкой Ферма для трои́ки $\{u'_2, v'_2, w'_2\}$, (назовем их точку Ферма t'); поэтому сеть из отрезков $\{tu'_2, tv'_2, tw'_2\}$ между точками $\{u'_2, v'_2, w'_2\}$ заменим на сеть из отрезков $\{t'u'_2, t'v'_2, t'w'_2\}$, при этом сеть для $\{u'_2, v'_2, w'_2\}$ стала короче, а значит, что и для $\{u_1, v_1, w_1\}$ сеть, состоящая из отрезков $\{u_1u'_2, v_1v'_2, w_1w'_2\}$ и $\{t'u'_2, t'v'_2, t'w'_2\}$, окажется короче сети из отрезков $\{tu_1, tv_1, tw_1\}$. По неравенству треугольника имеем

$$\|u_1u'_2\| + \|v_1v'_2\| + \|w_1w'_2\| + \|t'u'_2\| + \|t'v'_2\| + \|t'w'_2\| > \|t'u_1\| + \|t'v_1\| + \|t'w_1\|,$$

противоречие.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующий результат в вырожденном случае:

Лемма 1.2 Пусть в векторной плоскости с заданной нормой заданы три попарно несовпадающие точки $\{u, v, w\}$ и $t = u$. Также, лучи с началом в t и направленные на $\{v, w\}$ назовем, соответственно, через $\{R_{tv}, R_{tw}\}$. Тогда t — точка Ферма для $\{u, v, w\}$, если и только если t — точка Ферма для $\{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где $\{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ — любые точки на лучах $\{R_{tv}, R_{tw}\}$ соответственно.

Лемма 1.3 Точка Ферма t треугольника uvw лежит внутри или на границе этого треугольника (в случае двумерного пространства).

Доказательство. Пусть точка t лежит вне треугольника. Тогда один из лучей R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} пересекает относительную внутренность одной из сторон треугольника. Без ограничения общности будем считать, что луч R_{tv} пересекает сторону uw в точке \tilde{v} . Тогда по лемме 1.1 точка t является точкой Ферма вырожденного треугольника $u\tilde{v}w$, что невозможно.

Лемма 1.4 *В нормированном пространстве со строго выпуклой нормой $\| \cdot \|$ точка Ферма существует и единственна для любых трех точек.*

Данная лемма следует из теоремы 3.22 работы [10], ниже приведем элементарное доказательство.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть есть две различные точки Ферма O_1 и O_2 вершин невырожденного треугольника A_1, A_2, A_3 . Рассмотрим O_3 — середину отрезка O_1O_2 . Рассмотрим множество лучей $[A_1O_1), [A_2O_1), [A_3O_1)$; если O_1 совпадает с какой-то из вершин треугольника, уберем из рассмотрения соответствующий вырожденный луч. Среди оставшихся лучей найдется хотя бы один, которому не принадлежит точка O_2 , без ограничения общности это луч $[A_2O_1)$. Поскольку норма строго выпукла, имеем:

$$\| A_1O_3 \| \leq \frac{\| A_1O_1 \| + \| A_1O_2 \|}{2},$$

$$\| A_2O_3 \| < \frac{\| A_2O_1 \| + \| A_2O_2 \|}{2},$$

$$\| A_3O_3 \| \leq \frac{\| A_3O_1 \| + \| A_3O_2 \|}{2},$$

$$\| A_1O_1 \| + \| A_2O_1 \| + \| A_3O_1 \| = \| A_1O_2 \| + \| A_2O_2 \| + \| A_3O_2 \|.$$

Сложив неравенства и используя равенство, получим, что сумма расстояний до A_1, A_2, A_3 от O_3 меньше, чем от O_1 , противоречие.

Случай вырожденного треугольника $A_1A_2A_3$ рассматривается еще проще: точка Ферма O в нем — это средняя из трех вершин на прямой. Сумма расстояний от любой другой точки O' до трех вершин треугольника больше, чем такая сумма от O как минимум на величину $\| OO' \|$.

Доказательство теоремы 1.1. Докажем, что для любой данной нормы ρ , единичная окружность которой — строго выпуклая фигура, симметричная относительно поворота на $\frac{\pi}{3}$, точки Ферма на любых трех точках в данной и евклидовой норме — совпадают.

Возьмем любой единичный по норме ρ вектор u , а также его образы v и w при поворотах на $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Покажем, что точка Ферма точек — концов векторов $\{u, v, w\}$ единственна и равна 0. Будем называть все треугольники, полученные таким образом, *треугольниками типа TS* .

По лемме 1.4, в случае строго выпуклой нормы точка Ферма любых трех точек единственна. Предположим, что точка Ферма точек $\{u, v, w\}$ — это $t \neq 0$. Тогда совершим поворот относительно 0 на угол $\frac{2\pi}{3}$. При этом преобразовании вектора $\{u, v, w\}$ перейдут друг в друга по циклу, а преобразование будет изометрией (так как единичная окружность симметрична относительно поворота на $\frac{\pi}{3}$). Это означает, что образ t при повороте является точкой Ферма образов $\{u, v, w\}$. Получается, что у $\{u, v, w\}$ есть по крайней мере две точки Ферма, противоречие.

Исходя из леммы 1.1, имеем, что все треугольники uvw , внутри которых есть точка t , из которой все стороны треугольника видны под углами $\frac{2\pi}{3}$, имеют точку t точкой Ферма. Действительно, в этом случае на лучах R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} можно найти точки $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, являющиеся вершинами параллельно перенесенного треугольника типа TS , для которого, по уже доказанному, точка t является точкой Ферма. Тогда по лемме 1.1 точка t является точкой Ферма и для треугольника uvw .

Легко видеть, что такая точка внутри треугольника существует, и она совпадает с евклидовой точкой Ферма, тогда и только тогда, когда все углы треугольника меньше $\frac{2\pi}{3}$.

Осталось доказать совпадение точек Ферма в евклидовой и данной норме для треугольников, один из углов которых больше $\frac{2\pi}{3}$. Для евклидовой нормы точкой Ферма в этом случае станет вершина тупого угла; покажем то же для данной нормы, для этого нам потребуется лемма 1.3.

Предположим, что точка Ферма t некоторого треугольника с вершинами $\{u, v, w\}$

и углом при вершине v , больше либо равным $\frac{2\pi}{3}$, не совпала с v . Покажем сначала, что точка t не могла совпасть с вершинами u и w . Предположим обратное: пусть, без ограничения общности, t совпала с u . Возьмем на лучах R_{tv}, R_{tw} точки \tilde{v}, \tilde{w} , соответственно, так, чтобы отрезки $u\tilde{v}, u\tilde{w}$ были равны в евклидовой норме. Угол $\angle vuw$ меньше $\frac{\pi}{3}$, поэтому в треугольнике с вершинами $\{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ (который является равнобедренным в евклидовой норме со всеми углами меньше $\frac{2\pi}{3}$) существует точка \tilde{t} такая, что все его стороны видны под углами $\frac{2\pi}{3}$, что делает \tilde{t} второй точкой Ферма для треугольника $\{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, противоречие.

Таким образом, t не совпадает ни с одной вершиной. Проведем лучи R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} . Внутри или на границе треугольника с вершинами $\{u, v, w\}$ нет такой точки, что отрезки uv, vw, wu видны из нее под углами в $\frac{2\pi}{3}$, и точка t — не исключение. Возьмем на луче R_{tv} точку \tilde{v} такую, что угол $\angle u\tilde{v}w$ равен $\frac{\pi}{2}$ (такая найдется по непрерывности: для v указанный угол больше $\frac{2\pi}{3}$, а при устремлении \tilde{v} по лучу R_{tv} к бесконечности — стремится к 0). По лемме 1.1, для треугольника $\{u, \tilde{v}, w\}$ точка t является точкой Ферма. Но для этого треугольника существует точка \tilde{t} , такая, что все его стороны видны под углами $\frac{2\pi}{3}$, что делает \tilde{t} второй точкой Ферма для треугольника $\{u, \tilde{v}, w\}$, противоречие. Теорема 1.1 доказана.

Для наглядности опишем пример неевклидовой нормы, F_3 -неразличимой с евклидовой. Например, можно взять правильный шестиугольник $ABCDEF$, построить дугу окружности с центром O в середине стороны AB между D и E , и повторить это построение для всех пар соседних вершин (см. Рис. 1). Полученная строго выпуклая фигура задает норму как единичная окружность и удовлетворяет условиям теоремы 1.1.

Следующая теорема является частичным обращением теоремы 1.1.

Теорема 1.2 Пусть дано пространство \mathbb{R}^2 со введенной евклидовой нормой. Пусть на этом пространстве также введена другая норма, F_3 -неразличимая с евклидовой, единичная окружность которой удовлетворяет следующему условию: записанная в полярных координатах как 2π -периодическая функция $r(\phi)$, она диффе-

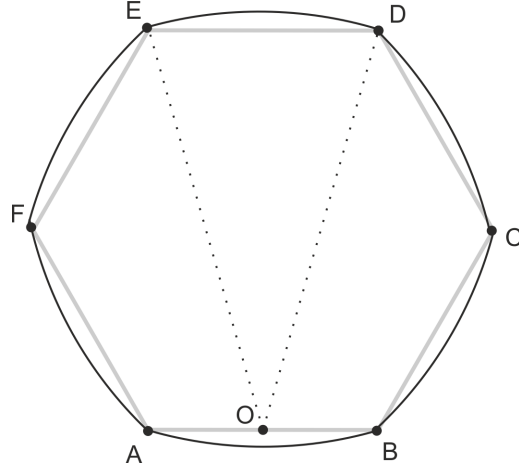


Рис. 1: пример единичной окружности неевклидовой нормы, F_3 -неразличимой с евклидовой.

ренцируема всюду, кроме конечного числа точек на периоде (обозначим множество точек дифференцируемости через $I_0 \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

Тогда для любого ϕ верно равенство $r(\phi) = r(\phi + \frac{\pi}{3})$.

Доказательство. Заметим, что если I_1 и I_2 — сдвиги I_0 на $\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$ соответственно, то $I = I_0 \cap I_1 \cap I_2$ будет таково, что множество $[0, 2\pi) \setminus I$ будет состоять из конечного числа точек. Пусть $\phi_0 \in I$ (в этом случае $\phi_0 + \frac{2\pi}{3} \in I$ и $\phi_0 - \frac{2\pi}{3} \in I$).

Поскольку мы имеем дело с двумя нормами одновременно, введем следующие обозначения: выберем некоторые евклидовы координаты (x, y) с центром в O , тогда $r(\phi)$ — единичная окружность другой нормы в полярных координатах, согласованных с евклидовыми, сама же другая норма будет обозначаться как $\|\cdot\|$ либо как $\rho(x, y)$, если даны координаты (x, y) . «Длина» измеряется евклидовой нормой $\|\cdot\|_e$. Скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать значение ковектора на векторе.

Рассмотрим три точки в полярных координатах на лучах из 0 , имеющих попарные углы $\frac{2\pi}{3}$, сделав замену координат $(r, \phi) \rightarrow (r, \phi - \phi_0)$, возьмем $P_1 = (r(0), 0)$, $P_2 = (r(\frac{2\pi}{3}), \frac{2\pi}{3})$, $P_3 = (r(\frac{4\pi}{3}), \frac{4\pi}{3})$. Пусть ковекторы e_1, e_2, e_3 — это градиенты $\rho(x, y)$ в точках P_1, P_2, P_3 соответственно. Вектора OP_i назовем r_i . Норма

ρ F_3 -неразличима с евклидовой, поэтому точка Ферма для P_1, P_2, P_3 в норме ρ — это точка O . По лемме 2.1 имеем $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Рассмотрим базисы (n_i, τ_i) , являющиеся поворотами стандартного ортонормированного базиса на углы $\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1)$ соответственно ($i = 1, 2, 3$). Разложим e_i по базису (n_i, τ_i) .

Напомним равенства, которыми мы будем пользоваться в переходах:

1) $\|r_i\| = 1$, поскольку r_i по определению является единичным вектором в норме $\|\cdot\|$.

2) Для вектора v , заданного в полярных координатах $v = (r, \phi)$, верно $\|v\| = \frac{\|v\|_e}{r(\phi)}$ ($\|v\|_e$ — длина вектора v , $r(\phi)$ — длина сонаправленного ему единичного в норме $\|\cdot\|$ вектора, и данное простое отношение равно $\|v\|$ по свойству однородности нормы).

Посчитаем проекцию e_i на n_i . Распишем равенство, пользуясь параллельностью векторов r_i и n_i :

$$\langle e_i, \varepsilon \cdot n_i \rangle + \bar{o}(\varepsilon) = \|r_i + \varepsilon \cdot n_i\| - \|r_i\| = \|r_i\| \cdot \left(1 + \frac{\|\varepsilon \cdot n_i\|}{\|r_i\|} - 1\right) = \|r_i\| \cdot \frac{\|\varepsilon \cdot n_i\|_e}{\|r_i\|_e}.$$

Поделим обе части на ε , перейдем к пределу по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ и воспользуемся $\|r_i\|_e = r(\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1))$:

$$\langle e_i, n_i \rangle = \frac{1}{r(\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1))}.$$

Посчитаем проекцию e_i на τ_i . Пусть $\varepsilon \cdot \tau_i$ — малое приращение вектора r_i по направлению τ_i .

$$\langle e_i, \varepsilon \cdot \tau_i \rangle + \bar{o}(\varepsilon) = \|r_i + \varepsilon \cdot \tau_i\| - \|r_i\| = \frac{\|r_i + \varepsilon \cdot \tau_i\|_e}{r(\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1) + \arctg(\frac{\varepsilon}{\|r_i\|_e}))} - 1.$$

В числителе воспользуемся ортогональностью r_i и τ_i . Зная, что $\sqrt{1 + \varepsilon^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \bar{o}(\varepsilon^2)$, имеем $\|r_i + \varepsilon \cdot \tau_i\|_e = \|r_i\|_e + \bar{o}(\varepsilon)$. В знаменателе же распишем значение r в точке, близкой к $\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1)$, через значения r и r' в ней.

$$\frac{\|r_i + \varepsilon \cdot \tau_i\|_e}{r(\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1) + \arctg(\frac{\varepsilon}{\|r_i\|_e}))} - 1 = \frac{\|r_i\|_e + \bar{o}(\varepsilon)}{\|r_i\|_e + \frac{\varepsilon}{\|r_i\|_e} r'(\frac{2\pi}{3} \cdot (i - 1)) + \bar{o}(\varepsilon)} - 1.$$

В первом равенстве внесем единицу под общий знаменатель и воспользуемся тождеством $\frac{\varepsilon + \bar{o}(\varepsilon)}{c + \bar{o}(1)} = \frac{\varepsilon}{c} + \bar{o}(\varepsilon)$ для $c \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\|r_i\|_e + \bar{o}(\varepsilon)}{\|r_i\|_e + \frac{\varepsilon}{\|r_i\|_e} r'(\frac{2\pi}{3} \cdot (i-1)) + \bar{o}(\varepsilon)} - 1 &= -\frac{\varepsilon \cdot r'(\frac{2\pi}{3} \cdot (i-1))}{\|r_i\|_e^2} + \bar{o}(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{r}\right)' \Big|_{\frac{2\pi}{3} \cdot (i-1)} + \bar{o}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Поделим обе части на ε и перейдем к пределу по ε :

$$\langle e_i, \tau_i \rangle = \left(\frac{1}{r}\right)' \Big|_{\frac{2\pi}{3} \cdot (i-1)}.$$

Заметим, что при замене координат $(r, \phi) \rightarrow (r, \phi + \phi_1)$, формулы выше остаются верны при $(\phi_1 - \phi_0) \in I$. Мы имеем шесть векторов — проекций векторов e_i на векторы базисов (n_i, τ_i) соответственно. Сумма этих шести векторов равна нулю, так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Спроецировав все шесть векторов на векторы базиса (n_1, τ_1) , получим два уравнения — равенства нулю проекции суммы на τ_1 и на n_1 . Напомним, что базисы (n_i, τ_i) — это повороты стандартного ортонормированного базиса на углы $\frac{2\pi}{3} \cdot (i-1)$ соответственно ($i = 1, 2, 3$), поэтому тригонометрические функции от углов проекции легко вычисляются.

Проекция на n_1 :

$$A_1 = \frac{1}{r(\phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} - \frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})} \right)' = 0.$$

Проекция на τ_1 :

$$A_2 = \left(\frac{1}{r(\phi)}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} \right)' + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})} - \frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} \right) = 0.$$

Поскольку равенства $A_1 = 0, A_2 = 0$ выполнены для любого $\phi \in I$, а выражение A_1 дифференцируемо в некоторой окрестности любого заданного угла $\phi \in I$ и его производная равна 0, имеем, что для $\phi \in I$ выполнено уравнение $A_1' = A_2$. Приведя подобные, получим

$$-\left(\frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} - \frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})}\right)'' = \left(\frac{1}{r(\phi - \frac{2\pi}{3})} - \frac{1}{r(\phi + \frac{2\pi}{3})}\right).$$

Обозначив правую часть за f , получим уравнение $f + f'' = 0$. I — это объединение интервалов, на каждом это уравнение выполнено. Рассмотрим любую точку $\phi_0 \notin I$, обозначим $f_1(\phi) = f(\phi + \phi_0)$, $f_2(\phi) = f(\phi + \frac{2\pi}{3} + \phi_0)$, $f_3(\phi) = f(\phi - \frac{2\pi}{3} + \phi_0)$. f_1, f_2, f_3 — дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности нуля $\omega = \omega^- \cup \omega^+ = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Запишем общий вид f_1, f_2, f_3 :

$f_i|_{\omega^-} = a_i^- \cos(\phi) + b_i^- \sin(\phi)$, $f_i|_{\omega^+} = a_i^+ \cos(\phi) + b_i^+ \sin(\phi)$. Заметим, что по непрерывности f_i в точке 0, $a_i^- = a_i^+$ для всех i . Перепишем выражение A_1 на ω в терминах f_1, f_2, f_3 :

$$A_1 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_1' = 0.$$

Сдвигом аргумента на $\pm \frac{2\pi}{3}$ получим еще два уравнения:

$$\frac{1}{2}(f_1 - f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3' = 0,$$

$$\frac{1}{2}(f_3 - f_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2' = 0.$$

Переписав уравнения на ω^- и ω^+ , используя общий вид f_1, f_2, f_3 и приравняв нулю коэффициенты при $\cos(\phi)$, получим:

$$\frac{1}{2}(a_2^- - a_3^-) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1^- = 0, \quad \frac{1}{2}(a_2^+ - a_3^+) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1^+ = 0,$$

$$\frac{1}{2}(a_1^- - a_2^-) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3^- = 0, \quad \frac{1}{2}(a_1^+ - a_2^+) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3^+ = 0,$$

$$\frac{1}{2}(a_3^- - a_1^-) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2^- = 0, \quad \frac{1}{2}(a_3^+ - a_1^+) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2^+ = 0.$$

Выше было показано, что $a_i^- = a_i^+$ для всех i . Из этого факта и системы равенств следует, что $b_i^- = b_i^+$ для всех i . Это значит, что слева и справа от точки $\phi_0 \notin I$ коэффициенты функции f при $\cos(\phi)$ и $\sin(\phi)$ совпадают; получается, что совпадение коэффициентов происходит на всем множестве I . Но f — непрерывна, и всюду, кроме конечного числа точек, выполнено $f(\phi) = a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi)$, поэтому формула остается верна и на дополнении к I . В частности, для любого ϕ выполнено $f(\phi + \pi) = -f(\phi)$. Поскольку $r(\phi)$ — график единичной окружности нормы в

полярных координатах, имеем $r(\phi + \pi) = r(\phi)$, следовательно $f(\phi + \pi) = f(\phi)$. Получаем из этого $f \equiv 0$, из чего по определению функции f после сдвига аргумента на $\frac{2\pi}{3}$ следует, что для любого ϕ верно $r(\phi) = r(\phi - \frac{2\pi}{3})$.

В работе [7] доказано, что для банаховых пространств размерности больше двух имеет место следующий критерий:

Теорема 1.3 *Пусть дано банахово пространство размерности больше двух. Оно является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых трех векторов верно, что хотя бы одна точка Ферма треугольника, составленного из концов этих трех векторов, лежит в аффинной плоскости треугольника.*

Рассмотрим банахово пространство размерности больше двух. Пусть оно и гильбертово пространство той же размерности F_3 -неразличимы. Тогда для любых трех точек их точка Ферма по норме банахова пространства лежит в аффинной плоскости трех точек, и отсюда, благодаря теореме 1.3, следует гильбертовость рассмотренного банахова пространства. В двумерном же случае, по теореме 1.1, данное пространство, F_3 -неразличимое с гильбертовым пространством, не обязательно является гильбертовым. Соответственно, имеет место следующее следствие:

Следствие 1.1 *Существуют негильбертовы пространства размерности 2, F_3 -неразличимые с гильбертовым пространством; гильбертовы пространства размерности больше 3 F_3 -различимы с негильбертовыми.*

Пример такого негильбертова пространства размерности 2 приведен после доказательства теоремы 1.1.

2 Различимость нормированных пространств по устройству минимальных сетей Штейнера

2.1 Необходимые определения и предварительные результаты

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть X — нормированное пространство, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *спрямляемой*, если существует конечный предел $\ell(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую, при стремящемся к нулю диаметре разбиения отрезка $[a, b]$ прообразами вершин ломаных. Число $\ell(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ .

Норма в нормированном пространстве называется *строго выпуклой*, если единичный шар в этой норме является строго выпуклым множеством.

Норма в нормированном пространстве называется *дифференцируемой*, если она является дифференцируемой функцией в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Методами математического анализа несложно показать, что в конечномерном случае из поточечной дифференцируемости нормы следует ее непрерывная дифференцируемость в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (это напрямую следует из [12, Proposition 13.7] — в конечномерном случае это предложение формулируется как «дифференциал любой непрерывной выпуклой функции в нормированном пространстве непрерывен на множестве ее дифференцируемости»), так что далее в работе выражение *дифференцируемая норма* (или *гладкая норма*) следует читать как « C^1 -гладкая норма». Дифференцируемость нормы равносильна тому, что единичная сфера в этой норме является C^1 -гладким подмножеством в \mathbb{R}^n с введенной евклидовой нормой (см. [12, Proposition 13.14]).

Следующие определения представлены в статье [4], здесь же приведем необходимые выдержки.

Топологический граф — это топологическое пространство, склеенное из набора отрезков по некоторой эквивалентности, заданной на множестве концевых точках

этих отрезков. В дальнейшем все рассматриваемые топологические графы предполагаются склеенными из конечного числа отрезков. Для краткости будем называть топологические графы просто графами. Точки графа, соответствующие концевым точкам порождающих его отрезков, называются *вершинами*, а связные компоненты дополнения до множества вершин — *ребрами* графа. Ясно, что каждое ребро — это внутренность некоторого отрезка. *Границей* графа G называется произвольное фиксированное подмножество ∂G его вершин. Если такое подмножество фиксировано, то граф называют *графом с границей*. Отметим, что наши определения объединяют комбинаторные и топологические свойства графов, поэтому в дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумений, будем применять как топологическую, так и комбинаторную терминологию.

Пусть X — конечномерное линейное пространство с некоторой нормой ρ . Непрерывное отображение Γ связного графа G в пространство X называется *сетью*. Граф G в этом случае называется *параметризующим графом* рассматриваемой сети, или ее *типом*, или ее *топологией*. Ограничения отображения Γ на ребра (вершины, границу) параметризующего графа называются *ребрами* (соответственно, *вершинами* и *границей*) сети Γ . Если $M \subset X$ — образ границы $\partial \Gamma$ сети Γ , то говорят, что сеть Γ *соединяет* множество M по граничному отображению $\partial \Gamma$. Вершины графа (сети), входящие в границу, называются *граничными*, а все остальные — *подвижными*. Также *граничными* называются ребра, инцидентные граничным вершинам.

Каждое ребро сети продолжается по непрерывности до отображения замкнутого отрезка в пространство X . Полученное отображение называется *замкнутым ребром* сети. Ребро сети называется *вырожденным*, если оно представляет собой отображение в точку. Сеть без вырожденных ребер называют *невыврожденной*. Далее, сеть $\Gamma: G \rightarrow X$ называется *гладкой* (*кусочно-гладкой*, *регулярной*, *кусочно-регулярной*), если каждое ее замкнутое ребро является кривой соответствующей гладкости в нормированном пространстве X . Сеть назовем *квазирегулярной*, если каждое ее ребро или регулярно, или вырождено.

Пусть Γ — произвольная квазирегулярная сеть на X . Рассмотрим все вершины, инцидентные вырожденным ребрам. Разрежем сеть по этому множеству вершин, получим множество подсетей и уберем из рассмотрения подсети, состоящие из одного вырожденного ребра. Оставшиеся подсети назовем *невыврожденными компонентами* Γ .

Пусть Γ — произвольная сеть на X с ребрами — спрямляемыми кривыми. Тогда *длиной сети* Γ назовем сумму длин ее ребер. Сеть Γ , соединяющая множество $M \subset X$, называется *кратчайшей*, или *минимальным деревом Штейнера*, или *минимальной сетью Штейнера*, если ее длина не превосходит длины любой сети, соединяющей M . Кратчайших сетей может быть несколько, обозначим их множество через $SMT(M)$. Там, где контекст подразумевает рассмотрение одной кратчайшей сети, а не множества кратчайших сетей, будем подразумевать под $SMT(M)$ любую из кратчайших сетей.

Сеть $\Gamma: G \rightarrow X$ называется *линейной*, если все ее ребра — прямолинейные отрезки.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ — некоторая сеть. Непрерывное однопараметрическое семейство $\Gamma_t, t \in [0, 1]$, сетей $\Gamma_t: G \rightarrow X$, такое что $\Gamma_0 = \Gamma$ называется *деформацией сети* Γ . Каждая деформация Γ_t — это непрерывное отображение $\Gamma_t: G \times [0, 1] \rightarrow X$. Если исходная сеть Γ является гладкой, то дополнительно предполагается, что для каждого ребра e параметризующего графа отображение $\Gamma_t: e \times [0, 1] \rightarrow X$ является гладкими (аналогично для кусочно-гладкой, регулярной, кусочно-регулярной сети $\Gamma = \Gamma_0$). Определенные только что деформации называются *сохраняющими топологию*. Все деформации сетей, рассматриваемые ниже, будут принадлежать этому классу.

Сеть Γ называется *экстремальной относительно заданного класса деформаций*, если для любой деформации $\Gamma_t, t \in [0, 1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$ (из заданного класса деформаций), выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geq 0.$$

Напомним, что *деревом* называется связный ациклический граф. Дерево с границей будем называть *бинарным*, если степень всех его граничных вершин равна 1, а всех подвижных — 3.

При поиске $SMT(M)$ в нормированном пространстве X для конечного M можно рассматривать только сети с топологиями — бинарными деревьями, и ребрами — отрезками в X (возможно, вырожденными). Можно зафиксировать топологию и граничное отображение, тогда появляется задача минимизации длины графа по расположению подвижных вершин. По аналогии с минимальной сетью Штейнера, для связного графа G и граничного отображения ∂G назовем сеть Γ , соединяющую множество $M \subset X$ по граничному отображению ∂G , *минимальной параметрической сетью типа $(G, \partial G)$* (или *минимальным параметрическим деревом типа $(G, \partial G)$* в случае, если G является деревом), если ее длина не превосходит длины любой сети топологии G с граничным отображением ∂G , соединяющей M . Обозначим множество минимальных параметрических сетей типа G , соединяющих M по граничному отображению ∂G , через $PMT(G, \partial G)$. Будем также опускать параметры $(G, \partial G)$, если они понятны из контекста, и сокращать словосочетание «минимальная параметрическая сеть» до PMT .

Напомним, что *банахово пространство* — это полное нормированное векторное пространство, а *гильбертово пространство* — это банахово пространство, норма которого порождена скалярным произведением.

Будем называть угол на нормированной плоскости *неразвернутым*, если найдется развернутый угол (то есть такой угол, стороны которого образуют прямую) с той же вершиной, в котором данный угол строго содержится.

Последующие определения вводятся в нормированном пространстве.

Тройником будем называть три луча с общим началом такие, что для любой тройки точек (по одной на каждом луче) общее начало лучей является их точкой Ферма. Общее начало лучей будем называть *началом тройника*.

Единичным тройником будем называть три отрезка с общим началом такие, что отрезки лежат на лучах тройника, и длины отрезков равны 1.

Тройник и единичный тройник будем называть *соответствующими*, если отрезки единичного тройника лежат соответственно на лучах тройника.

Далее нам потребуются определения и результаты из статьи [4], касающиеся первой вариации нормы отрезка.

Субградиентом выпуклой вниз функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^* \mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y - x) \leq F(y) - F(x) \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, если $S \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая поверхность, т.е. граница некоторого выпуклого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, и $x \in S$ — произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности S (а также множества X) в точке x , если S лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π . Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с S , назовем *внешней нормалью* к поверхности S в точке x . Множество $N_x S$ всех внешних нормалей к поверхности S в точке x называется *нормальным конусом*.

Пусть теперь в \mathbb{R}^n фиксирована некоторая норма ρ . Отметим, прежде всего, что функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой, чем и объясняется наш интерес к выпуклым функциям. Обозначим через Σ единичную сферу в (\mathbb{R}^n, ρ) , т.е. $\Sigma = \{x \mid \rho(x) = 1\}$. Напомним, что *конормой* ρ^* , соответствующей норме ρ , называется следующая функция на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) \mid \nu \in \Sigma\}.$$

Отметим, что конорма также является нормой на линейном пространстве ковекторов.

Обозначим через Σ^* единичную сферу в (\mathbb{R}^n, ρ^*) . Введем в \mathbb{R}^n евклидову норму со стандартным скалярным произведением. При стандартном отождествлении пространств $T_x^* \mathbb{R}^n$ и $T_x \mathbb{R}^n$ (используя скалярное произведение), *субградиентное*

множество $S_F(x)$ функции F в точке x , т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x , является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x . При этом, функция F дифференцируема в x , если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одного элемента, совпадающего в этом случае с градиентом функции F . Градиент функции F в точке x будем обозначать через $\nabla F(x)$ для компактности выражений с ним. Если $F = \rho$ — норма, то легко доказывается следующий результат.

Предложение 2.1 *Субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадает со множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы ρ , проходящей через x .*

Будем рассматривать выпуклую дифференцируемую норму, обозначаемую через $\|\cdot\|$ или ρ .

Введем следующие обозначения. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Пусть $n_i = (-1)^i(x_2 - x_1)/\|x_2 - x_1\|$ — внешняя нормаль к отрезку $[x_1, x_2]$ в точке x_i . Введем обозначение $p_i = \nabla \rho(n_i)$.

Следующая теорема в более общем случае доказана в [4, следствие 3.1].

Теорема 2.1 (первая вариация длины отрезка) *Пусть ρ — некоторая строго выпуклая, заданная на \mathbb{R}^n , x_1 и x_2 — произвольные точки в \mathbb{R}^n такие, что ρ дифференцируема в точке $x_1 - x_2$, а η_i , $i = 1, 2$, — произвольный вектор из $T_{x_i}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Рассмотрим деформацию $[x_1, x_2]_t = [x_1 + t\eta_1, x_2 + t\eta_2]$, $t \geq 0$, отрезка $[x_1, x_2]$. Пусть $\ell(t)$ — длина отрезка $[x_1, x_2]_t$ в нормированном пространстве. Тогда функции $\ell(t)$ дифференцируема в начальный момент $t = 0$. Если при этом $x_1 = x_2$, то*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \rho(\eta_1 - \eta_2),$$

а если $x_1 \neq x_2$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_1, \eta_1 - \eta_2 \rangle = \langle p_2, \eta_2 - \eta_1 \rangle.$$

Следующая теорема доказана в [4, следствие 4.4].

Теорема 2.2 Пусть (\mathbb{R}^n, ρ) — нормированное пространство. Пусть также единичная сфера Σ в норме ρ является гладкой. Тогда регулярная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с данной границей является экстремалью функционала нормированной длины по отношению к деформациям, сохраняющим топологию, если и только если для каждой подвижной вершины x сети Γ имеет место равенство:

$$\sum_{\gamma} p_x(\gamma) = 0,$$

где сумма берется по всем ребрам γ , инцидентным вершине x . Для каждого ребра $\gamma = xy$, $p_x(\gamma)$ — это $\nabla\rho(x - y)$.

Лемма 2.1 (лемма о сумме градиентов) Пусть дано нормированное пространство (\mathbb{R}^n, ρ) . Пусть на каждом открытом луче некоторого тройника с центром в O выбрано по точке, обозначим их через A_1, A_2, A_3 , и норма ρ дифференцируема в A_1, A_2, A_3 . Тогда $\nabla\rho(OA_1) + \nabla\rho(OA_2) + \nabla\rho(OA_3) = 0$.

Будем называть *единичным котройником* данного тройника тройку единичных ковекторов — градиентов из условия выше (в случае существования упомянутых градиентов). Можно перефразировать условие леммы в новых терминах, а именно — для любого тройника сумма ковекторов из его единичного котройника равна нулю.

Доказательство. Рассмотрим деформации отрезков $OA_i, i \in \{1, 2, 3\}$: $[O, A_i]_t = [O + t\eta, A_i]$, $t \geq 0$. Пусть $\ell_i(t)$ — длина отрезка $[O, A_i]_t$ в норме ρ . По теореме о первой вариации нормы отрезка с подвижными концами (теорема 2.1), функция $(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(t)$ дифференцируема в начальный момент $t = 0$, и

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(t) = \langle \nabla\rho(OA_1) + \nabla\rho(OA_2) + \nabla\rho(OA_3), -\eta \rangle.$$

Если при каком-либо η значение последнего выражения не равно 0, то при малом сдвиге точки O в направлении η либо в направлении $-\eta$ произойдет уменьшение

суммы длин отрезков $(l_1 + l_2 + l_3)(t)$, получаем противоречие с тем, что O — точка Ферма для A_1, A_2, A_3 . Значит, $\nabla\rho(OA_1) + \nabla\rho(OA_2) + \nabla\rho(OA_3) = 0$.

Лемма 2.2 (лемма о единичной конорме ковектора градиента) Пусть дана двумерная нормированная плоскость с дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Пусть Σ — единичная окружность в норме ρ , а ξ — ковектор градиента нормы ρ в произвольной точке $s \in \Sigma$. Тогда $\rho^*(\xi) = 1$.

Доказательство. Приведем элементарное геометрическое доказательство. Введем евклидову норму с единичной окружностью, задаваемой формулой $x^2 + y^2 = 1$. Проведем касательную ℓ к Σ в некоторой точке $s \in \Sigma$. Заметим, что в функции ρ в первом порядке совпадает в точке s с линейной функцией ρ' , равной нулю в начале координат и равную 1 на прямой ℓ (график этой линейной функции — плоскость — является касательной плоскостью к конусу — графику нормы ρ). Поэтому градиент ξ также является градиентом ρ' в точке s . Пусть евклидово расстояние от начала координат до прямой ℓ равно r . Тогда евклидова длина ковектора ξ равна $\frac{1}{r}$. Модуль значения $\xi(v), v \in \Sigma$, равен произведению $\frac{1}{r}$ на евклидову длину проекции вектора v на нормаль к прямой ℓ . Таким образом, максимальное значение $\xi(v), v \in \Sigma$ достигается в точке s (и других точках из пересечения ℓ и Σ , а также центрально симметричных им относительно начала координат), и $\rho^*(\xi) = 1$.

Лемма 2.3 (лемма о свойствах отображения градиента) Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Пусть Σ — единичная окружность в норме ρ , а Σ^* — единичная окружность в соответствующей конорме ρ^* . Тогда отображение градиента нормы $\nabla\rho : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом, переводящим полуокружности Σ в полуокружности Σ^* . Также это отображение симметрично, $\nabla\rho : \nabla\rho(-p) = -\nabla\rho(p)$.

Доказательство. В данном пространстве \mathbb{R}^2 введем евклидовы координаты (x, y) . Пусть $x_0 = \max\{x \mid (x, y) \in \Sigma\}$. Рассмотрим область $U = \{x \in (-x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon); y \in$

$(-\infty; \infty)\}$ для малого $\varepsilon > 0$. Часть Σ , лежащая в области U , можно представить в виде несвязного объединения двух центрально симметричных друг другу графиков функций. Действительно, локальное представление в виде графика напрямую следует из теоремы о неявной функции; представление же в виде двух графиков следует из теоремы о неявной функции и того факта, что из-за строгой выпуклости нормы прямые, параллельные оси OY , пересекают сферу ровно в двух точках. По теореме о неявной функции имеем также C^1 -гладкость функций, задающих графики. Рассмотрим тот график, который пересекает ось y на луче $y > 0$, и запишем в виде $y = f(x)$. Норма ρ строго выпукла и дифференцируема, поэтому $f'(x)$ монотонно убывает при росте x . Введем также полярные координаты (r, ϕ) в данном пространстве с центром в нуле нормы ρ с ориентацией, согласованной с координатами (x, y) . Координата ϕ точек графика непрерывна как функция от x ; также она монотонно убывает как функция от x (она убывает по x в окрестности пересечения с осью OY ; если же найдутся две точки графика с одинаковой координатой ϕ_0 , то луч $\phi = \phi_0$ пересечет график как минимум в двух точках, а значит, прямая, содержащая этот луч, пересечет Σ более, чем в двух точках, противоречие со строгой выпуклостью Σ , из которого следует монотонное убывание). При этом, вектор градиента нормы $\nabla\rho(p)$ ортогонален касательной к Σ в точках Σ . Значит, угол ψ — угол наклона вектора $\nabla\rho(p)$ — также монотонно и непрерывно убывает как функция от x . Координата r вектора $\nabla\rho(p)$ непрерывно зависит от x , поскольку выражается как $\sqrt{(\frac{\partial\rho}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\rho}{\partial y})^2}$ в точке $p = (x, f(x))$. Покажем биективность отображения $\nabla_\rho(p)$. Действительно, в произвольной точке Σ градиент единственен. Для любого данного вектора существует ровно две точки Σ , имеющие касательные, нормальные к данному вектору. Ровно для одной из этих точек верно, что данный вектор сонаправлен вектору внешней нормали к единичному кругу в точке.

Таким образом имеем, что $\nabla\rho(p)$ — это сохраняющая ориентацию непрерывная биекция на рассмотренном подмножестве Σ . Пусть $y_0 = \max\{y \mid (x, y) \in \Sigma\}$. Рассмотрим область $V = \{x \in (-\infty; \infty); y \in (-y_0 + \varepsilon, y_0 - \varepsilon)\}$ для малого $\varepsilon > 0$.

Для глобальности, аналогично разбору выше, рассмотрим оставшуюся часть Σ в области U («нижний» график), а также обе компоненты связности Σ из области V . Отображение $\nabla\rho(p)$ непрерывно и биективно переводит компакт в компакт, а значит, является гомеоморфизмом. Воспользовавшись симметрией нормы ρ , имеем симметрию отображения $\nabla\rho : \nabla\rho(-p) = -\nabla\rho(p)$, а также то, что образ полуокружности Σ — это полуокружность Σ^* .

Лемма 2.4 *Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Тогда для любого тройника не существует полуплоскости, содержащей этот тройник.*

Доказательство. От противного. Разберем два случая:

1) Два из трех лучей тройника противонаправлены. Тогда получаем противоречие с леммой 2.1, поскольку сумма ковекторов, соответствующих противонаправленным лучам, равна нулю в силу центральной симметричности нормы, а коорма третьего ковектора больше нуля.

2) Среди лучей тройника нет противонаправленных, и все они лежат в одной полуплоскости. Тогда найдется прямая, пересекающая все три луча тройника, обозначим точки пересечения за A_1, A_2, A_3 в порядке их расположения на прямой. По лемме 1.1 начало тройника O является точкой Ферма тройки $\{A_1, A_2, A_3\}$. По неравенству треугольника для строго выпуклой нормы, $\rho(OA_1) + \rho(OA_3) > \rho(A_1A_2) + \rho(A_2A_3)$. Также имеем $\rho(OA_2) > 0$. Значит, $\rho(OA_1) + \rho(OA_2) + \rho(OA_3) > \rho(A_2A_1) + \rho(A_2A_2) + \rho(A_2A_3)$, и O не является точкой Ферма тройки $\{A_1, A_2, A_3\}$, противоречие.

Альтернативное доказательство следующего факта можно прочитать в [11, теорема 6.2.8].

Следствие 2.1 *Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Тогда $SMT(M) \subset \text{conv}(M)$ для любого граничного множества M .*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда найдется такая подвижная точка сети, лежащая снаружи $\text{conv}(M)$, что все три ребра сети лежат в одной полуплоскости относительно некоторой прямой, проходящей через эту подвижную точку, что невозможно по лемме 2.4. В качестве такой вершины подойдет любая вершина многоугольника $\text{conv}(M \cup SMT(M))$, не являющаяся вершиной многоугольника $\text{conv}(M)$

Лемма 2.5 (лемма о тройнике) Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Пусть задан луч с началом в точке O . Тогда существует и единственен тройник, включающий в себя этот луч с началом в точке O .

Доказательство. Введем необходимые обозначения: n_1 — единичный направляющий вектор данного луча, $p_1 = \nabla \rho(n_1)$. Заметим, что по лемме [4, лемма 7.3] найдется единственная пара ковекторов $p_2, p_3 \in \Sigma^*$, такая что $\sum_{i=1}^3 p_i = 0$. По лемме 2.3, при помощи отображения $(\nabla \rho)^{-1}$ по градиенту с Σ^* единственным образом восстанавливается вектор с Σ . Значит, тройник с одним известным лучом существует и единственен.

Пусть дана двумерная нормированная плоскость (\mathbb{R}^2, ρ) со строго выпуклой и дифференцируемой нормой. Пусть заданы граничное множество M , $|M| = n$, граничное отображение $\partial \Gamma$ и топология бинарного дерева G . Пусть также существует невырожденное дерево Γ , принадлежащее $PMT(G, \partial \Gamma)$. Для произвольной подвижной вершины соответствующим ей тройником будем называть тройник с началом в ней, лучи которого содержат инцидентные ей ребра в дереве.

Лемма 2.6 Пусть дана двумерная нормированная плоскость (\mathbb{R}^2, ρ) со строго выпуклой и дифференцируемой нормой. Пусть заданы граничное множество M , $|M| = n$, граничное отображение $\partial \Gamma$ и топология бинарного дерева G . Пусть также существует невырожденное дерево Γ , принадлежащее $PMT(G, \partial \Gamma)$. Тогда:

1) существует тройник T_X такой, что для любой подвижной вершины тройник, соответствующий ей, может быть получен параллельным переносом из T_X либо из тройника, полученного из T_X с помощью центральной симметрии относительно любой точки;

2) найдутся три семейства параллельных прямых такие, что каждая прямая, содержащая ребро дерева Γ , принадлежит одному из этих семейств.

Доказательство. Заметим сначала, что из центральная симметрия является изометрией нормы ρ , и поэтому образ тройника, отраженного при помощи центральной симметрии относительно любой точки, является тройником.

Если $n \leq 3$, то количество ребер в дереве Γ не превышает трех, и в этом случае утверждение тривиально.

Пусть $n > 3$. Тогда в дереве Γ есть по крайней мере две подвижные вершины. Для любого ребра XU между подвижными вершинами Γ рассмотрим два тройника T_X и T_U , соответствующие вершинам X и U . Заметим, что по лемме 2.5 $T_X(T_U, \text{соответственно})$ — это единственный тройник с началом в $X(U, \text{соответственно})$, включающий в себя луч $[XU](\text{и } [UX])$. Также заметим, что образ T'_X тройника T_X при центральной симметрии относительно середины ребра XU является единственным тройником с началом в U , включающим в себя луч $[UX]$. Значит, T'_X совпадает с T_U . Из центральной симметричности друг другу тройников T_X и T_U следует попарная параллельность прямых, содержащих соответствующие лучи в T_X и T_U . Рассмотрим любое ребро e дерева Γ . Оно инцидентно по крайней мере одной подвижной вершине, обозначим ее через Z (а соответствующий ей тройник — через T_Z). Построим путь между X и Z по ребрам Γ (все вершины этого пути будут внутренними вершинами Γ). Для каждой пары соседних вершин проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям выше о центральной симметричности друг другу тройников T_X и T_U . Получим, что прямая, содержащая e , параллельна одной из трех прямых, содержащих лучи тройника T_X , а также то, что тройник T_Z получается параллельным переносом из T_X или из T_U .

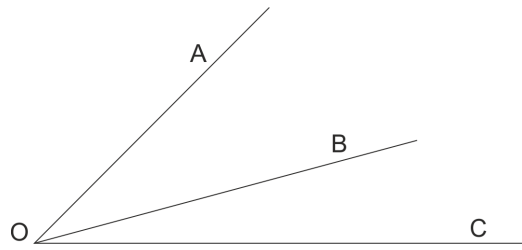


Рис. 2: луч $[OB)$ лежит между лучами $[OA)$ и $[OC)$.

Далее приведем лемму о монотонности, естественный факт из теории нормированных пространств. В работе [8] лемма сформулирована для выпуклых норм, мы же ограничимся строго выпуклым случаем. Будем говорить, что *луч $[OB)$ лежит между лучами $[OA)$ и $[OC)$* , если $[OB)$ принадлежит неразвернутому углу $\angle AOC$ (см. Рис. 2).

Лемма 2.7 (лемма о монотонности) Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой нормой $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Пусть даны точки A, B, C и не совпадающая ни с одной из них O , $A \neq C$, такие, что луч $[OB)$ лежит между лучами $[OA)$ и $[OC)$ и что $\|OB\| = \|OC\|$. Тогда $\|AB\| \leq \|AC\|$, и равенство достигается только в случае $B = C$.

Доказательство. Следует из [8, Monotonicity Lemma].

Следствие 2.2 Пусть A и \tilde{A} — диаметрально противоположные точки Σ , единичной окружности строго выпуклой нормы, и они разбивают Σ на две дуги. Тогда для каждой из двух дуг верно, что при движении точки X по дуге от A к \tilde{A} норма отрезка $\|AX\|$ будет монотонно расти.

Доказательство следующего факта можно найти в [13, Proposition 5.4.7]. Напомним, что любое конечномерное нормированное пространство является рефлексивным.

Лемма 2.8 *Рефлексивное нормированное пространство является строго выпуклым (гладким) тогда и только тогда, когда его дуальное пространство является гладким (строго выпуклым).*

Лемма 2.9 (лемма о тройниках с общим началом) *Пусть дана двумерная нормированная плоскость со строго выпуклой дифференцируемой нормой (\mathbb{R}^2, ρ) . Пусть также даны два тройника с началом в точке O . Первый тройник разбивает плоскость на три открытые части. Тогда либо два данных тройника совпадают, либо в каждой из трех открытых частей плоскости лежит по одному лучу из второго тройника.*

У данной леммы есть несложное прямое доказательство с помощью введения координат. Приведем здесь более красивое, на наш взгляд, доказательство с использованием следствия 2.2.

Доказательство. Обозначим тройники как T_1 и T_2 . Заметим, что если у двух тройников есть хотя бы один совпадающий луч, то тройники совпадают по лемме 2.5.

Пусть теперь у тройников нет совпадающих лучей и нашелся элемент разбиения плоскости при помощи T_1 , в котором лежит не менее двух лучей T_2 . Три луча T_2 в одном элементе оказаться не могут по лемме 2.4. Получается, что с точностью до переобозначения внутри тройников лучи тройников упорядочены следующим образом: $\{T_1^1, T_2^1, T_2^2, T_1^2, T_1^3, T_2^3\}$, где T_i^j — j -тый луч i -того тройника. По лемме 2.3, отображение градиента нормы $\nabla \rho : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ является гомеоморфизмом, сохраняющим ориентацию, отображающим полуокружности в полуокружности. Значит, соответствующие ковекторы с единичных котройников упорядочены в той же последовательности, что и соответствующие им лучи тройников. Осталось показать невозможность равенства нулю суммы $\sum_{j=1}^3 T_2^{*j}$, где T_i^{*j} — это j -тый ковектор i -го котройника.

Заметим, что четыре луча $T_1^1, T_2^1, T_2^2, T_1^2$ лежат в одной полуплоскости, значит, то же верно и для соответствующих им ковекторов из котройников. По лемме 2.8,

конорма является строго выпуклой. Теперь дважды воспользуемся следствием 2.2 для конормы; в первом неравенстве в качестве A выступает точка $-T_1^{*1}$, и точка T_2^{*2} находится от нее дальше, чем T_1^{*2} , а во втором в качестве A выступает точка $-T_2^{*2}$, и точка T_2^{*1} находится от нее дальше, чем T_1^{*1} :

$$1 = \rho^*(T_1^{*1} + T_1^{*2}) < \rho^*(T_1^{*1} + T_2^{*2}) < \rho^*(T_2^{*1} + T_2^{*2})$$

Но конорма T_2^{*3} равна 1, значит, $\sum_{j=1}^3 T_2^{*j} \neq 0$, чтд.

Следующая лемма доказана в [5, утверждение 1].

Лемма 2.10 *Для каждой вершины v степени 3 бинарного дерева с n вершинами степени 1, кратчайший по количеству ребер путь, соединяющий v с множеством вершин степени 1, состоит не более, чем из $\log_2 \frac{2n}{3}$ ребер.*

Назовем *разреженностью* множества M в метрическом пространстве величину $D(M) = \sup\{\rho(M_1, M_2) \mid M = M_1 \sqcup M_2, M_i \neq \emptyset\}$

Лемма 2.11 *Пусть дана двумерная нормированная плоскость (\mathbb{R}^2, ρ) . Пусть также дано некоторое граничное множество M . Тогда в $SMT(M)$ нет ребер длиннее $D(M)$.*

Доказательство. Лемма является ослабленной версией утверждения [5, утверждение 3].

Лемма 2.12 *Пусть даны две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на плоскости такие, что множества деревьев $SMT(M)$ в них совпадают для любого граничного множества M . Рассмотрим S_i — множество всех тройников в $\|\cdot\|_i$ с центром в нуле. Тогда $S_1 = S_2$.*

Доказательство. Для любых трех точек сети Штейнера в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ совпадают. Рассмотрим тройник из S_1 , выберем по одной точке на луче. Точка Ферма полученной тройки точек — это ноль. В $\|\cdot\|_2$ у выбранной тройки точек точка Ферма — тоже ноль. По лемме 1.1, рассматриваемый тройник является также тройником во второй норме. Имеем $S_1 \subseteq S_2$, аналогично получим $S_2 \subseteq S_1$.

В следующей лемме мы воспользуемся результатами из работы [6]. В ней исследуются сети на евклидовой плоскости, но большинство результатов обобщаются на случай нормированной плоскости со строго выпуклой дифференцируемой нормой путем естественных переформулировок либо заменой соответствующих терминов. Введем необходимые определения, попутно обобщая определения там, где это понадобится.

Пусть L — произвольная ломаная. По определению, все ее вершины A_i канонически перенумерованы. Ясно, что каждая ломаная может быть задана занумерованным набором своих вершин. Если перенумеровать точки A_i в противоположном порядке, то мы снова получим ломаную, совпадающую с исходной как подмножество плоскости. Выбор одной из двух канонических нумераций вершин называется *ориентацией* ломаной L . Если ориентация ломаной L фиксирована, то можно рассматривать каждое звено $A_i A_{i+1}$ ломаной L как вектор с началом в A_i и концом в A_{i+1} .

Пусть дана двумерная нормированная плоскость (\mathbb{R}^2, ρ) со строго выпуклой и дифференцируемой нормой, а также с фиксированной ориентацией. Пусть заданы граничное множество M , $|M| = n$, и топология бинарного дерева G . Пусть также существует невырожденное линейное дерево Γ с границей M и тройник T_X такие, что для любой подвижной вершины тройник, соответствующий ей, может быть получен параллельным переносом из T_X или из тройника, полученного из T_X с помощью центральной симметрии относительно любой точки.

Здесь и далее (до теоремы 2.3 включительно) будем считать, что рассматриваемые ломаные — это пути между вершинами (в качестве вершин можно выбирать как граничные, так и подвижные) в дереве Γ , а векторы — это направляющие векторы ребер дерева Γ . Таким образом, мы рассматриваем векторы 6 направлений (три из единичного ежа, соответствующего T_X , и три противоположных им вектора). Назовем объединение этих шести единичных векторов *характеристическим ежом*. *Твистингом* $\text{tw}(a, b)$ упорядоченной пары векторов a и b назовем следующую функцию от векторов: посмотрим, как векторы a и b расположены относи-

тельно друг друга в характеристическом еже; $\text{tw}(a, b) = 0$, если $a = b$, $\text{tw}(a, b) = \pm 1$, если a и b — соседние векторы, $\text{tw}(a, b) = \pm 2$, если a и b расположены через один, а знак твистинга совпадает с ориентацией репера (a, b) . Твистинг не определен для противоположных векторов.

Пусть L — ориентированная ломаная, и $a_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, — ее последовательные ребра (если ломаная замкнута, то сложение понимается по модулю $n + 1$).

Твистингом $\text{tw } A_i$ *вершины* A_i назовем твистинг $\text{tw}(a_{i-1}, a_i)$ между последовательными векторами-звеньями, инцидентными A_i .

Сумма твистингов всех внутренних вершин ломаной L называется *кручением вдоль* L и обозначается через $\text{tn } L$:

$$\text{tn } L = \sum_{i=1}^n \text{tw } A_i.$$

Если ломаная L состоит из одного звена, то положим $\text{tn } L = 0$.

Пусть a и b — произвольные ребра из Γ . Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Путь $\gamma(a, b)$, очевидно, представляет собой ориентированную ломаную на плоскости. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева Γ* назовем кручение ломаной $\gamma(a, b)$: $\text{tw}(a, b) = \text{tn } \gamma(a, b)$.

Числом вращения линейного дерева Γ называется максимум чисел вращения, взятый по всем упорядоченным парам ребер из Γ :

$$\text{tw } \Gamma = \max_{(a,b)} \text{tw}(a, b).$$

Для частного случая выпуклого множества M и определенного выше дерева Γ основная теорема работы [6] звучит так:

Теорема 2.3 $\text{tw } \Gamma \leq 6$.

Теперь все готово к доказательству следующей леммы.

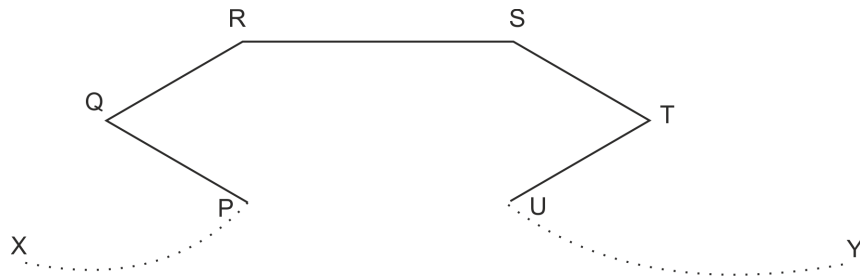


Рис. 3: невозможный в условиях леммы 2.13 путь между X и Y . Части пути XP и UY изображены схематически.

Лемма 2.13 Пусть дана двумерная нормированная плоскость (\mathbb{R}^2, ρ) со строго выпуклой и дифференцируемой нормой. Пусть $M, |M| = n$, — множество вершин выпуклого n -угольника (некоторые его углы могут быть развернутыми). Рассмотрим минимальное дерево Штейнера Γ с границей M и возьмем любые подвижные вершины $X, Y \in \Gamma$, соединенные некоторой невырожденной компонентой дерева Γ . Тогда для пути в дереве, соединяющего X и Y , верно, что в нем нет четырех поворотов подряд в одну сторону.

Доказательство. От противного. Пусть есть. Тогда на пути, соединяющем X и Y , имеем ломаную $PQRSTU$ с поворотами в одну сторону в точках Q, R, S, T (см. Рис. 3). По лемме 2.6, $PQ \parallel ST, QR \parallel TU$. Внутри $\text{conv}(P, Q, R, S, T, U)$ не может быть граничных вершин: по следствию 2.1 имеем $\text{conv}(P, Q, R, S, T, U) \subseteq \text{conv}(M)$, и принадлежность граничной вершины внутренности $\text{conv}(P, Q, R, S, T, U)$ противоречила бы тому, что все граничные вершины лежат на границе $\text{conv}(M)$. Одно из ребер, инцидентных P , параллельно RS (назовем его OP). То же верно для одного из ребер, инцидентных U (назовем его UV). Кручение вдоль ломаной $OPQRSTUUV$ равно шести, и если хотя бы одна вершина среди $\{O, V\}$ не является граничной, то рассмотрим такое инцидентное с ней ребро, чтобы продолженная им ломаная имела кручение равное семи, и тогда мы имеем противоречие с теоремой 2.3. Значит, O и V — граничные вершины. Рассмотрим два случая:

- 1) вершины O, P, U, V не лежат на одной прямой. Тогда одно из ребер среди OP

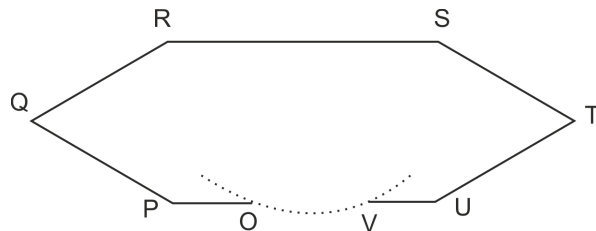


Рис. 4: отрезок OV принадлежит внутренности $\text{conv}(M)$, а подвижные вершины P и U лежат вне $\text{conv}(M)$. Граница $\text{conv}(M)$ изображена схематически (пунктиром).

и UV лежит в $\text{conv}(P, Q, R, S, T, U)$ (поскольку они параллельны и лежат по разные стороны от прямой PU); имеем граничную вершину внутри $\text{conv}(P, Q, R, S, T, U)$, противоречие;

2) вершины O, P, U, V лежат на одной прямой. Предположим, что эта прямая пересекается с внутренностью $\text{conv}(M)$. Тогда отрезок OV принадлежит внутренности $\text{conv}(M)$, и подвижные вершины P и U лежат вне $\text{conv}(M)$ (см. Рис. 4), что снова приводит к противоречию со следствием 2.1. Значит, прямая PU не пересекается с внутренностью $\text{conv}(M)$, и весь многоугольник (а также дерево Γ) лежит по одну сторону от прямой PU (с той стороны, где находится Q). Но у P есть соседняя вершина, которая лежит по другую сторону от прямой PU , чем Q , противоречие со следствием 2.1.

2.2 Достаточное условие гомотетичности норм

Главный результат настоящего раздела — это теорема 2.5, являющаяся достаточным условием гомотетичности двух норм в терминах деревьев Штейнера, построенных в соответствующих нормированных пространствах. Введем необходимые определения для этого раздела.

Пусть заданы два ненулевых вектора v_1 и v_2 . Отложим v_1 от некоторой точки A , получим точку O . Также отложим v_2 от O , получим B . Объединение лучей OA и OB разбивает плоскость на два сектора (в случае такого рода разбиений

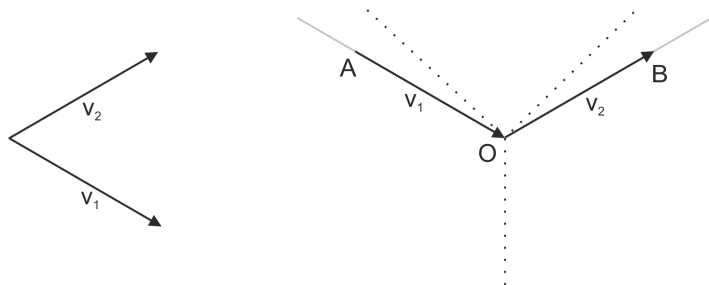


Рис. 5: слева — вырожденная пара, справа — тройник из определения вырожденной пары (изображен пунктиром).

будем считать, что оба луча принадлежат обоим секторам). Если среди них есть неразвернутый угол, обозначим его через S (в случае развернутого угла $\angle AOB$ обозначим через S произвольный из двух секторов). Любой тройник разбивает плоскость на три сектора. Если существует тройник с началом в O такой, что один из его секторов содержится в S , пару (v_1, v_2) будем называть *вырожденной парой* (см. Рис. 5).

Пару лучей будем называть *вырожденной парой*, если некоторая пара ненулевых сонаправленных соответствующим лучам векторов является вырожденной парой. Очевидно, что свойство вырожденности пары лучей не зависит от выбора векторов из определения.

Пару отрезков, имеющих общий конец, будем называть *вырожденной парой*, если соответствующая им пара векторов, исходящих из общего конца отрезков, является вырожденной парой.

Ежом будем называть множество лучей с общим началом, *единичным ежом* — множество единичных векторов или отрезков с общим началом. *Началом (единичного) ежа* будем называть общее начало лучей (векторов или отрезков), входящих в еж.

Вырожденным (единичным) ежом будем называть (единичный) еж, каждая пара соседних в круговом порядке лучей (векторов или отрезков) которого является вырожденной парой.

Еж и единичный еж будем называть *соответствующими друг другу*, если векторы или отрезки единичного ежа лежат соответственно на лучах ежа.

Несложно показать, что добавление дополнительных лучей (векторов или отрезков) оставляет вырожденный (единичный) еж вырожденным. Действительно, вырожденность пары лучей (векторов, отрезков) — это, по определению, возможность вписать некоторый сектор некоторого тройника в угол, смежный неразвернутому углу между элементами пары. Если добавить луч r' к вырожденному ежу между его соседними лучами r_i и r_{i+1} (так, чтобы r' оказался внутри неразвернутого угла между r_i и r_{i+1}), две новые пары соседних лучей, $\{r_i, r'\}$ и $\{r', r_{i+1}\}$ будут вырожденными, поскольку соответствующие им смежные углы будут содержать смежный угол, соответствующий паре $\{r_i, r_{i+1}\}$.

Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на двумерной плоскости такие, что множества деревьев $SMT(M)$ в них совпадают для любого граничного множества M . Будем называть единичные ежи в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *соответствующими друг другу*, если они соответствуют одному ежу.

Для краткости, будем называть просто *ежами* встречающиеся единичные ежи, вырожденные ежи и вырожденные единичные ежи там, где это не вызовет разночтений.

Теорема 2.4 Пусть даны $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две строго выпуклые дифференцируемые нормы на двумерной плоскости такие, что деревья $SMT(M)$ в них совпадают для любого граничного множества M . Тогда для произвольного вырожденного ежа в любой из двух норм соответствующие ему единичные ежи в этих нормах гомотетичны.

Доказательство. По лемме 2.12, из того, что деревья $SMT(M)$ в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ совпадают для любого граничного множества M следует, что множества тройников в этих нормах также совпадают. Поскольку вырожденность ежа в данной норме зависит только от множества тройников в ней, имеем, что еж вырожден в одной из двух данных норм тогда и только тогда, когда он вырожден и во второй

из двух данных норм. Далее в доказательстве будем называть вырожденный еж в одной из двух данных норм просто вырожденным ежом.

Зафиксируем произвольный вырожденный еж с началом в нуле и возьмем его единичный еж в норме $\| \cdot \|_1$. Для каждого единичного вектора v из единичного ежа такого, что $-v$ не принадлежит единичному ежу, добавим $-v$ в единичный еж, и далее будем рассматривать получившийся единичный еж, обозначим его \bar{H} (заметим, что он остался вырожденным). Пронумеруем все вектора \bar{H} по кругу, от v_1 до v_{2n} . Выберем любую точку на плоскости, назовем ее A_1 . Отложим вектор v_1 от A_1 , получим новую точку A_2 . Аналогично отложим v_2 от A_2 , получив A_3 , v_3 от A_3 , получив A_4 и т.д. В итоге, отложив v_{2n} от A_{2n} , мы замкнем ломаную (поскольку сумма всех векторов из \bar{H} равна нулю).

Покажем, что построенная ломаная является периметром выпуклого многоугольника и не имеет самопересечений. Действительно, пусть самопересечение есть. Тогда найдется ломаная, состоящая из $n + 1$ ребра подряд в круговом порядке построенной замкнутой ломаной, которая содержит оба пересекающихся ребра. Покажем, что ни одна ломаная, состоящая из $n + 1$ ребра подряд в круговом порядке построенной замкнутой ломаной, не имеет самопересечений. Рассмотрим произвольный вектор из ежа и изменим координаты, чтобы он был направлен по оси OX , и построим $n + 1$ ребро начиная с него. У всех векторов, кроме первого и последнего, проекция на ось OY положительна. А первое и последнее ребро параллельны прямой OX и тоже не пересекаются с другими ребрами ломаной. Получается, что мы имеем замкнутую ломаную без самопересечений, все углы которой ориентированы в одну сторону. Значит, имеем выпуклый многоугольник.

Таким образом, мы построили центрально симметричный $2n$ -угольник с равными в норме $\| \cdot \|_1$ сторонами; множество его вершин обозначим через M (иногда сам многоугольник тоже будем называть M), его центр обозначим через O . Равномерно подразобьем стороны M с мелкостью разбиения ε . Полученную конструкцию (а также — полученное множество точек) будем обозначать как M^ε . Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такой, что для всех M^ε в норме $\| \cdot \|_1$ SMT на них будет выгля-

деть как периметр M^ε с любым одним отсутствующим ребром между соседними вершинами.

Покажем сначала, что у $SMT(M^\varepsilon)$ для некоторого ε и всех меньших не существует невырожденных (бинарных) компонент, состоящих более чем из одного ребра.

Докажем от противного. Заметим, что по лемме 2.11 все ребра $SMT(M^\varepsilon)$ имеют длину меньше ε . Зададим величину ℓ следующим образом. Проведем из O отрезки в вершины и середины сторон M . На каждом отрезке до вершины рассмотрим минимум расстояний (измеренный в норме $\|\cdot\|_1$) до периметра M без учета двух сторон, инцидентных концу отрезка. На каждом отрезке до середины стороны рассмотрим минимум расстояний до периметра M без учета стороны с выбранной серединой. ℓ возьмем как минимум рассмотренных величин (ℓ получится больше нуля). Введем расстояние между вершинами M^ε в круговом порядке: считаем его как меньшее из двух количеств вершин на двух дугах, на которые две данные вершины делят периметр M^ε . Рассмотрим наиболее удаленные друг от друга в круговом порядке вершины X и Y из M^ε , соединенные невырожденной компонентой SMT . Разберем случаи.

1) X и Y лежат на одной стороне исходного многоугольника M , пусть на A_1A_2 . Рассмотрим самую далекую от прямой A_1A_2 подвижную вершину данной невырожденной компоненты. Рассмотрим полуплоскость не имеющую пересечений с прямой A_1A_2 , границей которой является прямая, содержащая самую далекую вершину и параллельная прямой A_1A_2 . По лемме 2.4, одно из трех инцидентных ей ребер идет в рассматриваемую полуплоскость, попадая в граничную вершину Z , расположенную еще дальше от прямой A_1A_2 , чем она сама (в противном случае выбранная вершина не будет самой далекой). Z не лежит на *малой дуге* XU (меньшей из двух частей периметра в смысле количества вершин M , на которые X и Y разбивают периметр), поскольку не может принадлежать прямой A_1A_2 . Получается, что мы нашли вершину Z из той же невырожденной компоненты снаружи малой дуги XU . Хотя бы одно из расстояний в круговом порядке среди XZ или

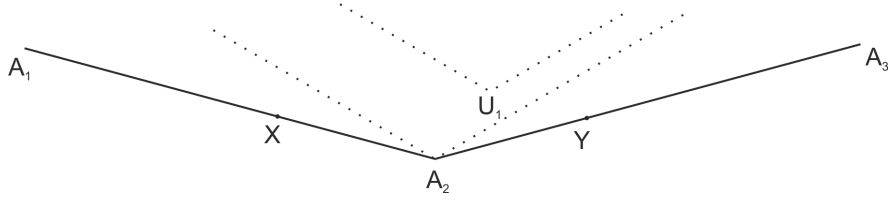


Рис. 6: элемент разбиения α и его образ при параллельном переносе (пунктиром показаны их границы).

YZ больше расстояния в круговом порядке XU . Получаем противоречие с тем, что X и Y — наиболее удаленные в круговом порядке вершины M^ε , принадлежащие заданной невырожденной компоненте.

2) X и Y лежат на соседних сторонах, пусть на A_1A_2 и A_2A_3 соответственно (см. Рис. 6).

Из-за вырожденности ежа \bar{H} найдется такой тройник с началом в A_2 , что один из элементов разбиения плоскости этим тройником окажется внутри неразвернутого угла между лучами $[A_2A_1)$ и $[A_2A_3)$ (обозначим этот элемент за α). Рассмотрим любую из неграничных вершин в пути по дереву между X и Y , обозначим ее за U_1 (заметим, что U_1 лежит во внутренности $\text{conv}(M^\varepsilon)$ по лемме 2.4: в противном случае принадлежности границе $\text{conv}(M^\varepsilon)$ существовало бы ребро из нее вовне $\text{conv}(M^\varepsilon)$). Параллельно перенесем α так, чтобы вершина U_1 стала вершиной угла α . По лемме 2.9, хотя бы одно из ребер, инцидентных U_1 , лежит в замыкании $\bar{\alpha}$. Заметим, что второй конец U_2 этого ребра не может оказаться граничной вершиной со сторон A_1A_2 или A_2A_3 , поскольку замыкание перенесенного угла $\bar{\alpha}$ не пересекается с указанными сторонами. Повторив рассуждение с U_2 вместо U_1 , получим следующую вершину U_3 , не являющуюся граничной вершиной со сторон A_1A_2 или A_2A_3 . Продолжая таким образом, из-за конечности количества вершин мы попадем на границу (то есть какая-то вершина U_k окажется граничной вершиной, не принадлежащей сторонам A_1A_2 или A_2A_3) и получим противоречие с тем, что X и Y — наиболее удаленные в круговом порядке вершины M^ε , принадлежащие заданной

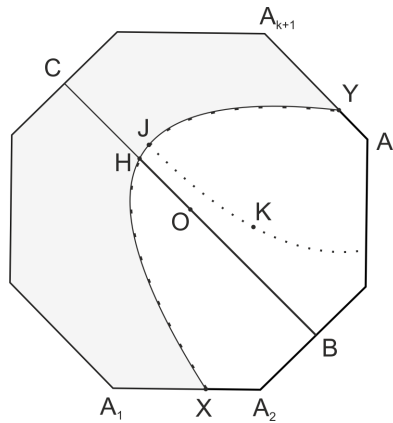


Рис. 7: закрашена область W_1 . Пунктиром схематически изображены путь между X и Y в невырожденной компоненте, а также минимальный по количеству ребер путь из J до части границы, принадлежащей W_2 .

невырожденной компоненте.

3) X и Y не лежат ни на одной стороне, ни на соседних (см. Рис. 7).

Пусть X (с точностью до перенумерации) лежит на стороне A_1A_2 , а Y лежит на стороне A_kA_{k+1} , где $k \leq n$. Путь в невырожденной компоненте между X и Y делит многоугольник M (по площади) на области W_2 (содержит B , середину A_2A_3) и W_1 (содержит C , середину $A_{n+2}A_{n+3}$ — стороны, диаметрально противоположной стороне A_2A_3). Также путь пересечет как минимум одну из половин BC , OB или OC . Пусть, для определенности, он пересечет половину OC (случай BO разбирается полностью аналогично) в точке H (возможно, пересечений пути и хорды BC несколько, тогда рассмотрим любое из них, и будем считать, что это пересечение с половиной OC). По лемме 2.13, не далее, чем в 4ϵ от H есть такой поворот пути (в вершине J), что третье ребро из J выходит в W_2 . Заметим, что все граничные вершины, до которых можно дойти из J через третье ребро, лежат в W_2 . Рассмотрим ту из них, путь до которой, измеренный в количестве ребер дерева, минимален (пусть в нем m ребер), и возьмем на этом пути вершину K , находящуюся в $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ребер от J . Имеем $m > \frac{\ell-4\epsilon}{\epsilon}$, а значит, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor > \frac{\ell-6\epsilon}{2\epsilon}$. Количество граничных вершин

в M^ε равно $\frac{2n}{\varepsilon}$, но по лемме 2.10, минимальное расстояние до границы, измеренное в количестве ребер, не может превосходить $\log_2 \frac{2n}{3\varepsilon}$, а у K оно не менее $\frac{\ell-6\varepsilon}{2\varepsilon}$, противоречие при достаточно малых ε .

Таким образом, мы показали, что для некоторого $\varepsilon > 0$ граничное множество M^ε обладает полностью вырожденным SMT в норме $\|\cdot\|_1$. В этом случае, любое ребро SMT имеет длину, большую либо равную ε (поскольку расстояние между любыми двумя граничными вершинами $\geq \varepsilon$, а промежуточных вершин в дереве нет). Значит, длина $SMT \geq \frac{2n}{\varepsilon} - \varepsilon$, а описанная в начале доказательства топология реализует нижнюю грань оценки.

Значит, в норме $\|\cdot\|_2$ SMT будет также выглядеть как периметр M^ε с любым одним отсутствующий ребром между соседними вершинами. Это означает, что все ребра M^ε равны в $\|\cdot\|_2$, что влечет гомотетичность соответствующих вырожденных единичных ежей в $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, что д.

Замечание. По сути, техника разбора случая 2 теоремы 2.4 есть ни что иное, как доказательство свойства клина (Wedge property, см. [3]) в более общем случае. Классическое свойство клина формулируется в евклидовой норме таким образом: пусть дан фрагмент плоскости W , содержащий в себе угол $\frac{2\pi}{3}$ и не содержащий граничных вершин. Тогда для любой выбранной топологии ни одна из подвижных вершин минимального параметрического дерева Штейнера не будет лежать в W .

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ будем называть *гомотетичными*, если существует число $\alpha > 0$ такое, что для любого вектора v выполнено

$$\|v\|_1 = \alpha \|v\|_2$$

Теорема 2.5 Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две строго выпуклые дифференцируемые нормы на двумерной плоскости такие, что множества деревьев $SMT(M)$ в них совпадают для любого граничного множества M . Тогда указанные нормы гомотетичны.

Доказательство. Зафиксируем единичный вектор v . Построим единичный тройник в норме $\|\cdot\|_1$, содержащий v , и достроим этот тройник до единичного ежа с шестью векторами, центрально симметрично отразив его относительно его начала. Полученный единичный еж обозначим за H_1 ; он является вырожденным.

Добавим к H_1 произвольный единичный вектор w , полученный единичный еж обозначим через H_1^w , соответствующий ему еж обозначим через H^w . По теореме 2.4, единичные ежи, соответствующие H^w в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, гомотетичны, пусть коэффициент гомотетии равен k . Заметим, что коэффициент гомотетии k однозначно определяется тем, во сколько раз растягивается единичный отрезок в направлении вектора v , поэтому k не зависит от выбора w . Значит, для всех единичных векторов w коэффициент гомотетии одинаков, что и дает гомотетичность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$.

3 Минимальные параметрические сети

В данной главе изучается поведение минимальных параметрических сетей при малых деформациях их граничных множеств.

Лемма 3.1 Пусть дано нормированное пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Пусть также в нем выбраны четыре точки A, B, C, D , обозначим $\frac{A+B}{2}$ через E , $\frac{C+D}{2}$ через F . Тогда $\|EF\| \leq \frac{\|AD\| + \|BC\|}{2}$. В случае строго выпуклой нормы равенство возможно только в случае сонаправленных векторов AD и BC .

Доказательство. Используем равенства сумм векторов

$$EF = EB + BC + CF = EA + AD + DF, EB = -EA, CF = -DF,$$

$$2EF = BC + AD$$

По неравенству треугольника, имеем

$$\|EF\| \leq \frac{\|BC\| + \|AD\|}{2}$$

В случае строго выпуклой нормы, равенство в последнем неравенстве достигается только в случае сонаправленных AD и BC , чтд.

Пусть дано нормированное пространство $X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ и фиксировано граничное множество точек M . Будем рассматривать вложенные бинарные деревья с границей M , $|M| = n$, фиксированной бинарной топологии G . Длина ℓ каждого такого дерева есть функция координат всех граничных и подвижных вершин (для фиксированной границы скажем, что зависимость есть только от координат подвижных вершин). У бинарного дерева с n граничными вершинами есть ровно $n - 2$ подвижные вершины. Будем задавать соединяющее дерево с известной границей вектором $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$, где (v_i) — это вектор из m координат i -той подвижной вершины. На пространстве таких векторов введем следующую норму:

$$\|v\|_\infty = \max_i \|v_i\|, i \in [1, n - 2].$$

Лемма 3.2 Пусть два дерева топологии G , соединяющие M , заданы соответственно векторами v^1 и v^2 наборов координат подвижных вершин. Тогда $\ell(\frac{v^1+v^2}{2}) \leq \frac{\ell(v^1)+\ell(v^2)}{2}$. В случае строго выпуклой нормы $\|\cdot\|$, равенство достигается только в том случае, когда любая пара векторов соответствующих ребер в двух деревьях является парой сонаправленных векторов.

Доказательство. Обозначим через T^i дерево, построенное по вектору v^i , а через T' обозначим дерево, построенное по вектору $\frac{v^1+v^2}{2}$. Заметим, что норма каждого ребра из T' не превосходит полусуммы норм соответствующих ребер из T^1 и T^2 по лемме 3.1. Из этого непосредственно вытекает верность неравенства из формулировки леммы.

В случае строго выпуклой нормы $\|\cdot\|$, равенство в неравенстве из формулировки леммы будет достигаться только в случае выполнения соответствующих равенств для всех пар ребер, каждое из которых, по лемме 3.1, выполняется, когда пара векторов соответствующих ребер в двух деревьях является парой сонаправленных векторов.

Усами будем называть пару ребер, идущих из подвижной вершины в две соседние граничные вершины. Следующая лемма была ранее доказана в [4, теорема 6.1].

Лемма 3.3 Пусть норма $\|\cdot\|$ пространства X строго выпукла. Пусть задано граничное множество M , $|M| = n$, и топология бинарного дерева G . Пусть также существует невырожденное дерево T^1 , принадлежащее $PMT(G, \partial\Gamma)$. Тогда $|PMT(G, \partial\Gamma)| = 1$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n . База: $n = 2$. Существует всего одно подходящее бинарное дерево и единственное его линейное вложение в X (просто одно ребро — отрезок между двумя данными вершинами), значит, $|PMT(G, \partial\Gamma)| = 1$, и база доказана. Переход: пусть утверждение доказано для $M : |M| < n$. Докажем его от противного для $M : |M| = n$. Пусть есть второе дерево (T^2) из $PMT(G, \partial\Gamma)$. По лемме 3.2, любая пара векторов соответствующих ребер в T^1 и T^2 является парой сонаправленных векторов, поскольку иначе $\ell(\frac{v^1+v^2}{2}) < \frac{\ell(v^1)+\ell(v^2)}{2} = \ell(v^1)$ (где v^i — вектор координат подвижных вершин дерева T^i), противоречие с тем, что $T^1 \in PMT(G, \partial\Gamma)$.

Найдем у T^1 пару ребер-усов. Рассмотрим соответствующие усы у T^2 . Ребра этих усов из T^2 можно построить как отрезки, полученные при пересечении прямых, содержащих соответствующие ребра в T^1 , то есть — единственным образом. Совершим редукцию деревьев T^1 и T^2 , заменив граничные вершины рассмотренных усов на соседнюю им подвижную вершину. Полученные деревья \widetilde{T}^1 и \widetilde{T}^2 будут различными невырожденными бинарными деревьями с границей, состоящей из $(n - 1)$ точки, противоречие с предположением индукции. Таким образом, переход доказан.

Введем расстояние между границами одного размера, учитывающее нумерацию граничных вершин. Полученное пространство будет нормированным с нормой

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq |M|} \|M_i\|.$$

Лемма 3.4 Пусть норма $\| \cdot \|$ пространства X строго выпукла. Пусть заданы граничное множество M , $|M| = n$, граничное отображение $\partial\Gamma$ и топология бинарного дерева G . Пусть также существует невырожденное дерево Γ , принадлежащее $PMT(G, \partial\Gamma)$, и $|PMT(G, \partial\Gamma)| = 1$. Тогда существует окрестность $B(M)$ такая, что для $M' \in B(M)$ выполнено:

- 1) $|PMT(G, \partial\Gamma')| = 1$, где $\partial\Gamma'(\partial G) = M'$,

- 2) при непрерывном изменении границы M' в $B(M)$ координаты подвижных вершин единственного дерева из $PMT(G, \partial\Gamma')$ изменяются непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\ell(v)$ длины дерева, где v — вектор координат подвижных вершин дерева с границей M , аналогично $\ell'(v)$ — функция длины дерева с v — вектором координат подвижных вершин дерева с границей M' . Обозначим через w вектор координат подвижных вершин дерева Γ . Пусть $\ell(w) = m$. Функция $\ell(v)$ имеет глобальный и единственный минимум в точке w . Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим замкнутую окрестность $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$. Пусть минимальное значение на границе окрестности $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ равно $m + (n + 1)\delta$. Обозначим через S множество всех точек v таких, что $\ell(v) = m + (n + 1)\delta$. Тогда все $v \in S$ лежат в $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$. Действительно, если это не так, возьмем точку s из S , не принадлежащую $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$, и пересечем отрезок от w до нее с границей $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$, получив точку s' . Функция ℓ выпукла, а также имеет единственный глобальный минимум в точке w ; это означает, что ℓ мажорируется линейной функцией, график которой проходит через точки $(w, \ell(w))$ и $(s, \ell(s))$ на отрезке ws . Получаем $\ell(s') < m + (n + 1)\delta$, противоречие.

Для каждой точки v из S рассмотрим точку $h(v) = w + 2(v - w)$. Функция ℓ выпукла, поэтому значение $\ell(h(v))$ больше, чем $m + 2(n + 1)\delta$. Заметим, что на любом отрезке с началом в w и концом на границе $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ найдется точка из S , и значит, на любом отрезке с началом в w и концом на границе $B_{\varepsilon}(w)$ найдется точка из $h(S)$. Функция ℓ выпукла, а также имеет единственный глобальный минимум в точке w . Для каждого луча с началом в w верно, что значение функции ℓ на нем

монотонно возрастает при удалении от w . Из этого следует, что при v снаружи $B_\varepsilon(w)$ значение функции $\ell(v)$ больше, чем $m + 2(n + 1)\delta$.

Рассмотрим теперь сдвинутую границу $M' : \|M - M'\|_\infty < \delta$. Тогда:

$$\ell'(v) \geq m + 2(n + 1)\delta - n\delta > m + (n + 1)\delta \quad \forall v \notin B_\varepsilon(w).$$

Первое неравенство верно, поскольку сети на вершинах (M, v) и (M', v) различаются только граничными ребрами, и соответствующие граничные ребра различаются по длине не более, чем на δ . По той же причине, имеем $\ell'(w) \leq m + n\delta < m + (n + 1)\delta$. Это означает, что минимум функции ℓ' достигается в $B_\varepsilon(w)$. Заметим, что можно подобрать такое малое ε (а с ним и δ), чтобы все деревья с вектором граничных вершин из $B_\delta(M)$ и вектором подвижных вершин из $B_\varepsilon(w)$ были невырожденными. Тогда то дерево, которое будет давать минимум функции $\ell'(v)$, будет невырожденным, а значит, по лемме 3.3, будет единственным деревом из $PMT(G, \partial\Gamma')$. В качестве $B(M)$ можно рассмотреть $B_\delta(M)$.

Следующая теорема будет использовать понятие *поворота сети* при малых деформациях границы. По лемме 3.4, для любой пары $M, PMT(G, \partial\Gamma)$, где единственная сеть из $PMT(G, \partial\Gamma)$ реализуется в виде невырожденного бинарного дерева, и любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать δ так, чтобы при сдвиге M не далее, чем на δ (то есть для $M' : \|M' - M\|_\infty < \delta$), единственная сеть из $PMT(G, \partial\Gamma')$, где $\partial\Gamma'(\partial G) = M'$, сдвинулась не далее, чем на ε (имеется в виду расстояние между векторами координат подвижных вершин соответствующих деревьев). Подберем такое ε , чтобы все отрезки сети повернулись при замене M на M' не более, чем на малый евклидов угол α (настолько малый, что никакой тройник не может перейти в себя нетождественно при поворотах на угол, меньший либо равный α). Кроме введения евклидовых углов, зафиксируем также ориентацию плоскости. В этом случае корректно утверждение вида «поворот от единственной сети из $PMT(G, \partial\Gamma)$ к единственной сети из $PMT(G, \partial\Gamma')$ происходит против (по) часовой стрелки(-е)». Действительно, все ребра, инцидентные произвольной подвижной вершине, повернутся в одну сторону по лемме 2.9), и по лемме 2.6 это становится верно для всех

ребер сети; направление поворота будем оценивать по тому, в какой полуплоскости оказался вектор произвольного ребра сети из $PMT(G, \partial\Gamma')$ относительно вектора соответствующего ребра сети из $PMT(G, \partial\Gamma)$.

Теорема 3.1 Пусть дано нормированное пространство $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ со строго выпуклой нормой $\|\cdot\|$. Пусть также дано граничное множество M , $|M| = n$, и задана бинарная топология G соединяющего M дерева, а также то, что единственная сеть из $PMT(G, \partial\Gamma)$ реализуется в виде невырожденного бинарного дерева. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом сдвиге не далее, чем на ε , одной граничной вершины A , сеть повернется в ту же сторону, что и вектор CA из соседней к A подвижной вершины C при повороте к CA' , где A' — новое положение граничной вершины A .

Доказательство. Обозначим через C' новое положение точки C . Разберем два случая:

1) Сеть $PMT(G, \partial\Gamma')$ не повернулась относительно сети из $PMT(G, \partial\Gamma)$. Заметим, что по множеству $M \setminus \{A\}$ и направлениям всех ребер, сеть из $PMT(G, \partial\Gamma)$ восстанавливается с точностью до положения вершины A на луче $[CA)$. Если сеть $PMT(G, \partial\Gamma')$ не повернулась относительно сети из $PMT(G, \partial\Gamma)$, имеем $A' \in [CA)$, а значит, и вектор $[CA)$ не повернулся.

2) Сеть $PMT(G, \partial\Gamma')$ повернулась относительно сети из $PMT(G, \partial\Gamma)$ в сторону, противоположную повороту от $[CA)$ к $[CA')$. Это значит, что если отложить луч от C' , сонаправленный лучу $[CA)$ (выберем любую точку на новом луче и обозначим его через $[C'A''')$), то направления поворотов от $[CA)$ к $[CA')$ и от $[C'A''')$ к $[C'A')$ противоположны. Из этого следует, что лучи $[CA)$ и $[C'A')$ пересекаются, обозначим точку пересечения лучей через A'' . Обозначим через M'' множество $(M \setminus \{A\}) \cup \{A''\}$. Заметим, что для M'' мы имеем как минимум две различные невырожденные экстремальные сети: продленная до A'' сеть из $PMT(G, \partial\Gamma)$, и продленная до A'' сеть из $PMT(G, \partial\Gamma')$. По теореме 2.2, каждая из них является локальным минимумом функции ℓ (по выпуклости функции, имеем равенство

длин двух сетей). По лемме 3.3, имеем $|PMT(G, \partial\Gamma)| = 1$, противоречие.

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты, а также возможные дальнейшие направления исследования.

Основная теорема первой главы (Теорема 1.1) утверждает, что существуют неевклидовы нормы на двумерной плоскости, F_3 -неразличимые с евклидовой. Основная теорема главы 2 (теорема 2.5) гласит, что каждая двумерная строго выпуклая дифференцируемая норма обладает уникальным набором минимальных сетей Штейнера. В связи с этим интересен вопрос, каково минимальное число n , что рассматривая лишь сети на границах, содержащих не более n вершин, можно отличить либо двумерную евклидову норму от любой другой, либо другую фиксированную двумерную строго выпуклую дифференцируемую норму от любой другой (ответы в этих случаях могут различаться).

В главе 3 доказывается непрерывность координат подвижных вершин и естественность направления поворота при деформации границы рассматриваемого типа в ее малой окрестности (лемма 3.4 и теорема 3.1) для минимальных параметрических сетей в случае строго выпуклых норм. Это является удобным инструментом для элементарных (в остальном) доказательств теорем о минимальных параметрических сетях и минимальных сетях Штейнера в произвольных строго выпуклых дифференцируемых нормах.

Список литературы

- [1] Fermat P. de (1643), Ed. H.Tannery, ed., "Oeuvres vol. 1, Paris 1891, Supplement: Paris 1922, cc. 153
- [2] V. Jarnik, O. Kossler (1934), "O minimalnich grafech obsahujicich n danych bodu Cas, Pestovani Mat. (Essen) T. 63: 223-235
- [3] E. N. Gilbert and H. O. Pollak, Steiner Minimal Trees. //SIAM Journal on Applied Mathematics, 1968, Vol. 16, No. 1, pp. 1-29.
- [4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические в нормированных пространствах. //Изв. РАН. Сер. матем., 2002, том 66, выпуск 5, 33-82
- [5] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Стабилизация локально минимальных деревьев. // Матем. заметки, 2009, том 86, выпуск 4, 512-524
- [6] А. О. Иванов, А. А. Тужилин Число вращения плоских линейных деревьев // Матем. сб., 1996, том 187, номер 8, с. 41-92
- [7] Benitez C., Fernandez M., Soriano M.L. Location of the Fermat-Torricelli medians of three points //Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 5027-5038.
- [8] H. Martini, K. J. Swanepoel, G. Weiss The geometry of Minkowski spaces - a survey. Part I. //Expositiones Mathematicae 19 (2001), 97-142. MR 2002 h: 46015.
- [9] Swanepoel K. The local Steiner problem in finite-dimensional normed spaces. //Discrete & Computational Geometry 37 (2007), 419-442.
- [10] Martini, H., Swanepoel, K. & Weiss The Fermat–Torricelli Problem in Normed Planes and Spaces //G. Journal of Optimization Theory and Applications (2002) 115: 283. doi:10.1023/A:1020884004689

- [11] Cieslik D. Steiner Minimal Trees. // Springer US, Nonconvex Optimization and Its Applications 23 (1998), ISBN 0-7923-4983-0.
- [12] Andreas Kriegl, Peter W. Michor The Convenient Setting of Global Analysis // American Mathematical Soc., Mathematical Surveys 53 (1997), ISBN 0821807803, 9780821807804
- [13] Robert E. Megginson An Introduction to Banach Space Theory // Springer-Verlag New York, Graduate Texts in Mathematics (1998), ISBN 978-1-4612-0603-3, 978-0-387-98431-5
- [14] Ильютко Д.П. Разветвленные экстремали функционала l -нормированной длины // Математический сборник, 2006, том 197, 5, с. 75-98.
- [15] Ильютко Д.П. Локально минимальные сети в N -нормированных пространствах // Математические заметки, 2003, т. 74, № 5, сс. 656-668.
- [16] Ильютко Д.П. Геометрия экстремальных сетей на l -нормированных плоскостях // Вестник МГУ, 2005, № 4, сс. 52-54.
- [17] Лаут И. Л., Овсянников З. Н. Вид минимальных разветвлённых геодезических в нормированном пространстве определяет норму. // Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, 2, с. 67-77. Англ. пер.: Laut, I.L. & Ovsyannikov, Z.N. The Type of Minimal Branching Geodesics Defines the Norm in a Normed Space. // J Math Sci (2014) 203: 799. doi:10.1007/s10958-014-2169-4
- [18] Лаут И. Л. Восстановление нормы по геометрии минимальных сетей. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2016, 2, сс. 53-56. Англ. пер.: I.L. Laut. Reconstruction of norm by geometry of minimal networks. // Moscow University Mathematical Bulletin, 2016, vol.71, 2, pp. 84-87

- [19] Лаут И. Л. Характеризация нормированных пространств в терминах минимальных сетей. //Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015»
- [20] Лаут И. Л. Исследование связи между видом нормы и видом минимальных разветвленных геодезических в нормированных пространствах. //Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014»
- [21] Лаут И. Л. Различные нормированные пространства, обладающие равными наборами локально минимальных сетей // Международная конференция «Александровские чтения». МГУ, Москва, 21-25 мая, 2012, сс. 95-96.