

ФГБОУ ВО
“Московский Государственный университет
имени М.В. Ломоносова”

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Кудрявцева Елена Александровна

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ МОРСА
И ИНВАРИАНТЫ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

(специальность - 01.01.04 - геометрия и топология)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2016

Оглавление

Введение	6
Актуальность темы	6
Исторический обзор	7
I. Функции высоты на погруженных и вложенных многообразиях в \mathbb{R}^N	8
II. Топологическая классификация и изотопность функций Морса на поверхностях	9
III. Топология и стратификация пространств функций с заданными особенностями	10
IV. Топологические инварианты интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений (интегрируемых гамильтоновых систем на изоэнергетических 3-мерных многообразиях)	11
V. Топологические инварианты 3-мерных точных несжимаемых течений	12
Цель работы	13
Научная новизна	14
Теоретическая и практическая значимость	15
Основные методы исследования	15
Апробация результатов	15
Структура диссертации	16
Публикации	16
Благодарности	16
Краткое содержание работы	17
1 Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты	28
1.1 Введение	28
1.2 Препятствия к реализации гладкой функции в виде функции высоты при вложении или погружении поверхности	33
1.3 Критерий реализуемости функции с конечным числом критических точек на поверхности в виде функции высоты (доказательство теоремы 1.1.2)	34
1.4 Критерий реализуемости функции в виде функции высоты для погружений ориентируемой поверхности (доказательство теоремы 1.3.1)	36
1.4.1 Необходимость	37
1.4.2 Достаточность	39
1.5 Реализуемость функции в виде функции высоты для погружений поверхности в неориентируемом случае (доказательство теоремы 1.3.2)	42
1.6 Изотопность функций Морса на сфере и проективной плоскости. Приведение функций к каноническому виду	44
1.7 Топология пространства всех погружений с данной функцией высоты. Регулярная гомотопность гладких погружений сферы в трехмерном пространстве	53
1.7.1 Построение выворачивания сферы наизнанку	56

1.7.2	Связные компоненты пространства всех погружений с данной функцией высоты	57
1.8	Некоторые обобщения	64
2	Топологическая классификация функций Морса и их возмущений на по- верхностях. Инварианты изотопности функций Морса	66
2.1	Введение	66
2.2	Основные типы эквивалентности функций Морса	72
2.3	Топологическая классификация функций Морса	74
2.3.1	Топологическая послойная классификация и критерий топологической сопряженности функций Морса	78
2.4	Послойная классификация Фоменко функций Морса. Атомы и молекулы Фо- менко	79
2.4.1	Критерии эквивалентности и сопряженности функций Морса	83
2.5	Топологическая послойная классификация возмущенных функций Морса . . .	85
2.5.1	Топологическая классификация и критерий топологической сопряжен- ности возмущенных функций Морса	92
2.5.2	Стратификации Максвелла в пространстве \mathcal{F} функций Морса: разбиения на классы топологической (послойной) эквивалентности	93
2.6	Теорема Матвеева об изотопности функций Морса с закрепленными точками локальных экстремумов. Обобщение на случай нумерованных и оснащенных седел	95
2.7	Инварианты изотопности на пространстве \mathcal{F}^{fix} функций Морса с фиксирован- ными критическими точками. Комплексы функций Морса	104
2.7.1	Введение	105
2.7.2	Изотопический инвариант на пространстве \mathcal{F}^{fix} и \mathcal{D}_f^* -инвариант на груп- пе диффеоморфизмов \mathcal{D}^*	107
2.7.3	Допустимые диффеоморфизмы и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ -инвариант на группе \mathcal{D}^*	107
2.7.4	Почти-эквивалентность функций Морса	111
2.7.5	Комплексы \tilde{K}, K функций Морса, связь с пермутоэдрами. Связь обра- зующих группы $\pi_1(K)$ и групп $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ и $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$	112
3	Топология связных компонент \mathcal{F} пространств функций Морса на поверхно- стях	117
3.1	Введение	117
3.1.1	Обобщенные пространства функций Морса	124
3.1.2	Схема доказательства основных результатов	126
3.2	Теорема Кудрявцевой-Пермякова о гомотопической эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim$ \mathbb{F}^1 пространств функций Морса и оснащенных функций Морса	128
3.2.1	Точная формулировка результата и мотивировка	129
3.2.2	Введение C^∞ -топологии на пространствах $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{D}^\pm, \mu, \mathbb{F}$ и \mathbb{F}^{num} . .	133
3.2.3	Гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1$	135
3.2.4	Равномерная \mathcal{D}^\pm -эквивариантная лемма Морса	143
3.2.5	Равномерная лемма Морса для оснащенных функций Морса	147
3.3	Комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса при $\chi(M) < 0$. Связь с пермутоэдрами	148
3.3.1	Точные формулировки основных результатов	149
3.3.2	Построение стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ и отобра- жений инцидентности $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$	154
3.3.3	Построение комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса	170
3.3.4	Построение гладкого стратифицированного многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$	174

3.3.5	Топология косых цилиндрических ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$, существование комплекса \tilde{K} и проекции $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$	175
3.3.6	Гомологии комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса	180
3.4	Пространство модулей $\tilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса, гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}$ при $\chi(M) < 0$	183
3.4.1	Формулировка основных результатов	184
3.4.2	Комбинаторное построение многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ согласно §§3.3.2–3.3.4	187
3.4.3	Гомеоморфизм между универсальным пространством модулей $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса и многообразием $\tilde{\mathcal{M}}$	189
3.4.4	\mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $p_3 : \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}$	199
3.5	Специальные оснащенные функции Морса. Гомотопические эквивалентности $\mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0$, $\tilde{\mathcal{M}} \sim \tilde{\mathbb{K}}$ при $\chi(M) < 0$	202
3.5.1	Ключевые понятия и формулировка основного результата	203
3.5.2	Гомотопическая эквивалентность $i_4 : \mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$	204
3.5.3	\mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $\mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty$ и деформационные ретракции $\tilde{\mathbb{K}} \subset \tilde{\mathbb{K}}^\infty \subset \tilde{\mathcal{M}}$	208
3.6	Примеры комплексов $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, исследование гомотопической эквивалентности $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}$ при $\chi(M) < 0$	210
3.6.1	Примеры: топология и стратификация Максвелла пространств функций Морса $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$, $\mathcal{F}_{1,2,3}^{\text{num}}(S^2)$ и $\mathcal{F}_{2,2,2}^{\text{num}}(S^2)$ на торе и сфере	210
3.6.2	Несжимаемость ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$. Исследование гомотопической эквивалентности $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}$ комплексов функций Морса	214
3.7	Топология пространств \mathcal{F} гладких функций с заданными типами локальных особенностей на поверхностях	218
3.7.1	Основной результат в случае замкнутой поверхности M	218
3.7.2	Построение классифицирующих многообразий и отображений	219
3.7.3	Сведение к случаю функций Морса	220
3.7.4	Связь с мероморфными функциями и конфигурационными пространствами	221
3.7.5	Случай поверхности M с краем	222
3.7.6	Примеры: топология и стратификация Максвелла пространств $\mathcal{F}_{q+1,q,1}$ функций Морса на сфере при $q = 0, 1, 2$	223
3.7.7	Выводы: топология и стратификация Максвелла пространств функций Морса на поверхностях	225
4	Продолжимые частичные инварианты C^0-сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях	228
4.1	Введение	228
4.1.1	Мотивировка: непрерывные траекторные инварианты интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений и интегрируемых гамильтоновых систем на 3-мерных изоэнергетических многообразиях	231
4.1.2	Основные типы эквивалентности гамильтоновых систем	241
4.1.3	C^r -топологии в пространстве гамильтоновых систем, $r \geq 5$. Возмущенные системы	243
4.1.4	Инварианты гамильтоновых систем. Гладкие функционалы на пространстве систем	244
4.1.5	Постановка вопросов об устойчиво несопряженных системах на атоме, о продолжимости инвариантов на множество возмущенных систем	246
4.2	Открытость пространства невырожденных гамильтоновых систем в пространстве всех гамильтоновых систем на поверхности	251

4.2.1	Метки Болсинова-Фоменко (Π -инвариант) на ребрах молекулы Фоменко. Полнота Π -инварианта для простого морсовского гамильтониана	252
4.2.2	Асимптотическое поведение функции периода вблизи морсовских критических точек гамильтониана	254
4.2.3	Грубые метки Болсинова-Фоменко (грубые Λ - и m -инварианты) систем на седловом атоме. Кресты и ленточки	259
4.2.4	(Λ, m, \mathbf{c}) -аппроксимация функции периода возмущенной системы. Доказательство теоремы 4.2.2	264
4.2.5	Поведение Π -меток на “старых” и “новых” ребрах молекулы Фоменко при малом возмущении невырожденной системы	271
4.3	Инварианты Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на поверхностях	272
4.3.1	Метки Болсинова-Фоменко (Λ - и m_Λ -инварианты C^0 -сопряженности) систем на седловом атоме	273
4.3.2	Полный инвариант Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных систем на поверхности	280
4.3.3	Критерий того, что функция от m -инварианта является инвариантом C^0 -сопряженности, для некоторых атомов малой валентности	282
4.4	Полный относительно-продолжимый инвариант для тривиальных или простых возмущений систем с плоскими атомами	290
4.4.1	Тривиальные возмущения (непрерывные инварианты сопряженности на страте Максвелла)	291
4.4.2	Простые возмущения гамильтоновой системы на плоском седловом атоме	292
4.4.3	Выводы о продолжимых инвариантах и устойчивой C^0 -несопряженности систем на атоме	297
4.5	Два типа относительно-продолжимых инвариантов C^0 - и C^1 -сопряженности систем на седловом атоме	297
4.5.1	Относительно-продолжимый Λ -инвариант C^0 -сопряженности систем на сложном атоме для сложных возмущений	298
4.5.2	Относительно-продолжимый m -инвариант C^1 -сопряженности систем на бициклическом атоме для бициклических возмущений	299
5	Дифференцируемые инварианты 3-мерных несжимаемых течений	316
5.1	Введение	316
5.2	Дифференцируемые инварианты сопряженности симплектоморфизмов круга	319
5.2.1	Инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$	319
5.2.2	Дифференцируемые функции на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$	322
5.2.3	Основной результат	323
5.3	Дифференцируемые инварианты точных несжимаемых течений на 3-мерных многообразиях	324
5.3.1	Примеры \mathcal{D}^0 -инвариантных функционалов на множестве \mathcal{B} точных несжимаемых течений	324
5.3.2	Дифференцируемые функционалы на $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{K}^\perp} _{\mathcal{B}''}$ -связные подмножества \mathcal{B}''' множества \mathcal{B}''	327
5.3.3	Основной результат	329
	Заключение	331
	Список литературы	333

Введение

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию в области топологии функциональных пространств и топологических инвариантов 3-мерных несжимаемых течений и интегрируемых систем с 1 и 2 степенями свободы. В ней разрабатываются новые методы изучения глобального строения пространств морсовских функций и гамильтоновых систем на компактных поверхностях, которые применяются для изучения топологии этих пространств, структуры разбиения пространств функций на классы топологической эквивалентности и структуры разбиения пространств гамильтоновых систем на классы C^0 -сопряженности, а также для исследования непрерывных топологических инвариантов (интегрируемых или произвольных) 3-мерных несжимаемых течений и гамильтоновых систем с 2 степенями свободы.

Напомним определение морсовской функции. Пусть f — гладкая действительная функция на гладком многообразии M . Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции f , если $df(p) = 0$. Если мы выберем в окрестности U точки p локальную систему координат (x^1, \dots, x^n) , то это условие примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0,$$

где $n = \dim M$. Критическая точка p называется *невырожденной* или *морсовской*, если матрица вторых частных производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

невырождена. Непосредственно проверяется, что это свойство не зависит от системы координат. Гладкая действительная функция f на многообразии M называется *морсовской*, если все ее критические точки невырождены. Согласно лемме Морса для любой невырожденной критической точки p функции f в некоторой окрестности U этой точки существует такая локальная система координат (y^1, \dots, y^n) , что $y^i(p) = 0$ при всех i и в U справедливо тождество

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2.$$

Число λ называется *индексом* функции f в критической точке p .

Хорошо известно, что геометрическое строение любого гладкого многообразия M определяется морсовскими функциями на нем. Дело в том, что (согласно теории Морса) любая функция Морса f на M определяет (неоднозначным образом) клеточное разбиение многообразия M , причем количество клеток размерности λ этого разбиения равно числу критических точек индекса λ функции f . Этот факт означает, что если у функции Морса на многообразии M “не слишком много” критических точек, то многообразие M устроено “не слишком сложно”. Например, отсюда следует известная теорема Рибо [104, теорема 4.1], согласно которой многообразию M^n , на котором существует функция Морса с ровно двумя критическими точками, обязательно гомеоморфно стандартной сфере S^n (в действительности, эта теорема

остаётся справедливой и тогда, когда гладкая функция не является морсовской [103, 119]). Важным приложением указанного факта являются *слабые неравенства Морса*:

$$\beta_\lambda(M) \leq \mu_\lambda(f), \quad 0 \leq \lambda \leq \dim M,$$

где $\beta_\lambda(M) := \dim H_\lambda(M; \mathbb{R})$ — λ -ое число Бетти многообразия M , $\mu_\lambda(f)$ — число критических точек индекса λ функции f . М. Морс [110] установил более сильные неравенства:

$$N_\lambda := \text{rank}(H_\lambda(M)) + \text{rank}(\text{Tors}(H_{\lambda-1}(M))) \leq \mu_\lambda(f), \quad 0 \leq \lambda \leq \dim M,$$

где ранг группы есть минимальное количество порождающих элементов.

Функции Морса, для которых сильные (соответственно слабые) неравенства Морса обращаются в равенства, называются *минимальными* (соответственно *совершенными*). С. Смейл [123] установил, что на любом односвязном многообразии размерности > 5 существует минимальная функция Морса. Функции Морса на заданном многообразии M , имеющие минимальное число $\min_f \{\mu_\lambda(f)\}$ критических точек каждого индекса λ , называются *точными*. В.В. Шарко [39] получил условия существования минимальных и точных функций Морса на неодносвязных многообразиях размерности > 5 . Он ввел алгебраические инварианты многообразий, которые позволили уточнить неравенства Морса для неодносвязных многообразий.

В работе исследуются следующие пять основных вопросов, каждому из которых посвящена отдельная глава.

I) Реализуема ли заданная гладкая функция f на заданном компактном многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении или вложении $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в евклидово пространство \mathbb{R}^{n+1} , где $n = \dim M$? Более общая проблема состоит в следующем: описать связные компоненты пространства $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^{n+1})$ всех погружений, реализующих функцию f в виде функции высоты.

II) Какие бывают гладкие функции на компактных многообразиях, как классифицировать такие функции с точностью до разных типов (топологической) эквивалентности? Когда две морсовские функции изотопны, т.е. когда их можно продеформировать друг в друга в пространстве морсовских функций?

III) Как описать структуру и топологию пространства $\mathcal{F}(M)$ гладких функций с заданными локальными особенностями на компактном многообразии M ?

IV) Описать *непрерывные* траекторные инварианты на пространстве $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q . Близкая задача: описать *непрерывные* траекторные инварианты на пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы на неособом компактном изоэнергетическом 3-мерном многообразии $Q_E \approx Q$ (см. §4.1.1). Эквивалентным образом: описать *непрерывные* инварианты C^0 -сопряженности на пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности P .

V) Описать *дифференцируемые* топологические инварианты на пространстве $\mathcal{V}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q , обладающие “достаточно хорошей” производной. Эквивалентным образом: описать *дифференцируемые* инварианты сопряженности на группе $\mathcal{D}_\omega(D^2)$ симплектоморфизмов круга, или на универсальной накрывающей $\widehat{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ этой группы, обладающие “достаточно хорошей” производной.

Исторический обзор

Перейдем к более подробному описанию истории вопросов, затронутых в диссертации.

I. Функции высоты на погруженных и вложенных многообразиях в \mathbb{R}^N

Известно, что на любом гладком компактном многообразии M существует функция Морса [104, следствие 6.7]. Более того, функции Морса образуют открытое и плотное подмножество в пространстве $C^\infty(M)$ всех гладких функций на M (см. [104, следствие 6.8], ср. [109]). Другими словами, “почти все” гладкие функции на гладком компактном многообразии M являются функциями Морса. Классический способ доказательства этого факта (и построения функций Морса) основан на понятии функции высоты и состоит в следующем. Рассмотрим произвольное гладкое компактное многообразие M . Рассмотрим его произвольное погружение $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство (такое погружение существует при $N = 2n$ по теореме Уитни [30], где $n = \dim M$). Теперь на \mathbb{R}^N рассмотрим семейство гладких функций L_q , являющихся квадратами расстояний до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^N$: $L_q(x) = |x - q|^2$. Оказывается, что тогда (в силу теоремы Сарда) для точки q общего положения функция $L_q \circ \alpha$ будет морсовской функцией на M [104, теорема 6.6]. Функции вида $L_q \circ \alpha$ при $|q| \rightarrow \infty$ тесно связаны с *функциями высоты* при погружении α , т.е. с функциями вида $p_e \circ \alpha$, где $p_e(x) = \langle x, e \rangle$, e — вектор единичной длины в \mathbb{R}^N . Из указанного выше наблюдения следует, что любая гладкая функция на многообразии M является функцией высоты при некотором погружении $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ и может быть равномерно аппроксимирована морсовской функцией [104, следствие 6.8].

R. Bott и H. Samelson [56] обнаружили и изучили бесконечные серии подмногообразий евклидова пространства, на которых почти все функции высоты являются совершенными, например круглая сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и ее обобщения — орбиты присоединенного действия произвольных компактных алгебр Ли и др. (см. работу [41] и ссылки в ней).

Возникает вопрос о реализуемости данной гладкой функции f на многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении или вложении $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство наименьшей возможной размерности N , например при $N = \dim M + 1$. Отметим, что в случае $N = \dim M + 1$ векторы нормалей к данному погруженному многообразию $\alpha(M)$ во всех критических точках функции высоты $p_e \circ \alpha$ сонаправлены с вектором $\pm e$. Поэтому в случае $N = \dim M + 1$ вопрос о реализуемости можно уточнить так: реализуема ли данная гладкая функция f на n -мерном компактном многообразии M в виде функции высоты при погружении или вложении $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ с заданными направлениями нормалей $\pm e$ (т.е. с заданными выборами знаков \pm) в критических точках функции f ? Более общая проблема состоит в следующем: описать связные компоненты пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3) \subset \text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ всех погружений, реализующих данную функцию в виде функции высоты, с заданными направлениями нормалей $\pm e$ в критических точках.

O. Burlet и V. Naab [59] показали, что любая функция Морса на любой замкнутой двумерной поверхности M реализуема в виде функции высоты для некоторого погружения поверхности в \mathbb{R}^3 . Однако ими были обнаружены далеко не все искомые погружения, и уточненный вопрос о реализуемости функции с заданными направлениями нормалей в критических точках, а также вопрос описания компонент линейной связности пространства всех реализаций оставались нерешенными.

Гладкие функции на компактной поверхности M , реализуемые в виде функции высоты $p_e \circ \alpha$ при некотором *вложении* $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, называются *высотными функциями*. В той же работе [59] был получен критерий высотности функции Морса на замкнутой поверхности. При этом, критерий работы [59] разбивает исходную задачу на две: (i) когда окрестности критических уровней функции Морса допускают искомую высотную реализацию при каком-то вложении; (ii) когда граничные окружности атомов можно согласовать так, чтобы получилось глобальное вложение. Впрочем, ответа на первый вопрос в работе [59] не дается. Нетрудно показывается, что любая *простая* (определение 1.6.6) функция Морса на любой

замкнутой ориентируемой поверхности является высотной.

Напомним, что *2-атомом* называется функция Морса $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$ на компактной поверхности P , постоянная на каждой граничной окружности. В.О. Мантуров получил критерий высотности 2-атома [98]. Н.В. Волчанецкий и И.М. Никонов [15] классифицировали все высотные ориентируемые атомы в классе максимально-симметричных атомов, т.е. таких атомов, группа собственных симметрий которых транзитивно действует на ребрах графа $K = f^{-1}(c)$.

II. Топологическая классификация и изотопность функций Морса на поверхностях

Две гладкие вещественные функции на гладком многообразии M называют *топологически эквивалентными* [45], если их можно получить друг из друга преобразованиями многообразия M и вещественной прямой \mathbb{R} , изотопными тождественным. Две гладкие вещественные функции на M называют *эквивалентными* [45], если их можно получить друг из друга преобразованиями многообразия M и вещественной прямой \mathbb{R} .

Обозначим через $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ пространство функций Морса на замкнутой поверхности M , имеющих p критических точек локальных минимумов, q седловых критических точек и r точек локальных максимумов. Две функции Морса на многообразии M назовем *изотопными*, если их можно продеформировать друг в друга, т.е. соединить изотопией или непрерывным путем, в пространстве функций Морса, снабженном C^∞ -топологией. Ясно, что изотопные функции Морса на M должны принадлежать одному и тому же пространству $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$.

Кроме (топологической) эквивалентности естественно возникают похожие отношения эквивалентности — (топологическая) *сопряженность* и (топологическая) *послойная эквивалентность* (см. определение 2.2.4 (А, С)). Послойную эквивалентность функций Морса на поверхностях изучал А.Т. Фоменко в связи с изучением траекторной эквивалентности гамильтоновых систем с 1 степенью свободы, лиувиллевой (совместно с Х. Цишангом) и траекторной (совместно с А.В. Болсиновым) эквивалентностей гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. А.Т. Фоменко [33, 32, 34, 9, 10, 8], [53, theorem 2.16] описал полный инвариант послойной эквивалентности в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса на поверхностях в терминах комбинаторных объектов — “атомов” и “молекул” (предложение 2.4.6). Более точно: в работах А.Т. Фоменко [33, 32] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [8], где были введены понятия атомов и молекул.

В.И. Арнольд исследовал в связи с изучением 16-й проблемы Гильберта (о взаимном расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, или алгебраических поверхностей) *количество* классов эквивалентности типичных (следствие 2.4.12) функций Морса на прямой [2] и на поверхности [3, 44, 45, 4]. В частности, В.И. Арнольд [45] изучил асимптотику *количества* классов эквивалентности (= топологической эквивалентности) типичных функций Морса в пространствах $\mathcal{F}_{p,p+r-2,r}(S^2)$ функций Морса на сфере, в зависимости от количества $q = p + r - 2$ седел, при $q \rightarrow \infty$.

Е.В. Кулинич [95] (см. также [53, theorem 2.6]) вычислил *количество* классов эквивалентности типичных функций Морса на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \leq 6$, имеющих ровно одну точку локального минимума и ровно одну точку локального максимума.

Ж. Негер и Д. Загьер [78] вычислили (1986) производящую функцию (см. следствия 3.3.6 (С) и 3.4.2 (С)) для количества $\varepsilon_g(q)$ клеточных разбиений замкнутой связной ориентированной поверхности рода g с $r = q + 1 - 2g$ вершинами, r ребрами, одно из которых отмече-

но и ориентировано, и одной двумерной клеткой с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности. С помощью этого комбинаторного результата они получили важный топологический результат — вычислили эйлерову характеристику $\chi(G_g^s)$ “комплекса ленточных графов” G_g^s при $s > 2 - 2g$, а значит, ввиду [124], и $\chi(\mathcal{M}_g^s)$, где \mathcal{M}_g^s — пространство модулей комплексных алгебраических кривых рода g с $s > 3 - 3g$ пронумерованными проколами (подробнее см. раздел III ниже). Заметим, что число $\varepsilon_g(q)$ совпадает с количеством классов послышной эквивалентности (= эквивалентности) правильных (определение 2.4.3 (E)) функций Морса f на замкнутой поверхности M рода g , принадлежащих пространству $\mathcal{F}'_{1,q,r}(M)$ (см. определение 2.2.2 (B)), т.е. имеющих ровно одну точку локального минимума и q седловых точек, причем одна седловая точка оснащена (определение 2.2.2 (B)). Отсюда в следствии 3.3.6 (C) мы получим еще одно топологическое применение формулы Харера–Загье — формулу

$$\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} \varepsilon_g(q),$$

где $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{1,q,r} = \tilde{\mathbb{K}}/(\mathcal{D}/\mathcal{D}^0)$ — компактный косой цилиндрически-полиэдральный комплекс оснащенных функций Морса такой, что пространство $\mathcal{F}'_{1,q,r}(M)$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{K}$ или $(S^1)^2 \times \tilde{\mathbb{K}}$ или $\tilde{\mathbb{K}}$ (в зависимости от $g = 0, 1$ или ≥ 2), и $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{1,q,r}$ является накрытием полиэдра \mathbb{K} .

Полный инвариант изотопности в пространстве гладких функций без критических точек на открытой поверхности (с краем) описан Ю.М. Бурманом [13, 60] в терминах числа вращения.

В 1997 г. А. Т. Фоменко поставил вопрос о линейной связности пространств $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$. Положительный ответ был получен автором (см. теорему 1.6.2 или [129, теорема 4]) для $M = S^2$ и $\mathbb{R}P^2$, а в общем случае С. В. Матвеевым [129, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишангом [38] в 1998 г. (а также В. В. Шарко [40] (1998) и С. И. Максименко [96] (2005)). Более того, С. В. Матвеев [129, теоремы 8 и 8'] доказал линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)_{\text{extr}} \subset \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ с фиксированными критическими точками локальных экстремумов на поверхности M (см. теорему 2.1.1, или теоремы 2.6.1 и 2.6.2).

III. Топология и стратификация пространств функций с заданными особенностями

Группы гомологий и гомотопий пространств функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на окружности изучал В. И. Арнольд [1].

С использованием параметрического h -принципа В. А. Васильев (см. работу [14] и ссылки в ней) изучил кольца когомологий пространств \mathbb{R}^n -значных функций с умеренными особенностями на любом гладком многообразии (т.е. функций, не имеющих “слишком сложных” критических точек, где морсовская особенность и особенность типа рождение-уничтожение пары критических точек считаются не слишком сложными). Однако 1-параметрический h -принцип невыполнен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности большей 5, как показано в работах [64, 81].

Топология отдельного класса топологической сопряженности (т.е. страта Максвелла) из пространства функций Морса на замкнутой поверхности M изучалась в работах С. И. Максименко [97] в случае поверхности $M \neq S^2, T^2$. В частности, С. И. Максименко [97] доказал стягиваемость связных компонент стабилизатора любой функции Морса на замкнутой поверхности при действии группы диффеоморфизмов поверхности, а также доказал асферичность любой орбиты этого действия и изучил некоторые свойства ее фундаментальной группы.

Как отмечалось выше, Ж. Неге и Д. Загье [78] с помощью указанного комбинаторного результата получили важный топологический результат — вычислили эйлерову характеристику $\chi(G_g^s)$ “комплекса ленточных графов” G_g^s при $s > 2 - 2g$, а значит, ввиду [124], и $\chi(\mathcal{M}_g^s)$,

где \mathcal{M}_g^s — пространство модулей комплексных алгебраических кривых рода g с $s > 3 - 3g$ пронумерованными проколами. Изложим подробнее историю вопроса о пространстве \mathcal{M}_g^s . К. Strebel [124] показал (1984), что пространство \mathcal{M}_g^s имеет каноническое клеточное разбиение ([79, 94, 124] или [114]), клетки которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изотопности некоторых графов в поверхности M рода g с s проколами. Другими словами, согласно [124, 88] существует канонический вещественно-аналитический гомеоморфизм

$$G_g^s \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_g^s \times \mathbb{R}_{>0}^s, \quad s > 3 - 3g,$$

где G_g^s — хорошо известный “комплекс ленточных графов”. Упомянутое клеточное разбиение может быть описано либо в духе [114, 115, 116] (“в гиперболической постановке”), либо с использованием квадратичных дифференциалов [124] (“в канонической постановке”) как в [79] или [94]. Любая точка клеточного комплекса G_g^s представляется *квадратичным дифференциалом*, “квадратный корень” из которого имеет простые полюса в проколах и не имеет других полюсов, причем его горизонтальное слоение имеет единственный особый слой — некоторый граф $G \subset M$, являющийся строгим деформационным ретрактом поверхности M с выколотыми полюсами; такой квадратичный дифференциал называется *гороциклическим*. С помощью упомянутой выше производящей функции для чисел $\varepsilon_g(q)$ Харер и Загье вычислили (1986) эйлерову характеристику комплекса G_g^s ленточных графов, тем самым ввиду упомянутого результата Штребеля они получили [78] формулу

$$\chi(\mathcal{M}_g^s) = \chi(G_g^s) = (-1)^s \frac{(2g + s - 3)!}{2g(2g - 2)!} B_{2g}$$

при $s > 2 - 2g$, где B_g есть g -ое число Бернулли, определяемое производящей функцией $\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}$. Позднее аналогичные формулы [75] и производящие функции для них [48, 49] были получены как для эйлеровой характеристики, так и для орбиобразной эйлеровой характеристики пространства \mathcal{M}_g^s и его компактификации $\overline{\mathcal{M}}_g^s$ Делиня-Мамфорда [68].

IV. Топологические инварианты интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений (интегрируемых гамильтоновых систем на изоэнергетических 3-мерных многообразиях)

Функции Морса на поверхностях изучали А.Т. Фоменко [32], С.В. Матвеев и Фоменко [21, 23, 22], Матвеев, Фоменко и Шарко [23], Фоменко и Х. Цишанг [35], А.В. Болсинов и Фоменко [9, 10] в связи с задачей классификации (лиувиллевой, траекторной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на неособых компактных 3-мерных изоэнергетических многообразиях. Эквивалентным образом можно изучать невырожденные интегрируемые несжимаемые течения без нулей на замкнутых 3-мерных многообразиях (см. §4.1.1).

Фоменко и Цишанг [35] построили полный инвариант лиувиллевой эквивалентности таких систем. Фоменко и Болсинов [9, 10] построили полный инвариант траекторной эквивалентности таких систем.

Важным инструментом обеих теорий является описание классов послойной эквивалентности (определение 2.2.4 (С) и предложение 2.4.6) функций Морса на замкнутых поверхностях, в терминах комбинаторного объекта — “молекулы” функции Морса. Из наших результатов главы 2 следует, что разбиение пространства $\mathcal{F}(M)$ функций Морса на поверхности M на классы топологической послойной эквивалентности является стратификацией, где страты (называемые стратами Максвелла) отвечают некоторым графам — “молекулам” Фоменко (см. §2.5.2). Отсюда следует, что разбиение пространства $\mathbf{IB}(Q)$ интегрируемых несжимаемых течений на 3-мерном многообразии Q (т.е. пространства $\mathbf{IH}(Q)$ интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы на неособых 3-мерных изоэнергетических поверхностях $Q_E \approx Q$) на классы лиувиллевой эквивалентности тоже является стратификацией, где

страты (тоже называемые стратами Максвелла) характеризуются некоторыми графами — “мечеными молекулами” Фоменко-Цишанга.

Траекторные инварианты Болсинова-Фоменко на пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ гамильтоновых систем определялись по-разному на разных *стратах Максвелла* — классах лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем.

Возникает следующий вопрос. Существуют ли “продолжимые” траекторные инварианты на том или ином страте Максвелла, т.е. (непостоянные) инварианты Болсинова-Фоменко, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта траекторной эквивалентности? Другими словами, существуют ли (нетривиальные) *непрерывные* траекторные инварианты на пространстве $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q ?

V. Топологические инварианты 3-мерных точных несжимаемых течений

В математической физике актуальным является изучение топологических инвариантов магнитных полей, т.е. инвариантов бездивергентных векторных полей (называемых также несжимаемыми течениями) на компактном 3-мерном многообразии Q . Интегральные линии такого векторного поля попарно не пересекаются и заполняют всю область, касаясь ее границы, и тем самым образуют “распределенный узел” в данной области (т.е. узел “распределен” по всей области). Хорошо известен инвариант Хопфа — “спиральность” несжимаемого течения, равный усредненному коэффициенту зацепления интегральных траекторий (т.е. соответствующего распределенного узла) [5].

Понятие спиральности восходит к Гельмгольцу и Кельвину (см. [93]). Своим вторым рождением в магнитной гидродинамике это понятие обязано Волтеру [128], а в идеальной гидродинамике — Моффату [105], который обнаружил его топологический характер (см. также [108]). Слово “спиральность” было впервые введено в [105] и с тех пор широко использовалось в механике жидкости и магнитной гидродинамике. Интересные обзоры по истории вопроса можно найти в [106, 107]. Важнейшее свойство этой величины состоит в ее инвариантности: *спиральность*

$$\mathcal{H}(\bar{B}) := \int_Q B \wedge d^{-1}B$$

бездивергентного векторного поля \bar{B} в односвязной области $Q \subset \mathbb{R}^3$, касающегося его границы, сохраняется при действии на \bar{B} любого сохраняющего объема диффеоморфизма области Q [6, теорема 1.4]. Здесь $B := i_{\bar{B}}\mu$ — 2-форма, отвечающая векторному полю \bar{B} , μ — элемент объема. В этом смысле $\mathcal{H}(\bar{B})$ является *топологическим инвариантом*: хотя эта величина определена с помощью метрики, любой сохраняющий объема диффеоморфизм переводит поле \bar{B} в поле с такой же спиральностью.

Кроме интегрального определения (см. выше) у спиральности есть эквивалентное “топологическое” определение. В.И. Арнольд доказал [5] такую эргодическую интерпретацию спиральности: средний коэффициент самозацепления $\lambda_B := \int_{Q \times Q} \lambda_B(x_1, x_2)$ бездивергентного векторного поля B на односвязном 3-мерном многообразии Q с элементом объема μ совпадает со спиральностью поля:

$$\lambda_B = \mathcal{H}(B).$$

Здесь $\lambda_B(x_1, x_2)$ — это асимптотический коэффициент зацепления траекторий поля [5, §4.1].

Итак, спиральность является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным (а потому и $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантным) функционалом $\mathcal{H} : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве

$$\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) := \{B \in \Omega^2(Q) \mid B \text{ точна и не имеет нулей, } j_{\partial Q}^* B = 0\}$$

точных несжимаемых течений без нулей на 3-мерном компактном многообразии Q , где $j_{\partial Q} : \partial Q \rightarrow Q$ — отображение включения. Здесь $\mathcal{D}^0(Q) = \text{Diff}^0(Q)$ — группа изотопных тожде-

ственному диффеоморфизмов 3-многообразия Q , а $\mathcal{D}_\mu^0(Q) = S\text{Diff}^0(Q) \subset \mathcal{D}^0(Q)$ — подгруппа сохраняющих объемы диффеоморфизмов.

Возникают вопросы: существуют ли другие $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные (соответственно $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантные) функционалы на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, обладающие теми или иными дополнительными свойствами (например, представимые в интегральном виде или в виде асимптотического инварианта зацепления)?

Д. Серре доказал, что любой инвариант “первого порядка” уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области в \mathbb{R}^3 выражается через энергию и спиральность [120].

В главе 4 мы изучаем C^5 -непрерывные C^0 -траекторные инварианты (автоматически являющиеся $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантами функционалами) на C^5 -открытом множестве $\mathbf{IB}^{\text{exact, nondeg}}(Q)$ в пространстве

$$\mathbf{IB}^{\text{exact}}(Q) = \{(B, f) \mid B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q), f \in C^\infty(Q) \text{ боттовская, } B \wedge df = 0, j_{\partial Q}^*(df) = 0\}$$

интегрируемых точных несжимаемых течений без нулей в Q (в действительности, условие точности 2-формы B не было наложено в главе 4, см. замечание 4.1.4, однако полученные там результаты дословно переносятся на случай точных 2-форм B).

П.М. Ахметьев обнаружил несколько $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантных функционалов на множестве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений в Q , названные им *высшими моментами спиральности*, а именно: две “квадратичные спиральности” $\mathcal{H}^{(2)}$ и $\mathcal{H}^{[2]}$, моменты спиральности третьего порядка и т.д., представимые в виде асимптотических инвариантов зацеплений [43]. Инварианты Ахметьева кодируются некоторыми графами, а именно: моменты спиральности k -го порядка кодируются связными графами с k вершинами.

С инвариантами несжимаемых течений в “магнитных трубках” $Q = D^2 \times S^1$ (или, более общо, $Q = M \times S^1$, где M — компактная ориентируемая поверхность) тесно связаны инварианты сопряженности на группе $\mathcal{D}_\omega(D^2) = S\text{Diff}(D^2)$ симплектоморфизмов круга $M = D^2$ (соответственно поверхности M), точнее на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ этой группы. Дело в том, что инвариантам сопряженности на группе $\mathcal{D}_\omega(D^2)$ естественно отвечают $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные функционалы на пространстве $\mathcal{B}(Q)$ несжимаемых течений в полнотории (по крайней мере, на подпространстве пространства $\mathcal{B}(Q)$, состоящем из несжимаемых течений, обладающих фиксированным сечением Пуанкаре P с точностью до изотопности и фиксированным потоком $\int_P B$ через эту поверхность).

Е. Калаби обнаружил [62] инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ и доказал, что он является гомоморфизмом в группу $(\mathbb{R}, +)$. В указанном выше смысле *инварианту Калаби* $\text{Cal} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2) \rightarrow \mathbb{R}$ отвечает спиральность, умноженная на $-1/2$ (см. (5.5)). Другие известные инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ — норма Хофера [87], число неподвижных точек и спектральные инварианты.

А. Баньяга [46] показал, что любой гомоморфизм группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ в группу $(\mathbb{R}, +)$ имеет вид $h \circ \text{Cal}$, где $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторый гомоморфизм группы $(\mathbb{R}, +)$ в себя.

Цель работы

Получение критерия реализуемости гладкой функции с конечным числом критических точек на замкнутой связной поверхности в виде функции высоты при некотором погружении этой поверхности в 3-мерное евклидово пространство; нахождение и описание конечномерного полиэдра, имеющего гомотопический тип пространства функций Морса с заданным числом критических точек локальных минимумов, максимумов и седел на компактной связной ориентируемой поверхности; выяснение существования относительно-продолжимых инвариантов C^0 -сопряженности на заданном страте Максвелла в пространстве невырожденных

гамильтоновых систем на компактной поверхности; получение классификации дифференцируемых топологических инвариантов точных несжимаемых течений на компактном связном 3-мерном многообразии, имеющих регулярную и C^1 -непрерывную производную.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Следующие результаты работы являются основными и выносятся на защиту:

- получен критерий того, когда гладкая функция f с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 ; описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в \mathbb{R}^3 с данной функцией высоты; доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности в \mathbb{R}^3 , имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно; получено новое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 ;
- введено понятие косоугольного цилиндрически-полиэдрального комплекса; для пространств \mathcal{F} функций Морса на компактной ориентируемой поверхности M , имеющих не менее $\chi(M) + 1$ пронумерованных критических точек, описано построение косоугольного цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (“комплекса оснащенных функций Морса”), ассоциированного с пространством \mathcal{F} ; доказана гомотопическая эквивалентность данного пространства \mathcal{F} функций Морса прямому произведению $R \times \tilde{\mathbb{K}}$, где R — одно из четырех многообразий: точка, окружность, двумерный тор и $\mathbb{R}P^3$; получены верхние оценки для гомологической размерности и чисел Бетти пространства \mathcal{F} ; доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства \mathcal{F}^{fix} функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно;
- обнаружены относительно-продолжимые инварианты C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на некоторых стратах Максвелла (называемых “бициклическими”) в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактных связных поверхностях P , по отношению к некоторым примыкающим открытым стратам Максвелла (состоящим из “бициклических возмущений”); бициклические страты Максвелла образуют бесконечную серию и состоят из гамильтоновых систем, гамильтонианы которых являются функциями Морса с ровно одним критическим значением, где род поверхности P не фиксирован; получены эффективные достаточные условия относительно-устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из произвольного бициклического страта Максвелла по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из этого страта; для бесконечной подсерии в серии бициклических стратов Максвелла (состоящей из “вполне бициклических” стратов Максвелла) получены эффективные достаточные условия устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из такого страта Максвелла; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из такого страта;
- доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{D}}_{\omega}(D^2)$ группы симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относитель-

но C^1 -топологии производную, выражается через инвариант Калаби; доказано, что любой $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантный функционал на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3-мерном многообразии Q , имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с непустой границей — глобально на множестве всех 2-форм $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через функционал спиральности.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования проблем и решения задач теории погружений, теории особенностей, геометрической топологии, математической физики, теории интегрируемых гамильтоновых систем и теории несжимаемых течений.

Основные методы исследования

Используются классические методы и результаты дифференциальной геометрии и алгебраической топологии, в том числе теории препятствий (в главе 1) и теории Морса, теории дифференциальных форм и теории особенностей, маломерной топологии и геометрической топологии, теории функций комплексного переменного (в главе 3) и симплектической геометрии (в главах 4 и 5), качественной теории интегрируемых гамильтоновых систем (в главе 4) и общих динамических систем (в главе 5).

В главе 3 наряду с классическими методами используются метод оснащенных функций Морса, ориентированный на изучение топологии пространств морсовских функций и введенный Д.А. Пермяковым и автором; новое понятие косых цилиндрически-полиэдральных комплексов, введенное автором и обобщающее понятие полиэдральных комплексов; результат С.Ж. Earle и Ж. Eells (мл.) о гомотопическом типе групп диффеоморфизмов компактных связных поверхностей.

Особую роль играет новый метод комплексов функций Морса, разработанный автором и состоящий в сведении изучения топологии бесконечномерных пространств морсовских функций к изучению конечномерного комбинаторного объекта — комплекса оснащенных функций Морса (по сути являющегося “комплексом морсовских клеточных комплексов”), т.е. к комбинаторным проблемам косых цилиндрически-полиэдральных комплексов; этот метод позволил получить в главе 3 информацию о гомологиях изучаемых пространств морсовских функций.

В главе 4 используется и развивается метод “меченой молекулы” Болсинова-Фоменко, с помощью которого А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко получили полную траекторную классификацию интегрируемых несжимаемых течений на 3-мерных многообразиях.

В главе 5 используются результат С. Bonatti и S. Crovisier из консервативной динамики о топологической транзитивности C^1 -общих симплектоморфизмов компактной поверхности, а также результат М. Bessa о топологической транзитивности C^1 -общих несжимаемых течений на компактных 3-мерных многообразиях.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно излагались на семинаре “Современные геометрические методы” и Кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и прило-

жений Механико-математического факультета МГУ (1997, 2001, 2012, 2015, 2016), на семинаре по геометрической топологии под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Щепина (1998, 2011, 2012, МИАН им. В.А. Стеклова), на семинаре по алгебраической топологии под руководством М.М. Постникова (1998, 2012, МГУ), на семинаре под руководством академика РАН В.И. Арнольда (2007, МГУ), на семинаре “Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика” под руководством С.М. Натансона, О.В. Шварцмана и О.К. Шейнмана (2012, НМУ), на семинаре “Характеристические классы и теория пересечений” под руководством М.Э. Казаряна и С.К. Ландо (2016, ВШЭ), на семинаре по динамическим системам под руководством академика РАН Д.В. Аносова и А.М. Степина (2003, МИАН им. В.А. Стеклова), а также на научно-исследовательских семинарах в университетах Германии (Бохум 1999, Дортмунд 2000, Фрайбург 2001). Кроме того, результаты докладывались на следующих международных конференциях:

- International conference “New Techniques in Topological Quantum Field Theory” (Calgary, Canada, 08.2001),
- International conference “Differential equations and related topics” dedicated to Ivan G. Petrovskii (Moscow, Russia, 05-06.2011),
- International Geometrical Seminar (Serbia, Zlatibor, 3.09.2012),
- International conference “Analysis and singularities” dedicated to the 75th anniversary of Vladimir Igorevich Arnold (Moscow, Russia, 12.2012),
- International conference in honour of Lev Pontriagin (Moscow, Russia, 09.1998),
- International conference on Braid Groups and their Applications (Banff International Research Station, Canada, 11.2004),
- International topological conference “Alexandroff readings — 2012” (MSU, Moscow, 05.2012),
- International conference “Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy” (IUM, Moscow, Russia, 04.2015).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Работа изложена на 341 странице и снабжена 38 рисунками. Общий список литературы включает 151 наименование.

Публикации

Основные результаты работы изложены в 23 научных публикациях [129]–[151], из которых 11 [129]–[139] — статьи из журналов перечня ВАК РФ, написанные без соавторов, и 12 [140]–[151] — статьи и тезисы докладов в трудах международных конференций.

Благодарности

Автор выражает благодарность академику РАН А.Т. Фоменко, д.ф.м.н. А.В. Болсинову, Dr.Ph.D. G. Hornig, д.ф.м.н. А.С. Мищенко и академику РАН В.И. Арнольду за постановку вопросов и полезные обсуждения, Dr.Habil. H. Zieschang, Д.М. Афанасьеву, Д.А. Пермякову,

М. Басмановой, к.ф.м.н. Ю.А. Браилову, к.ф.м.н. Е.Л. Лакштанову, к.ф.м.н. Ю.М. Бурману, д.ф.м.н. А.А. Ошемкову, члену-корреспонденту НАН Украины [В.В. Шарко], д.ф.м.н. А.В. Чернавскому, д.ф.м.н. [Ю.П. Соловьеву], д.ф.м.н. П.М. Ахметьеву, к.ф.м.н. С.А. Мелихову, д.ф.м.н. С.М. Натанзону, д.ф.м.н. О.В. Шварцману и д.ф.м.н. О.К. Шейнману за полезные обсуждения, а также Dr.Ph.D. М.Л. Концевичу, Dr.Ph.D. Л.В. Полтеровичу, Dr.Ph.D. D. Peralta-Salas и члену-корреспонденту РАН С.Ю. Немировскому за ценные замечания. Автор признателен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за создание доброжелательной творческой атмосферы, способствующей научной работе.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена вопросу о реализуемости данной гладкой функции f на двумерном многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ в 3-мерное евклидово пространство.

Основными результатами главы 1 являются теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.7.4, 1.7.5 и, как следствие, новое доказательство предложения 1.7.2 о выворачивании сферы наизнанку. А именно, основными результатами главы 1 являются следующие [129, 130, 131]:

- получен критерий того, когда гладкая функция f с конечным числом критических точек на связной замкнутой ориентируемой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 ; ответ сформулирован в терминах индексов критических точек данной функции f и направлений (вверх или вниз) векторного поля нормалей к поверхности в этих точках (теорема 1.3.1) [129];
- доказано, что любая гладкая функция f с конечным числом критических точек на любой связной замкнутой неориентируемой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в \mathbb{R}^3 , причем для любых наперед заданных вложений в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующих функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют) (теорема 1.3.2) [129];
- для любой гладкой функции f с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности M , описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в \mathbb{R}^3 , реализующих данную функцию f в виде функции высоты, при условии что эта функция реализуема в виде функции высоты при погружении (теорема 1.7.4) [129];
- доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности M в \mathbb{R}^3 , имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно (теорема 1.7.5) [129, 130, 131]; в частности, такие погружения однозначно задаются при помощи графов Кронрода-Риба типичных морсовских функций на поверхности M с метками ± 1 в вершинах, а регулярная гомотопия таких погружений — при помощи последовательности элементарных перестроек меченых графов Кронрода-Риба (рис. 1.11 и 1.14);
- получено новое доказательство хорошо известного факта о том, что пространство всех гладких погружений сферы S^2 в \mathbb{R}^3 линейно связно; в частности, получено новое и простое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно

“вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 ; описано выворачивание двумерной сферы в \mathbb{R}^3 , при котором деформация функции высоты является путем общего положения в пространстве гладких функций на сфере; это выворачивание полностью задается последовательностью графов Кронрода–Риба с метками ± 1 в вершинах и элементарных перестроек этих графов, показанной на рис. 1.16 и 1.17.

Сформулируем эти результаты [129, 130, 131] в виде одной теоремы.

Теорема (1.1.4, [129, 130, 131]). (а-1) Пусть f — гладкая функция на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g рода g , имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N (не обязательно функция Морса). Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq N$,

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , таком, что в каждой критической точке x_k (где $1 \leq k \leq N$) положительная нормаль к поверхности M_g имеет вид $\varepsilon_k e$, где e — единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в \mathbb{R}^3 .

(а-2) Пусть f — гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ рода μ , имеющая лишь конечное число критических точек (не обязательно функция Морса). Тогда любое вложение в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующее функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют), можно всегда продолжить до погружения всей поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего функцию f как функцию высоты. В частности, любая функция указанного типа на неориентируемой поверхности реализуется как функция высоты при некотором погружении.

(а-3) Пусть f — гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемой или неориентируемой). Фиксируем какое-нибудь погружение $\alpha_0 \in \operatorname{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, т.е. погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. Тогда имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между связными компонентами пространства $\operatorname{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ и элементами группы $H^1(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ или $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}^{\mu-1}$ одномерных когомологий поверхности M .

(б) Пусть $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, — гладкий путь в пространстве всех функций Морса на замкнутой поверхности M . Пусть $\alpha_0 \in \operatorname{Imm}_{f_0}(M, \mathbb{R}^3)$ — некоторое погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее простую функцию Морса f_0 как функцию высоты. Тогда существует гладкий путь $\alpha_t \in \operatorname{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 , такой, что при любом t погружение α_t реализует функцию f_t как функцию высоты. Пространство всех таких путей $\alpha_t \in \operatorname{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно.

(в) В случае двумерной сферы $M = S^2$ пространство $\operatorname{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения α_0 и α_1 сферы S^2 в \mathbb{R}^3 можно соединить гладким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех гладких погружений сферы в \mathbb{R}^3 . Более того, два стандартных вложения α_0 и α_1 сферы в \mathbb{R}^3 , имеющие один и тот же образ, но противоположно направленные положительные нормали, можно соединить таким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений, что функции высоты f_t погружений α_t образуют путь общего положения, описанный в §1.7.1 и замечании 1.7.11 в терминах перестроек “меченых” графов Кронрода–Риба этих функций, и схематично изображенный на рис. 1.16 и 1.17. Здесь каждая критическая точка функции f_t и соответствующая вершина ее графа Кронрода–Риба “помечена” знаком ± 1 , указывающим направление (вверх или вниз) положительной нормали к погруженной поверхности в этой точке.

Глава 2 имеет вспомогательный характер. В ней изучаются вопросы о том, как классифицировать морсовские функции на компактных многообразиях с точностью до разных типов (топологической) эквивалентности, и когда две такие функции изотопны, т.е. когда их можно продеформировать друг в друга в пространстве таких функций. В частности, получен критерий топологической эквивалентности функций Морса на произвольной компактной поверхности (теорема 2.3.4), доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства \mathcal{F}^{fix} функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно (теорема 2.7.2).

Основными результатами главы 2 являются следующие результаты автора [132, 145, 133]:

- получен критерий топологической эквивалентности функций Морса на произвольной компактной поверхности (теорема 2.3.4) [132]; получены аналогичные критерии топологической послойной эквивалентности (теорема 2.3.5) и топологической сопряженности (теорема 2.3.6);
- получен критерий топологической послойной эквивалентности возмущенных функций Морса на произвольной компактной поверхности (утверждение 2.5.2) [145]; получены аналогичные критерии топологической эквивалентности (следствие 2.5.8) и топологической сопряженности (следствие 2.5.9);
- доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства \mathcal{F}^{fix} функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно (теорема 2.7.2) [133]; изучена факторгруппа (а именно, найдены наборы образующих и получены оценки на ранг) группы диффеоморфизмов, сохраняющих компоненту связности $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ данной функции f в пространстве \mathcal{F}^{fix} , по ее подгруппе, порожденной диффеоморфизмами, сохраняющими какие-либо функции из $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ (теорема 2.7.5 и ее следствие 2.7.6, теоремы 2.7.11, 2.7.13 и 2.7.14) [133].

Сформулируем эти результаты в виде двух теорем. Пусть $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пространство функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками (см. определение 2.2.2 (В)). Пусть \mathcal{D}^0 — компонента единицы в группе $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M)$.

Теорема (2.1.3, [132, 145]). (А) *Две функции Морса $f, g \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ топологически эквивалентны (см. определение 2.2.4 (В)) тогда и только тогда, когда отвечающие им “упорядоченные” графы G_f^\leq, G_g^\leq (т.е. объединения G_f, G_g критических уровней функций f, g с некоторым отношением частичного порядка, см. обозначения 2.3.1 (Б) и 2.3.3 (А)) изотопны в M , т.е. $h(G_f^\leq) = G_g^\leq$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$.*

(В) *Пусть $f, g \in \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пара топологически послойно эквивалентных функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками. Пусть $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — функции, близкие к f, g по C^2 -норме и не слишком большие по C^3 -норме (см. (2.5) и (2.6) при $r = 2$). Пусть W^{num} — ориентированный граф Кронрода-Риба функции \tilde{f} с метками в вершинах, отвечающими нумерации критических точек (определение 2.4.1). Тогда возмущенные функции \tilde{f} и \tilde{g} топологически послойно эквивалентны в том и только том случае, когда набор критических значений функции \tilde{g} согласован (определение 2.5.3) с графом W^{num} функции \tilde{f} .*

Пусть $\mathcal{F}^{\text{fix}} \subseteq \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — множество функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих фиксированное множество критических точек индекса λ , для любого $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Для ориентируемой поверхности M обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Пусть $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}$ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M , оставляющих неподвижными все критические точки функций $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$, $(\mathcal{D}^*)^0$ —

компонента связности id_M в \mathcal{D}^* . Для любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ обозначим через $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ компоненту связности функции f в \mathcal{F}^{fix} , и через $\mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$ множество диффеоморфизмов, сохраняющих $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Пусть \mathcal{H}_f — подгруппа \mathcal{D}_f^* , порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и всеми диффеоморфизмами $h \in \mathcal{D}^*$, сохраняющими какие-либо функции $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$, и пусть $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ — ее подгруппа, порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и скручиваниями Дэна вокруг компонент линий уровня функций $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Оказывается, что в большинстве случаев $\mathcal{F}_f^{\text{fix}} \subsetneq \mathcal{F}^{\text{fix}}$ и $\mathcal{D}_f^* \subsetneq \mathcal{D}^*$, поэтому нетривиален вопрос о нахождении факторгрупп в цепочке нормальных подгрупп $(\mathcal{D}^*)^0 \subseteq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subseteq \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{D}_f^*$.

Теорема (2.1.4, [133]). *Предположим, что M — компактная связная ориентируемая поверхность рода g и число седел $q \geq 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ выполнено $|\pi_0(\mathcal{F}_f^{\text{fix}})| = [\mathcal{D}^* : \mathcal{D}_f^*] = \infty$ и*

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{D}_f^*, & \quad \text{если род } g \geq 1, \\ (\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f \subsetneq \mathcal{D}_f^*, & \quad \text{если род } g = 0 \text{ и число седел } q \geq 2, \\ (\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f = \mathcal{D}_f^*, & \quad \text{если число седел } q = 1, \end{aligned}$$

а также оценки для рангов факторгрупп:

$$\begin{aligned} q - 1 \leq \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) \leq \text{rank}(\pi_1(K)), \quad \text{rank}(\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle) \geq p + r - 1 & \quad \text{при } g = 0, \\ \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) \leq \text{rank}(\pi_1(K)), \quad \text{rank}(\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}}) \geq q - 1 & \quad \text{при } g > 0. \end{aligned}$$

Более того, существуют мономорфизм $\mathbb{Z}^{q+g-1} \hookrightarrow \mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0$ и эпиморфизмы $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ при $g \geq 1$, $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ при $g = 0$, $\pi_1(K) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ в общем случае. Здесь \tilde{K} и K — $(q-1)$ -мерные полиэдральные комплексы, ассоциированные с пространством \mathcal{F}^{fix} (и называемые комплексами функций Морса), причем имеется гомотопическая эквивалентность $\tilde{K} \sim \mathcal{F}^{\text{fix}}$, $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ действует эффективно на \tilde{K} , $K \cong \tilde{K}/(\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0)$ конечен и связан.

Для полноты изложения в §2.4 приводится критерий А.Т. Фоменко [10, гл. 2, §§3–8, теоремы 4 и 8] послойной эквивалентности функций Морса на компактной ориентируемой поверхности M (предложение 2.4.6 и его следствия 2.4.11 и 2.4.12). В §2.6 для полноты изложения приводится решение С.В. Матвеева [129, теоремы 8 и 8'] вопроса А.Т. Фоменко о линейной связности пространств $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса с фиксированным числом критических точек локальных минимумов, локальных максимумов и седел (теорема 2.1.1, или теоремы 2.6.1 и 2.6.2), а также обобщения теоремы Матвеева на случай морсовских функций с пронумерованными и оснащенными критическими точками (теоремы 2.6.9 и 2.6.11), полученные автором в [129].

В главе 3 дается ответ на следующий естественный вопрос. Как описать структуру и топологию (связных компонент) пространств морсовских функций на двумерных компактных многообразиях?

Уловить структуру пространства $\mathcal{F}(M)$ морсовских функций на поверхности M казалось задачей очень трудной, ибо это пространство бесконечномерно. Однако автору удалось придумать некий конечномерный геометрический объект с понятной структурой и доказать его гомотопическую эквивалентность пространству $\mathcal{F}(M)$, снабженному C^∞ -топологией (теоремы 3.4.1, 3.5.6, 3.7.1 и 3.7.6).

Основными результатами главы 3 являются следующие результаты автора о топологии более общих пространств $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса на компактной поверхности M в случае, когда число пронумерованных критических точек $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ [134, 135, 136]:

- введено понятие косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса (определение 3.3.2) [134]; в случае $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ построены косоуго цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ (“комплекс оснащенных функций Морса”) и стратифицированное многообразие

$\widetilde{\mathcal{M}}$ (универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса), ассоциированные с пространством \mathcal{F} (теоремы 3.3.3, 3.3.13, 3.3.14, утверждение 3.4.7) [134, 135];

- доказаны гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim R \times \widetilde{\mathbb{K}} \sim R \times \widetilde{\mathcal{M}}$ и $[f]_{\text{top}} \sim R \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$, где R — соответствующее многообразие из (3.1) и $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ — косая ручка комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$, отвечающая классу $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности (определение 2.2.4 (В)) функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ (теоремы 3.5.10, 3.5.10 и 3.4.1, следствие 3.5.9) [135, 136];
- получена верхняя оценка $\text{hd}\mathcal{F} \leq 3q+1$ для гомологической размерности пространства \mathcal{F} ; получены верхние оценки для чисел Бетти пространства \mathcal{F} в случае $p^*+q^*+r^* \leq \chi(M)+1$ и нулевого рода поверхности M (т.е. в случае конечного полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$) (следствия 3.3.6 и 3.4.2) [134, 135].

Здесь и далее через \mathcal{F}^1 обозначено множество функций Морса $f \in \mathcal{F}$, у которых все локальные минимумы и локальные максимумы равны -1 и 1 соответственно.

Сформулируем основные из этих результатов (теоремы 3.3.3, 3.4.1, 3.5.10, следствия 3.3.6 и 3.4.2) в виде одной теоремы [134, 135, 136].

Теорема (3.1.2, [134, 135, 136]). *Пусть M — связная замкнутая ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на d^+ положительных и d^- отрицательных граничных окружностей,*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса на M , имеющих p, q, r критических точек локальных минимумов, седловых точек и точек локальных максимумов, в том числе $\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{r}$ пронумерованных критических точек и p^*, q^*, r^* закрепленных критических точек соответственно. Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса (см. определения 3.2.2). Предположим, что количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$. Тогда:

(А) Существует косой цилиндрически-полидральный комплекс

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}, \quad \dim \widetilde{\mathbb{K}} = \begin{cases} 3q-2, & q \geq 2, \\ 0, & q = 1, \end{cases}$$

(называемый комплексом оснащенных функций Морса) ранга $q-1$, косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Индекс ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, равен $q-s(f)$, где $s(f)$ — количество седловых критических значений функции f . Подошва $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}$, таких что $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$.

(В) Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ кокомпактно действует на $\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полидрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве $\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ классов топологической эквивалентности функций. В частности, для любого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ все ручки $\mathbb{D}_{[h]_{\text{top}}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомеоморфны одной и той же стандартной косой цилиндрической ручке

$$(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \approx (D_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}) \times P_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \sim (S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]},$$

где $[f]$ — класс эквивалентности функции $f \in \mathcal{F}^1$, $\Gamma_{[f]}$ — конечная группа, действующая свободно на стандартном утолщенном цилиндре $D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}$ и действующая на инвариантном торе $(S^1)^{d([f])} \subset D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}$ композициями сдвигов и перестановок прямых сомножителей S^1 в произведении $(S^1)^{d([f])}$, см. определение 3.3.1(В). Имеется $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -эquivариантный

гомеоморфизм полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ на $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -инвариантное подмножество некоторого гладкого $3q$ -мерного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-,q,\widehat{r}+d^+;p^*+d^-,q^*,r^*+d^+}$ с плоской аффинной связностью, на котором группа $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ действует диффеоморфизмами, сохраняющими связность.

(C) Существуют гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F} \sim \mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}},$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ – одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка, см. (3.2).

(D) Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$[f]_{\text{top}} \sim \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \sim \mathcal{D}^0 \times ((S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}) \sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}),$$

где $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ – забывающее отображение, $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ и $(S^1)^{d([f])}$ – соответствующие $(s([f]) + 2q)$ -мерное подмногообразие и тор.

(E) $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}}) = \beta_j(\widetilde{\mathcal{M}}) = 0$ при любом $j \geq 3q - 1$; $\beta_j(\mathcal{F}) = 0$ при любом $j \geq 3q + 2$.

(F) Пусть $M = S^2$ (обозначение 3.1.4) и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$, комплекс $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ является конечным, связным и компактным косым торически-полиэдральным комплексом; полином Пуанкаре полиэдра \mathbb{K} имеет вид

$$P(\mathbb{K}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1/\sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1/\sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t)$$

для некоторых многочленов $R_1(t)$ и $R_2(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$. В частности, верны неравенства Морса:

$$\chi(\mathbb{K}) = \chi(\widetilde{\mathcal{M}}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in \mathcal{F}^1/\sim \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j(\mathbb{K}) \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

Для полноты изложения мы также получаем в главе 3 следующие дополнительные результаты:

- в случае $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ построены полиэдральный комплекс \widetilde{K} функций Морса, ассоциированный с пространством \mathcal{F} , и естественная проекция $\widetilde{\mathbb{K}} \rightarrow \widetilde{K}$, если все критические точки локальных экстремумов пронумерованы или все седловые критические точки пронумерованы (следствие 3.3.5);
- доказана несжимаемость ручек комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$; получен критерий того, когда проекция $\widetilde{\mathbb{K}} \rightarrow \widetilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью (предложение 3.6.4); получены критерии того, когда все косые ручки комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ являются цилиндрическими ручками или гомотопически эквивалентны торами (предложение 3.3.15);
- описаны гомотопические типы большинства пространств \mathcal{F} функций Морса с количеством седел $q \leq 2$ (примеры 3.6.2 и 3.7.9); в частности показано, что пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$ функций Морса с 4 критическими точками на двумерном торе гомотопически эквивалентно $(S^1)^2 \times (\bigvee_{\mathbb{N}} S^1)$, и поэтому его первое, второе и третье числа Бетти бесконечны;
- в общем случае (без предположения о выполнении неравенства $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ и о морсовости функций $f \in \mathcal{F}$) построено гладкое стратифицированное многообразие \mathcal{B} (универсальное пространство модулей оснащенных функций на компактной связной ориентируемой поверхности M с $s(M)$ отмеченными точками, где $s(M) := \max\{0, \chi(M) + 1\}$ при $\partial M = \emptyset$, $s(M) := 1$ и отмеченная точка принадлежит ∂M при $\partial M \neq \emptyset$), ассоциированное с пространством \mathcal{F} гладких функций с заданными локальными особенностями

типов A_μ на гладкой двумерной замкнутой ориентируемой поверхности M ; доказаны гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{B}$ и $[f]_{\text{top}} \sim \mathcal{B}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{B}_{[f]_{\text{top}}} \subset \mathcal{B}$ — страт, отвечающий классу $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности (определение 2.2.4 (B)) функции $f \in \mathcal{F}$ (теоремы 3.7.1 и 3.7.6) [144];

- в общем случае (без предположения о выполнении неравенства $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ и о морсовости функций $f \in \mathcal{F}$) показано, что пространство \mathcal{F} гладких функций с заданными локальными особенностями типов A_μ на гладкой двумерной замкнутой ориентируемой поверхности M имеет ту же топологию, что и соответствующее пространство морсовских функций (с некоторыми метками в критических точках), а именно: классифицирующее многообразие \mathcal{B} (имеющее гомотопический тип пространства \mathcal{F}) гомеоморфно универсальному пространству модулей оснащенных (см. §3.7.2) меченых (см. §3.7.3) функций Морса на поверхности M с $s(M)$ отмеченными точками (утверждения 3.7.4 и 3.7.7); в случае $M = S^2, T^2$ установлен гомеоморфизм между классифицирующим многообразием \mathcal{B} (имеющим гомотопический тип пространства \mathcal{F}) и некоторым открытым подпространством пространства меченых конфигураций $p + r$ различных точек на поверхности M , где p и r — количество точек локальных минимумов и максимумов функций из пространства \mathcal{F} (утверждение 3.7.5) [144].

Также для полноты изложения в §3.2 включен совместный результат Д.А. Пермякова и автора [143] о гомотопической эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1$ пространств функций Морса и оснащенных функций Морса на компактных поверхностях.

В главе 4 изучается вопрос о существовании *непрерывных* C^0 -траекторных инвариантов на пространстве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q . Более точно, изучается следующий вопрос. Существуют ли *продолжимые траекторные инварианты* на том или ином страте Максвелла в пространстве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ (т.е. инварианты Болсинова-Фоменко на пространстве систем на соответствующем 3-атоме, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта траекторной эквивалентности)?

Эти вопросы тесно связаны со следующими. Существуют ли *непрерывные* инварианты C^0 -сопряженности на пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности P ? Более точно, изучается следующий вопрос. Существуют ли *продолжимые инварианты C^0 -сопряженности* на том или ином страте Максвелла в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ (т.е. инварианты Болсинова-Фоменко на пространстве систем на соответствующем 2-атоме, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта C^0 -сопряженности)? Изучаются также аналогичные вопросы о существовании *относительно-продолжимых инвариантов* по отношению к фиксированному открытому страту Максвелла, примыкающему к данному страту Максвелла.

Основными результатами главы 4 являются теорема 4.5.6 и следствия 4.5.9, 4.5.10, 4.5.16 и 4.5.17. А именно, мы указываем бесконечную серию стратов Максвелла (т.е. классов траекторной эквивалентности, отвечающих некоторым 2-атомам, названным “бициклическими”) в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности P , и на каждом таком страте Максвелла строим относительно-продолжимый инвариант C^0 -сопряженности по отношению к “бициклическим возмущениям” систем из данного страта Максвелла (теорема 4.5.6). Мы также получаем эффективные достаточные условия относительно-устойчивой C^0 -несопряженности (определение 4.1.21) пары гамильтоновых систем на бициклическом атоме по отношению к классу бициклических возмущений (следствия 4.5.9 и 4.5.10).

Основными результатами главы 4 являются следующие [137]:

- введены бесконечная серия *бициклических* “атомов” (бифуркаций линий уровня морсовских функций Гамильтона) и ее бесконечная подсерия *вполне бициклических* атомов

(определения 4.5.4 и 4.5.14) [137],

- обнаружены относительно-продолжимые m -инварианты (определение 4.1.22 и замечание 4.3.13) гамильтоновых систем на бициклических атомах (точнее, на отвечающих им стратах Максвелла) по отношению к соответствующим открытым классам “бициклических возмущений” (определение 4.5.5 и теорема 4.5.6) [137],
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.9 и 4.5.10) [137, 145] относительно-устойчивой C^0 -несопряженности (определение 4.1.21) пары гамильтоновых систем на бициклическом атоме по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем на атоме (см. комментарий 4.5.3);
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.16 и 4.5.17) [137, 145] устойчивой C^0 -несопряженности (определение 4.1.19) пары гамильтоновых систем на вполне бициклическом атоме; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем на атоме.

Сформулируем эти результаты в виде двух теорем [137].

Пусть $\mathbf{H}(M)$ — пространство гамильтоновых систем на поверхности M , функции Гамильтона которых являются функциями Морса $F_1 \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ с оснащено-нумерованными критическими точками (см. (4.10) и определение 2.2.2 (B)). Пусть $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ — функция Морса с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$ на компактной поверхности P с краем, $K = F^{-1}(c)$. Пусть $\mathbf{H}(F) = \mathbf{H}(P, K) \subseteq \mathbf{H}(P)$ — пространство систем, функции Гамильтона которых топологически послойно эквивалентны функции F (определения 2.2.4 (C) и 4.1.18). Пусть n — число критических точек функции F и

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{H}(F) &\rightarrow C^0(K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n, & v \mapsto \Lambda(v) &= (\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v)), \\ [m] : \mathbf{H}(F) &\rightarrow H^1(K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}, & v \mapsto [m(v)], \end{aligned}$$

— грубые Λ - и m -инварианты Болсинова-Фоменко (определение 4.2.9) симплектической сопряженности (определение 4.1.8) гамильтоновых систем $v \in \mathbf{H}(F)$ на данном атоме.

Теорема (4.1.1, [137, 145]). *Предположим, что топологическая пара (P, K) является бициклическим седловым атомом (определение 4.5.4). Пусть Z_1 и Z_2 — соответствующая пара ориентированных гамильтоновых циклов графа K , и $\tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}(P)$ — соответствующий класс бициклических возмущений (см. (4.16) и определение 4.5.5) гамильтоновых систем на данном атоме. Тогда:*

(A) *Инвариант*

$$B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle, \quad v \in \mathbf{H}(F),$$

является инвариантом C^1 -сопряженности, относительно- C^r -продолжимым (определение 4.1.22) по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений при любом $r \geq 5$.

(B) *Если число граничных окружностей поверхности P равно двум, то инвариант $B = B(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме. Если атом $(P, K)^\#$ является знакоопределенно-бициклическим (определение 4.3.24), то инвариант $B = B(v)$ не является инвариантом C^0 -сопряженности.*

(C) *Если пара гамильтоновых систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет условиям $(\Lambda_1(v_1) : \dots : \Lambda_n(v_1)) \neq (\Lambda_1(v_2) : \dots : \Lambda_n(v_2))$ и $B(v_1) \neq B(v_2)$, то системы v_1 и v_2 относительно-устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.21) по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений, т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях множеств критических точек гамильтонианов) при любых C^r -малых возмущениях класса $\tilde{\mathbf{H}}$, при любом $r \geq 5$.*

(D) *По отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений, пары $(v_1, v_2) \in \mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ относительно-устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем на этом атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3).*

Теорема (4.1.2, [137, 145]). *Предположим, что род поверхности P положителен, а топологическая пара (P, K) имеет максимальную и абелеву дискретную группу симметрий, т.е. принадлежит серии \mathcal{V} (определения 4.5.11, 4.5.12 и теорема 4.5.13), т.е. является вполне бициклическим атомом (см. теорему 4.5.15). Пусть O_1, \dots, O_ν — атомные окружности атома (P, K) , т.е. регулярные погруженные замкнутые кривые в графе $K \subset P$, с произвольно фиксированной ориентацией. Тогда:*

(А) *Если пара гамильтоновых систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет условиям $\Lambda_j(v_1) : \Lambda_{j'}(v_1) \neq \Lambda_j(v_2) : \Lambda_{j'}(v_2)$ для любых $j \neq j'$ и $B(v_1) \neq B(v_2)$ для любого функционала $B = B(v)$ вида $B(v) = \langle [m(v)], [O_1] \pm \dots \pm [O_\nu] \rangle$ (для всевозможных знаков в сумме), то системы v_1 и v_2 устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.19), т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены, и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях множеств критических точек гамильтонианов) при любых C^r -малых возмущениях этих систем, где $r \geq 5$.*

(В) *Пары $(v_1, v_2) \in \mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем на этом атоме образуют множество полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3).*

Отметим, что обнаруженный нами относительно-продолжимый m -инвариант $B = B(v)$ на подпространстве $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{H}(P)$ имеет простой геометрический смысл: значение $B(v)$ на любой системе $v \in \mathbf{H}(F)$ равно сумме главных значений $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$ периода системы v на атомных окружностях O_i данного атома, взятых с подходящими ориентациями (определение 4.3.7): $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$.

Для полноты изложения мы также получаем следующие дополнительные результаты:

- доказано, что пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности M C^5 -открыто, но не C^4 -открыто (§4.1.3) в пространстве $\mathbf{H}(M)$ почти невырожденных гамильтоновых систем на M (теорема 4.2.2), тем самым получен положительный ответ на вопрос (Q5) А.С. Мищенко (1999 г.);
- доказано, что для любого плоского атома и любого атома серии \mathcal{V} (в том числе любого вполне бициклического атома) не существует продолжимых инвариантов на пространстве гамильтоновых систем на этом атоме (следствие 4.5.19);
- доказано, что для любого плоского атома и любого атома серии \mathcal{V} (в том числе любого вполне бициклического атома) и любого класса простых возмущений (т.е. возмущений общего положения) систем на нем, обнаруженный нами набор из g относительно-продолжимых m -инвариантов по отношению к этому классу возмущений является полным (утверждение 4.4.2 и теорема 4.5.18), т.е. любой относительно-продолжимый инвариант является функцией от инвариантов данного набора, где количество g инвариантов данного набора равно роду атома (т.е. роду несущей поверхности P); в частности, в случае любого плоского атома не существует относительно-продолжимых инвариантов и любые две системы на этом атоме можно сделать C^0 -сопряженными путем сколь угодно малых возмущений этих систем в данном классе возмущений;
- доказано, что пространство $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-многообразии Q с краем (соотв. пространство $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы на невырожденном изоэнергетическом 3-мерном многообразии $Q_E \approx Q$) C^5 -открыто в пространстве $\mathbf{IB}(Q)$ интегрируемых несжимаемых течений на Q (соотв. в пространстве $\mathbf{IH}(Q)$ всех интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы), тем самым получен положительный ответ на вопрос (Q5)^{3D} А.С. Мищенко 1999 г. (замечание 4.1.7);

- обнаружены относительно-продолжимые C^0 -траекторные m -инварианты интегрируемых несжимаемых течений (соответственно интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на бициклических 3-атомах (точнее, на отвечающих им структурах Максвелла) по отношению к соответствующим открытым классам “бициклических возмущений” (определение 4.5.5, теорема 4.5.6 и замечание 4.1.7),
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.9, 4.5.10 и замечание 4.1.7) относительно-устойчивой C^0 -траекторной неэквивалентности (определяемой аналогично определению 4.1.21) пары интегрируемых несжимаемых 3-мерных течений (соответственно пары интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на бициклическом 3-атоме по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары интегрируемых течений (соответственно интегрируемых систем) на 3-атоме (см. комментарий 4.5.3);
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.16 и 4.5.17) устойчивой C^0 -траекторной неэквивалентности (аналог определения 4.1.19) пары интегрируемых несжимаемых 3-мерных течений (соответственно пары интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на вполне бициклическом 3-атоме; этим условиям удовлетворяют почти все пары интегрируемых течений (соответственно интегрируемых систем) на 3-атоме.

В главе 5 изучаются топологические инварианты (т.е. $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные функционалы) на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных (необязательно интегрируемых) несжимаемых течений без нулей на компактном 3-мерном многообразии Q . Интегральные линии такого векторного поля попарно не пересекаются и заполняют всю область, касаясь ее границы, и тем самым образуют “распределенный узел” в данной области (т.е. узел “распределен” по всей области). Хорошо известен инвариант Хопфа — функционал спиральности, где “спиральность” несжимаемого течения равна усредненному коэффициенту зацепления интегральных траекторий (т.е. соответствующего распределенного узла) [5]. Казалось вполне правдоподобным, что могут существовать и другие (не сводящиеся к спиральности) инварианты на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений, которые бы отвечали (например, через процедуру усреднения) каким-либо инвариантам узлов, отличным от коэффициента зацепления. Однако автору удалось доказать, что любой топологический инвариант несжимаемых течений, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально (а в некоторых случаях и глобально) на $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ выражается через функционал спиральности (теоремы 5.2.7, 5.2.10 и 5.3.9).

В главе 5 изучаются дифференцируемые $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные функционалы на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, а также дифференцируемые инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$. В ней получены следующие основные результаты [138, 139]:

- доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ группы $\mathcal{D}_\omega(D^2)$ симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, выражается через инвариант Калаби (теоремы 5.2.7 и 5.2.10);
- доказано, что любой дифференцируемый $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантный функционал на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3-мерном многообразии Q , имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с $\partial Q \neq \emptyset$ — глобально на множестве 2-форм $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через функционал спиральности (теорема 5.3.9).

Сформулируем эти результаты в виде одной теоремы.

Теорема (5.1.1, [138, 139]). (А) Пусть $I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2) \rightarrow \mathbb{R}$ — инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$, дифференцируемый на C^1 -открытом подмножестве $U \subset \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно C^1 -топологии на U . Тогда всюду в U этот инвариант выражается через инвариант Калаби, т.е. имеет вид $I|_U = h \circ \text{Cal}|_U$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(В) Пусть Q — компактное гладкое 3-мерное многообразие, и $\varkappa^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ — такое подпространство, что $H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) = \varkappa^\perp \oplus \ker(j_{\partial Q})_*$ и \varkappa^\perp является хорошим (определение 5.3.1 (В)). Пусть функционал $I : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ всех точных несжимаемых течений без нулей на Q является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным, дифференцируем (по отношению к $\mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$ -калибровке) на C^1 -открытом подмножестве $U \subseteq \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на U . Тогда C^1 -локально на U (т.е. в некоторой достаточно малой C^1 -окрестности U_B любой 2-формы $B \in U$ со свойством $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(B) \neq 0$) функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_{U_B} = h_B \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{U_B}$ для некоторых функций $h_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Если при этом $Q = M \times S^1$ и U состоит из всех точных 2-форм без нулей на Q , которые обладают сечением, изотопным поверхности $M \times \{0\}$, т.е. имеют вид ψ^*B , где $\psi \in \mathcal{D}^0(Q)$, $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ и $B|_{M \times \{0\}}$ задает положительную ориентацию, то всюду на U функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_U = h \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_U$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(С) Пусть $Q = M \times S^1$ и $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \mid \text{Flux}(B) = \text{const}\}$ — совокупность точных несжимаемых течений фиксированного кохомологического класса (т.е. имеющих фиксированный поток) без нулей, где $\text{Flux} : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q}), \mathbb{R})$, $[\Pi] \mapsto \int_{\Pi} B$, — функционал потока на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, см. определение 5.3.1 (А). Пусть подмножество $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ состоит из всех 2-форм $B \in \mathcal{B}'$, обладающих секущей поверхностью $P \subset Q$, изотопной поверхности $M \times \{0\}$ и трансверсальной интегральным кривым поля $\ker B$ (т.е. \mathcal{B}'' состоит из всех 2-форм вида $\psi^*B \in \mathcal{B}'$, где $\psi \in \mathcal{D}^0(Q)$ и $B|_{M \times \{0\}}$ задает положительную ориентацию). Пусть функционал $I : \mathcal{B}'' \rightarrow \mathbb{R}$ является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным, дифференцируем и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на \mathcal{B}'' . Тогда всюду на \mathcal{B}'' функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I = h \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Глава 1

Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты

В этой главе излагаются результаты работ автора [129, 130, 131].

1.1 Введение

В данной главе доказывается критерий, дающий ответ на следующий естественный вопрос. Какие гладкие функции на двумерных поверхностях M , с конечным числом критических точек, можно или нельзя реализовать в виде функций высоты при погружении поверхности в евклидово трехмерное пространство \mathbb{R}^3 ? Вместо функций высоты можно эквивалентным образом рассматривать функции расстояния $\rho_{x_0}(x)$, задающие расстояние от какой-то фиксированной (достаточно далекой от M) точки x_0 в \mathbb{R}^3 до переменной точки x на погруженном (вложенном) подмногообразии M в \mathbb{R}^3 . Изучение функций высоты на погруженных подмногообразиях полезно для описания фокальных точек этих подмногообразий [104].

Кроме того, задача изучения функций высоты на двумерных поверхностях представляет определенный интерес в связи с теорией интегрируемых гамильтоновых систем и классификации особенностей лиувиллевых слоений. См. работы [31, 8, 9, 10]. Полученная в этих работах лиувиллева и траекторная классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы дана в терминах так называемых атомов и молекул. Напомним, что *атомы* — это двумерные поверхности $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ с краем, являющиеся прообразом окрестности критического значения c функции Морса f на двумерной поверхности M . При этом на критическом уровне может находиться несколько критических точек. Отметим (см. [112, 113]), что классификация особенностей многомерных лиувиллевых слоений также дается в терминах таких же двумерных атомов. Кроме того, изучение свойств бифуркаций функции Морса в окрестности ее критического уровня, на котором лежит, вообще говоря, много критических точек, представляет и самостоятельный интерес.

Нетрудно показать, что каждый отдельно взятый атом, — т.е. окрестность $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ критического уровня c функции Морса f , — всегда можно так погрузить в \mathbb{R}^3 , что функция f на нем превратится в функцию высоты. Это утверждение остается справедливым не только для функций Морса, но и для гладкой функции, имеющей лишь конечное число критических точек. Так что локально, т.е. в окрестности каждого отдельного критического уровня функции f , никаких препятствий для решения высотной задачи — нет. Препятствия появляются только тогда, когда требуется решить задачу в целом, т.е. представить заданную функцию f как функцию высоты сразу на всей двумерной замкнутой поверхности M_g рода g .

Перейдем теперь к подробному изложению.

Напомним, что гладкая функция f на гладком многообразии M^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены [104].

Определение 1.1.1. Функция f на M^n называется *функцией высоты* при погружении (вложении) в евклидово пространство, если ее можно представить в виде $f(x) = x_N(x)$, где x_N — декартова координата точки x из M^n при некотором погружении (вложении) многообразия M^n в \mathbb{R}^N .

Функции высоты образуют естественный подкласс в классе всех гладких функций.

Основное внимание мы уделим реализации гладких функций на двумерных поверхностях M , и имеющих лишь конечное число критических точек, в виде функций высоты (или функции расстояния $\rho_{x_0}(x)$) при подходящем погружении поверхности M в \mathbb{R}^3 . При этом выяснилось, что при реализации функции в виде функции высоты предположение о невырожденности ее изолированных критических точек отнюдь не является обязательным.

Основным техническим приемом, используемым при доказательстве результатов настоящей работы, является известная теория препятствий.

Основными результатами настоящей главы являются теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.7.4, 1.7.5 и, как следствие, новое доказательство предложения 1.7.2 о выворачивании сферы наизнанку. А именно, основными результатами настоящей главы являются следующие:

- получен критерий того, когда гладкая функция f с конечным числом критических точек на связной замкнутой ориентируемой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 ; ответ сформулирован в терминах индексов критических точек данной функции f и направлений (вверх или вниз) векторного поля нормалей к поверхности в этих точках (теорема 1.3.1);
- доказано, что любая гладкая функция f с конечным числом критических точек на любой связной замкнутой неориентируемой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в \mathbb{R}^3 , причем для любых наперед заданных вложений в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующих функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют) (теорема 1.3.2);
- для любой гладкой функции f с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности M , описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в \mathbb{R}^3 , реализующих данную функцию f в виде функции высоты, при условии что эта функция реализуема в виде функции высоты при погружении (теорема 1.7.4);
- доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности M в \mathbb{R}^3 , имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно (теорема 1.7.5);
- получено новое доказательство хорошо известного факта о том, что пространство всех гладких погружений сферы S^2 в \mathbb{R}^3 линейно связно; в частности, получается новое и простое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 . При нашем подходе выворачивание сферы очень наглядно иллюстрируется на языке *графов Кронрода–Руба* (см. параграф 1.6, доказательство предложения 1.6.5). А именно, мы описываем наше выворачивание с помощью конечной последовательности “меченых” ориентированных деревьев с метками \pm в вершинах (см. рис. 1.16), где каждое следующее дерево получается из предыдущего некоторой “простой перестройкой”. Этой последовательности меченых деревьев отвечает путь общего

положения в пространстве гладких функций на сфере, описанный в §1.7.1 и замечании 1.7.11 в терминах перестроек “меченых” графов Кронрода–Риба этих функций, и схематично изображенный на рис. 1.16 и 1.17. Здесь каждая критическая точка функции f_t и соответствующая вершина ее графа Кронрода–Риба “помечена” знаком ± 1 , указывающим направление (вверх или вниз) положительной нормали к погруженной поверхности в этой точке.

Прежде чем точно формулировать эти результаты, перечислим в качестве следствия важные классы гладких функций, реализуемых (б–1, б–2, в, г) или нереализуемых (а–1, а–2) в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в \mathbb{R}^3 .

Теорема 1.1.2. (а–1) *При погружении в \mathbb{R}^3 замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g рода $g \geq 2$, т.е. не гомеоморфной сфере или тору, функция высоты всегда имеет по крайней мере четыре критические точки.*

(а–2) *Для любого $g \geq 2$ на ориентируемых замкнутых поверхностях M_g рода g всегда существуют гладкие функции с конечным числом критических точек, не реализующиеся как функции высоты ни при каком погружении M_g в \mathbb{R}^3 .*

(б–1) *Напротив, любую гладкую функцию на сфере S^2 или на торе T^2 , имеющую конечное число критических точек (не обязательно функцию Морса), можно реализовать как функцию высоты (или как функцию расстояния до фиксированной точки в \mathbb{R}^3) при некотором погружении этих поверхностей в \mathbb{R}^3 .*

(б–2) *Любую функцию Морса на любой замкнутой двумерной поверхности M (ориентируемой или неориентируемой) всегда можно реализовать как функцию высоты при подходящем погружении M в \mathbb{R}^3 . При этом, для функции Морса с N критическими точками на ориентируемой поверхности M_g имеется ровно $C_N^{N/2}$ различных, т.е. нормально не эквивалентных погружений M_g . (Определение нормальной эквивалентности см. в замечании 1.1.3 и определении 1.7.3).*

(в) *Любую гладкую функцию на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ , имеющую лишь конечное число критических точек (не обязательно невырожденных), можно реализовать как функцию высоты (или как функцию расстояния до некоторой фиксированной точки в \mathbb{R}^3) при некотором погружении поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 . При этом, для функции Морса с N критическими точками имеется ровно 2^N нормально не эквивалентных погружений M_μ .*

(г) *Каждый отдельно взятый атом, ориентируемый или неориентируемый (т.е. окрестность в M критического уровня функции f с конечным числом критических точек), $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ всегда можно так погрузить в \mathbb{R}^3 , что функция f на нем превратится в функцию высоты.*

Замечание. Очевидно, что сферу S^2 можно так вложить в \mathbb{R}^3 , что на ней появится функция высоты с ровно двумя невырожденными критическими точками (минимум и максимум). Для тора T^2 имеется очевидное вложение с функцией высоты, обладающей ровно четырьмя невырожденными критическими точками.

Замечание. Хорошо известна теорема Риба, согласно которой многообразие M^n , на котором существует гладкая функция с ровно двумя критическими точками (невырожденными или вырожденными, — все равно), обязательно гомеоморфно стандартной сфере S^n . См., например, [104, 103, 119].

Замечание. Все теоремы настоящей главы остаются справедливыми, если вместо функций высоты на компактном подмногообразии M^n в \mathbb{R}^N рассмотреть функции, определяемые как расстояние $\rho_{x_0}(x)$ от переменной точки x до какой-то фиксированной точки x_0 в \mathbb{R}^N . В самом деле, если точка x_0 расположена в \mathbb{R}^N достаточно далеко от погруженного подмногообразия

M^n , то функция расстояния $\rho_{x_0}(x)$ очень похожа на функцию высоты, определяемую прямой, проходящей через точку x_0 в направлении далеко расположенного многообразия M^n .

Замечание 1.1.3. Из нашего критерия (теорема 1.1.4 (а–1, а–2) или теоремы 1.3.1 и 1.3.2) следует, что для функции Морса f с N критическими точками на замкнутой поверхности M существует ровно $C_N^{N/2}$ (в ориентируемом случае) или 2^N (в неориентируемом случае) различных, т.е. нормально не эквивалентных погружений, реализующих данную функцию Морса f как функцию высоты. При этом мы считаем, что два погружения с одинаковой функцией высоты нормально эквивалентны, если в каждой критической точке направления нормалей для этих погруженных поверхностей совпадают. Число нормально не эквивалентных погружений с данной функцией высоты f , очевидно, не превосходит 2^N . Другое, эквивалентное определение нормальной эквивалентности см. в параграфе 1.7 (определение 1.7.3). Ранее, в работе [59] было показано, как реализовать произвольную функцию Морса на поверхности некоторым погружением этой поверхности в \mathbb{R}^3 с последующим проектированием ее на вертикальную ось z . Однако в [59] были обнаружены далеко не все искомые погружения. А именно (для простых функций Морса), были найдены лишь те, у которых каждая связная компонента неособой линии уровня, погруженная в горизонтальную плоскость, регулярно гомотопна стандартной окружности. Из нашей же работы вытекает, что в действительности искомым погружениям существенно больше, и мы даем их полное описание (см. более общие теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.7.4, 1.7.9).

Замечание. В той же работе [59] было получено необходимое и достаточное условие реализации функции Морса на замкнутой поверхности в виде функции высоты при вложении поверхности в \mathbb{R}^3 . При этом, критерий работы [59] разбивает исходную задачу на две:

- 1) когда окрестности критических уровней функции Морса (т.е. атомы в нашей терминологии) допускают искомую высотную реализацию при каком-то вложении;
- 2) когда граничные окружности атомов можно согласовать так, чтобы получилось глобальное вложение.

Впрочем, ответа на первый вопрос в работе [59] не дается.

Перейдем к описанию основных результатов настоящей главы.

При замене вложений на погружения, мы даем ответ на вопрос о высотной реализуемости функций в виде эффективного и простого критерия. В частности, наша теорема 1.1.2 является следствием более сильных теорем 1.3.1 и 1.3.2 (см. параграф 1.3). Теорема 1.3.1 дает (в ориентируемом случае) критерий реализуемости гладкой функции с конечным числом критических точек в виде функции высоты при погружении. Теорема 1.3.2 утверждает, что в неориентируемом случае искомое высотное погружение всегда существует для любой функции указанного класса. То есть, здесь никаких препятствий нет вообще.

После решения задачи о реализации гладких функций на поверхности в виде функций высоты, естественно перейти к вопросу о том — можно ли представить гладкую деформацию функции с конечным числом критических точек на поверхности в виде соответствующей регулярной гомотопии погружений поверхности в \mathbb{R}^3 ? Оказывается, в случае деформаций функции в пространстве функций Морса ответ на вопрос положителен (см. ниже).

С этой задачей естественно связан также следующий известный факт: пространство функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности линейно связно. Нам не удалось найти доказательства этого утверждения в литературе ранее 1997 г. Поэтому мы приводим его доказательство сначала для сферы и проективной плоскости (§1.6, теорема 1.6.2). А затем, в §2.6 следующей главы, мы приводим доказательство для произвольных двумерных поверхностей, следуя С.В. Матвееву (теорема 2.6.1). Развивая идеи Матвеева, мы докажем и некоторые обобщения этого факта (теоремы 2.6.9, 2.6.11).

Замечание. В работе [25] упомянуто близкое утверждение о связности пространства мероморфных функций на комплексных кривых с фиксированным числом точек ветвления, и доказаны его обобщения.

В параграфе 1.7 мы доказываем (см. теорему 1.7.5), что любая гладкая деформация функции Морса на любой двумерной поверхности реализуется как деформация функций высоты при подходящей деформации погружений поверхности в \mathbb{R}^3 . Из результатов этого и предыдущего параграфов, в качестве простого следствия, легко получается новое доказательство хорошо известного факта, что пространство всех гладких погружений сферы S^2 в \mathbb{R}^3 линейно связно. В частности, получается новое и простое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 . При нашем подходе выворачивание сферы очень наглядно иллюстрируется на языке *графов Кронрода–Руба* (см. параграф 1.6, доказательство предложения 1.6.5).

Замечание. Из теоремы Хирша–Смейла [121, 84, 17] следует, что, в случае замкнутой поверхности положительного рода g , пространство всех ее погружений в \mathbb{R}^3 не является связным, а состоит из 2^{2g} связных компонент в ориентируемом случае, и из 2^μ компонент в неориентируемом случае. В действительности, по теореме Хирша–Смейла, это число равно числу гомоморфизмов фундаментальной группы поверхности в фундаментальную группу классифицирующего пространства $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$, т.е. в группу \mathbb{Z}_2 из двух элементов. Отсюда нетрудно вывести, что пространство всех погружений поверхности, не гомеоморфной сфере, в \mathbb{R}^3 , профакторизованное по группе автоморфизмов этой поверхности, состоит ровно из двух связных компонент.

Сформулируем основные результаты данной главы в виде одной теоремы.

Теорема 1.1.4 (см. теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.7.4, 1.7.5 и предложение 1.7.2). (а–1) Пусть f — гладкая функция на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g рода g , имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N (не обязательно функция Морса). Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq N$,

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , таком, что в каждой критической точке x_k (где $1 \leq k \leq N$) положительная нормаль к поверхности M_g имеет вид $\varepsilon_k e$, где e — единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в \mathbb{R}^3 .

(а–2) Пусть f — гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ рода μ , имеющая лишь конечное число критических точек (не обязательно функция Морса). Тогда любое вложение в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующее функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют), можно всегда продолжить до погружения всей поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего функцию f как функцию высоты. В частности, любая функция указанного типа на неориентируемой поверхности реализуется как функция высоты при некотором погружении.

(а–3) Пусть f — гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемой или неориентируемой). Фиксируем какое-нибудь погружение $\alpha_0 \in \operatorname{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, т.е. погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. Тогда имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между связными компонентами пространства $\operatorname{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ и элементами группы $H^1(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ или $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}^{\mu-1}$ одномерных когомологий поверхности M .

(б) Пусть $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, — гладкий путь в пространстве всех функций Морса на замкнутой поверхности M . Пусть $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0}(M, \mathbb{R}^3)$ — некоторое погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее простую функцию Морса f_0 как функцию высоты. Тогда существует гладкий путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 , такой, что при любом t погружение α_t реализует функцию f_t как функцию высоты. Пространство всех таких путей $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно.

(в) В случае двумерной сферы $M = S^2$ пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения α_0 и α_1 сферы S^2 в \mathbb{R}^3 можно соединить гладким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех гладких погружений сферы в \mathbb{R}^3 . Более того, два стандартных вложения α_0 и α_1 сферы в \mathbb{R}^3 , имеющие один и тот же образ, но противоположно направленные положительные нормали, можно соединить таким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений, что функции высоты f_t погружений α_t образуют путь общего положения, описанный в §1.7.1 и замечании 1.7.11 в терминах перестроек “меченых” графов Кронрода–Риба этих функций, и схематично изображенный на рис. 1.16 и 1.17. Здесь каждая критическая точка функции f_t и соответствующая вершина ее графа Кронрода–Риба “помечена” знаком ± 1 , указывающим направление (вверх или вниз) положительной нормали к погруженной поверхности в этой точке.

1.2 Препятствия к реализации гладкой функции в виде функции высоты при вложении или погружении поверхности

Легко видеть, что на ориентируемых поверхностях существуют гладкие функции, не реализующиеся как функции высоты при погружениях поверхности в \mathbb{R}^3 . Приведем простой пример такой функции.

Предложение 1.2.1. (а) На любой связной замкнутой двумерной поверхности M , не гомотопной сфере, существует гладкая функция K_3 , имеющая ровно три критические точки: минимум, максимум и седло (вырожденное или невырожденное).

(б) Эта функция K_3 не может быть реализована как функция высоты при вложении ориентируемой поверхности M_g в \mathbb{R}^3 . (Напомним, что в неориентируемом случае вложений M_μ в \mathbb{R}^3 нет вообще.)

(в) На ориентируемых поверхностях M_g рода $g \geq 2$ эта функция K_3 не может быть реализована как функция высоты при погружении M_g в \mathbb{R}^3 .

(г) Напротив, на торе T^2 и на любой замкнутой неориентируемой поверхности M_μ функция K_3 может быть реализована как функция высоты при подходящем погружении поверхности в \mathbb{R}^3 .

Мы начнем с доказательства предложения 1.2.1, поскольку функция K_3 достаточно интересна и (как мы увидим ниже) позволяет наглядно моделировать препятствия к построению высотных вложений и погружений.

Доказательство предложения 1.2.1. (а) Искомая функция K_3 легко строится в явном виде. Достаточно воспользоваться известной теоремой классификации двумерных поверхностей. Согласно этой теореме, любая связная замкнутая двумерная поверхность M диффеоморфна сфере с g ручками M_g ($g \geq 0$) или сфере с μ пленками Мебиуса M_μ ($\mu \geq 1$). При этом поверхность M представима в виде склейки фундаментального $2N$ -угольника

$$a_1 \cdots a_N a_1^{-1} \cdots a_{N-1}^{-1} a_N^{\pm 1},$$

где “ -1 ” отвечает ориентируемому случаю, а “ $+1$ ” — неориентируемому, и $N = 2g$ или μ .

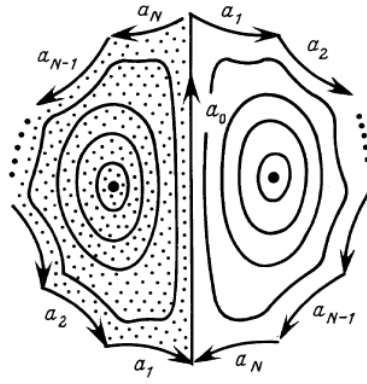


Рис. 1.1. Функция с тремя критическими точками: линии уровня на фундаментальном многоугольнике

Разделим фундаментальный многоугольник пополам, добавив ориентированное ребро a_0 , и зададим на нем функцию K_3 ее линиями уровня (рис. 1.1). А именно, в левой половине многоугольника функция отрицательна и имеет одну точку минимума, а правой половине — положительна и имеет одну точку максимума. На ребрах a_0, a_1, \dots, a_N функция равна нулю. Легко видеть, что все вершины фундаментального многоугольника склеиваются в одну точку на поверхности M . Тогда в этой точке на поверхности возникает седловая критическая точка функции K_3 . Можно считать, что это седло имеет тип $Re(z^{N+1})$. Описанное клеточное разбиение поверхности M имеет ровно одну вершину, $N + 1$ ребер a_0, a_1, \dots, a_N и две двумерных клетки. На одной из клеток функция K_3 положительна, на другой — отрицательна.

(б) По построению, множество нулевого уровня функции K_3 — это букет $N + 1$ окружностей a_0, a_1, \dots, a_N . Допустим, что K_3 — функция высоты при каком-то вложении $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда, в ориентируемом случае, каждая окружность букета гладко вложена в горизонтальную плоскость $\Pi(0)$, причем эти окружности пересекаются в вершине трансверсально. Следовательно, по теореме Жордана, окружности пересекутся еще в нескольких точках, что невозможно при вложении i .

(в) Пункт “в” сразу вытекает из теоремы 1.1.2, которую мы докажем ниже. В самом деле, функция K_3 имеет ровно три критические точки, а согласно пункту “а” теоремы 1.1.2, функция высоты на погруженной поверхности обязательно должна иметь по крайней мере четыре критические точки.

(г) Этот пункт является следствием теоремы 1.1.2 (см. ее пункт “в”), которая будет доказана ниже.

Предложение 1.2.1 доказано. □

1.3 Критерий реализуемости функции с конечным числом критических точек на поверхности в виде функции высоты (доказательство теоремы 1.1.2)

Из приводимых ниже теорем 1.3.1 и 1.3.2 вытекает, что любая функция с конечным числом критических точек на сфере, на торе и на произвольной замкнутой неориентируемой поверхности всегда реализуется в виде функции высоты при некотором погружении в \mathbb{R}^3 . Если же f — функция Морса на произвольной ориентируемой поверхности M_g или неориентируемой поверхности M_μ , то она всегда реализуется в виде функции высоты при подходящем погружении.

Сначала докажем пункты “а” и “б” теоремы 1.1.2. Они следуют из еще более сильного

утверждения.

Теорема 1.3.1 (Критерий существования высотных погружений в ориентируемом случае).

(а) Пусть f — гладкая функция на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N (не обязательно функция Морса). Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad (E)$$

где $\varepsilon_k = \pm 1, \quad 1 \leq k \leq N,$

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , таком, что в каждой критической точке x_k (где $1 \leq k \leq N$) положительная нормаль к поверхности M_g имеет вид $\varepsilon_k e$, где e — единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в \mathbb{R}^3 .

(б) Любая функция Морса f на произвольной замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g всегда реализуется как функция высоты при подходящем погружении M_g в \mathbb{R}^3 .

Замечание. Здесь через $\operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$ обозначен обычный индекс особой точки векторного поля $\operatorname{grad} f$, то есть степень гауссова отображения на себя малой окружности S_α^1 радиуса α с центром в критической точке. Гауссово отображение для векторного поля w в какой-то его особой точке определяется формулой $x \mapsto \alpha w(x)/|w(x)|$, где $|w|$ — норма вектора w в какой-то римановой метрике, заданной в малой окрестности критической точки (от выбора метрики степень не зависит). Точка x пробегает здесь окружность S_α^1 .

Замечание. Отметим, что в случае функции Морса f индекс $\operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$ для точек x_k минимума и максимума функции f равен $+1$, а для седловых точек x_k функции f всегда равен -1 . Фактически именно из этого обстоятельства и из четности эйлеровой характеристики поверхности следуют все утверждения перечисленных выше теорем, касающиеся функций Морса на ориентируемых поверхностях.

Теорема 1.3.2 (Об отсутствии препятствий к построению высотных погружений в неориентируемом случае). Пусть f — гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ , имеющая лишь конечное число критических точек (не обязательно функция Морса). Тогда любое вложение в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующее функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют), можно всегда продолжить до погружения всей поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего функцию f как функцию высоты. В частности, любая функция указанного типа на неориентируемой поверхности реализуется как функция высоты при некотором погружении.

Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 мы докажем ниже, а сейчас мы из теоремы 1.3.1 выведем первые два утверждения теоремы 1.1.2.

Доказательство пунктов “а” и “б–1” теоремы 1.1.2. (а) Пусть f — гладкая функция на ориентируемой поверхности M_g (где $g \geq 0$), имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N . Тогда обязательно найдутся по крайней мере две критические точки \min и \max , такие, что $\operatorname{ind}_{\min}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{ind}_{\max}(\operatorname{grad} f) = 1$. Достаточно взять точку \min какого-нибудь локального минимума и точку \max какого-нибудь локального максимума функции (такие точки всегда существуют). С другой стороны, для любого гладкого векторного поля w на M_g , имеющего конечное число особых точек (нулей) x_1, \dots, x_N , имеет место равенство:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{ind}_{x_k}(w) = \chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Таким образом, среди чисел $\text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$ имеются две единицы, а сумма оставшихся чисел равна $-2g$. Допустим теперь, что у функции f на поверхности M_g (где $g \geq 2$) число критических точек меньше четырех. Приведем это предположение к противоречию. Поскольку $g \geq 2$, то число критических точек не может равняться двум (тогда поверхность была бы гомеоморфной сфере, то есть род g равнялся бы нулю). Следовательно, критических точек ровно три: min — минимум, max — максимум, sad — седло. Поэтому $\text{ind}_{\text{sad}}(\text{grad } f) = -2g$. В то же время, в силу критерия реализуемости (см. теорему 1.3.1), имеем: $\varepsilon_{\text{min}} + \varepsilon_{\text{max}} + \varepsilon_{\text{sad}} \text{ind}_{\text{sad}} \text{grad } f = 0$. Поэтому $\varepsilon_{\text{min}} + \varepsilon_{\text{max}} - 2g\varepsilon_{\text{sad}} = 0$. Так как $\varepsilon_k = \pm 1$, то отсюда получаем, что $|2g| \leq 2$, что противоречит условию $g \geq 2$. Пункт “а” теоремы 1.1.2 доказан.

(б–1) Пусть теперь $g = 0$ (сфера) или $g = 1$ (тор). Снова возьмем какую-то точку min минимума и какую-то точку max максимума для функции f . В силу теоремы об индексе векторного поля, имеем:

$$1 + 1 + \sum_{x_k \neq \text{min}, \text{max}} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 2 - 2g, \text{ то есть } \sum_{x_k \neq \text{min}, \text{max}} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = -2g.$$

Для случая сферы имеем: $\sum_{x_k \neq \text{min}, \text{max}} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0$. Из теоремы 1.3.1 получаем, что мы построим искомое погружение сферы \mathbb{R}^3 , если подберем числа $\varepsilon_i = \pm 1$, удовлетворяющие следующему равенству:

$$\varepsilon_{\text{min}} + \varepsilon_{\text{max}} + \sum_{x_k \neq \text{min}, \text{max}} \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0. \quad (E')$$

Достаточно положить $\varepsilon_{\text{min}} = -\varepsilon_{\text{max}} = -1$ и $\varepsilon_k = 1$ при $x_k \neq \text{min}, \text{max}$. Отметим, что построенное таким образом искомое погружение сферы в \mathbb{R}^3 обладает тем свойством, что в одной критической точке функции высоты (а именно, в точке min локального минимума) положительная нормаль направлена вниз, а во всех остальных критических точках — направлена вверх.

Осталось рассмотреть случай тора. Рассуждения аналогичны. Здесь мы имеем равенство $\sum_{x_k \neq \text{min}, \text{max}} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = -2$. Нужно подобрать $\varepsilon_i = \pm 1$ так, чтобы удовлетворить равенству (E'). Очевидно, что достаточно положить $\varepsilon_{\text{min}} = \varepsilon_{\text{max}} = 1$ и $\varepsilon_k = 1$ при $x_k \neq \text{min}, \text{max}$. Тогда, в силу теоремы 1.3.1, существует некоторое погружение тора в \mathbb{R}^3 , реализующее данную функцию f как функцию высоты. Отметим, что это погружение обладает следующим любопытным свойством. А именно, в каждой критической точке x_k положительная нормаль к погруженному тору направлена вверх. Это погружение можно предъявить в явном виде. Оно извлекается из доказательства теоремы 1.3.1. \square

Доказательство пунктов “б–2” и “в” теоремы 1.1.2. В ориентируемом случае это утверждение следует из равенства (E), так как сумма в левой части этого равенства содержит N слагаемых, из которых ровно $N/2$ слагаемых должны равняться -1 , а остальные слагаемые должны равняться $+1$. В неориентируемом случае утверждение очевидно вытекает из более сильной теоремы 1.3.2 (которая будет доказана ниже): согласно теореме 1.3.2, в неориентируемом случае никаких препятствий к решению высотной задачи нет, так что число нормально не эквивалентных погружений максимально и равно 2^N .

Тем самым, теорема 1.1.2 полностью доказана. \square

1.4 Критерий реализуемости функции в виде функции высоты для погружений ориентируемой поверхности (доказательство теоремы 1.3.1)

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.3.1.

1.4.1 Необходимость

Пусть $f : M_g \rightarrow \mathbb{R}$ — функция высоты при некотором погружении замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g в \mathbb{R}^3 . Пусть x_1, \dots, x_N — критические точки функции f , а $c_1 < c_2 < \dots < c_L$ — критические значения функции f . Отметим, что $2 \leq L \leq N$. Тогда для любого некритического (регулярного) значения $a \notin \{c_1, \dots, c_N\}$ функции f регулярная кривая $\gamma_a = f^{-1}(a)$ погружена в горизонтальную плоскость $\Pi(a)$ высоты a . Выберем естественную ориентацию кривой γ_a , то есть — такое направление обхода γ_a , при котором область $\{x \in M_g | f(x) < a\}$ меньших значений в M_g находится слева.

Определим индекс $\text{ind}_{\Pi} \gamma$ гладкой замкнутой ориентированной кривой γ в ориентированной плоскости Π как степень гауссова отображения $\gamma \rightarrow S^1$, сопоставляющего точке x из γ единичную нормаль у кривой γ в точке x . Все нормали при этом переносим параллельно самим себе в какую-то фиксированную точку 0 . Хорошо известны следующие свойства индекса кривой.

1) (Инвариантность определения). При диффеоморфизме плоскости Π на себя, сохраняющем ориентацию, индексы кривых γ сохраняются. При диффеоморфизме плоскости Π , меняющем ориентацию, индексы кривых заменяются на противоположные.

2) (Инвариантность при гомотопии). Индекс кривой не меняется при гладкой гомотопии кривой в плоскости Π .

3) (Теорема Уитни, [126]). Если две кривые имеют одинаковые индексы, то существует гладкая деформация (регулярная гомотопия) одной кривой в другую.

Вычислим индексы кривых γ_a в плоскости $\Pi(a)$, при $a \notin \{c_1, \dots, c_N\}$. Будем считать при этом, что индекс пустой кривой равен нулю.

Лемма 1.4.1. *Когда значение a изменяется в интервале $c_k < a < c_{k+1}$ (при $1 \leq k \leq L - 1$), то индекс кривой γ_a в плоскости $\Pi(a)$ не меняется. В частности,*

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon} = 0.$$

Это утверждение легко следует из свойства (2) индекса кривой. □

Лемма 1.4.2. *Предположим, что поверхность с краем $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ не содержит критических точек функции f , отличных от точки x_k , для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно малых ε мы имеем:*

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon} = \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f), \tag{E_k}$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$ — знак, показывающий, вверх или вниз направлена положительная нормаль к поверхности в точке x_k . В частности, индексы линий уровня функции f вблизи точки x_k минимума или максимума f совпадают с $\varepsilon_k = \pm 1$.

Доказательство. Спроектируем двумерную поверхность $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ (с краем) на горизонтальную плоскость $\Pi(c_k)$ вдоль вертикальных прямых. Ясно, что при этом все кривые γ_a жестко сместятся вниз на расстояние $a - c_k$. Окружим точку x_k малой окрестностью U (диффеоморфной диску) в поверхности M_g . В этой малой окрестности рассматриваемая нами проекция $\pi : U \rightarrow \Pi(c_k)$ является диффеоморфизмом, поскольку плоскость $\Pi(c_k)$ является касательной к поверхности M_g . Следовательно (см. свойство (1)), индекс любой замкнутой кривой γ в U равен (с точностью до знака ε_k) индексу проекции этой кривой в $\Pi(c_k)$:

$$\text{ind}_{\Pi(c_k)} \pi(\gamma) = \varepsilon_k \text{ind}_U \gamma. \tag{II}$$

В частности, индексы линий уровня вблизи точки x_k максимума или минимума функции f равны ε_k .

Теперь мы можем подсчитать разность индексов кривых $\gamma_{c_k+\varepsilon}$ и $\gamma_{c_k-\varepsilon}$ в плоскостях $\Pi(c_k+\varepsilon)$ и $\Pi(c_k-\varepsilon)$. Продеформируем эти кривые в поверхности M_g навстречу друг другу вдоль

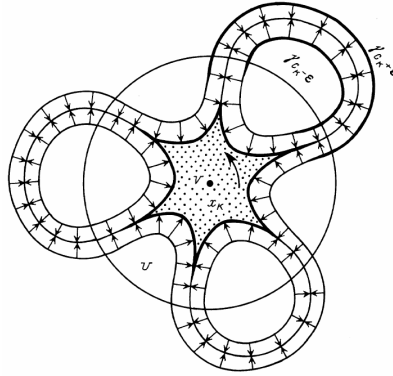


Рис. 1.2. Звездообразная область V , ограниченная продеформированными кривыми $\gamma_{c_k+\epsilon}$ и $\gamma_{c_k-\epsilon}$

траекторий векторного поля $\varphi(x)\text{grad } f/|\text{grad } f|$, где $\varphi(x)$ — гладкая функция в атоме $f^{-1}[c_k - \epsilon, c_k + \epsilon]$, равная единице вне окрестности U и равная нулю в окрестности точки x_k , причем $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Ясно, что если ϵ достаточно мало, то полученные в результате деформации кривые совпадают вне окрестности U и ограничивают внутри U некоторую (звездообразную) область V , содержащую точку x_k (рис. 1.2). Ясно также, что, в процессе деформации, проекции кривых на плоскость $\Pi(c_k)$ все время оставались погруженными в $\Pi(c_k)$. Следовательно, индексы проекций кривых на $\Pi(c_k)$ не изменились. Таким образом, с учетом формулы (II), имеем:

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\epsilon)}\gamma_{c_k+\epsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\epsilon)}\gamma_{c_k-\epsilon} = \epsilon_k \text{ind}_U(\partial V),$$

где поле нормалей на границе ∂V области V выбрано таким образом, чтобы при обходе границы ∂V вектор нормали изменялся непрерывно.

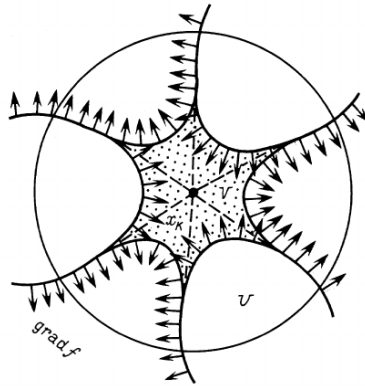


Рис. 1.3. Поле нормалей к кривой ∂V гомотопно векторному полю $\text{grad } f$ на ∂V

Полученное нами равенство равносильно равенству (E_k) из леммы 1.4.2, так как на кривой ∂V непрерывное поле нормалей гомотопно векторному полю $\text{grad } f$ на этой кривой (рис. 1.3). Кроме того, индекс поля $\text{grad } f$ на границе ∂V равен индексу $\text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$ в единственной особой точке $x_k \in V$ векторного поля $\text{grad } f$. Лемма 1.4.2 доказана. \square

Вернемся к доказательству необходимости. Преположим теперь, что критический уровень $f^{-1}(c_k)$ содержит несколько критических точек. Тогда аналогичное доказательство для атома $f^{-1}[c_k - \epsilon, c_k + \epsilon]$ показывает, что

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\epsilon)}\gamma_{c_k+\epsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\epsilon)}\gamma_{c_k-\epsilon} = \sum \epsilon_s \text{ind}_{x_s}(\text{grad } f), \tag{E'_k}$$

где сумма справа берется по всем s таким, что $f(x_s) = c_k$.

Далее, складывая равенства (E'_k) по $k = 1, 2, \dots, L$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) &= \sum_{k=1}^L (\operatorname{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \operatorname{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon}) = \\ &= \sum_{k=1}^{L-1} (\operatorname{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \operatorname{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Однако каждое слагаемое последней суммы равно нулю в силу леммы 1.4.1. Отсюда и получается искомое равенство (E) :

$$\sum_{k=1}^L \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

Необходимость в теореме 1.3.1 доказана. □

1.4.2 Достаточность

Теперь рассмотрим любую гладкую функцию f на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , имеющую конечное число критических точек x_1, \dots, x_N и удовлетворяющую условию (E) для некоторых $\varepsilon_k = \pm 1, 1 \leq k \leq N$. Мы хотим построить гладкое погружение поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующее функцию f как функцию высоты, и такое, что вектор $\varepsilon_k e$ является положительной нормалью к поверхности M_g в критической точке x_k , для каждого $k = 1, 2, \dots, N$.

Идея построения такого погружения заключается в следующей конструкции. Мы построим по функции f некоторый связный ориентированный граф Γ и запишем в вершинах v этого графа целые числа $\lambda = \lambda(v)$, сумма которых окажется равной $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$, то есть нулю.

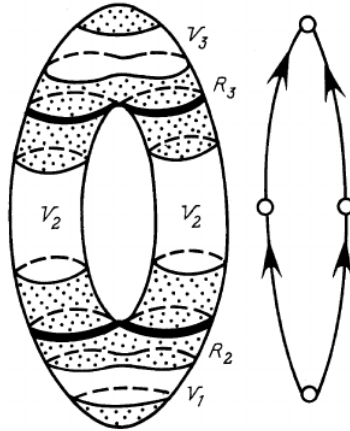


Рис. 1.4. Множества V_k и R_k

Опишем построение графа Γ . Пусть $c_1 < \dots < c_L$ — критические значения функции f . Выбрав малое число $\varepsilon > 0$, рассмотрим непересекающиеся множества

$$V_k = f^{-1}[c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon], \quad 1 \leq k \leq L - 1,$$

и

$$R_k = f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}, \quad 2 \leq k \leq L - 1.$$

См. рис. 1.4. Определим множества вершин $\{v\}$ и ребер $\{r\}$ графа Γ следующим образом. Сопоставим каждой связной компоненте $V_k^{(i)}$ из множества $V_k = \cup_i V_k^{(i)}$ одну вершину $v = v_k^{(i)}$,

а каждой связной компоненте $R_k^{(j)}$ множества $R_k = \cup_j R_k^{(j)}$ сопоставим одно ребро $r = r_k^{(j)}$ (рис. 1.4). Отметим, что каждое множество $V_k^{(i)}$ диффеоморфно цилиндру $S^1 \times [c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon]$ и тривиально расслоено на линии уровня $S^1 \times \{a\}$ функции f . Каждое множество $R_k^{(j)}$ диффеоморфно окружности S^1 или прямой \mathbb{R} .

Осталось задать концы каждого ребра $r_k^{(j)}$. Выбрав на поверхности M_g риманову метрику, выпустим из точек кривой $R_k^{(j)}$ вниз и вверх траектории векторного поля $\text{grad } f / |\text{grad } f|^2$ до их пересечения с множествами $f^{-1}(c_k - \varepsilon)$ и $f^{-1}(c_k + \varepsilon)$. Мы получим два диффеоморфизма кривой $R_k^{(j)}$, а именно, — на верхнее основание некоторого цилиндра $V_{k-1}^{(s)}$ и на нижнее основание некоторого цилиндра $V_k^{(i)}$. Определим концы ребра $r_k^{(j)}$, поместив его начало в вершину $v_{k-1}^{(s)}$, а конец — в вершину $v_k^{(i)}$ (рис. 1.4).

Итак, вершины $v_k^{(i)}$ графа Γ изображают собой окружности, на которые распадается типичная, регулярная линия уровня $f^{-1}(a)$ при $c_k < a < c_{k+1}$, а ребра $r_k^{(j)}$ графа Γ показывают нам движение отдельных участков этих окружностей вдоль траекторий поля $\text{grad } f / |\text{grad } f|^2$, когда уровень a проходит критическое значение c_k .

Лемма 1.4.3. *Граф Γ конечен и связан.*

Доказательство. Для случая функции Морса это утверждение очевидно. Для случая произвольной гладкой функции с конечным числом критических точек оно тоже проверяется очень просто. Покажем, что число ребер у Γ конечно. Действительно, каждая некомпактная кривая $R_k^{(j)}$ лежит в $f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, диффеоморфна \mathbb{R} и соединяет путем какие-то две критические точки, — скажем, x_1 и x_2 . Число всех таких кривых $R_k^{(j)}$ не превосходит $N + 2g - 2$. Это следует из определения рода поверхности M_g [24] и того факта, что в каждой связной компоненте множества $M_g \setminus f^{-1}(c_k)$ найдется хотя бы одна критическая точка функции f . Отсюда следует (ввиду связности $M_g \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$), что граф Γ конечен и связан. Лемма доказана. \square

Перейдем к построению погружения поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты.

ШАГ 1. Сначала окружим критические точки x_1, \dots, x_N функции f непересекающимися координатными окрестностями U_1, \dots, U_N и зададим вложение каждой окрестности U_k в \mathbb{R}^3 по формуле:

$$x \mapsto (\varepsilon_k u^1(x), u^2(x), f(x)),$$

где $x \in U_k$, а u^1, u^2 — такие координаты в U_k , что индуцированная ориентация в U_k согласована с ориентацией M_g . Ясно, что положительная нормаль в точке x_k к M_g действительно будет иметь вид $\varepsilon_k e$.

ШАГ 2. Продолжим построенные локальные вложения до какого-нибудь погружения множеств $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , $1 \leq k \leq L$, реализующего f как функцию высоты. Тогда для каждого цилиндра $V_k^{(i)} = S^1 \times [c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon]$ мы имеем погружение его граничных окружностей $S^1 \times \{c_k + \varepsilon\}$ и $S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}$ в соответствующие горизонтальные плоскости $\Pi(c_k + \varepsilon)$ и $\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)$. Обозначим через $\lambda(v_k^{(i)})$ разность индексов этих окружностей:

$$\lambda(v_k^{(i)}) = \text{ind}_{\Pi(c_k + \varepsilon)} S^1 \times \{c_k + \varepsilon\} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)} S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}.$$

Лемма 1.4.4. *Построенное погружение можно продолжить до погружения поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты, если и только если $\lambda(v_k^{(i)}) = 0$ для любой вершины $v_k^{(i)}$.*

Эта лемма легко следует из свойства (3) индекса кривой. \square

Итак, в частном случае, когда функция $\lambda = \lambda(v_k^{(i)})$ тождественно равна нулю, построение искомого погружения можно успешно завершить.

ШАГ 3. В общем случае, — когда не все функции $\lambda(v_k^{(i)})$ равны нулю, — нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1.4.5. Сумма всех чисел $\lambda(v_k^{(i)})$ равна $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$.

Доказательство. Сумма всех $\lambda(v_k^{(i)})$ равна сумме

$$\sum_{k=1}^{L-1} (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon}) = \sum_{k=1}^L (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon}).$$

Ввиду равенств (E'_k) последняя сумма равна

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f).$$

Лемма доказана. □

Следствие. Существует такая функция $\beta = \beta(r_k^{(j)})$ на множестве ребер графа Γ , что $\beta(r_k^{(j)})$ является целым числом и $\lambda = \partial\beta$, где функции λ и β понимаются как 0-цепь и 1-цепь графа Γ , а ∂ — обычный граничный оператор в пространстве цепей.

Доказательство. Ввиду условия (E) сумма всех $\lambda(v_k^{(i)})$ равна нулю. С учетом леммы 1.4.3 (конечность и связность графа Γ), это гарантирует существование такой 1-цепи β , что $\lambda = \partial\beta$. Следствие доказано. □

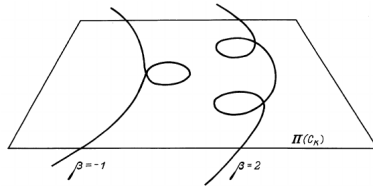


Рис. 1.5. Добавление $|\beta(r_k^{(j)})|$ петель к кривым $R_k^{(j)}$ в плоскости $\Pi(c_k)$

Взяв теперь 1-цепь $\beta = \beta(r_k^{(j)})$, такую что $\lambda + \partial\beta = 0$, приделаем к каждой кривой $R_k^{(j)}$ в плоскости $\Pi(c_k)$ петли нужной ориентации в количестве $|\beta(r_k^{(j)})|$ (рис. 1.5). Рассмотрим новое погружение поверхности $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты. А именно, — в окрестностях критических точек новое погружение совпадает со старым, а на кривых $R_k^{(j)}$ согласовано с погружением $R_k^{(j)}$ в плоскость $\Pi(c_k)$ с учетом добавленных петель. При этом разности $\lambda = \lambda(v_k^{(j)})$ заменятся на некоторые новые $\lambda' = \lambda'(v_k^{(j)})$. Покажем, что все $\lambda'(v_k^{(j)})$ равны нулю.

Лемма 1.4.6. Имеет место равенство $\lambda' = \lambda + \partial\beta$.

Доказательство. Пусть $v_{k-1}^{(s)}$ и $v_k^{(i)}$ — начало и конец ребра $r_k^{(j)}$ графа Γ . Тогда, при добавлении петель нужной ориентации в количестве $|\beta(r_k^{(j)})|$ к кривой $R_k^{(j)}$, индекс верхней окружности цилиндра $V_{k-1}^{(s)}$ и индекс нижней окружности цилиндра $V_k^{(i)}$, оба увеличатся на $\beta(r_k^{(j)})$, а индексы остальных компонент кривых $\gamma_{c_k-\varepsilon}$ и $\gamma_{c_k+\varepsilon}$ не изменятся. Следовательно, разность $\lambda(v_k^{(i)})$ увеличилась на сумму $\sum_j^+ \beta(r_k^{(j)})$ по всем ребрам, входящим в вершину $v_k^{(i)}$, и уменьшилась на сумму $\sum_m^- \beta(r_{k+1}^{(m)})$ по всем ребрам, выходящим из вершины $v_k^{(i)}$. Таким образом,

$$(\lambda' - \lambda)(v_k^{(i)}) = \sum_j^+ \beta(r_k^{(j)}) - \sum_m^- \beta(r_{k+1}^{(m)}) = (\partial\beta)(v_k^{(i)}).$$

Лемма доказана. □

Итак, по построению 1-цепи β , все разности $\lambda' = \lambda'(v_k^{(i)})$ равны нулю. Значит, согласно лемме 1.4.4, мы можем продолжить наше новое погружение $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 до некоторого погружения M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты.

Достаточность доказана. \square

Докажем пункт “б” теоремы 1.3.1. В случае функции Морса индексы всех особых точек (нулей) векторного поля $\text{grad } f$ равны ± 1 . При этом, критических точек у функции Морса на ориентируемой поверхности M_g всегда четное число (поскольку сумма индексов всех критических точек равна $2 - 2g$). Поэтому для любой функции Морса всегда можно подобрать набор чисел $\varepsilon_k = \pm 1$, чтобы удовлетворить тождеству $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0$.

Таким образом, теорема 1.3.1 доказана полностью. \square

1.5 Реализуемость функции в виде функции высоты для погружений поверхности в неориентируемом случае (доказательство теоремы 1.3.2)

В этом параграфе мы докажем теорему 1.3.2. Идея доказательства, как в ориентируемом случае, основана на построении по данной функции f некоторого связного ориентированного графа. Отличие от доказательства теоремы 1.3.1 связано с нестандартным определением ориентированной границы ∂ ребер графа Γ , при котором группа гомологий $H_0(\Gamma, \partial)$ изоморфна группе \mathbb{Z}_2 .

Пусть x_1, \dots, x_N — критические точки функции f , c_1, \dots, c_L — критические значения функции f . Рассмотрим граф $\Gamma = \Gamma_f$, такой же, как и в ориентируемом случае (рис. 1.4). Напомним, что множества $f^{-1}(c_k, c_{k+1})$ распадаются на открытые цилиндры $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$, которым соответствуют вершины v графа Γ . Для упрощения обозначений, здесь мы будем писать просто V вместо использовавшегося выше обозначения $V_k^{(i)}$. Далее, множества $f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ распадаются на замкнутые и незамкнутые кривые R , которым отвечают ребра r графа Γ . Здесь мы также будем писать просто R вместо использовавшегося выше обозначения $R_k^{(j)}$. Напомним, что инцидентным R и V отвечают инцидентные r и v . Для каждого цилиндра $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$ фиксируем какую-нибудь ориентацию. Затем, взяв вектор $\text{grad } f$ в качестве первого вектора положительного репера, рассмотрим индуцированную ориентацию на всех окружностях $S^1 \times \{a\}$ в V , и на всех кривых R из $f^{-1}(c_k)$, лежащих на нижней границе цилиндра V .

Границу любого ребра r определим по формуле

$$\partial r = v_+ - \varepsilon_r v_-,$$

где v_- и v_+ — начало и конец ребра r , а знак $\varepsilon_r = \pm 1$ указывает, согласованы или нет ориентации цилиндров V_+ и V_- на их общей границе R .

Теперь выберем малое $\varepsilon > 0$ и построим какое-нибудь погружение α множеств $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты и продолжающее заданное вложение малых окрестностей точек x_1, \dots, x_N . Для каждого цилиндра $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$ мы имеем погружение окружностей $S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}$ и $S^1 \times \{c_k + \varepsilon\}$ в горизонтальные плоскости $\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)$ и $\Pi(c_k + \varepsilon)$. Обозначим через $\lambda(v)$ разность индексов этих окружностей. Как и в ориентируемом случае, верна (по теореме Уитни) следующая лемма.

Лемма 1.5.1. *Погружение α тогда и только тогда может быть продолжено до погружения неориентируемой поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты, когда все числа $\lambda(v)$ равны нулю.* \square

Сопоставление $v \mapsto \lambda(v)$ может рассматриваться как нульмерная цепь

$$\sum_{v \in \Gamma} \lambda(v) v$$

графа Γ . Эту цепь обозначим через λ_α и назовем *препятствием* к продолжению погружения α на всю неориентируемую поверхность M_μ .

Лемма 1.5.2 (Основная). *Сумма всех чисел $\lambda(v)$ четна.*

Доказательство см. ниже.

Следствие. *Препятствие λ_α является границей: $\lambda_\alpha = \partial\beta$.*

Доказательство следствия. Ввиду связности и неориентируемости поверхности M_μ (а также — конечности графа Γ) группа $H_0(\Gamma, \partial)$ нулемерных гомологий графа Γ изоморфна группе \mathbb{Z}_2 . При этом 0-цепь

$$\lambda = \sum_{v \in \Gamma} \lambda(v)v$$

является границей в том и только в том случае, когда сумма всех чисел $\lambda(v)$ четна. Таким образом, лемма 1.5.2 гарантирует существование 1-цепи β такой, что $\lambda_\alpha = \partial\beta$. Следствие доказано. \square

Доказательство леммы 1.5.2. По определению чисел $\lambda(v)$ их сумма равна

$$\sum_{k=1}^L [\text{ind}_{\Pi(c_k - \varepsilon)} \alpha(f^{-1}(c_k - \varepsilon)) - \text{ind}_{\Pi(c_k + \varepsilon)} \alpha(f^{-1}(c_k + \varepsilon))].$$

Поэтому лемма будет доказана, если мы проверим, что k -ое слагаемое S_k этой суммы сравнимо по модулю 2 с числом связных компонент границы ∂P_k множества $P_k = f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, $1 \leq k \leq N$ (так как объединение всех множеств P_k замкнуто).

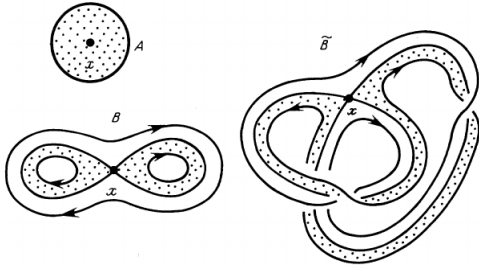


Рис. 1.6. Простые атомы A , B и \tilde{B}

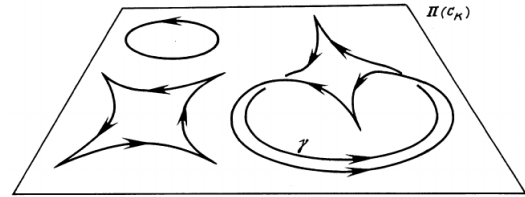


Рис. 1.7. Замкнутые кривые с точками возврата для атомов A , B и \tilde{B}

Начнем проверку с простого частного случая, когда множество P_k содержит только одну критическую точку x функции f , причем эта точка — морсовская. В этом случае P_k состоит из некоторого числа цилиндров и одного из множеств, изображенных на рис. 1.6. Это — простые атомы A , B и \tilde{B} (т.е. атомы с одной вершиной). См. [10]. Очевидно, что число связных компонент границы ∂P_k является четным только в неориентируемом случае (для “атомов” A , B и \tilde{B} оно равно 1, 3 и 2). В то же время, число S_k , т.е. k -ое слагаемое в выписанной сумме, сравнимо по модулю 2 с индексом плоской замкнутой кривой, имеющей точки возврата. Эти кривые, отвечающие атомам A , B и \tilde{B} , показаны на рис. 1.7. Так как этот индекс равен 1, -1 и $2\text{ind}_{\Pi(c_k)} \alpha(\gamma)$ соответственно, то в описанном частном случае (т.е. в морсовском) лемма доказана.

В общем случае (когда функция не обязательно морсовская) мы рассмотрим малую деформацию $\alpha_t|_{P_k} \rightarrow \mathbb{R}^3$ погружения $\alpha = \alpha_0$, тождественную на границе ∂P_k и превращающую функцию высоты в простую функцию Морса. То есть, имеющую на каждом критическом уровне только одну критическую точку. Поскольку погружение не изменилось на границе ∂P_k , а для простой функции Морса (определение 1.6.6) доказываемое утверждение уже доказано (см. описанный выше частный случай), то лемма полностью доказана. \square

Далее, рассуждения в точности такие же, как и в ориентируемом случае. Для произвольной 1-цепи

$$\beta = \sum_{r \in \Gamma} \beta(r)r, \quad \text{где } \beta(r) \in \mathbb{Z},$$

построим новое погружение $\tilde{\alpha}$ множеств $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, реализующее f как функцию высоты и совпадающее с α в окрестности каждой критической точки. А именно, — добавим у каждой кривой $\alpha(R)$ в соответствующей горизонтальной плоскости $\Pi(c_k)$ несколько петель, алгебраическое число которых равно $\beta(r)$ (рис. 1.5). Зададим новое погружение $\tilde{\alpha}$ так, чтобы на кривых R оно было согласовано с погружением $\alpha|_R$ с учетом добавленных петель. Исходная цепь β называется в этом случае *различающей цепью* и обозначается $\beta(\alpha, \tilde{\alpha})$.

Лемма 1.5.3. *Имеет место равенство: $\lambda_{\tilde{\alpha}} = \lambda_{\alpha} + \partial\beta(\alpha, \tilde{\alpha})$.*

Доказательство леммы точно такое же, как и в ориентируемом случае. □

Окончание доказательства теоремы 1.3.2. По следствию из леммы 1.5.2, препятствие является границей, т.е. $\lambda_{\alpha} = -\partial\beta$. Построим новое погружение $\tilde{\alpha}$, взяв различающую цепь $\beta(\alpha, \tilde{\alpha}) = \beta$. Тогда, согласно лемме 1.5.3, $\lambda_{\tilde{\alpha}} = 0$, так что (по лемме 1.5.1) погружение $\tilde{\alpha}$ продолжается до некоторого погружения неориентируемой поверхности M_{μ} в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты. Тем самым, теорема 1.3.2 полностью доказана. □

А следовательно, — напомним еще раз, — доказан пункт “в” теоремы 1.1.2, как очевидное следствие теоремы 1.3.2.

Таким образом, в ориентируемом случае, вопрос о реализации функции f в виде функции высоты решается путем анализа интересного уравнения

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0,$$

дополняющего стандартное тождество

$$\sum_{k=1}^N \text{ind}_{x_k}(w) = \chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Было бы очень интересно получить другие геометрические или топологические интерпретации первого уравнения (т.е. критерия реализуемости).

На рис. 1.8 изображено погружение тора в \mathbb{R}^3 , реализующее в виде функции высоты построенную выше функцию K_3 с ровно тремя критическими точками (один минимум, один максимум и одно вырожденное седло). Погружение наглядно изображено последовательностью сечений тора горизонтальными плоскостями, поднимающимися снизу вверх.

1.6 Изотопность функций Морса на сфере и проективной плоскости. Приведение функций к каноническому виду

Определение 1.6.1. Две функции Морса f_0 и f_1 на гладком многообразии M^n назовем *изотопными*, если их можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса на M^n .

Рассмотрим (связную) замкнутую двумерную поверхность $M = M^2$, и обозначим через $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ совокупность всех функций Морса на этой поверхности, имеющих фиксированное число p локальных минимумов и фиксированное число q локальных максимумов. Ясно, что

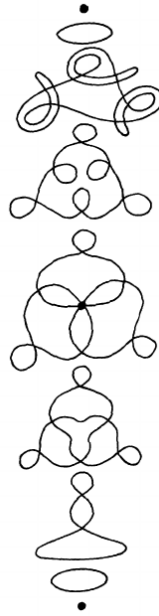


Рис. 1.8. Линии уровня функции высоты K_3 для погружения тора в \mathbb{R}^3

изотопные функции Морса принадлежат одному и тому же пространству $\mathcal{F}_{p,q}(M)$. Заметим, что число r седловых точек функции из пространства $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ определяется поверхностью M и числами p, q однозначно, по формуле эйлеровой характеристики $p + q - r = \chi(M)$. Нетрудно проверить также, что при любых фиксированных $p, q \geq 1$ пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ не пусто. Оказывается, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ линейно связно, т.е. любые две функции из этого пространства изотопны. Доказательство этого известного факта мы приведем в параграфе 2.6. В дальнейшем, говоря о связности, мы всегда имеем в виду линейную связность.

Обозначим через $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$ пространство функций Морса на поверхности M со следующими свойствами:

- 1) они имеют p локальных минимумов и q локальных максимумов,
- 2) фиксирован порядок критических точек на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел.

Такие функции можно назвать *нумерованными функциями Морса*. В частности, каждой функции из $\mathcal{F}_{p,q}(M)$, где $p, q \geq 1$, отвечает ровно $p!q!(p + q - \chi)!$ функций из $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$, где $\chi = \chi(M) = 2 - 2g$ или $2 - \mu$ — эйлерова характеристика поверхности $M = M_g$ или M_μ . Таким образом, пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$ является $p!q!(p + q - \chi)!$ -листным накрытием над пространством $\mathcal{F}_{p,q}(M)$. Отметим, что $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ можно рассматривать как однородное пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)/(S_p \times S_q \times S_{p+q-\chi})$ по действию групп перестановок критических точек каждого типа. При этом, любая изотопия $f_t, 0 \leq t \leq 1$, функций Морса, лежащих в пространстве $\mathcal{F}_{p,q}(M)$, однозначно определяет изотопию в накрывающем пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$, такую, что при непрерывном изменении расположения критических точек на поверхности сохраняется их отношение порядка. При доказательстве предложения 1.7.2 о регулярной гомотопности любых двух погружений сферы в \mathbb{R}^3 (см. параграф 1.7) нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1.6.2. *Если поверхность M является либо двумерной сферой S^2 , либо проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$, то накрывающее пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$ линейно связно при любых фиксированных значениях p и q .*

Замечание 1.6.3. Выберем некоторое подмножество \mathcal{C} в множестве всех критических точек нумерованной функции Морса. Рассмотрим подпространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M; \mathcal{C})$ в пространстве

$\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$, состоящее из всех функций Морса с p минимумами и q максимумами на поверхности M , для которых все критические точки из набора \mathcal{C} предполагаются фиксированными точками на поверхности, а на множествах остальных критических точек каждого типа предполагаются фиксированными отношения порядка. Заметим, что из связности подпространства $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M; \mathcal{C})$ следует связность пространства $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$. В случае сферы нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.6.4. *В случае двумерной сферы пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(S^2; \mathcal{C})$, $|\mathcal{C}| \leq 3$, нумерованных функций Морса с фиксированным расположением не более чем трех критических точек, линейно связно при любых значениях p и q .*

Мы выведем теоремы 1.6.2 и 1.6.4 из следующего основного утверждения о пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$ для произвольной замкнутой поверхности M (то есть произвольного рода).

Рассмотрим группу $\mathcal{D}(M)$ всех автоморфизмов поверхности M , т.е. всех диффеоморфизмов этой поверхности на себя, сохраняющих ориентацию, если поверхность ориентируема. Группа $\mathcal{D}(M)$ естественно действует (справа) на пространстве $\mathcal{F}_{p,q}(M)$ функций Морса, $\phi : f \mapsto f \circ \phi$, $f \in \mathcal{F}_{p,q}(M)$, $\phi \in \mathcal{D}(M)$. Рассмотрим однородное пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M)/\mathcal{D}(M)$, состоящее из орбит этого действия, и аналогичное однородное пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)/\mathcal{D}(M)$.

Предложение 1.6.5. *Пусть M — любая замкнутая двумерная поверхность (ориентируемая или неориентируемая). Тогда однородное пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)/\mathcal{D}(M)$ линейно связно. Другими словами, для любых двух функций Морса f_0 и f из пространства $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$ существует гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса, и существует диффеоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(M)$ поверхности на себя (сохраняющий ориентацию в ориентируемом случае), такие, что $f_1 = f \circ \phi$.*

Доказательство теоремы 1.6.2. Известно [37], что любой автоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(M)$ сферы или проективной плоскости изотопен тождественному, т.е. его можно соединить гладким путем ϕ_t , $1 \leq t \leq 2$, $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \text{id}$, в пространстве всех диффеоморфизмов с тождественным диффеоморфизмом id поверхности на себя. В частности, беря в качестве ϕ автоморфизм из предложения 1.6.5, мы получаем путь f_t , $0 \leq t \leq 2$, в пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$, соединяющий исходные функции Морса f_0 и $f_2 = f$ в пространстве всех функций Морса, где $f_t = f_1 \circ \phi_t$, $1 \leq t \leq 2$. Теорема 1.6.2 доказана. \square

Доказательство теоремы 1.6.4. Согласно предложению 1.6.5, для любых двух нумерованных функций Морса $f_0, f \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(S^2)$ существует путь $f_t \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(S^2)$, $0 \leq t \leq 1$, и автоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(S^2)$, такие, что $f_1 = f \circ \phi$. Как уже отмечалось, путем замены автоморфизма ϕ на другой автоморфизм из пространства $\mathcal{D}(S^2)$ можно считать, что изотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, оставляет на месте все критические точки. При этом автоморфизм ϕ по определению оставляет на месте все точки набора \mathcal{C} .

Воспользуемся теперь следующим фактом. Любой автоморфизм $\phi = \phi_0 \in \mathcal{D}(S^2)$ сферы, оставляющий на месте каждую из выделенных точек, число которых не более трех, можно соединить с тождественным автоморфизмом $\phi_1 = \text{id}$ некоторым путем $\phi_t \in \mathcal{D}(S^2)$, $0 \leq t \leq 1$, $\phi_0 = \phi$, в пространстве всех автоморфизмов, оставляющих на месте выделенные точки. Этот факт следует из связности пространства всех путей с фиксированными концами на сфере или диске. Из этого факта следует, что полученный автоморфизм ϕ можно соединить путем с тождественным автоморфизмом, при котором все выделенные критические точки из подмножества \mathcal{C} остаются неподвижными. Таким образом, пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(S^2; \mathcal{C})$, $|\mathcal{C}| \leq 3$, линейно связно. Теорема 1.6.4 доказана. \square

Остальная часть данного параграфа посвящена доказательству предложения 1.6.5, в котором мы приводим любую функцию Морса к каноническому виду. Нам понадобятся следующие два определения.

Определение 1.6.6. Функцию Морса f на M назовем *простой*, если в каждой связной компоненте ее линии уровня содержится не более одной критической точки.

Определение 1.6.7. Гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса f на M будем называть *путем общего положения*, если при каждом t , $0 \leq t \leq 1$, кроме конечного числа значений t_1, \dots, t_N , функция Морса f_t является простой, а при любом $t = t_i$ функция f_t имеет ровно одну связную компоненту линии уровня, в которой содержится более одной критической точки, причем число критических точек на этой связной компоненте равно двум.

Доказательство предложения 1.6.5. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ. Пусть $M = M_g$ — замкнутая ориентируемая поверхность и f_0 — произвольная функция Морса на этой поверхности.

Для каждой гладкой функции f на M рассмотрим ее *граф Кронрода–Риба* $W = W_f$ (*молекулу*), т.е. базу расслоения (точнее, слоения) $\sigma = \sigma_f : M \rightarrow W$ поверхности M на связные компоненты линий уровня функции f . Итак, граф Кронрода–Риба изображает пространство связных компонент линий уровня функции. На этом графе корректно определена функция $f' = f \circ \sigma^{-1}$ и имеется естественная ориентация, показывающая направление роста этой функции. Ясно, что в случае простой функции Морса f на ориентируемой поверхности все вершины графа Кронрода–Риба W_f имеют кратность 1 или 3, причем для каждой вершины кратности 3 имеется ребро, входящее в эту вершину, и ребро, выходящее из нее. Отметим, что концевым вершинам отвечают точки максимума или минимума f , а вершинам кратности 3 отвечают особые линии уровня функции f , содержащие седловую точку. Верна и теорема реализации, а именно: любой связный ориентированный граф W указанного вида, не имеющий ориентированных циклов, является графом Кронрода–Риба некоторой простой функции Морса на замкнутой поверхности. При этом род g поверхности M_g совпадает с родом графа W .

Пусть f — нумерованная простая функция Морса, т.е. на каждом из трех множеств критических точек одного типа — минимумов, максимумов и седел — фиксировано отношение порядка, или нумерация. Тогда при проекции $\sigma : M \rightarrow W$ поверхности на граф Кронрода–Риба нумерация критических точек функции f перейдет в некоторую нумерацию вершин графа Кронрода–Риба W . Обозначим полученный *нумерованный граф Кронрода–Риба* через $W^{\text{num}} = W_f^{\text{num}}$. Итак, для нумерованного графа Кронрода–Риба фиксирован порядок на каждом из трех множеств вершин одного типа — 1) вершины кратности 1 с выходящим ребром, 2) вершины кратности 1 с входящим ребром, 3) вершины кратности 3. Отметим еще два свойства графа Кронрода–Риба W_f для простой функции Морса f , которые докажем ниже. \square

Лемма 1.6.8 (о графе Кронрода–Риба простой функции Морса). *а) Пусть f — нумерованная простая функция Морса на замкнутой ориентируемой поверхности $M = M_g$. Тогда существует вложение $i : W^{\text{num}} \hookrightarrow M$ нумерованного графа Кронрода–Риба $W^{\text{num}} = W_f^{\text{num}}$ в поверхность со следующими свойствами.*

1) При отображении $i : W^{\text{num}} \hookrightarrow M$ нумерация вершин графа W^{num} переходит в нумерацию критических точек функции f .

2) $\sigma \circ i = \text{id}_W$ (и, значит, $i \circ \sigma|_{i(W)} = \text{id}_{i(W)}$), где $\sigma : M \rightarrow W$ — естественная проекция.

б) Подмножество в пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)/\mathcal{D}(M)$, которому отвечают нумерованные простые функции Морса f на $M = M_g$ с одним и тем же (фиксированным) нумерованным графом Кронрода–Риба $W_f = W$, линейно связно.

Пусть p и q — число локальных минимумов и число локальных максимумов функции f_0 . Обозначим через $W(g, p, q)$ граф, составленный из g окружностей, соединенных последовательно отрезками, и имеющий p нижних концов и q верхних концов. См. рис. 1.9. Этот

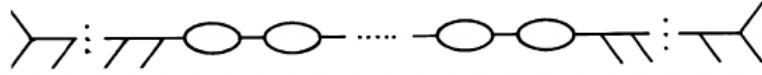


Рис. 1.9. Граф $W(g, p, q)$

граф однозначно определяется числами p и q . Фиксируем вложение M в \mathbb{R}^3 , при котором функция высоты k является простой функцией Морса и ее граф Кронрода–Риба совпадает с графом $W(g, p, q)$. Докажем сначала более слабое утверждение, то есть, что существует гладкий путь $f_t, 0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(M)$ поверхности на себя, такие, что $f_1 = k \circ \phi$ (без учета порядка на множестве критических точек). Заметим, что без ограничения общности мы можем считать, что исходная функция Морса f_0 является простой.

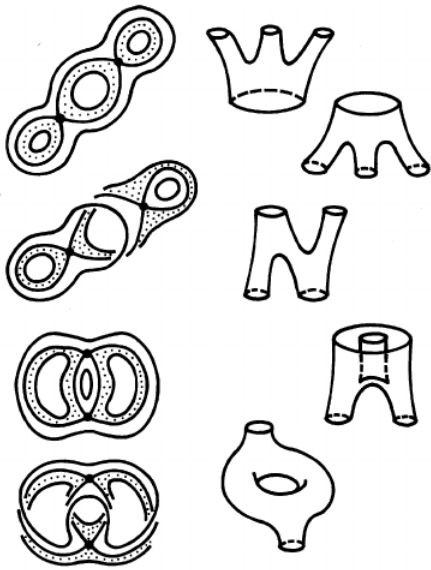


Рис. 1.10. Окрестности линий уровня с двумя критическими точками

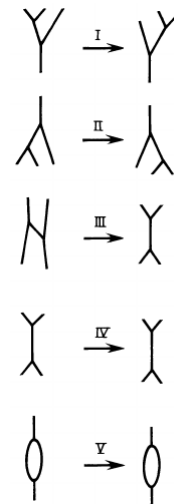


Рис. 1.11. Допустимые перестройки графа Кронрода–Риба функции Морса

Рассмотрим пять простейших типов особенностей I, II, III, IV, V, возникающих у непустых функций Морса f на поверхности M , для которых некоторая связная компонента линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит две критические точки (см. рис. 1.10). На рис. 1.10 показаны вложения в \mathbb{R}^3 соответствующих окрестностей особых линий уровня (т.е. “атомов”) $P = f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, при которых функция f является функцией высоты. Нетрудно построить гладкую деформацию $f_t : P \rightarrow \mathbb{R}, f_0 = f$, функции f , при которой эта функция Морса становится простой, а ее значения в критических точках переставляются, скажем, имеют вид $c - t$ и $c + t$. На рис. 1.11 показаны пять соответствующих перестроек графа Кронрода–Риба, которые мы будем называть *допустимыми*.

Лемма 1.6.9 (о приведении графа Кронрода–Риба к каноническому виду). Пусть W — граф Кронрода–Риба простой функции Морса $f_0 \in \mathcal{F}_{p,q}(M_g)$. Тогда существует конечная последовательность допустимых перестроек этого графа, приводящая его к каноническому виду $W(g, p, q)$.

Доказательство леммы 1.6.8. Утверждение “а” очевидно.

Докажем пункт “б”. Пусть f_0 и f — две простые функции Морса на поверхности M_g , которым отвечает один и тот же ориентированный граф Кронрода–Риба W . Это значит, что имеется изоморфизм $\psi' : W_0 \rightarrow W$ между ориентированным графом Кронрода–Риба W_0 функции f_0 и ориентированным графом Кронрода–Риба W функции f . Изоморфизм ψ' мы будем рассматривать как гомеоморфизм между соответствующими топологическими пространствами W_0 и W . Легко видеть, что этот гомеоморфизм обладает следующим свойством. Для любых двух вложений $i_0 : W_0 \hookrightarrow M$ и $i : W \hookrightarrow M$ графов Кронрода–Риба в поверхность (см. пункт а) гомеоморфизм $i \circ \psi' \circ i_0^{-1}$ между их образами $i_0(W_0)$ и $i(W)$ продолжается до некоторого послойного гомеоморфизма $\psi : M \rightarrow M$, сохраняющего ориентацию поверхности M . Под послойным гомеоморфизмом мы понимаем гомеоморфизм, сохраняющий слоение поверхности M на связные компоненты линий уровня, т.е. удовлетворяющий равенству $\sigma \circ \psi = \psi' \circ \sigma_0$, где $\sigma_0 : M \rightarrow W_0$, $\sigma : M \rightarrow W$ — естественные проекции, отвечающие функциям f_0 и f . Нетрудно показать, что послойный гомеоморфизм $\psi : M \rightarrow M$ можно немного пошевелить так, чтобы он стал гладким, а значит, $\psi \in \mathcal{D}(M)$.

Итак, на поверхности M имеются две функции Морса f_0 и $f_1 = f \circ \psi$, имеющие одни и те же связные компоненты линий уровня и одинаковое направление роста функции. Легко видеть, что пространство таких функций линейно связно: имеется гладкая гомотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, между функциями f_0 и f_1 , в процессе которой функция f_t остается морсовской на всей поверхности M . А именно, можно положить $f_t = (1 - t)f_0 + tf \circ \psi$. Лемма 1.6.8 доказана. \square

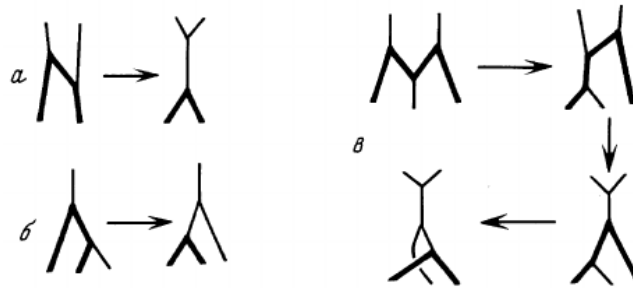


Рис. 1.12. Допустимые перестройки графа Кронрода–Риба функции Морса

Доказательство леммы 1.6.9. 1) Предположим сначала, что $p > 1$. Рассмотрим два произвольных нижних конца графа W и произвольный путь $\Gamma \subset W$, соединяющий эти конечные вершины. Без ограничения общности можно считать, что путь Γ не имеет самопересечений. Покажем, что если длина этого пути (т.е. число его ребер) больше 2, то с помощью допустимых перестроек графа W длину пути Γ можно уменьшить на 1. В самом деле: так как оба конца пути Γ являются нижними вершинами W , внутри него всегда найдется “максимальная” точка. А так как длина Γ не меньше 3, отрезок пути Γ в окрестности максимальной точки имеет вид как на рис. 1.12 (а,б,в). На этих рисунках показано также, как с помощью допустимых перестроек II, III (рис. 1.11) можно уменьшить на 1 длину пути Γ .

Таким образом, в случае $p > 1$ любые два нижних конца графа Кронрода–Риба W , после конечного числа допустимых перестроек этого графа, можно соединить путем длины 2, состоящим из двух соседних ребер графа.

2) Теперь докажем лемму индукцией по числу $N = 2(p + q + g - 1)$ всех вершин графа W . База индукции такова. При $N = 2$ или $N = 4$ граф Кронрода–Риба любой функции $f \in \mathcal{F}_{p,q}(M_g)$ совпадает с каноническим графом $W(g, p, q)$. Индукционный переход осуществляется от $N - 2$ к N . Рассмотрим отдельно три случая: а) $p > 1$, б) $q > 1$, в) $p = q = 1$.

В случае “а”, по доказанному выше, существует последовательность допустимых перестроек графа W , в результате которых любые два наперед заданных нижних конца этого графа становятся концами двух соседних ребер. Выкидывая из рассмотрения эти два соседних ребра, мы получим новый граф Кронрода–Риба с $N - 2$ вершинами, который по предположению индукции приводится допустимыми перестройками к каноническому виду $W(g, p - 1, q)$. Восстанавливая выкинутые два ребра, получаем искомую перестройку, приводящую исходный граф к каноническому виду.

Случай “б” рассматривается аналогично.

Случай “в” сводится к случаю “а” следующим образом. Заметим, что $g \geq 2$. Выкинем из графа Кронрода–Риба единственный нижний конец вместе с выходящим из него ребром, в результате чего получим новый граф Кронрода–Риба с тем же числом вершин N , но уже с двумя нижними концами, и с родом на единицу меньшим. Для полученного графа существуют (по доказанному в “а”) допустимые перестройки, приводящие его к каноническому виду $W(g - 1, 2, 1)$. Восстанавливая выкинутое ребро, получаем искомую перестройку, приводящую исходный граф к каноническому виду $W(g, 1, 1)$.

Лемма 1.6.9 полностью доказана. □

Окончание доказательства предложения 1.6.5 в ориентируемом случае. Из леммы 1.6.8–б и леммы 1.6.9 следует, что существует изотопия $f_t \in \mathcal{F}_{p,q}(M_g)$, $0 \leq t \leq 1$, и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(M_g)$ поверхности на себя, такие, что $f_1 = k \circ \phi$, где k — определенная выше простая функция Морса с каноническим графом Кронрода–Риба $W(g, p, q)$. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M_g)/\mathcal{D}(M_g)$ связно.

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M_g)$ нумерованных функций Морса на ориентируемой поверхности M_g , имеющих p локальных минимумов, q локальных максимумов. Напомним, что для этих функций фиксирован порядок критических точек на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел. Покажем, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M_g)/\mathcal{D}(M_g)$ таких функций, рассматриваемых с точностью до автоморфизмов поверхности, также связно. Из доказательства леммы 1.6.9 видно, что мы умеем приводить нумерацию конечных вершин на нумерованном графе Кронрода–Риба к любой заданной нумерации таких вершин на каноническом графе Кронрода–Риба $W(g, p, q)$. Таким образом, нам осталось проверить, что любую перестановку на множестве внутренних вершин канонического графа $W(g, p, q)$ (т.е. отвечающих седловым критическим точкам функции k) можно получить конечным числом допустимых перестроек, не затрагивающих его концов. Но ввиду связности этого графа любая перестановка его внутренних вершин реализуется в виде последовательности перестановок его соседних внутренних вершин. Каждую перестановку соседних внутренних вершин графа $W(g, p, q)$ легко реализовать с помощью допустимых перестроек типа I, II, IV, V (см. рис. 1.11). Это доказывает предложение 1.6.5 в ориентируемом случае. □

НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ. Пусть $M = M_\mu$ — замкнутая неориентируемая поверхность и f_0 — произвольная функция Морса на этой поверхности.

Для каждой простой функции Морса f на поверхности $M = M_\mu$ рассмотрим аналогичный граф Кронрода–Риба $W = W_f$ (т.е. “молекулу”), в котором могут содержаться вершины кратности 1, 2 и 3. Этим вершинам отвечают особые линии уровня, окрестности которых изображены на рис. 1.6. Это — простые “атомы” A , \tilde{B} и B . Вершины кратности 2, то есть, отвечающие атому \tilde{B} , будем обозначать “звездочками” на графе W .

Мы будем считать, что в некоторой малой окрестности P каждой особой линии уровня фиксирована ориентация либо самой этой окрестности, если P ориентируемо ($P \simeq A$ или $P \simeq B$), либо фиксирована ориентация одной из двух гладких окружностей, лежащих на особом уровне функции f в $P \simeq \tilde{B}$, причем эту окружность $S^* \subset P$ также будем считать фиксированной. Рассмотрим индуцированную ориентацию всех неособых линий уровня

функции f в P , которая в ориентируемом случае определяется так, чтобы вектор $\text{grad } f$ образовывал с вектором скорости к линии уровня положительный репер, а в неориентируемом случае ориентации линий уровня согласованы с фиксированной ориентацией окружности S^* . Поставим на каждом ребре r_j графа W метку $\varepsilon_j = \pm 1$, показывающую, согласована или нет фиксированная ориентация неособых линий уровня функции f при переходе из окрестности одной особой линии уровня f в окрестность другой особой линии, которые на графе W соединены ребром r_j . Два набора меток $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах графа W будем считать эквивалентными, если они получаются друг из друга после изменения выбранной ориентации неособых линий уровня f в некоторых окрестностях P особых линий.

Полученный граф $W = W_f$ с естественной ориентацией его ребер и фиксированными метками $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах, рассматриваемыми с точностью до указанного отношения эквивалентности, обозначим через $W^* = W_f^*$ и назовем *меченым графом Кронрода–Риба* простой функции Морса f на неориентируемой поверхности M_μ . Нетрудно показать, что для меченых графов Кронрода–Риба справедлив аналог леммы 1.6.8, т.е. подпространство в пространстве $\mathcal{F}_{p,q}(M)/\mathcal{D}(M)$, которому отвечают простые функции Морса f на M_μ с фиксированным меченым графом Кронрода–Риба W^* , линейно связно.

Пусть p и q — число локальных минимумов и число локальных максимумов функции f_0 . Обозначим через $W^*(\mu, p, q)$ граф, имеющий p нижних концов и q верхних концов, и получающийся из канонического графа $W(g, p, q)$ заменой цепочки из g окружностей, соединенных последовательно отрезками, цепочкой из μ “вершин-звездочек”. Для неориентируемой поверхности M_μ граф $W^*(\mu, p, q)$ однозначно определяется числами p и q . Легко видеть, что все наборы меток $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах такого графа эквивалентны, и поэтому можно считать, что все метки на $W^*(\mu, p, q)$ равны $+1$. Фиксируем простую функцию Морса k на поверхности M_μ , для которой граф Кронрода–Риба совпадает с графом $W(\mu, p, q)$. Докажем сначала, что существует гладкий путь $f_t, 0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса и диффеоморфизм $\phi \in \mathcal{D}(M)$ поверхности на себя, такие, что $f_1 = k \circ \phi$ (без учета порядка на множестве критических точек). Как и в ориентируемом случае, будем предполагать, не ограничивая общности, что исходная функция Морса f_0 является простой.

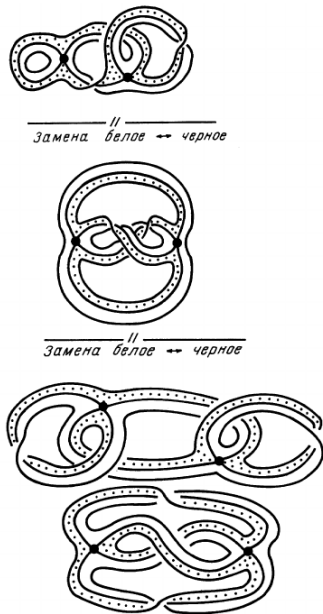


Рис. 1.13. Неориентируемые окрестности линий уровня с 2 критич. точками

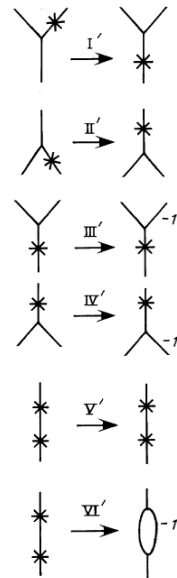


Рис. 1.14. Допустимые перестройки графа Кронрода-Риба для этих атомов

В неориентируемом случае имеется всего 11 типов особенностей непростых функций Морса f на M_μ , для которых некоторая связная компонента линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит две критические точки. А именно, кроме 5 типов особенностей ориентируемого случая, показанных на рис. 1.10, имеется еще 6 типов особенностей, показанных на рис. 1.13. На рис. 1.14 показаны 6 соответствующих перестроек графа Кронрода–Риба, которые мы также будем называть *допустимыми* (неуказанные метки $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах предполагаются равными 1).

Покажем, что аналог леммы 1.6.9 справедлив и для неориентируемых поверхностей, то есть любой меченый граф Кронрода–Риба W^* простой функции Морса f_0 на неориентируемой поверхности M_μ можно привести конечным числом допустимых перестроек к каноническому виду.

Первая часть доказательства леммы 1.6.9 легко проходит и в неориентируемом случае, так как с любого пути Γ можно убрать все “звездочки” с помощью перестроек Γ' и Π' , поместив их на какое-нибудь конечное ребро графа W^* .

Вторая часть доказательства леммы 1.6.9 также проводится индукцией по числу $N = 2(p + q - 1) + \mu$ вершин меченого графа W^* . База индукции такова: при $N = 3$ имеем $p = q = \mu = 1$, и меченый граф Кронрода–Риба любой функции $f \in \mathcal{F}(M_1, 1, 1)$ совпадает с каноническим графом $W^*(1, 1, 1)$. Индукционный переход от $N - 1$ к N почти повторяет ориентируемый случай. Опять рассмотрим три возможности: а) $p > 1$, б) $q > 1$, в) $p = q = 1$.

Случаи “а” и “б” выводятся из первой части доказательства леммы аналогично ориентируемому случаю.

Случай “в” можно свести к случаю “а” следующим образом. Если соседней с нижней конечной вершиной являлась вершина-звездочка, то, при ее удалении из меченого графа Кронрода–Риба, применении предположения индукции и восстановлении выкинутой “звездочки”, получаем искомое приведение к каноническому виду $W^*(\mu, 1, 1)$. Пусть, в случае “в”, вершина, соседняя с нижней конечной вершиной, имеет кратность 3. Выкинем из меченого графа Кронрода–Риба нижний конец вместе с выходящим из него ребром, в результате чего получим, как в ориентируемом случае, новый меченый граф Кронрода–Риба с тем же числом вершин N , но уже с двумя нижними концами. Для полученного графа существуют (по доказанному в пункте а) допустимые перестройки, приводящие его к каноническому виду $W^*(\mu, 2, 1)$ или $W^*(\mu - 1, 2, 1)$. Восстанавливая выкинутое ребро, получаем перестройку, приводящую исходный граф к графу, отличающемуся от канонического $W^*(\mu, 1, 1)$ заменой двух нижних “звездочек” двойным ребром.

Возможны два подслучая:

в-1) если метки $\varepsilon_j = \pm 1$ на этих двух ребрах противоположны, то с помощью перестройки VI' их можно заменить на две “звездочки”, в результате чего получим канонический граф $W^*(\mu, 1, 1)$;

в-2) если эти метки совпадают, то $\mu \geq 3$, и с помощью перестройки IV' эти метки можно сделать противоположными, что приведет нас к предыдущему подслучаю в-1.

Аналог леммы 1.6.9 в неориентируемом случае доказан. \square

Окончание доказательства предложения 1.6.5 в неориентируемом случае. Из аналогов лемм 1.6.8–б и 1.6.9 для неориентируемого случая следует, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M_\mu)/\mathcal{D}(M_\mu)$ связно. Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M_\mu)$ функций Морса на поверхности M_μ , имеющих p локальных минимумов, q локальных максимумов, причем для этих функций фиксирован порядок критических точек на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел. Докажем, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M_\mu)/\mathcal{D}(M_\mu)$ таких функций, рассматриваемых с точностью до автоморфизмов поверхности, также связно. В самом деле, как и в ориентируемом случае, осталось проверить, что любую перестановку на множестве внутренних вершин (т.е. не являющихся концами) канонического графа $W^*(\mu, p, q)$ можно получить конечным числом допустимых перестроек, не затрагивающих его концов. Но ввиду связности этого графа любая перестановка его внутренних вершин реализуется в виде

последовательности перестановок его соседних внутренних вершин. Каждую перестановку соседних внутренних вершин графа $W^*(\mu, p, q)$ легко реализовать с помощью допустимых перестроек типа I, II, I', IV', V' (см. рис. 1.14).

Предложение 1.6.5 полностью доказано. \square

Отметим следующее следствие из леммы 1.6.8 и ее аналога в неориентируемом случае.

Следствие 1.6.10. *В случае сферы S^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ пространство всех простых функций Морса f на M с одним и тем же (фиксированным) нумерованным графом Кронрода–Риба $W_f^{\text{num}} = W^{\text{num}}$ линейно связно.*

Замечание. Доказательство леммы 1.6.9 дает алгоритм, по которому для любой простой функции Морса на замкнутой поверхности M можно построить изотопию, связывающую путем в пространстве всех функций Морса эту функцию с некоторой функцией канонического вида $k \circ \phi$. Здесь k — фиксированная простая функция Морса с каноническим графом Кронрода–Риба $W(g, p, q)$ или $W^*(\mu, p, q)$, $\phi \in \mathcal{D}(M)$. При этом указанная изотопия является путем общего положения в смысле определения 1.6.7, т.е. в процессе изотопии производится лишь конечное число простых перестроек, — при которых имеется связная компонента линии уровня с двумя критическими точками.

1.7 Топология пространства всех погружений с данной функцией высоты. Регулярная гомотопность гладких погружений сферы в трехмерном пространстве

Определение 1.7.1. Два погружения α_0 и α_1 поверхности M в \mathbb{R}^3 назовем *регулярно гомотопными*, если их можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 .

Рассмотрим пространство $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^3)$ всех гладких погружений поверхности M в \mathbb{R}^3 . Это пространство называется *связным*, если любые два погружения α_0 и α_1 из $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^3)$ регулярно гомотопны.

Предложение 1.7.2. *В случае двумерной сферы $M = S^2$ пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения α_0 и α_1 сферы S^2 в \mathbb{R}^3 можно соединить гладким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех гладких погружений сферы в \mathbb{R}^3 .*

В частности, из предложения 1.7.2 следует известный “парадокс Смейла” ([121, 17]) о том, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку”. Это значит, что существует гладкая деформация α_t , $0 \leq t \leq 1$, погружений сферы в \mathbb{R}^3 , соединяющая одно стандартное вложение сферы $\alpha_0 : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, у которого положительное поле нормалей направлено наружу сферы, с другим стандартным вложением сферы $\alpha_1 : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, у которого положительное поле нормалей направлено внутрь сферы.

Замечание. В работе Смейла [121] доказано, в частности, что стандартную n -мерную сферу S^n можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^{n+1} тогда и только тогда, когда $n = 2$ или 6.

Замечание. Наглядная реализация выворачивания двумерной сферы S^2 в \mathbb{R}^3 была также построена Арнольдом Шапиро и Б. Морином [73] (см. также [36]). Отметим, что пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно [121], но не является односвязным. А именно, замкнутый путь γ , определяемый равномерным вращением погруженной поверхности вокруг оси z на угол 2π , нестягиваем в $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Поэтому существуют разные способы выворачивания сферы наизнанку.

Однако, если профакторизовать пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ по группе $\mathcal{D}^0(S^2)$ всех диффеоморфизмов сферы на себя, изотопных тождественному, то полученное накрывающее пространство уже будет односвязным. Это следует из того, что указанный путь γ в $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ реализуется очевидным путем в группе $\mathcal{D}^0(S^2)$ и, согласно общему результату Смейла [121], этот путь служит образующей в фундаментальной группе пространства $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Отметим также, что группа $\mathcal{D}^0(S^2)$ совпадает с группой всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов сферы на себя [37]. Из односвязности пространства $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)/\mathcal{D}^0(S^2)$ сразу получаем, что любые два выворачивания сферы наизнанку (обычно рассматриваемые с точностью до автоморфизмов сферы, изотопных тождественному) регулярно гомотопны друг другу.

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Фиксируем замкнутую поверхность $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемую или неориентируемую). Фиксируем гладкую функцию f на поверхности M . Обозначим через $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ пространство всех погружений M в \mathbb{R}^3 , реализующих f как функцию высоты. Обозначим через $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ подпространство в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$, состоящее из всех погружений, для которых фиксировано направление положительной нормали в каждой критической точке f . Здесь предполагается, что в ориентируемом случае фиксирована некоторая ориентация поверхности, а в неориентируемом случае фиксированы некоторые ориентации окрестностей критических точек функции f . Можно дать другое, эквивалентное, определение пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Определение 1.7.3. Два погружения $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ назовем *нормально эквивалентными*, если для любой точки $x \in M$ существует путь α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$, такой, что погружения α_1 и α совпадают в некоторой окрестности точки x . Каждый класс нормально эквивалентных погружений пространства $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ будем обозначать через $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Легко видеть, что два данных определения пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ эквивалентны. Далее будем предполагать, что функция f имеет конечное число критических точек. Заметим, что, теорема 1.3.1-а дает простой критерий того, что пространство $\text{Imm}_{f,+}(M_g, \mathbb{R}^3)$ непусто, а по теореме 1.3.2 каждое пространство $\text{Imm}_{f,+}(M_\mu, \mathbb{R}^3)$ непусто. Исследуем вопрос о связности пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Теорема 1.7.4. Пусть f — гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемой или неориентируемой). Фиксируем какое-нибудь погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, т.е. погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. Тогда имеется естественная биекция между связными компонентами пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ и элементами группы $H^1(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ или $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}^{\mu-1}$ одномерных когомологий поверхности M .

Замечание. В частности, из теоремы 1.7.4 следует, что в случае гладкой функции f с конечным числом критических точек на сфере указанное пространство $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения сферы в \mathbb{R}^3 , реализующие данную функцию f как функцию высоты, и имеющие в каждой критической точке f фиксированное направление нормали, можно соединить путем в пространстве всех таких погружений.

Теорема 1.7.5. Пусть $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, — гладкий путь в пространстве всех функций Морса на замкнутой поверхности M . Пусть $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0}(M, \mathbb{R}^3)$ — некоторое погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее простую функцию Морса f_0 как функцию высоты. Тогда существует гладкий путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 , такой, что при любом t погружение α_t реализует функцию f_t как функцию высоты. Пространство всех таких путей $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно.

Доказательства теорем 1.7.4 и 1.7.5 мы приведем ниже. А пока выведем предложение 1.7.2 из этих теорем и из теоремы 1.6.2 (о связности пространства функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на сфере, и с фиксированным порядком на множестве критических точек каждого типа). Идея этого доказательства будет затем продемонстрирована на примере выворачивания сферы наизнанку.

Доказательство предложения 1.7.2. Пусть $\alpha_0, \alpha_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — любые два погружения сферы в \mathbb{R}^3 . Покажем, что их можно соединить гладким путем в пространстве всех погружений $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$.

Шаг 1. Рассмотрим малую деформацию $\alpha_t, t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$, погружений α_0 и α_1 , при которой их функции высоты $f_0, f_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, станут простыми функциями Морса. Для каждой из полученных функций высоты f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ рассмотрим число p_+ минимумов, в которых положительная нормаль к погруженной поверхности направлена вверх, число p_- минимумов, в которых положительная нормаль направлена вниз, число максимумов q_+ , в которых положительная нормаль направлена вверх, и число q_- минимумов, в которых положительная нормаль направлена вниз.

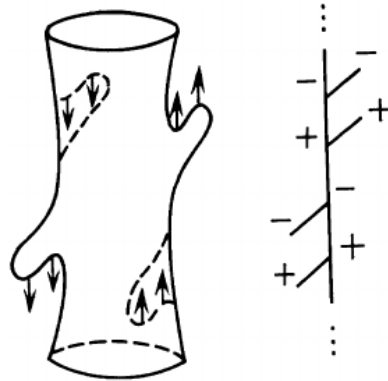


Рис. 1.15. Порождение двух пар критических точек с сонаправленными нормальными

Вообще говоря, для погружений α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$ четверки чисел p_+, p_-, q_+ и q_- могут не совпадать. Однако эти четверки чисел нетрудно уравнять для погружений α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$ при помощи “рождений” нужного числа точек минимума и максимума у функций высоты, с нужными направлениями положительных нормалей в них, взяв подходящие деформации $\alpha_t, t \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \cup [1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, погружений α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$, см. рис. 1.15. Заметим, что в силу равенства (E) теоремы 1.3.1-а числа r_+ и r_- седловых точек функции высоты, в которых положительная нормаль направлена соответственно вверх и вниз, для погружений $\alpha_{2\varepsilon}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ также совпадают.

В частности, функции высоты $f_{2\varepsilon}$ и $f_{1-2\varepsilon}$ для построенных погружений $\alpha_{2\varepsilon}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ имеют одинаковое число минимумов, максимумов и седел, т.е. лежат в одном и том же пространстве $\mathcal{F}(S^2, p_+ + p_-, q_+ + q_-)$.

Шаг 2. Для любого погружения $\alpha : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ рассмотрим множество $C(f)$ критических точек его функции высоты f , и разбиение этого множества на подмножества $C_+(f)$ и $C_-(f)$, в которых положительная нормаль к погруженной поверхности направлена соответственно вверх и вниз. Фиксируем любой порядок на множестве минимумов функции f , при котором все минимумы из $C_+(f)$ идут раньше всех минимумов из $C_-(f)$, и аналогичные порядки фиксируем на множестве максимумов и множестве седел функции f . Согласно теореме 1.6.2, функции $f_{2\varepsilon}$ и $f = f_{1-2\varepsilon}$ можно соединить путем $f_t, 2\varepsilon \leq t \leq 1/2, f_{1/2} = f$, в пространстве $\mathcal{F}^{\text{num}}(S^2, p_+ + p_-, q_+ + q_-)$ всех функций Морса, при котором сохраняется указанный порядок

критических точек. В частности, множества $C_+(f_{2\varepsilon})$ и $C_-(f_{2\varepsilon})$ критических точек функции $f_{2\varepsilon}$ перейдут соответственно в множества $C_+(f)$ и $C_-(f)$.

Шаг 3. Согласно теореме 1.7.5, существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(S^2, \mathbb{R}^3)$, $2\varepsilon \leq t \leq 1/2$, в пространстве погружений сферы в \mathbb{R}^3 , такой, что при каждом $t\alpha_t$ реализует функцию Морса f_t как функцию высоты. Осталось заметить, что погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ имеют одну и ту же функцию высоты $f = f_{1-2\varepsilon} = f_{1/2}$, причем для этих погружений направления нормалей в критических точках функции f совпадают (по построению на предыдущем шаге). То есть, оба погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ принадлежат одному и тому же множеству $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Значит, согласно замечанию к теореме 1.7.4, существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$, $2\varepsilon \leq t \leq 1/2$, соединяющий погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$. А значит, исходные погружения α_0 и α_1 регулярно гомотопны. Предложение 1.7.2 доказано. \square

1.7.1 Построение выворачивания сферы наизнанку

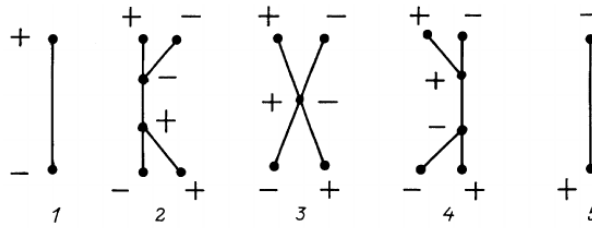


Рис. 1.16. Перестройки графа Кронрода-Риба функции высоты при выворачивании сферы наизнанку

Мы будем изображать погружение сферы в \mathbb{R}^3 схематически, в виде графа Кронрода-Риба его функции высоты (рис. 1.16), которая предполагается простой функцией Морса. При этом в каждой вершине графа Кронрода-Риба поместим метку $\varepsilon_i = \pm 1$, указывающую направление положительной нормали к погруженной поверхности в соответствующей критической точке. В нашем примере функция высоты будет иметь по две критические точки каждого типа, причем метки на этих двух точках будут противоположны. Значит, такой меченый граф Кронрода-Риба вполне определяет погружение, так как (согласно следствию 1.6.10 из леммы 1.6.8 и теореме 1.7.4) пространство всех погружений сферы в \mathbb{R}^3 , для которых функция высоты имеет заданный меченый граф Кронрода-Риба, связно. А значит, согласно теореме 1.7.5, последовательность меченых графов Кронрода-Риба (с естественным соответствием между вершинами соседних графов) вполне определяет регулярную гомотопию погружений.

Рассмотрим стандартное вложение

$$\alpha_0 : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

сферы в \mathbb{R}^3 , при котором положительное поле нормалей направлено наружу (рис. 1.16 (1)), и другое вложение

$$\alpha_1 : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3,$$

при котором положительное поле нормалей направлено внутрь сферы (рис. 1.16 (5)). Функции высоты f_0 и f_1 при этих погружениях являются простыми функциями Морса с двумя критическими точками — минимумом и максимумом, в которых направления нормалей противоположны.

Согласно алгоритму, описанному в доказательстве предложения 1.7.2, для построения регулярной гомотопии между погружениями α_0 и α_1 мы должны сначала уравнивать число минимумов и максимумов функций f_0 и f_1 , с учетом направления нормалей в них. Для этого

породим по одному минимуму и максимуму у этих функций ($1 \rightarrow 2$ и $5 \rightarrow 4$ на рис. 1.16) путем “продавливания” сферы внутрь. В результате получим погружения α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$, для которых функции высоты f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ имеют одинаковые графы Кронрода–Риба (2 и 4 на рис. 1.16) с одинаковыми метками на всех четырех конечных вершинах, но с противоположными метками на обеих внутренних вершинах.

Между функциями f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ с отмеченными критическими точками существует очевидная изотопия f_t , $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$, а именно, перестройка типа IV (рис. 1.11), меняющая местами седловые критические значения. Согласно теореме 1.7.4, мы можем реализовать эту изотопию некоторой деформацией погружений

$$\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(S^2, \mathbb{R}^3), \quad \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon,$$

($2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ на рис. 1.16). Это завершает построение выворачивания сферы наизнанку.

Подведем итог. В указанной регулярной гомотопии имеются ровно пять моментов бифуркации, т.е. значений параметра, при которых функция высоты не является простой функцией Морса. Это — два момента “рождения” критических точек, один момент существования двух критических точек на одной связной компоненте особой линии уровня, и два момента “уничтожения” критических точек. На рис. 1.16 показаны следующие основные моменты регулярной гомотопии.

1) Стандартное вложение сферы в \mathbb{R}^3 с полем положительных нормалей, направленных наружу сферы.

1) \rightarrow 2) Две перестройки: “рождение” одного максимума функции высоты с отрицательным направлением нормали и “рождение” одного минимума функции высоты с положительным направлением нормали. При этом рождаются также два седла с теми же направлениями нормалей.

2) \rightarrow 3) \rightarrow 4) Перестройка типа IV (см. рис. 1.11), меняющая местами значения функции высоты в двух седловых точках. После этой перестройки граф Кронрода–Риба не изменился, но изменились направления нормалей в обеих седловых точках.

4) \rightarrow 5) Две перестройки: взаимное “уничтожение” максимума и седла функции высоты, в которых положительная нормаль направлена вверх, и взаимное “уничтожение” минимума и седла функции высоты, в которых положительная нормаль направлена вниз.

5) Стандартное вложение сферы в \mathbb{R}^3 с полем положительных нормалей, направленных внутрь сферы.

1.7.2 Связные компоненты пространства всех погружений с данной функцией высоты

Для доказательства теорем 1.7.4 и 1.7.5 нам понадобится следующий известный факт из теории погружений окружности в плоскость. Рассмотрим пространство $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ всех погружений окружности в плоскость, т.е. пространства замкнутых путей $\gamma = \gamma(s)$ в плоскости, $d\gamma(s)/ds \neq 0$, где $s \in S^1$ — параметр на окружности. Пусть $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ — подпространство в $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$, состоящее из всех погружений γ , для которых вектор скорости $d\gamma(s)/ds$ совершает κ оборотов вокруг начала координат, когда параметр $s \in S^1$ пробегает всю окружность, где κ — любое целое число. Согласно теореме Уитни, каждое пространство $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ связно. Нам потребуется следующее известное утверждение.

Утверждение. а) Фундаментальная группа пространства $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел.

б) Пусть $\gamma_t \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$, $t \in S^1$, — любой замкнутый путь в пространстве всех погружений окружности в плоскость. Рассмотрим соответствующий путь Γ_t , $t \in S^1$, проходимый вектором скорости $\Gamma_t = d\gamma_t(s)/ds|_{s=0}$ к погруженной окружности в точке

$s = 0$, когда $t \in S^1$. Тогда путь γ_t , $t \in S^1$, стягиваем в пространстве $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда число оборотов пути Γ_t , $t \in S^1$, вокруг начала координат равно нулю. \square

Доказательство теоремы 1.7.4. 1) Пусть f — гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности M . Любому погружению $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, реализующему f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей, поставим в соответствие некоторый коцикл $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ в группе одномерных когомологий поверхности M , определяемый следующим образом.

Пусть $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ — любой цикл на поверхности, не проходящий через критические точки функции f . Рассмотрим на γ поле $\nu_\alpha|_\gamma$ положительных нормалей ν_α к погруженной поверхности, и рассмотрим проекцию этого поля $\nu_{\alpha, \gamma} = \pi \circ \nu_\alpha|_\gamma$ на горизонтальную плоскость, где $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция на горизонтальную плоскость. Определим теперь значение $\langle \Delta, \gamma \rangle$ коцикла $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0}$ на цикле γ , полагая его равным $\langle \Delta, \gamma \rangle = |\nu_{\alpha, \gamma}| - |\nu_{\alpha_0, \gamma}|$, где $|\nu_{\alpha, \gamma}|$ означает число оборотов вокруг нуля плоской кривой $\nu_{\alpha, \gamma}$. Такой коцикл будем называть *различающим коциклом* для погружений $\alpha, \alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Нетрудно показать, с помощью леммы 1.4.2, что функция $\gamma \mapsto \langle \Delta, \gamma \rangle$ действительно является коциклом, т.е. число $\langle \Delta, \gamma \rangle$ не меняется при замене цикла γ на гомологичный ему цикл, не проходящий через критические точки функции f . Заметим, что любой связной компоненте в пространстве всех погружений $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, реализующих данную функцию f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках, отвечает фиксированный коцикл $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$. Тем самым, построено отображение из множества связных компонент пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ в группу $H^1(M, \mathbb{Z})$ одномерных когомологий поверхности M . \square

2) Покажем, что построенное отображение взаимно однозначно.

2-а) Пусть $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ — два погружения поверхности в \mathbb{R}^3 , реализующие функцию f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках, причем различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ для этих погружений равен нулю. Покажем, что эти погружения можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты. Мы тем самым покажем, что указанное отображение является вложением, и, в частности, что в случае сферы пространство $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Пусть x_1, \dots, x_N — критические точки функции f . Рассмотрим граф Кронрода–Риба $W = W_f$ функции f и естественную проекцию $\sigma : M \rightarrow W$ этого графа на поверхность M . Пусть $v_i = \sigma(x_i)$ — вершины, r_j — ребра графа W .

Лемма 1.7.6 (об отсутствии нулевого и первого препятствий). *Если $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$, то существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений, реализующих f как функцию высоты, такой, что погружение α_1 совпадает с α в окрестностях всех особых линий уровня $K_i = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f .*

Доказательство. Пусть U_i — достаточно малая окрестность критической точки x_i функции f , $1 \leq i \leq N$. Так как направления положительных нормалей в этой точке для погружений α_0 и α совпадают, нетрудно построить путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1/2$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 , реализующих f как функцию высоты, такой, что погружения $\alpha_{1/2}$ и α совпадают в каждой окрестности U_i , $1 \leq i \leq N$. Если x_i — точка минимума или максимума, то ее особая линия уровня $f^{-1}(v_i)$ состоит из одной точки x_i и, значит, содержится в U_i .

Пусть критическая точка x_i не является точкой минимума или максимума, $c_i = f(x_i)$ — ее критическое значение. Тогда ее особая линия уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ — это связный ориентированный граф, вершинами которого являются критические точки, а ребрами — связные компоненты K_j множества $K \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$. При этом ориентация любой линии уровня определяется так, чтобы векторное поле $\text{grad } f$ являлось полем положительных нормалей к ней,

если M ориентируемо (см. параграф 1.4), или как в параграфе 1.5, если M не ориентируемо. Рассмотрим теперь связную окрестность $P = P_i = f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ графа K (т.е. “атом”), где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Будем теперь считать, что погружения α_0 и α заданы в этой поверхности P с краем.

Рассмотрим множество $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, определяемое аналогично множеству $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Для любых двух погружений $\alpha, \alpha' \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ рассмотрим различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha'} \in H^1(P)$, определяемый аналогичным образом. По условию леммы имеем $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$, а значит, $\Delta_{\alpha_{1/2}, \alpha} = 0$. Покажем, что погружения $\alpha_{1/2}$ и α принадлежат одной связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$.

Для погружения α рассмотрим соответствующее погружение $\alpha|_K$ особой линии уровня K в горизонтальную плоскость Π_c и добавим к каждому погруженному ребру $\alpha(K_j)$ несколько петель, алгебраическое число которых мы обозначим через β_j (эти числа будут построены ниже). Рассмотрим новое погружение $\alpha' : P \rightarrow \mathbb{R}^3$, реализующее функцию f на P как функцию высоты и совпадающее на графе K с погружением α с учетом добавленных петель. В этом случае соответствующую коцепь $\beta = \beta_{\alpha, \alpha'} \in C^1(K, \mathbb{Z})$ графа K будем называть *различающей коцепью* для погружения α и α' , где α'' — любое погружение, принадлежащее той же связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, что и погружение α' . Нетрудно показать, используя теорему Уитни, что числа β_j всегда можно подобрать так, чтобы погружение α' можно было связать путем в пространстве $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ с любым наперед заданным погружением α'' из $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, в частности, с погружением $\alpha'' = \alpha_{1/2}$. Заметим, что граф K является деформационным ретрактом поверхности с краем P , а значит, отображение включения $K \hookrightarrow P$ индуцирует изоморфизм $H^1(K, \mathbb{Z}) \simeq H^1(P, \mathbb{Z})$. Легко видеть, что образ коцикла $[\beta]$ при этом изоморфизме в точности совпадает с различающим коциклом $\Delta_{\alpha, \alpha'} = \Delta_{\alpha, \alpha_{1/2}} \in H^1(P, \mathbb{Z})$, а значит, по условию леммы, равен нулю. Тем самым, имеем $[\beta_{\alpha, \alpha_{1/2}}] = \Delta_{\alpha, \alpha_{1/2}} = \Delta_{\alpha, \alpha_0} = 0$.

Заметим, что из теоремы Уитни нетрудно вывести, что для любых двух погружений $\alpha, \alpha' \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ класс когомологий $[\beta] \in H^1(K, \mathbb{Z})$ различающей коцепи $\beta = \beta_{\alpha, \alpha'}$ для этих погружений равен нулю тогда и только тогда, когда погружения α и α' принадлежат одной связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$. В частности, это верно для погружений α и $\alpha_{1/2}$.

Таким образом, в достаточно малых окрестностях $P = P_i$ особых линий уровня функции f (т.е. в “атомах”) погружения $\alpha_{1/2}$ и α действительно можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, $1/2 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha$. Нетрудно продолжить построенные погружения на всю поверхность M и получить тем самым некоторый путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1/2 \leq t \leq 1$. Лемма полностью доказана. \square

Рассмотрим теперь открытые круговые цилиндры $V_j = \sigma^{-1}(r_j)$ в M , получающиеся выкидыванием из поверхности M всех особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f . Фиксируем на цилиндре V_j произвольную кривую γ_j , соединяющую две критические точки функции f на противоположных основаниях цилиндра, вдоль которой функция f строго возрастает.

Для любого погружения $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ рассмотрим на образе $\alpha(\gamma_j)$ кривой γ_j поле $\nu_\alpha|_{\gamma_j}$ положительных нормалей ν_α к погруженной поверхности. Рассмотрим проекцию этого поля $\nu_{\alpha, r_j} = \pi \circ \nu_\alpha|_{\gamma_j}$ на горизонтальную плоскость, где $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция на горизонтальную плоскость. Так как по построению погружение α_1 совпадает с α вблизи особых линий уровня функции f (см. лемму 1.7.6), то пути ν_{α_1, r_j} и ν_{α, r_j} совпадают вблизи своих концов и не проходят через ноль (т.е. начало координат). Значит, можно рассмотреть замкнутый путь $\nu_j = \nu_{\alpha_1, r_j}^{-1} \circ \nu_{\alpha, r_j}$ в горизонтальной плоскости, не проходящий через ноль. Построим теперь на ребре r_j графа W метку μ_j , равную числу оборотов вокруг нуля плоской кривой ν_j . Можно показать, что число μ_j не зависит от способа вложения кривой γ_j в цилиндр V_j .

Из упомянутого выше утверждения легко следует следующая лемма.

Лемма 1.7.7 (о втором препятствии). *Для того, чтобы погружения α_1 и α можно было соединить путем в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты, и постоянных в окрестностях всех особых линий уровня $K_i = \sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$, функции f , необходимо и достаточно, чтобы все числа μ_j были равны нулю.* \square

Таким образом, если все метки μ_j на ребрах графа W равны нулю, то заданные погружения α_1 и α можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1 \leq t \leq 2$, $\alpha_2 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты, и теорема 1.7.4 в этом случае доказана.

Предположим, что не все метки μ_j равны нулю. Изменим погружение α_1 в малых окрестностях P_i особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ (“атомах”), $1 \leq i \leq N$. А именно, рассмотрим композицию $\alpha_2 = R_\phi \circ \alpha_1$ погружения α_1 и поворота R_ϕ горизонтальной плоскости на некоторый угол $\phi = \phi(f|_{P_i})$, зависящий от значения функции f в P_i , так что $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на поверхности, равная нулю вне окрестностей P_i , и тождественно равная $2\pi\kappa_i$ в некоторой меньшей окрестности особой линии уровня $\sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$, где числа $\kappa_i \in \mathbb{Z}$ будут построены ниже. Ясно, что существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1 \leq t \leq 2$, соединяющий новое погружение α_2 с исходным погружением α_1 , поскольку можно положить $\alpha_t = R_{(t-1)\phi} \circ \alpha_1$. Заметим, что по построению оба погружения α_1 и α_2 совпадают с α в окрестностях особых линий уровня $\sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$.

Пусть при замене α_1 на α_2 метки μ_j на ребрах графа W (“препятствующие” регулярной гомотопности этих погружений и α) заменились на некоторые метки μ'_j .

Лемма 1.7.8 (о различающей). *$\mu' = \mu + \delta\kappa$, где функции $\mu(r_j) = \mu_j$ и $\kappa(v_i) = \kappa_i$ рассматриваются как одномерная и нульмерная коцепи графа W , δ — кограничный оператор в пространстве коцепей.*

Доказательство. Доказательство проводится непосредственно. \square

Таким образом, препятствием к регулярной гомотопности погружений α_1 и α в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты, служит не сама 1–коцепь μ , а самое большее — лишь отвечающий ей элемент $[\mu] \in H^1(W, \mathbb{Z})$ группы одномерных когомологий графа W .

Ясно, что в случае $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$ имеем $\Delta_{\alpha_1, \alpha} = 0$, откуда $[\mu] = 0$. Возьмем в качестве “различающих” меток κ_i (чисел поворотов) в вершинах графа W такие числа, чтобы кограница $\delta\kappa$ соответствующей нульмерной коцепи $\kappa \in C^0(W, \mathbb{Z})$ была равна $-\mu \in C^1(W, \mathbb{Z})$. Тогда, согласно лемме 1.7.8, для погружения α_2 все метки μ_j на ребрах W равны нулю. Значит, по лемме 1.7.7, погружения α_2 и α можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $2 \leq t \leq 3$, $\alpha_3 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты.

Итак, мы доказали, что если для двух погружений $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ равен нулю, то эти погружения принадлежат одной связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. То есть, построенное отображение является вложением.

2–б) Пусть теперь $\Delta \in H^1(M, \mathbb{Z})$ — любой коцикл на поверхности M . Построим погружение $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, для которого различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha_0}$ совпадает с Δ .

Рассмотрим клеточное разбиение поверхности M , отвечающее функции f . А именно, одномерным остовом клеточного разбиения служит объединение особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f и построенных выше кривых γ_j . В частности, нульмерные клетки разбиения совпадают с критическими точками функции f , а одномерные клетки бывают двух типов: любая одномерная клетка либо лежит в “атоме” P_i и тогда совпадает с ребром K_j соответствующего графа $K = \sigma^{-1}(v_i)$, либо проектируется в ребро r_j “молекулы” W и тогда совпадает с кривой γ_j . Двумерные клетки разбиения отвечают ребрам r_j графа W и являются квадратами, у которых две противоположных стороны склеены по кривой γ_j , образуя цилиндр, а две другие стороны примыкают к двум “атомным” ребрам.

Рассмотрим произвольную коцещь построенного разбиения, отвечающую данному коциклу $\Delta \in H^1(M, \mathbb{Z})$, и поставим на ребрах разбиения соответствующие целочисленные метки. В результате мы получим метки β_j на ребрах K_j графов $K = \sigma^{-1}(v_i)$, образующие некоторые коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$, и метки μ_k на ребрах r_k графа Кронрода–Риба W , образующие некоторый коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$. Построение погружения α разобьем на два шага.

Шаг 1. Заметим, что “атомные” коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$ на разных графах $K = \sigma^{-1}(v_i)$ не произвольны, а согласованы друг с другом таким образом, что для любого цилиндра $V_k = \sigma^{-1}(r_k)$ сумма меток β_j по всем кривым K_j из верхнего основания цилиндра равна сумме меток β_j по всем кривым K_j из нижнего основания цилиндра. Рассмотрим кривые K_j и γ_k на поверхности M . Изменим погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ вне малых окрестностей критических точек функции f и кривых γ_k , добавив к каждой неособой линии уровня $K_j \subset K = \sigma^{-1}(v_i)$, погруженной в горизонтальную плоскость, несколько петель, алгебраическое число которых равно β_j . Такое погружение α_1 существует в силу теоремы Уитни, так как числа β_j на соседних “атомах” согласованы, а на каждом цилиндре $V = V_k$ лежит лишь одна кривая γ_k , которая пересекает каждую неособую линию уровня $\sigma^{-1}(a)$ цилиндра V лишь в одной точке.

Шаг 2. Далее, рассмотрим коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$ графа W . Изменим построенное на предыдущем шаге погружение $\alpha_1 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ в соответствии с коциклом $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$. Более точно, в каждом цилиндре $V = V_k$ рассмотрим гладкую функцию $\phi = \phi_k(a)$, тождественно равную нулю вблизи нижнего основания цилиндра и тождественно равную $2\pi\mu_j$ вблизи верхнего основания цилиндра. Для каждого цилиндра $V = V_k$ рассмотрим композицию $R_\phi \circ \alpha_1$ погружения α_1 и поворотов R_ϕ горизонтальных плоскостей Π_a на угол $\phi = \phi_k(a)$. В результате получим некоторое новое погружение $\alpha_2 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Окончание доказательства теоремы 1.7.4. Итак, мы определили коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$ на графах $K = \sigma^{-1}(v_i)$ и коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$ на графе Кронрода–Риба W функции f , отвечающие коциклу Δ на поверхности M . Мы показали, как по этим коциклам и погружению α_0 построить новое погружение $\alpha = \alpha_2 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Легко видеть, что построенное погружение α является искомым, т.е. различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha_0}$ для погружений α и α_0 в точности равен Δ . Теорема 1.7.4 полностью доказана. \square

Замечание. Простая модификация доказательства показывает, что теорема 1.7.4 верна и для поверхностей P с краем. При этом предполагается, что на каждой граничной окружности поверхности P функция f постоянна и не имеет критических точек.

Замечание. Рассмотрим подмножество $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ в нашем пространстве $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, состоящее из всех погружений, для которых фиксированы также индексы всех граничных окружностей, погруженных в горизонтальные плоскости. Пусть \tilde{P} — замкнутая поверхность, полученная из поверхности P с краем заклеиванием каждой граничной окружности диском. Тогда аналогичное доказательство дает естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством связных компонент пространства $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ и группой $H^1(\tilde{P}, \mathbb{Z})$ одномерных когомологий замкнутой поверхности \tilde{P} . В частности, если поверхность \tilde{P} является сферой, то каждое пространство $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ связно.

Замечание. Рассмотрим произвольную связную компоненту $\text{Imm}_{f,+}^0(M, \mathbb{R}^3)$ пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, а значит, и всего пространства $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ погружений поверхности M в \mathbb{R}^3 с фиксированной функцией высоты f . Из приведенного выше утверждения, аналогично доказательству теорем 1.3.1, 1.3.2 и 1.7.4, легко выводится следующее утверждение.

Теорема 1.7.9. Пусть $\alpha_t \in \text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$, $t \in S^1$, — любой замкнутый путь в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$. Выберем любую точку $x \in M$, не являющуюся критической точкой функции f . Рассмотрим соответствующий путь $\nu_t = \pi(\nu_{\alpha_t}(x))$, $t \in S^1$, проходимый проекцией на

горизонтальную плоскость вектора нормали к погруженной поверхности в точке x , где $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция на горизонтальную плоскость. Тогда путь α_t , $t \in S^1$, стягиваем в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ тогда и только тогда, когда число оборотов пути ν_t , $t \in S^1$, вокруг начала координат равно нулю.

В частности, согласно теореме 1.7.9, фундаментальная группа каждой связной компоненты пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел. Можно показать, что каждая такая связная компонента в действительности гомотопически эквивалентна окружности.

Доказательство теоремы 1.7.5. Пусть t_1, \dots, t_N — моменты перестроек функций Морса, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = 1$. То есть, при любом k , $0 \leq k \leq N$, все функции Морса f_t , $t_k < t < t_{k+1}$, имеют один и тот же граф Кронрода–Риба W_k , причем для каждой вершины v_i этого графа число критических точек, принадлежащих соответствующей особой линии уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f_t , постоянно при $t_k < t < t_{k+1}$. Ясно, что теорема будет доказана, если мы проверим его для $N = 0$ и $N = 1$.

1) Пусть $N = 0$, т.е. все функции Морса f_t имеют один и тот же граф Кронрода–Риба W , причем для каждой вершины $v_i \in W$ число критических точек на соответствующей особой линии уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ не меняется. Рассмотрим клеточное разбиение поверхности M , отвечающее функции f_0 , см. доказательство теоремы 1.7.4. Нетрудно построить гладкую деформацию одномерного остова этого разбиения, являющуюся одномерным остовом функции f_t . С помощью этой деформации одномерного остова легко построить гладкую деформацию диффеоморфизмов $\phi_t : M \rightarrow M$, $0 \leq t \leq 1$, $\phi_0 = \text{id}$, поверхности M на себя, переводящих связные компоненты линий уровня функции f_0 в связные компоненты линий уровня функции f_t , $0 \leq t \leq 1$. Тогда в качестве искомого погружения $\alpha_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, реализующего f_t как функцию высоты, можно взять композицию погружения $\alpha_0 \circ \phi_t^{-1}$ и сдвига каждой точки $x \in M$ по вертикали на величину $f_t \circ \phi_t - f_0$, постоянную на каждой связной компоненте линии уровня функции f_0 . Итак, при $N = 0$ теорема доказана.

2) Пусть $N = 1$. Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что перестройка графа Кронрода–Риба происходит в момент $t_1 = 1/2$. Рассмотрим пространство $\text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$, содержащее данное погружение α_0 . Так как при изотопии функции Морса не происходит рождений и уничтожений критических точек, то пространство $\text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$ однозначно определяет пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(P, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, для которых направление нормали в каждой критической точке не меняется.

Положим $f = f_{1/2}$. По критерию из теоремы 1.3.1 имеется погружение $\alpha'_{1/2} \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Рассмотрим малую деформацию $\alpha'_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1/2 - \varepsilon \leq t \leq 1/2 + \varepsilon$, этого погружения, где α'_t получается из $\alpha'_{1/2}$ сдвигом каждого уровня $f^{-1}(a)$ по вертикали на величину $f_t - f$. Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображение α'_t является погружением, и $\alpha'_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Построим в соответствии с рассмотренным случаем $N = 0$ любое продолжение $\alpha'_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$ этой деформации на весь отрезок $0 \leq t \leq 1$.

Теперь рассмотрим различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ для исходного погружения α_0 и построенного погружения $\alpha'_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Тогда, согласно теореме 1.7.4, существует погружение $\alpha''_{1/2} \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, для которого $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} = \Delta_{\alpha''_{1/2}, \alpha'_{1/2}}$. Заменим теперь погружение $\alpha'_{1/2}$ на погружение $\alpha''_{1/2}$ и рассмотрим для него аналогичный путь $\alpha''_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Осталось заметить, что для любого пути f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве гладких функций с конечным числом критических точек верно следующее. Для любой пары путей $\alpha'_t, \alpha''_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, различающий коцикл $\Delta_{\alpha'_t, \alpha''_t} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ постоянен. Тем самым, $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} = \Delta_{\alpha''_0, \alpha'_0}$, а значит, $\Delta_{\alpha_0, \alpha''_0} = 0$. Снова применяя теорему 1.7.4, получаем путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha''_0$. Немного пошевелив этот путь, легко построить искомую деформацию $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, совпадающую с построенным путем $\alpha''_t \in$

$\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$ при $\varepsilon \leq t \leq 1$. Аналогично доказывается, что пространство всех путей вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно. Теорема 1.7.5 полностью доказано. \square

Замечание. Пусть f_t , $0 \leq t \leq 1$, — любой путь в пространстве всех гладких функций с конечным числом критических точек на замкнутой ориентируемой поверхности M . Тогда аналогичное доказательство показывает, что справедливо следующее обобщение теоремы 1.7.5. Рассмотрим множество C , состоящее из критических точек этих функций. Это множество является графом в цилиндре $M \times [0, 1]$ — прямом произведении поверхности на отрезок. Разобьем множество C на два непересекающихся замкнутых подмножества C_+ и C_- , и рассмотрим отвечающие этому разбиению пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, погружений, реализующих f_t как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. В неориентируемом случае построение аналогично, только теперь пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, определяются не разбиением графа C на два подграфа, а заданием некоторой ориентации в окрестности графа C в $M \times [0, 1]$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7.10. Пусть f_t , $0 \leq t \leq 1$, — любой путь в пространстве всех гладких функций с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности M (ориентируемой или не ориентируемой). Пусть задано погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Тогда существует путь вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 , причем множество всех таких путей связно. \square

Замечание. Пусть $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ — путь общего положения в пространстве всех гладких функций на M , а не только функций Морса, т.е. допускаются “рождения” и “уничтожения” критических точек. Тогда множество $C \subset M \times [0, 1]$, состоящее из критических точек этих функций, является гладким одномерным многообразием в $M \times [0, 1]$, т.е. распадается на гладкие окружности и дуги с концами на основаниях $M \times \{0\}$ и $M \times \{1\}$ цилиндра $M \times [0, 1]$. Разобьем это множество на непересекающиеся замкнутые подмножества C_+ и C_- , и рассмотрим отвечающие этому разбиению пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$. Пусть задано погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Тогда, согласно теореме 1.7.10, путь вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 вполне определен путем, проходимым его функцией высоты.

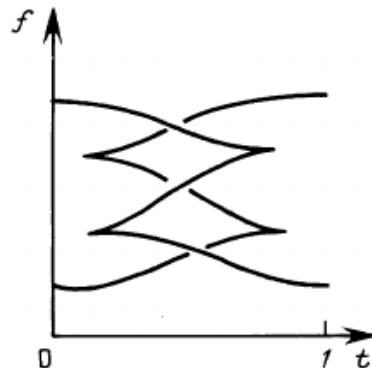


Рис. 1.17. Деформация множества критических точек функции высоты при выворачивании сферы наизнанку

Замечание 1.7.11. Для построенного в §1.7.1 выше выворачивания сферы наизнанку множество $C \subset S^2 \times [0, 1]$, образуемое критическими точками функции высоты f_t , $0 \leq t \leq 1$,

состоит из двух дуг C_+ и C_- , отвечающих точкам сферы, в которых положительная нормаль к погруженной сфере направлена вверх и вниз соответственно. При этом проекция множества C на плоскость f, t имеет вид как на рис. 1.17. Из этого рисунка видно, что минимальные, седловые и максимальные критические значения функций высоты f_t лежат в трех попарно не пересекающихся интервалах оси z . Перестройка 2) \rightarrow 3) \rightarrow 4) заключается в том, что оба минимальных значений, оба седловых значений и оба максимальных значений функции f_t меняются местами.

1.8 Некоторые обобщения

Пусть n — любое четное положительное число. Рассмотрим замкнутое ориентируемое n -мерное многообразие M^n , которое можно погрузить в \mathbb{R}^{n+1} , т.е. представить в виде погруженной гиперповерхности. Простое обобщение доказательства теоремы 1.3.1 (точнее, доказательство необходимости) показывает, что справедливо следующее

Утверждение 1.8.1 (Необходимое условие). *Пусть n четно, и пусть функция высоты f при некотором погружении M^n в \mathbb{R}^{n+1} имеет лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N (не обязательно функция Морса). Тогда имеет место равенство:*

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0,$$

где знак $\varepsilon_k = \pm 1$ отвечает тому, вверх или вниз направлена положительная нормаль к M^n в критической точке x_k . В частности, эйлерова характеристика такого многообразия M^n всегда четна. \square

Следствие. *Если эйлерова характеристика замкнутого ориентируемого многообразия M^n не равна 0, 2 и 4, то при любом погружении M^n в \mathbb{R}^{n+1} функция высоты имеет не менее четырех критических точек.* \square

Можно еще более ослабить требования на функцию f . Некоторые утверждения остаются справедливыми и для произвольных гладких функций, отличных от константы. То есть не обязательно даже требовать конечности числа критических точек. Критические точки могут здесь заполнять большие, непрерывные подмножества в M^n . Например, из утверждения 1.2.1 нетрудно вывести следующее

Утверждение 1.8.2. *Пусть n четно, и пусть f — функция высоты для некоторого погружения M^n в \mathbb{R}^{n+1} . Тогда имеет место равенство:*

$$\text{ind}_U(\text{grad } f) = \frac{1}{2}\chi(M^n),$$

где U — достаточно малая окрестность множества (не обязательно конечного) критических точек f , в которых положительная нормаль к многообразию M^n направлена вверх. \square

Таким образом, если существует погружение M^n в \mathbb{R}^{n+1} , то индексы критических точек функции высоты делят пополам эйлерову характеристику многообразия M^n . Это свойство функций высоты, оказывается, является характеристическим в случае двумерных поверхностей. Более точно, справедливо следующее

Утверждение 1.8.3. а) *Пусть f — гладкая функция на связной замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , отличная от константы (здесь множество критических*

точек не обязательно конечно). Рассмотрим открытое множество U в M , на границе которого нет критических точек функции f . Тогда следующее равенство:

$$\text{ind}_U(\text{grad } f) = 1 - g = \frac{1}{2}\chi(M_g)$$

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении $\alpha : M_g \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким, что в каждой критической точке функции f , лежащей в области U , положительная нормаль к поверхности $\alpha(M_g)$ направлена вверх, а в каждой критической точке функции f , не лежащей в области U , эта нормаль направлена вниз.

б) Пусть f — гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ . Тогда существование ориентируемой (не обязательно связной) окрестности U_+ множества (не обязательно конечного) критических точек функции f есть необходимое и достаточное условие того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении $\alpha : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$. Причем, это погружение можно выбрать так, чтобы в каждой критической точке x функции f ориентация $T_x M_\mu$, индуцированная касательным изоморфизмом α_* в горизонтальную плоскость, была согласована с любой наперед заданной ориентацией в U_+ .

Следствие. Любую гладкую функцию на двумерном торе, отличную от константы, и с произвольным множеством критических точек (не обязательно конечным), можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении тора в \mathbb{R}^3 . \square

Доказательство утверждения 1.8.3. Необходимость условия (а) в ориентируемом случае следует из утверждения 1.6.5. В неориентируемом случае рассмотрим естественную проекцию $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на горизонтальную плоскость. Тогда, из компактности множества критических точек следует существование такой ее окрестности U , на которой отображение $\pi \circ \alpha|_U$ является погружением U в \mathbb{R}^2 . Это отображение индуцирует ориентацию в U .

Докажем достаточность условий (а) и (б). Напомним, что любую связную ориентируемую двумерную поверхность с непустым краем можно погрузить в плоскость.

Пусть $U \neq M$ — любая ориентируемая окрестность множества C критических точек функции f , и пусть $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ — некоторое погружение этой окрестности в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты.

Нетрудно показать, что тогда существуют числа $a_1 < b_1 < \dots < a_N < b_N$ и такое погружение

$$\alpha_0 : f^{-1}([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

реализующее функцию f как функцию высоты, что

$$C \subset f^{-1}([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]),$$

и погружения α и α_0 совпадают на пересечении областей определения.

Далее, как в доказательстве теорем 1.3.1 и 1.3.2, построим связный граф Γ , вершинам которого отвечают цилиндры V — связные компоненты множеств $f^{-1}[b_i, a_{i+1}]$. Ребра этого графа определим так. В каждой связной компоненте P множества $f^{-1}[a_i, b_i]$ (т.е. в атоме) рассмотрим любой кусочно-гладкий граф $K \subset P$, являющийся ретрактом атома P , например, букет окружностей. Тогда этот граф разбивает атом P на положительные и отрицательные кольца, причем к каждому ребру этого графа примыкает ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо. Определим граф Γ как граф в поверхности M , сопряженный к объединению всех графов K . В частности, ребрам графа Γ отвечают ребра графов K . Далее рассуждения в точности такие же, как в доказательстве теорем 1.3.1 и 1.3.2, шаг 3 (см. §1.4.2). Утверждение 1.7.2 доказано. \square

Глава 2

Топологическая классификация функций Морса и их возмущений на поверхностях. Инварианты изотопности функций Морса

В данной главе излагаются результаты работ автора [132, теорема 1] (в §2.3), [145, §3] (в §2.5), [129, теоремы 4, 9, 9', 10, 10'] (в §2.6) и [133] (в §2.7), А.Т. Фоменко [10, гл. 2, определения 4, 6, 9, 10, теоремы 4 и 8], [53, теорема 2.16] (в §2.4) и С.В. Матвеева [129, теоремы 8 и 8'] (в §2.6).

В первой части данной главы (в §§2.3—2.5) получены классификационные результаты, которые являются вспомогательными и будут использованы в главах 3 и 4. Во второй части главы (в §§2.6 и 2.7) получены “изотопические” результаты, которые представляют самостоятельный интерес и не будут использованы в других главах (кроме результатов теорем 2.7.11 и 2.7.13 о конструкции и свойствах комплексов функций Морса \tilde{K} и K , которые мы обобщим в следствии 3.3.5 и используем в примерах 3.6.3, предложениях 3.6.4 и 3.3.17 (d)). Подробнее см. абзац перед §2.2.

2.1 Введение

В данной главе изучаются следующие естественные вопросы. Какие бывают гладкие функции с невырожденными критическими точками на компактных многообразиях, как классифицировать такие функции с точностью до разных типов (топологической) эквивалентности? Когда две такие функции изотопны, т.е. их можно продеформировать друг в друга в пространстве таких функций? Более точно, доказываются критерии, дающие ответы на следующие вопросы.

(Q1) Когда две функции Морса на двумерной компактной поверхности M топологически эквивалентны, т.е. получаются друг из друга преобразованиями поверхности M и вещественной прямой \mathbb{R} , изотопными тождественным? (Теоремы 2.3.4, 2.3.5 и 2.3.6.)

(Q2) Когда две функции Морса на поверхности M эквивалентны, т.е. получаются друг из друга преобразованиями поверхности M и вещественной прямой \mathbb{R} ? (См. критерий А.Т. Фоменко послышной эквивалентности в предложении 2.4.6 в случае ориентируемой поверхности M , его следствия 2.4.11 и 2.4.12.)

(Q3) Когда две функции на поверхности M , близкие к топологически эквивалентным функциям Морса, топологически эквивалентны? (Утверждение 2.5.2 и его следствия 2.5.8 и 2.5.9.)

(Q4) Когда две функции Морса на поверхности M можно продеформировать друг в друга, т.е. соединить изотопией или непрерывным путем, в пространстве функций Морса? Можно усложнить этот вопрос, рассмотрев пространства функций Морса, у которых некоторые критические точки фиксированы на поверхности M . (Теоремы 1.6.2 и 1.6.4 в случаях сферы и проективной плоскости, общие теоремы 2.6.1 и 2.6.2 С.В. Матвеева об изотопности функций Морса с фиксированными точками локальных экстремумов, теорема 2.7.2 о препятствии к изотопности функций Морса, все критические точки которых фиксированы.)

Кроме (топологической) эквивалентности (см. вопросы (Q1) и (Q2)) мы заодно изучим похожие отношения эквивалентности — (топологическую) сопряженность и (топологическую) послойную эквивалентность функций Морса на поверхностях. Послойную эквивалентность изучал А.Т. Фоменко в связи с изучением орбитальной эквивалентности гамильтоновых систем с 1 степенью свободы, лиувиллевой (совместно с Х. Цишангом) и орбитальной (совместно с А.В. Болсиновым) эквивалентностей гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. Мы изучим указанные вопросы классификации не только для самих пространств функций Морса, но и для их конечнолистных накрытий (пространств функций Морса с нумерованными и оснащено-нумерованными критическими точками), а также для их подпространств (пространств функций Морса, некоторые критические точки которых закреплены, т.е. фиксированы на поверхности).

Дадим краткий исторический обзор. Пусть

$$\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$$

— пространство гладких функций на связной замкнутой поверхности M , имеющих p точек локальных минимумов, q седловых критических точек и r точек локальных максимумов, снабженное C^∞ -топологией, где $p > 0$, $q \geq 0$, $r > 0$, $p - q + r = \chi(M)$. Пусть $\mathcal{D}^0(M)$ — компонента единицы в группе $\mathcal{D}(M) = \text{Diff}^+(M)$ сохраняющих ориентацию (если поверхность M ориентируема) диффеоморфизмов M . Группа $\mathcal{D}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ действует на $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ “лево-правыми заменами координат”. Орбиты этого действия суть классы эквивалентности функций Морса, а орбиты действия подгруппы $\mathcal{D}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(M)$ — классы топологической эквивалентности функций Морса.

Перечислим известные нам результаты других авторов о классификации функций Морса с точностью до следующих отношений эквивалентности: послойной эквивалентности, топологической (послойной) эквивалентности, изотопности (определение 1.6.1) в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$.

(R1) А.Т. Фоменко [33, 32, 34, 9, 10, 8], [53, theorem 2.16] описал полный инвариант послойной эквивалентности в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса на поверхностях в терминах комбинаторных объектов — “атомов” и “молекул” (предложение 2.4.6). Более точно: в работах А.Т. Фоменко [33, 32] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [8], где были введены понятия атомов и молекул.

(R2) В 1997 г. А. Т. Фоменко поставил вопрос о линейной связности пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$. Положительный ответ был получен автором (см. теорему 1.6.2 или [129, теорема 4]) для $M = S^2, \mathbb{R}P^2$, С.В. Матвеевым и Х. Цишангом [38] (1998) в общем случае (а также В.В. Шарко [40] (1998) и С.И. Максименко [96] (2005)). Более того, С.В. Матвеев (см. теорему 2.1.1, или теоремы 2.6.1 и 2.6.2, или [129, теоремы 8 и 8']) доказал линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)_{\text{extr}} \subset \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса с фиксированными критическими точками локальных экстремумов на поверхности M .

(R3) Полный инвариант изотопности в пространстве гладких функций без критических точек на открытой поверхности (с краем) описан Ю.М. Бурманом [13, 60] в терминах числа вращения.

(R4) В. И. Арнольд исследовал — в связи с изучением 16-й проблемы Гильберта (о взаимном расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, или алгебраических поверхностей) — количество классов эквивалентности (определение 2.2.4) типичных (следствие 2.4.12) функций Морса на прямой [2] и на поверхности [3, 44, 45, 4]. В частности, В.И. Арнольд [45] изучил асимптотику *количества* классов эквивалентности (= топологической эквивалентности) типичных функций Морса в пространствах $\mathcal{F}_{p,p+r-2,r}(S^2)$ функций Морса на сфере — в зависимости от количества $q = p + r - 2$ седел — при $q \rightarrow \infty$. Е.В. Кулинич [95] (см. также [53, theorem 2.6]) вычислил *количество* классов эквивалентности типичных функций Морса на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \leq 6$, имеющих ровно одну точку локального минимума и ровно одну точку локального максимума.

(R5) Дж. Харер и Д. Загье [78] вычислили (1986) производящую функцию (см. следствия 3.3.6 (C) и 3.4.2 (C)) для **количества** $\varepsilon_g(q)$ клеточных разбиений замкнутой связной ориентированной поверхности рода g с $r = q + 1 - 2g$ вершинами, r ребрами, одно из которых отмечено и ориентировано, и одной двумерной клеткой с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности. С помощью этого комбинаторного результата они получили важный топологический результат — вычислили эйлерову характеристику $\chi(G_g^s)$ “комплекса ленточных графов” G_g^s при $s > 2 - 2g$, а значит, ввиду [124], и $\chi(\mathcal{M}_g^s)$, где \mathcal{M}_g^s — пространство модулей комплексных алгебраических кривых рода g с $s > 3 - 3g$ пронумерованными проколами (подробнее см. ниже). Заметим, что число $\varepsilon_g(q)$ совпадает с количеством классов послыонной эквивалентности (= эквивалентности) **правильных** (определение 2.4.3 (E)) функций Морса f на замкнутой поверхности M рода g , принадлежащих пространству $\mathcal{F}'_{1,q,r}(M)$ (см. определение 2.2.2 (B)), т.е. имеющих ровно одну точку локального минимума и q седловых точек, причем одна седловая точка оснащена (определение 2.2.2 (B)). Отсюда в следствии 3.3.6 (C) мы получим еще одно топологическое применение формулы Харера–Загье — формулу

$$\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} \varepsilon_g(q),$$

где $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{p,q,r} = \tilde{\mathbb{K}}/(\mathcal{D}/\mathcal{D}^0)$ — компактный косой цилиндрически-полиэдральный комплекс оснащенных функций Морса такой, что $\mathcal{F}'_{p,q,r}(S^2) \sim \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{K}$, $\mathcal{F}'_{p,q,r}(T^2) \sim T^2 \times \tilde{\mathbb{K}}$, $\mathcal{F}'_{p,q,r}(M) \sim \tilde{\mathbb{K}}$ при $g \geq 2$, и $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p,q,r}$ является накрытием \mathbb{K} .

Изложим кратко историю вопроса о пространстве \mathcal{M}_g^s . К. Strebel [124] показал (1984), что пространство \mathcal{M}_g^s имеет каноническое клеточное разбиение ([79, 94, 124] или [114]), клетки которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изотопности некоторых графов в поверхности M рода g с s проколами. Другими словами, согласно [124, 88] существует канонический вещественно-аналитический гомеоморфизм

$$G_g^s \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_g^s \times \mathbb{R}_{>0}^s, \quad s > 3 - 3g,$$

где G_g^s — хорошо известный “комплекс ленточных графов”. Упомянутое клеточное разбиение может быть описано либо в духе [114, 115, 116] (“в гиперболической постановке”), либо с использованием квадратичных дифференциалов [124] (“в канонической постановке”) как в [79] или [94]. Любая точка клеточного комплекса G_g^s представляется *квадратичным дифференциалом*, “квадратный корень” из которого имеет простые полюса в проколах и не имеет других полюсов, причем его горизонтальное слоение имеет единственный особый слой — некоторый граф $G \subset M$, являющийся строгим деформационным ретрактом поверхности M с выколотыми полюсами; такой квадратичный дифференциал называется *гороциклическим*. С помощью упомянутой выше производящей функции для чисел $\varepsilon_g(q)$ Харер и Загье вычислили (1986) эйлерову характеристику комплекса G_g^s ленточных графов, тем самым ввиду упомянутого результата Штребеля они получили [78] формулу

$$\chi(\mathcal{M}_g^s) = \chi(G_g^s) = (-1)^s \frac{(2g + s - 3)!}{2g(2g - 2)!} B_{2g}$$

при $s > 2 - 2g$, где B_g есть g -ое число Бернулли, определяемое производящей функцией $\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}$. Позднее аналогичные формулы [75] и производящие функции для них [48, 49] были получены как для эйлеровой характеристики, так и для орбиобразной эйлеровой характеристики пространства \mathcal{M}_g^s и его компактификации $\overline{\mathcal{M}}_g^s$ Делиня-Мамфорда [68].

(R6) Топология отдельно взятого класса топологической сопряженности (а также **класса топологической эквивалентности**) (определение 2.2.4 (A, B)) из пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ изучалась в работах С.И. Максименко [97] в случае поверхности $M \neq S^2, T^2$. В частности, С.И. Максименко [97] доказал стягиваемость связных компонент стабилизатора любой функции Морса на замкнутой поверхности при действии группы диффеоморфизмов поверхности, а также доказал асферичность любой орбиты этого действия и изучил некоторые свойства ее фундаментальной группы.

(R7) Функции Морса на поверхностях изучали А.Т. Фоменко [32], С.В. Матвеев и Фоменко [21, 23, 22], Матвеев, Фоменко и Шарко [23], Фоменко и Х. Цишанг [35], А.В. Болсинов и Фоменко [9, 10] в связи с задачей классификации (лиувиллевой, орбитальной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Фоменко и Цишанг [35] построили полный инвариант лиувиллевой эквивалентности таких систем, а Фоменко и Болсинов [9, 10] построили полный инвариант орбитальной эквивалентности таких систем. Важным инструментом обеих теорий является описание (R1) классов послойной эквивалентности (определение 2.2.4 (C) и предложение 2.4.6) функций Морса на замкнутых поверхностях, в терминах комбинаторного объекта — “молекулы” функции Морса.

Основными результатами настоящей главы являются следующие:

- получен критерий топологической эквивалентности функций Морса на произвольной компактной поверхности (теорема 2.3.4); получены аналогичные критерии топологической послойной эквивалентности (теорема 2.3.5) и топологической сопряженности (теорема 2.3.6);
- получен критерий топологической послойной эквивалентности возмущенных функций Морса на произвольной компактной поверхности (утверждение 2.5.2); получены аналогичные критерии топологической эквивалентности (следствие 2.5.8) и топологической сопряженности (следствие 2.5.9);
- доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства \mathcal{F}^{fix} функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно (теорема 2.7.2); изучена факторгруппа (а именно: найдены наборы образующих и получены оценки на ранг) группы диффеоморфизмов, сохраняющих компоненту связности $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ данной функции f в пространстве \mathcal{F}^{fix} , по ее подгруппе, порожденной диффеоморфизмами, сохраняющими какие-либо функции из $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ (теорема 2.7.5 и ее следствие 2.7.6, теоремы 2.7.11, 2.7.13 и 2.7.14).

Для полноты изложения приводятся также решение А.Т. Фоменко вопроса (Q2) и решение С.В. Матвеева вопроса (Q4) (в частично усиленной постановке), а также некоторые обобщения (теоремы 2.6.9 и 2.6.11) теоремы Матвеева на случай морсовских функций с нумерованными и оснащенными критическими точками, полученные автором в [129].

Пусть M — компактная связная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности и (p, q, r) — тройка неотрицательных целых чисел. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 2.2.1), имеющих ровно $p + q + r$ критических точек, из которых p точек являются точками локальных минимумов, q точек являются седловыми и r точек являются точками локальных максимумов.

Теорема 2.1.1 (С.В. Матвеев [129, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишанг [38, 40], см. теоремы 2.6.1 и 2.6.2). *Пространство функций Морса $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, снабженное C^∞ -топологией, линейно связно.*

Замечание 2.1.2. В 1997 году А.Т. Фоменко сформулировал вопрос о линейной связности пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса на поверхности M (см. определение 2.2.1). В том же году С.В. Матвеев получил положительный ответ и передал Е.А. Кудрявцевой доказательство своей теоремы 2.1.1 (и равносильных ей теорем 2.6.1 и 2.6.2), которая была включена (со ссылкой на С.В. Матвеева) в статью Е.А. Кудрявцевой [129], принятую к печати в 1997 году. Доказательство С.В. Матвеева основано на методе спайнов, применяемом в трехмерной топологии (см. доказательство теорем 2.6.1 и 2.6.2 в §2.6). В июне 1998 года Х. Цишанг [38] сообщил свое доказательство этой теоремы Е.А. Кудрявцевой и В.В. Шарко. Доказательство Х. Цишанга основано на методе Я. Нильсена и не было опубликовано. Позднее В.В. Шарко [40] опубликовал доказательство этой теоремы Матвеева-Цишанга, тоже основанное на методе Нильсена. Позже С.И. Максименко [96] опубликовал еще одно доказательство этой теоремы (и ее обобщения для морсовских отображений $M \rightarrow S^1$), основанное на том, что группа классов отображений поверхности порождена скручиваниями Дэна [67] и что скручивания Дэна сохраняют некоторые функции Морса.

В §2.6 из теоремы 2.1.1 мы выведем линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса с пронумерованными критическими точками.

Опишем основные результаты главы в виде двух теорем. Пусть $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пространство функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками (см. определение 2.2.2 (В)). Пусть \mathcal{D}^0 — компонента единицы в группе $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M)$.

Теорема 2.1.3 (см. теорему 2.3.4 и утверждение 2.5.2). (А) *Функции $f, g \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ топологически эквивалентны (определение 2.2.4 (В)) тогда и только тогда, когда отвечающие им “упорядоченные” графы G_f^\leq, G_g^\leq (т.е. объединения G_f, G_g критических уровней функций f, g с некоторым отношением частичного порядка, см. обозначения 2.3.1 (Б) и 2.3.3 (А)) изотопны в M , т.е. $h(G_f^\leq) = G_g^\leq$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$.*

(В) *Пусть $f, g \in \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пара топологически послойно эквивалентных функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками. Пусть $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — функции, близкие к f, g по C^2 -норме и не слишком большие по C^3 -норме (см. (2.5) и (2.6) при $r = 2$). Пусть W^{num} — ориентированный граф Кронрода-Риба функции \tilde{f} с метками в вершинах, отвечающими нумерации критических точек (определение 2.4.1). Тогда возмущенные функции \tilde{f} и \tilde{g} топологически послойно эквивалентны в том и только том случае, когда набор критических значений функции \tilde{g} согласован (определение 2.5.3) с графом W^{num} функции \tilde{f} .*

Пусть $\mathcal{F}^{\text{fix}} \subseteq \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пространство функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих фиксированное множество критических точек индекса λ , для любого $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Для ориентируемой поверхности M обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Пусть $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}$ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M , оставляющих неподвижными все критические точки функций $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$, $(\mathcal{D}^*)^0$ — компонента связности id_M в \mathcal{D}^* . Для любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ обозначим через $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ компоненту связности функции f в \mathcal{F}^{fix} , и через $\mathcal{D}_f^* \subseteq \mathcal{D}^*$ множество диффеоморфизмов, сохраняющих $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Пусть \mathcal{H}_f — подгруппа \mathcal{D}_f^* , порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и всеми диффеоморфизмами $h \in \mathcal{D}^*$, сохраняющими какие-либо функции $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$, и пусть $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ — ее подгруппа, порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и скручиваниями Дэна вокруг компонент линий уровня функций $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Оказывается, что в большинстве случаев $\mathcal{F}_f^{\text{fix}} \subsetneq \mathcal{F}^{\text{fix}}$ и $\mathcal{D}_f^* \subsetneq \mathcal{D}^*$, поэтому нетривиален вопрос о нахождении факторгрупп в цепочке нормальных подгрупп $(\mathcal{D}^*)^0 \subseteq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subseteq \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{D}_f^*$.

Теорема 2.1.4 (см. следствие 2.7.6 и теорему 2.7.13). *Предположим, что M — компактная связная ориентируемая поверхность рода g и число седел $q \geq 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ выполнено $|\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})| = [\mathcal{D}^* : \mathcal{D}_f^*] = \infty$ и*

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{D}_f^*, & \text{ если род } g \geq 1, \\ (\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f \subsetneq \mathcal{D}_f^*, & \text{ если род } g = 0 \text{ и число седел } q \geq 2, \\ (\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f = \mathcal{D}_f^*, & \text{ если число седел } q = 1, \end{aligned}$$

а также оценки для рангов факторгрупп:

$$\begin{aligned} q - 1 \leq \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) \leq \text{rank}(\pi_1(K)), \quad \text{rank}(\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle) \geq p + r - 1 & \text{ при } g = 0, \\ \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) \leq \text{rank}(\pi_1(K)), \quad \text{rank}(\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}}) \geq q - 1 & \text{ при } g > 0. \end{aligned}$$

Более того, существуют мономорфизм $\mathbb{Z}^{q+g-1} \hookrightarrow \mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0$ и эпиморфизмы $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ при $g \geq 1$, $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ при $g = 0$, $\pi_1(K) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ в общем случае. Здесь \tilde{K} и K — $(q-1)$ -мерные полиэдральные комплексы, ассоциированные с пространством \mathcal{F}^{fix} , причем имеется гомотопическая эквивалентность $\tilde{K} \sim \mathcal{F}^{\text{fix}}$, $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ действует эффективно на \tilde{K} , $K \cong \tilde{K}/(\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0)$ конечен и связан.

Глава имеет следующую структуру.

i) В §2.2 вводятся пространства $\mathcal{F} \subset C^\infty(M, \partial^+M, \partial^-M) \subset C^\infty(M)$ функций Морса и \mathcal{F}^{num} нумерованных функций Морса (и некоторые другие) и естественные отношения эквивалентности на них.

ii) В §2.3 мы докажем критерии топологической эквивалентности, топологической послойной эквивалентности и топологической сопряженности функций Морса из \mathcal{F} и \mathcal{F}^{num} (теоремы 2.3.4 и 2.3.5). Этот результат будет использоваться в следующей главе (точнее, в §3.2, т.е. в [143]) при изучении гомотопического типа пространства \mathcal{F} и его подпространств $[f]_{\text{top}}$, $f \in \mathcal{F}$. А именно, наш критерий топологической эквивалентности функций Морса используется при изучении ограничения гомотопической эквивалентности между \mathcal{F} и пространством \mathbb{F} “оснащенных функций Морса” на классы $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности функций Морса $f \in \mathcal{F}$ (точнее, в доказательстве [143] теоремы 3.2.5 и утверждения 3.2.13(Б), используемого при доказательстве теоремы 3.2.5(А)), а также при изучении отображений инцидентности между парами инцидентных ручек нашего комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, отвечающими парам (см. шаги 3 и 10 в §3.3.2), и при изучении взаимосвязи примыкающих друг к другу стратов нашего многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (см. шаг 3 в §3.4.2).

iii) В §2.4 формулируется классификация А.Т. Фоменко [10, гл. 2, определения 4, 6, 9, 10, теоремы 4 и 8] функций Морса из \mathcal{F} (соответственно $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$) с точностью до *послойной эквивалентности* в случае ориентированной поверхности M (см. предложение 2.4.6), и из нее выводятся классификации с точностью до *эквивалентности* и *сопряженности* (следствие 2.4.11). Этот результат будет использоваться в главе 4 при введении понятий гамильтоновой системы на атоме и (относительно-) продолжимого инварианта C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме (определения 4.1.18, 4.1.20, 4.1.22), а также в формулировке критерия Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на поверхностях (теорема 4.3.16).

iv) В §2.5 доказан критерий топологической послойной эквивалентности (а также аналогичные критерии для всех остальных рассматриваемых отношений эквивалентности) пары “возмущенных” функций Морса $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M, \partial^+M, \partial^-M)$, полученных малыми возмущениями из пары топологически послойно эквивалентных функций Морса $f, g \in \mathcal{F}$ (утверждение 2.5.2 и следствие 2.5.8). Этот результат будет использован в главе 3 при описании отображений инцидентности в комплексе $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса и в главе 4 (§4.3.2) при описании структуры стратов Максвелла (вместе с их разбиением на классы топологической

C^0 -сопряженности) в пространстве (4.11) невырожденных гамильтоновых систем на поверхностях.

v) В §2.6 приводится доказательство С.В. Матвеева линейной связности пространств функций Морса с фиксированными точками локальных экстремумов (теоремы 2.6.1 и 2.6.2), а также наше обобщение этого результата на случай нумерованных и оснащенных седел (теоремы 2.6.9, 2.6.10, 2.6.11, 2.6.12).

vi) В §2.7 строится (неполный) инвариант изотопности на пространстве \mathcal{F}^{fix} функций Морса с фиксированными критическими точками (теорема 2.7.2), изучается нетривиальность фактор-групп в естественно возникающей цепочке вложенных подгрупп группы диффеоморфизмов поверхности (теорема 2.7.5), получены верхние и нижние оценки рангов этих фактор-групп (следствие 2.7.6, теоремы 2.7.13 и 2.7.14), вводятся и изучаются комплексы \tilde{K}, K функций Морса (теоремы 2.7.11 и 2.7.13). Важные свойства комплексов \tilde{K}, K (и их аналогов для более общих пространств функций Морса) будут установлены в §3.6 главы 3 (следствие 3.3.5, примеры 3.6.3, предложения 3.6.4 и 3.3.17 (d)).

2.2 Основные типы эквивалентности функций Морса

Перейдем к точным формулировкам. Введем более общее пространство $\mathcal{F} \subset C^\infty(M)$ функций Морса и три его конечнолистных накрытия $\mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ и \mathcal{F}' . На каждом из них мы введем три типа эквивалентности и три типа топологической эквивалентности.

Определение 2.2.1. Пусть M — гладкая (то есть класса C^∞) компактная связная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность, край которой пуст или не пуст, с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности.

(А) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M . Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все ее критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\text{int } M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M , что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем $\inf(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^- M$, и $\sup(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^+ M$. Снабдим это пространство C^∞ -топологией (см. [86, 100] или §3.2.2).

(Б) Функцию f на M назовем *функцией Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, если $f \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и все ее критические точки невырождены (т.е. квадратичная форма в $T_x M$, заданная матрицей вторых частных производных f в критической точке x , невырождена). Пусть p, q, r — неотрицательные целые числа и

$$\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно $p + q + r$ критических точек, включая p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ — число граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства Морса:

$$\chi(M) = p - q + r, \quad p + d^+ > 0, \quad r + d^- > 0, \quad (2.1)$$

так как в противном случае $\mathcal{F} = \emptyset$. Множество $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ мы наделим C^∞ -топологией (см. также §3.2.2(a)), а его подмножество $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ наделим индуцированной C^∞ -топологией и назовем *пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Обозначим через

$$\mathcal{F}_{p,q,r}^1(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

подпространство в $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, состоящее из таких функций $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

Определение 2.2.2. (А) Для каждой функции $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,\lambda}$ множество ее критических точек индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$; $\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}$. Пусть p^*, q^*, r^* — неотрицательные целые числа такие, что

$$0 \leq p^* \leq p, \quad 0 \leq q^* \leq q, \quad 0 \leq r^* \leq r.$$

Фиксируем “базисную” функцию $f_* \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и подмножество $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathcal{C}_{f_*,\lambda}$, состоящее из n_λ^* точек, $\lambda = 0, 1, 2$, где $n_0^* := p^*$, $n_1^* := q^*$, $n_2^* := r^*$. Пусть

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

— подпространство в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. теорему 2.1.1), состоящее из функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ таких, что $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$ для любого $\lambda = 0, 1, 2$. Итак, пространство \mathcal{F} состоит из функций Морса, у которых $p^* + q^* + r^*$ критических точек закреплены на поверхности M (т.е. одни и те же для всех функций $f \in \mathcal{F}$), причем \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}_2 — множества закрепленных критических точек локальных минимумов и максимумов, состоящее из p^* и r^* точек соответственно, \mathcal{C}_1 — множество закрепленных седловых критических точек, состоящее из q^* точек. Пространство \mathcal{F} мы наделим C^∞ -топологией (см. [86, 100] или §3.2.2).

(Б) Обозначим через

$$\mathcal{F}^{\text{num}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

пространство, полученное из пространства \mathcal{F} введением нумерации у всех незакрепленных критических точек функций Морса $f \in \mathcal{F}$ (в замечании 1.6.3 пространство $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ было обозначено через $\mathcal{F}_{p,r}^{\text{num}}(M; \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$). Рассмотрим каноническое включение $\mathcal{F}^{\text{num}} \hookrightarrow \mathcal{F} \times M^{p+q+r}$, где любой элемент пространства \mathcal{F}^{num} отождествляется с парой, состоящей из функции Морса $f \in \mathcal{F}$ и упорядоченного набора ее критических точек. Снабдим пространство $\mathcal{F} \times M^{p+q+r}$ топологией прямого произведения, а его подпространство \mathcal{F}^{num} — индуцированной топологией. Имеем $(p - p^*)!(q - q^*)!(r - r^*)!$ -листное накрытие $\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}$.

(В) Фиксируем на поверхности M произвольную риманову метрику, и в каждой седловой критической точке функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим неориентированную гладкую дугу, образованную двумя сепаратрисами векторного поля $\text{grad } f$, входящими в эту критическую точку (эту дугу трансверсально пересекает другая гладкая дуга, образованная двумя выходящими сепаратрисами, мы ее не будем рассматривать). Мы будем называть эту дугу для краткости *сепаратрисной дугой*. Предположим, что в одной седловой критической точке функции Морса $f \in \mathcal{F}$ фиксирована ориентация сепаратрисной дуги. Назовем такую ориентацию *оснащением* данной седловой критической точки функции f , такую критическую точку назовем *оснащенной*, а саму функцию Морса f назовем *функцией Морса с одной оснащенной критической точкой*. Полученное пространство функций Морса с одной оснащенной критической точкой обозначим через $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Ясно, что пространство \mathcal{F}' является двулистным накрывающим пространством для пространства \mathcal{F} . Обозначим через

$$\mathcal{F}^{\text{num,fr}} := \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num,fr}}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \quad (2.2)$$

пространство функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, у всех седловых критических точек которых фиксированы оснащения (см. выше). Функции $f \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ на M будем называть *функциями Морса с оснащено-нумерованными критическими точками*.

Обозначение 2.2.3 (ср. обозначение 3.1.4). Обозначим через $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \text{int } M$ множество закрепленных критических точек. Пусть

$$\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

— группа всех (необязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M , переводящих в себя каждое подмножество $\partial^+ M$, $\partial^- M$, \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 .

Пространство \mathcal{D}^\pm наделим C^∞ -топологией, см. §3.2.2(б). Если M ориентируема, обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ подгруппу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов (с индуцированной топологией). Пусть $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ — подгруппа (с индуцированной топологией), состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, изотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}) в себя. Другими словами, \mathcal{D}^0 совпадает (как множество, но не как топологическое пространство) с пересечением \mathcal{D}^\pm и компоненты связности id_M в пространстве гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}) , снабженном C^0 -топологией.

Определение 2.2.4 (см. [45], ср. определение 2.7.8). (А) Говорят, что две функции F на M и F' на M' *сопряжены* (или принадлежат одной правой орбите), если существует диффеоморфизм $h : M' \rightarrow M$ такой, что $F' = F \circ h$. Если при этом $M = M'$, $F, F' \in \mathcal{F}$ и диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$, т.е. изотопен тождественному, то будем говорить, что F и F' *топологически сопряжены*.

(В) Будем говорить, что две функции F и F' *эквивалентны* (или принадлежат одной лево-правой орбите), если они сопряжены при помощи диффеоморфизма как поверхностей M и M' , так и диффеоморфизма вещественной прямой. Другими словами, функции F и F' эквивалентны, если существуют такие диффеоморфизмы $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : M' \rightarrow M$, что $F' = g \circ F \circ h$ и g возрастает. Будем обозначать это следующим образом: $F \sim F'$. Если при этом $M = M'$, $F, F' \in \mathcal{F}$ и диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$, т.е. изотопен тождественному, то будем говорить, что F и F' *топологически эквивалентны*, и будем обозначать это следующим образом: $F \sim_{\text{top}} F'$. Класс эквивалентности функции F обозначим через $[F]$, а класс топологической эквивалентности — через $[F]_{\text{top}}$.

(С) Будем говорить, что две функции F и F' *послойно эквивалентны*, если существует диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^\pm$, переводящий связные компоненты линий уровня F в связные компоненты линий уровня F' , и сохраняющий направление роста функций. Если при этом $M = M'$, $F, F' \in \mathcal{F}$ и диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$, т.е. изотопен тождественному, то функции F и F' назовем *топологически послойно эквивалентными*. Класс послойной эквивалентности функции F обозначим через $\llbracket F \rrbracket$, а класс топологической послойной эквивалентности — через $\llbracket F \rrbracket_{\text{top}}$.

(D) Если функции F, F' принадлежат пространству \mathcal{F} (соответственно одному из пространств $\mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$ функций Морса), то в каждом из случаев (А, В, С) выше будем дополнительно требовать, чтобы h переводил в себя каждое множество $\partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ (а также нумерацию и/или оснащения критических точек функций соответственно). Если поверхности M и M' ориентированы, то будем требовать, чтобы h сохранял ориентацию (т.е. $h \in \mathcal{D}$, если $M = M'$ ориентирована).

2.3 Топологическая классификация функций Морса

В этом разделе излагается результат работы автора [132, теорема 1]. Отметим, что с помощью этого результата (точнее, леммы 2.3.2) в работе [61] показано, что естественная псевдометрика на пространстве $\mathcal{F}_{\text{simple}}(M)/\mathcal{D}^\pm(M)$ классов сопряженности простых (определение 1.6.6) функций Морса на замкнутой поверхности M является метрикой.

Все построения и результат настоящего параграфа используют лишь понятие функции Морса, но не используют понятий малых деформаций функции Морса (изучаемых в §2.5, см. критерий топологической эквивалентности возмущенных функций Морса в утверждении 2.5.2). Мы не требуем ориентируемость поверхности M . Приложение результата данного раздела к задаче о нахождении гомотопического типа пространства функций Морса описана в абзаце, предшествующем параграфу §2.2.

Аннотация: Пусть M — гладкая, компактная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность с пустым или непустым краем. Пусть $\mathcal{D}^0 \subset \text{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов, isotопных id_M . Две гладкие функции $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ называются *топологически эквивалентными* (см. [45] или определение 2.2.4 (B) выше), если $f = h_2 \circ g \circ h_1$ для некоторых диффеоморфизмов $h_1 \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$. Пусть \mathcal{F} — пространство функций Морса на M , постоянных на каждой компоненте края и не имеющих критических точек на крае. Доказан критерий топологической эквивалентности функций Морса из \mathcal{F} .

Обозначения 2.3.1 (см. также обозначение 3.1.6). (A) Обозначим через

$$\{w_\ell\} = \{w_\ell(f)\}_{\ell=1}^{p+q+r} := \mathcal{C}_f$$

множество всех критических точек функции $f \in \mathcal{F}$.

(B) Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим граф G_f на поверхности $\text{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}(\mathcal{C}_{f,1})$ выкидыванием всех связных компонент, не содержащих седловых критических точек. Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит, в графе $2q$ ребер.

Лемма 2.3.2 ([132, лемма 1]). Пусть M — (необязательно ориентируемая) компактная поверхность и функции Морса $f, f_1 \in \mathcal{F}$ имеют один и тот же набор критических точек, один и тот же граф $G_f = G_{f_1}$ (см. обозначение 2.3.1 (B)) и одни и те же значения в критических точках и точках края поверхности M . Тогда

$$f_1 = f \circ h \tag{2.3}$$

для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$, переводящего каждую вершину и каждое ребро графа G_f в себя, причем ограничение h на любое ребро (как диффеоморфизм одномерного связного многообразия в себя) сохраняет локальную ориентацию ребра.

Доказательство. Искомый диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$ построим в три этапа.

(а) Сначала в малой окрестности каждой критической точки $w_\ell = w_\ell(f)$, $1 \leq \ell \leq p+q+r$, вводятся такие локальные координаты u_1, v_1 и такие локальные координаты u_2, v_2 (осуществляющие диффеоморфизмы некоторых окрестностей критической точки в открытый круг одного и того же радиуса), что $f_1 = \pm u_1^2 \pm v_1^2 + f(w_\ell)$ и $f = \pm u_2^2 \pm v_2^2 + f(w_\ell)$ (это возможно, так как обе функции f_1, f являются квадратичными формами, согласно лемме Морса, и значения этих функций в каждой критической точке совпадают), причем в случае седловой точки w_ℓ в обоих выражениях выбирается пара знаков $(+, -)$. Потребуем также, чтобы координаты u_1, v_1 и u_2, v_2 индуцировали одинаковую локальную ориентацию поверхности M в точке w_ℓ и чтобы в случае седловой точки w_ℓ касательные векторы $\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial v_1}$ и $\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial v_2}$ в точке w_ℓ были сонаправлены. Рассмотрим диффеоморфизм h' между координатными окрестностями одной и той же критической точки, переводящий любую точку (u, v) относительно системы координат u_1, v_1 в точку (u, v) относительно системы координат u_2, v_2 .

Отметим, что в случае седловой критической точки линейная часть диффеоморфизма h' в этой точке имеет положительные собственные значения.

(б) Фиксируем (произвольным образом) ориентацию каждого открытого ребра e графа G_f и каждой граничной окружности поверхности M .

Ниже в окрестности каждого открытого ребра e графа G_f вводятся такие локальные координаты f, g_e , $f \in (f(e) - \varepsilon; f(e) + \varepsilon)$, $g_e \in (0; 1)$, что функция $g_e|_e: e \rightarrow (0; 1)$ является параметром на ребре e и в пересечении этой окрестности с (u_2, v_2) -координатной окрестностью начала ребра e функция g_e имеет вид $g_e = |2u_2v_2|$, а в пересечении этой окрестности с (u_2, v_2) -координатной окрестностью конца ребра функция g_e — вид $g_e = 1 - |2u_2v_2|$. Для этого введем на $M \setminus \{w_\ell\}$ риманову метрику ds^2 , которая в проколотой координатной окрестности каждой седловой точки имеет вид $ds^2 = (d(2u_2v_2))^2 + (df)^2$, а в проколотой координатной окрестности каждой критической точки локального минимума или максимума выполняется

$ds^2 = df^2 + \left(\frac{u_2 dv_2 - v_2 du_2}{u_2^2 + v_2^2} \right)^2$. Пусть ω — симплектическая структура (то есть ориентированная форма площадей) в окрестности открытого ребра e , значение которой на любом ортонормированном базисе относительно римановой метрики ds^2 равно ± 1 и для которой ограничение на ребро e векторного поля $\text{sgrad } f$ относительно симплектической структуры ω задает положительную ориентацию ребра e . Пусть $g'_e: e \rightarrow \mathbb{R}$ — параметр интегральной траектории векторного поля $(\text{sgrad } f)|_e$, совпадающей с открытым ребром e . Продолжим функцию g'_e в некоторую окрестность ребра e так, чтобы линии уровня продолженной функции являлись интегральными линиями векторного поля $\text{grad } f$ относительно римановой метрики ds^2 . Продолженную функцию опять обозначим через g'_e . Положим $a := \sup(g'_e|_e)$ и $g_e := h_{a,1} \circ g'_e$, где $h_{a,1}: [0; a] \rightarrow [0; 1]$ — диффеоморфизм, совпадающий с id в некоторой окрестности точки 0 и с $\text{id} + 1 - a$ в некоторой окрестности точки a . Легко проверить, что функция g'_e в пересечении этой окрестности с координатной окрестностью u_2, v_2 начала ребра e имеет вид $g'_e = |2u_2v_2|$, а в пересечении этой окрестности с координатной окрестностью u_2, v_2 конца ребра e — вид $g'_e = a - |2u_2v_2|$. Поэтому функция g_e имеет требуемые свойства.

Аналогичные координаты $f_1, g_{1,e}$, $f_1 \in (f(e) - \varepsilon; f(e) + \varepsilon)$, $g_{1,e} \in (0; 1)$, возможно после уменьшения числа ε , строятся в окрестности открытого ребра e для функции f_1 и локальных координат u_1, v_1 в окрестностях седловых точек (см. (а)). Тогда построенный в (а) диффеоморфизм h' в окрестностях начальной и конечной вершин ребра e переводит любую точку (f', g') относительно системы координат $f_1, g_{1,e}$ в точку (f', g') относительно системы координат f, g_e . Аналогичные системы координат $f_1, g_1 \bmod 2\pi$ и $f, g \bmod 2\pi$ строятся в окрестностях каждой граничной окружности поверхности M , где каждая из координат g_1 и g определена по модулю 2π и индуцирует положительную ориентацию этой окружности.

Определим диффеоморфизм h'' между координатными окрестностями одного и того же ребра e (соответственно граничной окружности), переводящий любую точку (f', g') относительно системы координат $f_1, g_{1,e}$ (соответственно $f_1, g_1 \bmod 2\pi$) в точку (f', g') относительно системы координат f, g_e (соответственно $f, g \bmod 2\pi$).

В окрестности каждой точки w_ℓ локального минимума (максимума) аналогичные координаты $f, g \bmod 2\pi$ и $f_1, g_1 \bmod 2\pi$ определяются формулами

$$\begin{aligned} u_2 &= |f - f(w_\ell)|^{1/2} \cos g + f(w_\ell), & v_2 &= |f - f(w_\ell)|^{1/2} \sin g + f(w_\ell), \\ u_1 &= |f_1 - f(w_\ell)|^{1/2} \cos g_1 + f_1(w_\ell), & v_1 &= |f_1 - f(w_\ell)|^{1/2} \sin g_1 + f_1(w_\ell). \end{aligned}$$

Тогда построенный в (а) диффеоморфизм h' в окрестности точки w_ℓ переводит любую точку с координатами $(f', g' \bmod 2\pi)$ относительно системы координат $f_1, g_1 \bmod 2\pi$ в точку $(f', g' \bmod 2\pi)$ относительно системы координат $f, g \bmod 2\pi$.

После ограничения диффеоморфизмов h' и h'' на (быть может, меньшие) координатные окрестности (если это необходимо) получаем корректно определенный диффеоморфизм h''' некоторой окрестности графа $G_f \cup (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}) \cup \partial M$ в некоторую (быть может, другую) окрестность этого графа, обладающий свойством (2.3).

(в) Рассмотрим связные компоненты дополнения графа $G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \cup \partial M$ в поверхности M — это открытые цилиндры $Z \approx S^1 \times (0; 1)$. Осталось продолжить диффеоморфизм h''' (или хотя бы его ограничение на некоторую меньшую окрестность графа $G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \cup \partial M$ в M) в каждый цилиндр Z так, чтобы выполнялось свойство (2.3). На каждой компоненте границы цилиндра Z функции f_1 и f совпадают и постоянны по условию. Положим $a_Z := \inf(f|_Z)$, $b_Z := \sup(f|_Z)$.

В цилиндре Z введем такие координаты $f, g^+ \bmod 2\pi$, $f \in (a_Z; b_Z)$, $g^+ \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, что на пересечении цилиндра с некоторой окрестностью его “верхнего основания” выполняются следующие условия:

1) линии уровня функции $g^+ \bmod 2\pi$ являются интегральными линиями векторного поля $\text{grad } f|_Z$;

2) если верхняя граничная компонента цилиндра является точкой локального максимума или компонентой края M , то $g^+ \bmod 2\pi = g \bmod 2\pi$, см. (б);

3) если верхняя граничная компонента цилиндра содержит седловую точку, то в пересечении цилиндра с координатной окрестностью любого ребра e этой граничной компоненты (см. (б)) 1-форма dg^+ пропорциональна 1-форме dg_e с некоторым постоянным ненулевым коэффициентом пропорциональности.

Эти условия определяют функцию $g^+ \bmod 2\pi$ в цилиндре Z однозначно, по меньшей мере с точностью до прибавления константы. Введем в цилиндре Z такие координаты $f, g^- \bmod 2\pi$, $f \in (a_Z; b_Z)$, $g^- \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, что на пересечении цилиндра с некоторой окрестностью его “нижнего основания” выполняются аналогичные свойства. Тогда ограничения функций $g^+ \bmod 2\pi$ и $g^- \bmod 2\pi$ на каждую линию уровня функции $f|_Z$ являются функциями друг от друга с ненулевой производной. Если эта производная отрицательна, заменим функцию $g^- \bmod 2\pi$ на $-g^- \bmod 2\pi$ и будем обозначать через $g^- \bmod 2\pi$ измененную функцию.

Зафиксируем в цилиндре Z регулярную кривую $\gamma: (a_Z; b_Z) \rightarrow Z$, такую, что $f \circ \gamma = \text{id}_{(a_Z; b_Z)}$, некоторые начальный и конечный участки кривой γ являются интегральными линиями векторного поля $\text{grad } f|_Z$ и обе предельные точки $\lim_{t \rightarrow a_Z} \gamma(t) \in \partial Z$ и $\lim_{t \rightarrow b_Z} \gamma(t) \in \partial Z$ кривой γ являются критическими точками функции f . Определим гладкую функцию $\tilde{g} \bmod 2\pi$ в цилиндре Z условиями $(\tilde{g} \bmod 2\pi)|_\gamma = 0 \bmod 2\pi$ и

$$d(\tilde{g}|_{f=c}) = (1 - I_{a_Z, b_Z}(c))d(g^-|_{f=c}) + I_{a_Z, b_Z}(c) d(g^+|_{f=c}), \quad c \in (a_Z; b_Z),$$

где $I_{a,b}: [a; b] \rightarrow [0; 1]$ — монотонная C^∞ -функция, тождественно равная 0 в окрестности точки $a = a_Z$ и равная 1 в окрестности точки $b = b_Z$.

Рассмотрим в цилиндре Z аналогичные координаты f_1 и $g_1^\pm \bmod 2\pi$, где $f_1 \in (a_Z; b_Z)$, $g_1^\pm \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Рассмотрим в цилиндре Z регулярную кривую

$$\gamma_1: (a_Z; b_Z) \rightarrow Z$$

такую, что $f_1 \circ \gamma_1 = \text{id}_{(a_Z; b_Z)}$ и в окрестности оснований цилиндра диффеоморфизм h''' из (б) переводит начальный и конечный участки пути γ_1 в начальный и конечный участки пути γ , причем пути γ и $h''' \circ \gamma_1$ гомотопны в цилиндре Z и существует гомотопия, в процессе которой начальный и конечный участки пути остаются неподвижными (последнего всегда можно добиться, заменив кривую γ_1 на ее образ при скручивании Дэна [67] вокруг окружности $Z \cap f^{-1}(\frac{a_Z + b_Z}{2})$ в подходящей степени). Определим гладкую функцию $\tilde{g}_1 \bmod 2\pi$ в цилиндре Z условиями $(\tilde{g}_1 \bmod 2\pi)|_{\gamma_1} = 0 \bmod 2\pi$ и

$$d(\tilde{g}_1|_{f_1=c}) = (1 - I_{a_Z, b_Z}(c))d(g_1^-|_{f_1=c}) + I_{a_Z, b_Z}(c) d(g_1^+|_{f_1=c}), \quad c \in (a_Z; b_Z).$$

Построенный в (б) диффеоморфизм h''' в окрестностях обеих компонент границы цилиндра Z переводит систему координат $f, \tilde{g} \bmod 2\pi$ в систему координат $f_1, \tilde{g}_1 \bmod 2\pi$. Определим диффеоморфизм h'''' каждого открытого цилиндра Z в себя, переводящий систему координат $f, \tilde{g} \bmod 2\pi$ в систему координат $f_1, \tilde{g}_1 \bmod 2\pi$. В частности, $h'''' \circ \gamma_1 = \gamma$.

Так как диффеоморфизмы h''' и h'''' согласованы на пересечении своих областей определения, получаем корректно определенный диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^\pm$ всей поверхности M в себя, обладающий свойством (2.3). Покажем, что $h \in \mathcal{D}^0$. Имеется гомотопия между отображением h и некоторым отображением $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$, в процессе которой каждая вершина и каждое ребро графа $G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ переходят в себя, каждая граничная окружность и каждый открытый цилиндр Z переходят в себя и $h_1|_{\partial Z} = \text{id}_{\partial Z}$. Тогда $h_1|_{\bar{Z}}$ гомотопно $\text{id}_{\bar{Z}}$ относительно ∂Z , так как в \bar{Z} имеются гомотопии замкнутых путей $h_1 \circ \tilde{\gamma}_1 \simeq h \circ \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma}_1$ относительно концов. Поэтому $h \simeq h_1 \simeq \text{id}_M$, то есть $h \in \mathcal{D}^0$. \square

Обозначение 2.3.3. (А) Сопоставим каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ ее “упорядоченный” граф $G_f^<$ в поверхности M , т.е. граф $G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \cup \partial M$ (см. обозначение 2.3.1 (Б) и определение 2.2.2 (А)), на множестве связных компонент которого введено отношение частичного

порядка согласно значениям функции f на этих компонентах, причем связные компоненты с равными значениями функции f считаются не сравнимыми друг с другом.

(Б) Если $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ (соответственно $f \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ или $f \in \mathcal{F}'$), то аналогично определяется нумерованный “упорядоченный” граф $G_f^{\text{num},\leq}$ (соответственно оснащено-нумерованный “упорядоченный” граф $G_f^{\text{num,fr},\leq}$, или 1-оснащенный “упорядоченный” граф $(G'_f)^{\leq}$), а именно: этот граф получается из “упорядоченного” графа G_f^{\leq} введением нумерации и/или оснащений у всех/некоторых своих вершин согласно нумерации и/или оснащению критических точек функции f . При этом под *оснащением* вершины y_j степени 4 графа G_f понимается выбор связной компоненты открытого конуса $\{\xi \in T_{y_j}M \mid d^2f(y_j)\xi < 0\}$ (ср. с определением 2.2.2 (В)).

Теорема 2.3.4 (критерий топологической эквивалентности функций Морса [132, теорема 1]). Пусть M — компактная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность. Две функции Морса $f, g \in \mathcal{F}$ (соответственно $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$) топологически эквивалентны (см. определение 2.2.4 (В)) тогда и только тогда, когда отвечающие им упорядоченные графы G_f^{\leq}, G_g^{\leq} (соответственно $G_f^{\text{num},\leq}, G_g^{\text{num},\leq}$ или $G_f^{\text{num,fr},\leq}, G_g^{\text{num,fr},\leq}$ или $(G'_f)^{\leq}, (G'_g)^{\leq}$) изотопны в M , то есть $h(G_f^{\leq}) = G_g^{\leq}$ (соотв. $h(G_f^{\text{num},\leq}) = G_g^{\text{num},\leq}$ или $h(G_f^{\text{num,fr},\leq}) = G_g^{\text{num,fr},\leq}$ или $h((G'_f)^{\leq}) = (G'_g)^{\leq}$) для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$.

Доказательство. Предположим, что $f, g \in \mathcal{F}$. Если $f \sim_{\text{top}} g$, то $f = h_2 \circ g \circ h$ для некоторых $h \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$ (см. определение 2.2.4 (В)). Из равенства функций Морса $f = (h_2 \circ g) \circ h$ получаем равенство критических графов $h(G_f^{\leq}) = G_{f \circ h^{-1}}^{\leq} = G_{h_2 \circ g}^{\leq}$ вместе со значениями в критических точках и точках края. Так как у функций g и $h_2 \circ g$ одни и те же критические точки и одно и то же отношение частичного порядка на множестве критических точек и точек края, определяемое по значениям функции в этих точках, то $G_{h_2 \circ g}^{\leq} = G_g^{\leq}$. Поэтому $h(G_f^{\leq}) = G_{h_2 \circ g}^{\leq} = G_g^{\leq}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $h(G_f^{\leq}) = G_g^{\leq}$ для некоторого $h \in \mathcal{D}^0$. Тогда $G_f^{\leq} = h^{-1}(G_g^{\leq}) = G_{g \circ h}^{\leq}$. Отсюда и из определения упорядоченного графа следует, что существует диффеоморфизм $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, переводящий значение $g \circ h(x)$ в значение $f(x)$ для каждой точки $x \in \{w_\ell(f)\} \cup \partial M$. Тогда функции Морса f и $h_2 \circ g \circ h$ имеют не только одинаковые критические графы $G_f = G_{h_2 \circ g \circ h}$, но и одинаковые значения в каждой критической точке и точке края. Согласно лемме 2.3.2, $h_2 \circ g \circ h = f \circ h_1$ для некоторого $h_1 \in \mathcal{D}^0$, откуда функции f и g топологически эквивалентны (см. определение 2.2.4 (В)).

Случаи $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$ рассматриваются аналогично. \square

2.3.1 Топологическая послойная классификация и критерий топологической сопряженности функций Морса

Для полноты изложения приведем критерии топологической послойной эквивалентности и топологической сопряженности (определение 2.2.4) функций Морса на поверхности M с краем (они нам не понадобятся).

Сопоставим каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ (соответственно $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$) ее *коориентированный граф* G_f^ν (соответственно *коориентированный нумерованный граф* $G_f^{\text{num},\nu}$ или *коориентированный оснащено-нумерованный граф* $G_f^{\text{num,fr},\nu}$ или *коориентированный 1-оснащенный граф* $(G'_f)^\nu$) в поверхности M , т.е. граф $G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \cup \partial M$ (см. обозначение 2.3.1 (Б)), на ребрах и окружностях которого задана коориентация ν ростом функции f (и все/некоторые вершины которого пронумерованы и/или оснащены согласно нумерации и/или оснащению критических точек функции $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$).

Теорема 2.3.5 (критерий топологической послойной эквивалентности функций Морса). *Две функции Морса $f, g \in \mathcal{F}$ (соответственно $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ или $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ или $f, g \in \mathcal{F}'$) топологически послойно эквивалентны (определение 2.2.4 (C)) тогда и только тогда, когда отвечающие им коориентированные графы G_f^ν, G_g^ν (соответственно $G_f^{\text{num},\nu}, G_g^{\text{num},\nu}$, или $(G_f')^\nu, (G_g')^\nu$) изотопны в M , т.е. $h(G_f^\nu) = G_g^\nu$ (соответственно $h(G_f^{\text{num},\nu}) = G_g^{\text{num},\nu}$, или $h((G_f')^\nu) = (G_g')^\nu$) для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$.*

Доказательство. Утверждение “только тогда” очевидно, а утверждение “тогда” доказывается аналогично доказательству теоремы 2.3.4. \square

Сопоставим каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ ее коориентированный меченый граф $G_f^{\nu,\text{lab}}$ в поверхности M , т.е. коориентированный граф G_f^ν (см. выше), связанные компоненты которого помечены вещественными метками, равными значениям функции f на этих компонентах. Аналогично определяются нумерованный коориентированный меченый граф $G_f^{\text{num},\nu,\text{lab}}$, оснащено-нумерованный коориентированный меченый граф $G_f^{\text{num,fr},\nu,\text{lab}}$ и 1-оснащенный коориентированный меченый граф $(G_f')^{\nu,\text{lab}}$ в поверхности M .

Теорема 2.3.6 (критерий топологической сопряженности функций Морса). *Две функции Морса $f, g \in \mathcal{F}$ (соответственно $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ или $f, g \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ или $f, g \in \mathcal{F}'$) топологически сопряжены (см. определение 2.2.4 (A)) тогда и только тогда, когда отвечающие им коориентированные меченые графы $G_f^{\nu,\text{lab}}, G_g^{\nu,\text{lab}}$ (соответственно $G_f^{\text{num},\nu,\text{lab}}, G_g^{\text{num},\nu,\text{lab}}$ или $G_f^{\text{num,fr},\nu,\text{lab}}, G_g^{\text{num,fr},\nu,\text{lab}}$ или $(G_f')^{\nu,\text{lab}}, (G_g')^{\nu,\text{lab}}$) изотопны в M , то есть $h(G_f^{\nu,\text{lab}}) = G_g^{\nu,\text{lab}}$ (соответственно $h(G_f^{\text{num},\nu,\text{lab}}) = G_g^{\text{num},\nu,\text{lab}}$ или $h(G_f^{\text{num,fr},\nu,\text{lab}}) = G_g^{\text{num,fr},\nu,\text{lab}}$ или $h((G_f')^{\nu,\text{lab}}) = (G_g')^{\nu,\text{lab}}$) для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^0$.*

Если в теоремах 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 заменить “ $h \in \mathcal{D}^0$ ” на “ $h \in \mathcal{D}^\pm$ ”, то получатся критерии эквивалентности, послойной эквивалентности и сопряженности функций Морса из \mathcal{F} (соответственно $\mathcal{F}^{\text{num}}, \mathcal{F}^{\text{num,fr}}, \mathcal{F}'$). Эти критерии в действительности равносильны критериям из следующего §2.4.

2.4 Послойная классификация Фоменко функций Морса. Атомы и молекулы Фоменко

В этом параграфе для полноты изложения строится полный инвариант А.Т. Фоменко послойной эквивалентности (соответственно эквивалентности, сопряженности) функций Морса на ориентируемых поверхностях, сопоставляющий любой функции Морса ее молекулу Фоменко (соответственно упорядоченную молекулу, молекулу с вещественными метками в атомах). См. предложение 2.4.6 и следствие 2.4.11, которые мы формулируем лишь в случае ориентированной поверхности M .

Для каждой функции Морса введем естественный дискретный объект — граф Кронрода-Риба, который является инвариантом послойной эквивалентности (см. определение 2.2.4 (B)), т.е. различает послойно неэквивалентные функции Морса.

Определение 2.4.1. Пусть M — компактная поверхность (ориентируемая или неориентируемая). Для функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ с нумерованными критическими точками на M (соответственно функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ с оснащено-нумерованными критическими точками на M , см. определение 2.2.2 (B, B)) рассмотрим слоение, слоями которого являются связанные компоненты линий уровня функции F . Графом Кронрода-Риба (сокращенно *КР-графом*) функции F называется база $W = W_F$ этого слоения, т.е. граф, точками которого являются

связные компоненты линий уровня функции на данной поверхности. Имеем каноническую проекцию

$$\pi = \pi_F : M \rightarrow W \quad (2.4)$$

и функцию $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $F = f \circ \pi_F$. На графе W фиксируем два естественных объекта:

- (i) *ориентацию* ребер, показывающую направление роста функции,
- (ii) для каждой вершины графа Кронрода-Риба фиксируем *набор номеров* всех критических точек, лежащих на отвечающем этой вершине особом слое.

Полученный объект — граф с ориентацией ребер и наборами номеров в вершинах — обозначим через $W^{\text{num}} = W_F^{\text{num}}$. Напомним, что в доказательстве предложения 1.6.5 (см. §1.6) мы рассматривали граф W^{num} для простых функций Морса и назвали его *нумерованным графом Кронрода-Риба*.

Пусть M — связная компактная двумерная поверхность, с краем или без края, и $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ — функция Морса с оснащено-нумерованными критическими точками (определение 2.2.2 (В)). Напомним, что $F \in C^\infty(M, \partial M)$ (см. определение 2.2.1), т.е. на каждой граничной окружности поверхности M функция F постоянна и не имеет критических точек на крае.

Напомним понятие (неориентированного оснащенного) седлового атома [9], естественно возникающее при классификации невырожденных гамильтоновых систем с 1 или 2 степенями свободы. Пусть c — критическое значение функции F , и пусть критический уровень $K = F^{-1}(c)$ связан и содержит лишь седловые критические точки F . Выберем столь малое $\varepsilon > 0$, что в отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ число c является единственным критическим значением для F .

Определение 2.4.2 (см. [53, definition 2.9]). Предположим, что на поверхности M не фиксирована ориентация (например, поверхность M или P может быть неориентируемой).

(А) На графе $K = F^{-1}(c)$ и его малой (инвариантной) окрестности $P = F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ в M введем и фиксируем следующие *дополнительные структуры*:

- (i) разбиение края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$ на “положительные” и “отрицательные” граничные окружности, $\partial^+ P := F^{-1}(c + \varepsilon)$ и $\partial^- P := F^{-1}(c - \varepsilon)$, и соответствующее разбиение дополнения к графу K в P на “положительные” и “отрицательные” кольца $(\partial^+ P) \times (0; 1]$ и $(\partial^- P) \times [-1; 0)$, каждое из которых содержит ровно одну — положительную или отрицательную — граничную окружность (так что для любого ребра графа K существует ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо, инцидентное этому ребру);
- (ii) нумерацию вершин графа K , отвечающую нумерации критических точек x_1, \dots, x_n функции F ;
- (iii) так называемые оснащения вершин графа K , отвечающие оснащениям (определение 2.2.2 (В)) критических точек функции F , где под оснащением вершины x_i графа K понимается выбор той связной компоненты открытого конуса $\{\xi \in T_{x_i}P \mid d^2F(x_i)\xi < 0\}$, которая содержит ориентированный касательный вектор ориентированной сепаратрисной дуги, задающей оснащение критической точки x_i функции F (см. определение 2.2.2 (В)).

Пару (P, K) с указанными структурами (i)—(iii) обозначим через $(P, K)_u^\#$. Под *топологической эквивалентностью* двух пар вида $(P, K)_u^\#$ будем понимать существование гомеоморфизма между этими парами, сохраняющего указанные структуры: разбиение связных компонент края ∂P на положительные и отрицательные граничные окружности (или соответствующее

разбиение связных компонент множества $P \setminus K$ на положительные и отрицательные кольца), нумерацию и оснащения вершин графа K .

(В) Пару $(P, K)_u^\#$, рассматриваемую с точностью до топологической эквивалентности, будем называть *оснащенно-нумерованным неориентированным седловым атомом* (для краткости *неориентированным седловым атомом*), отвечающим функции F на поверхности P . Критические точки x_1, \dots, x_n функции F на P называются *вершинами* атома, а их число n — *сложностью* атома. Связные компоненты границы ∂P поверхности P будем называть *концами* атома, а число d этих связных компонент — *валентностью* атома. Связные компоненты границы ∂P , лежащие на докритическом уровне $F^{-1}(c - \varepsilon)$ (соответственно $F^{-1}(c + \varepsilon)$), назовем *отрицательными* (соответственно *положительными*) *концами* атома и обозначим их число через d_- (соответственно d_+). Атом назовем ориентируемым (соответственно неориентируемым), если поверхность P ориентируема (соответственно неориентируема). Род поверхности P (равный роду замкнутой поверхности, полученной приклеиванием дисков к каждой граничной окружности), назовем *родом атома*. Атом будем называть *плоским*, если его род равен нулю.

(С) Аналогично определяются неориентированный *атом локального минимума* (соответственно *атом локального максимума*). При этом граф K совпадает со своей вершиной x_i , P — с её регулярной окрестностью; край ∂P является положительной окружностью $\partial^+ P$ (соответственно отрицательной окружностью $\partial^- P$). Такой (“минимаксный”) неориентированный атом $(P, K)_u^\#$ — это плоский ориентируемый атом сложности 1, валентности 1 и рода 0. Атом локального минимума имеет положительный конец и; атом локального максимума имеет отрицательный конец.

(D) Определим *тривиальный неориентированный атом* $(P, K)^\#$, где $K \subset F^{-1}(c)$ есть регулярная (т.е. не критическая) связная компонента линии уровня функции F , P — замкнутая связная регулярная окрестность окружности K вида $P = F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ в M , не содержащая критических точек функции F . Тривиальный атом не имеет вершин, имеет два конца — положительный и отрицательный (в случае $K \not\subset \partial P$) или один конец (в случае $K \subset \partial P$). Если $K \subset \partial P$, то тривиальный атом назовем *граничным*.

Седловые неориентированные атомы, атомы локальных минимумов и атомы локальных максимумов, а также тривиальные атомы будем называть также просто *неориентированными атомами*.

(E) Функция Морса $F \in C^\infty(M, \partial M)$ называется *правильной*, если ее значение в любой критической точке равно индексу этой точки (т.е. индексу квадратичной формы, задаваемой матрицей Гесса функции F в этой критической точке), а значение F на любой компоненте края M равно 0 или $\dim M$, если на этой компоненте F достигает локального минимума или максимума соответственно.

Напомним теперь понятие ориентированного седлового атома [9], тоже естественно возникающее при классификации невырожденных гамильтоновых систем с 1 или 2 степенями свободы.

Определение 2.4.3 (см. [9, 27]). Предположим, что на поверхности M фиксирована ориентация при помощи некоторой симплектической 2-формы.

(А) На графе $K = F^{-1}(c)$ и его малой (инвариантной) окрестности $P = F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ в M введем и фиксируем следующие *дополнительные структуры*:

- (i) ориентацию поверхности P , отвечающую симплектической структуре;
- (ii) ориентацию графа K , определяемую ограничением на него фазового потока системы;
- (iii) нумерацию вершин графа K , отвечающую нумерации критических точек x_1, \dots, x_n функции F ;

- (iv) так называемые оснащения вершин графа K , отвечающие оснащениям (определение 2.2.2 (B)) критических точек функции F , а именно для каждой вершины x_i графа K фиксируем одно из двух входящих в нее ребер — то ребро, которое втыкается в точку x_i слева от ориентированной сепаратрисной дуги, задающей оснащение седловой точки x_i функции F (см. определение 2.2.2 (B)).

Пару (P, K) с указанными структурами (i)–(iv) обозначим через $(P, K)^\#$. Под *топологической эквивалентностью* двух пар вида $(P, K)^\#$ будем понимать существование гомеоморфизма между этими парами, сохраняющего указанные структуры: ориентации поверхности P и графа K , а также нумерацию и оснащения вершин графа K .

(B) Пару $(P, K)^\#$, рассматриваемую с точностью до топологической эквивалентности, будем называть *оснащенно-нумерованным ориентированным седловым атомом* (для краткости *седловым атомом*), отвечающим функции F на поверхности P . Критические точки x_1, \dots, x_n функции F на P называются *вершинами* атома, а их число n — *сложностью* атома. Связные компоненты границы ∂P поверхности P будем называть *концами* атома, а число d этих связных компонент — *валентностью* атома. Связные компоненты границы ∂P , лежащие на докритическом уровне $F^{-1}(c - \varepsilon)$ (соответственно $F^{-1}(c + \varepsilon)$), назовем *отрицательными* (соответственно *положительными*) *концами* атома и обозначим их число через d_- (соответственно d_+). Род поверхности P (равный роду замкнутой поверхности, полученной приклеиванием дисков к каждой граничной окружности), назовем *родом атома*. Атом будем называть *плоским*, если его род равен нулю.

(C) Аналогично определяются *атом локального минимума* и *атом локального максимума*. При этом граф K совпадает со своей вершиной x_i , P — с её регулярной окрестностью; в P фиксирована ориентация, отвечающая симплектической структуре, а на крае ∂P фиксирована ориентация, согласованная с направлением движения в силу системы. Такой (“минимаксный”) атом $(P, K)^\#$ — это плоский атом сложности 1, валентности 1 и рода 0. Атом локального минимума имеет положительный конец и согласованные ориентации поверхности P и края ∂P ; атом локального максимума имеет отрицательный конец, и в нём ориентации поверхности P и края ∂P не согласованы.

(D) Определим *тривиальный атом* $(P, K)^\#$, где $K \subset F^{-1}(c)$ есть регулярная (т.е. не критическая) связная компонента линии уровня функции F , P — замкнутая связная регулярная окрестность окружности K вида $P = F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ в M , не содержащая критических точек функции F . Тривиальный атом не имеет вершин, имеет два конца — положительный и отрицательный (в случае $K \not\subset \partial P$) или один конец (в случае $K \subset \partial P$), и согласованные ориентации поверхности P , края ∂P и окружности K . Если $K \subset \partial P$, то тривиальный атом назовем *граничным*.

Седловые атомы, атомы локальных минимумов и атомы локальных максимумов, а также тривиальные атомы будем называть также просто *атомами*.

(E) Функция Морса $F \in C^\infty(M, \partial M)$ называется *правильной*, если ее значение в любой критической точке равно индексу этой точки (т.е. индексу квадратичной формы, задаваемой матрицей Гесса функции F в этой критической точке), а значение F на любой компоненте края M равно 0 или $\dim M$, если на этой компоненте F достигает локального минимума или максимума соответственно.

Замечание 2.4.4. (A) Предположим, что поверхность M ориентируема и ориентирована. Нетрудно показать, что *класс послойной эквивалентности* (определение 2.2.4 (B)) правильной (определение 2.4.3 (E)) функции Морса F , или функции Морса F в малой окрестности P ее критического уровня K , на ориентированной поверхности полностью определяется классом топологической эквивалентности пары $(P, K)^\#$, т.е. атомом (определение 2.4.3 (A, B)).

(B) Если не требовать ориентируемость поверхности M , то класс послойной эквивалентности правильной функции Морса F , или функции Морса F в малой окрестности P ее

критического уровня K , полностью определяется классом топологической эквивалентности пары $(P, K)_u^\#$, т.е. неориентированным атомом (определение 2.4.2 или [53, definition 2.9]).

(С) Пусть поверхность M ориентирована (соответственно неориентирована). Функции Морса из $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$, послойно эквивалентные функции $F|_P$, назовем *функциями Морса на атоме* $(P, K)_u^\#$ (соответственно *функциями Морса на неориентированном атоме* $(P, K)_u^\#$), а совокупность этих функций обозначим через $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P, K)$.

Определение 2.4.5 (см. [9, 27]). Пусть M — компактная ориентированная поверхность. *Оснащенно-нумерованной ориентированной молекулой* или *оснащенно-нумерованным ориентированным инвариантом Фоменко* (или просто *молекулой*) функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ с оснащено-нумерованными критическими точками называется ее граф W^{num} (т.е. ориентированный КР-граф W с наборами номеров в вершинах, см. определение 2.4.1), вместе с сопоставлением каждой его вершине соответствующего ориентированного атома, ориентация которого согласована с ориентацией поверхности M , а каждому концу этого атома — ребра графа W^{num} , в которое проектируется этот конец при проекции $\pi_F : M \rightarrow W$ из (2.4). Обозначим молекулу через $W^\#$.

Аналогичное, но более сложное понятие молекулы (инварианта Фоменко-Цишанга), введено в [35] для описания послойной эквивалентности невырожденных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на неособых изоэнергетических 3-мерных многообразиях.

Предложение 2.4.6 (А.Т. Фоменко [10, гл. 2, §§3–8, теоремы 4 и 8]). Пусть M — компактная ориентированная поверхность (с краем или без края). Сопоставление любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ ее молекулы W^{num} (определение 2.4.5) является полным инвариантом послойной эквивалентности функций Морса из $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ на ориентированной поверхности M . □

2.4.1 Критерии эквивалентности и сопряженности функций Морса

Напомним, что при исследовании невырожденных, т.е. боттовских, гамильтоновых систем с одной или двумя степенями свободы возникают понятия атома и молекулы (см. определения 2.4.3 и 2.4.5). Пусть M — связная замкнутая двумерная поверхность (с краем или без края) и $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса класса гладкости C^∞ . Как и выше, мы предполагаем, что $F \in C^\infty(M, \partial M)$, т.е. функция F не имеет критических точек на границе поверхности и постоянна на каждой граничной окружности.

Послойная эквивалентность функций является более слабым отношением, чем сопряженность и обычная эквивалентность, описанные в определении 2.2.4. Однако в некоторых случаях из послойной эквивалентности функций все-таки следует обычная эквивалентность и даже сопряженность. Два таких случая мы укажем в следующих предложениях 2.4.7 и 2.4.10, которые легко следуют из нашего критерия топологической эквивалентности функций Морса [132] (т.е. из леммы 2.3.2).

Предложение 2.4.7. Пусть M — компактная поверхность (с краем или без края, ориентируемая или неориентируемая). Пусть функции Морса F и F' послойно эквивалентны, причем при диффеоморфизме, осуществляющем эту послойную эквивалентность, сохраняются значения функции во всех ее критических точках, а также на всех граничных окружностях поверхности. Тогда функции F и F' сопряжены, т.е. $F' = F \circ h$ при подходящем выборе диффеоморфизма h . □

Напомним понятие упорядоченного графа Кронрода-Риба для функции Морса F на поверхности M с границей ∂M [45]. Как обычно, будем считать, что функция F постоянна на каждой граничной окружности.

Определение 2.4.8 ([45]; ср. теорему 2.3.4 и обозначение 3.2.12). Пусть M — компактная поверхность (с краем или без края, ориентируемая или неориентируемая) и $F \in C^\infty(M, \partial M)$ — функция Морса на ней.

(А) Введем *отношение частичного порядка* на множестве всех вершин графа Кронрода-Риба функции F с помощью критических значений функции F , а также ее значений на граничных окружностях поверхности M (не следует путать это отношение частичного порядка с отношением частичного порядка на множестве внутренних вершин графа возмущения W^{num} из §2.5, шаг 1). При этом две вершины или граничные окружности с равными значениями функции F считаются не сравнимыми друг с другом. Получившийся граф W_{\leq}^{num} с отношением частичного порядка на множестве его вершин мы и назовем *упорядоченным графом Кронрода-Риба* функции F .

(В) Предположим, что поверхность M ориентирована. *Упорядоченной молекулой* функции F назовем ее упорядоченный граф W_{\leq}^{num} , вместе с сопоставлением каждой его вершине соответствующего ориентированного атома, а каждому концу этого атома — ребра графа W_{\leq}^{num} , в которое проектируется этот конец при проекции $\pi_F : M \rightarrow W$ из (2.4). Обозначим упорядоченную молекулу через $W_{\leq}^\#$.

Замечание 2.4.9. Не следует путать этот упорядоченный граф Кронрода-Риба с “ориентированным и нумерованным графом Кронрода-Риба” W^{num} (определение 2.4.1), а также с молекулой Фоменко $W^\#$ (определение 2.4.5) функции Морса F . Упорядоченный граф Кронрода-Риба, вообще говоря, не определяется однозначно ни графом W^{num} , ни молекулой $W^\#$.

Предложение 2.4.10. Пусть M, M' — компактные поверхности (с краем или без края, ориентируемые или неориентируемые). Пусть функции Морса F на M и F' на M' послойно эквивалентны, причем эта послойная эквивалентность порождает изоморфизм упорядоченного графа Кронрода-Риба функции F на упорядоченный граф Кронрода-Риба функции F' (т.е. изоморфизм графов, сохраняющий отношение частичного порядка на множестве вершин). Тогда такие функции F и F' эквивалентны, т.е. $F' = g \circ F \circ h$ при подходящем выборе диффеоморфизмов g и h , где $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : M' \rightarrow M$. \square

Из предложения 2.4.6 Фоменко и предложения 2.4.10 сразу получаем

Следствие 2.4.11. Пусть M — компактная ориентированная поверхность. Сопоставление любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ ее упорядоченной молекулы $W_{\leq}^\#$ (определение 2.4.8 (В)) является полным инвариантом эквивалентности функций Морса из $\mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ на поверхности M . Сопоставление любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ ее молекулы $W^\#$, каждый атом которой помечен критическим значением функции f в соответствующих критических точках, является полным инвариантом сопряженности функций Морса из $\mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ на поверхности M . \square

Назовем функцию Морса $F \in C^\infty(M, \partial M)$ на компактной поверхности M *типичной* (или *общего положения*), если ее значения в критических точках и на граничных окружностях попарно различны. В частности, на каждом уровне лежит не более одной критической точки. Следовательно, ее упорядоченный граф Кронрода-Риба имеет простой вид. А именно, у него ровно n вершин, и все они занумерованы последовательными числами от 1 до n , в порядке возрастания функции F , где $n := p + q + r + d_+ + d_-$ — сумма числа критических точек функции F и числа граничных окружностей поверхности M .

Следствие 2.4.12 ([53, theorem 2.4]). Пусть M, M' — компактные ориентированные поверхности. Пусть даны две типичные функции Морса F на поверхности M и F' на поверхности M' . Тогда эти функции имеют одинаковые (т.е. изоморфные) упорядоченные

графы Кронрода-Риба (определение 2.4.8) в том и только том случае, когда эти функции эквивалентны (т.е. существуют сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : M' \rightarrow M$ такие, что $F' = g \circ F \circ h$).

2.5 Топологическая послойная классификация возмущенных функций Морса

В этом разделе излагается результат работы автора [145, §3] (см. также [134, шаг 3 доказательства леммы 3.1], [135, §3, шаг 3], [136, шаг 3 доказательства теоремы 3]).

В отличие от предыдущих параграфов данной главы, в настоящем параграфе используется не только понятие функции Морса, но и понятие малых возмущений (деформаций) функции Морса. Мы не предполагаем ориентируемость поверхности M (полученный здесь результат будет применяться в дальнейших главах 3 и 4 только в случае ориентированных атомов). Результаты данного параграфа непосредственно обобщаются на случай произвольной размерности.

В данном параграфе изучаются *возмущения* функций Морса, заданных либо на ориентированном атоме $(P, K)^\#$, либо на неориентированном атоме $(P, K)_u^\#$ (см. определения 2.4.2, 2.4.3 и замечание 2.4.4 (B)). Определим C^r -топологию на пространстве $\mathcal{F}(P)$ при $r \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $F \in \mathcal{F}(P)$ — функция Морса на P . Под ε -*малым возмущением* (или просто *возмущением*) функции F в смысле C^r -топологии будем понимать функцию $\tilde{F} \in \mathcal{F}(P)$, отвечающую ε -малому по C^r -норме возмущению функции:

$$\|\tilde{F} - F\|_{C^r} < \varepsilon \quad (2.5)$$

и удовлетворяющую дополнительному условию

$$\|\tilde{F}\|_{C^{r+1}} < C. \quad (2.6)$$

Здесь $C > 0$ — произвольная наперед заданная константа, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, характеризующее “величину возмущения” и зависящее от констант r и C , функции F и способа построения C^r -нормы. Введенная нами C^r -норма зависит от чисел $r \in \mathbb{Z}_+$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$ и от способа построения C^r -норм (например, с помощью “достаточно хорошего” конечного атласа на M). Все наши результаты верны для любой C^r -нормы указанного вида (и, в частности, для любого наперед заданного числа $C \in \mathbb{R}_{>0}$ в (2.6)).

Определение 2.5.1. Пусть $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P, K)$ — функция Морса на ориентированном (соответственно неориентированном) седловом атоме $(P, K)^\#$ (соответственно $(P, K)_u^\#$) (см. замечание 2.4.4), \tilde{F} — ее возмущение, т.е. функция из $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$, достаточно близкая к F в смысле C^2 -топологии на $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ (т.е. удовлетворяющая (2.5) и (2.6) при $r = 2$).

(A) *Тривиальным возмущением* функции F назовем любое ее возмущение, которое не разрушает атом, т.е. любую функцию \tilde{F} , имеющую единственное критическое значение на P . Возмущение \tilde{F} функции F назовем *простым*, если каждый особый слой слоения, определяемого функцией \tilde{F} , содержит ровно одну критическую точку этой функции (ср. (4.17)). Иначе возмущение назовем *сложным*.

(B) Граф W^{num} , отвечающий функции \tilde{F} (см. определение 2.4.1), т.е. ориентированный граф Кронрода-Риба W функции \tilde{F} с метками в вершинах, будем называть *графом возмущения*. Два графа возмущения W_1^{num} и W_2^{num} назовем *изоморфными*, если имеется изоморфизм этих графов, сохраняющий ориентацию ребер и наборы номеров, приписанных вершинам.

(C) Вершины графа Кронрода-Риба W , отвечающие особым слоям функции \tilde{F} , будем называть *внутренними вершинами* (или просто *вершинами*) графа возмущения W^{num} . Остальные вершины графа Кронрода-Риба (т.е. вершины, отвечающие слоям, расположенным на

крае поверхности \tilde{P}), назовем *концами* графа возмущения. Конец графа возмущения назовем *положительным*, если на соответствующей компоненте края поверхности P функция \tilde{F} имеет локальный максимум, в противном случае назовем конец *отрицательным*. Число номеров, отвечающих вершине графа W^{num} (т.е. сложность атома, отвечающего этой вершине, см. определение 2.4.3 (B)), назовем *весом* этой вершины. Граф W^{num} (и соответствующую функцию Морса) назовем *простым*, если все его вершины имеют вес 1. Ребро графа W^{num} назовем *внутренним*, если оба его конца являются внутренними вершинами графа W^{num} . Остальные ребра графа W^{num} назовем *внешними*.

Оказывается, что граф возмущения W^{num} (см. определения 2.4.1 и 2.5.1 (B)), не следует путать с молекулой Фоменко $W^\#$, см. определение 2.4.3) является основным инструментом для изучения послойной эквивалентности возмущенных функций Морса на данном атоме. Ниже мы определим понятие согласованности набора критических значений с данным графом возмущения (см. определение 2.5.3) и докажем (в §2.5) следующее утверждение:

Утверждение 2.5.2 ([145, §3]). *Пусть $F, F' \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}(P, K)$ — послойно эквивалентные функции Морса на данном (ориентированном или неориентированном) атоме. Пусть $\tilde{F}, \tilde{F}' \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}(P)$ — функции, близкие к F и F' по норме C^2 и не слишком большие по норме C^3 (см. (2.5) и (2.6) при $r = 2$), и пусть W и W' — графы Кронрода-Руба этих возмущенных функций. Тогда следующие условия равносильны:*

- (i) *возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' послойно эквивалентны,*
- (ii) *их графы возмущений W^{num} и $(W^{\text{num}})'$ изоморфны,*
- (iii) *набор критических значений одной функции согласован (определение 2.5.3) с графом возмущения другой функции.*

Если $F = F'$, то условия (i)–(iii) равносильны следующему условию:

- (iv) *возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' топологически послойно эквивалентны.*

Из утверждения 2.5.2, в частности, следует, что при тривиальных возмущениях класс послойной топологической эквивалентности (а потому и класс послойной эквивалентности) функции Морса не меняется. Кроме того, из этого утверждения видно, что для каждого атома имеется лишь **конечное число** классов послойно эквивалентных (и даже классов послойно топологически эквивалентных) возмущений гамильтониана. Действительно, число всех отношений частичного полупорядка (определение 2.5.3) на множестве номеров $1, 2, \dots, n$ конечно и не превосходит $4^{n(n-1)/2}$. Отсюда и из утверждения 2.5.2 сразу получаем

Следствие. *Любому атому $V = (P, K)^\#$ сложности n отвечает не более $4^{n(n-1)/2}$ классов послойно эквивалентных возмущений.*

Подробное описание построения графа возмущения W^{num} по возмущенным критическим значениям функции Морса \tilde{F} дано в §2.5 ниже.

Доказательство утверждения 2.5.2 о топологической послойной эквивалентности возмущенных функций Морса

Пусть $c \in \mathbb{R}$ является критическим значением функции $F \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}(P)$, и пусть критический уровень $K = F^{-1}(c)$ связан и содержит лишь седловые критические точки x_1, \dots, x_n функции F . Рассмотрим атом $(P, K)^\#$, отвечающий функции F , см. определение 2.4.3. Пусть $r \geq 2$. Рассмотрим возмущенную функцию $\tilde{F} \in C^\infty(P, \partial P)$, близкую к F по C^r -норме. По теореме о неявных функциях, функция \tilde{F} является функцией Морса и имеет ровно n

критических точек $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, близких к точкам x_1, \dots, x_n соответственно. Обозначим через $\mathbf{c}(\tilde{F}) := (c_1, \dots, c_n)$ набор критических значений функции \tilde{F} , т.е.

$$\mathbf{c}(\tilde{F}) := (c_1, \dots, c_n), \quad c_i := \tilde{F}(\tilde{x}_i), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.7)$$

Пусть $F' \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}(P)$ — функция Морса, послойно эквивалентная функции F , т.е. функция F' тоже представляет атом $(P, K)^\#$. Пусть x'_1, \dots, x'_n — образы точек x_1, \dots, x_n при диффеоморфизме $T : P \rightarrow P'$, осуществляющем послойную эквивалентность. Рассмотрим возмущенную функцию \tilde{F}' и ее критические точки $\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n$, близкие к x'_1, \dots, x'_n . Пусть c'_1, \dots, c'_n — значения функции \tilde{F}' в этих точках.

Напомним, что любой гомеоморфизм, осуществляющий послойную эквивалентность, сохраняет по определению нумерацию седловых критических точек и их оснащения.

Рассмотрим граф W^{num} возмущенной функции \tilde{F} . Введем (в два шага) *бинарное отношение* \preceq на множестве номеров $1, 2, \dots, n$ (не обязательно являющееся отношением частичного порядка).

Шаг 1. Отметим, что у нас есть естественное отношение частичного порядка на множестве вершин графа Кронрода-Риба W^{num} . А именно, мы скажем, что вершина B *строго следует* за вершиной A (будем писать $A \prec B$), если существует вертикальный путь на графе, идущий из A в B , т.е. путь, все время идущий по ребрам графа Кронрода-Риба в направлении роста функции \tilde{F} .

Шаг 2. Теперь можно продолжить это отношение частичного порядка на множество номеров $1, 2, \dots, n$, распределенных по вершинам графа возмущения W^{num} . Номера, попавшие в одну вершину графа возмущения W^{num} , будем считать “равноправными”, т.е. в любой паре (i, j) таких номеров каждый из них одновременно и не больше, и не меньше другого (т.е. $i \preceq j$ и $j \preceq i$, хотя $i \neq j$; поэтому \preceq не является отношением частичного порядка, если граф возмущения W^{num} не является простым). Если же пара номеров попала на разные вершины графа Кронрода-Риба W , то отношение частичного порядка между номерами определяется частичным порядком этих вершин.

Построенное бинарное отношение \preceq на множестве номеров $1, \dots, n$ является *рефлексивным* (т.е. $i \preceq i$ для любого номера $i \in \{1, \dots, n\}$) и *транзитивным* (т.е. $i \preceq j, j \preceq k \implies i \preceq k$), но не обязательно является *антисимметричным* (т.е. не обязательно выполнена импликация $i \preceq j, j \preceq i \implies i = j$). Таким образом, отношение \preceq является отношением частичного полупорядка (определение 2.5.3 ниже) на множестве номеров $1, \dots, n$, но не обязательно является отношением частичного порядка.

Определение 2.5.3. Бинарное отношение на каком-либо множестве A назовем *отношением частичного полупорядка* на A , если оно рефлексивно и транзитивно (но не обязательно антисимметрично). Будем говорить, что набор $(c'_1, \dots, c'_n) \in \mathbb{R}^n$ согласован с графом возмущения W^{num} , если он удовлетворяет отношению частичного полупорядка \preceq , который задается графом возмущения W^{num} . То есть, если $c_i \leq c_j$ для любой пары номеров i, j со свойством $i \preceq j$.

Замечание. Условие согласованности набора $(c'_1, \dots, c'_n) \in \mathbb{R}^n$ с графом возмущения W^{num} равносильно в действительности следующему.

- 1) Для любой пары номеров i, j , отвечающих одной вершине графа W^{num} , имеем: $c'_i = c'_j$.
- 2) Для любой пары номеров i, j , отвечающих началу и концу одного ребра графа возмущения W^{num} , имеем: $c'_i < c'_j$.

Нетрудно описать множество всех наборов $(c'_1, \dots, c'_n) \in \mathbb{R}^n$, согласованных с графом W^{num} . Отметим также, что (ввиду связности КР-графа W^{num}) отношение \preceq обладает следующим свойством: для любых двух номеров $i, j \in \{1, \dots, n\}$ существует цепочка номеров i_1, \dots, i_s такая, что $i = i_1, j = i_s$ и любые два соседних номера цепочки сравнимы (т.е. $i_k \preceq i_{k+1}$ или $i_{k+1} \preceq i_k$ для любого $k = 1, \dots, s - 1$).

Определение 2.5.4. Будем говорить, что возмущения \tilde{F} и \tilde{F}' *сильно послойно эквивалентны*, если функции \tilde{F} и \tilde{F}' послойно эквивалентны (см. определение 2.2.4 (C)), причем существует диффеоморфизм $\tilde{T} : \tilde{P}' \rightarrow \tilde{P}$, осуществляющий эту послойную эквивалентность, и имеющий следующий вид.

1) \tilde{T} изотопен диффеоморфизму T , осуществляющему послойную эквивалентность функций F и F' , т.е. существует изотопия $T_\theta \in \mathcal{D}^\pm$, $\theta \in [0, 1]$, между диффеоморфизмами $T = T_0$ и $\tilde{T} = T_1$.

2) При этой изотопии каждая седловая критическая точка функции $\tilde{F}' \circ T_\theta^{-1}$ остается в достаточно малой окрестности своего исходного положения, и индуцированное движение двух пересекающихся прямых, касательных к сепаратрисам в этой точке, мало отличается от параллельного переноса (в смысле какой-либо аффинной связности) в касательном расслоении к поверхности.

Отметим, что из этого определения следует, что сильно послойно эквивалентные возмущенные функции послойно эквивалентны. В частности, диффеоморфизм \tilde{T} сохраняет нумерацию и оснащение всех седловых критических точек, т.е. этот диффеоморфизм не должен поворачивать сепаратрисы в критических точках на угол π по сравнению с исходным диффеоморфизмом T . Дополнительные свойства 1) и 2) означают, что если $F = F'$, то такие возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' не только послойно эквивалентны, но и послойно топологически эквивалентны и, в частности, лежат в пересечении одной связной компоненты класса послойной эквивалентности функций с малой окрестностью исходной функции. Отсюда следует, что любая связная компонента класса послойной эквивалентности есть класс топологической послойной эквивалентности; и что указанные пересечения суть страты некоторой стратификации малой окрестности данной функции (см. §2.5.2).

Ниже мы докажем следующее обобщение утверждения 2.5.2, точнее импликаций (iii) \implies (i) и (iii) \implies (iv) этого утверждения (импликации (i) \implies (ii), (ii) \implies (iii) и (iv) \implies (i) очевидны).

Лемма 2.5.5. Пусть функции F и F' заданы на одном и том же (ориентированном или неориентированном) атоме, и пусть возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' ограничены по C^3 -норме некоторой константой и C^2 -близки к функциям F и F' соответственно (т.е. удовлетворяют (2.5) и (2.6) при $r = 2$). Из согласованности набора критических значений (c'_1, \dots, c'_n) функции \tilde{F}' с графом возмущения W^{num} функции \tilde{F} следует сильная послойная эквивалентность возмущений \tilde{F} и \tilde{F}' .

Доказательство. Пусть \tilde{F} и \tilde{F}' — C^r -малые возмущения функций Морса F и F' (для некоторого $r \geq 2$), представляющих атом $V = (P, K)^\#$. Пусть W^{num} — граф возмущения для функции \tilde{F} , и пусть набор (c'_1, \dots, c'_n) критических значений функции \tilde{F}' согласован с графом возмущения W^{num} , т.е. удовлетворяет отношению частичного полупорядка \preceq , который задается графом возмущения W^{num} . Докажем, что возмущения \tilde{F} и \tilde{F}' сильно послойно эквивалентны. В частности, граф возмущения для функции \tilde{F}' совпадает с W^{num} .

Пусть $\pi_{\tilde{F}} : \tilde{P} \rightarrow W^{\text{num}}$ — каноническая проекция (2.4) поверхности на граф возмущения W^{num} функции \tilde{F} (т.е. на ее граф Кронрода-Риба W с метками). По определению графа Кронрода-Риба, на графе W^{num} корректно определена непрерывная функция $\tilde{f} = \tilde{F} \circ \pi_{\tilde{F}}^{-1}$. Построим на графе W^{num} еще одну непрерывную функцию, которую будем обозначать \tilde{f}' , обладающую следующими свойствами.

а) В окрестности каждой вершины графа возмущения W^{num} , которой приписан номер i , имеем: $\tilde{f}' \equiv \tilde{f} - c_i + c'_i$.

б) В окрестности каждого конца графа W^{num} имеем: $\tilde{f}' \equiv \tilde{f}$.

в) На каждом ребре графа возмущения W^{num} функция \tilde{f}' является гладкой строго возрастающей функцией от \tilde{f} и имеет положительную производную.

Существование такой функции \tilde{f}' на W^{num} очевидно следует из условия согласованности набора (c'_1, \dots, c'_n) с графом возмущения W^{num} . Рассмотрим функцию $\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}}$ на \tilde{P} . Ясно, что эта функция является морсовской и имеет те же связные компоненты линий уровня, что и функция \tilde{F} .

Теперь начнем построение диффеоморфизма $\tilde{T} : \tilde{P}' \rightarrow \tilde{P}$, переводящего связные компоненты линий уровня функции \tilde{F}' в связные компоненты линий уровня функции $\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}}$, а значит и функции \tilde{F} .

Введем риманову метрику на поверхности M и, тем самым, на ее подповерхностях $P, P', \tilde{P}, \tilde{P}'$. Окружим все критические точки x_i ($1 \leq i \leq n$) невозмущённой функции F попарно непересекающимися окрестностями, т.е. “координатными крестами”, в которых функция имеет вид квадратичной формы, по лемме Морса. Такой же вид будет иметь и возмущенная функция \tilde{F} , в некоторой быть может меньшей окрестности U_i . Аналогичную окрестность U'_i введем для \tilde{F}' .

Не ограничивая общности, мы будем считать, что диффеоморфизм $T : P' \rightarrow P$, осуществляющий послойную эквивалентность F' и F , переводит F в $F' - c' + c$, где c, c' – критические значения, т.е.

$$F \circ T = F' - c' + c.$$

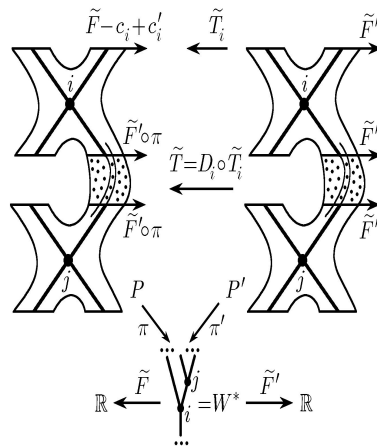


Рис. 2.1. Диффеоморфизм “креста”, переводящий функцию \tilde{F} в функцию \tilde{F}'

Рассмотрим диффеоморфизм \tilde{T}_i окрестности U'_i , близкий к $T|_{U'_i}$ по норме C^{r-2} (см. (3.11)–(3.16) и следствие 3.2.17) и переводящий функцию \tilde{F} в функцию \tilde{F}' с точностью до константы, зависящей от i :

$$\tilde{F} \circ \tilde{T}_i = \tilde{F}' - c'_i + c_i \quad \text{в } U'_i. \quad (2.8)$$

См. рис. 2.1. Рассмотрим композицию $D_i^{-1} \circ \tilde{T}_i$, где D_i – поток вдоль векторного поля $(\text{grad } \tilde{F})/|\text{grad } \tilde{F}|^2$ за время $\tau_i := \tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}} - \tilde{F} - c'_i + c_i$ (зависящее от номера i , точки из U_i и постоянное на связных компонентах линий уровня функции \tilde{F}), $D_i(\tilde{x}_i) := \tilde{x}_i$. Отметим, что по построению функции \tilde{f}' на графе возмущения W^{num} , отображение D_i тождественно вблизи критического уровня $\{\tilde{F} = c_i\}$ в U_i , кроме того

$$\tilde{F} \circ D_i = \tilde{F} + \tau_i = \tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}} - c'_i + c_i \quad \text{в } U_i. \quad (2.9)$$

Осталось проверить, что полученные диффеоморфизмы $D_i^{-1} \circ \tilde{T}_i$ можно согласованно продолжить до послойного диффеоморфизма \tilde{T} всей поверхности $\tilde{P}' \rightarrow \tilde{P}$, т.е. внутрь всех “лен-точек”, соединяющих “кресты” U'_i (рис. 2.1). По построению, на каждом кресте, а значит и

на любой общей границе соседних ленточки и креста, имеем

$$\tilde{F}' \stackrel{(2.8)}{=} \tilde{F} \circ \tilde{T}_i + c'_i - c_i = \tilde{F} \circ D_i \circ D_i^{-1} \circ \tilde{T}_i + c'_i - c_i \stackrel{(2.9)}{=} \tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}} \circ D_i^{-1} \circ \tilde{T}_i \quad \text{в } U'_i,$$

т.е. функция $\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}}$ переходит в \tilde{F}' при диффеоморфизмах $D_i^{-1} \circ \tilde{T}_i : U'_i \rightarrow U_i$ крестов. Это условие, очевидно, гарантирует продолжимость такого диффеоморфизма внутрь ленточек, до некоторого диффеоморфизма $\tilde{T} : \tilde{P}' \rightarrow \tilde{P}$ со свойством

$$\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}} \circ \tilde{T} = \tilde{F}'.$$

Дело в том, что на любой общей границе соседних ленточки и креста в \tilde{P} (соответственно в \tilde{P}') функция \tilde{F} (соответственно \tilde{F}') строго монотонна и ее значения параметризуют линии уровня на ленточке (рис. 2.1).

Итак, мы построили диффеоморфизм \tilde{T} , переводящий линии уровня функции \tilde{F}' в линии уровня функции $\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}}$. Но функция $\tilde{f}' \circ \pi_{\tilde{F}}$ имеет те же связные компоненты линий уровня, что и функция \tilde{F} . Поэтому построенный диффеоморфизм осуществляет послойную эквивалентность функций \tilde{F}' и \tilde{F} .

Изотопность диффеоморфизмов \tilde{T} и T , а также условия 1) и 2) из определения 2.5.4 легко проверяются из построения \tilde{T} . □

Построение графа возмущения по возмущенным критическим значениям функции Морса

Для полноты изложения изучим следующий естественный вопрос, возникающий в связи с утверждением 2.5.2 и леммой 2.5.5. Пусть задана функция Морса F на атоме $(P, K)^\#$, для которой ноль является единственным критическим значением. Пусть задан любой набор (c_1, \dots, c_n) . Как построить граф $W^{\text{num}} = W_{c_1 \dots c_n}^{\text{num}}$ (в смысле определения 2.4.1), который будет отвечать любому возмущенному гамильтониану \tilde{F} с критическими значениями вида $\varepsilon c_1, \dots, \varepsilon c_n$, а следовательно, и со значениями вида $a + \varepsilon c_1, \dots, a + \varepsilon c_n$? В частности, как построить граф возмущения W^{num} (см. определение 2.5.1), отвечающий такому возмущенному гамильтониану \tilde{F} ? В данном параграфе мы дадим ответ на эти вопросы в терминах линий уровня, заключенных между критическими значениями.

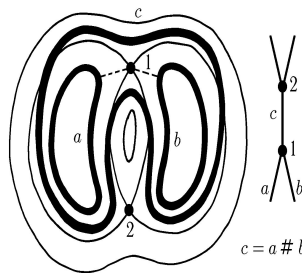


Рис. 2.2. Морсовская перестройка $c = a \# b$ пары отрицательных окружностей a, b в 1-ой вершине атома

1) Опишем построение сначала для случая простого возмущения функции Морса \tilde{F} . Без ограничения общности можно считать, что $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Возьмем первое значение c_1 . Тем самым, в множестве вершин атома выделилась одна вершина x_1 , отвечающая указанному значению c_1 . Рассмотрим все отрицательные окружности исходного атома, проходящие вблизи вершины x_1 . Таких окружностей — одна или две. Пусть, для определенности, их две. Начнем строить граф W^{num} . Сначала рассмотрим множество его нижних ребер, нижние концы которых взаимно-однозначно отвечают отрицательным окружностям исходного атома.

Теперь выделим среди них два ребра, которые войдут в первую вершину графа возмущения, т.е. лежащую на первом уровне (считая снизу вверх). Это именно те ребра, которые отвечают уже выбранной паре отрицательных окружностей, проходящих вблизи x_1 . Из этой вершины вверх выйдет ровно одно ребро. Оно отвечает одной окружности, получающейся как связная сумма двух предыдущих окружностей. Эти окружности нужно “сложить” операцией связной суммы в вершине x_1 , при помощи обычной морсовской перестройки. См. пример на рис. 2.2. Полученная окружность будет отвечать линиям уровня, проектирующимся на построенное ребро графа возмущения, выходящее из первой вершины. Затем процесс продолжается по той же схеме.

Если же вблизи точки x_1 проходила только одна отрицательная окружность, то картина переворачивается, т.е. одно нижнее ребро, входящее в вершину, расщепится на два исходящих ребра. Им будут отвечать линии уровня, опять получающиеся морсовской перестройкой из выбранной отрицательной окружности.

2) Пусть теперь возмущение произвольное, т.е. не обязательно является простым. Без ограничения общности можно считать, что $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. Возьмем первое значение c_1 и все последующие c_2, \dots, c_k , ему равные (если таковые есть). Отметим, что $c_{k+1} > c_k$. Тем самым, в множестве вершин атома выделилось подмножество вершин x_1, \dots, x_k , отвечающих указанному значению $c_1 = c_2 = \dots = c_k$. Рассмотрим все отрицательные окружности исходного атома, проходящие вблизи вершин x_1, \dots, x_k . Начнем строить граф возмущения W^{num} .

Сначала рассмотрим множество его нижних ребер, нижние концы которых взаимно-однозначно отвечают отрицательным окружностям исходного атома. Теперь разобьем эти ребра на группы, в каждой из которых ребра пойдут в одну вершину графа возмущения, лежащую на первом уровне (считая снизу вверх). Ребра из разных групп пойдут в разные вершины. В результате ребра, отвечающие отрицательным окружностям, проходящим вблизи вершин x_1, \dots, x_k , некоторым образом распределятся между вершинами первого уровня. Отметим, что на первом уровне таких вершин может быть несколько.

Два ребра назовем инцидентными номеру i , $1 \leq i \leq k$, если соответствующие им отрицательные окружности проходят вблизи вершины x_i . Будем говорить далее, что два ребра принадлежат одной группе, если их можно соединить таким образом цепочкой инцидентностей. В противном случае отнесем ребра к разным группам. Таким образом, мы разбили ребра на группы, в каждой из которых ребра входят в одну вершину. Этой вершине приписываются все номера, которые участвовали в цепочках инцидентностей ребер, входящих в эту вершину. В частности, совокупность всех номеров, приписываемых вершинам первого уровня, совпадает с $1, \dots, k$.

Фиксируем любую из только что построенных вершин графа возмущения. Опишем теперь ребра графа возмущения, исходящие из этой вершины. Для этого нужно взять отрицательные окружности, отвечающие входящим (в эту вершину графа возмущения) ребрам, и осуществить их морсовские перестройки в тех точках, номера которых отвечают построенной вершине графа возмущения.

Далее процесс построения графа возмущения продолжается аналогичным образом, двигаясь снизу вверх. Число шагов будет равно числу различных чисел в наборе (c_1, \dots, c_n) .

Тем самым, построение искомого графа возмущения закончено.

Опишем некоторое очевидное свойство построенного графа возмущения. Граф возмущения можно получить, построив сначала простой граф возмущения (определение 2.5.1 (C)) для набора (c'_1, \dots, c'_n) , в котором все числа строго возрастают. Затем, чтобы получить граф возмущения для требуемого набора (c_1, \dots, c_n) , нужно стянуть в точку u полученного простого графа возмущения некоторые группы ребер. Точное описание этих групп указано выше.

2.5.1 Топологическая классификация и критерий топологической сопряженности возмущенных функций Морса

Пусть $N := p + q + r$ — число критических точек функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$.

Определение 2.5.6. (А) Для любого вектора $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ определим *упорядоченное разбиение* $J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества номеров $1, \dots, N$ на непустые и попарно непересекающиеся подмножества $J_i \subseteq \{1, \dots, N\}$ следующими условиями:

- $s \in [1, N]$ есть количество элементов множества $\{c_1, \dots, c_N\}$,
- $\{1, \dots, N\} = J_1 \cup \dots \cup J_s$,
- для любых $i \in \{1, \dots, s\}$ и $j, k \in J_i$ выполнено $c_j = c_k$,
- для любых $i, \ell \in \{1, \dots, s\}$ со свойством $i < \ell$ и любых $j \in J_i$ и $k \in J_\ell$ выполнено $c_j < c_k$.

Пусть $\widehat{J} = (\widehat{J}_1, \dots, \widehat{J}_s)$ — любое упорядоченное разбиение множества номеров $1, \dots, N$ на непустые и попарно непересекающиеся подмножества. Множество

$$\mathcal{S}_{\widehat{J}} := \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N \mid J(\mathbf{c}) = \widehat{J}\}$$

назовем *стратом* в \mathbb{R}^N , отвечающим упорядоченному разбиению \widehat{J} , а разбиение \mathbb{R}^N на такие страты — *стратификацией* в \mathbb{R}^N .

(В) Любой функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ (или $F \in \mathcal{F}^{\text{num}}(M)$) с пронумерованными критическими точками сопоставим страт $\mathcal{S}_{J(\mathbf{c}(F))} \subset \mathbb{R}^N$, где $\mathbf{c}(F) = (c_1(F), \dots, c_N(F)) \in \mathbb{R}^N$ — набор значений (2.7) функции F в ее критических точках.

Замечание 2.5.7. Приведем простые и хорошо известные свойства указанной стратификации в \mathbb{R}^N :

(1) \mathbb{R}^N есть объединение стратов, страты непусты и попарно не пересекаются, количество стратов конечно.

(2) Указанная стратификация в \mathbb{R}^N “порождена” набором гиперплоскостей вида $\Delta_{ij} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N \mid c_i = c_j\}$ (больших диагоналей) в \mathbb{R}^N (т.е. любой страт есть связная компонента пересечения нескольких гиперплоскостей набора с дополнением к объединению остальных гиперплоскостей набора).

(3) Любой страт является гладким стягиваемым подмногообразием в \mathbb{R}^N , гомеоморфным \mathbb{R}^s (где s , как и выше, есть количество подмножеств в разбиении \widehat{J} , отвечающем страту).

(4) Страт $\mathcal{S}_{\widehat{J}}$ примыкает к страту \mathcal{S}_J (т.е. $\mathcal{S}_J \subseteq \partial \mathcal{S}_{\widehat{J}}$, обозначаем $\mathcal{S}_J \prec \mathcal{S}_{\widehat{J}}$, см. определение 2.7.9 (В) или 3.3.2 (D)) тогда и только тогда, когда разбиение \widehat{J} получается из разбиения J путем измельчения (т.е. $\widehat{J} \prec J$, см. (3.20) или шаг 1 доказательства теоремы 2.7.11).

Из утверждения 2.5.2 и леммы 2.3.2 (т.е. нашего критерия топологической эквивалентности [132]) получаем следующий критерий топологической эквивалентности возмущенных функций Морса.

Следствие 2.5.8 (критерий топологической эквивалентности возмущенных функций). Пусть даны два возмущения $\widetilde{F}, \widetilde{F}' \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ функции Морса F на атоме $(P, K)^\#$ сложности n . Предположим, что любая функция $F, F', \widetilde{F}, \widetilde{F}'$ принимает значение ± 1 на любой граничной окружности поверхности P . Следующие условия равносильны:

- (i) возмущенные функции \widetilde{F} и \widetilde{F}' эквивалентны,
- (ii) их графы возмущения $W^{\text{num}}, (W^{\text{num}})'$ с указанной выше структурой упорядоченных графов (т.е. упорядоченные графы возмущения) изоморфны,

- (iii) наборы критических значений $\mathbf{c}(\tilde{F})$ и $\mathbf{c}(\tilde{F}')$ функций \tilde{F} и \tilde{F}' индуцируют одно и то же упорядоченное разбиение $J(\mathbf{c}(\tilde{F})) = J(\mathbf{c}(\tilde{F}'))$ множества $\{1, \dots, n\}$ (см. определение 2.5.6),
- (iv) возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' топологически эквивалентны (определение 2.2.4 (B)).

Доказательство. Импликации (i) \implies (ii), (ii) \implies (iii) и (iv) \implies (i) очевидны. Импликация (iii) \implies (iv) следует из аналогичной импликации в утверждении 2.5.2 и из нашего критерия топологической эквивалентности [132] (см. лемму 2.3.2). \square

Следствие 2.5.9 (критерий топологической сопряженности возмущенных функций Морса). Пусть даны два возмущения $\tilde{F}, \tilde{F}' \in \mathcal{F}^{\text{num, fr}}(P)$ функции Морса F на атоме $(P, K)^\#$ сложности n . Предположим, что любая функция $F, F', \tilde{F}, \tilde{F}'$ принимает значение ± 1 на любой граничной окружности поверхности P . Следующие условия равносильны:

- (i) возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' сопряжены,
- (ii) их графы возмущения $W^{\text{num}}, (W^{\text{num}})'$ изоморфны, а наборы критических значений $\mathbf{c}(\tilde{F})$ и $\mathbf{c}(\tilde{F}')$ функций \tilde{F} и \tilde{F}' совпадают,
- (iii) наборы критических значений $\mathbf{c}(\tilde{F})$ и $\mathbf{c}(\tilde{F}')$ функций \tilde{F} и \tilde{F}' совпадают,
- (iv) возмущенные функции \tilde{F} и \tilde{F}' топологически сопряжены (определение 2.2.4 (A)).

Подведем итоги:

(а) Молекула Фоменко $W^\#$ (определение 2.4.5) любой функции Морса F , а также КР-граф типичной функции Морса F , характеризуют класс **послойной эквивалентности** функции Морса F , а граф возмущения W^{num} (определения 2.4.1 и 2.5.1) — класс **топологической послойной эквивалентности** возмущения функции Морса на атоме. Эти графы являются траекторными инвариантами соответствующих гамильтоновых систем (с любыми симплектическими структурами) на поверхности M (а также инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) и наиболее часто используются в наших работах [129, 132, 137, 145] (и в главах 1, 2 и 4 настоящей работы).

(б) Эти же графы, снабженные структурой упорядоченного графа, характеризуют класс **эквивалентности** (т.е. лево-правую орбиту) функции Морса F , а упорядоченный граф возмущения — класс **топологической эквивалентности** возмущения функции Морса на атоме (см. следствие 2.5.8 выше). Связные компоненты таких орбит (т.е. классы топологической эквивалентности, или страты Максвелла) наиболее часто используются в [134, 135, 136] (и в главе 3 настоящей работы). Им отвечают “кирпичи”, из которых мы построим комплекс функций Морса (в [133] и в §2.7) и комплекс оснащенных функций Морса (в [134] и в §3.3), тесно связанные с гомотопическим типом пространств $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}^{\text{num}}(M)$.

(в) Эти же графы, снабженные еще более тонкой структурой — набором значений функции F в критических точках, характеризуют класс **сопряженности** (т.е. правую орбиту) функции Морса F . Такие орбиты тоже изучаются в [134, 135, 136] (и в главе 3 настоящей работы). Изучению их топологии посвящена серия работ С.И. Максименко.

2.5.2 Стратификации Максвелла в пространстве \mathcal{F} функций Морса: разбиения на классы топологической (послойной) эквивалентности

Результат данного параграфа будет использован в определении естественной стратификации (см. (4.16)) в пространствах $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем

на поверхностях, в определениях 4.1.20 и 4.1.22 продолжимого и относительно-продолжимого инвариантов на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$, в определении 4.1.21 относительно-устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем на атоме по отношению к данному классу возмущений, а также в §4.3.2 при доказательстве свойств (1)–(4) разбиения любого страта пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ на классы C^0 -сопряженности.

Пусть M — компактная связная поверхность (ориентированная или неориентированная, возможно неориентируемая), $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ — пространство функций Морса $F \in C^\infty(M, \partial M)$ на M , и пусть

$$\mathcal{F}^{\text{num,fr}} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{num,fr}} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{num,fr}}(M) \quad (2.10)$$

— его подпространство, состоящее из функций $F \in \mathcal{F}$ с фиксированным числом n_0 точек локальных минимумов, n_2 точек локальных максимумов и n_1 седловых точек, причём критические точки каждого индекса 0,1,2 (т.е. локальные минимумы, седла и локальные максимумы) функций $F \in \mathcal{F}$ пронумерованы и оснащены (см. (4.9)), так что нумерация и оснащения критических точек сохраняются при непрерывном изменении функции F . Известно (теорема 2.6.11 или [129, теорема 10]), что пространство $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ распадается на две компоненты линейной связности, кроме случая функций Морса без седловых критических точек (в этом случае $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ линейно связно).

Из утверждения 2.5.2 следует, что разбиение пространства \mathcal{F} (или $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$) на классы **послойной эквивалентности** определяет стратификацию в \mathcal{F} (соотв. $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$), где каждый страт (называемый *стратом Максвелла*) есть связная компонента класса послойной эквивалентности. Более точно, разбиение пространства $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ на страты Максвелла имеет следующую “локальную структуру”:

(1) Каждый класс послойной эквивалентности функций из \mathcal{F} или $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ является гладким подмногообразием коразмерности $N - S = n_1 - s$ (см. определение 4.1.17 (C, D)) в $\mathcal{F}(M)$ или $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$, где $N = n_0 + n_1 + n_2$ (соотв. n_1) — число всех (соотв. седловых) критических точек функции из $\mathcal{F}(M)$, $S = S(F)$ (соотв. $s = s(F)$) — число всех (соотв. внутренних) вершин графа Кронрода-Риба функции F из данного класса. Действительно, рассмотрим непрерывное отображение (и даже гладкую субмерсию, см. определение 4.1.17 (A, B))

$$c: \mathcal{F}^{\text{num,fr}} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad F \mapsto (c_1(F), \dots, c_N(F)) = (F(x_1(F)), \dots, F(x_N(F))), \quad (2.11)$$

где $x_i(F)$ — i -ая критическая точка, а $c_i(F) = F(x_i(F))$ — i -ое критическое значение функции $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$. Тогда (в силу утверждения 2.5.2) в достаточно малой окрестности любой функции F в $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ множество функций \tilde{F} , послойно эквивалентных F , задаётся набором $N - S$ функционально независимых уравнений вида $c_i(\tilde{F}) = c_j(\tilde{F})$, где x_i, x_j — седловые точки F , принадлежащие одному и тому же атому, т.е. проектирующиеся в одну и ту же вершину графа Кронрода-Риба функции F , так что $c_i(F) = c_j(F)$.

(2) К каждому страту Максвелла положительной коразмерности примыкает (определение 2.7.9 (B)) лишь конечное число стратов Максвелла, причём их коразмерности меньше коразмерности исходного страта Максвелла, а стратификация Максвелла пространства $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ в малой окрестности данной функции $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}$ является обратным образом при субмерсии (2.11) разбиения пространства \mathbb{R}^N с координатами c_1, \dots, c_N на страты Максвелла, где страт Максвелла функции \tilde{F} в \mathbb{R}^N задаётся некоторой системой линейных уравнений и строгих неравенств вида $c_i = c_j$ и $c_k < c_l$, где критические точки $x_i(F), x_j(F)$ принадлежат одному и тому же атому функции F , и то же верно для точек $x_k(F), x_l(F)$. При этом система уравнений и неравенств в \mathbb{R}^N , определяющих страт Максвелла функции \tilde{F} , примыкающий к страту Максвелла функции F , определяется отношением частичного полупорядка, отвечающим графу возмущения $W^{\text{num}}(\tilde{F})$ функции \tilde{F} , см. определения 2.4.1, 2.5.1, 2.5.3.

(2') Если функция \tilde{F} принадлежит указанной малой окрестности функции F (т.е. \tilde{F} близка к F), то страт Максвелла функции \tilde{F} примыкает к страту Максвелла функции F , и существует естественное сюръективное клеточное отображение графов $W^{\text{num}}(\tilde{F}) \rightarrow W^{\text{num}}(F)$,

индуцированное некоторым непрерывным отображением $M \rightarrow M$ (которое можно построить аналогично отображению (3.51)), близким к id_M и переводящим множество критических точек функции \tilde{F} в множество критических точек функции F с сохранением их нумерации. Полным прообразом любого открытого ребра e графа $W^{\text{num}}(F)$ при указанном клеточном отображении графов является некоторое открытое ребро \tilde{e} графа $W^{\text{num}}(\tilde{F})$, и ограничение отображения графов на данное ребро является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $e \rightarrow \tilde{e}$. Получаем вложение $E(W^{\text{num}}(F)) \rightarrow E(W^{\text{num}}(\tilde{F}))$, $e \mapsto \tilde{e}$, между множествами ребер графов $W^{\text{num}}(F)$ и $W^{\text{num}}(\tilde{F})$. Ребра графа $W^{\text{num}}(\tilde{F})$, принадлежащие образу этого вложения, будем называть *старыми ребрами*, а остальные его ребра — *новыми ребрами*. Например:

- (i) указанное ребро \tilde{e} графа $W^{\text{num}}(\tilde{F})$ возмущенной функции \tilde{F} — это старое ребро, которому отвечает ребро e графа $W^{\text{num}}(F)$ исходной (невозмущенной) функции F ;
- (ii) новые ребра для графа возмущения, отвечающего возмущению некоторой функции на седловом атоме (определение 2.5.1 (B)), — это в точности внутренние ребра графа возмущения.

(3) Любые две послойно эквивалентные функции $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$, достаточно близкие к F , послойно топологически эквивалентны, а потому принадлежат одному страту Максвелла в \mathcal{F} , т.е. одной связной компоненте в пространстве послойно эквивалентных функций. В частности, любая функция \tilde{F} , достаточно близкая к F и послойно эквивалентная F , принадлежит страту Максвелла функции F , т.е. связной компоненте F в пространстве функций, послойно эквивалентных F .

(4) Открытые страты Максвелла (корузмерности 0) состоят из простых функций Морса $F \in \mathcal{F}$ (определение 2.5.1 (C)).

Теперь вместо послойной эквивалентности и топологической послойной эквивалентности рассмотрим более тонкие отношения эквивалентности на пространстве \mathcal{F} (или $\mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$) — **эквивалентность** и **топологическую эквивалентность** функций Морса (см. определение 2.2.4 (B)). Из следствия 2.5.8 получаем, что разбиение пространства на классы эквивалентности определяет аналогичную стратификацию в \mathcal{F} (соотв. $\mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$), где каждый страт есть класс топологической эквивалентности и совпадает со связной компонентой класса эквивалентности и выполнены аналоги свойств 1)–4) выше. При этом в п.2) соответствующая стратификация пространства \mathbb{R}^N имеет более стандартный вид (описанный в определении 2.5.6 (A) и замечании 2.5.7).

2.6 Теорема Матвеева об изотопности функций Морса с закрепленными точками локальных экстремумов. Обобщение на случай нумерованных и оснащенных седел

В 1997 г. А.Т. Фоменко поставил вопрос о линейной связности пространств функций Морса с фиксированным числом точек локальных минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности M . Положительный ответ был получен автором [129, теорема 4] для случаев $M = S^2, \mathbb{R}P^2$ (см. теорему 1.6.2), а в общем случае С.В. Матвеевым [129, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишангом [38] (см. эквивалентные теоремы 2.1.1, 2.6.1 и 2.6.2). Нам известно несколько разных доказательств этого утверждения в литературе, принадлежащих С.В. Матвееву [129, теоремы 8 и 8'], Х. Цишангу [38, 40] и С.И. Максименко [96]. С.В. Матвеев доказал это утверждение в наиболее сильной формулировке [129, теоремы 8 и 8'] — для пространств функций Морса с фиксированными критическими точками локальных экстремумов. Однако это доказательство было недостаточно полным, точнее две леммы [129, леммы 16 и 17] не были доказаны в полной мере. Мы приведем здесь доказательство этих двух лемм, основанное на понятии оснащенных функций Морса, введенном автором и Д.А. Пермяковым [143].

Также мы сформулируем некоторые обобщения теоремы Матвеева (теоремы 2.6.9 и 2.6.11), выведенные автором в [129] из теоремы Матвеева.

В данном параграфе изучаются не только малые возмущения заданной функции Морса (изученные в §1.6 и §2.5), но и “большие возмущения”, т.е. произвольные изотопии (определение 1.6.1) функций Морса на данной поверхности. Поверхность M не предполагается ориентируемой.

Рассмотрим замкнутую двумерную поверхность M . Обозначим через

$$\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}} := \{f \in \mathcal{F}_{p,q}(M) \mid \mathcal{C}_{f,0} = \mathcal{C}_{f_*,0}, \mathcal{C}_{f,2} = \mathcal{C}_{f_*,2}\}$$

совокупность всех функций Морса на этой поверхности, имеющих фиксированное число p точек локальных минимумов и фиксированное число q точек локальных максимумов, причем все эти точки предполагаются фиксированными точками на поверхности M . В обозначениях определения 2.2.2 имеем $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}} := \mathcal{F}_{p,r,q}(M; \mathcal{C}_{f_*,0}, \emptyset, \mathcal{C}_{f_*,2})$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $r := p + q - \chi(M)$ и $f_* \in \mathcal{F}_{p,q}(M)$ — “базисная” функция Морса.

Теорема 2.6.1 (С.В. Матвеев [129, теорема 8], 1997 г.). *Если M — любая связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство функций Морса $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$ линейно связно, при любых значениях p и q . Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 на поверхности M , у которых все точки минимумов и максимумов совпадают, можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в том же пространстве $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$ функций с фиксированным расположением минимумов и максимумов, в частности, в пространстве всех функций Морса на поверхности M (без “рождений” и “уничтожений”).* \square

Эту теорему полезно переформулировать на языке поверхностей P с краем, снабженных функцией Морса, постоянной на граничных окружностях, и имеющей лишь седловые точки. Такие поверхности называются поверхностями–бордизмами (точное определение см. ниже). Поскольку точки локальных экстремумов предполагаются фиксированными на поверхности M , то теорему 2.6.9 можно переформулировать на языке поверхностей–бордизмов, выбросив из поверхности M малые диски, являющиеся окрестностями точек минимумов и максимумов. Продеформируем функцию так, чтобы в процессе деформации функция оставалась морсовской и ее линии уровня не менялись, а в результате деформации функция принимала значения ± 1 на границе P . В результате получится поверхность P с функцией Морса f на нем, имеющей лишь седловые критические точки. Имеем $f \in C^\infty(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ для некоторого разбиения края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$ на положительные и отрицательные граничные окружности (см. определение 2.2.1 (А)). Полученную тройку $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ называют *поверхностью–бордизмом*, а полученные функции Морса из пространства $C^\infty(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ — функциями Морса на данной поверхности–бордизме (точное определение см. чуть ниже). Поставим задачу более точно.

Пусть P — поверхность с краем, граничные компоненты которой разбиты на два класса $\partial^+ P$ и $\partial^- P$: положительные и отрицательные окружности. Пусть имеется $p > 0$ отрицательных окружностей и $q > 0$ положительных. Обозначим через

$$\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P) \subset C^\infty(P, \partial^+ P, \partial^- P)$$

пространство всех функций f Морса на поверхности P со следующими свойствами.

- 1) Функция f имеет лишь седловые критические точки на поверхности P .
- 2) Функция f не имеет критических точек на границе поверхности.
- 3) Функция f принимает значение $+1$ на всех q положительных компонентах границы и принимает значение -1 на всех p отрицательных компонентах границы.

Такую тройку $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ называют *поверхностью–бордизмом*, а полученные функции Морса из пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ — *функциями Морса на данной поверхности–бордизме*.

Теорема 2.6.2 (С.В. Матвеев [129, теорема 8']). *Пространство $\mathcal{F}^1(P, \partial^+P, \partial^-P)$ функций Морса указанного вида на поверхности P линейно связно.* \square

Комментарий. Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 , имеющие лишь седловые критические точки на поверхности P , и принимающие одинаковые значения: $+1$ на компонентах границы ∂^+P и -1 на компонентах границы ∂^-P , можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве функций Морса того же типа, т.е. внутри пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+P, \partial^-P)$. В частности, никаких рождений и уничтожений критических точек в процессе такой гомотопии не происходит.

Как уже отмечалось, теоремы 2.6.1 и 2.6.2 эквивалентны. Поэтому для их доказательства достаточно доказать теорему 2.6.2 о связности пространства функций Морса на фиксированной поверхности–бордизме $(P, \partial^+P, \partial^-P)$. В работе [129, доказательство теоремы 8'] приведено доказательство С.В. Матвеева теоремы 2.6.2, использующее две леммы [129, леммы 16 и 17], однако доказательства этих лемм не были достаточно полными. Ниже мы сформулируем и докажем эти две леммы 2.6.6 и 2.6.8.

Введем следующее

Определение 2.6.3. Пусть G — замкнутое подмножество поверхности P с краем. *Регулярной окрестностью* подмножества G в P назовем малую (т.е. содержащуюся в ε -окрестности, где ε достаточно мало) окрестность U подмножества G в P , такую что граница ∂U этой окрестности распадается на гладкие дуги, причем $[U] \setminus G$ диффеоморфно $(\partial U) \times (0, 1]$, где $[U]$ — замыкание U в P .

Рассмотрим поверхность–бордизм $(P, \partial^+P, \partial^-P)$, т.е. поверхность P с краем, граничные компоненты которой разбиты на два класса ∂^+P и ∂^-P : положительные и отрицательные окружности. Фиксируем на поверхности P произвольную риманову метрику. Рассмотрим произвольную функцию Морса $f \in \mathcal{F}^1(P, \partial^+P, \partial^-P)$, т.е. функцию Морса на поверхности P со следующими свойствами.

- 1) Функция f имеет лишь седловые критические точки на поверхности P .
- 2) Функция f не имеет критических точек на границе поверхности.
- 3) Функция f принимает значение $+1$ на всех p положительных компонентах границы и принимает значение -1 на всех q отрицательных компонентах границы.

Пусть x_1, \dots, x_r — (седловые) критические точки функции f . Для каждой критической точки x_i рассмотрим гладкую неориентированную сепаратрисную дугу s_i , т.е. входящими в эту точку траекториями векторного поля $\text{grad } f$. Ясно, что каждый конец сепаратрисной дуги s_i лежит либо на ∂^-P , либо в некоторой другой седловой точке x_j функции f , где $f(x_j) < f(x_i)$. Функцию Морса $f \in \mathcal{F}^1(P, \partial^+P, \partial^-P)$ назовем *хорошей*, если оба конца каждой сепаратрисной дуги s_i лежат на ∂^-P . Ясно, что с помощью достаточно малой изотопии любой функции Морса f можно добиться, чтобы эта функция стала хорошей.

Определение 2.6.4. *Разрезом* поверхности–бордизма $(P, \partial^+P, \partial^-P)$ называется набор непесекающихся простых дуг s_1, \dots, s_r в P со следующими свойствами.

- 1) Внутренность каждой дуги s_i лежит внутри P , а концы этой дуги лежат на ∂^-P .
- 2) Дополнение к $\partial^-P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r$ в поверхности P гомеоморфно $(\partial^+P) \times (0, 1]$. То есть дуги s_1, \dots, s_r разбивают поверхность P в объединение плоских колец.

Объединение дуг разреза s_1, \dots, s_r и отрицательных окружностей ∂^-P назовем *узором* на поверхности–бордизме $(P, \partial^+P, \partial^-P)$.

Лемма 2.6.5 (С.В. Матвеев). *Для любой хорошей функции Морса f набор сепаратрисных дуг s_1, \dots, s_r является разрезом.*

Доказательство. Выпустим из верхнего края $\partial^+ P$ поверхности P интегральные траектории векторного поля $-(f+1)\text{grad } f$. Такие траектории определяют диффеоморфизм между $P \setminus (\partial^- P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r)$ и $(\partial^+ P) \times \mathbb{R}_+ \simeq (\partial^+ P) \times (0, 1]$, так как эти траектории взаимно не пересекаются и, очевидно, целиком покрывают $P \setminus (\partial^- P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r)$. Отметим, что эти траектории не выходят из поверхности P через отрицательные окружности $\partial^- P$, так как на этих окружностях указанное векторное поле обращается в ноль. Лемма доказана. \square

Лемма 2.6.6. (А) Для любого разреза s_1, \dots, s_r поверхности P и любого выбора точек $x_i \in s_i$ существует хорошая функция Морса f на P с критическими точками x_1, \dots, x_r , для которой входящими сепаратрисами служат отрезки дуг s_i этого разреза, на которые их разбивают точки x_i .

(В) Обозначим через

$$\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$$

совокупность всех хороших функций Морса на поверхности-бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ с фиксированными критическими точками x_1, \dots, x_r , для которых набор сепаратрисных дуг изотопен набору дуг s_1, \dots, s_r разреза (т.е. получается из этого разреза действием некоторого диффеоморфизма поверхности P , оставляющего неподвижными все точки x_1, \dots, x_r и изотопного тождественному в пространстве гомеоморфизмов P , переводящих в себя каждую точку x_1, \dots, x_r ; множество таких диффеоморфизмов обозначим через $\text{Diff}^0(P; \{x_1, \dots, x_r\})$). Пространство $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$ всех таких хороших функций Морса линейно связано.

Доказательство. (А) (С.В. Матвеев). Рассмотрим непересекающиеся регулярные окрестности U_i дуг s_i в P . В каждой такой окрестности U_i рассмотрим гладкую функцию g_i со следующими свойствами.

- 1) На границе ∂U_i окрестности U_i в P функция g_i постоянна и равна на ней 1.
- 2) Функция g_i имеет ровно одну критическую точку $x_i \in U_i$, причем эта точка является седловой.

3) Дуга s_i образована входящими в точку x_i сепаратрисами.

4) На каждой из этих сепаратрис функция g_i принимает значения в полуинтервале $[-1, 0)$.

Аналогично, рассмотрим регулярную окрестность U_0 нижнего края $\partial^- P$ поверхности P , не содержащую точки x_i . В этой окрестности рассмотрим гладкую функцию g_0 , которая

- 1) постоянна на всех компонентах ее границы $\partial^- P$ и ∂U_0 ,
- 2) она равна -1 на $\partial^- P$ и равна 1 на ∂U_0 , и
- 3) не имеет критических точек в U_0 .

Склеим теперь полученные функции в единую функцию f . Для этого рассмотрим регулярную окрестность U узора $\partial^- P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r$, лежащую в $U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$. Нетрудно показать, что в этой окрестности существует функция f , обладающая следующими свойствами.

1) Функция f постоянна на всех компонентах границы $\partial^- P$ и ∂U , причем ограничение функции f на $\partial^- P$ и ∂U равно соответственно -1 и $1/2$.

2) Вне окрестностей U_i Функция f совпадает с g_0 , а вне окрестности U_0 она совпадает с g_i .

3) Функция f не имеет других критических точек кроме x_1, \dots, x_r .

Заметим теперь, что, по определению разреза, дополнение к U в P распадается на положительные кольца $(\partial^+ P) \times [0, 1]$ с гладкими краями, каждое из которых примыкает ровно к одной положительной окружности из $\partial^+ P$. Поэтому построенную функцию f можно легко продолжить на всю поверхность P до некоторой хорошей функции Морса на поверхности-бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ с теми же критическими точками x_1, \dots, x_r . Существование хорошей функции f с заданными входящими сепаратрисами доказано. Заметим, что построенная функция f имеет ровно одно критическое значение — нулевое (число критических точек равно $r = -\chi(P) > 0$ по условию).

(В) (Е.А. Кудрявцева). Пусть $f \in \mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ — любая функция Морса, x_1, \dots, x_r — ее критические точки, и s_1, \dots, s_r — ее сепаратрисные дуги. В силу (А), существует функция $f_0 \in \mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$, имеющая не более одного критического значения, и имеющая те же критические точки x_1, \dots, x_r и те же сепаратрисные дуги s_1, \dots, s_r .

Шаг 1. Покажем, что (при подходящем выборе функции f_0) функции f, f_0 изотопны в пространстве

$$\mathcal{F}^1(P, s_1 \cup \dots \cup s_r; \{x_1, \dots, x_r\}) \subseteq \mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$$

функций Морса, имеющих фиксированный набор входящих сепаратрис s_1, \dots, s_r .

Нетрудно продеформировать функцию f_0 малым возмущением так, чтобы возмущенная функция $\tilde{f} \in \mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$ имела те же сепаратрисные дуги s_1, \dots, s_r . Более того, без ограничения общности можно считать, что в малой окрестности любой точки x_i функции f, f_0, \tilde{f} отличаются на некоторые аддитивные константы, причем $\operatorname{sgn}(f(x_i) - f(x_j)) = \operatorname{sgn}(\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x_j))$ для любых $i, j \in \{1, \dots, r\}$, и связные компоненты линий уровня этих функций совпадают в некоторых окрестностях множества $s_1 \cup \dots \cup s_r$. Значит, существует диффеоморфизм $h \in \operatorname{Diff}^+[-1; 1]$ такой, что $f(x_i) = h(\tilde{f}(x_i))$ для любого $i \in \{1, \dots, r\}$ и $h' \equiv 1$ в малой окрестности множества $\{\tilde{f}(x_1), \dots, \tilde{f}(x_r)\}$ в $[-1; 1]$.

Итак, хорошие функции Морса f и $h \circ \tilde{f}$ имеют одно и то же множество критических точек $\{x_1, \dots, x_r\}$, один и тот же набор входящих сепаратрис s_1, \dots, s_r , причем эти хорошие функции совпадают в малой окрестности U множества $\{x_1, \dots, x_r\}$, а также имеют одни и те же связные компоненты линий уровня в некоторой окрестности U_i любой дуги s_i . Нетрудно строится (единственный) диффеоморфизм $h_0 : P \rightarrow P$, тождественный в $U \cup \partial^- P$, переводящий интегральные кривые векторного поля $\operatorname{grad} f$ в интегральные кривые векторного поля $\operatorname{grad}(h \circ \tilde{f})$, и такой, что

$$f = h \circ \tilde{f} \circ h_0.$$

Без ограничения общности считаем, что U есть объединение “крестов” (см. определение 4.2.7), $U_i \setminus U$ состоит из интегральных кривых векторного поля $\operatorname{grad} f$ в $P \setminus U$, и $h(U_i) = U_i$, $1 \leq i \leq r$. Нетрудно проверяется, что h_0 изотопен некоторому диффеоморфизму $h_{1/2}$ в пространстве диффеоморфизмов пары $(P, s_1 \cup \dots \cup s_r)$ такому, что $h_{1/2} = \operatorname{id}$ в некоторой малой окрестности U_0 узора $s_1 \cup \dots \cup s_r \cup \partial^- P$, причем в процессе изотопии $\{h_t\}_{0 \leq t \leq 1/2}$ множество U остается неподвижным, а каждая связная компонента линии уровня функции $f|_{U_i}$ переходит в связную компоненту линии уровня этой функции.

Легко строится регулярная окрестность U_1 узора $s_1 \cup \dots \cup s_r \cup \partial^- P$ такая, что $\bar{U}_1 \subset U_0$ и дополнение к U_1 в P распадается на положительные кольца $(\partial^+ P) \times [0, 1]$ с гладкими краями, каждое из которых примыкает ровно к одной положительной окружности из $\partial^+ P$. Так как в каждом таком кольце диффеоморфизм $h_{1/2}$ неподвижен в окрестности отрицательной граничной окружности этого кольца, то он изотопен тождественному в пространстве всех таких диффеоморфизмов кольца на себя. Значит, $h_{1/2}$ изотопен диффеоморфизму $h_1 = \operatorname{id}_P$ в пространстве диффеоморфизмов, неподвижных в $U \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$. Обозначим полученную изотопию через $\{h_t\}_{1/2 \leq t \leq 1}$.

Итак, мы соединили хорошие функции Морса $h \circ \tilde{f}$ и $f = h \circ \tilde{f} \circ h_0$ изотопией $\{h \circ \tilde{f} \circ h_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ в $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$. Так как $h \in \operatorname{Diff}^+[-1; 1]$ и $\operatorname{Diff}^+[-1; 1]$ линейно связно, то получаем изотопию между функциями \tilde{f} и f в $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$. Из нашего построения видно, что построенная изотопия не выводит из пространства $\mathcal{F}^1(P, s_1 \cup \dots \cup s_r; \{x_1, \dots, x_r\})$ функций Морса с фиксированным набором сепаратрисных дуг s_1, \dots, s_r . С другой стороны, мы можем считать, что функция \tilde{f} получена из f_0 изотопией в пространстве $\mathcal{F}^1(P, s_1 \cup \dots \cup s_r; \{x_1, \dots, x_r\})$. Тем самым, мы получили изотопию в пространстве $\mathcal{F}^1(P, s_1 \cup \dots \cup s_r; \{x_1, \dots, x_r\})$ между хорошей функцией Морса f и некоторой функцией f_0 , имеющей не более одного критического значения.

Шаг 2. Рассмотрим теперь любые функции Морса $f_0, g_0 \in \mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$, имеющие не более одного критического значения (такие функции существуют согласно шагу 1). Нетрудно показать, что графы G_{f_0} и G_{g_0} (см. обозначение 2.3.1 (Б)) связны и изотопны друг другу относительно $\{x_1, \dots, x_r\}$, точнее $G_{f_0} = h(G_{g_0})$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \text{Diff}^0(P; \{x_1, \dots, x_r\})$. Отсюда следует, согласно нашему критерию топологической эквивалентности функций Морса (теорема 2.3.4), что функции f_0, g_0 топологически эквивалентны в пространстве $\mathcal{F}^1(P; \{x_1, \dots, x_r\})$ функций Морса с фиксированным множеством $\{x_1, \dots, x_r\}$ критических точек на $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$. Но так как эти функции имеют не более одного критического значения, то все эквивалентные им функции являются хорошими. Поэтому их класс топологической эквивалентности содержится в $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$ и линейно связен. Значит, f_0, g_0 изотопны в $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$.

Из шагов 1 и 2 получаем, что любые две хорошие функции Морса f, g из пространства $\mathcal{F}^1(P, [s_1 \cup \dots \cup s_r]; \{x_1, \dots, x_r\})$ изотопны в этом пространстве, т.е. это пространство линейно связно. Лемма доказана. \square

Замечание. Фактически мы построили функцию Морса f на P для заданного разложения поверхности M на ручки, см. [104].

Замечание. Легко показать, что любой путь в пространстве хороших функций Морса из пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ определяет изотопию набора входящих сепаратрис. Можно также показать, что любая изотопия разрезов порождается некоторым путем в пространстве хороших функций Морса. Таким образом, с учетом предыдущей леммы, сопоставление каждой функции Морса из пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ набора сепаратрисных дуг s_i устанавливает взаимно-однозначное соответствие между связными компонентами подпространства всех хороших функций Морса из пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ и связными компонентами пространства всех разрезов поверхности–бордизма $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$.

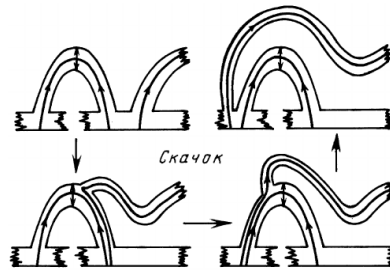


Рис. 2.3. Скачок сепаратрисной дуги s_i через дугу s_j при изотопии хорошей функции Морса

Определение 2.6.7. Пусть дуга s в $\partial^- P$ соединяет один конец дуги s_i с одним концом дуги s_j и не содержит других конечных точек дуг разреза s_1, \dots, s_r . Пусть U — регулярная окрестность кусочно-гладкой дуги $s_i \cup s \cup s_j$ в P . Заменим s_i единственной дугой s'_i в ∂U , которая не изотопна s_i и s_j . См. рис. 2.3. Переход от разреза s_1, \dots, s_r к разрезу $s_1, \dots, s'_i, \dots, s_r$ назовем скачком дуги s_i через дугу s_j , или скольжением ручки s_i по ручке s_j .

Лемма 2.6.8. Если два разреза поверхности–бордизма $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ можно соединить друг с другом последовательностью изотопий и скачков, то отвечающие этим разрезам функции Морса из пространства $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ можно соединить путем в пространстве $\mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ функций Морса на поверхности–бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$.

Доказательство. Приведем два способа доказательства этой леммы.

Способ 1 (С.В. Матвеев). См. рис. 2.3.

Способ 2 (Е.А. Кудрявцева). Этот способ использует оснащенные функции Морса (которые мы введем и изучим в гл. 3, см. теорему 3.2.1), а также наш критерий топологической эквивалентности функций Морса (теорема 2.3.4) и лемму 2.6.6 (В), и в некотором смысле является более подробным изложением способа 1. Пусть даны хорошая функция Морса $f \in \mathcal{F}^1 := \mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ с критическими точками x_1, \dots, x_r и сепаратрисными дугами s_1, \dots, s_r и хорошая функция Морса $\widehat{f} \in \mathcal{F}^1$ с набором сепаратрисных дуг $\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_r$, получающимся из набора s_1, \dots, s_r скачком дуги s_i через дугу s_j . Без ограничения общности (ввиду шага 1 доказательства леммы 2.6.6 (В)) мы можем и будем считать, что каждая функция f, \widehat{f} имеет ровно одно критическое значение — нулевое. Построим искомый путь между функциями f, \widehat{f} в \mathcal{F}^1 за 5 шагов.

Шаг 1. Пусть α — оснащение функции f (оно существует согласно теореме 3.2.1), т.е. $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ — оснащенная функция Морса. Так как f имеет лишь одно критическое значение, то нетрудно проверяется, что объединение $s_1 \cup \dots \cup s_r \cup u_1 \cup \dots \cup u_r$ всех (входящих и выходящих) ее сепаратрис изотопно объединению $s_1^* \cup \dots \cup s_r^* \cup u_1^* \cup \dots \cup u_r^*$ всех сепаратрис оснащенной функции Морса (f, α) в смысле определения 3.2.2 (т.е. объединению замыканий интегральных кривых поля ядер 1-формы α). То есть, $s_1^* \cup \dots \cup s_r^* \cup u_1^* \cup \dots \cup u_r^* = h(s_1 \cup \dots \cup s_r \cup u_1 \cup \dots \cup u_r)$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \text{Diff}^0(P; \{x_1, \dots, x_r\})$, см. лемму 2.6.6 (В).

Пусть $s'_i \subset s_i$ и $s'_j \subset s_j$ — сепаратрисы функции Морса f , входящие в точки x_i и x_j соответственно, такие, что $(s'_i \cup s'_j) \cap \partial P = \partial s$ (см. определение 2.6.7). Ясно, что существует ребро $e \subset f^{-1}(0)$ графа $f^{-1}(0)$ с концами в точках x_i, x_j такое, что кусочно-гладкая ломаная $s'_i \cup s \cup s'_j \cup e$ ограничивает диск в P , не содержащий в своей внутренности критических точек функции f . Ориентируем ребро e в направлении от точки x_i к x_j . Пусть u'_j — сепаратриса функции Морса f , выходящая из точки x_j и такая, что пересечение кусочно-гладких кривых $e u'_j$ и s_j в точке x_j является несобственным (т.е. это пересечение можно устранить сколь угодно малым шевелением кривых). Обозначим $s_i^{**} := h(s'_i) \subset s_i^*$ — сепаратриса оснащенной функции Морса (f, α) , входящая в точку x_i и отвечающая сепаратрисе s'_i функции f как указано выше, и $u_j^{**} := h(u'_j) \subset u_j^*$ — сепаратриса оснащенной функции Морса (f, α) , выходящая из точки x_j и отвечающая сепаратрисе u'_j функции f .

Шаг 2. Рассмотрим “возмущенную” функцию $\widetilde{f} \in \mathcal{F}^1$ такую, что $\widetilde{f} = f$ в некоторой окрестности U_k любой точки x_k , $k \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$, и $\widetilde{f} = f + \varepsilon$ в некоторой окрестности U_i точки x_i , где $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число. Можем считать, что возмущение достаточно мало, поэтому имеем оснащенную функцию Морса $(\widetilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Существует окружность $\gamma \subset \widetilde{f}^{-1}(\varepsilon/2)$ такая, что $\gamma \cap s_i^{**} \neq \emptyset$ и $\gamma \cap u_j^{**} \neq \emptyset$, причем точки пересечения сепаратрис s_i^{**}, u_j^{**} с окружностью γ можно соединить дугой $\widetilde{e} \subset \gamma$ такой, что \widetilde{e} не пересекает сепаратрисы $s_i^* \setminus s_i^{**}$ и $u_j^* \setminus u_j^{**}$ и никакую дугу u_k^* , $k \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i, j\}$. Заметим, что дуга \widetilde{e} близка к дуге e . Введем ориентацию дуги \widetilde{e} от точки $\gamma \cap s_i^{**}$ до точки $\gamma \cap u_j^{**}$. Введем индуцированную ориентацию окружности γ . Без ограничения общности мы можем и будем считать, что существует путь $f_t \in \mathcal{F}^1$, $0 \leq t \leq 1/2$, такой, что $f_t = f$ в любой окрестности U_k при $k \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$, $f_t = f + 2\varepsilon t$ в U_i , причем $f_0 = f$ и $f_{1/2} = \widetilde{f}$. Так как возмущение можно считать достаточно малым, имеем $(f_t, \alpha) \in \mathbb{F}^1$.

Шаг 3. Нетрудно строится путь $(\widetilde{f}, \alpha_t) \in \mathbb{F}^1$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве оснащенных функций Морса такой, что $\alpha_t = \alpha$ вне малой регулярной окрестности U дуги \widetilde{e} в $P \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, $\alpha_0 = \alpha$, и при $0 \leq t < 1/2$ точка $\gamma \cap s_i^{**}(t)$ является началом дуги $\widetilde{e}(t) \subset \gamma$, а $\gamma \cap u_j^{**}(t)$ — ее концом, $\gamma \cap s_i^{**}(1/2) = \gamma \cap u_j^{**}(1/2)$, при $1/2 < t \leq 1$ точка $\gamma \cap s_i^{**}(t)$ является концом дуги $\widetilde{e}(t)$, а $\gamma \cap s_j^{**}(t)$ — ее началом. Здесь $\widetilde{e}(t) \subset \gamma$ — непрерывно зависящая от t дуга с указанными свойствами и совпадающая с \widetilde{e} при $t = 0$, $s_k^*(t)$ — непрерывно зависящая от t сепаратрисная дуга 1-формы α_t , совпадающая с s_k^* при $t = 0$ ($1 \leq k \leq r$), а $s_i^{**}(t) \subset s_i^*(t)$ и $u_j^{**}(t) \subset u_j^*(t)$

— непрерывно зависящие от t сепаратрисы 1-формы α_t , входящая в точку x_i и выходящая из точки x_j (соответственно) и совпадающие с s_i^{**}, u_j^{**} при $t = 0$; дуга $\tilde{e}(t) \subset \gamma$ окружности γ считается ориентированной согласно ориентации окружности γ .

Обозначим сепаратрисные дуги оснащенной функции $(f_{1/2}, \alpha_1)$ через $\tilde{s}_k := s_k^*(1), 1 \leq k \leq r$. Тогда набор сепаратрисных дуг $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_r$ оснащенной функции Морса $(f_{1/2}, \alpha_1)$ получается из набора сепаратрисных дуг s_1^*, \dots, s_r^* оснащенной функции Морса (f_0, α_0) скачком дуги s_i^* через дугу s_j^* .

Шаг 4. Так как у α_1 нет сепаратрис, ведущих из одного седла в другое, то существует путь $(f_t, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1, 1/2 \leq t \leq 1$, в пространстве оснащенных функций Морса такой, что f_1 имеет ровно одно критическое значение, и при любом $t \in [1/2, 1)$ функция f_t топологически эквивалентна функции $f_{1/2} = \tilde{f}$. Так как набор сепаратрисных дуг оснащенной функции Морса (f_1, α_1) совпадает с набором сепаратрисных дуг $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_r$ оснащенной функции $(f_{1/2}, \alpha_1)$, то (согласно шагу 3) он получается из набора сепаратрисных дуг s_1^*, \dots, s_r^* оснащенной функции Морса $(f, \alpha) = (f_0, \alpha_0)$ скачком дуги s_i^* через дугу s_j^* . Так как каждая функция f_0, f_1 имеет лишь одно критическое значение, то (с учетом шага 1) отсюда следует, что набор сепаратрисных дуг функции Морса f_1 изотопен набору, получающемуся из набора сепаратрисных дуг s_1, \dots, s_r функции Морса $f = f_0$ скачком дуги s_i через дугу s_j .

Шаг 5. Итак, мы построили путь в пространстве \mathbb{F}^1 оснащенных функций Морса, соединяющий оснащенные функции (f_0, α_0) и (f_1, α_1) , а значит, и путь в пространстве \mathcal{F}^1 функций Морса, соединяющий функции f_0 и f_1 . Но обе функции f_1 и \tilde{f} имеют лишь одно критическое значение и (в силу шага 4) их наборы сепаратрисных дуг изотопны друг другу, т.е. отличаются друг от друга действием некоторого диффеоморфизма из группы $\text{Diff}^0(P)$. Используя эту изотопию и лемму 2.6.6 (В), получаем, что функции f_1 и \tilde{f} топологически эквивалентны, а потому их тоже можно соединить путем в пространстве \mathcal{F}^1 функций Морса на P . Из указанных путей получаем искомый путь в \mathcal{F}^1 , соединяющий функции $f_0 = f$ и \tilde{f} .

Лемма доказана. □

Развивая идеи С.В. Матвеева доказательства теорем 2.6.1 и 2.6.2, автором были доказаны [129] следующие усиления этого результата.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$$

функций Морса f со следующими свойствами на замкнутой двумерной поверхности M . Оно аналогично пространству $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)$, рассмотренному в параграфе 1.6.

- 1) Функция f имеет p точек локальных минимумов и q точек локальных максимумов.
- 2) Все точки минимумов и максимумов функции f предполагаются фиксированными на поверхности M .
- 3) На множестве всех седловых критических точек функции f задано и фиксировано отношение порядка, или нумерация.

Такую функцию Морса f можно назвать *функцией с нумерацией* или *нумерованной функцией*, с фиксированными точками локальных экстремумов.

Ясно, что пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$ является накрывающим для пространства $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$. На пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$ очевидно действует группа перестановок Σ_r . Здесь r — число седловых критических точек функции f . Ясно, что $r = p+q-\chi(M)$, где $\chi(M) = 2-2g$ или $2-\mu$ — эйлерова характеристика поверхности M , g и μ — род поверхности M (в ориентируемом и неориентируемом случае). Факторизуя пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$ по действию этой группы, мы и получаем пространство $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$. Слой получившегося накрытия изоморфен группе Σ_r .

Любая изотопия $f_t, 0 \leq t \leq 1$, функций Морса (определение 1.6.1), лежащих в пространстве $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$, однозначно определяет изотопию в накрывающем пространстве $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$ нумерованных функций, такую, что при непрерывном изменении положения критических точек на поверхности сохраняется их отношение порядка, т.е. нумерация.

Рассмотрим еще одно пространство

$$\mathcal{F}_{p,q}^{\text{fr}}(M)_{\text{extr}}$$

функций Морса f со свойствами 1), 2) и 3') на замкнутой двумерной поверхности M , где свойство 3') определяется так.

3') В каждой седловой критической точке функции Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$ фиксировано ее оснащение (определение 2.2.2 (B)).

Назовем такую функцию f *функцией Морса с оснащенными критическими точками*. Полученное пространство функций Морса с оснащенными критическими точками обозначим через $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{fr}}(M)_{\text{extr}}$. Ясно, что это пространство является накрывающим для пространства $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$ со слоем, изоморфным группе $(\mathbb{Z}_2)^r$.

Теорема 2.6.9 ([129, теорема 9]). *Если M — любая связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$ нумерованных функций и пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{fr}}(M)_{\text{extr}}$ функций Морса с оснащенными критическими точками линейно связны, при любых значениях p и q .* \square

Поскольку точки минимумов и максимумов предполагаются фиксированными на поверхности M , то теорему 2.6.9 можно переформулировать на языке поверхностей–бордизмов аналогично теореме 2.6.2. Обозначим через

$$\mathcal{F}^{1,\text{num}}(P, \partial^+ P, \partial^- P), \quad \mathcal{F}^{1,\text{fr}}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$$

пространства функций Морса $f \in \mathcal{F}^1(P, \partial^+ P, \partial^- P)$, все критические точки которых пронумерованы (соответственно оснащены). Теорема 2.6.9 утверждает в действительности следующее.

Теорема 2.6.10 ([129, теорема 9']). *а) Любые две нумерованные функции Морса f_0 и f_1 , заданные на одной и той же компактной поверхности P с фиксированным разбиением края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$ на положительные и отрицательные граничные окружности (т.е. на одной и той же поверхности–бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$), могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии (определение 1.6.1), сохраняющей функцию на крае. При этом нумерация седловых точек функции f_0 перейдет в нумерацию седловых точек функции f_1 . Другими словами, пространство $\mathcal{F}^{1,\text{num}}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ нумерованных функций Морса на поверхности–бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ линейно связно.*

б) Аналогично, любые две функции Морса f_0 и f_1 с оснащенными критическими точками, заданные на одной и той же компактной поверхности P с фиксированным разбиением края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$, могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии, сохраняющей функцию на крае. При этом оснащения седловых точек функции f_0 перейдут в оснащения седловых точек функции f_1 . Другими словами, пространство $\mathcal{F}^{1,\text{fr}}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ функций Морса f с оснащенными критическими точками на поверхности–бордизме $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ линейно связно. \square

Теоремы 2.6.9 и 2.6.10 можно еще усилить. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num,fr}}(M)_{\text{extr}}$$

функций Морса с оснащено–нумерованными критическими точками. То есть, пространство нумерованных функций $f \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{num}}(M)_{\text{extr}}$, в каждой седловой точке которых фиксировано оснащение — ориентация сепаратрисной дуги. Ясно, что это пространство является накрывающим пространством над пространством $\mathcal{F}_{p,q}(M)_{\text{extr}}$ со слоем, изоморфным группе $\Sigma_r \times (\mathbb{Z}_2)^r$. Обозначим через

$$\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num,fr}'}(M)_{\text{extr}}$$

пространство нумерованных функций Морса, для которых фиксированы оснащения не всех седловых точек, а всех кроме одной (скажем, последней).

Теорема 2.6.11 ([129, теорема 10]). *а) Если M — любая связная замкнутая двумерная поверхность и число седел $r = p + q - \chi(M) > 0$, то пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num,fr}}(M)_{\text{extr}}$ функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками распадается на две компоненты линейной связности.*

б) Если M — связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{num,fr}'}(M)_{\text{extr}}$ функций Морса с оснащено-нумерованными критическими точками, для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, линейно связно. \square

Пусть P — поверхность с фиксированным разбиением края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$ на положительные и отрицательные граничные окружности (т.е. $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ — это поверхность-бордизм). Обозначим через

$$\mathcal{F}^{1,\text{num,fr}}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$$

соответствующее пространство функций Морса f с оснащено-нумерованными критическими точками. Обозначим через

$$\mathcal{F}^{1,\text{num,fr}'}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$$

пространство нумерованных функций Морса, для которых фиксированы оснащения не всех седловых точек, а всех кроме одной (скажем, последней). На языке поверхностей-бордизмов теорема 2.6.11 формулируется так.

Теорема 2.6.12 ([129, теорема 10']). *а) Для любой поверхности P с фиксированным разбиением края $\partial P = \partial^+ P \sqcup \partial^- P$ на положительные и отрицательные граничные окружности, таких, что $\chi(P) < 0$, $\partial^+ P \neq \emptyset$ и $\partial^- P \neq \emptyset$, соответствующее пространство $\mathcal{F}^{1,\text{num,fr}}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ функций Морса f с оснащено-нумерованными критическими точками распадается на две компоненты линейной связности.*

б) Для любой поверхности-бордизма $(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ пространство $\mathcal{F}^{1,\text{num,fr}'}(P, \partial^+ P, \partial^- P)$ функций Морса f с оснащено-нумерованными критическими точками, для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, линейно связно. \square

Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 с оснащено-нумерованными критическими точками, для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, заданные на одной и той же поверхности P , могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии, сохраняющей функцию на краю P . При этом, фиксированные оснащения и нумерация седловых точек функции f_0 перейдут в фиксированные оснащения и нумерацию седловых точек функции f_1 .

2.7 Инварианты изотопности на пространстве \mathcal{F}^{fix} функций Морса с фиксированными критическими точками. Комплексы функций Морса

В этом разделе излагаются результаты работы автора [133].

В предыдущем §2.6 изучались функции Морса с фиксированными (т.е. закрепленными) точками локальных экстремумов на замкнутой поверхности M , и была доказана изотопность (определение 1.6.1) любых двух функций Морса из этого пространства $\mathcal{F}_{p,r}(M)_{\text{extr}}$ в этом же пространстве. В настоящем параграфе исследуется изотопность функций Морса в пространстве $\mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ функций Морса, у которых все критические точки (а не только точки локальных экстремумов) фиксированы.

Аннотация: Пусть M – гладкая замкнутая связная ориентируемая поверхность и $\mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ – пространство функций Морса на M , имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, $q \geq 1$ седловых критических точек и r точек локальных максимумов, причем все эти точки фиксированы. Пусть $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ – компонента связности функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ в \mathcal{F}^{fix} . С помощью числа вращения, введенного Рейнхартом (1960), построена сюръекция $\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}}) \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$. В частности, $|\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})| = \infty$, и скручивание Дэна вокруг границы любого диска, содержащего ровно две критические точки, из которых ровно одна седловая, не сохраняет $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Пусть \mathcal{D}^* – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M , оставляющих неподвижными критические точки, $(\mathcal{D}^*)^0$ – компонента связности id_M в \mathcal{D}^* , $\mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$ – множество диффеоморфизмов, сохраняющих $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Пусть \mathcal{H}_f – подгруппа \mathcal{D}_f^* , порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и всеми диффеоморфизмами $h \in \mathcal{D}^*$, сохраняющими какие-либо функции $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$, и пусть $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ – ее подгруппа, порожденная $(\mathcal{D}^*)^0$ и скручиваниями Дэна вокруг компонент линий уровня функций $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Возникает вопрос о том, насколько “отличаются друг от друга” какие-либо две соседние группы в цепочке вложенных групп

$$(\mathcal{D}^*)^0 \subseteq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subseteq \mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{D}_f^* \subseteq \mathcal{D}^*.$$

С помощью числа вращения доказано, что $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{D}_f^*$ при $q \geq 2$, и построен эпиморфизм $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}^{q-1}$. Определен конечный полиэдральный комплекс $K = K_{p,q,r}$, ассоциированный с пространством \mathcal{F}^{fix} . Построены эпиморфизм $\mu: \pi_1(K) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ и конечные множества порождающих элементов групп $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ и $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ в терминах 2-остова комплекса K . В частности, в случае $M = S^2$ или $q \leq 3$ мы полностью отвечаем на вопрос, какие из групп указанной цепочки совпадают.

2.7.1 Введение

Пусть $M = M_g^2$ – гладкая замкнутая связная ориентируемая поверхность и $\mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ – пространство функций Морса на M , имеющих ровно $q \geq 1$ седловых критических точек x_1, \dots, x_q , p критических точек x_{q+1}, \dots, x_{p+q} локальных минимумов и r точек $x_{p+q+1}, \dots, x_{p+q+r}$ локальных максимумов, причем эти точки фиксированы. Возникает задача: описать гомотопический тип пространства \mathcal{F}^{fix} (в C^∞ -топологии) и, в частности, множество $\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})$ его связных компонент. С помощью *числа вращения*, введенного Б. Рейнхартом [118], мы строим сюръекцию $\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}}) \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$ (теорема 2.7.2), аналогичную полному инварианту Ю.М. Бурмана [13, 60] и доказываем равенство $|\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})| = \infty$.

Близкая задача была решена С.В. Матвеевым [129, теоремы 8 и 8'] (1997), Х. Цишангом [131] (1998), В.В. Шарко [40] (1998) и С.И. Максименко [96] (2005). Матвеев и Цишанг доказали разными методами линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,r}(M)_{\text{ext}} \supset \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ функций Морса на M , имеющих фиксированные множества критических точек локальных минимумов и максимумов (см. теорему 2.6.2 Матвеева). Другой близкий результат был получен Бурманом [13, 60]. Он изучал пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ гладких функций без критических точек на некомпактной поверхности \tilde{M} с краем, локально постоянных на крае и имеющих заданное поведение вблизи края. Для любой функции $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ он построил отображение $B_f: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow H^1(\tilde{M}, \partial\tilde{M})$ (полный изотопический инвариант на пространстве $\tilde{\mathcal{F}}$) и доказал, что индуцированное отображение $(B_f)_\#: \pi_0(\tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(\tilde{M}, \partial\tilde{M})$ биективно.

Опишем основные результаты настоящего раздела.

Обозначение 2.7.1. Пусть $\mathcal{D}^* := \text{Diff}^+(M; \{x_1, \dots, x_{p+q+r}\})$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M , оставляющих неподвижными все критические точки, пусть $(\mathcal{D}^*)^0$ – компонента связности id_M в \mathcal{D}^* , и $\mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$ – множество диффеоморфизмов, сохраняющих компоненту связности $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ в \mathcal{F}^{fix} (в C^∞ -топологиях на \mathcal{D}^* и \mathcal{F}^{fix} , см. §3.2.2 или [143, §4]). Ниже (определение 2.7.3) вводятся группа $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ *абсолютно допустимых* и группа \mathcal{H}_f *допустимых* диффеоморфизмов для функции f (отличные

от понятия f -допустимого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}_f^*$ из [96, §6]). По теореме 2.7.5 ниже, они являются нормальными подгруппами группы \mathcal{D}_f^* . Так как группа $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ дискретна, то подгруппы $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{H}_f/(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ и факторгруппы $\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle$, $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ и $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ дискретны. Здесь и далее для любых группы G и ее подгруппы H через $\langle\langle H \rangle\rangle$ обозначено *нормальное замыкание* подгруппы H в G , т.е. минимальная (по включению) нормальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу H .

Возникают следующие задачи:

1) Для заданного диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^*$ определить, принадлежат ли функции f и fh одной связной компоненте $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ пространства \mathcal{F}^{fix} (т.е. принадлежит ли h подгруппе \mathcal{D}_f^*). В частности, описать пространство смежных классов $\mathcal{D}^*/\mathcal{D}_f^* \approx \pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})$ и определить, является ли оно конечным.

2) Для заданного диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^*$ или \mathcal{D}_f^* определить, является ли он допустимым (абсолютно допустимым) для функции f (т.е. принадлежит ли подгруппам \mathcal{H}_f и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$). В частности, подтвердить или опровергнуть гипотезу М. Басмановой о совпадении подгрупп $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^*$.

3) Описать конечные множества порождающих элементов факторгрупп $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ и $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$.

В данном разделе с помощью *числа вращения*, введенного Б. Рейнхартом [118], получены частичные решения первых двух задач, а с помощью *комплексов функций Морса* – решение третьей задачи:

1) Построена сюръекция $\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}}) \approx \mathcal{D}^*/\mathcal{D}_f^* \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$ (теорема 2.7.2). В частности, $|\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})| = \infty$.

2) Построена сюръекция $\mathcal{D}^*/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, которая индуцирует эпиморфизм $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, а при $M \neq S^2$ – эпиморфизм $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ (теорема 2.7.5). В частности, при $q \geq 2$ мы получаем опровержение $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{D}_f^*$ гипотезы Басмановой.

3) Определен конечный связный полиэдральный комплекс $K = K_{p,q,r}$, ассоциированный с пространством \mathcal{F}^{fix} (теорема 2.7.11). Построены эпиморфизм

$$\mu: \pi_1(K) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$$

и конечные множества порождающих элементов групп $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ и $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ в терминах 2-остова комплекса K (теоремы 2.7.13, 2.7.14).

В данном разделе также исследовано, какие из групп цепочки

$$(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$$

совпадают (см. следствие 2.7.6), кроме случая $\mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^*$ при $M \neq S^2$, $q \geq 4$. Доказаны оценки

$$\begin{aligned} q-1 &\leq \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) \leq \text{rank}(\pi_1(K)), & \text{rank}(\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle) &\geq p+r-1 & \text{при } M = S^2, \\ \text{rank}(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f) &\leq \text{rank}(\pi_1(K)), & \text{rank}(\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}}) &\geq q-1 & \text{при } M \neq S^2 \end{aligned}$$

(следствие 2.7.6 и теорема 2.7.13), где ранг группы есть минимальное количество порождающих элементов. Отсюда $\mathcal{H}_f = \mathcal{D}_f^*$, если $\pi_1(K) = 1$. Поэтому $\mathcal{H}_f = \mathcal{D}_f^*$ в случае $M \neq S^2$, $q \leq 3$ (так как комплексы $K = K_{1,2,1} \approx [0, 1]$ и $K = K_{1,3,2} \sim \bigvee_7 S^2$ односвязны).

Всюду в данном разделе под H -инвариантом на группе G , где $H \subseteq G$ – подгруппа, понимается любой функционал на группе G , инвариантный относительно действия подгруппы H на группе G левыми сдвигами (не следует путать с *инвариантом сопряженности на группе*, см. определение 5.2.1). Эквивалентным образом, функционал на группе G называется H -инвариантным, если он постоянен на каждом левом смежном классе Hg , $g \in G$.

2.7.2 Изотопический инвариант на пространстве \mathcal{F}^{fix} и \mathcal{D}_f^* -инвариант на группе диффеоморфизмов \mathcal{D}^*

Обозначим через \mathcal{K} подгруппу в \mathcal{D}^* , порожденную $(\mathcal{D}^*)^0$ и скручиваниями Дэна [67] вокруг разбивающих кривых (“ядро Джонсона” [92]). Она является нормальной.

Теорема 2.7.2 (\mathcal{D}_f^* -инвариант V_f на группе \mathcal{D}^*). Пусть $q \geq 1$ и $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Имеется сюръекция $V_f: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$, ограничение которой на любой смежный класс \mathcal{D}_f^*h , $h \in \mathcal{D}^*$, постоянно. Ограничение $V_f|_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$ не зависит от функции f и является эпиморфизмом. Скручивание Дэна вокруг границы любого диска, содержащего ровно $k \geq 0$ седловых критических точек и $\ell \notin \{0, k+1, p+r\}$ критических точек локальных минимумов и максимумов, не принадлежит подгруппе $\mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{K} \subset \ker(V_f|_{\mathcal{K}})$ (т.е. не сохраняет компоненту $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ функции f в \mathcal{F}^{fix}). В частности, $|\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}})| = [\mathcal{D}^* : \mathcal{D}_f^*] = \infty$ и имеется сюръекция $\pi_0(\mathcal{F}^{\text{fix}}) \approx \mathcal{D}^*/\mathcal{D}_f^* \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$. Если $M = S^2$, то $\mathcal{K} = \mathcal{D}^*$, и V_f определяет эпиморфизм $\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$, не зависящий от f .

2.7.3 Допустимые диффеоморфизмы и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ -инвариант на группе \mathcal{D}^*

Определение 2.7.3. Диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^*$ назовем *допустимым* для функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$, если имеются такие функции $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ и диффеоморфизмы $h_1, \dots, h_N \in \mathcal{D}^*$, что $f_i = f_i h_i$ и $h \in h_1 \dots h_N (\mathcal{D}^*)^0$. Если каждый h_i – скручивание Дэна вокруг связной компоненты кривой $f_i^{-1}(a_i)$, где a_i – не критическое значение функции f_i , то диффеоморфизм h назовем *абсолютно допустимым* для f . Абсолютно допустимые и допустимые диффеоморфизмы для функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ образуют подгруппы $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ и \mathcal{H}_f группы \mathcal{D}^* (см. обозначение 2.7.1). Ясно, что $(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$.

Примеры 2.7.4. (А) Простая замкнутая кривая на M называется *допустимой* [96, §6] для функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$, если она является компонентой связности линии уровня $g^{-1}(a)$ некоторой функции $g \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Скручивание Дэна вокруг такой кривой – это абсолютно допустимый диффеоморфизм для f .

(Б) Другой пример допустимого диффеоморфизма показан на рис. 2.4. Как и в примере (А), этот диффеоморфизм $h = h_{ij}$ сохраняет функцию $g \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$, однако он совпадает с тождественным в окрестностях всех критических точек x_1, \dots, x_{p+q+r} кроме двух седловых точек x_i и x_j , в которых $dh(x_i) = -\text{id}$ и $dh(x_j) = -\text{id}$. Такой диффеоморфизм существует для любой поверхности $M \neq S^2$, а при $M = S^2$ – нет. Он не является абсолютно допустимым для f , согласно теореме 2.7.5(Б) ниже.

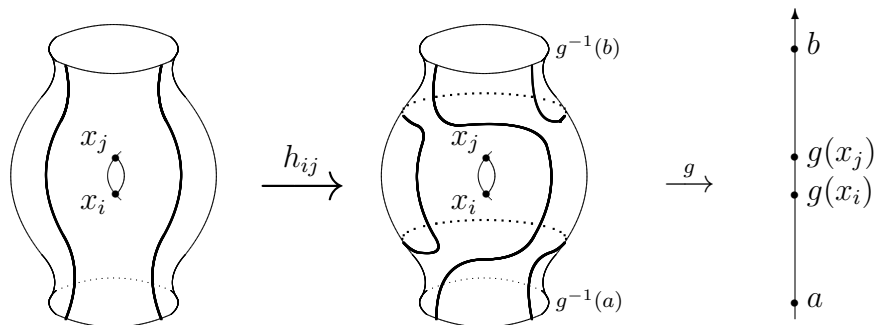


Рис. 2.4. Допустимый, но не абсолютно допустимый диффеоморфизм h_{ij} для $a = g(x_i) - \varepsilon$, $b = g(x_j) + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Группа \mathcal{H}_f допустимых диффеоморфизмов порождена диффеоморфизмами из примеров 2.7.4.

Теорема 2.7.5 ($\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ -инвариант V_f^{abs} на группе \mathcal{D}^*). Пусть $q \geq 1$ и $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Имеется сюръекция $V_f^{\text{abs}}: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, ограничение которой на любой смежный класс $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}h$, $h \in \mathcal{D}^*$, постоянно. Подгруппы $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ и \mathcal{H}_f являются нормальными в \mathcal{D}_f^* , и выполнены следующие условия:

(А) Ограничение $V_f^{\text{abs}}|_H: H \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ на любую из трех подгрупп $H \in \{\mathcal{D}_f^*, \mathcal{H}, \mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{H}\}$ является эпиморфизмом, при $H = \mathcal{H}$ не зависит от f , и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \ker(V_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^*})$. При $q \geq 2$ для любой пары седловых критических точек скручивание Дэна вокруг границы некоторого диска (зависящего от f), содержащего эти две точки и не содержащего других критических точек, принадлежит $\mathcal{D}_f^* \setminus \mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ (т.е. сохраняет компоненту $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ функции f в \mathcal{F}^{fix} , но не является абсолютно допустимым диффеоморфизмом для f). В частности, ограничение $V_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^*}$ индуцирует эпиморфизм $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, и поэтому $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{D}_f^*$ при $q \geq 2$. Если $M = S^2$ и $q \geq 2$, то $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f \subsetneq \mathcal{D}_f^*$.

(Б) Если $M \neq S^2$, то ограничение $V_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{H}_f}: \mathcal{H}_f \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ является эпиморфизмом, индуцирующим эпиморфизм $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, причем $\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^*$ и допустимый для функции f диффеоморфизм на рис. 2.4 не является абсолютно допустимым для f .

Если у функции $f_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ ровно $q \geq 1$ седловых критических значений, то на M имеются $q + g - 1$ окружностей, являющихся компонентами линий уровня функции f_1 , и таких что подгруппа группы $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0$, порожденная скручиваниями Дэна вокруг этих окружностей, изоморфна \mathbb{Z}^{q+g-1} .

Следствие 2.7.6. (А) Пусть $M = S^2$. Если количество седел $q \geq 2$, то имеется цепочка четырех групп $(\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f \subsetneq \mathcal{D}_f^* \subsetneq \mathcal{D}^*$, в которой все множества смежных классов нетривиальны и допускают мономорфизм $\mathbb{Z}^{q-1} \hookrightarrow \mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0$ и эпиморфизмы $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$, $\mathcal{D}^*/\langle\langle \mathcal{D}_f^* \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$. Если $q = 1$, то имеются две группы $(\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{H}_f^{\text{abs}} = \mathcal{H}_f = \mathcal{D}_f^* \subsetneq \mathcal{D}^*$ с бесконечной факторгруппой $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0 \cong \pi_1(S^2 \setminus \{x_2, x_3, x_4\}, x_1) \cong F_2$, где F_2 – свободная группа ранга 2.

(Б) Если $M \neq S^2$, то имеется цепочка пяти групп $(\mathcal{D}^*)^0 \subsetneq \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subsetneq \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^* \subsetneq \mathcal{D}^*$, в которой все множества смежных классов (за исключением, быть может, $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$) нетривиальны и допускают мономорфизм $\mathbb{Z}^{q+g-1} \hookrightarrow \mathcal{H}_f^{\text{abs}}/(\mathcal{D}^*)^0$, эпиморфизм $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}$ и сюръекцию $\mathcal{D}^*/\mathcal{D}_f^* \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}$.

Доказательство теорем 2.7.2 и 2.7.5. Шаг 1. В данном доказательстве под кривой понимается гладкое компактное (не обязательно связное) ориентированное 1-мерное подмногообразие $\alpha \subset M$, край которого есть пересечение множества α с множеством критических точек x_1, \dots, x_{p+q+r} . Пусть

$$\gamma_i: [0, 1] \rightarrow M, \quad 1 \leq i \leq p + q + r - 1, \quad (2.12)$$

– кривая из точки $\gamma_i(0) = x_{p+q+r}$ в точку $\gamma_i(1) = x_i$. Фиксируем на M риманову метрику.

Определение 2.7.7. Для любой такой кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ и любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ обозначим через $w_f(\gamma)$ вещественное число, равное “полному количеству оборотов” касательного вектора $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ вокруг нуля по отношению к ортогональному реперу в $T_{\gamma(t)}M$, содержащему вектор $\text{grad } f(\gamma(t))$, $0 < t < 1$. Для несвязной кривой $\gamma \subset M$ определим $w_f(\gamma)$ равным сумме чисел, отвечающих ее компонентам. Назовем $w_f(\gamma)$ числом вращения кривой γ по отношению к функции f . Оно совпадает с числом вращения кривой γ по отношению к векторному полю $\text{grad } f$ (см. [118, §2], [65, определения (1.1)] или [60, §3.2]). Для замкнутой кривой γ число $w_f(\gamma)$ целое и не меняется при деформациях функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ (см. [118, §2], [65, леммы (5.1) и (5.2)], [60, §3.1, утверждение 5]).

Аналогично [118, §2], определим *различающее число* кривой γ по отношению к функциям f, fh :

$$\partial_h w_f(\gamma) := w_f(h\gamma) - w_f(\gamma) = w_{fh}(\gamma) - w_f(\gamma) = (w_{fh} - w_f)(\gamma), \quad h \in \mathcal{D}^*.$$

Отметим некоторые свойства чисел $w_f(\gamma)$ и $\partial_h w_f(\gamma)$. Для любой пары $h_1, h_2 \in \mathcal{D}^*$ выполнено

$$\partial_{h_1 h_2} w_f(\gamma) = \partial_{h_1} w_f(\gamma) + \partial_{h_2} w_{fh_1}(\gamma), \quad (2.13)$$

поскольку $\partial_{h_1 h_2} w_f(\gamma) = (w_{fh_1 h_2} - w_f)(\gamma) = (w_{fh_1 h_2} - w_{fh_1} + w_{fh_1} - w_f)(\gamma) = (\partial_{h_2} w_{fh_1} + \partial_{h_1} w_f)(\gamma)$. Если s_i – маленькая окружность вокруг точки x_i , ориентированная “против часовой стрелки”, то

$$w_f(s_i) = 1 - \text{ind}_{x_i}(\text{grad } f), \quad 1 \leq i \leq p + q + r. \quad (2.14)$$

Таким образом, $w_f(s_i)$ всегда четно, так как $w_f(s_i) = 0$ для точек x_i локальных минимумов и максимумов ($q < i \leq p + q + r$) и $w_f(s_i) = 2$ для седловых точек x_i ($1 \leq i \leq q$). Более общо, для любой (не обязательно связной) разбивающей кривой $\alpha = \partial N$, где $N \subset M$, выполнено

$$w_f(\partial N) = \chi(N) - \sum_{x_i \in N} \text{ind}_{x_i}(\text{grad } f), \quad (2.15)$$

где кривая ∂N ориентирована так, что N “находится слева” (это выводится из (2.14) приклеиванием дисков к компонентам ∂N и продолжением векторного поля $\text{grad } f$ внутрь каждого диска с одной особой точкой, см. [65, лемма (5.7)]). Для любой кривой γ и любой связной замкнутой кривой α

$$\partial_{t_\alpha^k} w_f(\gamma) = k \langle \alpha, \gamma \rangle w_f(\alpha), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

где $\langle \alpha, \gamma \rangle$ – индекс пересечения кривых α и γ , t_α – скручивание Дэна вокруг α .

Согласно (2.14), (2.16) и построению (2.12) кривых γ_i , для любого $j \in [1, p + q + r - 1]$ выполнено

$$\partial_{t_{s_j}} w_f(\gamma_i) = 2\delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq q; \quad \partial_{t_{s_j}} w_f(\gamma_i) = 0, \quad q < i \leq p + q + r - 1. \quad (2.17)$$

Для любого $h \in \mathcal{D}^*$ выберем диффеоморфизм $\tilde{h} \in h(\mathcal{D}^*)^0$, ограничение которого на малую окрестность U множества точек x_1, \dots, x_{p+q+r} совпадает с id_M . Ясно, что число $\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_i)$ целое и сохраняется при деформациях функции f в \mathcal{F}^{fix} . При этом, в силу (2.13) и (2.17), значения $\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_i) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq q$, и $\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_i) \in \mathbb{Z}$, $q < i \leq p + q + r - 1$, не зависят от выбора диффеоморфизма \tilde{h} . Для любых функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ и набора кривых (2.12) определим отображения B_f и B_f^{abs} формулами

$$B_f^{\text{abs}}: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{Z}_2^{q-1}, \quad B_f^{\text{abs}}(h) := (\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_1) \bmod 2, \dots, \partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_{q-1}) \bmod 2);$$

$$B_f: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{Z}^{p+r-1}, \quad B_f(h) := (\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_{q+1}), \dots, \partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_{p+q+r-1})).$$

В силу (2.13), для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{D}^*$ выполнены равенства

$$B_f(h_1 h_2) = B_f(h_1) + B_{fh_1}(h_2), \quad B_f^{\text{abs}}(h_1 h_2) = B_f^{\text{abs}}(h_1) + B_{fh_1}^{\text{abs}}(h_2). \quad (2.18)$$

Поэтому для любых $h_1 \in \mathcal{D}_f^*$ и $h_2 \in \mathcal{D}^*$ выполнены (в силу $B_{fh_1} = B_f$ и $B_{fh_1}^{\text{abs}} = B_f^{\text{abs}}$) равенства

$$B_f(h_1 h_2) = B_f(h_1) + B_f(h_2), \quad B_f^{\text{abs}}(h_1 h_2) = B_f^{\text{abs}}(h_1) + B_f^{\text{abs}}(h_2). \quad (2.19)$$

Шаг 2. Докажем равенство $B_f(\mathcal{D}_f^* h_2) = B_f(h_2)$ для любого $h_2 \in \mathcal{D}^*$. Сначала докажем равенство $B_f(\mathcal{D}_f^*) = 0$. Для любого $h \in \mathcal{D}_f^*$ рассмотрим число $\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma_i) = w_{f\tilde{h}}(\gamma_i) - w_f(\gamma_i)$, $q < i < p + q + r$. Пусть $U' \subset U$ – малая окрестность множества $\{x_{q+1}, \dots, x_{p+q+r}\}$ точек локальных минимумов и максимумов. Тогда любой путь f_t в \mathcal{F}^{fix} со свойством $f_0|_{U'} = f_1|_{U'}$ гомотопен в классе путей с фиксированными концами в пространстве \mathcal{F}^{fix} такому пути \tilde{f}_t , что $\tilde{f}_t|_{U'} = f_0|_{U'}$ при любом $t \in [0, 1]$. Из $h \in \mathcal{D}_f^*$ имеем $f\tilde{h} \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$, поэтому существует путь f_t в \mathcal{F}^{fix} , такой что $f_0 = f$, $f_1 = f\tilde{h}$ и $f_t|_{U'} = f|_{U'}$ при любом $t \in [0, 1]$. Разность $w_{f_t}(\gamma_i) - w_f(\gamma_i)$ целая при любом t (так как концы кривой γ_i содержатся в U'), а значит, постоянна и равна

$w_{f\tilde{h}}(\gamma_i) - w_f(\gamma_i) = w_{f_0}(\gamma_i) - w_f(\gamma_i) = 0$. Поэтому $B_f(h) = 0$ и $B_f(\mathcal{D}_f^*) = 0$. С учетом (2.19), это дает $B_f(\mathcal{D}_f^* h_2) = B_f(\mathcal{D}_f^*) + B_f(h_2) = B_f(h_2)$.

Докажем равенство $B_f^{\text{abs}}(\mathcal{H}_f^{\text{abs}} h_2) = B_f^{\text{abs}}(h_2)$ для любого диффеоморфизма $h_2 \in \mathcal{D}^*$. Заметим, что $w_f(\alpha) = 0$ для любой допустимой кривой α для f (см. определение 2.7.3). В силу (2.16), это дает равенство $\partial_{t_\alpha^k} w_f(\gamma_i) = 0$ при $1 \leq i < p + q + r$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $B_f^{\text{abs}}(t_\alpha^k) = 0$. С учетом (2.19), для любого $h_2 \in \mathcal{D}^*$ выполнено $B_f^{\text{abs}}(t_\alpha^k h_2) = B_f^{\text{abs}}(h_2)$, откуда индукцией получаем $B_f^{\text{abs}}(\mathcal{H}_f^{\text{abs}} h_2) = B_f^{\text{abs}}(h_2)$.

Шаг 3. Докажем, что отображения $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^*}$, $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{K}}$ и $B_f|_{\mathcal{K}}$ являются гомоморфизмами, причем второй и третий не зависят от функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Первое отображение является гомоморфизмом в силу (2.19). В силу (2.15), для любой связной разбивающей кривой $\alpha = \partial N$ число $w_f(\alpha)$ не зависит от f . С учетом (2.16), для любого $k \in \mathbb{Z}$ число $\partial_{t_\alpha^k} w_f(\gamma) = k \langle \alpha, \gamma \rangle w_f(\alpha)$ тоже не зависит от f . Поэтому $B_f(t_\alpha^k)$ не зависит от f . Отсюда и из (2.18) получаем, что $B_f(h_1 t_\alpha^k) = B_f(h_1) + B_{f h_1}(t_\alpha^k) = B_f(h_1) + B_f(t_\alpha^k)$ для любого $h_1 \in \mathcal{D}^*$. Поэтому $B_f|_{\mathcal{K}}$ – гомоморфизм и не зависит от f ; аналогичное верно для $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{K}}$.

Шаг 4. Покажем, что гомоморфизмы $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{K}}$ и $B_f|_{\mathcal{K}}$ являются эпиморфизмами. Это следует из следующего факта. Для любых функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ и числа $i \neq q$, $1 \leq i < p + q + r$ (точнее, $i < q$ для $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{K}}$ и $i > q$ для $B_f|_{\mathcal{K}}$) можно построить замкнутую кривую $s_{iq} = s_i \# s_q \subset M$, являющуюся “связной суммой” маленьких окружностей s_i и s_q вокруг критических точек x_i и x_q и такую, что скручивание Дэна $t_{s_{iq}}$ вокруг кривой s_{iq} обладает следующими свойствами:

1. $t_{s_{iq}} \in \mathcal{K}$, а в случае $1 \leq i < q$ выполнено $t_{s_{iq}} \in \mathcal{D}_f^*$ (т.е. функция $f t_{s_{iq}}$ принадлежит компоненте связности $\mathcal{F}_f^{\text{fix}}$ функции f в пространстве \mathcal{F}^{fix});
2. в случае $1 \leq i < q$ элемент $B_f^{\text{abs}}(t_{s_{iq}})$ совпадает с i -ым элементом канонического базиса группы \mathbb{Z}_2^{q-1} , а в случае $q < i < p + q + r$ элемент $B_f(t_{s_{iq}})$ совпадает с $(i - q)$ -ым элементом канонического базиса группы \mathbb{Z}^{p+r-1} (поэтому $B_f^{\text{abs}}(\mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{K}) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$ и $B_f(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}^{p+r-1}$).

Первая часть пункта 1 следует из определения группы \mathcal{K} (так как s_{iq} – связная разбивающая кривая). Пункт 2 следует из (2.16) и (2.15), так как (для любого $j \neq q$, $1 \leq j < p + q + r$) $\partial_{t_{s_{iq}}} w_f(\gamma_j) = \langle s_{iq}, \gamma_j \rangle w_f(s_{iq})$ равно $\langle s_{iq}, \gamma_j \rangle \cdot 3 = 3\delta_{ij}$ при $1 \leq i < q$ и равно $\langle s_{iq}, \gamma_j \rangle \cdot 1 = \delta_{ij}$ при $q < i < p + q + r$. Заменяя окружность s_{iq} на границу диска $D \subset M$, содержащего k седловых и $\ell \notin \{0, k + 1, p + r\}$ минимаксных критических точек, а кривую γ_j на любую кривую γ , ведущую из точки минимакса снаружи D в точку минимакса в D , из (2.16) и (2.15) аналогично получаем $\partial_{t_{\partial D}} w_f(\gamma) = \langle \partial D, \gamma \rangle w_f(\partial D) = 1 \cdot (1 + k - \ell) \neq 0$, откуда $t_{\partial D} \notin \mathcal{D}_f^*$ (так как $\partial_{\tilde{h}} w_f(\gamma) = 0$ для любого $h \in \mathcal{D}_f^*$, см. шаг 2).

Осталось доказать вторую часть пункта 1. Мы построим требуемую кривую s_{iq} , $1 \leq i < q$. Без ограничения общности считаем, что седловые значения $f(x_i), f(x_q)$ превосходят остальные седловые значения $f(x_j)$, $1 \leq j \leq q - 1$, $j \neq i$, и существует точка x_k локального максимума, в которую входят сепаратрисы α и β поля $\text{grad } f$, выходящие из точек x_i и x_q соответственно. Пусть D – маленький круг вокруг x_k . Рассмотрим кривую $\alpha \cdot \beta^{-1}$ и заменим ее часть $(\alpha \cdot \beta^{-1}) \cap D$ дугой окружности ∂D , не пересекающей две другие сепаратрисы, выходящие из точек x_i и x_q (существование такой дуги не ограничивает общности). Рассмотрим связную сумму $s_{iq} = s_i \# s_q$ окружностей s_i и s_q по отношению к части полученной кривой между точками пересечения с окружностями s_i и s_q . Покажем, что существует путь из функции f в функцию $f t_{s_{iq}}$ в пространстве \mathcal{F}^{fix} функций Морса. Этот путь схематически изображен на рис. 2.5. Теорема 2.7.2 доказана.

Шаг 5. Покажем, что подгруппы \mathcal{H}_f и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ нормальны в \mathcal{D}_f^* . Если $h_1 \in \mathcal{D}_f^*$ (т.е. $f h_1 \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$) и диффеоморфизм $d \in \mathcal{D}^*$ сохраняет функцию $f h_1$ (т.е. $f h_1 d = f h_1$), то для любого $h \in \mathcal{D}_f^*$ выполнено $(f h_1 h^{-1})(h d h^{-1}) = f h_1 h^{-1}$, т.е. диффеоморфизм $h d h^{-1}$ сохраняет функцию

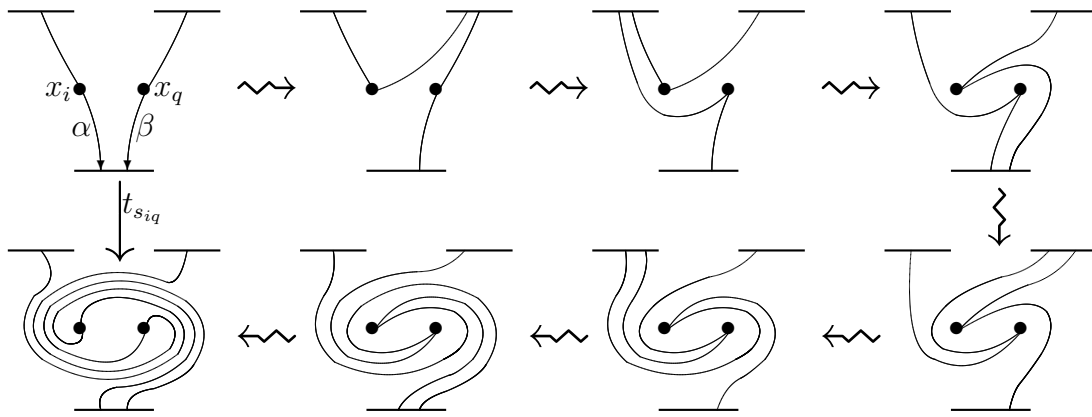


Рис. 2.5. Реализация изотопией в \mathcal{F}^{fix} действия на f скручивания Дэна $t_{s_{iq}}$.

$fh_1h^{-1} \in \mathcal{F}_f^{\text{fix}}$. Так как группа \mathcal{H}_f порождена $(\mathcal{D}^*)^0$ и всеми такими d (или всеми такими hdh^{-1}), то $h\mathcal{H}_fh^{-1} = \mathcal{H}_f$. Аналогично доказывается равенство $h\mathcal{H}_f^{\text{abs}}h^{-1} = \mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ (для этого в качестве d рассматриваются лишь скручивания Дэна). Так как $h \in \mathcal{D}_f^*$ любой, то подгруппы \mathcal{H}_f и $\mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ нормальны в \mathcal{D}_f^* .

Шаг 6. Пусть $M \neq S^2$. Покажем, что $B_f^{\text{abs}}(\mathcal{H}_f) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$. Рассмотрим допустимый для f диффеоморфизм $h_{iq} \in \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^*$, показанный на рис. 2.4, при $1 \leq i < q$. Легко проверяется, что $B_f^{\text{abs}}(h_{iq})$ является i -ым элементом стандартного базиса группы \mathbb{Z}_2^{q-1} , откуда $h_{iq} \notin \mathcal{H}_f^{\text{abs}}$ по шагу 2. Поскольку i любое и $B_f^{\text{abs}}|_{\mathcal{D}_f^*}$ – гомоморфизм, то $B_f^{\text{abs}}(\mathcal{H}_f) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$. Теорема 2.7.5 доказана. \square

2.7.4 Почти-эквивалентность функций Морса

В следствии 2.7.6 описано, какие из соседних групп цепочки $(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{H}_f^{\text{abs}} \subset \mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^* \subset \mathcal{D}^*$ совпадают, кроме случая $\mathcal{H}_f \subset \mathcal{D}_f^*$ при $M \neq S^2$. Наша дальнейшая цель – описать конечные множества порождающих элементов факторгрупп $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ и $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ в геометрических терминах.

Определение 2.7.8 (ср. определение 2.2.4). Функции Морса $f, g \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ назовем *подобными*, если они определяют одно и то же разбиение поверхности M на связные компоненты линий уровня $f^{-1}(a)$ и $g^{-1}(b)$, а также один и тот же частичный порядок на множестве седловых критических точек x_1, \dots, x_q согласно значениям функции в этих точках; обозначим это следующим образом: $f \approx g$. Если $f \approx gh$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^*$ (соответственно $h \in (\mathcal{D}^*)^0$), то функции f, g назовем *седло-послойно эквивалентными* или *почти эквивалентными* (соответственно *топологически седло-послойно эквивалентными* или *топологически почти эквивалентными*); обозначим это через $f \sim_a g$ (соответственно $f \sim_{a\text{-top}} g$). Классы почти-эквивалентности и топологической почти-эквивалентности функции f обозначим через $[f]_a$ и $[f]_{a\text{-top}}$ соответственно.

Если в определении 2.7.8 не налагать условие о частичном порядке на множестве седловых точек, получатся определения *послойной подобности*, *послойной эквивалентности* и *топологической послойной эквивалентности* (см. определение 2.2.4 (С)). А.Т. Фоменко ввел комбинаторные понятия *атома* и *молекулы* и доказал, что классы *послойной эквивалентности* функций Морса на замкнутой поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с молекулами таких функций (см. предложение 2.4.6 или [10, гл. 2, §§3–8, теорема 8]). Аналогично вводятся понятия *нумерованного атома* и *нумерованной молекулы* с помощью нумерации вершин атомов согласно нумерации критических точек x_1, \dots, x_{p+q+r} (см.

определения 2.4.3 и 2.4.5), а также *нумерованной седло-упорядоченной молекулы* с помощью частичного порядка на множестве седловых атомов из определения 2.7.8 (см. определение 2.4.8 (В)), и доказывается следующий аналог результата из [10].

Утверждение. *Классы почти-эквивалентности функций Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ с фиксированными критическими точками на замкнутой ориентируемой поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с нумерованными седло-упорядоченными молекулами таких функций. В частности, имеется лишь конечное число классов почти-эквивалентности функций Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$.*

2.7.5 Комплексы \tilde{K} , K функций Морса, связь с пермутоэдрами. Связь образующих группы $\pi_1(K)$ и групп $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ и $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$

Определение 2.7.9. (А) Клеточный комплекс X назовем (*строгим*) *полиэдральным комплексом* (ср. [57]), если каждая его замкнутая клетка $\bar{\sigma}$ снабжена метрикой, согласованной с индуцированной топологией на $\bar{\sigma}$, и изометрична некоторому выпуклому многограннику P_σ , причем изометрия $\bar{\sigma} \rightarrow P_\sigma$ изометрично переводит все замкнутые клетки $\bar{\tau} \subset \partial\bar{\sigma}$ в грани многогранника P_σ .

(Б) Отображение $r: \tilde{K} \rightarrow K$ полиэдральных комплексов назовем *правильным*, если его ограничение на любую клетку $\tilde{\sigma}$ комплекса \tilde{K} является изометрией на некоторую клетку σ комплекса K . Клетку $\tilde{\sigma}$ назовем *поднятием* клетки σ при r . В частности, r является клеточным отображением. Правильные биекции $K \rightarrow K$ назовем *автоморфизмами* полиэдрального комплекса K .

(В) Пусть $\sigma, \tau \subset X$ – два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает к* τ и писать $\tau \prec \sigma$ (и $\bar{\tau} \prec \bar{\sigma}$), если $\tau \subset \partial\sigma := \bar{\sigma} \setminus \sigma$. Пишем $\tau \preceq \sigma$, если $\tau \prec \sigma$ или $\tau = \sigma$.

Определение 2.7.10. Отображение $r: \tilde{K} \rightarrow K$ полиэдральных комплексов назовем *разветвленным накрытием*, если оно правильное (см. определение 2.7.9(Б)) и для любой клетки $\tilde{\tau} \subset \tilde{K}$ любая клетка $\sigma \subset K$, примыкающая к клетке $\tau := r(\tilde{\tau})$ (см. определение 2.7.9(В)), имеет поднятие $\tilde{\sigma} \subset \tilde{K}$ (см. определение 2.7.9(Б)), примыкающее к клетке $\tilde{\tau}$.

Теорема 2.7.11. *Пусть количество седловых критических точек $q \geq 1$. Существуют $(q-1)$ -мерный выпуклый многогранник \mathcal{P}^{q-1} и $(q-1)$ -мерные полиэдральные комплексы $\tilde{K} = \tilde{K}_{p,q,r}$ и $K = K_{p,q,r}$ (зависящие от чисел p, q, r критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек), ассоциированные с пространством $\mathcal{F}^{\text{fix}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{fix}}$ функций Морса, и разветвленные накрытия $\tilde{K} \xrightarrow{r} K \xrightarrow{r_0} \mathcal{P}^{q-1}$, такие что комплекс K конечен и связан, и выполнены следующие условия:*

(А) *Пространство \mathcal{F}^{fix} гомотопически эквивалентно полиэдральному комплексу \tilde{K} .*

(Б) *Клетки комплекса \tilde{K} (соответственно K) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $[f]_{\text{a-top}}$ топологической почти-эквивалентности (соответственно классами $[f]_{\text{a}}$ почти-эквивалентности) функций Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Размерность любой клетки равна $q - s(f)$, где $s(f)$ равно количеству седловых критических значений функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$, отвечающей данной клетке. Две клетки τ, σ комплекса \tilde{K} (соответственно K) примыкают друг к другу: $\tau \prec \sigma$ тогда и только тогда, когда соответствующие им классы функций Морса $[f]_{\text{a-top}} \leftrightarrow \sigma$, $[g]_{\text{a-top}} \leftrightarrow \tau$ примыкают друг к другу как подмножества \mathcal{F}^{fix} в C^∞ -топологии: $[f]_{\text{a-top}} \prec [g]_{\text{a-top}}$ (соответственно $[f]_{\text{a}} \prec [g]_{\text{a}}$, где $[f]_{\text{a}} \leftrightarrow \sigma$ и $[g]_{\text{a}} \leftrightarrow \tau$).*

(В) *Имеется правое действие группы $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ на комплексе \tilde{K} автоморфизмами полиэдрального комплекса, согласованное с естественным правым действием группы \mathcal{D}^* на пространстве \mathcal{F}^{fix} . Разветвленное накрытие $r: \tilde{K} \rightarrow K$ является $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ -инвариантным и*

переводит друг в друга клетки $\tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$, отвечающие классам $[f]_{a-\text{top}} \subset [f]_a$ одной и той же функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ — пермutoэдp порядка q , т.е. выпуклая оболочка множества точек $P_\pi := \sum_{k=1}^q \left(k - \frac{q+1}{2}\right) e_{\pi_k}$, $\pi \in \Sigma_q$, где e_1, \dots, e_q — стандартный базис \mathbb{R}^q (см. рис. 2.6).

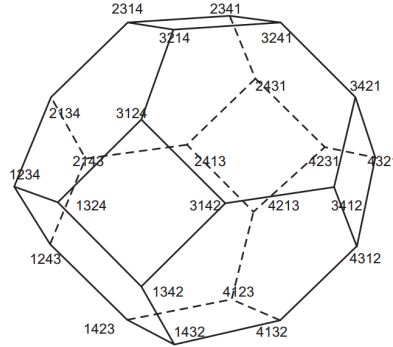


Рис. 2.6. Пермutoэдp порядка 4 — усеченный октаэдp

Известно [117], что \mathcal{P}^{q-1} — это $(q-1)$ -мерный выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{q-1} := (e_1 + \dots + e_q)^\perp$, имеющий ровно $q!$ вершин P_π , $\pi \in \Sigma_q$, причем его $(q-s)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств J_1, \dots, J_s , т.е.

$$\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s, \quad (2.20)$$

$1 \leq s \leq q$. А именно, грань $\tau_J^{q-s} \subset \mathcal{P}^{q-1}$, отвечающая разбиению $J = (J_1, \dots, J_s)$, — это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\pi)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\pi \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями

$$\begin{aligned} J_1 &= \{\pi_1, \dots, \pi_{r_1}\}, \quad J_2 = \{\pi_{r_1+1}, \dots, \pi_{r_2}\}, \quad \dots, \quad J_s = \{\pi_{r_{s-1}+1}, \dots, \pi_{r_s}\}, \\ \pi_1 &< \dots < \pi_{r_1}, \quad \pi_{r_1+1} < \dots < \pi_{r_2}, \dots, \pi_{r_{s-1}+1} < \dots < \pi_{r_s}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ — подгруппа группы Σ_q , отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1+1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1}+1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\rho \in \Sigma_q$ на точке P_π дает точку $P_{\rho\pi}$, где $(\rho\pi)_i := \pi_{\rho_i}$, $1 \leq i \leq q$.

Если разбиение \hat{J} получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\hat{J} \prec J$. Из описания граней многогранника \mathcal{P}^{q-1} следует, что условие $\hat{J} \prec J$ равносильно $\tau_{\hat{J}} \prec \tau_J$ (см. определение 2.7.9(B)).

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ рассмотрим набор $\bar{c} = \bar{c}(f) = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^q$ ее седловых критических значений $c_i := f(x_i)$, $1 \leq i \leq q$. Сопоставим набору $\bar{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\bar{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J(\bar{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (2.21) и

$$c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1+1}} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}. \quad (2.22)$$

Сопоставим разбиению $J(\bar{c})$ и классу почти-эквивалентности $[f]_a$ грань $\tau_{J(\bar{c})} \subset \mathcal{P}^{q-1}$. Имеем $\dim \tau_{J(\bar{c})} = q - s(\bar{c})$.

Шаг 3. Покажем, что для любой функции $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ имеется биекция $\delta[f]_a$ между множеством всех граней $\tau' \prec \tau := \tau_{J(\bar{c}(f))}$ и множеством всех классов почти-эквивалентности

$[g]_a \succ [f]_a$ (см. определение 2.7.9(B)), такая что $\delta[f]_a: \tau' \mapsto [g]_a =: \delta_{\tau'}[f]_a$ при $\tau' = \tau_{J(\bar{c}(g))}$. Это следует из следующих двух свойств:

1) для любого $\bar{c} \in \mathbb{R}^q$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что (i) для любого $\bar{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойством $|\bar{c}' - \bar{c}| < \varepsilon_0$ выполнено $J(\bar{c}') \preceq J(\bar{c})$, и (ii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и разбиения $\hat{J} \preceq J(\bar{c})$ существует $\bar{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойствами $|\bar{c}' - \bar{c}| < \varepsilon_0$ и $J(\bar{c}') = \hat{J}$;

2) согласно утверждению 2.5.2 или [145, утверждение 1.1 и §3], любая функция $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ имеет окрестность U в \mathcal{F}^{fix} , такую что для любых $g, g_1 \in U$ равенства $[g]_a = [g_1]_a$ и $J(\bar{c}(g)) = J(\bar{c}(g_1))$ равносильны.

Из этих свойств получаем, что из $[h]_a \succ [g]_a \succ [f]_a$ следует $[h]_a \succ [f]_a$. Поэтому

$$\delta_{\tau''}[f]_a = \delta_{\tau''}\delta_{\tau'}[f]_a \quad \text{для любых граней } \tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}. \quad (2.23)$$

Шаг 4. Опишем построение полиэдрального комплекса K , удовлетворяющего условиям пункта (B), вместе с правильным отображением $r_0: K \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$. Рассмотрим метрическое пространство

$$X := \bigsqcup_{[f]_a \in \mathcal{F}^{\text{fix}}/\sim} v_{[f]_a},$$

где $v_{[f]_a}$ является выпуклым многогранником, изометричным грани $\tau_{J(\bar{c}(f))} \subset \mathcal{P}^{q-1}$. Фиксируем отображение $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$, ограничение которого на каждый многогранник $v_{[f]_a}$ является изометрией $v_{[f]_a} \rightarrow \tau_{J(\bar{c}(f))}$. Очевидно, π является правильным отображением полиэдральных комплексов (см. определение 2.7.9(B)). Обозначим $\varphi_{[f]_a} := (\pi|_{v_{[f]_a}})^{-1}: \tau_{J(\bar{c}(f))} \rightarrow v_{[f]_a}$.

Опишем (индукцией по $k \geq 0$) построение отношения эквивалентности на множестве $X^{(k)} := \bigsqcup_{\dim v_{[f]_a} \leq k} v_{[f]_a} \subset X$ вместе с отображением $\pi_k: K^{(k)} \rightarrow (\mathcal{P}^{q-1})^{(k)}$, таких что

$$\begin{aligned} \pi_k \circ p_k = \pi|_{X^{(k)}}, \quad p_k \circ \varphi_{[f]_a}|_{\tau'} = p_k \circ \varphi_{\delta_{\tau'}[f]_a} \quad \forall f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}, \dim v_{[f]_a} \leq k, \\ \forall \tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $K^{(k)}$ – множество классов эквивалентности в $X^{(k)}$, $p_k: X^{(k)} \rightarrow K^{(k)}$ – каноническая проекция, $\delta[f]_a$ – биекция из шага 3. При $k = 0$ различные точки считаем не эквивалентными, определим π_0 формулой $\pi_0(v_{[f]_a}) := \tau_{J(\bar{c}(f))}$ при $\dim v_{[f]_a} = 0$, тогда выполнено (2.24) для $k = 0$. Пусть $k \geq 1$ и отношение эквивалентности на $X^{(k-1)}$ с отображением π_{k-1} уже построены, причем $K^{(k-1)}$ является $(k-1)$ -мерным полиэдральным комплексом, π_{k-1} – правильным отображением и выполнено (2.24) для $k-1$. Из (2.23) и (2.24) для $k-1$ следует, что для каждого $[f]_a$, $\dim v_{[f]_a} = k$, имеется правильное вложение $\varphi'_{[f]_a}: \partial\tau_{J(\bar{c}(f))} \rightarrow K^{(k-1)}$, такое что $\varphi'_{[f]_a}|_{\tau'} = p_{k-1} \circ \varphi_{\delta_{\tau'}[f]_a}$ для любого $\tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}$. Определим отношение эквивалентности на

$K^{(k-1)} \sqcup \left(\bigsqcup_{\dim v_{[f]_a} = k} v_{[f]_a} \right)$, отождествляя каждую точку из $\partial v_{[f]_a}$ с ее образом при правильном вложении $\varphi'_{[f]_a} \circ \pi$. Тогда выполнено (2.24), откуда $K^{(k)}$ – k -мерный полиэдральный комплекс и $\pi_k: K^{(k)} \rightarrow (\mathcal{P}^{q-1})^{(k)}$ – правильное отображение.

Таким образом, мы построили отношение эквивалентности \sim_{glue} на всем $X = X^{(q-1)}$, полиэдральный комплекс $K = K^{(q-1)} = X / \sim_{\text{glue}}$ и правильное отображение $r_0 = \pi_{q-1}: K \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$.

Шаг 5. Из утверждения и теоремы 2.7.11(B) следует, что полиэдральный комплекс K конечен. Из результата о приведении функций Морса к нормальной форме (см. предложение 1.6.5 или [129, предложение 2]) следует, что K связен. Аналогично шагам 2–4 строится полиэдральный комплекс \tilde{K} , удовлетворяющий условиям пункта (B), вместе с правильным отображением $\tilde{K} \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$ (для этого надо всюду в шагах 2–4 заменить $[f]_a, v_{[f]_a}, X, X^{(k)}, K^{(k)}, \pi, \pi_k, p_k, \varphi_{[f]_a}, \varphi'_{[f]_a}$ на $[f]_{a-\text{top}}, \tilde{v}_{[f]_{a-\text{top}}}, \tilde{X}, \tilde{X}^{(k)}, \tilde{K}^{(k)}, \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k, \tilde{p}_k, \tilde{\varphi}_{[f]_{a-\text{top}}}, \tilde{\varphi}'_{[f]_{a-\text{top}}}$). Рассмотрим правое действие группы $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ на метрическом пространстве

$$\tilde{X} := \bigsqcup_{[f]_{a-\text{top}} \in \mathcal{F}^{\text{fix}}/\sim_{a-\text{top}}} \tilde{v}_{[f]_{a-\text{top}}},$$

где элемент $h(\mathcal{D}^*)^0 \in \mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ действует по правилу

$$h(\mathcal{D}^*)^0|_{\tilde{v}_{[f]_{a-\text{top}}}} := \tilde{\varphi}_{[fh]_{a-\text{top}}} \circ \tilde{\pi}|_{\tilde{v}_{[f]_{a-\text{top}}}} : \tilde{v}_{[f]_{a-\text{top}}} \rightarrow \tilde{v}_{[fh]_{a-\text{top}}};$$

тогда имеем гомеоморфизм $X \approx \tilde{X}/(\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0)$. Это действие индуцирует действие группы $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ на полиэдре \tilde{K} автоморфизмами полиэдрального комплекса (так как отображения $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$ и $\delta_{\tau'}$, а потому и отношение эквивалентности \sim_{glue} на \tilde{X} , $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ -инвариантны). Поэтому композиция правильного $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ -инвариантного отображения $\tilde{X} \rightarrow X$ и правильного отображения $X \rightarrow K$ индуцирует правильное $\mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$ -инвариантное отображение $r: \tilde{K} \rightarrow K$, такое что $r(\tilde{\sigma}) = \sigma \leftrightarrow [f]_a$ при $\tilde{\sigma} \leftrightarrow [f]_{a-\text{top}}$. Отсюда r — разветвленное накрытие (см. определение 2.7.10).

Шаг 6 (отсутствовавший в работе [133]). Осталось доказать пункт (А) теоремы 2.7.11 и утверждение о том, что r_0 — разветвленное накрытие. Заметим, что они не будут использованы в доказательствах последующих теорем 2.7.13 и 2.7.14 настоящего параграфа. Теорема 2.7.11 (А) будет доказана в предложении 3.6.4 (которое будет получено на основе теорем 3.3.3 и 3.5.6).

Покажем, что r_0 является разветвленным накрытием. Заметим, что для любой функции Морса $g \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ и любой грани $\tau_J \succ \tau_{\hat{J}}$ многогранника \mathcal{P}^{q-1} , примыкающей к грани $\tau_{\hat{J}}$, где $\hat{J} := J(\bar{c}(g))$ и $\hat{J} \prec J$, выполнено следующее:

(i) существует гладкая риманова метрика, по отношению к которой набор входящих сепаратрис векторного поля $\text{grad } g$ является *хорошим*, т.е. все сепаратрисы выходят из критических точек локальных минимумов (т.е. нет сепаратрисы, выходящей из одной седловой точки и входящей в другую седловую точку);

(ii) существует правильная функция Морса $f_0 \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ (определение 2.4.3 (Е)) такая, что входящие сепаратрисы векторных полей $\text{grad } f_0$ и $\text{grad } g$ совпадают, согласно лемме 2.6.6;

(iii) так как все седловые критические значения функции f_0 совпадают, то существуют “возмущенные” функции \tilde{f}, f , сколь угодно C^2 -близкие к f_0 и такие, что $J(\bar{c}(f)) = J$ и $J(\bar{c}(\tilde{f})) = \hat{J} = J(\bar{c}(g))$;

(iv) нумерованные седло-упорядоченные графы $G_{\tilde{f}}^{\text{num}, \leq}, G_g^{\text{num}, \leq} \subset M$ (см. их определение в теореме 2.3.4), рассматриваемые с точностью до диффеоморфизмов из $(\mathcal{D}^*)^0$, совпадают. Это следует из совпадения (с точностью до диффеоморфизмов из $(\mathcal{D}^*)^0$) хороших наборов входящих сепаратрис (см. (i)) у векторных полей $\text{grad } \tilde{f}$ и $\text{grad } g$ ввиду (ii), равенства $J(\bar{c}(\tilde{f})) = \hat{J} = J(\bar{c}(g))$ ввиду (iii), и однозначной определенности (с точностью до диффеоморфизмов из $(\mathcal{D}^*)^0$) нумерованного седло-упорядоченного графа $G_F^{\text{num}, \leq}$ любой функции Морса $F \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$ хорошим набором ее входящих сепаратрис и частичным порядком на множестве седел x_1, \dots, x_q согласно значениям функции F в этих точках;

(v) верна топологическая почти-эквивалентность $\tilde{f} \sim_{a-\text{top}} g$ в силу (iv) и теоремы 2.3.4;

(vi) верна почти-эквивалентность $\tilde{f} \sim_a g$ в силу (v).

Обозначим через $\sigma, \tilde{\sigma}$ клетки комплекса K , отвечающие классам $[f]_a, [\tilde{f}]_a$, т.е. $\sigma \leftrightarrow [f]_a$ и $\tilde{\sigma} \leftrightarrow [\tilde{f}]_a$. В силу (vi) и утверждения 2.5.2 имеем примыкание классов почти-эквивалентности $[f]_a \prec [\tilde{f}]_a = [g]_a$ в \mathcal{F}^{fix} . Поэтому примыкают соответствующие клетки комплекса K , т.е. $\tilde{\sigma} \prec \sigma$, в силу теоремы 2.7.11 (Б). Согласно (iii) и построению отображения $r_0: K \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$ на шаге 4, имеем $r_0(\sigma) = \tau_{J(\bar{c}(f))} = \tau_J$ и $r_0(\tilde{\sigma}) = \tau_{J(\bar{c}(\tilde{f}))} = \tau_{\hat{J}}$. Таким образом, мы построили клетку σ комплекса K , примыкающую к клетке $\tilde{\sigma} \leftrightarrow [\tilde{f}]_a = [g]_a$ и переходящую при отображении $r_0: K \rightarrow \mathcal{P}^{q-1}$ в грань τ_J . Поэтому r_0 является разветвленным накрытием. \square

Обозначение 2.7.12. Для любой клетки $\hat{\tau}$ комплекса \tilde{K} обозначим через $(\mathcal{D}^*)^{\hat{\tau}}$ множество элементов $h \in \mathcal{D}^*/(\mathcal{D}^*)^0$, таких что $\hat{\tau}h = \hat{\tau}$ (см. теорему 2.7.11(В)). Пусть $K^{(r)}$ — r -мерный остов комплекса K .

Теорема 2.7.13. Пусть $q \geq 1$ и $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Имеется эпиморфизм $\mu: \pi_1(K) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$. В частности, группа $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ имеет набор образующих $\mu([\gamma_1]), \dots, \mu([\gamma_\ell])$, где $[\gamma_1], \dots, [\gamma_\ell]$ – образующие $\pi_1(K)$.

Доказательство. Пусть $\tau \subset K$ и $\tilde{\tau} \subset \tilde{K}$ – клетки комплексов K и \tilde{K} , отвечающие классам $[f]_a$ и $[f]_{a\text{-top}}$ (см. теорему 2.7.11(Б)). Без ограничения общности считаем, что эти клетки нульмерны. Пусть \tilde{K}_f – связная компонента комплекса \tilde{K} , содержащая клетку $\tilde{\tau}$. Рассмотрим правое действие группы $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ и ее подгруппы $\mathcal{H}_f/(\mathcal{D}^*)^0$ на \tilde{K}_f (см. теорему 2.7.11(В)). Так как разветвленное накрытие $\tilde{K}_f \rightarrow K$ является $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ -инвариантным (см. там же), то $K'_f := \tilde{K}_f/(\mathcal{H}_f/(\mathcal{D}^*)^0)$ – полиэдральный комплекс, а проекция $r'_f: K'_f \rightarrow K \approx K'_f/(\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f)$ – разветвленное накрытие. В действительности, r'_f является накрытием, так как K'_f связан и действие на нем группы $\mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$ свободно (в силу $(\mathcal{D}^*)^{\tilde{\tau}} \subset \mathcal{H}_f/(\mathcal{D}^*)^0$). Поэтому имеется естественный эпиморфизм $\mu: \pi_1(K, \tau) \rightarrow \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$, переводящий гомотопический класс любой петли $\gamma: [0, 1] \rightarrow K$, $\gamma(0) = \gamma(1) = \tau$, в элемент $h_\gamma \in \mathcal{D}_f^*/\mathcal{H}_f$, такой что $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)h_\gamma^{-1}$. Здесь $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow K'_f$ – такое поднятие пути γ , что $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\tau}(\mathcal{H}_f/(\mathcal{D}^*)^0)$. \square

Опишем теперь образующие группы $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ в терминах конечного связного графа $K^{(1)}$. Пусть $T \subset K^{(1)}$ – остовное дерево графа $K^{(1)}$, пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – все ребра из $K^{(1)} \setminus T$. Пусть τ_1, \dots, τ_V и $\sigma_1, \dots, \sigma_E$ – все вершины и все ребра графа $K^{(1)}$ (каждое ребро снабдим произвольной ориентацией). Имеем $n = E - V + 1$. Пусть $S: T \rightarrow \tilde{K}$ – любое непрерывное поднятие дерева T , такое что $S(\tau) = \tilde{\tau}$ (здесь $\tau, \tilde{\tau}$ как в доказательстве теоремы 2.7.13), и пусть $\hat{\sigma}_e$ – такое поднятие ребра σ_e , что $\hat{\sigma}_e(0) = S(\sigma_e(0))$, $1 \leq e \leq n$. Имеем $\hat{\sigma}_e(1) = S(\sigma_e(1))h_e$ для некоторого $h_e \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$, $1 \leq e \leq n$. Элементы $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ назовем *T-дополнительными элементами*.

Теорема 2.7.14. Пусть $q \geq 1$ и $f \in \mathcal{F}^{\text{fix}}$. Группа $\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ имеет конечную систему образующих $A_1 \cup \dots \cup A_V \cup \{h_1, \dots, h_n\}$, где A_v – конечная система образующих группы $(\mathcal{D}^*)^{S(\tau_v)}$, $1 \leq v \leq V$ (см. обозначение 2.7.12), $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ – *T-дополнительные элементы*. Для минимального числа образующих верно $\text{rank}(\mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0) \leq (q + g - 1)V + n = (q + g - 2)V + E + 1$, где V и E – количества вершин и ребер графа $K^{(1)}$, $n = E - V + 1$, g – род поверхности M .

Доказательство. Пусть $h \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$. Тогда, в обозначениях доказательства теоремы 2.7.13, существуют петля $\gamma: [0, 1] \rightarrow K^{(1)}$ и ее поднятие $\tilde{\gamma}$ в \tilde{K} , такие что $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\tau}$ и $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\tau}h$. Пусть $\gamma = \sigma_{e_1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \sigma_{e_N}^{\varepsilon_N}$ – разложение петли γ в произведение ориентированных ребер комплекса K , где $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ и $e_i \in \{1, \dots, E\}$, $1 \leq i \leq N$, и пусть $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \tilde{\sigma}_N^{\varepsilon_N}$ – соответствующее разложение. Обозначим $\tilde{\tau}_i := \tilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i}(1)$ при $1 \leq i \leq N$; $\hat{\sigma}_e := S(\sigma_e)$ и $h_e := 1 \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ при $n < e \leq E$. Имеем $\sigma_{e_i}^{\varepsilon_i}(1) = \tau_{v_i}$ для некоторого $v_i \in \{1, \dots, V\}$; $\tilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i} = \hat{\sigma}_{e_i}^{\varepsilon_i} \tilde{h}_i$ для некоторого $\tilde{h}_i \in \mathcal{D}_f^*/(\mathcal{D}^*)^0$ ($1 \leq i \leq N$).

Из $\tilde{\tau} = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\sigma}_1^{\varepsilon_1}(0) = \hat{\sigma}_{e_1}^{\varepsilon_1}(0) \tilde{h}_1$ имеем $\tilde{\tau} = \tilde{\tau} h_{e_1}^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \tilde{h}_1$, откуда $\tilde{h}_1 \in h_{e_1}^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}} (\mathcal{D}^*)^{\tilde{\tau}}$ (см. обозначение 2.7.12). При $1 \leq i < N$ из $\tilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i}(1) = \hat{\sigma}_{e_i}^{\varepsilon_i}(1) \tilde{h}_i$ и $\tilde{\sigma}_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}(0) = \hat{\sigma}_{e_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}}(0) \tilde{h}_{i+1}$ имеем $\tilde{\tau}_i = S(\tau_{v_i}) h_{e_i}^{\frac{\varepsilon_i+1}{2}} \tilde{h}_i$ и $\tilde{\tau}_i = S(\tau_{v_i}) h_{e_{i+1}}^{\frac{1-\varepsilon_{i+1}}{2}} \tilde{h}_{i+1}$, откуда $\tilde{h}_{i+1} \tilde{h}_i^{-1} \in h_{e_{i+1}}^{\frac{\varepsilon_{i+1}-1}{2}} (\mathcal{D}^*)^{S(\tau_{v_i})} h_{e_i}^{\frac{\varepsilon_i+1}{2}}$. Из $\tilde{\sigma}_N^{\varepsilon_N}(1) = \hat{\sigma}_{e_N}^{\varepsilon_N}(1) \tilde{h}_N$ и $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\tau}h$ имеем $\tilde{\tau}_N = S(\tau_{v_N}) h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}} \tilde{h}_N = \tilde{\tau} h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}} \tilde{h}_N$ и $\tilde{\tau}_N = \tilde{\tau}h$, откуда $h \tilde{h}_N^{-1} \in (\mathcal{D}^*)^{\tilde{\tau}} h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}}$. Поэтому

$$h = (h \tilde{h}_N^{-1}) (\tilde{h}_N \tilde{h}_{N-1}^{-1}) \dots (\tilde{h}_2 \tilde{h}_1^{-1}) \tilde{h}_1 \in (\mathcal{D}^*)^{\tilde{\tau}} h_{e_N}^{\varepsilon_N} (\mathcal{D}^*)^{S(\tau_{v_{N-1}})} h_{e_{N-1}}^{\varepsilon_{N-1}} \dots h_{e_2}^{\varepsilon_2} (\mathcal{D}^*)^{S(\tau_{v_1})} h_{e_1}^{\varepsilon_1} (\mathcal{D}^*)^{\tilde{\tau}},$$

т.е. h есть произведение степеней элементов из $A_1 \cup \dots \cup A_V \cup \{h_1, \dots, h_n\}$. Оценка $\text{rank}(A_v) \leq q + g - 1$ легко доказывается, см. замечание перед следствием 2.7.6. \square

Глава 3

Топология связных компонент \mathcal{F} пространств функций Морса на поверхностях

В этой главе излагаются результаты работ автора [134, 135, 136] (в §§3.3–3.5), [144, 140, 141] (в §3.7), автора и Д.А. Пермякова [143] (в §3.2).

3.1 Введение

Хорошо известно, что геометрическое строение любого гладкого многообразия определяется гладкими (точнее, морсовскими) функциями на нем. В данной главе дается ответ на следующий естественный вопрос. Какие бывают гладкие функции на компактных многообразиях, как описать структуру и топологию пространства таких функций?

Уловить структуру пространства \mathcal{F} морсовских функций на поверхности казалось задачей очень трудной, ибо это пространство бесконечномерно. Однако автору удалось придумать некий конечномерный геометрический объект с понятной структурой и доказать его гомотопическую эквивалентность пространству \mathcal{F} (см. теоремы 3.4.1, 3.5.6, 3.7.1 и 3.7.6). Упомянутым конечномерным геометрическим объектом являются следующие полиэдры: либо прямое произведение соответствующего многообразия $R \in \{SO(3), T^2, S^1, \text{точка}\}$ и косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (см. теорему 3.3.3) или стратифицированного многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (теорема 3.3.14, определение 3.4.3 и утверждение 3.4.4), либо стратифицированное многообразие \mathcal{B} (см. §3.7.2 и утверждения 3.7.4 и 3.7.7).

Дадим исторический обзор. Задача изучения гладких функций с “умеренными” особенностями на гладком многообразии M является классической. Изучение топологии пространства таких функций как правило состоит из двух частей:

- 1) сведение к комбинаторной задаче, т.е. построение комбинаторного объекта (например, конечномерного полиэдра), гомотопически эквивалентного изучаемому пространству функций;
- 2) решение полученной комбинаторной задачи (изучение топологии построенного полиэдра).

Одним из таких подходов является (параметрический) h -принцип М. Громова [17], изучаемый, например, в работах [89], [14], [74, теорема 2.3], [81, 64] (см. также [143]). Если M — открытое многообразие или максимальная коразмерность допускаемых особенностей (в соответствующем многообразии струй на M) больше размерности многообразия M (например, при допущении не-морсовских особенностей), то верен параметрический h -принцип:

пространство таких функций слабо гомотопически эквивалентно пространству сечений соответствующего расслоения допустимых струй (М. Громов [17], К. Игуза [89], В.А. Васильев [14]). Кольцо когомологий последнего пространства сечений можно вычислять при помощи спектральных последовательностей, построенных В.А. Васильевым [14]. Гомотопический тип (группы гомологий и гомотопий) пространств функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на окружности изучал В.И. Арнольд [1].

Для пространства функций Морса на компактном многообразии M выполнен “скорректированный” h -принцип: в соответствующем расслоении допустимых 2-струй на M рассматриваются лишь такие сечения $s: M \rightarrow J^2(M)$, для которых набор чисел $\mu_0(s), \dots, \mu_n(s)$ реализуется функциями Морса [64], где $(-1)^\lambda \mu_\lambda(s)$ равно сумме индексов тех нулей 1-формы $\pi \circ \tilde{s}$, в которых квадратичная форма \tilde{s} имеет индекс λ (здесь $\pi: J^2(M) \rightarrow J^1(M)$ — проекция, а сечение \tilde{s} получено из сечения s малым возмущением, таким что $\pi \circ \tilde{s}$ имеет лишь конечное число нулей), $0 \leq \lambda \leq n = \dim M$. Отметим, что реализуемость набора μ_0, \dots, μ_n равносильна выполнению неравенств Морса, если $\dim M \geq 6$ и $\pi_1(M) = 0$ [74, теорема 2.3] или $\dim M \leq 2$.

Однако 1-параметрический (и тем более параметрический) скорректированный h -принцип неверен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях M (например, при $\dim M \geq 6$, $\pi_1(M) \neq 0$ и $M = N \times [0; 1]$, см. [64, 81]). Нам неизвестно, верен ли параметрический скорректированный h -принцип для функций Морса на окружности или на компактной поверхности.

Рассмотрим задачу о вычислении гомотопического типа пространства $\mathcal{F}(M)$ функций Морса на компактном гладком многообразии M , например, на гладкой поверхности.

Для пространства $\mathcal{F}(S^1)$ функций Морса на окружности $M = S^1$ имеется альтернативный метод решения (вместо параметрического h -принципа) — *метод конфигурационных пространств*, состоящий в следующем. Сопоставим каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}_r(S^1)$, имеющей ровно $2r$ критических точек, множество ее критических точек локальных минимумов (т.е. некоторую r -точечную конфигурацию на окружности M). Нетрудно доказывается, что построенное отображение $\mathcal{F}_r(S^1) \rightarrow Q_r(S^1)$ сюръективно и является гомотопической эквивалентностью. Тем самым, описанный метод сводит задачу к изучению топологии конфигурационного пространства $Q_r(S^1)$, т.е. пространства r -точечных конфигураций на окружности S^1 . Гомотопический тип последнего пространства легко находится и равен S^1 .

В настоящей главе изучается топология пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса, имеющих фиксированное число p, r, q критических точек локальных минимумов, максимумов и седел, на компактной двумерной поверхности M с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Предлагаемый нами метод аналогичен методу конфигурационных пространств, описанному выше. А именно, мы описываем построение (в большинстве случаев) комбинаторного объекта

$$\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p+d^-, q, r+d^+}$$

— комплекса оснащенных функций Морса (определение 3.3.12 и теорема 3.3.13), аналогичного комплексу функций Морса $\tilde{K} = \tilde{K}_{p+d^-, q, r+d^+}$ из §2.7.5, где $d^\pm := |\pi_0(\partial^\pm M)|$. Наш подход состоит, грубо говоря, в сопоставлении каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ ее множества критических точек, с указанием индекса каждой критической точки и значения функции f в этой точке, и одного из следующих подмножеств M : либо объединения критических уровней функции f (следуя идее А.Т. Фоменко [32], см. предложение 2.4.6, развитой автором в теореме 2.3.4), либо сепаратрисной диаграммы функции f , состоящей из нижних сепаратрисных дисков соответствующего градиентного векторного поля относительно фиксированной римановой метрики на M (следуя идее С.В. Матвеева [129, теоремы 8 и 8’], см. доказательство

теорем 2.6.1 и 2.6.2). Другими словами, в последнем случае каждой “правильной” (определение 2.4.3 (Е)) функции Морса на M сопоставляется клеточное разбиение поверхности \bar{M} , полученной из M стягиванием каждой граничной окружности в точку, отвечающее этой функции [104], а другим функциям Морса сопоставляются “параметрические бифуркации” клеточных разбиений. Рассматривая эти два сопоставления с точностью до гладкой изотопии на M , мы получим комбинаторный объект $\tilde{K} = \tilde{K}_{p+d^-,q,r+d^+}$ и топологическое пространство $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+}$ с канонической сюръекцией

$$\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$$

(см. теоремы 2.7.11, 3.2.8 и 3.3.3, следствие 3.3.5, предложение 3.6.4). Тем самым, наш комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ можно рассматривать как “комплекс бифуркаций клеточных разбиений” поверхности \bar{M} . С.В. Матвеев [129, теоремы 8 и 8'] рассматривал лишь простейшие — 1-параметрические — бифуркации клеточных разбиений, что приводит к “графу клеточных разбиений” $\Gamma = \Gamma_{p+d^-,q,r+d^+}$, являющемуся в некотором смысле графом смежностей максимальных клеток нашего комплекса \tilde{K} .

С помощью наших критериев топологической послойной эквивалентности функций Морса (теорема 2.3.4, т.е. [132, лемма 1 и теорема 2]) и возмущенных функций Морса (утверждение 2.5.2, т.е. [145, утверждение 1.1 и §3]) мы покажем, что во многих случаях (например, когда все критические точки локальных экстремумов у функций $f \in \mathcal{F}$ пронумерованы) \tilde{K} — это конечномерный клеточный “комплекс функций Морса” на M , являющийся полиэдром и состоящий из клеток — выпуклых многогранников (теорема 2.7.11 и следствие 3.3.5). В случае поверхности ($\dim M = 2$) пространство $\tilde{\mathbb{K}}$ тоже конечномерно и является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (определение 3.3.2 и теорема 3.3.3), т.е. допускает разбиение на “косые цилиндрические ручки” (см. определение 3.3.1), аналогичные круглым ручкам, и приклеенные друг к другу “регулярным” образом. При этом ручки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности функций Морса из $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ (см. определения 2.2.1(Б), 3.1.5), а подошва ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функции f , содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}$, отвечающих классам топологической эквивалентности функций, полученных малыми возмущениями функции f . Важным свойством комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ является то, что в большинстве случаев (см. (3.19) и теорему 3.5.10) пространство \mathcal{F} функций Морса на компактной поверхности M гомотопически эквивалентно полиэдру $R \times \tilde{\mathbb{K}}$:

$$\mathcal{F} \sim R \times \tilde{\mathbb{K}}, \tag{3.1}$$

где $R = R(M)$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка (см. (3.2)). Тем самым, мы сводим изучение топологии пространства \mathcal{F} функций Морса к комбинаторной задаче — изучению топологии полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ (теоремы 3.2.1, 3.2.8, 3.5.6, 3.5.10). В случае $M = S^1$ аналогичный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ состоит из одной точки и $R = S^1$.

В некоторых случаях гомологии полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ могут быть изучены методами теории Морса, ввиду естественного разложения полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ на косые цилиндрические ручки. В качестве иллюстрации мы получаем обобщенные неравенства Морса для чисел Бетти пространства $\tilde{\mathbb{K}}$ и находим его эйлерову характеристику в случае, когда род поверхности M равен нулю и у каждой функции $f \in \mathcal{F}$ не менее $\chi(M) + 1$ критических точек помечены разными метками, т.е. занумерованы (следствия 3.3.6 и 3.4.2).

Наши комплексы \tilde{K} и $\tilde{\mathbb{K}}$ функций Морса аналогичны известным (абстрактным симплицальным флаговым) комплексам, рассматриваемым при изучении группы классов отображений поверхности M (см. [71]): комплекс $C(M)$ кривых [80, 79, 90], двумерный комплекс $C_P(M)$ разбиений на штаны [82] и его одномерный остов — граф $C_P^1(M)$ разбиений на штаны [99], комплекс G_g^s толстых, или ленточных, графов на поверхности рода g с $s > 2 - 2g$

проколами [124], граф $\Gamma_{p+d^-,q,r+d^+}$ клеточных разбиений С.В. Матвеева (см. §2.6 или [129, теорема 8]) и граф $\Gamma_{p+d^-,q,r+d^+}^*$ оснащенных клеточных разбиений (см. §2.6), комплекс $C_s(M)$ разбивающих кривых и комплекс Торелли $\mathcal{T}(M)$ (см. [71]), кубические комплексы [102].

Опишем известные ранее результаты по топологии пространств функций Морса и других пространств гладких функций с “умеренными” особенностями (см. результаты (R1)–(R7) из §2.1).

(R0) С использованием параметрического h -принципа В.А. Васильев (см. работу [14] и ссылки в ней) изучил кольца когомологий пространств \mathbb{R}^n -значных функций с умеренными особенностями на любом гладком многообразии (т.е. функций, не имеющих “слишком сложных” критических точек, где морсовская особенность и особенность типа рождение-уничтожение пары критических точек считаются не слишком сложными). Однако 1-параметрический h -принцип невыполнен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности большей 5, как показано в работах [64, 81]. Группы гомологий и гомотопий пространств функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на окружности изучал В.И. Арнольд [1].

(R1) А.Т. Фоменко [33, 32, 34, 9, 10, 8], [53, theorem 2.16] описал полный инвариант послонной эквивалентности в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса на поверхностях в терминах комбинаторных объектов — “атомов” и “молекул” (предложение 2.4.6). Более точно: в работах А.Т. Фоменко [33, 32] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [8], где были введены понятия атомов и молекул.

(R2) В 1997 г. А. Т. Фоменко поставил вопрос о линейной связности пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$. Положительный ответ был получен автором (см. теорему 1.6.2 или [129, теорема 4]) для $M = S^2, \mathbb{R}P^2$, С.В. Матвеевым [129, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишангом [38] (1998) в общем случае (а также В.В. Шарко [40] (1998) и С.И. Максименко [96] (2005)). Более того, С.В. Матвеев (см. теорему 2.1.1, или теоремы 2.6.1 и 2.6.2, или [129, теоремы 8 и 8']) доказал линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)_{\text{extr}} \subset \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ с фиксированными критическими точками локальных экстремумов на поверхности M . В предыдущей главе 2 мы вывели из теоремы 2.1.1 ее обобщение (теоремы 2.6.9, 2.6.10, 2.6.11, 2.6.12 или [129, теоремы 9, 9', 10, 10']), в частности доказали линейную связность пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+M, \partial^-M)$ функций Морса с пронумерованными критическими точками, см. определение 2.2.2 (Б). Мы также доказали, что пространство функций Морса с закрепленными критическими точками состоит из бесконечного числа связных компонент (теорема 2.7.2 или [133, теорема 1]).

Замечание 3.1.1. Упомянутая теорема 2.1.1 Матвеева–Цишанга по сути доказывает 1-параметрический скорректированный h -принцип, относящийся к непрерывным отображениям отрезка в пространство $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+M, \partial^-M)$ функций Морса. Отметим, что в изначальных доказательствах С.В. Матвеева [129, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишанга [38] теоремы 2.1.1 содержался пробел, а именно не было полного доказательства двух лемм 2.6.6 (В) и 2.6.8. Мы привели в §2.6 более полные доказательства этих лемм с использованием нашего критерия топологической эквивалентности функций Морса (теорема 2.3.4) и введенного нами понятия оснащенных функций Морса (определение 3.2.2). Укажем еще один способ доказательства указанных лемм: в действительности, они легко следуют из нашего результата (3.1), т.е. из теоремы 3.5.10. Поясним: каждое из изначальных доказательств в [129] и [38] теоремы 2.1.1 Матвеева–Цишанга полностью доказывает лишь “комбинаторное” утверждение, равносильное связности некоторого графа $\Gamma_{p,q,r}(M, \partial^+M, \partial^-M)$, строящегося по пространству $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+M, \partial^-M)$. Доказательство теоремы 2.1.1 состоит из двух частей:

- 1) сведение задачи о вычислении $\pi_0(\mathcal{F})$ к комбинаторной задаче о вычислении $\pi_0(\Gamma)$ (которое было неполным в [129] и [38], см. выше);

- 2) решение комбинаторной задачи о вычислении $\pi_0(\Gamma)$ (С.В. Матвеев решал эту задачу методом спайнов [129, теоремы 8 и 8’], а Х. Цишанг — методом Нильсена [38]).

В настоящей главе мы вводим более общее пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса (определение 3.1.3) и решаем для него (в большинстве случаев) параметрический аналог первой задачи: строим комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса и доказываем гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}$ (аналог параметрического h -принципа, см. теорему 3.5.10), откуда $\pi_0(\mathcal{F}) = \pi_0(\widetilde{\mathbb{K}})$. Можно показать, что соответствующий граф $\Gamma = \Gamma_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ из второй задачи двойствен в некотором смысле комплексу $\widetilde{\mathbb{K}}$, откуда $\pi_0(\widetilde{\mathbb{K}}) = \pi_0(\Gamma)$. Поэтому из связности графа Γ (доказанной Матвеевым и Цишангом) получаем $\pi_0(\mathcal{F}) = \pi_0(\widetilde{\mathbb{K}}) = \pi_0(\Gamma) = 0$, т.е. пространство \mathcal{F} линейно связно. Тем самым, результаты настоящей работы (точнее, либо теорема 2.3.4 и наш метод оснащенных функций Морса, см. определение 3.2.2 и наше доказательство лемм 2.6.6 (В) и 2.6.8, либо теорема 3.5.10) восполняют пробел в изначальных доказательствах теоремы 2.1.1.

(R3) Полный инвариант изотопности в пространстве гладких функций без критических точек на открытой поверхности (с краем) описан Ю.М. Бурманом [13, 60] в терминах числа вращения.

(R4), (R5) В.И. Арнольд [2]–[4] и Е.В. Кулинич [95] исследовали количество классов эквивалентности (см. определение 2.2.4) *типичных* (следствие 2.4.12) функций Морса на прямой [2] и на поверхности [3, 95, 44, 45, 4]. Дж. Харер и Д. Загье [78] вычислили (1986) количество $\varepsilon_g(q)$ классов послойной эквивалентности (= эквивалентности) *правильных* (определение 2.4.3 (Е)) функций Морса f на замкнутой поверхности M рода g , имеющих ровно одну точку локального минимума и q седловых точек, причем одна седловая точка оснащена (определение 2.2.2 (В)). Как мы уже отмечали, такие комбинаторные результаты имеют важные топологические приложения. Например, результат (R5) Харера–Загье позволит нам вычислить гомологические инварианты (типа эйлеровой характеристики) некоторых связных компонент пространств функций Морса на сфере (следствие 3.4.2 (С)). Кроме того, в терминах таких комбинаторных результатов мы оценим сверху число Бетти связных компонент пространств функций Морса на сфере (следствия 3.3.6, 3.4.2 и предложение 3.3.17).

(R6) С.И. Максименко [97] доказал асферичность класса топологической сопряженности (определение 2.2.4 (А)) любой функции Морса, имеющей седловые критические точки, на замкнутой связной поверхности и изучил свойства фундаментальных групп этих классов сопряженности.

(R7) Функции Морса на поверхностях изучали А.Т. Фоменко [32], С.В. Матвеев и Фоменко [21, 23, 22], Матвеев, Фоменко и Шарко [23], Фоменко и Х. Цишанг [35], А.В. Болсинов и Фоменко [9, 10] в связи с задачей классификации (лиувиллевой, орбитальной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на неособых компактных 3-мерных изоэнергетических многообразиях. Эквивалентным образом можно изучать невырожденные интегрируемые несжимаемые течения без нулей на замкнутых 3-мерных многообразиях (см. §4.1.1). Фоменко и Цишанг [35] построили полный инвариант лиувиллевой эквивалентности таких систем, а Фоменко и Болсинов [9, 10] построили полный инвариант орбитальной эквивалентности таких систем. Важным инструментом обеих теорий является описание классов послойной эквивалентности (определение 2.2.4 (С) и предложение 2.4.6) функций Морса на замкнутых поверхностях, в терминах комбинаторного объекта — “молекулы” функции Морса. В предыдущей главе мы доказали критерии топологической эквивалентности функций Морса (теорема 2.3.4) и возмущенных функций Морса (утверждение 2.5.2) и показали, что разбиение пространства функций Морса на классы послойной эквивалентности является стратификацией (называемой стратификацией Максвелла), где страты отвечают “молекулам” (см. §2.5.2). Инварианты Болсинова-Фоменко орбитальной

эквивалентности гамильтоновых систем определялись по-разному на разных стратах Максвелла — классах лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем, отвечающих классам послойной эквивалентности функций Морса на поверхностях. В следующей главе мы опишем результаты автора [145, 137, 146] о “продолжимых” инвариантах на том или ином страте Максвелла, т.е. инвариантах, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта орбитальной эквивалентности.

Основными результатами настоящей главы являются следующие результаты о топологии пространства \mathcal{F} функций Морса на M в случае, когда число пронумерованных критических точек $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$:

- введено понятие косо цилиндрически-полиэдрального комплекса (определение 3.3.2); в случае $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ построены косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ (“комплекс оснащенных функций Морса”) и стратифицированное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ (универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса), ассоциированные с пространством \mathcal{F} (теоремы 3.3.3, 3.3.13, 3.3.14, утверждение 3.4.7);
- доказаны гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim R \times \widetilde{\mathbb{K}} \sim R \times \widetilde{\mathcal{M}}$ и $[f]_{\text{top}} \sim R \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$, где R — соответствующее многообразие из (3.1) и $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ — косая ручка комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$, отвечающая классу $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности (определение 2.2.4 (B)) функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ (теоремы 3.5.10, 3.5.10 и 3.4.1, следствие 3.5.9);
- получена верхняя оценка $\text{hd}\mathcal{F} \leq 3q + 1$ для гомологической размерности пространства \mathcal{F} ; получены верхние оценки для чисел Бетти пространства \mathcal{F} в случае $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$ и нулевого рода поверхности M (случай конечного полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$) (следствия 3.3.6 и 3.4.2).

Сформулируем эти результаты в виде одной теоремы.

Теорема 3.1.2 (см. теоремы 3.3.3, 3.4.1, 3.5.10, следствия 3.3.6 и 3.4.2). *Пусть M — связная замкнутая ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на d^+ положительных и d^- отрицательных граничных окружностей,*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса на M , имеющих p, q, r критических точек локальных минимумов, седловых точек и точек локальных максимумов, в том числе $\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{r}$ пронумерованных критических точек и p^*, q^*, r^* закрепленных критических точек соответственно. Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса (см. определения 3.2.2). Предположим, что количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$. Тогда:

(A) Существует косой цилиндрически-полиэдральный комплекс

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}, \quad \dim \widetilde{\mathbb{K}} = \begin{cases} 3q - 2, & q \geq 2, \\ 0, & q = 1, \end{cases}$$

(называемый комплексом оснащенных функций Морса) ранга $q - 1$, косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Индекс ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, равен $q - s(f)$, где $s(f)$ — количество седловых критических значений функции f . Подошва $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}$, таких что $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$.

(B) Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ кокомпактно действует на $\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косо цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве

ручек согласовано с естественным действием на множестве $\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ классов топологической эквивалентности функций. В частности, для любого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ все ручки $\mathbb{D}_{[fh]_{\text{top}}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомеоморфны одной и той же стандартной косой цилиндрической ручке

$$(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \approx (D_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}) \times P_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \sim (S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]},$$

где $[f]$ — класс эквивалентности функции $f \in \mathcal{F}^1$, $\Gamma_{[f]}$ — конечная группа, действующая свободно на стандартном утолщенном цилиндре $D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}$ и на торе $(S^1)^{d([f])}$ композициями сдвигов и перестановок прямых сомножителей S^1 в произведении $(S^1)^{d([f])}$, см. определение 3.3.1(В). Имеется $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -эquivариантный гомеоморфизм полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ на $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -инвариантное подмножество некоторого гладкого $3q$ -мерного многообразия

$$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_{p+d^-, q, r+d^+; \hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

с плоской аффинной связностью, на котором группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ действует диффеоморфизмами, сохраняющими связность.

(С) Существуют гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F} \sim \mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \tilde{\mathbb{K}},$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка, см. (3.2).

(D) Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$[f]_{\text{top}} \sim \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \sim \mathcal{D}^0 \times ((S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]}) \sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]}),$$

где $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ — забывающее отображение, $\tilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ и $(S^1)^{d([f])}$ — соответствующие $(s([f]) + 2q)$ -мерное подмногообразие и тор.

(E) $\beta_j(\mathbb{K}) = \beta_j(\tilde{\mathcal{M}}) = 0$ при любом $j \geq 3q - 1$; $\beta_j(\mathcal{F}) = 0$ при любом $j \geq 3q + 2$.

(F) Пусть $M = S^2$ (обозначение 3.1.4) и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$, комплекс $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ является конечным, связным и компактным косым торически-полиэдральным комплексом; полином Пуанкаре полиэдра \mathbb{K} имеет вид

$$P(\mathbb{K}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t)$$

для некоторых многочленов $R_1(t)$ и $R_2(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$. В частности, верны неравенства Морса:

$$\chi(\mathbb{K}) = \chi(\tilde{\mathcal{M}}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j(\mathbb{K}) \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

Для полноты изложения мы также получаем следующие дополнительные результаты:

- в случае $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ построен полиэдральный комплекс \tilde{K} функций Морса, ассоциированный с пространством \mathcal{F} , если все критические точки локальных экстремумов пронумерованы или все седловые критические точки пронумерованы;
- доказана несжимаемость ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$; получен критерий того, когда проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью (предложение 3.6.4); получены критерии того, когда все косые ручки комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ являются цилиндрическими ручками или гомотопически эквивалентны торам (предложение 3.3.15);
- описаны гомотопические типы большинства пространств \mathcal{F} функций Морса с количеством седел $q \leq 2$ (примеры 3.6.2 и 3.7.9); в частности показано, что пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$ функций Морса с 4 критическими точками на двумерном торе гомотопически эквивалентно $(S^1)^2 \times (\bigvee_{\mathbb{N}} S^1)$, и поэтому его первое, второе и третье числа Бетти бесконечны;

- в общем случае (без предположения о выполнении неравенства $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ и о морсовости функций $f \in \mathcal{F}$) построено гладкое стратифицированное многообразие \mathcal{B} (универсальное пространство модулей оснащенных функций на компактной связной ориентируемой поверхности M с $s(M)$ отмеченными точками, где $s(M) := \max\{0, \chi(M) + 1\}$ при $\partial M = \emptyset$, $s(M) := 1$ и отмеченная точка принадлежит ∂M при $\partial M \neq \emptyset$), ассоциированное с пространством \mathcal{F} гладких функций с заданными локальными особенностями типов A_μ на гладкой двумерной замкнутой ориентируемой поверхности M ; доказаны гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{B}$ и $[f]_{\text{top}} \sim \mathcal{B}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{B}_{[f]_{\text{top}}} \subset \mathcal{B}$ — страт, отвечающий классу $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности (определение 2.2.4 (B)) функции $f \in \mathcal{F}$ (теоремы 3.7.1 и 3.7.6);
- в общем случае (без предположения о выполнении неравенства $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ и о морсовости функций $f \in \mathcal{F}$) показано, что пространство \mathcal{F} гладких функций с заданными локальными особенностями типов A_μ на гладкой двумерной замкнутой ориентируемой поверхности M имеет ту же топологию, что и соответствующее пространство морсов-ских функций (с некоторыми метками в критических точках), а именно: классифицирующее многообразие \mathcal{B} (имеющее гомотопический тип пространства \mathcal{F}) гомеоморфно универсальному пространству модулей оснащенных (см. §3.7.2) меченых (см. §3.7.3) функций Морса на поверхности M с $s(M)$ отмеченными точками (утверждения 3.7.4 и 3.7.7); в случае $M = S^2, T^2$ установлен гомеоморфизм между классифицирующим многообразием \mathcal{B} (имеющим гомотопический тип пространства \mathcal{F}) и некоторым открытым подпространством пространства меченых конфигураций $p + r$ различных точек на поверхности M , где p и r — количество точек локальных минимумов и максимумов функций из пространства \mathcal{F} (утверждение 3.7.5).

Перейдем к точной формулировке результатов.

3.1.1 Обобщенные пространства функций Морса

Введем пространство \mathcal{F} , обобщающее пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ из главы 2 и состоящее из функций Морса, у которых некоторые критические точки закреплены, а некоторые пронумерованы.

Определение 3.1.3 (расширение определений 2.2.1 и 2.2.2 (A, B)). Пусть M — гладкая (т.е. класса C^∞) компактная связная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность, край которой пуст или не пуст, с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ — число окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно.

(A) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M . Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все ее критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\text{int } M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M , что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем $\inf(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^- M$, и $\sup(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^+ M$.

(B) Пусть $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пространство функций Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов (определение 2.2.1 (B)). Как выше, будем предполагать, что выполнено (2.1), так как в противном случае $\widetilde{\mathcal{F}} = \emptyset$.

(C) Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}$ пространство, полученное из $\widetilde{\mathcal{F}}$ введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых отмеченными) для функций Морса $f \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Обозначим

количество отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек через $\widehat{p}, \widehat{r}, \widehat{q}$ соответственно, так что $0 \leq \widehat{p} \leq p, 0 \leq \widehat{q} \leq q, 0 \leq \widehat{r} \leq r$.

(D) Пусть $0 \leq p^* \leq \widehat{p}, 0 \leq q^* \leq \widehat{q}, 0 \leq r^* \leq \widehat{r}$. Для каждой функции $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2}$ множества ее критических точек локальных минимумов, седловых критических точек и точек локальных максимумов соответственно, и через $\widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}, \lambda = 0, 1, 2$, множества отмеченных критических точек. Обозначим $\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ (множество всех критических точек) и $\widehat{\mathcal{C}}_f := \widehat{\mathcal{C}}_{f,0} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,1} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,2}$ (множество отмеченных критических точек функции f). В множестве отмеченных (а потому занумерованных) критических точек обозначим через $\mathcal{C}_{f,0}^*, \mathcal{C}_{f,1}^*, \mathcal{C}_{f,2}^*$ подмножество, состоящее из первых p^*, q^*, r^* точек соответственно. Фиксируем “базисную” функцию $f_* \in \widehat{\mathcal{F}}$. Пусть

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, таких что $\mathcal{C}_{f,\lambda}^* = \mathcal{C}_{f_*,\lambda}^*$ для любого $\lambda = 0, 1, 2$. Пространство \mathcal{F} мы наделим C^∞ -топологией, см. §3.2.2, и назовем его *обобщенным пространством функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$* . Обозначим через $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ подпространство в \mathcal{F} , состоящее из таких функций Морса $f \in \mathcal{F}$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

(E) Обозначим через \mathcal{F}^{num} (соотв. $\mathcal{F}^{1,\text{num}}$) пространство, полученное из пространства \mathcal{F} (соотв. \mathcal{F}^1) введением нумерации у всех непронумерованных критических точек функций Морса $f \in \mathcal{F}$ (соотв. $f \in \mathcal{F}^1$). Наделим его C^∞ -топологией как в §3.2.9. Имеем $(p - \widehat{p})!(q - \widehat{q})!(r - \widehat{r})!$ -листные накрытия $\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{1,\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}^1$.

В точности как для обычных функций Морса, определяется *оснащение* (определение 3.2.2) обобщенной функции Морса $f \in \mathcal{F}$, а также пространства $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ оснащенных обобщенных функций Морса.

Напомним определение групп диффеоморфизмов $\mathcal{D}, \mathcal{D}^\pm$ и \mathcal{D}^0 из обозначения 2.2.3.

Обозначение 3.1.4 (ср. обозначение 2.2.3). (A) Обозначим через \mathcal{C}_λ множество $\mathcal{C}_{f,\lambda}^*$ закрепленных критических точек индекса λ (совпадающее для разных функций $f \in \mathcal{F}$, см. определение 3.1.3 (D)), $\lambda = 0, 1, 2$, положим $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \text{int } M$. Обозначим через $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ группу всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество $\partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_\lambda$ в себя, $0 \leq \lambda \leq 2$. Если M ориентируема, обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ подгруппу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Пусть $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}) \subset \mathcal{D}^\pm$ — подгруппа, состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, изотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}) . Пространства $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ наделим C^∞ -топологией, см. §3.2.2(б). Другими словами, \mathcal{D}^0 совпадает (как множество, но не как топологическое пространство) с пересечением \mathcal{D}^\pm и компоненты связности id_M в пространстве гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}) , снабженном C^0 -топологией.

(B) Обозначим через \bar{M} замкнутую поверхность, полученную из поверхности M стягиванием в точку каждой граничной окружности. Обозначим через $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ группу (называемую *группой Торелли*), состоящую из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}$, переводящих в себя каждую компоненту края M , и таких что индуцированный гомеоморфизм $\bar{h}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ индуцирует тождественный автоморфизм группы гомологий $H_1(M)$. Имеем $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{T}$.

Всюду далее в данной главе мы предполагаем, что поверхность M ориентирована. Случай неориентируемой поверхности M рассмотрен в замечании 3.2.7 ниже.

Из результатов [69, 70] К.Дж. Эрля и Дж. Иллса (мл.) следует, что имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{D}^0 \sim R_{\mathcal{D}^0}, \tag{3.2}$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ — следующее многообразие, определяемое парой $(M, p^* + q^* + r^*) = (M, |\mathcal{C}|)$:

$$R_{\mathcal{D}^0} := \begin{cases} SO(3) = \mathbb{R}P^3, & \text{если } M = S^2, p^* + q^* + r^* = 0, \\ SO(2) = S^1, & \text{если } 0 \leq \chi(M) - (p^* + q^* + r^*) \leq 1 \text{ и } d^+ + d^- + (p^* + q^* + r^*) > 0, \\ T^2 = S^1 \times S^1, & \text{если } M = T^2, p^* + q^* + r^* = 0, \\ \text{точка,} & \text{если } \chi(M) < p^* + q^* + r^* \end{cases}$$

(см., например, [122, 69]). В частности, \mathcal{D}^0 линейно связно и, следовательно, совпадает с компонентой связности id_M в \mathcal{D}^\pm .

Кроме того,

$$\mathcal{D}^0 = \mathcal{T} \iff |\mathcal{C}| \leq \chi(M) + 1. \quad (3.3)$$

Импликация “ \Leftarrow ” в (3.3) следует из [69, 70], а импликация “ \Rightarrow ” следует из того, что в случае $|\mathcal{C}| \geq \chi(M) + 2$ существует диффеоморфизм $h \in \mathcal{T}$ (скручивание Дэна [67] вокруг разбивающей окружности), негомотопный id_M в пространстве гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}) , см. [51, лемма 2.1(1)] или [28]. В частности, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$ тогда и только тогда, когда $p^* + q^* + r^* + d^- + d^+ \leq 3$ и род поверхности M равен нулю.

Отметим, что в §3.4 нам понадобятся оба свойства (3.2) и (3.3) группы \mathcal{D}^0 .

Напомним основные типы эквивалентности функций Морса (определение 2.2.4) и применим их к обобщенному пространству \mathcal{F} функций Морса.

Определение 3.1.5 (уточнение определения 2.2.4). (А) Две функции Морса $f, g \in \mathcal{F}$ назовем *эквивалентными*, если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ (и h_1 сохраняет нумерацию всех отмеченных критических точек), и обозначаем $f \sim g$. Класс эквивалентности функции f обозначим через $[f]$.

(Б) Две функции Морса f и g назовем *топологически эквивалентными*, если они эквивалентны и $h_1 \in \mathcal{D}^0$ (т.е. h_1 изотопен тождественному), и обозначаем $f \sim_{\text{top}} g$. Множество всех функций из \mathcal{F}^1 , топологически эквивалентных функции f , обозначим через $[f]_{\text{top}}$.

Классификации функций Морса из \mathcal{F} с точностью до эквивалентности и топологической эквивалентности легко получаются из следствия 2.4.11 и теоремы 2.3.4 соответственно.

Обозначение 3.1.6 (уточнение обозначения 2.3.1 (Б)). Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим граф G_f в поверхности $\text{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}(\mathcal{C}_{f,1})$ выкидыванием всех связных компонент, не содержащих седловых критических точек (см. определение 3.1.3 (А)). Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит в графе $2q$ ребер. Если поверхность M ориентирована, то на ребрах графа G_f имеется естественная ориентация такая, что в любой (внутренней) точке ребра репер, составленный из положительно ориентированного касательного вектора к ребру и вектора $\text{grad } f$ (по отношению к какой-нибудь фиксированной римановой метрике), задает положительную ориентацию поверхности. Аналогично вводится ориентация на любой связной компоненте линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f (необязательно содержащей критические точки), $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через

$$s(f) := |f(\mathcal{C}_{f,1})|$$

количество седловых критических значений функции f .

3.1.2 Схема доказательства основных результатов

Предположим, что поверхность M ориентируема. В §§3.2–3.5 мы докажем гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \mathbb{K}$ в случае $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$, а в §3.7 — гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{B}$ в общем случае. Мы также исследуем, когда имеет место гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times K$ в случае, если $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ и либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$, либо $q - \hat{q} \leq 1$. Опишем схему доказательства этих результатов в случае $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$.

Предположим, что $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$. Согласно результату [143] (см. теорему 3.2.1 или 3.2.5), пространство \mathcal{F} имеет своим строгим деформационным ретрактом подпространство $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$, которое состоит из функций Морса, все локальные максимумы которых равны 1, а все локальные минимумы равны -1 ; кроме того забывающее отображение $\text{Forg}_1 : \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. Согласно (3.2), многообразию $R_{\mathcal{D}^0}$ можно вложить в группу \mathcal{D}^0 в виде ее строгого деформационного ретракта. Осталось доказать гомотопическую эквивалентность

$$\mathbb{F}^1 \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}.$$

Для этого мы введем “промежуточные” пространства \mathbb{F}^0 , $\mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty$ и последовательно покажем гомотопическую эквивалентность этих топологических пространств. У нас получится следующая диаграмма топологических пространств и естественных отображений:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{i_0} & \mathcal{F}^1 & \xleftarrow{p_1} & \mathcal{F}^1 \times \mu & \xleftarrow{i_2} & \mathbb{F}^1 & \xleftarrow{i_4} & \mathbb{F}^0 \\ & & & & & & \approx \downarrow p_3 & & \approx \downarrow p_3 \\ & & & & & & \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} & \xleftarrow{\bar{i}_4} & \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty & \xleftarrow{i_5} & \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}} & \xrightarrow{p_6} & \mathcal{D}^0 \times \widetilde{K}, \end{array}$$

где i_0, p_1, i_2 — гомотопические эквивалентности, построенные в работе [143], а комплекс \widetilde{K} и отображение p_6 определены, если либо $p - \widehat{p} \leq 1$ и $r - \widehat{r} \leq 1$, либо $q - \widehat{q} \leq 1$. Для каждого отображения p_3, i_4, \bar{i}_4, i_5 (а также для p_6 в случае $(q-1)(p-p^*+r-r^*)(p-p^*+q-q^*+r-r^*-1) = 0$) этой диаграммы будет построено его “гомотопически обратное” отображение i_3, p_4, \bar{p}_4, p_5 (соответственно i_6), т.е. такое отображение, что композиции $i_k \circ p_k$ и $p_k \circ i_k$ гомотопны тождественным отображениям, $k = 3, 4, 5$ (соответственно $k = 6$).

Здесь μ — это пространство C^∞ -гладких римановых метрик на M , снабженное C^∞ -топологией (см. §3.2.2(в)). Пространство \mathbb{F} — это пространство C^∞ -гладких *оснащенных функций Морса*, т.е. пар (f, α) , где $f \in \mathcal{F}$, α — замкнутая 1-форма (на поверхности M с выколотыми точками локальных минимумов и максимумов) с некоторыми свойствами (определение 3.2.2), снабженное C^∞ -топологией (см. §3.2.10). Пространство \mathbb{F}^1 — подпространство в \mathbb{F} , состоящее из пар $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$, $f \in \mathcal{F}^1$. Подпространство $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1$ состоит из *специальных* оснащенных функций Морса (определение 3.5.3). Многообразие $\widetilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ — пространство модулей оснащенных функций Морса, $\widetilde{\mathbb{K}}^\infty \approx \mathbb{F}^0 / \mathcal{D}^0$ — пространство модулей специальных оснащенных функций Морса.

Замечание 3.1.7. (А) Всюду в формулировках утверждений настоящей главы рассматриваются произвольные обобщенные пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

(соответственно $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$), состоящие из функций Морса (соответственно оснащенных функций Морса), у которых могут быть как пронумерованные, так и пронумерованные критические точки. Однако в доказательствах в §§3.2–3.5 иногда будем считать, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\text{num}}$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^{1,\text{num}}$ и $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^{1,\text{num}}$ (см. определение 3.1.3 (С)), т.е. что все критические точки функций $f \in \mathcal{F}$ пронумерованы. Это не ограничивает общности, так как все отображения, построенные в настоящей главе, согласованы с перенумерациями тех критических точек, которые изначально не были отмечены и пронумерованы (т.е. $\Sigma_{p-\widehat{p}} \times \Sigma_{q-\widehat{q}} \times \Sigma_{r-\widehat{r}}$ -эквивариантны относительно действия группы $\Sigma_{p-\widehat{p}} \times \Sigma_{q-\widehat{q}} \times \Sigma_{r-\widehat{r}}$ на пространствах \mathcal{F}^{num} и \mathbb{F}^{num} перенумерациями изначально неотмеченных критических точек, см. определение 3.2.4).

(В) Согласно определению 3.1.3 и обозначению 3.1.4 обозначим через

$$\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_f := \widehat{\mathcal{C}}_{f,0} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,1} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,2}, \quad \mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

множество всех (соответственно всех пронумерованных, соответственно всех закрепленных) критических точек функции $f \in \mathcal{F}$. Имеем включения $\mathcal{C} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_f \subseteq \mathcal{C}_f$ (соответственно $\mathcal{C}_\lambda \subseteq$

$\widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$) множеств фиксированных критических точек, пронумерованных критических точек и всех критических точек (соответственно фиксированных, отмеченных и всех критических точек индекса λ) функции f .

(С) Обозначим множество всех критических точек функции $f \in \mathcal{F}$ через $\{w_1, \dots, w_{p+q+r}\} := \{x_1(f), \dots, x_p(f), y_1(f), \dots, y_q(f), z_1(f), \dots, z_r(f)\}$, а множества критических точек локальных минимумов, седловых критических точек и точек локальных максимумов функции $f \in \mathcal{F}$ через

$$\{x_1(f), \dots, x_p(f)\} := \mathcal{C}_{f,0}, \quad \{y_1(f), \dots, y_q(f)\} := \mathcal{C}_{f,1}, \quad \{z_1(f), \dots, z_r(f)\} := \mathcal{C}_{f,2}$$

соответственно. Незакрепленные критические точки $w_\ell \in \mathcal{C}_f \setminus \mathcal{C}$ будем называть *плавающими*.

3.2 Теорема Кудрявцевой-Пермякова о гомотопической эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1$ пространств функций Морса и оснащенных функций Морса

В этом параграфе излагаются результаты работы Е.А. Кудрявцевой и Д.А. Пермякова [143].

Аннотация: Пусть M — гладкая, компактная (ориентируемая или неориентируемая) поверхность с пустым или непустым краем. Пусть \mathcal{F} — пространство функций Морса на M , постоянных на каждой компоненте края и не имеющих критических точек на крае. Вводится понятие оснащения для функции Морса $f \in \mathcal{F}$. В случае ориентированной поверхности M это — замкнутая 1-форма α на поверхности M с выколотыми критическими точками локальных минимумов и локальных максимумов функции f , такая что вблизи любой критической точки пара (f, α) имеет канонический вид в подходящих локальных координатах, и 2-форма $df \wedge \alpha$ отлична от нуля всюду на M с выколотыми критическими точками и задает там положительную ориентацию. Доказывается, что любая функция Морса на M имеет оснащение и что пространство \mathcal{F} , снабженное C^∞ -топологией, гомотопически эквивалентно пространству \mathbb{F} оснащенных функций Морса. В качестве приложения формулируются результаты о гомотопическом типе пространств \mathcal{F} и \mathbb{F} .

В данном параграфе рассматривается любое обобщенное пространство

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса на компактной поверхности M , см. определение 3.1.3, и исследуется более общая задача — описание гомотопического типа пространства \mathcal{F} , а не только его компонент связности (как в теоремах 2.1.1 и 2.7.2). В последующих параграфах 3.3—3.5, на основе результатов настоящего параграфа, мы сведем задачу к комбинаторной (т.е. докажем аналог параметрического h -принципа) в случае $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$, а в §3.7 — в общем случае.

Основная идея в нашем подходе состоит в введении *оснащенных* функций Морса на компактной поверхности M (определение 3.2.2). Если поверхность M ориентирована, то оснащенной функцией Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ называется пара (f, α) , где $f \in \mathcal{F}$, α — замкнутая 1-форма на поверхности M с выколотыми точками локальных минимумов и максимумов, имеющая каноническое поведение в (проколотых) окрестностях критических точек, и такая что 2-форма $df \wedge \alpha$ отлична от нуля всюду на M с выколотыми критическими точками и задает положительную ориентацию M . Пусть \mathbb{F} — пространство оснащенных функций Морса и пусть подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ состоит из оснащенных функций Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$, таких что $f \in \mathcal{F}^1$.

В работе [143] доказана гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathbb{F}$ пространства \mathcal{F} функций Морса и пространства \mathbb{F} оснащенных функций Морса на M . А именно, в ней доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2.1 (Е.А. Кудрявцева и Д.А. Пермяков [143, теорема 1.7]). *Имеются гомотопические эквивалентности*

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}$$

пространств функций Морса и пространств оснащенных функций Морса. Более того:

(А) Подпространство $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ (соответственно $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$) является строгим деформационным ретрактом пространства \mathcal{F} (соответственно \mathbb{F}).

(Б) “Забывающее” отображение $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$ (соответственно $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$), переводящее любую оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ в функцию Морса $f \in \mathcal{F}$, сюръективно и является гомотопической эквивалентностью. \square

В частности, любая функция Морса $f \in \mathcal{F}$ имеет оснащение. Мы также доказываем аналог теоремы 3.2.1 для ограничений указанных гомотопических эквивалентностей на классы топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ (теорема 3.2.5). Последнее дает положительный ответ на вопрос, поставленный В.И. Арнольдом.

Данный раздел имеет следующую структуру. В §3.2.1 вводится понятие оснащенной функции Морса и формулируется основной результат работы [143] (теорема 3.2.5 и замечание 3.2.7), обобщающий теорему 3.2.1, и некоторые приложения (замечание 3.2.6 и теорема 3.2.8). В §3.2.2 определяется C^∞ -топология на пространствах \mathcal{F} , \mathbb{F} и \mathcal{D}^\pm , а также на других пространствах, которые используются в доказательстве. В §3.2.3 доказаны гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1$ и теорема 3.2.5 (А). В §3.2.4 доказана теорема 3.2.14 о “равномерных” \mathcal{D}^\pm -эквивариантных локальных координатах в классической лемме Морса, а в §3.2.5 сформулированы леммы 3.2.19 и 3.2.20 о “равномерных” \mathcal{D}^\pm -эквивариантных локальных координатах для оснащенных функций Морса. Указанные обобщения (двумерной) классической леммы Морса являются ключевыми для доказательства теоремы 3.2.5(Б), а также используются при получении основных результатов глав 2, 3 и 4.

3.2.1 Точная формулировка результата и мотивировка

Перейдем к точным формулировкам.

Определение 3.2.2. (А) *Оснащенной функцией Морса* на ориентированной поверхности M (или на поверхности-кобордизме $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$) назовем пару (f, α) , где $f \in \mathcal{F}$ — функция Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, α — замкнутая 1-форма на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, такие что (i) 2-форма $df \wedge \alpha$ не имеет нулей в $M \setminus \mathcal{C}_f$ и задает положительную ориентацию, (ii) в окрестности любой критической точки $x \in \mathcal{C}_f$ существуют локальные координаты u, v , в которых либо $f = u^2 - v^2 + f(x)$ и $\alpha = d(2uv)$, либо $f = \varkappa_{f,x}(u^2 + v^2) + f(x)$ и $\alpha = \varkappa_{f,x} \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$, где $\varkappa_{f,x} = \text{const} \neq 0$.

(Б) Пространство оснащенных функций Морса обозначим через \mathbb{F} . Обозначим через $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ подпространство, состоящее из оснащенных функций Морса (f, α) таких, что $f \in \mathcal{F}^1$ (см. определение 3.1.3 (Б)). Наделим пространство \mathbb{F} C^∞ -топологией (см. §3.2.10), а подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — индуцированной топологией. Группа \mathcal{D}^\pm действует справа на пространствах $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ очевидным образом (см. обозначения 3.1.4 и 3.2.3).

Обозначение 3.2.3. (А) Для любой римановой метрики ds_0^2 на поверхности M обозначим через $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2) := \text{Iso}^\pm(M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2; ds_0^2)$ подгруппу группы \mathcal{D}^\pm (см. обозначение 3.1.4), состоящую из всех изометрий римановой поверхности (M, ds_0^2) , принадлежащих \mathcal{D}^\pm .

(Б) Рассмотрим правые действия группы \mathcal{D}^\pm на пространствах \mathcal{F} и \mathbb{F} :

$$(h, g) \mapsto g \circ h, \quad (h, f, \alpha) \mapsto h^\#(f, \alpha) := (f \circ h, \text{sgn}(h) h^* \alpha), \quad h \in \mathcal{D}^\pm, g \in \mathcal{F}, (f, \alpha) \in \mathbb{F},$$

где $\text{sgn}: \mathcal{D}^\pm \rightarrow \{1, -1\}$ — гомоморфизм (*ориентирующий характер*), значение которого $\text{sgn}(h)$ на любом диффеоморфизме $h \in \mathcal{D}^\pm$ показывает, сохраняет ли h ориентацию поверхности M . Рассмотрим индуцированные действия группы \mathcal{D}^\pm и ее подгрупп $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}$ и $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ на подпространствах $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ и $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$.

Определение 3.2.4. Пусть $\rho_X: \Phi \rightarrow \text{Homeo}(X)$ и $\rho_Y: \Phi \rightarrow \text{Homeo}(Y)$ — гомоморфизмы, т.е. правые действия группы Φ на топологических пространствах X и Y , и пусть $a: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение a является Φ -эквивариантным, если $a \circ \rho_X(\phi) = \rho_Y(\phi) \circ a$ для любого $\phi \in \Phi$. Предположим, что пространства X и Y гомотопически эквивалентны. Будем говорить, что гомотопическая эквивалентность $X \sim Y$ является *сильно Φ -эквивариантной*, если существуют такие Φ -эквивариантные непрерывные отображения $a: X \rightarrow Y$ и $b: Y \rightarrow X$, такая гомотопия $h_X: X \times [0; 1] \rightarrow X$ между отображениями $h_X|_{X \times \{0\}} = b \circ a$ и $h_X|_{X \times \{1\}} = \text{id}_X$, и такая гомотопия $h_Y: Y \times [0; 1] \rightarrow Y$ между отображениями $h_Y|_{Y \times \{0\}} = a \circ b$ и $h_Y|_{Y \times \{1\}} = \text{id}_Y$, что для любого $t \in [0; 1]$ отображения $h_X|_{X \times \{t\}}$ и $h_Y|_{Y \times \{t\}}$ являются Φ -эквивариантными. Аналогично определяется *сильно Φ -эквивариантная* строгая деформационная ретракция $X \rightarrow Y \subset X$.

Основным результатом работы [143] является следующая теорема 3.2.5, обобщающая теорему 3.2.1, о гомотопической эквивалентности пространств $\mathcal{F}, \mathcal{F}^1$ функций Морса и пространств \mathbb{F}, \mathbb{F}^1 оснащенных функций Морса. В качестве мотивировки ниже формулируется теорема 3.2.8, описывающая топологию пространства \mathbb{F}^1 оснащенных функций Морса. В действительности, теорема 3.2.5 является уточнением теоремы [143, теорема 2.5] в части (iii); отметим, что часть (iii) теоремы 3.2.5 не используется в доказательстве основных результатов диссертации, а представляет самостоятельный интерес и отвечает на вопрос В.И. Арнольда 2007 г.

Теорема 3.2.5 (Е.А. Кудрявцева и Д.А. Пермяков [143, теорема 2.5]). *Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные окружности, и пусть набор чисел $(p, q, r; \hat{p}, \hat{q}, \hat{r}; p^*, q^*, r^*)$ удовлетворяет условиям из определения 3.1.3. Рассмотрим обобщенные пространства*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки и закрепленные критические точки (см. определение 3.1.3). Рассмотрим соответствующие пространства

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$$

оснащенных функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Тогда имеются гомотопические эквивалентности

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}.$$

Более того, справедливы следующие утверждения:

(А) (i) *Имеется сильно \mathcal{D}^\pm -эквивариантная строгая деформационная ретракция $p_0: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$ (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4), сохраняющая разбиение поверхности M на связные компоненты линий уровня функции, а также отношение частичного порядка на множестве седловых критических точек по значениям функции в этих точках. (ii) Ретракция p_0 переводит топологически эквивалентные функции Морса в топологически эквивалентные. (iii) Ее ограничение $p_0|_{[f]_{\text{top}}}: [f]_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} [p_0(f)]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$ на любой класс $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности “поднимается до гомотопической эквивалентности в некоторое конечнолистное накрытие” в следующем смысле: существуют конечнолистное накрытие $\pi_{[f]_{\text{top}}}: E_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow [p_0(f)]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$ и сильно \mathcal{D}^0 -эквивариантная гомотопическая эквивалентность $p_{0,[f]_{\text{top}}}: [f]_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} E_{[f]_{\text{top}}}$ такие, что $\pi_{[f]_{\text{top}}} \circ p_{0,[f]_{\text{top}}} = p_0|_{[f]_{\text{top}}}$.*

(Б) (iv) *Забывающие отображения $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$ и $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ сюръективны и являются гомотопическими эквивалентностями. Более того, для любой римановой метрики ds_0^2 на M эти гомотопические эквивалентности являются сильно $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эквивариантными (см. обозначение 3.2.3 и определение 3.2.4). (v) Ограничение отображения $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1)$ класса топологической эквивалентности*

$[f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$ любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью на этот класс топологической эквивалентности. (vi) Ограничение отображения $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{top}})$ класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ любой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ является гомотопической эквивалентностью на этот класс топологической эквивалентности.

Замечание 3.2.6. Нетрудно показать (используя построения, аналогичные построениям из доказательства утверждения 3.2.13(A)), что в случае $\partial M = \emptyset$ пространство $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}_{p,q,r}^1(M)$ оснащенных функций Морса гомеоморфно пространству $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{p,q,r}(M)$ “вещественно-нормированных мероморфных дифференциалов” [76] на поверхности M . Здесь через \mathbb{A} обозначено пространство всех пар $(J, \alpha_{\mathbb{C}})$, где J — гладкая комплексная структура на поверхности M , согласованная с ориентацией на M , а $\alpha_{\mathbb{C}}$ — такая мероморфная 1-форма на (M, J) , имеющая ровно q нулей и $p+r$ полюсов, что все нули и полюса простые, а вычет формы $\alpha_{\mathbb{C}}$ в каждом полюсе веществен и является положительным (соотв. отрицательным) в p (соотв. r) полюсах. Таким образом, из теоремы 3.2.5 следует гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{A}$.

Замечание 3.2.7. Теорема 3.2.5 легко обобщается на случай, когда поверхность M неориентируема. Для этого рассмотрим двулистное ориентируемое накрытие $\pi: \widehat{M} \rightarrow M$ с римановой метрикой $\pi^*(ds_0^2)$ и изометрией $J_0 \in \text{Iso}^{\pm}(\widehat{M}, \pi^*(ds_0^2))$, переставляющей листы накрытия над каждой точкой $x \in M$. Фиксируем ориентацию на \widehat{M} . Оснащенной функцией Морса на неориентируемой поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ назовем такую пару (f, α) , что $f \in \mathcal{F}$, $(f \circ \pi, \alpha)$ — оснащенная функция Морса на $(\widehat{M}, \pi^{-1}(\partial^+ M), \pi^{-1}(\partial^- M))$, и $J_0^{\#}(f \circ \pi, \alpha) = (f \circ \pi, \alpha)$ (см. обозначение 3.2.3 и определение 3.2.2). Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — пространства оснащенных функций Морса на M . Ограничивая сильно $\text{Iso}^{\pm}(\widehat{M}, \pi^*(ds_0^2))$ -эквивариантные гомотопические эквивалентности из теоремы 3.2.5, примененной к пространствам функций Морса на \widehat{M} , на подпространства J_0 -инвариантных функций Морса $f \circ \pi$ и оснащенных функций Морса $(f \circ \pi, \alpha) = J_0^{\#}(f \circ \pi, \alpha)$, получаем сильно $\text{Iso}^{\pm}(M, ds_0^2)$ -эквивариантные гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}$ для неориентируемой поверхности M .

В качестве еще одного приложения, или мотивировки теоремы 3.2.5 сформулируем результат автора, анонсированный в [143, теорема 2.9]. Мы его докажем в дальнейших разделах (см. теоремы 3.5.6 и 3.5.10, следствие 3.3.5 и предложение 3.6.4) в следующей усиленной формулировке. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ — число граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно (как в определении 2.2.1 (Б)).

Теорема 3.2.8 (Е.А. Кудрявцева, см. [143, теорема 2.9]). Пусть выполнены предположения теоремы 3.2.5, и пусть количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ пронумерованных критических точек больше, чем $\chi(M)$. Рассмотрим пространство

$$\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}^1(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

оснащенных функций Морса (см. определение 3.2.2). Справедливы следующие утверждения:

(А) Пространство \mathbb{F}^1 гомотопически эквивалентно прямому произведению группы \mathcal{D}^0 (а значит, многообразия $R_{\mathcal{D}^0}$, см. (3.2)) на некоторый счетный (или конечный) полиэдр

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}, \quad \dim \widetilde{\mathbb{K}} = \begin{cases} 3q - 2, & q \geq 2, \\ 0, & q = 1, \end{cases}$$

т.е. имеет место гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}$. Более того, пространство \mathbb{F}^1 гомеоморфно прямому произведению группы \mathcal{D}^0 на некоторое $3q$ -мерное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$, содержащее комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ в виде своего строгого деформационного ретракта:

$$\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}} \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}).$$

(Б) Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ является объединением подполиэдров $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ (называемых “косыми цилиндрическими ручками”), находящиеся во взаимно-однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Каждая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ гомеоморфна прямому произведению

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]} \times (P_{[f]} \times C_{[f]})) / \Gamma_{[f]} \sim (S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]},$$

где $D_{[f]}$ — некоторый выпуклый $k([f])$ -мерный многогранник, $P_{[f]}$ — выпуклый многогранник, $C_{[f]} = \mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}$ — цилиндр, $k([f]), c([f]), d([f]) \in \mathbb{Z}_+$, $[f]$ — класс эквивалентности функции $f \in \mathcal{F}^1$, $\Gamma_{[f]}$ — конечная группа, действующая свободно на прямом произведении $D_{[f]} \times (P_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}))$ автоморфизмами и на торе $(S^1)^{d([f])}$ композициями сдвигов и перестановок прямых сомножителей S^1 , см. определение 3.3.1(В). При этом число $k = k([f])$ (называемое “индексом” ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$) имеет вид $k = q - s$, где $s = s([f])$ — количество седловых значений функции f , а подмножество $(\partial D_{[f]}) \times (P_{[f]} \times C_{[f]}) \subset \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ (называемое “подошвой” ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$) содержится в объединении конечного числа ручек индексов $< k$. Для размерности $d = d([f])$ тора $(S^1)^d$ верно равенство $d = \text{rank}((\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0)$ и оценка $d \leq \min\{p - p^* + r - r^*, t - 1\}$, где $t = t([f]) \leq q$ — количество связанных компонент графа G_f , см. обозначение 3.1.6. Если число закрепленных критических точек $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то $d = t - 1$, а при $t = q$ выполнено $d \leq p - p^* + r - r^* - q^*$.

(В) Прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1)$ класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$ любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ при проекции $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ гомотопически эквивалентен прямому произведению группы \mathcal{D}^0 на соответствующую ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, а также прямому произведению группы \mathcal{D}^0 на соответствующее факторпространство $(S^1)^d / \Gamma_{[f]}$ тора:

$$\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1) \sim \mathcal{D}^0 \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \sim \mathcal{D}^0 \times ((S^1)^d / \Gamma_{[f]}) \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^d / \Gamma_{[f]})).$$

(Г) Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ обладает конечнолистным накрытием, которое является накрытием некоторого конечного полиэдра \mathbb{K}^* , допускающего разбиение на “косые торические ручки”, аналогичное разбиению в (Б). Полиэдр \mathbb{K} конечен, если $p^* + q^* + r^* + d^- + d^+ \leq 3$ и $\chi(M) + d^- + d^+ = 2$ (т.е. когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$).

(Д) Предположим дополнительно, что либо $p - \hat{p} = r - \hat{r} = 0$ (т.е. все критические точки локальных минимумов и локальных максимумов пронумерованы), либо $q - \hat{q} = 0$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы). Тогда полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ является “утолщением” некоторого полиэдра

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{p+d^-, q, r+d^+; \hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

размерности $\dim \tilde{K} = q - 1$, т.е. имеется эпиморфизм полиэдров $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$, при котором каждая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ индекса k является полным прообразом $k([f])$ -мерной замкнутой клетки-многогранника $D_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{K}$. Любая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \sim (S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]}$ гомотопически эквивалентна тору $(S^1)^{d([f])}$, т.е. группа $\Gamma_{[f]}$ действует на торе $(S^1)^{d([f])}$ сдвигами. Эпиморфизм $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $(q-1)(p-p^*+r-r^*)(p-p^*+q-q^*+r-r^*-1) = 0$ (последнее условие выполнено, например, когда все критические точки локальных минимумов и максимумов закреплены).

Полиэдр \tilde{K} вместе с его разбиением на клетки-многогранники $D_{[f]_{\text{top}}}^k$ назовем комплексом функций Морса, а полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ вместе с его разбиением на косые цилиндрические ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ — утолщенным комплексом функций Морса или комплексом оснащенных функций Морса. В некоторых случаях комплекс функций Морса $\tilde{\mathbb{K}}$ может быть построен вручную. Свойства и примеры комплексов $\tilde{\mathbb{K}}$ и \tilde{K} будут приведены в §3.6 и §3.7.6.

3.2.2 Введение C^∞ -топологии на пространствах \mathcal{F} , \mathcal{F}^{num} , \mathcal{D}^\pm , μ , \mathbb{F} и \mathbb{F}^{num}

В этом разделе формулируются определения из [143, §4].

Напомним определение слабой C^∞ -топологии Уитни на пространстве $C^\infty(M, N)$, где M, N — гладкие многообразия [86, гл. 2, §4], [100]. Эта топология обладает счетной базой и совпадает с топологией равномерной сходимости со всеми частными производными (струями) на компактных подмножествах многообразия M .

(а) Определим C^∞ -топологию на пространстве $C^\infty(M)$. Пусть $J^n(M)$ — многообразие n -струй на многообразии M , $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Рассмотрим каноническое включение

$$p_n: C^\infty(M) \hookrightarrow C(M, J^n(M)).$$

Рассмотрим *компактно-открытую* топологию на пространстве $C(M, J^n(M))$. Напомним, что предбазой компактно-открытой топологии на $C(X, Y)$ для топологических пространств X и Y являются множества вида $C_{K,U} \subset C(X, Y)$, где $K \subset X$ — компактное подпространство, $U \subset Y$ — открытое подпространство, и $C_{K,U} \subset C(X, Y)$ состоит из всех отображений, переводящих K в U . Рассмотрим топологию на $C^\infty(M)$, базой которой являются прообразы $p_n^{-1}(C)$ открытых подмножеств $C \subset C(M, J^n(M))$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(б) Аналогично определяется C^∞ -топология на пространстве $C^\infty(M, N)$, где M, N — многообразия. Для этого рассматривается каноническое включение

$$C^\infty(M, N) \hookrightarrow C(M, J^n(M, N)),$$

где $J^n(M, N)$ — многообразие, состоящее из n -струй отображений $M \rightarrow N$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(в) Аналогично определяется также C^∞ -топология на пространстве $T_p^q(M)$ тензорных полей типа (p, q) на поверхности M , для любых неотрицательных $p, q \in \mathbb{Z}$. Для этого рассматривается каноническое включение

$$T_p^q(M) \hookrightarrow C(M, (J_p^q)^n(M)),$$

где $(J_p^q)^n(M)$ — многообразие, состоящее из n -струй тензорных полей типа (p, q) на M , $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(г) Если $G(M)$ — одно из пространств $C^\infty(M)$, $C^\infty(M, N)$ или $T_p^q(M)$ из пп. (а)–(в) выше, определим более общее пространство $OG(M) \supset G(M)$, состоящее из элементов $g \in G(U_g)$, заданных на некотором непустом открытом подмножестве $U_g \subset M$, зависящем вообще говоря от g . Для любого компакта $K \subset M$ обозначим через $OG_K(M) \subset OG(M)$ множество таких элементов $g \in OG(M)$, что $K \subset U_g$. Определим слабую топологию на $OG(M)$, базой которой являются прообразы $p_K^{-1}(U)$ открытых подмножеств $U \subset G(K)$, где $K \subset M$ — непустое компактное подмногообразие (с краем) максимальной размерности $\dim K = \dim M$ и $p_K: OG_K(M) \rightarrow G(K)$ — каноническая проекция. Примеры пространств $OG(M)$ имеются в §3.2.10(а) и [143, §10].

(д) Если $G(M)$ — пространство из в п. (г) выше, определим пространство ростков $CG(M) = \sqcup_{K \subset M} G(M, K)$, состоящее из ростков $t = [g]_K \in G(M, K)$ элементов $g \in OG_K(M) \subset OG(M)$ в некотором непустом компакте $K = K_t \subset U_g \subset M$, зависящем вообще говоря от ростка t . Напомним, что *ростком* $t \in G(M, K)$ на M в (непустом) компакте $K \subset M$ называется класс эквивалентности элементов $g \in OG(M)$ со свойством $K \subset U_g$, где два таких элемента $g_1, g_2 \in OG(M)$ называются *эквивалентными*, если существует такая окрестность U компакта K в M , что $U \subset U_{g_1}$, $U \subset U_{g_2}$ и $g_1|_U = g_2|_U$. Определим слабую топологию на $CG(M)$, базой которой являются объединения $\bigcup_{K_0 \subset K} p_{K, K_0}(U)$, где $K \subset M$ — непустой компакт в M , U — открытое подмножество в $OG_K(M) \subset OG(M)$ с индуцированной топологией, $K_0 \subset K$ — непустой компакт в K , $p_{K, K_0}: OG_K(M) \rightarrow G(M, K_0) \subset CG(M)$ — каноническая проекция. Примеры пространств $CG(M)$ имеются в §3.2.10(а) и [143, §10].

C^∞ -топологией на пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ функций Морса, на группе $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm \subset C^\infty(M, M)$ диффеоморфизмов и на пространстве $\mu \subset T_0^2(M)$ римановых метрик назовем индуцированную топологию на подпространствах соответствующих пространств из (а)—(в).

3.2.9. Топология на пространстве \mathcal{F}^{num} функций Морса с пронумерованными критическими точками.

(а) На пространстве $\mathcal{F}^{\text{num}} := \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса с пронумерованными критическими точками на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 2.2.2 (Б)) мы построим такую топологию, что каноническая проекция

$$\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

является конечнолистным накрытием (т.е. локально-тривиальным расслоением с конечным дискретным слоем), а каноническое отображение $\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow M^{p+q+r}$, сопоставляющее любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ ее упорядоченный набор критических точек, непрерывно.

Напомним определение пространства \mathcal{F}^{num} . Обозначим через $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ пространство всех троек (x, y, z) , таких что $x, y, z \subset \text{int } M$ — попарно непересекающиеся подмножества, состоящие из $|x| = p$, $|y| = q$ и $|z| = r$ точек соответственно. Пространство $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ имеет естественную структуру многообразия размерности $\dim(Q_{p,q,r}(\text{int } M)) = (p + q + r) \dim M = 2(p + q + r)$. Имеется $(p!q!r!)$ -листное накрытие

$$\text{Pr}: (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M),$$

$$\text{Pr}: (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r) \mapsto (\{x_1, \dots, x_p\}, \{y_1, \dots, y_q\}, \{z_1, \dots, z_r\}),$$

где $\Delta_{ij} := \{(w_1, \dots, w_{p+q+r}) \in (\text{int } M)^{p+q+r} \mid w_i = w_j\}$, $\Delta := \bigcup_{1 \leq i < j \leq p+q+r} \Delta_{ij}$ — “диагональ” пространства $(\text{int } M)^{p+q+r}$. Рассмотрим отображение

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}): \mathcal{F} \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M),$$

сопоставляющее любой функции $f \in \mathcal{F}$ тройку множеств $(\hat{x}(f), \hat{y}(f), \hat{z}(f)) \in Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ ее критических точек локальных минимумов, седловых точек и точек локальных максимумов соответственно. Из теоремы о неявных функциях следует, что отображение $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ непрерывно. Имеем каноническое включение

$$\mathcal{F}^{\text{num}} \subset \mathcal{F} \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta),$$

$$\mathcal{F}^{\text{num}} = \{(f, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{F} \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta) \mid (\hat{x}(f), \hat{y}(f), \hat{z}(f)) = \text{Pr}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\}.$$

Снабдим пространство $\mathcal{F} \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta)$ топологией прямого произведения, а его подпространство \mathcal{F}^{num} — индуцированной топологией.

Другими словами, топологическое пространство \mathcal{F}^{num} вместе с канонической проекцией $\text{Pr}' : \mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}$ — это в точности $(p!q!r!)$ -листное накрытие $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^* \text{Pr}$, индуцированное $(p!q!r!)$ -листным накрытием Pr посредством непрерывного отображения $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, см. [34, гл. 1, §9, п. 2] или [58, 9.7.2, с. 368]. Действительно, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{\text{num}} & \longrightarrow & (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta \\ \text{Pr}' \downarrow & & \downarrow \text{Pr} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} & Q_{p,q,r}(\text{int } M). \end{array}$$

показывает, что пространство \mathcal{F}^{num} является “обратным образом” (pullback) непрерывного отображения $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ и накрытия Pr .

Таким образом, для определенной выше топологии на \mathcal{F}^{num} каноническая проекция $\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}$ является $(p!q!r!)$ -листным накрытием, а каноническое отображение $\mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta$ непрерывно. Эта топология — слабейшая среди всех топологий на \mathcal{F}^{num} с этими свойствами.

(б) На пространстве функций Морса $\mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};0,0,0}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых пронумерованы лишь некоторые из критических точек, топология определяется аналогично.

(в) На произвольном обобщенном пространстве функций Морса

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};0,0,0}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

и на его подпространстве $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ вводится индуцированная топология. Как в (а) доказывается, что канонические проекции $\text{Pr}' : \mathcal{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{F}$ и $\text{Pr}'|_{\mathcal{F}^1, \text{num}} : \mathcal{F}^1, \text{num} \rightarrow \mathcal{F}^1$ являются $((p - \widehat{p})!(q - \widehat{q})!(r - \widehat{r})!)$ -листными накрытиями.

3.2.10. Топология на пространствах \mathbb{F} и \mathbb{F}^{num} оснащенных функций Морса.

(а) Пусть для определенности поверхность M ориентируема, $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Из определения 3.2.2 оснащенной функции Морса следует, что для любой оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ и любой критической точки $w \in M$ функции f существуют вещественное число $r > 0$ и гладкое вложение $h \in \text{Emb}(D_r, M)$ открытого круга $D_r := \{u^2 + v^2 < r\} \subset \mathbb{R}^2$ радиуса $r > 0$ в поверхность M , задающее в окрестности $h(D_r) \subset M$ точки $w = h(0, 0)$ регулярные координаты u, v со свойствами из определения 3.2.2. Согласно §3.2.5 (т.е. [143, §11]), росток $[h]_{\{(0,0)\}} \in C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ вложения h в нуле (см. §3.2.2(б,д)) определен либо с точностью до поворотов $R_\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos \varphi - v \sin \varphi, u \sin \varphi + v \cos \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, если w — критическая точка локального минимума или максимума (см. лемму 3.2.19), либо с точностью до центральной симметрии $R_\pi : (u, v) \mapsto (-u, -v)$, если w — седловая критическая точка (см. лемму 3.2.20(Б)). Поэтому множество $H_{(f,\alpha),w} \subset C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ всех таких ростков $[h]_{\{(0,0)\}}$ (для данной оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ и данной критической точки $w = h(0, 0)$ индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$) гомеоморфно либо окружности (при $\lambda = 0, 2$), либо двухточечному множеству (при $\lambda = 1$).

Пусть $A := C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)/S^1$ и $B := C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)/\{\pm \text{id}\}$ — факторпространства пространства $C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ по действию группы всех поворотов R_φ и подгруппы $\{R_0, R_\pi\} = \{\pm \text{id}\}$ соответственно (см. выше). Пусть $\text{Pr}_A : C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow A$ и $\text{Pr}_B : C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow B$ — канонические проекции. Для любого топологического пространства X и любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $Q_n(X) := X^n/\Sigma_n$ пространство всех n -элементных подмножеств (т.е. n -точечных конфигураций) пространства X с естественной топологией, где группа перестановок Σ_n действует на X^n перестановками сомножителей. Имеем каноническое включение

$$\mathbb{F} \subset \mathcal{F} \times O\Lambda^1(M) \times Q_p(A) \times Q_q(B) \times Q_r(A) =: X,$$

$$(f, \alpha) \mapsto (f, \alpha, \{\text{Pr}_A(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \widehat{x}(f)}, \{\text{Pr}_B(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \widehat{y}(f)}, \{\text{Pr}_A(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \widehat{z}(f)}),$$

где $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Снабдим пространства \mathcal{F} , $O\Lambda^1(M)$ и $C\text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ слабой C^∞ -топологией как в §3.2.2(а),(в,г),(б,д) соответственно, пространства A и B — фактортопологией, пространства $Q_p(A)$, $Q_q(B)$, $Q_r(A)$ — топологией конфигурационных пространств, пространство X — топологией прямого произведения, а его подпространство \mathbb{F} — индуцированной топологией.

(б) На пространстве $\mathbb{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и на любом обобщенном пространстве оснащенных функций Морса $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ топология определяется аналогично §3.2.9(б,в). Подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ снабжается индуцированной топологией. Как в §3.2.9(а) доказывается, что канонические проекции $\mathbb{F}^{\text{num}} \rightarrow \mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^1, \text{num} \rightarrow \mathbb{F}^1$ являются $((p - \widehat{p})!(q - \widehat{q})!(r - \widehat{r})!)$ -листными накрытиями.

3.2.3 Гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1$

В этом разделе для полноты изложения строится “строгая деформационная” ретракция $p_0 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$ и доказывается теорема 3.2.5(А). Как мы отмечали выше, теорема 3.2.5 является уточнением теоремы [143, теорема 2.5] в части (iii). Отметим, что часть (iii) теоремы

3.2.5 не используется в доказательстве основных результатов диссертации, а представляет самостоятельный интерес и отвечает на вопрос В.И. Арнольда 2007 г.

Снабдим пространство \mathcal{F} обобщенных функций Морса C^∞ -топологией, см. §3.2.9. Введем промежуточное пространство $\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^1 \subset \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ и покажем, что \mathcal{F}^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\tilde{\mathcal{F}}$, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — строгим деформационным ретрактом пространства \mathcal{F} .

Пусть пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ состоит из функций Морса $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, для которых $\min \tilde{f} = -1$, $\max \tilde{f} = 1$. По функции Морса $f \in \mathcal{F}$ построим функцию $\tilde{f} := \frac{2f - (\max f + \min f)}{\max f - \min f} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Рассмотрим отображения

$$\rho_1: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}, \quad f \mapsto \tilde{f} = \frac{2f - (\max f + \min f)}{\max f - \min f}, \quad (3.4)$$

и гомотопии $f \mapsto (1-t)\tilde{f} + tf$, $0 \leq t \leq 1$, между ним и тождественным отображением $\text{id}_{\mathcal{F}}$ получаем, что $\tilde{\mathcal{F}}$ является строгим деформационным ретрактом пространства \mathcal{F} . При этом мы используем, что значения функции \tilde{f} и гомотопии строятся по значениям функции f , а значит, отображение и гомотопия не выводят из пространства \mathcal{F} .

С помощью построенной гомотопии легко доказывается следующее утверждение.

Утверждение 3.2.11 ([143, утверждение 6.1]). (А) *Строгая деформационная ретракция $\rho_1: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}, f \mapsto \tilde{f}$, является сильно \mathcal{D}^\pm -эквивариантной (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4) и переводит любую функцию Морса $f \in \mathcal{F}$ в топологически эквивалентную ей функцию (см. определение 2.2.4 (В)). В частности, $\rho_1([f]_{\text{top}}) = [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$, пересечение $[f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ линейно связно, и ретракция ρ_1 индуцирует биекцию между классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}/\sim_{\text{top}}$ и $[f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}} \in \tilde{\mathcal{F}}/\sim_{\text{top}}$.*

(Б) *Ограничение деформационной ретракции ρ_1 на класс эквивалентности $[f]$ любой функции $f \in \mathcal{F}$ является сильно \mathcal{D}^\pm -эквивариантной строгой деформационной ретракцией*

$$\rho_1|_{[f]}: [f] \xrightarrow{\sim} [f] \cap \tilde{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F},$$

а потому является сильно \mathcal{D}^\pm -эквивариантной гомотопической эквивалентностью. В частности, ограничение $\rho_1|_{[f]_{\text{top}}}: [f]_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ является сильно \mathcal{D}^0 -эквивариантной строгой деформационной ретракцией, $f \in \mathcal{F}$. \square

Покажем теперь, что \mathcal{F}^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\tilde{\mathcal{F}}$. Если $q = 0$, то все линии уровня функции $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ связны, а потому $\mathcal{F}^1 = \tilde{\mathcal{F}}$ и все доказано.

Пусть $q > 0$. Пусть $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ — функция Морса с седловыми критическими значениями c_1, \dots, c_q . Будем считать, что все критические точки функций Морса из \mathcal{F} пронумерованы числами $1, \dots, p+q+r$ (см. замечание 3.1.7), а все граничные компоненты M пронумерованы числами $p+q+r+1, \dots, p+q+r+d^+ + d^-$.

Каждой критической точке $w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f},2}$ сопоставим такую седловую точку $\hat{y} = \hat{y}(w_\ell) \in \mathcal{C}_{\tilde{f},1}$, а каждой компоненте связности δ_ℓ края поверхности M — такую седловую точку $\hat{y} = \hat{y}(\delta_\ell) \in \mathcal{C}_{\tilde{f},1}$, что существует путь в M с началом в точке w_ℓ (соотв. на окружности δ_ℓ) и концом в точке \hat{y} , не пересекающий никакую другую компоненту связности линии уровня, содержащую седловую точку. Определим число

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\tilde{f}) := \min \left\{ \min_{w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f},2}} |\tilde{f}(w_\ell) - \tilde{f}(\hat{y}(w_\ell))|, \min_{\delta_\ell \subset \partial M} |\tilde{f}(\delta_\ell) - \tilde{f}(\hat{y}(\delta_\ell))| \right\}.$$

Для каждой точки $w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f},2}$ минимума или максимума обозначим через $C_\ell = C_\ell(\tilde{f})$ компоненту связности точки w_ℓ в множестве $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(w_\ell) - \varepsilon_1; \tilde{f}(w_\ell) + \varepsilon_1) \subset M$. Для каждой граничной окружности $\delta_\ell \subset \partial M$ обозначим через $C_\ell = C_\ell(\tilde{f})$ компоненту связности δ_ℓ в множестве $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\delta_\ell) - \varepsilon_1; \tilde{f}(\delta_\ell) + \varepsilon_1) \subset M$. Тогда открытые множества $C_\ell \subset M$ — попарно не пересекающиеся открытые диски и “полуоткрытые цилиндры” (гомеоморфные $S^1 \times [0; 1)$).

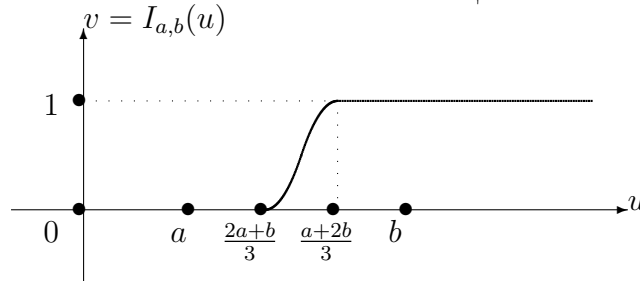


Рис. 3.1. График функции $I_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$.

По функции $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ построим функцию $f_1 \in C^\infty(M)$, совпадающую с \tilde{f} на $(M \setminus \bigcup_{w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f},2}} C_\ell) \setminus \bigcup_{\delta_\ell \subset \partial M} C_\ell$, а на каждом C_ℓ определим следующим образом. Пусть для определенности множество C_ℓ отвечает либо точке $w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},2}$ локального максимума, либо окружности $\delta_\ell \subset \partial^+ M$ (в случаях локального минимума и $\delta_\ell \subset \partial^- M$ функция $f_1|_{C_\ell}$ строится аналогично). Обозначим $m_\ell = m_\ell(\tilde{f}) := \tilde{f}(w_\ell)$, соответственно $m_\ell = m_\ell(\tilde{f}) := \tilde{f}(\delta_\ell)$. Положим при $a < b$

$$I_{a,b}(u) := \begin{cases} 0, & u \leq \frac{2a+b}{3}; \\ 1, & u \geq \frac{a+2b}{3}; \\ \frac{\int_{\frac{a+2b}{3}}^u \exp\left(\frac{3}{3t-(a+2b)} - \frac{3}{3t-(2a+b)}\right) dt}{\int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+2b}{3}} \exp\left(\frac{3}{3t-(a+2b)} - \frac{3}{3t-(2a+b)}\right) dt}, & \frac{2a+b}{3} < u < \frac{a+2b}{3}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Функция $I_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ является C^∞ -гладкой. Ее график изображен на рис. 3.1.

Зададим функцию $f_1|_{C_\ell}$ формулой

$$f_1|_{C_\ell}(x) := \tilde{f}(x) + (1 - m_\ell)I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(\tilde{f}(x)), \quad x \in C_\ell, \quad w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f},0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f},2}.$$

Функция $I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell} = I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R})$ при любых $m, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Получаем отображение $\rho_2: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow C^\infty(M)$, $\tilde{f} \mapsto f_1$. Заметим, что $m_\ell \leq 1$, и при $m_\ell = 1$ получаем $f_1|_{C_\ell} = \tilde{f}|_{C_\ell}$. Поэтому в случае $\tilde{f} \in \mathcal{F}^1$ имеем $f_1 = \tilde{f}$.

Определим гомотопию $\tilde{f} \mapsto (1 - t)f_1 + t\tilde{f}$, $0 \leq t \leq 1$. Гладкая функция $I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell} = I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(u)$ тождественно равна 0 при $u < m_\ell - \frac{2}{3}\varepsilon_1$, и $I'_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(u) \geq 0$ для любого $u \in \mathbb{R}$, поэтому функция f_1 локально (т.е. в достаточно малой окрестности любой точки на M) является гладкой возрастающей функцией от \tilde{f} . Следовательно, f_1 является функцией Морса с теми же критическими точками, что и \tilde{f} , и гомотопия также не выводит из пространства $\tilde{\mathcal{F}}$. У функции Морса f_1 все локальные минимумы равны -1 , локальные максимумы равны 1 , а значит $f_1 \in \mathcal{F}^1$. Поэтому построена “строгая деформационная” ретракция

$$\rho_2: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad \tilde{f} \mapsto f_1. \quad (3.6)$$

Определим отображения

$$p_0 = \rho_2 \circ \rho_1: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad f \mapsto f_1, \quad i_0: \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}, \quad f_1 \mapsto \tilde{f}.$$

По доказанному выше p_0 — “строгая деформационная” ретракция и, в частности, $p_0 \circ i_0 = \text{id}_{\mathcal{F}^1}$, $i_0 \circ p_0$ гомотопна $\text{id}_{\mathcal{F}}$.

Обозначение 3.2.12. (А) Обозначим через $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ множество функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$, снабженных набором из вещественных меток $a_{\delta_\ell}, a_{w_\ell} \in [-1; 1]$ в каждой связной компоненте δ_ℓ края поверхности M и в каждой критической точке w_ℓ локального экстремума функции f таких, что компонента связности любой точки w_ℓ или граничной окружности δ_ℓ , в которой f достигает локального минимума (соотв. максимума), в множестве $f^{-1}[-1; a_{w_\ell}]$ или $f^{-1}[-1; a_{\delta_\ell}]$

(соотв. $f^{-1}[a_{w_\ell}; 1]$ или $f^{-1}[a_{\delta_\ell}; 1]$) не содержит ни одной седловой критической точки функции f . Полученные функции $g \in \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ с метками назовем *мечеными* функциями Морса. Снабдим пространство $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ меченых функций Морса C^∞ -топологией. Аналогично (3.6) проверяется, что проекция

$$\pi_{\text{lab}} : \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$$

является гомотопической эквивалентностью.

На пространстве $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ меченых функций действует группа $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ гомеоморфизмами $g \mapsto h_2^{-1} \circ g \circ h_1$, $(h_2, h_1) \in \text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$, где метки меченой функции $h_2^{-1} \circ g \circ h_1$ определяются формулами $a_{w_\ell}(h_2^{-1} \circ g \circ h_1) := h_2^{-1}(a_{h_1(w_\ell)})$ и $a_{\delta_\ell}(h_2^{-1} \circ g \circ h_1) := h_2^{-1}(a_{h_1(\delta_\ell)})$. Меченые функции, принадлежащие одной $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ -орбите (соотв. $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^0$ -орбите), назовем *эквивалентными* (соотв. *топологически эквивалентными*). Как и для обычных (немеченых) функций, отношение эквивалентности (соотв. топологической эквивалентности) на пространстве $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ обозначим через \sim (соотв. \sim_{top}), а класс эквивалентности через $[g]$ (соотв. $[g]_{\text{top}}$).

(В) Сопоставим любой меченой функции Морса $g \in \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ функцию $\pi_{\text{lab}}(g) \in \mathcal{F}^1$, снабженную отношением частичного порядка на множестве $\{\delta_m\} \cup \{w_\ell(\pi_{\text{lab}}(g))\}$ согласно значениям функции $\pi_{\text{lab}}(g)$ в ее седловых критических точках и значениям меток меченой функции g в граничных окружностях и точках локальных экстремумов (ср. с определением упорядоченного критического графа G_f^\leq из теоремы 2.3.4). Обозначим через \mathcal{F}_\leq^1 множество функций Морса $f = \pi_{\text{lab}}(g) \in \mathcal{F}^1$, снабженных указанным отношением частичного порядка на множестве $\{\delta_m\} \cup \{w_\ell(\pi_{\text{lab}}(g))\}$. Полученные функции $f^\leq \in \mathcal{F}_\leq^1$ с отношениями частичного порядка указанного вида назовем *упорядоченными* функциями Морса.

На пространстве \mathcal{F}_\leq^1 упорядоченных функций Морса действует та же группа $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ гомеоморфизмами $f^\leq \mapsto h_2^{-1} \circ f^\leq \circ h_1$, $(h_2, h_1) \in \text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$, где отношение частичного порядка для упорядоченной функции $h_2^{-1} \circ f^\leq \circ h_1$ получено “перенесением” отношения частичного порядка для упорядоченной функции f^\leq с помощью диффеоморфизма h_1^{-1} . Упорядоченные функции, принадлежащие одной $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ -орбите (соотв. $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^0$ -орбите), назовем *эквивалентными* (соотв. *топологически эквивалентными*). Отношение эквивалентности (соотв. топологической эквивалентности) на пространстве \mathcal{F}_\leq^1 обозначим через \sim (соотв. \sim_{top}), а класс эквивалентности через $[f^\leq]$ (соотв. $[f^\leq]_{\text{top}}$). Снабдим каждый класс эквивалентности $[f^\leq]$ упорядоченных функций Морса C^∞ -топологией (однако на всем пространстве \mathcal{F}_\leq^1 упорядоченных функций Морса мы не будем вводить топологию, так как это пространство нехаусдорфово для “естественной” топологии на нем). Имеем проекции

$$\pi_{\text{lab}, \leq} : \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow \mathcal{F}_\leq^1, \quad \pi_\leq : \mathcal{F}_\leq^1 \rightarrow \mathcal{F}^1.$$

Снабдим каждую критическую точку w_ℓ локального экстремума функции f_1 и каждую граничную окружность δ_ℓ поверхности M меткой $\tilde{f}(w_\ell)$ (соотв. $\tilde{f}(\delta_\ell)$). Обозначим полученную меченую функцию Морса f_1^{lab} (обозначение 3.2.12(A)) через

$$f_2 := f_1^{\text{lab}} \in \mathcal{F}_{\text{lab}}^1,$$

а соответствующую упорядоченную функцию Морса (обозначение 3.2.12(B)) через

$$f_3 := \pi_{\text{lab}, \leq}(f_2) \in \mathcal{F}_\leq^1.$$

Имеем отображение

$$\rho_2^{\text{lab}} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{lab}}^1, \quad \tilde{f} \mapsto f_2. \quad (3.7)$$

Ясно, что $\pi_{\text{lab}} \circ \rho_2^{\text{lab}} = \rho_2$. Аналогично (3.6) показывается, что ρ_2^{lab} является гомотопической эквивалентностью.

Следующее утверждение является уточнением утверждения [143, утверждение 6.2] в части (Б). Отметим, что части (Б) и (В) данного утверждения не используются в доказательстве основных результатов диссертации, а представляют самостоятельный интерес и отвечают на вопрос В.И. Арнольда 2007 г.

Утверждение 3.2.13 (см. [143, утверждение 6.2]). (А) *Строгая деформационная ретракция* $\rho_2: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}^1$, $\tilde{f} \mapsto f_1$, *сильно* \mathcal{D}^\pm -*эквивариантна* (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4). *Ретракция* ρ_2 *сохраняет отношение топологической эквивалентности функций Морса* (т.е. переводит топологически эквивалентные функции Морса в топологически эквивалентные, см. определение 2.2.4 (В) и обозначение 3.2.12), *и индуцирует сюръекции между соответствующими множествами классов топологической эквивалентности функций*.

(Б) *Отображение*

$$\rho_2^{\text{lab}}: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{lab}}^1, \quad \tilde{f} \mapsto f_2,$$

сюръективно и является сильно \mathcal{D}^\pm -*эквивариантной* (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4) *гомотопической эквивалентностью*. *Более того, ρ_2^{lab} обладает \mathcal{D}^\pm -эквивариантным гомотопически обратным и соответствующими \mathcal{D}^\pm -эквивариантными гомотопиями, сохраняющими проекции $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 / \sim_{\text{top}}$ и $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1 / \sim_{\text{top}}$. Далее, ρ_2^{lab} индуцирует биекцию множеств классов топологической эквивалентности, а потому и биекцию множеств классов эквивалентности. В частности, ограничение сюръекции ρ_2^{lab} на класс топологической эквивалентности $[\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ любой функции $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ в $\tilde{\mathcal{F}}$ (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4) является сильно $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной гомотопической эквивалентностью*

$$\rho_2^{\text{lab}}|_{[\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}}: [\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} [f_2]_{\text{top}}$$

между классами топологической эквивалентности в $\tilde{\mathcal{F}}$ и в $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$.

(В) *Проекция $\pi_{\text{lab}, \leq}: \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow \mathcal{F}_{\leq}^1$ является $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной и индуцирует биекцию между множествами классов топологической эквивалентности. Ограничение проекции $\pi_{\text{lab}, \leq}: \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow \mathcal{F}_{\leq}^1$ на класс топологической эквивалентности $[f^{\text{lab}}]_{\text{top}}$ любой меченой функции $f^{\text{lab}} \in \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ (см. обозначения 3.1.4, 3.2.12 и определение 3.2.4) является сильно $\text{Diff}^+[-1; 1] \times \mathcal{D}^0$ -эквивариантной* (см. обозначение 3.1.4 и определение 3.2.4) *гомотопической эквивалентностью*

$$\pi_{\text{lab}, \leq}|_{[f^{\text{lab}}]_{\text{top}}}: [f^{\text{lab}}]_{\text{top}} \rightarrow [f^{\leq}]_{\text{top}}$$

между классами топологической эквивалентности в $\mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ и в \mathcal{F}_{\leq}^1 .

Ограничение проекции $\pi_{\leq}: \mathcal{F}_{\leq}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ на класс топологической эквивалентности $[f^{\leq}]_{\text{top}}$ любой упорядоченной функции $f^{\leq} \in \mathcal{F}_{\leq}^1$ (см. обозначения 3.1.4, 3.2.12 и определение 3.2.4) является конечнолистным накрытием

$$\pi_{\leq}|_{[f^{\leq}]_{\text{top}}}: [f^{\leq}]_{\text{top}} \rightarrow [f]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$$

между классами топологической эквивалентности в \mathcal{F}_{\leq}^1 и в \mathcal{F}^1 .

Доказательство. (А) *Сильная \mathcal{D}^\pm -эквивариантность строгой деформационной ретракции ρ_2 очевидно следует из построения ретракции ρ_2 и гомотопии между ней и $\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}}$. При этом используется, что значения функции f_1 и гомотопии строятся по значениям функции \tilde{f} .*

Пусть функции $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{F}}$ топологически эквивалентны, т.е. $\tilde{g} = h_2 \circ \tilde{f} \circ h_1$ для некоторых диффеоморфизмов $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$ и $h_1 \in \mathcal{D}^0$. В силу $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ и \mathcal{D}^\pm -эквивариантности ρ_2 , имеем $\rho_2(\tilde{g}) = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f} \circ h_1) = (\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})) \circ h_1$, а потому достаточно доказать топологическую эквивалентность функций Морса $\rho_2(\tilde{f}) = f_1$ и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$. Мы докажем существование такого диффеоморфизма $h_3 \in \mathcal{D}^0$, что

$$(h_2 \circ f_1) \circ h_3 = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f}). \quad (3.8)$$

Обозначим $Z_\ell = Z_\ell(\tilde{f}, h_2) := C_\ell(\tilde{f}) \cup C_\ell(h_2 \circ \tilde{f}) \subset M$ для каждой точки $w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f}, 0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f}, 2}$ и для каждой граничной окружности $\partial_\ell \subset \partial M$.

Заметим, что у функций Морса f_1 и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ те же критические точки, что и у функции \tilde{f} , причем локально на M функции f_1 и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ являются функциями от \tilde{f} . Кроме того, всюду на множестве

$$M' := M \setminus \left(\bigcup_{w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f}, 0} \cup \mathcal{C}_{\tilde{f}, 2}} Z_\ell(\tilde{f}, h_2) \cup \bigcup_{\partial_\ell \subset \partial M} Z_\ell(\tilde{f}, h_2) \right)$$

(и даже в некоторой окрестности множества M' в M) выполнено $h_2 \circ f_1 = h_2 \circ \tilde{f} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$. Поэтому на M' можно положить $h_3|_{M'} := \text{id}_{M'}$ для выполнения (3.8) в M' .

Осталось определить h_3 на подмножествах $Z_\ell = Z_\ell(\tilde{f}, h_2)$. Эти подмножества попарно не пересекаются и являются открытыми кругами и “полуоткрытыми цилиндрами” (см. выше), а их замыкания \bar{Z}_ℓ — замкнутыми кругами и цилиндрами. На каждом $\bar{Z}_\ell \subset M$ функции $f_2 := h_2 \circ f_1$ и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ являются гладкими возрастающими функциями от \tilde{f} с всюду положительной производной, имеют один и тот же минимум и один и тот же максимум, и совпадают с $h_2 \circ \tilde{f}$ в достаточно малой окрестности граничной окружности $\bar{Z}_\ell \cap M'$ в \bar{Z}_ℓ . Поэтому имеется диффеоморфизм \hat{h}_ℓ отрезка $[\min(f_2|_{\bar{Z}_\ell}); \max(f_2|_{\bar{Z}_\ell})]$ в себя, оставляющий неподвижными концы отрезка и однозначно определяемый условием

$$\hat{h}_\ell \circ f_2|_{\bar{Z}_\ell} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})|_{\bar{Z}_\ell},$$

причем \hat{h}_ℓ совпадает с тождественным диффеоморфизмом в достаточно малой окрестности конца отрезка, отличного от ± 1 (обозначим этот конец через b_ℓ).

Пусть для определенности \bar{Z}_ℓ либо является замкнутым кругом и содержит точку $w_\ell \in \{z_k\}$ локального максимума, либо является цилиндром и содержит граничную окружность $\delta_\ell \subset \partial^+ M$. Имеем $f_2(\bar{Z}_\ell) = [b_\ell; 1]$ и $b_\ell = f_2(\partial \bar{Z}_\ell) \in (-1, 1)$. Отметим, что $\hat{h}_\ell(1) = 1$ и $\hat{h}'_\ell > 0$ на $[b_\ell; 1]$, поэтому имеется всюду положительная гладкая функция \tilde{h}_ℓ на $[0; 1 - b_\ell]$, такая что

$$\hat{h}_\ell(1 - t) = 1 - t\tilde{h}_\ell(t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Отметим, что $\tilde{h}_\ell \equiv 1$ в некоторой окрестности точки $1 - b_\ell$ в отрезке $[0; 1 - b_\ell]$. Пусть для определенности \bar{Z}_ℓ является кругом. Из леммы Морса [104] следует, что имеется координатный диффеоморфизм $(u_\ell, v_\ell): \bar{Z}_\ell \rightarrow \{u^2 + v^2 \leq 1 - b_\ell\} \subset \mathbb{R}^2$ круга \bar{Z}_ℓ в стандартный круг радиуса $\sqrt{1 - b_\ell}$, такой что $f_2|_{\bar{Z}_\ell} = 1 - u_\ell^2 - v_\ell^2$. Рассмотрим в круге полярные координаты $r_\ell \in [0; \sqrt{1 - b_\ell}]$, $\varphi_\ell \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, такие, что $u_\ell = r_\ell \cos \varphi_\ell$, $v_\ell = r_\ell \sin \varphi_\ell$. В этих координатах

$$f_2|_{\bar{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2, \quad \hat{h}_\ell \circ f_2|_{\bar{Z}_\ell} = \hat{h}_\ell(1 - r_\ell^2) = 1 - r_\ell^2 \tilde{h}_\ell(r_\ell^2).$$

Определим диффеоморфизм $h_3|_{\bar{Z}_\ell}$ круга \bar{Z}_ℓ в себя следующей формулой в полярных координатах $r_\ell, \varphi_\ell \bmod 2\pi$:

$$h_3|_{\bar{Z}_\ell}: (r_\ell, \varphi_\ell \bmod 2\pi) \mapsto \left(r_\ell \sqrt{\tilde{h}_\ell(r_\ell^2)}, \varphi_\ell \bmod 2\pi \right).$$

Эта формула определяет диффеоморфизм круга в себя, так как \tilde{h}_ℓ — положительная гладкая функция, и $\tilde{h}_\ell(r_\ell^2) \equiv 1$ в некоторой окрестности границы круга. Тогда в круге \bar{Z}_ℓ выполнено

$$f_2 \circ h_3|_{\bar{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2 \tilde{h}_\ell(r_\ell^2) = \hat{h}_\ell \circ f_2|_{\bar{Z}_\ell} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})|_{\bar{Z}_\ell},$$

и в достаточно малой окрестности граничной окружности круга \bar{Z}_ℓ выполнено $h_3|_{\bar{Z}_\ell} = \text{id}$. Если \bar{Z}_ℓ является цилиндром, то диффеоморфизм $h_3|_{\bar{Z}_\ell}$ определяется аналогично, при помощи координатного диффеоморфизма $(r_\ell, \varphi_\ell \bmod 2\pi): \bar{Z}_\ell \rightarrow [0; b_\ell] \times S^1$, такого что $f_2|_{\bar{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2$. При этом функции $f_2|_{\bar{Z}_\ell}$, $\hat{h}_\ell \circ f_2|_{\bar{Z}_\ell}$ и диффеоморфизм $h_3|_{\bar{Z}_\ell}$ имеют такой же вид в координатах $r_\ell, \varphi_\ell \bmod 2\pi$, как в случае круга, см. выше.

Если \bar{Z}_ℓ либо является замкнутым кругом, содержащим точку $w_\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{f}, 0}$ локального минимума, либо является цилиндром, содержащим граничную окружность $\delta_\ell \subset \partial^- M$, то построение диффеоморфизма $h_3|_{\bar{Z}_\ell}$ проводится аналогично.

Поскольку для каждого круга или цилиндра \bar{Z}_ℓ выполнено $h_3|_{\bar{Z}_\ell} = \text{id}$ в достаточно малой окрестности его границы $\partial \bar{Z}_\ell = \bar{Z}_\ell \cap M'$ в M , то отображение h_3 корректно определено, является диффеоморфизмом поверхности M и обладает требуемым свойством (3.8).

(Б) Докажем лишь то утверждение данного пункта, которое нам понадобится в дальнейшем. Доказательства остальных утверждений данного пункта опускаем. А именно, мы покажем, что для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ отображение

$$\rho_2^{\text{lab}}|_{[\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}}: [\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow [f_2]_{\text{top}}$$

является гомотопической эквивалентностью, где $f_2 = \rho_2^{\text{lab}}(\tilde{f})$, см. (3.7). Отметим, что при $\tilde{f} \notin \mathcal{F}^1$ аналогичное отображение $\rho_2|_{[\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}}$ не является ретракцией, так как $[f_1]_{\text{top}} \cap [\tilde{f}]_{\text{top}} = \emptyset$.

Шаг 1. Для любых вещественных чисел $a, b > 0$ определим диффеоморфизм отрезков $h_{a,b}: [0; a] \rightarrow [0; b]$ правилом

$$\begin{aligned} h_{a,b}(x) &:= x + (b - a)I_{0,a}(x), & 0 \leq x \leq a, & \quad a \leq b, \\ h_{a,b}(x) &:= h_{b,a}^{-1}(x), & 0 \leq x \leq a, & \quad a \geq b. \end{aligned} \tag{3.9}$$

При тех $a, b > 0$, для которых диффеоморфизм $h_{a,b}$ определен обеими из приведенных формул (а именно, при $a = b$), эти определения совпадают. При этом для любого $x \in [0; a]$ из некоторой окрестности нуля, зависящей от чисел a и b , выполнено $h_{a,b}(x) = x$, а для любого $x \in [0; a]$ из некоторой окрестности числа a выполнено $h_{a,b}(x) = x + b - a$.

Шаг 2. Для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ построим отображение

$$\rho_{\tilde{f}}: [f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow [\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}.$$

По любой меченой функции Морса $f'_2 \in [f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ будем строить функцию $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \in [\tilde{f}]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$. Пусть $\tilde{c}_1(f'_1) < \dots < \tilde{c}_N(f'_1)$ — все седловые критические значения функции f'_1 , а $\tilde{c}_1(\tilde{f}) < \dots < \tilde{c}_N(\tilde{f})$ — все седловые критические значения функции \tilde{f} . Положим также $\tilde{c}_0(f'_1) = \tilde{c}_0(\tilde{f}) := -1$ и $\tilde{c}_{N+1}(f'_1) = \tilde{c}_{N+1}(\tilde{f}) := 1$.

Определим диффеоморфизм $h = h_{f'_1}: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$, переводящий $\tilde{c}_m(f'_1) \mapsto \tilde{c}_m(\tilde{f})$, $0 \leq m \leq N + 1$, по следующему правилу:

$$h(x) = \tilde{c}_m(\tilde{f}) + h_{\tilde{c}_{m+1}(f'_1) - \tilde{c}_m(f'_1), \tilde{c}_{m+1}(\tilde{f}) - \tilde{c}_m(\tilde{f})}(x - \tilde{c}_m(f'_1)), \quad x \in [\tilde{c}_m(f'_1); \tilde{c}_{m+1}(f'_1)],$$

$0 \leq m \leq N$. В некоторой окрестности точки $\tilde{c}_m(f'_1)$, $0 \leq m \leq N + 1$, выполнено $h(x) = x + \tilde{c}_m(\tilde{f}) - \tilde{c}_m(f'_1)$.

Ввиду топологической эквивалентности меченых функций f'_2 и f_2 , найдутся диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R})$ такие, что верно равенство $f'_2 = h_2 \circ f_2 \circ h_1$ меченых функций.

Для каждой точки $w_\ell(f'_1) \in \mathcal{C}_{f'_1,0} \cup \mathcal{C}_{f'_1,2}$ локального минимума или максимума функции f'_1 обозначим через $Q_\ell \ni w_\ell(f'_1)$ такой открытый диск в M , что его граница содержится в графе $G_{f'_1}$, см. обозначение 3.1.6, и сам диск не пересекается с графом $G_{f'_1}$. Для каждой компоненты связности δ_ℓ края поверхности M обозначим через $\widehat{Q}_\ell \supset \delta_\ell$ такой полуоткрытый цилиндр в M , что его отличная от δ_ℓ граничная окружность содержится в графе $G_{f'_1}$, и сам цилиндр не пересекается с графом $G_{f'_1}$. На множестве

$$M \setminus \left\{ \bigcup_{w_\ell \in \mathcal{C}_{f'_1,0} \cup \mathcal{C}_{f'_1,2}} Q_\ell \cup \bigcup_{\delta_\ell \subset \partial M} \widehat{Q}_\ell \right\}$$

определим функцию Морса $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ совпадающей с $h \circ f'_2$, а на каждом диске Q_ℓ и цилиндре \widehat{Q}_ℓ определим следующим образом. Рассмотрим диск Q_ℓ , содержащий критическую точку $w_\ell(f'_1) \in \mathcal{C}_{f'_1,2}$ локального максимума. Определим функцию $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ на диске $Q_\ell \ni w_\ell(f'_1)$ формулой

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{f}}(f'_2)|_{Q_\ell} &:= h(a_\ell(f'_2)) + h_{1-h(a_\ell(f'_2)), a_\ell(f_2)-h(a_\ell(f'_2))}(h(a_\ell(f'_2)) - h(a_\ell(f'_2))) \\ &= h \circ f'_1(\partial Q_\ell) + h_{1-h \circ f'_1(\partial Q_\ell), \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f})) - h \circ f'_1(\partial Q_\ell)}(h \circ f'_1|_{Q_\ell} - h \circ f'_1(\partial Q_\ell)), \end{aligned}$$

а на дисках Q_ℓ , содержащих критические точки $w_\ell(f'_1) \in \mathcal{C}_{f'_1,0}$ локального минимума, формулой

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{f}}(f'_2)|_{Q_\ell} &:= a_\ell(f_2) + h_{h(a_\ell(f'_2))+1, h(a_\ell(f'_2))-a_\ell(f_2)}(h(a_\ell(f'_2)) + 1) \\ &= \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f})) + h_{h \circ f'_1(\partial Q_\ell)+1, h \circ f'_1(\partial Q_\ell) - \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f}))}(h \circ f'_1|_{Q_\ell} + 1). \end{aligned}$$

Здесь нумерация критических точек функции \tilde{f} определяется как индуцированная из нумерации критических точек функции f'_1 при диффеоморфизме h_1 , т.е.

$$w_\ell(\tilde{f}) := h_1(w_\ell(\rho_{\tilde{f}}(f'_2))), \quad 1 \leq \ell \leq p + q + r.$$

Так определенная функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)|_{Q_\ell}$ имеет единственную критическую точку $w_\ell(f'_1)$ и совпадает с функциями $h \circ f'_1|_{Q_\ell}$ и $f'_1|_{Q_\ell}$ в некоторой окрестности границы диска Q_ℓ , а в окрестности точки $w_\ell(f'_1)$ совпадает с $f'_1|_{Q_\ell} + \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f})) - f'_1(w_\ell(f'_1))$. Аналогичными формулами определяется функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)|_{\tilde{Q}_\ell}$ на каждом цилиндре \tilde{Q}_ℓ .

Шаг 3. Покажем, что $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \in [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$. Построенная функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ является функцией Морса с тем же набором связных компонент линий уровня, что и у f'_1 , и в окрестностях всех критических точек и точек края поверхности M она отличается от f'_1 на аддитивную локальную константу. Кроме того, значения функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ в седловых критических точках те же, что и у функции f'_1 , а значения функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ в точках локальных экстремумов и в точках края поверхности M равны меткам меченой функции f'_2 в этих точках. Отсюда имеем $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)(w_\ell(\rho_{\tilde{f}}(f'_2))) = \tilde{f}(h_1(w_\ell(\rho_{\tilde{f}}(f'_2)))) = \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f}))$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, и $(\rho_{\tilde{f}}(f'_2))|_{\partial M} = \tilde{f}|_{\partial M}$. В частности, $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Покажем, что $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \sim_{\text{top}} \tilde{f}$. Поскольку $f'_2 \sim_{\text{top}} f_2$, то $f_2 = h_2 \circ f'_2 \circ h_1$ для некоторых диффеоморфизмов $h_1 \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+([-1; 1])$. В силу \mathcal{D}^\pm -эквивариантности отображения $\rho_{\tilde{f}}$ и перечисленных выше свойств функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$, функция $(\rho_{\tilde{f}}(f'_2)) \circ h_1 = \rho_{\tilde{f}}(f'_2 \circ h_1)$ является функцией Морса с тем же набором связных компонент линий уровня, что и у $f'_1 \circ h_1 = h_2^{-1} \circ f_1$, которые такие же как у f_1 , а потому такие же, как у \tilde{f} . Кроме того, значения функции $(\rho_{\tilde{f}}(f'_2)) \circ h_1$ в критических точках и точках края поверхности M такие же, как у \tilde{f} . Отсюда по лемме 2.3.2 имеем $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \in \tilde{f}\mathcal{D}^0$, поэтому $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \sim_{\text{top}} \tilde{f}$. Значит, $\rho_{\tilde{f}}(f'_2) \in [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$.

Так как значения функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_2)$ строились по значениям и меткам функции f'_2 , то $\rho_{\tilde{f}}(f'_2 \circ h_1) = (\rho_{\tilde{f}}(f'_2)) \circ h_1$ для любого $h_1 \in \mathcal{D}^0$, т.е. отображение $\rho_{\tilde{f}}: [f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ является \mathcal{D}^0 -эквивариантным. Аналогично показывается корректность и \mathcal{D}^\pm -эквивариантность отображения

$$\rho_{[\tilde{f}]}: [f_2] \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow [f] \cap \tilde{\mathcal{F}},$$

определенного условием $\rho_{[\tilde{f}]}|_{[f_2 \circ h_1]_{\text{top}}} = \rho_{\tilde{f} \circ h_1}$ для любого $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$.

Шаг 4. Зададим гомотопию между отображениями $\rho_{\tilde{f}} \circ \rho_2^{\text{lab}}: [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ и $\text{id}_{[f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}}$ формулой

$$\tilde{g} \mapsto \tilde{g}_t := (1 - t)\tilde{g} + t\rho_{\tilde{f}} \circ \rho_2^{\text{lab}}(\tilde{g}) = (1 - t)\tilde{g} + t\rho_{\tilde{f}}(g_2), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \tilde{g} \in [f]_{\text{top}} \cap \tilde{\mathcal{F}}.$$

Все функции \tilde{g}_t в процессе гомотопии являются функциями Морса и принадлежат $\tilde{\mathcal{F}}$, так как $\tilde{g}, \rho_{\tilde{f}}(g_2) \in \tilde{\mathcal{F}}$, функция $\rho_{\tilde{f}}(g_2)$ локально на поверхности M является гладкой функцией с положительной производной от функции g_1 , а потому и от \tilde{g} , и в некоторых окрестностях критических точек функция $\rho_{\tilde{f}}(g_2)$ отличается от g_1 (а потому и от \tilde{g}) на аддитивную локальную константу.

Покажем, что все функции \tilde{g}_t в процессе указанной гомотопии топологически эквивалентны исходной функции \tilde{g} . Действительно, функции \tilde{g} и $\rho_{\tilde{f}}(g_2)$ имеют одни и те же критические точки и связные компоненты линий уровня, отличаются на аддитивную локальную константу в окрестности каждой критической точки, а разность значений функции $\rho_{\tilde{f}}(g_2)$ в любых двух точках, являющихся критическими точками или точками края поверхности M , имеет тот же знак (соотв. равна нулю), что и разность значений функции \tilde{g} в этих точках. Поэтому таким же условиям удовлетворяет и пара функций \tilde{g}_t и \tilde{g} для любого $t \in [0; 1]$. Согласно лемме 2.3.2, отсюда следует, что $\tilde{g}_t \in \tilde{g}\mathcal{D}^0$. Следовательно, $\tilde{g}_t \sim_{\text{top}} \tilde{g}$, $0 \leq t \leq 1$.

Шаг 5. Зададим гомотопию между отображением $\rho_2^{\text{lab}} \circ \rho_{\tilde{f}}: [f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1 \rightarrow [f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ и $\text{id}_{[f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1}$ формулой $f'_2 \mapsto (1 - t)f'_2 + t\rho_2^{\text{lab}} \circ \rho_{\tilde{f}}(f'_2)$, $0 \leq t \leq 1$. Эта гомотопия задает путь в

пространстве $[f_2]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}_{\text{lab}}^1$ меченых функций Морса согласно тем же аргументам, что и для предыдущей гомотопии.

(В) Доказательство утверждений этого пункта нетрудно и опускается. \square

Ясно, что утверждения 3.2.11 и 3.2.13 доказывают теорему 3.2.5(А) для следующих объектов:

- сильно \mathcal{D}^\pm -эquivариантная строгая деформационная ретракция $p_0 := \rho_2 \circ \rho_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$, $f \mapsto f_1$;
- для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ и ее образов $\tilde{f} := \rho_1(f) \in \tilde{\mathcal{F}}$, $f_3 := \pi_{\text{lab}, \leq} \circ \rho_2^{\text{lab}}(\tilde{f})$ и $f_1 := \rho_2(\tilde{f}) = \pi_{\leq} \circ \pi_{\text{lab}, \leq} \circ \rho_2^{\text{lab}}(\tilde{f})$ накрывающее пространство $E_{[f]_{\text{top}}} := [f_3]_{\text{top}} \subseteq \mathcal{F}_{\leq}^1$ и конечнолистное накрытие

$$\pi_{[f]_{\text{top}}} = \pi_{\leq}|_{[f_3]_{\text{top}}} : [f_3]_{\text{top}} \rightarrow [f_1]_{\text{top}} \cap \mathcal{F}^1$$

между классами топологической эквивалентности в \mathcal{F}_{\leq}^1 и в \mathcal{F}^1 ;

- гомотопическая эквивалентность $p_{0, [f]_{\text{top}}} := \pi_{\text{lab}, \leq} \circ \rho_2^{\text{lab}} \circ \rho_1|_{[f]_{\text{top}}} : [f]_{\text{top}} \rightarrow E_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}$.

Осталось доказать теорему 3.2.5 (Б). Доказательство приведено в [143, §§7–14] и [132]. В частности, гомотопические эквивалентности i_1, p_1 построены в [143, §7], а p_2, i_2 в [143, §9 и §12]. Сформулируем ключевые утверждения, на которых основано доказательство.

3.2.4 Равномерная \mathcal{D}^\pm -эquivариантная лемма Морса

В этом разделе излагается результат работ [132, 143], который является ключевым в доказательстве теоремы 3.2.5 (Б) и используется при построении [143, §9] гомотопической эквивалентности $p_2 : \mathcal{F}^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$. Мы приводим формулировку и основные конструкции доказательства этого результата, так как они используются в доказательстве лемм 2.5.5 и 3.7.2 и утверждения 4.2.12.

В этом параграфе мы предполагаем, что число $p + q + r$ критических точек функций Морса положительно, а поверхность M не обязательно ориентируема. Мы используем обозначение 2.3.1 (А).

Пусть $\mathcal{F}^{\text{num}} = \mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — пространство функций Морса с пронумерованными критическими точками, снабженное C^∞ -топологией (см. определение 2.2.2 (Б)). Пусть PTM — проективизированное касательное расслоение поверхности M . Обозначим через $\mathcal{F}_{\text{fr}}^{\text{num}} \subset \mathcal{F}^{\text{num}} \times (PTM)^{p+r}$ подпространство, состоящее из пар (f, ξ) , где $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ — функция Морса, ξ — любой набор одномерных подпространств $\xi_\ell \subset T_{w_\ell} M$ касательных пространств $T_{w_\ell} M$ в критических точках $w_\ell \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ локальных минимумов и максимумов функции f . Снабдим пространство $\mathcal{F}^{\text{num}} \times (PTM)^{p+r}$ топологией прямого произведения, а подпространство $\mathcal{F}_{\text{fr}}^{\text{num}}$ — индуцированной топологией. Обозначим через μ пространство римановых метрик на поверхности M , снабженное C^∞ -топологией.

Пусть \bar{D} — стандартный единичный круг в плоскости \mathbb{R}^2 . На круге \bar{D} рассмотрим естественное (левое) действие группы $\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\} := \{\text{id}_{\bar{D}}, -\text{id}_{\bar{D}}\} \subset SO(2)$. Пусть $\text{Emb}^+(\bar{D}, M) \subset C^\infty(\bar{D}, M)$ — пространство сохраняющих ориентацию гладких вложений $\bar{D} \hookrightarrow M$, снабженное C^∞ -топологией. На пространстве $C^\infty(\bar{D}, M)$ рассмотрим естественное (правое) действие группы $\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$, $(\phi, h) \mapsto (\phi \circ h)$, $\phi \in C^\infty(\bar{D}, M)$, $h \in \{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$. Рассмотрим индуцированное (правое) действие группы $\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$ на пространстве $\text{Emb}^+(\bar{D}, M)$. Пусть $\text{Emb}^+(\bar{D}, M)/\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$ — пространство орбит этого действия, снабженное фактортопологией.

Теорема 3.2.14 (о “равномерных” \mathcal{D}^\pm -эquivариантных локальных координатах в лемме Морса [132]). *Пусть $p + q + r > 0$ и поверхность M ориентирована. Существуют две*

непрерывные положительные функции $\varepsilon_0, r'_0: \mathcal{F} \times \mu \rightarrow \mathbb{R}$ и набор $p + q + r$ непрерывных отображений

$$\Phi_\ell: \mathcal{F}^{\text{num}} \times \mu \rightarrow \text{Emb}^+(\bar{D}, M)/\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}, \quad (f, ds^2) \mapsto \phi_\ell\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}, \quad w_\ell \in \mathcal{C}_{f,1},$$

$$\Phi_\ell: \mathcal{F}_{\text{fr}}^{\text{num}} \times \mu \rightarrow \text{Emb}^+(\bar{D}, M)/\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}, \quad (f, \xi, ds^2) \mapsto \phi_\ell\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}, \quad w_\ell \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2},$$

$1 \leq \ell \leq p+q+r$, такие, что для любой тройки $(f, \xi, ds^2) \in \mathcal{F}_{\text{fr}}^{\text{num}} \times \mu$ и любого набора представителей $\phi_\ell \in \Phi_\ell(f, ds^2) \subset \text{Emb}^+(\bar{D}, M)$ (соответственно $\phi_\ell \in \Phi_\ell(f, \xi, ds^2) \subset \text{Emb}^+(\bar{D}, M)$) смежных классов, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, имеют место следующие утверждения:

(А) образы $\phi_\ell(\bar{D})$ вложений $\phi_\ell: \bar{D} \hookrightarrow M$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, попарно не пересекаются и отстоят друг от друга и от ∂M на расстоянии $\geq r'_0(f, ds^2)$ (в смысле метрики ds^2), а потому содержатся в $\text{int } M$ и попарно не пересекаются;

(Б) $\phi_\ell(0, 0) = w_\ell(f)$ и $f \circ \phi_\ell\left(\frac{u}{\varepsilon_0(f, ds^2)}, \frac{v}{\varepsilon_0(f, ds^2)}\right) = \pm u^2 \pm v^2 + f(w_\ell(f))$ для любой пары $\left(\frac{u}{\varepsilon_0(f, ds^2)}, \frac{v}{\varepsilon_0(f, ds^2)}\right) \in \bar{D}$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, причем каждой седловой критической точке $w_\ell(f)$ отвечает пара знаков $(+, -)$, а каждой критической точке $w_\ell(f)$ локального минимума (максимума) — пара знаков $(+, +)$ (соответственно $(-, -)$), причем $d\phi_\ell|_{(0,0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \in \xi_\ell$;

(В) \mathcal{D}^\pm -инвариантность функций ε_0, r'_0 , \mathcal{D}^\pm -эквивариантность отображений $\Phi_1, \dots, \Phi_{p+q+r}$ для любого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^\pm$ поверхности M выполнено $\varepsilon_0(f \circ h, h^*(ds^2)) = \varepsilon_0(f, ds^2)$, $r'_0(f \circ h, h^*(ds^2)) = r'_0(f, ds^2)$, а смежный класс $\Phi_\ell(f \circ h, h^*(ds^2))$ (соответственно $\Phi_\ell(f \circ h, dh^{-1}(\xi), h^*(ds^2))$) равен либо $h^{-1} \circ \phi_\ell\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$, если h сохраняет ориентацию, либо $h^{-1} \circ \phi_\ell \circ J_0\{\pm \text{id}_{\bar{D}}\}$, если h меняет ориентацию, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, где $J_0: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ — отражение в круге относительно первой координатной оси;

(Г) для любой функции Морса $g \in \mathcal{F}^{\text{num}}$, полученной из f перенумерацией критических точек, набор смежных классов $\Phi_\ell(g, ds^2)$ (соответственно $\Phi_\ell(g, \xi, ds^2)$), $1 \leq \ell \leq p+q+r$, получается перенумерацией из набора смежных классов $\Phi_\ell(f, ds^2)$ (соответственно $\Phi_\ell(f, \xi, ds^2)$), $1 \leq \ell \leq p + q + r$.

Таким образом, в каждой замкнутой координатной окрестности $\bar{U}_\ell := \phi_\ell(\bar{D})$ с координатами u, v (см. выше) выполнено утверждение классической леммы Морса [104]:

$$f|_{\bar{U}_\ell} = \pm u^2 \pm v^2 + f(w_\ell(f)), \quad 1 \leq \ell \leq p + q + r. \quad (3.10)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}^{\text{num}}$ — функция Морса и $ds^2 \in \mu$ — риманова метрика на поверхности M . Определим q вещественных чисел: пусть $L_j = L_j(f, ds^2) > 0$ — нижняя грань длин замкнутых нестягиваемых кривых в метрике ds^2 на проколоте поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ с началом и концом в седловой критической точке $y_j = y_j(f) \in \mathcal{C}_{f,1}$, $1 \leq j \leq q$. Положим $H = H(ds^2) := \max\{0, \max K\} \geq 0$, где $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гауссова кривизна в метрике ds^2 . Положим

$$r'_0 = r'_0(f, ds^2) := \min \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{H}}, \frac{1}{3} \min_j L_j, \frac{1}{3} \min_{\ell_1 \neq \ell_2} \rho(w_{\ell_1}, w_{\ell_2}), \frac{1}{2} \min_{\ell=1}^{p+q+r} \rho(w_\ell, \partial M) \right\} > 0, \quad (3.11)$$

где $\rho(X, Y)$ — длина кратчайшего пути между подмножествами $X, Y \subset M$ в метрике ds^2 . Определим число $r'_0 = r'_0(f, ds^2) > 0$ формулой (3.11).

В касательной плоскости $T_{w_\ell}M$ каждой критической точки $w_\ell = w_\ell(f)$ ($1 \leq \ell \leq p + q + r$) рассмотрим открытый круг $V'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ радиуса r'_0 в смысле метрики $ds^2|_{w_\ell}$. На замыкании этого круга определено экспоненциальное отображение

$$\beta'_\ell: \bar{V}'_\ell \rightarrow M, \quad (3.12)$$

т.е. отображение, переводящее каждый вектор круга в конец геодезической, выпущенной из w_ℓ с начальным вектором скорости, равным исходному вектору. Это отображение является регулярным погружением, так как $\frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ — радиус инъективности M , см. [52, §11.8, теорема 11]. Образы $\beta'_\ell(\bar{V}'_\ell)$ этих погружений отстоят друг от друга и от ∂M на расстоянии $\geq r'_0$, а потому содержатся в $\text{int } M$ и попарно не пересекаются.

Рассмотрим любой набор ξ одномерных подпространств $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ касательных пространств $T_{w_\ell}M$ в критических точках $w_\ell = w_\ell(f) \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ локальных минимумов и максимумов функции f . Для каждой критической точки $w_\ell = w_\ell(f) \in \mathcal{C}_f$ функции f , $1 \leq \ell \leq p + q + r$, выполним следующие построения.

(а) Пусть $(e_1, e_2) = (e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ — положительно ориентированный базис в $T_{w_\ell}M$ (относительно какой-либо локальной ориентации поверхности M в точке w_ℓ), обладающий следующими свойствами. Если w_ℓ — седловая точка, то базис ортогонален в метрике $ds^2|_{w_\ell}$ на $T_{w_\ell}M$, а матрица квадратичной формы $\frac{1}{2}d^2f|_{w_\ell}$ в этом базисе является диагональной матрицей $\text{diag}(1, -1)$. Если w_ℓ — точка локального минимума (максимума), то $e_1 \in \xi_\ell$ и базис является ортонормированным в метрике, задаваемой положительно определенной квадратичной формой $\frac{1}{2}d^2f|_{w_\ell}$ (соответственно $-\frac{1}{2}d^2f|_{w_\ell}$) на $T_{w_\ell}M$. При фиксированном наборе прямых ξ эти условия определяют базис с точностью до замены (e_1, e_2) на $(-e_1, -e_2)$, а при смене локальной ориентации эта пара базисов заменяется на $(e_1, -e_2)$ и $(-e_1, e_2)$. Ниже (см. замечания 3.2.15, 3.2.18) и в [143, замечания 9.5, 9.7 и 9.8] показано, что такой произвол в выборе базиса несуществен для однозначного построения замкнутой 1-формы $\alpha = \alpha(f, ds^2, \xi)$ — “оснащения” функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$, и для однозначного построения оснащенной функции Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, где $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2)$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2)$.

(б) Обозначим через x, y координаты в $T_{w_\ell}M$ по отношению к базису (e_1, e_2) . В этих координатах круг \bar{V}'_ℓ является эллипсом $\{\langle e_1, e_1 \rangle x^2 + 2\langle e_1, e_2 \rangle xy + \langle e_2, e_2 \rangle y^2 \leq r_0'^2\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в метрике $ds^2|_{w_\ell}$ на $T_{w_\ell}M$. Полуоси этого эллипса равны $\frac{r_0'}{\sqrt{\lambda_{\ell,+}}}$ и $\frac{r_0'}{\sqrt{\lambda_{\ell,-}}}$, где

$$\lambda_{\ell,\pm} := \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \right),$$

$$a_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle, \quad a_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad a_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle.$$

(в) Рассмотрим в эллипсе $\bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ с координатами x, y гладкую функцию

$$\hat{f} := f \circ \beta'_\ell. \tag{3.13}$$

Положим

$$C := \max_{\ell, \xi_\ell, (x,y) \in \bar{V}'_\ell, 0 \leq k \leq 3} \left| \frac{\partial^3 \hat{f}(x, y)}{\partial x^k \partial y^{3-k}} \right| \geq 0, \quad r_0 := \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2C}}, \min_{\ell, \xi_\ell} \frac{r_0'}{\sqrt{\lambda_{\ell,+}}} \right\} > 0, \tag{3.14}$$

где в определении числа C (соответственно r_0) максимум (соответственно минимум) берется по всем четверкам $(\ell, \xi_\ell, (x, y), k)$ (соответственно парам (ℓ, ξ_ℓ)), где $0 \leq k \leq 3$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, $w_\ell = w_\ell(f)$ — критическая точка функции f , $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ — любое одномерное подпространство касательного пространства в этой точке, которое в случае седловой критической точки w_ℓ однозначно определим условием $e_1 \in \xi_\ell$, и (x, y) — координаты любой точки круга $\bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ в базисе $e_1, e_2 \in T_{w_\ell}M$ (отвечающем прямой ξ_ℓ в случае критической точки локального минимума или максимума).

(г) Следуя доказательству леммы Морса, см. [104], определим в круге

$$\bar{V}_\ell := \{x^2 + y^2 \leq r_0^2\} \subset \bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$$

с координатами x, y новые локальные координаты u, v следующим образом. Определим в круге \bar{V}_ℓ функции

$$\begin{aligned} a(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{xx}(tux, tuy) dt du, & b(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{xy}(tux, tuy) dt du, \\ c(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{yy}(tux, tuy) dt du, & (x, y) &\in \bar{V}_\ell \subset T_{w_\ell}M. \end{aligned}$$

Тогда $\widehat{f}(x, y) = a(x, y)x^2 + 2b(x, y)xy + c(x, y)y^2 + f(w_\ell)$. Поэтому при выполнении неравенства $a(x, y) \neq 0$ (которое будет доказано в лемме 3.2.16 ниже) выполнено

$$\widehat{f}|_{\bar{V}_\ell}(x, y) = a(x, y) \left(x + \frac{b(x, y)}{a(x, y)}y \right)^2 + \left(c(x, y) - \frac{b(x, y)^2}{a(x, y)} \right) y^2 + f(w_\ell). \quad (3.15)$$

Определим в круге \bar{V}_ℓ функции

$$u = u(x, y) := |a(x, y)|^{1/2} \left(x + \frac{b(x, y)}{a(x, y)}y \right), \quad v = v(x, y) := \left| c(x, y) - \frac{b(x, y)^2}{a(x, y)} \right|^{1/2} y. \quad (3.16)$$

Согласно (3.15) и (3.16), имеем $\widehat{f}|_{\bar{V}_\ell}(x, y) = f(w_\ell) \pm u(x, y)^2 \pm v(x, y)^2$, $(x, y) \in \bar{V}_\ell$, квадратичная форма (3.10) от функций u, v .

Замечание 3.2.15. Нетрудно видеть, что при замене базиса (e_1, e_2) на $(\theta_1 e_1, \theta_2 e_2)$ (для $\theta_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, 2$) константы H, r'_0, C, r_0 и круг \bar{V}_ℓ не изменятся, а для любой точки круга \bar{V}_ℓ координаты (x, y) этой точки заменятся на $(\theta_1 x, \theta_2 y)$, а потому значения функций $u(x, y), v(x, y)$ в этой точке заменятся на $\theta_1 u(x, y), \theta_2 v(x, y)$.

Лемма 3.2.16 (о локальных координатах в лемме Морса [132, лемма 2]). Пусть M — ориентируемая или неориентируемая компактная поверхность, $(f, \xi, ds^2) \in \mathcal{F}_{\text{fr}}^{\text{num}} \times \mu$, $w_\ell = w_\ell(f)$ — критическая точка функции Морса f , $1 \leq \ell \leq p + q + r$. Пусть $\bar{V}_\ell \subset \bar{V}'_\ell$ — круги в касательной плоскости $T_{w_\ell}M$ радиусов r_0 и r'_0 (см. (3.11) и (3.14)) с центром в нуле в смысле координат x, y и римановой метрики $ds^2|_{w_\ell}$ соответственно. Тогда в любой точке $(x, y) \in \bar{V}_\ell$ справедливы неравенства (а) $a(x, y) \neq 0$, $a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 \neq 0$; (б) $xu(x, y) + yv(x, y) \geq \frac{4}{5}(x^2 + y^2)$; (в) якобиан отображения $h_\ell: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ положителен: $u_x(x, y)v_y(x, y) - v_x(x, y)u_y(x, y) > 0$. \square

Следствие 3.2.17 ([143, следствие 8.3]). В условиях леммы 3.2.16 положим $\varepsilon_2 := (\frac{4}{5}r_0)^2$. Тогда для любой точки (u_0, v_0) круга $\bar{V} := \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$ существует ровно одна точка (x_0, y_0) в круге $\bar{V}_\ell \subset T_{w_\ell}M$ со свойством $u(x_0, y_0) = u_0, v(x_0, y_0) = v_0$. Сопоставление $(u_0, v_0) \mapsto (x_0, y_0)$ задает гладкое вложение кругов $\beta_\ell: \bar{V} \rightarrow \bar{V}_\ell$, причем погружение

$$\phi'_\ell := \beta'_\ell \circ \beta_\ell: \bar{V} \rightarrow M$$

является вложением и обладает свойством $f \circ \phi'_\ell = f(w_\ell) + u^2 - v^2$ в случае седловой точки w_ℓ , и $f \circ \phi'_\ell = f(w_\ell) \pm (u^2 + v^2)$ в случае точки w_ℓ локального минимума или максимума. В частности, погружение $\beta'_\ell|_{\beta_\ell(\bar{V})}: \beta_\ell(\bar{V}) \rightarrow M$ является вложением. \square

Замечание 3.2.18. При замене базиса (e_1, e_2) на $(\theta_1 e_1, \theta_2 e_2)$ (для $\theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}$) вложение круга $\phi'_\ell: \bar{V} \rightarrow M$ заменится на $\phi'_\ell \circ J_{\theta_1, \theta_2}$, где диффеоморфизм $J_{\theta_1, \theta_2}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ определяется формулой $J_{\theta_1, \theta_2}(u, v) := (\theta_1 u, \theta_2 v)$, $(u, v) \in \bar{V}$. Поэтому образ $\bar{U}_\ell := \phi'_\ell(\bar{V})$ не изменится, а возникающие на нем координаты $(u, v): \bar{U}_\ell \rightarrow \bar{V}$ заменятся на $(\theta_1 u, \theta_2 v)$.

Окончание доказательства теоремы 3.2.14 [132]. Определим отображение $\phi_\ell \in C^\infty(\bar{D}, M)$ формулой $\phi_\ell(\frac{u}{\varepsilon_0}, \frac{v}{\varepsilon_0}) := \phi'_\ell(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}_{\varepsilon_0}$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$. В силу следствия 3.2.17 и условия $e_{\ell,1} \in \xi_\ell$ при $w_\ell \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ (см. построение базиса $e_{\ell,1}, e_{\ell,2} \in T_{w_\ell}M$) отображение ϕ_ℓ является вложением и удовлетворяет утверждениям (А)–(Г) теоремы 3.2.14. При построении вложения ϕ'_ℓ имелся произвол в выборе базиса $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$, а именно этот базис был определен с точностью до замены $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ на $(\theta_1 e_{\ell,1}, \theta_2 e_{\ell,2})$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}$, причем при фиксированной ориентации поверхности M было выполнено $\theta_1 = \theta_2$. Отсюда и из формул для функций u и v в круге \bar{V}_ℓ следует, что при указанной замене эти функции заменятся на $\theta_1 u$ и $\theta_2 v$ соответственно. Поэтому вложение ϕ_ℓ заменится на $\phi_\ell \circ J_{\theta_1, \theta_2}$, где диффеоморфизм $J_{\theta_1, \theta_2}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ определяется формулой $J_{\theta_1, \theta_2}(\tilde{u}, \tilde{v}) := (\theta_1 \tilde{u}, \theta_2 \tilde{v})$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \bar{D}$. В частности, при

фиксированной ориентации поверхности M (точнее локальной ориентации касательной плоскости $T_{w_\ell}M$) класс смежности $\Phi_\ell(f, ds^2) := \phi_\ell\{\pm \text{id}_M\} \in \text{Emb}(\bar{D}, M)/\{\pm \text{id}_M\}$ (соответственно $\Phi_\ell(f, \xi, ds^2) := \phi_\ell\{\pm \text{id}_M\}$) корректно определен, то есть зависит лишь от пары (f, ds^2) (соответственно тройки (f, ξ, ds^2)). Это дает искомый набор отображений Φ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p + q + r$. Непрерывность функций r'_0, ε_0 и отображений Φ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p + q + r$, доказывается аналогично доказательству [143, §10] непрерывности отображения p_2 . \square

3.2.5 Равномерная лемма Морса для оснащенных функций Морса

В этом разделе формулируется результат из [143, §11].

Леммы 3.2.19 и 3.2.20 (соответственно лемма 3.2.20) данного раздела используются для задания топологии на пространстве \mathbb{F} оснащенных функций Морса в §3.2.10 (т.е. в [143, §4.2]) и для построения гомотопической эквивалентности $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1 \times \mu$ в [143, §12] (соответственно при построении и изучении гомеоморфизмов $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \approx \widetilde{\mathcal{M}}$ и $i_3: \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ в §3.4.3 и §3.4.4, см. доказательства леммы 3.4.5, шаг 3, и утверждений 3.4.7 и 3.4.10).

В этом пункте мы предполагаем, что число $p + q + r$ критических точек функций Морса положительно, а поверхность M не обязательно ориентируема.

Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ — оснащенная функция Морса, см. определение 3.2.2 и замечание 3.2.7. Рассмотрим на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ гладкое поле неотрицательно определенных в каждой точке квадратичных форм

$$ds^2 := (df)^2 + \alpha^2.$$

На $M \setminus \mathcal{C}_f$ оно является римановой метрикой. Аналогично римановым метрикам, этому полю квадратичных форм отвечает функция длины $\check{L}(\gamma)$ регулярных кусочно-гладких путей γ на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Определим расстояние $\rho(x, y) = \rho_{f,\alpha}(x, y) := \inf(\check{L}(\gamma))$, $x, y \in M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где нижняя грань берется по регулярным кусочно-гладким путям γ на поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ из x в y .

Пусть $x_i \in \mathcal{C}_{f,0}$ — точка локального минимума функции $f \in \mathcal{F}^1$, $1 \leq i \leq p$, пусть $c_j = f(y_j)$ — седловые критические значения, $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$, $1 \leq j \leq q$, и пусть $0 < R \leq R_- := \min\{1 + c_j\}$ в случае $q > 0$, или $0 < R \leq R_- := 2$ в случае $q = 0$. *Открытым* (соотв. *замкнутым*) *кругом* радиуса R с центром в точке x_i в смысле расстояния $\rho_{f,\alpha}$ назовем компоненту связности $D_{x_i,R}$ точки x_i в множестве $f^{-1}[-1; -1 + R)$ (соответственно компоненту связности $\bar{D}_{x_i,R}$ в множестве $f^{-1}[-1; -1 + R]$). Аналогично определяется круг радиуса R (при $0 < R \leq R_+ := \min\{1 - c_j\}$ в случае $q > 0$, или $0 < R \leq R_+ := 2$ в случае $q = 0$) с центром в точке $z_k \in \mathcal{C}_{f,2}$ локального максимума в смысле расстояния $\rho_{f,\alpha}$, $1 \leq k \leq r$.

Лемма 3.2.19 ([143, лемма 11.1]). *Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ — оснащенная функция Морса, $w_\ell \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ — критическая точка локального минимума (соотв. максимума) функции f , и пусть $R_0 = R_- := \min_{j=1}^q \{1 + c_j\} > 0$ (соотв. $R_0 = R_+ := \min_{j=1}^q \{1 - c_j\} > 0$) в случае $q > 0$, и $R_0 = R_- = R_+ := 2$ в случае $q = 0$. Тогда:*

(А) *В открытом круге D_{w_ℓ, R_0} радиуса R_0 с центром в точке w_ℓ в смысле расстояния $\rho_{f,\alpha}$ существуют регулярные координаты u, v , принимающие значения в $\{u^2 + v^2 < R_0\}$, в которых*

$$f|_{D_{w_\ell, R_0}} = \pm(u^2 + v^2) + f(w_\ell), \quad \alpha|_{D_{w_\ell, R_0}} = \varkappa_\ell \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2},$$

см. определение 3.2.2. В частности, в этих координатах $\bar{D}_{w_\ell, R} = \{u^2 + v^2 \leq R\}$ для любого $R \in (0; R_0)$.

(В) *В любом круге $D_{w_\ell, R}$, $0 < R \leq R_0$, координаты u, v с этими свойствами определены однозначно, с точностью до преобразований $(u, v) \mapsto (u \cos \varphi_0 - v \sin \varphi_0, u \sin \varphi_0 + v \cos \varphi_0)$, где $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$ — произвольная константа.* \square

Ниже строятся аналогичные регулярные координаты u, v в окрестностях седловых критических точек $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$, принимающие значения в $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$ и непрерывно зависящие

от пары (f, α) , $1 \leq j \leq q$, где числа $\varepsilon_{3,j} = \varepsilon_{3,j}(f, \alpha) > 0$ непрерывно зависят от оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ и строятся так. Определим вещественное число $d_{j_1, j_2} = d_{j_2, j_1}$ равным расстоянию $\rho_{f, \alpha}(y_{j_1}, y_{j_2})$ между седловыми точками $y_{j_1}, y_{j_2} \in \mathcal{C}_{f,1}$ при $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$. Определим число $\tilde{L}_j = \tilde{L}_j(f, \alpha) := \inf(\tilde{L}(\gamma)) > 0$, где нижняя грань берется по замкнутым кусочно-гладким нестягиваемым путям γ на поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ с началом и концом в точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$, $1 \leq j \leq q$. Определим числа $\varepsilon_{3,j} = \varepsilon_{3,j}(f, \alpha)$, $1 \leq j \leq q$, формулой

$$\varepsilon_{3,j} := \min \left\{ \min_{j_1 \neq j} d_{j_1, j}, \frac{1}{2} \tilde{L}_j, 1 - c_j, 1 + c_j \right\} \in (0; 1], \quad 1 \leq j \leq q, \quad (f, \alpha) \in \mathbb{F}^1. \quad (3.17)$$

Для любого $R \in (0; \varepsilon_{3,j}]$ обозначим через $D_{y_j, R} = D_{y_j, R}(f, \alpha)$ (соотв. $\bar{D}_{y_j, R} = \bar{D}_{y_j, R}(f, \alpha)$) открытый (соотв. замкнутый) круг радиуса R с центром в седловой критической точке y_j в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$, $1 \leq j \leq q$. Тогда открытый круг $D_{y_j, R}$ не содержит других критических точек и точек края ∂M .

Лемма 3.2.20 ([143, лемма 11.2]). *Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ — оснащенная функция Морса, $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ — седловая критическая точка функции f , $1 \leq j \leq q$. Тогда:*

(А) *Для любого $R \in (0; \varepsilon_{3,j})$ замкнутый круг $\bar{D}_{y_j, R}$ с центром в точке y_j радиуса R гомеоморфен стандартному замкнутому кругу.*

(Б) *Более того, в $D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}$ существуют положительно ориентированные гладкие координаты u, v , принимающие значения во всем круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$, в которых*

$$f|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = u^2 - v^2 + c_j, \quad \alpha|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = d(2uv), \quad d\tilde{s}^2|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = 4(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2), \quad (3.18)$$

где $c_j = f(y_j)$.

(В) *Если координаты u, v со свойствами (3.18) существуют в некоторой окрестности точки y_j , то они определены этими свойствами однозначно, с точностью до преобразования $(u, v) \mapsto (-u, -v)$. При этом $\rho_{f, \alpha}(y_j, \cdot)|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = u^2 + v^2$. \square*

3.3 Комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса при $\chi(M) < 0$. Связь с пермутоэдрами

В этом параграфе излагаются результаты работы автора [134].

Все построения и результаты настоящего параграфа относятся к случаю (3.19) и являются чисто комбинаторными. Точнее, они используют лишь понятия функции Морса и ее малых деформаций (см. критерий топологической эквивалентности возмущенных функций Морса в утверждении 2.5.2), но не используют понятия оснащенных функций Морса (см. определения 3.2.2, 3.5.1(В)). Связь данного параграфа с остальными разделами и с оснащенными функциями Морса указана в замечании 3.3.4.

Аннотация: Пусть M — гладкая компактная ориентируемая поверхность. Пусть \mathcal{F} — пространство функций Морса на M с фиксированным количеством критических точек каждого индекса, причем не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы). Введено понятие косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса, обобщающее понятие полиэдрального комплекса. Определен косоуго цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ (“комплекс оснащенных функций Морса”), ассоциированный с пространством \mathcal{F} . В случае $M = S^2$ полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ конечен; вычислена его эйлерова характеристика $\chi(\tilde{\mathbb{K}})$ и получены неравенства Морса для его чисел Бетти $\beta_j(\tilde{\mathbb{K}})$. Указана связь гомотопических типов полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ и пространства \mathcal{F} функций Морса, снабженного C^∞ -топологией.

В предыдущем параграфе §3.2 (т.е. в работе [143]) введено понятие *оснащенных* функций Морса на компактной поверхности M и доказана гомотопическая эквивалентность пространства \mathcal{F} функций Морса и пространства \mathbb{F} оснащенных функций Морса на M . Также доказан аналог последнего утверждения для ограничений указанных гомотопических эквивалентностей на классы топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ (определение 3.1.5 (Б), теорема

3.2.5, см. [143, теорема 2.5]). Последнее дает положительный ответ на вопрос, поставленный В.И. Арнольдом.

В этом и двух следующих параграфах 3.3–3.5 мы изучим (в большинстве случаев, см. (3.19)) комбинаторное описание пространства \mathbb{F} оснащенных функций Морса и, в частности, докажем гомотопическую эквивалентность $\mathbb{F} \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$ (аналог параметрического h -принципа, см. теорему 3.2.8), где $\tilde{\mathbb{K}}$ — “утолщенный” комплекс функций Морса на M , также называемый “комплексом оснащенных функций Морса” (см. замечание 3.1.1). Таким образом, мы сведем задачу об изучении топологии пространства \mathcal{F} к комбинаторной задаче — об изучении топологии полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$.

Данный параграф имеет следующую структуру. В §3.3.1 вводится понятие косоугольного цилиндрически-полиэдрального комплекса и формулируются основные результаты настоящего параграфа (теорема 3.3.3 и следствие 3.3.6). В §3.3.2 описывается построение стандартной косоугольной цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$, и изучены отображения инцидентности между парами ручек, отвечающими парам примыкающих друг к другу классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$ функций (определение 3.3.2(D), леммы 3.3.7–3.3.11). В §3.3.3 описывается построение комбинаторного объекта — комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса (и содержащего его многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$) и доказывается, что он является косоугольным цилиндрически-полиэдральным комплексом (теоремы 3.3.13, 3.3.14). В §3.3.4 описано построение гладкого стратифицированного многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (теорема 3.3.14). В §3.3.5 завершается доказательство теоремы 3.3.3, для полноты изложения исследуется торичность косоугольных цилиндрических ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (предложение 3.3.15) и доказывается существование полиэдрального комплекса \tilde{K} функций Морса и проекции $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ (следствие 3.3.5). В §3.3.6 из теоремы 3.3.3 выводится следствие 3.3.6 о гомологиях комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ стандартными методами теории Морса, а также доказываются некоторые свойства когомологий комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (предложение 3.3.17).

3.3.1 Точные формулировки основных результатов

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что поверхность M ориентирована. Случай неориентируемой поверхности M рассматривается как в замечении 3.2.7.

Косые цилиндрически-полиэдральные комплексы

Всюду в данном параграфе многогранники выпуклы и имеют размерность $\leq 2q$, а евклидовы многогранники $\leq q - 1$. Под *выпуклым многогранником* (соответственно *евклидовым выпуклым многогранником*) понимаем выпуклую оболочку конечного подмножества векторного пространства \mathbb{R}^{2q} (соответственно евклидова пространства \mathbb{E}^{q-1}), а под *изоморфизмом* многогранников — биекцию между многогранниками, продолжающуюся до аффинного изоморфизма (соответственно изометрии) объемлющих пространств.

Утолщенный цилиндр — это главное расслоение над выпуклым многогранником со слоем стандартный цилиндр $\mathbb{R}^c \times (S^1)^d$ (где прямые сомножители S^1 в разложении цилиндра не упорядочены), а *стандартная цилиндрическая ручка* — это прямое произведение евклидова выпуклого многогранника и утолщенного цилиндра. Уточним и обобщим эти понятия.

Определение 3.3.1 (стандартная косая цилиндрическая ручка). (А) *Утолщенным цилиндром* назовем прямое произведение $\mathbb{S} := (\mathbb{R}^c \times (S^1)^d) \times P$, где P — выпуклый многогранник, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Гомеоморфизм $h : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами назовем *допустимым*, если $c_1 = c_2 =: c$, $d_1 = d_2 =: d$, существуют биекции $\pi \in \Sigma_c$ и $\rho \in \Sigma_d$, изоморфизм многогранников $a : P_1 \rightarrow P_2$ и непрерывное отображение

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c+d}): P_1 \rightarrow \mathbb{R}^c \times (S^1)^d$, такие что для любого $(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) \in \mathbb{S}_1$ выполнено

$$h(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(c)}, \varphi_{\rho(1)}, \dots, \varphi_{\rho(d)}, 0) + (\delta_1(u), \dots, \delta_{c+d}(u), a(u)).$$

Автоморфизм $b: D \rightarrow D$ евклидова многогранника (т.е. изоморфизм на себя) назовем *допустимым*, если он тривиален или не имеет неподвижных вершин, а для любой грани $\tau \subset \partial D$ выполнено либо $b(\tau) = \tau$, либо $\tau \cap b(\tau) = \emptyset$.

(B) *Стандартной цилиндрической ручкой* назовем прямое произведение $D \times \mathbb{S}$ евклидова выпуклого многогранника D и утолщенного цилиндра \mathbb{S} (см. (A)). Гомеоморфизм $D_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он является прямым произведением изоморфизма $b: D_1 \rightarrow D_2$ евклидовых многогранников и допустимого гомеоморфизма $\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров (см. (A)).

Автоморфизм $D \times \mathbb{S} \rightarrow D \times \mathbb{S}$ стандартной цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если либо он совпадает с тождественным, либо хотя бы один из соответствующих автоморфизмов многогранников $b: D \rightarrow D$, $a: P \rightarrow P$ и перестановок $\pi \in \Sigma_c$ и $\rho \in \Sigma_d$ нетривиален, причем автоморфизм $b: D \rightarrow D$ допустим (см. (A)) и выполнены следующие (необязательные в общем случае, но выполненные для комплексов оснащенных функций Морса в случае (3.19)) дополнительные условия: перестановка $\pi \in \Sigma_c$ всегда тривиальна, в случае тривиальности автоморфизма $a: P \rightarrow P$ автоморфизм $b: D \rightarrow D$ тривиален, а в случае тривиальности b перестановка $\rho \in \Sigma_d$ и автоморфизм $a^2: P \rightarrow P$ тривиальны.

(C) *Стандартной косой цилиндрической ручкой* назовем пространство орбит $\mathbb{D}^{\text{st}} := (D \times \mathbb{S})/\Gamma$ свободного действия (автоматически конечной) группы Γ на стандартной цилиндрической ручке $D \times \mathbb{S}$ допустимыми автоморфизмами (см. (B)). Размерность k многогранника $D = D^k$ назовем *индексом* ручки $\mathbb{D} = \mathbb{D}^{\text{st}}$, подмножество $\partial \mathbb{D} := ((\partial D) \times \mathbb{S})/\Gamma \subset \mathbb{D}$ назовем ее *подшивкой*, а дополнение $\mathring{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}$ — *открытой стандартной (косой) цилиндрической ручкой*, отвечающей ручке \mathbb{D} . Для любой грани $D' \subset \partial D$ образ подмножества $D' \times \mathbb{S} \subset D \times \mathbb{S}$ при проекции $D \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}^{\text{st}}$ назовем *(косой) гранью* стандартной (косой) ручки \mathbb{D}^{st} . (Косая грань всегда является стандартной косой цилиндрической ручкой ввиду допустимости автоморфизма $b: D \rightarrow D$ из (B), см. (A).) Гомеоморфизм $\mathbb{D}_1^{\text{st}} \rightarrow \mathbb{D}_2^{\text{st}}$ между стандартными косыми цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он поднимается до изоморфизма $D_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек. Автоморфизм $\mathbb{D}^{\text{st}} \rightarrow \mathbb{D}^{\text{st}}$ стандартной косой цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если он поднимается до допустимого автоморфизма $D \times \mathbb{S} \rightarrow D \times \mathbb{S}$ соответствующей стандартной цилиндрической ручки (см. (B)).

(D) Погружение $i: \mathbb{S}_1 \hookrightarrow \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами $\mathbb{S}_j = (\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}) \times P_j$, $j = 1, 2$ (см. (A)), назовем *допустимым*, если существуют отображения $\pi: \{1, \dots, c_2 + d_2\} \rightarrow \{0, 1, \dots, c_1 + d_1\}$ и $\eta: \{1, \dots, c_1 + d_1\} \rightarrow \{1, -1\}$, такие что $\{1, \dots, c_1\} \subset \pi(\{1, \dots, c_2\}) \subset \{0, 1, \dots, c_1\}$, $\pi|_{\{1, \dots, c_2\} \cap \pi^{-1}\{1, \dots, c_1\}}$ инъективно, $\{c_1 + 1, \dots, c_1 + d_1\} \subset \pi(\{c_2 + 1, \dots, c_2 + d_2\})$, $\eta(\{1, \dots, c_1\}) = 1$, а также существуют отображение $a: P_1 \rightarrow P_2$, продолжающееся до аффинного, и непрерывное отображение $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c_2+d_2}): P_1 \rightarrow \mathbb{R}^{c_2} \times (S^1)^{d_2}$, такие что

$$i(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) = (\eta(\pi(1)) x_{\pi(1)}, \dots, \eta(\pi(c_2 + d_2)) x_{\pi(c_2+d_2)}, 0) + (\delta_1(u), \dots, \delta_{c_2+d_2}(u), a(u))$$

для любого $(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) \in \mathbb{S}_1$, где последние d_j координат любой точки из $\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}$ рассматриваются по модулю 1 при $j = 1, 2$, $x_0 := 0$, $\eta(0) := 1$. Погружение $D_1 \times \mathbb{S}_1 \hookrightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками (см. (B)) назовем *допустимым*, если оно является прямым произведением изоморфизма $D_1 \rightarrow D_2$ евклидовых многогранников и допустимого погружения $\mathbb{S}_1 \hookrightarrow \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров. Вложение $\mathbb{D}_1^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_2^{\text{st}}$ между стандартными *косыми* цилиндрическими ручками (см. (C)) назовем *мономорфизмом*, если оно поднимается до допустимого погружения $D_1 \times \mathbb{S}_1 \hookrightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек.

Пусть X — топологическое пространство. Следующее определение обобщает определение 2.7.9.

Определение 3.3.2 (косой цилиндрически-полиэдральный комплекс). (А) Будем говорить, что на подмножестве $\mathbb{D} \subset X$ задана *структура (косой) цилиндрической ручки*, и называть это подмножество *(косой) цилиндрической ручкой*, если \mathbb{D} замкнуто в X , и фиксированы стандартная (косая) цилиндрическая ручка \mathbb{D}^{st} с точностью до изоморфизма, и гомеоморфизм $\varphi_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ (называемый *характеристическим отображением (косой) ручки* \mathbb{D}) с точностью до допустимых автоморфизмов стандартной (косой) ручки \mathbb{D}^{st} . Подмножество $\partial\mathbb{D} := \varphi_{\mathbb{D}}(\partial\mathbb{D}^{\text{st}})$ назовем *подошвой (косой) ручки* \mathbb{D} . Вложение $i: \mathbb{D}_1 \hookrightarrow \mathbb{D}_2$ между (косыми) цилиндрическими ручками назовем *мономорфизмом*, если вложение $\varphi_{\mathbb{D}_2}^{-1} \circ i \circ \varphi_{\mathbb{D}_1}$ соответствующих стандартных (косых) ручек является мономорфизмом.

(В) Пространство X назовем *(косым) цилиндрически-полиэдральным комплексом*, если фиксировано разбиение $X = \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{\mathbb{D}}_i$, где $n \leq \infty$, на попарно непересекающиеся подмножества $\overset{\circ}{\mathbb{D}}_i$, называемые *открытыми (косыми) цилиндрическими ручками* разбиения, и для каждой открытой ручки $\overset{\circ}{\mathbb{D}}_i$ фиксирована структура (косой) цилиндрической ручки на ее замыкании $\mathbb{D}_i := \overline{\overset{\circ}{\mathbb{D}}_i}$, называемом *(косой) цилиндрической ручкой* разбиения, такая что $\overset{\circ}{\mathbb{D}}_i = \mathbb{D}_i \setminus \partial\mathbb{D}_i$, причем выполнены следующие условия:

- (с) для любой (косой) ручки \mathbb{D}_i ограничение характеристического отображения $\varphi_{\mathbb{D}_i}: \mathbb{D}_i^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_i$ на произвольную (косую) грань $(\mathbb{D}_i^{\text{st}})' \subset \partial\mathbb{D}_i^{\text{st}}$ соответствующей стандартной (косой) ручки \mathbb{D}_i^{st} является мономорфизмом $(\mathbb{D}_i^{\text{st}})' \hookrightarrow \mathbb{D}_j$ в некоторую (косую) ручку \mathbb{D}_j (см. (А) и определение 3.3.1(С, D)), откуда подошва $\partial\mathbb{D}_i$ любой (косой) ручки \mathbb{D}_i индекса k содержится в объединении конечного числа (косых) ручек индекса $k - 1$;
- (w) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой (косой) ручки \mathbb{D}_i замкнуто пересечение $Y \cap \mathbb{D}_i$.

Максимальный индекс (косых) цилиндрических ручек (косого) цилиндрически-полиэдрального комплекса назовем *рангом* этого комплекса.

(С) Если для каждой (косой) цилиндрической ручки $\mathbb{D}_i \subset X$ выполнено $c = d = \dim P = 0$, получаем определение *строгого полиэдрального комплекса* (см. определение 2.7.9 (А) или [133]). Определение *полиэдрального комплекса* имеется, например, в [57].

(D) Пусть $\sigma, \tau \subset X$ — два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает к* τ и писать $\tau \prec \sigma$ (и $\bar{\tau} \prec \bar{\sigma}$), если $\tau \subset \partial\sigma := \bar{\sigma} \setminus \sigma$. Пишем $\tau \preceq \sigma$, если $\tau \prec \sigma$ или $\tau = \sigma$.

Сформулируем основной результат данного параграфа, описывающий комбинаторный объект — комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, ассоциированный с пространством \mathcal{F} . Следующая теорема обобщает теорему 3.2.8(А–В) на случай, когда у рассматриваемых функций Морса пронумерованы не обязательно все критические точки, а лишь $> \chi(M)$ критических точек. Например, эта теорема применима также в случае обычных функций Морса, критические точки которых не пронумерованы, на поверхностях M отрицательной эйлеровой характеристики $\chi(M) < 0$.

Теорема 3.3.3 ([134, теорема 2.6]). Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. определение 3.1.3). Предположим, что

$$\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M) \quad (3.19)$$

(т.е. количество пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$). Тогда:

(А) Имеется косой цилиндрически-полиэдральный комплекс

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-, q, r+d^+; \widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

(называемый комплексом оснащенных функций Морса) ранга $q - 1$ и размерности $\dim \widetilde{\mathbb{K}} = 3q - 2$ при $q \geq 2$ и $\dim \widetilde{\mathbb{K}} = 0$ при $q \leq 1$, косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Индекс ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, равен $q - s(f)$, где $s(f)$ — количество седловых критических значений функции f . Подошва $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}$, таких что $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$.

(В) Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ кокомпактно действует на $\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве $\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ классов топологической эквивалентности функций. В частности, для любого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ все ручки $\mathbb{D}_{[fh]_{\text{top}}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$, изоморфны одной и той же стандартной косой цилиндрической ручке $(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]}$, см. определение 3.3.1(В). Имеется $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ на $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -инвариантное подмножество некоторого гладкого $3q$ -мерного многообразия

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p+d^-, q, r+d^+; \widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

с плоской аффинной связностью, на котором группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ действует диффеоморфизмами, сохраняющими связность.

(С) Для каждой ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \approx (D_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}) \times P_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \sim (S^1)^d / \Gamma_{[f]}$ размерность $d = d([f])$ тора $(S^1)^d$ обладает свойствами (3.44), $c + d = n([f])$ (см. (3.33)) и $d \leq \min\{p - p^* + r - r^*, t - 1\}$, где $t = t([f]) \leq q$ — количество связных компонент графа G_f (см. обозначение 3.1.6). Если число фиксированных критических точек $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то $d = t - 1$, а при дополнительном условии $t = q$ выполнено $d \leq p - p^* + r - r^* - q^*$.

Замечание 3.3.4. Согласно теоремам 3.2.1 и 3.2.5 из предыдущего параграфа (т.е. [143, теоремы 1.7 и 2.5]), пространства $\mathcal{F}^1, \mathbb{F}^1$ суть строгие деформационные ретракты пространств \mathcal{F}, \mathbb{F} соответственно, а забывающие отображения $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}, \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ суть гомотопические эквивалентности, где $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — пространства оснащенных функций Морса. Мы покажем ниже, что многообразии $\widetilde{\mathcal{M}}$ из теоремы 3.3.3(В) в действительности гомеоморфно $\mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$, т.е. является универсальным пространством модулей оснащенных функций Морса (см. утверждение 3.4.7), причем действие группы \mathcal{D}^0 на \mathbb{F}^1 свободно и проекция $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ является тривиальным расслоением со слоем \mathcal{D}^0 (см. утверждение 3.4.10), а $\widetilde{\mathbb{K}}$ есть строгий деформационный ретракт $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. лемму 3.5.8 или теорему 3.5.6). Отсюда и из (3.2) следует требуемая гомотопическая эквивалентность (3.1). Мы также покажем, что указанные гомотопические эквивалентности \mathcal{D}^0 -эквивариантны и их ограничения на любой класс $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности функций из \mathcal{F}^1 или на любую косую ручку комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ являются гомотопическими эквивалентностями (см. утверждение 3.4.10 и лемму 3.5.8).

Следствие 3.3.5. Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. определение 3.1.3). Предположим, что выполнено (3.19) (т.е. количество пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$) и либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$ (т.е. все критические точки локальных экстремумов пронумерованы), либо $q - \hat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы). Тогда:

(А) Имеется полиэдральный комплекс

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{p+d^-,q,r+d^+;\hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

(называемый комплексом функций Морса) размерности $\dim \tilde{K} = q - 1$, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Размерность замкнутой клетки-многогранника $D_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающей классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, равна $q - s(f)$, где $s(f)$ — количество седловых критических значений функции f . Граница $\partial D_{[f]_{\text{top}}}$ замкнутой клетки $D_{[f]_{\text{top}}}$ содержится в объединении замкнутых клеток $D_{[g]_{\text{top}}}$, таких что $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$.

(В) Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ действует на \tilde{K} автоморфизмами полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве замкнутых клеток согласовано с естественным действием на множестве $\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ классов топологической эквивалентности функций. В частности, для любого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ все замкнутые клетки $D_{[fh]_{\text{top}}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$, изоморфны одному и тому же стандартному выпуклому евклидовому многограннику $D_{[f]}$.

(С) Имеется $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ -эквивариантный эпиморфизм $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ косого цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ на полиэдральный комплекс \tilde{K} , переводящий любую косую цилиндрическую ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ на соответствующую замкнутую клетку-многогранник $D_{[f]_{\text{top}}} \approx D_{[f]}$ комплекса \tilde{K} в виде проекции $(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}) / \Gamma_{[f]} \rightarrow D_{[f]}$, где действие группы $\Gamma_{[f]}$ на многограннике $D_{[f]}$ тривиально.

Пусть \mathbb{k} — поле (например, \mathbb{R} , \mathbb{Q} или \mathbb{Z}_p). Для топологического пространства X рассмотрим числа Бетти $\beta_j(X) := \dim_{\mathbb{k}} H_j(X; \mathbb{k})$ и полином Пуанкаре $P(X; t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \beta_j(X)$. Следующее утверждение выводится из теоремы 3.3.3 в §3.3.6 стандартными методами теории Морса (см., например, [34, §45] или §3.3.6).

Следствие 3.3.6 ([134, следствие 2.8]). (А) Если количество $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$ пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$, то $\beta_j(\tilde{\mathbb{K}}) = 0$ при любом $j \geq 3q - 1$.

(В) Пусть $\bar{M} = S^2$ (см. обозначение 3.1.4), $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$, комплекс $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ является конечным, связным и компактным косым торически-полиэдральным комплексом ранга $q - 1$ и размерности $3q - 2$ или 0 (при $q \geq 2$ и $q \leq 1$ соответственно); полином Пуанкаре комплекса \mathbb{K} допускает верхнюю оценку

$$P(\mathbb{K}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t)$$

для некоторых многочленов $R_1 = R_1(t)$ и $R_2 = R_2(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$; другими словами, числа Бетти $\beta_j = \beta_j(\mathbb{K})$ комплекса \mathbb{K} удовлетворяют неравенствам Морса-Смейла:

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \dots \leq q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \dots, \quad j \geq 0,$$

где через $\sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j$ обозначен любой из двух многочленов

$$Q_1(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t), \quad Q_2(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])},$$

так что $Q_2(t) = Q_1(t) + (1+t)R_2(t)$. В частности, справедливы неравенства Морса:

$$\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

(С) Пусть $0 \leq q_0^* \leq q^*$, $0 \leq \hat{q}_0^* \leq \hat{q}_0 \leq q_0$, и пусть пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*;\hat{q}_0;q_0^*}$ состоит из функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, для каждой из которых фиксированы оснащения (определение 2.2.2 (В)) у q_0^* фиксированных седловых точек и у $\hat{q}_0^* := \hat{q}_0 - q_0^*$ отмеченных нефиксированных седловых точек.

Если $\hat{q}_0 > 0$ (т.е. число \hat{q}_0 седловых точек с фиксированным оснащением положительно), то существует косою цилиндрически-полиэдральный комплекс

$$\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+; \hat{q}_0; q_0^*},$$

для которого верны аналоги утверждений (А, В, С) теоремы 3.3.3, причем действие дискретной группы $\mathcal{D}/\mathcal{D}^0$ на комплексе $\tilde{\mathbb{K}}$ свободно, и $\mathbb{K} := \tilde{\mathbb{K}}/(\mathcal{D}/\mathcal{D}^0)$ является компактным косою торически-полиэдральным комплексом ранга $q-1$ и размерности $3q-2$ или 0 (при $q \geq 2$ и $q=1$ соответственно).

Если $\hat{q}_0 > 0$, $\bar{M} = S^2$ (см. обозначение 3.1.4 (В)) и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то верны аналоги всех утверждений из п.(В) данного следствия.

Если количество локальных минимумов равно $p + |\pi_0(\partial^- M)| = 1$, число \hat{q} отмеченных седловых точек равно числу седловых точек с фиксированным оснащением и равно $\hat{q}_0 = 1$, и нет отмеченных точек локальных максимумов (т.е. $\hat{r} = |\pi_0(\partial^+ M)| = 0$), то $\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} \varepsilon_g(q)$, где g — род поверхности M (т.е. $\chi(\bar{M}) = 2 - 2g$) и число

$$\varepsilon_g(q) := |\{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim \mid s(f) = 1\}|$$

определяется производящей функцией Харера-Загье [78]:

$$1 + 2 \sum_q \frac{\varepsilon_g(q)}{(2q-1)!!} s^{q+1} t^{q+1-2g} = \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^t.$$

3.3.2 Построение стандартных косою цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ и отображений инцидентности $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$

В данном параграфе предполагается, что выполнено условие (3.19) (т.е. количество $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$). Для каждого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ функций Морса мы опишем построение стандартной косою цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$, а для каждой пары примыкающих классов топологической эквивалентности — соответствующее отображение инцидентности. В §3.3.3 будет описано построение “комплекса оснащенных функций Морса” $\tilde{\mathbb{K}}$, полученного из описанных ручек при помощи описанных отображений инцидентности. Проведем построение в несколько шагов.

Построение многогранника $D_{[f]_{\text{top}}}$ для класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$.

Шаг 1 (определение пермутоэдра \mathcal{P}^{q-1} порядка q и описание его граней). Напомним определение пермутоэдра из шага 1 доказательства пунктов (Б,В) теоремы 2.7.11, и установим свойства его граней.

Пермutoэдp пopядкa q — это выпуклый $(q - 1)$ -мерный многогранник \mathcal{P}^{q-1} , вложенный в q -мерное пространство, вершины которого получены перестановками координат вектора $(1, \dots, q)$ (впервые такие многогранники изучал Schoute (1911), название появилось в книге Guibaud & Rosenstiehl (1963), более общие “перестановочные многогранники” с множеством вершин Σ_q изучены Bowman (1972), см. также доказательство теоремы 2.7.11, шаг 1, т.е. [133, доказательство теоремы 3, шаг 1]). Опишем его подробнее: пусть e_1, \dots, e_q — стандартный базис \mathbb{R}^q , и пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ — выпуклая оболочка множества точек $P_\pi = \sum_{k=1}^q (k - \frac{q+1}{2}) e_{\pi_k}$, $\pi \in \Sigma_q$. Известно [117], что \mathcal{P}^{q-1} — это $(q - 1)$ -мерный выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{q-1} := (e_1 + \dots + e_q)^\perp$, имеющий ровно $q!$ вершин P_π , $\pi \in \Sigma_q$, причем его $(q - s)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств J_1, \dots, J_s (т.е. $\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$), $1 \leq s \leq q$. А именно, грань $\tau_J \subset \mathcal{P}^{q-1}$, отвечающая разбиению $J = (J_1, \dots, J_s)$, — это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\pi)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\pi \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями (2.21). Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ — подгруппа группы Σ_q , отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1+1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1}+1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\rho \in \Sigma_q$ на точке P_π дает точку $P_{\rho\pi}$, где $(\rho\pi)_i := \pi_{\rho_i}$, $1 \leq i \leq q$.

Упорядоченные разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ можно рассматривать как отношения частичного порядка на множестве $\{1, \dots, q\}$. Если разбиение \hat{J} получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать

$$\hat{J} \prec J. \tag{3.20}$$

Из описания граней многогранника \mathcal{P}^{q-1} следует, что условие $\hat{J} \prec J$ равносильно $\tau_{\hat{J}} \prec \tau_J$, т.е. примыканию граней (см. определение 3.3.2(D)).

Лемма 3.3.7 (о гранях пермutoэдра \mathcal{P}^{q-1} [134, лемма 3.1]). *Пусть фиксирована грань $\hat{\tau} \prec \mathcal{P}^{q-1}$. Для любой грани $\tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$, такой что $\hat{\tau} \prec \tau$, рассмотрим соответствующее разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$ и последовательность чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$. Тогда сопоставление $\tau \mapsto (|J_1|, \dots, |J_s|)$ (для $\hat{\tau} \prec \tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$) инъективно. В частности, любой автоморфизм пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$, индуцированный перестановкой координатных осей, допустим (см. определение 3.3.1(A)).*

Доказательство. Пусть $\hat{\tau} = \tau_{\hat{J}}$, $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_{\hat{s}})$. Ввиду $\hat{J} \prec J$ упорядоченное разбиение J получается из упорядоченного разбиения \hat{J} путем объединения некоторых соседних подмножеств в одно подмножество, т.е. $J_k = \bigcup_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} \hat{J}_i$, $1 \leq k \leq s$, для некоторых $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \hat{s}$. Поэтому $|J_k| = \sum_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} |\hat{J}_i|$. Отсюда следует, что по разбиению \hat{J} и набору чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$ последовательность $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \hat{s}$, а потому и разбиение J , определяются однозначно. Лемма доказана. \square

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} =: \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. замечание 3.1.7) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q \tag{3.21}$$

со стандартной евклидовой метрикой. В этом векторном пространстве рассмотрим многогранник $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$, являющийся образом многогранника $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ при какой-либо биекции $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0,$$

т.е. функцию $\mathbf{c}: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$ функции f в этой точке, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\mathbf{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седловых точек $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (2.21) и $c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1+1}} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}$. (То есть, J – это отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых критических точек функции f , построенное по значениям функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.) Можно также рассматривать $J = J(\mathbf{c})$ как сюръекцию $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, s\}$, переводящую $y_{\pi_j} \mapsto k$ при $r_{k-1} < j \leq r_k$, $1 \leq j \leq q$.

В каждом классе эквивалентности $[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim$ (соответственно классе топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$) отметим ровно одну функцию Морса f этого класса, так чтобы любая функция $f \in \mathcal{F}^1$, являющаяся отмеченной функцией класса эквивалентности $[f]$, являлась отмеченной функцией класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. Сопоставим классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ с отмеченной функцией f и разбиению $J(\mathbf{c}(f))$ грань

$$D_{[f]_{\text{top}}} = D_f := \tau_{J(\mathbf{c}(f))} \subset \mathcal{P}_f^{q-1}.$$

Шаг 3. Изучим (аналогично шагу 3 доказательства пунктов (Б, В) теоремы 2.7.11) взаимосвязь многогранников $D_{[f]_{\text{top}}}, D_{[g]_{\text{top}}}$ для примыкающих классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$. Для любой функции $f \in \mathcal{F}$ и соответствующего q -мерного евклидова пространства $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. шаг 2) выполнены следующие два свойства:

1) для любого вектора $\mathbf{c} \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что (i) для любого $\mathbf{c}' \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ со свойством $|\mathbf{c}' - \mathbf{c}| < \varepsilon_0$ выполнено $J(\mathbf{c}') \preceq J(\mathbf{c})$, и (ii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и разбиения $\tilde{J} \preceq J(\mathbf{c})$ существует $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойствами $|\mathbf{c}' - \mathbf{c}| < \varepsilon$ и $J(\mathbf{c}') = \tilde{J}$;

2) согласно следствию 2.5.8, любая (“невозмущенная”) функция $f \in \mathcal{F}$ имеет столь малую окрестность \mathbb{U}_f в \mathcal{F} , что для любых (“возмущенных”) функций $\tilde{f}, \tilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$ равенства $[\tilde{f}h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}]_{\text{top}}^{\text{fix}} = [\tilde{f}_1h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1}]_{\text{top}}^{\text{fix}}$ и $J((h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}))) = J((h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}_1)))$ равносильны, где через $h_{0;f,\tilde{f}} \in \mathcal{D}^0$ обозначен диффеоморфизм, близкий к тождественному, такой что $h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, через $h_{0;f,\tilde{f}}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_{\tilde{f}}^0$ индуцированный изоморфизм групп 0-коцепей, а через $[\tilde{f}h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}]_{\text{top}}^{\text{fix}}$ обозначен класс топологической эквивалентности функции $\tilde{f}h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}$ с фиксированным множеством критических точек (при фиксированной функции f); в частности, при выполнении указанных равносильных равенств существует диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f}h_{0;f,\tilde{f}}^{-1},\tilde{f}_1h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1}} \in \mathcal{D}^0$, гомотопный id_M в пространстве гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}_f) и переводящий линии уровня функции $\tilde{f}_1h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1}$ в линии уровня функции $\tilde{f}h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}$ с сохранением направления роста.

В силу этих свойств, для любой функции $f \in \mathcal{F}^1$ имеется сюръекция $\delta[f]_{\text{top}}$ множества всех граней $\tau' \prec \tau := \tau_{J(\mathbf{c}(f))}$ на множество всех классов топологической эквивалентности $[g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$ (см. определение 3.3.2(D)), такая что $\delta[f]_{\text{top}}: \tau' \mapsto \delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} := [\tilde{f}]_{\text{top}}$ тогда и только тогда, когда

$$\tau' = \tau_{J((h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f})))} = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(g)))}, \quad (3.22)$$

где $\tilde{f} \in \mathbb{U}_f$ и $h_{0;f,\tilde{f}}$ как во втором свойстве выше, g – отмеченная функция класса топологической эквивалентности $[\tilde{f}]_{\text{top}}$,

$$h_{f,\tau'} := h_{0;f,\tilde{f}}h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0, \quad h_{f,\tau'}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_g^0 \quad (3.23)$$

– индуцированный изоморфизм, а диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции g в линии уровня функции \tilde{f} с сохранением направления роста (он существует ввиду топологической эквивалентности функций \tilde{f}, g), откуда $\tilde{f} = h_2gh_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ для некоторого $h_2 \in \text{Diff}^+[-1; 1]$. Корректность определения сюръекции $\delta[f]_{\text{top}}$, т.е. независимость класса топологической эквивалентности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} = [\tilde{f}]_{\text{top}}$ от выбора функции $\tilde{f} \in \mathbb{U}_f$ с заданным

значением $J((h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f})))$, следует из второго свойства (см. выше). Если диффеоморфизм $\tilde{h}_{f,\tau'} = h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,g}$ построен с помощью функции $\tilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$, такой что $J((h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}))) = J((h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}_1)))$, то диффеоморфизм $h_{f,\tau'}^{-1} h_{1;\tilde{f}_1,g} h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1} \tilde{h}_{f,\tau'}$ (см. второе свойство выше) переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, а потому ввиду леммы 2.3.2 (т.е. [132, лемма 1]) принадлежит произведению подгрупп $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)$ $(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$ группы \mathcal{D}^0 , откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} \tilde{h}_{f,\tau'} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g) (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)), \quad (3.24)$$

где через $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ обозначена группа изотропии элемента g относительно естественного правого действия группы \mathcal{D}^0 на \mathcal{F}^1 , а через $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g) \subset \mathcal{D}^0$ группа диффеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}_g) , гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары, где \mathcal{C}_g — множество критических точек функции g .

Пусть $f \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция Морса класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(\mathbf{c}(f))} =: D_{[f]_{\text{top}}}$ обозначим через $g \in \mathcal{F}^1$ отмеченную функцию класса топологической эквивалентности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}}$ и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathcal{D}^0$ как в (3.22) и (3.23). Тогда, ввиду равенств (3.22) и $(h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\tau_{J(\mathbf{c})}) = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}))}$, имеем изоморфизм граней

$$h_{f,\tau'}^{*0}|_{\tau'}: \tau' \longrightarrow h_{f,\tau'}^{*0}(\tau') = \tau_{J(\mathbf{c}(g))} = D_{[g]_{\text{top}}}. \quad (3.25)$$

Из указанных в начале шага двух свойств мы также получаем (аналогично шагу 3 доказательства пунктов (Б, В) теоремы 2.7.11), что из $[h]_{\text{top}} \succ [g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$ следует $[h]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$, и

$$\delta_{\tau''}[f]_{\text{top}} = \delta_{h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} \delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} \quad \text{для любых граней } \tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\mathbf{c}(f))}. \quad (3.26)$$

Пусть $g, g_1 \in \mathcal{F}^1$ — отмеченные функции классов топологической эквивалентности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}}$, $\delta_{\tau''}[f]_{\text{top}}$ соответственно, и пусть $\tilde{g} \in \mathbb{U}_g$ и $h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'') = \tau_{J((h_{0;g,\tilde{g}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{g})))}$ (см. (3.22), (3.26)). Покажем, что выполнен следующий аналог соотношения транзитивности:

$$h_{f,\tau'}^{-1} h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1) (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})), \quad (3.27)$$

где \mathcal{C}_{g_1} — множество критических точек функции g_1 . Действительно, функция $\tilde{f}_1 := h_2 \tilde{g} h_{1;\tilde{f},g}^{-1} \in [g_1]_{\text{top}}$ близка к функции $\tilde{f} = h_2 g h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ (а потому и к f); диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} h_{0;g,\tilde{g}} h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции \tilde{f}_1 в критические точки “невозмущенной” функции \tilde{f} , а потому диффеоморфизм

$$\tilde{h}_{0;f,\tilde{f}_1} := h_{0;f,\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g} h_{0;g,\tilde{g}} h_{1;\tilde{f},g}^{-1} \in \mathcal{D}^0$$

близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции \tilde{f}_1 в критические точки “невозмущенной” функции f ; диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции \tilde{g} в линии уровня функции \tilde{f}_1 с сохранением направления роста, а потому диффеоморфизм

$$\tilde{h}_{1;\tilde{f}_1,g_1} := h_{1;\tilde{f},g} h_{1;\tilde{g},g_1} \in \mathcal{D}^0$$

переводит линии уровня функции g_1 в линии уровня функции \tilde{f}_1 с сохранением направления роста. Отсюда

$$h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} = h_{0;f,\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g} h_{0;g,\tilde{g}} h_{1;\tilde{g},g_1} = \tilde{h}_{0;f,\tilde{f}_1} \tilde{h}_{1;\tilde{f}_1,g_1},$$

т.е. мы разложили диффеоморфизм $h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')}$ в композицию, аналогичную разложению $h_{f,\tau''} = h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,g_1}$, см. (3.23). Ввиду (3.24) это доказывает (3.27).

Если $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, а τ', g как выше, то ввиду (3.22) выполнено

$$h^{*0}(\tau') = \tau_{J((h_{0;f,\tilde{f}h}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}h)))}$$

и $\delta_{h^*0(\tau')} [f]_{\text{top}} = [gh]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$ (ввиду $h \in \mathcal{D}^0$), откуда

$$h_{f,h^*0(\tau')} = h_{0;f,\tilde{f}h} h_{1;\tilde{f}h,g} = h_0 h^{-1} h_{0;f,\tilde{f}h} h^{-1} h_{1;\tilde{f},g} h_1 = h_0 h^{-1} h_{f,\tau'} h_1$$

для некоторых $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ и $h_1 \in \mathcal{D}^0$, таких что h_1 переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, поэтому $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$ ввиду леммы 2.3.2 (т.е. [132, лемма 1]), откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} h h_{f,h^*0(\tau')} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)). \quad (3.28)$$

Построение утолщенного цилиндра $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}$ для класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$

Шаг 4. Пусть $f \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция Морса класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. По аналогии с пространством 0-коцепей $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. (3.21)) введем двойственные друг другу векторные пространства относительных 1-гомологий и относительных 1-когомологий над полем \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} H_{f,1} &:= H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \\ H_f^1 &:= H^1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где изоморфизм $H_f^1 \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ индуцирован равенством

$$C^q(X, A; \mathbb{R}) = \text{Hom}(C_q(X)/C_q(A), \mathbb{R})$$

для пары Борсука $(X, A) := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1})$ при $q = 1$ (см. [34, §§12.5, 15.2, 15.5]). Рассмотрим ориентированный граф $G_f \subset M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, см. обозначение 3.1.6. Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y_1, \dots, y_q \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит в графе $2q$ ребер, которые обозначим e_1, \dots, e_{2q} . Обозначим относительный гомологический класс ориентированного ребра e_i через $[e_i] \in H_{f,1}$, $1 \leq i \leq 2q$.

Определим в векторном пространстве $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$ выпуклые подмножества

$$U_{[f]_{\text{top}}} \subset U_{[f]_{\text{top}}}^\infty \subset H_f^1 \quad (3.30)$$

системами из $4q$ и $2q$ неравенств соответственно:

$$U_{[f]_{\text{top}}} = U_f := \left\{ u \in H_f^1 \mid 1 \leq u([e_i]) \leq \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!}, 1 \leq i \leq 2q \right\}, \quad (3.31)$$

$$U_{[f]_{\text{top}}}^\infty = U_f^\infty := \{ u \in H_f^1 \mid u([e_i]) > 0, 1 \leq i \leq 2q \}, \quad (3.32)$$

где $s = s(\mathbf{c}(f)) := |f(\mathcal{C}_{f,1})|$ — количество седловых значений функции f .

Шаг 5. Каждая связная компонента пространства $M \setminus G_f$ содержит не более одной критической точки функции f (а именно, точки минимума или максимума) и не более одной связной компоненты края ∂M , и гомеоморфна либо открытому кругу (с одной критической точкой), либо полукрытому цилиндру $S^1 \times [-1; 0)$ или $S^1 \times (0; 1]$ (с одной компонентой края $S^1 \times \{\pm 1\} \subset \partial^\pm M$), либо “открытому цилиндру”

$$Z_\ell = Z_\ell(f) \approx S^1 \times (0; 1), \quad 1 \leq \ell \leq n = n(f), \quad (3.33)$$

которые вместе со своим замыканием содержатся в $(\text{int } M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где $n = n(f)$ — количество открытых цилиндров. Сопоставим открытому цилиндру Z_ℓ его серединную окружность

$$\gamma_\ell = \gamma_\ell(f) = S^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \subset Z_\ell = S^1 \times (0; 1) \quad (3.34)$$

и следующее линейное векторное поле v_ℓ на векторном пространстве H_f^1 . Значение $v_\ell(u) \in H_f^1$ поля v_ℓ в любой точке $u \in H_f^1$ — это относительный 1-коцикл, значение которого на любом относительном 1-цикле $a \in H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}) \subset H_{f,1}$ определяется формулой

$$v_\ell(u)([a]) := \langle [\gamma_\ell], a \rangle u([\gamma_\ell]), \quad u \in H_f^1, a \in H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}), \quad (3.35)$$

где $\langle [\gamma_\ell], a \rangle$ — индекс пересечения цикла $[\gamma_\ell] \in H_1(M \setminus \mathcal{C}_f) \subset H_{f,1}$ и относительного цикла a , $1 \leq \ell \leq n$. Другими словами, линейное векторное поле v_ℓ на H_f^1 задается \mathbb{R} -линейным оператором $H_f^1 \rightarrow H_f^1$, являющимся обратным образом при изоморфизме $H_f^1 \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ \mathbb{R} -линейного оператора $H_{f,1} \rightarrow H_{f,1}$, $a \mapsto \langle [\gamma_\ell], a \rangle [\gamma_\ell]$. На шаге 6 мы установим свойства векторных полей v_1, \dots, v_n . Определим диффеоморфизм

$$h_\ell := t_{\gamma_\ell} \in \text{stab}_{\mathcal{D}} f \subset \mathcal{D}, \quad 1 \leq \ell \leq n, \quad (3.36)$$

как *скручивание Дэна* t_{γ_ℓ} (см. [67]) вокруг окружности γ_ℓ (скручивание Дэна t_{γ_ℓ} совпадает с id_M вне открытого цилиндра Z_ℓ и получается с помощью разрезания поверхности вдоль окружности γ_ℓ , перекручивания одного конца разреза на 2π и склеивания). Диффеоморфизмы h_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, попарно коммутируют, так как их носители попарно не пересекаются. Рассмотрим порожденную ими абелеву группу

$$\Theta_{[f]_{\text{top}}} = \Theta_f := \langle h_1, \dots, h_n \rangle \subset \text{stab}_{\mathcal{D}} f \subset \mathcal{D}.$$

Рассмотрим индуцированные автоморфизмы $h_\ell^* \in \text{Aut}(H_f^1)$, $1 \leq \ell \leq n$, и порожденную ими абелеву группу

$$\Theta_{[f]_{\text{top}}}^* = \Theta_f^* = \langle h_1^*, \dots, h_n^* \rangle \subset \text{Aut}(H_f^1). \quad (3.37)$$

Нетрудно показать, что подгруппа $\Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ изоморфна свободной абелевой группе ранга n , и что автоморфизм h_ℓ^* совпадает с потоком $g_{v_\ell}^1: H_f^1 \rightarrow H_f^1$ векторного поля v_ℓ за время 1, $1 \leq \ell \leq n$. Рассмотрим в группе $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ подгруппу $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^*$ и рассмотрим пространства орбит

$$\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} = \mathbb{S}_f := U_f / (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*, \quad \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}^\infty = \mathbb{S}_f^\infty := U_f^\infty / (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*.$$

Рассуждения на следующих шагах проводятся для U_f , но верны и для U_f^∞ .

Шаг 6. На этом шаге определяется свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на пространстве \mathbb{S}_f , где $d = d([f])$ — ранг группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ (как свободной абелевой группы).

Построим явно базис векторного пространства $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$. Если количество $n = n(f)$ открытых цилиндров $Z_\ell \subset M \setminus G_f$ (см. (3.33)) равно нулю, положим $\tilde{G}_f := G_f$. Если $n > 0$, будем выкидывать из графа G_f по одному (открытому) ребру, чтобы каждый раз количество компонент связности дополнения графа в M , не пересекающихся с $(\partial M) \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$, уменьшалось на 1. Так как для графа G_f указанное количество равно n , то после выкидывания из него n ребер (для определенности e_1, \dots, e_n) указанным алгоритмом их количество станет равным нулю, и получится подграф с q вершинами и $2q - n$ ребрами e_{n+1}, \dots, e_{2q} . В каждом открытом цилиндре Z_ℓ проведем (открытое) ориентированное ребро \tilde{e}_ℓ , гладко вложенное в этот цилиндр, с концами в седловых точках, такое, что ограничение функции f на это ребро монотонно возрастает. Добавим к полученному подграфу n ориентированных ребер

$$\tilde{e}_\ell \subset Z_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq n$$

(взамен выброшенных e_1, \dots, e_n). В результате получим граф $\tilde{G}_f \subset (\text{int } M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ с $2q$ ребрами $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, e_{n+1}, \dots, e_{2q}$ и q вершинами y_1, \dots, y_q . Так как дополнение графа \tilde{G}_f в поверхности M состоит из открытых кругов (содержащих по одной точке минимума или максимума) и полуоткрытых цилиндров (содержащих по одной компоненте края M), то граф \tilde{G}_f является строгим деформационным ретрактом поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Следовательно, вложение $\tilde{G}_f \hookrightarrow M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ индуцирует изоморфизмы $2q$ -мерных векторных пространств

$$H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1}, \quad H^1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_f^1.$$

Относительные классы гомологий

$$[\tilde{e}_1], \dots, [\tilde{e}_n], \quad [e_{n+1}], \dots, [e_{2q}] \in H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$$

ориентированных ребер графа \tilde{G}_f образуют базис пространства $H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1} \cong \mathbb{R}^{2q}$. Переход к двойственному базису дает базис

$$[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^* \in H^1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$$

векторного пространства $H^1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_f^1 \cong (H_{f,1})^* \cong \mathbb{R}^{2q}$.

Пусть $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}$ — координаты в векторном пространстве H_f^1 по отношению к базису $[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$. Рассмотрим разложение

$$H_f^1 = \text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} \oplus \text{Span}\{[e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*\}. \quad (3.38)$$

Представим любой относительный коцикл $u \in H_f^1$ как сумму $u = \tilde{u} + u'$ его проекций на подпространства в разложении (3.38). Нетрудно доказывается, что

$$[e_i] \in \text{Span}\{[e_{n+1}], \dots, [e_{2q}]\} = \text{Im} [H_1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_{f,1}], \quad 1 \leq i \leq 2q, \quad (3.39)$$

$$\text{Span}\{[\tilde{e}_\ell]^*\}_{\ell=1}^n = \ker [H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})], \quad \text{Span}\{[e_i]^*\}_{i=n+1}^{2q} \cong H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}).$$

Отсюда $u([e_i]) = u'([e_i])$, $1 \leq i \leq 2q$. Положим

$$U'_f := \left\{ u' \in \text{Span}\{[e_i]^*\}_{i=n+1}^{2q} \mid 1 \leq u'([e_\ell]) \leq \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!}, 1 \leq \ell \leq 2q \right\}, \quad (3.40)$$

ср. (3.31). Тогда $u \in U_f$ в том и только том случае, когда $u' \in U'_f$, причем U'_f — выпуклый многогранник. Поэтому справедливо разложение

$$U_f = \text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} \oplus U'_f, \quad \text{где } U'_f \subset \text{Span}\{[e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*\}. \quad (3.41)$$

В базисе $[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$ пространства H_f^1 линейные векторные поля v_1, \dots, v_n на H_f^1 имеют вид

$$v_\ell(u) = u([\gamma_\ell]) [\tilde{e}_\ell]^*, \quad \text{Span}\{v_\ell(u)\}_{\ell=1}^n \subseteq \text{Span}\{[\tilde{e}_\ell]^*\}_{\ell=1}^n = \ker [H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})], \quad (3.42)$$

т.е. касательны каждой плоскости $\text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} + u' \subset H_f^1$, $u' \in \text{Span}\{[e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*\}$, и всюду на ней имеют постоянные коэффициенты ввиду (3.39). Поэтому каждая такая n -мерная плоскость инвариантна относительно потоков векторных полей v_1, \dots, v_n на H_f^1 и эти поля коммутируют. Так как при $u' \in U'_f$ эти векторные поля (с постоянными коэффициентами) линейно независимы в указанной плоскости, то их потоки $g_{v_1}^{t_1} \dots g_{v_n}^{t_n}$ порождают свободное действие группы \mathbb{R}^n на пространстве U_f , см. (3.41), причем орбиты этого действия являются n -мерными плоскостями $\text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} + u' \subset U_f$, $u' \in U'_f$. Так как группа \mathbb{R}^n действует свободно на U_f , то ее стандартная целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ тоже действует свободно на U_f . Так как действие ℓ -го базисного элемента решетки \mathbb{Z}^n совпадает с ℓ -ым базисным элементом $g_{v_\ell}^1 = h_\ell^* \in \text{Aut}(H_f^1)$ группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ (см. (3.36), (3.37)), то действие группы $\Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ на U_f свободно и коммутирует с действием \mathbb{R}^n на U_f (заданным при помощи потоков векторных полей v_1, \dots, v_n). Поэтому действие группы \mathbb{R}^n на U_f индуцирует корректно определенное свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на факторпространстве $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, где $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong Z^d \subset \mathbb{Z}^n$ — подгруппа группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, и через $d = d([f])$ обозначен ее ранг (как ранг свободной абелевой группы).

Все рассуждения данного шага верны для $U_f^\infty, (U'_f)^\infty$ вместо U_f, U'_f , где $(U'_f)^\infty$ определяется аналогично (3.40).

Шаг 7. На этом шаге вводится на пространстве \mathbb{S}_f структура утолщенного цилиндра (см. определение 3.3.1). Для этого будут построены специальные (криволинейные) координаты на выпуклом множестве $U_f \subset H_f^1$ и на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, в которых построенные выше свободные действия группы \mathbb{R}^n на U_f и цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на \mathbb{S}_f “выпрямляются”.

Построим явно набор образующих группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$. Напомним, что набором свободных образующих группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ является набор автоморфизмов $h_1^*, \dots, h_n^* \in$

$\text{Aut}(H_f^1)$, отвечающих открытым цилиндрам Z_1, \dots, Z_n , где $n = n(f)$, см. (3.33). Покажем, что после подходящей перенумерации цилиндров Z_ℓ (и отвечающих им автоморфизмов h_ℓ^*) подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ раскладывается в прямое произведение подгрупп

$$(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* = \Theta_{f,0}^* \times \Theta_{f,1}^* \times \dots \times \Theta_{f,e}^*, \quad \text{где } \Theta_{f,0}^* = \langle h_{\nu_0}^*, \dots, h_{\nu_0}^* \rangle, \quad (3.43)$$

$$\Theta_{f,k}^* = \langle (h_{\nu_{k-1}+1}^*)^{-1} h_{\nu_{k-1}+2}^*, (h_{\nu_{k-1}+2}^*)^{-1} h_{\nu_{k-1}+3}^*, \dots, (h_{\nu_{k-1}}^*)^{-1} h_{\nu_k}^* \rangle, \quad 1 \leq k \leq e,$$

где целые числа $0 \leq e \leq n$ и $0 = \nu_{-1} \leq \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_e \leq n$ зависят от $[f]$. Отсюда следует, что ранг группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ равен

$$\text{rank}(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* = d = \nu_e - e. \quad (3.44)$$

Из (3.44) нетрудно вывести, что он не превосходит числа $p - p^* + r - r^*$ “плавающих” точек локальных минимумов и максимумов, а также получить остальные оценки для d из теоремы 3.3.3(C).

Описание построения подгруппы $\Theta_{f,0} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров Z_1, \dots, Z_n в (3.33) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_1, \dots, \gamma_n$) окружности $\gamma_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}_f \subset M \setminus \mathcal{C}$, $1 \leq \ell \leq \nu_0$ – это все такие окружности множества $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, каждая из которых разбивает поверхность $M \setminus \mathcal{C}$ на две части (см. определение 3.1.3, обозначение 3.1.4, замечание 3.1.7), причем объединение \widehat{Z}_ℓ одной из этих двух частей с окружностью γ_ℓ гомеоморфно либо кругу, либо проколотому кругу (т.е. кругу без одной внутренней точки), либо цилиндру $S^1 \times [0; 1]$ (эти условия однозначно определяют указанную часть $\widehat{Z}_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}$, ограниченную окружностью γ_ℓ в $M \setminus \mathcal{C}$, в случае положительного рода поверхности M или $p^* + q^* + r^* > \chi(M)$, а в случае нулевого рода поверхности M и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M)$ ее также можно выбрать однозначно, дополнительно потребовав, чтобы она не содержала первую отмеченную критическую точку). Рассмотрим скручивания Дэна $h_\ell \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ вокруг этих окружностей, $1 \leq \ell \leq \nu_0$. Каждое такое скручивание Дэна принадлежит группе \mathcal{D}^0 , т.е. компоненте связности тождественного диффеоморфизма id_M в $\text{Diff}(M, \mathcal{C})$. Значит, все элементы построенного подмножества $\{h_1, \dots, h_{\nu_0}\} \subset \{h_1, \dots, h_n\}$ принадлежат группе $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Определим подгруппу $\Theta_{f,0} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами h_ℓ , $1 \leq \ell \leq \nu_0$.

Описание построения подгрупп $\Theta_{f,1}, \dots, \Theta_{f,e} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Рассмотрим объединение всех цилиндров в поверхности $M \setminus \mathcal{C}$, ограниченных парами различных окружностей из множества $\{\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n\}$ и не содержащих внутри себя других окружностей этого множества. Это объединение является либо несвязным объединением $e \geq 0$ цилиндров, либо тором (в этом случае $M = T^2$, $p^* = q^* = r^* = 0$ и $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} \geq 1$ ввиду (3.19), т.е. все критические точки “плавают” и по крайней мере одна из них отмечена, а окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ попарно изотопны в торе M); в последнем случае положим $e = 1$, $\nu_1 = n$, и заменим указанное объединение цилиндров на один цилиндр, содержащий все окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ и ограниченный двумя из этих окружностей, причем этот цилиндр не содержит первую отмеченную критическую точку (эти условия определяют цилиндр однозначно). Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров Z_{ν_0+1}, \dots, Z_n в (3.33) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$) окружности γ_ℓ , $\nu_{k-1} < \ell \leq \nu_k$ – это все окружности в k -ом из этих e цилиндров, причем можем и будем считать, что нумерация окружностей идет в порядке следования этих окружностей в k -ом цилиндре, $1 \leq k \leq e$. В частности, k -ый цилиндр является объединением $\nu_k - \nu_{k-1} - 1$ “подцилиндров”, обозначаемых через \widehat{Z}_ℓ и ограниченных парами соседних окружностей $\gamma_\ell, \gamma_{\ell+1}$ в k -ом цилиндре, где $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$. Композиция $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$ скручиваний Дэна h_ℓ и $h_{\ell+1}$ (вокруг граничных окружностей цилиндра \widehat{Z}_ℓ), взятых в противоположных степенях, принадлежит группе \mathcal{D}^0 при $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$. При $1 \leq k \leq e$ определим подгруппу $\Theta_{f,k} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$.

Покажем, что группа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ допускает разложение (3.43). Осталось показать, что $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f \subseteq \Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \dots \times \Theta_{f,e}$. Дополним набор диффеоморфизмов $h_1, \dots, h_{\nu_0} \in \Theta_{f,0}$,

$h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1} \in \Theta_{f,k}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$, до набора образующих группы $\Theta_f \cong \mathbb{Z}^n$ набором скручиваний Дэна h_i , $i \in A = A(f)$, где

$$A = A(f) := \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_e, \nu_e + 1, \nu_e + 2, \dots, n\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad |A| = n - \nu_e + e. \quad (3.45)$$

Пусть некоторая композиция $h \in \Theta_f$ целых степеней диффеоморфизмов полученного набора образующих принадлежит группе $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Покажем, что показатель степени каждого из $|A| = n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов h_i , $i \in A$, в этой композиции равен нулю. Произведение \tilde{h} этих $n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов в тех степенях, в которых они входят в композицию h , также является элементом группы $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$, так как отличается от исходной композиции h домножением на элемент из подгруппы $\Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \dots \times \Theta_{f,e}$, содержащейся в $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ по построению. Значит, $\tilde{h} \in \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f \subset \mathcal{D}^0$. Так как окружности $\gamma_i \subset (\text{int } M) \setminus \mathcal{C}$, $i \in A$, попарно не пересекаются, никакая из них не ограничивает цилиндр или (проколотый или непроколотый) круг в $M \setminus \mathcal{C}$, и никакие две из них не ограничивают цилиндр в $M \setminus \mathcal{C}$, то скручивания Дэна h_i , $i \in A$, вокруг этих окружностей (рассматриваемые с точностью до изотопии в пространстве гомеоморфизмов пары (M, \mathcal{C})) порождают подгруппу группы $\text{Homeo}^+(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) / \text{Homeo}^0(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \cong \mathcal{D} / \mathcal{D}^0$ классов отображений, изоморфную свободной абелевой группе ранга $|A| = n - \nu_e + e$ (см., например, [51, лемма 2.1(1)] или [28]). Поэтому показатели степеней всех диффеоморфизмов h_i , $i \in A$, равны 0. Это завершает доказательство разложения (3.43).

Построим специальные (криволинейные) координаты в $U_f \subset U_f^\infty$, в которых свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ (см. конец шага 6) “выпрямляется”. Пусть нумерация цилиндров Z_1, \dots, Z_n такая же, как в (3.43). Для любого $u' \in U'_f$ рассмотрим базис $v_1(u'), \dots, v_n(u')$ в плоскости $\text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} + u' \subset U_f$ и новый базис

$$\tilde{v}_i(u') := v_i(u'), \quad i \in A \cup \{1, \dots, \nu_0\}, \quad \tilde{v}_j(u') := v_j(u') - v_{j+1}(u'), \quad j \in B \setminus \{1, \dots, \nu_0\}, \quad (3.46)$$

а также отвечающее этому базису разложение

$$\ker [H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})] = \text{Span}\{[\tilde{e}_\ell]^*\}_{\ell=1}^n = \text{Span}\{\tilde{v}_i(u')\}_{i \in A} \oplus \text{Span}\{\tilde{v}_j(u')\}_{j \in B},$$

где $B = B(f) := \{1, \dots, n\} \setminus A$. Тогда для каждого $u' \in U'_f \subset (U'_f)^\infty$ любой коцикл $\tilde{u} = \sum_{\ell=1}^n \tilde{u}_j [\tilde{e}_j]^* \in \text{Span}\{[\tilde{e}_\ell]^*\}_{\ell=1}^n$ имеет вид

$$\tilde{u} = \sum_{i \in A} x_i \tilde{v}_i(u') + \sum_{j \in B} \varphi_j \tilde{v}_j(u'),$$

где координаты x_i, φ_j ($i \in A, j \in B$) в n -мерной плоскости $\text{Span}\{[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*\} + u'$ выражаются через координаты $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}$, по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\tilde{u}_i}{u'([\gamma_i])}, \quad \nu_e < i \leq n, & x_{\nu_k} &= \frac{\tilde{u}_{\nu_{k-1}+1}}{u'([\gamma_{\nu_{k-1}+1}])} + \dots + \frac{\tilde{u}_{\nu_k}}{u'([\gamma_{\nu_k}])}, \quad 1 \leq k \leq e, \\ \varphi_j &= \frac{\tilde{u}_j}{u'([\gamma_j])}, \quad 1 \leq j \leq \nu_0, & \varphi_j &= \frac{\tilde{u}_{\nu_{k-1}+1}}{u'([\gamma_{\nu_{k-1}+1}])} + \dots + \frac{\tilde{u}_j}{u'([\gamma_j])}, \quad \nu_{k-1} < j < \nu_k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Знаменатели в выражениях для x_i и φ_j положительны, так как $u' \in (U'_f)^\infty$. Таким образом, на множестве U_f^∞ мы ввели гладкие регулярные координаты $x_i \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \bmod 1 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ($i \in A, j \in B$), $(u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}) \in U'_f$. В этих координатах векторные поля $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ имеют вид $\tilde{v}_i = \partial / \partial x_i$, $\tilde{v}_j = \partial / \partial \varphi_j$ ($i \in A, j \in B$), а множества U_f и \mathbb{S}_f имеют вид

$$U_{[f]_{\text{top}}} = U_f \approx (\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^B) \times U'_f \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times \mathbb{R}^{\nu_e-e}) \times U'_f = \mathbb{R}^n \times U'_f,$$

$$\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} = \mathbb{S}_f \approx (\mathbb{R}^A \times (S^1)^B) \times U'_f \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e-e}) \times U'_f.$$

Отсюда действие группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат x_i, φ_j ($i \in A, j \in B$), действие группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong \mathbb{Z}^{\nu_e-e}$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат φ_j , $j \in B$, а действие цилиндра $\mathbb{R}^A \times (S^1)^B \cong \mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e-e}$

на \mathbb{S}_f совпадает с естественным действием цилиндра сдвигами по себе. Итак, мы ввели на $\mathbb{S}_f := U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ структуру стандартного утолщенного цилиндра (см. определение 3.3.1).

Подмножества $U_f \subset U_f^\infty \subset H_f^1$ инвариантны относительно правого действия группы $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ на H_f^1 , а подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ нормальна в $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, где через $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ обозначена подгруппа группы $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, состоящая из всех диффеоморфизмов поверхности M , сохраняющих функцию f и гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M , сохраняющих функцию f . Поэтому имеется индуцированное правое действие дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\text{top}}} = \Gamma_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)/((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) \quad (3.48)$$

на пространствах орбит $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ и $\mathbb{S}_f^\infty = U_f^\infty/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$. Так как действие группы Θ_f на H_f^0 тривиально (поскольку не переставляет седловые критические точки), имеем также индуцированное правое действие группы Γ_f на многограннике D_f (см. шаг 2).

Лемма 3.3.8. *Если выполнено условие (3.19), то индуцированное покомпонентное правое действие любого диффеоморфизма $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ на прямом произведении*

$$D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(c(f))} \times (U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*) \approx \tau_{J(c(f))} \times (\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)} \times U'_f) \quad (3.49)$$

является допустимым автоморфизмом стандартной цилиндрической ручки (определение 3.3.1 (B)).

Доказательство. Пусть для определенности каждая окружность $\gamma_\ell \subset Z_\ell$ определена условием $f(\gamma_\ell) = \frac{1}{2}(\sup f|_{Z_\ell} + \inf f|_{Z_\ell})$. Тогда любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ индуцирует перестановку на множестве окружностей γ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n = n(f)$. При этой перестановке каждая окружность $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ переходит в себя (см. доказательство леммы 3.3.9, шаг 1). То есть, переставляются только окружности γ_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, \nu_0\} \subset B(f)$ (и отвечающие им векторные поля \tilde{v}_ℓ), а соответствующая перестановка $\pi \in \Sigma_{|A(f)|}$ тривиальна (см. определение 3.3.1(A)). Если тривиальны также соответствующие автоморфизмы многогранников $b: D_f \rightarrow D_f$, $a: U'_f \rightarrow U'_f$ и перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$, то h переводит в себя каждое седло, каждое ориентированное ребро графа G_f , и каждую окружность γ_ℓ , а потому принадлежит $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$, откуда его действие на $D_f \times \mathbb{S}_f$ совпадает с тождественным отображением. Если автоморфизм многогранника $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален (что равносильно тому, что h переводит каждое седло в себя), то перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$ окружностей γ_ℓ тоже тривиальна, так как в противном случае h нетривиально действует на $H_1(\bar{M})$; тривиальность автоморфизма $a^2: U'_f \rightarrow U'_f$ следует из того, что h^2 переводит каждое ребро графа G_f в себя. Пусть теперь автоморфизм многогранника $a: U'_f \rightarrow U'_f$ тривиален. Покажем, что автоморфизм многогранника $b: D_f \rightarrow D_f$ тоже тривиален. Если количество седловых значений $s(f) > 1$, то U'_f является $(2q - n(f))$ -мерным многогранником, поэтому из тривиальности автоморфизма $a: U'_f \rightarrow U'_f$ следует, что h переводит в себя каждое ребро графа G_f , а потому и каждое седло, откуда $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален. Если $s(f) = 1$, то по лемме 3.3.9 ниже отображение h переводит в себя хотя бы одно ребро графа G_f (а потому и каждое его ребро ввиду связности графа G_f , а потому и каждую седловую точку), откуда автоморфизм $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален. Так как автоморфизм $b: D_f \rightarrow D_f$ является ограничением автоморфизма многогранника \mathcal{P}_f^{q-1} , индуцированного перестановкой координатных осей, то по лемме 3.3.7 он допустим. Лемма 3.3.8 доказана. \square

Шаг 8. Изучим взаимосвязь утолщенных цилиндров $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}, \mathbb{S}_{[g]_{\text{top}}}$ для примыкающих классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$. Пусть $f \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция Морса класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(c(f))} =: D_{[f]_{\text{top}}} = D_f$ обозначим через $g \in \mathcal{F}^1$ отмеченную функцию класса топологической эквивалентности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}}$ (см. (3.22)) и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathcal{D}^0$ как в (3.22) и (3.23). Рассмотрим индуцированный изоморфизм

$$h_{f,\tau'}^*: H_f^1 \rightarrow H_g^1$$

векторных пространств, аналогичный изоморфизму $h_{f,\tau'}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_g^0$ из (3.23). Докажем включения

$$h_{f,\tau'}^*(U_f) \subset U_g, \quad h_{f,\tau'}^*(U_f^\infty) \subset U_g^\infty. \quad (3.50)$$

Пусть, как и выше, $s = s(f)$ – количество седловых критических значений функции f , и $k := q - s$ – размерность многогранника D_f (см. шаги 1, 2). С учетом определения $U_f \subset U_f^\infty \subset H_f^1$ (см. (3.31), (3.32)), нам достаточно показать, что сопряженный к изоморфизму $h_{f,\tau'}^*$ изоморфизм $(h_{f,\tau'}^*)_*: H_{g,1} = H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{g,0} \cup \mathcal{C}_{g,2}), \mathcal{C}_{g,1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = H_{f,1}$ переводит гомологический класс любого ориентированного ребра графа G_g в сумму гомологических классов некоторых ориентированных ребер графа G_f (см. определение графа G_f в обозначении 3.1.6), и что количество этих ребер всегда $\leq 2k + 1$.

Обозначим через C_g связную компоненту графа G_g , в которой лежит рассматриваемое ребро графа G_g . Дополнение графа G_f в поверхности M распадается на “открытые цилиндры” $Z_\ell(f) \approx S^1 \times (0; 1)$, $1 \leq \ell \leq n = n([f])$, “полуоткрытые цилиндры” $S^1 \times [0; 1)$ и открытые круги, содержащие ровно одну критическую точку минимума или максимума функции f . Поэтому имеется ретракция

$$\varrho_f: M'_f := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})) \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^n \gamma_\ell(f) \right) \rightarrow G_f,$$

где $\gamma_\ell(f) = S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset Z_\ell(f)$. Более точно, определим эту ретракцию так, чтобы она переводила любую точку поверхности M'_f в точку пересечения проходящей через нее интегральной траектории векторного поля $\text{grad } f|_{M'_f}$ (в смысле некоторой фиксированной римановой метрики ds_0^2 на M) с графом G_f . Без ограничения общности мы также будем считать, что функция \tilde{f} и диффеоморфизм $h_{0;f,\tilde{f}}$ в определении диффеоморфизма $h_{f,\tau'}$ (см. (3.23)) строились так: фиксируем попарно непересекающиеся круги вокруг седловых точек функции $f \in \mathcal{F}^1$ и потребуем, чтобы в каждом из них $\tilde{f} = f + \text{const}$, и чтобы $h_{0;f,\tilde{f}} = \text{id}_M$ и функция $\tilde{f} \in \mathcal{F}^1$ была получена при помощи C^2 -малого возмущения функции f . Тогда $h_{f,\tau'}(G_g) \subset M'_f$, причем отображение

$$p_{f,\tau'} := \varrho_f \circ h_{f,\tau'}|_{C_g}: C_g \rightarrow G_f \quad (3.51)$$

является погружением графов, переводит множество вершин на множество вершин согласно биекции $h_{f,\tau'}|_{\mathcal{C}_g}: \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{C}_f$ и сохраняет ориентацию ребер. Отсюда получаем, что $p_{f,\tau'}$ переводит любое ориентированное ребро графа G_g в ориентированный путь на графе G_f , ориентация которого согласована с ориентацией ребер графа G_f .

Осталось показать, что длина указанного пути на графе G_f (т.е. количество проходимых этим путем ребер графа G_f) не превосходит $2k + 1$. Пусть C_f – компонента связности графа G_f , в которой лежит рассматриваемый путь. Граф C_f имеет не более $k + 1$ вершины (так как число компонент связности графа G_f не меньше чем $s = q - k$), а потому он имеет не более $2k + 2$ ребер. Но наше ребро является собственным подграфом графа C_g , а потому наш путь является собственным подграфом графа $p_{f,\tau'}(C_g) \subset C_f$. Так как граф C_f имеет не более $2k + 2$ ребер, наш путь имеет не более $2k + 1$ ребер, что и требовалось. Это завершает доказательство включений (3.50).

Изоморфизм $h_{f,\tau'}^*: H_f^1 \xrightarrow{\cong} H_g^1$ индуцирует изоморфизм

$$\widehat{h}_{f,\tau'}: \text{Aut}(H_f^1) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(H_g^1), \quad h^* \mapsto h_{f,\tau'}^* h^* (h_{f,\tau'}^*)^{-1}, \quad h^* \in \text{Aut}(H_f^1).$$

Рассмотрим вложение множеств окружностей $\{\gamma_\ell(f)\}_{\ell=1}^{n(f)} \hookrightarrow \{\gamma_m(g)\}_{m=1}^{n(g)}$, сопоставляющее окружности $\gamma_\ell(f)$ окружность $\gamma_{m(\ell)}(g)$, такую что $h_{f,\tau'}^{-1}(\gamma_\ell(f)) \subset Z_{m(\ell)}(g)$. Тогда для каждого векторного поля $v_\ell(f)$ на H_f^1 (см. (3.35) и (3.42)) выполнено $(h_{f,\tau'}^*)_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$. Отсюда $\widehat{h}_{f,\tau'}(\Theta_f^*) \subset \Theta_g^*$, а потому

$$\widehat{h}_{f,\tau'}((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*) \subset (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^*.$$

Поэтому вложение $h_{f,\tau'}^*|_{U_f}: U_f \hookrightarrow U_g$ (см. (3.50)) индуцирует корректно определенное отображение пространств орбит

$$[h_{f,\tau'}^*|_{U_f}]: U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \twoheadrightarrow U_g/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^*, \quad (3.52)$$

являющееся погружением утолщенных цилиндров (так как группа Θ_f^* действует свободно и дискретно на U_f , см. шаги 6 и 7).

Докажем, что погружение (3.52) утолщенных цилиндров является допустимым (см. определение 3.3.1.(D)). Из $(h_{f,\tau'}^*)_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$, $1 \leq \ell \leq n$, (3.46) и описания подгруппы $\Theta_{f,k} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. шаг 7) следует, что при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \leq k \leq e(f)$, выполнено

$$\begin{aligned} (h_{f,\tau'}^*)_*(\tilde{v}_j(f)) &= (h_{f,\tau'}^*)_*(v_j(f) - v_{j+1}(f)) = v_{m(j)}(g) - v_{m(j+1)}(g) \\ &= (v_{m(j)}(g) - v_{m(j)+\eta_k}(g)) + (v_{m(j)+\eta_k}(g) - v_{m(j)+2\eta_k}(g)) + \dots \\ &= \eta_k(\tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + v_{m(j)+(3\eta_k-1)/2}(g) + \dots + v_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g)), \end{aligned}$$

где $\eta_k = \eta_k(f, g) := \text{sgn}(m(\nu_k - 1) - m(\nu_k))$. Отсюда следует, что при вложении $h_{f,\tau'}^*|_{U_f}: U_f \hookrightarrow U_g$ коммутирующие векторные поля (а) $\tilde{v}_i(f)$, $i \in A(f)$, (б) $\tilde{v}_j(f)$, $j \in B(f)$, на U_f (потoki которых задают свободное действие группы $\mathbb{R}^{A(f)} \times \mathbb{R}^{B(f)}$ на U_f и свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)}$ на $U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$) переходят в следующие векторные поля на U_g :

(а) $\tilde{v}_{m(i)}(g)$ (при $\nu_e(g) < m(i) \leq n(g)$) или $\tilde{v}_{m(i)}(g) + \tilde{v}_{m(i)+1}(g) + \dots + \tilde{v}_{\nu_t}(g)$ (при $\nu_{t-1}(g) < m(i) \leq \nu_t(g)$, $1 \leq t \leq e(g)$),

(б) $\tilde{v}_{m(j)}(g)$ (при $1 \leq j \leq \nu_0(f)$) или $\eta_k(\tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + \tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2+\eta_k}(g) + \dots + \tilde{v}_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g))$ (при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \leq k \leq e(f)$),

причем каждое поле $\tilde{v}_m(g)$, $1 \leq m \leq n(g)$, входит в качестве слагаемого (с коэффициентом \pm) не более чем в одно из полей $(h_{f,\tau'}^*)_*(\tilde{v}_\ell(f))$, $1 \leq \ell \leq n(f)$.

Из описанного поведения векторных полей \tilde{v}_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, при погружении (3.52) следует, что это погружение является допустимым погружением утолщенных цилиндров (см. определение 3.3.1.(D)).

Построение косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ для класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$

Шаг 9. Рассмотрим стандартную цилиндрическую ручку $D_{[f]_{\text{top}}} \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} = D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(\mathbf{c}(f))} \times (U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*)$ и покомпонентное правое действие на ней дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\text{top}}} = \Gamma_f \cong \tilde{\Gamma}_f / (((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0),$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} = \tilde{\Gamma}_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0, \quad (3.53)$$

допустимыми автоморфизмами (см. (3.48) и лемму 3.3.8). Покажем, что это действие (а также действие группы $\tilde{\Gamma}_f$ на U_f^∞) свободно. Докажем две леммы.

Лемма 3.3.9. *Если выполнено условие (3.19), то для любого диффеоморфизма $h \in \text{stab}_{\mathcal{J}} f$ найдется ребро графа G_f (см. обозначения 3.1.4.(B) и 3.1.6), переходящее в себя при отображении h .*

Доказательство. Шаг 1. Пусть W_f — граф Кронрода-Риба функции f (см. [19] или определение 2.4.1 или [129]), т.е. граф W_f получен из поверхности M стягиванием в точку каждой компоненты связности линии уровня функции f . Обозначим через $p_f: M \rightarrow W_f$ естественную проекцию. Вершину графа W_f назовем *сферической*, если прообраз достаточно малой ее окрестности при отображении p_f гомеоморфен сфере с проколами. Вершину графа W_f назовем *граничной* (соответственно *отмеченной*), если ее прообраз при отображении p_f является компонентой края M (соответственно содержит отмеченную критическую точку функции f). Подграф графа W_f назовем *stab $_{\mathcal{J}}$ f -неподвижным*, если при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$

графа W_f , индуцированном любым диффеоморфизмом $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, любая вершина и любое ребро этого подграфа переходят в себя. Обозначим через W'_f минимальный связный подграф графа W_f , содержащий каждый простой цикл графа W_f , каждую граничную вершину, каждую отмеченную вершину и каждую несферическую вершину. Он непуст и содержит неграничную вершину в силу (3.19). Покажем, что подграф W'_f является $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижным. Пусть $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$. Так как h сохраняет неподвижными все отмеченные критические точки функции f и переводит в себя каждую компоненту края, то все отмеченные вершины и все граничные вершины $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижны. Ввиду $h \in \mathcal{T}$ индуцированный автоморфизм гомологий $\bar{h}^* \in H_1(\bar{M})$ (см. обозначение 3.1.4(B)) совпадает с тождественным, поэтому каждая несферическая вершина $v \in W_f$ является $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижной, а каждый простой цикл на графе W_f переходит в себя с сохранением ориентации при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Если пересечение двух простых циклов непусто и связно, то оно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижно, поэтому такие циклы $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижны. Поэтому каждая компонента связности объединения простых циклов, не являющаяся простым циклом (или содержащая несферическую или отмеченную вершину), $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижна. Пусть $W''_f \subset W_f$ — объединение всех простых циклов, множества несферических вершин и множества отмеченных вершин графа W_f , и пусть простой путь в графе W_f соединяет две компоненты связности графа W''_f и пересекается с W''_f только в концах. Такой путь единствен (для фиксированной пары компонент), а потому $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижен (в силу $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ -инвариантности подграфа W''_f). Отсюда следует $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижность подграфа W'_f .

Шаг 2. Пусть $M' \subset M$ — прообраз малой связной окрестности вершины $v \in W_f$ при отображении $p_f: M \rightarrow W_f$, обозначим $c := f(p_f^{-1}(v))$. Пусть $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, $h(M') = M'$, и существует седловая критическая точка в M' , не являющаяся неподвижной при h . Пусть замкнутая поверхность \bar{M}' получена из M' стягиванием в точку каждой компоненты края M' , и $\bar{h}: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}'$ — индуцированный гомеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что ограничение h на каждую h -инвариантную компоненту связности $\bar{M}' \setminus f^{-1}(c)$, гомеоморфную $(S^1 \times (c; c + \varepsilon]) / (S^1 \times \{c + \varepsilon\})$, является поворотом вокруг точки $S^1 \times \{c + \varepsilon\}$ (по отношению к естественным “полярным” координатам в $(S^1 \times (c; c + \varepsilon]) / (S^1 \times \{c + \varepsilon\})$), тогда эта точка является единственной неподвижной точкой в данной компоненте. Так как \bar{h} индуцирует тождественный автоморфизм гомологий $H_1(\bar{M}')$ (ввиду $h \in \mathcal{T}$), и все его неподвижные точки имеют индекс $+1$, то по формуле Лefшеца количество неподвижных точек равно $\chi(\bar{M}')$.

Шаг 3. Вершину графа W_f назовем *сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантной*, если ее степень в графе W_f больше 1 и при любом диффеоморфизме $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$ каждая вершина и каждое ребро графа $p_f^{-1}(v) \subset G_f$ переходят в себя. Докажем, что в W'_f существует сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантная вершина. Если вершина $v \in W'_f$ не является сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантной, то либо ее степень в W_f равна 1, либо найдется такой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, что количество неподвижных точек соответствующего индуцированного гомеоморфизма $\bar{h}: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}'$ (см. шаг 2 выше) согласно формуле Лefшеца равно $\chi(\bar{M}')$ и не меньше суммы $k_v + \deg_{W'_f} v$ числа k_v отмеченных критических точек в $p_f^{-1}(v)$ и степени $\deg_{W'_f} v$ вершины v в графе W'_f (т.е. $\chi(\bar{M}') \geq k_v + \deg_{W'_f} v \geq 0$), откуда вершина v является сферической и $k_v + \deg_{W'_f} v \leq 2$ (так как в противном случае $\chi(\bar{M}') = k_v + \deg_{W'_f} v = 0$, откуда $W'_f = \{v\}$, M — тор и все критические точки неотмечены, что противоречит (3.19)). Если все вершины графа W'_f не являются сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантными, то по доказанному выше каждая вершина $v \in W'_f$ сферическая и либо имеет степень 1 в W_f , либо имеет степень $\deg_{W'_f} v \leq 2 - k_v \leq 2$ в W'_f , откуда граф W'_f является простой ломаной, все его внутренние вершины неотмечены (так как $k_v = 0$ в случае $\deg_{W'_f} v = 2$), а сумма значений k_v для концевых (т.е. имеющих степень 1 в графе W_f) вершин $v \in \partial W'_f$, не являющихся граничными, не превосходит $2 - d^+ - d^- = \chi(M)$ (так как $k_v \leq 1$ при $\deg_{W'_f} v = 1$, и $k_v \leq 2$ при $\deg_{W'_f} v = 0$), откуда общее количество

отмеченных критических точек $\leq \chi(M)$, что противоречит (3.19). Лемма 3.3.9 доказана. \square

Лемма 3.3.10. Пусть выполнено условие (3.19). Пусть функция Морса $f \in \mathcal{F}^1$, класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty$, диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}} f$ (см. обозначение 3.1.4(B)) и мультискручивание Дэна $h_1 \in \Theta_f$ удовлетворяют условию $h^*(u) = h_1^*(u)$. Тогда $hh_1^{-1} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$, см. (3.48).

Доказательство. По лемме 3.3.9 найдется ребро графа G_f , переходящее в себя при отображении h . Пусть C_f — компонента связности графа G_f , содержащая это ребро, и пусть Z_ℓ — открытый цилиндр, одна из компонент границы которого (скажем, нижнее основание $\partial^- Z_\ell$) имеет общее ребро с графом C_f (см. (3.33)). Тогда любое ребро графа $C_f \cup \partial^- Z_\ell$ и цилиндр Z_ℓ тоже переходят в себя при отображении h . Так как пути $\tilde{e}_\ell, h_1(\tilde{e}_\ell) \subset \overline{Z_\ell}$ выходят из одной и той же точки (принадлежащей $\partial^- Z_\ell$), то 1-цепь $h(\tilde{e}_\ell) - h_1(\tilde{e}_\ell)$ гомологична некоторой линейной комбинации $\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i e_i$ ориентированных ребер основания $\partial^+ Z_\ell$ с целыми коэффициентами, причем все коэффициенты λ_i либо неотрицательны, либо неположительны одновременно. Но

$$\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i u([e_i]) = u([h(\tilde{e}_\ell)] - [h_1(\tilde{e}_\ell)]) = (h^*(u) - h_1^*(u))([\tilde{e}_\ell]) = 0$$

по предположению. Так как значение 1-коцикла $u \in U_f^\infty$ на каждом ориентированном ребре $e_1, \dots, e_{2q} \subset G_f$ положительно (см. (3.32)), то линейная комбинация тривиальна. Значит, $[h(\tilde{e}_\ell)] = [h_1(\tilde{e}_\ell)]$, откуда $hh_1^{-1}|_{\overline{Z_\ell}}$ гомотопна $\text{id}_{\overline{Z_\ell}}$ в классе гомеоморфизмов, сохраняющих функцию $f|_{\overline{Z_\ell}}$ и переводящих вершины графа ∂Z_ℓ в себя. Эти рассуждения показывают (с использованием связности M), что $hh_1^{-1} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$. Лемма доказана. \square

В силу (3.48) и леммы 3.3.10 группа Γ_f действует свободно на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f / (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, поэтому она действует свободно на стандартной цилиндрической ручке $D_f \times \mathbb{S}_f$ допустимыми автоморфизмами (см. лемму 3.3.8), а потому конечна (см. определение 3.3.1(B)). Значит, пространство орбит

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \mathbb{D}_f^{\text{st}} := (D_f \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f \approx (\tau_{J(c(f))} \times U_f) / \tilde{\Gamma}_f \quad (3.54)$$

является стандартной косой цилиндрической ручкой (см. (3.53) и определение 3.3.1 (C)).

Шаг 10. Изучим взаимосвязь стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ и $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ для примыкающих классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$. Пусть $f \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция Морса класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(c(f))} = D_{[f]_{\text{top}}} = D_f$ обозначим через $g \in \mathcal{F}^1$ отмеченную функцию класса топологической эквивалентности $[g]_{\text{top}} = \delta_{\tau'} [f]_{\text{top}}$ (см. (3.22)). Рассмотрим погружение

$$h_{f,\tau'}^* |_{\tau'} \times [h_{f,\tau'}^* |_{U_f}]: \tau' \times \mathbb{S}_f \looparrowright D_g \times \mathbb{S}_g, \quad (c, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) \mapsto (h_{f,\tau'}^*(c), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'}^*(u)), \quad (3.55)$$

являющееся прямым произведением изометрии (3.25) евклидовых многогранников и допустимого погружения (3.52) утолщенных цилиндров, т.е. допустимым погружением стандартных цилиндрических ручек (см. определение 3.3.1(D)). Рассмотрим орбиту грани $\tau' \subset \partial D_f$ при действии группы Γ_f (см. (3.53)) изометриями многогранника D_f , и следующие два объединения его граней:

$$\Gamma_f(\tau') := \bigcup_{h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f} h^*(\tau') \subseteq \bigcup_{\delta_{\tau'} [f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}} \tau'_1 =: \partial_{[g]_{\text{top}}} D_{[f]_{\text{top}}} = \partial_g D_f, \quad (3.56)$$

см. (3.22). Включение в (3.56) следует из того, что $\delta_{h^*(\tau')} [f]_{\text{top}} = [gh]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$ ввиду включения $h \in \mathcal{D}^0$. Итак, (допустимые) погружения, отвечающие этим граням, имеют одну и ту же область значений — стандартную цилиндрическую ручку $D_g \times \mathbb{S}_g$. Любые две такие

грани либо совпадают, либо не пересекаются в силу леммы 3.3.7. Рассмотрим погружение, составленное из (допустимых) погружений этих граней:

$$(\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f \hookrightarrow D_g \times \mathbb{S}_g, \quad (\mathbf{c}, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) \mapsto \left(h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u) \right),$$

$(\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f$. Это отображение корректно определено (и является погружением), так как грани $\tau'_1 \in (\delta[f]_{\text{top}})^{-1}([g]_{\text{top}})$ попарно не пересекаются (см. выше). Оно переводит любую Γ_f -орбиту в некоторую Γ_g -орбиту, так как ввиду (3.28) для любого $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ точки $(\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f$ и $(h^{*0}(\mathbf{c}), h^*(u)) \in (h^{*0}(\tau'_1)) \times U_f$ переходят в элементы $(h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u))$ и $(h_{f,h^{*0}(\tau'_1)}^{*0} h^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,h^{*0}(\tau'_1)}^* h^*(u)) = (h_1^{*0} h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_1^* h_{f,\tau'_1}^*(u))$ одной и той же Γ_g -орбиты, где $h_1 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$. Поэтому это погружение индуцирует корректно определенное погружение пространств орбит:

$$\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} = \chi_{f,g}: ((\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f \hookrightarrow (D_g \times \mathbb{S}_g) / \Gamma_g,$$

$$\Gamma_f(\mathbf{c}, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) \mapsto \Gamma_g(h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u)), \quad (\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f,$$

где $[g]_{\text{top}} = \delta_{\tau'_1}[f]_{\text{top}}$ (см. (3.22)). (Оно является погружением, так как группы Γ_f, Γ_g конечны и действуют свободно.) Рассмотрим его ограничение:

$$\begin{aligned} \chi_{[f]_{\text{top}}, \tau'} = \chi_{f,\tau'} &:= \chi_{f,g}|_{((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f}: ((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f \overset{(*)}{\approx} (\tau' \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_{f,\tau'} \approx \\ &\approx (\tau' \times U_f) / \tilde{\Gamma}_{f,\tau'} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \mathbb{D}_g^{\text{st}} = (D_g \times \mathbb{S}_g) / \Gamma_g \approx (D_g \times U_g) / \tilde{\Gamma}_g, \\ \tilde{\Gamma}_{f,\tau'}(\mathbf{c}, u) &\mapsto \tilde{\Gamma}_g(h_{f,\tau'}^{*0}(\mathbf{c}), h_{f,\tau'}^*(u)), \quad (\mathbf{c}, u) \in \tau' \times U_f, \\ \Gamma_{f,\tau'} &:= \tilde{\Gamma}_{f,\tau'} / (((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0), \quad \tilde{\Gamma}_{f,\tau'} := \text{stab}_{\tilde{\Gamma}_f} \tau', \end{aligned}$$

где гомеоморфизм $(*)$ следует из того, что при $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ грани $\tau', h^{*0}(\tau')$ либо совпадают, либо не пересекаются (см. выше). Итак, областью определения погружения $\chi_{f,\tau'}$ является косая грань

$$\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \partial_{\tau'} \mathbb{D}_f^{\text{st}} := ((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f \quad (3.57)$$

стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_f^{\text{st}} = (D_f \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f$, т.е. образ грани $\tau' \times \mathbb{S}_f$ стандартной цилиндрической ручки $D_f \times \mathbb{S}_f$ при проекции $D_f \times \mathbb{S}_f \rightarrow \mathbb{D}_f^{\text{st}}$. А областью определения погружения $\chi_{f,g}$ является объединение попарно непересекающихся косых граней ручки \mathbb{D}_f^{st} :

$$\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \partial_g \mathbb{D}_f^{\text{st}} := ((\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f) / \Gamma_f. \quad (3.58)$$

Подчеркнем, что $\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \partial_{\tau'_1} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$, $\chi_{f,\tau'} = \chi_{f,\tau'_1}$ для любой грани $\tau'_1 \in \Gamma_f(\tau')$.

Пусть $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}} \prec [g_1]_{\text{top}}$, причем $[g]_{\text{top}} = \delta_{\tau'}[f]_{\text{top}}$, $[g_1]_{\text{top}} = \delta_{\tau''}[f]_{\text{top}}$ для некоторых граней $\tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\mathbf{c})}$, и пусть f, g, g_1 — отмеченные функции своих классов топологической эквивалентности. Из (3.27) и того, что группы $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})$ и $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1$ действуют тривиально на косой ручке $\mathbb{D}_{g_1}^{\text{st}}$, получаем

$$\chi_{g,g_1} \circ \chi_{f,g}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}} = \chi_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} \circ \chi_{f,\tau'}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}} = \chi_{f,\tau''} = \chi_{f,g_1}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}}. \quad (3.59)$$

Покажем, что погружение $\chi_{f,g}$ является вложением (а потому $\chi_{f,\tau'}$ является мономорфизмом стандартных косых цилиндрических ручек, см. определение 3.3.1(D), ввиду допустимости погружения (3.55)). Предположим, что

$$u_1, u_2 \in U_f^\infty, \quad h_{f,\tau'}^*(u_1) = h^* h_{f,\tau'_1}^*(u_2)$$

для некоторых $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ и $\tau'_1 \prec D_f$, таких что $\delta_{\tau'_1}[f]_{\text{top}} = \delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$. Покажем, что $u_1 \in \tilde{\Gamma}_f^*(u_2)$, где $\tilde{\Gamma}_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ — группа автоморфизмов относительных когомологий, индуцированная группой $\tilde{\Gamma}_f = (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ классов отображений. Имеем

$$u_1 = (h_{f,\tau'}^*)^{-1} h^* h_{f,\tau'_1}^*(u_2) = (h_{f,\tau'_1} h h_{f,\tau'}^{-1})^*(u_2)$$

$$= (h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,g} h h_{1;\tilde{f}_1,g}^{-1} h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^*(u_2) = (h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} h_{0;f,\tilde{f}}^{-1})^*(u_2) = h_1^*(u_2), \quad (3.60)$$

где “возмущенным” функциям f, \tilde{f}_1 отвечают грани τ', τ'_1 по правилу (3.22),

$$h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} := h_{1;\tilde{f}_1,g} h h_{1;\tilde{f}_1,g}^{-1}, \quad h_1 := h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}.$$

Так как диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции \tilde{f} в линии уровня функции \tilde{f}_1 с сохранением направления роста (в силу $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$), то $\tilde{f} = h_2 \tilde{f}_1 h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}}$ для некоторого $h_2 \in \text{Diff}^+[-1; 1]$, откуда $\tilde{f} = h_2 \tilde{f}_1 (h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1} h_1 h_{0;f,\tilde{f}})$, т.е. диффеоморфизм $h_1 \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции $\tilde{f}^* := \tilde{f} h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}$ в линии уровня функции $\tilde{f}_1^* := \tilde{f}_1 h_{0;f,\tilde{f}_1}^{-1}$ с сохранением направления роста. Отсюда и из того, что обе “возмущенные” функции $\tilde{f}^*, \tilde{f}_1^*$ близки к f и имеют те же критические точки, что и “невозмущенная” функция f , следует, что $h_1 \in \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M; \mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2})$. Осталось доказать, что верно включение $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$. Так как $\tilde{f}^* = h_2 \tilde{f}_1^* h_1$, то

$$h_1(G_{\tilde{f}^*}) = G_{\tilde{f}_1^*}, \quad J(\mathbf{c}(\tilde{f}_1^* h_1)) = J(\mathbf{c}(\tilde{f}_1^*)) =: \hat{J}, \quad \Rightarrow \quad J(\mathbf{c}(f h_1)) = J(\mathbf{c}(f)) =: J \quad (3.61)$$

(так как из того, что перестановка $h_1|_{\mathcal{C}_{f,1}}: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathcal{C}_{f,1}$ седловых точек переводит отношение частичного порядка $J(\mathbf{c}(\tilde{f}_1^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями одной “возмущенной” 0-коцепи $\mathbf{c}(\tilde{f}_1^*) = \tilde{f}_1^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$ в отношение частичного порядка $J(\mathbf{c}(\tilde{f}^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями другой “возмущенной” 0-коцепи $\mathbf{c}(\tilde{f}^*) = \tilde{f}^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$, следует сохранение этой перестановкой “более слабого” отношения частичного порядка на $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями “невозмущенной” 0-коцепи $\mathbf{c}(f) = f|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$). Так как функции $f, f h_1$ имеют одни и те же множества $\mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2}$ критических точек минимумов, седловых точек и точек максимумов, то, согласно (3.61) и достаточному условию топологической эквивалентности функций Морса (см. лемму 2.3.2, т.е. [132, лемма 1]), достаточно показать совпадение графов $G_{f h_1} = h_0(G_f)$ для некоторого диффеоморфизма $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$, см. обозначение 3.1.6 и (3.27) (т.е. что графы G_f и $G_{f h_1}$ изотопны в поверхности $M' := M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ относительно множества вершин $\mathcal{C}_{f,1}$). Обозначим $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$.

Лемма 3.3.11. Пусть $f \in \mathcal{F}^1$, $u \in U_f^\infty \subset H_f^1$, и пусть в обозначениях (3.22) возмущенной функции $\tilde{f}^* := \tilde{f} h_{0;f,\tilde{f}}^{-1}$ отвечает грань $\tau' := \tau_{J(\mathbf{c}(\tilde{f}^*))} \prec \tau_{J(\mathbf{c}(f))}$. Тогда граф $G_f \subset M$ (см. обозначение 3.1.6) совпадает с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ с некоторым графом $G := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\tilde{f}^*}, u, \hat{J}, J} \subset M$, рассматриваемым с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G))$ и определяемым следующим набором данных:

- (i) поверхность M ;
- (ii) подмножество $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \subset M$;
- (iii) граф $G_{\tilde{f}^*} \subset M' := M \setminus \mathcal{C}_{f,0,2}$ с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G_{\tilde{f}^*}))$;
- (iv) класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty \subset H_f^1 = H^1(M', V(G_{\tilde{f}^*}); \mathbb{R})$;
- (v) два отношения частичного порядка $\hat{J} := J(\mathbf{c}(\tilde{f}^*)) \prec J := J(\mathbf{c}(f))$ на множестве $V(G_{\tilde{f}^*})$ вершин графа $G_{\tilde{f}^*}$ значениями функций f, \tilde{f}^* на вершинах (соответственно), где через $V(G) \subset G$ обозначено множество вершин графа G .

То есть, если набор данных (i)–(v) построен указанным способом по паре “невозмущенной” и “возмущенной” функций f и \tilde{f}^* , имеющих одно и то же множество критических точек, то $G_f \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$ для $G := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\tilde{f}^*}, u, \hat{J}, J}$ (т.е. графы G_f и G изотопны в поверхности M' относительно множества вершин $V(G_{\tilde{f}^*}) = V(G)$).

Доказательство. Сначала проведем доказательство в случае, когда $\tau' := \tau_{\tilde{J}}$ является гипергранью грани $\tau := \tau_J$. Обозначим “возмущенную” функцию через $\tilde{f}_1 := \tilde{f}^*$. Граф $G = G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1}, u, \tilde{J}, J} \subset M$ строится так. Так как $\tau' := \tau_{\tilde{J}} \prec \tau := \tau_J$ – гипергрань, то ровно одно из седловых критических значений $c \in f(\mathcal{C}_{f,1})$ “невозмущенной” функции f распадается на два седловых критических значения $c^- < c^+$ “возмущенной” функции \tilde{f}_1 . Пусть $Z_\ell \subset M \setminus G_{\tilde{f}_1}$ – такая компонента связности множества $M \setminus G_{\tilde{f}_1}$, что $\inf \tilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^-$ и $\sup \tilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^+$ (т.е. Z_ℓ является открытым цилиндром для функции \tilde{f}_1 , см. (3.33)). Ориентированный граф $G \subset \overline{Z_\ell}$ назовем Z_ℓ -допустимым, если его множество вершин содержится в Z_ℓ ; Z_ℓ -допустимый односторонний ориентированный граф γ_0 с параметризацией $\gamma_0: [0; 1] \rightarrow \overline{Z_\ell}$ назовем (Z_ℓ, u) -минимальным, если

$$u([\gamma_0]) = \min \{ u([\gamma]) \mid \gamma \in Z_\ell^{\text{adm}}, \gamma|_{[0; 1/2]} = \gamma_0|_{[0; 1/2]}, u([\gamma]) > 0 \},$$

где через Z_ℓ^{adm} обозначено множество Z_ℓ -допустимых односторонних графов. Из включений $u \in U_f^\infty \subset U_{\tilde{f}_1}^\infty$ и определения подмножества $U_{\tilde{f}_1}^\infty \subset H_f^1$ следует, что указанный минимум достигается для любого Z_ℓ -допустимого одностороннего графа γ_0 , причем ровно на одном Z_ℓ -допустимом одностороннем графе с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Более того, имеется Z_ℓ -допустимый ориентированный граф $G_\ell \subset \overline{Z_\ell}$, каждое ребро которого является (Z_ℓ, u) -минимальным и который содержит в качестве ровно одного из своих ребер любой (Z_ℓ, u) -минимальный односторонний граф с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Причем граф G_ℓ с указанным свойством единствен с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Обозначим через $G \subset M$ граф, полученный из графа $G_{\tilde{f}_1}$ заменой подграфа ∂Z_ℓ соответствующим графом G_ℓ для каждой компоненты связности $Z_\ell \subset M \setminus G_{\tilde{f}_1}$, такой что $Z_\ell \subset \tilde{f}_1^{-1}([c^-; c^+])$. Нетрудно показывается, что $G_f \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$.

В общем случае имеются такие последовательности граней $\tau', \tau'', \dots, \tau^{(j-1)}$ грани $\tau =: \tau^{(j)}$ и соответствующих отношений частичного порядка $\hat{J} =: J', J'', \dots, J^{(j-1)}, J^{(j)} := J$, что $\tau^{(i-1)} = \tau_{J^{(i-1)}}$ является гипергранью грани $\tau^{(i)} = \tau_{J^{(i)}}$, $2 \leq i \leq j$. Пусть $\tilde{f}_j := f$ – невозмущенная функция, и \tilde{f}_i – возмущенная функция, которой отвечает грань $\tau^{(i)}$ по правилу (3.22), причем $\mathcal{C}_{\tilde{f}_i} = \mathcal{C}_f$, $1 \leq i \leq j-1$. Определим индуктивно по графу $G' := G_{\tilde{f}_1} = G_{\tilde{f}^*} \subset M$ графы $G^{(i+1)} := G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G^{(i)}, u, J^{(i)}, J^{(i+1)}}$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. Положим $G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1}, u, \tilde{J}, J} := G^{(j)}$. Из доказанного выше следует (по индукции), что $G_{\tilde{f}_{i+1}} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(i+1)})$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. В частности, $G_f = G_{\tilde{f}_j} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(j)})$. Лемма 3.3.11 доказана. \square

Из леммы 3.3.11 следует ввиду (3.60) и (3.61), что

$$\begin{aligned} G_f &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}^*}, u_1, \tilde{J}, J}), \\ G_f &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1^*}, u_2, J(\mathbf{c}(\tilde{f}_1^*)), J}), \\ G_{fh_1} &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{fh_1}))(G_{M, h_1^{-1}(\mathcal{C}_f, 0, 2), h_1^{-1}(G_{\tilde{f}_1^*}), h_1^+(u_2), J(\mathbf{c}(\tilde{f}_1^* h_1)), J(\mathbf{c}(fh_1))}) \\ &= (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}^*}, u_1, \tilde{J}, J}) = (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f), \end{aligned}$$

т.е. требуемое включение $G_{fh_1} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f)$. Значит, $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0 f})(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$, откуда $u_1 \in \tilde{\Gamma}_f^*(u_2)$, а значит, отображение $\chi_{f,g}$ является вложением.

3.3.3 Построение комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса

В данном параграфе строится косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ (определение 3.3.2 (B)), удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.3. Мы получим комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ из стандартных косых цилиндрических ручек, описанных в §3.3.2, путем приклеивания друг к другу

по построенным там отображениям инцидентности. Конструкция, приведенная в данном параграфе, является обобщением конструкции из §2.7.5 (т.е. из [133, §5]), где были построены (при дополнительном ограничении $p = p^*$, $q = q^*$, $r = r^*$, т.е. когда все критические точки фиксированы) более простые комплексы \tilde{K} и K (комплексы функций Морса), являющиеся строго полиэдральными комплексами (см. определения 2.7.9(A) и 3.3.2(C)).

Пусть $f_* \in \mathcal{F}^1$ – базисная функция Морса (см. определение 3.1.3 (B)). В каждом классе топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ рассмотрим отмеченную функцию $f \in [f]_{\text{top}}$ этого класса с множествами критических точек $\mathcal{C}_{f,\lambda} = \mathcal{C}_{f_*,\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$ (см. §3.3.2, шаг 2), тогда $H_f^0 = H_{f_*}^0$, $H_f^1 = H_{f_*}^1$. Рассмотрим топологическое пространство

$$(\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} \times \mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \times H_{f_*}^1 \approx (\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} \times \mathcal{P}^{q-1} \times \mathbb{R}^{2q},$$

где $(\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} := \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ с дискретной топологией, а евклидов многогранник $\mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \approx \mathcal{P}^{q-1}$ и векторное пространство $H_{f_*}^1 \approx \mathbb{R}^{2q}$ определены как в §3.3.2, шаги 1, 4 и (3.29). Рассмотрим в этом топологическом пространстве подпространство

$$\tilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}} \{[f]_{\text{top}}\} \times D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}} \quad (3.62)$$

с индуцированной топологией (см. §3.3.2, шаг 2 и (3.31)).

Определение 3.3.12 (комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса). Рассмотрим факторпространство $\tilde{\mathbb{K}} := (\tilde{\mathbb{X}} / \sim) / \sim_{\text{glue}}$ с фактортопологией, где отношения эквивалентности \sim , \sim_{glue} на пространствах $\tilde{\mathbb{X}}$, $\tilde{\mathbb{Y}} := \tilde{\mathbb{X}} / \sim$ порождены следующими отношениями соответственно:

(отношение \sim на $\tilde{\mathbb{X}}$; стандартная косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$) для каждого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ рассмотрим проекцию $D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}) / \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} = \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ на стандартную косую цилиндрическую ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ индекса $k = \dim D_{[f]_{\text{top}}}$ (см. §3.3.2, шаг 9), рассмотрим проекцию $\{[f]_{\text{top}}\} \times D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \{[f]_{\text{top}}\} \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} =: \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$, являющуюся прямым произведением отображения $\{[f]_{\text{top}}\} \rightarrow \{[f]_{\text{top}}\}$ и этой проекции, и назовем точки множества $\{[f]_{\text{top}}\} \times D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}$ \sim -эквивалентными, если их образы в $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ при последней проекции совпадают; тогда $\tilde{\mathbb{Y}} := \tilde{\mathbb{X}} / \sim = \bigcup_{[f]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$;

(отношение \sim_{glue} на $\tilde{\mathbb{Y}}$; отображения инцидентности) для каждой пары примыкающих классов $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$ рассмотрим вложение, называемое *отображением инцидентности*: $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} : \partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ (см. §3.3.2, шаги 3 и 10), где $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ содержится в подошве $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ и является объединением ее попарно непересекающихся косых граней $\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \subset \partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$, см. (3.57), (3.58); рассмотрим индуцированное вложение $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} := \{[f]_{\text{top}}\} \times (\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}) \hookrightarrow \mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}$ (которое тоже обозначим через $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$); назовем любую точку множества $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$ и ее образ в $\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$ при данном вложении \sim_{glue} -эквивалентными.

Пусть $p_Y : \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ – каноническая проекция. Рассмотрим подмножество $\overset{\circ}{\tilde{\mathbb{Y}}} := \bigcup_{[f]_{\text{top}}} \overset{\circ}{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$, где $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{top}}} := \{[f]_{\text{top}}\} \times \overset{\circ}{\mathbb{D}}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ (см. определение 3.3.1, (C)). Обозначим $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} := p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}})$, $\overset{\circ}{\mathbb{D}}_{[f]_{\text{top}}} := p_Y(\overset{\circ}{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{top}}})$, $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} := p_Y(\partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}})$, $\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} := \{[f]_{\text{top}}\} \times (\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}})$, и через $\overset{\circ}{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ обозначим объединение открытых (косых) граней $\{[f]_{\text{top}}\} \times \left(\left(\overset{\circ}{\tau'} \right) \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} \right) / \Gamma_{[f]_{\text{top}}}$ стандартной (косой) цилиндрической ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$, таких что $\tau' \prec D_{[f]_{\text{top}}}$ и $\delta_{\tau'} [f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$.

Теорема 3.3.13 ([134, теорема 4.2]). *Пространство $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{Y}} / \sim_{\text{glue}}$ обладает структурой косого цилиндрически-полиэдрального комплекса ранга $q-1$ с косыми цилиндрическими ручками $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} = p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}) \subset \tilde{\mathbb{K}}$, $[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$. При этом для любого класса топологической*

эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ отображение $\varphi_{[f]_{\text{top}}} := p_Y|_{\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} : \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ является характеристическим отображением ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ (откуда отображение $p_Y|_{\mathring{\mathbb{Y}}}: \mathring{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ биективно), и выполнено

$$\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \bigcup_{[g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}, \quad \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \cap \mathring{\mathbb{D}}_{[g]_{\text{top}}} = \varphi_{[f]_{\text{top}}}(\mathring{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}), \quad (3.63)$$

$$\varphi_{[g]_{\text{top}}} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} = \varphi_{[f]_{\text{top}}}|_{\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} \quad \text{для любых } [f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}. \quad (3.64)$$

Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ действует на $\tilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса.

Доказательство. Шаг 1. При любом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подмножества

$$\tilde{\mathbb{Y}}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\text{top}}} \leq k} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}} = \tilde{\mathbb{X}} / \sim, \quad \mathring{\mathbb{Y}}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\text{top}}} \leq k} \mathring{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \mathring{\mathbb{Y}}^{(k)}$$

с индуцированной топологией, и множество $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)} := \tilde{\mathbb{Y}}^{(k)} / \sim_{\text{glue}}$ с фактортопологией. Докажем лемму (индукцией по k) для пространств $\tilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$, $\mathring{\mathbb{Y}}^{(k)} \subset \mathring{\mathbb{Y}}^{(k)}$ и проекции $p_{Y,k} := p_Y|_{\mathring{\mathbb{Y}}^{(k)}} : \mathring{\mathbb{Y}}^{(k)} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$. При $k < 0$ доказывать нечего, так как $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)} = \emptyset$.

Пусть $k \geq 1$, и доказываемое утверждение верно для $\mathring{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Покажем, что для каждого $[f]_{\text{top}}$, такого что $\text{ind} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} = k$, имеется (“приклеивающее”) отображение $\varphi'_{[f]_{\text{top}}} : \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ подошвы $\partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ косой цилиндрической ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$, такое что $\varphi'_{[f]_{\text{top}}}|_{\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$ для любого $[g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$ (а потому $\text{ind} \mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}} < k$), см. (3.58) и (3.57). Действительно, это отображение однозначно, так как для любых $[g_1]_{\text{top}} \succ [g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$ и $\tau'' \prec D_{[f]_{\text{top}}}$, таких что $\delta_{\tau''}[f]_{\text{top}} = [g_1]_{\text{top}}$, выполнено $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g_1]_{\text{top}}}|_{\partial_{\tau''} \mathbf{v}_f} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[g]_{\text{top}}, [g_1]_{\text{top}}} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}|_{\partial_{\tau''} \mathbf{v}_f}$ ввиду (3.59) и (3.64) для $\mathring{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{top}}}$ непрерывно, так как его область определения является конечным (ввиду (3.22)) объединением замкнутых подмножеств $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$, таких что $[g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$, и его ограничение на такое подмножество есть композиция $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$ непрерывных отображений. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{top}}}$ инъективно, так как его ограничение $\varphi'_{[f]_{\text{top}}}|_{\mathring{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}|_{\mathring{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}}$ на объединение открытых граней, отвечающих классу $[g]_{\text{top}} \succ [f]_{\text{top}}$, является композицией вложений $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}|_{\mathring{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}}$ и $p_{Y,k-1}|_{\mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}}}$ (ввиду §3.3.2, шаг 10, и биективности $p_{Y,k-1}|_{\mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}}} : \mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}} \rightarrow \mathring{\mathbb{K}}^{(k-1)}$), а образы таких ограничений содержатся в открытых ручках $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}(\mathring{\partial}_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}) \subset p_{Y,k-1}(\mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}})$, которые попарно не пересекаются (для разных классов $[g]_{\text{top}}$) ввиду биективности $p_{Y,k-1}|_{\mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}}} : \mathring{\mathbf{v}}_{[g]_{\text{top}}} \rightarrow \mathring{\mathbb{K}}^{(k-1)}$.

Отображение топологических пространств назовем *хорошим*, если оно переводит любое замкнутое подмножество в замкнутое подмножество. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{top}}}$ является хорошим, так как его ограничение на каждую косую грань

$$\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \subset \partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$$

(для $\tau' \prec D_{[f]_{\text{top}}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$) есть композиция

$$p_{Y,k-1}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}} \circ \chi_{[f]_{\text{top}}, \tau'}$$

(автоматически хорошего, см. определение 3.3.1) мономорфизма $\chi_{[f]_{\text{top}}, \tau'}$ косых цилиндрических ручек (см. §3.3.2, шаг 10) и (автоматически хорошего) характеристического отображения $p_{Y,k-1}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}}$ косой ручки $p_{Y,k-1}(\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}) \subset \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ (по предположению индукции), а каждая косая грань замкнута и их конечное число. Отсюда следует, что $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ гомеоморфно

пространству (с фактортопологией), полученному из $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ приклеиванием косых цилиндрических ручек $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ индекса k при помощи инъективных непрерывных хороших отображений $\varphi'_{[f]_{\text{top}}} : \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ их подошв, а потому $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ удовлетворяет условию (w) из определения 3.3.2(B). Поэтому $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ обладает свойствами (3.63) и (3.64), отображение $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}}$ является инъективным, непрерывным и хорошим, а потому задает структуру косо цилиндрической ручки на $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}})$ и является характеристическим отображением этой ручки. Пространство $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ с полученным разбиением на косые цилиндрические ручки $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}})$ удовлетворяет условию (с) из определения 3.3.2(B), так как ограничение характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}}$ любой ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ индекса k на каждую свою косую грань $\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ есть композиция $p_{Y,k}|_{\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} = i_{k-1} \circ \varphi'_{[f]_{\text{top}}}|_{\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}} = i_{k-1} \circ p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{top}},\tau'} = p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}} \circ \chi_{[f]_{\text{top}},\tau'}$ мономорфизма $\chi_{[f]_{\text{top}},\tau'}$ стандартных косых цилиндрических ручек и характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}}}$ косо цилиндрической ручки $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[g]_{\text{top}}})$, где $i_{k-1} : \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ – отображение включения. Значит, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом ранга k , что завершает доказательство индукционного перехода.

Шаг 2. Определим (естественное) правое действие $\rho_Y : \mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Y}}$ дискретной группы $\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ на пространстве $\tilde{\mathbb{Y}}$ формулой

$$(h\mathcal{D}^0, [f]_{\text{top}}, \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}(\mathbf{c}, u)) \mapsto ([fh]_{\text{top}}, \tilde{\Gamma}_{[fh]_{\text{top}}}(h_{1;[f]_{\text{top}},[fh]_{\text{top}}}^*(\mathbf{c}), h_{1;[f]_{\text{top}},[fh]_{\text{top}}}^*(u)))$$

при любых $h \in \mathcal{D}^\pm$, $([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}, u) \in \tilde{\mathbb{X}}$ (см. §3.3.2, конец шага 9), где $h_{1;[f]_{\text{top}},[fh]_{\text{top}}} \in h\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – диффеоморфизм, переводящий линии уровня отмеченной функции класса топологической эквивалентности $[fh]_{\text{top}}$ в линии уровня отмеченной функции класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ с сохранением направления роста. Это действие определено корректно, так как в силу леммы 2.3.2 (т.е. [132, лемма 1]) для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{D}^\pm$ выполнено

$$h_{1;[f]_{\text{top}},[fh_1h_2]_{\text{top}}}^{-1} h_{1;[f]_{\text{top}},[fh_1]_{\text{top}}} h_{1;[fh_1]_{\text{top}},[fh_1h_2]_{\text{top}}} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$$

и действие групп $\text{stab}_g \mathcal{D}^0$ и $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)$ на косо цилиндрической ручке $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ тривиально (см. (3.54), (3.53)), где g – отмеченная функция класса топологической эквивалентности $[fh_1h_2]_{\text{top}}$. Для любых $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$ (а потому $[fh]_{\text{top}} \prec [gh]_{\text{top}}$ для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$) определим отображение инцидентности

$$\chi_{[f],[g]} : \bigcup_{h \in \mathcal{D}^\pm} (\partial_{[gh]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{top}}}) \rightarrow \bigcup_{h \in \mathcal{D}^\pm} \mathbf{v}_{[gh]_{\text{top}}}$$

правилом

$$\chi_{[f],[g]}|_{\partial_{[gh]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{top}}}} := \chi_{[fh]_{\text{top}},[gh]_{\text{top}}} : \partial_{[gh]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{top}}} \rightarrow \mathbf{v}_{[gh]_{\text{top}}}$$

для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$. Отображение $\chi_{[f],[g]}$ определено корректно, так как для любых $[f]_{\text{top}}$ и $h_1 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ подмножества $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$, $\partial_{[gh_1]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \subset \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}}$ либо совпадают (откуда $[g]_{\text{top}} = [gh_1]_{\text{top}}$), либо не пересекаются ввиду леммы 3.3.7 (см. §3.3.2, шаг 10). Отображение $\chi_{[f],[g]}$ является $(\mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0)$ -эквивариантным (т.е. $\chi_{[f],[g]} \circ \rho_Y(h, \cdot) = \rho_Y(h, \chi_{[f],[g]}(\cdot))$ для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$), так как ввиду (3.24) выполнено

$$h^{-1} h_{[f]_{\text{top}},\tau'}^{-1} h h_{[fh]_{\text{top}},h_{1;[f]_{\text{top}},[fh]_{\text{top}}}^*(\tau')} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1}))$$

и действия групп $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1$ и $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})$ на стандартной косо цилиндрической ручке $\mathbb{D}_{[g_1]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ тривиальны, где $\tau' \prec D_{[f]_{\text{top}}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$, g_1 – отмеченная функция класса топологической эквивалентности $[gh]_{\text{top}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$. Поэтому правое действие ρ_Y индуцирует правое действие $\rho^* : \mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косо цилиндрически-полиэдрального комплекса, такое что $\rho^*(h\mathcal{D}^0, p_Y(y)) := p_Y \circ \rho_Y(h\mathcal{D}^0, y)$ для любых $h \in \mathcal{D}^\pm$, $y \in \tilde{\mathbb{Y}}$.

В частности, действие $\rho^*(h\mathcal{D}^0, \cdot)$ любого элемента $h\mathcal{D}^0 \in \mathcal{D}^\pm / \mathcal{D}^0$ на комплексе $\tilde{\mathbb{K}}$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \mathbb{D}_{[fh]_{\text{top}}}$ косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ и $\mathbb{D}_{[fh]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$. Поэтому эти ручки изоморфны одной и той же стандартной ручке $(D_{f_0} \times \mathbb{S}_{f_0}) / \Gamma_{f_0}$, где f_0 – отмеченная функция класса эквивалентности $[f] = [fh]$. Теорема 3.3.13 полностью доказана. \square

3.3.4 Построение гладкого стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$

Аналогично определению 3.3.12 определим гладкое многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$. А именно, рассмотрим в евклидовом пространстве $H_f^0 = \mathbb{R}^{e_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q$ открытый куб $(-1; 1)^{e_{f,1}} \cong (-1; 1)^q$, и для любой грани $\tau = \tau_J \subset \mathcal{P}_f^{q-1}$ рассмотрим ее внутренность $\overset{\circ}{\tau}$ и обозначим через $(\overset{\circ}{\tau})^*$ множество таких 0-коцепей $\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{e_{f,1}} \subset H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$, что $J(\mathbf{c}') = J$ (см. §3.3.2, шаг 1), а через τ^* обозначим множество таких 0-коцепей $\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{e_{f,1}} \cong (-1; 1)^q$, что $J(\mathbf{c}') \preceq J$. Назовем $(\overset{\circ}{\tau})^*$ *стратом*, а τ^* — *звездой* этого страта (отвечающими грани τ). Тогда звезда τ^* открыта в H_f^0 ,

$$(\overset{\circ}{\tau})^* \subseteq \tau^*, \quad \tau \subset \tau^*,$$

страт $(\overset{\circ}{\tau})^*$ есть выпуклое открытое подмножество некоторого $|f(\mathcal{C}_{f,1})|$ -мерного линейного подпространства в H_f^0 , грань τ есть выпуклый $(q - |f(\mathcal{C}_{f,1})|)$ -мерный многогранник, причем грань τ и страт $(\overset{\circ}{\tau})^*$ пересекаются трансверсально в барицентре грани τ , являющемся внутренней точкой каждого из них. Положим $S_{\succeq[f]_{\text{top}}} := \tau_{J(\mathbf{c}(f))}^*$, $S_{[f]_{\text{top}}} := (\overset{\circ}{\tau}_{J(\mathbf{c}(f))})^*$. Рассмотрим в пространстве $(\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} \times (-1; 1)^{e_{f,1}} \times H_{f,*}^1$ подпространство

$$\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} := \bigcup_{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}} \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty},$$

где $U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}$ определено как в (3.32). Имеем включение $\widetilde{\mathbb{X}} \subset \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}$.

Аналогично определению 3.3.12 определим отношение эквивалентности \sim на $\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}$ с помощью покомпонентного действия на $S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}$ дискретной группы $\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ (см. §3.3.2, шаг 9). Определим “окрестность” стандартной ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} &:= (S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}) / \widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} \approx (S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}) / \Gamma_{[f]_{\text{top}}}, \\ \mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{top}}} &:= \{[f]_{\text{top}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} / \sim. \end{aligned}$$

Определим отношение эквивалентности \sim_{glue} на $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} / \sim$ с помощью вложений

$$\begin{aligned} \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}^{\succeq} &: \partial_{[g]_{\text{top}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}, \text{ определяемых теми же формулами, что и вложения} \\ \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} &: \partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}} \text{ (см. §3.3.2, шаг 10). Рассмотрим пространства} \end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} / \sim, \quad \widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} / \sim_{\text{glue}}$$

с фактортопологией, тогда $\widetilde{\mathbb{K}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть

$$p_X: \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \quad p_Y: \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

— канонические проекции. Рассмотрим “окрестность” $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}} := p_Y(\mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{top}}})$ кривой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{K}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Так как $\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}$ является гладким открытым $3q$ -мерным многообразием с естественной плоской аффинной связностью, и каждая группа $\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ действует на нем диффеоморфизмами, сохраняющими связность, то $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq}$ тоже является гладким открытым $3q$ -мерным многообразием с плоской аффинной связностью.

Теорема 3.3.14 ([134, теорема 4.3]). *Пространство $\widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} / \sim_{\text{glue}}$ обладает структурой гладкого $3q$ -мерного многообразия и естественной плоской аффинной связностью, гладкой относительно этой структуры. При этом для каждого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ выполнены следующие условия:*

(i) *подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}} = p_Y(\mathbf{v}_{\succeq[f]_{\text{top}}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ открыто, где $p_Y: \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ — проекция,*

(ii) отображение $p_Y|_{\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}} : \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ является гладким регулярным вложением гладких $3q$ -мерных многообразий, сохраняющим аффинную связность.

Отображение $p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}} : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ биективно. Дискретная группа $\mathcal{D}^{\pm}/\mathcal{D}^0$ и группа $\text{Diff}^+[-1; 1]$ действуют на $\widetilde{\mathcal{M}}$ справа и слева соответственно диффеоморфизмами, сохраняющими аффинную связность и области $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.3.13 доказательство проводится индукцией, а именно, доказывается однозначность, непрерывность и инъективность соответствующих приклеивающих отображений, а также биективность отображения $p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}} : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$. Так как каждое приклеивающее отображение $\varphi'_{\geq[f]_{\text{top}}}$ определено на открытом подмножестве открытого подмножества $\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ и является непрерывным и инъективным отображением $3q$ -мерных многообразий, то $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}}$ открыто в $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $p_Y|_{\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}} : \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ является гомеоморфизмом (в индуцированной топологии). В частности, каждая точка пространства $\widetilde{\mathcal{M}}$ обладает окрестностью, гомеоморфной \mathbb{R}^{3q} . Так как пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово (см. ниже), а все отображения $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$ (а потому и все приклеивающие отображения) являются гладкими и сохраняют плоскую аффинную связность, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ является гладким $3q$ -мерным многообразием с естественной плоской аффинной связностью.

Осталось доказать, что пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово. Рассмотрим естественное непрерывное “вычисляющее” отображение

$$\text{Ev}^* : \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}^q / \Sigma_q, \quad ([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}, u) \mapsto \Sigma_q \mathbf{c},$$

где группа перестановок Σ_q действует на любом наборе $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}^{f,1}} \cong \mathbb{R}^q$ перестановками компонент. Легко проверяется, что оно индуцирует (автоматически непрерывное) отображение $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^q / \Sigma_q$, которое тоже будем обозначать через Ev^* . Пусть $m_1, m_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $\text{Ev}^*(m_1) \neq \text{Ev}^*(m_2)$, то точки m_1, m_2 обладают непересекающимися окрестностями ввиду хаусдорфовости \mathbb{R}^q / Σ_q и непрерывности Ev^* . Пусть $\text{Ev}^*(m_1) = \text{Ev}^*(m_2)$ и $m_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_i]_{\text{top}}}$, $i = 1, 2$. Если $[f_1]_{\text{top}} \neq [f_2]_{\text{top}}$, то в силу леммы 3.3.7 не существует класса топологической эквивалентности $[g]_{\text{top}}$, такого что $[g]_{\text{top}} \succ [f_i]_{\text{top}}$, $i = 1, 2$, а потому образы приклеивающих отображений $\varphi'_{\geq[f_i]_{\text{top}}}$, $i = 1, 2$, имеют пустое пересечение, откуда окрестности $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_i]_{\text{top}}}$ точек m_i , $i = 1, 2$, в $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеют пустое пересечение. Если $[f_1]_{\text{top}} = [f_2]_{\text{top}}$ и $m_1 \neq m_2$, то точки $m_1, m_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_1]_{\text{top}}}$ обладают непересекающимися окрестностями ввиду открытости $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_1]_{\text{top}}}$, хаусдорфовости стандартного пространства $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_1]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ и гомеоморфности $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_1]_{\text{top}}} \approx \mathbf{v}_{\geq[f_1]_{\text{top}}} \approx \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f_1]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ (см. выше). Таким образом, пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ является хаусдорфовым. Теорема 3.3.14 доказана. \square

3.3.5 Топология косых цилиндрических ручек комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$, существование комплекса \widetilde{K} и проекции $\widetilde{\mathbb{K}} \rightarrow \widetilde{K}$

Здесь мы завершим доказательство теоремы 3.3.3, изучим топологию косых цилиндрических ручек комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ (предложение 3.3.15) и докажем существование более простого (полиэдрального) комплекса \widetilde{K} функций Морса и проекции $\widetilde{\mathbb{K}} \rightarrow \widetilde{K}$ (следствие 3.3.5).

Доказательство основной теоремы 3.3.3. (А), (В) Из теорем 3.3.13 и 3.3.14 получаем утверждения (А) и (В) теоремы 3.3.3.

(С) Утверждение (С) теоремы 3.3.3 нетрудно выводится из (3.44) и явного описания (3.43) набора образующих свободной абелевой группы $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. §3.3.2, шаг 7). Действительно: из равенств (3.44) и (3.45), с учетом равенства $c = |A|$, получаем первое требуемое равенство

$c+d = (n-\nu_e+e)+(\nu_e-e) = n$. Для доказательства неравенства $d \leq \min\{p-p^*+r-r^*-q^*, t-1\}$ надо доказать два неравенства: $d < t$ и $d \leq p - p^* + r - r^* - q^*$.

Чтобы доказать эти неравенства, рассмотрим “обобщенные круги” $\widehat{Z}_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}$ (каждый из которых гомеоморфен кругу или проколотому кругу или цилиндру), $1 \leq \ell \leq \nu_0$, отвечающие образующим подгруппы $\Theta_{f,0} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$, а также цилиндры $\widehat{Z}_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$, отвечающие образующим подгрупп $\Theta_{f,1}, \dots, \Theta_{f,e} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ из §3.3.2, шаг 7. Из построения этих цилиндров и обобщенных кругов следует, что

- (i) связные компоненты объединения $\bigcup_{\ell=1}^{\nu_0} \widehat{Z}_\ell$ всех обобщенных кругов являются обобщенными кругами, которые назовем *специальными*, в частности любой обобщенный круг \widehat{Z}_ℓ , $1 \leq \ell \leq \nu_0$, содержится ровно в одном специальном обобщенном круге $\widehat{Z}_{\ell'}$;
- (ii) каждый из цилиндров \widehat{Z}_ℓ , $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$, содержит не меньше одной связной компоненты графа G_f , не содержащейся ни в одном из обобщенных кругов, а также он либо содержит не меньше одной плавающей (т.е. нефиксированной) критической точки локального экстремума и не пересекается ни с одним из обобщенных кругов $\widehat{Z}_{\ell'}$, $1 \leq \ell' \leq \nu_0$, либо содержит несколько (в количестве > 0) специальных обобщенных кругов (причем все такие обобщенные круги являются кругами);
- (iii) существует связная компонента графа G_f , не содержащаяся ни в одном обобщенном круге \widehat{Z}_ℓ , $1 \leq \ell \leq \nu_0$, и ни в одном цилиндре \widehat{Z}_ℓ , $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$.

Но для любого специального обобщенного круга выполнено следующее: его проекция в граф W_f Кронрода-Риба функции f является деревом, которое содержит на одну больше внутренних вершин, чем внутренних ребер графа W_f , а потому на ≥ 2 больше концевых (т.е. имеющих степень 1 в графе W_f) вершин, чем внутренних ребер графа W_f . Поэтому специальный обобщенный круг \widehat{Z}_ℓ содержит столько же связных компонент графа G_f , сколько обобщенных кругов $\widehat{Z}_{\ell'}$ (включая специальный обобщенный круг \widehat{Z}_ℓ), а также содержит больше плавающих критических точек локальных экстремумов функции f , чем обобщенных кругов $\widehat{Z}_{\ell'}$ (включая специальный обобщенный круг \widehat{Z}_ℓ). Далее, любой цилиндр \widehat{Z}_ℓ содержит не меньше плавающих критических точек локальных экстремумов функции f , чем цилиндров и обобщенных кругов $\widehat{Z}_{\ell'}$ (включая сам цилиндр \widehat{Z}_ℓ), а также содержит не меньше связных компонент графа G_f , чем цилиндров и обобщенных кругов $\widehat{Z}_{\ell'}$ (включая сам цилиндр \widehat{Z}_ℓ). Поэтому общее количество $p - p^* + r - r^*$ плавающих критических точек локальных экстремумов функции f не меньше, чем общее количество d цилиндров и обобщенных кругов \widehat{Z}_ℓ , а общее количество t связных компонент графа G_f больше, чем общее количество d цилиндров и обобщенных кругов \widehat{Z}_ℓ . Таким образом, верны оба требуемые неравенства $p - p^* + r - r^* \geq d$ и $t > d$.

Предположим теперь, что число фиксированных критических точек $|\mathcal{C}| = p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$. Тогда $\chi(M) \geq -1$, поэтому род M равен 0 или 1. Если род M равен 0, то $e = 0$ и $d = \nu_0 = n$, т.е. любая окружность γ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, ограничивает обобщенный круг \widehat{Z}_ℓ в $M \setminus \mathcal{C}$. Поэтому d равно числу внутренних ребер дерева W_f , т.е. на 1 меньше числа внутренних вершин графа W_f , т.е. $d = t - 1$. Если род M равен 1 и граф W_f является деревом, то опять $e = 0$ и $d = \nu_0 = n$, поэтому d равно числу внутренних ребер дерева W_f , т.е. на 1 меньше числа внутренних вершин графа W_f , т.е. $d = t - 1$. Если же род M равен 1 и граф W_f не является деревом, то граф W_f (а также объединение $\overset{\circ}{W}_f$ его внутренних ребер) гомотопически эквивалентен окружности, поэтому $e = 1$, $d = \nu_e - e = \nu_1 - 1$, $\nu_1 = n$ и $t - n = \chi(\overset{\circ}{W}_f) = 0$, откуда $d = n - 1 = t - 1$.

Предположим теперь, что $|\mathcal{C}| = p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$ и $t = q$, т.е. любой внутренней вершине графа W_f отвечает ровно одна седловая критическая точка функции f . Тогда по

доказанному $d = t - 1 = q - 1 = p + r - \chi(M) - 1 = p - p^* + r - r^* - q^* - \chi(M) - 1 + p^* + q^* + r^* \leq p - p^* + r - r^* - q^*$.

Теорема 3.3.3 доказана. \square

Предложение 3.3.15. *Предположим, что количество пронумерованных критических точек $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$. Тогда косые цилиндрические ручки цилиндрически-полиэдрального комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ из теоремы 3.3.3 обладают следующим строением.*

(А) *Косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ является цилиндрически-полиэдральным (т.е. любая его косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ является цилиндрической) в том и только том случае, когда все точки локальных минимумов и локальных максимумов пронумерованы, т.е. $p - \widehat{p} \leq 1$ и $r - \widehat{r} \leq 1$. В этом случае для любой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ соответствующая конечная группа $\Gamma_{[f]}$ автоморфизмов соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ тривиальна, поэтому эта ручка имеет своим строгим деформационным ретрактом тор $(S^1)^{d([f])}$ (а потому гомотопически эквивалентна этому тору).*

(В) *Любая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ имеет своим строгим деформационным ретрактом пространство орбит $(S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}$ соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ по свободному действию конечной группы $\Gamma_{[f]}$ допустимыми автоморфизмами тора, см. определение 3.3.1(А,В,С). Косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ гомотопически эквивалентна некоторому (заведомо $d([f])$ -мерному) тору в том и только том случае, когда либо число седел $q \leq 2$, либо $q - \widehat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы), либо $p - \widehat{p} \leq 1$ и $r - \widehat{r} \leq 3$, либо $p - \widehat{p} \leq 3$ и $r - \widehat{r} \leq 1$ (т.е. все критические точки локальных экстремумов пронумерованы кроме, быть может, ≤ 3 точек одного индекса).*

Доказательство. (А) Шаг 1. Предположим, что $p - \widehat{p} \geq 2$, т.е. хотя бы две критические точки локальных минимумов не пронумерованы. Тогда существует функция Морса $f \in \mathcal{F}^1$, для которой существует разбивающее открытое ребро e графа W_f такое, что одна из связных компонент графа $W_f \setminus e$ является деревом T_e и содержит ровно три вершины, две из которых имеют степень 1 в графе W_f и отвечают непрономерованной точке локальных минимумов функции f , а третья вершина имеет степень 3 в графе W_f и отвечает связной компоненте графа G_f , содержащей ровно одну седловую критическую точку функции f . Нетрудно построить диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, тождественный на $p_f^{-1}(W_f \setminus (e \cup T_e))$ и переставляющий между собой указанные две точки локальных минимумов в $p^{-1}(T_e)$. Тогда индуцированный автоморфизм $h^{*0} \in \text{Aut}(H_f^0)$ действует тождественно на клетке-многограннике $D_{[f]} \subset H_f^0$ (так как h переводит каждую седловую точку в себя), однако индуцированный автоморфизм $h^* = h^{*1} \in \text{Aut}(H_f^1)$ действует на $U_{[f]_{\text{top}}} \subset H_f^1$, точнее на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} = U_{[f]_{\text{top}}}/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_{[f]_{\text{top}}})^* \approx (\mathbb{R}^c \times (S^1)^d) \times P$ так: сдвигом на цилиндре $\mathbb{R}^c \times (S^1)^d$ вдоль соответствующей образующей S^1 тора $(S^1)^d$ (так как h переводит в себя каждый открытый цилиндр \widehat{Z}_ℓ из (3.33)) и отражением на многограннике $P = P_{[f]_{\text{top}}}$. Поэтому пространство орбит $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}/\langle h^* \rangle$ по циклической подгруппе $\langle h^* \rangle$, порожденной автоморфизмом h^* , не является утолщенным цилиндром, а потому комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ не является цилиндрическим.

Аналогично показывается, что если $r - \widehat{r} \geq 2$ (т.е. хотя бы две критические точки локальных максимумов не пронумерованы), то комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ тоже не является цилиндрическим.

Шаг 2. Докажем обратное: предположим, что все точки локальных минимумов и локальных максимумов пронумерованы (т.е. $p - \widehat{p} \leq 1$ и $r - \widehat{r} \leq 1$). Покажем сначала, что для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ переводит в себя каждую вершину и каждое ребро графа G_f (см. обозначение 3.1.6). Действительно: из доказательства леммы 3.3.9 (шаг 1) следует, что индуцированный диффеоморфизмом h автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f Кронрода-Риба функции f переводит в себя каждую вершину и каждое ребро графа W_f . Отсюда и из формулы Лефшеца (см. доказательство леммы 3.3.9, шаг 2) следует, что h переводит в себя каждую вершину и каждое ребро графа G_f .

Отсюда следует, что h содержится в подгруппе, порожденной $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ и скручиваниями Дэна вдоль окружностей γ_ℓ из (3.34). Значит, индуцированный автоморфизм $h^* = h^{*1} \in \text{Aut}(H_f^1)$ действует тождественно на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}} = U_{[f]_{\text{top}}}/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_{[f]_{\text{top}}})^* \approx (\mathbb{R}^c \times (S^1)^d) \times P$. Итак, действие группы $\Gamma_{[f]_{\text{top}}}$ на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}$ тривиально. Но так как это действие свободно в силу (3.48) и леммы 3.3.10, то группа $\Gamma_{[f]_{\text{top}}}$ тривиальна. Поэтому любая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}})/\Gamma_{[f]_{\text{top}}}$ является цилиндрической ручкой $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{top}}}$. Значит, комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ является цилиндрическим.

(В) Шаг 1. Заметим, что косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентна некоторому тору в том и только том случае, когда соответствующая конечная группа $\Gamma_{[f]}$ автоморфизмов соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ действует сдвигами на этом торе (так как в противном случае группа $\Gamma_{[f]}$ нетривиально действует на гомологиях тора $(S^1)^{d([f])}$). Последнее равносильно тому, что любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ переводит в себя каждый открытый цилиндр Z_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$ (см. (3.33)), а также равносильно тому, что индуцированный автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f переводит в себя каждое внутреннее ребро графа W_f (напомним, что ребро графа W_f называется внутренним, если каждая его вершина имеет степень ≥ 2).

Шаг 2. Предположим теперь, что число седел $q \geq 3$, число непрономерованных седел $q - \hat{q} \geq 2$, и выполнено хотя бы одно из неравенств $p - \hat{p} \geq 2$ и $r - \hat{r} \geq 4$, а также хотя бы одно из неравенств $p - \hat{p} \geq 4$ и $r - \hat{r} \geq 2$ (т.е. существуют 4 непрономерованные точки локальных экстремумов следующего специального вида: либо два непрономерованных локальных минимума и два непрономерованных локальных максимума, либо 4 непрономерованных локальных минимума, либо 4 непрономерованных локальных максимума). Тогда существует функция Морса $f \in \mathcal{F}^1$, для которой существует разбивающее открытое ребро e графа W_f такое, что одна из связных компонент графа $W_f \setminus e$ является деревом T_e , в прообразе каждой вершины которого при проекции $p_f : M \rightarrow W_f$ содержится ровно одна критическая точка функции f , причем $p_f^{-1}(T_e)$ содержит ровно 3 седловые точки, в том числе две непрономерованные, а также 4 непрономерованные точки локальных экстремумов специального вида, указанного выше. Более того, можно подобрать функцию f и ребро e так, чтобы существовал диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, тождественный на $p_f^{-1}(W_f \setminus (e \cup T_e))$ и переставляющий между собой пару связных компонент графа G_f в $p_f^{-1}(T_e)$, пару локальных минимумов или локальных максимумов в $p_f^{-1}(T_e)$, а также еще одну пару локальных минимумов или локальных максимумов в $p_f^{-1}(T_e)$. Так как $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ переставляет местами некоторые связные компоненты графа G_f , то индуцированный автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f переставляет некоторые внутренние вершины графа W_f , а потому переставляет некоторые внутренние ребра графа W_f . Значит, по шагу 1 косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически неэквивалентна тору.

Шаг 3. Докажем обратное: предположим, что либо число седел $q \leq 2$, либо $q - \hat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы), либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 3$, либо $p - \hat{p} \leq 3$ и $r - \hat{r} \leq 1$ (т.е. все критические точки локальных минимумов и локальных максимумов пронумерованы кроме, быть может, ≤ 3 точек одного индекса). Покажем, что для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентна тору. Согласно шагу 1 нужно показать, что любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ переводит в себя каждый открытый цилиндр Z_ℓ , $1 \leq \ell \leq n = n([f])$, т.е. что индуцированный автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f переводит в себя каждое внутреннее ребро графа W_f . Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть число седел $q \leq 2$. Если M имеет род 0, то количество $n = n([f])$ внутренних ребер графа Рибба W_f функции f не превосходит $q - 1 = 1$, поэтому индуцированный диффеоморфизмом $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f переводит любое внутреннее ребро графа W_f в себя. Если M имеет положительный род, то $q = 2$ и M имеет

род 1, граф W_f имеет 0 или 2 внутренних ребер, причем указанные 2 ребра имеют общие концы, поэтому для любого диффеоморфизма $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ индуцированный автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f тоже переводит в себя каждое внутреннее ребро графа W_f (так как иначе h индуцирует нетождественный автоморфизм 1-мерных гомологий поверхности M , что противоречит условию $h \in \mathcal{D}^0$).

Случай 2. Пусть $q - \hat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы). Тогда любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ переводит в себя каждую вершину графа G_f , а потому индуцированный автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f переводит в себя каждую внутреннюю (т.е. имеющую степень ≥ 2) вершину графа W_f . Если этот автоморфизм переводит какое-либо внутреннее ребро e графа W_f не в себя, то этот автоморфизм циклически переставляет ребро e с несколькими другими внутренними ребрами, имеющими те же концы, что и ребро e , а значит диффеоморфизм h индуцирует нетождественный автоморфизм 1-мерных гомологий поверхности M , что противоречит условию $h \in \mathcal{D}^0$.

Случай 3. Пусть теперь $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 3$. Без ограничения общности считаем, что $p = \hat{p}$ (т.е. все критические точки локальных минимумов пронумерованы, т.е. отмечены), поэтому количество непронумерованных точек локальных экстремумов меньше четырех. Рассмотрим подграф W'_f графа W_f из доказательства леммы 3.3.9, шаг 1. Согласно шагу 1 доказательства леммы 3.3.9, подграф W'_f содержит внутреннюю вершину графа W_f , и при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f , индуцированном любым диффеоморфизмом $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, любая вершина и любое ребро подграфа W'_f переходят в себя.

Предположим, что существует внутреннее ребро e графа W_f , переходящее не в себя при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Соединим ребро e и подграф W'_f простым путем $\gamma = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k}$ в графе W_f , где $e_1^{\varepsilon_1}, \dots, e_k^{\varepsilon_k}$ — последовательные ориентированные ребра этого пути, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, и путь γ ведет из вершины

$$A = \hat{e}_1\left(\frac{1 - \varepsilon_1}{2}\right) \in W'_f$$

в вершину

$$B = \hat{e}_k\left(\frac{1 + \varepsilon_1}{2}\right) \in \bar{e}$$

(такой путь единствен с точностью до перепараметризации, так как подграф W'_f связан и содержит все циклы графа W_f). Здесь через $\hat{e}_i : [0, 1] \rightarrow W_f$ обозначена какая-либо параметризация замкнутого ребра \bar{e}_i графа W_f , согласованная с направлением роста функции $(f \circ p_f^{-1})|_{\bar{e}_i}$. Так как $A \in W'_f$ и $B \in \bar{e}$, то вершина A является внутренней и неподвижна при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Поэтому все ребра пути γ являются внутренними, и без ограничения общности мы можем и будем считать, что все ребра пути γ переходят в себя при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Так как $e \not\subset W'_f$, то ребро e разбивает граф W_f на две связанные компоненты. Обозначим через T_e компоненту связности вершины $B' := \hat{e}_k\left(\frac{1 - \varepsilon_1}{2}\right) \in \bar{e}$ в подграфе $W_f \setminus e$. Имеем $W'_f \cap T_e = \emptyset$, поэтому T_e является деревом, и имеет пустое пересечение со своим образом $p_f \circ h \circ p_f^{-1}(T_e)$ при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f . Поэтому все вершины деревьев T_e и $p_f \circ h \circ p_f^{-1}(T_e)$ не являются неподвижными при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}(T_e)$, поэтому им отвечают (непронумерованные) критические точки функции f , не являющиеся неподвижными при диффеоморфизме h . Но так как T_e содержит не менее двух концевых (т.е. имеющих степень 1 в графе W_f) вершин, то общее число (непронумерованных) точек локальных экстремумов функции f , не являющихся неподвижными при h , не меньше четырех, что противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что любое внутреннее ребро графа W_f переходит в себя при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$, что и требовалось.

Аналогично показывается, что если $p - \hat{p} \leq 3$ и $r - \hat{r} \leq 1$, то любое внутреннее ребро графа W_f переходит в себя при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$.

Итак, из шага 1 получаем, что в каждом случае 1–3 для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентна тору.

Предложение 3.3.15 доказано. \square

Доказательство следствия 3.3.5. По построению косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$, для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ многогранник $D_{[f]}$ является гранью пермutoэдра $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$ (см. (3.21)). Напомним также, что группа $\Gamma_{[f]}$ определяется как (3.48). Ввиду теоремы 3.3.3 достаточно показать, что для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ индуцированное правое действие группы $\Gamma_{[f]}$ на многограннике $D_{[f]}$ тривиально. Рассмотрим любой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}} f$. Так как по условию либо (а) $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$, либо (б) $q - \hat{q} \leq 1$, то диффеоморфизм h оставляет неподвижными либо (а) все критические точки локальных экстремумов функции f , либо (б) все седловые точки функции f , соответственно. Достаточно (и даже необходимо в силу леммы 3.3.7) показать, что h оставляет неподвижными все седловые критические точки функции f . Поэтому в случае (б) все доказано. В случае (а), согласно шагу 2 доказательства предложения 3.3.15(А) диффеоморфизм h переводит в себя каждую вершину и каждое ребро графа G_f (см. обозначение 3.1.6), и в частности каждую седловую точку. Следствие доказано. \square

3.3.6 Гомологии комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса

Здесь из теоремы 3.3.3 выводится следствие 3.3.6 о гомологиях комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ стандартными методами теории Морса (см., например, [34, §45]). Также мы доказываем некоторые свойства когомологий комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (предложение 3.3.17).

Докажем сначала техническую лемму.

Лемма 3.3.16. *Пусть $\pi : E \rightarrow B$ — конечнолистное накрытие и \mathbb{k} — абелева группа поля характеристики 0. Тогда индуцированный гомоморфизм когомологий $\pi^* : H^*(B; \mathbb{k}) \rightarrow H^*(E; \mathbb{k})$ является мономорфизмом, т.е. имеет нулевое ядро. В частности, если B компактно, то полиномы Пуанкаре базы накрытия B и покрываемого пространства E связаны соотношениями $P(E; t) = P(B; t) + R(t)$ и $\chi(E) = |\deg \pi| \chi(B)$, где $R = R(t)$ — некоторый полином переменной t с целыми неотрицательными коэффициентами. Если при этом $\chi(E) = 0$, то $P(E; t) = P(B; t) + (1 + t)R_1(t)$ для некоторого полинома $R_1 = R_1(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами.*

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что $\ker \pi^* = 0$. Достаточно показать, что гомоморфизм π^* имеет левый обратный. Определим “усредняющий” гомоморфизм цепей $a : C_k(B; \mathbb{k}) \rightarrow C_k(E; \mathbb{k})$ следующим образом. Возьмем любую k -цепь $y \in C_k(B; \mathbb{k})$ на базе B , поднимем ее в каждый лист накрытия E и сложим полученные k -цепи по всем листам. Ввиду конечности числа листов, получим k -цепь $y' \in C_k(E; \mathbb{k})$ такую, что $\pi_*(y') = Ay$, где $A := \deg \pi \in \mathbb{N}$ — число листов накрытия. Положим $a(y) := \frac{1}{A}y'$. Имеем $\pi_* a(y) = y$, т.е. построенный гомоморфизм a является правым обратным гомоморфизма $\pi_* : C_k(E; \mathbb{k}) \rightarrow C_k(B; \mathbb{k})$. Рассмотрим сопряженные гомоморфизмы коцепей $a^* : C^k(E; \mathbb{k}) \rightarrow C^k(B; \mathbb{k})$ и $\pi^* : C^k(B; \mathbb{k}) \rightarrow C^k(E; \mathbb{k})$, тогда $a^* \pi^*(\eta) = \eta$ для любой k -коцепи $\eta \in C^k(B; \mathbb{k})$, т.е. a^* является левым обратным гомоморфизма π^* . Заметим, что все наши гомоморфизмы согласованы с (ко-)граничными операторами.

Пусть когомологический класс $[\xi] \in H^k(B; \mathbb{k})$ k -коцикла $\xi \in C^k(B; \mathbb{k})$ принадлежит $\ker \pi^*$. Тогда найдется $(k - 1)$ -коцепь $\eta \in C^{k-1}(E; \mathbb{k})$ такая, что $\pi^*(\xi) = \delta\eta$. Поэтому $\xi = a^* \pi^*(\xi) = \delta(a^* \eta)$, т.е. коцикл ξ является кограницей, т.е. $[\xi] = 0$.

Так как $\ker \pi^* = 0$, то числа Бетти $\beta_j(E) \geq \beta_j(B)$. Поэтому верно требуемое соотношение $P(E; t) = P(B; t) + R(t)$, где все коэффициенты многочлена R неотрицательны.

Шаг 2. Соотношение $\chi(E) = \deg \pi \chi(B)$ доказывается с помощью клеточного разбиения базы B и его поднятия на E .

Шаг 3. Пусть $\chi(E) = 0$. Тогда в силу шага 2 имеем $\chi(B) = 0$. Поэтому $0 = \chi(E) - \chi(B) = P(E; -1) - P(B; -1)$, т.е. многочлен $P(E; t) - P(B; t) = R(t)$ делится на $1 + t$. Лемма доказана. \square

Доказательство следствия 3.3.6. Пусть количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$.

(А) Так как по теореме 3.3.3(А) имеем $\dim \widetilde{\mathbb{K}} \leq 3q - 2$, то при любом $j \geq 3q - 1$ имеем $j > \dim \widetilde{\mathbb{K}}$, и $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}}) = 0$.

(В) Пусть $\widetilde{M} = S^2$ (см. обозначение 3.1.4 (В)) и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$. Тогда полиэдр $\widetilde{\mathbb{K}}$ состоит из конечного числа блоков $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$, поскольку конечно количество классов $[f]_{\text{top}}$ топологической сопряженности функций Морса из \mathcal{F} . Но все блоки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ компактны, так как они имеют вид

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}) / \widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}},$$

где $D_{[f]_{\text{top}}}$ — соответствующая грань пермutoэдра $\frac{2}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$, а $U_{[f]_{\text{top}}}$ — выпуклая замкнутая многогранная область (3.31) в $2q$ -мерном векторном пространстве. Поэтому в рассматриваемом случае полиэдр $\widetilde{\mathbb{K}}$ конечен (и совпадает с полиэдром $\mathbb{K} = \widetilde{\mathbb{K}} / (\mathcal{D} / \mathcal{D}^0)$ ввиду тривиальности группы $\mathcal{D} / \mathcal{D}^0$). Поэтому все возникающие в данном доказательстве числа Бетти и полиномы Пуанкаре будут конечны (в отличие от ситуации в примере 3.6.2 ниже).

Изучим следующую фильтрацию конечного полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$:

$$\emptyset = \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq -1} \subset \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq 0} \subset \dots \subset \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq q-1} = \widetilde{\mathbb{K}},$$

где $\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell} := \bigcup_{q-s([f]) \leq \ell} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$.

Из длинной точной гомологической последовательности пары $(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1})$ получаем связь между полиномами Пуанкаре аналогично [34, §45]:

$$P(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}; t) - P(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}; t) + P(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}; t) = (1+t)P(\text{Im } \partial_{\ell-1}; t),$$

где $\partial_{\ell-1} : H_*(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}) \rightarrow H_{*-1}(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1})$ — граничный оператор. Складывая по всем ℓ , получаем равенство

$$\sum_{\ell=0}^{q-1} P(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}; t) = P(\widetilde{\mathbb{K}}; t) + (1+t) \sum_{\ell=0}^{q-1} P(\text{Im } \partial_{\ell-1}; t). \quad (3.65)$$

В левой части равенства (3.65) имеем сумму полиномов Пуанкаре всех ручек $\mathbb{D}_{[f]}$, домноженных на $t^{q-s(f)}$, где $q - s(f)$ есть индекс ручки:

$$\sum_{\ell=0}^{q-1} P(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} P(\mathbb{D}_{[f]}, \partial \mathbb{D}_{[f]}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t) =: Q_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j.$$

Но по теореме 3.3.3 каждая ручка $\mathbb{D}_{[f]}$ имеет своим строгим деформационным ретрактом пространство орбит $(S^1)^{d([f])} / \Gamma_{[f]}$ соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ по свободному действию конечной группы $\Gamma_{[f]}$ допустимыми автоморфизмами тора. Значит, по лемме 3.3.16 их полиномы Пуанкаре связаны соотношением

$$P(\mathbb{D}_{[f]}; t) = (1+t)^{d([f])} - R_{[f]}(t)$$

для некоторого многочлена $R_{[f]} = R_{[f]}(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Так как эйлерова характеристика тора положительной размерности равна 0, то по лемме 3.3.16 при $d([f]) > 0$ многочлен $R_{[f]}(t)$ делится на $1+t$, т.е. имеет вид $R_{[f]}(t) = (1+t)\widetilde{R}_{[f]}(t)$.

Если же $d([f]) = 0$, то $\mathbb{D}_{[f]}$ гомотопически эквивалентно точке (т.е. стягиваемо), поэтому $R_{[f]}(t) = 0 = (1+t)\tilde{R}_{[f]}(t)$ для $\tilde{R}_{[f]}(t) := 0$. Значит, равенство (3.65) принимает вид

$$P(\tilde{\mathbb{K}}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}; t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t), \quad (3.66)$$

где $R_1(t) := \sum_{\ell=0}^{q-1} P(\text{Im } \partial_{\ell-1}; t)$, $R_2(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} \tilde{R}_{[f]}(t)$, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$.

Домножим полученные равенства (3.66) на ряд $1 - t + t^2 - t^3 + \dots = (1+t)^{-1}$. Получим либо

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j (\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j (q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \dots) - R_1(t)$$

в случае $\sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j = Q_1(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathcal{M}_{[f]}; t)$, либо

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j (\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j (q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \dots) - R_1(t) - R_2(t)$$

в случае $\sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j = Q_2(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} = Q_1(t) + (1+t)R_2(t)$. Отсюда получаем требуемые неравенства Морса:

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \dots \leq q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \dots, \quad j \geq 0.$$

Сравнивая коэффициенты многочленов в (3.66), получаем слабые неравенства Морса: $\beta_j \leq q_j$ при $j \geq 0$. Подставив $t = -1$ в равенство (3.66), получаем эйлерову характеристику

$$\chi(\tilde{\mathbb{K}}) = \sum_{\substack{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim \\ d([f])=0}} (-1)^{q-s(f)}. \quad (3.67)$$

Но по теореме 3.3.3(C) для ручек $\mathbb{D}_{[f]}$ индекса $q - s(f) < q - 1$ (т.е. меньшего максимального) размерность тора $d([f]) = t([f]) - 1$ положительна, а для ручек $\mathbb{D}_{[f]}$ индекса $q - s(f) = q - 1$ (т.е. максимального индекса) размерность тора $d([f]) = t([f]) - 1$ равна 0. Поэтому ненулевой вклад в сумму (3.67) дают в точности ручки $\mathbb{D}_{[f]}$ индекса $q - s(f) = q - 1$ (т.е. ручки максимального индекса). Отсюда получаем

$$\chi(\tilde{\mathbb{K}}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim \mid s(f) = 1\}|.$$

(C) Докажем первое утверждение из п.(C). Пусть $\bar{M} = S^2$, $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$ и число $\hat{q}_0 := q'_0 + q_0^*$ седловых точек с фиксированным оснащением положительно (т.е. $\hat{q}_0 > 0$). Аналогично (B) доказываются аналоги всех утверждений из п.(B).

Докажем второе утверждение из п.(C). Аналогично (B) получаем равенство $\chi(\mathcal{M}) = (-1)^{q-1} \varepsilon_g(q)$, где g — род поверхности M (т.е. $\chi(\bar{M}) = 2 - 2g$) и

$$\varepsilon_g(q) := |\{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}} \mid s(f) = 1\}|.$$

Заметим, что число $\varepsilon_g(q)$ равно количеству клеточных разбиений замкнутой ориентированной поверхности \bar{M} рода g , имеющих q ребер, 1 двумерную клетку и одно меченое ориентированное ребро. Но по формуле Харера-Загье [78] эти числа $\varepsilon_g(q)$ являются коэффициентами ряда Тейлора функции $\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^t$ в нуле:

$$1 + 2 \sum_q \frac{\varepsilon_g(q)}{(2q-1)!!} s^{q+1} t^{q+1-2g} = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^t.$$

Следствие полностью доказано. \square

Предложение 3.3.17. *Предположим, что количество пронумерованных критических точек $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$. Тогда существует спектральная последовательность биградуированных коцепных комплексов $(E_n = \bigoplus_{\ell, m \in \mathbb{Z}_+} E_n^{\ell, m}, d_n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что*

(a) $E_{n+1}^{\ell, m} = H^{\ell, m}(E_n, d_n)$, $\text{bideg } d_n = (n, 1 - n)$, $E_n^{\ell, m} \implies H^{\ell+m}(\widetilde{\mathbb{K}})$;

(b) $E_1^{\ell, m} = H^{\ell+m}(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}) \cong \bigoplus_{\substack{[g]_{\text{top}} \\ q-s(f)=\ell}} H^{\ell+m}(\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}, \partial \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}) \cong \bigoplus_{\substack{[g]_{\text{top}} \\ q-s(g)=\ell}} H^m(\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}})$;

(c) оператор $d_1 : E_1^{\ell, m} \rightarrow E_1^{\ell+1, m}$ переводит подгруппу $H^m(\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}})$ в $\bigoplus_{\substack{[f]_{\text{top}} > [g]_{\text{top}} \\ q-s(f)=\ell+1}} H^m(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}})$ и

индуцирован отображениями инцидентности $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} : \partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ (см. §3.3.2 и (3.58)); $E_2^{\ell, m} = H^{\ell, m}(E_1, d_1)$;

(d) если либо $p - \widehat{p} \leq 1$ и $r - \widehat{r} \leq 1$ (т.е. все критические точки локальных экстремумов пронумерованы), либо $q - \widehat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы), то кольцо $E_2 = E_\infty$ мультипликативно порождено своими подгруппами $E_2^{0,1}$ и $E_2^{*,0}$, причем $E_2^{\ell, m} \cong H^\ell(\widetilde{K}; \{H^m(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}})\})$ – когомологии комплекса \widetilde{K} функций Морса (см. следствие 3.3.5) с коэффициентами в локальной системе групп $\{H^m(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}) \cong H^m((S^1)^{d([f])})\}$, сопоставляемых клеткам $D_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса \widetilde{K} , причем группы, сопоставляемые любой паре инцидентных клеток, связаны гомоморфизмом d_1 из (c); если также $d_2(E_2^{0,1}) = 0$, то спектральная последовательность сходится в члене $E_2 = E_\infty$, и группа когомологий $H^j(\widetilde{\mathbb{K}})$ с точностью до присоединенности изоморфна $\bigoplus_{\ell=0}^j E_2^{\ell, j-\ell}$ при любом $j \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность \mathbb{k} -модулей $0 \rightarrow R_{\ell+1} \rightarrow R_\ell \rightarrow R_\ell/R_{\ell+1}$, где $R_\ell := C^*(\widetilde{\mathbb{K}}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1}; \mathbb{k})$. Рассмотрим ее длинную точную когомологическую последовательность:

$$\dots \rightarrow D_1^{\ell+1, m-1} \xrightarrow{i} D_1^{\ell, m} \xrightarrow{j} E_1^{\ell, m} \xrightarrow{k} D_1^{\ell+1, m} \rightarrow \dots,$$

где $D_1^{\ell, m} := H^{\ell+m}(\widetilde{\mathbb{K}}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1})$, $E_1^{\ell, m} := H^{\ell+m}(\widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell}, \widetilde{\mathbb{K}}_{\leq \ell-1})$. Имеем $\text{bideg } i = (-1, 1)$, $\text{bideg } j = (0, 0)$, $\text{bideg } k = (1, 0)$. Положим $d_1 := jk : E_1 \rightarrow E_1$, $\text{bideg } d_1 = (1, 0)$. Для полученной точной δ -пары

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

рассмотрим производную точную δ -пару и т.д. Получим последовательность (E_n, d_n) с нужными свойствами (a)–(c).

Докажем свойство (d). По следствию 3.3.5 комплекс \widetilde{K} функций Морса определен корректно. По предложению 3.3.15(B) любая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ имеет своим строгим деформационным ретрактом соответствующий тор $(S^1)^{d([f])}$. Отсюда следуют все утверждения из свойства (d). \square

3.4 Пространство модулей $\widetilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса, гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$ при $\chi(M) < 0$

В этом параграфе излагаются результаты работы автора [135].

Как и в предыдущем параграфе §3.3, все построения и результаты настоящего параграфа относятся к случаю (3.19). Однако теперь будут использованы и понятие малых деформаций функции Морса, и понятие оснащенных функций Морса.

Аннотация: Пусть M — гладкая компактная ориентируемая поверхность, и пусть \mathcal{F} — пространство функций Морса на M , у которых не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы). Снабдим C^∞ -топологией пространство \mathcal{F} . Доказана гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \simeq R \times \widetilde{\mathcal{M}}$, где R — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^1$ и точка в зависимости от знака $\chi(M)$, а $\widetilde{\mathcal{M}}$ — универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса, являющееся гладким стратифицированным многообразием. Получены неравенства Морса для чисел Бетти пространства \mathcal{F} .

В настоящем параграфе продолжается изучение топологии обобщенного пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса на компактной гладкой ориентируемой двумерной поверхности M . Предполагается, что у каждой функции $f \in \mathcal{F}$ по меньшей мере $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы).

В §3.2 (т.е. в работе [143]) мы ввели понятие оснащенной функции Морса (определение 3.2.2) и доказали гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \simeq \mathbb{F}$ пространства \mathcal{F} функций Морса и пространства $\mathbb{F} = \mathbb{F}(M)$ оснащенных функций Морса (см. теоремы 3.2.1 и 3.2.5 или [143, 132]). В §3.3 (т.е. в работе [134]) мы описали построение комплекса \mathbb{K} оснащенных функций Морса и содержащего его гладкого стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. теоремы 3.3.3, 3.3.13 и 3.3.14, а также утверждение 3.4.4).

В настоящем параграфе мы доказываем (теорема 3.4.1), что пространство \mathcal{F} функций Морса гомотопически эквивалентно полиэдру $R \times \widetilde{\mathcal{M}}$, где $R = R(M)$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка (см. (3.2)). Из этого результата будет выведено в следующем параграфе (лемма 3.5.8), что комплекс \mathbb{K} оснащенных функций Морса является строгим деформационным ретрактом многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$. Таким образом, мы сведем задачу о топологии пространства \mathcal{F} функций Морса к комбинаторной задаче — изучению топологии многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ (или полиэдра \mathbb{K}).

Гомологии многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ могут быть изучены с помощью его естественной стратификации, а также индуцированной стратификации специальной окрестности $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ любого страта $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$ (см. утверждение 3.4.4). Этим методом мы получаем в случае $M = S^2$ неравенства Морса для чисел Бетти многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ и находим его эйлерову характеристику (следствие 3.4.2, аналогичное следствию 3.3.6).

Данный раздел имеет следующую структуру. В §3.4.1 формулируются основные результаты настоящего раздела (теорема 3.4.1 и следствие 3.4.2). В §3.4.2 описывается конструкция из §§3.3.2–3.3.4 (т.е. из [134]) гладкого стратифицированного $3q$ -мерного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$, где q — количество седловых критических точек функций Морса из \mathcal{F} (см. определение 3.1.3 и утверждение 3.4.4). В §3.4.3 доказывается, что многообразии $\widetilde{\mathcal{M}}$ гомеоморфно универсальному пространству модулей $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса (утверждение 3.4.7). В §3.4.4 устанавливается гомеоморфизм $\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$ (утверждение 3.4.10).

3.4.1 Формулировка основных результатов

Рассмотрим обобщенное пространство

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 3.1.3). Пусть

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+;p^++d^-,q^*,r^++d^+}$$

— $3q$ -мерное многообразие, содержащее комплекс $\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$ оснащенных функций Морса (см. §3.4.2 или [134, §4]). Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \mathcal{M}_{\geq [f]_{\text{top}}} - (s([f]) + 2q)$ -мерный страт и его специальная окрестность в $\widetilde{\mathcal{M}}$, отвечающие классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ (см. теорему 3.3.14, т.е. [134, §4], или утверждение 3.4.4). Из §3.3.3 (т.е. из результатов [134]) нетрудно выводится, что страт $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$ имеет своим строгим деформационным ретрактом пространство орбит $(S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}$ соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ по свободному действию конечной группы $\Gamma_{[f]}$ допустимыми автоморфизмами тора, см. определение 3.3.1 (А, В, С).

Теорема 3.4.1 ([135, теорема 2.5]). *Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, см. определение 3.1.3 (т.е. у функций $f \in \mathcal{F}$ некоторые из критических точек могут быть отмечены, а некоторые закреплены). Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса (см. определение 3.2.2). Предположим, что выполнено неравенство (3.19), т.е. количество отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$. Тогда:

(А) Имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F} \sim \mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathcal{M}}),$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка, см. (3.2).

(В) Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$[f]_{\text{top}} \sim \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \sim \mathcal{D}^0 \times ((S^1)^d/\Gamma_{[f]}) \quad (\sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^d/\Gamma_{[f]})),$$

где $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ — забывающее отображение, $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ и $(S^1)^d = (S^1)^{d([f])}$ — соответствующие $(s([f]) + 2q)$ -мерное подмногообразие и тор.

Пусть \mathbb{k} — поле (например, \mathbb{R} , \mathbb{Q} или \mathbb{Z}_p). Для топологического пространства X рассмотрим его числа Бетти $\beta_j(X) := \dim_{\mathbb{k}} H_j(X; \mathbb{k})$ и полином Пуанкаре $P(X; t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \beta_j(X)$. Рассмотрим фильтрацию

$$\emptyset = \widetilde{\mathcal{M}}_{\leq -1} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\leq 0} \subset \dots \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\leq q-1} = \widetilde{\mathcal{M}}$$

стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$, где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\leq \ell} := \bigcup_{q-s([f]) \leq \ell} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}} = \bigcup_{q-s([f]) \leq \ell} \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}.$$

Рассмотрим также индуцированную фильтрацию специальной окрестности $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ каждого страта $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. утверждение 3.4.4).

Аналогично следствию 3.3.6 доказывается его аналог для стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$. Отсюда и из теоремы 3.4.1 сразу получаем следующее следствие о гомологиях пространства \mathcal{F} функций Морса.

Следствие 3.4.2 ([135, следствие 2.6], ср. следствие 3.3.6). (А) Если количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$, то $\beta_j(\mathcal{F}) = 0$ при любом $j \geq 3q + 2$.

(В) Пусть $\widetilde{M} = S^2$ (см. обозначение 3.1.4(В)), $p^* + q^* + r^* \leq \chi(\widetilde{M}) + 1 \leq \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$; стратифицированное $3q$ -мерное многообразие $\mathcal{M} := \widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из конечного

числа стратов $\mathcal{M}_{[f]} := \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$; имеется гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim R \times \mathcal{M}$, где R – одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , S^1 и точка в зависимости от значения $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) = 2, 1, 0, -1$; полином Пуанкаре многообразия \mathcal{M} допускает верхнюю оценку

$$P(\mathcal{M}; t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathcal{M}_{[f]}; t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t)$$

для некоторых многочленов $R_1 = R_1(t)$ и $R_2 = R_2(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$; другими словами, числа Бетти $\beta_j = \beta_j(\mathcal{M})$ многообразия \mathcal{M} удовлетворяют неравенствам Морса-Смейла:

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \dots \leq q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \dots, \quad j \geq 0,$$

где через $\sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j$ обозначен любой из двух многочленов

$$Q_1(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} P(\mathcal{M}_{[f]}; t), \quad Q_2(t) := \sum_{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])},$$

так что $Q_2(t) = Q_1(t) + (1+t)R_2(t)$. В частности, справедливы неравенства Морса:

$$\chi(\mathcal{M}) = (-1)^{q-1} |\{[f] \in \mathcal{F}^1 / \sim \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

(C) Пусть $0 \leq q_0^* \leq q^*$, $0 \leq \widehat{q}_0 \leq \widehat{q}$, и пусть пространство

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*;\widehat{q}_0;q_0^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

состоит из функций Морса $f \in \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}$, для каждой из которых фиксированы оснащения у q_0^* фиксированных седловых точек и у $q'_0 := \widehat{q}_0 - q_0^*$ отмеченных нефиксированных седловых точек (ср. с пространством $\mathcal{F}_0^{\text{num}, \text{fr}'}(M, p, q)$ из теоремы 2.6.11(б)).

Если $\widehat{q}_0 > 0$ (т.е. число \widehat{q}_0 седловых точек с фиксированным оснащением положительно), то существует гладкое стратифицированное $3q$ -мерное многообразие

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+; \widehat{q}_0; q_0^*}$$

с плоской аффинной связностью, содержащее комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+; \widehat{q}_0; q_0^*}$ оснащенных функций Морса из следствия 3.3.6 (C), для которого верны аналоги теорем 3.3.14 и 3.4.1, причем действие дискретной группы $\mathcal{D}/\mathcal{D}^0$ на многообразии $\widetilde{\mathcal{M}}$ свободно.

Если $\widehat{q}_0 > 0$, $\bar{M} = S^2$ (см. обозначение 3.1.4 (B)) и $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то верны аналоги всех утверждений из п.(B) данного следствия.

Если количество локальных минимумов равно $p + |\pi_0(\partial^- M)| = 1$, число \widehat{q} отмеченных седловых точек равно числу седловых точек с фиксированным оснащением и равно $\widehat{q}_0 = 1$, и нет отмеченных точек локальных максимумов (т.е. $\widehat{r} = |\pi_0(\partial^+ M)| = 0$), то $\chi(\mathcal{M}) = (-1)^{q-1} \varepsilon_g(q)$, где g – род поверхности M (т.е. $\chi(\bar{M}) = 2 - 2g$) и число

$$\varepsilon_g(q) := |\{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}} \mid s(f) = 1\}|$$

определяется производящей функцией Харера-Загье [78]:

$$1 + 2 \sum_q \frac{\varepsilon_g(q)}{(2q-1)!!} s^{q+1} t^{q+1-2g} = \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^t.$$

3.4.2 Комбинаторное построение многообразия \widetilde{M} согласно §§3.3.2—3.3.4

Шаг 1. Пусть $J = (J_1, \dots, J_s)$ – упорядоченное разбиение множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств J_1, \dots, J_s (т.е. $\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$), где $1 \leq s \leq q$. Определим числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановку $\pi \in \Sigma_q$ условиями (2.21). Если разбиение \widehat{J} получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\widehat{J} \prec J$.

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} =: \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. замечание 3.1.7 (C)) и евклидово векторное пространство 0-коцепей (3.21), т.е. пространство

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q \quad (3.68)$$

со стандартной евклидовой метрикой. Рассмотрим в пространстве H_f^0 внутренность куба: $(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \approx (-1; 1)^q \subset \mathbb{R}^q$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \subset H_f^0,$$

т.е. функцию $\mathbf{c}: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую любой седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$ функции f в этой точке, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\mathbf{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седловых точек $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (2.21) и $c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1+1}} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}$. (То есть, J – это отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых критических точек функции f значениями функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.)

В каждом классе изотопности $[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ отметим ровно одну функцию Морса f этого класса. Сопоставим классу топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ и любому разбиению J соответствующие страт и звездообразную область в кубе $(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}}$:

$$S_{f,J} := \{\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \mid J(\mathbf{c}') = J\}, \quad S_{f,\preceq J} := \{\mathbf{c}' \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \mid J(\mathbf{c}') \preceq J\},$$

$$S_{[f]_{\text{top}}} = S_f := S_{f,J(\mathbf{c}(f))}, \quad S_{\succeq [f]_{\text{top}}} := S_{f,\preceq J(\mathbf{c}(f))}.$$

Рассмотрим также двойственные друг другу векторные пространства (3.29) относительных 1-гомологий и относительных 1-когомологий над полем \mathbb{R} :

$$H_{f,1} := H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q},$$

$$H_f^1 := H^1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}. \quad (3.69)$$

Рассмотрим ориентированный граф $G_f \subset M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, см. обозначение 3.1.6. Он имеет $2q$ ребер, которые обозначим e_1, \dots, e_{2q} . Обозначим относительный гомологический класс ориентированного ребра e_i через $[e_i] \in H_{f,1}$, $1 \leq i \leq 2q$. Определим в векторном пространстве $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$ выпуклое подмножество (3.32), т.е.

$$U_{[f]_{\text{top}}}^\infty = U_f^\infty := \{u \in H_f^1 \mid u([e_i]) > 0, 1 \leq i \leq 2q\}.$$

Через $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ обозначим группу изотропии элемента $g \in \mathcal{F}^1$ относительно естественного правого действия группы \mathcal{D}^0 на \mathcal{F}^1 , а через $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ обозначим ее подгруппу, состоящую из всех диффеоморфизмов поверхности M , сохраняющих функцию f и гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M , сохраняющих функцию f . Рассмотрим покомпонентное правое действие дискретной группы (3.53), т.е. группы

$$\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} = \widetilde{\Gamma}_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0, \quad (3.70)$$

на прямом произведении $S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}$ индуцированными автоморфизмами пространств (3.68), (3.69). Согласно §3.3.2 (т.е. [134, §3.3]), это действие свободно и дискретно, а пространства орбит

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} := (S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_f^{\infty})/\widetilde{\Gamma}_f, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} := (S_{[f]_{\text{top}}} \times U_f^{\infty})/\widetilde{\Gamma}_f \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \quad (3.71)$$

являются $3q$ -мерным открытым многообразием и его $(s(f) + 2q)$ -мерным подмногообразием соответственно.

Шаг 3. Изучим взаимосвязь $3q$ -мерных многообразий $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$ для примыкающих классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$ (см. определение 3.3.2 (D)). Пусть $f \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция своего класса топологической эквивалентности, и пусть функция $\tilde{f} \in \mathcal{F}^1$ получена малым возмущением функции $f \in \mathcal{F}^1$, причем $\mathcal{C}_{\tilde{f}} = \mathcal{C}_f$. Обозначим через g отмеченную функцию класса топологической эквивалентности $[\tilde{f}]_{\text{top}}$, $J' := J(\mathbf{c}(\tilde{f}))$, и через $h_{[f]_{\text{top}}, J'} = h_{f, J'} := h_{\tilde{f}, g} \in \mathcal{D}^0$ диффеоморфизм, переводящий линии уровня функции g в линии уровня функции \tilde{f} с сохранением направления роста (он существует ввиду топологической эквивалентности функций \tilde{f}, g). Согласно следствию 2.5.8 (т.е. [145, утверждение 1.1 и §3]), выполнено $J' \preceq J := J(\mathbf{c}(f))$ и существует сюръекция $\delta[f]_{\text{top}}$ множества всех упорядоченных разбиений $J' \preceq J$ на множество всех классов топологической эквивалентности $[g]_{\text{top}} \succeq [f]_{\text{top}}$ (см. определение 3.3.2 (D)), такая что

$$\delta[f]_{\text{top}}: J' = J(\mathbf{c}(\tilde{f})) = J((h_{f, J'}^{-1})^*(\mathbf{c}(g))) \mapsto \delta_{J'}[f]_{\text{top}} := [\tilde{f}]_{\text{top}} \quad (3.72)$$

(см. (3.22)). Хотя сопоставление $([f]_{\text{top}}, J') \mapsto h_{f, J'}$ не является однозначным (т.е. диффеоморфизм $h_{f, J'}$ зависит, вообще говоря, от возмущенной функции \tilde{f} , такой что $\mathcal{C}_{\tilde{f}} = \mathcal{C}_f$ и $J(\mathbf{c}(\tilde{f})) = J'$), но в силу нашего критерия топологической эквивалентности функций Морса (см. лемму 2.3.2 или [132, лемма 1]) смежный класс $h_{f, J'} \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)$ в группе $\text{Diff}^+(M, \mathcal{C}_g)$ (т.е. $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ -орбита компоненты связности диффеоморфизма $h_{f, J'}$ в группе $\text{Diff}^+(M, \mathcal{C}_g)$) определен корректно, где через $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g) \subset \mathcal{D}^0$ обозначена группа диффеоморфизмов пары (M, \mathcal{C}_g) , гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары.

Рассмотрим индуцированные изоморфизмы векторных пространств:

$$h_{f, J'}^*: H_f^0 \rightarrow H_g^0, \quad h_{f, J'}^*: H_f^1 \rightarrow H_g^1, \quad (3.73)$$

см. (3.68), (3.69). Рассмотрим в $(-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}}$ открытые $\widetilde{\Gamma}_f$ -инвариантные подмножества

$$\partial_g S_{\succeq[f]_{\text{top}}} = \partial_{[g]_{\text{top}}} S_{\succeq[f]_{\text{top}}} := \bigcup_{J' \in (\delta[f]_{\text{top}})^{-1}([g]_{\text{top}})} S_{f, \preceq J'} \subset S_{\succeq[f]_{\text{top}}}.$$

Согласно §3.3.2 (т.е. [134, §3]), прямое произведение изоморфизмов в (3.73) индуцирует корректно определенное вложение $3q$ -мерных открытых многообразий:

$$\begin{aligned} \chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} &= \chi_{f, g}: \partial_{[g]_{\text{top}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} := ((\partial_g S_{\succeq[f]_{\text{top}}}) \times U_f^{\infty})/\widetilde{\Gamma}_f \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}, \\ \widetilde{\Gamma}_f(\mathbf{c}, u) &\mapsto \widetilde{\Gamma}_g(h_{f, J'}^*(\mathbf{c}), h_{f, J'}^*(u)), \quad (\mathbf{c}, u) \in S_{f, \preceq J'} \times U_f^{\infty}, \end{aligned}$$

где $\delta_{J'}[f]_{\text{top}} = [g]_{\text{top}}$ (см. (3.71), (3.72)).

Шаг 4. Предположим, что отмеченные функции f всех классов топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ имеют одно и то же множество критических точек $\mathcal{C}_{f, \lambda} = \mathcal{C}_{f^*, \lambda}$ с учетом меток, $\lambda = 0, 1, 2$ (см. определение 3.1.3 (D) и шаг 2). Рассмотрим топологическое пространство

$$(\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} \times (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f^*, 1}} \times H_{f^*}^1 \approx (\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} \times (-1; 1)^q \times \mathbb{R}^{2q},$$

где $(\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}})^{\text{discr}} := \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ с дискретной топологией, и его подпространства

$$\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} := \bigcup_{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}} \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\succeq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}, \quad \widetilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{[f]_{\text{top}} \in \mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}} \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty} \subset \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}.$$

Определение 3.4.3 (многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$). Пусть $\widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq} / \sim) / \sim_{\text{glue}}$ – пространство с фактортопологией, где отношения эквивалентности \sim, \sim_{glue} на множествах $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}, \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} := \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq} / \sim$ порождены следующими отношениями:

(отношение \sim на $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}$) для каждого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ рассмотрим проекцию $\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty} \rightarrow \{[f]_{\text{top}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} =: \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}$ (см. (3.71)); точки множества $\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}$ назовем \sim -эквивалентными, если их образы при этой проекции совпадают; обозначим $\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} := \{[f]_{\text{top}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \subset \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$;

(отношение \sim_{glue} на $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$; отображения инцидентности) для каждой пары примыкающих классов $[f]_{\text{top}} \prec [g]_{\text{top}}$ (определение 3.3.2 (D)) рассмотрим вложение соответствующих $3q$ -мерных открытых многообразий, называемое *отображением инцидентности* этой пары: $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} : \partial_{[g]_{\text{top}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[g]_{\text{top}}}^{\text{st}}$; рассмотрим индуцированное вложение $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} := \{[f]_{\text{top}}\} \times (\partial_{[g]_{\text{top}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}}^{\text{st}}) \hookrightarrow \mathbf{v}_{\geq[g]_{\text{top}}}$ (которое тоже обозначим $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}}$); назовем любую точку множества $\partial_{[g]_{\text{top}}} \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ и ее образ в $\mathbf{v}_{\geq[g]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ при данном вложении \sim_{glue} -эквивалентными.

Пусть $p_X : \widetilde{\mathbb{X}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, p_Y : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ – канонические проекции. Положим $\widetilde{\mathbb{Y}} := \widetilde{\mathbb{X}} / \sim \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}} := p_Y(\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}})$, назовем $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} := p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}})$ *стратом* в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Так как $\widetilde{\mathbb{X}}_{\geq}$ – гладкое открытое $3q$ -мерное многообразие с естественной плоской аффинной связностью, и группы $\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ действуют на нем с сохранением связности, то $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ тоже является гладким открытым $3q$ -мерным многообразием с плоской аффинной связностью, причем пересечение любой его связной компоненты $\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}$ с подмножеством $\widetilde{\mathbb{Y}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}$ является плоским $(s([f]) + 2q)$ -мерным подмногообразием.

Пусть $\mathcal{D}^{\pm} = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ – группа диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество $\partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_{\lambda}$ в себя, $\lambda = 0, 1, 2$ (ср. обозначение 3.1.4).

Утверждение 3.4.4 ([135, утверждение 3.3] или [134, теорема 4.3], см. теорему 3.3.14). *В случае (3.19) пространство $\widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} / \sim_{\text{glue}}$ обладает структурой гладкого $3q$ -мерного многообразия, а также плоской аффинной связностью, гладкой относительно этой структуры. Для каждого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ отображение*

$$p_Y|_{\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}} : \mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

является гладким регулярным вложением гладких $3q$ -мерных многообразий, сохраняющим аффинную связность, а потому подмножество

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}} = p_Y(\mathbf{v}_{\geq[f]_{\text{top}}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$$

открыто в $\widetilde{\mathcal{M}}$. Отображение $p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq}} : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\geq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ биективно. В частности, страты $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ попарно не пересекаются, являются плоскими $(s([f]) + 2q)$ -мерными подмногообразиями и покрывают все $\widetilde{\mathcal{M}}$. Дискретная группа $\mathcal{D}^{\pm} / \mathcal{D}^0$ и группа $\text{Diff}^+[-1; 1]$ действуют на $\widetilde{\mathcal{M}}$ справа и слева (соответственно) диффеоморфизмами, сохраняющими аффинную связность, стратификацию и систему открытых подмножеств $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ (называемых специальными окрестностями стратов), причем индуцированные действия на множестве стратов согласованы с естественными действиями на множестве $\mathcal{F}^1 / \sim_{\text{top}}$ классов топологической эквивалентности. \square

3.4.3 Гомеоморфизм между универсальным пространством модулей $\mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса и многообразием $\widetilde{\mathcal{M}}$

В определении 3.2.2 мы ввели понятие оснащенной функции Морса и определили пространства $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ оснащенных функций Морса. Приведем доказательство следующей технической леммы, которое было опущено в [135].

Лемма 3.4.5 ([135, лемма 4.2]). Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ существует гладкое $3q$ -параметрическое семейство оснащенных функций Морса $(f_{c'}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$ с параметрами $(c', u) \in S_{f, \leq J(c(f))} \times U_f^\infty$, такое что $f_{c(f)} = f$, $\mathcal{C}_{f_{c'}} = \mathcal{C}_f$, $\mathbf{c}(f_{c'}) = c'$, $[\alpha_{f,u}] = u \in H_f^1$.

Определение 3.4.6. Сепаратрисой оснащенной функции Морса (f, α) назовем образ такой интегральной траектории $\gamma: (0, 1) \rightarrow M \setminus \mathcal{C}_f$ поля ядер 1-формы α , что оба предела $\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t)$ и $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t)$ существуют, принадлежат $\mathcal{C}_f \cup \partial M$, и хотя бы один из этих пределов является седловой точкой. Объединение замыканий всех сепаратрис будем называть *сепаратрисной диаграммой* оснащенной функции Морса (f, α) .

Кусочно-гладкий путь $\gamma = \gamma(t)$ на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ назовем (f, α) -*монотонным*, если каждая из кусочно-непрерывных функций $i_\gamma df$ и $i_\gamma \alpha$ не меняет знак, т.е. всюду неположительна или всюду неотрицательна, на γ .

Доказательство леммы 3.4.5. Рассмотрим любую функцию Морса $f \in \mathcal{F}^1$. Обозначим

$$J := J(\bar{c}(f)) = (J_1, \dots, J_s), \quad \tau := \tau_J^{q-s}, \quad J_k = \{j_{r_{k-1}+1}, \dots, j_{r_k}\}, \quad 1 \leq k \leq s,$$

см. (2.21), т.е. τ — это $(q-s)$ -мерная грань пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ порядка q , отвечающая упорядоченному разбиению J множества $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых точек функции f . Напомним, что

$$1 \leq r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q.$$

Определим также

$$r_0 := 0, \quad j_0 := 0, \quad c_0 := -1, \quad r_{s+1} := q+1, \quad j_{q+1} := q+1, \quad c_{q+1} := 1.$$

Проведем построение части искомого параметрического семейства оснащенных функций $(f_{c'}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$, отвечающей подмножеству значений параметров $(c', u) \in \bar{\tau}_{J(\bar{c}(f))}^{q-s} \times U_f \subset S_{f, \leq J(c(f))} \times U_f^\infty$. Искомое семейство целиком строится аналогично. Проведем построение указанной части семейства в несколько шагов.

Шаг 0. Здесь строится трехпараметрическое семейство функций $I_{a,b,v}$ [143, формула (20)], аналогичное двумпараметрическому семейству функций $I_{a,b}$ из (3.5). Положим

$$\begin{aligned} I_{0,1,v}(t) &:= \frac{v+1}{2} \int_0^t \left(I_{0, \frac{v-1}{v+1}}(u) - I_{\frac{2}{v+1}, 1}(u) \right) du, \quad v, t \in \mathbb{R}, \quad 1 < v \leq 3, \\ I_{0,1,v}(t) &:= I_{0,1,3}(t), \quad 3 < v \leq \infty, \\ I_{a,b,v}(t) &:= I_{0,1,v} \left(\frac{t-a}{b-a} \right), \quad a, b, v, t \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad 1 < v \leq \infty. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Так как при $1 < v \leq 3$ имеем $\frac{v-1}{v+1} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{v+1} < 1$, то подынтегральная функция из выражения для $I_{0,1,v}$ всюду неотрицательна и не превосходит 1, а потому всюду $0 \leq I'_{0,1,v}(t) \leq \frac{v+1}{2} < v$. Значит,

$$0 \leq I'_{a,b,v}(t) < \frac{v}{b-a}, \quad a < b, \quad 1 < v \leq \infty. \quad (3.75)$$

К тому же, для любого $v \in (1; 3]$ имеем $I_{0,1,v}(t) \equiv 0$ при $t \leq \frac{v-1}{3(v+1)}$ и $I_{0,1,v}(t) \equiv 1$ при $t \geq 1 - \frac{v-1}{3(v+1)}$, а значит, $I_{a,b,v}(t) \equiv 0$ при $t \leq a + \frac{v-1}{3(v+1)}(b-a)$ и $I_{a,b,v}(t) \equiv 1$ при $t \geq b - \frac{v-1}{3(v+1)}(b-a)$.

Шаг 1. Построим функцию Морса $\bar{f} \in \mathcal{F}^1 \cap [f]_{\text{top}}$, для которой $\bar{c}(\bar{f})$ лежит в центре грани $\frac{2}{q+1}\tau$ (т.е. седловые критические значения функции \bar{f} суть \tilde{c}_k , $1 \leq k \leq s$, определяемые ниже). Определим

$$\hat{c}_k := -1 + \frac{2r_k + 1}{q+1}, \quad 0 \leq k \leq s, \quad \tilde{c}_k := \frac{\hat{c}_{k-1} + \hat{c}_k}{2}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Положим

$$t_0 := 0, \quad t_k := \tilde{c}_k - c_{j_{r_k}}(f), \quad 1 \leq k \leq s, \quad t_{s+1} := 0.$$

Определим функцию $h = h_{\bar{c}(f)}: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$ формулой

$$h(t) = h_{\bar{c}(f)}(t) := t + \sum_{k=0}^s (t_{k+1} - t_k) I_{c_{j_{r_k}}(f), c_{j_{r_{k+1}}}(f), v}(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3.76)$$

где $v := \min_{k: t_k > t_{k+1}} \left\{ \frac{c_{j_{r_{k+1}}}(f) - c_{j_{r_k}}(f)}{t_k - t_{k+1}} \right\}$, а функция $I_{a,b,v}$ определена как в (3.74). Тогда $h(c_{j_{r_k}}(f)) = c_{j_{r_k}}(f) + t_k = \tilde{c}_k$ и $h' \equiv 1$ в некоторой окрестности точки $t = c_{j_{r_k}}(f)$, $1 \leq k \leq s$. Кроме того, из свойства (3.75) функции $I_{a,b,v}$ следует, что $0 \leq I'_{c_{j_{r_k}}(f), c_{j_{r_{k+1}}}(f), v} < \frac{v}{c_{j_{r_{k+1}}}(f) - c_{j_{r_k}}(f)}$. Значит, в случае $t_k > t_{k+1}$ имеем

$$(t_{k+1} - t_k) I'_{c_{j_{r_k}}(f), c_{j_{r_{k+1}}}(f), v} > -(t_k - t_{k+1}) \frac{v}{c_{j_{r_{k+1}}}(f) - c_{j_{r_k}}(f)} \geq -1.$$

Отсюда следует, что $h' > 0$ всюду на $[-1; 1]$, т.е. h является диффеоморфизмом отрезка $[-1; 1]$. Положим

$$\bar{f} := h_{\bar{c}(f)} \circ f. \quad (3.77)$$

Очевидно, $\bar{f} \in \mathcal{F}^1$, $\bar{f} \sim_{\text{top}} f$ и $\bar{c}(\bar{f})$ является центром грани $\frac{2}{q+1}\tau$ многогранника $\frac{2}{q+1}\mathcal{P}^{q-1}$. Очевидно, $\bar{f} = \bar{f}$ и седловые критические значения функции \bar{f} суть \tilde{c}_k , $1 \leq k \leq s$.

Шаг 2. На этом шаге, для каждого относительного коцикла $u \in U_f$ мы построим такое оснащение $\alpha_{f,u}$ функций Морса f и \bar{f} , что $[\alpha_{f,u}] = u$, $(\bar{f}, \alpha_{f,u}), (f, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$.

Рассмотрим оснащение α функции Морса \bar{f} , определяемое условием $(\bar{f}, \alpha) = p_2 \circ i_1(\bar{f}) \in \mathbb{F}^1$, где i_1, p_2 — отображения, построенные в [143, §7 и §9.1]. Положим

$$\varepsilon := \frac{1}{6(q+1)}.$$

Пусть, для каждой точки $w_i \in \mathcal{C}_{f,0}$ минимума (соответственно точки $w_i \in \mathcal{C}_{f,2}$ максимума) D_i — компонента связности точки w_i в множестве $\bar{f}^{-1}[-1; -1 + \frac{5}{6(q+1)}] = \bar{f}^{-1}[-1; \hat{c}_0 - \varepsilon]$ (соответственно $\bar{f}^{-1}(1 - \frac{5}{6(q+1)}; 1] = \bar{f}^{-1}(\hat{c}_s + \varepsilon; 1]$). Поверхность $(M \setminus \cup D_i) \setminus G_f$ является несвязным объединением открытых цилиндров Z_1, \dots, Z_ϑ и полуоткрытых цилиндров $\check{Z}_1, \dots, \check{Z}_N$, где $N := d^+ + d^- + p + r$ — количество полуоткрытых цилиндров, согласно обозначениям в §3.2.3.

Напомним, что число седловых точек $q \geq 1$. Будем строить 1-форму $\alpha_{f,u}$ на каждой поверхности

$$M_k := \bar{f}^{-1}[-1; \hat{c}_k - \varepsilon], \quad 1 \leq k \leq s, \quad M_{s+1} := M,$$

индукцией по k .

- Построим $\alpha_{f,u}$ на M_k при $k = 1$. На $\bar{D}_i \subset M_1$ определим 1-форму $\alpha_{f,u}$ равной произведению 1-формы $\frac{1}{2\pi}\alpha$ на положительное число $u(\partial D_i)$, равное значению коцикла u на ориентированной окружности ∂D_i . Тогда $\int_{\partial D_i} \alpha_{f,u} = u(\partial D_i) \geq 1$. Для каждой точки минимума w_i рассмотрим замкнутый цилиндр Z , являющийся компонентой связности окружности ∂D_i в поверхности $\bar{f}^{-1}[\hat{c}_0 - \varepsilon; \hat{c}_0 + \varepsilon]$. Из определения оснащения функций f, \bar{f} следует, что существует гладкая регулярная кривая, выходящая из точки минимума w_i и касающаяся касательной прямой ξ_i в этой точке, а при $t > 0$ лежащая в $\bar{D}_i \setminus \{w_i\}$ и являющаяся линией поля ядер 1-формы $\alpha|_{\bar{D}_i \setminus \{w_i\}}$. Продолжим эту линию поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}$ до первой точки пересечения x с окружностью ∂D_i . Рассмотрим метрику на окружности ∂D_i , являющуюся ограничением $\alpha_{f,u}^2$ на касательное расслоение к ∂D_i . Введем на ориентированной окружности ∂D_i натуральный параметр $g \in \mathbb{R}$, для которого точке x соответствуют значения параметра $g = 0$ и $g = n \cdot u(\partial D_i)$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим на цилиндре Z параметры \bar{f}, g , где $\hat{c}_0 - \varepsilon \leq \bar{f} \leq \hat{c}_0 + \varepsilon$, $g \in \mathbb{R}$, в которых g постоянна вдоль линий поля ядер 1-формы α и является продолжением построенного выше g на ∂D_i . При ограничении значения параметра g на любой отрезок длины менее $u(\partial D_i)$, получаем

локальные координаты на цилиндре Z . Пусть цилиндр \check{Z}_m – единственный полуоткрытый цилиндр, содержащий цилиндр Z и являющийся связной компонентой поверхности $(M \setminus G_f) \cap \bar{f}^{-1}[\widehat{c}_0 - \varepsilon; 1]$. Рассмотрим на верхнем основании $\partial^+ Z$ цилиндра Z точки пересечения окружности $\partial^+ Z$ с сепаратрисами седловых точек из $\overline{\check{Z}_m}$. Пусть эти концы сепаратрис имеют координаты $(\widehat{c}_0 + \varepsilon, g_1), \dots, (\widehat{c}_0 + \varepsilon, g_\nu)$, $0 \leq g_1 < \dots < g_\nu < u(\partial D_i)$. Обозначим соответствующие ориентированные (в направлении роста f) отрезки сепаратрис в Z через $I_1, \dots, I_\nu \subset Z$. Положим $g_{\nu+1} := g_1 + u(\partial D_i)$ и $I_{\nu+1} := I_1$. Обозначим через \widehat{I}_ϑ ориентированный путь в Z между седловыми точками, полученный последовательным прохождением трех отрезков I_ϑ , $\{\widehat{c}_0 + \varepsilon\} \times [g_\vartheta; g_{\vartheta+1}] \subset \partial^+ Z$ и $I_{\vartheta+1}$, где последний отрезок проходится в направлении, противоположном его ориентации. Зададим ограничение 1-формы $\alpha_{f,u}$ на касательное расслоение к каждой окружности $Z \cap \{\bar{f} = c\}$, $c \in [\widehat{c}_0 - \varepsilon; \widehat{c}_0 + \varepsilon]$, в координатах \bar{f}, g формулой

$$\begin{aligned} \alpha_{f,u}|_{T_{(\bar{f},g)}(Z \cap \{\bar{f} = \text{const}\})} &= (1 - I_{\widehat{c}_0 - \varepsilon, \widehat{c}_0 + \varepsilon, v}(\bar{f})) \alpha_{f,u}|_{(\widehat{c}_0 - \varepsilon, g)} + \\ &+ I_{\widehat{c}_0 - \varepsilon, \widehat{c}_0 + \varepsilon, v}(\bar{f}) \left(\alpha|_{(\widehat{c}_0 + \varepsilon, g)} + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \int^{g_{\vartheta+1}}_{g_\vartheta} \alpha \right) dI_{g_\vartheta, g_{\vartheta+1}}(g) \right) = (1 - I_{\widehat{c}_0 - \varepsilon, \widehat{c}_0 + \varepsilon, v}(\bar{f})) dg + \\ &+ I_{\widehat{c}_0 - \varepsilon, \widehat{c}_0 + \varepsilon, v}(\bar{f}) \left(\frac{2\pi}{u(\partial D_i)} dg + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right) dI_{g_\vartheta, g_{\vartheta+1}}(g) \right), \end{aligned}$$

$g \in [g_\vartheta; g_{\vartheta+1}]$, где $1 \leq \vartheta \leq \nu$,

$$v := \min \left\{ \frac{1}{1 - u(\widehat{I}_\vartheta) \frac{u(\partial D_i)}{2\pi}} \mid 1 \leq \vartheta \leq \nu, u(\widehat{I}_\vartheta) < \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right\},$$

или $v := 2$ если последний минимум берется по пустому множеству. Покажем, что определенная таким образом форма $\alpha_{f,u}|_{T(\partial^+ Z)}$ всюду отлична от нуля на окружности $\partial^+ Z$ и задает на ней положительную ориентацию. Так как

$$\alpha_{f,u}|_{T_{(\widehat{c}_0 + \varepsilon, g)}(\partial^+ Z)} = \frac{2\pi}{u(\partial D_i)} dg + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right) dI_{g_\vartheta, g_{\vartheta+1}}(g),$$

$g \in [g_\vartheta; g_{\vartheta+1}]$, то при $u(\widehat{I}_\vartheta) \geq \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta)$, очевидно, $\alpha_{f,u}|_{T_{(\widehat{c}_0 + \varepsilon, g)}(\partial^+ Z)}$ пропорциональна $dg|_{T_{(\widehat{c}_0 + \varepsilon, g)}(\partial^+ Z)}$ с положительным коэффициентом. При $u(\widehat{I}_\vartheta) < \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta)$, из свойств функции $I_{a,b,v}$ получаем, что коэффициент пропорциональности равен

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{u(\partial D_i)} + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right) I'_{g_\vartheta, g_{\vartheta+1}}(g) > \\ &> \frac{2\pi}{u(\partial D_i)} + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right) \frac{v}{g_{\vartheta+1} - g_\vartheta} \\ &\geq \frac{2\pi}{u(\partial D_i)} + \left(u(\widehat{I}_\vartheta) - \frac{2\pi}{u(\partial D_i)}(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta) \right) \frac{1}{(g_{\vartheta+1} - g_\vartheta)(1 - u(\widehat{I}_\vartheta) \frac{u(\partial D_i)}{2\pi})} \geq 1. \end{aligned}$$

Форму $\alpha_{f,u}|_Z$ зададим ограничением на касательное расслоение к каждой окружности $Z \cap \{\bar{f} = c\}$, $c \in [\widehat{c}_0 - \varepsilon; \widehat{c}_0 + \varepsilon]$, условием замкнутости, а также условием, что отрезок $[\widehat{c}_0 - \varepsilon; \widehat{c}_0 + \varepsilon] \times \{0\}$ является линией поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}|_Z$.

На каждой ориентированной окружности S_i края $\partial^- M$ зафиксируем точку s_i . Пусть теперь замкнутый цилиндр Z – компонента связности окружности S_i в поверхности $\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_0 + \varepsilon]$. На касательном расслоении к окружности S_i положим $\alpha_{f,u}|_{TS_i} := \frac{u(S_i)}{\int_{S_i} \alpha} \alpha|_{TS_i}$. Продолжим 1-форму $\alpha_{f,u}|_{TS_i}$ до 1-формы на всем цилиндре Z аналогично описанному выше построению в цилиндре возле точки минимума, используя вместо точки x точку s_i .

Мы задали форму $\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_0 + \varepsilon]}$. Доопределим эту форму на множестве $\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_1 - \varepsilon]$ условием $(\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_1 - \varepsilon]})|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_0 + \varepsilon]} = \alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_0 + \varepsilon]}$, условием замкнутости 1-формы $\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_1 - \varepsilon]}$ и условием совпадения на $\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_0 + \varepsilon; \widehat{c}_1 - \varepsilon]$ поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}$ с полем ядер 1-формы α .

- Пусть форма $\alpha_{f,u}$ построена на M_{k-1} для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq s$. Будем продолжать ее на M_k . Пусть Z — цилиндр, являющийся связной компонентой поверхности $\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon] \subset \overline{M_k} \setminus M_{k-1}$. Предположим, что либо на нижнем основании $\partial^- Z$ цилиндра Z нет концов сепаратрис 1-формы α , идущих из седловых точек на $\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_{k-1})$, либо на верхнем основании $\partial^+ Z$ цилиндра Z нет концов сепаратрис, идущих в седла с критическими значениями, превосходящими \widehat{c}_{k-1} . Тогда продолжим 1-форму $\alpha_{f,u}$ на Z условиями совпадения $\alpha_{f,u}|_Z$ и $\alpha_{f,u}|_{M_{k-1}}$ на нижнем основании $\partial^- Z$ цилиндра Z и совпадения полей ядер 1-формы $\alpha_{f,u}|_Z$ и 1-формы $\alpha|_Z$.

Предположим теперь, что на $\partial^- Z$ есть концы сепаратрис, идущих из седловых точек на множестве $\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_{k-1})$, и на $\partial^+ Z$ есть концы сепаратрис, идущих в седла с критическими значениями, превосходящими \widehat{c}_{k-1} . Рассмотрим на окружности $\partial^- Z$ точку $\partial^- I^-$, являющуюся концом отрезка I^- сепаратрисы, идущей из какой-нибудь седловой точки на $\bar{f}^{-1}(0; \widehat{c}_{k-1})$. Пусть цилиндр Z_m — единственный открытый цилиндр, содержащий цилиндр Z и являющийся связной компонентой поверхности $M \setminus G_f$. Рассмотрим на верхнем основании $\partial^+ Z$ цилиндра Z точку $\partial^- I^+$, являющуюся концом отрезка I^+ сепаратрисы, идущей в какую-нибудь седловую точку на $\partial^+ \overline{Z_m}$. Пусть ориентированный путь e из точки $\partial^+ I^-$ в точку $\partial^- I^+$ составлен из двух простых путей, первый из которых идет из точки $\partial^+ I^-$ вдоль поля ядер 1-формы α до окружности $\partial^+ Z$, а второй — в направлении ориентации окружности $\partial^+ Z$ до точки $\partial^- I^+$. Рассмотрим на $\partial^- Z$ ориентированный $\alpha_{f,u}$ -монотонный путь \widehat{e} , идущий из точки $\partial^+ I^-$ и такой, что интеграл формы $\alpha_{f,u}$ вдоль этого пути равен $u(I^- \cdot e \cdot I^+)$. Пусть точка x — конечная точка этого пути. Как и на первом шаге индукции (при $k = 1$), введем на ориентированной окружности $\partial^- Z$ натуральный параметр $g \in \mathbb{R}$ относительно метрики $\alpha_{f,u}|_{T(\partial^- Z)}^2$, для которого точке x соответствуют значения параметра $g = 0$ и $g = n \cdot u(\partial^- Z)$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим на цилиндре Z параметры \bar{f}, g , где $\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon \leq \bar{f} \leq \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon$, $g \in \mathbb{R}$, в которых g постоянна вдоль линий поля ядер формы α и является продолжением построенного выше g на $\partial^- Z$. При ограничении значения параметра g на любой отрезок длины менее $u(\partial^- Z)$ получаем локальные координаты на цилиндре Z . Зададим ограничение формы $\alpha_{f,u}$ на касательное расслоение к каждой окружности $\{f = c\}$, $c \in [\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]$ так же, как на первом шаге индукции (с заменой \widehat{c}_0 на \widehat{c}_{k-1}). Пусть $\Delta g(\widehat{e}^{-1} \cdot e)$ — полное изменение параметра g при последовательном прохождении всего пути \widehat{e} от точки x к точке $\partial^+ I^-$, в направлении обратной ориентации на \widehat{e} , и пути e от $\partial^+ I^-$ к $\partial^- I^+$. Рассмотрим кривую $g = g_x(\bar{f}) := \Delta g(\widehat{e}^{-1} \cdot e) I_{\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon, \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon}(\bar{f})$, $\bar{f} \in [\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]$, где функция $I_{a,b}(t)$ на $[a; b]$ определяется как в (3.5). Форму $\alpha_{f,u}|_Z$ зададим ограничением на касательное расслоение к каждой окружности $Z \cap \{f = c\}$, $c \in [\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]$, условием замкнутости на всем Z , а также условием, что кривая $\{(\bar{f}, g_x(\bar{f})) \mid \bar{f} \in [\widehat{c}_{k-1} - \varepsilon; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]\}$ является линией поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}|_Z$.

Мы задали форму $\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]}$. Доопределим эту форму на множестве $\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_k - \varepsilon]$ условиями $(\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_k - \varepsilon]})|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]} = \alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_{k-1} + \varepsilon]}$, замкнутости 1-формы $\alpha_{f,u}|_{\bar{f}^{-1}[-1; \widehat{c}_k - \varepsilon]}$ и условием совпадения на $\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_{k-1} + \varepsilon; \widehat{c}_k - \varepsilon]$ поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}$ с полем ядер 1-формы α .

- Пусть $k = s+1$, и 1-форма $\alpha_{f,u}$ построена на M_s . Будем продолжать ее в M . Поверхность $\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_s - \varepsilon; 1]$ является несвязным объединением замкнутых кругов \widetilde{D}_i , содержащих точки максимума w_i , и замкнутых цилиндров. На каждом цилиндре продолжим 1-форму $\alpha_{f,u}$ с нижнего основания цилиндра условиями замкнутости и совпадения поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}$ с полем ядер 1-формы α на этом цилиндре. На каждом диске $\bar{D}_i \subset \widetilde{D}_i$ определим 1-форму $\alpha_{f,u}$ равной $\frac{u(\partial D_i)}{\int_{\partial D_i} \alpha}$. Тогда $\int_{\partial D_i} \alpha_{f,u} = u(\partial D_i) \geq 1$.

Осталось продолжить форму $\alpha_{f,u}$ внутрь каждого замкнутого цилиндра $Z := \overline{\tilde{D}_i} \setminus D_i \subset \bar{f}^{-1}[\widehat{c}_s - \varepsilon; \widehat{c}_s + \varepsilon]$. Аналогично случаю $k = 1$, см. выше, рассмотрим гладкую регулярную кривую, выходящую из точки максимума w_i и касающуюся касательной прямой ξ_i в этой точке, которая при $t > 0$ лежит в $\tilde{D}_i \setminus \{w_i\}$ и является линией поля ядер 1-формы $\alpha|_{\tilde{D}_i \setminus \{w_i\}}$. Продолжим эту линию поля ядер 1-формы $\alpha_{f,u}$ до первой точки x пересечения с окружностью $\partial\tilde{D}_i$. Рассмотрим метрику на окружности $\partial\tilde{D}_i$, являющуюся ограничением $\alpha_{f,u}^2$ на касательное расслоение к $\partial\tilde{D}_i$. Введем на ориентированной окружности $\partial\tilde{D}_i$ натуральный параметр $g \in \mathbb{R}$, для которого точке x соответствуют значения параметра $g = 0$ и $g = n \cdot u(\partial D_i)$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим на цилиндре Z параметры \bar{f}, g , где $\widehat{c}_s - \varepsilon \leq \bar{f} \leq \widehat{c}_s + \varepsilon$, $g \in \mathbb{R}$, в которых g постоянна вдоль линий поля ядер формы α и является продолжением построенного выше g на окружности $\partial\tilde{D}_i$. При ограничении значения параметра g на любой отрезок длины менее $u(\partial D_i)$, получаем локальные координаты на цилиндре Z . Зададим ограничение формы $\alpha_{f,u}$ на касательное расслоение к каждой окружности $Z \cap \{\bar{f} = c\}$, $c \in [\widehat{c}_s - \varepsilon; \widehat{c}_s + \varepsilon]$ формулой

$$\begin{aligned} \alpha_{f,u}|_{T_{(\bar{f},g)}(Z \cap \{\bar{f}=c\})} &:= (1 - I_{\widehat{c}_s - \varepsilon, \widehat{c}_s + \varepsilon}(\bar{f}))\alpha_{f,u}|_{(\widehat{c}_s - \varepsilon, g)} + I_{\widehat{c}_s - \varepsilon, \widehat{c}_s + \varepsilon}(\bar{f})\alpha_{f,u}|_{(\widehat{c}_s + \varepsilon, g)} \\ &= (1 - I_{\widehat{c}_s - \varepsilon, \widehat{c}_s + \varepsilon}(\bar{f}))dg + I_{\widehat{c}_s - \varepsilon, \widehat{c}_s + \varepsilon}(\bar{f})a'(g)dg, \quad \bar{f} \in [\widehat{c}_s - \varepsilon, \widehat{c}_s + \varepsilon], \quad g \in [0; u(\partial D_i)], \end{aligned}$$

где $a(g) := \int_{\{\widehat{c}_s + \varepsilon\} \times [0; g]} \alpha_{f,u}|_{\partial D_i}$, $g \in [0; u(\partial D_i)]$.

Из построения 1-формы $\alpha_{f,u}$ следует, что ее интеграл по любому ориентированному ребру e_i графа G_f равен $\int_{e_i} \alpha_{f,u} = u(e_i)$. Отсюда следует, что $[\alpha_{f,u}] = u$.

Покажем, что $(\bar{f}, \alpha_{f,u}), (f, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$. Так как $(\bar{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^1$, причем $\alpha_{f,u} \equiv \alpha$ в малых окрестностях критических точек, и 1-формы $\alpha_{f,u}$ и α отличаются положительным множителем, зависящим от точки на M , то $(\bar{f}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$. С учетом равенств $\bar{f} = h_{\bar{c}(f)} \circ f$, и $h'_{\bar{c}(f)} \equiv 1$ в окрестности множества $\{-1, 1\} \cup \{c_1(f), \dots, c_q(f)\}$, получаем $(f, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$.

Шаг 3. Пусть, как и на шагах 1 и 2, функция $\bar{f} \in \mathcal{F}^1$ построена по исходной функции $f \in \mathcal{F}^1$ как на шаге 1. Пусть $u_0 \in U_f$, положим $\bar{\alpha} := \alpha_{f,2u_0}$. Согласно шагу 2, имеем $(f, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$. Более того, интеграл 1-формы $\bar{\alpha}$ по любому ориентированному ребру e_i графа $G_f = G_{\bar{f}}$ равен $\int_{e_i} \bar{\alpha} = 2u_0(e_i) \geq 2$. Построим непрерывное отображение

$$\frac{2}{q+1}\bar{\tau} = \frac{2}{q+1}\bar{\tau}_{J(\bar{c}(f))}^{q-s} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad \bar{c}' \mapsto f_{\bar{c}'},$$

со свойствами $f_{\bar{c}(f)} = \bar{f}$, $\bar{c}(f_{\bar{c}'}) = \bar{c}'$ и $(f_{\bar{c}'}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$ для любой точки $\bar{c}' \in \frac{2}{q+1}\bar{\tau}$.

Положим

$$R_k := \frac{|J_k|}{q+1} = \frac{r_k - r_{k-1}}{q+1} < 1, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Для каждой седловой точки $y_j = y_j(f) = y_j(\bar{f}) \in \mathcal{C}_{f,1}$ определим $k \in [1; s]$ условием $j \in J_k$ и рассмотрим открытую круговую окрестность D_{y_j, R_k} точки y_j радиуса R_k в смысле расстояния $\rho_{\bar{f}, \bar{\alpha}}$, см. §3.2.5.

Покажем, что $R_k \leq \varepsilon_{3,j}(\bar{f}, \bar{\alpha})$ при $j \in J_k$, где число $\varepsilon_{3,j}(\bar{f}, \bar{\alpha})$ определено как в (3.17). Для этого достаточно показать, что $R_k \leq d_{j_1, j}$ при $j_1 \neq j$, и что $R_k \leq \frac{1}{2}d_{j, j}$, $R_k \leq 1 - \tilde{c}_j$, $R_k \leq \tilde{c}_j + 1$, где числа $d_{j_1, j}$ определены для оснащенной функции $(\bar{f}, \bar{\alpha})$ как в (3.17). Одновременно мы покажем, что открытые круги D_{y_j, R_k} попарно не пересекаются. Заметим, что

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{r_k - r_{k-1}}{q+1} = \left(-1 + \frac{2r_k + 1}{q+1}\right) - \left(-1 + \frac{r_k + r_{k-1} + 1}{q+1}\right) = \widehat{c}_k - \tilde{c}_k, \\ R_k &= \frac{r_k - r_{k-1}}{q+1} = \left(-1 + \frac{r_k + r_{k-1} + 1}{q+1}\right) - \left(-1 + \frac{2r_{k-1} + 1}{q+1}\right) = \tilde{c}_k - \widehat{c}_{k-1}, \\ \tilde{c}_k + 1 &= \left(-1 + \frac{r_k + r_{k-1} + 1}{q+1}\right) + 1 > \frac{r_k - r_{k-1}}{q+1} = R_k, \end{aligned}$$

$$1 - \tilde{c}_k = 1 - \left(-1 + \frac{r_k + r_{k-1} + 1}{q + 1} \right) > \frac{2r_k + 1}{q + 1} - \frac{r_k + r_{k-1} + 1}{q + 1} = \frac{r_k - r_{k-1}}{q + 1} = R_k.$$

Поэтому открытые круги D_{y_j, R_k} содержатся в поверхностях

$$\widehat{M}_k := \bar{f}^{-1}[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k], \quad 1 \leq k \leq s,$$

и не пересекают ∂M . В частности, пары открытых кругов D_{y_j, R_k} с различными k не пересекаются и не содержат точек ∂M , а потому $R_k \leq d_{j_1, j}$ при $j \in J_k$ и $j_1 \notin J_k$, $R_k \leq 1 - \tilde{c}_j$ и $R_k \leq \tilde{c}_j + 1$ при $j \in J_k$.

Для любой оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ со свойством $[\alpha] \in U_f$ введем следующие обозначения (i) и (ii):

(i) Рассмотрим указанные выше поверхности \widehat{M}_k , $1 \leq k \leq s$, и обозначим через $\mathcal{S}_k \subset \widehat{M}_k$ сепаратрисную диаграмму оснащенной функции Морса $(f|_{\widehat{M}_k}, \alpha|_{\widehat{M}_k})$, см. определение 3.4.6. Граничные точки сепаратрисной диаграммы разделят кривую $\partial^- \widehat{M}_k$ на окружности и $2(r_k - r_{k-1})$ ориентированных интервалов $I_{2r_{k-1}+1}, \dots, I_{2r_k}$. Так как эти интервалы являются (f, α) -монотонными и $[\alpha] \in U_f$, то по определению (3.31) подмножества $U_f \subset H_f^1$ интеграл формы α по каждому из интервалов I_ℓ не меньше, чем 1:

$$|I_\ell| := \int_{I_\ell} \alpha \geq 1, \quad 1 \leq \ell \leq 2q. \quad (3.78)$$

(ii) Рассмотрим поверхность

$$\check{M}_k \subset \widehat{M}_k,$$

полученную из поверхности \widehat{M}_k выкидыванием связных компонент, не содержащих ни одной критической точки. Покажем, что $\check{M}_k \setminus \mathcal{S}_k$ является несвязным объединением множеств, гомеоморфных полуоткрытым прямоугольникам $[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times (0; |I_\ell|)$, $2r_{k-1} + 1 \leq \ell \leq 2r_k$. Рассмотрим каноническую проекцию

$$p_k: \widehat{M}_k \setminus \mathcal{S}_k \rightarrow \left((\partial^- \widehat{M}_k) \cap \check{M}_k \right) \setminus \mathcal{S}_k,$$

сопоставляющую каждой точке поверхности $\widehat{M}_k \setminus \mathcal{S}_k$ точку, лежащую на той же линии поля ядер формы α . Для каждого $\ell \in [2r_{k-1} + 1; 2r_k]$ обозначим начальную точку ориентированного интервала I_ℓ через $\partial^- I_\ell$. Каждой точке (a, b) прямоугольника $[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times (0; |I_\ell|)$ сопоставим единственную точку x множества $p_k^{-1}(I_\ell)$, для которой $f(x) = a$ и $\int_{\partial^- I_\ell}^{p_k(x)} \alpha = b$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и линейной независимости 1-форм df и α в каждой точке множества $\widehat{M}_k \setminus \mathcal{S}_k$ следует, что это сопоставление является диффеоморфизмом на $p_k^{-1}(I_\ell)$. Значит, a, b являются координатами на $p_k^{-1}(I_\ell)$, и принимают значения в полуоткрытом прямоугольнике $[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times (0; |I_\ell|)$. Таким образом, вся поверхность $\check{M}_k \setminus \mathcal{S}_k$ является несвязным объединением

$$\bigsqcup_{\ell=2r_{k-1}}^{2r_k} p_k^{-1}(I_\ell) \quad (3.79)$$

полуоткрытых прямоугольников $p_k^{-1}(I_\ell)$.

Покажем теперь, что при различных $j, j_1 \in J_k$ открытые круги D_{y_j, R_k} и $D_{y_{j_1}, R_k}$ не пересекаются, т.е. $2R_k \leq d_{j_1, j}$. Предположим противное, т.е. $\rho_{\bar{f}, \bar{\alpha}}(y_j, y_{j_1}) = d_{j_1, j} < 2R_k$. Тогда существует путь $\gamma: [0; 1] \rightarrow M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ от y_j до y_{j_1} длины $\int_\gamma \sqrt{d\bar{f}^2 + \bar{\alpha}^2} < 2R_k$. Значит, путь γ проходит в $D_{y_j, R_k} \cup D_{y_{j_1}, R_k} \subset \widehat{M}_k$. Отсюда следует, что ограничение пути γ на некоторый отрезок $[a; b] \subset [0; 1]$ целиком проходит в некотором замкнутом прямоугольнике $\overline{p_k^{-1}(I_\vartheta)} = [\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times [0; |I_\vartheta|]$, $2r_{k-1} + 1 \leq \vartheta \leq 2r_k$, и соединяет края $[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times \{0\}$ и $[\widehat{c}_{k-1}; \widehat{c}_k] \times \{|I_\vartheta|\}$ этого прямоугольника (здесь прямоугольник строится по оснащенной функции Морса $(\bar{f}, \bar{\alpha})$ аналогично построению прямоугольника в (3.79) по оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$, $[\alpha] \in U_f$). Поэтому

$$\int_\gamma \sqrt{d\bar{f}^2 + \bar{\alpha}^2} \geq \int_\gamma |\bar{\alpha}| \geq \int_{e_\vartheta} \bar{\alpha} = 2u_0(e_\vartheta) \geq 2 > 2R_k,$$

см. начало шага 3. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, открытые круги D_{y_j, R_k} попарно не пересекаются и $R_k \leq \varepsilon_{3,j}(\bar{f}, \bar{\alpha})$ при $j \in J_k$. Неравенство $2R_k \leq d_{j,j}$ доказывается аналогично неравенству $2R_k \leq d_{j,j_1}$ для различных $j, j_1 \in J_k$ рассмотрением нестягиваемого пути $\gamma: [0; 1] \rightarrow M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$.

Значит, по лемме 3.2.20, в каждом круге D_{y_j, R_k} имеются координаты u, v , определенные однозначно с точностью до преобразования $(u, v) \mapsto (-u, -v)$, в которых

$$\bar{f}|_{D_{y_j, R_k}}(u, v) \equiv u^2 - v^2 + \tilde{c}_k, \quad \bar{\alpha}|_{D_{y_j, R_k}}(u, v) \equiv d(2uv), \quad D_{y_j, R_k} = \{u^2 + v^2 < R_k\}.$$

Для любой точки $\bar{c}' = (c'_1, \dots, c'_q) \in \frac{2}{q+1}\bar{\tau}$ определим на M функцию $f_{\bar{c}'}$, равную \bar{f} в $M \setminus \cup D_{y_j, R_k}$, а в каждом круге D_{y_j, R_k} определенную формулой

$$f_{\bar{c}'}|_{D_{y_j, R_k}}(u, v) := \bar{f}|_{D_{y_j, R_k}}(u, v) + (c'_j - \tilde{c}_k) \left(1 - I_{0, R_k, \frac{|J_k|}{|J_k|-1}}(u^2 + v^2)\right), \quad u^2 + v^2 < R_k.$$

В частности, при $|J_k| = 1$ имеем $c'_j = \tilde{c}_k$, откуда $f_{\bar{c}'}|_{D_{y_j, R_k}} \equiv \bar{f}|_{D_{y_j, R_k}}$, поэтому

$$f_{\bar{c}'}|_{\widehat{M}_k} \equiv \bar{f}|_{\widehat{M}_k} \quad \text{при} \quad |J_k| = 1.$$

При $|J_k| \geq 2$ имеем $\frac{|J_k|}{|J_k|-1} \in (1; 2]$, поэтому из свойств функции $I_{a,b,v}$, см. ниже (3.75), получаем $I_{0, R_k, \frac{|J_k|}{|J_k|-1}}(t) \equiv 1$ при выполнении неравенства $t \geq R_k - \varepsilon$:

$$R_k \cdot \frac{\frac{|J_k|}{|J_k|-1} - 1}{3 \left(\frac{|J_k|}{|J_k|-1} + 1\right)} = \frac{R_k}{3(2|J_k| - 1)} \geq \frac{R_k}{6|J_k|} = \frac{|J_k|}{q+1} \cdot \frac{1}{6|J_k|} = \frac{1}{6(q+1)} = \varepsilon \geq R_k - t.$$

Следовательно, $f_{\bar{c}'} \equiv \bar{f}$ в $M \setminus \cup D_{y_j, R_k - \varepsilon}$, а потому

$$f_{\bar{c}'}|_{\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_k - \varepsilon; \widehat{c}_k + \varepsilon]} \equiv \bar{f}|_{\bar{f}^{-1}[\widehat{c}_k - \varepsilon; \widehat{c}_k + \varepsilon]}, \quad 0 \leq k \leq s. \quad (3.80)$$

Покажем, что $f_{\bar{c}'} \in \mathcal{F}^1$ и $(f_{\bar{c}'}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$. Вне объединения кругов D_{y_j, R_k} имеем $f_{\bar{c}'} = \bar{f}$, а потому $df_{\bar{c}'} \wedge \bar{\alpha} = d\bar{f} \wedge \bar{\alpha} \neq 0$ в силу $(\bar{f}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$. В каждом круге D_{y_j, R_k} имеем

$$df_{\bar{c}'}|_{D_{y_j, R_k}} = 2u \left(1 - (c'_j - \tilde{c}_k)I'_{0, R_k, \frac{q}{q-1}}(u^2 + v^2)\right) du - 2v \left(1 + (c'_j - \tilde{c}_k)I'_{0, R_k, \frac{q}{q-1}}(u^2 + v^2)\right) dv,$$

$$df_{\bar{c}'} \wedge \bar{\alpha}|_{D_{y_j, R_k}} = 4 \left(u^2 \left(1 - (c'_j - \tilde{c}_k)I'_{0, R_k, \frac{q}{q-1}}(u^2 + v^2)\right) + v^2 \left(1 + (c'_j - \tilde{c}_k)I'_{0, R_k, \frac{q}{q-1}}(u^2 + v^2)\right)\right) du \wedge dv.$$

По свойству (3.75) функции $I_{a,b,v}$, имеем $0 \leq I'_{0, R_k, \frac{q}{q-1}} < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q+1}{|J_k|} \leq \frac{|J_k|}{|J_k|-1} \cdot \frac{q+1}{|J_k|} = \frac{q+1}{|J_k|-1}$. Так как $\bar{c}' \in \frac{2}{q+1}\bar{\tau}$, а $\bar{c}(\bar{f})$ является центром грани $\frac{2}{q+1}\bar{\tau}$, то $|c'_j - \tilde{c}_k| \leq \frac{|J_k|-1}{q+1}$. Поэтому $|(c'_j - \tilde{c}_k)I'_{0, \frac{|J_k|}{q+1}, \frac{q}{q-1}}| < 1$. Следовательно, 2-форма $df_{\bar{c}'} \wedge \bar{\alpha}$ отлична от нуля в проколоте круге $D_{y_j, R_k} \setminus \{y_j\}$ и задает там положительную ориентацию. Так как $(\bar{f}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, а в окрестности любой критической точки функции \bar{f} функция $f_{\bar{c}'}$ отличается от \bar{f} прибавлением константы, то $f_{\bar{c}'} \in \mathcal{F}^1$ и $(f_{\bar{c}'}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$.

Лемма 3.4.5 доказана. \square

Определим “вычисляющее” отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ формулой

$$\text{Ev}(f, \alpha) := p_X([f]_{\text{top}}, h_{f, f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f, f_0}^*[\alpha]), \quad (f, \alpha) \in \mathbb{F}^1, \quad (3.81)$$

где $f_0 \in \mathcal{F}^1$ – отмеченная функция Морса класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, $h_{f, f_0} \in \mathcal{D}^0$ – какой-нибудь диффеоморфизм, переводящий линии уровня функции f_0 в линии уровня функции f с сохранением направления роста и нумерации отмеченных критических точек (см. (3.72)), а $h_{f, f_0}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_{f_0}^0$ и $h_{f, f_0}^*: H_f^1 \rightarrow H_{f_0}^1$ – индуцированные изоморфизмы (см. (3.68), (3.69), (3.72)).

Утверждение 3.4.7 ([135, утверждение 4.3]). *Вычисляющее отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ однозначно, \mathcal{D}^0 -инвариантно, непрерывно и индуцирует $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Шаг 1. Проверим однозначность отображения Ev . Образ $p_X([f]_{\text{top}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ точки $([f]_{\text{top}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) \in \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{[f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \subset \widetilde{\mathbb{X}}$ не зависит от выбора диффеоморфизма h_{f,f_0} , так как для любого другого такого диффеоморфизма \tilde{h}_{f,f_0} в силу нашего критерия топологической эквивалентности функций Морса (см. лемму 2.3.2 или [132, лемма 1]) выполнено $\tilde{h}_{f,f_0}^{-1} h_{f,f_0} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f_0)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f_0}))$, а действие группы $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f_0)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f_0}))$ на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq[f_0]_{\text{top}}}^{\text{st}} \approx \mathbf{v}_{\succeq[f_0]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}_{\succeq}$ тривиально (см. (3.70), (3.71)). Однозначность Ev доказана.

Шаг 2. Докажем непрерывность отображения Ev в любой точке $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Для оснащенной функции Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, достаточно близкой к (f, α) , рассмотрим близкий к id_M диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}^0$, такой что $h(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, и упорядоченное разбиение $J' \preceq J(\mathbf{c}(f h_{f,f_0}))$, такое что $J(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})) = J'$, откуда $\delta_{J'}[f]_{\text{top}} = [\tilde{f}]_{\text{top}}$, см. (3.72). Пусть g – отмеченная функция класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$. Тогда

$$\text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) = p_X([g]_{\text{top}}, h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})), h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}^*[h_{f,f_0}^* h^* \tilde{\alpha}]) \quad (3.82)$$

$$= p_X([g]_{\text{top}}, h_{f_0, J'}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h h_{f,f_0})), h_{f_0, J'}^*[h_{f,f_0}^* h^* \tilde{\alpha}]) = p_X([f]_{\text{top}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f} h)), h_{f,f_0}^*[h^* \tilde{\alpha}]),$$

где последнее равенство следует из того, что отображение инцидентности $\chi_{f_0, g}$ индуцировано отображением $h_{f_0, J'} \in h_{\tilde{f} h h_{f,f_0}, g}(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$. Из C^0 -близости h к id_M следует, что 0-коцепь $\mathbf{c}(\tilde{f} h) \in H_f^0$ близка к $\mathbf{c}(f)$ (ввиду C^2 -близости функции \tilde{f} к f), а класс относительных 1-когомологий $[h^* \tilde{\alpha}] \in H_f^1$ близок к $[\alpha]$ (ввиду C^0 -близости 1-формы $\tilde{\alpha}$ к α вне малых окрестностей точек локальных минимумов и максимумов функции f , см. определение топологии в пространстве \mathbb{F}^1 в §3.2.10 или [143, §4.2]). Поэтому точка $\text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ близка к $p_X([f]_{\text{top}}, h_{f,f_0}^{*0}(\mathbf{c}(f)), h_{f,f_0}^*[\alpha]) = \text{Ev}(f, \alpha)$ ввиду непрерывности проекции $p_X: \widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{\mathbb{X}}_{\succeq}/\sim)/\sim_{\text{glue}}$. Непрерывность Ev доказана.

Шаг 3. По построению отображение Ev является \mathcal{D}^0 -инвариантным. Индуцированное отображение $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ непрерывно ввиду непрерывности отображения Ev . Оно $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -эквивариантно по построению. Покажем, что $\overline{\text{Ev}}$ биективно.

Инъективность. Пусть $\text{Ev}(f, \alpha) = \text{Ev}(f_1, \alpha_1)$. Ввиду инъективности $p_X|_{\overline{\mathbb{Y}}}$ (см. утверждение 3.4.4) выполнено $[f]_{\text{top}} = [f_1]_{\text{top}}$ и имеется диффеоморфизм $h_1 \in \mathcal{D}^0$, переводящий линии уровня функции f в линии уровня функции f_1 с сохранением направления роста и такой, что $h_1^{*0}(\mathbf{c}(f_1)) = \mathbf{c}(f) \in H_f^0$ и $h_1^*[\alpha_1] \in \widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}[\alpha]$. Отсюда $h_2^* h_1^*[\alpha_1] = [\alpha]$ для некоторого $h_2 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ (см. (3.70)). Поэтому для $(f_2, \alpha_2) := (h_1 h_2)^*(f_1, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1$ выполнено $G_{f_2} = G_f$, $\mathbf{c}(f_2) = \mathbf{c}(f)$, $[\alpha_2] = [\alpha]$.

Покажем, что существует (единственный) диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}$, переводящий в себя каждое ориентированное ребро графа G_f и такой, что $h^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)$. В малых окрестностях U_j, \tilde{U}_j каждой седловой точки $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ в M рассмотрим локальные координаты u, v для $(f, \alpha)|_{U_j}$ и u_2, v_2 для $(f_2, \alpha_2)|_{\tilde{U}_j}$ как в определении 3.2.2. Без ограничения общности будем считать, что начальные отрезки вида $\{0 \leq u = v \leq \varepsilon\}$ и $\{0 \leq u_2 = v_2 \leq \varepsilon_2\}$ ребер графа G_f , выходящих из вершины y_j , совпадают (в противном случае заменим (u_2, v_2) на $(-u_2, -v_2)$). Определим диффеоморфизм $h|_{U'_j}: U'_j \rightarrow \tilde{U}'_j$ в, быть может, меньшей окрестности $U'_j \subset U_j$ условием $(u_2, v_2) \circ h|_{U'_j} = (u, v)|_{U'_j}$, где $\tilde{U}'_j := h(U'_j) \subset \tilde{U}_j$. Тогда $h|_{U'_j}^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)|_{U'_j}$. Продолжим этот диффеоморфизм на каждое ребро e_ℓ графа G_f условием $(h|_{e_\ell})^*(\alpha_2|_{e_\ell}) = \alpha|_{e_\ell}$. Это возможно, так как интегралы 1-форм α и α_2 по ориентированному ребру e_ℓ равны. Продолжим этот диффеоморфизм в малую окрестность V_ℓ куска $e_\ell \setminus (\cup_{j=1}^q U'_j)$ этого ребра условием

$h|_{\tilde{V}_\ell}^*(f_2, \alpha_2) = (f, \alpha)|_{V_\ell}$, положим $\tilde{V}_\ell := h(V_\ell)$. На множестве $\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ точек локальных минимумов и максимумов определим $h|_{\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}} := \text{id}_{\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}}$. Осталось продолжить построенное отображение на открытое подмножество $M \setminus (G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}) \subset M$, являющееся дизъюнктивным объединением кусков, каждый из которых гомеоморфен открытому или полуоткрытому цилиндру $S^1 \times (0; 1)$ и $S^1 \times [0; 1)$. Для каждого такого куска Z отображение h уже построено на $\bar{Z} \setminus Z \subset G_f \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$. Пусть точка $x \in \bar{Z} \cap G_f$ не является критической, и пусть окружность $\gamma_Z := Z \cap (f^{-1}(\frac{1}{2}(\inf f|_Z + \sup f|_Z)))$ ориентирована как в обозначении 3.1.6. Для любой точки $y \in Z$ рассмотрим гладкий путь $\gamma_{x,y}: [0; 1] \rightarrow \bar{Z}$ из x в y , такой что $\gamma_{x,y}((0; 1)) \subset Z$. Положим

$$A_{Z,\alpha} := \oint_{\gamma_Z} \alpha > 0, \quad g_{Z,x,\alpha}(y) := \int_{\gamma_{x,y}} \alpha \in \mathbb{R}, \quad y \in Z.$$

Так как Z гомеоморфен открытому или полуоткрытому цилиндру и 1-форма α замкнута, то функция $g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha}: Z \rightarrow \mathbb{R}/A_{Z,\alpha}\mathbb{Z}$ корректно определена, т.е. не зависит от выбора пути $\gamma_{x,y}$. По условию $A_{Z,\alpha} = A_{Z,\alpha_2}$. Определим отображение $h|_Z$ условием $(f_2, g_{Z,h(x),\alpha_2} \bmod A_{Z,\alpha}) \circ h|_Z = (f, g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha})$. Пусть $e_\ell \subset G_f$ – ребро, содержащее точку x . Нетрудно доказываемся непрерывность отображения $h|_{Z \cup e_\ell}$. Отсюда, с учетом равенства $[\alpha] = [\alpha_2] \in H_f^1$, следуют непрерывность и биективность отображения $h|_{\bar{Z}}$. То, что $h|_{M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})}$ является диффеоморфизмом, следует из того, что следующие пары функций являются регулярными координатами: пара координат (u, v) в U'_j (соответственно (u_2, v_2) в \tilde{U}'_j); пара функций (f, g_ℓ) в V_ℓ (соответственно (f_2, \tilde{g}_ℓ) в \tilde{V}_ℓ), где функции g_ℓ и \tilde{g}_ℓ определены условиями $dg_\ell = \alpha|_{V_\ell}$ и $d\tilde{g}_\ell = \alpha_2|_{\tilde{V}_\ell}$; пара функций $(f_2, g_{Z,h(x),\alpha_2} \bmod A_{Z,\alpha})$ и $(f, g_{Z,x,\alpha} \bmod A_{Z,\alpha})$ в Z . По построению $(f, \alpha) = h^*(f_2, \alpha_2)$. То, что h является диффеоморфизмом в малой окрестности W_x любой точки $x \in \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$ минимума или максимума, доказываемся с помощью полярных координат, отвечающих регулярным координатам u, v для $(f, \alpha)|_{W_x}$ (см. определение 3.2.2), и аналогичных полярных координат для $(f_2, \alpha_2)|_{W_x}$.

Так как диффеоморфизм h переводит в себя каждое ориентированное ребро графа $G_f = G_{f_2}$, причем $h^*[\alpha_2] = [\alpha] = [\alpha_2] \in U_f^\infty$, то $h \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f) \subset \mathcal{D}^0$ согласно лемме 3.3.10 (т.е. [134, лемма 3.4]). По доказанному $(f, \alpha) = h^*(f_2, \alpha_2) = (h_1 h_2 h)^*(f_1, \alpha_1) \in \mathcal{D}^0(f_1, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$, и инъективность доказана.

Сюръективность. Отображение $p_X|_{\tilde{\mathbb{X}}}: \tilde{\mathbb{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ сюръективно ввиду сюръективности отображений $\tilde{\mathbb{X}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Y}} = \tilde{\mathbb{X}} / \sim$ и $p_Y|_{\tilde{\mathbb{Y}}}: \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ (см. утверждение 3.4.4). Поэтому достаточно показать, что для любой точки $([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}', u) \in \tilde{\mathbb{X}}$ существует оснащенная функция Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, такая что $p_X([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}', u) = \text{Ev}(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$. Пусть f – отмеченная функция своего класса топологической эквивалентности. Из включений $\mathbf{c}' \in S_{f,J(\mathbf{c}(f))} \subset S_{f,\leq J(\mathbf{c}(f))}$, $u \in U_f^\infty$ и леммы 3.4.5 получаем путь $(\tilde{f}_t, \tilde{\alpha}) := (f_{t\mathbf{c}' + (1-t)\mathbf{c}(f)}, \alpha_{f,u}) \in \mathbb{F}^1$ в пространстве \mathbb{F}^1 оснащенных функций Морса, такой что $\mathcal{C}_{\tilde{f}_t} = \mathcal{C}_f$, $\tilde{f}_0 = f$, $\mathbf{c}(\tilde{f}_1) = \mathbf{c}'$ и $[\tilde{\alpha}] = u$. Отсюда и из (3.82) получаем требуемое равенство

$$p_X([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}', u) = p_X([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}(f_{\mathbf{c}'}), [\alpha_{f,u}]) = \text{Ev}(f_{\mathbf{c}'}, \alpha_{f,u}).$$

Шаг 4. Покажем, что непрерывная биекция $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ является гомеоморфизмом. Осталось доказать, что $\overline{\text{Ev}}^{-1}: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ непрерывно. Согласно лемме 3.4.5 имеем непрерывное (ввиду гладкости семейства) отображение

$$\tilde{s}_f: S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad (\mathbf{c}', u) \mapsto (f_{\mathbf{c}'}, \alpha_{f,u}), \quad (3.83)$$

для которого ввиду (3.82) выполнено

$$\overline{\text{Ev}} \circ q \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u) = \text{Ev} \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u) = p_X([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}', u), \quad (\mathbf{c}', u) \in S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty, \quad (3.84)$$

где $q: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ – проекция. Поэтому

$$\overline{\text{Ev}}^{-1} \circ p_X|_{\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty}([f]_{\text{top}}, \mathbf{c}', u) = q \circ \tilde{s}_f(\mathbf{c}', u), \quad (\mathbf{c}', u) \in S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty.$$

Отсюда и из непрерывности отображения $q \circ \tilde{s}_f$ следует непрерывность отображения $\overline{\text{Ev}}^{-1}$. Действительно, по утверждению 3.4.4 подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ открыто в $\widetilde{\mathcal{M}}$, а отображение $p_X|_{\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty} : \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ есть композиция накрытия $\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \rightarrow \{[f]_{\text{top}}\} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}^{\text{st}} = \mathbf{v}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ (см. (3.71)) и гомеоморфизма $p_Y|_{\mathbf{v}_{\geq [f]_{\text{top}}}} : \mathbf{v}_{\geq [f]_{\text{top}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$, а потому оно локально является гомеоморфизмом. Утверждение 3.4.7 доказано. \square

3.4.4 \mathcal{D}^0 -эquivариантный гомеоморфизм $p_3 : \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$

Обозначение 3.4.8. Предположим, что количество $|\widehat{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}| = \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} - (p^* + q^* + r^*)$ отмеченных, но не фиксированных, критических точек любой функции $f \in \mathcal{F}$ положительно. Фиксируем непустое подмножество $\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f_*} \setminus \mathcal{C}$ и для любой функции $f \in \mathcal{F}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{C}}_f \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}$ множество ее критических точек с теми же метками, что и точки множества $\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{F}^* := \{f \in \mathcal{F} \mid \widehat{\mathcal{C}}_f = \widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}\} \subset \mathcal{F}$. Оно является обобщенным пространством функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 3.1.3), каждая функция которого имеет ровно $|\mathcal{C}| + |\widetilde{\mathcal{C}}_f| = |\mathcal{C}^*| \in (|\mathcal{C}|, |\widehat{\mathcal{C}}_{f_*}|]$ фиксированных критических точек, где $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \sqcup \widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}$ и $\mathcal{C}_\lambda^* := \mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{C}^*$ суть множества всех фиксированных критических точек и фиксированных критических точек индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ соответственно, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^* \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f_*}$, см. определение 3.1.3 (D) и обозначение 3.1.4. Аналогично обозначению 3.1.4 обозначим

$$\mathcal{D}^* := \text{Diff}^+(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0^*, \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*), \quad (\mathcal{D}^*)^0 := \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}^*), \quad (\mathbb{F}^*)^1 := \{(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1 \mid f \in \mathcal{F}^*\}.$$

В случае (3.19) рассмотрим для пространства \mathcal{F}^* соответствующее $3q$ -мерное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ (см. утверждение 3.4.4). Пусть $\text{Ev}^* : (\mathbb{F}^1)^* \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^*$ – вычисляющее отображение, аналогичное вычисляющему отображению $\text{Ev} : \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ (см. (3.81)). По утверждению 3.4.7 оно индуцирует гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}^* : (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^*)^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^*$.

Лемма 3.4.9 ([135, лемма 5.2]). *Для пространств $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{F}$ обобщенных функций Морса (см. обозначение 3.4.8) отображения включения $j : \mathcal{D}^* \hookrightarrow \mathcal{D}$, $i : (\mathbb{F}^*)^1 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ индуцируют изоморфизм $\bar{j} : \mathcal{D}^* / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D} / \mathcal{D}^0$ и гомеоморфизм $\bar{i} : (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$.*

Если $|\mathcal{C}^| \leq \chi(M) + 1$, то $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 = (\mathcal{D}^*)^0$, откуда имеются изоморфизм $\bar{j} : \mathcal{D}^* / (\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{D}^* / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D} / \mathcal{D}^0$ групп классов отображений и гомеоморфизм $\bar{i} : (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^*)^0 = (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ универсальных пространств модулей, а в случае (3.19) также диффеоморфизм $k := \overline{\text{Ev}} \circ \bar{i} \circ \overline{\text{Ev}}^{*-1} : \widetilde{\mathcal{M}}^* \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{M}}$ $3q$ -мерных многообразий (сохраняющий аффинную связность и стратификацию).*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что \bar{j} – изоморфизм, а \bar{i} – непрерывная биекция. Докажем непрерывность $(\bar{i})^{-1}$. Для любой оснащенной функции Морса $(f_0, \alpha_0) \in \mathbb{F}^1$ рассмотрим диффеоморфизм $h_0 \in \mathcal{D}^0$, такой что $h_0^*(f_0, \alpha_0) \in (\mathbb{F}^*)^1$. Ввиду непрерывности отображения $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1 \rightarrow M^{|\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}|}$, $(f, \alpha) \mapsto f \mapsto \widetilde{\mathcal{C}}_f$ (см. §3.2 или [143]) и локальной тривиальности расслоения $\mathcal{D}^0 \rightarrow M^{|\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}|}$, $h \mapsto h(\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}) = \widetilde{\mathcal{C}}_{f_* h^{-1}}$ (со слоем $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0$ над точкой $\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}$, см. [50]), существуют окрестность $\mathcal{U} \subset \mathbb{F}^1$ оснащенной функции Морса (f_0, α_0) в \mathbb{F}^1 и непрерывное отображение $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}^0$, такие что $H(f_0, \alpha_0) = h_0$ и $(H(f, \alpha))^*(f, \alpha) \in (\mathbb{F}^*)^1$ для любой $(f, \alpha) \in \mathcal{U}$. Получаем непрерывное отображение $\mathcal{U} \rightarrow (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0)$, $(f, \alpha) \mapsto (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0)((H(f, \alpha))^*(f, \alpha))$, совпадающее с композицией $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0 \xrightarrow{(\bar{i})^{-1}} (\mathbb{F}^*)^1 / (\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0)$, откуда следует непрерывность отображения $(\bar{i})^{-1}$.

Пусть $|\mathcal{C}^*| \leq \chi(M) + 1$. Включение $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \supseteq (\mathcal{D}^*)^0$ очевидно. Покажем, что $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \subseteq (\mathcal{D}^*)^0$. Пусть $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{D}^*$ – подгруппа, аналогичная $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$, см. обозначение 3.1.4 (B). Так как $\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}^* \cap \mathcal{T} = \mathcal{F}^*$ и количество фиксированных точек $|\mathcal{C}^*| \leq \chi(M) + 1$, то из (3.3) следует $(\mathcal{D}^*)^0 = \mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0$. Лемма доказана. \square

Утверждение 3.4.10 ([135, утверждение 5.3]). В случае (3.19) правое действие группы $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ (см. обозначения 3.1.4 (В) и 3.2.3) на \mathbb{F}^1 является свободным. Имеется \mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $p_3: \mathbb{F}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$, композиция которого с проекцией $\mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с Ev . Здесь группа \mathcal{D}^0 действует на $\mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$ справа по формуле $(h_1, h_2, t) \mapsto (h_2 h_1, t)$. В частности, вычисляющее отображение $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ является тривиальным \mathcal{D}^0 -расслоением, а полный прообраз $\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}})$ любого класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$ в \mathcal{F}^1 при забывающем отображении $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ гомеоморфен прямому произведению $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{v}_{[f]_{\text{top}}} \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} = \mathcal{D}^0 \times \text{Ev}(\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}})) \subset \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$.

Доказательство. Шаг 1. Докажем свободу действия подгруппы $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ на \mathbb{F}^1 . Если $h \in \mathcal{T}$ и $h^*(f, \alpha) = (f, \alpha)$, то согласно лемме 3.3.10 (т.е. [134, лемма 3.4]) выполнено $h \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$, а потому h переводит в себя каждое ребро графа G_f (см. обозначение 3.1.6). Отсюда следует, что $h = \text{id}_M$ ввиду единственности диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}$, сохраняющего оснащенную функцию Морса (f, α) и переводящего любое ребро графа G_f в себя (см. доказательство утверждения 3.4.7, шаг 3, инъективность).

Шаг 2. Построим непрерывное (“реализующее”) отображение $\rho: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$, такое что $\text{Ev} \circ \rho = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$ (т.е. правое обратное отображения Ev , т.е. сечение расслоения $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$). Согласно утверждению 3.4.4 пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ является гладким $3q$ -мерным многообразием и покрыто открытыми подмножествами $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Фиксируем на $\widetilde{\mathcal{M}}$ клеточное разбиение (состоящее, вообще говоря, из бесконечного числа клеток), такое что каждая его замкнутая клетка целиком содержится в одной из областей $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{top}}}$ и характеристическое отображение любой клетки является гомеоморфизмом на свой образ. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $\chi(M) < p^* + q^* + r^*$. Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}$ — k -мерный остов клеточного разбиения, $k \leq \dim \widetilde{\mathcal{M}} = 3q$. Будем строить отображение $\rho_k: \widetilde{\mathcal{M}}^{(k)} \rightarrow \mathbb{F}^1$, такое что $\text{Ev} \circ \rho_k = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}}$, индукцией по k . При $k = -1$ строить нечего, так как $\widetilde{\mathcal{M}}^{(-1)} = \emptyset$. Пусть $k \geq 0$ и отображение ρ_{k-1} построено. Рассмотрим любую k -мерную клетку $\sigma = \sigma^k \subset \widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}$ разбиения. По построению ее замыкание целиком содержится в одной из областей $\widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{top}}}$. Выберем какое-либо поднятие $\ell_\sigma: \bar{\sigma} \rightarrow S_{\succeq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty$ замкнутой клетки $\bar{\sigma}$ при накрытии $p_X|_{\{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\succeq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty} \circ a_{[f]_{\text{top}}}^{-1}: S_{\succeq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\succeq [f]_{\text{top}}}$, где $a_{[f]_{\text{top}}}: \{[f]_{\text{top}}\} \times S_{\succeq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty \rightarrow S_{\succeq [f]_{\text{top}}} \times U_f^\infty$ — проекция. Тогда

$$p_X \circ a_{[f]_{\text{top}}}^{-1} \circ \ell_\sigma = \text{id}_{\bar{\sigma}}. \quad (3.85)$$

Рассмотрим два $(k-1)$ -мерных сфероида в \mathbb{F}^1 :

$$S_1 := \rho_{k-1}|_{\partial\sigma^k}: S^{k-1} \approx \partial\sigma^k \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad S_2 := \tilde{s}_f \circ \ell_\sigma|_{\partial\sigma^k}: S^{k-1} \approx \partial\sigma^k \rightarrow \mathbb{F}^1,$$

см. (3.83). Тогда $\text{Ev} \circ S_i = \text{id}_{S^{k-1}}$, $i = 1, 2$, так как $\text{Ev} \circ \rho_{k-1} = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{(k-1)}}$ в силу индукционного предположения и

$$\text{Ev} \circ \tilde{s}_f \circ \ell_\sigma = p_X \circ a_{[f]_{\text{top}}}^{-1} \circ \ell_\sigma = \text{id}_{\bar{\sigma}} \quad (3.86)$$

в силу (3.84) и (3.85). Поэтому (в силу инъективности $\overline{\text{Ev}}$, см. утверждение 3.4.7) для любого $m \in S^{k-1}$ существует диффеоморфизм $h_m \in \mathcal{D}^0$, такой что $S_1(m) = h_m^*(S_2(m))$. Этот диффеоморфизм единствен в силу свободы действия группы $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{T}$ на \mathbb{F}^1 (см. шаг 1). Получаем однозначное отображение

$$H = H_{\partial\sigma^k}: \partial\sigma^k \approx S^{k-1} \rightarrow \mathcal{D}^0, \quad m \mapsto h_m, \quad m \in \partial\sigma^k.$$

Докажем непрерывность отображения H . Так как сфероиды S_1 и S_2 непрерывны (по индукционному предположению и в силу непрерывности \tilde{s}_f и ℓ_σ , см. (3.83)), то они задают непрерывную зависимость пары оснащенных функций Морса

$$S_1(m) =: (f, \alpha), \quad S_2(m) =: (f_2, \alpha_2)$$

от точки $m \in S^{k-1}$. Если точка $\tilde{m} \in S^{k-1}$ близка к m , то в силу (3.82) и (3.81) выполнено

$$S_1(\tilde{m}) =: (\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \xrightarrow{\text{Ev}} p_X([f_0]_{\text{top}}, h_{f,f_0}^*(\mathbf{c}(\tilde{f}h)), h_{f,f_0}^*[h^*\tilde{\alpha}]),$$

$$S_2(\tilde{m}) =: (\tilde{f}_2, \tilde{\alpha}_2) \xrightarrow{\text{Ev}} p_X([f_0]_{\text{top}}, h_{f_2,f_0}^*(\mathbf{c}(\tilde{f}_2h_2)), h_{f_2,f_0}^*[h_2^*\tilde{\alpha}_2]),$$

где $f_0 \in \mathcal{F}^1$ — отмеченная функция класса топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}} = [f_2]_{\text{top}}$, диффеоморфизмы $h, h_2 \in \mathcal{D}^0$ близки к id_M и $h(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, $h_2(\mathcal{C}_{f_2}) = \mathcal{C}_{\tilde{f}_2}$, $h_{f_2,f_0} := h_m h_{f,f_0}$. Так как $h_{f,f_0}^*(f, \alpha) = h_{f_2,f_0}^*(f_2, \alpha_2)$, $\text{Ev}(S_1(\tilde{m})) = \text{Ev}(S_2(\tilde{m}))$, то $(h_{f,f_0}^*(\mathbf{c}(\tilde{f}h)), h_{f,f_0}^*[h^*\tilde{\alpha}]) = (h_{f_2,f_0}^*(\mathbf{c}(\tilde{f}_2h_2)), h_{f_2,f_0}^*[h_2^*\tilde{\alpha}_2])$, поскольку p_X локально является гомеоморфизмом (см. конец §3.4.3). Так как $\mathbf{c}(\tilde{f}h) = \mathbf{c}(\tilde{f}_2h_2h_m)$, то согласно нашему критерию топологической эквивалентности возмущенных функций Морса (см. [145, утверждение 1.1 и §3] или (3.72) или утверждение 2.5.2) выполнено $\tilde{f}hh_0 = \tilde{f}_2h_2h_m$ для некоторого $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$, такого что автоморфизм $dh_0|_{y_j(f)}: T_{y_j(f)}M \rightarrow T_{y_j(f)}M$ близок к $\text{id}_{T_{y_j(f)}M}$ для любой седловой критической точки $y_j(f) \in \mathcal{C}_{f,1}$. Отсюда и из равенств $\tilde{f}hh_0 = \tilde{f}_2h_2h_m$, $[(hh_0)^*\tilde{\alpha}] = [(h_2h_m)^*\tilde{\alpha}_2]$ и $h_{\tilde{m}}^*(\tilde{f}_2, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ следует (согласно доказательству утверждения 3.4.4, шаг 3, инъективность), что изоморфизм $dh_{\tilde{m}}|_{y_j(\tilde{f})}: T_{y_j(\tilde{f})}M \rightarrow T_{y_j(\tilde{f}_2)}M$ близок к изоморфизму $dh_m|_{y_j(f)}: T_{y_j(f)}M \rightarrow T_{y_j(f_2)}M$ ($1 \leq j \leq q$). Отсюда и из равенства $h_{\tilde{m}}^*(\tilde{f}_2, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ следует, что в некоторой окрестности любой седловой критической точки функции (f, α) выполнено $h_{\tilde{m}} \rightarrow h_m$ при $\tilde{m} \rightarrow m$. Отсюда и из равенств $h_m^*(df_2^2 + \alpha_2^2) = df^2 + \alpha^2$, $h_{\tilde{m}}^*(d\tilde{f}_2^2 + \tilde{\alpha}_2^2) = d\tilde{f}^2 + \tilde{\alpha}^2$ следует, что $h_{\tilde{m}} \rightarrow h_m$ всюду на M при $\tilde{m} \rightarrow m$. Поэтому диффеоморфизм h_m непрерывно зависит от $m \in S^{k-1}$, т.е. сфероид H непрерывен.

Так как $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(M, \mathcal{C})$ и количество фиксированных точек $|\mathcal{C}| = p^* + q^* + r^* > \chi(M)$, то топологическая группа \mathcal{D}^0 стягиваема (см. (3.2)), откуда сфероид H непрерывно продолжается на всю замкнутую клетку $\overline{\sigma^k}$. Пусть $\tilde{H}: \overline{\sigma^k} \rightarrow \mathcal{D}^0$, $m \mapsto \tilde{h}_m$ — такое продолжение. Определим отображение $\rho_k: \widetilde{\mathcal{M}}^{(k)} \rightarrow \mathbb{F}^1$ формулой

$$\rho_k|_{\overline{\sigma^k}}: \overline{\sigma^k} \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad m \mapsto \tilde{h}_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)).$$

Оно однозначно и является продолжением отображения ρ_{k-1} , так как

$$\rho_k|_{\partial\sigma^k}: m \mapsto h_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)) = h_m^*(S_2(m)) = S_1(m) = \rho_{k-1}|_{\partial\sigma^k}(m), \quad m \in \partial\sigma^k.$$

При этом $\text{Ev} \circ \rho_k|_{\overline{\sigma^k}}(m) = \text{Ev}(\tilde{h}_m^*(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m))) = \text{Ev}(\tilde{s}_f \circ \ell_\sigma(m)) = m$, $m \in \overline{\sigma^k}$, ввиду (3.86), откуда $\text{Ev} \circ \rho_k = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}}$. Итак, существование непрерывного отображения ρ , являющегося правым обратным Ev , доказано в случае $\chi(M) < p^* + q^* + r^*$.

Случай 2. Предположим теперь, что $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M)$. В силу условия (3.19) количество $|\widehat{\mathcal{C}}_f \setminus \mathcal{C}| = \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} - (p^* + q^* + r^*)$ отмеченных, но не фиксированных, критических точек любой функции $f \in \mathcal{F}$ превосходит $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) \geq 0$. Поэтому имеется непустое подмножество $\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f_*} \setminus \mathcal{C}$, состоящее из $\chi(M) - (p^* + q^* + r^*) + 1 > 0$ точек. Рассмотрим соответствующие подпространства $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{F}$ и $(\mathbb{F}^*)^1 \subset \mathbb{F}^1$, подгруппы $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ и $(\mathcal{D}^*)^0 \subset \mathcal{D}^0$, и $3q$ -мерное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}^* \approx (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^*)^0$, см. обозначение 3.4.8.

Так как количество фиксированных точек $|\mathcal{C}^*| = |\mathcal{C}| + |\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}| = \chi(M) + 1 > \chi(M)$, то согласно случаю 1 существует непрерывное отображение $\rho^*: \widetilde{\mathcal{M}}^* \rightarrow (\mathbb{F}^1)^*$, такое что $\text{Ev}^* \circ \rho^* = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}^*}$. Так как количество фиксированных критических точек $|\mathcal{C}^*| = |\mathcal{C}| + |\widetilde{\mathcal{C}}_{f_*}| \leq \chi(M) + 1$, то по лемме 3.4.9 имеется гомеоморфизм $\tilde{i}: (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^*)^0 = (\mathbb{F}^*)^1/(\mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$. Положим

$$\rho := i \circ \rho^* \circ \overline{\text{Ev}}^* \circ (\tilde{i})^{-1} \circ \overline{\text{Ev}}^{-1}: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1.$$

Из определения отображений Ev, Ev^* следует, что $\text{Ev}|_{\text{Im } i} = \overline{\text{Ev}} \circ \tilde{i} \circ \overline{\text{Ev}}^{*-1} \circ \text{Ev}^* \circ i^{-1}$. Поэтому $\text{Ev} \circ \rho = \text{Ev} \circ i \circ \rho^* \circ \overline{\text{Ev}}^* \circ (\tilde{i})^{-1} \circ \overline{\text{Ev}}^{-1} = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$.

Шаг 3. На шаге 2 построено непрерывное отображение $\rho: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$, такое что $\text{Ev} \circ \rho = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$. Определим непрерывное \mathcal{D}^0 -эквивариантное отображение $i_3: \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ формулой $i_3(h, m) := h^*(\rho(m))$. Оно биективно в силу $\text{Ev} \circ \rho = \text{id}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$, свободности действия \mathcal{D}^0 на \mathbb{F}^1 и биективности $\overline{\text{Ev}}$ (см. утверждение 3.4.7). Обратное отображение имеет вид $p_3 = i_3^{-1}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$, $(f, \alpha) \mapsto (\delta(f, \alpha), \text{Ev}(f, \alpha))$, где отображение $\delta: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0$ определяется условием $(\delta(f, \alpha))^*(\rho \circ \text{Ev}(f, \alpha)) = (f, \alpha)$. Его непрерывность доказывается аналогично доказательству непрерывности сфероидов H (см. шаг 2, случай 1). Так как отображения i_3, p_3 непрерывны и взаимно обратны, они являются взаимно обратными гомеоморфизмами. Утверждение 3.4.10 доказано. \square

Доказательство теоремы 3.4.1. Утверждение 3.4.10 доказывает гомеоморфизмы $\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \mathcal{M}$ и $\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$. С учетом (3.2) и того, что отображения включения $\mathcal{F}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}$, $\mathbb{F}^1 \hookrightarrow \mathbb{F}$ и забывающие отображения $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ и $\text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \rightarrow [f]_{\text{top}}$ являются гомотопическими эквивалентностями согласно теореме 3.2.5 (т.е. [143, теорема 2.5]), получаем теорему 3.4.1. \square

3.5 Специальные оснащенные функции Морса. Гомотопические эквивалентности $\mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0$, $\widetilde{\mathcal{M}} \sim \widetilde{\mathbb{K}}$ при $\chi(M) < 0$

В этом параграфе излагаются результаты работы автора [136].

В отличие от предыдущих параграфов настоящей главы, в данном параграфе мы в основном предполагаем (для упрощения обозначений), что поверхность M не имеет края и у рассматриваемых функций Морса на M нет фиксированных критических точек. Однако из наших результатов (с учетом того, что гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ в теореме 3.5.4 является \mathcal{D}^\pm -эквивариантной и сохраняющей отображение $\mathbb{F}^1 \rightarrow M^{p+q+r}/\Sigma_{p+q+r}$, $(f, \alpha) \mapsto \mathcal{C}_f$) непосредственно следуют аналогичные результаты для пространств функций Морса, у которых некоторые критические точки фиксированы. Кроме того, результаты и доказательства данного параграфа дословно переносятся на случай поверхностей с краем (по аналогии с предыдущими параграфами), так как граничные окружности играют фактически ту же роль, что и фиксированные критические точки локальных экстремумов. Поэтому верна общая теорема 3.5.10.

Аннотация: Пусть M — гладкая компактная ориентируемая поверхность. Пусть \mathcal{F} — пространство функций Морса на M и \mathbb{F}^1 — пространство оснащенных функций Морса, снабженные C^∞ -топологией. Определено пространство \mathbb{F}^0 специальных оснащенных функций Морса и доказано, что отображение включения $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. В случае, когда у любой функции из \mathcal{F} отмечено не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек, доказаны гомотопические эквивалентности $\widetilde{\mathbb{K}} \sim \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{F} \sim \mathbb{F}^0 \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}$, где $\widetilde{\mathbb{K}}$ — комплекс оснащенных функций Морса, $\widetilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ — универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса, \mathcal{D}^0 — группа диффеоморфизмов M , гомотопных тождественному.

В данном параграфе продолжается изучение топологии обобщенного пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса на компактной гладкой ориентируемой двумерной поверхности M . По-прежнему предполагается, что у каждой функции $f \in \mathcal{F}$ по меньшей мере $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы).

В §3.2 (т.е. в работе [143]) мы ввели понятие оснащенной функции Морса (определение 3.2.2) и доказали гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathbb{F}^1$ пространства \mathcal{F} функций Морса и

пространства \mathbb{F}^1 оснащенных функций Морса (теоремы 3.2.1 и 3.2.5 или [143, 132]). В §3.3 (т.е. в [134]) мы описали построение комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса и содержащего его гладкого стратифицированного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. теоремы 3.3.3, 3.3.13 и 3.3.14, а также утверждение 3.4.4). В §3.4 мы доказали (теорема 3.4.1), что в большинстве случаев (см. (3.19) или (3.94)) имеется гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim R \times \widetilde{\mathcal{M}}$, где $R = R(M)$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка (см. (3.2)), а $\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}(M)$ — многообразие, гомеоморфное универсальному пространству модулей $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ оснащенных функций Морса.

В данном параграфе определено пространство $\mathbb{F}^0 = \mathbb{F}^0(M)$ специальных оснащенных функций Морса (определение 3.5.3) и доказано, что отображение включения $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью (теорема 3.5.4). Отсюда мы выводим, что комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса является строгим деформационным ретрактом многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ (лемма 3.5.8). Тем самым мы доказываем гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim R \times \widetilde{\mathbb{K}}$ (теоремы 3.5.6 и 3.5.10). То есть, мы сводим задачу об изучении топологии пространства \mathcal{F} функций Морса к комбинаторной задаче — к изучению топологии полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$.

В конце параграфа мы подводим итоги: из основных результатов главы (точнее, из теоремы 3.5.6, предложения 3.3.15 о строении ручек комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$, и следствия 3.3.5) мы выводим следствие 3.5.9 о топологии пространств $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса (т.е. в наиболее интересном для приложений случае — когда поверхность M замкнута и нет отмеченных критических точек).

3.5.1 Ключевые понятия и формулировка основного результата

Напомним некоторые обозначения и определения.

Определение 3.5.1 (ср. определения 2.2.1 (Б) и 3.1.3 (D)). Пусть M — гладкая (т.е. класса C^∞) замкнутая связная поверхность. Пусть $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ — пространство функций Морса на M , имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,\lambda}$ множество ее критических точек индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$; $\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}$. Обозначим через \mathcal{F}^1 подпространство в \mathcal{F} , состоящее из функций Морса $f \in \mathcal{F}$, у которых все локальные минимумы равны -1 , а все локальные максимумы равны 1 .

Из теоремы С.В. Матвеева (см. теорему 2.1.1 или теоремы 2.6.1 и 2.6.2, т.е. [129, теоремы 8 и 8']) следует, что $\pi_0(\mathcal{F}) = 0$.

Обозначение 3.5.2 (пермutoэдp и его грани, см. доказательство теоремы 2.7.11, шаг 1, или §3.3.2, шаг 1). *Пермutoэдp порядка* $q \in \mathbb{N}$ — это вложенный в q -мерное пространство выпуклый $(q - 1)$ -мерный многогранник, вершины которого получены перестановками координат вектора $(1, \dots, q)$. Опишем его подробнее: пусть e_1, \dots, e_q — стандартный базис \mathbb{R}^q , и пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ — выпуклая оболочка множества точек $P_\rho = \sum_{k=1}^q (k - \frac{q+1}{2}) e_{\rho_k}$, $\rho \in \Sigma_q$. Пермutoэдp \mathcal{P}^{q-1} имеет ровно $q!$ вершин P_ρ , $\rho \in \Sigma_q$, а его $(q - s)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств J_1, \dots, J_s . А именно грань τ_J , отвечающая разбиению J , — это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\rho)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\rho \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями (2.21). Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ есть подгруппа группы Σ_q , отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1 + 1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1} + 1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\sigma \in \Sigma_q$ на точку P_ρ дает точку $P_{\sigma\rho}$, где $(\sigma\rho)_i := \rho_{\sigma_i}$, $1 \leq i \leq q$. Из описания граней многогранника \mathcal{P}^{q-1} следует, что условие $\tau_{\hat{J}} \subset \partial\tau_J$ равносильно тому, что разбиение \hat{J} получается из разбиения J путем измельчения.

Для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} := \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. определение 3.5.1 (А) и замечание 3.1.7) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q.$$

Возьмем в пространстве H_f^0 многогранник $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$, являющийся образом пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ при какой-либо биекции $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \subset H_f^0,$$

сопоставляющую седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седел $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое условием (2.21) и соотношениями $c_{\rho_1} = \dots = c_{\rho_{r_1}} < c_{\rho_{r_1+1}} = \dots = c_{\rho_{r_2}} < \dots < c_{\rho_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\rho_{r_s}}$. (То есть J отвечает отношению частичного порядка на множестве седел $\mathcal{C}_{f,1}$, построенному по значениям функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.)

Определение 3.5.3 (специальные оснащенные функции Морса). (А) *Сепаратрисой* оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ назовем образ такой интегральной траектории $\gamma: (0, 1) \rightarrow M \setminus \mathcal{C}_f$ поля ядер 1-формы α , для которой оба предела $\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t)$ и $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t)$ существуют, принадлежат множеству \mathcal{C}_f и хотя бы один из них является седловой точкой.

(В) Оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ назовем *специальной*, если либо $q = 0$ (т.е. у функций из \mathcal{F} отсутствуют седловые критические точки), либо выполнены следующие условия:

(i) набор $\mathbf{c}(f) \in H_f^0$ седловых критических значений принадлежит многограннику $\frac{2}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$;

(ii) пусть $\hat{\tau}$ — открытая грань многогранника \mathcal{P}_f^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{2} \mathbf{c}(f)$, и пусть $J = (J_1, \dots, J_s)$ — соответствующее упорядоченное разбиение множества седел $\mathcal{C}_{f,1}$ на непустые подмножества, т.е. $\tau = \tau_j^{q-s}$; тогда для любых двух седел $y_i, y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ из одного и того же подмножества J_k разбиения ($1 \leq k \leq s$) не существует сепаратрисы, соединяющей y_i и y_j .

Пусть $\mathbb{F}^0 := \mathbb{F}_{p,q,r}^0(M)$ — пространство специальных оснащенных функций Морса.

Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}^\pm := \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ действует справа на пространстве \mathbb{F}^1 очевидным образом (см. обозначения 3.1.4 и 3.2.3, т.е. [143, обозначение 2.3]). Очевидно также, что \mathbb{F}^0 является \mathcal{D}^\pm -инвариантным.

Теорема 3.5.4 ([136, теорема 1]). Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ — пространство функций Морса на замкнутой связной ориентированной поверхности M , и $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса (определения 3.5.1, 3.2.2 и 3.5.3). Тогда отображение включения $i_4: \mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью, причем соответствующие отображения и гомотопии могут быть выбраны \mathcal{D}^\pm -эквивариантными и сохраняющими отображение $\mathbb{F}^1 \rightarrow M^{p+q+r}/\Sigma_{p+q+r}$, $(f, \alpha) \mapsto \mathcal{C}_f$.

3.5.2 Гомотопическая эквивалентность $i_4: \mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$

Здесь доказывается теорема 3.5.4.

Предположим, что число седел $q \geq 1$. Фиксируем вещественное число $\kappa > 0$. Так как $\mathcal{P}^{q-1} \subset [-\frac{q-1}{2}; \frac{q-1}{2}]^q$, то $\kappa \mathcal{P}^{q-1} \subset (-\frac{q\kappa}{2}; \frac{q\kappa}{2})^q$. Рассмотрим отображение

$$\pi_\kappa: \mathbb{R}^q \rightarrow \kappa \mathcal{P}^{q-1},$$

переводящее любую точку $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^q$ в такую точку $\mathbf{c}' \in \kappa \mathcal{P}^{q-1}$, что $|\mathbf{c} - \mathbf{c}'| \leq |\mathbf{c} - \mathbf{c}''|$ для любой точки $\mathbf{c}'' \in \kappa \mathcal{P}^{q-1}$. В силу выпуклости пермutoэдра \mathcal{P}^{q-1} , такое отображение единственно.

Фиксируем оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Выберем какую-нибудь нумерацию $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$ множества седловых точек и с ее помощью отождествим $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ и $\mathcal{P}_f^{q-1} \cong \mathcal{P}^{q-1}$. Пусть $\pi_{\kappa,f}: H_f^0 \rightarrow \kappa \mathcal{P}_f^{q-1}$ — композиция $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi_\kappa} \kappa \mathcal{P}^{q-1} \cong \kappa \mathcal{P}_f^{q-1}$. Рассмотрим на

$M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ гладкое поле неотрицательно определенных в каждой точке квадратичных форм $(df)^2 + \alpha^2$. Как и в случае римановых метрик, этому полю квадратичных форм отвечает функция длины $L(\gamma)$ регулярных кусочно-гладких путей γ на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Определим расстояние $\rho(x, y) = \rho_{f,\alpha}(x, y) := \inf(L(\gamma))$, $x, y \in M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где нижняя грань берется по регулярным кусочно-гладким путям γ на поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ из x в y . Определим вещественное число $d_{j_1, j_2} = d_{j_2, j_1}$ равным расстоянию $\rho_{f,\alpha}(y_{j_1}, y_{j_2})$ между седловыми точками y_{j_1} и y_{j_2} при $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$. Пусть $\mathbf{c}(f) = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^q$ — набор седловых значений. Аналогично формуле для числа $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(f, \alpha) > 0$ из построения [143, §12, формула (39)] отображения i_2 , положим

$$\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha) := \min \left\{ 1, \min_{1 \leq j_1 < j_2 \leq q} d_{j_1, j_2}, 1 - \max_{1 \leq j \leq q} |c_j| \right\} \in (0; 1], \quad (3.87)$$

$$\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_q) := \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}(f)) \in \frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1} \subset \left(-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right)^{c_{f,1}} \subset (-1; 1)^{c_{f,1}} \cong (-1; 1)^q. \quad (3.88)$$

Пусть $\hat{\tau}$ — открытая грань многогранника \mathcal{P}_f^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{\varepsilon} \mathbf{c}' \in \mathcal{P}_f^{q-1}$. Согласно обозначению, эта грань имеет вид $\tau = \tau_{\hat{J}}^{q-s}$ для некоторого $s \in [1; q]$ и некоторого разбиения $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_s)$ множества $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$ на s подмножеств $\hat{J}_k \approx \{\rho_{r_{k-1}+1}, \dots, \rho_{r_k}\}$, $1 \leq k \leq s$ (см. (2.21)). Напомним, что грань τ состоит из всех точек $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$, для которых

$$(c_{\rho_{r_{k-1}+1}}, \dots, c_{\rho_{r_k}}) \in \text{conv} \left(\Sigma_{r_k - r_{k-1}} \left(r_{k-1} + 1 - \frac{q+1}{2}, \dots, r_k - \frac{q+1}{2} \right) \right), \quad (3.89)$$

$1 \leq k \leq s$ (см. (2.21)). Положим $t_0 := -1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $t_k := c_{\rho_{r_k}}(f) - c'_{\rho_{r_k}}$ при $1 \leq k \leq s$, $t_{s+1} := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Определим функцию $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon} : [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ формулой

$$h(t) = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}(t) := t + t_0 + \sum_{k=0}^s (t_{k+1} - t_k) I_{\left(\frac{r_{k+1}-1}{q+1}\varepsilon, \left(\frac{r_{k+1}}{q+1}-\frac{1}{2}\right)\varepsilon\right)}(t), \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.90)$$

где $I_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ — гладкое двухпараметрическое семейство функций с параметрами $a < b$, такое, что $I'_{a,b} \geq 0$, $I_{a,b}|_{(-\infty; (2a+b)/3]} = 0$ и $I_{a,b}|_{[(a+2b)/3; +\infty)} = 1$ (определенное, например, как в (3.5), т.е. [143, формула (6)]).

Лемма 3.5.5 ([136, лемма 1]). *Функция $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon} : [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ является диффеоморфизмом отрезков, причем $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_s < t_{s+1}$. Выполнены следующие условия:*

- 1) $h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}(c'_j) = c'_j + t_k = c_j(f)$ для любого $j \in \hat{J}_k \subset \{1, \dots, q\}$, $1 \leq k \leq s$;
- 2) $h' \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\{c'_1, \dots, c'_q\} \cup \{-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$;
- 3) если $1 \leq u \leq s$, $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_u = s$ и

$$\mathbf{c}(f) \in \overline{\pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f} \left(\frac{\varepsilon}{q+1} \overset{\circ}{T}_{(\hat{J}_1 \cup \dots \cup \hat{J}_{k_1}, \hat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{k_2}, \dots, \hat{J}_{k_u-1+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{k_u})} \right)}, \quad (3.91)$$

то $t_1 = \dots = t_{k_1} \leq t_{k_1+1} = \dots = t_{k_2} \leq \dots \leq t_{k_u-1+1} = \dots = t_{k_u}$.

Доказательство. Покажем, что $t_0 < t_1$ и $t_s < t_{s+1}$. Так как $c_j(f) \in [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$ в силу (3.87), $c'_j \in (-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2})$ в силу (3.88), то $t_1 - t_0 = c_{\rho_{r_1}}(f) - c'_{\rho_{r_1}} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, $t_{s+1} - t_s = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - c_{\rho_{r_s}}(f) + c'_{\rho_{r_s}} > 0$.

Покажем, что $t_1 \leq \dots \leq t_s$. Из вида граней пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. обозначение 3.5.2) следует, что

$$\frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1} = \left\{ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0 \mid \Phi(\mathbf{c}) = 0, \Phi_{J_1}(\mathbf{c}) \leq 0, \emptyset \neq J_1 \subsetneq \{1, \dots, q\} \right\},$$

где линейные функции $\Phi, \Phi_{J_1} : H_f^0 \rightarrow \mathbb{R}$ определены формулами

$$\Phi(\mathbf{c}) := c_1 + \dots + c_q, \quad \Phi_{J_1}(\mathbf{c}) := - \sum_{j \in J_1} c_j + \frac{\varepsilon}{q+1} \sum_{i=1}^{|J_1|} \left(i - \frac{q+1}{2} \right) = - \sum_{j \in J_1} c_j + \frac{|J_1| - q}{2(q+1)} \varepsilon |J_1|.$$

В точке \mathbf{c}' достигается минимум функции $\widehat{\Phi}(\mathbf{c}) := \frac{1}{2}|\mathbf{c}(f) - \mathbf{c}|^2$ по всем точкам $\mathbf{c} \in \frac{\varepsilon}{q+1}\mathcal{P}_f^{q-1}$. Равенство $\Phi_{J_1}(\mathbf{c}) = 0$ равносильно тому, что $\mathbf{c} \in \tau_{(J_1, \widehat{J}_1)}^{q-2}$. Поэтому равенство $\Phi_{J_1}(\mathbf{c}') = 0$ равносильно тому, что $J_1 = \widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_k$ для некоторого $k \in [1; s-1]$. По теореме Куна–Таккера [20] имеем

$$\text{grad } \widehat{\Phi}(\mathbf{c}') + \lambda \text{grad } \Phi(\mathbf{c}') + \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k \text{grad } \Phi_{\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_k}(\mathbf{c}') = 0$$

для некоторых множителей Лагранжа $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \geq 0$. Следовательно,

$$\mathbf{c}(f) - \mathbf{c}' = \lambda(e_1 + \dots + e_q) - \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k(e_{\rho_1} + \dots + e_{\rho_{r_k}}) = \sum_{k=1}^s (\lambda - \sum_{i=k}^{s-1} \lambda_i)(e_{\rho_{r_{k-1}+1}} + \dots + e_{\rho_{r_k}}).$$

Поэтому для любого номера $j \in \widehat{J}_k$ имеем равенство $c_j(f) - c'_j = \lambda - \sum_{i=k}^{s-1} \lambda_i$. Отсюда получаем $t_1 \leq \dots \leq t_s$.

Из равенств $h(-\frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{\varepsilon}{2} + t_0 = -1$, $h(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2} + t_{s+1} = 1$, неравенств $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_s < t_{s+1}$ и неубывания функций $I_{a,b}$ следует, что $h \in \text{Diff}^+([-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}], [-1; 1])$.

Осталось доказать свойства 1–3. Для каждой функции $I_{a,b}$ (см. определение функции h) имеем $b - a = \frac{\varepsilon}{q+1}$. Отсюда и из определения функции $I_{a,b}$ следует, что в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности точки $-\frac{\varepsilon}{2}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$ имеем $h(t) \equiv t + t_0$, в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности отрезка $[(\frac{r_{k-1}+1}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon; (\frac{r_k}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon]$ имеем $h(t) \equiv t + t_k$, $1 \leq k \leq s$, а в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности точки $\frac{\varepsilon}{2}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$ имеем $h(t) \equiv t + t_{s+1}$. С другой стороны, из условия $\frac{q+1}{\varepsilon}\mathbf{c}' \in \overset{\circ}{\tau}_{\widehat{J}}$ следует, что $c'_j \in [(\frac{r_{k-1}+1}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon; (\frac{r_k}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon]$ (см. (3.89)) для любого номера $j \in \widehat{J}_k$, откуда $h(c'_j) = c'_j + t_k$, $1 \leq k \leq s$.

Для любого $\mathbf{c} \in \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}^{-1}(\overset{\circ}{\tau}_{(\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_1}, \widehat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_2}, \dots, \widehat{J}_{k_{u-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_u})})$ имеем

$$\mathbf{c} - \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^u (\mu - \mu_i - \dots - \mu_{u-1})(e_{\rho_{r_{k_{i-1}+1}}} + \dots + e_{\rho_{r_{k_i}}})$$

для некоторых $\mu, \mu_1, \dots, \mu_u \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$. Значит, в случае (3.91) выполнено $t_{k_{i-1}+1} = \dots = t_{k_i} = \mu - \mu_i - \dots - \mu_{u-1}$, $1 \leq i \leq u$, где $k_0 := 0$. Лемма 3.5.5 доказана. \square

Теперь перейдем собственно к доказательству теоремы 3.5.4.

Шаг 1. Если $q = 0$, то $\mathbb{F}^0 = \mathbb{F}^1$ и доказывать нечего. Пусть далее число седел $q > 0$. Сопоставим оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ функцию Морса $\widetilde{f} := h^{-1} \circ f$, где $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}$ — диффеоморфизм из леммы 3.5.5. Из леммы 3.5.5 и определения 3.2.2 следует, что $(\widetilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}$. Так как $h[-1; 1] = [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$, то $\frac{2}{\varepsilon}(\widetilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Покажем, что $\frac{2}{\varepsilon}(\widetilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^0$. Поскольку $\mathbf{c}(\widetilde{f}) = \mathbf{c}' \in \frac{\varepsilon}{q+1}\mathcal{P}_f^{q-1}$, то $\mathbf{c}(\frac{2}{\varepsilon}\widetilde{f}) = \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{c}' \in \frac{2}{q+1}\mathcal{P}_f^{q-1}$. Это доказывает выполнение условия (i) из определения 3.5.3 пространства \mathbb{F}^0 . Осталось проверить условие (ii). Пусть γ — сепаратриса оснащенной функции (f, α) , соединяющая седловые точки $y_i, y_j \in \mathcal{C}_{\widetilde{f}, 1} = \mathcal{C}_{f, 1}$, $1 \leq i < j \leq q$. Тогда

$$|c_i - c_j| = |c_i - c_j| + \left| \int_{\gamma} \alpha \right| = \int_{\gamma} (|df| + |\alpha|) \geq \int_{\gamma} \sqrt{df^2 + \alpha^2} \geq \rho_{f, \alpha}(y_i, y_j) \geq \varepsilon$$

в силу (3.87). Предположим также, что седловые точки принадлежат одному и тому же подмножеству \widehat{J}_k разбиения \widehat{J} , где $1 \leq k \leq s$. Тогда из леммы 3.5.5 следует, что $c_i = c'_i + t_k$ и $c_j = c'_j + t_k$, а потому $c_i - c_j = c'_i - c'_j$. Отсюда с учетом $c'_i, c'_j \in (-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2})$ получаем $|c_i - c_j| = |c'_i - c'_j| < \varepsilon$, что противоречит вышеприведенному неравенству. Таким образом, $\frac{2}{\varepsilon}(\widetilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^0$, и возникает отображение

$$p_4: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^0, \quad (f, \alpha) \mapsto \frac{2}{\varepsilon}(\widetilde{f}, \alpha) = \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)} \left(h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}^{-1} \circ f, \alpha \right). \quad (3.92)$$

Шаг 2. Докажем непрерывность отображения $p_4: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^0$.

Для любых $\kappa \in (0; 1)$ и $\mathbf{c} \in (-1 + \kappa; 1 - \kappa)^q$ рассмотрим диффеоморфизмы $m_{\frac{\kappa}{2}}: [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\kappa}{2}; \frac{\kappa}{2}]$, $t \mapsto \frac{\kappa}{2}t$, и $h_{\mathbf{c}, \kappa} \circ m_{\frac{\kappa}{2}}: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$ (см. (3.90)). Покажем, что сопоставление

$$H: (\mathbf{c}, \kappa) \mapsto h_{\mathbf{c}, \kappa} \circ m_{\frac{\kappa}{2}} \in \text{Diff}^+[-1; 1]$$

непрерывно на множестве таких пар (\mathbf{c}, κ) , что $\mathbf{c} \in (-1 + \kappa; 1 - \kappa)^q$ и $\kappa \in (0; 1)$. Пусть (\mathbf{c}, κ) — любая пара из этого множества и $\overset{\circ}{\tau} := \overset{\circ}{\tau}_{(\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_s)}$ — открытая грань многогранника \mathcal{P}^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{\kappa} \pi_{\frac{\kappa}{q+1}}(\mathbf{c}) \in \mathcal{P}^{q-1}$. Из определения $h_{\mathbf{c}, \kappa}$ и непрерывности $\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}$ следует непрерывность ограничения H на множество таких пар (\mathbf{c}', κ') , что $\frac{q+1}{\kappa'} \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}(\mathbf{c}') \in \overset{\circ}{\tau}$. Осталось проверить непрерывность в точке (\mathbf{c}, κ) ограничения H на множество таких пар (\mathbf{c}', κ') , что $\mathbf{c}' \in \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1} \overset{\circ}{\tau}) \cup \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1} \overset{\circ}{\tau}_1)$, для любой открытой грани $\overset{\circ}{\tau}_1$ многогранника \mathcal{P}^{q-1} . Из непрерывности $\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}$ следует, что если $\mathbf{c} \in \partial\left(\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa}{q+1} \overset{\circ}{\tau}_1)\right)$, то $\tau \subset \tau_1$. Тогда грань τ_1 имеет вид $\tau_1 = \tau_{(\hat{J}_1 \cup \dots \cup \hat{J}_{k_1}, \hat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{k_2}, \dots, \hat{J}_{k_{u-1}+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{k_u})}$. Согласно лемме 3.5.5, имеем $t_1 = \dots = t_{k_1} \leq t_{k_1+1} = \dots = t_{k_2} \leq \dots \leq t_{k_{u-1}+1} = \dots = t_{k_u}$. Значит, $h_{\mathbf{c}, \kappa}(t) = t + t_0 + \sum_{i=0}^u (t_{k_{i+1}} - t_{k_i}) I_{\left(\frac{r_{k_i}}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\kappa, \left(\frac{r_{k_i+1}}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\kappa}(t)$, где $k_0 := 0$, т.е. диффеоморфизм $h_{\mathbf{c}, \kappa}$ определяется той же формулой, что и $h_{\mathbf{c}', \kappa'}$ при $\mathbf{c}' \in \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1} \overset{\circ}{\tau}_1)$. Непрерывность H доказана.

Согласно (3.92), выполнено равенство

$$p_4(f, \alpha) = \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)} \left(h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}^{-1} \circ f, \alpha \right) = \left((H(\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)))^{-1} \circ f, \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)} \alpha \right).$$

Отображение $\text{Diff}^+[-1; 1] \rightarrow \text{Diff}^+[-1; 1]$, $h \mapsto h^{-1}$, непрерывно в C^∞ -топологии в силу [143, лемма 10.1]. Отсюда, а также из непрерывности функции $\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha)$, сопоставления $f \mapsto \Sigma_q \mathbf{c}(f) \in \mathbb{R}^q / \Sigma_q$ и отображения H (см. выше) следует непрерывность отображения p_4 .

Шаг 3. Покажем, что отображение включения $i_4: \mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. Композиция $i_4 \circ p_4: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ действует следующим образом: $(f, \alpha) \mapsto \frac{2}{\varepsilon}(h^{-1} \circ f, \alpha)$, где $\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha)$, $h := h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon} \in \text{Diff}^+([-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}], [-1; 1])$ (см. лемму 3.5.5). Зададим гомотопию этой композиции в $\text{id}_{\mathbb{F}^1}$ формулой

$$(f, \alpha) \mapsto (f_t, \alpha_t) := (1-t) \cdot \frac{2}{\varepsilon}(h^{-1} \circ f, \alpha) + t \cdot (f, \alpha), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Функция f_t является функцией Морса из \mathcal{F}^1 с теми же линиями уровня и тем же множеством \mathcal{C}_f критических точек, что и у функции f , причем в силу леммы 3.5.5(2) функция f_t в окрестности каждой критической точки есть функция f , которая умножена на число $(1-t)\frac{2}{\varepsilon} + t > 0$ и к которой прибавлена некоторая константа, а форма α_t есть форма α , умноженная на то же самое число. Отсюда следует, что гомотопия не выводит из пространства \mathbb{F}^1 .

Покажем, что ограничение на \mathbb{F}^0 этой гомотопии не выводит из пространства \mathbb{F}^0 . При отображении $m_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f} \Big|_{\frac{2}{q+1} \overset{\circ}{\tau} \mathcal{P}^{q-1}}$ образ любой открытой грани $\frac{2}{q+1} \overset{\circ}{\tau}$ многогранника $\frac{2}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$ лежит в грани $\frac{2}{q+1} \overset{\circ}{\tau}$. Отсюда следует, что если $\mathbf{c}(f) \in \frac{2}{q+1} \overset{\circ}{\tau}$, то $\mathbf{c}(f_t) = (1-t)\frac{2}{\varepsilon} \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}(f)) + t\mathbf{c}(f) \in \frac{2}{q+1} \overset{\circ}{\tau}$ при $0 < t \leq 1$. Значит, паре (f_t, α_t) отвечает то же разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$, что и паре (f, α) . Поэтому выполнение условия (ii) для пар (f_t, α_t) , $0 < t \leq 1$, следует из выполнения аналогичного условия для пары (f, α) с учетом $\alpha_t = ((1-t)\frac{2}{\varepsilon} + t)\alpha$.

По построению, оба отображения i_4, p_4 и гомотопия \mathcal{D}^\pm -эквивариантны. Теорема 3.5.4 доказана. \square

3.5.3 \mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $\mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty$ и деформационные ретракции $\widetilde{\mathbb{K}} \subset \widetilde{\mathbb{K}}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}}$

Обозначим через $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}}(M)$ пространство, полученное из $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых отмеченными) для функций $f \in \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$, где $\widehat{p}, \widehat{r}, \widehat{q}$ — количество отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек соответственно. Пусть $\mathbb{F}^0 := \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}}^0(M)$ и $\mathbb{F}^1 := \mathbb{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}}^1(M)$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса. Пусть $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ — пространство диффеоморфизмов, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов. Снабдим C^∞ -топологией пространства $\mathcal{F}, \mathbb{F}^1, \mathcal{D}^0$ (см. §3.2.2 или [143, §4]). В настоящем разделе, как и в §3.4.1, мы воспользуемся тем, что из результатов [122, 69, 70] следует гомотопическая эквивалентность (3.2), точнее ее частный случай

$$\mathcal{D}^0 \sim R_{\mathcal{D}^0}, \quad (3.93)$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ — одно из многообразий $SO(3), T^2$ и точка (при $M = S^2, T^2$ и $\chi(M) < 0$).

Предположим, что количество отмеченных критических точек $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$. Пусть

$$\widetilde{\mathbb{K}} := \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}} \subset \widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathcal{M}}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}}$$

— комплекс оснащенных функций Морса и содержащее его $3q$ -мерное многообразие (см. §§3.3.3 и 3.3.4, т.е. [134, §4]). Согласно §3.4.3 (т.е. [135, §4]) имеется гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$. Рассмотрим универсальное пространство модулей $\widetilde{\mathbb{K}}^\infty := \overline{\text{Ev}}(\mathbb{F}^0/\mathcal{D}^0) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ специальных оснащенных функций Морса.

Теорема 3.5.6 ([136, теорема 2]). Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}}(M)$ — пространство функций Морса на замкнутой связной ориентированной поверхности M и количество пронумерованных критических точек

$$\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M). \quad (3.94)$$

Тогда существуют гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}.$$

Определение 3.5.7 (ср. определения 2.7.8, 2.2.4(В), 3.1.5(Б)). Функции Морса $f, g \in \mathcal{F}$ назовем топологически эквивалентными, если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ и h_1 сохраняет нумерацию отмеченных критических точек. Множество функций из \mathcal{F}^1 , топологически эквивалентных f , обозначим через $[f]_{\text{top}}$.

Лемма 3.5.8 ([136, лемма 2]). В случае (3.94) имеется \mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $\mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty$. При этом $\widetilde{\mathbb{K}}^\infty$ является строгим деформационным ретрактом многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$, а $\widetilde{\mathbb{K}}$ — строгим деформационным ретрактом полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}^\infty$.

Доказательство. Первое утверждение следует из существования \mathcal{D}^0 -эквивариантного гомеоморфизма $\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$, согласованного с $\overline{\text{Ev}}$ (см. §3.4.3, т.е. [135, §4]). В силу теоремы 3.5.4 отображение включения $\mathbb{F}^0/\mathcal{D}^0 \approx \widetilde{\mathbb{K}}^\infty \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ является гомотопической эквивалентностью. Согласно теоремам 3.3.13 и 3.3.14 (т.е. [134]), имеются замкнутое покрытие $\widetilde{\mathbb{K}} = \bigcup_{[f]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ и открытое покрытие $\widetilde{\mathcal{M}} = \bigcup_{[f]_{\text{top}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$, а также выпуклые множества

$$D_{[f]_{\text{top}}} \subset S_{\geq [f]_{\text{top}}} \subset H_{[f]_{\text{top}}}^0 \cong \mathbb{R}^q, \quad U_{[f]_{\text{top}}} \subset U_{[f]_{\text{top}}}^\infty \subset H_{[f]_{\text{top}}}^1 \cong \mathbb{R}^{2q},$$

такие, что $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ и отображение включения $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}}$ есть композиция

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}})/\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} \subset (S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^\infty)/\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} \approx \widetilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]_{\text{top}}},$$

где $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ — группа, действующая свободно, дискретно и покомпонентно на $S_{\geq [f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}$ (более точные определения см. в §§3.3.3 и 3.3.4, т.е. [134, §4]). Из определения “вычисляющего” отображения $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ (см. §3.4.3, т.е. [135, §4]) следует, что

$$\tilde{\mathbb{K}}^{\infty} = \bigcup_{[f]_{\text{top}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}, \quad \text{где } \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\infty} \approx (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}) / \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}.$$

Отсюда $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbb{K}}^{\infty})$ — пара полиэдров (а потому корасслоение по теореме Борсука [34, §5.5]). Значит, $\tilde{\mathbb{K}}^{\infty}$ — строгий деформационный ретракт многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (см. [29, гл. 1, §4]).

Строгая деформационная ретракция для пары $\tilde{\mathbb{K}} \subset \tilde{\mathbb{K}}^{\infty}$ получается из строгих деформационных ретракций для пар соседних пространств в цепочке $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{-1}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_0^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_1^{\infty} \subset \dots \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{q-1}^{\infty} = \tilde{\mathbb{K}}^{\infty}$, где $\tilde{\mathbb{K}}_k^{\infty} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\text{top}}} \leq k} \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{K}}^{\infty}$. Строгую деформационную

ретракцию для пары $\tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{k-1}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_k^{\infty}$ определим с помощью строгих деформационных ретракций для пар $((D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}) \cup (\partial D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty})) / \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} \subset (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}^{\infty}) / \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$, таких, что $\dim D_{[f]_{\text{top}}} = k$ (см. §3.4.3 или [134, §4]). \square

Доказательство теоремы 3.5.6. По теореме 3.5.4 и лемме 3.5.8 имеем $\mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^{\infty} \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$. С учетом (3.93) и того, что забывающее отображение и отображение включения $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}$ являются гомотопическими эквивалентностями (см. теорему 3.2.5 или [143, теорема 2.5]), получаем теорему 3.5.6. \square

Подведем итоги в важном частном случае: когда поверхность M замкнута и нет отмеченных критических точек. Из теоремы 3.5.6, предложения 3.3.15 о строении ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$, и следствия 3.3.5 получаем

Следствие 3.5.9. Пусть M — связная ориентируемая замкнутая поверхность и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(p, q, r)(M)$ — пространство функций Морса, имеющих p, q, r критических точек локальных минимумов, локальных максимумов и седел на поверхности M .

(А) Предположим, что либо $\chi(M) < 0$, либо $M = T^2$ — тор и количество точек локальных максимумов (или минимумов) равно $r = 1$ (соответственно $p = 1$). Тогда верны либо гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathbb{F} \sim \tilde{\mathbb{K}}$ и $[f]_{\text{top}} \sim \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ в случае $\chi(M) < 0$, либо $\mathcal{F} \sim \mathbb{F} \sim T^2 \times \tilde{\mathbb{K}}$ и $[f]_{\text{top}} \sim T^2 \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ в случае $M = T^2$, где $f \in \mathcal{F}^1$ — любая функция Морса и $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ — соответствующая ручка комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$.

(В) Предположим, что количества точек локальных минимумов и локальных максимумов минимальны, т.е. равны $p = r = 1$. Тогда косою цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ является цилиндрически-полиэдральным. В частности, любая его косая цилиндрическая ручка является цилиндрической, а потому гомотопически эквивалентна некоторому тору. Кроме того, корректно определены комплекс \tilde{K} функций Морса из следствия 3.3.5 и каноническая проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$.

(С) Предположим, что либо количество седловых критических точек $q \leq 2$, либо количество точек локальных минимумов $p = 1$ и количество точек локальных максимумов $r \leq 3$, либо количество точек локальных максимумов $r = 1$ и количество точек локальных минимумов $p \leq 3$. Тогда любая косая цилиндрическая ручка комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентна некоторому тору.

Доказательство. (А) Если $\chi(M) < 0$, то число отмеченных критических точек равно $0 > \chi(M)$, т.е. верно неравенство (3.19). Если $M = T^2$ и количество точек локальных максимумов $r = 1$, то без ограничения общности можно считать, что единственная точка локального максимума пронумерована, т.е. верно неравенство (3.19). Из теоремы 3.5.6 получаем гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathbb{F} \sim \tilde{\mathbb{K}}$ в первом случае и $\mathcal{F} \sim \mathbb{F} \sim T^2 \times \tilde{\mathbb{K}}$ во втором.

(В) следует из предложения 3.3.15 (А) и следствия 3.3.5.

(С) следует из предложения 3.3.15 (В). \square

Предположим теперь, что поверхность M компактна и может иметь непустой край, а функции Морса могут иметь фиксированные критические точки. Определим группу диффеоморфизмов \mathcal{D}^0 как в обозначении 3.1.4, а многообразие $R_{\mathcal{D}^0}$ как в (3.2).

Теорема 3.5.10. *Пусть M — компактная связная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. определение 3.1.3). Пусть $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса. Предположим, что количество пронумерованных критических точек

$$\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M).$$

Пусть $\tilde{\mathbb{K}} \subset \tilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ — соответствующие комплекс оснащенных функций Морса и универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса (см. теорему 3.3.3 и утверждение 3.4.7). Определим $\tilde{\mathbb{K}}^\infty \subset \tilde{\mathcal{M}}$ формулой $\tilde{\mathbb{K}}^\infty \approx \mathbb{F}^0 / \mathcal{D}^0$. Тогда существуют гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \tilde{\mathbb{K}}.$$

Доказательство проводится дословным повторением доказательств теоремы 3.5.4, леммы 3.5.8 и теоремы 3.5.6. □

3.6 Примеры комплексов $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, исследование гомотопической эквивалентности $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}$ при $\chi(M) < 0$

Согласно предыдущим разделам 3.3–3.5, в случае (3.19) комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (теорема 3.3.3) и имеет гомотопический тип пространства \mathcal{F} функций Морса (теорема 3.5.6). Если при этом все точки локальных экстремумов пронумерованы или все седловые точки пронумерованы, то определены комплекс \tilde{K} функций Морса, являющийся полиэдральным комплексом, и естественный эпиморфизм комплексов $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ (следствие 3.3.5).

В настоящем разделе для полноты изложения изучаются следующие свойства комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ в случае (3.19). А именно: сначала мы опишем некоторые примеры комплексов $\tilde{\mathbb{K}}$ и пространств \mathcal{F} (с точностью до гомотопической эквивалентности), в том числе пример, изложенный автором в феврале 2012 г. на семинаре “Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика” (рук. С.М. Натанзон, О.В. Шварцман, О.К. Шейнман) в НМУ. Затем мы докажем несжимаемость ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ и исследуем гомотопическую эквивалентность $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}$ в случае (3.19). В частности, мы докажем теорему 3.2.8 (Д).

3.6.1 Примеры: топология и стратификация Максвелла пространств функций Морса $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$, $\mathcal{F}_{1,2,3}^{\text{num}}(S^2)$ и $\mathcal{F}_{2,2,2}^{\text{num}}(S^2)$ на торе и сфере

Пусть M — гладкая связная ориентированная замкнутая поверхность. Обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}$ пространство $\mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}(M)$ функций Морса f на M , имеющих $n_\lambda = |\mathcal{C}_{f, \lambda}|$ критических точек индекса λ при $\lambda = 0, 1, 2$, где $n_0, n_2 > 0$ и $n_0 - n_1 + n_2 = \chi(M)$. Обозначим через

$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{n_0, n_1, n_2}$ соответствующее пространство $\mathbb{F}_{n_0, n_1, n_2}(M)$ оснащенных функций Морса, а через $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ его соответствующие подпространства (см. определения 3.5.1(В) и 3.5.3(В)). Поясним эти обозначения: числа n_0, n_1, n_2 полностью определяют поверхность M с точностью до диффеоморфизма, так как $\chi(M) = n_0 - n_1 + n_2$. Поэтому необязательно указывать поверхность M в обозначении пространств \mathcal{F} , \mathbb{F} и т.п.

Определение 3.6.1. Пусть G° — хордовая диаграмма. Стянем каждую окружность этой хордовой диаграммы в точку, полученный граф обозначим через G . Скажем, что хордовая диаграмма G° получена из графа G операцией *раздутия вершин*.

В случае $(n_0, n_1, n_2) = (1, 2, 1)$ функций Морса на торе с $n_1 = 2$ седловыми критическими точками косоугольно-цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}_{1,2,1}$ является цилиндрическим (по следствию 3.5.9 (В)) и состоит из цилиндрических ручек индексов 0 и 1, причем каждая цилиндрическая ручка комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ индекса 0 является “круглой ручкой” (т.е. гомотопически эквивалентной окружности S^1), а каждая цилиндрическая ручка индекса 1 является 1-мерной клеткой. Кроме того, по следствию 3.5.9 (В) корректно определены комплекс \tilde{K} функций Морса и проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$. Значит, комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентен хордовой диаграмме \tilde{K}° , в которой окружности отвечают ручкам индекса 0, а хорды — ручкам индекса 1.

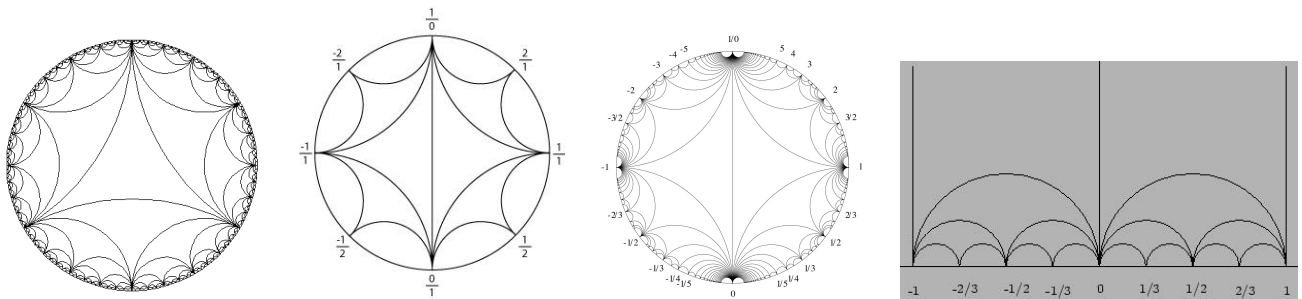


Рис. 3.2. Граф Фэри в единичном круге и в верхней полуплоскости

Пусть F — граф Фэри (Farey graph [72]), показанный на рис. 3.2. Он является плоским графом с вершинами в рациональных граничных точках двумерного диска $D = D^2$ (при гомеоморфном отождествлении $\partial D \approx \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, где число $\infty = \frac{1}{0} \in \overline{\mathbb{R}}$ и отвечающая ему граничная точка считаются рациональными). Этот граф задает триангуляцию диска D^2 , из границы которого выкинуты все иррациональные точки. Если гомеоморфно отождествить $\partial D \approx \overline{\mathbb{R}}$, то точки $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ соединены ребром в графе Фэри F тогда и только тогда, когда $mq - np = \pm 1$.

Хорошо известно, что любое ребро $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q})$ в графе Фэри F является границей ровно двух треугольников данной триангуляции, а именно треугольников с вершинами $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{m+p}{n+q})$ и $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{m-p}{n-q})$ (т.е. третья вершина треугольника получается из первых двух согласно “вульгарному правилу сложения дробей” [72]).

Пример 3.6.2. (А) Пространство функций Морса $\mathcal{F}_{1,2,1}$ на торе $T^2 = (S^1)^2$ имеет гомотопический тип $T^2 \times F^\circ$, где F° — хордовая диаграмма, получающаяся из графа Фэри F заменой каждой вершины окружностью, а каждого ребра — хордой (т.е. операцией раздутия вершин, см. определение 3.6.1). В частности, $\mathcal{F}_{1,2,1} \sim T^2 \times (\bigvee_{\mathbb{N}} S^1)$, $\pi_k(\mathcal{F}_{1,2,1}) = 0$ при $k \neq 1$, а фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{F}_{1,2,1})$ изоморфна прямому произведению \mathbb{Z}^2 и свободной группы бесконечного ранга. В частности, группы $H_k(\mathcal{F}_{1,2,1}) \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ изоморфны свободной абелевой группе бесконечного ранга при $k = 1, 2, 3$, а при остальных k тривиальны.

(В) Пространство $\mathcal{F}_{1,2,1}^1$ состоит из бесконечного числа лево-правых орбит (т.е. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(S^2)$ -орбит, т.е. классов топологической эквивалентности функций Морса), каждая орбита имеет коразмерность 0 или 1, причем открытые орбиты находятся во взаимно-однозначном соответствии с вершинами графа Фэри F (т.е. с окружностями соответствующей хордовой диаграммы F°), а неоткрытые орбиты — с ребрами графа Фэри (т.е. с хордами хордовой диаграммы F°). При этом каждая открытая орбита гомотопически эквивалентна 3-мерному тору $T^2 \times S^1$, а каждая неоткрытая орбита — двумерному тору T^2 .

Обоснование примера. Из следствия 3.5.9 (А, В) получаем три гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм:

$$\mathcal{F}_{1,2,1} \sim \mathbb{F}_{1,2,1} \approx \mathcal{D}(T^2) \times \tilde{\mathbb{K}}_{1,2,1} \sim T^2 \times \tilde{K}_{1,2,1}^\circ.$$

Здесь $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,1}$ — это комплекс функций Морса из следствия 3.3.5, в данном случае он является графом смежностей открытых орбит в $\mathcal{F}_{1,2,1}^1$ (т.е. открытых стратов в $\tilde{\mathcal{M}}_{1,2,1}$), $\tilde{K}_{1,2,1}^\circ = \tilde{K}^\circ$ — это хордовая диаграмма, получающаяся из графа \tilde{K} раздутием вершин (определение 3.6.1). Нетрудно проверяется гомотопическая эквивалентность $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{1,2,1} \sim \tilde{K}^\circ$. Сопоставим лево-правой орбите любой простой функции Морса $f \in \mathcal{F}_{1,2,1}$ гомологический класс (с точностью до знака) нестягиваемой связной компоненты линии уровня функции f . Легко проверяется, что это сопоставление корректно и биективно. отождествим гомологии $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ с помощью некоторого разложения $T^2 = S^1 \times S^1$. При этом отождествлении указанному гомологическому классу отвечает несократимый целочисленный вектор $\pm(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ с точностью до знака. Сопоставим этому вектору рациональное число $\frac{m}{n} \in \mathbb{R}$, т.е. вершину графа Фэри F . Мы получили биекцию между множествами вершин графов \tilde{K} и F . Нетрудно проверяется, что эта биекция продолжается до изоморфизма графов $\tilde{K} \approx F$. Поэтому соответствующие хордовые диаграммы гомотопически эквивалентны: $\tilde{K}^\circ \sim F^\circ$.

(В) Согласно теореме 3.5.4 и лемме 3.5.8, ограничение отображений $\mathbb{F} \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}[f]_{\text{top}}$ любой орбиты является гомотопической эквивалентностью между $\text{Forg}^{-1}[f]_{\text{top}}$ и прямым произведением \mathcal{D}^0 и соответствующей косою цилиндрической ручкой. С учетом (3.93) и того, что ограничение забывающего отображения $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}[f]_{\text{top}}$ любой орбиты является гомотопической эквивалентностью с этой орбитой (см. теорему 3.2.5 или [143, теорема 2.5]), получаем гомотопическую эквивалентность между любой орбитой $[f]_{\text{top}}$ и прямым произведением тора T^2 и соответствующей косою цилиндрической ручкой. Осталось вспомнить, что ввиду $n_1 = 2$ всякая ручка индекса 0 гомотопически эквивалентна окружности (т.е. соответствующей окружности хордовой диаграммы \tilde{K}°), а всякая ручка индекса 1 стягиваема (т.е. гомотопически эквивалентна соответствующей хорде хордовой диаграммы \tilde{K}°). \square

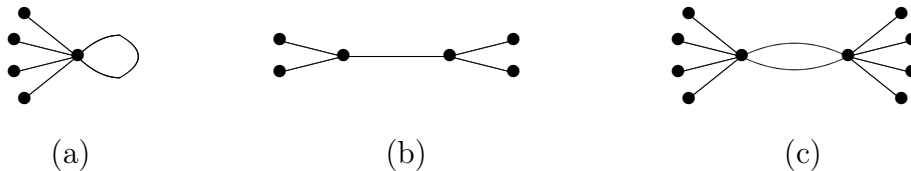


Рис. 3.3. Комплексы $\tilde{K} = \tilde{K}_{2,2,2;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ функций Морса на сфере, где количества $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{r})$ пронумерованных критических точек равны (а) (2, 0, 2), (б) (2, 2, 0), (с) (2, 2, 2) соответственно.

Пусть теперь $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ — пространство функций Морса на замкнутой связной ориентируемой поверхности M , $\chi(M) = p - q + r$, имеющих p, q, r критических точек индексов

0, 1, 2 (т.е. p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов), причем $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ из этих точек отмечены и пронумерованы. В частности, $\mathcal{F}_{p,q,r} = \mathcal{F}_{p,q,r;0,0,0}$. В случае $p - \hat{p} \leq 1$, $q - \hat{q} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$ обозначим пространство $\mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ через $\mathcal{F}_{p,q,r}^{\text{num}}$; оно состоит из функций Морса с пронумерованными критическими точками.

Аналогично примеру 3.6.2 обосновываются следующие примеры.

Примеры 3.6.3. Предположим, что $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ и $q \leq 2$. Тогда:

(А) Определены соответствующие комплекс $\tilde{K} = \tilde{K}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ функций Морса из \mathcal{F}^1 , являющийся графом, и комплекс $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ оснащенных функций Морса из \mathcal{F}^1 (см. теорему 3.3.3 и следствие 3.3.5). Существует гомотопическая эквивалентность $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ$ между комплексом $\tilde{\mathbb{K}}$ и хордовой диаграммой $\tilde{K}^\circ = \tilde{K}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}^\circ$, полученной из графа \tilde{K} операцией раздутия вершин (см. определение 3.6.1). Ограничение этой гомотопической эквивалентности на каждую ручку комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ является гомотопической эквивалентностью на свой образ, где каждая ручка индекса 0 комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ переходит в соответствующую окружность хордовой диаграммы \tilde{K}° , а каждая ручка индекса 1 в соответствующую хорду хордовой диаграммы \tilde{K}° . Прямое произведение $SO(3)$ или T^2 (в зависимости от $M = S^2$ или $M = T^2$) на каждую ручку комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентно соответствующей лево-правой орбите (т.е. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(M)$ -орбите) в \mathcal{F}^1 , т.е. классу топологической эквивалентности функций Морса в \mathcal{F}^1 , причем открытые орбиты отвечают вершинам графа \tilde{K} функций Морса (т.е. окружностям хордовой диаграммы \tilde{K}°), а неоткрытые орбиты — ребрам графа \tilde{K} (т.е. хордам хордовой диаграммы \tilde{K}°).

(В) Пространство $\mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ имеет следующий гомотопический тип:

(а) $\mathcal{F}_{1,1,2;0,0,2} \approx \mathcal{F}_{1,1,2;1,0,2} \approx \mathcal{F}_{1,1,2;0,1,2} \approx \mathcal{F}_{1,1,2;1,1,2} \sim SO(3)$, граф $\tilde{K}_{1,1,2;0,0,2} = \tilde{K}_{1,1,2;1,1,2}$ функций Морса является точкой;

(б) $\mathcal{F}_{1,2,3;0,0,3} \approx \mathcal{F}_{1,2,3;1,0,3} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{1,2,3;0,0,3}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,3;0,0,3}$ функций Морса является треугольником, и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_4 S^1$;

(с) $\mathcal{F}_{1,2,3;0,2,0} \approx \mathcal{F}_{1,2,3;1,2,0} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{1,2,3;0,2,0}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,3;0,2,0}$ функций Морса является сегментом (т.е. состоит из двух вершин и соединяющего их ребра), и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_2 S^1$;

(д) $\mathcal{F}_{1,2,3;0,2,3} \approx \mathcal{F}_{1,2,3;1,2,3} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{1,2,3;0,2,3}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,3;0,2,3}$ функций Морса является шестиугольником, и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_7 S^1$;

(е) $\mathcal{F}_{2,2,2;2,0,2} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{2,2,2;2,0,2}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{2,2,2;2,0,2}$ функций Морса имеет вид как на рис. 3.3 (а), и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_6 S^1$;

(ф) $\mathcal{F}_{2,2,2;2,2,0} \approx \mathcal{F}_{2,2,2;0,2,2} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{2,2,2;2,2,0}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{2,2,2;2,2,0}$ функций Морса имеет вид как на рис. 3.3 (б), и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_6 S^1$;

(г) $\mathcal{F}_{2,2,2}^{\text{num}} = \mathcal{F}_{2,2,2;2,2,2} \sim SO(3) \times \tilde{K}_{2,2,2;2,2,2}^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{2,2,2;2,2,2}$ функций Морса имеет вид как на рис. 3.3 (с), и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim \bigvee_{11} S^1$;

(х) $\mathcal{F}_{1,2,1} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;1,0,0} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;0,0,1} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;1,0,1} \sim (S^1)^2 \times F^\circ$, граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,1} = \tilde{K}_{1,2,1;1,0,1}$ функций Морса изоморфен графу Фэри F из примера 3.6.2, см. рис. 3.2, и $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ \sim F^\circ \sim \bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$;

(и) $\mathcal{F}_{1,2,1;0,2,0} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;1,2,0} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;0,2,1} \approx \mathcal{F}_{1,2,1;1,2,1} \sim (S^1)^2 \times \tilde{K}_{1,2,1;0,2,0}^\circ$, где граф $\tilde{K} = \tilde{K}_{1,2,1;0,2,0}$ получается из графа Фэри F “удвоением” множеств вершин $V(\tilde{K}) := \{0, 1\} \times V(F)$ и ребер $E(\tilde{K}) := \{0, 1\} \times E(F)$, причем для любого ребра $e \in E(F)$ с концами $v_0, v_1 \in V(F)$ одно из соответствующих ребер $(0, e), (1, e) \in E(\tilde{K})$ имеет концы $(0, v_0), (1, v_1)$, а другое — концы $(0, v_1), (1, v_0)$.

(С) В частности, числа Бетти пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}$ (гомотопический тип которого в некоторых случаях найден в примерах 3.6.2 и 3.7.9(А)) допускают следующие верхние оценки (в терминах полинома Пуанкаре пространства $\mathcal{F}_{p,q,r}$):

- (a) $P(\mathcal{F}_{1,1,2}; t) = P(\mathcal{F}_{1,1,2;0,0,2}; t) - (1+t)R_1(t) = 1 + t^3 - (1+t)R_1(t);$
- (c) $P(\mathcal{F}_{1,2,3}; t) = P(\mathcal{F}_{1,2,3;2,0,2}; t) - (1+t)R_2(t) = (1+t^3)(1+6t) - (1+t)R_2(t);$
- (e,f) $P(\mathcal{F}_{2,2,2}; t) = P(\mathcal{F}_{2,2,2;0,2,0}; t) - (1+t)R_3(t) = (1+t^3)(1+2t) - (1+t)R_3(t);$
- (h) $P(\mathcal{F}_{1,2,1}; t) = (1+t)^2(1+\infty t) = 1 + \infty t + \infty t^2 + \infty t^3,$

где $R_i = R_i(t)$ — некоторый полином с неотрицательными целыми коэффициентами.

Обоснование примеров. (А) По условию выполнено (3.94) и количество седел $n_1 = 2$. Отсюда следует, что выполнены условия следствия 3.3.5, т.е. либо (a) $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$, либо (b) $q - \hat{q} \leq 1$. Действительно: для $M = T^2$ выполнено (a), а для $M = S^2$ выполнено (b) или (a). Поэтому по следствию 3.3.5 корректно определены комплекс \tilde{K} функций Морса и проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$, причем комплекс \tilde{K} функций Морса является полиэдральным комплексом размерности $q - 1$. Поэтому при $q \leq 2$ имеем $\dim \tilde{K} \leq 1$, т.е. \tilde{K} является графом. Далее, по предложению 3.3.15(В), при $q = 2$ все косые цилиндрические ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ индекса 0 являются “круглыми”, т.е. гомотопически эквивалентны тору размерности $d([f]) = 1$, т.е. окружности, а все ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ индекса $q - 1$ изоморфны пермutoэдру порядка $q = 2$, т.е. отрезку. Значит, комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ гомотопически эквивалентен хордовой диаграмме \tilde{K}° , в которой окружности отвечают ручкам индекса 0, а хорды — ручкам индекса 1. Отсюда следует гомотопическая эквивалентность $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}^\circ$, а свойства ее ограничения на ручки доказывается аналогично доказательству леммы 3.5.8. Остальные требуемые свойства следуют из теоремы 3.4.1 (В) и из гомотопической эквивалентности любого страта многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ соответствующей ручке комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$.

(В) выводится из (А) и теорем 3.3.3 и 3.5.6 аналогично обоснованию примера 3.6.2 (А). При этом явный вид графа \tilde{K} функций Морса из \mathcal{F}^1 в каждом конкретном случае находится из того, что при $q \leq 2$ граф \tilde{K} является графом смежностей открытых орбит в \mathcal{F}^1 (т.е. открытых стратов в $\tilde{\mathcal{M}}$).

(С) выводится из (В) и леммы 3.3.16. □

3.6.2 Несжимаемость ручек комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$. Исследование гомотопической эквивалентности $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{K}$ комплексов функций Морса

В теореме 3.2.8 в случае (3.19) описан косо́й полиэдрально-цилиндрический комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$, а в теореме 3.5.6 построена гомотопическая эквивалентность $\mathcal{F} \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$. В теореме 2.7.11 и следствии 3.3.5 описаны полиэдральный комплекс \tilde{K} и естественная проекция комплексов $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$. Возникает естественный вопрос: когда проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью?

Следующее утверждение показывает, что иногда ответ положительный, например, в случае пространств $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{extr}}$ функций Морса, все точки локальных экстремумов которых фиксированы (например, в ситуации теоремы 2.7.11 для $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\text{fix}}$, т.е. когда все критические точки закреплены, а также в ситуации теорем 2.6.1 и 2.6.2). В каждом таком случае (с учетом гомотопической эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$ и стягиваемости группы \mathcal{D}^0 диффеоморфизмов M , оставляющих на месте все фиксированные критические точки, в силу (3.2)) получаем гомотопическую эквивалентность $\mathcal{F} \sim \tilde{K}$ в теореме 2.7.11 (А).

Предложение 3.6.4. Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$$

функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. опре-

деление 3.1.3). Предположим, что выполнено неравенство (3.19) (т.е. количество пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$). Тогда:

(А) Любая косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}})/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (см. теорему 3.2.8) несжимаема, т.е. отображение включения $i_{[f]_{\text{top}}} : \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ этой ручки индуцирует мономорфизм фундаментальных групп

$$(i_{[f]_{\text{top}}})_{\#} : \pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{\mathbb{K}}, x_0),$$

где $f \in \mathcal{F}^1$, $x_0 \in \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ — любая базисная точка, $\pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0) \cong \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$. Все косые ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ односвязны (т.е. их фундаментальные группы $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ тривиальны) в том и только том случае, когда

$$(q-1)(p-p^*+r-r^*)(p-p^*+q-q^*+r-r^*-1) = 0 \quad (3.95)$$

(т.е. либо имеется лишь одна седловая критическая точка, либо все точки локальных экстремумов закреплены, либо все кроме одной критической точки закреплены). В частности, если либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$, либо $q - \hat{q} \leq 1$, то условие (3.95) является необходимым для того, чтобы проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ из следствия 3.3.5(С) являлась гомотопической эквивалентностью.

(В) Предположим также, что выполнены условия следствия 3.3.5, а именно либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$ (т.е. все критические точки локальных экстремумов пронумерованы), либо $q - \hat{q} \leq 1$ (т.е. все седловые критические точки пронумерованы). Условие (3.95) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ из следствия 3.3.5(С) являлась гомотопической эквивалентностью. Таким образом, в указанном случае проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.95).

Доказательство. (А) Шаг 1. Фиксируем косую цилиндрическую ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx (D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}})/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$. Фиксируем “базисные” точки $(\mathbf{c}_0, u_0) \in D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}$ и $x_0 := \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}(\mathbf{c}_0, u_0) \in \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$. В силу (3.53) и леммы 3.3.10 группа

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$$

действует свободно на замкнутой выпуклой области $U_{[f]_{\text{top}}}$ векторного пространства H_f^1 (см. (3.29), (3.30), (3.31)). Поэтому отображение $U_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow U_{[f]_{\text{top}}}/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ является регулярным накрытием. Из свойств регулярных накрытий получаем, что

$$\pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0) \cong \pi_1(U_{[f]_{\text{top}}}/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}, \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}(u_0)) \cong \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}.$$

Шаг 2. Докажем несжимаемость ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ в полиэдре $\tilde{\mathbb{K}}$. Фиксируем любой нетривиальный элемент $h_0 \text{ mod } (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0 \in \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$, где $h_0 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$. Этому элементу отвечает прямолинейный путь γ из точки (\mathbf{c}_0, u_0) в точку $(h_0^*(\mathbf{c}_0), h_0^*(u_0))$ в $D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}$. Здесь мы воспользовались выпуклостью многогранников $D_{[f]_{\text{top}}}$ и $U_{[f]_{\text{top}}}$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — поднятие пути γ на ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$. Путь $\tilde{\gamma}$ замкнут, т.е. является петлей. Надо показать, что петля $\tilde{\gamma}$ нестягиваема в $\tilde{\mathbb{K}}$. Применим к гомотопическому классу $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0)$ петли $\tilde{\gamma}$ следующую цепочку гомоморфизмов (a)–(d).

(a) По теореме 3.5.6 существует гомотопическая эквивалентность $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$, являющаяся композицией гомотопических эквивалентностей и гомеоморфизма $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$. Рассмотрим гомотопически обратное отображение $b : \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{F}$ и его ограничение

$$b_{[f]_{\text{top}}} : \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad x \mapsto b(\text{id}_M, x), \quad x \in \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}},$$

на ручку $\{\text{id}_M\} \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$. Рассмотрим индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп:

$$(b_{[f]_{\text{top}}})_{\#} : \pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}, f_0),$$

где $f_0 := b(\text{id}_M, x_0)$ — “базисная” функция Морса, $[f_0]_{\text{top}} \preceq [f]_{\text{top}}$. Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{C}_{f_0, \lambda} = \mathcal{C}_{f, \lambda}$ при любом $\lambda = 0, 1, 2$.

(b) Сопоставляя каждой функции Морса множество $\mathcal{C}_{f, \lambda}$ ее критических точек каждого индекса $\lambda = 0, 1, 2$, получаем отображение

$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M) := \left\{ (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \text{int } M, \quad |\mathcal{C}_0| = p, \quad |\mathcal{C}_1| = q, \\ |\mathcal{C}_2| = r, \quad |\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2| = p + q + r \end{array} \right. \right\},$$

$$f \mapsto (\mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2}),$$

пространства \mathcal{F} функций Морса в конфигурационное пространство $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$. Возьмем набор $c_0 := (\mathcal{C}_{f_0,0}, \mathcal{C}_{f_0,1}, \mathcal{C}_{f_0,2}) \in Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ в качестве “базисной” конфигурации точек. Проекция π индуцирует гомоморфизм

$$\pi_{\#} : \pi_1(\mathcal{F}, f_0) \rightarrow \pi_1(Q_{p,q,r}(\text{int } M), c_0)$$

фундаментальных групп.

(c) Согласно [50], проекция

$$\rho : \mathcal{D} \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M), \quad h \mapsto (h(\mathcal{C}_{f_0,0}), h(\mathcal{C}_{f_0,1}), h(\mathcal{C}_{f_0,2})),$$

является локально-тривиальным расслоением со слоем

$$\mathcal{D}^*(c_0) := \{h \in \mathcal{D} \mid h(\mathcal{C}_{f_0,\lambda}) = \mathcal{C}_{f_0,\lambda}, \lambda \in \{0, 1, 2\}\}$$

над точкой c_0 . Для локально-тривиального расслоения ρ рассмотрим естественный гомоморфизм монодромии

$$\mu_{\rho} : \pi_1(Q_{p,q,r}(\text{int } M), c_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}^*(c_0), \text{id}_M).$$

(d) Рассмотрим гомоморфизм

$$\pi_0(\mathcal{D}^*(c_0), \text{id}_M) \rightarrow \text{Aut}(H_{f_0}^1), \quad \mathcal{D}^*(c_0)_h \mapsto h^*,$$

сопоставляющий компоненте $\mathcal{D}^*(c_0)_h$ линейной связности любого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}^*(c_0)$ в $\mathcal{D}^*(c_0)$ индуцированный автоморфизм $h^* \in \text{Aut}(H_{f_0}^1)$ группы $H_{f_0}^1$ относительных 1-мерных когомологий пары $(M \setminus (\mathcal{C}_{f_0,0} \cup \mathcal{C}_{f_0,2}), \mathcal{C}_{f_0,1})$.

Рассмотрим композицию гомоморфизмов из (a)–(d):

$$\pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}, f_0) \rightarrow \pi_1(Q_{p,q,r}(\text{int } M), c_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}^*(c_0), \text{id}_M) \rightarrow \text{Aut}(H_{f_0}^1), \quad (3.96)$$

сопоставляющую любой петле $\tilde{\gamma}$ в косой ручке $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ с базисной точкой x_0 следующие объекты:

(a) соответствующая петля $b_{[f]_{\text{top}}} \circ \tilde{\gamma}$ в пространстве \mathcal{F} функций Морса с базисной точкой f_0 ;

(b) индуцированная петля $\hat{\gamma} := \pi \circ b_{[f]_{\text{top}}} \circ \tilde{\gamma}$ в конфигурационном пространстве $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ с базисной точкой c_0 ;

(c) соответствующий диффеоморфизм монодромии $h_1 \in \mathcal{D}^*(c_0)$ с точностью до изотопии в $\mathcal{D}^*(c_0)$, где диффеоморфизм h_1 с точностью до изотопии в $\mathcal{D}^*(c_0)$ определяется условием $\mu_{\rho}(\hat{\gamma}) = \mathcal{D}^*(c_0)_{h_1}$;

(d) действие $h_1^* \in \text{Aut}(H_{f_0}^1)$ диффеоморфизма монодромии h_1 на группе $H_{f_0}^1$ относительных 1-мерных когомологий пары $(M \setminus (\mathcal{C}_{f_0,0} \cup \mathcal{C}_{f_0,2}), \mathcal{C}_{f_0,1})$.

В пункте (a) нетрудно добиться того, чтобы все гомотопические эквивалентности $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0$ и соответствующие гомотопии были согласованы с проекциями $\pi : \mathcal{F} \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ и $\pi \circ \text{Forg} : \mathbb{F} \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M)$. Действительно: это выполнено по построению для всех отображений кроме $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ (которое можно подправить подходящим образом), а именно: согласно теореме 3.2.5 (т.е. [143, теорема 2.5]) забывающее отображение и отображение включения $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}$ являются гомотопическими эквивалентностями; по теореме 3.5.4 имеем гомотопическую эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0$, согласованную с проекцией $\pi \circ \text{Forg}$. Кроме того,

согласно §3.4.3 (т.е. [135, §4]) гомеоморфизм $\mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty$ является \mathcal{D}^0 -эquivариантным и согласован с проекцией $\bar{E}\bar{v} : \mathbb{F}^0 \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^\infty$. Отсюда следует, что диффеоморфизм $h_1 \in \mathcal{D}^*(c_0)$ из пункта (с) имеет вид $h_1 = h_0$ с точностью до изотопии в $\mathcal{D}^*(c_0)$. Но для диффеоморфизма h_0 индуцированный автоморфизм $h_0^* \in \text{Aut}(H_f^1)$ не имеет неподвижных точек в подмножестве $U_{[f]_{\text{top}}}$ ввиду свободы действия группы $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ на подмножестве $U_{[f]_{\text{top}}} \subset H_f^1$ согласно шагу 1 и ввиду нетривиальности элемента $h_0 \text{ mod } (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0 \in \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$. В частности, автоморфизм $h_0^* \in \text{Aut}(H_f^1)$ отличен от тождественного.

Итак, сквозной гомоморфизм (3.96) переводит гомотопический класс $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}, x_0)$ петли $\tilde{\gamma}$ в автоморфизм $h_0^* \in \text{Aut}(H_f^1)$, отличный от тождественного. Поэтому гомотопический класс $[b_{[f]_{\text{top}}} \circ \tilde{\gamma}] = (b_{[f]_{\text{top}}})_\#([\tilde{\gamma}])$ из пункта (а) нетривиален, т.е. петля $b_{[f]_{\text{top}}} \circ \tilde{\gamma}$ нестягиваема в \mathcal{F} . Значит, петля $a \circ b_{[f]_{\text{top}}} \circ \tilde{\gamma}$ нестягиваема в $\mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$, поэтому гомотопная ей петля $(\text{id}_M, \tilde{\gamma})$ тоже нестягиваема в $\mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$, а потому и в $\{\text{id}_M\} \times \tilde{\mathbb{K}}$. Итак, петля $\tilde{\gamma}$ нестягиваема в $\tilde{\mathbb{K}}$, а потому косая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ несжимаема в $\tilde{\mathbb{K}}$.

Шаг 3. Предположим, что выполнено (3.95). Покажем, что каждая группа $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}$ тривиальна.

В силу леммы 3.3.10 группа

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$$

действует свободно на замкнутой выпуклой области $U_{[f]_{\text{top}}}$ векторного пространства H_f^1 , а потому действует эффективно на пространстве H_f^1 . Поэтому гомоморфизм

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^* \subset \text{Aut}(H_f^1), \quad h \text{ mod } (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0 \mapsto h^*,$$

является мономорфизмом, т.е. имеет тривиальное ядро. Значит, достаточно доказать тривиальность каждой индуцированной группы $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$.

Покажем сначала тривиальность подгруппы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subseteq \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$. Действительно: в случае $q = 1$ группа Θ_f^* тривиальна, так как $n(f) = 0$ в (3.33). В случае $(p - p^* + r - r^*)(p - p^* + q - q^* + r - r^* - 1) = 0$ воспользуемся явным описанием (3.43) набора образующих группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$. В случае $p - p^* + r - r^* = 0$ все точки локальных экстремумов закреплены, поэтому никакая окружность Z_ℓ из (3.33) не может ограничивать диск, содержащий не более одной закрепленной критической точки и не менее одного седла, а также не может ограничивать цилиндр, содержащий одну граничную окружность и не менее одного седла и не содержащий закрепленных критических точек, кроме того никакая пара окружностей из (3.33) не может ограничивать цилиндр, не содержащий ни одной закрепленной критической точки. В случае $p - p^* + q - q^* + r - r^* = 1$ все кроме одной критической точки закреплены, поэтому любая разбивающая окружность Z_ℓ из (3.33) и любая пара окружностей из (3.33) обладают такими же свойствами как выше. Итак, подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ тривиальна.

Отсюда и из леммы 3.3.10 следует, что группа $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ конечна и свободно действует на области $U_{[f]_{\text{top}}}$. Поэтому группа $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^*$ тривиальна ввиду выпуклости области $U_{[f]_{\text{top}}}$.

Шаг 4. Предположим, что невыполнено (3.95). Покажем, что хотя бы одна из групп $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^*$ нетривиальна. Имеем $q \geq 2$, $p - p^* + r - r^* > 0$ и $p - p^* + q - q^* + r - r^* \geq 2$. Возьмем такую функцию $f \in \mathcal{F}^1$, что существует окружность Z_ℓ из (3.33), которая ограничивает диск, содержащий не более одной закрепленной критической точки и содержащий ровно одно седло. Тогда подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subseteq \tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{top}}}^*$ нетривиальна согласно описанию (3.43) ее набора образующих.

(В) Предположим, что либо $p - \hat{p} \leq 1$ и $r - \hat{r} \leq 1$, т.е. все критические точки локальных экстремумов пронумерованы, либо $q - \hat{q} \leq 1$, т.е. все седловые критические точки пронумерованы. Согласно следствию 3.3.5(С) существуют полиэдральный комплекс \tilde{K} и проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ со свойствами из этого следствия.

Предположим, что проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью. Тогда все ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ односвязны, так как их образы суть замкнутые клетки-многогранники в \tilde{K} , а потому стягиваемы в \tilde{K} . Но в силу (А) из односвязности всех ручек следует равенство (3.95).

Докажем обратное. Предположим, что выполнено равенство (3.95). Надо показать, что проекция $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью. В силу (А) каждая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ стягиваема и имеет вид $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \approx D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}$. Соответствующая замкнутая клетка-многогранник комплекса \tilde{K} изоморфна многограннику $D_{[f]_{\text{top}}}$, и ограничение проекции $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ на ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ является проекцией $D_{[f]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}} \rightarrow D_{[f]_{\text{top}}}$. При этом для любой грани $D_{[g]_{\text{top}}} \preceq D_{[f]_{\text{top}}}$ соответствующая грань $D_{[g]_{\text{top}}} \times U_{[f]_{\text{top}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ приклеена к ручке $\mathbb{D}_{[g]_{\text{top}}} \approx D_{[g]_{\text{top}}} \times U_{[g]_{\text{top}}}$ при помощи отображения инцидентности $\chi_{[f]_{\text{top}}, [g]_{\text{top}}} : U_{[f]_{\text{top}}} \hookrightarrow U_{[g]_{\text{top}}}$. Оказывается, можно явно построить отображение $\tilde{K} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$, гомотопически обратное проекции $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ (построение нетрудно и мы его опускаем). \square

3.7 Топология пространств \mathcal{F} гладких функций с заданными типами локальных особенностей на поверхностях

В этом параграфе для полноты изложения излагаются результаты работ [140, 141, 144].

Как и в §3.2 (в отличие от §§3.3–3.6), в настоящем параграфе мы уже не предполагаем выполнение неравенства (3.19). Как и в §§3.3–3.5, в данном параграфе мы используем понятие малых деформаций функции Морса и понятие оснащенных функций Морса.

В данном параграфе мы предполагаем (для упрощения обозначений), что у рассматриваемых функций на M нет отмеченных (т.е. фиксированных или пронумерованных) критических точек. Тем самым, в §§3.3–3.5 и в настоящем параграфе полностью изучены все обобщенные пространства функций Морса $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ на компактных связных ориентируемых поверхностях M кроме следующих случаев: (i) когда $M = S^2$ и число отмеченных (включая фиксированные) критических точек $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} \in \{1, 2\}$, (ii) когда $M = D^2$ и $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 1$. Однако результаты и доказательства настоящего параграфа непосредственно переносятся на случай существования отмеченных критических точек (в частности, на указанные случаи (i) и (ii)).

Аннотация: Изучается пространство гладких функций с заданными локальными особенностями типов A_μ на гладкой двумерной замкнутой ориентируемой поверхности M . Описывается гомотопический тип данного пространства функций, снабженного C^∞ -топологией, и его разложение на орбиты действия группы “лево-правых замен координат”.

Пусть M — гладкая связная замкнутая ориентируемая поверхность и функция $f_0 \in C^\infty(M)$ имеет только критические точки типов A_μ , $\mu \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f_0)$ — множество функций $f \in C^\infty(M)$, имеющих те же типы локальных особенностей, что и f_0 . Пусть $\mathcal{D}^0(M)$ — компонента единицы в группе $\mathcal{D}(M) = \text{Diff}^+(M)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M . Группа $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ действует на \mathcal{F} “лево-правыми заменами координат”. Мы описываем гомотопический тип пространства \mathcal{F} , снабженного C^∞ -топологией, и его разложение на $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(M)$ -орбиты. Результат был анонсирован в [140, 141]. Аналогичный результат для морсовской функции f_0 и $\chi(M) < 0$ был получен в следствии 3.5.9.

3.7.1 Основной результат в случае замкнутой поверхности M

Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ обозначим через \mathcal{C}_f множество ее критических точек, а через $\mathcal{C}_f^{\text{triv}}$ множество критических точек типов A_{2m} , $m \in \mathbb{N}$. В окрестности любой точки $x \in \mathcal{C}_f^{\text{triv}}$

существуют локальные координаты u, v такие, что $f = \eta(u^{2m+1} + v^2) + f(x)$ для некоторого $\eta \in \{+, -\}$. Целое число ηt назовем *уровнем* точки x . Обозначим через \mathcal{C}_f^{\min} и \mathcal{C}_f^{\max} (соответственно $\mathcal{C}_f^{\text{saddle}}$) множество критических точек функции f типов A_{2m-1} , $m \in \mathbb{N}$, являющихся (соответственно не являющихся) точками локальных минимумов или максимумов. В окрестности такой точки x существуют локальные координаты u, v такие, что $f = \eta(u^{2m} \pm v^2) + f(x)$, где $\eta \in \{+, -\}$. Число $\eta(m-1)$ назовем *уровнем* точки x . Подмножество вырожденных (т.е. с ненулевыми уровнями) критических точек в $\mathcal{C}_f^{\text{extr}} := \mathcal{C}_f^{\min} \cup \mathcal{C}_f^{\max}$ обозначим через $\widehat{\mathcal{C}}_f^{\text{extr}}$.

Пусть даны действие группы G на топологическом пространстве X , стратифицированное [127] орбиобразии Y и непрерывная сюръекция $\varkappa : X \rightarrow Y$. Если всякая G -орбита в X есть прообраз страта из Y при \varkappa , то скажем, что \varkappa *классифицирует* G -орбиты, а Y и \varkappa суть *классифицирующее пространство* и *отображение*.

Группа $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ действует на $M \times \mathcal{F}$ гомеоморфизмами $(x, f) \mapsto (h^{-1}(x), h_1^{-1} \circ f \circ h)$, $(h_1, h) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$. Определим *вычисляющий функционал* $\text{Eval} : M \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, f) \mapsto f(x)$, и

$$s := \max\{0, \chi(M) + 1\} > \chi(M). \quad (3.97)$$

Теорема 3.7.1 ([144, теорема]). *Для любой функции $f_0 \in C^\infty(M)$, все критические точки которой имеют типы A_μ , $\mu \in \mathbb{N}$, существуют гладкие многообразия \mathcal{B} и \mathcal{E} и сюръективные субмерсии $k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$, $\varkappa : M \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, $\varepsilon : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Eval} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ M \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\varkappa} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{R} \\ \text{Pr} \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{k} & \mathcal{B} & & \end{array}$$

коммутативна, где $\text{Pr} : M \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ — проекция и $\dim \mathcal{B} = 2s + 2|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}| + |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}| + |\widehat{\mathcal{C}}_{f_0}^{\text{extr}}| + 3|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = \dim \mathcal{E} - 2$. Более того:

(а) *отображения k и \varkappa являются гомотопическими эквивалентностями и классифицируют $\mathcal{D}(M)$ - и $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ -орбиты в \mathcal{F} и $M \times \mathcal{F}$ для некоторых стратификаций на \mathcal{B} и \mathcal{E} , все страты которых являются подмногообразиями; отображение π является расслоением, слои которого диффеоморфны M ;*

(б) *отображение k (соотв. \varkappa) задает гомотопическую эквивалентность между любым $\mathcal{D}(M)$ -инвариантным подмножеством $B \subseteq \mathcal{F}$ (соотв. $E \subseteq M \times \mathcal{F}$) и его образом, а потому между любой орбитой из п. (а) и соответствующим стратом;*

(с) *группа $\text{МСГ}(M) = \mathcal{D}(M)/\mathcal{D}(M)$ дискретно действует на \mathcal{B}, \mathcal{E} диффеоморфизмами, сохраняющими стратификации из п. (а) и функцию ε ; отображения $p \circ k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}' := \mathcal{B}/\text{МСГ}(M)$ и $P \circ \varkappa : M \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}' := \mathcal{E}/\text{МСГ}(M)$ классифицируют $\mathcal{D}(M)$ - и $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ -орбиты в \mathcal{F} и $M \times \mathcal{F}$ для индуцированных стратификаций на \mathcal{B}' и \mathcal{E}' , где $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ и $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ — проекции.*

Поясним термин “субмерсия” в случае отображений функциональных пространств. Если Q, R — гладкие многообразия и $\mathcal{Q} := Q \times \mathcal{F}$, обозначим через $C^\infty(R, \mathcal{Q})$ прообраз $C^\infty(R, Q) \times C^\infty(R \times M)$ при вложении $C(R, \mathcal{Q}) \hookrightarrow C(R, Q) \times C(R \times M)$, а через $C^\infty(\mathcal{Q}, R)$ множество отображений, индуцирующих отображения $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{Q}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, R)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отображение $p \in C^\infty(\mathcal{Q}, R)$ назовем *субмерсией*, если для любого $q \in \mathcal{Q}$ существуют окрестность U точки $p(q)$ в R и отображение $\sigma \in C^\infty(U, \mathcal{Q})$ такие, что $p \circ \sigma = \text{id}_U$.

3.7.2 Построение классифицирующих многообразий и отображений

Аналогично определению 3.2.2 *оснащенной функцией* на ориентированной поверхности M назовем пару (f, α) , где $f \in C^\infty(M)$ имеет только локальные особенности типов A_μ , α —

замкнутая 1-форма на $M \setminus \mathcal{C}_f^{\text{extr}}$, причем (i) 2-форма $df \wedge \alpha$ не имеет нулей на $M \setminus \mathcal{C}_f$ и задает положительную ориентацию, (ii) в окрестности любой точки $x \in \mathcal{C}_f$ существуют локальные координаты u, v такие, что либо $f = \eta(u^{2m+1} + v^2) + f(x)$ и $\alpha = \eta d(v - uv)$, либо $f = \eta(u^{2m} - v^2) + f(x)$ и $\alpha = \eta d(uv)$, либо $f = \eta(u^{2m} + v^2) + f(x)$ и $\alpha = \eta \varkappa_{f,x} \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$, где $\varkappa_{f,x} = \text{const} > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\eta \in \{+, -\}$.

Обозначим через $\mathbb{F} = \mathbb{F}(f_0)$ пространство оснащенных функций (f, α) таких, что $f \in \mathcal{F}$. Снабдим это пространство C^∞ -топологией (см. §3.2.2 или [143, §4]). Рассмотрим правые действия группы $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ на \mathbb{F} и $M \times \mathbb{F}$ гомеоморфизмами $(f, \alpha) \mapsto (h_1^{-1} \circ f \circ h, h^* \alpha)$ и $(x, f, \alpha) \mapsto (h^{-1}(x), h_1^{-1} \circ f \circ h, h^* \alpha)$, $(h_1, h) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$.

Пусть $x_1, x_2, \dots \in M$ — попарно различные точки. Обозначим через $\mathcal{D}_r^0(M)$ компоненту единицы группы $\mathcal{D}_r(M) := \{h \in \mathcal{D}(M) \mid h(x_i) = x_i, 1 \leq i \leq r\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, откуда $\mathcal{D}_0(M) = \mathcal{D}(M)$.

Определим классифицирующие многообразия \mathcal{B} и \mathcal{E} как $\mathcal{B} := \mathcal{B}_s$, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_s$, где \mathcal{B}_r и \mathcal{E}_r суть универсальные пространства модулей

$$\mathcal{B}_r := \mathbb{F} / \mathcal{D}_r^0(M), \quad \mathcal{E}_r := (M \times \mathbb{F}) / \mathcal{D}_r^0(M)$$

оснащенных функций (соотв. оснащенных функций с одной отмеченной точкой) в \mathcal{F} , $r \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично теореме 3.4.1 (А) (т.е. [135, теорема 2.5 (А)]) показывается, что \mathcal{B}_r и \mathcal{E}_r являются орбиобразиями размерностей $\dim \mathcal{B}_r = 2r + 2|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}| + |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}| + |\widehat{\mathcal{C}}_{f_0}^{\text{extr}}| + 3|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = \dim \mathcal{E}_r - 2$. Для каждой группы $\mathcal{G} \in \{\mathcal{D}_r^0(M), \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_r^0(M)\}$ снабдим \mathcal{B}_r и \mathcal{E}_r стратификациями, каждый страт которых является полным прообразом точки при проекции $\mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}_r \rightarrow (M \times \mathcal{F})/\mathcal{G}$.

В силу $\mathcal{D}(M)$ -эквивариантности проекции $M \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ и $\mathcal{D}(M)$ -инвариантности вычисляющего функционала $M \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, f, \alpha) \mapsto f(x)$, они индуцируют некоторые отображения $\pi_r : \mathcal{E}_r \rightarrow \mathcal{B}_r$ и $\varepsilon_r : \mathcal{E}_r \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $\pi = \pi_s$, $\varepsilon = \varepsilon_s$.

Аналогично теореме 3.2.5 (т.е. [143, теорема 2.5]) и утверждению 3.4.10 (т.е. [135, утверждение 5.3]) соответственно доказываются следующие леммы.

Лемма 3.7.2 ([144, лемма 1]). *Проекция $\text{Forg} : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $(f, \alpha) \mapsto f$, является гомотопической эквивалентностью и имеет гомотопически обратное $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{F}$ и соответствующие гомотопии, согласованные с проекциями $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{D}_r^0(M)$ и $q \circ \text{Forg} : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{D}_r^0(M)$. \square*

При этом, как и в случае морсовской функции f_0 , отображение i из леммы 3.7.2 строится с помощью обобщения теоремы 3.2.14 (“равномерной” \mathcal{D} -эквивариантной леммы Морса) на случай гладких функций с произвольными локальными особенностями типов A_μ . Указанное обобщение теоремы 3.2.14 проводится с помощью доказательства утверждения [151, утверждение 6.1].

Лемма 3.7.3 ([144, лемма 2]). *Если $r \geq s$, то \mathcal{B}_r — гладкое многообразие, а проекция $\text{Ev}_r : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{B}_r$ является гомотопической эквивалентностью и имеет гомотопически обратное $i_r : \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{F}$ и соответствующие гомотопии, согласованные с Ev_r (откуда $\text{Ev}_r \circ i_r = \text{id}_{\mathcal{B}_r}$). \square*

Положим $k_r = \text{Ev}_r \circ i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}_r$. Аналогично определяется \varkappa_r . Определим классифицирующие отображения $k = k_s$, $\varkappa = \varkappa_s$. Из лемм 3.7.2 и 3.7.3 легко выводится теорема 3.7.1.

3.7.3 Сведение к случаю функций Морса

Если f_0 — функция Морса и $s = 0$, то пространство \mathcal{B} из §3.7.2 совпадает с гладким стратифицированным многообразием (универсальным пространством модулей оснащенных функций Морса), аналогичным многообразию $\widetilde{\mathcal{M}}$ (универсальному пространству модулей оснащенных функций Морса из \mathcal{F}^1), изученному в утверждении 3.4.10, теоремах 3.4.1, 3.5.6 и следствии 3.5.9 (т.е. в [135, 134, 136]). Оказывается, каждое \mathcal{B}_r и \mathcal{E}_r можно описать в терминах функций Морса.

Напомним, что функция $f \in C^\infty(M)$ называется *морсовской*, если все ее критические точки невырождены (т.е. имеют тип A_1 , см. §3.7.1). Обозначим через $\text{Morse}(f_0)$ пространство функций Морса на M , имеющих ровно $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}|$ и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ точек локальных минимумов и максимумов и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}|$ седловых точек.

Функцию Морса $f \in \text{Morse}(f_0)$ назовем f_0 -меченой, если каждая ее критическая точка $x \in \mathcal{C}_f$ помечена целым числом, а если это число ненулевое и $x \in \mathcal{C}_f^{\text{extr}}$, то также 1-мерным подпространством $\ell_x \subset T_x M$, более того $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}|$ некритических точек f помечены ненулевыми целыми числами так, что уровень (см. §3.7.1) любой критической точки функции f_0 совпадает с целой меткой соответствующей отмеченной точки функции f для некоторых биекций $\mathcal{C}_{f_0}^{\min} \approx \mathcal{C}_f^{\min}$, $\mathcal{C}_{f_0}^{\max} \approx \mathcal{C}_f^{\max}$, $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}} \approx \mathcal{C}_f^{\text{saddle}}$ и биекции между $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}$ и множеством отмеченных некритических точек f .

Обозначим через $\text{Morse}^*(f_0)$ пространство оснащенных (см. §3.7.2) f_0 -меченых функций Морса. Нетрудно доказывается

Утверждение 3.7.4 ([144, §3]). *Имеют место гомеоморфизмы*

$$\mathcal{B}_r \approx \text{Morse}^*(f_0)/\mathcal{D}_r^0(M), \quad \mathcal{E}_r \approx (M \times \text{Morse}^*(f_0))/\mathcal{D}_r^0(M), \quad r \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.98)$$

3.7.4 Связь с мероморфными функциями и конфигурационными пространствами

Пусть M — сфера S^2 или тор T^2 . Если $M = S^2$, обозначим через $\mathbb{A}(f_0)$ пространство рациональных функций R на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что все полюса 1-формы $\omega = R(z)dz$ просты и имеют вещественные вычеты, положительные в $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}|$ полюсах и отрицательные в $|\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ полюсах. Если $M = T^2$, обозначим через $\mathbb{A}(f_0)$ пространство пар (λ, R) , где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda > 0$, и R — мероморфная функция на торе $T_\lambda^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})$, все полюса которой просты, все периоды мероморфной 1-формы $\omega = R(z)dz$ чисто мнимые, и вычеты положительны в $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}|$ полюсах и отрицательны в $|\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ полюсах.

Пусть $\mathbb{A}_0(f_0)$ — пространство функций $R \in \mathbb{A}(f_0)$ или пар $(\lambda, R) \in \mathbb{A}(f_0)$ таких, что $\omega = R(z)dz$ имеет лишь простые нули.

В силу [76, Proposition 3.4] сопоставление 1-форме ω ее полюсов и вычетов в них дает биекцию $\varphi : \mathbb{A}(f_0) \xrightarrow{\sim} Q(f_0)$, где $Q(f_0)$ — “меченое конфигурационное пространство”, состоящее из $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}|$ -точечных подмножеств (т.е. “конфигураций”) поверхности M , снабженных $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}|$ положительными и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ отрицательными вещественными метками (по одной метке в каждой точке подмножества) общей суммы 0. Значит, $\mathbb{A}_0(f_0)$ гомеоморфно открытому подмножеству $\varphi(\mathbb{A}_0(f_0)) \subseteq Q(f_0)$, состоящему из “меченых конфигураций”, отвечающих 1-формам ω без кратных нулей.

Нетрудно выводится из (3.98) при $r = s$ (см. (3.97) и замечание 3.2.6, т.е. [143, замечание 2.6]), что наше многообразие \mathcal{B} гомеоморфно пространству $\mathbb{A}_0^*(f_0)$ функций $R \in \mathbb{A}_0(f_0)$ или пар $(\lambda, R) \in \mathbb{A}_0(f_0)$, снабженных f_0 -метками (см. §3.7.3) в нулях и полюсах 1-формы $\omega = R(z)dz$ и в некоторых других $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}|$ точках, а также “вертикальной” меткой, состоящей из (i) вещественного числа и (ii) либо положительного вещественного числа в случае $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}| = |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = 0$, либо $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}|$ интегральных кривых поля $\ker(\text{Re } \omega)$, отделяющих полюса от других отмеченных точек. Значит, имеет место

Утверждение 3.7.5 ([144, §4]). *В условиях теоремы 3.7.1 классифицирующее многообразие $\mathcal{B} \sim \mathcal{F}$ гомеоморфно пространству, полученному из “меченого конфигурационного подпространства” $\varphi(\mathbb{A}_0(f_0)) \subseteq Q(f_0)$ введением f_0 -меток и (несущественной для топологии) “вертикальной” метки.* \square

3.7.5 Случай поверхности M с краем

Пусть M — гладкая связная компактная ориентируемая поверхность с непустым краем $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$, где $\partial^+ M$ — объединение некоторых граничных окружностей M . Определим подпространство $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ как в определении 2.2.1 (Б). Пусть функция $f_0 \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ имеет только критические точки типов A_μ , $\mu \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f_0)$ — множество функций $f \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих те же типы локальных особенностей, что и f_0 . Пусть $\mathcal{D}^0(M)$ — компонента единицы в группе $\mathcal{D}(M) = \text{Diff}^+(M)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M . Группа $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ действует на \mathcal{F} “лево-правыми заменами координат”.

Положим $s := 0$ при $\chi(M) < 0$, $s := 1$ при $\chi(M) \geq 0$.

Теорема 3.7.6. *Предположим, что поверхность M компактна и имеет непустой край. Тогда для любой функции $f_0 \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, все критические точки которой имеют типы A_μ , $\mu \in \mathbb{N}$, справедлив аналог теоремы 3.7.1 для размерностей $\dim \mathcal{B} = s + |\pi_0(\partial M)| + 2|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}| + |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}| + |\widehat{\mathcal{C}}_{f_0}^{\text{extr}}| + 3|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = \dim \mathcal{E} - 2$.*

Доказательство. Опишем построение классифицирующих многообразий и классифицирующих отображений. Пусть $x_1, x_2, \dots \in \partial_0 M$ — попарно различные точки на одной граничной окружности $\partial_0 M \subseteq \partial M$, причем любая начальная конечная подпоследовательность x_1, \dots, x_n расположена в циклическом порядке (согласованным с ориентацией поверхности) на окружности $\partial_0 M$. Аналогично §3.7.2 определим группы $\mathcal{D}_r^0(M)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, универсальные пространства модулей

$$\mathcal{B}_r := \mathbb{F}/\mathcal{D}_r^0(M), \quad \mathcal{E}_r := (M \times \mathbb{F})/\mathcal{D}_r^0(M)$$

оснащенных функций (соотв. оснащенных функций с одной отмеченной точкой) в \mathcal{F} , $r \in \mathbb{Z}_+$, и классифицирующие многообразия $\mathcal{B} := \mathcal{B}_s$ и $\mathcal{E} := \mathcal{E}_s$. Тогда верны аналоги всех утверждений из §3.7.2 для размерностей

$$\dim \mathcal{B}_r = r + |\pi_0(\partial M)| + 2|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}| + |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}| + |\widehat{\mathcal{C}}_{f_0}^{\text{extr}}| + 3|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = \dim \mathcal{E}_r - 2.$$

В частности, верны утверждения лемм 3.7.2 и 3.7.3. С их помощью определяются отображения $k_r = \text{Ev}_r \circ i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}_r$ и \varkappa_r , $r \in \mathbb{Z}_+$, и классифицирующие отображения $k = k_s$ и $\varkappa = \varkappa_s$, и выводится теорема 3.7.6. \square

Сформулируем аналог утверждения 3.7.4. Пусть \overline{M} — гладкая замкнутая поверхность, полученная из M заклеиванием дисками всех граничных окружностей. Обозначим через $\text{Morse}(f_0)$ пространство функций Морса на \overline{M} , имеющих ровно $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{min}}| + |\pi_0(\partial^- M)|$ и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{max}}| + |\pi_0(\partial^+ M)|$ точек локальных минимумов и максимумов и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}|$ седловых точек, причем $|\pi_0(\partial^- M)|$ и $|\pi_0(\partial^+ M)|$ точек локальных минимумов и максимумов фиксированы на M и образуют $|\pi_0(\partial^- M)|$ - и $|\pi_0(\partial^+ M)|$ -точечные подмножества $\mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{min}} \subset \overline{M}$ и $\mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{max}} \subset \overline{M}$ (состоящие из центров заклеивающих дисков). Пусть для определенности выделенная граничная окружность $\partial_0 M \subseteq \partial^- M$ и $x_0 \in \mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{min}}$ — одна из фиксированных точек. Фиксируем ненулевой касательный вектор $e_0 \in T_{x_0} M$ и биекции $\pi_0(\partial^- M) \approx \mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{min}}$ и $\pi_0(\partial^+ M) \approx \mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{max}}$, при которых выделенной граничной окружности $\partial_0 M$ отвечает точка x_0 . Положим $\mathcal{C}_{\text{fix}} := \mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{min}} \cup \mathcal{C}_{\text{fix}}^{\text{max}}$.

Функцию Морса $f \in \text{Morse}(f_0)$ назовем f_0 -меченой, если каждая ее нефиксированная критическая точка $x \in \mathcal{C}_f \setminus \mathcal{C}_{\text{fix}}$ помечена целым числом, а если это число ненулевое и $x \in \mathcal{C}_f^{\text{extr}}$, то также 1-мерным подпространством $\ell_x \subset T_x M$, более того $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}|$ некритических точек f помечены ненулевыми целыми числами так, что уровень (см. §3.7.1) любой критической точки функции f_0 совпадает с целой меткой соответствующей (нефиксированной) отмеченной точки функции f для некоторых биекций $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{min}} \approx \mathcal{C}_f^{\text{min}} \setminus \mathcal{C}_{\text{fix}}$, $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{max}} \approx \mathcal{C}_f^{\text{max}} \setminus \mathcal{C}_{\text{fix}}$, $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}} \approx \mathcal{C}_f^{\text{saddle}}$ и биекции между $\mathcal{C}_{f_0}^{\text{triv}}$ и множеством отмеченных некритических точек f .

Обозначим через $\text{Morse}^*(f_0)$ пространство оснащенных (см. §3.7.2) f_0 -меченых функций Морса. Пусть $\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}})$ — компонента единицы группы

$$\mathcal{D}(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}) := \{h \in \mathcal{D}(\overline{M}) \mid h|_{\mathcal{C}_{\text{fix}}} = \text{id}_{\mathcal{C}_{\text{fix}}}\}.$$

Пусть $\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}, e_0)$ — компонента единицы группы

$$\mathcal{D}(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}, e_0) := \{h \in \mathcal{D}(\overline{M}) \mid h|_{\mathcal{C}_{\text{fix}}} = \text{id}_{\mathcal{C}_{\text{fix}}}, dh(x_0)e_0 = \lambda e_0, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Обозначим $\overset{\circ}{\Delta}^d := \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 < t_1 < \dots < t_d < 1\}$, $d \in \mathbb{N}$. Нетрудно доказывается следующий аналог утверждения 3.7.4.

Утверждение 3.7.7. *Имеют место гомеоморфизмы*

$$\mathcal{B}_0 \approx \text{Morse}^*(f_0)/\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}), \quad \mathcal{E}_0 \approx (M \times \text{Morse}^*(f_0))/\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}),$$

а также при любом $r \in \mathbb{N}$ гомоморфизмы

$$\mathcal{B}_r \approx (\text{Morse}^*(f_0)/\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}, e_0)) \times \overset{\circ}{\Delta}^{r-1}, \quad \mathcal{E}_r \approx ((M \times \text{Morse}^*(f_0))/\mathcal{D}^0(\overline{M}, \mathcal{C}_{\text{fix}}, e_0)) \times \overset{\circ}{\Delta}^{r-1}.$$

□

3.7.6 Примеры: топология и стратификация Максвелла пространств $\mathcal{F}_{q+1,q,1}$ функций Морса на сфере при $q = 0, 1, 2$

Пусть M — гладкая связная ориентированная замкнутая поверхность и f_0 — функция Морса на M , имеющая n_λ критических точек индекса λ при $\lambda = 0, 1, 2$. Обозначим пространство $\mathcal{F}(f_0)$ через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}$, а пространство $\mathbb{F}(f_0)$ через $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{n_0, n_1, n_2}$. Имеем

$$n_0 = |\mathcal{C}_{f_0}^{\min}| = |\mathcal{C}_{f_0, 0}|, \quad n_1 = |\mathcal{C}_{f_0}^{\text{saddle}}| = |\mathcal{C}_{f_0, 1}|, \quad n_2 = |\mathcal{C}_{f_0}^{\max}| = |\mathcal{C}_{f_0, 2}|, \quad n_0 - n_1 + n_2 = \chi(M).$$

Обозначим через $\mathbb{F}^- \subset \mathbb{F}$ подмножество, состоящее из пар $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ таких, что $\oint_{\partial D_{x, \varepsilon}} \alpha = 1$ для любой точки $x \in \mathcal{C}_f^{\min}$, где $D_{x, \varepsilon}$ есть “круг с центром в точке x радиуса ε ”, точнее компонента связности точки x в $f^{-1}(-\infty, f(x) + \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Обозначим

$$\mathcal{B}_r^- := \mathbb{F}^-/\mathcal{D}_r^0(M), \quad \mathcal{E}_r^- := (M \times \mathbb{F}^-)/\mathcal{D}_r^0(M), \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

$\mathcal{B}^- := \mathcal{B}_s^-$ и $\mathcal{E}^- := \mathcal{E}_s^-$. Будем также обозначать \mathcal{B}^- через $\mathcal{B}^-(f_0)$.

Рассмотрим подпространство $\mathbb{A}^-(f_0) \subset \mathbb{A}(f_0)$ (в случае $M = S^2, T^2$, см. §3.7.4), состоящее из мероморфных функций $R \in \mathbb{A}(f_0)$ или пар $(R, \lambda) \in \mathbb{A}(f_0)$ таких, что все положительные вычеты мероморфной 1-формы $\omega = R(z)dz$ равны 1. Положим $\mathbb{A}_0^-(f_0) := \mathbb{A}^-(f_0) \cap \mathbb{A}_0(f_0)$. Рассмотрим также “меченое конфигурационное пространство” $Q^-(f_0) := \varphi(\mathbb{A}^-(f_0))$, состоящее из $|\mathcal{C}_{f_0}^{\text{extr}}|$ -точечных подмножеств поверхности M , снабженных вещественными метками общей суммы 0 в $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}| + |\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ точках, где $|\mathcal{C}_{f_0}^{\min}|$ меток равны 1 и $|\mathcal{C}_{f_0}^{\max}|$ меток отрицательны.

Заметим, что доказательства лемм 3.7.2 и 3.7.3 дословно повторяются для пространств \mathbb{F}^- и \mathcal{B}_r^- . Поэтому верно следующее

Утверждение 3.7.8. *Верны аналоги теоремы 3.7.1 и лемм 3.7.2, 3.7.3 для подпространств $\mathbb{F}^- \subset \mathbb{F}$, $\mathcal{B}_r^- \subset \mathcal{B}_r$, $\mathcal{B}^- \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}$. Если $M = S^2$ и количество точек локальных максимумов $n_2 = |\mathcal{C}_{f_0}^{\max}| = 1$, то пространство $Q^-(f_0)$ есть обычное (немеченое) конфигурационное пространство (точнее, пространство всех меченых $(n_0 + 1)$ -точечных конфигураций с метками 1 во всех точках кроме одной), а потому классифицирующее многообразие $\mathcal{B}^- \sim \mathcal{F}$ гомеоморфно пространству, полученному из конфигурационного подпространства $\varphi(\mathbb{A}_0^-(f_0)) \subseteq Q^-(f_0)$ введением (несущественной для топологии) “вертикальной” метки. □*

Обозначим через $Q_{n_0}(M)$ множество n_0 -элементных подмножеств в M , а через

$$A = \{x, y, z\} \in Q_3(S^2)$$

фиксированную конфигурацию трех точек на экваторе сферы в вершинах правильного треугольника. Пусть

$$\Gamma \subset S^2$$

— вложенный граф, состоящий из трех маленьких окружностей вокруг точек $x, y, z \in A$ и трех дуг экватора (называемых *хордами*), попарно соединяющих эти окружности. Для любой пары взаимно простых натуральных чисел $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, рассмотрим 3-мерное *линзовое пространство*

$$L(m, n) := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} / ((z, w) \sim (e^{2\pi i/m} z, e^{2\pi i n/m} w)).$$

Отметим, что $SO(3) \approx \mathbb{R}P^3 \approx L(2, 1)$.

Примеры 3.7.9. (А) Пространство функций Морса $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{q+1, q, 1}$ при $q = 0, 1, 2$ имеет следующий гомотопический тип:

- двумерной сферы S^2 при $q = 0$;
- 3-мерного линзового пространства $L(4, 1)$ при $q = 1$;
- 4-мерного полиэдра $\bigcup_{h \in SO(3)} \{h(A)\} \times (h(\Gamma)) \subset Q_3(S^2) \times S^2$ при $q = 2$.

(В) Пространство $\mathcal{F}_{q+1, q, 1}$ при $q = 0$ состоит из одной лево-правой орбиты (т.е. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(S^2)$ -орбиты). При $q = 1$ оно состоит из двух лево-правых орбит, имеющих коразмерности 0 и 1, причем открытая орбита гомотопически эквивалентна $SO(3)$, а неоткрытая орбита — линзе $L(4, 1)$. При $q = 2$ подпространство $\mathcal{F}_{q+1, q, 1}^1 \subset \mathcal{F}_{q+1, q, 1}$ состоит из двух орбит, имеющих коразмерности 0 и 1, причем открытая орбита гомотопически эквивалентна $SO(3) \times S^1$, а неоткрытая орбита — линзе $L(4, 1)$.

Обоснование примеров. Из утверждения 3.7.8 получаем три гомотопические эквивалентности, гомеоморфизм и включение:

$$\mathcal{F}_{q+1, q, 1} \sim \mathbb{F}_{q+1, q, 1}^- \sim \mathcal{B}^-(f_0) \sim \mathbb{A}_0^-(f_0) \approx \varphi(\mathbb{A}_0^-(f_0)) \subseteq Q^-(f_0).$$

(А) При $q = 0, 1$ последнее включение является равенством, так как $\mathbb{A}_0^-(f_0) = \mathbb{A}^-(f_0)$ ввиду либо отсутствия нулей у 1-форм $\omega = R(z)dz$ при $R \in \mathbb{A}^-(f_0)$ (так как отсутствуют седловые точки у $f \in \mathcal{F}_{q+1, q, 1}$ при $q = 0$, либо невырожденности единственного нуля у 1-форм ω при $q = 1$). Гомотопическая эквивалентность $Q^-(f_0) \sim S^2$ при $q = 0$ очевидна, $Q^-(f_0) \sim L(4, 1)$ при $q = 1$ несложна.

При $q = 2$ положим $R_w(z) := \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{3}{z-w} = \frac{-z^2+2(1-w)+w}{z(z-1)(z-w)} \in \mathbb{A}^-(f_0)$ при $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; тогда рациональная 1-форма $\omega_w = R_w(z)dz$ на $\overline{\mathbb{C}}$, имеющая три простых полюса $0, 1, \infty$ с вычетами 1 и один простой полюс w с вычетом -3 , имеет кратный нуль тогда и только тогда, когда $(w-1)^2 + w = 0$, т.е. $w = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Отсюда получаем, что $R_w \in \mathbb{A}_0^-(f_0)$ тогда и только тогда, когда $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$. Если мы отождествим $\overline{\mathbb{C}}$ со стандартной круглой сферой S^2 диффеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$, переводящим $\{0, 1, \infty\}$ в A , то подмножество $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$ отождествится с областью $S^2 \setminus (A \cup \{N, S\})$, где N, S — северный и южный полюс на сфере. Но Γ есть деформационный ретракт области $S^2 \setminus (A \cup \{N, S\})$. Отсюда следует гомотопическая эквивалентность

$$\varphi(\mathbb{A}_0^-(f_0)) \sim \bigcup_{h \in SO(3)} \{h(A)\} \times (h(\Gamma)). \quad (3.99)$$

(В) При $q = 0$ лево-правая орбита одна, так как нет седел. При $q = 1$ орбит две, так как два локальных максимума либо различны (на открытой орбите), либо совпадают (на неоткрытой орбите). При $q = 2$ количество орбит на пространстве \mathcal{F} довольно большое, но на подпространстве $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ орбит всего две, так как два седловых значения либо различны (на открытой орбите), либо совпадают (на неоткрытой орбите). При гомотопической эквивалентности (3.99) открытая орбита (т.е. круглая ручка индекса 0) отвечает окружностям графа Γ , а неоткрытая орбита (т.е. ручка индекса 1) — дугам в графе Γ . Здесь граф Γ рассматривается как хордовая диаграмма, состоящая из трех окружностей и трех дуг, попарно соединяющих эти окружности. Отсюда нетрудно получить, что открытая орбита гомотопически эквивалентна $SO(3) \times S^1$, а неоткрытая орбита — линзе $L(4, 1)$. \square

3.7.7 Выводы: топология и стратификация Максвелла пространств функций Морса на поверхностях

Рассмотрим обобщенное пространство функций Морса

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M),$$

см. определение 3.1.3. Пусть $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ — соответствующие пространства оснащенных функций Морса, см. теоремы 3.2.5 и 3.5.4. Имеем следующие случаи, в некоторых из которых укажем соответствующие комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ и стратифицированное многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$, при этом в подслучае 2а мы изменим определение группы \mathcal{D}^0 и многообразия $R_{\mathcal{D}^0}$.

Случай 1: $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$. Пусть $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$ — косой цилиндрически-полиэдральный комплекс из теоремы 3.3.3, ассоциированный с пространством \mathcal{F} . Напомним, что он составлен из блоков — косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, отвечающих классам топологической эквивалентности $[f]_{\text{top}}$, $f \in \mathcal{F}^1$. Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ вложен в стратифицированное многообразие $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_{p+d^-,q,r+d^+;\hat{p}+d^-, \hat{q}, \hat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$ из теорем 3.3.3 и 3.4.1. Любой его страт $\tilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$ есть подмногообразие в $\tilde{\mathcal{M}}$, гомотопически эквивалентное ручке $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$, а ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ имеет своим строгим деформационным ретрактом пространство орбит $(S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}$ соответствующего тора $(S^1)^{d([f])}$ по свободному действию конечной группы $\Gamma_{[f]}$ допустимыми автоморфизмами тора (определение 3.3.1 (А, В, С)).

Случай 2: $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} \leq \chi(M)$. Имеем либо $\chi(M) = 0$ (т.е. $M = T^2$ или $M = S^1 \times [-1, 1]$) и нет отмеченных критических точек (т.е. $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 0$), либо $M = D^2$ и $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} \in \{0, 1\}$, либо $M = S^2$ и $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} \in \{0, 1, 2\}$. Имеем следующие подслучаи:

Подслучай 2а: $M = T^2, S^1 \times [-1, 1]$, нет отмеченных критических точек (т.е. $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 0$) и либо число критических точек локальных минимумов равно $p = 1$, либо число критических точек локальных максимумов равно $r = 1$. Имеем гомеоморфизм $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{1,q,r;1,0,0;0,0,0}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (соответственно $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,1;0,0,1;0,0,0}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$), т.е. точку локального минимума (соответственно максимума) можно считать отмеченной, и с учетом этой точки общее число отмеченных точек станет равным $1 > 0 = \chi(M)$. Рассмотрим соответствующие комплекс $\tilde{\mathbb{K}} := \tilde{\mathbb{K}}_{1+\partial^-,q,r+\partial^+;1+\partial^-,0,\partial^+;\partial^-,0,\partial^+}$ (соотв. $\tilde{\mathbb{K}} := \tilde{\mathbb{K}}_{p+\partial^-,q,1+\partial^+;\partial^-,0,1+\partial^+;\partial^-,0,\partial^+}$) и многообразия $R_{\mathcal{D}^0} := T^2$ или S^1 (в зависимости от $M = T^2$ или $S^1 \times [-1, 1]$).

Подслучай 2б: $M = D^2$ и либо $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 0$ и $p = q = r = 1$, либо $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 1 = p - \hat{p}$, либо $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} = 1 = r - \hat{r}$. Аналогично подслучаю 2а имеем гомеоморфизм $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{1,1,1;1,1,1;0,0,0}(D^2, \partial^+ D^2, \partial^- D^2)$ (соответственно $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p}+1,\hat{q},\hat{r};p^*,q^*,r^*}(D^2, \partial^+ D^2, \partial^- D^2)$) или $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}+1;p^*,q^*,r^*}(D^2, \partial^+ D^2, \partial^- D^2)$, т.е. неотмеченную точку локального минимума (соответственно максимума) можно считать отмеченной, и с учетом этой точки общее количество отмеченных точек станет $> 1 = \chi(M)$. Рассмотрим соответствующие комплекс $\tilde{\mathbb{K}} := \tilde{\mathbb{K}}_{1+\partial^-,1,1+\partial^+;1+\partial^-,1,1+\partial^+;\partial^-,0,\partial^+}$ (соотв. $\tilde{\mathbb{K}} := \tilde{\mathbb{K}}_{p+\partial^-,q,r+\partial^+;\hat{p}+1+\partial^-, \hat{q}, \hat{r}+1+\partial^+; p^*+\partial^-, q^*, r^*+\partial^+}$ или $\tilde{\mathbb{K}} := \tilde{\mathbb{K}}_{p+\partial^-,q,r+\partial^+;\hat{p}+\partial^-, \hat{q}, \hat{r}+1+\partial^+; p^*+\partial^-, q^*, r^*+\partial^+}$) и многообразия $R_{\mathcal{D}^0} := S^1$.

Подслучай 2с: $M = S^2$ и либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 1 = p - \widehat{p} = r - \widehat{r}$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 2$ и $p - \widehat{p}$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 2$ и $r - \widehat{r}$. Аналогично подслучаям 2а, 2b имеем очевидный гомеоморфизм $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p}+1,\widehat{q},\widehat{r}+1;p^*,q^*,r^*}(S^2)$ (соответственно $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p}+1,\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(S^2)$ или $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}+1;p^*,q^*,r^*}(S^2)$), т.е. неотмеченную точку локального минимума (соответственно максимума) можно считать отмеченной, и с учетом этой точки общее количество отмеченных точек станет $> 2 = \chi(M)$. Рассмотрим соответствующие комплекс $\widetilde{\mathbb{K}} := \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\widehat{p}+1,\widehat{q},\widehat{r}+1;p^*,q^*,r^*}$ (соответственно $\widetilde{\mathbb{K}} := \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\widehat{p}+1,\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}$ или $\widetilde{\mathbb{K}} := \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r}+1;p^*,q^*,r^*}$) и многообразии $R_{\mathcal{D}^0} := SO(3)$ или S^1 в зависимости от $p^* + q^* + r^* = 0$ или > 0 .

Подслучай 2d: $\partial M \neq \emptyset$ (можно также считать, что невыполнены предположения случаев 1, 2а, 2b). Этот подслучай изучен (и обобщен на неморсовский случай) в теореме 3.7.6. Выберем базисную точку $x_0 \in \partial M$. В этом случае мы заменим группы \mathcal{D}^0 и \mathcal{D} на новые группы \mathcal{D}_1^0 и \mathcal{D}_1 , где \mathcal{D}_1^0 — компонента связности единицы в группе $\mathcal{D}_1 := \{h \in \text{Diff}^+(M) \mid h(x_0) = x_0\}$. Ясно, что классы $[f]_{\text{top}}$ топологической эквивалентности функций Морса в пространстве \mathcal{F} совпадают с лево-правыми орбитами действия группы $\text{Diff}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_1^0$ на \mathcal{F} . Легко проверяется, что действие новой группы \mathcal{D}_1^0 на \mathbb{F} свободно. Аналогично (3.2) доказываем, что новая группа \mathcal{D}_1^0 стягиваема. С помощью этих свойств новой группы \mathcal{D}_1^0 нетрудно доказываем (дословным повторением доказательств утверждений 3.4.4, 3.4.7 и 3.4.10 или теоремы 3.7.6), что топологическое пространство

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}_1^0$$

(универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса на поверхности с краем и с отмеченной точкой на крае) имеет структуру гладкого стратифицированного многообразия (как в теореме 3.3.14 и утверждении 3.4.4), состоящего из стратов $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$, и имеется \mathcal{D}_1^0 -эквивариантный гомеоморфизм $p_3: \mathbb{F}^1 \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}_1^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}$. Также можно определить соответствующий комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$, содержащийся в $\widetilde{\mathcal{M}}$ и состоящий из блоков $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, $f \in \mathcal{F}^1$ (аналогично теореме 3.3.13).

В каждом из случаев 1, 2а, 2b, 2с, 2d определим комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ и многообразии $R_{\mathcal{D}^0}$ как указано выше. Для этих случаев верен аналог теорем 3.5.4 и 3.5.10:

Следствие 3.7.10. *Пусть M — компактная связная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

и $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. определение 3.1.3). Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (1) $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$ (т.е. число пронумерованных критических точек превосходит $\chi(M)$),
- (2а) $M = T^2, S^1 \times [-1; 1]$, нет пронумерованных критических точек (т.е. $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 0$) и число точек локальных максимумов (или минимумов) равно $r = 1$ (соответственно $p = 1$),
- (2b) $M = D^2$ и либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 0$ и $p = q = r = 1$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 1 = p - \widehat{p}$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 1 = r - \widehat{r}$,
- (2с) $M = S^2$ — сфера и либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 1 = p - \widehat{p} = r - \widehat{r}$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 2$ и $p - \widehat{p}$, либо $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 2$ и $r - \widehat{r}$,
- (2d) $\partial M \neq \emptyset$.

В случае (1) пусть

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}, \quad \widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-, \widehat{q}, \widehat{r}+d^+; p^*+d^-, q^*, r^*+d^+}$$

— косою цилиндрически-полидральный комплекс и стратифицированное многообразие из теоремы 3.3.3, ассоциированные с пространством \mathcal{F} . В остальных случаях определим $\widetilde{\mathbb{K}}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}$ как указано выше. Тогда:

(А) Существуют (горизонтальные) гомотопические эквивалентности и (вертикальные) гомеоморфизмы

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \underset{\text{''}}{\mathbb{F}^1} \underset{\text{''}}{\sim} \underset{\text{''}}{\mathbb{F}^0} \underset{\text{''}}{\sim} \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}} \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}},$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ — либо точка в случае (2d), либо одно из четырех многообразий $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, $SO(2) = S^1$, $T^2 = S^1 \times S^1$ и точка, определяемое парой $(M, p^* + q^* + r^*)$ как в (3.2), в остальных случаях.

(В) Для любой функции Морса $f \in \mathcal{F}^1$ имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм

$$[f]_{\text{top}} \sim \text{Forg}_1^{-1}([f]_{\text{top}}) \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \sim \mathcal{D}^0 \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times ((S^1)^d / \Gamma_{[f]}),$$

где $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ — забывающее отображение, $\widetilde{\mathcal{M}}_{[f]_{\text{top}}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ и $(S^1)^d = (S^1)^{d([f])}$ — соответствующие $(s([f]) + 2q)$ -мерное подмногообразие и тор.

Доказательство проводится дословным повторением доказательств теорем 3.5.4, 3.5.10 и 3.7.6. \square

Тем самым, мы полностью описали (в случаях 1, 2a, 2b, 2c, 2d) топологию всех обобщенных пространств функций Морса $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ на связных компактных ориентируемых поверхностях M в терминах соответствующих косых цилиндрически-полиэдральных комплексов $\widetilde{\mathbb{K}}$ и гладких стратифицированных многообразий $\widetilde{\mathcal{M}}$ кроме следующих случаев:

Подслучай 2e: $M = S^2, T^2$ и нет отмеченных критических точек, т.е. $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} = 0$ (можно также считать, что невыполнены предположения подслучая 2a). Этот подслучай изучен (и обобщен на неморсовский случай) в теореме 3.7.1 и утверждении 3.7.5.

Подслучай 2f: $M = S^2$ и число отмеченных критических точек $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} \in \{1, 2\}$ (можно также считать, что невыполнены предположения подслучая 2c). Этот подслучай нетрудно изучить теми же методами, что и подслучай 2e.

Поясним отличие случаев 1, 2a, 2b, 2c, 2d от менее наглядных случаев 2e, 2f. В случаях 1, 2a, 2b, 2c, 2d пространство \mathcal{F} имеет гомотопический тип

$$\mathcal{F} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathcal{M}} \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}},$$

а в случаях 2e, 2f гомотопический тип

$$\mathcal{F} \sim \widetilde{\mathcal{M}}_s \sim \widetilde{\mathbb{K}}_s,$$

где $\widetilde{\mathcal{M}}_s$ — некоторое стратифицированное многообразие и $\widetilde{\mathbb{K}}_s \subset \widetilde{\mathcal{M}}_s$ — некоторый полиэдр, состоящий из блоков — подполиэдров, $s = 1 + \chi(M)$. Отметим, что в последних двух подслучаях 2e и 2f соответствующее стратифицированное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}_s$ уже не будет обладать плоской аффинной связностью, а соответствующий комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}_s$ уже не будет являться косым цилиндрически-полиэдральным. Дело в том, что $\widetilde{\mathcal{M}}_s$ похоже на “почти косое произведение” $R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathcal{M}}$, где $\widetilde{\mathcal{M}} := \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ — стратифицированное орбиобразие, обладающее плоской аффинной связностью, и каноническая проекция $\widetilde{\mathcal{M}}_s \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ имеет тип расслоения Зейферта с типичным слоем $M^s \setminus \Delta \sim R_{\mathcal{D}^0}$. Аналогичным образом, $\widetilde{\mathbb{K}}_s$ похоже на “почти косое произведение” $R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}$, где $\widetilde{\mathbb{K}}$ есть факторпространство некоторого косого цилиндрически-полиэдрального комплекса по действию конечной группы автоморфизмов, и каноническая проекция $\widetilde{\mathbb{K}}_s \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}}$ имеет тип расслоения Зейферта с тем же типичным слоем. В частности, $\widetilde{\mathbb{K}}_s$ состоит из блоков, являющихся “почти косыми произведениями” $R_{\mathcal{D}^0} \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$, где $\mathbb{D}_{[f]_{\text{top}}}$ гомотопически эквивалентно факторпространству тора по (необязательно свободному) действию конечной группы автоморфизмов. Однако в подслучаях 2e и 2f, вообще говоря, $\widetilde{\mathcal{M}}_s \not\sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\widetilde{\mathbb{K}}_s \not\sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}$, и структура пространства $\widetilde{\mathbb{K}}_s$ оказывается гораздо менее наглядной, чем прямое произведение $R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}$ в случаях 1, 2a, 2b, 2c, 2d.

Глава 4

Продолжимые частичные инварианты C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях

В этой главе излагаются результаты работ автора [137, 145] (а также автора и Ю.А. Браилова [146]).

4.1 Введение

В работах А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [9, 7] были открыты инварианты непрерывной и гладкой сопряженности невырожденных (морсовских) гамильтоновых систем с одной степенью свободы, т.е. гамильтоновых систем на двумерных поверхностях. Эта теория оказалась тесно связанной с непрерывной и гладкой траекторной классификацией интегрируемых невырожденных (боттовских) гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (т.е. на четырехмерных симплектических многообразиях). В результате А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко получили классификацию динамических систем указанного вида, как для одной степени свободы, так и для двух степеней свободы.

В частности, А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко [9, 10, 54, 11] построили *полный инвариант C^0 -сопряженности* (определение 4.1.10) невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности M (определение 4.2.1 или (4.11)). Этот инвариант (оснащенная молекула Болсинова–Фоменко) состоит из “дискретного” и “непрерывного” инвариантов: молекулы и ее оснащения. При этом “дискретный” инвариант сопоставляет любой невырожденной системе молекулу Фоменко ее гамильтониана (определение 2.4.5), которая характеризует класс траекторной эквивалентности системы (т.е. класс послойной эквивалентности ее гамильтониана) согласно предложению 2.4.6. Известно, что разбиение пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем на связные компоненты классов траекторной эквивалентности является стратификацией с понятной локальной структурой (см. §2.5.2), каждый страт которой (называемый *стратом Максвелла*) является “гладким подмногообразием конечной коразмерности” (определение 4.1.17 (С)). Поэтому “непрерывный” инвариант Болсинова–Фоменко фактически является совокупностью “частичных” инвариантов C^0 -сопряженности, каждый из которых определен и непрерывен (и даже является субмерсией, см. §4.3.2) лишь на некотором классе траекторной эквивалентности в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, т.е. на отдельных стратах Максвелла.

После этого сразу возник следующий естественный вопрос. Какие из обнаруженных ими “частичных” инвариантов *продолжимы* в некоторую окрестность соответствующего класса траекторной эквивалентности (до непрерывного инварианта C^0 -сопряженности в смысле некоторой C^r -топологии)? Другими словами, что происходит с частичными инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем при гладком возмущении систем? В каких случа-

ях C^0 -несопряженные системы остаются C^0 -несопряженными после C^r -малого возмущения? Или наоборот, когда C^0 -несопряженные системы можно сделать C^0 -сопряженными в результате выбора подходящего C^r -малого возмущения? Изучению этой задачи и посвящена настоящая глава. Оказалось, что в некоторых важных случаях можно доказать *относительную продолжимость* частичных инвариантов Болсинова-Фоменко по отношению к некоторым классам возмущений (т.е. по отношению к некоторым стратам Максвелла, примыкающим к данному). Выяснилось далее, что в значительной мере продолжимость (или наоборот непродолжимость) частичных инвариантов Болсинова-Фоменко зависит от топологии рассматриваемой двумерной поверхности. Если поверхность не является сферой (с выколотыми точками) и обладает определенными свойствами симметрии, то, как выяснилось, некоторые частичные инварианты являются относительно продолжимыми. Более точные вопросы (Q1)–(Q5), (Q1') и (Q2') о продолжимости инвариантов и устойчивой C^0 -несопряженности систем будут сформулированы ниже в §4.1.5.

Основными результатами данной главы являются следующие:

- введены бесконечная серия *бициклических* “атомов” (бифуркаций линий уровня морсовских функций Гамильтона) и ее бесконечная подсерия *вполне бициклических* атомов (определения 4.5.4 и 4.5.14),
- обнаружены относительно-продолжимые m -инварианты (определение 4.1.22 и замечание 4.3.13) гамильтоновых систем на бициклических атомах (точнее, на отвечающих им стратах Максвелла) по отношению к соответствующим открытым классам “бициклических возмущений” (определение 4.5.5 и теорема 4.5.6),
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.9 и 4.5.10) относительно-устойчивой C^0 -несопряженности (определение 4.1.21) пары гамильтоновых систем на бициклическом атоме по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем на атоме (см. комментарий 4.5.3);
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.16 и 4.5.17) устойчивой C^0 -несопряженности (определение 4.1.19) пары гамильтоновых систем на вполне бициклическом атоме; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем на атоме.

Сформулируем эти результаты в виде двух теорем.

Пусть $\mathbf{H}(M)$ — пространство гамильтоновых систем на поверхности M , функции Гамильтона которых являются функциями Морса $F_1 \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ с оснащено-нумерованными критическими точками (см. (4.10) и определение 2.2.2 (B)). Пусть $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ — функция Морса с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$ на компактной поверхности P с краем, $K = F^{-1}(c)$. Пусть $\mathbf{H}(F) = \mathbf{H}(P, K) \subseteq \mathbf{H}(P)$ — пространство систем, функции Гамильтона которых топологически послойно эквивалентны функции F (определения 2.2.4 (C) и 4.1.18). Пусть n — число критических точек функции F и

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{H}(F) &\rightarrow C^0(K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n, & v \mapsto \Lambda(v) &= (\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v)), \\ [m] : \mathbf{H}(F) &\rightarrow H^1(K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}, & v \mapsto [m(v)], \end{aligned}$$

— грубые Λ - и m -инварианты Болсинова-Фоменко (определение 4.2.9) симплектической сопряженности (определение 4.1.8) гамильтоновых систем $v \in \mathbf{H}(F)$ на данном атоме.

Теорема 4.1.1 (см. теорему 4.5.6 и следствия 4.5.9, 4.5.10). *Предположим, что топологическая пара (P, K) является бициклическим седловым атомом (определение 4.5.4). Пусть Z_1 и Z_2 — соответствующая пара ориентированных гамильтоновых циклов графа K , и $\tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}(P)$ — соответствующий класс бициклических возмущений (см. (4.16) и определение 4.5.5) гамильтоновых систем на данном атоме. Тогда:*

(А) *Инвариант*

$$B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle, \quad v \in \mathbf{H}(F),$$

является инвариантом C^1 -сопряженности и относительно- C^r -продолжим (определение 4.1.22) по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений при любом $r \geq 5$.

(В) Если число граничных окружностей поверхности P равно двум, то инвариант $B = B(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме. Если атом $(P, K)^\#$ является знакоопределенно-бициклическим (определение 4.3.24), то инвариант $B = B(v)$ не является инвариантом C^0 -сопряженности.

(С) Если пара гамильтоновых систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет условиям $(\Lambda_1(v_1) : \dots : \Lambda_n(v_1)) \neq (\Lambda_1(v_2) : \dots : \Lambda_n(v_2))$ и $B(v_1) \neq B(v_2)$, то системы v_1 и v_2 относительно-устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.21) по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений, т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях множеств критических точек гамильтонианов) при любых C^r -малых возмущениях класса $\tilde{\mathbf{H}}$, при любом $r \geq 5$.

(D) По отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ бициклических возмущений, пары (v_1, v_2) относительно-устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем из пространства $\mathbf{H}(F)$ систем на этом атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3).

Теорема 4.1.2 (см. следствия 4.5.16 и 4.5.17). *Предположим, что род поверхности P положителен, а топологическая пара (P, K) имеет максимальную и абелеву дискретную группу симметрий, т.е. принадлежит серии \mathcal{V} (определения 4.5.11, 4.5.12 и теорема 4.5.13), т.е. является вполне бициклическим атомом (см. теорему 4.5.15). Пусть O_1, \dots, O_ν — атомные окружности атома (P, K) , т.е. регулярные погруженные замкнутые кривые в графе $K \subset P$, с произвольно фиксированной ориентацией. Тогда:*

(А) Если пара гамильтоновых систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет условиям $\Lambda_j(v_1) : \Lambda_{j'}(v_1) \neq \Lambda_j(v_2) : \Lambda_{j'}(v_2)$ для любых $j \neq j'$ и $B(v_1) \neq B(v_2)$ для любого функционала $B = B(v)$ вида $B(v) = \langle [m(v)], [O_1] \pm \dots \pm [O_\nu] \rangle$ (для всевозможных знаков в сумме), то системы v_1 и v_2 устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.19), т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены, и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях множеств критических точек гамильтонианов) при любых C^r -малых возмущениях этих систем, при любом $r \geq 5$.

(В) Пары (v_1, v_2) устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3).

Отметим, что обнаруженный нами относительно-продолжимый m -инвариант $B = B(v)$ на подпространстве $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{H}(P)$ имеет простой геометрический смысл: значение $B(v)$ на любой системе $v \in \mathbf{H}(F)$ равно сумме главных значений $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$ периода системы v на атомных окружностях O_i данного атома, взятых с подходящими ориентациями (определение 4.3.7): $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$.

Для полноты изложения мы также получаем следующие дополнительные результаты:

- доказано, что пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности M C^5 -открыто, но не C^4 -открыто (§4.1.3) в пространстве $\mathbf{H}(M)$ почти невырожденных гамильтоновых систем на M (теорема 4.2.2), тем самым получен положительный ответ на вопрос (Q5) А.С. Мищенко (1999 г.);
- доказано, что для любого плоского атома и любого атома серии \mathcal{V} (в том числе любого вполне бициклического атома) не существует продолжимых инвариантов на пространстве гамильтоновых систем на этом атоме (следствие 4.5.19);

- доказано, что для любого плоского атома и любого атома серии \mathcal{V} (в том числе любого вполне бициклического атома) и любого класса простых возмущений (т.е. возмущений общего положения) систем на нем, обнаруженный нами набор из g относительно-продолжимых m -инвариантов по отношению к этому классу возмущений является полным (утверждение 4.4.2 и теорема 4.5.18), т.е. любой относительно-продолжимый инвариант является функцией от инвариантов данного набора, где количество g инвариантов данного набора равно роду атома (т.е. роду несущей поверхности P); в частности, в случае любого плоского атома не существует относительно-продолжимых инвариантов и любые две системы на этом атоме можно сделать C^0 -сопряженными путем сколь угодно малых возмущений этих систем в данном классе возмущений;
- доказано, что пространство $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-многообразии Q с краем (соотв. пространство $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы на невырожденном изоэнергетическом 3-мерном многообразии $Q_E \approx Q$) C^5 -открыто в пространстве $\mathbf{IH}(Q)$ интегрируемых несжимаемых течений на Q (соотв. в пространстве всех интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы), тем самым получен положительный ответ на вопрос (Q5)^{3D} А.С. Мищенко 1999 г. (замечание 4.1.7);
- обнаружены относительно-продолжимые C^0 -траекторные m -инварианты интегрируемых несжимаемых течений (соответственно интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на бициклических 3-атомах (точнее, на отвечающих им структурах Максвелла) по отношению к соответствующим открытым классам “бициклических возмущений” (определение 4.5.5, теорема 4.5.6 и замечание 4.1.7),
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.9, 4.5.10 и замечание 4.1.7) относительно-устойчивой C^0 -траекторной неэквивалентности (определяемой аналогично определению 4.1.21) пары интегрируемых несжимаемых 3-мерных течений (соответственно пары интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на бициклическом 3-атоме по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары интегрируемых течений (соответственно интегрируемых систем) на 3-атоме (см. комментарий 4.5.3);
- получены эффективные достаточные условия (следствия 4.5.16 и 4.5.17) устойчивой C^0 -траекторной неэквивалентности (аналог определения 4.1.19) пары интегрируемых несжимаемых 3-мерных течений (соответственно пары интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы) на вполне бициклическом 3-атоме; этим условиям удовлетворяют почти все пары интегрируемых течений (соответственно интегрируемых систем) на 3-атоме.

Перейдем к точным формулировкам задач и результатов.

4.1.1 Мотивировка: непрерывные траекторные инварианты интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений и интегрируемых гамильтоновых систем на 3-мерных изоэнергетических многообразиях

В данном параграфе рассматриваются *интегрируемые гамильтоновы системы* $X = \text{sgrad } H$ на симплектических четырехмерных многообразиях (M, Ω) . Здесь Ω — невырожденная замкнутая 2-форма на M , называемая *симплектической структурой*, X — векторное поле на M , определяемое условием $dH = \Omega(\cdot, X)$. Такая система задается четверкой

$$(M, \Omega, H, F),$$

где $H \in C^\infty(M)$ — функция Гамильтона, $F \in C^\infty(M)$ — дополнительный первый интеграл (т.е. $dF(X) = 0$) такой, что 2-форма $dH \wedge dF$ почти всюду отлична от нуля. Поскольку гамильтониан H всегда является первым интегралом, то можно ограничиться изучением систем на трехмерных инвариантных изоэнергетических регулярных 3-поверхностях

$$Q_E^3 = \{H = E = \text{const}\}.$$

Напомним, что две системы указанного типа считаются C^0 -лиувиллево эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, переводящий торы Лиувилля одной системы в торы Лиувилля другой системы. Как в работе [9], рассмотрим следующий естественный класс $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых систем $X_E = \text{sgrad } H|_{Q_E^3}$ на изоэнергетических 3-поверхностях Q_E , диффеоморфных фиксированному ориентированному 3-многообразию Q . Пусть:

1) Q_E^3 является компактным гладким замкнутым 3-мерным многообразием, на котором dH не имеет нулей,

2) существует дополнительный гладкий первый интеграл F (в окрестности 3-поверхности Q_E в M), ограничение которого на Q_E является невырожденным (=боттовским), т.е. все критические многообразия функции $F|_{Q_E}$ являются невырожденными и ориентируемыми (см. [33]). Кроме того, мы будем предполагать, что исследуемые нами системы на Q_E не имеют критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (это равносильно тому, что дифференциал отображения Пуанкаре для каждой периодической траектории поля X_E , являющейся в то же время критической окружностью интеграла $F|_{Q_E}$, не имеет отрицательных вещественных собственных значений). Другими словами, в терминологии [33, 35, 8] мы будем считать, что молекулы W изучаемых нами здесь систем не имеют “звездочек”. Системы со “звездочками” будут рассмотрены нами в отдельной работе. Предположим, что критические окружности функции $F|_{Q_E}$ пронумерованы и снабжены ориентациями своих сепаратрисных диаграмм (аналогично определению 2.2.2 (B));

3) Q_E^3 является C^0 -лиувиллево устойчивым для данной системы, т.е. при малом изменении значения E энергии H C^0 -лиувиллев тип системы X_E не меняется (т.е. система остается C^0 -лиувиллево эквивалентной исходной; см. [8]); последнее равносильно тому, что для любого критического уровня $L_E \subset Q_E$ функции $F|_{Q_E}$ существует сечение Пуанкаре, т.е. 2-мерная поверхность $P_E \subset Q_E$, трансверсальная векторному полю X_E и пересекающая каждую интегральную траекторию векторного поля X_E , содержащуюся в L_E ;

4) дифференциал отображения Пуанкаре для каждой периодической траектории поля X_E , являющейся в то же время критической окружностью интеграла $F|_{Q_E}$, отличен от тождественного отображения и от “минус тождественного”. Другими словами, будем считать, что все седловые критические окружности интеграла $F|_{Q_E}$ являются гиперболическими траекториями потока;

5) система является нерезонансной, т.е. иррациональные торы Лиувилля всюду плотны в Q_E ;

6) функции вращения $\rho = \rho_E$ системы X_E (т.е. зависимости отношения угловых частот $(\omega_1 : \omega_2) = (\omega_1, \omega_2) / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \in S^1$ на семействах торов Лиувилля от значения дополнительного первого интеграла на торе Лиувилля в Q_E) должны иметь лишь конечное число локальных экстремумов (минимумов и максимумов), причем все локальные экстремумы невырождены (т.е. являются морсовскими).

А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко классифицировали [9, теорема 4.1 или 8.1] динамические системы указанного типа невырожденности с точностью до C^0 -траекторной эквивалентности (определение 4.1.11).

Определим более точно множество таких систем и введем на нем топологию. Напомним, что на неособом изоэнергетическом многообразии $Q_E = H^{-1}(E)$ любой гамильтоновой системы (M, Ω, H) есть каноническая 3-форма объема μ_E такая, что

$$i_{X_E} \mu_E = \Omega|_{Q_E}$$

(она существует и единственна, так как $i_{X_E}(\Omega|_{Q_E}) = 0$ и X_E не имеет нулей и касательно к Q_E).

Пусть Q — компактное ориентированное 3-мерное многообразие и фиксировано число $E \in \mathbb{R}$. Определим сначала класс $\mathbf{H}(Q)$ произвольных (необязательно интегрируемых) гамильтоновых систем на неособых 3-мерных изоэнергетических многообразиях $Q_E \approx Q$:

$$\mathbf{H}(Q) := \{(M, \Omega, H, h) \mid h \in \text{Emb}(Q, M), h(Q) = H^{-1}(E), \text{ условие 1), } h^*\mu_E > 0\} / \sim_Q, \quad (4.1)$$

где μ_E — каноническая 3-форма объема системы (M, Ω, H) на $Q_E = H^{-1}(E)$, условие $h^*\mu_E > 0$ означает, что 3-форма объема $h^*\mu_E$ на Q задает положительную ориентацию, а отношение эквивалентности \sim_Q определяется так: $(M_1, \Omega_1, H_1, h_1) \sim_Q (M_2, \Omega_2, H_2, h_2)$, если

$$h_1^*(\Omega_1|_{Q_{E,1}}) = h_2^*(\Omega_2|_{Q_{E,2}}), \quad h_1^*(\mu_{E,1}) = h_2^*(\mu_{E,2}).$$

Здесь $\mu_{E,i}$ — это каноническая форма объема системы (M_i, Ω_i, H_i) на $Q_{E,i} = H_i^{-1}(E)$, $i = 1, 2$. Заметим, что отношение эквивалентности \sim_Q не изменится, если условие $h_1^*(\mu_{E,1}) = h_2^*(\mu_{E,2})$ заменить условием $(h_1^{-1})_*(X_{E,1}|_{Q_{E,1}}) = (h_2^{-1})_*(X_{E,2}|_{Q_{E,2}})$, т.е. условием совпадения индуцированных динамических систем на Q . Фиксируем любое $r \in \mathbb{N}$. Снабдим пространства $C^\infty(M)$ и $C^\infty(Q, M)$ C^r -топологией (см. (4.12) и (4.13)), пространство $\Omega^2(M)$ C^{r-1} -топологией, пространство $\Omega^2(M) \times C^\infty(M) \times C^\infty(Q, M)$ топологией прямого произведения, а пространство $\mathbf{H}(Q)$ фактортопологией.

Оказывается (в силу следующей леммы), класс динамических систем $\mathbf{H}(Q)$ (т.е. гамильтоновых систем на неособых 3-мерных изоэнергетических многообразиях) совпадает с классом 3-мерных несжимаемых течений без нулей. А именно:

Лемма 4.1.3 (о гамильтонизации 3-мерных несжимаемых течений). *Пусть Q — трехмерное ориентированное многообразие, снабженное положительной 3-формой объема μ и 2-формой B . Рассмотрим векторное поле \bar{V} на Q , определенное условием $i_{\bar{V}}\mu = B$. Тогда следующие два условия равносильны:*

- (а) векторное поле \bar{V} сохраняет форму объема μ (т.е. является несжимаемым, или бездивергентным),
- (б) 2-форма B замкнута.

Если выполнено одно из этих условий и 2-форма B не имеет нулей, то векторное поле \bar{V} совпадает с ограничением X_0 гамильтонова векторного поля на изоэнергетическое многообразие $H^{-1}(0)$ некоторой гамильтоновой системы (M, Ω, H) такой, что $M = Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, функция Гамильтона H совпадает с канонической проекцией $H : M \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Omega|_{Q \times \{0\}} = B$, и μ совпадает с канонической формой объема μ_0 на изоэнергетическом многообразии $H^{-1}(0) = Q \times \{0\}$ при отождествлении Q с $Q \times \{0\}$. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$.

Доказательство. Условие (а) равносильно равенству нулю производной Ли 3-формы μ вдоль векторного поля \bar{V} , т.е. условию $0 = L_{\bar{V}}\mu = (i_{\bar{V}}d + di_{\bar{V}})\mu = dB$, т.е. условию (б).

Пусть $\pi_Q : M \rightarrow Q$ — каноническая проекция. Будем отождествлять Q с $Q \times \{0\}$. Пусть α — произвольная 1-форма на Q такая, что $B \wedge \alpha = \mu$. Ее можно задать однозначно условием $\alpha|_{(\ker B)^\perp} = 0$, где ортогональное дополнение понимается в смысле какой-либо (произвольной) римановой метрики на Q . Положим $\Omega := \pi_Q^*B + d(H\pi_Q^*\alpha)$. Ясно, что $\Omega|_{Q \times \{0\}} = B$, $d\Omega = 0$ и Ω невырождена в малой окрестности гиперповерхности $Q \times \{0\}$ в M . Проверим условие на форму объема: в любой точке многообразия $Q \times \{0\}$ имеем $\Omega \wedge \Omega = 2(\pi_Q^*B) \wedge d(H\pi_Q^*\alpha) = 2dH \wedge (\pi_Q^*(B \wedge \alpha)) = 2dH \wedge (\pi_Q^*\mu)$. Поэтому μ совпадает с канонической формой объема на изоэнергетическом многообразии данной гамильтоновой системы. Лемма доказана. \square

Таким образом, сопоставление $(M, \Omega, H, h) \mapsto (h^*(\Omega|_{Q_E}), h^*\mu_E)$ дает биекцию

$$\mathbf{H}(Q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(Q) := \{(B, \mu) \in \Omega^2(Q) \times \Omega^3(Q) \mid B, \mu \text{ не имеют нулей, } \mu > 0, dB = 0\}. \quad (4.2)$$

Любой элемент пространства $\mathcal{B}(Q)$ назовем *3-мерным несжимаемым течением без нулей* на Q . Снабдим множество $C^\infty(Q)$ C^r -топологией (см. (4.12) и (4.13)), множества $\Omega^2(Q)$ и $\Omega^3(Q)$ C^{r-1} -топологией, множество $\Omega^2(Q) \times \Omega^3(Q)$ топологией прямого произведения, а множество $\mathcal{B}(Q)$ фактортопологией. Нетрудно показать, что биекция (4.2) непрерывна. Поэтому все непрерывные функционалы на $\mathcal{B}(Q)$ индуцируют непрерывные функционалы на $\mathbf{H}(Q)$.

Определим теперь класс $\mathbf{IH}(Q)$ *вполне интегрируемых* гамильтоновых систем на неособых 3-мерных изоэнергетических многообразиях $Q_E \approx Q$:

$$\mathbf{IH}(Q) := \{(M, \Omega, H, F, h) \mid [(M, \Omega, H, h)] \in \mathbf{H}(Q), \text{ условия 2)–4)}\} / \sim_Q, \quad (4.3)$$

где отношение эквивалентности \sim_Q определим так: $(M_1, \Omega_1, H_1, F_1, h_1) \sim_Q (M_2, \Omega_2, H_2, F_2, h_2)$, если

$$h_1^*(\Omega_1|_{Q_{E,1}}) = h_2^*(\Omega_2|_{Q_{E,2}}), \quad h_1^*(\mu_{E,1}) = h_2^*(\mu_{E,2}), \quad h_1^*(F_1|_{Q_{E,1}}) = h_2^*(F_2|_{Q_{E,2}}).$$

Определим также подкласс $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \mathbf{IH}(Q)$ *невырожденных* вполне интегрируемых систем:

$$\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) := \{(M, \Omega, H, F, h) \in \mathbf{IH}(Q) \mid \text{условия 5) и 6)}\}. \quad (4.4)$$

Как выше, снабдим пространства $C^\infty(M)$ и $C^\infty(Q, M)$ C^r -топологией, пространство $\Omega^2(M)$ C^{r-1} -топологией, пространство $\Omega^2(M) \times C^\infty(M) \times C^\infty(M) \times C^\infty(Q, M)$ топологией прямого произведения, а его подпространства $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \mathbf{IH}(Q)$ фактортопологией.

Замечание 4.1.4. Расширим теперь указанные классы $\mathbf{IH}(Q) \supset \mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ вполне интегрируемых и невырожденных вполне интегрируемых систем до классов *интегрируемых* и *невырожденных интегрируемых* систем, т.е. в условии 2) потребуем интегрируемость системы лишь на отдельном изоэнергетическом 3-мерном многообразии $Q_E = H^{-1}(E)$ (а не в некоторой его окрестности в M) при помощи ограничения $F|_{Q_E}$ на Q_E некоторой функции Ботта F . Полученные расширенные классы систем обозначим через $\tilde{\mathbf{IH}}(Q) \supset \tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q)$. Так как любой автономный гамильтонов поток сохраняет уровень энергии и каноническую форму объема на нем, то класс динамических систем $\tilde{\mathbf{IH}}(Q)$ (т.е. класс интегрируемых гамильтоновых систем на неособых 3-мерных изоэнергетических многообразиях) содержится в классе $\tilde{\mathbf{IV}}(Q)$ *интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений без нулей* (точное определение класса $\tilde{\mathbf{IV}}(Q)$ см. чуть ниже). Более того, в силу леммы 4.1.3 о гамильтонизации эти два класса совпадают:

(А) Сопоставление $(M, \Omega, H, F, h) \mapsto (h^*(\Omega|_{Q_E}), h^*(\mu_E), h^*(F|_{Q_E}))$ дает биекции классов

$$\tilde{\mathbf{IH}}(Q) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathbf{IV}}(Q) := \{(B, \mu, f) \in \mathcal{B}(Q) \times C^\infty(Q) \mid \text{условия 2)–4)} \text{ для } f \text{ и вект. поля } \bar{B}\} \quad (4.5)$$

и их подклассов

$$\tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathbf{IV}}^{\text{nondeg}}(Q) := \{(B, \mu, f) \in \tilde{\mathbf{IV}}(Q) \mid \text{условия 5) и 6)} \text{ для } f \text{ и вект. поля } \bar{B}\},$$

где векторное поле $\bar{B} = \bar{B}_{B,\mu}$ на Q определяется условием $i_{\bar{B}}\mu = B$. Обозначим образы подмножеств $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q), \mathbf{IH}(Q)$ при биекции (4.5) через $\mathbf{IV}^{\text{nondeg}}(Q), \mathbf{IV}(Q)$. Любой элемент пространства $\tilde{\mathbf{IV}}(Q)$ (соответственно $\mathbf{IV}(Q)$) назовем *интегрируемым* (соответственно *вполне интегрируемым*) *3-мерным несжимаемым течением без нулей* на Q , а любой элемент подпространства $\tilde{\mathbf{IV}}^{\text{nondeg}}(Q)$ (соответственно $\mathbf{IV}^{\text{nondeg}}(Q)$) — *невырожденным* интегрируемым (соответственно *вполне интегрируемым*) *3-мерным несжимаемым течением без нулей* на Q . Пусть $r \geq 2$. Как выше, снабдим множество $C^\infty(Q)$ C^r -топологией, множества $\Omega^2(Q)$ и $\Omega^3(Q)$ C^{r-1} -топологией, множество $\Omega^2(Q) \times \Omega^3(Q) \times C^\infty(Q)$ топологией прямого произведения, множество $\tilde{\mathbf{IV}}(Q)$ фактортопологией, а его подмножества $\mathbf{IV}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \mathbf{IV}(Q)$, $\tilde{\mathbf{IV}}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \tilde{\mathbf{IV}}(Q)$ индуцированной топологией. Нетрудно показать, что биекция (4.5) непрерывна. Поэтому непрерывные функционалы на $\tilde{\mathbf{IV}}^{\text{nondeg}}(Q)$ индуцируют непрерывные функционалы на $\tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q)$, а потому и на $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q)$. Из импликации

(a) \implies (b) леммы 4.1.5 ниже и из положительного решения вопроса (Q5) из §4.1.5 при любом $r \geq 5$ (теорема 4.2.2) следует, что класс $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ открыт и всюду плотен в классе $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(Q)$ при любом $r \geq 5$, поэтому для изучения непрерывных функционалов (скажем, траекторных инвариантов) на всем пространстве $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(Q)$ интегрируемых несжимаемых течений представляется весьма актуальным изучить их сначала на его открытом и всюду плотном подмножестве $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(Q)$ невырожденных течений.

(B) Если вместо Q взять 3-мерное компактное многообразие R с краем (например, диффеоморфное многообразию $R_{E,c,\varepsilon} := Q_E \cap N_{c,\varepsilon}$, где $N_{c,\varepsilon} := F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ и число $\varepsilon > 0$ достаточно мало), то аналогично определяются пространства $\mathbf{H}(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathbf{H}(R) \supset \mathbf{I}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R)$ и $\mathcal{B}(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathcal{B}(R) \supset \mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R)$ и полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\partial(R) &:= \{[(N, \Omega, H, h)] \in \mathbf{H}(R) \mid \Omega|_{\partial R} = 0\}, \\ \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R) &:= \left\{ [(N, \Omega, H, F, h)] \in \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}(R) \left| \begin{array}{l} \Omega|_{\partial R} = 0, \quad dF|_{\partial R} = 0, \\ dF \text{ не имеет нулей на } \partial R \end{array} \right. \right\}, \quad \mathbf{I}\mathbf{H}_\partial(R) := \mathbf{I}\mathbf{H}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R), \\ \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R) &:= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R), \quad \mathbf{I}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R) := \mathbf{I}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R), \\ \mathcal{B}_\partial(R) &:= \{(B, \mu) \in \mathcal{B}(R) \mid B|_{\partial R} = 0\}, \\ \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R) &:= \left\{ (B, \mu, f) \in \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(R) \left| \begin{array}{l} B|_{\partial R} = 0, \quad df|_{\partial R} = 0 \\ df \text{ не имеет нулей на } \partial R \end{array} \right. \right\}, \quad \mathbf{I}\mathcal{B}_\partial(R) := \mathbf{I}\mathcal{B}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R), \\ \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R) &:= \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R), \quad \mathbf{I}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R) := \mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R) \cap \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R). \end{aligned}$$

Имеем непрерывные биекции

$$\mathbf{H}_\partial(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_\partial(R), \quad \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R), \quad \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R)$$

и индуцированные непрерывные биекции

$$\mathbf{I}\mathbf{H}_\partial(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{I}\mathcal{B}_\partial(R), \quad \mathbf{I}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{I}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R).$$

Допуская некоторую вольность, всюду далее мы будем опускать индекс ∂ в обозначении пространств $\mathbf{H}_\partial(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathbf{H}_\partial(R) \supset \mathbf{I}\mathbf{H}_\partial^{\text{nondeg}}(R)$ и $\mathcal{B}_\partial(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathcal{B}_\partial(R) \supset \mathbf{I}\mathcal{B}_\partial^{\text{nondeg}}(R)$, т.е. будем их обозначать просто через $\mathbf{H}(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathbf{H}(R) \supset \mathbf{I}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R)$ и $\mathcal{B}(R)$, $\tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(R) \supset \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R)$, $\mathbf{I}\mathcal{B}(R) \supset \mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(R)$ соответственно.

Подчеркнем, что если 3-мерное бездивергентное векторное поле X из леммы 4.1.3 имеет первый интеграл f , то соответствующая гамильтонова система имеет, вообще говоря, лишь условный дополнительный первый интеграл $\pi_Q^* f = f \circ \pi_Q$ на нулевом уровне энергии $Q_0 = H^{-1}(0)$, т.е. принадлежит (расширенному) классу интегрируемых систем $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}(Q)$ (см. замечание 4.1.4). По-видимому (см. [12]), эта гамильтонова система не обладает, вообще говоря, дополнительным первым интегралом в целой 4-мерной окрестности гиперповерхности Q_E в M , т.е. не принадлежит классу $\mathbf{I}\mathbf{H}(Q)$ вполне интегрируемых систем.

Лемма 4.1.5. Пусть на 3-мерном компактном многообразии Q с краем заданы 3-форма объема μ и несжимаемый поток, обладающий боттовским первым интегралом, т.е. заданы замкнутая 2-форма B без нулей на Q и боттовская гладкая функция f на Q такие, что $B|_{\partial Q} = 0$, все критические многообразия функции f одномерны и содержатся во внутреннейности Q , и f постоянна на любой интегральной траектории поля ядер 2-формы B и на любой компоненте края. Предположим, что существует сечение Пуанкаре этого потока, т.е. такая 2-мерная компактная поверхность $P \subset Q$ с краем $\partial P \subset \partial Q$, что $B|_P$ не имеет нулей и P пересекает любую интегральную кривую поля ядер 2-формы B . Пусть $\psi : P \rightarrow P$ — отображение Пуанкаре, т.е. отображение последования, отвечающее потоку. Тогда верны импликация (a) \implies (b) и (b) \implies (c) между следующими условиями:

(a) поверхность P пересекает каждую критическую окружность функции f ровно в одной точке, значения функции $f|_P$ во всех ее критических точках совпадают, и собственные

значения линеаризации отображения Пуанкаре ψ в любой критической точке вещественны и положительны и отличны от 1;

(b) существует морсовская функция G на P (называемая гамильтонианом Пуанкаре), постоянная на любой граничной окружности поверхности P и такая, что отображение Пуанкаре ψ является действием гамильтонова потока за время 1 с гамильтонианом G относительно симплектической структуры $B|_P$;

(c) на 4-мерном многообразии $M = Q \times \mathbb{R}$ существует симплектическая структура Ω , относительно которой функция $H := \pi_{\mathbb{R}}$ находится в инволюции с функцией $g \circ \pi_Q$ (а в случае (a) также с функцией $f \circ \pi_Q$), и такая что $\Omega|_{Q \times \{0\}} = B$ при отождествлении Q с $Q \times \{0\}$, где $\pi_{\mathbb{R}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ и $\pi_Q : M \rightarrow Q$ — проекции, а функция g на Q постоянна вдоль интегральных кривых поля ядер 2-формы B и $g|_P = G$. То есть, интегрируемый поток, полученный из исходного интегрируемого несжимаемого потока некоторой заменой времени вдоль фазовых траекторий, продолжается в некоторую 4-мерную окрестность гиперповерхности Q в M до интегрируемой (на всех уровнях энергии) гамильтоновой системы.

В частности, при выполнении условия (a) (соответственно (b)) все компактные связные неособые множества уровня функции f (соответственно g) являются двумерными торами, и движение по ним в силу потока условно-периодично после указанной замены времени вдоль траекторий потока.

Доказательство. Пусть \mathcal{C}_{F_P} — множество критических точек функции $F_P := f|_P$.

(a) \implies (b): Отображение Пуанкаре $\psi : P \rightarrow P$ является симплектоморфизмом поверхности $(P, B|_P)$, и сохраняет функцию Морса F_P . Пусть $e \subset P$ — открытое ребро графа $K := F_P^{-1}(F_P(\mathcal{C}_{F_P}))$, т.е. связная компонента линии $K \setminus \mathcal{C}_{F_P}$. Из условия (a) следует, что $\psi(e) = e$. Опишем построение гамильтониана Пуанкаре G в достаточно малой регулярной окрестности U_e дуги e в проколотой поверхности $P \setminus \mathcal{C}_{F_P}$. По теореме Дарбу в U_e существуют канонические локальные координаты вида (y_e, F_P) , т.е. такие координаты, в которых симплектическая структура $B|_P$ имеет канонический вид $B|_{U_e} = dF_P \wedge dy_e$. Тогда отображение Пуанкаре в U_e имеет вид $(y_e, F_P) \mapsto (y_e + \Delta(y_e, F_P), F_P)$. То, что оно является симплектоморфизмом, означает, что якобиан этого отображения тождественно равен 1, т.е. функция $\Delta(y_e, F_P) = \Delta(F_P)$ не зависит от координаты y_e . Но любое отображение такого вида является гамильтоновым потоком за время 1 с гамильтонианом вида $G_e = G_e(F_P)$ на U , где $dG_e(F_P)/dF_P = \Delta(F_P)$. Прибавим к функции G_e константу так, чтобы $G_e(e) = 0$.

Полученные функции $G_e = G_e(F_P)$ склеиваются в единую гладкую функцию G на P (гамильтониан Пуанкаре), так как на любой связной компоненте поверхности $P \setminus K$ гамильтонианы $G_e, G_{e'}$, отвечающие разным ребрам e, e' , совпадают.

(b) \implies (c): Так как отображение Пуанкаре ψ сохраняет гамильтониан Пуанкаре G , то существует функция g на Q , постоянная вдоль интегральных кривых поля ядер 2-формы B и такая, что $g|_P = G$. Пусть (y, x) — канонические локальные координаты в некоторой области U в P относительно симплектической структуры $B|_P$, т.е. $B|_U = dx \wedge dy$. На $P \times S^1$ имеем локальные координаты (y, x, t) , где $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — координата на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. На 4-мерном многообразии $M_1 := P \times S^1 \times \mathbb{R}$ имеем локальные координаты (y, x, t, H) .

Определим 2-форму B_1 на $P \times S^1$ равной

$$B_1 := \pi_P^*(B|_P) - d(G \circ \pi_P) \wedge d\pi_{S^1},$$

т.е. в локальных координатах имеем $B_1|_{U \times S^1} = dx \wedge dy - dG \wedge dt$. Далее, для любой функции J на Y , функцию $J \circ \pi_Y$ на $X \times Y$ тоже будем обозначать через J , где $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ — проекция. Определим симплектическую структуру Ω_1 на M_1 формулой

$$\Omega_1 := \pi_{P \times S^1}^* B_1 + dH \wedge dt,$$

т.е. в локальных координатах имеем $\Omega_1|_{U \times S^1 \times \mathbb{R}} = dx \wedge dy - dG \wedge dt + dH \wedge dt = dx \wedge dy + d(H - G) \wedge dt$. Поэтому на (M_1, Ω_1) любая функция на P (т.е. любая функция от переменных x, y

на $U \times S^1 \times \mathbb{R}$, в частности любая из функций F_P, G находится в инволюции с функцией $H - G$. Отсюда $0 = \{G, H - G\} = \{G, H\}$, т.е. G — первый интеграл гамильтоновой системы (M_1, Ω_1, H) на всем 4-мерном многообразии M_1 . В случае (а) имеем $G = G_e(F_P)$, откуда $0 = \{F_P, H - G\} = \{F_P, H\}$, т.е. F_P тоже является первым интегралом гамильтоновой системы (M_1, Ω_1, H) .

Проверим, что ограничение интегрируемой гамильтоновой системы (M_1, Ω_1, H, G) на уровень энергии $P \times S^1 \times \{0\}$ траекторно эквивалентно исходной системе на Q , т.е. что тройка $(P \times S^1, B_1, G)$ диффеоморфна исходной тройке (Q, B, g) . Векторное поле $\bar{B}_1 := \partial/\partial t + \text{sgrad } G$ на $P \times S^1$ принадлежит ядру 2-формы $B_1 = \Omega_1|_{P \times S^1 \times \{0\}}$, так как $i_{\bar{B}_1} B_1 = dG - dG = 0$. Поэтому отображение Пуанкаре, отвечающее 2-форме B_1 , совпадает с отображением ψ , т.е. с отображением Пуанкаре, отвечающим 2-форме B . Отсюда следует, что существует диффеоморфизм пар $(P \times S^1, P \times \{0\}) \rightarrow (Q, P)$, индуцирующий тождественный диффеоморфизм $P \times \{0\} \rightarrow P$ и переводящий B в B_1 (а потому первый интеграл g в G , а в случае (а) первый интеграл f в F_P). Лемма доказана. \square

Итак, А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко классифицировали [9, теорема 4.1 или 8.1] динамические системы класса $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \approx \mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$ (т.е. невырожденные вполне интегрируемые 3-мерные несжимаемые течения) с точностью до C^0 -траекторной эквивалентности. В действительности, их классификация распространяется также на системы расширенного класса $\tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q) \approx \tilde{\mathbf{IB}}^{\text{nondeg}}(Q)$ (т.е. являющиеся интегрируемыми, но необязательно вполне интегрируемыми), по крайней мере на такие интегрируемые системы, которые являются интегрируемыми возмущениями систем из леммы 4.1.5 (а). Действительно: в силу леммы 4.1.5 из любого такого интегрируемого течения $(B, \tilde{\mu}, f) \in \tilde{\mathbf{IB}}(Q)$ можно получить вполне интегрируемое течение вида $(B, \mu, f) \in \mathbf{IB}(Q)$ путем изменения положительной 3-формы объема $\tilde{\mu}$, а течения (B, μ, f) и $(B, \tilde{\mu}, f)$ автоматически C^0 -траекторно эквивалентны для любых положительных 3-форм объема $\mu, \tilde{\mu}$ на Q .

В качестве вспомогательного инструмента для доказательства C^0 -траекторной классификации систем указанного типа невырожденности Болсинов и Фоменко доказали следующее утверждение (см. предложение 4.1.6 ниже).

Прежде, чем его сформулировать, напомним, что *ориентированным 3-атомом* (далее — *3-атомом*) называется малая инвариантная окрестность $R_{E,c,\varepsilon}$ в Q_E особого слоя $L_{E,c}$ слоения Лиувилля с точностью до C^0 -лиувиллевой эквивалентности (т.е. сохраняющего ориентацию послойного гомеоморфизма). Здесь $L_{E,c}$ есть связная компонента множества $Q_E \cap F^{-1}(c)$, содержащая критическую точку функции $F|_{Q_E}$, и $R_{E,c,\varepsilon}$ есть компонента связности $L_{E,c}$ в $Q_E \cap F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, где число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Хорошо известно [9], что для систем класса $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ (т.е. класса $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$) любой 3-атом есть прямое произведение *ориентированного 2-атома* (далее — *2-атома*) на окружность с точностью до послойного гомеоморфизма (а в случае 3-атомов со “звездочками” — косое произведение 2-атома на окружность, отвечающее некоторой инволюции 2-атома). А именно: согласно [9] существует гладкая 2-мерная поверхность

$$P_{E,c,\varepsilon} \subset R_{E,c,\varepsilon}$$

(называемая *трансверсальной 2-площадкой реализации 3-атома*) в Q_E такая, что существует послойный диффеоморфизм

$$(R_{E,c,\varepsilon}, F|_{R_{E,c,\varepsilon}}) \approx (S^1 \times P_{E,c,\varepsilon}, F \circ p_{P_{E,c,\varepsilon}}),$$

а в случае 3-атомов со “звездочками” — послойный диффеоморфизм

$$(R_{E,c,\varepsilon}, F|_{R_{E,c,\varepsilon}}) \approx (S^1 \lambda_\chi P_{E,c,\varepsilon}, F \circ p_{P_{E,c,\varepsilon}})$$

косому произведению 2-атома на окружность, отвечающему некоторой инволюции $\chi : P_{E,c,\varepsilon} \rightarrow P_{E,c,\varepsilon}$ 2-атома. Здесь $p_{P_{E,c,\varepsilon}} : S^1 \times P_{E,c,\varepsilon} \rightarrow P_{E,c,\varepsilon}$ (соответственно $p_{P_{E,c,\varepsilon}} : S^1 \lambda_\chi P_{E,c,\varepsilon} \rightarrow P_{E,c,\varepsilon}/\chi$) — проекция.

Далее мы будем считать, что для данного 3-атома фиксирована трансверсальная площадка $P_{E,c,\varepsilon} \subset R_{E,c,\varepsilon}$ с точностью до изотопии в классе трансверсальных площадок (т.е. с точностью до действия группы $\text{Diff}^0(R_{E,c,\varepsilon})$ изотопных тождественному диффеоморфизмов, сохраняющих слоение Лиувилля). Более того, пусть $P_{E,c,\varepsilon}$ является образом некоторого фиксированного вложения

$$P \hookrightarrow R_{E,c,\varepsilon},$$

где P — фиксированная ориентированная 2-мерная поверхность с краем (считаем, что обратный образ 2-формы $\Omega|_{R_{E,c,\varepsilon}}$ при этом вложении задает положительную ориентацию на P). Пусть $K \subset P$ есть полный прообраз графа $K_{E,c} := P_{E,c,\varepsilon} \cap L_{E,c}$ при этом вложении. А значит, фиксирован сохраняющий ориентацию диффеоморфизм

$$h_E : R := S^1 \times P \xrightarrow{\approx} R_{E,c,\varepsilon} \subset Q_E$$

с точностью до изотопии в классе послойных диффеоморфизмов (считаем, что обратный образ 3-формы μ_E при этом вложении задает положительную ориентацию на R). Получаем диффеоморфизм пар

$$h_E : (R, L) = (S^1 \times P, S^1 \times K) \xrightarrow{\approx} (R_{E,c,\varepsilon}, L_{E,c}).$$

На площадке $P_{E,c,\varepsilon} \subset R_{E,c,\varepsilon}$ рассмотрим функцию Морса $F|_{P_{E,c,\varepsilon}}$ и особую линию уровня $K_{E,c} := P_{E,c,\varepsilon} \cap F^{-1}(c)$ этой функции. Так как наш 2-атом (= класс послойной эквивалентности функции Морса $F|_{P_{E,c,\varepsilon}}$) характеризуется топологической парой (P, K) , или “оснащенной” топологической парой $(P, K)^\#$ (определения 2.4.3, 2.4.2 и замечание 2.4.4), то соответствующий 3-атом (= класс послойной эквивалентности функции Ботта $F|_{R_{E,c,\varepsilon}}$) характеризуется топологической парой $(R, L) := (S^1 \times P, S^1 \times K)$, или соответствующей топологической оснащенной парой $(R, L)^\#$.

Пусть $R = S^1 \times P$ и

$$h_E : R = S^1 \times P \hookrightarrow Q_E$$

— регулярное вложение такое, что для подмногообразия $R_E := h_E(R) \subset Q_E$ с краем выполнено $\Omega|_{\partial R_E} = 0$, $dF|_{\partial R_E} = 0$, и $d(F|_{Q_E})$ не имеет нулей на ∂R_E . Предположим, что $P_E := h_E(\{0\} \times P) \subset R_E$ — сечение Пуанкаре системы в R_E , т.е. 2-мерная поверхность, трансверсальная векторному полю $X|_{R_E}$ и пересекающая каждую его интегральную траекторию (например, $R_E = R_{E,c,\varepsilon}$ и $P_E = P_{E,c,\varepsilon}$ — 3-атом и трансверсальная 2-площадка его реализации в Q_E , см. выше). Предположим также, что любая критическая окружность функции $F|_{Q_E}$ пересекает поверхность P_E лишь в одной точке (это автоматически выполнено для систем на 3-атоме и их малых возмущений). Рассмотрим *отображение Пуанкаре* $P_E \rightarrow P_E$ трансверсальной площадки P_E в себя (т.е. *отображение последования*), отвечающее векторному полю $X|_{R_E}$. Согласно импликации (а) \implies (b) из леммы 4.1.5 (или [9]), для систем данного типа невырожденности на площадке P_E существует гладкая функция Морса $G_E \in C^\infty(P_E)$, определенная однозначно с точностью до аддитивной константы и такая, что отображение Пуанкаре совпадает с действием фазового потока гамильтоновой системы

$$(P_E, \Omega|_{P_E}, G_E) \tag{4.6}$$

за время 1. Гамильтонову систему (4.6) назовем *гамильтоновой системой Пуанкаре*, ее фазовый поток — *поток Пуанкаре*, а ее гамильтониан — *гамильтонианом Пуанкаре*. Пусть

$$i_P : P \hookrightarrow \{0\} \times P \subset R = S^1 \times P$$

— каноническое вложение, тогда $h_E \circ i_P : P \xrightarrow{\approx} P_E$. Нетрудно показать, что сопоставления $(R_E, \Omega, H, F, h_E) \mapsto (h_E^*(\Omega|_{P_E}), h_E^*(\mu_E), h_E^*F) \mapsto ((h_E \circ i_P)^*(\Omega|_{P_E}), (h_E \circ i_P)^*G_E)$ задают непрерывные сюръекции

$$\tilde{\mathbf{H}}(R) \rightarrow \tilde{\mathbf{I}}\mathcal{B}(R) \rightarrow \mathbf{H}_{r-1,r}(P)/\mathcal{D}(P), \tag{4.7}$$

где

$$\mathbf{H}_{r-1,r}(P) = \{(\omega, G) \in \Omega^2(P) \times \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P) \mid \omega > 0\}$$

— совокупность всех гамильтоновых систем на поверхности P , гамильтонианы G которых являются функциями Морса с оснащено-нумерованными критическими точками (см. (4.10) и определение 4.1.8), $\mathcal{D}(P) = \text{Diff}(P)$ — группа диффеоморфизмов поверхности P , условие $\omega > 0$ означает, что 2-форма ω на P не имеет нулей и задает положительную ориентацию. Мы снабжаем пространство $\mathbf{H}_{r-1,r}(P) \subset \Omega^2(P) \times \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ индуцированной топологией, где $\Omega^2(P)$ снабжено C^{r-1} -топологией, $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ снабжено C^r -топологией, а $\Omega^2(P) \times \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$ топологией прямого произведения. Итак, пространство $\mathbf{H}_{r-1,r}(P)$ совпадает с пространством $\mathbf{H}(P)$ из (4.10) как множество без учета топологии. Ясно, что образ подмножества $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(R)$ при отображении 677 (4.7) есть пространство $\mathbf{H}_{r-1,r}^{\text{nondeg}}(P)/\mathcal{D}(P)$, где $\mathbf{H}_{r-1,r}^{\text{nondeg}}(P) \subset \mathbf{H}_{r-1,r}(P)$ совпадает с $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ как множество (без учета топологии).

Предложение 4.1.6 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [9, предложение 7.3]). (а) Пусть две интегрируемые системы C^0 -траекторно эквивалентны. Рассмотрим два 3-атома V и V' , соответствующие друг другу при этой эквивалентности и пусть P_E — любая гладкая трансверсальная 2-площадка реализации атома V в Q_E . Тогда существует гладкая трансверсальная 2-площадка P'_E атома V' в Q'_E такая, что потоки Пуанкаре на P_E и на P'_E C^0 -сопряжены, т.е. существует гомеоморфизм P_E на P'_E , переводящий первый поток во второй. При этом, в случае седлового атома с неориентируемой сепаратрисной диаграммой указанный гомеоморфизм переводит соответствующую инволюцию χ в инволюцию χ' .

(б) Обратно, пусть дана система X_E на 3-атоме V и система v'_E на атоме V' . Пусть внутри каждого из атомов существуют 2-площадки P_E и P'_E такие, что потоки Пуанкаре на этих площадках C^0 -сопряжены, т.е. существует гомеоморфизм P_E на P'_E , переводящий первый поток во второй (и такой, что в случае седлового атома с неориентируемой сепаратрисной диаграммой он переводит соответствующую инволюцию χ в инволюцию χ'). Тогда две системы X_E и X'_E C^0 -траекторно эквивалентны на данных 3-атомах.

Таким образом, C^0 -траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем на трехмерном атоме сведена Болсиновым и Фоменко в предложении 4.1.6 к классификации гамильтоновых систем $(P_E, \Omega|_{P_E}, G_E)$ на двумерном атоме с точностью до C^0 -сопряженности (определение 4.1.10). Аналогично показывается, что C^0 -траекторная классификация интегрируемых систем с оснащено-нумерованными критическими окружностями на трехмерном атоме сводится к классификации гамильтоновых систем с оснащено-нумерованными седлами (определение 2.2.2 (В)) на двумерном атоме с точностью до C^0 -сопряженности (определение 4.1.10).

Эта последняя задача оказалась нетривиальной — описание инвариантов C^0 -сопряженности гамильтоновых систем с оснащено-нумерованными седлами на двумерных атомах (т.е. на 2-атомах). Она была решена Болсиновым и Фоменко [9, теорема 4.1 или 8.1], а именно, предъявлен полный набор инвариантов, дающих классификацию ростков гамильтоновых систем с оснащено-нумерованными седлами с одной степенью свободы на произвольном 2-атоме (P, K) (точнее, классификацию гамильтоновых систем на страте Максвелла $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$, см. определение 4.1.18) с точностью до C^0 -сопряженности. Обобщение этой теоремы на случай произвольных невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности P (необязательно имеющих только один критический уровень функции G) сформулировано в теореме 4.3.16.

Тем самым, Болсинов и Фоменко построили полный C^0 -траекторный инвариант на пространствах $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(Q) \supset \mathbf{I}\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых (соответственно невырожденных вполне интегрируемых) систем на трехмерных инвариантных изоэнергетических регулярных 3-поверхностях Q_E^3 , т.е. на пространствах $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{B}^{\text{nondeg}}(Q) \supset \mathbf{I}\mathbf{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых (соответственно невырожденных вполне интегрируемых) 3-мерных несжимаемых течений.

Всюду далее, допуская некоторую вольность, под $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \mathbf{IH}(Q)$ будем понимать расширенные классы гамильтоновых систем $\tilde{\mathbf{IH}}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \tilde{\mathbf{IH}}(Q)$. Мы будем изучать только такие функционалы на $\mathcal{B}(Q)$ (в главе 5) и на $\tilde{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\text{nondeg}}(Q)$ (в данной главе), которые не зависят от 3-формы объема μ на Q . Заметим, что каждое из множеств

$$\{B \mid (B, \mu) \in \mathcal{B}(Q)\}, \quad \{(B, f) \mid (B, \mu, f) \in \tilde{\mathcal{I}\mathcal{B}}(Q)\}, \quad \{(B, f) \mid (B, \mu, f) \in \tilde{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\text{nondeg}}(Q)\}$$

не зависит от выбора положительной 3-формы объема μ на Q . Всюду далее (допуская некоторую вольность), мы будем обозначать эти множества через $\mathcal{B}(Q)$, $\mathcal{I}\mathcal{B}(Q)$ и $\mathcal{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ соответственно.

Рассмотрим разбиение пространства $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q) \subset \mathbf{IH}(Q)$ систем на данном 3-мерном многообразии Q на классы C^0 -лиувиллево эквивалентных систем. Линейно-связные компоненты таких классов будем называть *стратами Максвелла* на пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$. В каждом страте Максвелла постоянен полный инвариант Фоменко-Цишанга C^0 -лиувиллевой эквивалентности (т.е. постоянна меченая молекула Фоменко-Цишанга). Меченая молекула — это граф с метками, вершинам которого сопоставлены комбинаторные объекты — 3-атомы. Каждый 3-атом — это малая компактная окрестность боттовского множества уровня функции $F|_{Q_E}$ на Q_E , с точностью до послойного гомеоморфизма (т.е. с точностью до C^0 -лиувиллевой эквивалентности). По теореме Фоменко любой 3-атом гомеоморфен прямому произведению 2-атома на окружность (при условии 3) выше).

Отметим, что инварианты Болсинова-Фоменко являются “частичными”, так как они определены не на всем пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$, а лишь на отдельных (необязательно открытых) классах C^0 -лиувиллевой эквивалентности, т.е. на отдельных стратах Максвелла $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$, состоящих из гамильтоновых систем на данном 2-атоме (P, K) . Поэтому соответствующие инварианты Болсинова-Фоменко на 3-атомах тоже являются “частичными”, так как они определены не на всем пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R^3)$ и не на всем $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q^3)$, а лишь на отдельных (необязательно открытых) классах C^0 -лиувиллевой эквивалентности, т.е. на отдельных стратах Максвелла $\mathbf{IH}(R^3, L^2) \cap \mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R^3)$ в пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R^3)$ или $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q^3)$, состоящих из гамильтоновых систем на данном 3-атоме (R^3, L^2) . При этом коразмерность указанного страта Максвелла равна $n - 1$, где n есть сложность атома, т.е. количество критических точек функции $F|_{P_E}$, равное количеству критических окружностей функции $F|_{R_E}$. То есть, страт Максвелла открыт в случае $n = 1$ простого атома, и неоткрыт в случае $n \geq 2$ сложного атома.

Возникают естественные вопросы: насколько разумен класс $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем (например, открыт ли он в смысле той или иной разумной топологии в пространстве всех интегрируемых гамильтоновых систем), и имеют ли “частичные” инварианты Болсинова-Фоменко разумное (т.е. непрерывное) продолжение в некоторую окрестность своих областей определения? Более точно, возникают следующие вопросы:

(Q5)^{3D} (А.С. Мищенко, 1999) Рассмотрим пространство $\mathbf{IH}(Q)$ интегрируемых гамильтоновых систем $X = \text{sgrad } H|_{Q_E^3}$ на изоэнергетических 3-многообразиях, обладающих только свойствами 1)–4) выше (аналогично определяется пространство $\mathcal{I}\mathcal{B}(Q)$ интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений). Открыто ли пространство $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых систем в пространстве $\mathbf{IH}(Q)$ всех интегрируемых систем? Эквивалентный вопрос: открыто ли пространство $\mathcal{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений в пространстве $\mathcal{I}\mathcal{B}(Q)$ всех интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений?

(Q3')^{3D} (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) Какие из “частичных” инвариантов Болсинова-Фоменко (и их комбинаций), определенные на заданном страте Максвелла в пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ (соответственно $\mathcal{I}\mathcal{B}^{\text{nondeg}}(Q)$), т.е. на классе C^0 -лиувиллевой эквивалентности, **непрерывно продолжаются** в некоторую окрестность этого страта Максвелла?

При этом понятия открытости из вопроса (Q5)^{3D} и непрерывности из вопроса (Q3')^{3D}

понимаются в смысле какой-либо C^r -топологии на пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$ (соответственно $\mathbf{IB}^{\text{nondeg}}(Q)$), где $r \in \mathbb{N}$ достаточно велико.

Отметим, что инварианты Болсинова-Фоменко непрерывны на C^∞ -открытом C^∞ -плотном подмножестве в $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(Q)$, состоящем из систем, у которых любая связная компонента множества уровня дополнительного первого интеграла $F|_{Q_E}$ содержит лишь одну критическую окружность функции $F|_{Q_E}$ (это следует из предложения 4.2.4). Более того, здесь C^∞ -топологию можно заменить более сильной C^5 -топологией ввиду теоремы 4.2.2. Системы с указанным свойством — это в точности те системы, у которых все 3-атомы являются простыми (определение 1.6.6). Поэтому сформулированный выше вопрос $(Q3)^{3D}$ естественно переформулировать так:

(Q3)^{3D} (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) Какие из инвариантов Болсинова-Фоменко (и их комбинаций) систем на данном **сложном** 3-атоме **продолжимы**, т.е. их можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность множества $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R, L)$ систем на данном 3-атоме (R, L) в пространстве $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R)$? Какие из инвариантов Болсинова-Фоменко (и их комбинаций) систем на данном **сложном** 3-атоме **относительно-продолжимы**, т.е. их можно непрерывно продолжить в некоторый открытый страт Максвелла, примыкающий к данному страту Максвелла $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R, L)$?

Замечание 4.1.7. Согласно предложению 4.1.6 (а), любой инвариант C^0 -сопряженности на $\mathbf{H}(P)$ индуцирует при отображении (4.7) C^0 -траекторный инвариант на $\mathbf{IH}(R)$, где $P = P^2$ и $R = S^1 \times P$. Но тождественное отображение $\mathbf{H}_{r-1,r}(P) \rightarrow \mathbf{H}(P)$, где $\mathbf{H}(P)$ снабжено топологией из §3.2.2, непрерывно при $r \geq 3$. Поэтому любой непрерывный (в смысле топологии из §3.2.2) инвариант C^0 -сопряженности на $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ индуцирует непрерывный (в смысле топологии из (4.4)) траекторный инвариант на $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R)$. Аналогично, если мы докажем открытость подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ в $\mathbf{H}(P)$ в смысле топологии из §3.2.2, то отсюда сразу получим открытость подпространства $\mathbf{IH}^{\text{nondeg}}(R)$ в $\mathbf{IH}(R)$, т.е. решим вопрос $(Q5)^{3D}$.

Таким образом, с учетом замечания 4.1.7, мы свели “3-мерные” вопросы $(Q5)^{3D}$, $(Q3')^{3D}$ и $(Q3)^{3D}$ к их 2-мерным аналогам (т.е. к вопросам $(Q5)$ и $(Q3)$ из §4.1.5). Значит, из нашего положительного ответа на вопрос $(Q5)$ из §4.1.5 при любом $r \geq 5$ (теорема 4.2.2) следует, с учетом замечания 4.1.7, положительный ответ на вопрос $(Q5)^{3D}$. А из нашего ответа на вопрос $(Q3)$ из §4.1.5 сразу будет следовать ответ на вопрос $(Q3)^{3D}$, поскольку все относительно-продолжимые инварианты C^0 -сопряженности систем на 2-атомах индуцируют при отображении (4.7) относительно-продолжимые C^0 -траекторные инварианты систем на 3-атомах.

4.1.2 Основные типы эквивалентности гамильтоновых систем

Пусть (M, ω) — компактное *симплектическое многообразие* (возможно, с краем). То есть, M — это *гладкое компактное многообразие*, на котором задана дифференциальная 2-форма ω , являющаяся замкнутой ($d\omega = 0$) и невырожденной в каждой точке многообразия (т.е. определитель кососимметричной матрицы, составленной из компонент этой 2-формы, отличен от нуля). Пусть $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на этом многообразии, постоянная на любой связной компоненте края поверхности M и не имеющая критических точек на крае. Множество всех таких функций обозначим через

$$C^\infty(M, \partial M). \quad (4.8)$$

Пару (ω, F) , где ω и F — 2-форма и функция с указанными выше свойствами, назовем *гамильтоновой системой с гамильтонианом F и симплектической структурой ω на M* . Напомним, что любое симплектическое многообразие (M^{2k}, ω) обладает естественной ориентацией, задаваемой $2k$ -формой объема $\omega^{\wedge k} = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ ($k = \dim M/2$ сомножителей) на M .

Хорошо известно, что пространство $\mathcal{F}(M)$ функций Морса на M открыто и всюду плотно в пространстве $C^\infty(M)$, снабженном C^r -топологией, для любого $r \in [2, +\infty]$. Поэтому изучение гамильтоновых систем с морсовскими функциями Гамильтона представляет первоочередной интерес.

Всюду далее мы будем предполагать, что $\dim M = 2n = 2$ и функция Гамильтона F является *морсовской функцией с оснащено-нумерованными критическими точками* (определение 2.2.2 (B)) на M , т.е. принадлежит пространству

$$\mathcal{F}^{\text{num,fr}} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{num,fr}} = \mathcal{F}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{num,fr}}(M) \quad (4.9)$$

для некоторых фиксированных чисел $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$ (см. (2.10)). Будем также предполагать, что на поверхности M фиксирована ориентация при помощи некоторого кососимметрического тензорного поля $\mathbf{v} \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 TM)$ без нулей на M , и что симплектическая 2-форма ω согласована с этой ориентацией. Полученное множество гамильтоновых систем на M обозначим через

$$\mathbf{H}(M) := \{(\omega, F) \in \Omega^2(M) \times \mathcal{F}^{\text{num,fr}} \mid d\omega = 0, \omega(\mathbf{v}) > 0\} \quad (4.10)$$

и назовем *пространством почти невырожденных гамильтоновых систем* на ориентированной поверхности M , или просто *пространством гамильтоновых систем* на M .

С каждой гамильтоновой системой $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ мы всегда будем ассоциировать векторное поле $\text{sgrad } F$ (называемое *гамильтоновым* с функцией Гамильтона F), двойственное 1-форме dF относительно 2-формы ω :

$$\omega(\cdot, \text{sgrad } F) = dF.$$

Заметим, что край многообразия M компактен и состоит из компонент множеств уровня функции F , поэтому поток $g_{\text{sgrad } F}^t$ векторного поля $\text{sgrad } F$ является полным. Этот поток назовем *фазовым потоком* гамильтоновой системы $v = (\omega, F)$ и обозначим через g_v^t , а траектории этого потока назовем *фазовыми траекториями* системы.

Мы будем рассматривать следующие четыре типа эквивалентности на пространстве $\mathbf{H}(M)$ гладких (т.е. класса C^∞) гамильтоновых систем:

- 1) симплектическая сопряженность,
- 2) C^1 -сопряженность (не обязательно симплектическая),
- 3) C^0 -сопряженность и
- 4) траекторная эквивалентность систем (непрерывная, т.е. класса C^0 , или класса C^1 , или класса C^∞).

Определение 4.1.8. Будем говорить, что гамильтоновы системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ и $v' = (\omega', F') \in \mathbf{H}(M')$ *симплектически сопряжены*, если существует симплектический диффеоморфизм $A : M \rightarrow M'$ соответствующих симплектических многообразий (M, ω) и (M', ω') , такой, что $A^*F' = F + \text{const}$. Если $M = M'$ и указанный диффеоморфизм изотопен тождественному, то системы назовем *топологически симплектически-сопряженными*.

Определение 4.1.9. Гамильтоновы системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ и $v' = (\omega', F') \in \mathbf{H}(M')$ называются *C^1 -сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию C^1 -диффеоморфизм многообразия M в M' , переводящий фазовый поток g_v^t первой системы в фазовый поток $g_{v'}^t$ второй системы. Если $M = M'$ и указанный диффеоморфизм изотопен тождественному, то системы назовем *топологически C^1 -сопряженными*.

Определение 4.1.10. Гамильтоновы системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ и $v' = (\omega', F') \in \mathbf{H}(M')$ будем называть *C^0 -сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм многообразия M в M' , переводящий фазовый поток g_v^t первой системы в фазовый поток $g_{v'}^t$ второй системы. Если $M = M'$ и указанный гомеоморфизм изотопен тождественному, то системы назовем *топологически C^0 -сопряженными*.

Определение 4.1.11. Гамильтоновы системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ и $v' = (\omega', F') \in \mathbf{H}(M')$ будем называть C^0 -траекторно эквивалентными (или просто траекторно эквивалентными), если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм многообразия M в M' , переводящий фазовые траектории первой системы в фазовые траектории второй системы с сохранением направления роста времени на неособых траекториях. Если $M = M'$ и указанный гомеоморфизм изотопен тождественному, то системы назовем *топологически траекторно эквивалентными*.

Подчеркнем, что, говоря о каком-либо типе эквивалентности почти невырожденных гамильтоновых систем с одной степенью свободы (определения 4.1.8–4.1.11), мы всегда будем предполагать, что гомеоморфизм (диффеоморфизм), осуществляющий эту эквивалентность, сохраняет не только ориентацию поверхности, но и нумерацию и оснащения критических точек функции Гамильтона F . Ясно, что для почти невырожденных гамильтоновых систем с одной степенью свободы послынная эквивалентность функций Гамильтона (определение 2.2.4 (С)) равносильна траекторной эквивалентности систем. Следовательно, C^0 -сопряженность таких систем влечет послынную эквивалентность их гамильтонианов.

Определенные только что типы эквивалентности систем мы будем использовать в данной работе по отношению к системам, обладающим дополнительными свойствами. А именно, далее мы будем рассматривать лишь системы $v \in \mathbf{H}(M)$, для которых функции периода $\tau = \tau(f)$ замкнутых траекторий являются морсовскими и не имеют граничных критических точек (подробнее см. в определении 4.2.1). Такие системы называются *невырожденными гамильтоновыми системами с одной степенью свободы*; согласно теореме 4.2.2 они образуют открытое и всюду плотное подмножество

$$\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) = \mathbf{H}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{nondeg}}(M) \quad (4.11)$$

в пространстве $\mathbf{H}(M)$ всех почти невырожденных гамильтоновых систем на M .

Далее, допуская некоторую вольность изложения, мы иногда будем называть пространство $\mathbf{H}(M)$ *пространством всех гамильтоновых систем на M* , опуская термин “почти невырожденные”.

4.1.3 C^r -топологии в пространстве гамильтоновых систем, $r \geq 5$. Возмущенные системы

Фиксируем многообразие M и рассмотрим пространство $\mathbf{H}(M)$ всех почти невырожденных гладких (т.е. класса C^∞) гамильтоновых систем $v = (\omega, F)$ на этом многообразии (см. (4.10)).

Фиксируем любое число $r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$5 \leq r \leq +\infty.$$

Определим C^r -топологию на пространстве $\Omega^2(M) \times C^\infty(M)$ как топологию прямого произведения пространства $\Omega^2(M)$, снабженного C^{r-3} -топологией, и пространства $C^\infty(M)$, снабженного C^r -топологией (см. (2.5) и (2.6)). Как в §3.2.2, вводится C^r -топология на пространстве $\mathcal{F}^{\text{num, fr}}$ морсовских функций с оснащено-нумерованными критическими точками. Снабдим подмножество $\mathbf{H}(M) \subset \Omega^2(M) \times \mathcal{F}^{\text{num, fr}}$ индуцированной топологией.

Согласно с этим определением, под ε -малым возмущением (или просто возмущением) гамильтоновой системы v в смысле C^r -топологии будем понимать гамильтонову систему $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F}) \in \mathbf{H}(M)$, отвечающую ε -малому по C^r -норме возмущению функции Гамильтона и ε -малому по C^{r-3} -норме возмущению симплектической структуры:

$$\|\tilde{F} - F\|_{C^r} + \|\tilde{\omega} - \omega\|_{C^{r-3}} < \varepsilon \quad (4.12)$$

и удовлетворяющую дополнительному условию

$$\|\tilde{F}\|_{C^{r+1}} + \|\tilde{\omega}\|_{C^{r-2}} < C. \quad (4.13)$$

Здесь $C > 0$ — произвольная наперед заданная константа, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, характеризующее “величину возмущения” и зависящее от констант r и C , системы v и способа построения C^r -нормы.

В частности, если $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — гамильтонова система на “седловом атоме” $(P, K)^\#$ (т.е. соответствующая функция Гамильтона имеет лишь одно критическое значение, и все критические точки являются седловыми, см. определение 2.4.3), то возмущенную систему \tilde{v} будем называть *возмущением гамильтоновой системы на атоме* $(P, K)^\#$.

Множество возмущённых гамильтоновых систем \tilde{v} , удовлетворяющих условиям (4.12) и (4.13) для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$, назовём ε -окрестностью системы v .

Согласно с этим, запись

$$\tilde{v} \rightarrow v \tag{4.14}$$

будет означать выполнение двух условий: (4.13) и

$$\|\tilde{F} - F\|_{C^r} + \|\tilde{\omega} - \omega\|_{C^{r-3}} \rightarrow 0.$$

При любом $r \in [5, \infty]$ базой определенной выше C^r -топологии в пространстве $\mathbf{H}(M)$ служат ε -окрестности систем $v \in \mathbf{H}(M)$ для всевозможных $\varepsilon > 0$ и $v \in \mathbf{H}(M)$. Определение C^∞ -топологии см. также в §3.2 (или в [143, §4]).

Замечание 4.1.12. Все утверждения настоящей главы, верны и доказаны нами для любой C^r -топологии в пространствах $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) \subset \mathbf{H}(M)$ гамильтоновых систем, где $r \in [5, \infty]$ (т.е. для “ $C^{\geq 5}$ -топологий”). Некоторые утверждения настоящей главы (о непрерывности тех или иных инвариантов на $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$) в действительности верны даже для более широкого класса топологий на пространстве $\mathbf{H}(M)$ гамильтоновых систем. Например:

- Λ -инварианты Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности (т.е. Λ -метки на седловых атомах молекулы Фоменко, см. (4.39) и утверждение 4.2.12) гамильтоновых систем непрерывны даже относительно C^3 -топологии на $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ (но не непрерывны относительно C^2 -топологии на $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$);
- для всех утверждений из §2.5, где симплектическая структура не рассматривается (т.е. изучается лишь возмущение функции Морса), верны аналоги этих утверждений при $2 \leq r \leq \infty$.

Однако мы не изучаем вопрос о нахождении *наименьшего* r , для которого верен аналог того или иного из доказываемых нами (при любом $r \in [5, +\infty]$) утверждений. Аналогичным образом, результат параграфа §5.2 описывает все инварианты сопряженности на пространстве симплектоморфизмов, производная которых существует всюду и обладает C^1 -непрерывной функцией плотности; однако мы не изучаем вопрос о нахождении *наибольшего* r , для которого верен аналог этого результата для C^r -непрерывной функции плотности (отметим лишь, что при $r \geq 3$ наш метод доказательства не работает ввиду результатов теории КАМ).

4.1.4 Инварианты гамильтоновых систем. Гладкие функционалы на пространстве систем

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M)$ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхности M . Рассмотрим действие группы \mathcal{D} на пространстве $\mathbf{H}(M)$ гамильтоновых систем на M .

Отображение $I : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданное на некотором подмножестве $\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}(M)$, будем называть *векторнозначным функционалом* на пространстве \mathbf{H}_1 .

Определение 4.1.13. Векторнозначный функционал $I = I(\omega, F)$, заданный на некотором \mathcal{D} -инвариантном подмножестве \mathbf{H}_{inv} в пространстве $\mathbf{H}(M)$ всех гамильтоновых систем, будем называть *симплектическим инвариантом* (или *инвариантом симплектической сопряженности*), если этот функционал постоянен на орбитах действия группы \mathcal{D} и не меняется

при прибавлении любой константы к функции Гамильтона. То есть, если для любых симплектически сопряженных (определение 4.1.8) гамильтоновых систем $(\omega, F), (\omega', F') \in \mathbf{H}_{inv}$ значения $I(\omega, F)$ и $I(\omega', F')$ функционала I на этих системах совпадают.

Определение 4.1.14. Векторнозначный функционал $I = I(\omega, F)$, заданный на некотором \mathcal{D} -инвариантном подмножестве \mathbf{H}_{inv} в пространстве $\mathbf{H}(M)$, будем называть *инвариантом C^1 -сопряженности*, или просто C^1 -инвариантом, если для любых C^1 -сопряженных гамильтоновых систем (определение 4.1.9) из \mathbf{H}_{inv} значения функционала I на этих системах совпадают.

Определение 4.1.15. Векторнозначный функционал $I = I(\omega, F)$, заданный на некотором \mathcal{D} -инвариантном подмножестве \mathbf{H}_{inv} пространства $\mathbf{H}(M)$, будем называть *инвариантом C^0 -сопряженности*, или просто C^0 -инвариантом, если для любых C^0 -сопряженных (определение 4.1.10) гамильтоновых систем $(\omega, F), (\omega', F') \in \mathbf{H}_{inv}$ выполнено $I(\omega, F) = I(\omega', F')$.

Определение 4.1.16. Векторнозначный функционал $I = I(\omega, F)$, заданный на некотором \mathcal{D} -инвариантном подмножестве \mathbf{H}_{inv} в пространстве $\mathbf{H}(M)$, будем называть *траекторным инвариантом* (или *инвариантом послойной эквивалентности гамильтонианов*), если $I(\omega, F) = I(\omega', F')$ для траекторно эквивалентных (определение 4.1.11) гамильтоновых систем $(\omega, F), (\omega', F') \in \mathbf{H}_{inv}$ (т.е. для послойно эквивалентных гамильтонианов F и F').

Ясно, что все траекторные инварианты являются C^0 -инвариантами, все C^0 -инварианты — C^1 -инвариантами, а все C^1 -инварианты — симплектическими инвариантами.

Далее, говоря о непрерывности инвариантов и об открытых подмножествах в пространстве $\mathbf{H}(M)$, мы всегда будем подразумевать C^r -топологию в пространстве $\mathbf{H}(M)$, т.е. топологию из §4.1.3 (отвечающую C^r -норме в пространстве гамильтонианов и C^{r-3} -норме в пространстве симплектических структур, где r — любое наперед заданное число из промежутка $5 \leq r \leq \infty$). В некоторых случаях можно ослабить предположение на r , т.е. рассмотреть более сильную топологию на $\mathbf{H}(M)$, отвечающую какому-либо $r \in \{2, 3, 4\}$ (см. замечание 4.1.12).

Все обсуждаемые в данной главе инварианты являются инвариантами симплектической сопряженности, определены на \mathcal{D} -инвариантных “гладких поверхностях” \mathbf{H}_1 конечной размерности в $\mathbf{H}(M)$, и гладкие в следующем смысле.

Определение 4.1.17. Рассмотрим конечный набор $J = (J_1, \dots, J_s) : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^s$ вещественнозначных функционалов, определенных на некотором подпространстве \mathbf{H}_1 в пространстве $\mathbf{H}(M)$ всех гамильтоновых систем на M (например, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}(P, K)$ — множество гамильтоновых систем на данном атоме $(P, K)^\#$, где $M = P$).

(А) Предположим, что \mathbf{H}_1 открыто в $\mathbf{H}(M)$. Будем говорить, что функционалы набора J и сам набор являются *гладкими*, если для любого гладкого параметрического семейства гамильтоновых систем $v_{\theta_1, \dots, \theta_u} \in \mathbf{H}_1$ с параметрами $\theta_1, \dots, \theta_u \in \mathbb{R}$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_u^2 < \varepsilon$, отображение u -мерного открытого диска в \mathbb{R}^s , переводящее $(\theta_1, \dots, \theta_u) \mapsto J(v_{\theta_1, \dots, \theta_u})$ (называемое *ограничением* отображения J на данное семейство систем), является гладким.

(В) Предположим, что \mathbf{H}_1 открыто в $\mathbf{H}(M)$. Будем называть функционалы набора J *функционально независимыми*, а отображение $J : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^s$ *субмерсией*, если отображение J гладкое и для любой гамильтоновой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}_1$ существует гладкое s -параметрическое семейство систем $v_{\theta_1, \dots, \theta_s} \in \mathbf{H}_1$ с параметрами $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 < \varepsilon$, такое что $v = v_{\theta_1, \dots, \theta_s}$ и якобиан ограничения отображения J на данное семейство отличен от нуля при $\theta_1 = \dots = \theta_s = 0$. Указанное семейство систем назовем *локальным регулярным сечением* субмерсии J в точке v .

(В') Предположим, что \mathbf{H}_1 открыто в $\mathbf{H}(M)$. Отображение $J : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^s$ назовем *почти субмерсией*, если для любой гамильтоновой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}_1$ существует гладкое

s -параметрическое семейство систем $v_{\theta_1, \dots, \theta_s} \in \mathbf{H}_1$ с параметрами $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 < \varepsilon$, такое, что $v = v_{0, \dots, 0}$ и ограничение отображения J на данное семейство является гомеоморфизмом открытого s -мерного диска в некоторое открытое подмножество множества \mathbb{R}^s . Указанное семейство систем назовем *локальным сечением* субмерсии J в точке v .

(С) Подмножество $\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}(M)$ назовем *гладким подмногообразием коразмерности $u \in [0, +\infty)$* в $\mathbf{H}(M)$, если для любой его точки $v \in \mathbf{H}_1$ существует окрестность U в $\mathbf{H}(M)$, такая что $U \cap \mathbf{H}_1 = J^{-1}(0, \dots, 0)$ для некоторой субмерсии $J : U \rightarrow \mathbb{R}^u$.

(D) Определения из пп. (A) и (B) дословно повторяются в случае, когда \mathbf{H}_1 есть гладкое подмногообразие конечной коразмерности (не обязательно нулевой) в $\mathbf{H}(M)$, см. (С). Аналогичные определения вводятся для пространств $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}^{\text{num, fr}}(M)$ функций Морса на поверхности M (вместо пространства $\mathbf{H}(M)$ гамильтоновых систем на M).

4.1.5 Постановка вопросов об устойчиво несопряженных системах на атоме, о продолжимости инвариантов на множество возмущенных систем

Пусть $P \subseteq M$ — подповерхность в M . Пусть на поверхности P задана функция Морса $F_0 \in \mathcal{F}^{\text{num, fr}}(P)$ с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$, причем все ее критические точки являются седловыми (см. (4.9)). Рассмотрим граф $K := F_0^{-1}(c)$. Топологическая пара (P, K) с некоторой дополнительной структурой обозначается через $(P, K)^\#$ и называется *седловым атомом*, или просто *атомом* (см. определение 2.4.3), отвечающим функции Морса F_0 .

Определение 4.1.18. Обозначим через $\mathbf{H}(F_0) = \mathbf{H}(P, K)$ пространство всех гамильтоновых систем $(\omega, F) \in \mathbf{H}(P)$, функции Гамильтона $F \in \mathcal{F}^{\text{num, fr}}(P)$ которых послойно эквивалентны функции F_0 (см. (4.9) и определение 2.2.4 (С)). Такие системы будем называть *гамильтоновыми системами на атоме $(P, K)^\#$* . Гамильтоновы системы из пространства $\mathbf{H}(F_0)$, рассматриваемые с точностью до ограничения системы на малую регулярную инвариантную окрестность $U \subseteq P$ графа K и отождествления этой окрестности с поверхностью P при помощи сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $U \rightarrow P$, тождественного на K , будем называть *ростками гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$* . Ростки двух гамильтоновых систем на атомах $(P_i, K_i)^\#$, $i = 1, 2$, считаются *эквивалентными* в смысле отношения эквивалентности одного из определений 4.1.8–4.1.11, если ограничения этих систем на некоторые окрестности U_i графов K_i эквивалентны в смысле этого отношения эквивалентности (а значит, сами атомы совпадают в смысле определения 2.4.3). Под *инвариантом* (в смысле этого отношения эквивалентности) *ростков гамильтоновых систем на атоме* мы будем понимать такой функционал на пространстве $\mathbf{H}(F_0)$, значения которого на любой паре систем, имеющих эквивалентные (в указанном смысле) ростки, совпадают.

В некоторых формулировках (например, в предложении 4.2.4) мы будем ограничиваться рассмотрением подпространства

$$\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M) \subset \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M), \quad (4.15)$$

состоящего из невырожденных гамильтоновых систем, для которых функция периода $\tau_e(f)$ имеет ровно одну критическую точку на каждом *внутреннем* ребре e графа Кронрода-Риба $W = W_F$ (т.е. на таком ребре, оба конца которого имеют степени большие 1), и не имеет критических точек (включая граничных) на остальных рёбрах. Из теоремы 4.2.2 следует, что $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ непусто и открыто в $\mathbf{H}(M)$.

Пусть $v_1 = (\omega_1, F_1)$ и $v_2 = (\omega_2, F_2)$ — две гамильтоновы системы из пространства $\mathbf{H}(P, K)$. Эти системы будем называть *невозмущенными*, а близкие к ним системы $\tilde{v}_1 = (\tilde{\omega}_1, \tilde{F}_1)$, $\tilde{v}_2 = (\tilde{\omega}_2, \tilde{F}_2) \in \mathbf{H}(P)$ — *возмущенными*.

Определение 4.1.19. Скажем, что две гамильтоновы системы v_1 и v_2 на атоме $(P, K)^\#$ устойчиво C^0 -несопряжены вблизи седловых критических уровней, если выполнены два условия:

1) Эти системы не являются C^0 -сопряженными в любых сколь угодно малых (инвариантных регулярных) окрестностях U_1 и U_2 седловых уровней.

2) Существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любых ε -малых возмущениях функций F_1, F_2 и симплектических структур ω_1, ω_2 (в смысле топологии из §4.1.3) возмущенные системы остаются C^0 -несопряженными в любых инвариантных связных окрестностях \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 своих множеств критических точек.

Основной целью настоящей главы является изучение пяти вопросов (Q1)–(Q5) и их вариантов (Q1'), (Q2') и (Q4'), первые два из которых следующие:

(Q1) (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) Существуют ли на том или ином атоме устойчиво C^0 -несопряженные системы? (Утверждение 4.4.2, следствие 4.5.17.)

(Q2) (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) При каких условиях две системы на атоме будут устойчиво C^0 -несопряжены? (Утверждение 4.4.2, следствия 4.5.16 и 4.5.16'.)

Мы построим бесконечную серию \mathcal{V} “вполне бициклических” седловых атомов (см. ниже, или [146, 137, 145] и рис. 4.7) и для всех атомов этой серии, а также для всех плоских атомов, получим положительный ответ на вопрос (Q1) и решение вопроса (Q2). Оказывается, что для таких атомов существование или отсутствие таких пар систем на атоме зависит от топологии атома, более точно, от того, является ли этот атом плоским.

Понятие устойчивой C^0 -несопряженности систем на данном атоме тесно связано с понятием “устойчивых”, или продолжимых, инвариантов (см. определения 4.1.20 и 4.1.22 ниже) систем на этом атоме. В §4.1.4 было дано определение инвариантов симплектической, C^1 - и C^0 -сопряженностей гамильтоновых систем на атоме. Определим сейчас понятие продолжимых инвариантов, а затем в §4.1.5 ослабим условия из определений 4.1.19 и 4.1.20 (см. определения 4.1.21 и 4.1.22) и сформулируем для них возникающие вопросы (Q3), (Q4), (Q5) и аналоги вопросов (Q1) и (Q2).

В следующих определениях 4.1.20 и 4.1.22 используется теорема 4.2.2, согласно которой пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ (см. (4.15) и (4.11)) открыты в пространстве $\mathbf{H}(P)$. Из нее также нетрудно вывести, что любой класс

$$\hat{\mathbf{H}} := \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P) \cap \hat{\mathbf{H}} \tag{4.16}$$

топологической траекторной эквивалентности гамильтоновых систем в $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ линейно связан, где через $\hat{\mathbf{H}}$ обозначено множество гамильтоновых систем, функции Гамильтона которых принадлежат одному и тому же классу топологической послойной эквивалентности в $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$. Отсюда и из свойств стратификации Максвелла пространства $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(P)$, стратами которой являются классы топологической послойной эквивалентности (см. §2.5.2), следует, что каждое пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ обладает естественной стратификацией (т.е. разбиением на линейно-связные дизъюнктные подмножества, называемые *стратами Максвелла*) такой, что

- страты Максвелла в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ суть связные компоненты классов топологической траекторной эквивалентности гамильтоновых систем этого пространства, а страты Максвелла в пространстве $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ суть классы (4.16) топологической траекторной эквивалентности гамильтоновых систем этого пространства,
- любой страт Максвелла является линейно-связным гладким подмногообразием конечной коразмерности (определение 4.1.17 (C)) и обладает окрестностью, являющейся объединением конечного числа стратов Максвелла; в качестве такой окрестности можно взять объединение этого страта Максвелла и всех примыкающих к нему (определение 2.7.9 (B)) стратов Максвелла.

Поясним условие 2 из следующих определений 4.1.20 и 4.1.22. Оно мотивировано явным видом полного инварианта Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на поверхностях. А именно: сопоставим каждой системе $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, заданной на компактной поверхности M , граф $\Gamma_v \subset \text{int } M$, где Γ_v есть объединение всех связных компонент линий уровня функции Гамильтона F , которые либо содержат критическую точку функции F , либо являются замкнутыми фазовыми траекториями системы v , в которых дифференциал функции периода замкнутых фазовых траекторий в силу системы v равен 0. Тогда значение $BF(v)$ полного инварианта BF Болсинова-Фоменко на любой системе $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ полностью определяется ограничением системы v на любую сколь угодно малую регулярную окрестность множества $\Gamma_v \cup \partial M$ в M . В определениях 4.1.20 и 4.1.22 “возмущенный” инвариант \tilde{I} является функцией от инварианта BF следующего специального вида: согласно свойству 2 из этих определений, значение $\tilde{I}(\tilde{v})$ полностью определяется ограничением системы $\tilde{v} \in \tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ лишь на любую сколь угодно малую регулярную окрестность графа $\Gamma_{\tilde{v}}$ в P (вместо графа $\Gamma_{\tilde{v}} \cup \partial P$ в P). Действительно: так как “возмущенный” инвариант $\tilde{I} = \tilde{I}(\tilde{v})$ из определения 4.1.20 (соотв. 4.1.22) является инвариантом C^0 -сопряженности, то в силу теоремы 4.3.16 Болсинова-Фоменко он является функцией от меток Болсинова-Фоменко системы \tilde{v} (т.е. функцией от Λ -, m_Λ - и Π -меток системы \tilde{v} на вершинах и ребрах графа возмущения, см. определение 2.5.1 (B)). При этом п.2 определения 4.1.20 (соотв. п.2 определения 4.1.22) означает, что указанная функция в действительности не зависит от Π -меток на внешних ребрах графа возмущения (см. определение 2.5.1 (C)).

Определение 4.1.20. Фиксируем сложный атом $(P, K)^\#$ (сложности $n > 1$). Пусть $I = I(v)$ — вещественнозначный функционал, определенный на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ гамильтоновых систем v на данном атоме (определение 4.1.18). Мы будем предполагать, что этот функционал не является константой. Пусть существует инвариант \tilde{I} C^0 -сопряженности, заданный в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ множества $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ в $\mathbf{H}(P)$, непрерывный в смысле топологии на $\mathbb{U} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P) \subset \mathbf{H}(P)$ из §4.1.3 и обладающий следующими свойствами:

1) \mathbb{U} содержит любой *страт Максвелла* $\tilde{\mathbf{H}}$ в $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ (т.е. любой класс (4.16) топологической траекторной эквивалентности гамильтоновых систем в пространстве $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$, см. (4.15) и (4.11)), примыкающий к страту Максвелла $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных систем на данном атоме (т.е. замыкание страта Максвелла $\tilde{\mathbf{H}}$ содержит страт Максвелла $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$, см. определение 2.7.9 (B)),

2) для любой системы $\tilde{v} \in \mathbb{U}$ существует инвариантная регулярная окрестность $U_0 \subset P$ края ∂P поверхности P , замыкание которой не содержит особых точек системы \tilde{v} , и такая, что для любой (меньшей) инвариантной регулярной окрестности $U \subset U_0$ края ∂P поверхности P , замыкание которой содержится в U_0 , выполнено $\tilde{I}(\tilde{v}) = \tilde{I}(h^*(\tilde{v}|_{P \setminus U}))$ для некоторого диффеоморфизма $h : P \rightarrow P \setminus U$, неподвижного на $P \setminus U_0$,

3) ограничения функционалов $I = I(v)$ и $\tilde{I} = \tilde{I}(\tilde{v})$ на пространство $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ совпадают, т.е. \tilde{I} является непрерывным продолжением функционала $I|_{\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)}$ в окрестность \mathbb{U} множества $\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ в $\mathbf{H}(P)$.

Тогда функционал $I = I(v)$ будем называть C^r -*продолжимым инвариантом* (или просто *продолжимым инвариантом*) на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ систем на данном атоме. Если при этом I является гладким (определение 4.1.17), то будем его называть *гладким C^r -продолжимым инвариантом* (или просто *гладким продолжимым инвариантом*).

Относительно-устойчиво C^0 -несопряженные системы на атоме, относительная продолжимость инварианта по отношению к возмущениям данного класса

Напомним, что для каждого атома $(P, K)^\#$ мы считаем фиксированной нумерацию его вершин, а также оснащения этих вершин. Согласно с фиксированной нумерацией и оснащением вершин атома, мы фиксируем нумерацию и оснащения критических точек x_1, \dots, x_n гамильтониана F любой системы на этом атоме, — как невозмущенной, так и возмущенной. Для любой функции, близкой к некоторой морсовской функции, послойно эквивалентной F , обозначим через c_i ее значение в критической точке, близкой к x_i , $1 \leq i \leq n$.

Фиксируем атом $(P, K)^\#$ с пронумерованными вершинами x_1, \dots, x_n и какое-нибудь упорядоченное разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества его вершин (см. (2.20) и (2.21)). Рассмотрим специальные возмущения систем на этом атоме, при которых критические значения возмущенного гамильтониана удовлетворяют соответствующему отношению частичного порядка, т.е. соответствующей цепочке (2.22) равенств и строгих неравенств вида

$$c_{j_1} = \dots < \dots = \dots < \dots = c_{j_n}, \tag{4.17}$$

где c_j — критические значения возмущенного гамильтониана, между которыми стоят знаки равенства “=” и строгого неравенства “<”, $j = (j_1, \dots, j_n)$ — некоторая перестановка. Множество таких возмущений будем иногда называть *классом возмущений* систем на данном атоме. Ясно, что для каждого атома существует лишь конечное число классов возмущений. При этом случае, когда все знаки в (4.17) являются неравенствами, отвечают *простые возмущения*, а случаю одних равенств отвечают *тривиальные возмущения*. Далее под *классом возмущений вида* (4.17) будем понимать класс (4.16) топологической траекторной эквивалентности в пространстве $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$, содержащий все возмущенные системы, полученные достаточно малыми возмущениями вида (4.17). Такие системы действительно принадлежат одному классу (4.16), так как их функции Гамильтона топологически послойно эквивалентны друг другу согласно утверждению 2.5.2.

Пусть седловой атом $(P, K)^\#$ задается функцией Морса F с ровно одним критическим значением. Фиксируем класс (4.16) возмущений функции F , задаваемый системой равенств и неравенств между возмущенными критическими значениями c_1, \dots, c_n (см. (4.17) выше).

Определение 4.1.21 (ср. определение 4.1.19). Мы скажем, что две гамильтоновы системы v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F) = \mathbf{H}(P, K)$ на атоме $(P, K)^\#$ *относительно-устойчиво C^0 -несопряжены* вблизи седловых уровней *по отношению к данному классу возмущений $\tilde{\mathbf{H}}$* , если они удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) Эти системы не являются C^0 -сопряженными в любых сколь угодно малых (инвариантных регулярных) окрестностях U_1 и U_2 седловых уровней.
- 2) Существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любых ε -малых возмущениях класса $\tilde{\mathbf{H}}$ обеих систем v_1 и v_2 (в смысле топологии из §4.1.3) возмущенные системы остаются C^0 -несопряженными в любых инвариантных связных окрестностях \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 своих множеств критических точек.

Определение 4.1.22 (ср. определение 4.1.20). Фиксируем сложный атом $(P, K)^\#$ (сложности $n > 1$) и класс (4.16) возмущений вида (4.17) систем на этом атоме. Пусть $I = I(v)$ — вещественнозначный функционал, определенный на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ гамильтоновых систем v на данном атоме (определение 4.1.18) и непрерывный в смысле топологии на $\mathbf{H}(P, K) \subset \mathbf{H}(P)$ из §4.1.3. Мы будем предполагать, что этот функционал является инвариантом симплектической сопряженности ростков гамильтоновых систем на атоме в смысле определения 4.1.18 (т.е. $I(v_1) = I(v_2)$, если системы v_1 и v_2 на данном атоме симплектически сопряжены в некоторых окрестностях U_1 и U_2 седловых уровней) и не является константой. Пусть существует инвариант \tilde{I} C^0 -сопряженности на пространстве $\tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$

(“возмущенных”) гамильтоновых систем вида (4.17), см. (4.16), непрерывный в смысле индуцированной топологии на $\tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P) \subset \mathbf{H}(P)$ из §4.1.3 и обладающий следующими двумя свойствами:

- 2) для любой системы $\tilde{v} \in \tilde{\mathbf{H}}$ выполнен аналог свойства 2) из определения 4.1.20,
- 3) для любой гамильтоновой системы $v \in \mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ на атоме и ее возмущений $\tilde{v} \in \tilde{\mathbf{H}}$ данного класса имеем:

$$I(v) = \lim \tilde{I}(\tilde{v}) \quad \text{при} \quad \tilde{v} \rightarrow v, \quad (4.18)$$

где предел понимается в смысле индуцированной топологии на подмножестве $(\mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)) \cup \tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P) \subset \mathbf{H}(P)$ из §4.1.3 (см. (4.14)).

Тогда функционал $I = I(v)$ будем называть *относительно- C^r -продолжимым инвариантом* (или просто *относительно-продолжимым инвариантом*) относительно класса возмущений (4.17). Если при этом I является гладким (определение 4.1.17), то будем его называть *гладким относительно- C^r -продолжимым инвариантом* (или просто *гладким относительно-продолжимым инвариантом*).

В определении 4.1.22 мы (i) рассматриваем лишь *относительную продолжимость* инвариантов систем на атоме (т.е. продолжимость по отношению к некоторому классу малых возмущений систем на данном атоме, в отличие от определения 4.1.20), кроме того (ii) функционал I предполагается инвариантом лишь *симплектической* (но не обязательно C^0 -) *сопряженности*. Это мотивируется тем, что (i) для систем на некоторых атомах существуют лишь относительно-продолжимые инварианты и не существуют продолжимых (см. следствие 4.5.19), а (ii) некоторые относительно-продолжимые инварианты являются лишь инвариантами C^1 - (но не C^0 -) *сопряженности*, по крайней мере для атомов V_{2k+1}^1, V_k^2 бесконечной серии \mathcal{V} — вполне бициклических атомов (см. теорему 4.5.21).

Комментарий 4.1.23. Поясним, почему важно требовать, чтобы возмущенный инвариант \tilde{I} являлся инвариантом C^0 -сопряженности. Если откинуть это требование, то нетрудно построить много новых (относительно) продолжимых инвариантов. Например, существуют простые примеры инвариантов C^1 -сопряженности, которые остаются инвариантами C^1 -сопряженности после возмущения. Однако, чтобы гарантировать (относительно-) устойчивую C^0 -несопряженность систем на атоме, нам нужны именно продолжимые инварианты, которые при нетривиальном возмущении становятся инвариантами C^0 -сопряженности.

Кроме упомянутой серии \mathcal{V} вполне бициклических атомов, мы построим серию бициклических атомов (см. §4.5.2). Для каждого атома этой серии мы укажем класс простых возмущений вида (4.17) систем на этом атоме, и для этого класса возмущений решим следующие аналоги вопросов (Q1) и (Q2).

(Q1’) (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) Существуют ли на том или ином атоме относительно-устойчиво C^0 -несопряженные системы по отношению к заданному классу возмущений? (Следствие 4.5.10.)

(Q2’) (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) При каких условиях две системы на атоме будут относительно-устойчиво C^0 -несопряжены по отношению к заданному классу возмущений? (Следствия 4.5.9 и 4.5.9’.)

Кроме того, для указанных атомов и классов простых возмущений, а также для произвольных атомов и произвольных сложных (т.е. не являющихся простыми) возмущений систем на них, мы получим положительные ответы на следующие вопросы:

(Q3) (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, 1997) Существует ли на заданном атоме продолжимый инвариант? (Утверждение 4.4.2 и следствие 4.5.19.) Существует ли на заданном атоме относительно-продолжимый инвариант по отношению к заданному классу возмущений? (Предложение 4.4.1, утверждение 4.4.2, теоремы 4.5.1, 4.5.6 (B) и 4.5.18.)

(Q4) Является ли этот относительно-продолжимый инвариант I инвариантом C^0 - (или хотя бы C^1 -) сопряженности систем? (Предложение 4.4.1, теоремы 4.5.1, 4.5.6 (С) и 4.5.21.)

Наши построения будут использовать (построенный А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко) полный инвариант C^0 -сопряженности систем в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ (см. теорему 4.3.16). В связи с этим возникает следующий вопрос, поставленный А.С. Мищенко, на который мы в §4.2 дадим положительный ответ при любом $r \geq 5$:

(Q5) (А.С. Мищенко, 1999) Являются ли подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем открытыми и/или всюду плотными в пространстве $\mathbf{H}(M)$ всех (почти невырожденных) гамильтоновых систем на поверхности M в смысле топологии из §4.1.3? (Теорема 4.2.2, утверждение 4.2.12.)

Если вопрос (Q3) имеет положительный ответ, то вопрос (Q1') тоже имеет положительный ответ, и с помощью относительно-продолжимого инварианта из (Q3) нетрудно явно получить ответ на вопрос (Q2'). Еще один возникающий вопрос (Q4') мы сформулируем в §4.3.3 ниже.

В работах Болсинова–Фоменко [9, 10, 54, 11] и в поставленных выше вопросах (Q1)–(Q4), (Q1') и (Q2') фактически рассматривается разбиение пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем на M на *страты Максвелла* — связные компоненты классов траекторной эквивалентности (определение 4.1.11), т.е. любой страт Максвелла состоит из гамильтоновых систем $(\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ таких, что функция Морса F принадлежит фиксированному классу топологической послойной эквивалентности (определение 2.2.4 (С)) и фиксировано количество “П-меток” на каждом ребре графа W^{num} . Более точно: А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко [9, 10, 54, 11] построили полный *инвариант C^0 -сопряженности* гамильтоновых систем (оснащенная молекула Болсинова–Фоменко) на отдельно взятом *страте Максвелла* из пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. А в вопросах (Q3) и (Q4) фактически рассматриваются два страта Максвелла, один из которых открыт и примыкает (определение 2.7.9 (В)) к другому страту Максвелла, и спрашивается о непрерывной продолжимости (в смысле топологии из §4.1.3) какого-либо инварианта C^0 -сопряженности, определенного на открытом страте Максвелла, на объединение этих двух стратов.

4.2 Открытость пространства невырожденных гамильтоновых систем в пространстве всех гамильтоновых систем на поверхности

В этом параграфе мы докажем открытость пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем в пространстве $\mathbf{H}(M)$ гамильтоновых систем на поверхности M в смысле топологии из §4.1.3, т.е. дадим положительный ответ на вопрос (Q5) из §4.1.5.

Напомним и дадим более подробное определение невырожденной гамильтоновой системы на поверхности M (см. (4.11)).

Рассмотрим гамильтонову систему $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ на M (см. (4.10)) с морсовским гамильтонианом $F \in \mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M, \partial M)$. Множество таких систем открыто и всюду плотно в $\mathbf{H}(M)$, поскольку $\mathcal{F}(M)$ открыто и всюду плотно в $C^\infty(M, \partial M)$, как хорошо известно. Поэтому далее без ограничения общности мы можем и будем считать, что $F \in \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ (см. (4.9)), т.е. вместо пространства $\mathcal{F}(M)$ будем рассматривать его конечнолистное накрытие $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$.

Рассмотрим любое открытое ребро e графа Кронрода–Риба W^{num} функции F (определение 2.4.1). На ребре e рассмотрим естественную параметризацию

$$f|_e : e \rightarrow (c_{j_1}(F), c_{j_2}(F)) \quad (4.19)$$

и функцию $\tau_e = \tau_e(f)$ периода замкнутых траекторий системы, отвечающих этому ребру, где $f = F \circ \pi_F^{-1}$ (см. (2.4) и (2.11)), j_1 — один из номеров, приписанных начальной вершине ребра

e, j_2 – один из номеров, приписанных его конечной вершине. Заметим, что функция периода $\tau_e = \tau_e(f)$ определена на ограниченном интервале $(c_{j_1}(F), c_{j_2}(F))$.

Определение 4.2.1. Пусть $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ – (почти невырожденная) гамильтонова система на поверхности M (см. (4.10), т.е. $F \in \mathcal{F}^{\text{num, fr}}(M)$ – функция Морса с оснащено-номерованными критическими точками, а симплектическая структура ω согласована с ориентацией M). Предположим, что функция периода $\tau_e(f)$ является морсовской для каждого ребра e , причём, если начало или конец $f = c$ ребра e имеет степень 1, то существует ненулевой предел $\lim_{f \rightarrow c} \tau'_e(f) \neq 0$. Тогда гамильтонова система $v = (\omega, F)$ называется *невырожденной*, см. (4.11). Пусть $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ – пространство всех невырожденных гамильтоновых систем на M .

Пусть M – компактная гладкая ориентированная поверхность (возможно, с краем) и $P \subseteq M$ – ее подповерхность. Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос, поставленный А.С. Мищенко в 1999 г.

Теорема 4.2.2. *Пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем на поверхности M открыто и всюду плотно в пространстве $\mathbf{H}(M)$ всех почти невырожденных гамильтоновых систем на M в смысле любой C^r -топологии на $\mathbf{H}(M)$ из §4.1.3, а пространство $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ открыто, где $r \geq 5$ (см. (4.12) и (4.13)). Кроме того, при достаточно малом возмущении $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F})$ любой невырожденной системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$, заданной на атоме $(P, K)^\#$, на любом внутреннем (т.е. “новом”, см. §2.5.2, п.(2')) ребре e соответствующего графа возмущения \tilde{W}^{num} функция периода $\tilde{\tau}_e(\tilde{f})$ имеет ровно одну критическую точку – точку минимума; на любом “старом” ребре графа возмущения \tilde{W}^{num} (т.е. отвечающем некоторому ребру графа W^{num} , см. §2.5.2, п.(2')) число критических точек функции периода не меняется при малом возмущении системы.*

Нижняя оценка $r \geq 5$ неулучшаема, т.е. подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ не являются открытыми в $\mathbf{H}(M)$ в смысле C^4 -топологии на $\mathbf{H}(M)$. Кроме того, количество критических точек “возмущенной” функции периода на любом “старом” ребре, одному из концов которого отвечает критическая точка локального экстремума невозмущенного гамильтониана, можно сделать на 1 большим, чем у “невозмущенной” функции периода на соответствующем ребре путем сколь угодно малого возмущения $\tilde{v} \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ в смысле C^4 -топологии на $\mathbf{H}(P)$.

Доказательство теоремы 4.2.2 дано в §4.2.4, где доказано более сильное утверждение 4.2.12.

Из теоремы 4.2.2 получаем, что пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{H}(M)$. Так как в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ траекторная эквивалентность систем равносильна послойной эквивалентности (определение 2.2.4 (С)) их функций Гамильтона, то разбиение пространства $\mathcal{F}(M)$ на страты Максвелла – классы топологической послойной эквивалентности (см. §2.5.2) индуцирует стратификацию в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, где каждый страт (тоже называемый стратом Максвелла) состоит из топологически траекторно-эквивалентных систем из $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$.

4.2.1 Метки Болсинова-Фоменко (П-инвариант) на ребрах молекулы Фоменко. Полнота П-инварианта для простого морсовского гамильтониана

Рассмотрим, как выше, гамильтонову систему $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ с морсовским гамильтонианом $F \in \mathcal{F}^{\text{num, fr}}(M)$.

Рассмотрим функцию периода $\tau_e = \tau_e(f)$ на открытом ребре $e \approx (c_{j_1}(F), c_{j_2}(F))$ графа W^{num} функции F (см. определение 4.2.1). Как мы покажем в следующем техническом §4.2.2, функция периода $\tau_e(f)$ всюду положительна и имеет ненулевые предельные значения (конечные или бесконечные) на концах интервала, более точно:

(i) если начальная вершина ребра e имеет степень > 1 (т.е. этой вершине отвечает седловой атом функции F), то $\lim_{f \rightarrow c_{j_1}(F)} \tau_e(f) = +\infty$ (см. первое равенство леммы 4.2.6); аналогичное свойство верно для $f \rightarrow c_{j_2}(F)$ и конечной вершины ребра e ;

(ii) если начальная вершина ребра e имеет степень 1 (т.е. этой вершине отвечает граничная окружность поверхности M или минимаксный атом функции F), то оба предела $\lim_{f \rightarrow c_{j_1}(F)} \tau_e(f)$ и $\lim_{f \rightarrow c_{j_1}(F)} \tau'_e(f)$ существуют, конечны и непрерывно зависят от системы v (см. первое и второе равенства леммы 4.2.5); аналогичное свойство верно для $f \rightarrow c_{j_2}(F)$ и конечной вершины ребра e .

В случае п.(ii) мы можем доопределить функцию $\tau_e(f)$ по непрерывности в начальную (соотв. конечную) вершину ребра e , тогда продолженная функция периода на ребре (включая концы ребра степени 1) будет класса C^1 .

Если теперь $v \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, то функция периода $\tau_e(f)$ на ребре является морсовской и не имеет критических точек в концах ребра и в некоторых окрестностях концов ребра, поэтому количество ее критических точек конечно.

Определение 4.2.3. Π -меткой системы v на ребре e графа W^{num} функции Гамильтона F назовем вектор

$$\Pi_e(v) = (\Pi_e^1(v), \dots, \Pi_e^{k(e)}(v)) \in \mathbb{R}_{>0}^{k(e)}, \quad (4.20)$$

являющийся упорядоченным (по возрастанию параметра f вдоль ребра) набором критических значений функции периода $\tau_e(f)$, включая её конечные предельные значения в концах интервала. Более точно, $\Pi_e^1(v) := \lim_{f \rightarrow c_{j_1}(F)} \tau_e(f)$, если этот предел конечен, $\Pi_e^{k(e)}(v) := \lim_{f \rightarrow c_{j_2}(F)} \tau_e(f)$, если этот предел конечен, а остальные числа $\Pi_e^l(v)$ имеют вид $\Pi_e^l(v) := \tau_e(f_l)$, где $c_{j_1}(F) < f_l < c_{j_2}(F)$. Здесь $c_{j_1}(F) \leq f_1 < \dots < f_{k(e)} \leq c_{j_2}(F)$ — возрастающая последовательность критических точек и концов интервала — области определения функции $\tau_e(f)$. В результате на каждом ребре e графа W^{num} возникает “метка” $\Pi_e(v)$, являющаяся непустым конечным набором положительных вещественных чисел; длина этого набора $k(e) \geq 1$. Пусть $E(W^{\text{num}})$ — множество ребер графа W^{num} , $\mathbf{H}(M, W^{\text{num}}, k) \subseteq \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ — пространство невырожденных гамильтоновых систем $v = (\omega, F)$ на M с фиксированными графом W^{num} функции Гамильтона и набором $k : E(W^{\text{num}}) \rightarrow \mathbb{N}$ длин Π -меток на его ребрах. Отображение

$$\Pi = (\Pi_e)_{e \in E(W^{\text{num}})} : \mathbf{H}(M, W^{\text{num}}, k) \rightarrow \prod_{e \in E(W^{\text{num}})} \mathbb{R}_{>0}^{k(e)}, \quad v \mapsto (\Pi_e(v))_{e \in E(W^{\text{num}})},$$

сопоставляющее любой гамильтоновой системе $v \in \mathbf{H}(M, W^{\text{num}}, k)$ набор ее Π -меток, назовем Π -инвариантом на пространстве $\mathbf{H}(M, W^{\text{num}}, k)$.

Ясно, что граф W^{num} вместе с метками $\Pi = (\Pi_e)_{e \in E(W^{\text{num}})}$ на всех его рёбрах является инвариантом C^0 -сопряжённости для невырожденных гамильтоновых систем на M . То есть, C^0 -сопряжённые системы имеют одинаковые графы W^{num} и одинаковые метки Π_e на его рёбрах.

Оказывается (см. предложение 4.2.4), что для невырожденных гамильтоновых систем, гамильтониан которых является простой функцией Морса (определение 1.6.6), верно обратное, т.е. граф W^{num} вместе с метками Π_e на его рёбрах является полным инвариантом C^0 -сопряжённости невырожденных гамильтоновых систем.

Пусть, как в (4.9), $\mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}} = \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}(M)$ — пространство всех функций Морса с оснащённо-номерованными критическими точками на компактной ориентированной поверхности M . Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{F}_{\text{simple}}^{\text{num}, \text{fr}} \subset \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$$

простых функций Морса (определение 1.6.6), т.е. таких функций $F \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$, что каждый особый слой слоения $p : M \rightarrow W$, определяемого функцией F , содержит ровно одну критическую точку этой функции. Рассмотрим ориентированный граф Кронрода-Риба W^{num}

функции F , вместе с нумерацией его вершин, отвечающей нумерации критических точек функции F . Кроме того, определим *оснащения вершин* степени 3 графа W^{num} , отвечающие оснащениям (определение 2.2.2 (В)) седловых точек функции $F \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$: оснащение такой вершины X_i графа W^{num} — это входящее или исходящее из вершины X_i ребро $e \subset W$, такое, что граница $\partial(\pi_F^{-1}(e))$ соответствующего цилиндра $\pi_F^{-1}(e)$ в M (см. (2.4)) не содержит ребра графа $\pi_F^{-1}(X_i)$, служащего оснащением вершины x_i графа $\pi_F^{-1}(X_i)$, отвечающим оснащению (определение 2.2.2 (В)) седловой критической точки x_i функции $F \in \mathcal{F}^{\text{num}, \text{fr}}$ (см. определение 2.4.3 (iv)). Ясно, что если вершина имеет два входящих и одно исходящее ребро, то её оснащение — это одно из входящих рёбер; в противном случае — это одно из исходящих рёбер. Поэтому оснащение вершины графа W^{num} можно интерпретировать как выбор циклического порядка на множестве входящих и исходящих из этой вершины рёбер.

Следующее предложение следует из более общих фактов [9].

Предложение 4.2.4 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [9]). *Пусть $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\text{simple}}^{\text{num}, \text{fr}}(M)$ — простые функции Морса с оснащённо-нумерованными критическими точками на ориентированной поверхности M , $v_1, v_2 \in \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ — гамильтоновы системы с функциями гамильтона F_1, F_2 . Тогда:*

1) *Функции F_1, F_2 послойно эквивалентны в том и только том случае, когда существует сохраняющий ориентацию изоморфизм графов Кронрода-Риба $W_1^{\text{num}}, W_2^{\text{num}}$ этих функций, переводящий нумерацию и оснащения вершин графа W_1^{num} в нумерацию и оснащения вершин графа W_2^{num} .*

2) *Гамильтоновы системы v_1, v_2 C^0 -сопряжены в том и только том случае, когда существует сохраняющий ориентацию изоморфизм $W_1^{\text{num}} \rightarrow W_2^{\text{num}}$ графов Кронрода-Риба, переводящий нумерацию и оснащения вершин графа W_1^{num} в нумерацию и оснащения вершин графа W_2^{num} , а Π -метки Π_1 системы v_1 на рёбрах графа W_1^{num} — в Π -метки Π_2^{num} системы v_2 на рёбрах графа W_2 .*

4.2.2 Асимптотическое поведение функции периода вблизи морсов-ских критических точек гамильтониана

В этом параграфе мы докажем две технические леммы (близкие факты доказаны в [66, 9]).

Изучим сначала поведение функции периода вблизи локально минимального (или локально максимального) значения функции Гамильтона, т.е. вблизи ее минимаксного атома.

Лемма 4.2.5. *Пусть $\omega = \omega(x, y)$ — гладкая положительная функция, заданная в круге $x^2 + y^2 \leq h^2$ в \mathbb{R}^2 , где x, y — стандартные координаты в \mathbb{R}^2 , $h > 0$. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом $x^2 + y^2$ и симплектической структурой $\omega(x, y)dx \wedge dy$. Пусть $T(f)$ — время движения (период) в силу этой системы по линии уровня $\{x^2 + y^2 = f\}$. Тогда при $0 < f \leq h^2$*

$$|T(f) - \pi\Lambda| \leq \frac{\pi}{4} \left(\max \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right| + \max \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right| \right) f, \quad \left| T'(f) - \frac{\pi}{4} \widehat{\Lambda} \right| \leq c \sum_{i=0}^3 \frac{3! \sqrt{f}}{i!(3-i)!} \max \left| \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^i \partial y^{3-i}} \right|,$$

где $\Lambda = \omega(0, 0)$, $\widehat{\Lambda} = \frac{\partial^2 \omega(0, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega(0, 0)}{\partial y^2}$, $c = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ и максимумы берутся по кругу $\{x^2 + y^2 \leq f\}$.

Доказательство. Шаг 1. Нам понадобятся значения следующих собственных интегралов:

$$I_1 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{dx}{\sqrt{f-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{x^2}{\sqrt{f-x^2}} dx = \frac{\pi-2}{4} f,$$

$$I_3 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \sqrt{f-x^2} dx = \frac{\pi+2}{4} f, \quad I_4 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{|x| dx}{\sqrt{f-x^2}} = (2-\sqrt{2})\sqrt{f},$$

$$I_5 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{dx}{(f-x^2)^{3/2}} = \frac{2}{f}, \quad I_6 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{|x^3|dx}{(f-x^2)^{3/2}} = (3\sqrt{2}-4)\sqrt{f}.$$

Далее частную производную любой функции $g = g(x, y)$ по переменной x (соотв. y) будем обозначать через $g_x(x, y)$ (соотв. $g_y(x, y)$), положим

$$\|g^{(n)}\| := \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \max \left| \frac{\partial^n g}{\partial x^i \partial y^{n-i}} \right|.$$

Условимся также обозначать через $\theta_i = \theta_i(f)$ вещественнозначную функцию на полуинтервале $(0, h^2]$ со свойством $|\theta_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, 24$.

Шаг 2. Рассматриваемая гамильтонова система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{2\omega(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2\omega(x, y)}.$$

Обозначим через γ_+ (соотв. γ_-) часть линии уровня $\{x^2 + y^2 = f\}$, лежащую в секторе $\{|x| \leq y\}$ (соотв. $\{|x| \leq -y\}$). Возьмем в качестве параметра на этом участке координату x . Тогда ограничение гамильтоновой системы на участок γ_+ (соотв. γ_-) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \mp \frac{\sqrt{f-x^2}}{2\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2})}, \quad |x| \leq \sqrt{f/2}.$$

Поэтому время $T_+(f)$ (соотв. $T_-(f)$) движения в силу системы по участку γ_+ (соотв. γ_-) равно

$$T_{\pm}(f) = \mp \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{dx}{dx/dt} = \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2})dx}{2\sqrt{f-x^2}}.$$

Оценим этот интеграл с помощью разложения числителя подынтегральной функции в сумму

$$\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) = \omega(0, 0) + (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) + (\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) - \omega(x, 0)).$$

Интегралы трех слагаемых этой суммы суть

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(0, 0)dx}{2\sqrt{f-x^2}} = \frac{\Lambda}{2} I_1 = \frac{\pi}{4} \Lambda, \\ & \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0)}{2\sqrt{f-x^2}} dx = \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0) - x\omega_x(0, 0)}{2\sqrt{f-x^2}} dx = \frac{\theta_1}{4} \max |\omega_{xx}| I_2, \\ & \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) - \omega(x, 0)}{2\sqrt{f-x^2}} dx = \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) - \omega(x, 0) \mp \omega_y(x, 0)\sqrt{f-x^2}}{2\sqrt{f-x^2}} dx \pm \frac{b_1}{2} \\ & = \frac{\theta_{2,3}}{4} \max |\omega_{yy}| I_3 \pm \frac{b_1}{2} = \theta_{2,3} \frac{\pi+2}{16} \max |\omega_{yy}| f \pm \frac{b_1}{2} \end{aligned}$$

при подходящих значениях $\theta_i = \theta_i(f) \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \theta_i \leq 1$, где $\theta_{2,3} := \theta_2$ для γ_+ , $\theta_{2,3} := \theta_3$ для γ_- ,

$$b_1 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \omega_y(x, 0) dx.$$

Значит,

$$T_+(f) + T_-(f) = \frac{\pi}{2} \Lambda + \theta_4 \left(\frac{\pi-2}{8} \max |\omega_{xx}| + \frac{\pi+2}{8} \max |\omega_{yy}| \right) f.$$

Аналогично для двух других участков окружности $\{x^2 + y^2 = f\}$ получаем

$$T(f) - T_+(f) - T_-(f) = \frac{\pi}{2}\Lambda + \theta_5 \left(\frac{\pi + 2}{8} \max |\omega_{xx}| + \frac{\pi - 2}{8} \max |\omega_{yy}| \right) f.$$

Отсюда получаем первую требуемую оценку:

$$T(f) = T_+(f) + T_-(f) + (T(f) - T_+(f) - T_-(f)) = \pi\Lambda + \theta_6 \frac{\pi}{4} (\max |\omega_{xx}| + \max |\omega_{yy}|) f.$$

Шаг 3. Дифференцируя функцию $T_+(f)$ (соотв. $T_-(f)$) по f , получим сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned} T'_\pm(f) &= \frac{d}{df} \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) dx}{2\sqrt{f-x^2}} = \frac{\omega(\sqrt{f/2}, \pm\sqrt{f/2}) + \omega(-\sqrt{f/2}, \pm\sqrt{f/2})}{4f} \\ &\pm \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega_y(x, \pm\sqrt{f-x^2}) dx}{4(f-x^2)} - \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) dx}{4(f-x^2)^{3/2}} =: S_1^\pm + S_2^\pm + S_3^\pm. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого воспользуемся тейлоровским разложением гладкой функции с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) - \omega(0, 0) &= (\omega(x, y) - \omega(0, y)) + (\omega(0, y) - \omega(0, 0)) \\ &= (x\omega_x(0, y) + \frac{x^2}{2}\omega_{xx}(0, y) + \theta_7 \frac{|x|^3}{6} \max |\omega_{xxx}|) + (y\omega_y(0, 0) + \frac{y^2}{2}\omega_{yy}(0, 0) + \theta_8 \frac{|y|^3}{6} \max |\omega_{yyy}|) \\ &= x(\omega_x(0, 0) + y\omega_{xy}(0, 0) + \theta_9 \frac{y^2}{2} \max |\omega_{xyy}|) + \frac{x^2}{2}(\omega_{xx}(0, 0) + \theta_{10}|y| \max |\omega_{xxy}|) \\ &\quad + \theta_7 \frac{|x|^3}{6} \max |\omega_{xxx}| + y\omega_y(0, 0) + \frac{y^2}{2}\omega_{yy}(0, 0) + \theta_8 \frac{y^3}{6} \max |\omega_{yyy}| \\ &= x\omega_x(0, 0) + y\omega_y(0, 0) + \frac{x^2}{2}\omega_{xx}(0, 0) + xy\omega_{xy}(0, 0) + \frac{y^2}{2}\omega_{yy}(0, 0) \\ &+ \theta_{11} \left(\frac{|x^3|}{6} \max |\omega_{xxx}| + \frac{|x^2y|}{2} \max |\omega_{xxy}| + \frac{|xy^2|}{2} \max |\omega_{xyy}| + \frac{|y^3|}{6} \max |\omega_{yyy}| \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} S_1^+ + S_1^- &= \frac{\omega(\sqrt{f/2}, \sqrt{f/2}) + \omega(-\sqrt{f/2}, \sqrt{f/2}) + \omega(\sqrt{f/2}, -\sqrt{f/2}) + \omega(-\sqrt{f/2}, -\sqrt{f/2})}{4f} \\ &= \frac{\Lambda}{f} + \frac{1}{4}(\omega_{xx}(0, 0) + \omega_{yy}(0, 0)) + \frac{\theta_{12}}{12\sqrt{2}} \|\omega^{(3)}\| \sqrt{f}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} b_3 &:= \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega_{yy}(x, 0)}{\sqrt{f-x^2}} dx = I_1 \omega_{yy}(0, 0) + \theta_{13} I_4 \max |\omega_{xyy}| = \\ &= \frac{\pi}{2} \omega_{yy}(0, 0) + \theta_{13} (2 - \sqrt{2}) \max |\omega_{xyy}| \sqrt{f}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Тогда второе слагаемое

$$\begin{aligned} S_2^\pm &= \pm \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega_y(x, \pm\sqrt{f-x^2}) dx}{4(f-x^2)} \\ &= \pm b_2 \pm \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega_y(x, \pm\sqrt{f-x^2}) - \omega_y(x, 0) \mp \sqrt{f-x^2} \omega_{yy}(x, 0)}{4(f-x^2)} dx + \frac{1}{4} b_3 \end{aligned}$$

$$= \pm b_2 + \frac{\theta_{14,15}}{4\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \sqrt{f} + \frac{b_3}{4}$$

где $\theta_{14,15} := \theta_{14}$ для S_2^+ , $\theta_{14,15} := \theta_{15}$ для S_2^- ,

$$b_2 := \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega_y(x, 0) dx}{4(f-x^2)},$$

откуда

$$S_2^+ + S_2^- = \frac{b_3}{2} + \theta_{16} \frac{1}{2\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \sqrt{f}.$$

Наконец, третье слагаемое

$$\begin{aligned} S_3^\pm &= - \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) dx}{4(f-x^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{I_5}{4} \omega(0, 0) - \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0) - x\omega_x(0, 0) - \frac{x^2}{2}\omega_{xx}(0, 0)}{4(f-x^2)^{3/2}} dx + \frac{I_1 - I_5 f}{8} \omega_{xx}(0, 0) \\ &\quad - \int_{-\sqrt{f/2}}^{\sqrt{f/2}} \frac{\omega(x, \pm\sqrt{f-x^2}) - \omega(x, 0) \mp \sqrt{f-x^2}\omega_y(x, 0) - \frac{f-x^2}{2}\omega_{yy}(x, 0)}{4(f-x^2)^{3/2}} dx \mp b_2 - \frac{b_3}{8} \\ &= -\frac{\Lambda}{2f} + \frac{\theta_{17}}{24} \max |\omega_{xxx}| I_6 - \frac{4-\pi}{16} \omega_{xx}(0, 0) + \frac{\theta_{18}}{12\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \sqrt{f} \mp b_2 - \frac{b_3}{8} \\ &= -\frac{\Lambda}{2f} + \theta_{17} \frac{3-2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} \max |\omega_{xxx}| \sqrt{f} - \frac{4-\pi}{16} \omega_{xx}(0, 0) + \frac{\theta_{18}}{12\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \sqrt{f} \mp b_2 - \frac{b_3}{8}, \end{aligned}$$

откуда

$$S_3^+ + S_3^- = -\frac{\Lambda}{f} - \frac{4-\pi}{8} \omega_{xx}(0, 0) + \theta_{17} \frac{3-2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \max |\omega_{xxx}| \sqrt{f} + \frac{\theta_{18}}{6\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \sqrt{f} - \frac{b_3}{4}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T'_+(f) + T'_-(f) &= (S_1^+ + S_1^-) + (S_2^+ + S_2^-) + (S_3^+ + S_3^-) \\ &= \frac{\pi-2}{8} \omega_{xx}(0, 0) + \frac{\pi+2}{8} \omega_{yy}(0, 0) + \frac{\theta_{12}}{12\sqrt{2}} \|\omega^{(3)}\| \sqrt{f} \\ &\quad + \left(\theta_{13} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \max |\omega_{xyy}| + \theta_{18} \frac{\sqrt{2}}{3} \max |\omega_{yyy}| + \theta_{17} \frac{3-2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \max |\omega_{xxx}| \right) \sqrt{f}. \end{aligned}$$

Аналогично для двух других участков окружности $\{x^2 + y^2 = f\}$ получаем

$$\begin{aligned} T'(f) - T'_+(f) - T'_-(f) &= \frac{\pi+2}{8} \omega_{xx}(0, 0) + \frac{\pi-2}{8} \omega_{yy}(0, 0) + \frac{\theta_{12}}{12\sqrt{2}} \|\omega^{(3)}\| \sqrt{f} \\ &\quad + \left(\theta_{19} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \max |\omega_{xxy}| + \theta_{20} \frac{\sqrt{2}}{3} \max |\omega_{xxx}| + \theta_{21} \frac{3-2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \max |\omega_{yyy}| \right) \sqrt{f}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем вторую требуемую оценку:

$$\begin{aligned} T'(f) &= T'_+(f) + T'_-(f) + (T'(f) - T'_+(f) - T'_-(f)) + \frac{\theta_{12}}{6\sqrt{2}} \|\omega^{(3)}\| \sqrt{f} \\ &\quad + \theta_{22} \frac{7-2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} (\max |\omega_{xxx}| + \max |\omega_{yyy}|) \sqrt{f} + \theta_{23} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} (\max |\omega_{xxy}| + \max |\omega_{xyy}|) \sqrt{f} \\ &= \frac{\pi}{4} (\omega_{xx}(0, 0) + \omega_{yy}(0, 0)) + \theta_{24} \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \|\omega^{(3)}\| \sqrt{f}. \end{aligned}$$

Лемма 4.2.5 доказана. \square

Теперь изучим поведение функции периода вблизи седлового уровня (т.е. вблизи седлового атома) функции Гамильтона. Следующая лемма аналогична результатам [66] и [9, лемма 8.2], однако не вытекает из них.

Лемма 4.2.6 ([145]). Пусть $\omega = \omega(x, y)$ — гладкая положительная функция, заданная в прямоугольнике $0 \leq x \leq h_1$, $0 \leq y \leq h_2$ в \mathbb{R}^2 , где x, y — стандартные координаты в \mathbb{R}^2 , $h_i > 0$. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом xu и симплектической структурой $\omega(x, y)dx \wedge dy$. Пусть $T(f)$ — время движения в силу этой системы по участку линии уровня $\{xy = f\}$, лежащему в прямоугольнике $\{0 \leq x \leq h_1, 0 \leq y \leq h_2\}$. Тогда при $0 < f \leq \min(h_1^2, h_2^2)$

$$(a) \quad |T(f) + \Lambda \ln f - a| \leq 2(\max \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|) \sqrt{f},$$

$$(b) \quad |fT'(f) + \Lambda| \leq 2 \max \left(\left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right| \right) \sqrt{f},$$

$$(c) \quad |f^2 T''(f) - \Lambda| \leq (\max \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right| + \max \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right| + \max \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right|) f,$$

где $\Lambda = \omega(0, 0)$, $a = \Lambda \ln(h_1 h_2) + \int_0^{h_1} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0)}{x} dx + \int_0^{h_2} \frac{\omega(0, y) - \omega(0, 0)}{y} dy$, максимумы берутся по множеству $\{0 \leq x \leq h_1, 0 \leq y \leq h_2, xy \leq f\}$.

Доказательство. Рассматриваемая гамильтонова система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\omega(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{\omega(x, y)}.$$

Обозначим через γ_1 (соотв. γ_2) участок линии уровня $\{xy = f\}$, лежащий в треугольнике $\{0 \leq y \leq x \leq h_1\}$ (соотв. $\{0 \leq x \leq y \leq h_2\}$). Возьмем в качестве параметра на этом участке координату x (соотв. y). Тогда ограничение гамильтоновой системы на участок γ_1 имеет вид $dx/dt = -x/\omega(x, f/x)$, $\sqrt{f} \leq x \leq h_1$, откуда время движения в силу системы по участку γ_1 равно

$$T_1(f) = - \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{dx}{dx/dt} = \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega(x, f/x) dx}{x}, \quad (4.22)$$

и аналогичное верно для времени $T_2(f)$, отвечающему участку γ_2 :

$$T_2(f) = \int_{\sqrt{f}}^{h_2} \frac{dy}{dy/dt} = \int_{\sqrt{f}}^{h_2} \frac{\omega(f/y, y) dy}{y}.$$

(а) Из разложения $\omega(x, f/x) = \omega(0, 0) + (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) + (\omega(x, f/x) - \omega(x, 0))$, с учетом равенств

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega(0, 0)}{x} dx &= \Lambda \ln h_1 - \frac{\Lambda}{2} \ln f, \\ \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0)}{x} dx &= \int_0^{h_1} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0)}{x} dx + \theta_1 \sqrt{f} \max \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|, \\ \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega(x, f/x) - \omega(x, 0)}{x} dx &= \theta_2 \max \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right| \int_{\sqrt{f}}^{\infty} \frac{f}{x^2} dx = \theta_2 \sqrt{f} \max \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|, \end{aligned}$$

при подходящих значениях $\theta_i = \theta_i(f) \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \theta_i \leq 1$, и аналогичных соотношений для участка γ_2 , получаем первое равенство

$$T(f) = T_1(f) + T_2(f) = -\Lambda \ln f + a + 2\theta_3 \sqrt{f} (\max \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|).$$

(b) Далее частную производную функции $f(x, y)$ по переменной x (y) будем обозначать через $f_x(x, y)$ ($f_y(x, y)$). Дифференцируя дважды функцию $T_1(f)$ по f , имеем

$$T_1'(f) = -\frac{\omega(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{2f} + \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega_y(x, f/x)}{x^2} dx,$$

$$T_1''(f) = \frac{\omega(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{2f^2} - \frac{\omega_x(\sqrt{f}, \sqrt{f}) + 3\omega_y(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{4f^{3/2}} + \int_{\sqrt{f}}^{h_1} \frac{\omega_{yy}(x, f/x)}{x^3} dx,$$

а также аналогичные формулы для $T_2'(f)$ и $T_2''(f)$. Отсюда, с учётом тождества $\int_{\sqrt{f}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{f}}$ и равенства $\omega(t, t) = \omega(0, 0) + \int_0^t (\omega_x(u, u) + \omega_y(u, u)) du = \Lambda + \theta_4(\max |\omega_x| + \max |\omega_y|)t$, имеем

$$T'(f) = T_1'(f) + T_2'(f) = -\frac{\omega(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{f} + \theta_5(\max |\omega_x| + \max |\omega_y|)/\sqrt{f} =$$

$$-\Lambda/f + (\theta_5 - \theta_4) \max(|\omega_x| + |\omega_y|)/\sqrt{f},$$

что даёт второе требуемое равенство.

(c) Далее, с помощью тождества $\int_{\sqrt{f}}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2f}$, получаем

$$T''(f) = T_1''(f) + T_2''(f) =$$

$$\frac{\omega(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{f^2} - \frac{\omega_x(\sqrt{f}, \sqrt{f}) + \omega_y(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{f^{3/2}} + \theta_6(\max |\omega_{xx}| + \max |\omega_{yy}|)/(2f).$$

Так как производная функции $f(t) = \omega(t, t) - t\omega_x(t, t) - t\omega_y(t, t)$ равна $f'(t) = -t(\omega_{xx}(t, t) + 2\omega_{xy}(t, t) + \omega_{yy}(t, t))$, то

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du = \omega(0, 0) - \int_0^t u(\omega_{xx}(u, u) + 2\omega_{xy}(u, u) + \omega_{yy}(u, u)) du =$$

$$\Lambda + \theta_7(\max |\omega_{xx}| + 2 \max |\omega_{xy}| + \max |\omega_{yy}|) \frac{t^2}{2}.$$

Отсюда получаем третье требуемое равенство:

$$f^2 T''(f) = f(\sqrt{f}) + \theta_6 f(\max |\omega_{xx}| + \max |\omega_{yy}|)/2 =$$

$$\Lambda + \theta_8 f(\max |\omega_{xx}| + \max |\omega_{xy}| + \max |\omega_{yy}|).$$

Лемма 4.2.6 доказана. □

4.2.3 Грубые метки Болсинова-Фоменко (грубые Λ - и m -инварианты) систем на седловом атоме. Кресты и ленточки

Сначала напомним понятия (введенные в работе [9] для определения инвариантов C^0 -сопряженности систем на атоме) “крестов” и “ленточек”, из которых можно склеить седловой атом. Следующее определение мотивировано технической леммой 4.2.6 (а).

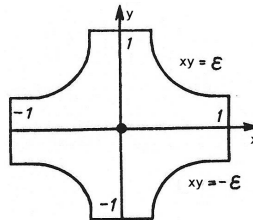


Рис. 4.1. Координатный крест Q

Определение 4.2.7. Пусть $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ — гамильтонова система на компактной поверхности M . Пусть $x_0 \in M$ — морсовская критическая точка функции F , являющаяся седловой. Для любых вещественных чисел $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$ и $\varepsilon \in (0, \min\{h_1 h_2, h_2 h_3, h_3 h_4, h_4 h_1\})$ рассмотрим подмножество плоскости (имеющее вид креста, см. рис. 4.1)

$$Q := \{-h_3 \leq x \leq h_1, -h_4 \leq y \leq h_2, |xy| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (4.23)$$

(а) Непрерывное (соотв. регулярное) погружение $u : Q \rightarrow M$ назовем *морсовским* в точке x_0 для системы v , если u сохраняет ориентацию (соотв. $\Lambda := (u^*\omega)(0, 0)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) > 0$), $u(0, 0) = x_0$ и $u^*F = xy + F(x_0)$.

(б) Непрерывное погружение $u : Q \rightarrow M$ назовем *почти крестом* в точке x_0 для системы v (а его образ $U := u(Q)$ — *почти крестом*), если оно морсовское в точке x_0 и время движения в силу системы $u^*(v)$ в Q по любой связной компоненте линии уровня функции u^*F , лежащей в ℓ -ой координатной четверти в Q , имеет вид

$$T_\ell(f) = -\Lambda \ln |f - F(x_0)| + a + o(1), \quad f \rightarrow F(x_0), \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \quad (4.24)$$

причем каждое из чисел $\Lambda > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ — одно и то же число, не зависящее от номера ℓ . Если $a = 0$, то $u : Q \rightarrow M$ назовем *крестом* в точке x_0 для системы v (а его образ $U := u(Q)$ — *погруженным крестом* или просто *крестом*).

(с) Морсовское регулярное погружение $u : Q \rightarrow M$ назовем *хорошим крестом* в точке x_0 для системы v , если

$$\begin{aligned} \Lambda \ln h_1 + \int_0^{h_1} \frac{\omega(x, 0) - \Lambda}{x} dx &= \Lambda \ln h_2 + \int_0^{h_2} \frac{\omega(0, y) - \Lambda}{y} dy = \\ &= \Lambda \ln h_3 + \int_0^{h_3} \frac{\omega(-x, 0) - \Lambda}{x} dx = \Lambda \ln h_4 + \int_0^{h_4} \frac{\omega(0, -y) - \Lambda}{y} dy = 0, \end{aligned}$$

где $\omega(x, y) := (u^*\omega)(x, y)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \in \mathbb{R}$ для $(x, y) \in Q$, $\Lambda := \omega(0, 0) > 0$.

(д) Для любого морсовского погружения (например, креста) $u : Q \rightarrow M$ обозначим отрезки $[0, h_1]$ и $[-h_3, 0]$ оси абсцисс через Ξ_1 и Ξ_3 , а отрезки $[0, h_2]$ и $[-h_4, 0]$ оси ординат через Ξ_2 и Ξ_4 соответственно. Ограничение $u|_{\Xi_\ell}$ является вложением, поэтому $\xi_\ell := u(\Xi_\ell)$ — простая дуга в M . Простые дуги $\xi_1, \dots, \xi_4 \subset M$ с естественной ориентацией (вдоль потока системы v) назовем *ветвями* погружения u . Очевидно, что любое морсовское погружение (например, крест) имеет ровно четыре попарно различные ветви. Концы ветвей, отличные от точки x_0 , назовем *граничными точками* ветвей данного погружения (например, креста) u . Ветви ξ_1 и ξ_3 являются *входящими* в вершину x_0 , а ветви ξ_2 и ξ_4 — *исходящими* из нее.

(е) Если $M = P$, $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ — гамильтонова система на седловом атоме $(P, K)^\#$ и $F(P) = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, то морсовское погружение (соотв. крест) $u : Q \rightarrow P$ будем называть *морсовским погружением на атоме $(P, K)^\#$* (соотв. *крестом на атоме $(P, K)^\#$*), если $\varepsilon = \varepsilon_0$ в (4.23). Если задан набор вложенных попарно непересекающихся крестов $U_j \subset P$, содержащих все вершины атома, то связные компоненты замыкания дополнения к объединению этих крестов в P назовем *ленточками* и будем говорить, что атом $(P, K)^\#$ *склеен* из крестов и ленточек.

Поясним: если морсовское погружение $u : Q \rightarrow M$ является вложением, то его образ $U := u(Q)$ гомеоморфен Q , т.е. имеет вид креста (при достаточно малом $\varepsilon > 0$). Далее, допуская некоторую вольность изложения, мы иногда (в доказательствах) будем называть крестом не погружение u , а его образ U , и будем предполагать (для наглядности), что u — это вложение.

Из леммы 4.2.6 (а) мы выведем

Следствие 4.2.8 (описание крестов; операция переклейки ленточек). (а) Для любого седлового атома $(P, K)^\#$ и любой гамильтоновой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ на этом атоме существует набор (возможно, самопересекающихся или попарно пересекающихся) хороших крестов u_j в вершинах x_j этого атома (см. определение 4.2.7 (с)).

(б) Любой хороший крест является крестом (определение 4.2.7 (с, б)).

(с) Если u_j, u'_j — два креста в вершине x_j для системы v , то в отвечающих им разложениях (4.24) с $a = 0$ константа Λ_j одна и та же, а ветви креста u'_j получаются из ветвей креста u_j следующей операцией (называемой операцией “переклейки ленточек” длины d) или ее обратной: выкидывание из обеих входящих ветвей креста дуг фазовых траекторий, выпущенных из концов этих ветвей на время d , и одновременное приклеивание к обеим исходящим ветвям креста дуг фазовых траекторий, выпущенных из концов этих ветвей на время d , где $d > 0$ — вещественное число, называемое длиной (переклеиваемых) “ленточек”. Обратное: если u_j — крест в вершине x_j для системы v , то в результате применения к ветвям этого креста операции “переклейки ленточек” длины d или ее обратной (для любого $d > 0$) получаются ветви некоторого креста u'_j в вершине x_j для системы v . См. рис. 4.2.

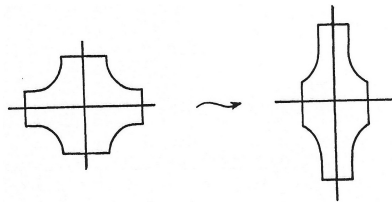


Рис. 4.2. Операция переклейки ленточек в кресте

Другими словами, операция переклейки ленточек в кресте u_j из п.(с) следствия 4.2.8 состоит в выкидывании из окрестности каждой входящей ветви этого креста “ленточки” длины d и одновременном приклеивании к окрестности каждой исходящей ветви этого креста “ленточки” длины d .

Доказательство. (б) Пусть $u : Q \rightarrow P$ — морсовское погружение для седловой точки x_0 системы $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме. Согласно лемме 4.2.6 (а), время движения в силу системы по любой связной компоненте неособой линии уровня функции u^*F , лежащей в ℓ -ой координатной четверти, имеет вид

$$T_\ell(f) = -\Lambda \ln |f - F(x_0)| + a_\ell + o(1), \quad f \rightarrow F(x_0), \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \quad (4.25)$$

где числа $a_\ell \in \mathbb{R}$ зависят от точки x_0 , погружения u , отвечают разным координатным четвертям и имеют вид $a_1 = b_1 + b_2$, $a_2 = b_2 + b_3$, $a_3 = b_3 + b_4$, $a_4 = b_4 + b_1$, где

$$b_1 := \Lambda \ln h_1 + \int_0^{h_1} \frac{\omega(x, 0) - \omega(0, 0)}{x} dx, \quad b_2 := \Lambda \ln h_2 + \int_0^{h_2} \frac{\omega(0, y) - \omega(0, 0)}{y} dy,$$

$$b_3 := \Lambda \ln h_3 + \int_0^{h_3} \frac{\omega(-x, 0) - \omega(0, 0)}{x} dx, \quad b_4 := \Lambda \ln h_4 + \int_0^{h_4} \frac{\omega(0, -y) - \omega(0, 0)}{y} dy.$$

Отсюда получаем, что если $u : Q \rightarrow P$ является хорошим крестом (т.е. $b_1 = \dots = b_4 = 0$), то $a_1 = \dots = a_4 = 0$, т.е. u является крестом.

(а) Докажем существование хорошего креста для любой седловой точки x_0 . Пусть g_v^t — фазовый поток системы v . По лемме Морса существуют положительные вещественные числа $h_1, h_2, h_3, h_4, \varepsilon$ и морсовское вложение $u : Q \rightarrow P$ в точке x_0 (см. определение 4.2.7 (а)). Без

ограниченися общности мы можем и будем считать, что u — это морсовское вложение на данном атоме $(P, K)^\#$, т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0$ в (4.23) (см. определение 4.2.7 (е)).

Рассмотрим вместо граничных точек $u(h_1, 0)$, $u(0, h_2)$, $u(-h_3, 0)$, $u(0, -h_4)$ ветвей вложения u точки

$$g_v^{b_1}(u(h_1, 0)), g_v^{-b_2}(u(0, h_2)), g_v^{b_3}(u(-h_3, 0)), g_v^{-b_4}(u(0, -h_4)). \quad (4.26)$$

Нетрудно построить морсовское погружение $u' : Q' \rightarrow M$, ветви которого имеют своими граничными точками в точности точки (4.26) (в порядке чередования входящих и исходящих ветвей) и такое, что ограничения погружений u и u' на $Q \cap Q'$ совпадают. Пусть морсовскому погружению u' отвечают константы $h'_1, h'_2, h'_3, h'_4, \varepsilon > 0$ и числа b'_1, \dots, b'_4 . Но $b_1 - b'_1 = \int_{h'_1}^{h_1} \frac{\omega(x, 0)}{x} dx$ равно времени движения в силу системы от точки $(h_1, 0)$ до точки $(h'_1, 0)$ (см. (4.22) из доказательства леммы 4.2.6), поэтому $b_1 - b'_1 = b_1$ (ввиду построения точек (4.26)), поэтому $b'_1 = 0$. Аналогично получаем равенства $b'_2 = b'_3 = b'_4 = 0$. Значит, морсовское погружение u' является хорошим крестом.

(с) Пусть u_j, u'_j — два различных креста в вершине x_j для одной и той же системы $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме, и пусть Λ_j, Λ'_j — отвечающие им константы из соответствующих разложений вида (4.24) с $a = 0$. Обозначим время движения в этих разложениях для крестов u_j, u'_j через $T_{j,\ell}(f), T'_{j,\ell}(f)$ соответственно. Тогда $T_{j,\ell}(f) - T'_{j,\ell}(f) \rightarrow \text{const}$ при $f \rightarrow F(x_0)$. Отсюда и из упомянутых разложений следует, что $\Lambda_j = \Lambda'_j$. Далее без ограничения общности можно считать, что $\xi_1 = u_j(\Xi_1)$ и $\xi'_1 = u'_j(\Xi'_1)$ — *входящие* ветви крестов u_j и u'_j (соотв.), соответствующие друг другу (т.е. имеющие непустое пересечение), и ветвь ξ_1 получается из ветви ξ'_1 операцией выкидывания ленточки длины $d > 0$. Отсюда и из определения креста получаем, что обе *исходящие* ветви $\xi_2 = u_j(\Xi_2)$ и $\xi_4 = u_j(\Xi_4)$ креста u_j получаются из исходящих ветвей $\xi'_2 = u'_j(\Xi'_2)$ и $\xi'_4 = u'_j(\Xi'_4)$ креста u'_j операцией приклеивания ленточки длины d . Аналогично получаем, что оставшаяся *входящая* ветвь $\xi_3 = u_j(\Xi_3)$ креста u_j получается из входящей ветви $\xi'_3 = u'_j(\Xi'_3)$ креста u'_j операцией выкидывания ленточки длины d , что и требовалось.

Последнее утверждение п.(с) проверяется непосредственно. □

Для целей настоящего параграфа одинаково удобны как кресты (определение 4.2.7 (b)), так и хорошие кресты (определение 4.2.7 (с)). Однако в построениях дальнейших параграфов нам будут важны именно кресты, так как их определение инвариантно, т.е. не зависит от выбора морсовских (не обязательно регулярных) локальных координат в кресте. Хорошие кресты были введены как вспомогательный объект и в дальнейших параграфах не будут использоваться.

Пусть теперь $(P, K)^\#$ — седловой атом, $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ — гамильтонова система на этом атоме, n — сложность атома (см. определение 2.4.3 (B)). Пусть $u_j : Q_j \rightarrow P$ — крест для системы v на атоме в вершине x_j этого атома, $1 \leq j \leq n$ (кресты существуют согласно следствию 4.2.8 (а, b)). Рассмотрим 1–коцепь

$$m(v) \in C^1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n} \quad (4.27)$$

графа K , значение которой на любом ориентированном ребре K_i графа K определим как время движения в силу системы v вдоль этого ребра от граничной точки A исходящей ветви $\xi \subset K_i$ креста u_j до граничной точки B входящей ветви $\xi' \subset K_i$ креста $u_{j'}$, где x_j и $x_{j'}$ — начало и конец ребра K_i . При этом время считается равным 0, если $A = B$, и отрицательным, если ветви ξ и ξ' имеют общую точку, отличную от их концов. Так определенная 1–коцепь $m(v)$ будет зависеть от выбора крестов (кроме случая $n = 1$), однако она корректно определена с точностью до кограниц (в силу следствия 4.2.8 (с)). Другими словами, соответствующий 1–цикл

$$[m(v)] \in H^1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1} \quad (4.28)$$

определен однозначно (т.е. не зависит от выбора крестов).

Рассмотрим также n -мерный вектор, т.е. 0-коцепь

$$\Lambda(v) = (\Lambda_j(v))_{j=1}^n = (\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v)) \in C^0(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \quad (4.29)$$

графа K , значение которой на вершине x_j графа K определим равным константе $\Lambda_j = \Lambda_j(v) > 0$ из следствия 4.2.8 (с).

Определение 4.2.9. Отображения

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{H}(P, K) &\rightarrow C^0(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n, & v &\mapsto \Lambda(v) = (\Lambda_j(v))_{j=1}^n, \\ [m] : \mathbf{H}(P, K) &\rightarrow H^1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}, & v &\mapsto [m(v)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

назовем *грубым Λ -инвариантом* и *грубым m -инвариантом* Болсинова-Фоменко систем на седловом атоме $(P, K)^\#$. Их значения (4.29) и (4.28) на системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ назовем *грубой Λ -меткой* и *грубой m -меткой* Болсинова-Фоменко системы v на данном седловом атоме. Аналогично определяется *грубый Λ -инвариант* $\Lambda : \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^n$ на всем пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ формулой $\Lambda(v) = (\Lambda_j(v))_{j=1}^n$, где n есть количество седловых критических точек, а $\Lambda_j(v)$ есть значение константы $\Lambda_j = \Lambda_j(v) > 0$ из следствия 4.2.8 (с) для j -ой седловой критической точки гамильтониана системы v .

Поскольку грубые Λ - и m -метки (4.29) и (4.28) не зависят от выбора крестов, то грубые Λ - и m -инварианты являются *инвариантами симплектической сопряженности* систем на атоме. Оказывается, грубый Λ -инвариант является даже *инвариантом C^1 -сопряженности* (см. предложение 4.3.5). Однако (как показано в (4.41)) грубый m -инвариант не является инвариантом C^1 -сопряженности (и тем более C^0 -сопряженности).

Замечание 4.2.10. Итак, грубый m -инвариант (4.30) является сюръективной $H^1(K; \mathbb{R})$ -значной функцией на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ систем на данном атоме. Из такого $H^1(K; \mathbb{R})$ -значного инварианта легко получить \mathbb{R} -значные инварианты на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$, путем применения к грубой m -метке (4.28) какой-либо линейной \mathbb{R} -значной функции вида

$$H^1(K; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [m] \mapsto \langle m, Z \rangle,$$

где $Z \in H_1(K; \mathbb{R})$ — любой 1-цикл графа K . Такой \mathbb{R} -значный инвариант симплектической сопряженности

$$\mathbf{H}(P, K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle m(v), Z \rangle \in \mathbb{R}, \quad (4.31)$$

систем на атоме назовем *\mathbb{R} -значной функцией от грубого m -инварианта* систем на данном атоме, а его значение на конкретной системе v — *\mathbb{R} -значной функцией от грубой m -метки* системы v . Здесь мы используем, что значение (4.31) 1-коцепи m на любом 1-цикле $Z \in H_1(K; \mathbb{R})$ графа K зависит лишь от 1-коцикла (4.28), отвечающего 1-коцепи m , т.е. полностью определяется грубой m -меткой системы v . Заметим, что любая \mathbb{R} -значная функция от грубого m -инварианта (4.31) однозначно определяет 1-цикл $Z \in H_1(K; \mathbb{R})$. Поэтому множество всех \mathbb{R} -значных функций от грубого m -инварианта (4.31) гамильтоновых систем на данном ориентированном седловом атоме $(P, K)^\#$ сложности n естественно отождествляется с векторным пространством $H_1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$.

Поясним мотивировку определения 4.2.9, т.е. важность грубых Λ - и m -инвариантов систем на седловом атоме.

Во-первых, с помощью этих инвариантов мы определим функцию $L_{e; \Lambda(\tilde{v}), [m(v)], c(\tilde{v})}(f)$ на любом открытом ребре e графа возмущения W^{num} , являющуюся хорошим приближением функции периода замкнутых траекторий возмущенной системы \tilde{v} на этом ребре. С помощью этих функций мы докажем как открытость и плотность пространства невырожденных гамильтоновых систем $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ в пространстве $\mathbf{H}(M)$ (теорема 4.2.2 и утверждение 4.2.12), так и относительную продолжимость некоторых инвариантов (теорема 4.5.6).

Во-вторых, в §4.3.1 для любого седлового атома $(P, K)^\#$ сложности n будет определен Λ -инвариант C^0 -сопряженности систем на данном атоме (путем “проективизации” грубого Λ -инварианта), сопоставляющий системе $v \mapsto \mathbb{R}\Lambda(v) \in \mathbb{R}P^{n-1}$. Также будут построены m - и m_Λ -инварианты, являющиеся функциями от Λ -инварианта и грубого m -инварианта, которые являются инвариантами C^1 - и C^0 -сопряженности (соотв.) систем на данном атоме. Первый и последний инварианты назовем Λ - и m_Λ -инвариантами Болсинова-Фоменко, а их значения $\mathbb{R}\Lambda(v)$ и $[m(v)] \bmod L_{\Lambda(v)}$ на системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — Λ -меткой и m_Λ -меткой Болсинова-Фоменко системы v на данном атоме. Согласно теореме А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [9], Λ - и m_Λ -инварианты Болсинова-Фоменко образуют *полный инвариант* C^0 -сопряженности ростков систем на данном атоме (определения 4.1.18 и 4.3.10).

4.2.4 (Λ, m, c) -аппроксимация функции периода возмущенной системы. Доказательство теоремы 4.2.2

Здесь мы сформулируем и докажем утверждение 4.2.12, из которого легко вытекает теорема 4.2.2 об открытости подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ в пространстве $\mathbf{H}(M)$, а также в дальнейшем (в §4.5.2) будет выведена теорема 4.5.6 о продолжимых m -инвариантах систем на бициклических атомах.

Рассмотрим гамильтонову систему $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ на произвольном атоме $(P, K)^\#$. Пусть $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F}) \in \mathbf{H}(P)$ — возмущенная гамильтонова система (см. (4.12) и (4.13)). Рассмотрим граф возмущения W^{num} . Если атом $(P, K)^\#$ седловой, мы введем функцию $L = L(f)$ на объединении открытых ребер этого графа возмущения и покажем, что она достаточно хорошо аппроксимирует функцию периода $\tau = \tau(f)$.

Пусть $\pi_{\tilde{F}} : P \rightarrow W$ — каноническая проекция (см. (2.4)). Фиксируем открытое внутреннее ребро $e \approx (c_{j_1}(\tilde{F}), c_{j_2}(\tilde{F}))$ графа возмущения W^{num} , параметризуем его гомеоморфизмом $f|_e : e \rightarrow f(e) = (c_{j_1}(\tilde{F}), c_{j_2}(\tilde{F})) \subset \mathbb{R}$, где функция $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ определяется условием $\tilde{F} = f \circ \pi_{\tilde{F}}$, см. (4.19). Рассмотрим произвольную точку $f \in (c_{j_1}(\tilde{F}), c_{j_2}(\tilde{F}))$ на этом ребре. Ей отвечает замкнутая траектория

$$\gamma_e = \gamma_e(f) := \pi_{\tilde{F}}^{-1}(e) \cap \tilde{F}^{-1}(f) \quad (4.32)$$

возмущенной системы (т.е. связная компонента линии уровня возмущенного гамильтониана \tilde{F}). Пусть Z_e — ориентированный цикл графа K , вдоль которого проходят такие траектории γ_e (для любых значений $f \in (c_{j_1}(\tilde{F}), c_{j_2}(\tilde{F}))$). На открытом ребре e рассмотрим функцию периода $\tau_e = \tau_e(f)$ возмущенной системы и введем следующую вспомогательную функцию.

Определение 4.2.11. На каждом открытом ребре $e \approx \tilde{F}(\pi_{\tilde{F}}^{-1}(e)) \subset \mathbb{R}$ графа возмущения W^{num} введем функцию

$$L_e(f) = L_{e; \Lambda(\tilde{v}), [m(v)], c(\tilde{v})}(f) := \langle [m(v)], [Z_e] \rangle - \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) \Lambda_j(\tilde{v}) \ln |f - c_j(\tilde{v})|,$$

$f \in \tilde{F}(\pi_{\tilde{F}}^{-1}(e))$, где Z_e — указанный выше ориентированный цикл графа K , отвечающий ребру e , число $\varkappa_j(e) \in \{0, 1, 2\}$ равно числу проходов цикла Z_e через вершину x_j графа K . Здесь вектор и 1-коцикл

$$\Lambda(\tilde{v}) = (\Lambda_j(\tilde{v}))_{j=1}^n \in \mathbb{R}_{>0}^n, \quad [m(v)] \in H^1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$$

суть грубые Λ - и m -метки систем \tilde{v} и v соответственно (см. определение 4.2.9), а вектор $c(\tilde{v}) = (c_j(\tilde{v}))_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ — это набор значений возмущенного гамильтониана \tilde{F} в его критических точках (см. (2.7) или (2.11)). Функцию $L_e = L_e(f) = L_{e; \Lambda(\tilde{v}), [m(v)], c(\tilde{v})}(f)$ назовем (Λ, m, c) -аппроксимацией функции периода $\tau_e = \tau_e(f)$ возмущенной системы на ребре e .

Если атом $(P, K)^\#$ седловой, то всем вершинам графа возмущения W^{num} сопоставим грубые Λ -метки, а всем его внутренним ребрам — Π -метки, отвечающие возмущенной системе \tilde{v} (см. (4.29) и (4.20)). А именно: грубая Λ -метка на вершине X графа возмущения W^{num} есть

$$\Lambda_X(\tilde{v}) := (\Lambda_{j_1}(\tilde{v}), \dots, \Lambda_{j_k}(\tilde{v})), \quad (4.33)$$

где j_1, \dots, j_k — набор номеров вершин исходного атома $(P, K)^\#$, приписанных данной вершине графа возмущения W^{num} (см. определение 2.4.1). Далее, Π -метку на внутреннем ребре $e \in E_{\text{int}}(W^{\text{num}})$ можно (как мы покажем в утверждении 4.2.12 (в) чуть ниже) определить равной

$$\Pi_e(\tilde{v}) := \min \tau_e \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (4.34)$$

где τ_e — функция периода системы \tilde{v} на ребре e (указанный минимум достигается в силу (4.24) и следствия 4.2.8 (а, б)), $E_{\text{int}}(W^{\text{num}})$ — множество внутренних ребер графа W^{num} (определение 2.5.1 (С)).

Утверждение 4.2.12 (см. [145, утверждение 4.1]). Пусть $3 \leq r \leq +\infty$ и $(P, K)^\#$ — произвольный атом (седловой, минимаксный или тривиальный, см. определение 2.4.3). Пусть (“возмущенная”) система $\tilde{v} \in \mathbf{H}(P)$ ε -близка к (“невозмущенной”) системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ относительно C^r -топологии на пространстве $\mathbf{H}(P)$ (см. §4.1.3, (4.12) и (4.13)), где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое вещественное число. Рассмотрим граф Кронрода-Руба W^{num} возмущенной функции \tilde{F} (т.е. граф возмущения). Если $r \geq 5$ и невозмущенная система v невырождена (т.е. $v \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$), то возмущенная система \tilde{v} тоже невырождена (т.е. $\tilde{v} \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$). Более того:

(а) Предположим, что $r \geq 3$. Если атом $(P, K)^\#$ седловой, то для любой вершины X графа возмущения W^{num} грубая Λ -метка (4.33) $O(\varepsilon)$ -близка к своему невозмущенному значению $\Lambda_X(v) := (\Lambda_{j_1}(v), \dots, \Lambda_{j_k}(v))$. Если атом $(P, K)^\#$ минимаксный с вершиной x_j , то аналогичные невозмущенное и возмущенное значения $\Lambda_j(v)$ и $\Lambda_j(\tilde{v})$ в вершине атома $O(\varepsilon)$ -близки, а в случае $r \geq 5$ также значения $\hat{\Lambda}_j(v)$ и $\hat{\Lambda}_j(\tilde{v})$ (см. лемму 4.2.5) $O(\varepsilon)$ -близки, если возмущение ε -мало (см. (4.12) и (4.13)).

(б) Предположим, что $r \geq 3$ и атом $(P, K)^\#$ седловой. Для любого внутреннего ребра e графа возмущения W^{num} разность $\tau_e(f) - L_e(f)$ функции периода τ_e и функции L_e на этом ребре мала, если выполнено (4.13) и возмущение (4.12) достаточно мало.

Существуют $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что на любом открытом внешнем ребре графа возмущения W^{num} первая производная $\tau'_e(f)$ не имеет нулей при $f \in [c - \delta, c + \delta]$, если возмущение ε -мало, т.е. удовлетворяет условиям (4.12) и (4.13), где c — критическое значение гамильтониана системы v .

(в) Предположим, что $r \geq 4$ и атом $(P, K)^\#$ седловой. Для любого внутреннего ребра $e \in E_{\text{int}}(W^{\text{num}})$ графа возмущения W^{num} функция $\tau_e = \tau_e(f)$ выпукла на ребре графа W^{num} , причем ее вторая производная $\tau''_e(f)$ отделена от нуля, если возмущение (4.12) достаточно мало и удовлетворяет условию (4.13). В частности, на каждом внутреннем ребре e графа возмущения W^{num} имеется ровно одна критическая точка функции τ_e , и в этой точке функция τ_e достигает своего минимума $\Pi_e(\tilde{v})$.

(г) Предположим, что $r \geq 3$ и атом $(P, K)^\#$ тривиальный (определение 2.4.3 (D)), т.е. $P \approx [0, 1] \times S^1$ и невозмущенный гамильтониан F не имеет критических точек на P . Обозначим $S_u := \{u\} \times S^1 \subset P$, $u \in [0, 1]$. Тогда “масштабированная” функция периода $\tilde{\tau}((1-u)\tilde{F}(S_0) + u\tilde{F}(S_1))$, $u \in [0, 1]$, замкнутых траекторий системы \tilde{v} близка к “масштабированной” функции периода $\tau((1-u)F(S_0) + uF(S_1))$, $u \in [0, 1]$, замкнутых траекторий системы v вместе со всеми производными порядка $\leq r - 3$ на отрезке $[0, 1]$.

(д) Предположим, что $r \geq 5$ и атом $(P, K)^\#$ минимаксный с вершиной x_j , являющейся критической точкой минимума (соотв. максимума) невозмущенного гамильтониана F . Функция периода $\tau(f)$ замкнутых траекторий системы v вблизи точки x_j , доопределенная в левом (соотв. правом) конце промежутка $(F(x_j), F(x_j) + \delta]$ (соотв. $[F(x_j) -$

$\delta, F(x_j))$ значением $\tau(F(x_j)) := \pi\Lambda_j(v)$, является C^1 -гладкой на отрезке $[F(x_j), F(\partial P)]$ (соотв. $[F(\partial P), F(x_j)]$) и $\tau'(F(x_j)) = \frac{\pi}{4}\widehat{\Lambda}_j(v)$ (соотв. $\tau'(F(x_j)) = -\frac{\pi}{4}\widehat{\Lambda}_j(v)$) (см. п.(а) или лемму 4.2.5).

Аналогичная (доопределенная по непрерывности при $u = 0$) “масштабированная” функция периода $\tilde{\tau}((1-u)\tilde{F}(\tilde{x}_j) + u\tilde{F}(\partial P))$ замкнутых траекторий возмущенной системы \tilde{v} близка вместе со своей производной к “масштабированной” функции периода $\tau((1-u)F(x_j) + uF(\partial P))$ замкнутых траекторий системы v на отрезке $[0, 1]$.

Подчеркнем, что в пп.(а)–(д) утверждения 4.2.12 системы v, \tilde{v} не предполагаются невырожденными.

Доказательство. В данном доказательстве все морсовские локальные координаты (x, y) (в том числе координатные кресты) предполагаются C^∞ -регулярными, а не только непрерывными (ср. определение 4.2.7 (а, б)). Кроме того, допуская некоторую вольность изложения, в случае седлового атома мы предполагаем (для наглядности), что эти локальные координаты (т.е. кресты) являются вложениями (а не только погружениями), и называем крестами не сами погружения, а их образы (ср. определение 4.2.7 (а, б)).

Пусть для определенности атом седловой, и пусть U_j — регулярный (например, хороший) координатный крест точки x_j для невозмущенной системы v (см. определение 4.2.7 (а, с)). В нем введены регулярные координаты x, y , в которых $F = c + xy$, $\omega = \omega(x, y)dx \wedge dy$. Пусть $\varepsilon > 0$ — величина возмущения системы по C^3 -норме, см. (4.12) и (4.13). Из доказательства леммы Морса (см. [104], или доказательство леммы 2.5.5, или (3.11)–(3.16) и следствие 3.2.17) следует, что (при $r \geq 3$) аналогичные координаты (\tilde{x}, \tilde{y}) для любой возмущенной функции \tilde{F} , ε -близкой к F по C^r -норме и ограниченной по C^{r+1} -норме, получаются из (x, y) применением диффеоморфизма $P \rightarrow P$, $O(\varepsilon)$ -близкого к тождественному по C^{r-2} -норме и ограниченного по C^{r-1} -норме. Поэтому выражение возмущенной симплектической структуры $\tilde{\omega}$, ε -близкой к ω по C^{r-3} -норме и ограниченной по C^{r-2} -норме, через координаты (\tilde{x}, \tilde{y}) тоже будет ограниченным по C^{r-2} -норме и $O(\varepsilon)$ -близким по C^{r-3} -норме к выражению ω через (x, y) .

Ниже мы будем использовать образ \tilde{U}_j регулярного креста U_j (при указанном диффеоморфизме) вместе с регулярными координатами \tilde{x}, \tilde{y} на \tilde{U}_j , и будем называть его “возмущенным крестом” (хотя он не обязан являться крестом для возмущенной системы в смысле определения 4.2.7 (б)).

(а) Пусть атом седловой. По лемме 4.2.6 (а) значение $\Lambda_j(v)$ равно $\Lambda_j(v) = \omega(0, 0)$. Поэтому оно непрерывно, т.е. $O(\varepsilon)$ -мало изменяется при ε -малых по C^3 -норме возмущениях гамильтониана и ε -малых по C^0 -норме возмущениях симплектической структуры (т.е. при $r \geq 3$). В случае минимаксного атома непрерывность аналогичного значения $\Lambda_j(v)$ при $r \geq 3$ доказывается аналогично, а непрерывность значения $\widehat{\Lambda}_j(v)$ при $r \geq 5$ будет доказана в п.(д) ниже.

(б) Докажем первое утверждение п.(б). Второе утверждение докажем в п.(в) чуть ниже.

Напомним, что 1-коцепь $m(v) \in C^1(K; \mathbb{R})$ графа K определялась в (4.27) так, что ее значение на ребре K_i графа K есть время движения в силу системы v по “ленточке” — участку этого ребра, остающемуся после выкидывания из поверхности P всех “крестов” U_j (т.е. морсовских координатных окрестностей вершин x_j графа K , обладающих специальным свойством, см. определение 4.2.7 (б)). Определим аналогичную 1-коцепь $m(\tilde{v}, f)$ (соотв. $m(v, f)$) графа K : ее значение на ребре K_i графа K есть время движения в силу системы \tilde{v} (соотв. v) по “возмущенной ленточке” (соотв. невозмущенной ленточке) — участку траектории $\{\tilde{F} = f\}$ (соотв. $\{F = f\}$) в окрестности ребра K_i , заключенному между “возмущенными крестами” \tilde{U}_j и $\tilde{U}_{j'}$, см. начало доказательства (соотв. невозмущенными крестами U_j и $U_{j'}$), отвечающими началу x_j и концу $x_{j'}$ этого ребра.

Так как “возмущенные кресты” \tilde{U}_j $O(\varepsilon)$ -близки к U_j (см. начало доказательства), то для любого внутреннего ребра e графа Кронрода-Риба W имеем

$$\langle m(\tilde{v}, f), Z \rangle = \langle m(v), Z \rangle + O(\varepsilon),$$

где $Z = Z_e$ — цикл графа K , отвечающий рассматриваемому внутреннему ребру, $f \in (c_{j_1}, c_{j_2})$ — параметр на ребре, $c_j := c_j(\tilde{v}) = \tilde{F}(\tilde{x}_j)$. То есть, слагаемое $\langle m(v), Z \rangle$ в сумме $L_e(f)$ совпадает с точностью до величины $O(\varepsilon)$ с временем движения $\langle m(\tilde{v}, f), Z \rangle$ в силу системы \tilde{v} по участкам траектории $\gamma_e(f)$, остающимся после выкидывания из атома всех крестов U_j .

Рассмотрим теперь время движения $\tilde{T}_j(f)$ по участку траектории $\gamma_e(f)$, попавшему в “возмущенный крест” \tilde{U}_j . Как будет показано чуть ниже, это время равно

$$\tilde{T}_j(f) = -\Lambda_j(\tilde{v}) \ln |f - c_j| + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.35)$$

Другими словами, каждое слагаемое в сумме \sum_j , участвующей в $L_e(f)$, равно (с точностью до величины $O(\sqrt{\varepsilon})$) времени $\tilde{T}_j(f)$ движения по участку траектории $\gamma_e(f)$, попавшему в “возмущенный крест” \tilde{U}_j .

В результате суммирования мы получаем, что время $\tau_e(f)$ движения по всей траектории $\gamma_e(f)$ в силу возмущенной системы \tilde{v} равно

$$\tau_e(f) = \langle m(\tilde{v}, f), Z \rangle + \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) \tilde{T}_j(f) = L_e(f) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.36)$$

В сумме \sum_j в (4.36), допуская некоторую вольность, мы обозначили $\varkappa_j(e) \in \{0, 1, 2\}$ слагаемых одним и тем же символом $\tilde{T}_j(f)$. В случае $\varkappa_j(e) = 2$ эти слагаемые отвечают разным координатным четвертям “возмущенного креста” \tilde{U}_j и, вообще говоря, различны.

Осталось доказать (4.35), т.е. что функция $\tilde{T}_j(f) + \Lambda_j(\tilde{v}) \ln |f - c_j|$ в “возмущенном кресте” \tilde{U}_j имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ при $f \in (c_{j_1}, c_{j_2})$ и ε -малом возмущении. По построению (см. начало доказательства леммы) имеем $\tilde{F} = \tilde{x}\tilde{y} + c_j$ в “возмущенном кресте” \tilde{U}_j . Согласно лемме 4.2.6 (а), с учетом $|f - c_j| = O(\varepsilon)$, имеем

$$\tilde{T}_j(f) = -\Lambda_j(\tilde{v}) \ln |f - c_j| + \tilde{a} + O(\sqrt{\varepsilon}(\max |\tilde{\omega}_{\tilde{x}}| + \max |\tilde{\omega}_{\tilde{y}}|)),$$

где

$$\tilde{a} = \ln(h_1 h_2) + \int_0^{h_1} \frac{\tilde{\omega}(\tilde{x}, 0) - \tilde{\omega}(0, 0)}{\tilde{x}} d\tilde{x} + \int_0^{h_2} \frac{\tilde{\omega}(0, \tilde{y}) - \tilde{\omega}(0, 0)}{\tilde{y}} d\tilde{y}$$

(здесь мы считаем, не ограничивая общности, что участок траектории $\gamma_e(f)$, попавший в “возмущенный крест” \tilde{U}_j , лежит в положительной координатной четверти $0 \leq \tilde{x} \leq h_1$, $0 \leq \tilde{y} \leq h_2$). Так как $r \geq 3$, то $\max |\tilde{\omega} - \omega| = O(\varepsilon)$, $\max |\tilde{\omega}_{\tilde{x}}| + \max |\tilde{\omega}_{\tilde{y}}| = O(1)$, и по определению креста $a = 0$, поэтому $|\tilde{a}| = |\tilde{a} - a| = O(\sqrt{\varepsilon})$ (для получения последней оценки отрезок интегрирования $[0, h_i]$ разбивается на подотрезки $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ и $[\sqrt{\varepsilon}, h_i]$, $i = 1, 2$). Отсюда получаем требуемую оценку (4.35).

(в) Пусть K_i — это i -ое ребро графа K . Согласно началу доказательства, любая дуга границы любой “возмущенной ленточки” $O(\varepsilon)$ -близка к соответствующей дуге границы “невозмущенной ленточки” по C^{r-2} -норме (и ограничена по C^{r-1} -норме) при условиях (4.12) и (4.13). Отсюда нетрудно выводится, что функция $\langle m(\tilde{v}, f), K_i \rangle$ (равная времени движения по i -ой “возмущенной ленточке” в силу системы \tilde{v}) $O(\varepsilon)$ -близка к невозмущенной функции $\langle m(v, f), K_i \rangle$ по C^{r-2} -норме (и ограничена по C^{r-1} -норме) при $r \geq 3$.

Обозначим через b максимум функции $\sum_{i=1}^{2n} |\langle m''(v, f), K_i \rangle|$ на отрезке $f \in [\min_j(c_j), \max_j(c_j)]$.

Тогда при $r \geq 4$

$$|\langle m''(\tilde{v}, f), Z \rangle| \leq b + O(\varepsilon).$$

Возьмем столь малое возмущение ε , при котором правая часть последнего неравенства меньше, чем $2b$.

Из леммы 4.2.6 (с) следует, что при $r \geq 4$, $f \in [\min_i(c_i), \max_i(c_i)]$ и $f \neq c_j$ в каждом “возмущенном кресте” \tilde{U}_j выполнено

$$\tilde{T}_j''(f) = \frac{\Lambda_j(\tilde{v})}{(f - c_j)^2} + \frac{O(\max|\tilde{\omega}_{\tilde{x}\tilde{x}}| + \max|\tilde{\omega}_{\tilde{x}\tilde{y}}| + \max|\tilde{\omega}_{\tilde{y}\tilde{y}}|)}{|f - c_j|} = \frac{\Lambda_j(\tilde{v}) + O(\varepsilon)}{(f - c_j)^2},$$

так как функция $\tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ограничена по C^{r-2} -норме (см. начало доказательства). Уменьшим, если нужно, ε так, чтобы при $f \in [\min_i(c_i), \max_i(c_i)]$, $f \neq c_j$, последняя величина была больше, чем $1 + 2b$. Это возможно ввиду п.(а) и соотношений $\Lambda_j(v) > 0$ и $c_j = c_j(\tilde{v}) = c + O(\varepsilon)$, $1 \leq j \leq n$.

Тогда на каждом внутреннем ребре e графа Кронрода-Риба W^{num} (допуская ту же вольность обозначений, что и в (4.36)) имеем

$$\tau_e''(f) = \langle m''(\tilde{v}, f), Z \rangle + \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) \tilde{T}_j''(f) > 1,$$

где $Z = Z_e$ — ориентированный цикл графа K , отвечающий ребру e , что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение п.(б). Из леммы 4.2.6 (b) следует, что при $r \geq 3$ в каждом “возмущенном кресте” \tilde{U}_j выполнено

$$\tilde{T}_j'(f) = -\frac{\Lambda_j(\tilde{v})}{f - c_j} + \frac{O(\max(|\tilde{\omega}_{\tilde{x}}| + |\tilde{\omega}_{\tilde{y}}|))}{\sqrt{|f - c_j|}} = \frac{\Lambda_j(\tilde{v}) + O(\sqrt{|f - c_j|})}{-(f - c_j)}, \quad (4.37)$$

так как функция $\tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ограничена по C^{r-2} -норме (см. начало доказательства). Оценим числитель и знаменатель аппроксимации (4.37) числа $\tilde{T}_j'(f)$. Если $f \in [c - \delta, c + \delta]$, то знаменатель ограничен: $|f - c_j| \leq |f - c| + |c - c_j| \leq \delta + O(\varepsilon) \leq 2\delta$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Выберем столь малые $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что числитель отделен от нуля: $\Lambda_j(\tilde{v}) + O(\sqrt{|f - c_j|}) = \Lambda_j(v) + O(\varepsilon) + O(\sqrt{\delta}) \geq \frac{1}{2}\Lambda_j(v)$ ввиду п.(а) и соотношения $\Lambda_j(v) > 0$. Поэтому вся дробь отделена от нуля:

$$|\tilde{T}_j'(f)| = \frac{\Lambda_j(\tilde{v}) + O(\sqrt{|f - c_j|})}{|f - c_j|} \geq \frac{\Lambda_j(v)}{4\delta}.$$

Для любого внешнего ребра e графа W^{num} (допуская ту же вольность обозначений, что и в (4.36)) получаем

$$\tau_e'(f) = \langle m'(\tilde{v}, f), Z \rangle + \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) \tilde{T}_j'(f),$$

где $\langle m'(\tilde{v}, f), Z \rangle = O(\varepsilon)$ (см. начало доказательства п.(в)) и все слагаемые (4.37) суммы \sum_j имеют один и тот же знак (так как их числители положительны, а знаменатели $c_j - f$ одного знака). Пусть для определенности этот знак положительный, тогда

$$\tau_e'(f) = O(\varepsilon) + \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) |\tilde{T}_j'(f)| \geq O(\varepsilon) + \sum_{j=1}^n \varkappa_j(e) \frac{\Lambda_j(v)}{4\delta} > 0$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что и требовалось.

(г) Пусть для определенности $F(S_0) < F(S_1)$. Окружность S_0 является неособой замкнутой траекторией системы v ; введем на ней регулярную параметризацию, т.е. диффеоморфизм $\varphi : S_0 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, согласованный с направлением движения системы v . Продолжим эту параметризацию на P до гладкой $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ -значной функции, которую тоже будем обозначать через φ , такой что пара функций $(F, \varphi) : P \rightarrow [F(S_0), F(S_1)] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ является диффеоморфизмом, т.е. регулярными координатами в P . Так как \tilde{F} близка к F по C^1 -норме, то пара

функций $(\tilde{F}, \varphi) : P \rightarrow [\tilde{F}(S_0), \tilde{F}(S_1)] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ тоже является диффеоморфизмом, т.е. регулярными координатами в P . В координатах (F, φ) (соотв. (\tilde{F}, φ)) имеем $\text{sgrad } F = \frac{1}{\omega(F, \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (соотв. $\text{sgrad } \tilde{F} = \frac{1}{\tilde{\omega}(\tilde{F}, \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$), поэтому невозмущенная и возмущенная функции периода $\tau(f)$ и $\tilde{\tau}(\tilde{f})$ вычисляются по формулам

$$\tau(f) = \int_0^{2\pi} \omega(f, \varphi) d\varphi, \quad \tilde{\tau}(\tilde{f}) = \int_0^{2\pi} \tilde{\omega}(\tilde{f}, \varphi) d\varphi. \quad (4.38)$$

Так как функции $\tilde{\omega}(\tilde{f}, \varphi)$ и $\omega(f, \varphi)$ близки по C^{r-3} -норме, то “масштабированная” функция $\tilde{\tau}((1-u)\tilde{F}(S_0) + u\tilde{F}(S_1))$ близка к “масштабированной” функции $\tau((1-u)F(S_0) + uF(S_1))$ на отрезке $[0, 1]$ по C^{r-3} -норме, что и требовалось.

(д) Пусть для определенности точка x_j является точкой локального минимума функции F , и пусть $U = F^{-1}[F(x_j), F(x_j) + \delta]$ (соотв. $\tilde{U} = \tilde{F}^{-1}[\tilde{F}(x_j), \tilde{F}(x_j) + \delta]$), где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда U и \tilde{U} являются замкнутыми регулярными окрестностями точек x_j и \tilde{x}_j .

Аналогично началу доказательства, рассмотрим локальные регулярные координаты (x, y) в U , в которых $F|_U = x^2 + y^2 + F(x_j)$ в силу леммы Морса. Отсюда и из леммы 4.2.5 получаем, что при $r \geq 5$ C^∞ -гладкая на промежутке $(F(x_j), F(\partial P)]$ функция периода $\tau(f)$ невозмущенных замкнутых траекторий, доопределенная в левом конце промежутка значением $\tau(F(x_j)) := \pi\Lambda_j(v)$, непрерывна со своей производной на отрезке $[F(x_j), F(x_j) + \delta]$ и имеет в этом конце производную $\tau'(F(x_j)) := \frac{\pi}{4}\hat{\Lambda}_j(v)$.

Осталось доказать последнее утверждение п.(а) и последнее утверждение п.(д). Возмущенный гамильтониан будет иметь вид $\tilde{F}|_{\tilde{U}} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{F}(\tilde{x}_j)$ относительно некоторых локальных координат (\tilde{x}, \tilde{y}) в \tilde{U} вида $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) \circ h^{-1}$, где $h : U \rightarrow \tilde{U}$ — диффеоморфизм, ограниченный по C^{r-1} -норме и $O(\varepsilon)$ -близкий к тождественному по C^{r-2} -норме. Отсюда и из того, что возмущенная симплектическая структура $\tilde{\omega}$ ограничена по C^{r-2} -норме и ε -близка к ω по C^{r-3} -норме, следует, что выражение $\tilde{\omega}$ через координаты (\tilde{x}, \tilde{y}) тоже будет ограниченным по C^{r-2} -норме и $O(\varepsilon)$ -близким по C^{r-3} -норме к выражению ω через (x, y) .

Отсюда и из леммы 4.2.5 получаем, что при $r \geq 5$ возмущенная функция периода $\tilde{\tau}(f)$ и ее производная имеют вид

$$\tilde{\tau}(f) = \pi\Lambda_j(\tilde{v}) + O(f - \tilde{F}(\tilde{x}_j)), \quad \tilde{\tau}'(f) = \frac{\pi}{4}\hat{\Lambda}_j(\tilde{v}) + O(\sqrt{f - \tilde{F}(\tilde{x}_j)}),$$

причем $\Lambda_j(\tilde{v}) = \Lambda_j(v) + O(\varepsilon)$ и $\hat{\Lambda}_j(\tilde{v}) = \hat{\Lambda}_j(v) + O(\varepsilon)$. Поэтому доказано последнее утверждение п.(а), и при $f \in [F(\tilde{x}_j), \tilde{F}(\tilde{x}_j) + \delta]$

$$\tilde{\tau}(f) = \pi\Lambda_j(v) + O(\varepsilon) + O(\delta), \quad \tilde{\tau}'(f) = \frac{\pi}{4}\hat{\Lambda}_j(v) + O(\varepsilon) + O(\sqrt{\delta})$$

и аналогичные оценки верны для функции $\tau(f)$. Поэтому для любого $\varepsilon_0 > 0$ можно выбрать столь малые $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\tau} \left((1-u)\tilde{F}(\tilde{x}_j) + u\tilde{F}(\partial P) \right) - \tau \left((1-u)F(x_j) + uF(\partial P) \right) \right| &\leq \varepsilon_0, \\ \left| \tilde{\tau}' \left((1-u)\tilde{F}(\tilde{x}_j) + u\tilde{F}(\partial P) \right) - \tau' \left((1-u)F(x_j) + uF(\partial P) \right) \right| &\leq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

при любом $u \in [0, \delta]$. Уменьшая, если нужно, величину возмущения $\varepsilon > 0$, получаем из п.(г), что аналогичные неравенства верны при любом $u \in [\delta, 1]$, а потому при любом $u \in [0, 1]$, что и требовалось.

Пункты (а)—(д) утверждения 4.2.12 доказаны. Невырожденность системы \tilde{v} в случае невырожденной системы v на седловом (соотв. минимаксном) атоме $(P, K)^\#$ следует из пп.(в), (г) и второго утверждения п.(б) (соотв. п.(г) и второго утверждения п.(д)).

Утверждение 4.2.12 полностью доказано. \square

Доказательство теоремы 4.2.2. Из утверждения 4.2.12 и открытости пространства морсов-ских функций в C^2 -топологии легко следует открытость подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ в пространстве $\mathbf{H}(M)$ в смысле C^r -топологии из §4.1.3, если $r \geq 5$. Требуемое свойство “нового” (соотв. “старого”) ребра графа $\widetilde{W}^{\text{num}}$ возмущенной функции \widetilde{F} , указанное в формулировке теоремы 4.2.2, следует из п.(в) (соотв. п.(г) и вторых утверждений пп.(б) и (д)) утверждения 4.2.12.

Покажем, что нижняя оценка $r \geq 5$ неулучшаема. Из леммы 4.2.5 получаем, что для любого (сколь угодно малого) вещественного числа $\varepsilon > 0$, любая (“невозмущенная”) система $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ обладает ε -малым в смысле C^4 -топологии на $\mathbf{H}(M)$ возмущением $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F}) \in \mathbf{H}(M)$, имеющим нулевое значение метки $\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}(\tilde{v}) = 0$ из леммы 4.2.5, откуда $\tilde{v} \notin \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. Поэтому $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ неоткрыто в $\mathbf{H}(M)$ в смысле C^4 -топологии на $\mathbf{H}(M)$. Аналогично показывается, что для C^4 -топологии требуемое свойство “старого” ребра графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$ нарушается, а именно: при подходящем сколь угодно малом возмущении системы в смысле C^4 -топологии число критических точек “возмущенной” функции периода на указанном “старом” ребре графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$ можно сделать на 1 большим, чем у “невозмущенной” функции периода на соответствующем ребре графа W^{num} . При этом указанной “дополнительной” критической точке “возмущенной” функции периода будет отвечать замкнутая траектория системы \tilde{v} , сколь угодно близкая к критической точке локального минимума или максимума функции F .

Осталось доказать плотность подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ в пространстве $\mathbf{H}(M)$ относительно C^r -топологии при любом $r \geq 5$. Для любых системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(M)$ и числа $\varepsilon > 0$ существует (“возмущенный”) гамильтониан \tilde{F} , ε -близкий к F по C^r -норме, ограниченный по C^{r+1} -норме и являющийся функцией Морса (т.е. принадлежащий $\mathcal{F}(M)$), ввиду плотности подпространства $\mathcal{F}(M)$ функций Морса в пространстве $C^\infty(M, \partial M)$ в смысле C^s -топологии при любом $s \geq 2$. Так как функция \tilde{F} морсовская, то в силу утверждения 4.2.12 (д) функция периода продолжается по непрерывности во все “минимаксные” концы КР-графа W функции \tilde{F} . Из явных формул для производной “продолженной” функции периода системы (ω, \tilde{F}) в любом конце графа W (см. (4.38) и утверждение 4.2.12 (д)) следует, что существует 2-форма $\tilde{\omega}$, ε -близкая к ω по C^{r-3} -норме и ограниченная по C^{r-2} -норме и такая, что любой конец графа W не является критической точкой продолженной функции периода системы $(\tilde{\omega}, \tilde{F})$. С учетом утверждения 4.2.12 (б) и C^1 -гладкости продолженной функции периода системы $(\tilde{\omega}, \tilde{F})$ (см. утверждение 4.2.12 (д)), эта функция не имеет критических точек в некоторой окрестности U множества вершин графа W . Пусть $U_c \subset U$ — меньшая замкнутая окрестность множества вершин графа W . Из явной формулы (4.38) для функции периода нетрудно вывести, что существует 2-форма $\tilde{\tilde{\omega}}$, ε -близкая к $\tilde{\omega}$ по C^{r-3} -норме, ограниченная по C^{r-2} -норме и такая, что $(\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\omega})|_{\pi_{\tilde{F}}^{-1}(U_c)} = 0$ и функция периода системы $\tilde{v} = (\tilde{\tilde{\omega}}, \tilde{F})$ является морсовской на $\pi_{\tilde{F}}^{-1}(W \setminus U_c)$, где $\pi_{\tilde{F}} : M \rightarrow W$ — проекция (2.4). Значит, построенная система \tilde{v} невырождена и 2ε -близка к системе v по C^r -норме на $\mathbf{H}(M)$. Теорема 4.2.2 доказана. \square

В действительности, числа $\varkappa_j(e) \in \{0, 1, 2\}$, $1 \leq j \leq n$, и 1-циклы $[Z_e] \in H_1(K)$ из определения 4.2.11 можно определить тем же способом для всех (не обязательно внутренних) ребер e графа возмущения W^{num} . Полученные в результате числа (при любом фиксированном j) и 1-циклы в действительности образуют относительные 1-циклы графа возмущения W^{num} относительно его концов (определение 2.5.1 (С)). Определим возникающие при этом объекты.

Определение 4.2.13. (А) В условиях определения 2.5.1, каждой вершине x_i , $1 \leq j \leq n$, атома $(P, K)^\#$ сопоставим функцию $\varkappa_j(e)$ на множестве $E(W)$ всех (не обязательно внутренних) рёбер $e \in E(W)$ графа возмущения $W = W^{\text{num}}$ аналогично определению 4.2.11: положим $\varkappa_j(e)$ равным числу прохождений линии уровня функции \tilde{F} , отвечающей внутренней точке ребра e , вблизи вершины x_j . Нетрудно видеть, что $\varkappa_j(e) \in \{0, 1, 2\}$ и что соответствующая

1-цепь \varkappa_j в графе W является *относительным 1-циклом*, так что

$$\varkappa_j := \sum_{e \in E(W)} \varkappa_j(e)[e] \in H_1(W, \partial W; \mathbb{Z}),$$

где ∂W — множество концов графа W (см. определение 2.5.1 (C)). Геометрический смысл 1-цепи \varkappa_j такой: это сумма четырёх 1-цепей — классов четырех путей $\pi_{\tilde{F}}(s_{jk}) \subset W$, где $s_{j1}, \dots, s_{j4} \subset P$ — ориентированные сепаратрисы векторного поля $\text{grad } \tilde{F}$, выходящие из точки \tilde{x}_j (соотв. входящие в точку \tilde{x}_j) и кончающиеся (соотв. начинающиеся) в точках ∂P . Здесь $\pi_{\tilde{F}} : P \rightarrow W$ — каноническая проекция (2.4) поверхности на граф Кронрода-Риба функции \tilde{F} ; векторное поле $\text{grad } \tilde{F}$ отвечает какой-либо римановой метрике, фиксированной на поверхности P (значение $\varkappa_j(e)$ не зависит от выбора римановой метрики, если возмущение достаточно мало).

Набор относительных 1-циклов $\varkappa_j \in H_1(W, \partial W; \mathbb{Z})$, $1 \leq j \leq n$, можно рассматривать как один относительный 1-цикл $k \in H_1(W, \partial W; \mathbb{Z}^n)$ с коэффициентами в группе $H_0(V(K); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$, полагая

$$\varkappa := \sum_{e \in E(W)} \varkappa(e)[e] \in H_1(W, \partial W; \mathbb{Z}^n), \quad \text{где } \varkappa(e) := (\varkappa_1(e), \dots, \varkappa_n(e)).$$

Здесь $V(K) = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество вершин графа K .

(B) Аналогичным образом, каждому ребру $e \in E(W)$ графа возмущения сопоставим 1-цикл $\zeta(e) \in H_1(K)$ на атоме: положим $\zeta(e)$ равным сумме классов ориентированных рёбер графа K , вдоль которых проходит линия уровня возмущённой функции \tilde{F} , отвечающая внутренней точке ребра e . Нетрудно видеть, что соответствующая 1-цепь ζ в графе W является *относительным 1-циклом* со значениями в $H_1(K)$:

$$\zeta := \sum_{e \in E(W)} \zeta(e) \otimes [e] \in H_1(W, \partial W; H_1(K)) \simeq H_1(K) \otimes H_1(W, \partial W).$$

Геометрический смысл 1-цепи ζ такой: это сумма $2n$ слагаемых $[K_i] \otimes [\pi_{\tilde{F}}(\tau_i)]$, где в i -м слагаемом K_i есть i -е ребро графа K , $\tau_i \subset P$ есть интегральная траектория векторного поля $\text{grad } \tilde{F}$, проходящая через фиксированную внутреннюю точку ребра K_i и начинающаяся и кончающаяся в точках ∂P , а 1-цепь $[\pi_{\tilde{F}}(\tau_i)]$ в графе W есть класс пути $\pi_{\tilde{F}}(\tau_i) \subset W$, $1 \leq i \leq 2n$. Проекция $\pi_{\tilde{F}} : P \rightarrow W$ и метрика на M — как выше (так что 1-цикл $\zeta(e)$ в графе K не зависит от выбора римановой метрики, если возмущение достаточно мало).

В силу утверждения 2.5.2 и более общей леммы 2.5.5, граф возмущения W^{num} вместе с относительными 1-циклами \varkappa и ζ в нём одинаков для возмущений одного и того же класса (4.17).

Относительные 1-циклы \varkappa и ζ графа возмущения (определение 4.2.13) важны тем, что они участвуют в определении 4.2.11 функции L_e , определенной на открытых ребрах e графа возмущения W^{num} и названной нами (Λ, m, \mathbf{c}) -аппроксимацией функции периода τ_e возмущенной системы. Дело в том, что с помощью функции L_e можно достаточно точно (как мы показали в утверждении 4.2.12) приблизить Π -метки возмущенной системы на “новых” ребрах. Относительные 1-циклы ζ и \varkappa будут использованы нами в §4.5.2 для описания продолжимых инвариантов (определение 4.1.20) и относительно-продолжимых инвариантов (определение 4.1.22) по отношению к некоторым классам возмущений — бициклических возмущений.

4.2.5 Поведение Π -меток на “старых” и “новых” ребрах молекулы Фоменко при малом возмущении невырожденной системы

Пусть $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ — невырожденная (“невозмущенная”) гамильтонова система на M , и пусть $\tilde{v} \in \mathbf{H}(M)$ — достаточно близкая к ней (“возмущенная”) система в смысле C^r -топологии на $\mathbf{H}(M)$ для некоторого $r \geq 5$ (см. §4.1.3).

Пусть $W^{\text{num}}, \widetilde{W}^{\text{num}}$ — графы Кронрода-Риба функций Гамильтона F, \widetilde{F} соответственно. Согласно теореме 4.2.2 система \tilde{v} тоже невырождена, т.е. $\tilde{v} \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. Значит, корректно определены Π -метки обеих систем v, \tilde{v} на ребрах графов $W^{\text{num}}, \widetilde{W}^{\text{num}}$, в том числе метки на концах этих графов (т.е. в вершинах, отвечающих граничным окружностям поверхности M или точкам локального минимума или локального максимума функции Гамильтона).

Напомним, что одна Π -метка может состоять из нескольких чисел. Из скольких чисел состоит Π -метка на каждом ребре графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$?

Метка на каждой вершине степени 1 всегда состоит ровно из одного числа — как для невозмущённой системы, так и для возмущённой, см. определение 4.2.1. Эта метка продолжима (“устойчива”), так как непрерывно меняется при возмущении системы, в силу утверждения 4.2.12 (а), (г).

Рассмотрим метки на рёбрах (точнее, во внутренности ребер). Напомним, что у возмущенного графа (т.е. графа возмущения) $\widetilde{W}^{\text{num}}$ все ребра разделяются на “старые” и “новые” (см. §2.5.2, п.(2')). Согласно теореме 4.2.2, для любой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и любого достаточно малого возмущения $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \widetilde{F}) \in \mathbf{H}(M)$ выполнено $\tilde{v} \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и

- на любом “новом” (см. §2.5.2, п.(2')) ребре e соответствующего графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$ функция периода $\tilde{\tau}_e(\tilde{f})$ имеет ровно одну критическую точку — точку минимума, а потому система \tilde{v} имеет ровно одну Π -метку на ребре e и эта метка равна минимуму функции периода $\tilde{\tau}_e = \tilde{\tau}_e(\tilde{f})$, причем эта Π -метка $\tilde{\Pi}_e(\tilde{v}) \rightarrow +\infty$ при $\tilde{v} \rightarrow v$ в силу утверждения 4.2.12 (б), (в);
- на любом “старом” ребре графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$ (т.е. отвечающем некоторому ребру графа W^{num} , см. §2.5.2, п.(2')) число критических точек функции периода не меняется при малом возмущении системы, причем Π -метка любого “старого” ребра (т.е. набор последовательных критических значений функции периода вдоль этого ребра) мало меняется при малом возмущении системы согласно утверждению 4.2.12 (б), (г), (д).

Подведем итог:

- Π -метка возмущенной системы \tilde{v} на каждом “старом” ребре графа $\widetilde{W}^{\text{num}}$ состоит из того же количества компонент, что и Π -метка невозмущенной системы v на соответствующем ребре графа W^{num} , и близка к ней;
- Π -метка возмущенной системы \tilde{v} на каждом “новом” ребре графа $\widetilde{W}^{\text{num}}$ состоит из одной компоненты, т.е. является вещественным положительным числом, причем это число сколь угодно велико, если возмущение достаточно мало.

4.3 Инварианты Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на поверхностях

Рассмотрим невырожденную гамильтонову систему $v = (F, \omega) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ (см. определение 4.2.1) на поверхности M . Пусть $W^\#$ — молекула Фоменко (определение 2.4.5), отвечающая функции Морса F . В §4.2.3 были определены Π -метки (определение 4.2.3) на ребрах молекулы Фоменко $W^\#$, а также грубые Λ - и m -метки (определение 4.2.9) на седловых атомах молекулы Фоменко $W^\#$.

В настоящем разделе напомним определение инварианта Болсинова-Фоменко [9] на $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, сопоставляющего любой системе $v \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ ее “оснащенную молекулу”

$W^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$ (см. определение 4.3.15). Согласно [9], этот инвариант является полным инвариантом C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на M . Оснащенная молекула получается введением Π -меток на ребрах и Λ - и m_Λ -меток на седловых атомах молекулы Фоменко $W^\#$, где Λ -метку можно получить путем “проективизации” грубой Λ -метки (см. определение 4.3.1 ниже), а m_Λ -метку можно получить из Λ -метки и грубой m -метки (принимаяющей значения в $(n + 1)$ -мерном векторном пространстве $H^1(K; \mathbb{R})$, где n — сложность атома) путем проектирования векторного пространства $H^1(K; \mathbb{R})$ на его факторпространство по некоторому подпространству $L_{\Lambda(v)}$, гладко зависящему от Λ -метки $\mathbb{R}\Lambda(v)$ на данном атоме (см. определение 4.3.12 ниже).

Мы также определим m -метку (определение 4.3.4) и докажем, что m -метка и грубая Λ -метка на седловом атоме являются инвариантами C^1 -сопряженности систем на этом атоме.

4.3.1 Метки Болсинова-Фоменко (Λ - и m_Λ -инварианты C^0 -сопряженности) систем на седловом атоме

Рассмотрим в графе (т.е. молекуле Фоменко) $W^\#$ любую вершину (т.е. атом Фоменко), имеющую как входящие, так и исходящие рёбра. Пусть k — вес этой вершины. Напомним, что вес вершины графа Кронрода-Риба — это число седловых точек x_{j_1}, \dots, x_{j_k} , лежащих на критическом уровне, отвечающем этой вершине. Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом сложности $k \geq 1$, отвечающий этой вершине.

Напомним построение двух “меток” на этом атоме: $\mathbb{R}\Lambda(v) \in \mathbb{R}P^{k-1}$ и $m_{\Lambda(v)} \in H^1(K; \mathbb{R})/L_{\Lambda(v)}$, введённые в [9]. Здесь $L_{\hat{\Lambda}} \subseteq H^1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{k+1}$ — некоторое векторное подпространство, гладко зависящее от $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^k$ (в действительности, лишь от $\mathbb{R}\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}P^{k-1}$); размерность этого пространства не зависит от $\hat{\Lambda}$.

Λ -инвариант C^0 -сопряженности

Пусть $j_1 < \dots < j_k$ — набор номеров, отвечающих данному седловому атому $(P, K)^\#$. Если вес (т.е. сложность) k этого атома превосходит 1, определим Λ -метку Болсинова-Фоменко системы $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на этом атоме равной

$$\mathbb{R}\Lambda(v) := (\Lambda_{j_1}(v) : \dots : \Lambda_{j_k}(v)) \in \mathbb{R}P^{k-1},$$

где $1/\Lambda_j(v)$ — инвариант системы v в седловой точке x_j , равный положительному собственному значению оператора $(\omega^{-1}d^2F)|_{x_j}$ линеаризации гамильтоновой системы в точке x_j , где $d^2F|_{x_j}$ — симметричная билинейная форма в $T_{x_j}M$, отвечающая матрице Гесса функции F в x_j . На простых атомах, т.е. веса $k = 1$ (т.е. сложности $k = 1$), положим $\Lambda(v) = 1$.

Хорошо известно (см. [9] или лемма 4.2.6), что набор $(\Lambda_{j_i}(v))_{i=1}^k \in \mathbb{R}_{>0}^k$ совпадает с грубой Λ -меткой (определение 4.2.9) системы v на данном седловом атоме. Тем самым, мы приходим к следующему определению.

Определение 4.3.1 (ср. определение 4.2.9). Проективизацию грубого Λ -инварианта систем на седловом атоме $(P, K)^\#$, т.е. отображение

$$\mathbb{R}\Lambda : \mathbf{H}(P, K) \rightarrow PC^0(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}P^{k-1}, \quad v \mapsto \mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_{j_1}(v) : \dots : \Lambda_{j_k}(v)), \quad (4.39)$$

назовем Λ -инвариантом Болсинова-Фоменко систем на данном атоме, а его значение $\mathbb{R}\Lambda(v)$ на системе v назовем Λ -меткой Болсинова-Фоменко системы v на данном атоме.

Пункты (i) и (ii) следующего утверждения являются простыми следствиями следующих теорем: (i) утверждения 4.2.12 (в), (ii) теоремы Болсинова-Фоменко (см. [9] или теорему 4.3.16) о полном инварианте C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на двумерных поверхностях.

Предложение 4.3.2 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [9]). Пусть $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — система на данном атоме, и $\tilde{v} \in \mathbf{H}(P)$ — достаточно близкая к ней (“возмущенная”) система в смысле топологии из §4.1.3. Тогда:

(i) существует регулярная окрестность U края ∂P поверхности P в P такая, что ее замыкание \bar{U} в P не содержит критических точек возмущенного гамильтониана и $\tilde{v}|_{P \setminus U} \in \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P \setminus U)$;

(ii) сопоставление любой возмущенной системе \tilde{v} ее графа возмущения W^{num} (определение 2.5.1 (В)) с Π -метками (4.20) на его внутренних ребрах и Λ -метками (4.39) на его вершинах является (неполным) инвариантом C^0 -сопряженности возмущенных гамильтоновых систем \tilde{v} на атоме (указанные метки корректно определены ввиду невырожденности системы $\tilde{v}|_{P \setminus U}$ согласно (i)). В частности (так как указанное свойство верно для тривиальных возмущений, т.е. для систем v на данном атоме), Λ -инвариант Болсинова-Фоменко является инвариантом C^0 -сопряженности систем на седловом атоме.

m -инвариант C^1 -сопряженности

Фиксируем седловой атом $(P, K)^\#$ сложности n (см. определение 2.4.3).

Обозначение 4.3.3. Для любой гамильтоновой системы $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на седловом атоме $(P, K)^\#$ введем естественное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(v)}$ в пространстве $C_1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 1-цепей графа K . В качестве линейного базиса в этом пространстве 1-цепей мы рассмотрим отдельные ребра графа K . Будем считать их по определению ортогональными векторами относительно конструируемого нами скалярного произведения. Осталось задать длины этих базисных векторов. Будем считать, что скалярный квадрат каждого ребра равен полусумме $(\Lambda_j(v) + \Lambda_{j'}(v))/2$, где j, j' — номера вершин, которые соединяет данное ребро графа K . Обозначим получающееся в результате скалярное произведение на пространстве 1-цепей графа K через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(v)}$. Введенное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(v)}$ определяет естественный изоморфизм

$$\mathbf{G}_{\Lambda(v)} : C_1(K; \mathbb{R}) \rightarrow C^1(K; \mathbb{R}), \quad \mathbf{G}_{\Lambda(v)}(C) := \langle C, \cdot \rangle_{\Lambda(v)}, \quad (4.40)$$

$C \in C_1(K; \mathbb{R})$. Изоморфизм (4.40) индуцирует изоморфизм $H_1(K; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(K; \mathbb{R})$, который тоже будем обозначать через $\mathbf{G}_{\Lambda(v)}$. Образ $\mathbf{G}_{\Lambda(v)}(C) \in H^1(K; \mathbb{R})$ любого 1-цикла $C \in H_1(K; \mathbb{R})$ при индуцированном изоморфизме мы будем обозначать через $\Lambda(v) \cdot C$ и называть $\Lambda(v)$ -сопряженным 1-циклу C 1-коциклом графа K .

Отметим, что это скалярное произведение зависит от вектора

$$\Lambda(v) = (\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v)) \in \mathbb{R}_{>0}^n$$

и будет нас интересовать лишь с точностью до положительного множителя. Если все числа $\Lambda_i(v)$ равны между собой, то введенное нами скалярное произведение превращается в стандартное евклидово скалярное произведение в $C_1(K; \mathbb{R})$ (точнее, пропорциональное ему). В дальнейшем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda}$ нам потребуется лишь на подпространстве 1-циклов $H_1(K; \mathbb{R}) \subseteq C_1(K; \mathbb{R})$ в пространстве $C_1(K; \mathbb{R})$ всех 1-цепей графа K .

Заметим, что фазовый поток любой гамильтоновой системы $v = (\omega, F)$ сопряжен фазовому потоку системы $v_a = (e^a \omega, e^{-a} F)$ для любого $a \in \mathbb{R}$ при помощи тождественного диффеоморфизма (в качестве сопрягающего). Так как тождественный диффеоморфизм является гладким класса C^∞ и сохраняющим ориентацию, то системы v и v_a C^0 - и C^1 -сопряжены по определениям 4.1.9 и 4.1.10. Нетрудно проверяется, что если $v \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, то $v_a \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и у систем v и v_a совпадают молекулы Фоменко с Π -метками и грубыми Λ -метками, а их грубые m -метки (4.28) на любом седловом атоме связаны соотношением

$$[m(v_a)] = [m(v)] + a\Lambda(v) \cdot [K] \quad (4.41)$$

(см. обозначение 4.3.3), где $[K] \in H_1(K; \mathbb{R})$ — фундаментальный класс графа K . Поэтому грубая m -метка не является инвариантом C^1 -сопряженности, и мы приходим к следующему определению.

Определение 4.3.4. Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом сложности n . Фиксируем вектор $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ и обозначим через $\mathbf{H}(P, K, \hat{\Lambda})$ множество всех систем $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме с одинаковой Λ -меткой $\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\hat{\Lambda}$. Пусть $[K] \in H_1(K; \mathbb{R})$ — фундаментальный класс графа K , $\hat{\Lambda} \cdot [K] \in H^1(K; \mathbb{R})$ — ему $\hat{\Lambda}$ -сопряженный 1-коцикл графа K (см. обозначение 4.3.3), а $\mathbb{R}\hat{\Lambda} \cdot [K] \subset H^1(K; \mathbb{R})$ — линейная оболочка этого 1-коцикла. Композицию

$$[m] \bmod (\mathbb{R}\hat{\Lambda} \cdot [K]) : \mathbf{H}(P, K, \hat{\Lambda}) \rightarrow H^1(K; \mathbb{R})/(\mathbb{R}\hat{\Lambda} \cdot [K]) \simeq \mathbb{R}^n \quad (4.42)$$

грубого m -инварианта $[m]$ и канонической проекции $H^1(K; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(K; \mathbb{R})/(\mathbb{R}\hat{\Lambda} \cdot [K]) \simeq \mathbb{R}^n$ назовем m -инвариантом, а его значение $[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K])$ на системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — m -меткой системы v на данном атоме.

Отметим, что не только m -метка, но и область значений m -инварианта на данном атоме зависят от Λ -метки $\mathbb{R}\Lambda(v)$ системы v на данном атоме. Тем не менее сопоставление любой системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ (необязательно принадлежащей какому-либо фиксированному пространству $\mathbf{H}(P, K, \hat{\Lambda})$) ее m -метки $[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K])$ мы тоже будем называть m -инвариантом систем на атоме $(P, K)^\#$.

Покажем, что построенные выше m -метка и грубая Λ -метка в рёбрах и вершинах седлового атома являются инвариантами C^1 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме. Мы также установим непрерывность этих инвариантов в смысле топологии из §4.1.3 на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ (безусловно, они непрерывны в смысле C^∞ -топологии и даже являются гладкими, однако изучаемая нами C^r -топология при $r \geq 5$ сильнее, поэтому их непрерывность в смысле нашей топологии неочевидна).

Предложение 4.3.5 ([145, предложение 1.1], ср. [9, 7]). (А) Грубый Λ -инвариант и m -инвариант (а значит, и Λ - и m_Λ -инварианты, см. определения 4.2.9, 4.3.4, 4.3.1 и (4.45)) являются инвариантами C^1 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$, т.е. их значения совпадают на любой паре гамильтоновых систем $v, \hat{v} \in \mathbf{H}(P, K)$, сопряженных в некоторых (инвариантных) окрестностях U и \hat{U} седловых уровней при помощи диффеоморфизма класса C^1 .

(В) Пусть дано семейство 1-циклов $z_{\hat{\Lambda}} \in H_1(K; \mathbb{R})$, зависящих от параметра $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Рассмотрим \mathbb{R} -значную функцию $I(v) := \langle [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle$, $v \in \mathbf{H}(P, K)$, от грубых Λ - и m -инвариантов на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$. Функция $I = I(v)$ является инвариантом C^1 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$ тогда и только тогда, когда $\langle [K], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любого значения $\hat{\Lambda}$.

(С) При любом $r \geq 3$ грубый Λ -инвариант непрерывен относительно C^r -топологии на пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$, а грубый m -инвариант (а значит, и m - и m_Λ -инварианты) непрерывен относительно C^r -топологии на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$.

Доказательство. (А) Как хорошо известно (см. [9] или лемму 4.2.6), числа $\frac{\pm 1}{\Lambda_j(v)}$ являются собственными числами линеаризации векторного поля v в особой точке x_j . Отсюда следует, что если две почти невырожденные системы $v, \hat{v} \in \mathbf{H}(P)$ (например, $v, \hat{v} \in \mathbf{H}(P, K)$) C^1 -сопряжены, то их грубые Λ -метки совпадают: $\Lambda(v) = \Lambda(\hat{v})$. Таким образом, грубый Λ -инвариант является инвариантом C^1 -сопряженности систем.

Покажем, что для любых двух C^1 -сопряженных гамильтоновых систем v и \hat{v} на данном атоме их m -метки $[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K])$ и $[m(\hat{v})] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K])$ тоже совпадают (а не только грубые Λ -метки, см. выше). В самом деле, пусть ψ — C^1 -диффеоморфизм, осуществляющий C^1 -сопряженность систем $v = (\omega, F)$ и $\hat{v} = (\hat{\omega}, \hat{F})$. Пусть критические значения

гамильтонианов F и \widehat{F} суть c и \widehat{c} . Для каждой вершины x_j данного атома рассмотрим координатный крест U_j , отвечающий системе v (см. определение 4.2.7 (b)). Для наглядности будем считать, что кресты U_j вложены и попарно не пересекаются. Достаточно показать, что образ $\widehat{U}_j = \psi(U_j)$ этой окрестности при C^1 -диффеоморфизме ψ может служить почти крестом (см. (4.24)) для системы \widehat{v} (напомним, что грубый m -инвариант $[m(v)]$ полностью определяется временами движения в силу системы v по ребрам графа K вне крестов U_j). По определению 4.2.7 (b) креста, время движения в силу системы v по любому отрезку траектории $F^{-1}(f)$ внутри креста U_j имеет вид

$$\tau_j(f) = -\Lambda_j \ln |f - c| + o(1), \quad f \rightarrow c,$$

где числа $\Lambda_j = \Lambda_j(v)$ зависят только от номера вершины j (но не зависят от координатной четверти в кресте). Так как при C^1 -диффеоморфизме ψ^{-1} в окрестности любого ребра графа K функция $F - c$ переходит в функцию вида $(F - c) \circ \psi^{-1} = (\widehat{F} - \widehat{c})e^{a\circ\widehat{F}}$, где a — близкая к 0 непрерывная функция одной переменной (зависящая от выбора указанного ребра графа K), то время $\tau_j(f) = \widehat{\tau}_j(\widehat{f})$ движения в силу системы \widehat{v} внутри окрестности $\widehat{U}_j = \psi(U_j)$ имеет вид

$$-\Lambda_j \ln |f - c| + o(1) = -\Lambda_j \ln |\widehat{f} - \widehat{c}| - \Lambda_j a(\widehat{f}) + o(1) = -\Lambda_j \ln |\widehat{f} - \widehat{c}| - \Lambda_j a(\widehat{c}) + o(1)$$

при $\widehat{f} \rightarrow \widehat{c}$. Поэтому окрестности $\widehat{U}_j = \psi(U_j)$ в случае $a(\widehat{c}) = 0$ являются крестами, а в противном случае — почти крестами для системы \widehat{v} в смысле (4.24). Значит, окрестность \widehat{U}_j можно получить из некоторого креста в точке \widehat{x}_j , отвечающего системе \widehat{v} , путем одновременного приклеивания (или отрезания) ленточек длины $d_j = \frac{1}{2}\Lambda_j|a(\widehat{c})|$ к каждому из четырех концов этого креста (ср. следствие 4.2.8 (c)). При этом ленточки длины d_j приклеиваются к j -му кресту в случае $a(\widehat{c}) < 0$, отрезаются от j -го креста в случае $a(\widehat{c}) > 0$. Так как время движения сохраняется при C^1 -сопряжении систем, то указанным крестам системы \widehat{v} отвечает 1-коцепь $m(\widehat{v}) = m(v) + a(\widehat{c})\mathbf{G}_{\Lambda(v)}([K])$ (см. (4.40)). Таким образом, грубые m -метки систем v и \widehat{v} связаны соотношением

$$[m(\widehat{v})] = [m(v)] + a(\widehat{c})\Lambda(v) \cdot [K].$$

Отсюда и из равенства $\Lambda(\widehat{v}) = \Lambda(v)$ получаем совпадение m -меток:

$$[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K]) = [m(\widehat{v})] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K]).$$

(Отметим, что мы существенно использовали важное свойство гамильтоновости систем v и \widehat{v} ; это свойство также необходимо для корректности определения m -меток.) Заодно мы доказали (4.41).

(B) Предположим, что $\langle [K], z_{\widehat{\Lambda}} \rangle_{\widehat{\Lambda}} = 0$ для любого значения $\widehat{\Lambda}$ и системы $v, v' \in \mathbf{H}(P, K)$ C^1 -сопряжены. Так как m -инвариант и грубый Λ -инвариант являются инвариантами C^1 -сопряженности согласно п.(A), то $\Lambda(v) = \Lambda(v')$ и m -метки систем v, v' совпадают. Поэтому разность $[m(v)] - [m(v')]$ их грубых m -меток пропорциональна 1-коциклу $\Lambda(v) \cdot [K]$, т.е. равна $c\Lambda(v) \cdot [K]$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Поэтому $I(v) - I(v') = \langle [m(v)] - [m(v')], z_{\Lambda(v)} \rangle = c\langle [K], z_{\Lambda(v)} \rangle_{\Lambda(v)} = 0$, т.е. $I = I(v)$ является инвариантом C^1 -сопряженности. Обратное: если $I = I(v)$ является инвариантом C^1 -сопряженности, то в силу C^1 -сопряженности систем v и v_1 из (4.41) имеем $0 = I(v_1) - I(v) = \langle [m(v_1)] - [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle = \langle [K], z_{\Lambda(v)} \rangle_{\Lambda(v)}$, что и требовалось.

(C) Фиксируем любое натуральное число $r \geq 3$. Так как число $1/\Lambda_j(v)$ является положительным собственным числом линеаризации векторного поля v в особой точке x_j , то оно мало меняется при C^2 -малом возмущении гамильтониана и C^0 -малом возмущении симплектической структуры, поэтому грубый Λ -инвариант непрерывен относительно C^r -топологии на пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$.

Докажем, что грубый m -инвариант непрерывен на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ относительно C^r -топологии. Пусть $r \geq 3$ и $v, \tilde{v} \in \mathbf{H}(P, K)$ — две гамильтоновы системы на атоме

$(P, K)^\#$, причем (“возмущенная”) система \tilde{v} ε -близка к (“невозмущенной”) системе v в смысле C^r -топологии из §4.1.3. В доказательстве утверждения 4.2.12 (б) построены “возмущенные кресты” \tilde{U}_j в седловых критических точках \tilde{x}_j . Из этого доказательства следует, что верна формула (4.35) для времени движения в силу системы \tilde{v} в “возмущенном кресте” \tilde{U}_j при $|f - c_j| = O(\varepsilon)$, где $c_{j_1} = c_{j_2}$ для любых j_1, j_2 (так как у нас возмущение тривиально, т.е. все возмущенные седловые критические значения $c_j = \tilde{F}(\tilde{x}_j)$ совпадают). Отсюда, с учетом определения (4.24) с $a = 0$ и существования крестов (следствие 4.2.8 (а)–(б)), следует, что существуют кресты \hat{U}_j возмущенной системы \tilde{v} , $O(\sqrt{\varepsilon})$ -близкие к “возмущенным крестам” \tilde{U}_j . Пусть 1-коцепь $m(\tilde{v})$ системы \tilde{v} отвечает набору крестов \hat{U}_j .

Из начала доказательства п.(в) утверждения 4.2.12 следует, что время движения в силу системы \tilde{v} по пересечению i -го ребра графа $\tilde{K} = \tilde{F}^{-1}(c_j)$ и i -ой “возмущенной ленточки” $O(\varepsilon)$ -близко к $\langle m(v), K_i \rangle$ по C^{r-2} -норме. Аналогично крестам, ленточки системы \tilde{v} тоже $O(\sqrt{\varepsilon})$ -близки к “возмущенным ленточкам”, поэтому $\langle m(\tilde{v}), K_i \rangle = \langle m(v), K_i \rangle + O(\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \langle m(v), K_i \rangle + O(\sqrt{\varepsilon})$ для любого ребра K_i графа $K = F^{-1}(F(x_j))$. Поэтому $[m(\tilde{v})] = [m(v)] + O(\sqrt{\varepsilon})$, что и требовалось. \square

В действительности, Λ - и m_Λ -инварианты являются инвариантами C^0 -сопряженности систем на данном атоме (см. [9] или предложение 4.3.11).

Пример \mathbb{R} -значной функции от m -инварианта: главное значение периода движения в силу системы по атомной окружности (инвариант $A_i(v)$)

Пусть $(P, K)^\#$ — ориентированный седловой атом сложности n .

Замечание 4.3.6. Аналогично замечанию 4.2.10 определяются \mathbb{R} -значные функции от Λ - и m -инвариантов (и отвечающие им метки) гамильтоновых систем на данном атоме. Ввиду (4.42) пространство таких функций, ограниченных на множество $\mathbf{H}(P, K, \hat{\Lambda})$ систем v с одинаковой Λ -меткой $\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\hat{\Lambda}$ (для любого фиксированного $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$), естественно отождествляется с n -мерным ортогональным дополнением к 1-циклу $[K]$ в векторном пространстве $H_1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$ из обозначения 4.3.3.

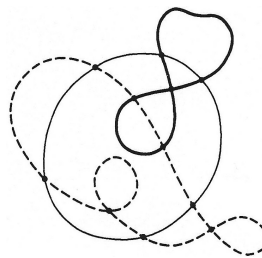


Рис. 4.3. Атомные окружности на седловом атоме

Для любого седлового атома $(P, K)^\#$ рассмотрим погруженные регулярные замкнутые кривые O_i , содержащиеся в графе K , т.е. образованные сепаратрисами гамильтонова векторного поля v на атоме (рис. 4.3). Такие (погруженные) окружности в работе [9] были названы атомными окружностями. В дальнейшем мы так и будем их называть. Пусть O_1, \dots, O_ν — все атомные окружности данного атома. Фиксируем на них направление обхода, т.е. ориентацию.

Нетрудно видеть, что любая атомная окружность O_i как 1-цепь является 1-циклом и ортогональна 1-циклу $[K]$ в векторном пространстве $H_1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ относительно любого скалярного произведения вида $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$ из обозначения 4.3.3. Значит, ввиду замечания 4.3.6,

получаем ν \mathbb{R} -значных функций

$$A_i : \mathbf{H}(P, K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle m(v), [O_i] \rangle, \quad 1 \leq i \leq \nu, \quad (4.43)$$

от m -инварианта систем на атоме $(P, K)^\#$.

Приведем еще одно (эквивалентное), более геометрическое определение инварианта A_i .

Согласно следствию 4.2.8 (а)—(b), для любой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме существуют попарно непересекающиеся координатные окрестности \tilde{U}_j вершин x_j графа K , являющиеся “вложенными почти крестами” (4.24) в точках x_j для системы v .

Определение 4.3.7. Главным значением периода системы $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на атомной окружности O_i назовем интеграл

$$A_i(v) = p.v. \oint_{O_i} \frac{ds}{v(s)} := \int_{O'_i} \frac{ds}{v(s)}$$

по ее части $O'_i = O_i \setminus (\tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n)$, остающейся после выкидывания из поверхности P всех окрестностей \tilde{U}_j . Здесь $s \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — параметр на атомной окружности O_i для некоторой регулярной параметризации $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow O_i$, $\text{sgrad } F|_{O_i}(s) = v(s)d/ds$.

Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора непересекающихся координатных окрестностей \tilde{U}_j , $1 \leq j \leq n$, так как $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$, а грубая m -метка $[m(v)]$ определена корректно (см. (4.28)).

Следствие 4.3.8. Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом и $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — гамильтонова система на этом атоме. Числа $\Lambda_j(v)$, $1 \leq j \leq n$, и $A_i(v)$, $1 \leq i \leq \nu$ (где n и ν — число вершин и число атомных окружностей атома) корректно определены, т.е. не зависят от выбора крестов и/или почти крестов и морсовских координат x, y на них. Число $A_i(v)$ является функцией от m -метки $[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K]) \in H^1(K; \mathbb{R})/\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K]$ системы v на данном атоме. Сопоставления любой системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ этих чисел являются инвариантами C^1 -сопряженности и непрерывны в смысле C^r -топологии на $\mathbf{H}(P, K)$ из §4.1.3 при любом $r \geq 3$.

Доказательство. Согласно следствию 4.2.8 (с), указанные инварианты корректно определены. Согласно предложению 4.3.5, (4.43) и замечанию 4.3.6, они являются инвариантами C^1 -сопряженности и непрерывны. Следствие доказано. \square

Приведем простое свойство инвариантов C^1 -сопряженности $A_i(v)$, которым мы воспользуемся для описания полного инварианта C^0 -сопряженности ростков систем на любом “вполне бициклическом” атоме (см. определения 4.1.18, 4.3.10 и теорему 4.5.21 ниже).

Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом сложности n .

Лемма 4.3.9 (о циклах в седловом атоме [145, лемма 6.1]). Рассмотрим ориентированный граф K и все атомные окружности O_1, \dots, O_ν атома (снабженные некоторой ориентацией), а также их классы $[K], [O_i]$ в группе $H_1(K; \mathbb{R})$ 1-циклов графа K . Тогда 1-циклы $[K], [O_1], \dots, [O_\nu]$ линейно независимы в $(n+1)$ -мерном векторном пространстве $H_1(K; \mathbb{R})$ всех 1-циклов графа K и попарно ортогональны относительно любого скалярного произведения вида $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$, $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Эти $\nu+1$ циклов образуют базис пространства $H_1(K; \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда все атомные окружности O_i имеют длину 2 (т.е. атом $(P, K)^\#$ принадлежит сериям V_n^1, V_n^2 “вполне бициклических” атомов, см. §4.5.2 ниже).

Доказательство. Линейная независимость 1-циклов $[O_1], \dots, [O_\nu]$ очевидна, так как их носители попарно не пересекаются. Значит, линейная зависимость 1-циклов $[K], [O_1], \dots, [O_\nu]$ возможна только в том случае, когда $[K]$ является линейной комбинацией $[O_1], \dots, [O_\nu]$. Но

тогда два последовательных ребра одной и той же атомной окружности входят в эту линейную комбинацию с разными знаками, поэтому эта линейная комбинация не равна 1–циклу $[K]$. Итак, 1–циклы $[K], [O_1], \dots, [O_\nu]$ линейно независимы в $H_1(K; \mathbb{R})$. Попарная ортогональность 1–циклов $[O_1], \dots, [O_\nu]$ очевидна. Равенство $\langle [K], [O_i] \rangle_{\widehat{\Lambda}} = 0$ проверяется непосредственно. Длина каждой атомной окружности четна, поэтому сумма их длин (равная $2n$) не меньше, чем 2ν . Поэтому $\nu \leq n$, т.е. количество рассматриваемых линейно независимых 1–циклов $\nu + 1 \leq n + 1 = \dim H_1(K; \mathbb{R})$. Последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда 1–циклы $[K], [O_1], \dots, [O_\nu]$ образуют базис пространства $H_1(K; \mathbb{R})$. \square

m_Λ –инвариант C^0 –сопряженности

Определение 4.3.10. Для любого атома $(P, K)^\#$ рассмотрим пространство $\mathbf{H}(P, K)$ всех гамильтоновых систем $v = (\omega, F)$ на этом атоме. Набор инвариантов $I_\alpha(v)$, $\alpha \in A$, C^0 –сопряженности ростков гамильтоновых систем на этом атоме (определение 4.1.18) назовем *полным набором инвариантов C^0 –сопряженности* ростков систем на этом атоме, если для любой пары гамильтоновых систем $v, v' \in \mathbf{H}(P, K)$ на этом атоме из условия $I_i(v) = I_i(v')$, $\alpha \in A$, следует C^0 –сопряженность этих систем в некоторых (достаточно малых) окрестностях седловых уровней гамильтонианов этих систем.

Следующее утверждение является простым следствием более общих теорем из работы [9].

Предложение 4.3.11 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [9], [145, предложение 6.1]). *Для любого седлового атома $(P, K)^\#$ имеется семейство векторных подпространств $C_{\Lambda(v)} \subseteq H_1(K; \mathbb{R})$ пространства 1–циклов графа K , гладко зависящих от Λ –метки $\mathbb{R}\Lambda(v)$, обладающее следующими свойствами.*

(а) *Коразмерность подпространства $C_{\Lambda(v)}$ в $H_1(K; \mathbb{R})$ зависит только от атома (т.е. не зависит от значения $\Lambda(v) \in \mathbb{R}_{>0}^n$) и лежит в отрезке $[1, \partial - 1]$, где ∂ есть валентность данного атома (см. определение 2.4.3 (В)).*

(б) *Две системы v и v' на данном атоме C^0 –сопряжены в некоторых (инвариантных) окрестностях U и U' седловых уровней в том и только том случае, когда Λ –метки этих систем на данном атоме совпадают, и значения соответствующих 1–коцепей $m(v)$ и $m(v')$ на любом 1–цикле $z \in C_{\Lambda(v)}$ также совпадают.*

Другими словами, для любого базиса $z_{1, \widehat{\Lambda}}, \dots, z_{\dim C_{\widehat{\Lambda}}, \widehat{\Lambda}}$ подпространства $C_{\widehat{\Lambda}}$ (зависящего от параметра $\mathbb{R}\widehat{\Lambda}$) Λ –инвариант и \mathbb{R} –значные функции

$$v \mapsto \langle [m(v)], z_{i, \Lambda(v)} \rangle, \quad 1 \leq i \leq \dim C_{\Lambda(v)},$$

от Λ –инварианта и m –инварианта (см. замечания 4.2.10 и 4.3.6) образуют полный набор инвариантов C^0 –сопряженности ростков гамильтоновых систем на данном атоме (определения 4.1.18 и 4.3.10).

Для любого $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ положим

$$L_{\widehat{\Lambda}} := \text{Ann } C_{\widehat{\Lambda}} = \{l \in H^1(K; \mathbb{R}) \mid \langle l, z \rangle = 0 \ \forall z \in C_{\widehat{\Lambda}}\}, \quad (4.44)$$

аннулятор подпространства $C_{\widehat{\Lambda}}$, где через $\langle l, z \rangle$ обозначено значение 1–коцикла l на 1–цикле z графа K . Если $\dim C_{\widehat{\Lambda}} = d$, то $\dim L_{\widehat{\Lambda}} = n + 1 - d$. Из предложения 4.3.11 получаем, что композиция

$$[m] \Big|_{\mathbf{H}(P, K, \widehat{\Lambda})} \text{ mod } L_{\widehat{\Lambda}} : \mathbf{H}(P, K, \widehat{\Lambda}) \rightarrow H^1(K; \mathbb{R})/L_{\widehat{\Lambda}} \simeq C_{\widehat{\Lambda}}^* \simeq \mathbb{R}^d \quad (4.45)$$

ограничения грубого m –инварианта $[m]$ на подпространство $\mathbf{H}(P, K, \widehat{\Lambda})$ (см. определения 4.2.9 и 4.3.4) и канонической проекции $H^1(K; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(K; \mathbb{R})/L_{\widehat{\Lambda}}$ является инвариантом C^0 –сопряженности систем на данном атоме.

Определение 4.3.12. Инвариант (4.45) назовем m_Λ -инвариантом Болсинова-Фоменко, а его значение $[m(v)] \bmod L_{\Lambda(v)}$ на системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ — m_Λ -меткой Болсинова-Фоменко системы v на данном атоме.

Замечание 4.3.13. Согласно предложению 4.3.11 Болсинова-Фоменко, Λ - и m_Λ -инварианты Болсинова-Фоменко образуют *полный инвариант C^0 -сопряженности* ростков гамильтоновых систем на данном седловом атоме (определения 4.1.18 и 4.3.10). Допуская некоторую вольность речи, мы будем иногда называть Λ - и m_Λ -инварианты *полными Λ - и m_Λ -инвариантами*, а функции от них — просто Λ - и m_Λ -инвариантами. Аналогично, m -инвариант (определение 4.3.4 и предложение 4.3.5) мы будем иногда называть *полным m -инвариантом*, а функции от него — просто m -инвариантами.

Замечание 4.3.14. Ввиду (4.41) и предложения 4.3.11, для любого $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ выполнено $\widehat{\Lambda} \cdot [K] \in \text{Ann } C_{\widehat{\Lambda}} = L_{\widehat{\Lambda}}$. Поэтому подпространство $C_{\widehat{\Lambda}}$ из предложения 4.3.11 ортогонально 1-циклу $[K]$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widehat{\Lambda}}$ из обозначения 4.3.3.

4.3.2 Полный инвариант Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности невырожденных систем на поверхности

В §§4.2.1 и 4.3.1 были определены инварианты Болсинова-Фоменко [9] C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на замкнутой поверхности M . То есть, были построены Π -, Λ - и m_Λ -метки на рёбрах и атомах молекулы Фоменко системы v .

Определение 4.3.15. Пусть $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ — невырожденная гамильтонова система на замкнутой поверхности M . *Оснащённой молекулой Болсинова-Фоменко* (или просто *оснащенной молекулой*) системы v называется молекула Фоменко $W^\#$ функции Гамильтона F (см. определение 2.4.5), снабженная Π -метками на рёбрах и Λ - и m_Λ -метками системы v на атомах этой молекулы (определения 4.2.3, 4.3.1 и 4.3.12). Обозначим оснащённую молекулу через $W^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$.

Оснащённые молекулы систем $v, v' \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм между молекулами их функций Гамильтона F, F' , при котором Π -метки на рёбрах и Λ - и m_Λ -метки на атомах молекулы, отвечающие системе v , переходят в метки, отвечающие системе v' .

Следующая теорема является частным случаем более общего результата работы [9].

Теорема 4.3.16 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [9]). *Сопоставление любой гамильтоновой системе $v \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ её оснащённой молекулы $W^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$ является полным инвариантом C^0 -сопряженности невырожденных гамильтоновых систем на замкнутой поверхности M . Другими словами, гамильтоновы системы $v, v' \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ C^0 -сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащённые молекулы изоморфны.* \square

Рассмотрим стратификацию Максвелла пространства $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ из §2.5.2 и индуцированную стратификацию открытых в $\mathbf{H}(M)$ (согласно теореме 4.2.2) пространств $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ (см. (4.15)), где любой страт Максвелла в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ есть связная компонента класса топологической траекторной эквивалентности (определение 4.1.11), т.е. связная компонента прообраза страта Максвелла в $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ при канонической проекции

$$\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M).$$

Отметим, что в прообразе любого страта Максвелла пространства $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ при этой проекции содержится ровно один страт Максвелла пространства $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ и бесконечное число стратов Максвелла пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. Стратификации Максвелла пространств

$\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$ вместе с их разбиением на классы C^0 -сопряженности обладают следующими свойствами:

(1) Каждый страт Максвелла (т.е. связная компонента класса траекторной эквивалентности) в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ является гладким подмногообразием конечной коразмерности $N - S = n_1 - s$ (определение 4.1.17 (C)) в $\mathbf{H}(M)$, где $N = n_0 + n_1 + n_2$ (соотв. n_1) — число всех (соотв. седловых) критических точек, S (соотв. s) — число всех (соотв. внутренних) вершин КР-графа W^{num} (т.е. число седловых атомов) функции Гамильтона любой системы из данного страта Максвелла. Это следует из свойства (1) стратов Максвелла в $\mathcal{F}^{\text{num,fr}}(M)$ (см. §2.5.2), открытости подпространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ в $\mathbf{H}(M)$ и сохранения количества Π -меток на любом “старом” ребре графа возмущения (см. теорему 4.2.2).

(2) Каждый класс C^0 -сопряженности в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ целиком лежит в страте Максвелла и является связным гладким подмногообразием конечной коразмерности в $\mathbf{H}(M)$ (определение 4.1.17 (C)). Более того, в каждом страте Максвелла классы C^0 -сопряженности являются множествами уровня (т.е. “слоями”) сюръективной субмерсии (см. определение 4.1.17 (B)) (называемой далее “расслоением”), задаваемой инвариантами Болсинова-Фоменко (см. теорему 4.3.16). В частности, коразмерность классов C^0 -сопряженности постоянна на каждом страте Максвелла.

Действительно: покажем сначала, что на любом страте Максвелла $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ Π -инвариант $\Pi|_{\mathbf{H}_1}$ является субмерсией. Напомним, что одна Π -метка может состоять из нескольких чисел. Из скольких чисел состоит каждая Π -метка (“возмущенной”) системы $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F}) \in \mathbf{H}_1$, достаточно близкой к заданной (“невозмущенной”) системе $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}_1$? Этот вопрос уже изучен в §4.2.5 в случае произвольного (т.е. не обязательно тривиального) возмущения. Но в случае тривиального возмущения граф возмущения \tilde{W}^{num} изоморфен исходному графу W^{num} (так как гамильтонианы F, \tilde{F} послойно эквивалентны в силу утверждения 2.5.2), поэтому “новых” ребер нет. Значит, Π -метка возмущенной системы $\tilde{v} \in \mathbf{H}_1$ на каждом ребре графа W^{num} состоит из того же числа компонент, что и Π -метка невозмущенной системы $v \in \mathbf{H}_1$ на этом ребре, и близка к ней. Таким образом, на любом страте Максвелла \mathbf{H}_1 сохраняются как КР-граф W^{num} гамильтониана, так и количество $k(e)$ Π -меток на любом ребре e этого графа, причем Π -метка системы $v \in \mathbf{H}_1$ на любом ребре непрерывно зависит от системы v . Отсюда и из утверждения 4.2.12 нетрудно выводится, что набор Π -меток системы $v \in \mathbf{H}_1$ на всех ребрах графа W^{num} является субмерсией, причем локальное регулярное сечение этой субмерсии в любой точке $v \in \mathbf{H}_1$ (т.е. соответствующее гладкое $k(e)$ -параметрическое семейство систем $v_{\theta_{1,e}, \dots, \theta_{k(e),e}} \in \mathbf{H}_1$, см. определение 4.1.17 (B)) может быть выбрано так, что любая система этого семейства совпадает с системой $v = v_{0, \dots, 0}$ в некоторой окрестности U объединения седловых критических уровней гамильтониана системы v .

Покажем теперь, что грубый Λ -инвариант (соответственно грубый m -инвариант) тоже является субмерсией. Это легко следует из определения 4.2.9. Более того, для любого атома $V = (P, K)^\#$ существует такое локальное регулярное $(n(V) \mp 1)$ -параметрическое сечение данной субмерсии в любой точке $v_V \in \mathbf{H}(P, K)$, что все системы этого семейства совпадают с системой v_V вне малых окрестностей вершин (соответственно малых окрестностей “центров” ребер) графа K . Здесь $n(V)$ — сложность атома V , под “центром” ребра графа K понимается произвольно выбранная внутренняя точка этого ребра.

Итак, указанные локальные регулярные $k(e)$ - и $(n(V) \mp 1)$ -параметрические сечения трех рассматриваемых групп субмерсий (т.е. Π -инварианта и грубых Λ - и m -инвариантов) имеют попарно непересекающиеся носители в поверхности M . Поэтому эти локальные сечения определяют единое гладкое $(\sum_e k(e) + 2 \sum_V n(V))$ -параметрическое семейство систем, где суммы берутся по всем ребрам e и атомам V молекулы гамильтониана системы v . Отсюда выводится, что совокупность всех трех инвариантов — Π -инварианта и грубых Λ - и m -инвариантов — является субмерсией, локальным регулярным сечением которого является

указанное $(\sum_e k(e) + 2 \sum_V n(V))$ -параметрическое семейство систем.

(3) Однако (при условии, что количество седловых точек $n_1 > 1$, т.е. существуют неоткрытые страты Максвелла) при переходе от страта Максвелла к страту Максвелла структура указанного “расслоения” меняется, и разбиение любой связной компоненты пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) = \mathbf{H}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{nondeg}}(M)$ на классы C^0 -сопряжённости не является “расслоением”, т.е. разбиением на множества уровня некоторой субмерсии (см. определение 4.1.17 (В)). Дело в том, что коразмерность классов C^0 -сопряжённости в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ меняется при переходе от любого неоткрытого страта Максвелла к любому примыкающему (определение 2.7.9 (В)) к нему страту Максвелла.

Действительно: рассмотрим любой страт Максвелла в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, образованный системами из $\mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(M)$, имеющими ровно один седловой атом. С учетом предложения 4.3.11 классы C^0 -сопряжённости систем из этого страта Максвелла имеют конечную коразмерность c в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, равную сумме коразмерности $n_1 - 1$ данного страта Максвелла в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ и количества (функционально независимых) меток Болсинова-Фоменко для систем данного страта Максвелла:

$$c = 3n_1 + \partial - 2 - c_0 \in [3n_1, 3n_1 + \partial - 2], \quad (4.46)$$

где n_1 — сложность седлового атома, ∂ — валентность атома, $c_0 \in [0, \partial - 2]$, $c_0 + 1$ равно коразмерности подпространства $C_{\hat{\Lambda}}$ в $H_1(K; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n_1+1}$ (см. предложение 4.3.11). (Более точно: c_0 равно размерности векторного подпространства $\langle [Z_{\pm}] \rangle \cap \langle [O_i] \rangle \subset \langle [Z_{\pm}] \rangle \subseteq H_1(K; \mathbb{R})$, где $\langle [Z_{\pm}] \rangle \simeq \mathbb{R}^{\partial-1}$ есть линейная оболочка классов циклов Z_{\pm} графа K , отвечающих граничным окружностям атома, а $\langle [O_i] \rangle = \langle [O_i] \rangle'_{i=1}$ есть линейная оболочка классов атомных окружностей атома [9].) В любом открытом страте Максвелла, примыкающем к данному страту Максвелла, коразмерность классов C^0 -сопряжённости в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ равна

$$\tilde{c} = n_1 + \partial + g - 1,$$

где через g обозначен род атома, т.е. род поверхности M (это следует из предложения 4.2.4, с учётом того, что количество внутренних ребер графа возмущения равно $n_1 + g - 1$). Поэтому $c - \tilde{c} \geq n_1 + g - 1$.

Итак, если количество седловых критических точек $n_1 > 1$, то разбиение любой связной компоненты пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M) = \mathbf{H}_{n_0, n_1, n_2}^{\text{nondeg}}(M)$ на классы C^0 -сопряжённости не является “расслоением” (в указанном выше смысле).

(4) Тем не менее в разных открытых стратах Максвелла, лежащих в одной и той же связной компоненте пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, классы C^0 -сопряжённости имеют одинаковые коразмерности. Дело в том, что слои в любом открытом страте Максвелла являются совместными множествами уровня функций $\Pi_{e,i}(v)$, являющихся компонентами Π -меток на рёбрах графа W^{num} (см. §4.2.1), а число рёбер графа Кронрода-Риба простой функции Морса (определение 2.5.1 (С)) и набор количеств Π -меток на ребрах графа W^{num} одинаковы у систем, имеющих простые морсовские гамильтонианы и принадлежащих одной связной компоненте пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ (см. п.(3) выше).

4.3.3 Критерий того, что функция от m -инварианта является инвариантом C^0 -сопряжённости, для некоторых атомов малой валентности

Напомним, что в нашем определении полного инварианта Болсинова-Фоменко (см. предложение 4.3.11 и определение 4.3.12) не было дано явного определения m_{Λ} -инварианта Болсинова-Фоменко. Дело в том, что подпространство $C_{\Lambda(v)} \subseteq H_1(K; \mathbb{R})$ не было указано явно, а были указаны лишь оценки его размерности (в предложении 4.3.11) и ортогональный ему 1-цикл (см. замечание 4.3.14).

В этом пункте мы явно опишем m_Λ -инвариант (а потому и полный инвариант) Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности гамильтоновых систем (см. теорему 4.3.16) на некоторых атомах малых валентностей (в том числе для атомов серии \mathcal{V} , т.е. для “вполне бициклических” атомов, включающих неплоские вполне бициклические атомы, на которых мы построим продолжимые m -инварианты, см. теоремы 4.5.6 и 4.5.18).

Определение 4.3.17. (А) Рассмотрим седловой атом $(P, K)^\#$. Пусть Z — ориентированный цикл в ориентированном графе K (не обязательно связный, т.е. он может являться дизъюнктным объединением $s \in \mathbb{N}$ связных ориентированных циклов — допускающих параметризацию $S^1 \rightarrow K$). Цикл Z называется *положительно ориентированным*, если ориентация входящих в него ребер графа K (см. определение 2.4.3 (А) (ii)) согласована с направлением положительного обхода вдоль данного цикла.

(В) Рассмотрим все граничные окружности одного знака. Пусть, для определенности, они положительны. Для каждой положительной граничной окружности атома рассмотрим цикл Z_+ графа K , вдоль которого проходит эта окружность. Такой (положительно ориентированный) цикл Z_+ будем называть *положительным циклом* атома. Аналогично определяются (положительно ориентированные) *отрицательные циклы* атома. Ясно, что связный положительный цикл является пределом фазовой траектории системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$, лежащей на линии уровня $\{F = c + \varepsilon\}$, при $\varepsilon \rightarrow +0$, где $K = F^{-1}(c)$.

Замечание 4.3.18. (А) Набор 1-циклов $[Z_\pm]$, отвечающих всем граничным окружностям атома, линейно зависим в пространстве $H_1(K; \mathbb{R})$ всех 1-циклов графа K . А именно, сумма классов всех положительных циклов атома равна сумме классов всех отрицательных циклов (и равна фундаментальному классу $[K]$ графа K). Других линейных соотношений между классами граничных циклов нет: размерность натянутого на них подпространства (т.е. размерность их линейной оболочки) $\langle [Z_\pm] \rangle$ ровно на единицу меньше числа ∂ граничных окружностей, т.е. $\dim \langle [Z_\pm] \rangle = (\text{валентность атома}) - 1 = \partial - 1$.

(В) Заметим также, что для любого атома выполнено $\text{codim } C_{\hat{\Lambda}} = \dim L_{\hat{\Lambda}} \in [1, \partial - 1]$ в силу (4.44) и предложения 4.3.11 (а).

Введем понятие правильного подграфа на седловом атоме.

Определение 4.3.19. Пусть $K' \subseteq K$ — объединение замкнутых ребер графа K , и пусть $[K']$ — соответствующая 1-цепь. Назовем подграф K' *правильным подграфом* для данного атома, если для любой граничной окружности атома все ребра соответствующего цикла Z_\pm с четными номерами (по отношению к последовательной нумерации ребер вдоль цикла Z_\pm , для любого его ребра в качестве начального) одновременно либо лежат в подграфе K' , либо не лежат в нем, и то же верно для всех нечетных ребер цикла Z_\pm . Отношение $\langle [K'], [Z] \rangle / \langle [K], [Z] \rangle$ назовем *плотностью* правильного подграфа K' на цикле Z графа K . Плотность правильного подграфа K' на любом цикле вида Z_\pm всегда равна 0, 1 или 1/2, и совпадает с $\langle [K'], [Z_\pm] \rangle_{\hat{\Lambda}} / \langle [K], [Z_\pm] \rangle_{\hat{\Lambda}}$ при любом $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$.

Лемма 4.3.20 (примеры C^0 -сопряженных систем на произвольном атоме [145, лемма 6.2]). Пусть $K' \subseteq K$ — *правильный подграф графа K для атома $(P, K)^\#$* . Тогда:

(А) *Ростки любых двух систем v, v' на данном атоме, для которых значения Λ -инварианта совпадают, а разность $[m(v)] - [m(v')]$ грубых m -меток пропорциональна 1-коциклу $\Lambda(v) \cdot [K']$, C^0 -сопряжены (определение 4.1.18). Другими словами, для любого элемента $\hat{\Lambda} = (\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ из предложения 4.3.11 ортогонально 1-цепи $[K'] \in C_1(K; \mathbb{R})$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$ из обозначения 4.3.3 (т.е. подпространство $L_{\hat{\Lambda}}$ содержит класс 1-коцепи $\mathbf{G}_{\hat{\Lambda}}([K']) \in C^1(K; \mathbb{R})$, т.е. 1-коцикл $\mathbf{G}_{\hat{\Lambda}}([K']) \bmod B^1(K; \mathbb{R}) \in H^1(K; \mathbb{R})$).*

(В) Пусть дано семейство 1-циклов $z_{\hat{\Lambda}} \in H_1(K; \mathbb{R})$, зависящих от параметра $\mathbb{R}\hat{\Lambda}$, где $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Рассмотрим \mathbb{R} -значную функцию $I(v) := \langle [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle$, $v \in \mathbf{H}(P, K)$, от Λ -инварианта и грубого m -инварианта на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$. Если функция $I = I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$, то $\langle [K'], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любого значения $\hat{\Lambda}$.

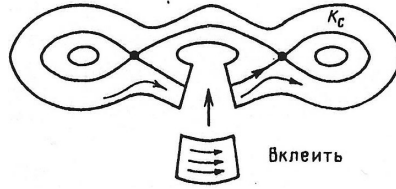


Рис. 4.4. Операция вклейки-вырезания ленточек

Доказательство. (А) Эта лемма легко следует из работы [9]. Дело в том, что для любой гамильтоновой системы v на атоме ее класс C^0 -сопряженности не изменится, если к этой системе применить операцию “вклейки-вырезания ленточек”, отвечающую 1-коцепи $c\mathbf{G}_{\Lambda(v)}([K']) \in C^1(K; \mathbb{R})$ (см. (4.40) и рис. 4.4). Здесь $K' \subseteq K$ — любой правильный подграф, $c \in \mathbb{R}$. Также класс C^0 -сопряженности системы не изменится, если изменить крест в одной вершине атома (с помощью операции переклейки ленточек для креста данной вершины), а потом применить обратную операцию переклейки ленточек, отвечающую 1-когранице данной вершины. Если $[m(v)] - [m(v')] = c\Lambda(v) \cdot [K']$, то указанными операциями можно получить систему $v_1 \in \mathbf{H}(P, K)$, C^0 -сопряженную системе v , и такую, что $m(v_1) = m(v')$ и $\mathbb{R}\Lambda(v_1) = \mathbb{R}\Lambda(v')$. Отсюда и из предложения 4.3.11 сразу получаем C^0 -сопряженность систем v_1 и v' , а потому систем v и v' .

(В) следует из (А). □

Заметим, что все правильные подграфы графа K для атома образуют алгебру, т.е. множество таких подграфов замкнуто относительно операций объединения, пересечения и дополнения.

Следующее утверждение уточняет лемму 4.3.20 в случае атомов, имеющих “достаточное количество” положительно ориентированных циклов, являющихся правильными подграфами для данного атома.

Следствие 4.3.21. Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом сложности n и валентности ∂ . Предположим, что $Z_1, \dots, Z_{\partial-1}$ — положительно ориентированные циклы ориентированного графа K , классы которых в $H_1(K; \mathbb{R})$ линейно независимы (например, все кроме одного циклы графа K , отвечающие граничным окружностям атома, т.е. все кроме одного положительные и отрицательные циклы Z_{\pm} этого атома, классы которых линейно независимы ввиду замечания 4.3.18 (А)). Предположим, что любой из циклов $Z_1, \dots, Z_{\partial-1}$ является правильным подграфом графа K для данного атома (определение 4.3.19). Тогда:

(А) Для любого значения $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ грубого Λ -инварианта подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ из предложения 4.3.11 имеет коразмерность $\partial - 1$ и совпадает с ортогональным дополнением к линейной оболочке 1-циклов $[Z_j]$, $1 \leq j \leq \partial - 1$, в пространстве всех 1-циклов графа K относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$ (обозначение 4.3.3). Другими словами, подпространство $L_{\hat{\Lambda}} = \text{Ann } C_{\hat{\Lambda}} \subseteq H^1(K; \mathbb{R})$ имеет размерность $\partial - 1$ и порождено 1-коциклами вида $\hat{\Lambda} \cdot [Z_j]$, $1 \leq j \leq \partial - 1$ (см. обозначение 4.3.3).

(В) Пусть дано семейство 1-циклов $z_{\hat{\Lambda}} \in H_1(K; \mathbb{R})$, зависящих от параметра $\mathbb{R}\hat{\Lambda}$, где $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Рассмотрим \mathbb{R} -значную функцию $I(v) := \langle [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle$, $v \in \mathbf{H}(P, K)$, от Λ -инварианта и грубого m -инварианта на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$. Функция $I = I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$ тогда и только тогда, когда $\langle [Z_j], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любых $j = 1, \dots, \partial - 1$ и значения $\hat{\Lambda}$.

Доказательство. (А) Для любого $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ обозначим через $\langle [Z_j] \rangle_{\hat{\Lambda}}^\perp \subseteq H_1(K; \mathbb{R})$ ортогональное дополнение к линейной оболочке $\langle [Z_j] \rangle = \langle [Z_j] \rangle_{j=1}^{\partial-1}$ 1-циклов $[Z_j]$ в пространстве $H_1(K; \mathbb{R})$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$. В силу леммы 4.3.20 подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subseteq \langle [Z_j] \rangle_{\hat{\Lambda}}^\perp$, откуда $\text{codim } C_{\hat{\Lambda}} \geq \text{codim } \langle [Z_j] \rangle_{\hat{\Lambda}}^\perp = \dim \langle [Z_j] \rangle = \partial - 1$. Но согласно замечанию 4.3.18 (В) $\text{codim } C_{\hat{\Lambda}} = \dim L_{\hat{\Lambda}} \leq \partial - 1$. Поэтому $\text{codim } C_{\hat{\Lambda}} = \text{codim } \langle [Z_j] \rangle_{\hat{\Lambda}}^\perp = \partial - 1$, и $C_{\hat{\Lambda}} = \langle [Z_j] \rangle_{\hat{\Lambda}}^\perp$.

(В) Предположим, что $\langle [Z_j], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любых $\hat{\Lambda}$ и $j = 1, \dots, \partial - 1$, и что системы $v, v' \in \mathbf{H}(P, K)$ C^0 -сопряжены. По предложению 4.3.11 Болсинова-Фоменко их Λ -метки совпадают, а разность их грубых m -меток имеет вид $[m(v)] - [m(v')] \in \text{Ann } C_{\Lambda(v)} = L_{\Lambda(v)}$, т.е. с учетом п.(А) является линейной комбинацией 1-коциклов $\Lambda(v) \cdot [Z_j]$, $1 \leq j \leq \partial - 1$. Поэтому $I(v) - I(v') = \langle [m(v)] - [m(v')], z_{\Lambda(v)} \rangle = \sum_{j=1}^{\partial-1} c_j \langle [Z_j], z_{\Lambda(v)} \rangle_{\Lambda(v)} = 0$, т.е. $I = I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности систем на атоме. Обратно: пусть $I = I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности систем на атоме и $j \in \{1, \dots, \partial - 1\}$. Фиксируем систему $v \in \mathbf{H}(P, K)$ и применим к ней операцию “вклейки-вырезания ленточек”, отвечающую 1-коцепи $\mathbf{G}_{\Lambda(v)}([Z_j]) \in C^1(K; \mathbb{R})$ (см. (4.40)). Обозначим полученную систему через $v_j \in \mathbf{H}(P, K)$. Так как по построению $m(v_j) - m(v) = \mathbf{G}_{\Lambda(v)}([Z_j])$, то по лемме 4.3.20 системы v и v_j C^0 -сопряжены. Поэтому $0 = I(v_j) - I(v) = \langle [m(v_j)] - [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle = \langle [Z_j], z_{\Lambda(v)} \rangle_{\Lambda(v)}$, что и требовалось. \square

Замечание 4.3.22. Аналог следствия 4.3.21 верен в более общем случае: когда количество циклов Z_j равно $c_0 + 1$ вместо $\partial - 1$, где $c_0 = \dim(\langle [Z_\pm] \rangle \cap \langle [O_i] \rangle) \in [0, \partial - 2]$ как в (4.46). Доказательство получается дословным повторением доказательства следствия 4.3.21 с учетом неравенства $\dim L_{\hat{\Lambda}} \leq c_0 + 1$, вытекающего из равенства $\text{codim } C_{\hat{\Lambda}} = \dim L_{\hat{\Lambda}} = c_0 + 1$ (см. (4.46) или [9]).

В примерах 4.3.25 ниже мы покажем, что для любого атома существуют правильные подграфы (а потому применима лемма 4.3.20), и приведем важные примеры атомов, для которых все циклы графа K , отвечающие граничным окружностям атома, являются правильными подграфами (а потому применимо следствие 4.3.21).

Пусть Z — ориентированный цикл (не обязательно связный, т.е. он может являться дизъюнктым объединением $s \in \mathbb{N}$ связных ориентированных циклов) в ориентированном графе K с произвольной параметризацией $z = z(t)$, где $t \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \{1, \dots, s\}$ — параметр на окружности (или дизъюнктом объединении s окружностей).

Определение 4.3.23. Цикл Z называется *простым*, если он не имеет самопересечений. Цикл Z будем называть *положительным по отношению к его вершине $x_i = z(t_0)$* , если вектора скорости $dz/dt(t_0 + 0)$ и $dz/dt(t_0 - 0)$ образуют положительный репер, т.е. цикл Z поворачивает в точке x_i направо. В противном случае цикл Z будем называть *отрицательным по отношению к этой вершине*.

Если цикл Z является простым, то число его ребер равно числу его вершин и не превосходит n , где n — сложность атома. Рассмотрим малую окрестность вершины положительно ориентированного (определение 4.3.17 (А)) цикла, положительного по отношению к этой вершине. Тогда в данной окрестности цикл является пределом траектории системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$, лежащей на линии уровня $\{F = c + \varepsilon\}$, при $\varepsilon \rightarrow +0$, где $K = F^{-1}(c)$.

Определение 4.3.24. Рассмотрим атом $(P, K)^\#$. Пусть существуют два простых (необязательно связанных) положительно ориентированных (определение 4.3.17 (А)) цикла Z_1 и Z_2 в ориентированном графе K , удовлетворяющих следующим двум условиям.

1) $K = Z_1 \cup Z_2$ (т.е. имеет место равенство 1-циклов $[K] = [Z_1] + [Z_2]$ в $H_1(K)$).

2) Циклы Z_1 и Z_2 одновременно положительно (соотв. отрицательно) по отношению ко всем вершинам атома.

Тогда атом назовем *положительно* (соотв. *отрицательно*) *бициклическим атомом*. Атом назовем *знакоопределенно бициклическим*, если он является либо положительно бициклическим, либо отрицательно бициклическим (ср. с определением 4.5.4 бициклического атома ниже).

Простота циклов Z_1, Z_2 из определения 4.3.24 означает (как и в случае бициклических атомов, см. определение 4.5.4), что каждый из этих циклов является *гамильтоновым*, т.е. проходит через каждую вершину атома ровно по одному разу. Отличие от бициклических атомов состоит в том, что во-первых, простые циклы Z_1 и Z_2 графа K должны быть одновременно положительными либо одновременно отрицательными по отношению ко всем вершинам атома, а во-вторых, любой из этих двух циклов может быть несвязным.

Примеры 4.3.25 (циклы графа K , являющиеся правильными подграфами для атома). (i') Для любого седлового атома $(P, K)^\#$ граф K является правильным подграфом (и является объединением всех положительных циклов Z_+). Его плотность на любом цикле Z_\pm равна 1. В частности, для любого атома применима лемма 4.3.20 к правильному подграфу $K' = K$ и верны все ее утверждения для $K' = K$.

(i) Если седловой атом имеет валентность 2, то для него существует $1 = \partial - 1$ положительно ориентированный цикл Z_+ (соотв. Z_-), являющийся правильным подграфом и класс которого в $H_1(K; \mathbb{R})$ ненулевой. В частности, к таким атомам применимо следствие 4.3.21 и верны все его утверждения для набора из одного ($1 = \partial - 1$) цикла Z_+ (соотв. Z_-).

(ii') Для любого положительно бициклического атома (определение 4.3.24) соответствующие два цикла Z_1 и Z_2 являются правильными подграфами. Их плотность на любом положительном цикле Z_+ равна 0 или 1, а на любом отрицательном цикле Z_- плотность равна 1/2. Аналогичное верно для отрицательно бициклических атомов. В частности, для любого положительно (или отрицательно) бициклического атома применима лемма 4.3.20 к указанной паре правильных подграфов Z_1, Z_2 и верны все ее утверждения для Z_1, Z_2 .

(ii) Если седловой атом либо имеет валентность 3 и является положительно (или отрицательно бициклическим), либо имеет валентность 4 и является положительно и отрицательно бициклическим, то все положительно ориентированные циклы Z_\pm графа K , отвечающие граничным окружностям атома, являются правильными подграфами. Поэтому для таких атомов существуют $\partial - 1$ положительно ориентированных циклов Z_\pm , являющихся правильными подграфами и классы которых в $H_1(K; \mathbb{R})$ линейно независимы. В частности, к таким атомам применимо следствие 4.3.21 и верны все его утверждения для набора из $\partial - 1$ циклов Z_\pm кроме одного.

Замечание 4.3.26. Можно показать, что

(а) седловой атом является положительно (соотв. отрицательно) бициклическим в том и только том случае, когда все его атомные окружности можно ориентировать так, что все ребра графа K , на которых ориентации атомных окружностей и графа K согласованы, образуют положительный (соотв. отрицательный) цикл графа K по отношению ко всем своим вершинам в атоме;

(б) седловой атом является одновременно положительно и отрицательно бициклическим в том и только том случае, когда все его атомные окружности простые и разбиваются на две группы O^+ и O^- , такие, что любые две пересекающиеся атомные окружности принадлежат разным группам и для некоторого набора ориентаций атомных окружностей выполнено

следующее: знаки индексов пересечения любой атомной окружности с другими атомными окружностями чередуются вдоль этой окружности.

В самом деле, разность классов положительных циклов Z_1 и Z_2 в $H_1(K; \mathbb{R})$ равна сумме классов атомных окружностей, взятых с подходящими ориентациями: $[Z_1] - [Z_2] = \sum [O_i]$. Тогда разность классов отрицательных циклов Z'_1 и Z'_2 имеет вид $[Z'_1] - [Z'_2] = \sum \pm [O_i]$. Легко видеть, что любые две пересекающиеся окружности входят во вторую сумму с разными знаками. В частности, атомные окружности не имеют самопересечений. Условие чередование знаков индексов пересечения вдоль любой атомной окружности означает, что положительно ориентированные циклы Z_1 и Z_2 оба положительны или оба отрицательны.

Заметим, что каждый цикл Z_1 и Z_2 из определения 4.3.24 целиком составлен из положительных (соотв. отрицательных) циклов. Итак, у положительно (соотв. отрицательно) бициклического атома обязательно есть по меньшей мере две положительные (соотв. отрицательные) граничные окружности. В частности, валентность знакоопределенно бициклического атома (т.е. степень вершины графа Кронрода-Риба W , отвечающей этому атому) не меньше трех.

В качестве итога настоящего параграфа сформулируем в виде отдельной теоремы 4.3.27 свойства атомов и их правильных подграфов из примеров 4.3.25, упомянутые в этих примерах.

Рассмотрим любой седловой атом $(P, K)^\#$ сложности n и валентности 2, 3 или 4. Рассмотрим для произвольного значения $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ грубого Λ -инварианта соответствующее подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ в пространстве всех 1-циклов графа K , см. предложение 4.3.11. Пусть $d := \dim C_{\hat{\Lambda}}$. Напомним (см. предложение 4.3.11), что для любого базиса $z_{1, \hat{\Lambda}}, \dots, z_{d, \hat{\Lambda}}$ подпространства $C_{\hat{\Lambda}}$, зависящего от параметра $\mathbb{R}\hat{\Lambda}$, отношение $\mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ и инварианты вида $v \mapsto \langle [m(v)], z_{i, \Lambda(v)} \rangle$, $1 \leq i \leq d$, образуют полный набор инвариантов C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме.

Пункт (А') следующей теоремы совпадает с наблюдением из замечания 4.3.14. Три остальных пункта являются уточнениями п.(А') в случае атомов специального вида, а именно: п.(А) — в случае атомов валентности 2, п.(Б') — в случае знакоопределенно бициклических атомов, а п.(Б) является уточнением п.(Б') в случае атомов валентности $\partial = 3$, а также положительно и одновременно отрицательно бициклических атомов валентности $\partial = 4$.

Теорема 4.3.27 (описание всех пар C^0 -сопряженных ростков гамильтоновых систем на атомах валентности 2 и некоторых атомах валентностей 3 и 4 [145, теорема 6.1]). Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом сложности n , $z_{\hat{\Lambda}} \in H_1(K; \mathbb{R})$ — семейство 1-циклов, зависящих от параметра $\mathbb{R}\hat{\Lambda}$, где $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Рассмотрим \mathbb{R} -значную функцию $I(v) := \langle [m(v)], z_{\Lambda(v)} \rangle$, $v \in \mathbf{H}(P, K)$.

(А') Предположим, что функция $I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$. Тогда $\langle z_{\hat{\Lambda}}, [K] \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любого значения $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, где $[K] \in H_1(K; \mathbb{R})$ — фундаментальный класс графа K . Другими словами, для любого значения $\hat{\Lambda}$ грубого Λ -инварианта подпространство $L_{\hat{\Lambda}} \subseteq H^1(K; \mathbb{R})$ содержит 1-коцикл $\hat{\Lambda} \cdot [K]$ (см. (4.44) и обозначение 4.3.3).

(А) Пусть валентность атома $(P, K)^\#$ минимальна, т.е. равна двум. Тогда ростки двух гамильтоновых систем v, v' на этом атоме C^0 -сопряжены (определение 4.1.18) в том и только том случае, когда у них совпадают Λ -метки и совпадают m -метки (см. (4.39) и (4.42)), т.е. когда $\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\Lambda(v')$ и разность $[m(v)] - [m(v')]$ грубых m -меток пропорциональна 1-коциклу $\Lambda(v) \cdot [K] \in H^1(K; \mathbb{R})$ (см. обозначение 4.3.3).

Другими словами, для любого значения $\hat{\Lambda}$ грубого Λ -инварианта подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subseteq H_1(K; \mathbb{R})$ совпадает с ортогональным дополнением к 1-циклу $[K] \in H_1(K; \mathbb{R})$ в пространстве $H_1(K; \mathbb{R})$ всех циклов графа K относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$. Подпространство $L_{\hat{\Lambda}} \subset H^1(K; \mathbb{R})$ одномерно и порождено 1-коциклом $\Lambda \cdot [K]$ (см. обозначение

4.3.3). Функция $I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$ тогда и только тогда, когда $\langle [K], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любого значения $\hat{\Lambda}$.

(Б') Пусть $(P, K)^\#$ — знакоопределенно бициклический атом. Пусть Z_1, Z_2 — положительно ориентированные циклы графа K из определения 4.3.24 (отвечающие положительным или отрицательным граничным окружностям данного атома), $[Z_1] + [Z_2] = [K]$ — фундаментальный класс графа K . Если функция $I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$, то $\langle [Z_j], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любых $j = 1, 2$ и значения $\hat{\Lambda}$. Другими словами, для любого значения $\hat{\Lambda}$ грубого Λ -инварианта подпространство $L_{\hat{\Lambda}} \subset H^1(K; \mathbb{R})$ содержит 1-коциклы $\hat{\Lambda} \cdot [Z_j]$, $j = 1, 2$ (см. обозначение 4.3.3).

(Б) Пусть $(P, K)^\#$ — либо знакоопределенно бициклический атом валентности $\partial = 3$, либо положительно и одновременно отрицательно бициклический атом валентности $\partial = 4$. Пусть $\{Z_1, \dots, Z_{\partial}\} = \{Z_{\pm}\}$ — набор всех (трех или четырех) положительно ориентированных циклов графа K , отвечающих положительным и отрицательным граничным окружностям данного атома (с единственным линейным соотношением $\sum [Z_+] = \sum [Z_-]$). Тогда ростки двух гамильтоновых систем v, v' на этом атоме C^0 -сопряжены в том и только том случае, когда $\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\Lambda(v')$ и разность $[m(v)] - [m(v')]$ грубых m -меток является линейной комбинацией 1-коциклов $\Lambda(v) \cdot [Z_j] \in H^1(K; \mathbb{R})$, $j = 1, \dots, \partial$.

Другими словами, для любого значения $\hat{\Lambda}$ грубого Λ -инварианта подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ совпадает с ортогональным дополнением к линейной оболочке 1-циклов $[Z_{\pm}]$ в пространстве всех 1-циклов графа K относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\Lambda}}$. Подпространство $L_{\hat{\Lambda}} \subseteq H^1(K; \mathbb{R})$ имеет размерность $\partial - 1$ и порождено 1-коциклами вида $\hat{\Lambda} \cdot [Z_{\pm}]$ (см. обозначение 4.3.3). Функция $I(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме $(P, K)^\#$ тогда и только тогда, когда $\langle [Z_j], z_{\hat{\Lambda}} \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$ для любых $j = 1, \dots, \partial$ и значения $\hat{\Lambda}$.

Доказательство. Как сказано в примерах 4.3.25, пп.(А') и (Б') следуют из леммы 4.3.20, а пп.(А) и (Б) — из следствия 4.3.21. \square

Теорему 4.3.27 (А, Б) мы применим ниже для доказательства теоремы 4.5.21 и ее следствия.

Важные примеры \mathbb{R} -значных функций от Λ - и m -инвариантов, являющихся или не являющихся инвариантами C^0 -сопряженности

В качестве важных примеров рассмотрим следующие функции от грубого Λ -инварианта и m -инварианта. Их важность состоит в том, что именно такими функциями являются обнаруженные нами три серии продолжимых инвариантов, построенные в §4.5 ниже.

Фиксируем седловой атом $(P, K)^\#$ сложности n . Пусть O_1, \dots, O_ν — все атомные окружности этого атома. Для любой гамильтоновой системы $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ на этом атоме рассмотрим ее грубую Λ -метку (4.29), т.е. набор чисел $\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v) > 0$ в вершинах атома. В качестве функций от грубого Λ -инварианта и m -инварианта рассмотрим следующие инварианты гамильтоновых систем на этом атоме: инварианты вида $\Lambda_j(v) : \Lambda_{j'}(v)$, $1 \leq j, j' \leq n$ (т.е. компоненты Λ -метки), и сумму

$$B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$$

инвариантов $A_i(v)$, отвечающих ориентированным атомным окружностям (для некоторого набора ориентаций атомных окружностей). Согласно следствию 4.3.8, грубый Λ -инвариант $\Lambda_j(v)$ и функция $B(v)$ являются инвариантами C^1 -сопряженности систем на данном атоме. Согласно предложению 4.3.2 или теореме 4.3.16, Λ -инвариант (а потому и $\Lambda_j(v) : \Lambda_{j'}(v)$) является даже инвариантом C^0 -сопряженности систем на данном атоме.

Так как оба инварианта $\Lambda_j(v) : \Lambda_{j'}(v)$ и $B(v)$ являются относительно–продолжимыми инвариантами (по отношению к подходящим классам возмущений систем на подходящих атомах, см. утверждение 4.2.12 (а) и теоремы 4.5.6 и 4.5.18 ниже), то в связи с вопросом (Q4) возникает естественный вопрос:

(Q4') Является ли инвариант $B = B(v)$ C^1 –сопряженности инвариантом C^0 –сопряженности систем на данном атоме? (Теоремы 4.3.27 (А, Б), 4.5.6 (С) и 4.5.21, следствие 4.3.30.)

Оказывается, что ответ на вопрос (Q4') может быть как положительным, так и отрицательным (теорема 4.3.27 (А, Б) и следствие 4.3.30), даже при условии относительной продолжимости инварианта $B(v)$ по отношению к некоторому классу простых возмущений (теоремы 4.5.6 и 4.5.21).

Замечание 4.3.28. Отметим, что для знакоопределенно бициклических атомов (как и для бициклических) сумма классов положительно ориентированных циклов Z_1 и Z_2 равна $[K]$, а их разность равна сумме классов всех атомных окружностей $[O_1] + \dots + [O_\nu]$ с подходящим образом выбранными ориентациями. Поэтому в теореме 4.3.27 (Б), в случае валентности три, подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ совпадает с ортогональным дополнением в пространстве всех 1–циклов графа K к двум 1–циклам: фундаментальному классу $[K]$ графа K и сумме $[O_1] + \dots + [O_\nu]$ классов всех атомных окружностей атома. В случае атома валентности 4 это подпространство совпадает с ортогональным дополнением к трем 1–циклам: фундаментальному классу $[K]$ и суммам $\sum_{O_i \subseteq O^+} [O_i]$ и $\sum_{O_i \subseteq O^-} [O_i]$ классов атомных окружностей по группам O^+ и O^- , описанным в замечании 4.3.26.

Выводы 4.3.29. Для любого седлового атома рассмотрим любую атомную окружность O_i и любую нетривиальную линейную комбинацию

$$z := \lambda_1 [O_1] + \dots + \lambda_\nu [O_\nu]$$

классов атомных окружностей, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Рассмотрим \mathbb{R} –значные функции

$$A_i(v) := \langle [m(v)], [O_i] \rangle, \quad B(v) := \langle [m(v)], z \rangle = \lambda_1 A_1(v) + \dots + \lambda_\nu A_\nu(v)$$

от Λ – и m –инвариантов на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$. Тогда:

1) Для атомов валентности два, для любой атомной окружности O_i (и, следовательно, для любой линейной комбинации классов атомных окружностей вида z как выше) функция $A_i(v)$ (соотв. $B(v)$) **является инвариантом C^0 –сопряженности** гамильтоновых систем на этом атоме. Действительно, это следует из теоремы 4.3.27 (А) и равенства $\langle [K], [O_i] \rangle_{\hat{\Lambda}} = 0$. Последнее равенство следует из того, что вклад k –го ребра окружности O_i в значение $\langle [K], [O_i] \rangle_{\hat{\Lambda}}$ равен полусумме $(-1)^k (\hat{\Lambda}_{j_{k-1}} + \hat{\Lambda}_{j_k})/2$ меток в концах этого ребра, где j_1, \dots, j_{2l} – последовательность номеров вершин атома вдоль окружности O_i , поэтому вклад k –ой вершины окружности O_i равен $\hat{\Lambda}_{j_k}/2 - \hat{\Lambda}_{j_{k-1}}/2 = 0$.

2) Для знакоопределенно бициклических атомов, для любой атомной окружности O_i и для любой нетривиальной линейной комбинации z классов атомных окружностей такого атома с постоянными коэффициентами (не зависящими от $\hat{\Lambda}$) соответствующие функции $A_i(v)$ и $B(v)$ **не являются инвариантами C^0 –сопряженности** гамильтоновых систем на этом атоме. Действительно, это следует из теоремы 4.3.27 (Б') и неравенств

$$\langle [Z_+], [O_i] \rangle_{\hat{\Lambda}} \neq 0, \quad \langle [Z_+], z \rangle_{\hat{\Lambda}}^2 + \langle [Z_-], z \rangle_{\hat{\Lambda}}^2 > 0, \quad (4.47)$$

где цикл Z_+ (соотв. Z_-) – это один из двух положительных (соотв. отрицательных) положительно ориентированных циклов графа K из определения 4.3.24. Первое неравенство в (4.47) следует из того, что для положительно бициклического атома с соответствующей парой положительных циклов, классы которых суть $[Z_+]$ и $[K] - [Z_+]$, для любой его атомной окружности O_i , где ориентации атомных окружностей выбраны так, что $[Z_+] - ([K] - [Z_+]) = [O_1] + \dots + [O_\nu]$, имеем $\langle [Z_+], [O_i] \rangle_{\hat{\Lambda}} > 0$, так как значение $\langle [Z_+], [O_i] \rangle_{\hat{\Lambda}}$ равно полусумме

$(\widehat{\Lambda}_{j_1} + \dots + \widehat{\Lambda}_{j_{2l_i}})/2$ меток во всех вершинах окружности O_i , так как цикл Z_+ содержит все четные ребра окружности O_i и не содержит все нечетные ребра окружности O_i (для циклического порядка ребер вдоль окружности, с подходящей начальной вершиной). Здесь $2l_i$ означает длину атомной окружности O_i . Следовательно, для любой нетривиальной линейной комбинации z классов атомных окружностей O_i значение $\langle [Z_+], z \rangle_{\widehat{\Lambda}}$ есть нетривиальная линейная комбинация выражений вида $(\widehat{\Lambda}_{j_1} + \dots + \widehat{\Lambda}_{j_{2l_i}})/2$, где каждое $\widehat{\Lambda}_j$ входит максимум в два таких выражения (так как через каждую вершину атома проходит максимум две атомные окружности). Но равенство нулю последней линейной комбинации (при любых $\widehat{\Lambda}_1, \dots, \widehat{\Lambda}_n > 0$) возможно только в том случае, когда атомные окружности можно разбить на две группы O^+ и O^- как в замечании 4.3.26 (т.е. атом является также отрицательно бициклическим, см. замечание 4.3.26), и z пропорционально $\sum_{O_i \subseteq O^+} [O_i] - \sum_{O_i \subseteq O^-} [O_i] = [Z_-] - ([K] - [Z_-])$ с ненулевым коэффициентом пропорциональности, однако в этом случае значение $\langle [Z_-], z \rangle_{\widehat{\Lambda}}$ пропорционально $\langle [Z_-], [Z_-] - ([K] - [Z_-]) \rangle_{\widehat{\Lambda}} = \langle [Z_-], [Z_-] \rangle_{\widehat{\Lambda}} > 0$ с тем же коэффициентом пропорциональности и потому отлично от нуля. Поэтому верно второе неравенство в (4.47).

Отсюда мы сразу получаем в следующем следствии 4.3.30 ответ на вопрос (Q4') для некоторых атомов. А именно, для этих атомов мы выясняем, являются ли инварианты C^1 -сопряженности $A_i(v)$ и их суммы $B(v)$ инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на этих атомах. А именно, следующее утверждение показывает, что ответ на этот вопрос может быть как положительным, так и отрицательным (в зависимости от атома).

Фиксируем атом. Рассмотрим его атомные окружности O_i и соответствующие инварианты $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$ C^1 -сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме, $1 \leq i \leq \nu$.

Следствие 4.3.30 (о связи m -инвариантов $A_i(v)$ C^1 -сопряженности с инвариантами C^0 -сопряженности систем на некоторых атомах, включая “вполне бициклические” атомы). (А) *Рассмотрим любой атом валентности 2, т.е. имеющий ровно одну положительную и ровно одну отрицательную граничную окружности. Для каждой атомной окружности O_i рассмотрим соответствующий инвариант C^1 -сопряженности $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$ систем на данном атоме, $1 \leq i \leq \nu$. Тогда эти инварианты функционально независимы и являются инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на этом атоме. В частности, любой инвариант вида $B(v) = A_1(v) \pm \dots \pm A_\nu(v)$ (в том числе любой относительно-продолжимый m -инвариант в случае бициклического атома, см. теорему 4.5.6) является инвариантом C^0 -сопряженности систем на атоме.*

(Б) *Рассмотрим любой знакоопределенно бициклический атом. Тогда все C^1 -инварианты $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$, $1 \leq i \leq \nu$, и любая их нетривиальная линейная комбинация с постоянными (т.е. не зависящими от $\Lambda(v)$) коэффициентами, в том числе любой инвариант вида $B(v) = A_1(v) \pm \dots \pm A_\nu(v)$ (в том числе любой относительно-продолжимый m -инвариант в случае бициклического атома, см. теорему 4.5.6) не являются инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на этом атоме. \square*

4.4 Полный относительно-продолжимый инвариант для тривиальных или простых возмущений систем с плоскими атомами

Здесь приводятся две серии седловых атомов и классов возмущений систем на них. Дается полное описание относительно-продолжимых инвариантов по отношению к этим классам возмущений (определение 4.1.22), которое легко выводится из классификационной теоремы 4.3.16 Болсинова-Фоменко. В этих случаях мы получим “тривиальные” полные решения всех вопросов устойчивости и продолжимости (Q1)–(Q4), (Q1'), (Q2').

4.4.1 Тривиальные возмущения (непрерывные инварианты сопряженности на страте Максвелла)

Отметим, что в случае класса *тривиальных возмущений* (4.17) вопрос о нахождении продолжимых инвариантов уже фактически решен. В самом деле, согласно утверждению 2.5.2, при малых тривиальных возмущениях гамильтониана всегда сохраняется класс послылой эквивалентности гамильтониана. С учетом открытости пространства $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ невырожденных гамильтоновых систем, при таком возмущении невырожденной системы сохраняется невырожденность системы. Отсюда нетрудно показать, что возмущенная система принадлежит тому же страту Максвелла, что и невозмущенная. Таким образом, тривиальные возмущения не выводят из страта Максвелла (т.е. из связной компоненты класса траекторной эквивалентности в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$).

Но мы уже показали, что любой страт Максвелла $\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ является гладким подмногообразием конечной коразмерности в $\mathbf{H}(M)$ (см. свойство (1) из §4.3.2), и что ограничение инварианта Болсинова-Фоменко (являющегося полным инвариантом C^0 -сопряженности согласно теореме 4.3.16) на любой страт Максвелла $\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ является субмерсией (см. определение 4.1.17 и свойство (2) из §4.3.2), т.е. “расслоением”. Обозначим эту субмерсию через

$$BF|_{\mathbf{H}_1} = (\Pi, \mathbb{R}\Lambda, m_\Lambda)|_{\mathbf{H}_1} : \mathbf{H}_1 \rightarrow U \simeq \mathbb{R}^\ell$$

для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности считаем, что $BF|_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{H}_1) = U$, т.е. субмерсия сюръективна.

Предложение 4.4.1. *Пусть \mathbf{H}_1 — любой страт Максвелла (т.е. связная компонента класса траекторной эквивалентности) в $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. Для класса тривиальных возмущений $\tilde{v} \in \mathbf{H}_1$ систем $v \in \mathbf{H}_1$ непрерывные (соотв. гладкие) функции от инвариантов $BF|_{\mathbf{H}_1}$ Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности, и только они являются относительно-продолжимыми (соотв. гладкими относительно-продолжимыми) инвариантами (определение 4.1.22). Все эти функции непрерывны на \mathbf{H}_1 относительно C^r -топологии при любом $r \geq 3$. В частности, для них выполнен предельный переход (4.18) в смысле C^r -топологии на $\mathbf{H}(P)$ при любом $r \geq 3$.*

Доказательство. Предположим, что $I : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ — относительно-продолжимый инвариант на \mathbf{H}_1 по отношению к классу тривиальных возмущений. Оба инварианта I и \tilde{I} из определения 4.1.22 определены на рассматриваемом страте Максвелла \mathbf{H}_1 . Так как функционал \tilde{I} является инвариантом C^0 -сопряженности систем на данном страте Максвелла, то существует функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{I} = f \circ BF|_{\mathbf{H}_1}$.

Так как $BF|_{\mathbf{H}_1}$ — субмерсия (см. выше), то для любой системы $v \in \mathbf{H}_1$ существует гладкое семейство систем $\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell} \in S$ при $\theta_1^2 + \dots + \theta_\ell^2 < \varepsilon^2$ такое, что $\tilde{v}_{0, \dots, 0} = v$ и отображение

$$\psi : (\theta_1, \dots, \theta_\ell) \mapsto BF|_S(\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell})$$

является диффеоморфизмом открытого диска радиуса ε на некоторое открытое подмножество $U_0 \subseteq U$ (в частности, $\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell} \neq v$ при $0 < \theta_1^2 + \dots + \theta_\ell^2 < \varepsilon^2$). Так как семейство $\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}$ гладкое, а функция \tilde{I} непрерывна относительно C^∞ -топологии, то ввиду свойства непрерывной продолжимости (4.18) при $\tilde{v} \in \mathbf{H}_1$ имеем

$$\tilde{I}(v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tilde{I}(\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}) \stackrel{(4.18)}{=} I(v).$$

Значит, $\tilde{I} = I$, т.е. продолжимый инвариант I имеет требуемый вид $I = f \circ BF|_{\mathbf{H}_1}$. Осталось показать, что если инвариант I гладкий, то функция f гладкая. Так как I гладкая, то функция

$$f \circ \psi : (\theta_1, \dots, \theta_\ell) \mapsto f \circ \psi(\theta_1, \dots, \theta_\ell) = f \circ BF|_{\mathbf{H}_1}(\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}) = I(\tilde{v}_{\theta_1, \dots, \theta_\ell})$$

гладкая. Поэтому $f|_{U_0} = (f \circ \psi) \circ \psi^{-1} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ тоже гладкая, т.е. f гладкая в окрестности U_0 точки $BF|_{\mathbf{H}_1}(v)$ в U . Так как система $v \in \mathbf{H}_1$ любая, то $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ гладкая всюду.

Обратно: пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — любая непрерывная (соотв. гладкая) функция. Тогда функция $I := f \circ BF|_{\mathbf{H}_1}$ непрерывна (соотв. гладкая), непрерывна относительно C^r -топологии при любом $r \geq 3$ (согласно предложению 4.3.5), и является инвариантом C^0 -сопряженности (а потому и инвариантом симплектической сопряженности) систем на \mathbf{H}_1 . Поэтому инвариант I является относительно-продолжимым (соотв. гладким относительно-продолжимым) относительно тривиальных возмущений для $\tilde{I} = I$ и непрерывен. \square

Системы с гамильтонианом — простой функцией Морса (непрерывные инварианты сопряженности на открытом страте Максвелла)

Рассмотрим частный случай ситуации из предложения 4.4.1 — когда страт Максвелла \mathbf{H}_1 в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ открыт, т.е. гамильтониан любой его системы находится в общем положении, т.е. является простой функцией Морса. Так как страт Максвелла \mathbf{H}_1 открыт, то любое малое возмущение любой системы $v \in \mathbf{H}_1$ является тривиальным, т.е. возмущенная система \tilde{v} тоже принадлежит страту Максвелла \mathbf{H}_1 .

Напомним, что C^0 -инварианты (т.е. инварианты C^0 -сопряженности) гамильтоновых систем достаточно хорошо изучены в работах [9, 7]. Например, для *простого атома* (сложности 1 — особенности типа “штаны” (седло)) нет ни одного инварианта C^0 -сопряженности ростков систем на этом атоме, и более того, ростки всех систем на таком атоме C^0 -сопряжены (определение 4.1.18). Поэтому, так как все возмущения систем на таком атоме тривиальны, то (в силу предложения 4.4.1) для такого атома нет и ни одного (относительно) продолжимого инварианта, и все пары ростков систем на таком атоме остаются C^0 -сопряженными при любых достаточно малых возмущениях.

Итак, оснащённая молекула $W^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$ любой системы Гамильтона из \mathbf{H}_1 имеет только Π -метки, т.е. метки лишь на своих рёбрах и на их концах (т.е. в вершинах, отвечающих граничным окружностям поверхности M или точкам локального минимума или локального максимума функции Гамильтона).

Итак, на любом открытом страте Максвелла \mathbf{H}_1 инвариант Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности систем имеет вид $BF|_{\mathbf{H}_1} = \Pi|_{\mathbf{H}_1} : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\ell$. Как показано в §4.4.1, этот инвариант $\Pi|_{\mathbf{H}_1}$ является субмерсией. Согласно предложению 4.4.1 все относительно-продолжимые инварианты на \mathbf{H}_1 суть непрерывные функции от инварианта $\Pi|_{\mathbf{H}_1}$.

4.4.2 Простые возмущения гамильтоновой системы на плоском седловом атоме

Пусть даны две системы $v_1, v_2 \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. Изучим вопрос: Можно ли их сделать C^0 -сопряжёнными путём подходящих малых *простых возмущений*? (Положительный ответ на этот вопрос решает вопрос (Q2) из §4.1.5.) Мы дадим положительный ответ на этот вопрос в некоторых случаях. Попутно мы ответим в тех же случаях на вопросы (Q1)–(Q4) из §4.1.5.

Заметим, что если ответ положителен, то либо

- (i) системы v_1, v_2 C^0 -сопряжены, либо
- (ii) у стратов Максвелла $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \subset \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$, содержащих системы v_1, v_2 , существует обший (т.е. один и тот же) примыкающий к ним страт Максвелла $\tilde{\mathbf{H}}$ (см. (4.16) и определение 2.7.9 (B)), такой что при изоморфизме соответствующих графов возмущения $\widetilde{W}_1^{\text{num}} \simeq \widetilde{W}_2^{\text{num}}$, индуцированном некоторым сопрягающим гомеоморфизмом $M \rightarrow M$, “новые” рёбра переходят в “новые”, “старые” в “старые” (см. свойство (2') из §2.5.2),

а индуцированный изоморфизм КР-графов $W_1^{\text{num}} \simeq W_2^{\text{num}}$ сохраняет Π -метки систем v_1, v_2 на всех ребрах.

Это следует из свойств Π -меток на “новых” и “старых” ребрах графа возмущения $\widetilde{W}^{\text{num}}$, см. §4.2.5.

Отметим, что в указанном выше случае (i) системы v_1, v_2 траекторно эквивалентны, т.е. имеют одинаковые значения инварианта Фоменко — одинаковую молекулу Фоменко $W^\#$ (см. определение 2.4.5 и §4.4.1). Более того, у этих систем совпадают оснащенные молекулы $W^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$ Болсинова-Фоменко (т.е. молекулы Фоменко $W^\#$, снабженные метками Болсинова-Фоменко на ребрах и на атомах, см. §4.3.2). Но в указанном выше случае (ii) системы v_1, v_2 могут не быть траекторно эквивалентными, т.е. могут иметь неизоморфные молекулы Фоменко $W_1^\# \not\simeq W_2^\#$.

Утверждение 4.4.2. *Предположим, что пара систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ обладает свойством (ii) выше, причем все атомы одной из молекул $W_1^\#$ и $W_2^\#$ являются плоскими, а страт Максвелла $\widetilde{\mathbf{H}}$ открыт (т.е. соответствующие возмущенные гамильтонианы являются простыми функциями Морса), см. (4.16). Тогда системы v_1 и v_2 можно сделать C^0 -сопряженными в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек при подходящих малых возмущениях рассматриваемого класса (т.е. принадлежащих страту Максвелла $\widetilde{\mathbf{H}}$). Более того, для любого достаточно малого возмущения $\tilde{v}_1 \in \widetilde{\mathbf{H}}$ системы v_1 существует малое возмущение $\tilde{v}_2 \in \widetilde{\mathbf{H}}$ системы v_2 , такое, что возмущенные системы \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 C^0 -сопряжены в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек. В частности, на любом плоском атоме $(P, K)^\#$, для любого класса простых возмущений вида (4.17) систем на этом атоме, не существует относительно устойчиво C^0 -несопряженных пар систем (а потому нет ни одного относительно-продолжимого инварианта) по отношению к этому классу возмущений. В частности, на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ систем на любом плоском атоме $(P, K)^\#$ нет ни одного продолжимого инварианта.*

Доказательство. Шаг 1. По теореме 4.2.2 пространство $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ открыто, поэтому возмущенные системы $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$. По теореме 4.3.16 системы $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathbf{H}^{\text{nondeg}}(M)$ C^0 -сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащенные молекулы $\widetilde{W}_i^\#(\Pi, \Lambda, m_\Lambda)$ Болсинова-Фоменко, $i = 1, 2$, изоморфны. По предположению возмущенные системы \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 принадлежат одному страту Максвелла $\widetilde{\mathbf{H}}$, т.е. траекторно эквивалентны, поэтому их молекулы Фоменко изоморфны: $\widetilde{W}_1^\# \simeq \widetilde{W}_2^\#$. Обозначим индуцированный изоморфизм графов возмущения через

$$\tilde{\psi} : \widetilde{W}_1^{\text{num}} \rightarrow \widetilde{W}_2^{\text{num}}.$$

Этот изоморфизм по условию переводит “старые” ребра в “старые”, а “новые” в “новые” и сохраняет Π -метки систем v_1, v_2 на каждом “старом” ребре. Без ограничения общности считаем, что изоморфизм $\tilde{\psi}$ есть гомеоморфизм, переводящий множество критических точек функции периода системы \tilde{v}_1 на “старых” открытых ребрах графа возмущения $\widetilde{W}_1^{\text{num}}$ (см. (4.19)) в множество критических точек функции периода системы \tilde{v}_2 на “старых” открытых ребрах графа возмущения $\widetilde{W}_2^{\text{num}}$.

Так как страт Максвелла $\widetilde{\mathbf{H}} \ni \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ открыт (т.е. соответствующие возмущенные гамильтонианы являются простыми функциями Морса), то, с учетом §4.4.1, ограничение инварианта Болсинова-Фоменко на страт Максвелла $\widetilde{\mathbf{H}}$ совпадает с Π -инвариантом $\Pi|_{\widetilde{\mathbf{H}}} : \widetilde{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\ell$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Значит, для C^0 -сопряженности систем $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \widetilde{\mathbf{H}}$ необходимо и достаточно совпадение их Π -меток на каждом ребре графа возмущения $\widetilde{W}_1^{\text{num}} \simeq \widetilde{W}_2^{\text{num}}$.

Шаг 2. Пусть $i \in \{1, 2\}$. КР-граф W_i^{num} гамильтониана системы v_i получается из графа возмущения $\widetilde{W}_i^{\text{num}}$ стягиванием каждого “нового” ребра в точку (см. §2.5). Поэтому гомеоморфизм $\tilde{\psi}$ графов возмущения индуцирует гомеоморфизм

$$\psi : W_1^{\text{num}} \rightarrow W_2^{\text{num}}$$

“невозмущенных” графов $W_1^{\text{num}} \simeq W_2^{\text{num}}$, который по условию сохраняет Π -метки систем v_1, v_2 на каждом ребре. Без ограничения общности считаем, что гомеоморфизм ψ переводит множество критических точек функции периода системы v_1 на открытых ребрах графа W_1^{num} (см. (4.19)) в множество критических точек функции периода системы v_2 на открытых ребрах графа W_2^{num} . Пусть

$$U_1 \subset W_1^{\text{num}}$$

— объединение замкнутых регулярных попарно непересекающихся окрестностей вершин графа W_1^{num} и критических точек функции периода системы v_1 на открытых ребрах графа W_1^{num} . Положим $U_2 := \psi(U_1)$.

Пусть $i \in \{1, 2\}$ и $\pi_i : M \rightarrow W_i^{\text{num}}$ — каноническая проекция (2.4) для гамильтониана системы v_i . Для любой системы $\tilde{v}_i \in \mathbf{H}(M)$, достаточно близкой к v_i , обозначим (как и выше) через \tilde{W}_i^{num} граф возмущения, через $\tilde{\pi}_i : M \rightarrow \tilde{W}_i^{\text{num}}$ каноническую проекцию (2.4) для гамильтониана системы \tilde{v}_i . Положим

$$\tilde{U}_i := \tilde{\pi}_i(\pi_i^{-1}(U_i)) \subset \tilde{W}_i^{\text{num}}.$$

В силу предположения мы можем и будем считать, что для указанного выше гомеоморфизма $\tilde{\psi}$ выполнено

$$\tilde{\psi}(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2.$$

Для любой связной компоненты

$$U_{c,i} \subset U_i$$

графа U_i обозначим через $\tilde{U}_{c,i}$ связную компоненту графа \tilde{W}_i^{num} , удовлетворяющую условию $\pi_i^{-1}(U_{c,i}) \cap \tilde{\pi}_i^{-1}(\tilde{U}_{c,i}) \neq \emptyset$ (она единственна, если возмущение достаточно мало). Тогда

$$\tilde{\psi}(\tilde{U}_{c,1}) = \tilde{U}_{c,2}.$$

Возможен один из следующих двух случаев:

Случай 1. Указанная связная компонента $U_{c,i}$ не содержит вершин графа W_i^{num} , т.е. является сегментом его открытого ребра. Для любой системы $\tilde{v}_i \in \mathbf{H}(M)$, достаточно близкой к v_i , обозначим через $\Pi_{c,i}(\tilde{v}_i)$ экстремальное (т.е. критическое) значение функции периода замкнутых траекторий системы \tilde{v}_i на “возмущенном” сегменте $\tilde{U}_{c,i}$. Итак, $\Pi_{c,i}(\tilde{v}_i)$ — это (единственная в силу §4.2.5) компонента Π -метки системы \tilde{v}_i , отвечающая ограничению этой системы на $\tilde{\pi}_i^{-1}(\tilde{U}_{c,i})$.

Случай 2. Указанная связная компонента $U_{c,i}$ содержит вершину графа W_i^{num} . Обозначим эту вершину через $V_{c,i}$. Вершине $V_{c,i}$ графа W_i^{num} отвечает атом

$$(P_{c,i}, K_{c,i}) := (\pi_i^{-1}(U_{c,i}), \pi_i^{-1}(V_{c,i}))$$

молекулы $W_i^\#$, $i = 1, 2$. Если атом $(P_{c,i}, K_{c,i})$ плоский, то граф возмущения $\tilde{U}_{c,i}$ является деревом и имеет ровно $n_c - 1$ внутренних ребер, где n_c — сложность атома $(P_{c,i}, K_{c,i})$. Но графы возмущения $\tilde{U}_{c,1} \simeq \tilde{U}_{c,2}$ изоморфны (см. выше), поэтому атом $(P_{c,3-i}, K_{c,3-i})$ тоже плоский.

Шаг 3. Предположим, что для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ (которое мы подберем чуть ниже) задано любое ε -малое возмущение $\tilde{v}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}$ системы v_1 . Обозначим через

$$\mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_2), v_2) \subset \mathbf{H}(M)$$

множество гамильтоновых систем на M , совпадающих с системой v_2 на $\pi_2^{-1}(W_2^{\text{num}} \setminus U_2)$. Будем строить малое возмущение $\tilde{v}_2 \in \tilde{\mathbf{H}}$ системы v_2 так, чтобы носитель возмущения содержался в $\pi_2^{-1}(U_2)$, т.е. чтобы $\tilde{v}_2 \in \tilde{\mathbf{H}} \cap \mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_2), v_2)$.

Для каждой связной компоненты $U_{c,2}$ множества U_2 мы построим возмущенную систему $\tilde{v}_{2,c} \in \mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_{c,2}), v_2)$, в зависимости от возмущенной системы $\tilde{v}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}$ и случая 1 или 2 выше, так:

В случае 1 граф $\tilde{U}_{c,2} \subset \tilde{U}_2 \subset \tilde{W}_2^{\text{num}}$ содержится в “старом” ребре графа возмущения \tilde{W}_2^{num} и гомеоморфен отрезку. Поэтому соответствующая компонента $U_{c,2}$ графа U_2 является сегментом открытого ребра графа W_2^{num} , отвечающего указанному “старому” ребру. Но Π -метка системы \tilde{v}_1 , отвечающая сегменту $\tilde{U}_{c,1}$ “старого” ребра графа \tilde{W}_1^{num} близка к (не зависящей от i по условию) Π -метке, отвечающей сегменту $U_{c,i}$ ребра графа W_i^{num} (см. §4.2.5). Кроме того, некоторая малая окрестность $U_{c,2}$ системы v_2 в $\mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_{c,2}), v_2)$ целиком содержится в страте Максвелла \mathbf{H}_2 системы v_2 , и ограничение

$$\Pi_{c,2}|_{U_{c,2}} : U_{c,2} \rightarrow \mathbb{R}$$

является субмерсией (это следует из (4.38) и доказывается аналогично §4.4.1). Поэтому существует малое возмущение $\tilde{v}_{c,2} \in U_{c,2}$ системы v_2 , такое что $\Pi_{c,2}(\tilde{v}_{c,2}) = \Pi_{c,1}(\tilde{v}_1)$.

В случае 2, так как (2.11) — субмерсия, то (для некоторого $\delta > 0$) существует гладкое $(n_c - 1)$ -параметрическое семейство систем $\hat{v}_{c,2,\theta_1,\dots,\theta_{n_c-1}} \in \mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_{c,2}), v_2)$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_{n_c-1}^2 < \delta^2$, такое, что

- $\hat{v}_{c,2,0,\dots,0} = v_2$;
- в случае $\theta_1 > 0, \dots, \theta_{n_c-1} > 0$ выполнено $\hat{v}_{c,2,\theta_1,\dots,\theta_{n_c-1}} \in \tilde{\mathbf{H}}$ и для j -го внутреннего ребра графа $\tilde{U}_{c,2}$ (по отношению к некоторой нумерации внутренних ребер) разность значений гамильтониана системы $\hat{v}_{c,2,\theta_1,\dots,\theta_{n_c-1}}$ в критических точках с номерами, приписанными концу и началу этого ребра, равна θ_j .

Для указанного семейства систем принадлежность системы $\hat{v}_{c,2,\theta_1,\dots,\theta_{n_c-1}}$ страту Максвелла $\tilde{\mathbf{H}}$ равносильна принадлежности точки $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n_c-1})$ открытому первому октанту $\mathbb{R}_{>0}^{n_c-1}$, т.е. выполнению системы неравенств

$$\theta_1 > 0, \dots, \theta_{n_c-1} > 0.$$

В случае $\tilde{v}_i \in \tilde{\mathbf{H}}$ обозначим через $\Pi_{c,i,j}(\tilde{v}_i) > 0$ Π -метку системы \tilde{v}_i на j -ом внутреннем ребре графа возмущения $\tilde{U}_{c,i}$ (при этом нумерация внутренних ребер графа $\tilde{U}_{c,1}$ предполагается индуцированной нумерацией внутренних ребер графа $\tilde{U}_{c,2}$ при гомеоморфизме графов $\tilde{\psi}^{-1}$). Так как атом $(P_{c,i}, K_{c,i})^\#$ плоский, то количество внутренних ребер графа возмущения $\tilde{U}_{c,i}$ равно $n_c - 1$, поэтому $j = 1, \dots, n_c - 1$.

Положим $B_\delta := \{\theta \in \mathbb{R}^{n_c-1} \mid |\theta| < \delta\}$. отображение

$$\Pi_{c,2} : \mathbb{R}_{>0}^{n_c-1} \cap B_\delta \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{n_c-1}, \quad \theta \mapsto (\Pi_{c,2,1}(\hat{v}_{c,2,\theta}), \dots, \Pi_{c,2,n_c-1}(\hat{v}_{c,2,\theta})),$$

является отображением проколотой δ -окрестности нуля в открытом первом октанте в этот же открытый октант. Это отображение непрерывно и продолжается до непрерывного (ввиду утверждения 4.2.12 (б)) отображения

$$\bar{\Pi}_{c,2} : \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_c-1} \cap B_\delta \rightarrow (\mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\})^{n_c-1},$$

причем $\bar{\Pi}_{c,2}(0, \dots, 0) = (+\infty, \dots, +\infty)$ и для любого $j \in \{1, \dots, n_c - 1\}$ верно следующее: $\bar{\Pi}_{c,2,j}(\theta) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $\theta_j = 0$. Отсюда и из леммы 4.4.3 (см. ниже) следует, что точка $(+\infty, \dots, +\infty)$ является внутренней точкой множества $\bar{\Pi}_{c,2}(\mathbb{R}_{\geq 0}^{n_c-1} \cap B_\delta)$ в $(\mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\})^{n_c-1}$. Поэтому можно выбрать столь малое $\varepsilon > 0$, что для любого ε -малого возмущения $\tilde{v}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}$ системы v_1 существует точка $\theta^c \in \mathbb{R}_{>0}^{n_c-1} \cap B_\delta$ такая, что $\Pi_{c,2}(\hat{v}_{c,2,\theta^c}) = (\Pi_{c,1,1}(\tilde{v}_1), \dots, \Pi_{c,1,n_c-1}(\tilde{v}_1))$. Положим $\tilde{v}_{c,2} := \hat{v}_{c,2,\theta^c}$.

Определим возмущенную систему $\tilde{v}_2 \in \mathbf{H}(\pi_2^{-1}(U_2), v_2)$ равной $\tilde{v}_{c,2}$ на любом $\pi_2^{-1}(U_{c,2})$, и равной v_2 на $M \setminus \pi_2^{-1}(U_2)$. Тогда $\tilde{v}_2 \in \tilde{\mathbf{H}}$ и системы \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 имеют одну и ту же Π -метку на любом ребре графа возмущения $\tilde{W}_1^{\text{num}} \simeq \tilde{W}_2^{\text{num}}$, что и требовалось.

Шаг 4. Осталось доказать последние два требуемых утверждения. Предположим, что для плоского атома $(P, K)^\#$ существуют относительно-устойчиво C^0 -несопряженные системы $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ простых возмущений вида (4.17). Так как атом $(P, K)^\#$ плоский, то по доказанному выше существует пара C^0 -сопряженных систем $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \tilde{\mathbf{H}}$, сколь угодно близкая (в смысле C^∞ -топологии на $\mathbf{H}(P)$) к паре систем v_1, v_2 . Но это противоречит относительно-устойчивой C^0 -несопряженности систем v_1, v_2 по отношению к классу возмущений $\tilde{\mathbf{H}}$ (см. определения 4.1.19 и 4.1.21).

Предположим теперь, что для плоского атома $(P, K)^\#$ существует относительно- C^∞ -продолжимый инвариант $I : \mathbf{H}(P, K) \rightarrow \mathbb{R}$ (см. определение 4.1.22) по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ простых возмущений вида (4.17). Так как инвариант I относительно-продолжим, то он не есть константа. Значит, существуют две системы $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(P, K) \cap \mathbf{H}_0^{\text{nondeg}}(P)$ такие, что $I(v_1) < I(v_2)$. С другой стороны, так как атом имеет сложность > 1 (ввиду существования класса простых возмущений вида (4.17)), то Λ -инвариант Болсинова-Фоменко C^0 -сопряженности систем на этом атоме (определение 4.3.1) нетривиален. Поэтому можно считать, что $\mathbb{R}\Lambda(v_1) \neq \mathbb{R}\Lambda(v_2)$, а значит системы v_1, v_2 не являются C^0 -сопряженными. Из неравенства $I(v_1) < I(v_2)$ и из п.3 определения 4.1.22 следует, что для соответствующего “возмущенного” инварианта \tilde{I} выполнено $\tilde{I}(\tilde{v}_1) < \tilde{I}(\tilde{v}_2)$ при $\tilde{v}_i \in \tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{v}_i \rightarrow v_i$ (в смысле C^∞ -топологии на $\mathbf{H}(P)$), $i = 1, 2$. Поэтому системы \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 тоже не являются C^0 -сопряженными (так как \tilde{I} есть инвариант C^0 -сопряженности). Значит, системы v_1, v_2 относительно- C^∞ -устойчиво C^0 -несопряжены по отношению к классу $\tilde{\mathbf{H}}$ простых возмущений вида (4.17). Это противоречит доказанному выше.

Наконец, любой продолжимый инвариант является относительно-продолжимым по отношению к любому классу возмущений. \square

Итак, утверждение 4.4.2 будет доказано, когда будет доказана следующая лемма.

Лемма 4.4.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $X = [0, +\infty)^k$ — замкнутый положительный октант в \mathbb{R}^k . Для любого подмножества $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ рассмотрим соответствующую открытую грань

$$X_J := \{(x_i)_{i=1}^k \in X \mid \forall j \in J \ x_j > 0, \forall i \in \{1, \dots, k\} \setminus J \ x_i = 0\}$$

октанта X . Предположим, что $g : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение, переводящее любую открытую грань X_J в себя, т.е. $g(X_J) = X_J$ для любого $J \subseteq \{1, \dots, k\}$. Тогда $g(X)$ содержит некоторую окрестность вершины $(0, \dots, 0)$ октанта в X .

Доказательство. По условию $g(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$, и $g(x) \neq (0, \dots, 0)$ для любой точки $x = (x_1, \dots, x_k) \in X \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Рассмотрим функцию $\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(x_1, \dots, x_k) := \sum_{i=1}^k x_i$. Рассмотрим гиперплоскость и полупространство

$$H := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \xi(x) = 1\}, \quad H_- := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \xi(x) \leq 1\}.$$

Рассмотрим $(k-1)$ -мерный симплекс $X \cap H$ и k -мерный симплекс $X \cap H_-$ (сечения октанта X гиперплоскостью H и полупространством H_-). Так как $X \cap H$ компактно и $(0, \dots, 0) \notin g(X \cap H)$, то

$$\rho := \inf_{x \in X \cap H} \xi(g(x)) > 0.$$

Предположим противное тому, что требуется доказать. Пусть $x_0 \in X_{\{1, \dots, k\}}$ — любая точка такая, что $\xi(x_0) < \min\{\rho, 1\}$ и $x_0 \notin g(X)$ (она существует в силу предположения). Определим функцию $\lambda : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ формулой

$$\lambda(x) := \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0} \mid x_0 + (x - x_0)t \in X \cap H_-\}, \quad x \in X \setminus \{x_0\}.$$

Определим отображение $G : X \cap H_- \rightarrow \partial(X \cap H_-)$ формулой

$$G(x) := x_0 + (g(x) - x_0)\lambda(g(x)), \quad x \in X \cap H_-.$$

Положим

$$g_1 = G|_{\partial(X \cap H_-)} : \partial(X \cap H_-) \rightarrow \partial(X \cap H_-).$$

С одной стороны, отображение g_1 гомотопно постоянному отображению (так как оно продолжается внутрь симплекса $X \cap H_-$ до отображения G), поэтому $\deg(g_1) = 0$.

С другой стороны, g_1 гомотопно тождественному отображению $g_0 = \text{id}_{\partial(X \cap H_-)}$ при помощи гомотопии $g_t : \partial(X \cap H_-) \rightarrow \partial(X \cap H_-)$,

$$g_t(x) := x_0 + ((1-t)x + tg(x) - x_0)\lambda((1-t)x + tg(x)), \quad x \in \partial(X \cap H_-),$$

$0 \leq t \leq 1$. Эта гомотопия определена корректно, т.е. $(1-t)x + tg(x) \neq x_0$ при любых $x \in \partial(X \cap H_-)$ и $t \in [0, 1]$, так как по условию при $x \in \partial X$ точки x и $g(x)$ (а потому и соединяющий их отрезок) содержатся в одной и той же открытой грани $X_J \not\ni x_0$, а при $x \in X \cap H$ имеем $\xi(x) = 1 > \xi(x_0)$ и $\xi(g(x)) \geq \rho > \xi(x_0)$. Поэтому $\deg(g_1) = \deg(g_0) = 1$, что противоречит доказанному равенству $\deg(g_1) = 0$. \square

4.4.3 Выводы о продолжимых инвариантах и устойчивой C^0 -несопряженности систем на атоме

Напомним, что мы уже получили (в §4.2) положительный ответ на вопрос (Q5) из §4.1.5.

Изучим вопросы (Q3) и (Q4) из §4.1.5 о продолжимых инвариантах для двух “противоположных” классов возмущений систем: класса тривиальных возмущений и класса простых возмущений (см. (4.17)).

Для первого из этих классов возмущений, т.е. класса *тривиальных возмущений* систем любого страта Максвелла (и, в частности, систем на любом атоме), мы решили вопросы (Q3) и (Q4) в предложении 4.4.1.

Для второго класса возмущений, т.е. класса *простых возмущений* систем (т.е. возмущений из *открытого страта Максвелла*), мы получили в утверждении 4.4.2 отрицательные ответы на вопросы (Q1') и (Q3) в случае любого неоткрытого страта Максвелла \mathbf{H}_1 , системы которого имеют лишь *плоские атомы*, и поэтому вопрос (Q4) не возникает. Мы также получили “отрицательный” ответ на вопрос (Q2) для любого плоского атома: любые две гамильтоновы системы на любом плоском атоме не являются устойчиво C^0 -несопряженными.

Итак, в указанных выше случаях мы получили “тривиальные” полные решения всех вопросов устойчивости и продолжимости (Q1)–(Q4), (Q1') и (Q2'). Осталось решить эти вопросы (вместе с вопросом (Q4') из §4.3.3) для класса *простых возмущений* гамильтоновых систем на *неплоских атомах*, а также для класса *сложных возмущений* систем на атомах. В следующем параграфе эти вопросы решаются в некоторых случаях. При этом обнаруженные нами продолжимые инварианты оказываются “гомологическими”, т.е. тесно связанными с 1-мерными гомологиями несущей замкнутой поверхности (полученной из исходной поверхности M или P заклеиванием всех граничных окружностей дисками).

4.5 Два типа относительно-продолжимых инвариантов C^0 - и C^1 -сопряженности систем на седловом атоме

Ниже мы опишем два обнаруженных нами типа *относительно-продолжимых инвариантов* (см. определение 4.1.22) по отношению к соответствующим двум нетривиальным *классам возмущений* систем на данном седловом атоме:

1) Первый тип возмущений, обладающий относительно-продолжимым инвариантом, — это нетривиальные *сложные возмущения* \tilde{v} исходной системы v на любом атоме. Такие возмущения существуют у любого атома *сложности* ≥ 3 (см. определение 2.5.1), минимальный род такого атома равен 0. Оказалось, что для любых сложных возмущений имеет место *относительно-продолжимый Λ -инвариант*. То есть оказалось, что среди всех

C^0 -инвариантов Болсинова-Фоменко невырожденных гамильтоновых систем выделяется Λ -инвариант, оказывающийся относительно-продолжимым по отношению к таким возмущениям. То есть малое сложное возмущение системы мало меняет значение этого инварианта.

2) Второй тип возмущений, обладающий относительно-продолжимым инвариантом, — это так называемые *бициклические возмущения* \tilde{v} системы v на любом *бициклическом атоме* (см. ниже). Минимальный род такого атома равен 1, а минимальная сложность 2. Оказалось, что здесь обнаруживается *относительно-продолжимый m -инвариант*, а именно инвариант $B = B(v)$ (см. §4.3.3), являющийся *гладкой* функцией от m -инварианта. В некоторых случаях он является инвариантом C^0 -сопряженности, а в некоторых — лишь инвариантом C^1 -сопряженности (см. вопрос (Q4') из §4.3.3 и его решение для некоторых атомов в следствии 4.3.30). Как мы покажем, при малом возмущении он “преобразуется” в инвариант $\tilde{B}(\tilde{v}) = \Pi_1(\tilde{v}) - \Pi_2(\tilde{v})$, являющийся *гладкой* функцией в соответствующем открытом страте Максвелла (состоящем из бициклических возмущений систем на данном атоме).

Перейдем к более подробному описанию этих двух типов относительно-продолжимых инвариантов.

4.5.1 Относительно-продолжимый Λ -инвариант C^0 -сопряженности систем на сложном атоме для сложных возмущений

Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом (см. определение 2.4.3). Пусть даны (“невозмущенная”) система $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ и достаточно близкая к ней (см. §4.1.3, (4.12) и (4.13)) (“возмущенная”) система $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F}) \in \mathbf{H}(P)$. Рассмотрим граф Кронрода-Риба W^{num} возмущенной функции \tilde{F} , т.е. граф возмущения (см. определение 2.5.1). Предположим, что возмущение нетривиально (см. (4.17)).

Если граф возмущения W^{num} не является простым, т.е. является сложным (см. определение 2.5.1), то возмущение отнесём к *возмущениям первого типа*.

Рассмотрим любой класс возмущений первого типа, т.е. сложных возмущений вида (4.17) систем на данном атоме, см. определение 2.5.1. В графе сложного возмущения обязательно есть хотя бы одна вершина X веса $k \geq 2$. Пусть этой вершине приписан набор из k номеров $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, где n есть сложность исходного атома $(P, K)^\#$. Согласно предложению 4.3.2, в этой вершине графа возмущения W^{num} появляется нетривиальный Λ -инвариант C^0 -сопряженности (т.е. Λ -метка):

$$\mathbb{R}\Lambda_X(\tilde{v}) := (\Lambda_{j_1}(\tilde{v}) : \dots : \Lambda_{j_k}(\tilde{v})).$$

По утверждению 4.2.12 (а) “возмущенная” Λ -метка $\mathbb{R}\Lambda_X(\tilde{v})$ близка к своему “невозмущенному” значению

$$\mathbb{R}\Lambda_X(v) := (\Lambda_{j_1}(v) : \dots : \Lambda_{j_k}(v)).$$

Заметим, что “невозмущенное” значение $\mathbb{R}\Lambda_X(v)$ является “частью” Λ -инварианта $\mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ C^0 -сопряженности систем на исходном атоме $(P, K)^\#$. Следовательно, эта “часть” Λ -инварианта является относительно-продолжимым инвариантом по отношению к рассматриваемому классу сложных возмущений (4.17). То есть получаем следующую теорему.

Теорема 4.5.1 ([145, теорема 1.5]). *Пусть возмущение вида (4.17) является сложным, т.е. имеет первый тип. Тогда C^0 -инвариант $\mathbb{R}\Lambda_X(v) = (\Lambda_{j_1}(v) : \dots : \Lambda_{j_k}(v))$ является относительно-продолжимым по отношению к возмущениям (4.17). При этом возмущенный инвариант $\mathbb{R}\Lambda_X(\tilde{v})$ является C^0 -инвариантом, и его значение близко к невозмущенному значению $\mathbb{R}\Lambda_X(v)$, если возмущение достаточно мало: $\mathbb{R}\Lambda_X(\tilde{v}) \rightarrow \mathbb{R}\Lambda_X(v)$ при $v \rightarrow \tilde{v}$. \square*

Итак, для возмущений первого типа (т.е. не являющихся простыми) относительно-продолжимые инварианты существуют на любом атоме — это “части” Λ -инварианта, см. теорему

4.5.1. Они являются функциями от (являющегося C^0 -инвариантом) Λ -инварианта $\mathbb{R}\Lambda(v)$, и мы их будем называть *относительно-продолжимыми Λ -инвариантами* для сложных возмущений.

Следствие 4.5.2. Пусть функции Морса F с ровно одним критическим значением на поверхности P отвечает сложный атом (сложности $n \geq 2$). Пусть пара гамильтоновых систем v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет следующему условию: значения функционала $\Lambda_{j_1}(v) : \Lambda_{j_2}(v)$ на этих системах не совпадают для любой пары $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$. Тогда системы v_1 и v_2 относительно-устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.21) по отношению к любым сложным возмущениям (например, тривиальным), т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых возмущениях, являющихся сложными.

В частности, по отношению к любым малым возмущениям, являющимся сложными, пары $(v_1, v_2) \in \mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ относительно-устойчиво C^0 -несопряженных гамильтоновых систем на данном атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$.

Комментарий 4.5.3. Здесь и далее в данной работе, говоря о *почти всех* парах систем на атоме, или о *множестве полной меры* в бесконечномерном функциональном пространстве $\mathbf{H}(F)$, мы имеем в виду все пространство за исключением множества, лежащего в некоторой гиперповерхности или в объединении некоторого конечного числа гиперповерхностей. При этом под гиперповерхностями в $\mathbf{H}(F)$ мы понимаем множества уровня какого-либо (гладкого) функционала, на которых дифференциал этого функционала всюду отличен от нуля (см. определения 4.1.17 и 4.1.18).

Доказательство следствия 4.5.2. Согласно теореме 4.5.1, инварианты вида $\Lambda_{j_1}(v) : \Lambda_{j_2}(v)$ гамильтоновых систем на атоме являются относительно-продолжимыми по отношению к сложным возмущениям. Согласно предложению 4.3.2, Λ -инвариант $\mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ является инвариантом C^0 -сопряженности. Таким образом, для любого класса сложных возмущений (4.17) существует относительно-продолжимый инвариант вида $\Lambda_{j_1}(v) : \Lambda_{j_2}(v)$ по отношению к возмущениям этого класса. По условию значения каждого такого инварианта на системах v_1 и v_2 различны, поэтому системы v_1 и v_2 являются C^0 -несопряженными и остаются C^0 -несопряженными (в любых связных инвариантных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых возмущениях, являющихся сложными.

Так как количество рассматриваемых инвариантов конечно и эти инварианты являются субмерсиями в силу §4.3.2, п.(2), то пары относительно-устойчиво C^0 -несопряженных систем на данном атоме по отношению к малым сложным возмущениям образуют множество полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F)$. □

4.5.2 Относительно-продолжимый m -инвариант C^1 -сопряженности систем на бициклическом атоме для бициклических возмущений

Бициклические атомы и бициклические возмущения систем на них

Рассмотрим атом $(P, K)^\#$ сложности $n \geq 2$ (определение 2.4.3).

Определение 4.5.4 (ср. определение 4.3.24). Пусть существуют два простых положительно ориентированных (определения 4.3.23 и 4.3.17 (A)) цикла Z_1 и Z_2 в ориентированном графе K и такое разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на два собственных подмножества I и J , что выполнены два условия.

1) $K = Z_1 \cup Z_2$.

2) Оба цикла Z_1 и Z_2 положительны по отношению к вершинам $x_i, i \in I$, и отрицательны по отношению к остальным вершинам $x_j, j \in J$ (см. определение 4.3.23).

Тогда атом назовем *бициклическим атомом*.

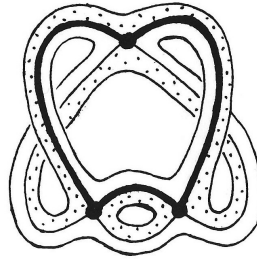


Рис. 4.5. Пример бициклического атома. Выделен один из циклов Z_1 и Z_2

См. пример на рис. 4.5. (Отметим, что определение 4.3.24 аналогично определению 4.5.4, но в нем подмножества I и J предполагаются несобственными, т.е. одно из них пусто.) Так как число ребер графа $K = Z_1 \cup Z_2$ равно $2n$, а каждый цикл Z_1 и Z_2 содержит не более n ребер, то циклы Z_1 и Z_2 содержат в точности по n ребер и пересекаются только в вершинах, $Z_1 \cap Z_2 = \{x_1, \dots, x_n\}$. Другими словами, как и в случае знакоопределенно бициклических атомов, см. определение 4.3.24, каждый из циклов Z_1 и Z_2 является *гамильтоновым*, т.е. проходит через каждую вершину атома ровно по одному разу. Если атом, отвечающий функции Морса F и некоторой ориентации многообразия, является бициклическим, то атомы, отвечающие функциям $\pm F$ и любым заданным ориентациям, тоже являются бициклическими. Аналогично замечанию 4.3.26, разность 1-циклов $[Z_1], [Z_2] \in H_1(K)$ равна сумме классов атомных окружностей O_i данного атома с подходящими ориентациями:

$$[Z_1] - [Z_2] = [O_1] + \dots + [O_\nu].$$

Как и выше, для любой функции, близкой к некоторой морсовской функции, послойно эквивалентной F , обозначим через c_i ее значение в критической точке, близкой к x_i . Если система v задана на бициклическом атоме, то здесь появляется естественный класс возмущений, учитывающий структуру бициклического атома.

Определение 4.5.5. Возмущение \tilde{v} системы v на бициклическом атоме (на котором фиксированы два его цикла Z_1 и Z_2) мы будем называть *бициклическим возмущением* (или *возмущением второго типа*), если возмущенный гамильтониан таков, что $c_i < c_j$ для всех $i \in I, j \in J$, где I и J — два набора вершин исходного атома, являющиеся отрицательными и положительными относительно циклов Z_1 и Z_2 соответственно.

Без ограничения общности мы можем считать, что значения гамильтониана в вершинах с номерами из подмножества I уменьшаются, а в вершинах с номерами из J — увеличиваются. Отметим, что после такого возмущения особая линия уровня $\{F = c\}$ невозмущенного гамильтониана F преобразуется в неособую линию уровня $\{\tilde{F} = c\}$ возмущенного гамильтониана \tilde{F} , состоящую из двух связных компонент (окружностей), т.е. особая линия уровня $\{F = c\}$ “распадается” на две окружности $\{\tilde{F} = c\}$, близкие к циклам Z_1 и Z_2 . См. рис. 4.6.

Подчеркнем, что бициклические возмущения существуют лишь на бициклических атомах.

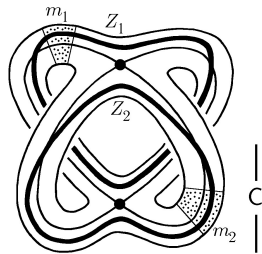


Рис. 4.6. Циклы Z_1 и Z_2 на атоме C_1

Описание относительно–продолжимого m –инварианта

Перейдем к описанию относительно–продолжимого инварианта $B = B(v)$ для бициклических возмущений. Он является функцией от полного m –инварианта C^1 –сопряженности (определение 4.3.4 и замечание 4.3.13), поэтому для краткости его будем называть *относительно–продолжимым m –инвариантом* (по отношению к бициклическим возмущениям).

Определим m –инвариант C^1 –сопряженности $B(v)$ и сформулируем утверждение о его *относительной продолжимости*, которое докажем чуть ниже.

Теорема 4.5.6 ([145, теорема 1.6]). *Пусть дан бициклический атом $(P, K)^\#$ и класс бициклических возмущений гамильтоновых систем на этом атоме. Пусть фиксирована пара ориентированных циклов Z_1, Z_2 графа K , по отношению к которой атом и класс возмущений систем на нем являются бициклическими. Тогда в графе возмущения W^{num} есть пара ребер e_1 и e_2 , соединяющих одну и ту же пару вершин и обладающих следующими свойствами:*

(А) *Соответствующие 1–циклы $\zeta(e_1), \zeta(e_2) \in H_1(K)$ (см. определение 4.2.13 (В)) совпадают с классами $[Z_1], [Z_2] \in H_1(K)$ ориентированных циклов Z_1, Z_2 . В частности, $\zeta(e_1) - \zeta(e_2) = [Z_1] - [Z_2] = \sum_{i=1}^\nu [O_i]$.*

(В) *Инвариант*

$$B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle = \sum_{i=1}^\nu \langle [m(v)], [O_i] \rangle$$

C^1 –сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме является относительно– C^r –продолжимым инвариантом по отношению к бициклическим возмущениям данного класса (а также гладким инвариантом на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ систем на данном атоме, непрерывным в смысле C^r –топологии на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$) при любом $r \geq 5$. Более того, разность C^0 –меток Болсинова–Фоменко

$$\tilde{B}(\tilde{v}) = \Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_2}(\tilde{v})$$

на рёбрах e_1, e_2 (которые по теореме 4.3.16 Болсинова–Фоменко являются инвариантами C^0 –сопряженности возмущенных систем) близка к невозмущенному значению $B(v)$. То есть, $\tilde{B}(\tilde{v}) \rightarrow B(v)$ при $\tilde{v} \rightarrow v$ (в смысле C^r –топологии), где \tilde{v} является бициклическим возмущением данного класса.

(С) *Если валентность атома $(P, K)^\#$ равна двум, то относительно–продолжимый инвариант $B = B(v)$ является инвариантом C^0 –сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме. Если же атом $(P, K)^\#$ является знакоопределенно–бициклическим, то относительно–продолжимый инвариант $B = B(v)$ не является инвариантом C^0 –сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме.*

Напомним геометрический смысл относительно–продолжимого m –инварианта $B(v)$ из теоремы 4.5.6. Так как $\zeta(e_1) - \zeta(e_2) = [Z_1] - [Z_2] = \sum_{i=1}^\nu [O_i]$, то значение $B(v)$ на системе $v \in \mathbf{H}(P, K)$ равно сумме главных значений периода системы v на атомных окружностях

O_i данного атома, взятых с подходящими ориентациями (определение 4.3.7):

$$B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v).$$

Более детальное изучение бициклических атомов (т.е. допускающих бициклические возмущения) можно найти в [145, 146, 137], см. также §4.5.2, §4.5.2 и теорему 4.5.18.

Отметим, что относительно–продолжимые m -инварианты не всегда являются инвариантами C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на атоме (теорема 4.5.21). Однако они всегда являются инвариантами C^1 -сопряженности согласно следствию 4.3.8.

Прежде чем доказывать теорему 4.5.6, докажем вспомогательное утверждение 4.5.8.

Определение 4.5.7. Рассмотрим граф возмущения W^{num} для возмущенного гамильтониана. Мы скажем, что в графе возмущения W^{num} есть *симметричное двойное ребро* (e_1, e_2) , если в нем имеется пара ребер e_1 и e_2 , соединяющих одну и ту же пару вершин, которым отвечает один и тот же набор чисел $\varkappa(e) = (\varkappa_1(e), \dots, \varkappa_n(e)) \in \{0, 1, 2\}^n$ (см. определение 4.2.11 или 4.2.13 (A)), т.е.

$$(\varkappa_1(e_1), \dots, \varkappa_n(e_1)) = (\varkappa_1(e_2), \dots, \varkappa_n(e_2)).$$

В частности, две функции $L_{e_1}(f)$ и $L_{e_2}(f)$, аппроксимирующие функции периода (см. определение 4.2.11) на ребрах симметричного двойного ребра, определены в одном и том же интервале и отличаются на некоторую постоянную (эта постоянная, очевидно, равна $\langle [m(v)], \zeta(e_1) - \zeta(e_2) \rangle$, где $\zeta(e_\ell) - 1$ -цикл графа K , отвечающий ребру e_ℓ , см. определение 4.2.13 (B)).

Нетрудно показать, что для любого симметричного двойного ребра (e_1, e_2) выполнено $\varkappa_i(e_1) + \varkappa_i(e_2) \leq 2$, поэтому все числа набора $\varkappa(e_1) = \varkappa(e_2)$ равны 0 и 1, и $(\varkappa_1(e_1), \dots, \varkappa_n(e_1)) = (1, \dots, 1)$, откуда атом и рассматриваемое возмущение являются бициклическими.

Утверждение 4.5.8 ([145, утверждение 4.2]). *Рассмотрим систему v на бициклическом атоме, в котором фиксированы циклы Z_1 и Z_2 . Тогда, при бициклических возмущениях такой системы, всегда появляется симметричное двойное ребро (e_1, e_2) в графе возмущения для гамильтониана \tilde{F} .*

Доказательство. Рассмотрим бициклическое возмущение системы на бициклическом атоме. Пусть критический уровень s невозмущенного гамильтониана является нулевым: $s = 0$. Без ограничения общности можно считать, что для данного бициклического возмущения выполнено $c_i < 0 < c_j$ при $i \in I, i \in J$. Рассмотрим нулевой уровень $\tilde{F}^{-1}(0)$ возмущенного гамильтониана \tilde{F} . Как мы заметили после определения 4.5.5 (бициклического возмущения), нулевой уровень нулевой уровень $\tilde{F}^{-1}(0)$ распадается на две окружности γ_1 и γ_2 , близкие к циклам Z_1 и Z_2 (рис. 4.6). Пусть e_1 и e_2 — два ребра графа Кронрода-Риба, отвечающие указанным двум окружностям γ_1 и γ_2 . Тогда получаем п.(A) теоремы 4.5.6. Для каждой из этих окружностей γ_ℓ рассмотрим число

$$L_{e_\ell}(0) = \langle [m(v)], [Z_\ell] \rangle - \sum_{i=1}^n \varkappa_i(e_\ell) \Lambda_i(\tilde{v}) \ln |c_i|, \quad \ell = 1, 2.$$

Заметим, что, по определению циклов Z_1 и Z_2 , все $\varkappa_i(e_\ell)$ равны 1, так что второе слагаемое для окружностей γ_1 и γ_2 одно и то же. Отсюда получаем, что числа $L(0)$ для этих окружностей отличаются на число $B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle$. По непрерывности получаем, что траекториям системы на двух ребрах e_1 и e_2 отвечают те же два цикла Z_1 и Z_2 . Поэтому функции $L_{e_\ell}(f)$ на этих двух ребрах имеют вид

$$L_{e_\ell}(f) = \langle [m(v)], [Z_\ell] \rangle - \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\tilde{v}) \ln |f - c_i|.$$

В частности, эти две функции отличаются на константу

$$L_{e_1}(f) - L_{e_2}(f) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle = B(v).$$

Осталось показать, что два ребра e_1 и e_2 графа Кронрода-Риба W , отвечающие указанным двум окружностям γ_1 и γ_2 , имеют общее начало и общий конец. Пусть, для определенности, $c_{i_0} = \max_{i \in I} c_i$. Рассмотрим вершину графа возмущения W^{num} , к которой отнесен номер i_0 . Из этой вершины, очевидно, выходят оба ребра e_1 и e_2 , так как для обоих этих ребер $\kappa_{i_0}(e_\ell) > 0$. Мы получили, что ребра e_1 и e_2 имеют общую начальную вершину. Точно так же проверяется, что они имеют общий конец, отвечающий уровню $c_{j_0} = \min_{j \in J} c_j$ возмущенного гамильтониана \tilde{F} . (Заметим, что отсюда, в частности, следует связность особых линий уровня $\tilde{F}^{-1}(c_{i_0})$ и $\tilde{F}^{-1}(c_{j_0})$, отвечающих общему началу и общему концу этих двух ребер.)

Итак, функции $L_{e_\ell}(f)$, $\ell = 1, 2$, на этой паре ребер определены на одном и том же интервале (c_{i_0}, c_{j_0}) значений параметра f . При этом эти функции отличаются на ту же постоянную $B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle$, что и значения $L_{e_\ell}(0)$ на нулевом уровне. Значит, пара (e_1, e_2) является симметричным двойным ребром графа возмущения. \square

Доказательство теоремы 4.5.6. Выведем теорему 4.5.6 из утверждений 4.2.12 (б) и 4.5.8, т.е. покажем, что функционал $B(v) = \langle [m(v)], [Z_1] - [Z_2] \rangle$ является относительно- C^r -продолжимым по отношению к бициклическим возмущениям. Другими словами: при малом бициклическом возмущении системы этот функционал “преобразуется” в инвариант $\tilde{B}(\tilde{v}) = \Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_2}(\tilde{v})$, где $\Pi_{e_1}(\tilde{v})$ и $\Pi_{e_2}(\tilde{v})$ суть Π -метки возмущенной системы \tilde{v} на ребрах e_1 и e_2 .

Итак, нужно показать, что значение $\Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_2}(\tilde{v})$ близко к значению $B(v)$, если возмущение системы достаточно мало. Напомним, что Π -метка $\Pi_{e_\ell}(\tilde{v})$ является минимумом функции периода $\tau_{e_\ell}(f)$ системы \tilde{v} на ребре e_ℓ (см. §4.2.5). Согласно утверждению 4.2.12 (б), функции периода $\tau_{e_\ell} = \tau_{e_\ell}(f)$ близки к аппроксимирующим функциям $L_{e_\ell} = L_{e_\ell}(f)$, $\ell = 1, 2$. Но разность $L_{e_1} - L_{e_2}$ последних функций является постоянной $B(v)$ согласно утверждению 4.5.8. Следовательно, и минимумы функций τ_{e_ℓ} отличаются на величину $\Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_2}(\tilde{v}) = \min \tau_{e_1} - \min \tau_{e_2}$, близкую к $\min L_{e_1} - \min L_{e_2} = L_{e_1} - L_{e_2} = B(v)$.

Инвариант $B = B(v)$ является гладкой субмерсией (определение 4.1.17) в силу свойства (2) из §4.3.2. Он непрерывен по отношению к C^r -топологии на $\mathbf{H}(P, K)$ для любого $r \geq 3$ согласно предложению 4.3.5.

Пункт (С) теоремы 4.5.6 получается из следствия 4.3.30. \square

Выводы об относительно-устойчиво C^0 -несопряжённых системах относительно бициклических возмущений

Из теоремы 4.5.6 легко получаем

Следствие 4.5.9 ([137, теорема 3], [145, следствие 1.2]). *Пусть функции Морса F с ровно одним критическим значением на поверхности P отвечает бициклический атом (в котором фиксированы два цикла Z_1 и Z_2). Пусть пара гамильтоновых систем v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Наборы значений функционалов $(\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v))$ для этих систем не пропорциональны друг другу: $(\Lambda_1(v_1) : \dots : \Lambda_n(v_1)) \neq (\Lambda_1(v_2) : \dots : \Lambda_n(v_2))$.*

2) *Значения функционала $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ на этих системах не совпадают: $B(v_1) \neq B(v_2)$.*

Тогда системы v_1 и v_2 относительно-устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.21) по отношению к бициклическим возмущениям, т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых бициклических возмущениях данного класса.

Доказательство. Согласно предложению 4.3.2, Λ -инвариант $\mathbb{R}\Lambda(v) := (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ является инвариантом C^0 -сопряженности на пространстве $\mathbf{H}(F)$. Но из несовпадения значений какого-то одного из C^0 -инвариантов на паре сравниваемых систем следует C^0 -несопряженность этих систем. Отсюда и из условия 1 получаем, что системы v_1, v_2 являются C^0 -несопряженными.

Согласно теореме 4.5.6, функционал $B(v)$ является относительно- C^r -продолжимым инвариантом. Отсюда и из условия 2 получаем, что для любых достаточно малых (в смысле C^r -топологии) бициклических возмущений \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 данного класса выполнено $\tilde{B}(\tilde{v}_1) \neq \tilde{B}(\tilde{v}_2)$, где \tilde{B} — соответствующий инвариант C^0 -сопряженности возмущенных систем. Поэтому возмущенные системы \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 тоже не являются C^0 -сопряженными. \square

В частном случае бициклических атомов *минимальной валентности* 2 следствие 4.5.9 может быть усилено следующим образом.

Следствие 4.5.9' ([145, следствие 1.2']). *Пусть функции Морса F с ровно одним критическим значением на поверхности P отвечает бициклический атом (в котором фиксированы два цикла Z_1 и Z_2) валентности 2. Пусть пара гамильтоновых систем v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет следующему условию: значения функционала $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ на этих системах не совпадают. Тогда системы v_1 и v_2 относительно-устойчиво C^0 -несопряжены по отношению к бициклическим возмущениям, т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых бициклических возмущениях данного класса.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству следствия 4.5.9 и использует следующую дополнительную идею. Согласно теореме 4.3.27 (А), в случае атома валентности два m -инвариант $[m(v)] \bmod (\mathbb{R}\Lambda(v) \cdot [K])$ является C^0 -инвариантом, т.е. инвариантом C^0 -сопряженности на пространстве $\mathbf{H}(F)$. Согласно следствию 4.3.8, каждый инвариант $A_i(v)$ является \mathbb{R} -значной функцией от m -инварианта, поэтому он тоже является C^0 -инвариантом. В частности, относительно-продолжимый инвариант $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ тоже является C^0 -инвариантом. Но из несовпадения значений какого-то одного из C^0 -инвариантов на паре сравниваемых систем следует C^0 -несопряженность этих систем. Поэтому из условия $B(v_1) \neq B(v_2)$ получаем, что системы v_1, v_2 не являются C^0 -сопряженными (т.е. для атомов валентности 2 можно не привлекать Λ -инвариант).

Вторая часть доказательства получается дословным повторением второй части доказательства следствия 4.5.9. \square

Из следствия 4.5.9 и §4.3.2, п.(2) сразу получаем

Следствие 4.5.10 ([137, теорема 1], [145, следствие 1.2]). *Пусть функции Морса F с ровно одним критическим седловым значением на поверхности P (с краем) отвечает бициклический атом (с фиксированными циклами Z_1 и Z_2). Тогда, по отношению к бициклическим возмущениям данного класса, пары (v_1, v_2) относительно-устойчиво C^0 -несопряженных (определение 4.1.21) гамильтоновых систем из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3). \square*

Несуществование продолжимых инвариантов и полный относительно-продолжимый инвариант для серии вполне бициклических седловых атомов

Серия \mathcal{V} атомов с максимальной и абелевой группой симметрий. Напомним сначала результаты Ю. А. Браилова и Е. А. Кудрявцевой [146]. Пусть $(P, K)^\#$ — седловой атом (см. определение 2.4.3).

Определение 4.5.11. Гомеоморфизмы пары (P, K) на себя, сохраняющие ориентацию поверхности P , образуют группу. Связные компоненты этой группы также образуют группу, называемую *группой симметрий* атома. Элементами этой группы являются гомеоморфизмы пары (P, K) на себя, сохраняющие ориентацию поверхности P и графа K .

Определение 4.5.12. Группа симметрий атома $(P, K)^\#$ называется *максимальной*, если она транзитивно действует на множестве ребер графа K . В этом случае атом будем называть *максимально симметричным*.

Нетрудно показать, что группа симметрий атома действует свободно на ребрах графа K (т.е. любой элемент этой группы однозначно определяется образом одного ребра графа K). Отсюда следует, что группа симметрий атома максимальна в том и только том случае, когда ее порядок равен $2n$, где n — сложность атома.

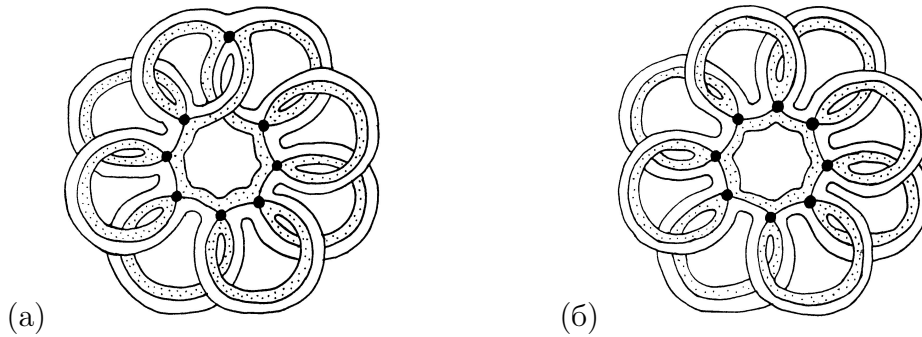


Рис. 4.7. Серия атомов $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1 \cup \mathcal{V}^2$: (а) атом $V_8^1 \in \mathcal{V}^1$; (б) атом $V_8^2 \in \mathcal{V}^2$

Теорема 4.5.13 (Ю.А. Браилов, Е.А. Кудрявцева [146]). *Если группа симметрий атома $V = (P, K)^\#$ максимальна и абелева, то она изоморфна группе \mathbb{Z}_{2n} или $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_n$, где n — сложность атома. При этом пара (P, K) , отвечающая такому атому, определяется группой симметрий однозначно и имеет вид, показанный на рис. 4.7.* \square

Обозначим атомы, изображенные на рис. 4.7 (а) и рис. 4.7 (б), через V_n^1 и V_n^2 соответственно, где n — сложность атома. Вычислением рода соответствующих поверхностей получаем, что при каждом фиксированном $g \geq 0$ на ориентированной поверхности рода g имеется по два класса послойно эквивалентных функций каждой серии. Функции первой серии имеют $2g$ или $2g + 1$ седловых критических точек (и валентности 2 или 3 соответственно), а функции второй серии имеют $2g + 1$ или $2g + 2$ седловых точек (и валентности 3 и 4 соответственно). Все данные атомы валентности 3 являются знакоопределенно бициклическими, а атомы валентности 4 — положительно и отрицательно бициклическими (см. определение 4.3.24 и замечание 4.3.26).

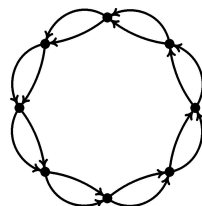


Рис. 4.8. Ориентированный граф K — критический уровень атома серии \mathcal{V}

Рассмотрим атомные окружности атома (см. §4.3.1 и рис. 4.3). Нетрудно показать, что атомы построенных серий

$$\mathcal{V}^1 = \{V_n^1\}_{n=0}^\infty, \quad \mathcal{V}^2 = \{V_n^2\}_{n=0}^\infty$$

(вместе образующие серию $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1 \cup \mathcal{V}^2$) однозначно характеризуются любым из следующих эквивалентных условий:

- 1) Группа симметрий атома максимальна и абелева.
- 2) Ориентированный граф K , отвечающий этому атому, имеет следующий вид, см. рис. 4.8.
- 3) Все атомные окружности имеют длину 2.

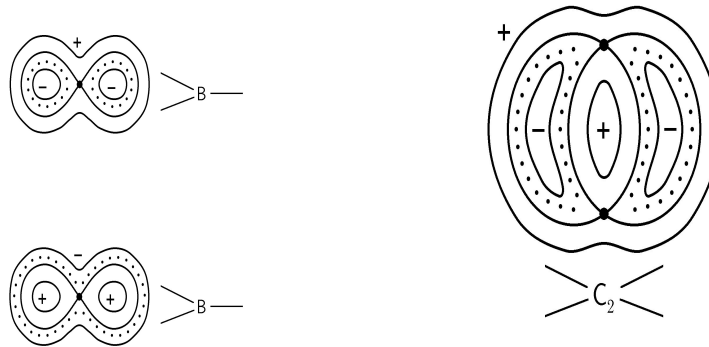


Рис. 4.9. Плоские атомы V_1^1, V_1^2, V_2^2 серии \mathcal{V} — атомы B_1 и C_2

Заметим, что плоские атомы V_1^1, V_1^2 и V_2^2 (см. рис. 4.9) не являются бициклическими. Эти атомы обозначены в [9] через B_1 и C_2 и в точности отвечают правильным функциям Морса серий \mathcal{V}^1 и \mathcal{V}^2 , заданным на сфере. Остальные атомы серий \mathcal{V}^1 и \mathcal{V}^2 являются неплоскими и бициклическими.

Определение 4.5.14. Назовем атом $(P, K)^\#$ сложности $n \geq 2$ *вполне бициклическим*, если для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ найдется $\ell, 1 \leq \ell < n$, удовлетворяющее следующим условиям.

- 1) Существуют два простых ориентированных цикла Z_1 и Z_2 в графе K , такие, что $K = Z_1 \cup Z_2$.
- 2) Оба цикла Z_1 и Z_2 положительны по отношению к вершинам $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(\ell)}$ и отрицательны по отношению к остальным $n - k$ вершинам.

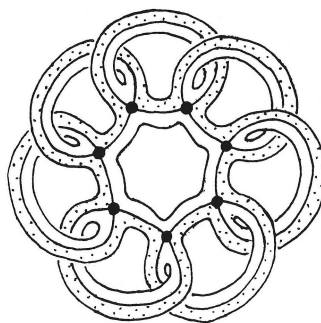


Рис. 4.10. Пример вполне бициклического атома (атом $V_7^1 \approx V_7^2$ серии \mathcal{V})

См. пример на рис. 4.10. Ясно, что определение 4.5.14 эквивалентно следующему. Седловой ориентируемый атом $(P, K)^\#$ сложности $n \geq 2$ является вполне бициклическим тогда и

только тогда, когда любое простое возмущение \tilde{F} функции Морса F на этом атоме является бициклическим возмущением (см. определение 4.5.5).

Следующая теорема является основным результатом работы [146] и приведена здесь (без доказательства) для полноты изложения.

Теорема 4.5.15 (Ю.А. Браилов, Е.А. Кудрявцева [146]). а) *Неплоские атомы с максимальной и абелевой группой симметрий — это в точности вполне бициклические атомы (см. определение 4.5.14).*

б) *Поэтому вполне бициклическими атомами являются атомы V_n^1 , $n \geq 2$, и V_n^2 , $n \geq 3$, показанные на рис. 4.7, и только они. Указанные условия на число n выделяют в сериях \mathcal{V}^1 и \mathcal{V}^2 неплоские атомы (т.е. правильные функции Морса, заданные на ориентируемых поверхностях, негомеоморфных сфере). \square*

Устойчивая C^0 -несопряженность систем на неплоских атомах серии \mathcal{V} . По теореме 4.5.15 все неплоские атомы серии \mathcal{V} являются вполне бициклическими. Но вполне бициклические атомы обладают замечательным свойством: любой класс *простых возмущений* (4.17) является бициклическим, поэтому имеется относительно-продолжимый m -инвариант по отношению к возмущениям этого класса согласно теореме 4.5.6. Напомним, что для любого класса *сложных возмущений* (4.17) имеется относительно-продолжимый Λ -инвариант по отношению к возмущениям этого класса (см. теорему 4.5.1). Подчеркнем еще раз, что последнее свойство Λ -инварианта имеет место для любого сложного атома. Поэтому из теорем 4.5.1 и 4.5.6 получаем следующее

Следствие 4.5.16 ([137, теорема 4], [145, следствие 1.4]). *Пусть функции Морса F с ровно одним критическим седловым значением на поверхности P отвечает неплоский атом серии \mathcal{V} (т.е. вполне бициклический атом). Пусть пара гамильтоновых систем v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Для любых $j \neq j'$ отношения $\Lambda_j(v) : \Lambda_{j'}(v)$ для этих систем не совпадают.*

2) *Значение любого функционала $B(v)$ вида $B(v) = A_1(v) \pm \dots \pm A_r(v)$ (для всевозможных знаков в сумме) на этих системах также не совпадают.*

Тогда системы v_1 и v_2 устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.19), т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены, и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых возмущениях этих систем.

Доказательство. По определению вполне бициклического атома, любое его возмущение является либо сложным, либо бициклическим. Воспользуемся тем, что для любого такого класса возмущений хотя бы один из указанных инвариантов вида $B(v)$ и $\Lambda_{j_1}(v) : \Lambda_{j_2}(v)$ относительно-продолжим по отношению к возмущениям этого класса.

Согласно теореме 4.5.1, инварианты вида $\Lambda_{j_1}(v) : \Lambda_{j_2}(v)$ гамильтоновых систем на атоме являются относительно- C^3 -продолжимыми по отношению к сложным возмущениям (и являются инвариантами C^0 -сопряженности согласно предложению 4.3.2). Подчеркнем еще раз, что эти свойства Λ -инварианта имеют место для любого атома. Отсюда и из условия 1 получаем, что системы v_1 и v_2 C^0 -несопряжены.

Предположим, что системы \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 близки к системам v_1 и v_2 соответственно. Если молекулы возмущения W_1^{num} и W_2^{num} неизоморфны, то системы \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 C^0 -несопряжены (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) и все доказано. Пусть далее молекулы возмущения W_1^{num} и W_2^{num} изоморфны. Если возмущение является сложным, то из условия 1 и указанного выше свойства относительной продолжимости Λ -инварианта относительно сложных возмущений получаем, что системы \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 C^0 -несопряжены (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек), что и требовалось.

Предположим теперь, что возмущение является простым. Значит, оно является бициклическим. Согласно теореме 4.5.6, по крайней мере один из инвариантов вида $B(v)$ является относительно- C^5 -продолжимым относительно рассматриваемого класса бициклических возмущений. Отсюда и из условия 2 получаем, что системы \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 C^0 -несопряжены (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек). \square

В частном случае вполне бициклических атомов *минимальной валентности* 2 следствие 4.5.16 может быть усилено следующим образом.

Следствие 4.5.16' ([145, следствие 1.4']). Пусть функции Морса F с ровно одним критическим седловым значением на поверхности P отвечает вполне бициклический атом валентности 2, т.е. атом V_n^1 серии \mathcal{V}^1 при четном $n = 2g$. Пусть пара гамильтоновых систем v_1 и v_2 из пространства $\mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет следующему условию: значение любого функционала $B(v)$ вида $B(v) = A_1(v) \pm \dots \pm A_\nu(v)$ (для всевозможных знаков в сумме) на этих системах также не совпадают. Тогда системы v_1 и v_2 устойчиво C^0 -несопряжены (определение 4.1.19), т.е. они изначально не были C^0 -сопряжены, и остаются C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых малых возмущениях этих систем.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству следствия 4.5.16, с использованием идеи доказательства следствия 4.5.9'. \square

Из следствия 4.5.16 получаем, что в случае любого неплоского атома серии \mathcal{V} (т.е. для любого вполне бициклического атома) “почти все” пары систем (v, v') на этом атоме устойчиво C^0 -несопряжены. Действительно: для вполне бициклического атома следствие 4.5.10 можно усилить следующим образом.

Следствие 4.5.17 ([137, теорема 2]). Рассмотрим ориентированную поверхность M , негомеоморфную сфере. Пусть F — правильная функция Морса на этой поверхности, седловой критический уровень которой изображен на рис. 4.8 (т.е. окрестность седлового уровня является неплоским атомом серии \mathcal{V} ; явный вид таких функций дается в [146]). Рассмотрим на M правильные функции Морса F_1 и F_2 , попарно эквивалентные F . Тогда пары гамильтоновых систем $v_1 = (\omega_1, F_1)$ и $v_2 = (\omega_2, F_2)$ общего положения устойчиво C^0 -несопряжены вблизи седловых критических уровней.

Другими словами: если функции Морса F отвечает вполне бициклический атом, то пары $(v_1, v_2) \in \mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ устойчиво C^0 -несопряженных (определение 4.1.19) гамильтоновых систем на этом атоме образуют подпространство полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий 4.5.3). \square

Полное описание относительно-продолжимых инвариантов для всех классов простых возмущений систем на атомах серии \mathcal{V} . Опишем полный набор относительно-продолжимых инвариантов по отношению к произвольному фиксированному классу простых возмущений систем на любом атоме серии \mathcal{V} . Следующая теорема обобщает утверждение 4.4.2 об отсутствии относительно-продолжимых инвариантов для простых возмущений систем на любом плоском атоме.

Теорема 4.5.18 (описание полного набора относительно-продолжимых инвариантов [145, теорема 1.6']). Пусть седловой атом либо является плоским, либо принадлежит серии \mathcal{V} (т.е. является максимально симметричным с абелевой группой симметрий). Фиксируем любой класс простых возмущений (4.17) систем на данном атоме. Тогда граф возмущения W^{num} имеет g пар двойных ребер (рис. 4.11), по отношению к каждому из которых возмущение является бициклическим (т.е. имеет тип 2), где $g \geq 0$ — род атома.

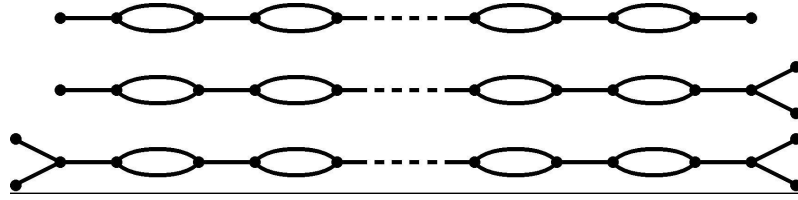


Рис. 4.11. Графы Кронрода-Рибба простых возмущений систем на атомах серии \mathcal{V}

Пусть $B_1(v), \dots, B_g(v)$ — набор относительно- C^5 -продолжимых m -инвариантов, отвечающих двойным рёбрам графа возмущения W^{num} согласно теореме 4.5.6. Тогда любая пара систем (v, v') на данном атоме обладает следующими свойствами:

(А) Если $B_i(v) = B_i(v')$ для любого $i, 1 \leq i \leq g$, то при подходящих малых (в смысле C^∞ -топологии) возмущениях систем v, v' данного класса, возмущённые системы \tilde{v}, \tilde{v}' C^0 -сопряжены в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек. Более того, для любого малого (в смысле C^5 -топологии) возмущения \tilde{v} одной системы из указанного класса простых возмущений существует малое (в смысле C^∞ -топологии) возмущение \tilde{v}' другой системы, такое что эти возмущения \tilde{v} и \tilde{v}' C^0 -сопряжены в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек. В частности, любой относительно-продолжимый инвариант сопряженности гамильтоновых систем на данном атоме по отношению к данному классу простых возмущений является функцией от m -инвариантов B_1, \dots, B_g .

(В) Если $B_i(v) \neq B_i(v')$ для некоторого $i, 1 \leq i \leq g$, то при любых малых (в смысле C^5 -топологии) возмущениях систем v, v' данного класса возмущений, возмущённые системы \tilde{v}, \tilde{v}' C^0 -несопряжены в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек.

Доказательство. Предположим, что атом плоский, т.е. $g = 0$. Согласно утверждению 4.4.2, для такого атома нет ни одного относительно-продолжимого инварианта и выполнено требуемое свойство (А).

Предположим теперь, что атом является неплоским (т.е. рода $g > 0$) и максимально симметричным, с абелевой группой симметрий. Из того, что ориентированный граф K имеет вид, указанный на рис. 4.8, нетрудно выводится, что граф возмущения W^{num} имеет g пар двойных рёбер (см. рис. 4.11) и по отношению к каждой из этих пар возмущение является бициклическим. Требуемое свойство (В) следует из относительной продолжимости инвариантов $B_i(v)$ и определения 4.1.22 относительно-продолжимого инварианта.

Осталось доказать требуемое свойство (А). Проведем доказательство для “торического” (т.е. рода 1) атома C_1 сложности 2 и валентности 2 (рис. 4.6). Доказательство в общем случае проводится совершенно аналогично, и мы его опускаем.

Шаг 1. Опишем сначала два (функционально независимых) относительно-продолжимых инварианта $B_+ = B_+(v)$ и $B_- = B_-(v)$ по отношению к простым возмущениям систем на атоме C_1 (рис. 4.6). Для этих инвариантов возмущённые C^0 -инварианты $\tilde{B}_+ = \tilde{B}_+(\tilde{v})$ и $\tilde{B}_- = \tilde{B}_-(\tilde{v})$ имеют непересекающиеся области определения: инвариант \tilde{B}_+ определен на полупространстве возмущений вида $\{c_1 < c_2\}$, а инвариант \tilde{B}_- определен на полупространстве возмущений вида $\{c_1 > c_2\}$.

Из §4.5.2 получаем, что для возмущений вида $c_1 < c_2$ относительно-продолжимый m -инвариант имеет вид

$$B_+(v) = A_1(v) + A_2(v)$$

для подходящих ориентаций атомных окружностей O_1 и O_2 атома. Для возмущений вида $c_1 > c_2$ относительно-продолжимый m -инвариант будет иметь вид $B_-(v) = A_1(v) - A_2(v)$.

(Отсюда, из предложения 4.3.11 (а) и следствия 4.3.30 (А) заключаем, что оба относительно-продолжимых инварианта B_+ и B_- являются инвариантами C^0 -сопряженности систем на атоме C_1 , и кроме них на атоме C_1 имеется еще ровно один C^0 -инвариант $\mathbb{R}\Lambda(v) = \Lambda_1(v) : \Lambda_2(v)$, так что все три инварианта $\mathbb{R}\Lambda(v)$ и $B_{\pm}(v)$ функционально независимы и образуют полный набор инвариантов C^0 -сопряженности ростков систем на атоме C_1 , см. определение 4.1.18.)

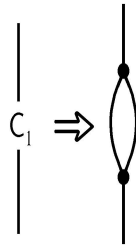


Рис. 4.12. Граф Кронрода-Риба простого возмущения системы на атоме C_1

Определим теперь значение возмущенного инварианта \tilde{B}_+ на возмущенных системах \tilde{v} вида $c_1 < c_2$. Граф Кронрода-Риба гамильтониана возмущенной системы \tilde{v} на атоме C_1 имеет вид, показанный на рис. 4.12. Рассмотрим на двух внутренних ребрах e_1, e_2 графа Кронрода-Риба числа $\Pi_{e_1}(\tilde{v})$ и $\Pi_{e_2}(\tilde{v})$ соответственно, являющиеся минимумами функций периода возмущенной системы на этих ребрах. Согласно теореме 4.5.6, m -инвариант $B_+(v)$ относительно-продолжим, более того разность минимумов $\tilde{B}_+(\tilde{v}) = \Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_2}(\tilde{v})$ функций периода на этих двух ребрах стремится к $B_+(v)$:

$$\tilde{B}_+(\tilde{v}) \rightarrow B_+(v) \quad \text{при} \quad \tilde{v} \rightarrow v.$$

Это и означает относительную продолжимость инварианта $B_+(v)$ по отношению к возмущениям вида $c_1 < c_2$, так как число $\tilde{B}_+(\tilde{v})$, по определению, является C^0 -инвариантом. Следовательно, если для двух систем v и v' значения $B_+(v)$ и $B_+(v')$ различны, то эти системы относительно-устойчиво не C^0 -сопряжены. То есть, в этом случае будет выполнено требуемое свойство (А) для атома C_1 .

Шаг 2. Докажем теперь требуемое свойство (А) для атома C_1 . Допустим, что $B_+(v) = B_+(v')$ для двух систем v и v' на атоме $C_1 = (P, K)^\#$. Предположим, что задано достаточно малое возмущение \tilde{v} вида $c_1 < c_2$ системы v . Покажем, что при подходящем малом возмущении \tilde{v}' вида $c_1 < c_2$ системы v' возмущенные системы \tilde{v} и \tilde{v}' будут C^0 -сопряженными.

Как и в случае “сферических” (т.е. плоских) атомов (см. доказательство утверждения 4.4.2, случай 2 шага 3), возьмем для системы v' однопараметрическое возмущение \tilde{v}'_θ с параметром $\theta = c'_2 - c'_1 > 0$. Как и в случае плоских атомов, сопоставим системе \tilde{v} систему \tilde{v}'_θ этого семейства (с подходящим значением параметра $\theta > 0$), имеющую такое же значение метки $\Pi_{e_2}(\tilde{v})$ на ребре e_2 , т.е. определим число $\theta > 0$ условием $\Pi_{e_2}(\tilde{v}) = \Pi_{e_2}(\tilde{v}'_\theta)$.

Далее, если $\Pi_{e_1}(\tilde{v}) = \Pi_{e_1}(\tilde{v}'_\theta)$, то все доказано. В противном случае нам нужно изменить возмущенную систему \tilde{v}'_θ так, чтобы ее метка $\Pi_{e_2}(\tilde{v}'_\theta)$ на ребре e_2 не изменилась, а метка $\Pi_{e_1}(\tilde{v}'_\theta)$ на ребре e_1 увеличилась на величину

$$\Delta := \Pi_{e_1}(\tilde{v}) - \Pi_{e_1}(\tilde{v}'_\theta) = \tilde{B}_+(\tilde{v}) - \tilde{B}_+(\tilde{v}'_\theta).$$

Величина $\Delta \in \mathbb{R}$ мала по абсолютной величине, так как близка к невозмущенному значению $B_+(v) - B_+(v') = 0$ по предположению. Изменим возмущенную систему \tilde{v}'_θ на каком-либо ребре графа K , не содержащемся в цикле $\zeta(e_2)$ (скажем, на ребре K_1), применив операцию “вклейки-вырезания ленточки” длины Δ в рассматриваемое ребро K_1 (см. [9] или доказательство леммы 4.3.20). Другими словами, мы подходящим образом (путем малого возмущения)

меняем систему \tilde{v}'_θ вблизи ребра K_1 . Это можно сделать при помощи малого возмущения, так как величина $|\Delta|$ мала (см. выше). Обозначим полученную систему через \tilde{v}' . Тогда метка $\Pi_{e_2}(\tilde{v}')$ на ребре e_2 останется равной

$$\Pi_{e_2}(\tilde{v}') = \Pi_{e_2}(\tilde{v}'_\theta) = \Pi_{e_2}(\tilde{v}),$$

а метка $\Pi_{e_1}(\tilde{v}')$ на ребре e_1 увеличится на величину Δ , т.е. станет равной

$$\Pi_{e_1}(\tilde{v}') = \Pi_{e_1}(\tilde{v}'_\theta) + \Delta = \Pi_{e_1}(\tilde{v}).$$

В результате мы построили простое возмущение \tilde{v}' системы v' , имеющее ту же Π -метку на каждом внутреннем ребре графа возмущения, что и простое возмущение \tilde{v} системы v . Отсюда, с учетом §4.4.1, системы \tilde{v} и \tilde{v}' C^0 -сопряжены, что и требовалось.

Аналогичные рассуждения проводятся для класса простых возмущений вида $c_1 > c_2$ и инварианта B_- . \square

Отсутствие продолжимых инвариантов и максимальная область продолжимости относительно-продолжимого m -инварианта систем на атомах серии \mathcal{V} . Выведем из теоремы 4.5.18 отсутствие продолжимых инвариантов для неплоских атомов серии \mathcal{V} , а также следующее свойство относительно-продолжимых m -инвариантов для этих атомов: каждый такой инвариант относительно-продолжим только по отношению к своему классу β бициклических возмущений (в частности, инвариант не продолжим, а лишь относительно-продолжим). То есть мы покажем, что для относительно-продолжимого m -инварианта $B = B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ на вполне бициклическом атоме область определения продолженного инварианта $\tilde{B}(\tilde{v})$ нельзя расширить за область β , отвечающую бициклическим возмущениям данного класса. Более точно, инвариант $B(v)$ не продолжается ни в какой открытый страт Максвелла α , смежный с данным классом β бициклических возмущений, и тем более, в целую окрестность данной системы v (т.е. класс β бициклических возмущений является максимальной связной открытой областью в пространстве возмущений систем на данном атоме, по отношению к которой инвариант B продолжим). Другими словами, инвариант $B(v)$ не является относительно-продолжимым по отношению к любому открытому страту Максвелла α , смежному с данным классом β бициклических возмущений.

Пусть, как выше, g — род данного седлового атома $(P, K)^\#$, ν — число атомных окружностей атома, n — сложность атома (т.е. число критических точек на данном особом слое), ∂ — валентность атома (т.е. число граничных окружностей поверхности P). Следующее утверждение обобщает утверждение 4.4.2.

Следствие 4.5.19 (Об отсутствии продолжимых инвариантов). *Пусть седловой атом $(P, K)^\#$ либо является плоским, либо принадлежит серии \mathcal{V} (т.е. является максимально симметричным с абелевой группой симметрий). Тогда в пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ гамильтоновых систем на этом атоме не существует ни одного продолжимого инварианта (определение 4.1.20). Более того, для любой пары систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме существует такая система $v_0 \in \mathbf{H}(P, K)$, что системы v_i и v_0 можно сделать C^0 -сопряженными в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек путем сколь угодно малых (в смысле C^∞ -топологии) простых возмущений этих систем, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим любой класс α простых возмущений $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F})$ вида $\{c_{\sigma(1)} < \dots < c_{\sigma(n)}\}$ систем $v = (\omega, F) \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме, где $\sigma \in \Sigma_n$ — любая перестановка. Здесь обозначено $c_i := \tilde{F}(\tilde{x}_i)$, где \tilde{x}_i — критическая точка функции \tilde{F} , близкая к точке x_i , $1 \leq i \leq n$. Множество уровня $\tilde{F}^{-1}(a)$ функции \tilde{F} несвязно и отвечает паре внутренних ребер (образующих симметричное двойное ребро) молекулы возмущения тогда и только тогда, когда

$$c_{\sigma(\partial_- + 2i - 2)} < a < c_{\sigma(\partial_- + 2i - 1)} \tag{4.48}$$

для некоторого $1 \leq i \leq g$. Обозначим через γ_i связную компоненту множества уровня $\tilde{F}^{-1}(a)$ при (4.48). Указанному двойному ребру отвечает относительно-продолжимый инвариант $B_i = B_i(\tilde{v})$ для класса $\beta_i \supseteq \alpha$ бициклических возмущений \tilde{v} вида $c_{\sigma(\partial_-+2i-2)} < c_{\sigma(\partial_-+2i-1)}$. Указанные инварианты $B_1(v), \dots, B_g(v)$ образуют полный набор относительно-продолжимых m -инвариантов на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ по отношению к классу α простых возмущений (см. теорему 4.5.18).

Теперь при любом $i \in \{1, \dots, g\}$ рассмотрим класс β'_i бициклических возмущений $\tilde{v} = (\tilde{\omega}, \tilde{F})$ вида $c_{\sigma(\partial_-+2i-1)} < c_{\sigma(\partial_-+2i-2)}$ (заметим, что классы β_i и β'_i являются смежными, т.е. имеют общую границу вида $\{c_{\sigma(\partial_-+2i-1)} = c_{\sigma(\partial_-+2i-2)}\}$ и $\beta_i \cap \beta'_i = \emptyset$). При $\tilde{v} \in \beta'_i$ и

$$c_{\sigma(\partial_-+2i-1)} < a < c_{\sigma(\partial_-+2i-2)}$$

множество уровня $\tilde{F}^{-1}(a)$ функции \tilde{F} несвязно и отвечает паре внутренних ребер (образующих симметричное двойное ребро) молекулы возмущения. Обозначим через γ'_i связную компоненту указанного множества уровня $\tilde{F}^{-1}(a)$. Указанному двойному ребру отвечает относительно-продолжимый инвариант $B'_i = B'_i(\tilde{v})$ по отношению к классу β'_i бициклических возмущений. Рассмотрим любой класс $\alpha' \subseteq \beta'_1 \cap \dots \cap \beta'_g$ простых возмущений \tilde{v} систем $v \in \mathbf{H}(P, K)$ на данном атоме. Указанные инварианты $B'_1(v), \dots, B'_g(v)$ образуют полный набор относительно-продолжимых m -инвариантов на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$ по отношению к классу α' простых возмущений (см. теорему 4.5.18).

В группе $H_1(K; \mathbb{R}) \simeq H_1(P; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ имеем естественный базис, состоящий из классов $a_i := [\gamma_i]$, $b_i := [\gamma'_i] \in H_1(P; \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq g$, и $d_j := [S_j] \in H_1(P; \mathbb{R})$, $1 \leq j \leq \partial - 1$, где S_1, \dots, S_{∂} — ориентированные граничные окружности поверхности P .

Шаг 2. Для любых двух систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(P, K)$ рассмотрим 1-коцикл $\mu \in H^1(K; \mathbb{R})$, определенный своими значениями на указанных базисных 1-циклах следующим образом:

$$\langle \mu, d_j \rangle = 0, \quad \langle \mu, 2a_i \rangle = B_i(v_1), \quad \langle \mu, 2b_i \rangle = B'_i(v_2).$$

Возьмем любую систему $v_0 \in \mathbf{H}(P, K)$ с грубой m -меткой $[m(v_0)] = \mu$ (см. определение 4.2.9). Так как $\langle [m(v_0)], d_j \rangle = \langle \mu, d_j \rangle = 0$, то

$$\begin{aligned} B_i(v_0) &= \langle [m(v_0)], 2a_i \rangle = \langle \mu, 2a_i \rangle = B_i(v_1), \quad 1 \leq i \leq g, \\ B'_i(v_0) &= \langle [m(v_0)], 2b_i \rangle = \langle \mu, 2b_i \rangle = B'_i(v_2), \quad 1 \leq i \leq g. \end{aligned}$$

Значит, по теореме 4.5.18 (А) при подходящих малых возмущениях систем v_0, v_1 класса α возмущённые системы $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1 \in \alpha$ будут C^0 -сопряжены, а при подходящих малых возмущениях систем v_0, v_2 класса α' возмущённые системы $\tilde{v}'_0, \tilde{v}'_2 \in \alpha'$ будут C^0 -сопряжены (в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек).

Шаг 3. Предположим теперь, что $I = I(v) - C^\infty$ -продолжимый инвариант на пространстве $\mathbf{H}(P, K)$. Из доказанного выше, с учетом п.3 определения 4.1.20 получаем $I(v_0) = I(v_1)$ и $I(v_0) = I(v_2)$. Поэтому $I(v_1) = I(v_2)$, т.е. инвариант I есть константа, что противоречит его продолжимости (см. определение 4.1.20). \square

Следствие 4.5.20 (О максимальной области продолжимости относительно-продолжимого m -инварианта). Пусть седловой атом $(P, K)^\#$ является вполне бициклическим, т.е. неплоским и максимально симметричным с абелевой группой симметрий. Фиксируем любой класс β бициклических возмущений систем на этом атоме, с фиксированными циклами Z_1 и Z_2 . Рассмотрим относительно-продолжимый m -инвариант вида $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$, отвечающий этому классу бициклических возмущений, где $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle -$ главное значение периода движения в силу системы v по атомной окружности O_i ($1 \leq i \leq \nu$), $[Z_1] - [Z_2] = [O_1] + \dots + [O_\nu]$. Фиксируем также любой класс α простых возмущений вида $\{c_1 < \dots < c_n\}$, не содержащийся в данном классе β бициклических возмущений, но имеющий с ним общую границу вида $\{c_k = c_{k+1}\}$.

Тогда инвариант $B(v)$ не является относительно-продолжимым по отношению к возмущениям класса α . Более того:

Фиксируем любой набор $B_1(v), \dots, B_g(v)$ относительно-продолжимых m -инвариантов по отношению к возмущениям класса α . Тогда m -инварианты $B(v), B_1(v), \dots, B_g(v)$ линейно независимы, т.е. порождают $(g+1)$ -мерное векторное подпространство в $(n+1)$ -мерном векторном пространстве всех \mathbb{R} -значных функций от грубого m -инварианта гамильтоновых систем на данном атоме (см. замечание 4.2.10). В частности, для любой системы v на данном атоме существует система v' , для которой $\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\Lambda(v')$, $B_i(v) = B_i(v')$, $i = 1, \dots, g$, но $B(v) \neq B(v')$. Поэтому системы v, v' можно сделать C^0 -сопряженными в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек при подходящих малых (в смысле C^∞ -топологии) возмущениях \tilde{v}, \tilde{v}' класса α , но нельзя сделать C^0 -сопряженными ни в каких связных инвариантных окрестностях своих множеств особых точек, ни при каких малых (в смысле C^r -топологии) возмущениях класса β .

Доказательство. Докажем линейную независимость цикла $[Z_1] - [Z_2] = [O_1] + \dots + [O_\nu]$ и аналогичных g циклов, отвечающих инвариантам B_1, \dots, B_g , в группе $H_1(P; \mathbb{R})$. Это следует из того, что в некотором базисе $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ группы $H_1(\tilde{P}; \mathbb{R})$ (отвечающем простым возмущениям класса α) эти циклы имеют вид $2b_\ell$ и $2a_1, \dots, 2a_g$. Здесь \tilde{P} — замкнутая поверхность, получающаяся из поверхности P заклеиванием каждой граничной компоненты диском.

Поэтому для любой системы v на данном атоме существует система v' , для которой значения инвариантов B_1, \dots, B_g на системах v, v' совпадают, а $B(v) \neq B(v')$. Так как значения всех g относительно-продолжимых инвариантов совпадают на системах v, v' , то, по теореме 4.5.18 (о полноте набора относительно-продолжимых инвариантов), эти системы можно сделать сопряженными (в некоторых связных замкнутых инвариантных окрестностях своих множеств особых точек) при подходящих возмущениях класса $\alpha = \{c_1 < \dots < c_n\}$. \square

Связь относительно-продолжимых m -инвариантов и C^0 -инвариантов гамильтоновых систем на атомах серии \mathcal{V} . Изучим следующий вопрос: являются ли построенные выше относительно-продолжимые m -инварианты C^1 -сопряженности гамильтоновых систем на вполне бициклических атомах инвариантами C^0 -сопряженности, и вообще как связаны относительно-продолжимые m -инварианты с m -инвариантами C^0 -сопряженности?

Мы уже изучили этот вопрос для любых бициклических атомов в теореме 4.3.27 (А, Б) и следствии 4.3.30. Из этих утверждений и леммы 4.3.9 получаем следующее более точное утверждение в случае атомов серии \mathcal{V} (в частности, для всех вполне бициклических атомов).

Теорема 4.5.21 (полный инвариант C^0 -сопряженности ростков гамильтоновых систем на атомах серии \mathcal{V} , связь с относительно-продолжимыми m -инвариантами [145, теорема 6.2]). *Случай 1 ($n = 2g$). Рассмотрим любой атом V_n^1 серии \mathcal{V}^1 при четном $n = 2g$, т.е. любой вполне бициклический атом валентности 2. Тогда отношение $\mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ и инварианты C^1 -сопряженности $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$, $1 \leq i \leq \nu = n$, отвечающие атомным окружностям, образуют полный набор функционально независимых инвариантов C^0 -сопряженности ростков гамильтоновых систем на данном атоме. То есть, подпространство $C_{\hat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ (см. предложение 4.3.11) не зависит от $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ и совпадает с линейной оболочкой классов атомных окружностей. В частности, любой относительно-продолжимый m -инвариант вида $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ является инвариантом C^0 -сопряженности систем на таком атоме.*

Случай 2 ($n = 2g + 1$). Рассмотрим любой атом серии \mathcal{V} нечетной сложности $n = 2g + 1$, в частности, любой вполне бициклический атом валентности 3. Пусть для определенности атом имеет две положительные граничные окружности и одну отрицательную. Рассмотрим положительный цикл Z_+ графа K , отвечающий одной из положительных

окружностей атома. Тогда при любом значении $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{<0}^n$ Λ -инварианта подпространство $C_{\widehat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ совпадает с ортогональным дополнением к циклу Z_+ в линейной оболочке классов атомных окружностей, относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widehat{\Lambda}}$. В частности, относительно-продолжимые t -инварианты вида $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ и их нетривиальные линейные комбинации с постоянными коэффициентами не являются инвариантами C^0 -сопряженности систем на таком атоме (а являются лишь инвариантами C^1 -сопряженности).

Случай 3 ($n = 2g + 2$). Рассмотрим любой атом V_n^2 серии \mathcal{V}^2 при четном $n = 2g + 2$, в частности, любой вполне бициклический атом валентности 4. Рассмотрим в графе K положительный цикл Z_+ и отрицательный цикл Z_- , отвечающие одной из положительных и одной из отрицательных окружностей атома. Тогда при любом значении $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{<0}^n$ Λ -инварианта подпространство $C_{\widehat{\Lambda}} \subset H_1(K; \mathbb{R})$ совпадает с ортогональным дополнением к паре циклов Z_+ и Z_- в линейной оболочке классов атомных окружностей, относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widehat{\Lambda}}$. В частности, относительно-продолжимые t -инварианты вида $B(v) = A_1(v) + \dots + A_\nu(v)$ и их нетривиальные линейные комбинации с постоянными коэффициентами не являются инвариантами C^0 -сопряженности систем на таком атоме (а являются лишь инвариантами C^1 -сопряженности).

Другими словами, для любого базиса $z_{1, \widehat{\Lambda}}, \dots, z_{2g, \widehat{\Lambda}}$ в описанном подпространстве $C_{\widehat{\Lambda}}$ размерности $2g$, $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{<0}^n$, инварианты вида $z_{i, \Lambda(v)}(v) = \langle [t(v)], z_{i, \Lambda(v)} \rangle$, $1 \leq i \leq 2g$, вместе с отношением $\mathbb{R}\Lambda(v) = (\Lambda_1(v) : \dots : \Lambda_n(v))$ образуют полный набор инвариантов C^0 -сопряженности ростков гамильтоновых систем на данном атоме. \square

В случае неплоских атомов серии \mathcal{V} (т.е. вполне бициклических атомов) как следствие получаем, что:

- Для одной “половины” таких атомов (т.е. имеющих валентность 2) все относительно-продолжимые инварианты являются C^0 -инвариантами систем на таком атоме, поэтому для любой пары систем на таком атоме из C^0 -несопряженности любых возмущенных систем (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) следует C^0 -несопряженность ростков самих невозмущенных систем (т.е. из второго условия определения 4.1.19 следует первое условие).
- Для другой же “половины” таких атомов (т.е. имеющих валентность 3 или 4) класс относительно-продолжимых инвариантов и класс C^0 -инвариантов ростков систем “не связаны друг с другом” (точнее, никакой из этих классов не содержится в другом), поэтому два условия из определения 4.1.19 не зависят друг от друга.

Сформулируем это в виде отдельного следствия.

Напомним (см. определение 2.5.1 (C)), что возмущение системы, заданной на каком-то атоме, называется простым, если оно “разрушает” атом и превращает его в простой “граф возмущения”. В случае атомов серии \mathcal{V} отсюда следует, что у возмущенного гамильтониана все критические значения попарно различны, т.е. происходит полное расщепление критических уровней гамильтониана. Из теорем 4.5.18 и 4.5.21 (о полном наборе относительно-продолжимых инвариантов и полном наборе инвариантов C^0 -сопряженности) получаем

Следствие 4.5.22. *Рассмотрим любой сложный атом серии \mathcal{V} (в частности, любой вполне бициклический атом). Тогда:*

- (а) Почти все пары систем v, v' на этом атоме, которые можно сделать C^0 -сопряженными (в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при подходящих сколь угодно малых (в смысле C^r -топологии) простых возмущениях, имеют C^0 -несопряженные друг другу ростки.

(б) Если валентность атома равна двум или атом плоский, то любые две системы v, v' на этом атоме, имеющие C^0 -сопряженные ростки, останутся C^0 -сопряженными (в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при подходящих малых (в смысле C^∞ -топологии) простых возмущениях \tilde{v} и \tilde{v}' этих систем, для любого класса простых возмущений. Наоборот, если валентность атома больше минимальной (т.е. равна 3 или 4) и атом неплоский, то почти все пары систем v, v' на этом атоме, имеющие C^0 -сопряженные ростки, становятся C^0 -несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при любых простых малых (в смысле C^r -топологии) возмущениях \tilde{v} и \tilde{v}' этих систем.

Доказательство. Пусть задан атом серии \mathcal{V} , $g \geq 0$ — род атома, $\partial \in \{2, 3, 4\}$ — валентность атома, $n = 2g + \partial - 2 \geq 2$ — сложность атома. Пусть α — любой класс простых возмущений систем на данном атоме, и пусть B_1, \dots, B_g — набор относительно-продолжимых m -инвариантов по отношению к этому классу (см. теорему 4.5.18).

(а) Согласно теореме 4.5.18 две системы v и v' на этом атоме можно сделать C^0 -сопряженными (в некоторых инвариантных связных окрестностях своих множеств особых точек) при подходящих сколь угодно малых возмущениях класса α тогда и только тогда, когда выполнена система равенств

$$B_k(v) = B_k(v'), \quad 1 \leq k \leq g. \quad (4.49)$$

Так как $n \geq 2$, то для почти любой пары (v, v') , удовлетворяющей системе (4.49), имеем $\mathbb{R}\Lambda(v) \neq \mathbb{R}\Lambda(v')$, а значит ростки систем v, v' не являются C^0 -сопряженными (по предложению 4.3.2 или 4.3.11 Болсинова-Фоменко).

(б) Предположим, что валентность атома $\partial = 2$ (т.е. $n = 2g$) или атом плоский. По теореме 4.5.21 ростки двух систем v и v' на этом атоме C^0 -сопряжены тогда и только тогда, когда выполнена система равенств

$$\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\Lambda(v'), \quad A_i(v) = A_i(v'), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.50)$$

Но $B_k(v) = \sum_{i=1}^n \pm A_i(v)$, поэтому из системы равенств (4.50) следует система равенств (4.49), что и требовалось.

Предположим, что валентность атома $\partial = 3$ (т.е. $n = 2g + 1$). По теореме 4.5.21 существуют гладкие \mathbb{R} -значные функции $\lambda_i = \lambda_i(\mathbb{R}\hat{\Lambda})$, $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $1 \leq i \leq 2g$, обладающие следующим свойством: ростки двух систем v и v' на этом атоме C^0 -сопряжены тогда и только тогда, когда выполнена система равенств

$$\mathbb{R}\Lambda(v) = \mathbb{R}\Lambda(v'), \quad A_j(v) + \lambda_j(\Lambda(v))A_n(v) = A_j(v') + \lambda_j(\Lambda(v'))A_n(v'), \quad 1 \leq j \leq 2g. \quad (4.51)$$

Но при $g \geq 1$ почти любая пара (v, v') , удовлетворяющая системе равенств (4.51), не удовлетворяет системе равенств (4.49), что и требовалось.

Предположим теперь, что валентность атома $\partial = 4$ (т.е. $n = 2g + 2$). По теореме 4.5.21 существуют гладкие \mathbb{R} -значные функции $\lambda_i = \lambda_i(\mathbb{R}\hat{\Lambda})$ и $\mu_i = \mu_i(\mathbb{R}\hat{\Lambda})$, $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $1 \leq i \leq 2g$, обладающие следующим свойством: ростки двух систем v и v' на этом атоме C^0 -сопряжены тогда и только тогда, когда выполнена система равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Lambda(v) &= \mathbb{R}\Lambda(v'), \\ A_j(v) + \lambda_j(\Lambda(v))A_{n-1}(v) + \mu_j(\Lambda(v))A_n(v) &= A_j(v') + \lambda_j(\Lambda(v'))A_{n-1}(v') + \mu_j(\Lambda(v'))A_n(v'), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$1 \leq j \leq 2g$. Но при $g \geq 1$ почти любая пара (v, v') , удовлетворяющая системе равенств (4.52), не удовлетворяет системе равенств (4.49), что и требовалось. \square

В частности, для любого сложного атома серии \mathcal{V} (в частности, для любого вполне бициклического атома) существуют пары систем, для которых выполнено условие 1 и не выполнено условие 2 определения 4.1.19 (устойчивой C^0 -несопряженности), а для любого неплоского атома валентности 3 или 4 (и только для такого), принадлежащего серии \mathcal{V} , существуют пары систем, для которых выполнено условие 2 и не выполнено условие 1 этого определения.

Глава 5

Дифференцируемые инварианты 3-мерных несжимаемых течений

В этой главе излагаются результаты работ автора [138, 139, 142].

5.1 Введение

В математической физике актуальным является изучение топологических инвариантов магнитных полей, т.е. инвариантов бездивергентных векторных полей (называемых также несжимаемыми течениями) в компактной области 3-мерного евклидова пространства. Интегральные линии такого векторного поля (называемые магнитными линиями) попарно не пересекаются и заполняют всю область, касаясь ее границы, и тем самым образуют “распределенный узел” в данной области (т.е. узел “распределен” по всей области). Хорошо известен инвариант Хопфа — “спиральность” магнитного поля, равный усредненному коэффициенту зацепления магнитных линий (т.е. соответствующего распределенного узла) [5]. Казалось вполне правдоподобным, что могут существовать и другие (не сводящиеся к спиральности) инварианты магнитных полей, которые бы отвечали (например, через процедуру усреднения) каким-либо инвариантам узлов, отличным от коэффициента зацепления. Однако автору удалось доказать, что все “достаточно гладкие” топологические инварианты магнитных полей в 3-мерной магнитной трубке (например, в полнотории) выражаются через спиральность.

Изложим краткую историю вопроса.

Понятие спиральности восходит к Гельмгольцу и Кельвину (см. [93]). Своим вторым рождением в магнитной гидродинамике это понятие обязано Волтьеру [128], а в идеальной гидродинамике — Моффату [105], который обнаружил его топологический характер (см. также [108]). Слово “спиральность” было впервые введено в [105] и с тех пор широко использовалось в механике жидкости и магнитной гидродинамике. Интересные обзоры по истории вопроса можно найти в [106, 107]. Важнейшее свойство этой величины состоит в ее инвариантности: *спиральность*

$$\mathcal{H}(\bar{B}) := \int_Q B \wedge d^{-1}B$$

бездивергентного векторного поля \bar{B} в односвязной области $Q \subset \mathbb{R}^3$, касающегося его границы, сохраняется при действии на \bar{B} любого сохраняющего объемы диффеоморфизма области Q [6, теорема 1.4]. Здесь

$$B := i_{\bar{B}}\mu$$

— 2-форма, отвечающая векторному полю \bar{B} , μ — элемент объема. В этом смысле $\mathcal{H}(\bar{B})$ является *топологическим инвариантом*: хотя эта величина определена с помощью метрики, любой сохраняющий объемы диффеоморфизм переводит поле \bar{B} в поле с такой же спиральностью.

Кроме интегрального определения (см. выше) у спиральности есть эквивалентное “топологическое” определение. А именно, спиральность тесно связана с известным топологическим инвариантом зацеплений — коэффициентом зацепления. Дело в том, что несжимаемое течение \bar{B} в 3-мерной области Q можно рассматривать как “распределенное зацепление” в Q , т.е. слоение области Q интегральными кривыми поля \bar{B} . Такими слоениями являются, например, расслоения области Q на окружности, включая расслоение Хопфа $Q = S^3 \rightarrow S^2$ со слоем окружность. Классический инвариант Хопфа для отображений $p : S^3 \rightarrow S^2$ можно определить двумя способами: топологическим (как коэффициент зацепления прообразов двух произвольных точек на S^2) и интегральным (как значение $\mathcal{H}(B) = \int B \wedge d^{-1}B$ для любой 2-формы $B := p^*\omega$ на S^3 , которая является прообразом нормированной формы площади ω на S^2) (см. [6, пример 1.19]). Определение спиральности $\mathcal{H}(\bar{B}) := \int_Q B \wedge d^{-1}B$ произвольного бездивергентного векторного поля \bar{B} на трехмерном односвязном многообразии Q с элементом объема μ есть непосредственное обобщение интегрального определения инварианта Хопфа. Топологический аналог является более сложным и приводит к понятиям асимптотического и среднего коэффициентов зацепления траекторий поля вместо зацепления замкнутых кривых в классическом определении [5]. В.И. Арнольд доказал [5] такую эргодическую интерпретацию спиральности: средний коэффициент самозацепления $\lambda_B := \int_{Q \times Q} \lambda_B(x_1, x_2)$ бездивергентного векторного поля B на односвязном 3-мерном многообразии Q с элементом объема μ совпадает со спиральностью поля:

$$\lambda_B = \mathcal{H}(B).$$

Здесь $\lambda_B(x_1, x_2)$ — это асимптотический коэффициент зацепления траекторий поля [5, §4.1].

Итак, функционал спиральности является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным (а потому и $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантным) функционалом

$$\mathcal{H} : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

на пространстве

$$\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) := \{B \in \Omega^2(Q) \mid B \text{ точна и не имеет нулей, } j_{\partial Q}^* B = 0\}$$

точных несжимаемых течений **без нулей** на 3-мерном компактном многообразии Q , где $j_{\partial Q} : \partial Q \rightarrow Q$ — отображение включения. Здесь $\mathcal{D}^0(Q) = \text{Diff}^0(Q)$ — группа изотопных тождественному диффеоморфизмов 3-многообразия Q , $\mathcal{D}_\mu^0(Q) = S\text{Diff}^0(Q) \subset \mathcal{D}^0(Q)$ — подгруппа сохраняющих объемы диффеоморфизмов.

Возникают вопросы: существуют ли другие $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные (соответственно $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантные) функционалы на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, обладающие теми или иными дополнительными свойствами (например, представимые в интегральном виде или в виде асимптотического инварианта зацепления)?

Д. Серре доказал, что любой инвариант “первого порядка” уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области в \mathbb{R}^3 выражается через энергию и спиральность [120].

В §4.1.1, на основе результатов §4.5, мы изучили C^5 -непрерывные C^0 -траекторные инварианты (автоматически являющиеся $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантными функционалами) на C^5 -открытом подмножестве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{exact, nondeg}}(Q)$ пространства

$$\mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) = \{(B, f) \mid B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q), f \in C^\infty(Q) \text{ боттовская, } B \wedge df = 0, j_{\partial Q}^*(df) = 0\}$$

интегрируемых точных несжимаемых течений **без нулей** в Q (см. замечание 4.1.4). То есть, $(B, f) \in \mathbf{I}\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, если B — точная 2-форма без нулей на Q , f — гладкая функция Ботта в Q , постоянная на интегральных кривых поля ядер формы B и на компонентах границы Q , причем интегральные кривые поля ядер формы B касаются границы Q (в действительности, условие точности 2-формы B не было наложено в замечании 4.1.4, однако полученные там результаты дословно переносятся на случай точных 2-форм B).

П.М. Ахметьев обнаружил несколько $\mathcal{D}_\mu^0(Q)$ -инвариантных функционалов на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений в Q , названные им *высшими моментами спиральности*, а именно: две “квадратичные спиральности” $\mathcal{H}^{(2)}$ и $\mathcal{H}^{[2]}$, моменты спиральности третьего порядка и т.п., представимые в виде асимптотических инвариантов зацеплений [43]. Инварианты Ахметьева кодируются некоторыми связными графами, а именно: моменты спиральности k -го порядка кодируются графами с k вершинами.

С инвариантами несжимаемых течений в “магнитных трубках” $Q = D^2 \times S^1$ (или, более общо, $Q = M \times S^1$, где M — компактная ориентируемая поверхность) тесно связаны инварианты сопряженности на группе $\mathcal{D}_\omega(D^2) = S\text{Diff}(D^2)$ симплектоморфизмов круга $M = D^2$ (соответственно поверхности M), точнее на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ этой группы. Дело в том, что если $Q = D^2 \times S^1$ — полноторие с элементом объема μ , \overline{B} — бездивергентное векторное поле без нулей в Q , и существует сечение Пуанкаре (т.е. односвязная двумерная поверхность $P \subset Q$, трансверсальная векторному полю \overline{B} и пересекающая все его интегральные траектории), то отображение Пуанкаре (т.е. отображение последования) $\varphi : P \rightarrow P$ будет сохранять форму площади $\omega := B|_P$, т.е. будет являться элементом группы $\mathcal{D}_\omega(D^2)$. При действии на поле \overline{B} любого диффеоморфизма $\psi \in \mathcal{D}^0(Q)$ отображение Пуанкаре φ продеформируется, однако оно будет принадлежать классу сопряженности элемента φ в группе $\mathcal{D}_\omega(D^2)$. Поэтому инвариантам сопряженности на группе $\mathcal{D}_\omega(D^2)$ естественно отвечают $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные функционалы на пространстве $\mathcal{B}(Q)$ несжимаемых течений в полнотории (по крайней мере, для несжимаемых течений, обладающих фиксированным сечением Пуанкаре P с точностью до изотопности и фиксированным потоком $\int_P B$ через эту поверхность).

Е. Калаби обнаружил [62] инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ и доказал, что он является гомоморфизмом в группу $(\mathbb{R}, +)$. В указанном выше смысле *инварианту Калаби*

$$\text{Cal} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

отвечает функционал спиральности, умноженный на $-1/2$ (см. (5.5)). Другие известные инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ — норма Хофера [87], число неподвижных точек и спектральные инварианты.

А. Баньяга [46] показал, что любой гомоморфизм группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ в группу $(\mathbb{R}, +)$ имеет вид $h \circ \text{Cal}$, где $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторый гомоморфизм группы $(\mathbb{R}, +)$ в себя.

В данной главе изучаются дифференцируемые $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантные функционалы на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$; получены следующие основные результаты:

- доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ группы $\mathcal{D}_\omega(D^2)$ симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, выражается через инвариант Калаби (теоремы 5.2.7 и 5.2.10);
- доказано, что любой $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантный функционал $I : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3-мерном многообразии Q , имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, **локально** на $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с непустой границей ∂Q — **глобально** на множестве 2-форм $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, допускающих секущую поверхность $P \subset Q$, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через функционал спиральности (теорема 5.3.9).

Сформулируем эти результаты в виде одной теоремы.

Теорема 5.1.1 (см. теоремы 5.2.7, 5.3.9, лемму 5.3.8). (А) Пусть $I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2) \rightarrow \mathbb{R}$ — инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$, дифференцируемый на C^1 -открытом подмножестве $U \subset \widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно

C^1 -топологии на U . Тогда всюду в U этот инвариант выражается через инвариант Калаби, т.е. имеет вид $I|_U = h \circ \text{Cal}|_U$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(B) Пусть Q — компактное гладкое 3-мерное многообразие, и $\mathfrak{K}^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ — такое подпространство, что $H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) = \mathfrak{K}^\perp \oplus \ker(j_{\partial Q})_*$ и \mathfrak{K}^\perp является хорошим (определение 5.3.1 (B)). Пусть функционал $I : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ всех точных несжимаемых течений без нулей на Q является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным, дифференцируем на C^1 -открытом подмножестве $U \subseteq \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ и имеет регулярную (по отношению к $\mathcal{A}_{\mathfrak{K}^\perp}$ -калибровке) и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на U . Тогда C^1 -локально на U (т.е. в некоторой достаточно малой C^1 -окрестности U_B любой 2-формы $B \in U$ со свойством $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}^\perp}(B) \neq 0$) функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_{U_B} = h_B \circ \mathcal{H}_{\mathfrak{K}^\perp}|_{U_B}$ для некоторых функций $h_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Если при этом $Q = M \times S^1$ и U состоит из всех точных 2-форм без нулей на Q , которые обладают сечением, изотопным поверхности $M \times \{0\}$, т.е. имеют вид ψ^*B , где $\psi \in \mathcal{D}^0(Q)$, $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ и $B|_{M \times \{0\}}$ задает положительную ориентацию, то всюду на U функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_U = h \circ \mathcal{H}_{\mathfrak{K}^\perp}|_U$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(C) Пусть $Q = M \times S^1$ и $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \mid \text{Flux}(B) = \text{const}\}$ — совокупность точных несжимаемых течений фиксированного когомологического класса (т.е. имеющих фиксированный поток) без нулей, где $\text{Flux} : \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q}), \mathbb{R})$, $[\Pi] \mapsto \int_{\Pi} B$, — функционал потока на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, см. определение 5.3.1 (A). Пусть подмножество $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ состоит из всех 2-форм $B \in \mathcal{B}'$, обладающих секущей поверхностью $P \subset Q$, изотопной поверхности $M \times \{0\}$ и трансверсальной интегральным кривым поля $\ker B$ (т.е. \mathcal{B}'' состоит из всех 2-форм вида $\psi^*B \in \mathcal{B}'$, где $\psi \in \mathcal{D}^0(Q)$ и $B|_{M \times \{0\}}$ задает положительную ориентацию). Пусть функционал $I : \mathcal{B}'' \rightarrow \mathbb{R}$ является $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантным, дифференцируем и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на \mathcal{B}'' . Тогда всюду на \mathcal{B}'' функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I = h \circ \mathcal{H}_{\mathfrak{K}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

5.2 Дифференцируемые инварианты сопряженности симплектоморфизмов круга

В этом разделе излагаются результаты работы автора [138].

Аннотация: Пусть $\mathcal{D}_\omega = \text{SDiff}(D^2)$ — группа диффеоморфизмов круга $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ на себя, сохраняющих форму площади $\omega = dx \wedge dy$, т.е. группа симплектоморфизмов круга (D^2, ω) . Изучаются инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ — универсальной накрывающей группы \mathcal{D}_ω . Мы доказываем, что любой инвариант сопряженности на $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, имеющий регулярную и C^1 -непрерывную производную, выражается через инвариант Калаби.

В действительности, все конструкции и результаты данного раздела обобщаются на случай произвольной компактной ориентируемой поверхности (вместо круга D^2). Это фактически следует из следующего раздела §5.3 (см. пример 5.3.3, лемму 5.3.8 (B) и теорему 5.3.9), в котором изучаются (более интересные для приложений) инварианты несжимаемых течений на компактных 3-мерных многообразиях.

Перейдем к точным формулировкам.

5.2.1 Инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$

Рассмотрим группу $\mathcal{D}_\omega = \text{SDiff}(D^2)$ сохраняющих площади диффеоморфизмов (т.е. симплектоморфизмов) круга с C^∞ -топологией. Эта группа линейно связна, так как она является

(строгим деформационным) ретрактом [111] линейно связной [122] группы $\text{Diff}(D^2)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Более того, для любого симплектоморфизма $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$ существует кусочно-гладкое семейство симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, такое что $\varphi_0 = \text{id}_{D^2}$ и $\varphi_1 = \varphi$. Ясно, что при любом $t \in [0, 1]$ поле скоростей $\frac{d}{dt}\varphi_t$ является гамильтоновым на (D^2, ω) с функцией Гамильтона $H_t \in C^\infty(D^2)$, постоянной на окружности ∂D^2 . Без ограничения общности мы можем и будем считать, что $H_t|_{\partial D^2} = 0$; обозначим множество гладких функций на D^2 с этим свойством через $C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$. Итак, рассматриваемое семейство симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$ эквивалентным образом задается (кусочно-гладким) семейством функций

$$H_t \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.1)$$

Универсальную накрывающую $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ группы \mathcal{D}_ω можно определить так. Любой ее элемент $\tilde{\varphi}$ задается (кусочно-гладким) семейством симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, таким что $\varphi_0 = \text{id}_{D^2}$. Два семейства $\varphi_t, \psi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, с $\varphi_0 = \psi_0 = \text{id}_{D^2}$ задают один и тот же элемент группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 = \psi_1$ и пути $\varphi_t(1, 0)$ и $\psi_t(1, 0)$ гомотопны на окружности ∂D^2 относительно концов. Имеем каноническую проекцию $p : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathcal{D}_\omega$, $\tilde{\varphi} \mapsto \varphi_1$.

Определение 5.2.1. Функция $I : G \rightarrow \mathbb{R}$ на группе G называется *инвариантом сопряженности*, если $I(ghg^{-1}) = I(h)$ для любых элементов $g, h \in G$.

Пример 5.2.2. (А) *Инвариант Калаби* [62] на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ определяется формулой

$$\text{Cal}(\tilde{\varphi}) := \int_0^1 \left(\int_{D^2} H_t \omega \right) dt, \quad \tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega,$$

где $H_t \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$, $0 \leq t \leq 1$ — семейство функций (5.1), отвечающее кусочно-гладкому семейству симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi_0 = \text{id}_{D^2}$, задающему элемент $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$.

(В) Еще один инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ — *норма Хоффера* [87]

$$\|\tilde{\varphi}\|_\infty := \inf \int_0^1 \left(\max_{D^2} |H_t| \right) dt, \quad \tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega,$$

где нижняя грань берется по всем семействам симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, задающим элемент $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, H_t — соответствующее семейство функций (5.1).

(С) Инварианты сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ можно получить из инвариантов сопряженности на \mathcal{D}_ω путем их “поднятия” при проекции $p : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathcal{D}_\omega$. Примеры инвариантов сопряженности на группе \mathcal{D}_ω — это *количество неподвижных точек*

$$F_0(\varphi) := |\text{Fix}(\varphi)|$$

и *площадь множества неподвижных точек*

$$F_2(\varphi) := \int_{\text{Fix}(\varphi)} \omega.$$

Инвариант F_0 C^1 -непрерывен (т.е. C^1 -локально постоянен) на C^1 -открытом и C^∞ -плотном подмножестве $U \subset \mathcal{D}_\omega$, состоящем из диффеоморфизмов, все неподвижные точки которых невырождены. На каждой компоненте $U_k = U \cap F_0^{-1}(k)$ этого подмножества получаем инвариант сопряженности $F_{0,k}$, сопоставляющий любому диффеоморфизму неупорядоченный набор собственных значений его линеаризаций в неподвижных точках, $k \in \mathbb{N}$. Инвариант F_2 включен в 1-параметрическое семейство инвариантов сопряженности

$$F_{2,s}(\varphi) := \int_{S_\varphi^{-1}[0,s]} \omega, \quad s \in [0, +\infty],$$

на \mathcal{D}_ω , где s — параметр семейства, а непрерывная функция $S_\varphi : \text{Fix}(\varphi) \rightarrow [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ определена условиями $\min_{\text{Fix}(\varphi)} S_\varphi = 0$ и $S_\varphi(x, y) - S_\varphi(x_0, y_0) = \int_\gamma \alpha - \int_{\varphi \circ \gamma} \alpha$ для любых точек $(x_0, y_0), (x, y) \in \text{Fix}(\varphi)$. Здесь $\alpha := x dy$, γ — путь из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) в круге D^2 . Легко показывается, что $F_2 = F_{2,+\infty}$, функция S_φ определена корректно (т.е. указанная разность не зависит от выбора пути γ) и ее максимум $M(\varphi) := \max_{\text{Fix}(\varphi)} S_\varphi$ является инвариантом сопряженности (известным как один из *спектральных инвариантов*) на группе \mathcal{D}_ω . Отметим, что семейство инвариантов $F_{2,s}$, $s \in [0, +\infty]$, не было упомянуто в работе [138].

Приведем доказательство следующей леммы, которое было опущено в работе [138].

Лемма 5.2.3. *Функция $\text{Cal} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ определена корректно и является гомоморфизмом в абелеву группу $(\mathbb{R}, +)$, а потому является инвариантом сопряженности.*

Доказательство. Покажем, что функция $\text{Cal} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ определена корректно, т.е. ее значение на элементе $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ не зависит от выбора пути $\{\varphi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$, задающего элемент $\tilde{\varphi}$. Действительно, пусть семейство симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$ задает тривиальный элемент группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, т.е. $\varphi_0 = \varphi_1 = \text{id}_{D^2}$ и путь $\varphi_t(1, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, стягиваем на окружности ∂D^2 . Пусть $H_t \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$ — соответствующее 1-параметрическое семейство функций. Следующая цепочка равенств показывает корректную определенность функции Cal :

$$\int_0^1 \left(\int_{D^2} H_t \omega \right) dt = -\frac{1}{2} \int_V (\alpha - H_t dt) \wedge (\omega - dH_t \wedge dt) = -\frac{1}{2} \int_V (\alpha + df) \wedge \omega = 0,$$

где $\alpha := x dy$, f — некоторая непрерывная и (кусочно-)гладкая функция на цилиндре $V := D^2 \times [0, 1]$, такая что функция $f|_{D^2 \times \{0,1\}}$ постоянна. Первое равенство цепочки следует из формулы Стокса и равенства $H_t|_{\partial D^2} = 0$:

$$\int_{D^2 \times [0,1]} \alpha \wedge dH_t \wedge dt = \int_{D^2 \times [0,1]} d(H_t dt \wedge \alpha) + H_t dt \wedge d\alpha = \int_{\partial(D^2 \times [0,1])} H_t dt \wedge \alpha + \int_{D^2 \times [0,1]} H_t \omega \wedge dt = \int_{D^2 \times [0,1]} H_t \omega \wedge dt.$$

Второе равенство доказывается с помощью следующих наблюдений: (а) существует (кусочно-гладкая) замена координат в цилиндре $D^2 \times [0, 1]$, оставляющая неподвижными основания цилиндра $D^2 \times \{0, 1\}$, переводящая каждый “горизонтальный” диск $D^2 \times \{t\}$ в себя и переводящая “вертикальные” отрезки $\{(x, y)\} \times [0, 1]$ — образующие цилиндра — в траектории $\{(\varphi_t(x, y), t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ соответствующего (неавтономного) гамильтонова потока; (б) при такой замене координат 2-форма $\omega - dH_t \wedge dt$ перейдет в 2-форму ω , а потому 1-форма $\alpha - H_t dt$ перейдет в такую 1-форму $\tilde{\alpha}$ на $D^2 \times [0, 1]$, что $d\tilde{\alpha} = \omega$; поэтому $\tilde{\alpha} = \alpha + df$ для некоторой непрерывной и кусочно-гладкой функции f на $D^2 \times [0, 1]$ (при этом функция $f|_{D^2 \times \{0,1\}}$ постоянна, так как основания цилиндра неподвижны при рассматриваемой замене координат ввиду $\varphi_0 = \varphi_1 = \text{id}_{D^2}$ и замкнутый путь $\varphi_t(1, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, стягиваем на окружности ∂D^2). Третье равенство цепочки следует из замкнутости 2-формы ω , формулы Стокса и равенства $f|_{D^2 \times \{0,1\}} = \text{const}$:

$$\int_{D^2 \times [0,1]} df \wedge \omega = \int_{D^2 \times [0,1]} d(f\omega) = \int_{\partial(D^2 \times [0,1])} f\omega = \int_{D^2 \times \partial[0,1]} f\omega = 0.$$

Покажем, что функция $\text{Cal} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ является гомоморфизмом в абелеву группу $(\mathbb{R}, +)$. Действительно, пусть элементы $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ задаются семействами симплектоморфизмов $\varphi_t, \psi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, соответственно, и пусть $H_t, G_t \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$ — соответствующие семейства функций. Тогда элемент $\tilde{\varphi}\tilde{\psi}$ задается следующим семейством симплектоморфизмов: ψ_{2t} при

$0 \leq t \leq 1/2$ и $\varphi_{2t-1}\psi_1$ при $1/2 \leq t \leq 1$, а соответствующее семейство функций есть $2H_{2t}$ при $0 \leq t \leq 1/2$ и $2G_{2t-1}$ при $1/2 \leq t \leq 1$. Поэтому

$$\text{Cal}(\tilde{\varphi}\tilde{\psi}) = \int_0^{1/2} \left(\int_{D^2} 2H_{2t}\omega \right) dt + \int_{1/2}^1 \left(\int_{D^2} 2G_{2t-1}\omega \right) dt = \int_0^1 \left(\int_{D^2} H_t\omega \right) dt + \int_0^1 \left(\int_{D^2} G_t\omega \right) dt = \text{Cal}(\tilde{\varphi}) + \text{Cal}(\tilde{\psi}),$$

что и требовалось показать. Итак, Cal является гомоморфизмом в абелеву группу $(\mathbb{R}, +)$, а потому является инвариантом сопряженности. \square

5.2.2 Дифференцируемые функции на группе $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$

Мотивировка следующего определения такова. Группа $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ — это “бесконечномерная группа Ли”, причем “касательное пространство” $T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ в любой его точке $\tilde{\varphi}$ состоит из всех гамильтоновых (или бездивергентных) векторных полей с функциями Гамильтона $H \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$. Поэтому векторное пространство $T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{D}}_\omega = \text{SVect}(D^2)$ можно отождествить с пространством $C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$.

Определение 5.2.4. Функцию $I : \tilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *дифференцируемой* в точке $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{D}}_\omega$, если существует линейный вещественнозначный функционал на векторном пространстве $C_0^\infty(D^2, \partial D^2) \approx \text{SVect}(D^2) = T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{D}}_\omega$, обозначаемый через $D_{\tilde{\varphi}}I$ и называемый *производной* функции I в точке $\tilde{\varphi}$, такой что для любого гладкого семейства симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, со свойством $\varphi_0 = \text{id}_{D^2}$ и для соответствующего семейства функций $H_t \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, выполнено

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}) = D_{\tilde{\varphi}}I(H_0).$$

Здесь $\varepsilon > 0$, через $\tilde{\varphi}_t$ обозначен элемент группы $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$, задаваемый семейством симплектоморфизмов $\varphi_\tau \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq \tau \leq t$, если $t \geq 0$ (семейством $\varphi_{-\tau} \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq \tau \leq -t$, если $t < 0$). Производную $D_{\tilde{\varphi}}I$ назовем *регулярной*, если она является регулярным элементом двойственного пространства $C_0^\infty(D^2, \partial D^2)^*$, т.е. ее значение на любой функции $H \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$ имеет вид $D_{\tilde{\varphi}}I(H) = \int_{D^2} K_I(\tilde{\varphi}, x, y)H(x, y)dx dy$ для некоторой измеримой функции $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ в круге D^2 , называемой *плотностью* функционала $D_{\tilde{\varphi}}I$.

Определение 5.2.5. Пусть функция $I : \tilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема всюду на $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ и имеет регулярную производную. Будем говорить, что производная *непрерывна относительно C^k -топологии на $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$* (для $k \geq 0$), если ее плотность $K_I = K_I(\tilde{\varphi}, x, y)$ непрерывна на $\tilde{\mathcal{D}}_\omega \times D^2$ относительно топологии прямого произведения, где группа $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ снабжена C^k -топологией.

Пример 5.2.6. (А) Инвариант Калаби дифференцируем всюду на $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$. Его производная регулярна и имеет постоянную плотность $K_{\text{Cal}} = 1$. Поэтому его производная непрерывна относительно любой топологии на группе $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$.

(В) Норма Хофера является липшицевой функцией на $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ (в силу неравенства треугольника), но не дифференцируема (например, в точке id_{D^2}).

(С) Инварианты F_0, F_2 и M на группе \mathcal{D}_ω не являются непрерывными. Но на C^1 -открытом и C^∞ -плотном подмножестве $U \subset \mathcal{D}_\omega$ они дифференцируемы и их производные имеют плотности $K_{F_0} = K_{F_2} = 0$ и $K_M(\varphi) = \delta_{z_{\max}(\varphi)} - \delta_{z_{\min}(\varphi)}$, $\varphi \in U$. Здесь $z_{\max}(\varphi), z_{\min}(\varphi) \in \text{Fix}(\varphi)$ — точки максимума и минимума функции S_φ , δ_z — дельта-функция в точке $z \in D^2$. Поэтому производная $D_\varphi M$ сингулярна в точках $\varphi \in U$, таких что $M(\varphi) > 0$. Аналогично инвариант $F_{0,k}$ на C^1 -открытом и C^∞ -плотном подмножестве $U_k \subset \mathcal{D}_\omega$ всюду дифференцируем, однако его производная $D_\varphi F_{0,k}$ сингулярна в любой точке $\varphi \in U_k$, $k \in \mathbb{N}$.

5.2.3 Основной результат

Наш результат аналогичен следующим результатам. Любой гомоморфизм группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ в группу $(\mathbb{R}, +)$ имеет вид $h \circ \text{Cal}$ для некоторого гомоморфизма $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ [46]. Любой инвариант “первого порядка” уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области в \mathbb{R}^3 выражается через энергию и спиральность [120].

Теорема 5.2.7 ([138, теорема 1]). *Пусть $I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ — инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, дифференцируемый всюду на $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно C^1 -топологии на $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$. Тогда этот инвариант выражается через инвариант Калаби, т.е. имеет вид $I = h \circ \text{Cal}$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Лемма 5.2.8 ([138, лемма]). *Пусть $I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ — инвариант сопряженности, дифференцируемый в точке $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$. Тогда для любого элемента $\tilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, коммутирующего с $\tilde{\varphi}$, и любой функции $H \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$ выполнено равенство $D_{\tilde{\varphi}}I(H) = D_{\tilde{\varphi}}I(H \circ \psi)$, где $\psi := p(\tilde{\psi}) \in \mathcal{D}_\omega$, $p : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathcal{D}_\omega$ — проекция.*

Доказательство. Действительно, в обозначениях определения 5.2.4 имеем

$$I(\tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi} \tilde{\psi}) = I(\tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\psi} \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\chi}_t \tilde{\varphi}),$$

где $\tilde{\chi}_t := \tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\psi}$. Семейству $\tilde{\chi}_t$ отвечает семейство функций $H_t \circ \psi \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$. Дифференцируя доказанное соотношение $I(\tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\chi}_t \tilde{\varphi})$ по t при $t = 0$, получаем требуемое равенство для $H = H_0$. Лемма доказана. \square

Следствие 5.2.9 ([138, следствие]). *Предположим, что в условиях леммы производная $D_{\tilde{\varphi}}I$ в точке $\tilde{\varphi}$ регулярна и ее плотность $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ непрерывна на круге D^2 . Тогда верно равенство $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) = K_I(\tilde{\varphi}, \psi(\cdot))$ на круге D^2 . В частности, $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) = K_I(\tilde{\varphi}, \varphi(\cdot))$, т.е. функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ постоянна на любой φ -орбите, а потому и на замыкании любой φ -орбиты в круге D^2 .*

Доказательство. Действительно, равенство из леммы переписывается в виде

$$\int_{D^2} K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) H \omega = \int_{D^2} K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) (H \circ \psi) \omega, \quad H \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2).$$

Так как диффеоморфизм $\psi \in \mathcal{D}_\omega$ сохраняет 2-форму ω , то левая часть этого равенства равна интегралу $\int_{D^2} K_I(\tilde{\varphi}, \psi(\cdot)) (H \circ \psi) \omega$. Так как полученное равенство верно для любой функции $H \in C_0^\infty(D^2, \partial D^2)$ и функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ непрерывна на круге D^2 , получаем требуемое равенство. Следствие доказано. \square

Доказательство теоремы 5.2.7. Покажем, что для любого элемента $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ соответствующая функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) \in C(D^2)$ постоянна на D^2 . Напомним, что симплектоморфизм называется *топологически транзитивным*, если орбита некоторой точки при этом симплектоморфизме всюду плотна в круге D^2 . Согласно результату [55, theorem 3.1] из консервативной динамики, симплектоморфизм $\varphi = p(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{D}_\omega$ можно C^1 -аппроксимировать последовательностью $\{\varphi_n\}$ топологически транзитивных симплектоморфизмов на D^2 . Такой симплектоморфизм φ_n можно C^1 -аппроксимировать гладким симплектоморфизмом $\varphi_n^s \in \mathcal{D}_\omega$. Ввиду C^1 -открытости связной компоненты единицы в \mathcal{D}_ω существует последовательность $\tilde{\varphi}_n^s \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ такая, что $\varphi_n^s = p(\tilde{\varphi}_n^s)$ и $\tilde{\varphi}_n^s \rightarrow \tilde{\varphi}$ при $n \rightarrow \infty$.

Итак, для любой пары точек $z, z' \in D^2$ существуют последовательности $\{\tilde{\varphi}_n^s\}$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ и $\{z_n\}, \{z'_n\}$ в D^2 такие, что $\tilde{\varphi}_n^s \rightarrow \tilde{\varphi}$ в C^1 -топологии, $z_n \rightarrow z$, $z'_n \rightarrow z'$, и любая пара z_n, z'_n содержится в одной орбите при симплектоморфизме $p(\tilde{\varphi}_n^s)$. Значит, $K_I(\tilde{\varphi}_n^s, z_n) = K_I(\tilde{\varphi}_n^s, z'_n)$. В силу следствия отображение $K_I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow C(D^2)$ непрерывно в смысле C^1 -топологии на

$\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ и C^0 -топологии на $C(D^2)$. Значит, $K_I(\tilde{\varphi}, z)$ и $K_I(\tilde{\varphi}, z')$ суть пределы для $\{K_I(\tilde{\varphi}_n^s, z_n) = K_I(\tilde{\varphi}_n^s, z'_n)\}$, а потому совпадают, откуда $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) = \text{const}$ на D^2 .

Имеем $D_{\tilde{\varphi}}I(H) = K_I(\tilde{\varphi}) \int_{D^2} H\omega = K_I(\tilde{\varphi}) d\text{Cal}_{\tilde{\varphi}}(H)$. Значит, функция I локально постоянна на любом множестве уровня $\text{Cal}^{-1}(c)$ инварианта Калаби, $c \in \mathbb{R}$. Хорошо известно, что любое множество уровня $\text{Cal}^{-1}(c)$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ линейно связно (это очевидно следует из того, что семейства функций (5.1) со средним значением c образуют выпуклое подмножество). Поэтому на множестве $\text{Cal}^{-1}(c)$ функция I постоянна, т.е. равна некоторой константе $h(c)$, зависящей только от $c \in \mathbb{R}$ (для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Таким образом, $I(\tilde{\varphi}) = h(\text{Cal}(\tilde{\varphi}))$ для любого $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$. Теорема 5.2.7 доказана. \square

Аналогично доказывается следующая

Теорема 5.2.10 ([138, теорема 2]). Пусть $I : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ — инвариант сопряженности на группе $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$, дифференцируемый на C^1 -открытом подмножестве $U \subset \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно C^1 -топологии на $U \subset \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$. Тогда инвариант $I|_U$ постоянен на любой линейно-связной компоненте множества уровня $U \cap \text{Cal}^{-1}(c)$ инварианта Калаби в U , $c \in \mathbb{R}$.

Известно (см. теорему 4.3.16 Болсинова-Фоменко или [9, 54, 11]) описание инвариантов сопряженности на множестве “невырожденных интегрируемых симплектоморфизмов” в группе гомеоморфизмов

$$\text{Homeo}(M^2) \supset \text{SDiff}(M^2),$$

где M^2 — замкнутая ориентируемая поверхность, снабженная формой площади ω . (Указанное множество состоит из отображений за время 1 потоков гамильтоновых векторных полей на (M^2, ω) с морсовскими функциями Гамильтона $H \in C^\infty(M^2)$, не зависящими от времени.) Автором исследовалась (см. теорему 4.2.2, утверждение 4.4.2, теоремы 4.5.1, 4.5.6, следствия 4.5.9, 4.5.10, 4.5.16, 4.5.17, 4.5.19, 4.5.20, или [137, 146]) непрерывность этих инвариантов (и их комбинаций) относительно C^∞ -топологии на $C^\infty(M^2)$.

5.3 Дифференцируемые инварианты точных несжимаемых течений на 3-мерных многообразиях

В этом разделе излагаются результаты работы автора [139], а также [142].

Аннотация: Пусть Q — гладкое компактное связное ориентированное 3-мерное многообразие с гладким краем ∂Q . Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q)$ — множество точных 2-форм $B \in \Omega^2(Q)$ таких, что $j_{\partial Q}^* B = 0$, где $j_{\partial Q} : \partial Q \rightarrow Q$ — отображение включения. Группа $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(Q)$ изотопных тождественному диффеоморфизмов Q действует на множестве \mathcal{B} в виде $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $(h, B) \mapsto h^*B$. Пусть $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}^\circ(Q)$ — множество 2-форм $B \in \mathcal{B}$ без нулей. Мы доказываем, что любой \mathcal{D}^0 -инвариантный функционал $I : \mathcal{B}^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на \mathcal{B}° (а в случае $Q = M \times S^1$ с $\partial Q \neq \emptyset$ — глобально на множестве 2-форм $B \in \mathcal{B}^\circ$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через спиральность.

5.3.1 Примеры \mathcal{D}^0 -инвариантных функционалов на множестве \mathcal{B} точных несжимаемых течений

Определим поток и спиральность.

Определение 5.3.1. (А) Пусть $\Pi \in C_2(Q)$ — 2-цепь в Q с границей $\partial\Pi \in C_1(\partial Q)$. Пусть $[\Pi] \in \mathfrak{K}$ — проекция относительного класса гомологий $[\Pi] \in H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q})$ в факторпространстве

$$\mathfrak{K} := H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q}) / \text{Im } p_* \cong \ker(j_{\partial Q})_* = \partial(\mathfrak{K}), \quad (5.2)$$

где $p_* : H_2(Q; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q})$, $(j_{\partial Q})_* : H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Q; \mathbb{Q})$. Функционал

$$\text{Flux} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{K}, \mathbb{R}), \quad \text{Flux}(B)[\Pi] := \int_{\Pi} B, \quad B \in \mathcal{B},$$

назовем *функционалом потока* на \mathcal{B} .

(В) Пусть $\mathfrak{K}^{\perp} \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ — такое векторное подпространство, что $H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) = \mathfrak{K}^{\perp} \oplus \ker(j_{\partial Q})_*$. Функционалом *спиральности* на множестве \mathcal{B} относительно подпространства \mathfrak{K}^{\perp} назовем функционал

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}^{\perp}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_{\mathfrak{K}^{\perp}}(B) := \int_Q B \wedge A, \quad B \in \mathcal{B}, \quad (5.3)$$

где $A \in \Omega^1(Q)$ — произвольная 1-форма на Q , такая, что $dA = B$ и $\oint_{\gamma} A = 0$ для любой петли $\gamma : S^1 \rightarrow \partial Q$ гомологического класса $[\gamma] \in \mathfrak{K}^{\perp}$. Подпространство \mathfrak{K}^{\perp} назовем *хорошим*, если каждая связная компонента ∂Q содержит петлю γ такую, что $0 \neq [\gamma] \in \mathfrak{K}^{\perp}$.

Следующая лемма, отсутствовавшая в работе [139], показывает корректность определения 5.3.1.

Лемма 5.3.2. *Определение 5.3.1 корректно, т.е.*

- (А) поток $\int_{\Pi} B$ не зависит от представителя Π смежного класса $[\Pi] \in \mathfrak{K}$,
- (В) 1-форма A требуемого вида существует,
- (С) спиральность $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}^{\perp}}(B)$ не зависит от выбора 1-формы A .

Доказательство. (А) Если $\tilde{\Pi}$ — другая 2-цепь со свойствами $\partial\tilde{\Pi} \in C_1(\partial Q)$ и $[\tilde{\Pi}] = [\Pi]$, то $\Pi - \tilde{\Pi} - \hat{\Pi} =: \hat{\Pi}_{\partial} \in C_2(\partial Q)$ для некоторой замкнутой 2-цепи $\hat{\Pi} \in Z_2(Q)$, и в силу формулы Стокса и равенств $B = dA$, $\partial\hat{\Pi} = 0$ и $j_{\partial Q_*} B = 0$ имеем

$$\int_{\Pi} B - \int_{\tilde{\Pi}} B = \int_{\hat{\Pi}} B + \int_{\hat{\Pi}_{\partial}} B = \int_{\hat{\Pi}} dA + \int_{\hat{\Pi}_{\partial}} j_{\partial Q_*} B = 0.$$

(В) Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n : S^1 \rightarrow \partial Q$ — такие петли на ∂Q , гомологические классы которых $[\gamma_i] \in H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ образуют базис пространства \mathfrak{K}^{\perp} , где $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{K}^{\perp}$. Так как отображение $j_{\partial Q_*}|_{\mathfrak{K}^{\perp}}$ инъективно по предположению, то гомологические классы $j_{\partial Q_*}[\gamma_i] \in H_1(Q; \mathbb{Q})$ линейно независимы в $H_1(Q; \mathbb{Q})$. Поэтому найдутся классы 1-когомологий $a_1, \dots, a_n \in H^1(Q; \mathbb{Q})$ такие, что

$$\langle a_k, [\gamma_i] \rangle = \delta_{ki}, \quad 1 \leq k, \ell \leq n.$$

Домножив эти классы на подходящие натуральные числа $q_k \in \mathbb{N}$, получим целочисленные классы 1-когомологий $q_k a_k$, которые (как хорошо известно) реализуемы гладкими отображениями $p_k : Q \rightarrow S^1$ в окружность, т.е. являются классами когомологий де Рама $q_k a_k = p_k^*[d\varphi]$ замкнутых 1-форм $p_k^*(d\varphi)$, где φ — угловая координата на окружности S^1 . Так как 2-форма B точна, имеем $B = dA_1$ для некоторой 1-формы $A_1 \in \Omega^1(Q)$. Определим числа $\lambda_i := (1/q_i) \int_{\gamma_i} A_1 \in \mathbb{R}$ и 1-форму $A := A_1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k^*(d\varphi)$. Тогда $dA = dA_1 = B$ и $\int_{\gamma_i} A = \lambda_i q_i - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle q_k a_k, [\gamma_i] \rangle = 0$ при $1 \leq i \leq n$, т.е. построенная 1-форма A обладает требуемыми свойствами.

(С) Если \tilde{A} — другая 1-форма со свойствами $d\tilde{A} = B$ и $\int_{\gamma_i} \tilde{A} = 0$ при $1 \leq i \leq n$, то ввиду равенств $d(A - \tilde{A}) = B - B = 0$ и $j_{\partial Q_*} B = 0$ и формулы Стокса имеем

$$\int_Q B \wedge (A - \tilde{A}) = \int_Q dA \wedge (A - \tilde{A}) = \int_Q d(A \wedge (A - \tilde{A}))$$

$$= \int_{\partial Q} A \wedge (A - \tilde{A}) = \int_{\partial Q} A \wedge df = \int_{\partial Q} fdA - d(fA) = \int_{\partial Q} fB = 0.$$

Здесь 1-форма $j_{\partial Q}^*(A - \tilde{A})$ точна (т.е. представима в виде df для некоторой функции $f \in C^\infty(\partial Q)$), так как ее интеграл по любой петле $\gamma : S^1 \rightarrow \partial Q$ равен 0. Действительно: для петель γ классов $[\gamma] \in \mathfrak{K}^\perp$ это верно по построению, а любая петля γ класса $[\gamma] \in \ker [j_{\partial Q}^* : H_1(\partial Q; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Q; \mathbb{Q})]$ после домножения на некоторое натуральное число $q \in \mathbb{N}$ становится гомологичной нулю в $H_1(Q)$, т.е. $q[\gamma] = \partial\Pi$ для некоторой 2-цепи $\Pi \in C^2(Q)$, поэтому по формуле Стокса

$$q \int_{\gamma} (A - \tilde{A}) = \int_{\partial\Pi} (A - \tilde{A}) = \int_{\Pi} (dA - d\tilde{A}) = \int_{\Pi} (B - B) = 0.$$

Лемма доказана. \square

Пример 5.3.3. Пусть $Q = M \times S^1$, где M — компактная гладкая ориентированная поверхность с непустым гладким краем. Тогда на M существует точная положительная форма площади $\omega \in \Omega^2(M)$. Пусть $B \in \mathfrak{B}^\circ$ и $j_{M \times \{0\}}^* B = \omega$ (т.е. $M \times \{0\}$ является секущей поверхностью для 2-формы B), $S_1, \dots, S_d \subseteq \partial M$ — граничные окружности, $\pi_M : Q \rightarrow M$ и $\pi_{S^1} : Q \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — проекции. Так как B точна, то в силу [91, 46] существуют диффеоморфизм $\psi \in \mathcal{D}^0$ и функция $H \in C^\infty(Q)$ такие, что

$$B = \psi^* B_{\omega, H}, \quad H|_{S_i \times \{t\}} = \text{const} =: h_i(t), \quad \sum_{j=1}^d h_j(t) \equiv 0 \text{ при } t \in S^1, \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

где

$$B_{\omega, H} := \pi_M^* \omega - dH \wedge d\pi_{S^1}. \quad (5.4)$$

Для $i \in \{1, \dots, d\}$ фиксируем точку $x_i \in S_i$ и пути $\gamma_{ik} \subset M$ из x_i в точки x_k , $k \neq i$. Положим $\Pi_{ik} := \gamma_{ik} \times S^1$. Далее, допуская некоторую вольность, мы иногда обозначаем формы $\pi_M^* \omega$, $\pi_M^* \alpha$ и \mathbb{R}/\mathbb{Z} -значную функцию $t \circ \pi_{S^1}$ на Q через ω , α и t соответственно. Поток и спиральность 2-формы B таковы:

(А) классы $[[M \times \{0\}]]$, $[[\Pi_{12}]]$, \dots , $[[\Pi_{1d}]] \in \mathfrak{K}$ образуют базис в \mathfrak{K} , и поток

$$\begin{aligned} \text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] &= \int_M \omega, \\ \text{Flux}(B)[[\Pi_{\ell k}]] &= - \int_{\Pi_{\ell k}} dH \wedge dt = - \int_{\partial\Pi_{\ell k}} H dt = \int_{S^1} h_\ell(t) dt - \int_{S^1} h_k(t) dt; \end{aligned}$$

(В) для любых $\ell, k \in \{1, \dots, d\}$ возьмем в качестве \mathfrak{K}^\perp подпространство

$$\mathfrak{K}_{\ell k}^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q}),$$

порожденное гомологическими классами петель $\gamma_k := \{x_k\} \times S^1$ и $S_i \times \{0\}$, $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{k\}$. Ясно, что $\mathfrak{K}_{\ell k}^\perp$ является хорошим. По лемме 5.3.4 спиральность

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{11}^\perp}(B) = -2 \int_Q (H - h_1(t)) (\pi_M^* \omega) \wedge (d\pi_{S^1}) =: -2\text{Cal}_{\omega, S_1}(\tilde{\varphi}), \quad (5.5)$$

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell k}^\perp}(B) - \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell \ell}^\perp}(B) = \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell \ell}^\perp}(B) - \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell k}^\perp}(B)) = \text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] \text{Flux}(B)[[\Pi_{\ell k}]] \quad (5.6)$$

при $k \neq \ell$. Здесь $\text{Cal}_{\omega, S_i} : \widetilde{\mathcal{D}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ — гомоморфизм Калаби относительно i -й граничной окружности $S_i \subseteq \partial M$, действующий из группы $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ в группу $(\mathbb{R}, +)$ (его корректная определенность доказывается аналогично §5.2 или [62, 138]), $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ — универсальная накрывающая группы $\mathcal{D}_\omega = \text{Diff}(M, \omega)$ гамильтоновых симплектоморфизмов поверхности (M, ω) с C^∞ -топологией, элемент $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$ определяется 2-формой (5.4) следующим образом. Ввиду трансверсальности поверхностей $M \times \{t\}$ векторному полю \bar{B} , получаем 1-параметрическое семейство отображений $\varphi_t : M \times \{0\} \rightarrow M \times \{t\}$, $0 \leq t < 1$, переводящих любую точку $x \in M \times \{0\}$ в первую точку пересечения с поверхностью $M \times \{t\}$ интегральной траектории векторного поля \bar{B} , выпущенной из точки x . Полученный путь $\varphi_t \in \mathcal{D}_\omega$, $0 \leq t \leq 1$, определяет искомый элемент $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\omega$.

Дадим вывод формул (5.5) и (5.6), которого не было в работе [139].

Лемма 5.3.4. *Верны формулы (5.5) и (5.6).*

Доказательство. Возьмем любую 1-форму $\alpha \in \Omega^1(M)$ такую, что $d\alpha = \omega$ и $\int_{S_i} \alpha = 0$ при $2 \leq i \leq d$. Тогда 1-форма $A_{11} := \alpha - (H - h_1(t))dt$ удовлетворяет требуемым условиям $B = dA_{11}$ и $\oint_{\gamma} A_{11} = 0$ для любой петли $\gamma : S^1 \rightarrow \partial Q$ класса $[\gamma] \in \mathfrak{K}_{11}^{\perp}$. В силу формулы Стокса значения спиральностей имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{11}^{\perp}}(B) &= \int_Q B \wedge A_{11} = \int_Q (\omega - d(H - h_1(t)) \wedge dt) \wedge (\alpha - (H - h_1(t))dt) = \\ &= -2 \int_Q (H - h_1(t))\omega \wedge dt + \int_{\partial Q} (H - h_1(t))\alpha \wedge dt = -2 \int_Q (H - h_1(t))\omega \wedge dt =: -2\text{Cal}_{\omega, S_1}(\tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

Формула (5.5) доказана. Докажем (5.6). Для подпространства $\mathfrak{K}_{1k}^{\perp} \subset H_1(\partial Q)$, порожденного классами петель $S_i \times \{0\}$, $2 \leq i \leq d$, и $\gamma_k = \{x_k\} \times S^1$, 1-форма $A_{1k} := \alpha - (H - h_k(t))dt = A_{11} + (h_k(t) - h_1(t))dt$ на Q удовлетворяет требуемым условиям $B = dA_{1k}$ и $\oint_{\gamma} A_{1k} = 0$ для любой петли $\gamma : S^1 \rightarrow \partial Q$ класса $[\gamma] \in \mathfrak{K}_{1k}^{\perp}$. Поэтому при $k \neq 1$ соответствующая спиральность

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{1k}^{\perp}}(B) &= \int_Q B \wedge A_{1k} = \int_Q B \wedge (A_{11} + (h_k(t) - h_1(t))dt) = \\ &= \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{11}^{\perp}}(B) + \int_M \omega \int_{S^1} (h_k(t) - h_1(t))dt = \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{11}^{\perp}}(B) - \text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] \text{Flux}(B)[[\Pi_{1k}]]. \end{aligned}$$

Так как правые части доказанных формул не зависят от выбора 1-формы α , мы сразу получаем аналогичные формулы для спиральностей, отвечающих подпространствам $\mathfrak{K}_{kk}^{\perp}, \mathfrak{K}_{\ell k}^{\perp} \subset H_1(\partial Q)$ при $k \neq \ell$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{kk}^{\perp}}(B) &= -2 \int_Q (H - h_k(t))\omega \wedge dt = \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{11}^{\perp}}(B) - 2\text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] \text{Flux}(B)[[\Pi_{1k}]], \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell k}^{\perp}}(B) &= \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell \ell}^{\perp}}(B) + \text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] \text{Flux}(B)[[\Pi_{\ell k}]]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell k}^{\perp}}(B) - \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell \ell}^{\perp}}(B) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{\ell \ell}^{\perp}}(B) - \mathcal{H}_{\mathfrak{K}_{kk}^{\perp}}(B) \right) = \text{Flux}(B)[[M \times \{0\}]] \text{Flux}(B)[[\Pi_{\ell k}]]$$

при $k \neq \ell$. Формула (5.6) доказана. □

5.3.2 Дифференцируемые функционалы на $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}^{\perp}}|_{\mathcal{B}''}$ -связные подмножества \mathcal{B}''' множества \mathcal{B}''

Обозначим через \mathcal{A} (соответственно $\mathcal{A}_{\mathfrak{K}^{\perp}}$) множество таких 1-форм $A \in \Omega^1(Q)$, что для любой петли $\gamma : S^1 \rightarrow \partial Q$ (соответственно любой петли гомологического класса $[\gamma] \in \mathfrak{K}^{\perp}$, определение 5.3.1 (B)) верно $\oint_{\gamma} A = 0$. Пусть $\Phi \in \text{Hom}_Q(\mathfrak{K}, \mathbb{R})$ — линейная функция на (5.2) и

$$\text{либо } \mathcal{B}' := \text{Flux}^{-1}(\Phi), \mathcal{A}' := \mathcal{A}, \quad \text{либо } \mathcal{B}' := \mathcal{B}, \mathcal{A}' := \mathcal{A}_{\mathfrak{K}^{\perp}}, \mathfrak{K}^{\perp} \text{ хорошее.} \quad (5.7)$$

Ясно, что \mathcal{B}' и \mathcal{A}' являются \mathcal{D}^0 -инвариантными, и для любого $B \in \mathcal{B}'$ множество $\mathcal{B}' - B$ совпадает с векторным пространством $d\mathcal{A}'$. Пространство \mathcal{A}' назовем *калибровочным* для пространства \mathcal{B}' (в случае $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ оно имеет вид $\mathcal{A}_{\mathfrak{K}^{\perp}}$ и зависит от выбора подпространства \mathfrak{K}^{\perp}).

Пусть $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'$ есть C^1 -открытое подмножество (например $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^{\circ}$).

Определение 5.3.5. Функционал $I : \mathcal{B}'' \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *дифференцируемым* в точке $B \in \mathcal{B}''$ (по отношению к $\mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$ -калибровке в случае $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$), если существует линейный функционал $D_B I : \mathcal{A}' \rightarrow \mathbb{R}$, называемый *производной* функционала I в точке B , такой что для любого гладкого семейства 1-форм $A_u \in \mathcal{A}'$, $-\varepsilon < u < \varepsilon$, со свойством $dA_0 = 0$

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} I(B + dA_u) = D_B I \left(\left. \frac{d}{du} \right|_{t=0} A_u \right).$$

Производную $D_B I$ назовем *регулярной* (по отношению к $\mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$ -калибровке в случае $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$), если она является регулярным элементом двойственного пространства $(\mathcal{A}')^*$, т.е. $D_B I(A') = \int_Q K_I(B) \wedge A'$, $A' \in \mathcal{A}'$, для некоторой измеримой 2-формы $K_I(B)$ на Q , называемой *плотностью* функционала $D_B I$. Производную назовем *C^k -непрерывной на \mathcal{B}''* (для $k \geq 0$), если I дифференцируем всюду на \mathcal{B}'' и имеет регулярную производную, чья плотность есть непрерывное отображение $K_I : \mathcal{B}'' \rightarrow \Gamma^0(\Lambda^2 T^*Q)$ в смысле C^k -топологии на \mathcal{B}'' и C^0 -топологии на $\Gamma^0(\Lambda^2 T^*Q)$.

Лемма 5.3.6. *Предположим, что пространство $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ и калибровочное пространство $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ удовлетворяют условию (5.7). Тогда (по отношению к \mathcal{A}' -калибровке) спиральность (5.3) дифференцируема всюду на \mathcal{B}' , и ее производная регулярна и имеет плотность $K_{\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}}(B) = 2B$. В частности, ее производная непрерывна относительно любой топологии на \mathcal{B}' .*

Доказательство. По формуле Стокса для любой 1-формы $A' \in \mathcal{A}'$ и $B' := dA'$ имеем

$$\begin{aligned} D_B \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(A') &= \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(B + uB') = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \int_Q (B + uB') \wedge (A + uA') \\ &= \int_Q (B \wedge A' + B' \wedge A) = \int_Q (B \wedge A' + (dA') \wedge A) = 2 \int_Q B \wedge A' + \int_{\partial Q} A' \wedge A. \end{aligned}$$

Итак, достаточно показать, что $\int_{\partial Q} A' \wedge A = 0$. Пусть μ — форма объема на Q . Определим векторное поле \bar{B} равенством $i_{\bar{B}}\mu = B$. Так как \bar{B} касается границы Q и не имеет нулей, то каждая связная компонента ∂Q является двумерным тором, который обозначим через T_i . Так как 1-формы $A|_{\partial Q}$ и $A'|_{\partial Q}$ замкнуты (ввиду граничного условия $B|_{\partial Q} = 0 = B'|_{\partial Q}$), то из формулы Стокса имеем

$$\int_{T_i} A' \wedge A = \left(\int_{\gamma_1} A' \right) \left(\int_{\gamma_2} A \right) - \left(\int_{\gamma_1} A \right) \left(\int_{\gamma_2} A' \right),$$

где γ_1, γ_2 — произвольная пара петель на торе T_i такая, что пара $[\gamma_1], [\gamma_2]$ является базисом группы $H_1(T_i) \cong \mathbb{Z}^2$. Если $\mathcal{B}' = \text{Flux}^{-1}(\Phi)$, то $A' \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$, откуда $\int_{\gamma_1} A' = 0 = \int_{\gamma_2} A'$. Если $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, то \varkappa^\perp является хорошим ввиду (5.7), поэтому базис на торе можно выбрать так, что $[\gamma_1] \in \varkappa^\perp$; поэтому $\int_{\gamma_1} A = 0 = \int_{\gamma_1} A'$ ввиду того, что $[\gamma_1] \in \varkappa^\perp$ и $A, A' \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$. Значит, $\int_{\partial Q} A' \wedge A = 0$, что и требовалось. Лемма доказана. \square

Определение 5.3.7. Подмножество $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ назовем $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным, если любую пару его элементов с одним и тем же значением $c \in \mathbb{R}$ спиральности $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}$ можно соединить кусочно-гладким путем в $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$.

Лемма 5.3.8 (примеры $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связных подмножеств [139, лемма 1]). (А) Если $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ в (5.7), и 2-форма $B \in \mathcal{B}''$ такова, что $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(B) \neq 0$, то любая достаточно малая C^1 -окрестность \mathcal{B}''' 2-формы B в \mathcal{B}'' является $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связной.

(В) Пусть $Q = M \times S^1$ как в примере 5.3.3. Пусть (5.7) и множество $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^\circ$ состоит из всех 2-форм $\psi^* B_{\omega, H}$, где $\psi \in \mathcal{D}^0$ и $B_{\omega, H} \in \mathcal{B}'$ как в (5.4). Тогда само множество $\mathcal{B}'' =: \mathcal{B}'''$ является $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным.

Доказательство. (А) Любую пару $B_0, B_1 \in \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}'''$ соединим путем

$$\left\{ ((1-u)B_0 + uB_1) \sqrt{c/\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}((1-u)B_0 + uB_1)} \right\}_{u \in [0,1]}$$

в $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c)$. Этот путь содержится в \mathcal{B}'' ввиду C^1 -открытости \mathcal{B}'' и C^0 -непрерывности $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}$.

(В) Множество \mathcal{B}'' C^0 -открыто (а потому и C^1 -открыто) в \mathcal{B}' . Ввиду [91] любая пара 2-форм из $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$ имеет вид $\psi_0^* B_{\omega, H_0}, \psi_1^* B_{\lambda\omega, H_1}$ для некоторых $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{D}^0$, $H_0, H_1 \in C^\infty(Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ и положительной формы площади $\omega \in \Omega^2(M)$ таких, что $B_{\omega, H_0}, B_{\lambda\omega, H_1} \in \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c)$. Так как любую пару $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{D}^0$ можно соединить кусочно-гладким путем $\{\psi_u\}_{u \in [0,1]}$ в группе \mathcal{D}^0 [91], получаем путь $\{\psi_u^* B_{(1-u+u\lambda)\omega, a(u)H_0+uH_1}\}$ в $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$, соединяющий 2-формы $\psi_0^* B_{\omega, H_0}$ и $\psi_1^* B_{\lambda\omega, H_1}$, где $a(u) := 1/(1-u+u\lambda) - u/\lambda$, $0 \leq u \leq 1$. \square

5.3.3 Основной результат

Наш результат был анонсирован в [142] и аналогичен результатам §5.2 (т.е. [138]) и [120]. Мы его доказываем методом из §5.2 (т.е. из работы [138]).

Теорема 5.3.9 ([139, теорема]). *Пусть $\varkappa, \varkappa^\perp$, пространство $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ и калибровочное пространство $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ такие, как в (5.2), (5.3) и (5.7). Пусть \mathcal{D}^0 -инвариантный функционал $I : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем (по отношению к \mathcal{A}' -калибровке) на C^1 -открытом подмножестве $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^\circ$ и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на \mathcal{B}'' . Тогда на любом $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связном подмножестве $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ (например, из леммы 5.3.8) функционал I выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_{\mathcal{B}'''} = h \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{\mathcal{B}'''}$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Лемма 5.3.10 ([139, лемма 2]). *Пусть $I : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}$ — \mathcal{D}^0 -инвариантный функционал, дифференцируемый в точке $B \in \mathcal{B}''$. Тогда для любых 1-формы $A' \in \mathcal{A}'$ и диффеоморфизма $\psi \in \mathcal{D}^0$ с $\psi^* B = B$ верно равенство $D_B I(A') = D_B I(\psi^* A')$.*

Доказательство. В обозначениях определения 5.3.5 имеем $I(B + dA_t) = I(B + \psi^* dA_t) = I(B + d\tilde{A}_t)$, где $\tilde{A}_t := \psi^* A_t$, и $d\tilde{A}_0 = 0$. Дифференцируя полученное соотношение $I(B + dA_t) = I(B + d\tilde{A}_t)$ по t при $t = 0$, получаем требуемое равенство для $A' = \frac{d}{dt}|_{t=0} A_t$. Лемма доказана. \square

Следствие 5.3.11 ([139, следствие]). *Предположим, что в условиях леммы 5.3.10 производная $D_B I$ в точке B регулярна и ее плотность $K_I(B)$ является непрерывной 2-формой на Q . Тогда $K_I(B) = \psi^* K_I(B)$. Если 2-форма B не имеет нулей (т.е. $B \in \mathcal{B}^\circ$), то $K_I(B) = \lambda_I(B) B$ для некоторой функции $\lambda_I(B) \in C(Q)$, постоянной на любой интегральной кривой поля ядер 2-формы B .*

Доказательство. Равенство из леммы 5.3.10 перепишем в виде $\int_Q K_I(B) \wedge A' = \int_Q K_I(B) \wedge \psi^* A'$. Но левая часть этого равенства равна $\int_Q (\psi^* K_I(B)) \wedge \psi^* A'$. Поэтому $\int_Q (\psi^* K_I(B) - K_I(B)) \wedge \psi^* A' = 0$. Так как 1-форма $A' \in \mathcal{A}'$ любая (и, в частности, можно взять $A' \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ с носителем в сколь угодно малой окрестности любой внутренней точки из Q), а 2-форма $K_I(B)$ непрерывна на Q , получаем первое требуемое равенство $K_I(B) = \psi^* K_I(B)$.

Если B не имеет нулей, то любая точка из $Q \setminus \partial Q$ имеет окрестность $U \approx (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ в $Q \setminus \partial Q$ с регулярными координатами $w = (x, y, z) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ такими, что $B|_U = dx \wedge dy$. По доказанному 2-форма $K_I(B)|_U =: L(w)dy \wedge dz + M(w)dz \wedge dx + N(w)dx \wedge dy$, где $L, M, N \in C((-\varepsilon, \varepsilon)^3)$, инвариантна относительно преобразований $\psi : w \mapsto \tilde{w} := w + (0, 0, f(w))$ для функций $f \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)^3)$ с компактным носителем и $\partial f / \partial z > -1$. Заметим, что

$$(\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_U = (L(\tilde{w}) - L(w))dy \wedge dz + (M(\tilde{w}) - M(w))dz \wedge dx +$$

$$+(N(\tilde{w}) - N(w))dx \wedge dy + (L(\tilde{w})dy - M(\tilde{w})dx) \wedge df(w).$$

Для любой точки $w_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ рассмотрим такую функцию f_1 , что $f_1(w) = x - x_0$ в окрестности точки w_0 . Ввиду $f_1(w_0) = 0$ имеем $0 = (\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_{w=w_0} = L(w_0)dy \wedge dx$, откуда $L(w_0) = 0$. Аналогично показывается, что $M(w_0) = 0$. Поэтому $L \equiv M \equiv 0$ и $K_I(B)|_U = N(w)B|_U$.

Итак, соотношение $K_I(B) = \lambda_I(B)B$ доказано на $Q \setminus \partial Q$. Значит, оно верно и на Q , так как B не имеет нулей. Так как $0 = (\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_U = (N(\tilde{w}) - N(w))B|_U$ и f любая, то функция $\lambda_I(B)|_U = N(x, y, z)$ не зависит от z , т.е. постоянна на интегральных кривых поля $\ker B$. Следствие доказано. \square

Доказательство теоремы 5.3.9. Покажем, что для любой 2-формы $B \in \mathcal{B}''$ функция $\lambda_I(B) \in C(Q)$ из следствия постоянна на Q . Напомним, что векторное поле называется *топологически транзитивным*, если оно имеет всюду плотную интегральную кривую. Пусть μ — форма объема на Q . Согласно результату [47] векторное поле \bar{B} такое, что $i_{\bar{B}}\mu = B$, можно C^1 -аппроксимировать последовательностью $\{\bar{B}_n\}$ топологически транзитивных бездивергентных C^1 -векторных полей на Q , касающихся ∂Q . Так как \bar{B} точно, из доказательства в [47] следует, что \bar{B}_n можно выбрать точным и имеющим поток $\text{Flux}(B)$. Такую 2-форму B_n можно C^1 -аппроксимировать гладкой 2-формой $B_n^s \in \mathcal{B}'$. Из C^1 -открытости \mathcal{B}'' в \mathcal{B}' имеем $B_n^s \in \mathcal{B}''$.

Итак, для любой пары точек $w, w' \in Q$ существуют последовательности $\{B_n^s\}$ в \mathcal{B}'' и $\{w_n\}, \{w'_n\}$ в Q такие, что $B_n^s \rightarrow B$ в C^1 -топологии, $w_n \rightarrow w, w'_n \rightarrow w'$, и любая пара w_n, w'_n содержится в интегральной кривой поля \bar{B}_n^s . Значит, $\lambda_I(B_n^s)(w_n) = \lambda_I(B_n^s)(w'_n)$. В силу следствия и отсутствия нулей у $B_1 \in \mathcal{B}''$ отображение $\lambda_I : \mathcal{B}'' \rightarrow C(Q)$ непрерывно в смысле C^1 -топологии на \mathcal{B}'' и C^0 -топологии на $C(Q)$. Значит, $\lambda_I(B)(w)$ и $\lambda_I(B)(w')$ суть пределы для $\{\lambda_I(B_n^s)(w_n) = \lambda_I(B_n^s)(w'_n)\}$, а потому совпадают, откуда $\lambda_I(B) = \text{const}$.

Имеем

$$D_B I(A') = \lambda_I(B) \int_Q B \wedge A' = \frac{1}{2} \lambda_I(B) D_B \mathcal{H}_{\kappa^\perp}(A')$$

с учетом леммы 5.3.6. Значит, функционал $I|_{\mathcal{B}''}$ локально постоянен на любом множестве уровня спиральности. Так как множество $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ является $\mathcal{H}_{\kappa^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным (определение 5.3.7), то функционал $I|_{\mathcal{B}'''}$ постоянен на $\mathcal{H}_{\kappa^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}'''$, т.е. равен некоторой константе $h(c)$, зависящей только от $c \in \mathbb{R}$ (для некоторой функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Таким образом, $I(B) = h(\mathcal{H}_{\kappa^\perp}(B))$ для любого $B \in \mathcal{B}'''$. Теорема доказана. \square

Заключение

Диссертация вносит фундаментальный вклад в изучение топологии пространств гладких функций с заданными особенностями на поверхностях, а также топологических инвариантов 3-мерных несжимаемых течений и топологических инвариантов интегрируемых систем с 1 и 2 степенями свободы. В ней разрабатываются новые методы изучения глобального строения пространств морсовских функций и гамильтоновых систем на компактных поверхностях, которые применяются для изучения топологии этих пространств, структуры разбиения пространств функций на классы топологической эквивалентности и структуры разбиения пространств гамильтоновых систем на классы C^0 -сопряженности, а также для исследования непрерывных топологических инвариантов (интегрируемых или произвольных) 3-мерных несжимаемых течений и гамильтоновых систем с 2 степенями свободы.

Результаты диссертации состоят в следующем:

- получен критерий того, когда гладкая функция f с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 ; описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в \mathbb{R}^3 с данной функцией высоты; доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности в \mathbb{R}^3 , имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно; получено новое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 ;
- введено понятие косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса; для пространств \mathcal{F} функций Морса на компактной ориентируемой поверхности M , имеющих не менее $\chi(M) + 1$ пронумерованных критических точек, описано построение косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (“комплекса оснащенных функций Морса”), ассоциированного с пространством \mathcal{F} ; доказана гомотопическая эквивалентность данного пространства \mathcal{F} функций Морса прямому произведению $R \times \tilde{\mathbb{K}}$, где R — одно из четырех многообразий: точка, окружность, двумерный тор и $\mathbb{R}P^3$; получены верхние оценки для гомологической размерности и чисел Бетти пространства \mathcal{F} ; доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства \mathcal{F}^{fix} функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно;
- обнаружены относительно-продолжимые инварианты C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на некоторых стратах Максвелла (называемых “бициклическими”) в пространстве $\mathbf{H}^{\text{nondeg}}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактных связных поверхностях P , по отношению к некоторым примыкающим открытым стратам Максвелла (состоящим из “бициклических возмущений”); бициклические страты Максвелла

образуют бесконечную серию и состоят из гамильтоновых систем, гамильтонианы которых являются функциями Морса с ровно одним критическим значением, где род поверхности P не фиксирован; получены эффективные достаточные условия относительно-устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из произвольного бициклического страта Максвелла по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из этого страта; для бесконечной подсерии в серии бициклических стратов Максвелла (состоящей из “вполне бициклических” стратов Максвелла) получены эффективные достаточные условия устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из такого страта Максвелла; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из такого страта;

- доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{D}}_\omega(D^2)$ группы симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, выражается через инвариант Калаби; доказано, что любой $\mathcal{D}^0(Q)$ -инвариантный функционал на пространстве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3-мерном многообразии Q , имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с непустой границей — глобально на множестве всех 2-форм $B \in \mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через функционал спиральности.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы для исследования проблем и решения задач теории погружений, теории особенностей, маломерной топологии и геометрической топологии, математической физики, теории интегрируемых гамильтоновых систем и теории несжимаемых течений.

Результаты диссертации могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова, Московском энергетическом институте, Воронежском Государственном университете.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы диссертации (в части топологии пространств функций Морса на поверхностях) можно предложить дальнейшее изучение топологии и стратификации пространств гладких функций с заданными локальными особенностями на более общих многообразиях, изучение когомологий этих пространств, дальнейшее изучение связей с конфигурационными пространствами и мероморфными функциями, возможное применение проведенных исследований к изучению 16-й проблемой Гильберта (о взаимном расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, или алгебраических поверхностей), следуя В.И. Арнольду.

Перспективы второй половины данного исследования (касающейся топологических инвариантов бездивергентных полей и интегрируемых систем с 1 и 2 степенями свободы) состоят в дальнейшем изучении дифференцируемых топологических инвариантов точных несжимаемых 3-мерных течений при рассмотрении более широкого понятия дифференцируемости инварианта, в получении эффективных условий существования или несуществования продолжимых или относительно-продолжимых траекторных инвариантов на данном страте Максвелла в пространстве интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений, в нахождении новых серий относительно-продолжимых траекторных инвариантов.

Литература

- [1] В.И. Арнольд. Пространства функций с умеренными особенностями // Функц. анализ. и его прил. 1989. **23**, No. 3. 1–10.
- [2] В.И. Арнольд. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН, 47:1(283) (1992), 3–45.
- [3] В.И. Арнольд. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер // Функц. Анализ. Прил. 30(1) (1996), 1–17.
- [4] В.И. Арнольд. Топологическая классификация многочленов Морса. Дифф. уравн. топол. I // Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН 268, МАИК, М., 2010, 40–55.
- [5] В.И. Арнольд. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения // В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая — 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Арм. ССР, 1974. 229–255. [См. также В.И. Арнольд. Избранное-50. М.: Фазис, 1997. 215–235.]
- [6] В.И. Арнольд, Б. Хесин. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007.
- [7] А.В. Болсинов. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Матем. сборник, 1995, т. 186, No. 1, с. 3–28.
- [8] А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи матем. наук. 1990. **45**, No. 2. 49–77.
- [9] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации, I // Матем. сб. 1994. **185**, No. 4. 27–80; II // Там же. 1994. **185**, No. 5. 27–78.
- [10] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем // М.: Наука, 1997.
- [11] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твердого тела // Известия РАН, серия матем. **59**:1 (1995), 65–102.
- [12] А.В. Болсинов, А.В. Борисов, И.С. Мамаев. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динам., 6:4 (2010), 829–854.
- [13] Ю.М. Бурман. Теория Морса для функций двух переменных без критических точек // Функц. дифф. ур. 1995. **3**, No. 1, 2. 31–31.

- [14] В.А. Васильев. Топология пространств функций без сложных особенностей // Функ. Ан. Прил. 23(4) (1989), 24–36.
- [15] Н.В. Волчанецкий, И.М. Никонов. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2013. No. 2. 3–6.
- [16] В поисках утраченной топологии // Пер. с франц. и англ. Под ред. Л. Гийу и А. Марена — М.: Мир, 1989.
- [17] М. Громов. Дифференциальные Соотношения с Частными Производными // М.: Мир, 1990.
- [18] В.В. Козлов. Общая теория вихрей // Библиотека «R&C Dynamics», IV, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1998.
- [19] А. Кронрод. О функциях двух переменных // Успехи Матем. Наук 5 (1950), No. 1, 24–134.
- [20] Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. Выпуклый анализ: теория и приложения // М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [21] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Усп. Матем. Наук 43, вып. 1 (259) (1988), 5–22.
- [22] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. Зам. 43, No. 5 (1988), 663–671.
- [23] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, В.В. Шарко. Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. Сб. 135(177), No. 3 (1988), 325–345.
- [24] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс // Москва, Мир, 1972.
- [25] С.М. Натанзон. Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I // Труды Семинара по векторному и тензорному анализу. 1988. Вып. 23, с. 79–103; II // Труды Семинара по векторному и тензорному анализу. 1991. Вып. 24, с. 104–132.
- [26] О. О’Мира. Лекции о симплектических группах // М.: Мир, 1979.
- [27] А.А. Ошемков. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Труды МИРАН, 1994, том 205, с. 131–140.
- [28] Д.А. Пермяков. Абелевы подгруппы группы гомеоморфизмов, порожденные скручиваниями Дэна // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 1 (2013), 26–32.
- [29] Э. Спеньер. Алгебраическая топология // М.: Мир, 1971.
- [30] Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования // М.: ИЛ, 1960.
- [31] А.Т. Фоменко. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН, 1989, т. 44, вып. 1(265), с. 145–173.
- [32] А.Т. Фоменко. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР 287, No. 5 (1986), 1071–1075.

- [33] А.Т. Фоменко. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Известия АН СССР, 50, No. 6 (1986), 1276–1307.
- [34] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии // М.: Наука, 1989.
- [35] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, No. 3. 546–575.
- [36] Дж. Франсис. Книжка с картинками по топологии // Москва, Мир, 1991.
- [37] Х. Цишанг. Поверхности и разрывные группы // М.: Наука, 1988.
- [38] Х. Цишанг. Доказательство линейной связности пространств функций Морса на поверхностях методом Нильсена // Устное сообщение, 1998.
- [39] В.В. Шарко. Функции на многообразиях // Киев, Наукова Думка, 1990.
- [40] В.В. Шарко. Функции на поверхностях. I // Некоторые проблемы современной математики: Тр. Матем. ин-та Укр. НАН / Под ред. В.В. Шарко. Т. 25. Киев: Наукова Думка, 1998. 408–434.
- [41] В.А. Шмаров. Минимальные линейные функции Морса на орбитах в алгебрах Ли // Вестн. Моск. ун-та, Сер.1, 2015, No. 2, 9–16.
- [42] M. Adachi. Embeddings and Immersions // American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 124.
- [43] P.M. Akhmet'ev. Quadratic magnetic helicity and magnetic energy // Proc. Steklov Math. Inst. **278** (2012), 16–28.
- [44] V.I. Arnold. Smooth functions statistics // Funct. Anal. Other Math. 1:2 (2006), 111–118.
- [45] V.I. Arnold. Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert's 16-th problem // Math. Phys. Anal. Geom. 10:3 (2007), 227–236.
- [46] A. Banyaga. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique // Comment. Math. Helv. **53**:2 (1978), 174–227.
- [47] M. Bessa. A generic incompressible flow is topological mixing // C. R. Math. Sci. Paris **346** (2008), 1169–1174.
- [48] G. Bini, G. Gaiffi, M. Polito. A formula for the Euler characteristic of $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ // Math. Z. 236 (2001), 491–523.
- [49] G. Bini, J. Harer. Euler characteristics of moduli spaces of curves // arxiv:0506083 (2005, 2008).
- [50] J.S. Birman. Mapping class groups and their relationship to braid group // Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 231–238.
- [51] J.S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy. Abelian and solvable subgroups of the mapping class group // Duke Math. J. 50, No.4 (1983), 1107–1120.
- [52] R.L. Bishop, R.J. Crittenden. Geometry of manifolds // N.Y., London: Acad. Press, 1964.

- [53] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification // Boca Raton, London, NY, Washington, D.C.: Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [54] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. Exact topological classification of Hamiltonian flows on smooth two-dimensional surfaces // J. Math. Sci. (New York), **94**:4 (1999), 1457–1476.
- [55] C. Bonatti, S. Crovisier. Récurrence et généricité // Invent. Math. **158** (2004), 33–104.
- [56] R. Bott, H. Samelson. Application of the theory of Morse to symmetric spaces // Amer. J. Math., **80** (1958), 964–1029.
- [57] M.R. Bridson, A. Haefliger. Metric spaces of non-positive curvature // Berlin, Heidelberg, N.Y., Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo: Springer, 1999.
- [58] R. Brown. Topology: a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid // Chichester: Ellis Horwood, 1988.
- [59] O. Bulet, V. Haab. Realisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace \mathbb{R}^3 // C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Serie 1, No. 12 (1985), p. 401–406.
- [60] Yu.M. Burman. Triangulation of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points // Annals of Global Analysis and Geometry 1999. **17**, N 3. 221–238.
- [61] F. Cagliari, B. Di Fabio, C. Landi. The natural pseudo-distance as a quotient pseudo-metric, and applications // Forum Mathematicum, **27** (2015), 1729–1742.
- [62] E. Calabi. On the group of automorphisms of a symplectic manifold // Probl. Anal. Lectures at the Symposium in honor of S. Bochner. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1970. 1–26.
- [63] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie // Publ. math. Inst. etud. sci. — 1970, **39**, p. 5–173.
- [64] A. Chenciner, F. Laudenbach. Morse 2-jet space and h -principle // Bull. Brazil. Math. Soc. 2009. V. 40. No. 4. P. 455–463. arXiv:0902.3692v1
- [65] D.R.J. Chillingworth. Winding numbers on surfaces, I // Math. Ann. 1972. **196**. 218–249.
- [66] Y. Colin de Verdière, J. Vey. Le lemme de Morse isochore // Topology. **18** (1979), 283–293.
- [67] M. Dehn. Die Gruppe der Abbildungsklassen (Das arithmetische Feld auf Flächen) // Acta math. 1938. **69**. 135–206.
- [68] P. Deligne and D. Mumford. Irreducibility of the space of curves of a given genus // Publ. IHES **36** (1979), 75–110.
- [69] C.J. Earle, J. Eells, Jr. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface // Bull. Amer. Math. Soc. **73**, no. 4 (1967), 557–559.
- [70] C.J. Earle, J. Eells, Jr. A fibre bundle description of Teichmüller theory // J. Diff. Geometry **3** (1969), 19–43.
- [71] B. Farb, N.V. Ivanov. The Torelli geometry and its applications. Research announcement // arXiv:math.GT/0311123 v1.

- [72] J. Farey. On a curious property of vulgar fractions // London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. **47** (1816), 385.
- [73] G.K. Francis, B. Morin. Arnold Shapiro's eversion of the sphere // Math. Intell. No. 2, 1979, 200–203.
- [74] J. Franks. Homology and Dynamical Systems // CBMS Regional Conf. 49 (1982), Amer. Math. Soc.
- [75] I.P. Goulden, J.L. Harer, D.M. Jackson. A geometric parametrization for the virtual Euler characteristic for the moduli spaces of real and complex algebraic curves // arXiv:math/9902044.
- [76] S. Grushevsky, I. Krichever. The universal Whitham hierarchy and geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces // In: Surveys in Differ. Geom. 2010. V. 14. Int. Press, Somerville, MA. P. 111–129.
- [77] A. Haefliger. Lectures on the Theorem of Gromov // Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 209. Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II.
- [78] J. Harer, D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves // Invent. Math. **85** (1986), 457–485.
- [79] J. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface // Invent. Math. **84**(1) (1986), 157–176.
- [80] W.J. Harvey. Geometric structure of surface mapping class groups // In Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), 255–269. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979.
- [81] A. Hatcher. Higher simple homotopy theory // Annals of Math. (2) **102** (1975), 101–137.
- [82] A. Hatcher, W. Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface // Topology **19**(3) (1980), 221–237.
- [83] A. Hatcher, J. Wagoner. Pseudo-isotopie on compact manifold // Asterisque, 1973, vol. 6.
- [84] M. Hirsh. Immersions of manifolds // Trans. Am. Math. Soc. 1959, **93**, p. 242–276.
- [85] M. Hirsh. On embedding differential manifolds into Euclidean space // Ann. Math. 1961, **73**, p. 566–571.
- [86] M.W. Hirsch. Differential topology // Graduate texts in Math. **33**, Berlin: Springer, 1976.
- [87] H. Hofer. Estimates for the energy of a symplectic map // Comment. Math. Helv. **68**:1 (1993), 48–72.
- [88] J.H. Hubbard and H. Masur. Quadratic differentials and foliations // Acta Math. **142** (1979), 221–274.
- [89] K. Igusa. Higher singularities of smooth functions are unnecessary // Ann. Math. **119** (1984), 1–58.
- [90] N. Ivanov. Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces // In: Progress in knot theory and related topics, 113–120. Paris: Hermann, 1997.
- [91] G.R. Jensen. The scalar curvature of left invariant Riemannian metrics // Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 1125–1143.

- [92] D. Johnson. The structure of the Torelli group. II. A characterization of the group generated by twists on bounding curves // *Topology*. 1985. **24**. 113–126.
- [93] L. Kelvin. On vortex motion // *Trans. Roy. Soc. Edin.* 1869. **25**. 217–260; Maximum and minimum energy in vortex motion // *Mathematical and Physical Papers*, **4**. Cambridge Univ. Press. 172–183.
- [94] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // *Comm. Math. Phys.* 147 (1992), 1–23.
- [95] E.V. Kulinich. On topologically equivalent Morse functions on surfaces // *Methods of Funct. Anal. Topology*. 1998. **4**, N 1. 59–64.
- [96] S.I. Maksymenko. Path-components of Morse mappings spaces on surfaces // *Comment. Math. Helv.* 2005. **80**. 655–690.
- [97] S.I. Maksymenko. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // *Annals of Global Analysis and Geometry*. 2006. **29**, N 3. 241–285. arXiv:math.GT/0310067.
- [98] V.O. Manturov. Chord diagrams, d -diagrams, and knots // *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 267 (2000), 170–194.
- [99] D. Margalit. The automorphism group of the complex of pants decompositions. arXiv:math/0201319v1.
- [100] J. Mather. Stability of C^∞ -mappings: II. Infinitesimal stability implies stability // *Ann. of Math.* 89 (1969), 254–291.
- [101] H. Matsumoto. Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples deployes // *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. Ser. 4*, t. 2, 1969, p. 1–62.
- [102] S.V. Matveev, M. Polyak. Cubic complexes and finite types invariants // *Geom. Topol. Monogr.* 4 (2002), 215–233. arXiv: math.GT/0204085, 2002.
- [103] J. Milnor. Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères // *Bull. Soc. Math. de France*, 87 (1959), 439–444.
- [104] J. Milnor. *Morse Theory* // Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963. Перевод с англ.: Дж. Милнор. Теория Морса. М.: Мир, 1971.
- [105] H.K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines // *J. Fluid. Mech.* 1969. **106**. 117–129.
- [106] H.K. Moffatt. Some developments in the theory of turbulence // *J. Fluid Mech.* 1981. **106**. 27–47; Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1 // *J. Fluid Mech.* 1985. **159**. 359–378; Part 2 // *J. Fluid Mech.* 1986. **166**. 359–378.
- [107] H.K. Moffatt and A. Tsinober. Helicity in laminar and turbulent flow // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1992. **24**. 281–312.
- [108] J.-J. Moreau. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluid parfait barotrope // *C.R. Acad. Sci. Paris*. 1961. **252**. 2810–2812.
- [109] M. Morse. The critical points of a function of n variables // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33 (1931), 71–91.

- [110] M. Morse. The calculus of variations in the large // N.Y., 1934 (352 p.).
- [111] J. Moser. On the volume elements on a manifold // Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.
- [112] T.Z. Nguyen. Arnold-Liouville with singularities // Preprint, Ref. S. I. S. S. A. 153/94/M, October 1994 — revised January 1995.
- [113] T.Z. Nguen. The symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. The'se // Universite' de Strasbourg, 1994.
- [114] R.C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces // Comm. Math. Phys. **113** (1987), 299–339.
- [115] R.C. Penner. An arithmetic problem in surface geometry // In: The Moduli Space of Curves. Birk-häuser (1995), eds. R. Dijkstra, C. Faber, G. van der Geer, 427–466.
- [116] R.C. Penner. The simplicial compactification of Riemann's moduli space // Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium, World Scientific (1996), 237–252.
- [117] A. Postnikov. Permutohedra, associahedra, and beyond // arXiv:math/0507163v1.
- [118] B.L. Reinhart. The winding number on two manifolds // Ann. Inst. Fourier. 1960. **10**, 271–283.
- [119] R. Rosen. A weak form of the star conjecture for manifolds // Abstract 570–28, Notices Amer. Math. Soc., 7 (1960), p. 380.
- [120] D. Serre. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. **289**:4 (1979), A267–A270. Physica D. **13**:1-2 (1984), 105–136.
- [121] S. Smale. The Classification of Immersions of the Spheres in Euclidean Spaces // Ann. Math., Ser. 2, v. 69, No. 2, 1959, pp. 327–344.
- [122] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere // Proc. Amer. Math. Soc. **10**:4 (1959), 621–626.
- [123] S. Smale. On structure of manifolds // Amer. J. Math. **84**:3 (1962), 387–399.
- [124] K. Strebel. Quadratic Differentials // Ergebnisse der Math. 3:5, Springer-Verlag, Heidelberg (1984).
- [125] C.T.C. Wall. Formal deformations // Proc. London. Math. Soc. (3) **16** (1966), p. 342–352.
- [126] H. Whitney. On regular closed curves in the plane // Compositio Mathematica, 4, 1937, pp. 276–284.
- [127] H. Whitney. Tangents to an analytic variety // Ann. Math. 1965. V. 81. No. 3. P. 496–549.
- [128] L. Woltjer. A theorem on force-free magnetic fields // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1958. **44**. 489–491.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК

- [129] Е.А. Кудрявцева. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. Сб. 190 (1999), No. 3, 29–88.
- [130] Е.А. Kudryavtseva. Reduction of Morse functions on surfaces to canonical form by smooth deformation // Regul. Chaotic Dyn. 4:3 (1999), 53–60.
- [131] Е.А. Kudryavtseva. Canonical form of Reeb graph for Morse functions on surfaces. Inversion of 2-sphere in 3-space // International Journal of Shape Modeling. 1999. 5, N 1. 69–80.
- [132] Е.А. Кудрявцева. Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 4 (2009), 13–22. Transl. Е.А. Kudryavtseva. Uniform Morse lemma and isotope Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull., 64:4 (2009), 150–158.
- [133] Е.А. Кудрявцева. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 1 (2012), 3–12. Transl. Е.А. Kudryavtseva. Connected components of spaces of Morse functions with fixed critical points // Moscow Univ. Math. Bull., 67:1 (2012), 1–10. arXiv:1007.4398.
- [134] Е.А. Кудрявцева. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // Матем. сб. 204:1 (2013), 79–118. <http://arxiv.org/abs/1104.4796>.
- [135] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций Морса на поверхностях // Матем. Заметки. 92, No. 2 (2012), 241–261. <http://arxiv.org/abs/1104.4792>.
- [136] Е.А. Кудрявцева. Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 4 (2012), 14–20. Transl. Е.А. Kudryavtseva. Special framed Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull., 67:4 (2012), 151–157. arXiv:1106.3116.
- [137] Е.А. Кудрявцева. Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // Докл. Акад. Наук 361, N.3 (1998), 314–317.
- [138] Е.А. Кудрявцева. Об инвариантах сопряженности на группе сохраняющих площади диффеоморфизмов круга // Матем. заметки. 95:6 (2014), 951–954.
- [139] Е.А. Кудрявцева. Спиральность — единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 -топологии производной // Матем. заметки. 99:4 (2016), 626–630. arXiv:1511.03746.

Тезисы докладов

- [140] Е.А. Kudryavtseva. The topology of spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // Proc. Int. Conf. “XVII Geometrical Seminar” (Zlatibor, Sept. 3–8, 2012). Beograd: Matematički fakultet. 2012. P. 45–47.
- [141] Е.А. Kudryavtseva. Topology and stratification of spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // Proc. Int. Conf. “Analysis and singularities” (Moscow, Dec. 17–21, 2012). Moscow: Steklov Math. Inst. RAS. 2012. P. 141–143. <http://arnold75.mi.ras.ru/Abstracts.pdf>

- [142] E. Kudryavtseva. Topological invariants of ideal magnetic fields are functions in helicity or have no derivative with C^1 -continuous density // Abstracts of the reports at the conference “Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy”. Moscow, Russia, April 27–30, 2015. Moscow: IUM Publications, 2015, 9–10.

Прочие публикации

- [143] Е.А. Кудрявцева, Д.А. Пермяков. Оснащенные функции Морса на поверхностях // Матем. Сб. 201, No. 4 (2010), 501–567.
- [144] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций с заданными особенностями на поверхностях // Докл. Акад. Наук 468, No. 1 (2016), 139–142. <http://arxiv.org/abs/1601.02283>.
- [145] Е.А. Кудрявцева. Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях // В кн.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем / Под ред. А.Т. Фоменко и А.В. Болсинова. М.: Факториал, 1998. 147–202.
- [146] Ю.А. Браилов, Е.А. Кудрявцева. Устойчивая топологическая несопряженность гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1999. No. 2. 20–27. Transl. Yu.A. Brailov, E.A. Kudryavtseva. Stable topological nonconjugacy of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. 54:2 (1999), 20–27.
- [147] Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сб., 199:9 (2008), 3–96.
- [148] Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Соврем. Пробл. Матем. Механ., III, No. 2, 2009, 58–97.
- [149] Е.А. Кудрявцева, А.Т. Фоменко. Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. Акад. Наук, 446:6 (2012), 615–617.
- [150] Е.А. Кудрявцева, А.Т. Фоменко. Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“атома”-бифуркации) // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 67:3 (2013), 21–29. Transl. A.T. Fomenko, E.A. Kudryavtseva. Each finite group is a symmetry group of some map (an “atom”-bifurcation) // Moscow Univ. Math. Bull., 68:3 (2013), 148–155.
- [151] E.A. Kudryavtseva, E.L. Lakshtanov. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, eds. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, A.A. Oshemkov, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006, 173–214. arXiv:1212.4302.