МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.925.42, 521.131

Кудрявцева Елена Александровна

Замкнутые траектории гамильтоновых систем и приложение к планетно-спутниковой системе

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
доцент Н. Н. Нехорошев.

Москва 1998

Рассмотрим гамильтонову систему, в фазовом пространстве которой имеется замкнутое подмногообразие Λ, сплошь заполненное замкнутыми траекториями. Изучается вопрос: сколько и какие из этих траекторий сохранятся, лишь слегка продеформировавшись, при малом возмущении системы, и будут ли сохранившиеся периодические решения устойчивыми? Одним из основных результатов работы является эффективная оценка числа сохранившихся замкнутых траекторий в терминах топологии подмногообразия Λ. А именно, доказано, что при выполнении естественного условия невырожденности Λ число таких траекторий не меньше минимального числа критических точек гладкой функции на фактор-многообразии $B = \Lambda/S^1$.

Аналогичные оценки получены в некоторых более общих ситуациях. Например, в случае, когда изоэнергетическая поверхность является особой и её подмножество, заполненное периодическими траекториями, содержит положения равновесия системы, а также в случае произвольных, вообще говоря не гамильтоновых, динамических систем.

В качестве приложения исследуется планетно-спутниковая система, являющаяся частным случаем плоской задачи $N+1$ тел. Предполагается, что масса одного тела — Солнца — много больше масс остальных тел — планет и спутников, а масса каждой планеты много больше суммы масс её спутников. Кроме того, расстояния между каждой планетой и её спутниками много меньше расстояния от Солнца до этой планеты. Доказывается, что при естественном соотношении между малыми параметрами задачи существует большое число периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат.

Содержание

Введение

Данная диссертационная работа посвящена исследованию периодических траекторий автономных гамильтоновых систем и связанным с этим вопросам.

Гамильтоновой системой называется динамическая система на симплектическом многообразии, отвечающая векторному полю, заданному некоторой гладкой функцией H, которую называют гамильтонианом системы. В некоторой локальной системе координат $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ эта динамическая система задаётся гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. системой вида

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}(p, q). \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что функция H не зависит от времени t, т.е. система является автономной.

Напомним, что симплектическое многообразие — это гладкое многообразие M, снабженное замкнутой невырожденной дифференциальной 2–формой ω^2, называемой симплектической структурой. Каноническими координатами на M называются локальные координаты (p, q), в которых симплектическая структура имеет вид $\omega^2 = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Известно, что канонические координаты существуют в окрестности любой точки симплектического многообразия M; уравнения (1) определяют одну и ту же гамильтонову систему независимо от выбора канонических координат.

Рассматривается следующая ситуация. Имеется гамильтонова система, называемая далее невозмущённой, фазовое пространство которой содержит гладкое подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы. При малом возмущении гамильтониана H, а тем самым и гамильтоновой системы, подмногообразие замкнутых траекторий распадается, но некоторые из замкнутых траекторий выживают. Целью диссертации является выяснение — какие, сколько, где появляются эти выжившие траектории, какие из них бывают устойчивы? Более точно, нужно оценить число этих траекторий, выяснить их расположение, найти условия устойчивости этих траекторий и выяснить другие вопросы, которые обычно представляют интерес для приложений.

Описанная ситуация часто встречается в приложениях, в частности, в задачах о механических колебаниях, задачах о движении заряженных частиц, а также в задаче о планетно-спутниковой системе, которая исследована в данной диссертации. В данной работе доказана эффективная оценка для числа периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат, приведены условия устойчивости в линейном приближении для одного из этих движений и описаны “порождающие” движения. Обычно вопросы такого сорта решаются для каждой конкретной задачи отдельно. В диссертации делается попытка получить общие подходы к её исследованию, перечислить общие методы, которые годятся в этой ситуации.

Диссертация состоит из трёх глав.

Первая глава посвящена трем вопросам: существованию, локализации в фазовом пространстве и устойчивости замкнутых траекторий возмущённых систем. Прежде всего формулируется естественное условие невырожденности подмногообразия Λ, лежащего на неособой изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h)$ и заполненного замкнутыми траекториями невозмущённой системы. Далее даётся эффективная оценка для числа замкнутых траекторий возмущённой системы через топологию фактор-многообразия $B = \Lambda/S^1$ подмногообразия Λ по замкнутым траекториям невозмущённой системы.

Основным результатом §1.1 является следующая

Теорема 1. *Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) задана гамильтонова система с гамильтонианом H. Пусть $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ — компактное невырожденное подмногообразие (без края), сплошь заполненное замкнутыми траекториями этой системы, и пусть на Λ имеется гладкая функция T периода этих траекторий. Тогда для любой функции $\tilde{H}$, C^2–близкой к функции H, система с гамильтонианом $\tilde{H}$ имеет по меньшей мере одну замкнутую траекторию на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$. Более того, число таких траекторий не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на фактор-многообразии $B = \Lambda/S^1$. С учётом кратностей число таких траекторий не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на B.*

Теорема 1 обобщает результаты работ М. Ботткола [14] и П. Л. Гинзбурга [4]. В работе Ботткола [14] на Λ накладывается более сильное условие невырожденности, а также предполагаются ограничения на симплектическую структуру (ее точность) либо на топологию многообразия B (тривиальность группы его одномерных гомологий). Однако подход Ботткола очень близок к подходу, предлагаемому в данной диссертации. В работе Гинзбурга [4] рассматривается ситуация, когда все траектории невозмущённой гамильтоновой системы на изоэнергетической поверхности замкнуты, и доказывается более слабая оценка для числа замкнутых траекторий возмущённой системы. А именно, оценка Гинзбурга формулируется в терминах критических многообразий гладких функций специального вида на всём Λ, которые включают в себя функции, являющиеся “подъемом” гладких функций на B. Кроме того, Гинзбург рассматривал лишь случай, когда подмногообразие Λ локально-тривиально расслоено на замкнутые траектории невозмущённой системы, а результаты данной диссертации применимы также в случае расслоений более общего вида, а именно, для многомерных расслоений Зейферта. Такие расслоения возникают, например, при изучении замкнутых траекторий вблизи положения равновесия невозмущённой задачи (см. работы А. Вейнстейна [34, 35, 36] и Ю. Мозера [25]).

В действительности, теорема 1 была получена в работе [37] Вейнстейна. Однако предлагаемое в диссертации доказательство более простое, геометрическое и конструктивное. Развивая идеи А. Пуанкаре [28], мы опираемся на классическую теорему о неявной функции. В частности, мы не рассматриваем бесконечномерные пространства петель, использовавшиеся в работе [37].

Теорему 1 можно рассматривать и как частично подтверждающую известную гипотезу В. И. Арнольда о том, что геометрическая теорема Пуанкаре [28, 1, 7] допускает обобщение на случай произвольных симплектических многообразий и произвольных (не обязательно малых) возмущений. В геометрической теореме Пуанкаре изучается сохраняющее площади отображение плоского кругового кольца на себя, гомотопное тождественному и поворачивающее граничные окружности кольца "в разные стороны". Теорема Пуанкаре утверждает, что любое такое отображение имеет по меньшей мере две неподвижные точки. Эта теорема была доказана Пуанкаре как раз в ситуации, рассматриваемой в данной диссертации: когда отображение получено малым возмущением отображения, имеющего целую окружность неподвижных точек. Доказательство базировалось на идее о совпадении неподвижных точек отображения с критическими точками его производящей функции, которая лежит и в основе исследований, проведённых в данной диссертации. (Лишь затем геометрическая теорема Пуанкаре в полной формулировке, т.е. без требования близости к интегрируемому отображению, была доказана Биркгофом, однако это доказательство было непростым и использовало совсем другие идеи.)

Следует отметить, что полученный в диссертации результат не претендует на полное обобщение геометрической теоремы Пуанкаре на случай произвольных возмущений. Обобщение этой теоремы доказано здесь лишь для малых возмущений. Возможно, наш результат допускает усиление, если воспользоваться техникой работ [3, 4, 15–17, 23, 24, 27, 31–33, 37, 38].

Результатом §1.2 является метод усреднения на подмногообразии. Изучается вопрос о том, где именно в фазовом пространстве расположены фазовые траектории возмущённой системы. Ответ на этот вопрос зависит от конкретного возмущения, и в случае возмущения общего положения ответ даётся в терминах усреднения этого возмущения по замкнутым траекториям исходной системы. В частности, доказана следующая

Теорема 2 (метод усреднения на подмногообразии). *Пусть, в условиях теоремы 1, подмногообразие Λ невырождено, но не обязательно компактно. Пусть возмущённый гамильтониан гладко зависит от малого параметра ε, т.е. имеет вид $\tilde{H} = H + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon)$. Рассмотрим на подмногообразии Λ гладкую функцию*

$$\bar{\mathcal{H}}(m) = \int_0^{T(m)} \mathcal{H}(\gamma(m,t))\, dt, \quad m \in \Lambda,$$

— усреднение возмущения $\mathcal{H} = H_1|_\Lambda$ по замкнутым траекториям $\gamma = \gamma(m,t) \subset \Lambda$ невозмущённой системы, $0 \le t \le T(m)$. Пусть траектория $\gamma_0 \subset \Lambda$ является боттовским критическим подмногообразием функции $\bar{\mathcal{H}}$. Тогда существует однопараметрическое семейство замкнутых траекторий $\gamma_\varepsilon \subset \tilde{H}^{-1}(h)$ возмущённой системы, гладко зависящее от малого параметра ε и совпадающее с траекторией γ_0 при $\varepsilon = 0$.

Этот результат можно рассматривать как обобщение метода усреднения на многообразии, полученного ранее в работе Ю. Мозера [24], где рассматривается лишь случай, когда невозмущённая система является периодической, т.е. все её траектории замкнуты.

В действительности, теорема 2 (а также частный случай теоремы 1) была доказана ранее в работе Вейнстейна [34], где доказательство проводится в следующие два этапа. Сначала результат доказывается в частном случае, когда фазовое пространство задачи M является кокасательным расслоением к некоторому многообразию, причём подмногообразие Λ лежит в нулевом сечении этого расслоения. А затем общий случай сводится к этому частному случаю путём увеличения размерности фазового пространства. Доказательство, предлагаемое в данной диссертации, основано на более естественном, по мнению автора, геометрическом подходе.

В §1.3 приводятся условия орбитальной устойчивости в линейном приближении для некоторых замкнутых траекторий возмущённой системы. Из более общих утверждений этого параграфа вытекает, в частности, следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть, в условиях теоремы 2, $\sigma \subset H^{-1}(h)$ — маленькая площадка в $H^{-1}(h)$, трансверсально пересекающая замкнутую траекторию γ_0. Пусть $dA(m) : T_m\sigma \to T_m\sigma$ — оператор монодромии в точке $m = \gamma_0 \cap \sigma$, определяемый потоком невозмущённой системы. Пусть выполнены следующие условия согласованной знакоопределённости:*

1. *квадратичная форма $Q(\xi) = \omega^2(dA(m)\xi, \xi)$ положительно определена на подпространстве, трансверсальном к $T_m(\Lambda \cap \sigma)$ в $T_m\sigma$;*

2. *траектория γ_0 является боттовским подмногообразием локального максимума функции $\bar{\mathcal{H}}$.*

Тогда замкнутая траектория γ_ε возмущённой системы, существующая согласно теореме 2, орбитально устойчива в линейном приближении.

В §1.4 приводятся теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 и 3, для неподвижных точек симплектических отображений.

Доказательства этих результатов приведены в §1.5.

Глава 2 посвящена развитию теорем 1, 2, 3 и их видоизменениям в следующих ситуациях.

В §2.1 доказываются аналоги теорем 1, 2 и 3 для случая, когда на подмногообразии Λ, заполненном замкнутыми траекториями, постоянна функция периода T, а гамильтониан H, вообще говоря, не постоянен. При этом для возмущённой гамильтоновой системы оценивается число и выясняется расположение замкнутых траекторий, имеющих фиксированный период (а не фиксированное значение гамильтониана). Кроме того, приводится обобщение этих теорем в случае, когда не только на гамильтониан, но и на симплектическую структуру накладывается малое возмущение.

В §2.2 приводится следующее обобщение теоремы 1. Рассматривается ситуация, когда подмножество $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, заполненное периодическими траекториями, содержит положения равновесия системы. В этой ситуации множество Λ, вообще говоря, не является гладким подмногообразием, однако для него можно определить естественное понятие невырожденности.

Доказано, что любая особенность компактного невырожденного множества Λ является "конической", т.е. гомеоморфна особенности соответствующего множества для линеаризованной системы. Фиксируется *тип возмущений* гамильтониана, при которых поверхность $\tilde{H}^{-1}(h)$ становится неособой. По множеству Λ с коническими особенностями и типу возмущения однозначно строится, с помощью аналога морсовских перестроек, гладкое многообразие Λ^*, называемое *морсовским разрешением* множества Λ. На многообразии Λ^* определяется естественное действие окружности.

Доказана следующая

Теорема 4 (Теорема 8). *Пусть $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ — компактное невырожденное подмножество, сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом H и содержащее положения равновесия этой системы. Рассмотрим любую функцию $\tilde{H}$, C^4–близкую к H, для которой число h не является критическим значением. Тогда все особенности множества Λ являются коническими и справедливо утверждение теоремы 1, в котором вместо множества Λ вместе с его расслоением на замкнутые траектории нужно рассмотреть гладкое многообразие Λ^* с расслоением* *на нём, где Λ^* — морсовское разрешение множества Λ, отвечающее рассматриваемому типу возмущения гамильтониана.*

Эта ситуация обобщает ситуацию, которую исследовали Вейнстейн [34, 35] и Мозер [25]. В этих работах рассматриваемое нами подмножество Λ совпадает с положением равновесия, а многообразие Λ^* является нечётномерной сферой. Для этой ситуации в указанных работах доказывается специальная оценка числа периодических траекторий вблизи положения равновесия системы, вытекающая из симплектичности фактор-многообразия $B^* = \Lambda^*/S^1$.

В §2.3 приводятся формулировки теорем 1 и 2 для случая произвольных (вообще говоря, не гамильтоновых) динамических систем. Аналогичные результаты имеются в работах Ф. Б. Фуллера [18] и Мозера [24].

Глава 3 посвящена приложению указанных методов к задаче небесной механики о движении планетно-спутниковой системы.

В §3.1–3.4 доказана эффективная оценка для числа периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат, приведены условия орбитальной устойчивости в линейном приближении для одного из этих движений, дано описание "порождающих" движений.

Сформулируем результат более точно. Рассматривается задача, являющаяся частным случаем плоской задачи $N+1$ тел. Предполагается, что масса одного тела — Солнца — много больше суммы масс остальных тел — планет и спутников, причём масса каждой планеты имеет вид μm_i, где $m_i = \text{const}$. Каждой планете сопоставляется набор её спутников, находящихся вблизи этой планеты, на расстоянии порядка $\rho \ll 1$. При этом для каждой планеты сумма масс её спутников имеет порядок $\nu \ll 1$ по сравнению с массой этой планеты, а угловые скорости вращений спутников вокруг планеты имеют порядок $1/\omega \gg 1$ по сравнению с угловой скоростью вращения этой планеты вокруг Солнца.

Доказано, что при естественном соотношении малых параметров описанной задачи: $\rho^3 \sim \mu\omega^2$, отвечающем второму закону Кеплера, невозмущённая задача распадается на независимые задачи Кеплера для каждой планеты и "предельные" задачи Хилла для каждого спутника. С помощью результатов §2.1 отсюда выводится следующая оценка для числа периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат.

Теорема 5 (Теорема 11). *В рассматриваемой задаче $N+1$ тел фиксируем набор частот $\omega_1, \ldots, \omega_N$ для круговых движений планет вокруг Солнца и спутников вокруг планет, где частоты всех спутников имеют порядок 1, а частоты всех планет имеют порядок ω, $0 < \omega \ll 1$. Пусть этот набор является относительно резонансным: через некоторое время $T = \mathrm{O}(1/\omega)$*

положения всех тел системы отличаются от исходных положений поворотом плоскости на один и тот же угол $\alpha \bmod 2\pi$ вокруг Солнца. Пусть значения параметров μ и ν достаточно малы: $\mu \le \mu_0$, $\nu \le \nu_0$, где μ_0 и ν_0 — некоторые положительные числа, зависящие только от ω. Тогда выполнено следующее:

А) Если $\alpha \bmod 2\pi$ отделено от нуля, то существует не менее 2^{N-2} периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат, близких к круговым движениям с данными средними частотами.

Б) Пусть исходный набор средних частот удовлетворяет следующим условиям: значение $\alpha \bmod \pi$ отделено от нуля и круговые движения всех планет и спутников сонаправлены, т.е. угловые скорости ω_j имеют один знак. Предположим также, что производящая функция "отображения за период" является боттовской функцией вблизи N–мерного тора, отвечающего круговым движениям, и все её критические подмногообразия являются двумерными торами. Тогда эти двумерные торы инвариантны, и по меньшей мере один из них орбитально устойчив в линейном приближении на общей поверхности интегралов энергии и кинетического момента.

Кроме того, следуя идеям Пуанкаре об обратимости задачи $N+1$ тел, даётся ответ на вопрос о локализации указанных в теореме 5 периодических движений: доказано существование 2^{N-2} *симметричных*, или "обратимых", периодических движений планетно-спутниковой системы во вращающейся системе координат. А именно, эти движения характеризуются тем, что в некоторые моменты времени, кратные полупериоду, все тела системы располагаются на одной прямой, т.е. наблюдаются "парады" планет и спутников.

В §3.5 рассматривается, в частности, случай планетной системы с "двойными планетами" (т.е. планетами, имеющими не более одного спутника), и для систем с такими планетами доказывается аналогичное утверждение, без предположения о малости отношения массы спутника к массе планеты.

Этот результат обобщает аналогичный результат Г. А. Красинского [8] о движении планетной системы, а также В. Н. Тхая [12]. В этих работах рассматривалась планетная система, в которой планеты не имеют спутников, и для периодических движений первого рода такой системы была доказана теорема 5. Кроме того, эта теорема обобщает результат Мультона [26] (обобщающий в свою очередь результат Хилла), в котором она была получена для системы типа Солнце-Земля-Луна, т.е. для случая одной планеты и одного спутника. Теорема 5 в случае Солнце-планета-спутники была получена ранее в работе [12] Тхая.

Результаты данной диссертации докладывались на девятнадцатой сессии совместных заседаний семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества в январе 1998 г., на семинаре по векторному и тензорному анализу им. В. К. Рашевского механико-математического факультета МГУ, на научном семинаре кафедры небесной механики ГАИШ (Государственного астрономического института им. Штернберга) при МГУ, на научных семинарах кафедр теоретической механики, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ.

Автор глубоко благодарен научному руководителю Н. Н. Нехорошеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Также автор хотел бы выразить благодарность С. В. Болотину, В. В. Козлову, Д. В. Трещёву, А. Д. Брюно, В. Н. Тхаю, А. И. Нейштадту, В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину, Ю. Чеканову, П. Пушкарю, М. Концевичу, А. Т. Фоменко, В. Л. Голо, В. В. Трофимову, А. В. Болсинову, Б. Кругликову, В. В. Калашникову за ценные замечания и полезные обсуждения.

1 Сохранение замкнутых траекторий гамильтоновых систем при возмущениях

1.1 Оценка числа замкнутых траекторий

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом H на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2). Пусть на неособой изоэнергетической поверхности $M_h = H^{-1}(h) \subset M^{2n}$ имеется связное подмногообразие Λ, сплошь заполненное замкнутыми траекториями этой системы.

Пусть на Λ имеется непрерывная, а значит, гладкая функция

$$T : \Lambda \to \mathbb{R}$$

периода замкнутых траекторий на подмногообразии Λ. Это означает, что на Λ имеется гладкое действие окружности. Оно расслаивает Λ на неособые и особые слои, гомеоморфные окружности. Орбиты этого действия совпадают с замкнутыми траекториями заданной системы на Λ, и время движения по каждой траектории пропорционально естественному параметру на окружности с коэффициентом $\frac{T}{2\pi}$. В частности, это действие окружности локально свободно (т.е. не имеет неподвижных точек), поскольку изоэнергетическая поверхность по предположению является неособой.

Рассмотрим ориентированное гладкое расслоение

$$S^1 \to \Lambda \xrightarrow{p} B \tag{2}$$

со слоем окружность, слоями которого служат замкнутые траектории на подмногообразии Λ, а базой B — фактор-многообразие Λ/S^1 с естественной фактор-топологией.

Описанное расслоение Λ на окружности будем называть *периодическим*, или *расслоением Зейферта*. На некоторых траекториях, называемых *особыми слоями* расслоения Зейферта, функция T может не являться минимальным периодом, а лишь делиться на него нацело. Причина в том, что функция минимального периода не является, вообще говоря, непрерывной, а лишь полунепрерывна снизу.

В случае локально тривиального расслоения p в качестве непрерывной функции T можно взять минимальный период. При этом фактор-многообразие $B = \Lambda/S^1$, очевидно, будет являться гладким многообразием.

1.1.1 Понятие V–многообразия

Рассмотрим общий случай периодического расслоения (2) и отметим его сходства и различия с частным случаем локально-тривиального расслоения. Предположим, что расслоение (2) имеет особые слои. Тогда фактор-многообразие B уже не является гладким многообразием, однако на нём имеется структура так называемого *обобщённого многообразия*, или *V–многообразия* [30, 36], аналогичная структуре гладкого многообразия.

V–многообразием размерности k называется топологическое пространство, локально гомеоморфное фактор-пространству $\mathbb{R}^k$ по некоторой конечной подгруппе Γ (зависящей от точки) в группе локальных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, оставляющих начало координат неподвижным. В нашем случае для любой траектории с минимальным периодом $\frac{T}{N}$, где N — некоторое натуральное число, соответствующая подгруппа изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_N$.

Гладкая структура V–многообразия B определяется так. Функцию f на фактор-многообразии B назовём гладкой, если её обратный образ $p^*f : \Lambda \to \mathbb{R}$ при отображении $p : \Lambda \to B$ является гладкой функцией на многообразии Λ. Критическими точками гладкой функции $f : B \to \mathbb{R}$ назовём проекции на B критических орбит функции p^*f. Критическую точку функции f назовём невырожденной, или морсовской, если соответствующая ей критическая орбита функции p^*f является боттовской.

Аналогично определяются гладкие отображения, диффеоморфизмы, векторные поля и дифференциальные формы для V–многообразий. Например, на V–многообразии $B = \Lambda/S^1$ имеется естественная корректно определённая замкнутая 2–форма, а именно, "проекция" на B ограничения симплектической структуры на подмногообразие Λ. Относительно этой 2–формы фактор-многообразие B может являться симплектическим (см. [36], а также ниже).

Кроме того, можно определить касательное расслоение T_*B к любому V–многообразию B. Для этого рассмотрим в каждой точке $m \in \Lambda$ фактор-пространство касательного пространства $T_m\Lambda$ по одномерному подпространству, касательному к замкнутой траектории на Λ, проходящей через m. На полученном расслоении над Λ имеется естественное периодическое действие окружности. Пространство орбит этого действия является некоторым (не локально тривиальным) расслоением над V–многообразием $B = \Lambda/S^1$, и это пространство орбит назовём касательным расслоением к B. Аналогично определяется кокасательное расслоение T^*B. Отметим, что пространства T_*B и T^*B, как и B, являются V–многообразиями.

Замечание 1. В действительности, любое V–многообразие размерности k *невырождено* в следующем смысле. Любая точка $b \in B$ имеет окрестность, диффеоморфную фактор-пространству $\mathbb{R}^k/\Gamma_b$ пространства $\mathbb{R}^k$ по некоторой конечной подгруппе Γ_b в группе $GL(k)$ *линейных преобразований*. Другими словами, действие любой конечной группы в пространстве $\mathbb{R}^k$ диффеоморфно линейному действию. (Это утверждение верно для действия в пространстве $\mathbb{R}^k$ любой компактной группы Ли.) Для доказательства рассмотрим любую риманову метрику на пространстве $\mathbb{R}^k$ и рассмотрим сумму её образов при действии элементами подгруппы Γ_b. Полученная риманова метрика на пространстве $\mathbb{R}^k$, очевидно, инвариантна относительно действия элементами группы Γ_b. В частности, геодезические этой метрики при действии любым элементом $g \in \Gamma_b$ перейдут в геодезические. Следовательно, при отождествлении $\mathbb{R}^k$ с $T_0\mathbb{R}^k$ при помощи экспоненциального отображения $\exp_0 : T_0\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, касательное действие $g_*(0)$ элементом g на $T_0\mathbb{R}^k$ перейдёт в действие этим элементом g на $\mathbb{R}^k$. Таким образом, действие группы Γ_b на $\mathbb{R}^k$ изоморфно касательному действию этой группы на пространстве $T_0\mathbb{R}^k$. Последнее действие, очевидно, является действием конечной подгруппы группы $GL(k)$ линейных преобразований пространства $T_0\mathbb{R}^k$.

Отсюда, в частности, следует, что касательное пространство T_bB в точке вида $b = p(\gamma) \in B$, где γ — особый слой, диффеоморфно фактор-пространству $\mathbb{R}^k/\Gamma_b$ и, тем самым, диффеоморфно некоторой окрестности точки b в B.

1.1.2 Формулировка основного результата

Для любой траектории $\gamma \subset \Lambda$ рассмотрим маленькую площадку $\sigma \subset M_h$, трансверсально пересекающую эту траекторию и называемую *сечением Пуанкаре*. Рассмотрим отображение Пуанкаре $A : \sigma \to \sigma$ этой площадки на себя, задаваемое потоком системы за время, близкое к периоду $T|_\gamma$. Ясно, что точка пересечения $m = \gamma \cap \sigma$ исходной траектории γ с сечением Пуанкаре σ, как и любая другая точка подмногообразия $\Lambda \cap \sigma$, неподвижна при отображении A. Рассмотрим линейную часть $dA(m)$ отображения A в этой неподвижной точке.

Определение 1. Подмногообразие Λ назовём *невырожденным*, если расслоение (2) является периодическим, и для любой траектории $\gamma \subset \Lambda$ ядро оператора $dA(m) - I$ совпадает с касательным пространством $T_m(\Lambda \cap \sigma)$ к подмногообразию $\Lambda \cap \sigma$:

$$\ker(dA(m) - I) = T_m(\Lambda \cap \sigma),$$

где I — тождественный оператор в касательном пространстве $T_m\sigma$ к сечению Пуанкаре σ в точке m.

Рассмотрим на (M^{2n}, ω^2) *возмущённую систему* с некоторым гамильтонианом $\tilde{H}$, близким к H по норме C^2.

Определение 2. В настоящей работе, говоря о *замкнутой траектории* возмущённой системы, мы всегда будем иметь в виду замкнутую траекторию $\tilde{\gamma}$, обладающую дополнительным свойством “почти T–периодичности”. А именно, будем предполагать, что она близка к подмногообразию Λ, и её период близок к периоду $T|_\gamma$ некоторой близкой к $\tilde{\gamma}$ невозмущённой траектории $\gamma \subset \Lambda$.

Теорема 1. *Пусть подмногообразие $\Lambda \subset M_h$, сплошь заполненное замкнутыми траекториями невозмущённой системы, компактно (без края) и невырождено. Пусть расслоение (2) подмногообразия Λ на замкнутые траектории является периодическим. Тогда число лежащих на $\tilde{H}^{-1}(h)$ геометрически различных замкнутых траекторий возмущённой системы не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на фактор-многообразии $B = \Lambda/S^1$. Кроме того, число таких траекторий с учётом кратностей не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на B.*

Из этой теоремы получаем (см. [13, 11]) следующее

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 число геометрически различных замкнутых траекторий возмущённой системы на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ не меньше категории Люстерника-Шнирельмана $\operatorname{cat} B$ фактор-многообразия B. Если при этом расслоение (2) локально-тривиально, то число таких траекторий с учётом кратностей не меньше суммы чисел Бетти $\sum \beta_i(B)$ этого многообразия.*

В действительности, теорема 1 была доказана ранее другим методом Вейнстейном в работе [37].

Из теоремы 1 и следствия 1 получаем следующие более грубые оценки для числа замкнутых траекторий возмущённой системы на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 число геометрически различных замкнутых траекторий возмущённой системы на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ не меньше $\frac{1}{2}\operatorname{cat}\Lambda$. Кроме того, число замкнутых траекторий с учётом кратностей не меньше $\frac{1}{2}\sum \beta_i(\Lambda)$.*

В случае локально-тривиального расслоения (2) эти оценки вытекают из следствия 1 и следующих неравенств [13]:

$$\operatorname{cat}\Lambda \le \operatorname{cat} S^1 \operatorname{cat} B = 2\operatorname{cat} B,$$

где S^1 — слой расслоения (2), и

$$\beta_i(\Lambda) \le \beta_i(B) + \beta_{i-1}(B), \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

(последнюю оценку нетрудно получить из результатов книги [5]). В случае произвольных расслоений Зейферта мы выведем нужные оценки непосредственно из теоремы 1 (или её более слабых аналогов).

Доказательство. Следствие 2 легко вывести непосредственно из теоремы 1 (таким же способом, как выводятся оценки следствия 1). Мы докажем эти оценки для более широкого класса функций на Λ, называемых иногда *круглыми функциями*, — у которых множество критических точек является объединением непересекающихся гладких окружностей.

Напомним [13], что доказательство факта о категории Люстерника-Шнирельмана (см. следствие 1) основано на следующем наблюдении. Для любой гладкой функции $F:\Lambda\to\mathbb{R}$, множество критических точек которой состоит из конечного числа связных компонент $C_i\subset\Lambda$, $1\le i\le N$, категория множества $\Lambda_a=\{F\le a\}$ не убывает по $a\in\mathbb{R}$ и при переходе через критическое значение a функции F увеличивается не более чем на максимум категорий $\operatorname{cat}_{\Lambda_a}C_i\le\operatorname{cat}C_i$ подмножеств вида $C_i\subset\{F=a\}$. Складывая эти приращения, в итоге имеем:

$$\operatorname{cat}\Lambda\le\sum_{i=1}^{N}\operatorname{cat}C_i\le N\max_{1\le i\le N}\operatorname{cat}C_i.$$

Отсюда получаем оценку для числа N критических подмножеств функции F: $N\ge\frac{\operatorname{cat}\Lambda}{\max_{1\le i\le N}\operatorname{cat}C_i}$. Осталось заметить, что категория окружности равна двум: $\operatorname{cat}S^1=2$. Поэтому для любой функции F на многообразии Λ, множество критических точек которой есть объединение N непересекающихся гладких окружностей, имеем $N\ge\frac{1}{2}\operatorname{cat}\Lambda$.

В случае функции Ботта F на Λ, имеющей N критических подмногообразий C_i, $1\le i\le N$, все из которых — окружности, легко построить функцию Морса на Λ вида $\tilde F=F+\varepsilon F_1$, имеющую ровно $2N$ критических точек, где $\varepsilon\ll 1$. Для этого в качестве F_1 возьмём гладкую функцию, ограничение которой на каждую окружность C_i является функцией Морса с ровно двумя критическими точками m_{i-} и m_{i+}: минимумом и максимумом. Тогда вблизи этой окружности функция $\tilde F$ имеет ровно две критические точки, находящиеся вблизи точек m_{i-} и m_{i+}. Обе эти критические точки являются морсовскими с индексами $\operatorname{ind}_F C_i$ и $\operatorname{ind}_F C_i+1$ соответственно. Таким образом, число N всех боттовских окружностей C_i функции F равно половине числа критических точек функции Морса $\tilde F$ на Λ. Согласно неравенствам Морса, последнее число не меньше $\sum_i\beta_i(\Lambda)$, откуда $N\ge\frac{1}{2}\sum\beta_i(\Lambda)$.

Это доказывает следствие 2.

1.1.3 Некоторые частные случаи

Определение 3. Назовём подмногообразие Λ *строго невырожденным*, если в каждой точке $m \in \Lambda$ кратность 1 в спектре оператора $dA(m)$ (т.е. размерность отвечающего единице корневого подпространства) равна $\dim B$.

Замечание. Можно показать, что подмногообразие Λ строго невырождено в том и только том случае, когда фактор-многообразие B симплектично относительно естественной 2–формы на нём, индуцированной симплектической структуры на M. Здесь фактор-многообразие B мы называем симплектическим относительно естественной 2–формы на нём, если ограничение исходной симплектической структуры ω^2 на пересечение трансверсали σ с подмногообразием Λ является невырожденной 2–формой. В частности, размерность строго невырожденного Λ всегда нечётна.

Подчеркнём, что в теореме 1 мы не предполагаем, что подмногообразие Λ строго невырождено (в отличие от работ [14, 36]). Кроме того, мы не накладываем никаких ограничений на структуру фактор-многообразия B с естественной 2–формой на нём, его размерность или топологию. В частности, B может не являться ни симплектическим, ни изотропным подмногообразием. Оно может иметь любую размерность, и даже быть неориентируемым.

Однако в некоторых специальных случаях из теоремы 1 (или её более слабых аналогов [4, 14, 34, 35]) следует более удобная и конкретная оценка. А именно:

1. Мозер [25] и Вейнстейн [36] заметили, что если фактор-многообразие B симплектично (или, что в данном случае эквивалентно, Λ строго невырождено), то справедлива оценка

$$\operatorname{cat} B \geq \frac{1}{2}\dim B + 1 = \frac{1}{2}(\dim \Lambda + 1). \tag{3}$$

Более точно, в работе [36] доказано, что симплектическая структура задаёт элемент группы двумерных когомологий V–многообразия B, k–тая степень которого отлична от нуля в кольце вещественных когомологий $H^*(B)$, где $2k = \dim B$. Следовательно, когомологическая длина B не меньше k: $\ell(B) \geq k$. Отсюда и из неравенства $\operatorname{cat} B > \ell(B)$ получаем (3). Следовательно, любая S^1–инвариантная гладкая функция на Λ имеет не менее $k+1$ замкнутых траекторий.

2. Другим неожиданным и не менее интересным является факт, что последняя оценка справедлива и в случае, когда подмногообразие Λ гомотопически эквивалентно нечётномерной сфере (см. работы М. А. Красносельского

[21] и Вейнстейна [35]). Более точно, в работе [21] доказано, что для такого Λ существует достаточно большое N, при котором многообразие $\Lambda^\circ = \Lambda/\mathbb{Z}_N$ (т.е. пространство орбит свободного действия конечной подгруппы $\mathbb{Z}_N \subset S^1$ на Λ) имеет категорию вида $\operatorname{cat}\Lambda^\circ = \dim\Lambda + 1 = \dim B + 2$. Но, согласно доказательству следствия 2, любая $S^1/\mathbb{Z}_N$–инвариантная гладкая функция на Λ° имеет не менее чем $\frac{1}{2}\operatorname{cat}\Lambda^\circ = \frac{1}{2}\dim B + 1$ критических окружностей. Следовательно, любая S^1–инвариантная гладкая функция на Λ тоже имеет не менее чем $\frac{1}{2}\dim B + 1$ критических окружностей.

Отсюда получаем ещё одно следствие из теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть, в условиях теоремы 1, выполнено одно из следующих двух условий:*

1. *либо подмногообразие Λ строго невырождено (см. определение 3),*

2. *либо подмногообразие Λ гомотопически эквивалентно нечётномерной сфере.*

Тогда число (геометрически различных) замкнутых траекторий системы с гамильтонианом $\tilde H$ на поверхности $\tilde H^{-1}(h)$ не меньше, чем

$$\frac{1}{2}(\dim\Lambda + 1) = \frac{1}{2}\dim B + 1,$$

т.е. больше половины размерности фактор-многообразия B.

Оценка следствия 3 была доказана в работе Вейнстейна [35], где она была выведена из более слабого аналога теоремы 1 (теорема 1 была доказана Вейнстейном лишь позже). А именно, в этой работе было доказано, что для любой конечной подгруппы $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ группы S^1 число замкнутых траекторий системы с гамильтонианом $\tilde H$ не меньше, чем минимальное число критических окружностей Γ–инвариантной круглой функции на Λ. Доказательство этого факта, как и более общего результата настоящей работы (см. утверждение 3 ниже), использовало более простую технику, чем последующее доказательство теоремы 1 в работе Вейнстейна [37].

Замечание 2. Пусть расслоение (2) не является локально тривиальным, т.е. имеет особые слои. Рассмотрим объединение Λ_k всех особых траекторий на подмногообразии Λ, которые замыкаются через время T/k, где k — целое число, большее единицы. Оказывается, что:

1. Для любой гладкой функции f на V–многообразии B существуют критические точки этой функции, принадлежащие множеству $p(\Lambda_k)$.

2. Для многих замкнутых траекторий возмущённой системы минимальный период будет близок не к T, а к числу вида T/k, где T — непрерывная функция периода на Λ, $k > 1$.

В самом деле, из свойства невырожденности V–многообразий (см. замечание 1) следует, что для любого k множество Λ_k состоит из конечного числа связных компонент Λ_{ki}, и каждая из этих компонент является гладким компактным подмногообразием в Λ, невырожденным в смысле определения 1 по отношению к функции периода T/k.

Следовательно, согласно теореме 1, вблизи связного подмногообразия Λ_{ki} число замкнутых траекторий возмущённой системы с периодами, близкими к T/k, не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на V–многообразии Λ_{ki}/S^1. Это доказывает второе из упомянутых утверждений.

С другой стороны, на многообразии Λ всегда существует S^1–инвариантная риманова метрика. Ясно, что градиентный поток (по отношению к этой метрике) любой S^1–инвариантной функции f коммутирует с действием окружности на Λ. Отсюда следует инвариантность каждого множества Λ_k относительно этого потока. Следовательно, градиент функции f касателен к каждому подмногообразию Λ_{ki}. Поэтому критические точки функции $f|_{\Lambda_{ki}}$ совпадают с критическими точками функции f, лежащими на подмногообразии Λ_{ki}. Это доказывает первое из упомянутых утверждений.

В частности, любой *изолированный* (в соответствующем множестве Λ_k) особый слой расслоения (2) сохраняется при возмущении, лишь слегка продеформировавшись, т.е. "порождает" замкнутую траекторию возмущённой системы с периодом, близким к минимальному периоду невозмущённой траектории.

1.2 Метод усреднения на подмногообразии

Предположим теперь, что в условиях теоремы 1 исходная гамильтонова система включена в однопараметрическое семейство возмущённых гамильтоновых систем на симплектическом многообразии M, зависящих от малого параметра ε, с гамильтонианами вида

$$\tilde{H} = H + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где H_1 — гладкая функция на многообразии M. Оказывается [34], что в случае возмущения общего вида при достаточно малых $|\varepsilon|$ число замкнутых траекторий возмущённой системы на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ можно оценить более точно. А именно, с помощью усреднения возмущения

$$\mathcal{H} = H_1|_\Lambda \tag{5}$$

по периодическим траекториям невозмущённой системы на Λ, и нахождения критических траекторий полученной усреднением функции. Эти критические траектории будут порождать замкнутые траектории возмущённой системы. В этом и заключается метод усреднения на подмногообразии.

Перейдём к точным формулировкам. Рассмотрим функцию $\mathcal{H}$ — ограничение возмущения на Λ, и рассмотрим её *усреднение*

$$\bar{\mathcal{H}}(m) = \int_0^{T(m)} \mathcal{H}(\gamma(m,t))\, dt, \qquad m \in \Lambda, \tag{6}$$

по замкнутым траекториям невозмущённой системы на Λ; здесь $\gamma(m,t)$ — периодическое решение невозмущённой системы с начальным условием $\gamma(m,0) = m$, $T : \Lambda \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция периода на Λ. Полученная функция $\bar{\mathcal{H}}$ на Λ, очевидно, постоянна вдоль слоев расслоения (2). Таким образом, она корректно "опускается" на фактор-многообразие B. Следующая теорема показывает, что если все критические траектории функции $\bar{\mathcal{H}}$ — боттовские, то все они порождают замкнутые траектории возмущённой системы.

Теорема 2. *Пусть подмногообразие $\Lambda \subset M_h$, сплошь заполненное замкнутыми траекториями невозмущённой системы, невырождено, но не обязательно компактно. Пусть возмущённый гамильтониан гладко зависит от малого параметра ε, т.е. имеет вид (4). Рассмотрим на Λ функцию $\bar{\mathcal{H}}$ — усреднение (6) возмущения гамильтониана по замкнутым траекториям на Λ. Пусть $\gamma_0 \subset \Lambda$ — боттовская критическая траектория функции $\bar{\mathcal{H}}$. Тогда существует однопараметрическое семейство замкнутых траекторий $\gamma_\varepsilon \subset \tilde{H}^{-1}(h)$ возмущённой системы. Это семейство гладко зависит от параметра возмущения ε, где ε достаточно мало, и γ_ε совпадает с γ_0 при $\varepsilon = 0$.*

Эта теорема обобщает метод усреднения на подмногообразии, см. работу Мозера [24]. Впервые теорема 2 была сформулирована и доказана Вейнстейном в работе [34]. Однако предлагаемый в настоящей работе способ доказательства отличается от предложенного Вейнстейном. Наш подход является в сущности развитием геометрического подхода Пуанкаре [28], применявшегося также в работе Мозера [24].

В случаях, когда функция $\bar{\mathcal{H}}$ отлична от константы, но не является боттовской, можно применять следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть, в условиях теоремы 2, $\gamma \subset \Lambda$ — некоторая траектория невозмущённой системы, не являющаяся критической для функции $\bar{\mathcal{H}}$. Тогда существует окрестность Ω этой траектории в M^{2n}, такая,* *что при любых достаточно малых ε на поверхности $\Omega \cap \tilde{H}^{-1}(h)$ не существует замкнутых траекторий системы с гамильтонианом $\tilde{H}$.*

Для формулировки второго утверждения введём следующее

Определение 4. Пусть m — изолированная критическая точка гладкой функции $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $F(m) = 0$. Рассмотрим множество $M = \{x \in \mathbb{R}^k \mid F(x) \le 0\}$. Определим *числа Бетти* $\beta_i(F, m)$ функции F в точке m, полагая $\beta_i(F, m) = \operatorname{rank} H_i(M, M \setminus \{m\})$, $0 \le i \le k$.

Утверждение 2. *Пусть, в условиях теоремы 2, $\gamma \subset \Lambda$ — (не обязательно боттовская) изолированная критическая траектория функции $\bar{\mathcal{H}}$ на Λ. Рассмотрим ограничение $F = \bar{\mathcal{H}}|_{\bar{\Lambda}}$ этой функции на нормальную к γ площадку $\bar{\Lambda}$ в Λ, и рассмотрим числа Бетти $\beta_i(F, m)$ полученной функции в точке пересечения $m = \gamma \cap \bar{\Lambda}$ траектории γ с этой площадкой. Предположим, что хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля, а значит, их сумма $\beta = \sum \beta_i(F, m)$ положительна. Тогда для любой окрестности Ω траектории γ в M^{2n} существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, на поверхности $\Omega \cap \tilde{H}^{-1}(h)$ существует по меньшей мере одна замкнутая траектория системы с гамильтонианом $\tilde{H}$. Кроме того, число таких траекторий с учётом кратностей не меньше β.*

Следствие 4. *Пусть, в условиях утверждения 2, индекс $\operatorname{ind}_m(\operatorname{grad} F)$ градиента функции $F = \bar{\mathcal{H}}|_{\bar{\Lambda}}$ в точке $m = \gamma \cap \bar{\Lambda}$ отличен от нуля. Тогда для любой окрестности Ω траектории γ в M^{2n} существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, на поверхности $\Omega \cap \tilde{H}^{-1}(h)$ существует по меньшей мере одна замкнутая траектория системы с гамильтонианом $\tilde{H}$. Кроме того, число таких траекторий в с учётом кратностей не меньше, чем* $\operatorname{ind}_m(\operatorname{grad} F)$.

В самом деле, можно показать, что индекс градиента функции F в точке m равен альтернированной сумме $\operatorname{ind}_m(\operatorname{grad} F) = \sum (-1)^i \beta_i(F, m)$ чисел Бетти. Поэтому следствие 4 действительно следует из утверждения 2.

В действительности, справедливо следующее утверждение, обобщающее теоремы 1, 2 и утверждения 1, 2.

Предположим, что гамильтониан $\tilde{H}$ возмущённой системы близок к H по норме C^r, где $r \ge 2$. Обозначим

$$\varepsilon = \|\tilde{H} - H\|_{C^r}, \quad H_1 = (\tilde{H} - H)/\varepsilon,$$

и обозначим через $\bar{\mathcal{H}}$ усреднение (6) возмущения $H_1|_\Lambda$ по замкнутым траекториям невозмущённой системы на Λ.

Утверждение 3. *В условиях теоремы 1 существует окрестность U подмногообразия Λ в M и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что при любом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, существует вложение $i : \Lambda \hookrightarrow U$ подмногообразия Λ в U и гладкие функции S и $\tilde{T}$ на подмногообразии Λ, постоянные относительно действия окружности и обладающие следующими свойствами:*

1° Образ $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$ подмногообразия Λ при вложении i лежит на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$.

2° Образы при вложении i всех критических окружностей функции S в точности совпадают с замкнутыми траекториями возмущённой системы на $U \cap \tilde{H}^{-1}(h)$. В частности, подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ содержит все замкнутые траектории возмущённой системы на $U \cap \tilde{H}^{-1}(h)$. При этом для любой критической окружности γ функции S число $\tilde{T}(\gamma)$ является периодом траектории $i(\gamma)$.

3° Окружность $\gamma \subset \Lambda$ является боттовской критической окружностью функции S в том и только том случае, когда её образ $i(\gamma)$ при вложении i является невырожденной (в смысле определения 1) замкнутой траекторией возмущённой системы. Более того, для любой точки $m \in \gamma$ и секущей гиперповерхности $\Sigma \subset U$, трансверсально пересекающей траекторию γ в точке m, образ при касательном отображении $di(m)$ нулевого подпространства гессиана функции $S|_{\Sigma\cap\Lambda}$ в точке m в точности совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(i(m))-I$, где $\tilde{A} : \tilde{\sigma} \to \tilde{\sigma}$ — отображение Пуанкаре возмущённой системы, $\tilde{\sigma} = \Sigma \cap \tilde{H}^{-1}(h)$, I — тождественный оператор.

4° Вложение i близко к тождественному, функция $\tilde{T}$ близка к функции T, а функция $-S$ близка (с точностью до постоянного слагаемого) к функции $\bar{\mathcal{H}}$, полученной усреднением (6) возмущения $H_1 = (\tilde{H} - H)/\varepsilon$ по замкнутым траекториям невозмущённой системы на Λ.

5° Если возмущённый гамильтониан $\tilde{H}$ гладко зависит от малого параметра, т.е. имеет вид (4), то вложение $i : \Lambda \hookrightarrow M$ и функция S на Λ тоже гладко зависят от этого параметра. (При этом считается, что число ε в предыдущем пункте — это малый параметр, а не $\|\tilde{H} - H\|_{C^r}$.)

Здесь под близостью двух отображений или функций понимается их ε–близость в C^{r-1}–метрике.

1.3 Устойчивость замкнутых траекторий

Пусть γ — замкнутая траектория гамильтоновой системы (не являющаяся особой точкой). Через любую точку $m \in \gamma$ проведём сечение Пуанкаре $\sigma_m \subset H^{-1}(h)$ — маленькую площадку в $H^{-1}(h)$, трансверсально пересекающую траекторию γ. Пусть $A : \sigma_m \to \sigma_m$ — отображение Пуанкаре, определяемое потоком невозмущённой системы.

Рассмотрим *оператор монодромии*

$$\mathbf{A} = dA(m) : T_m\sigma_m \to T_m\sigma_m$$

— линейную часть отображения Пуанкаре в точке $m \in \Lambda$. Как уже отмечалось, оператор $\mathbf{A}$ является симплектическим линейным оператором.

Определение 5. Рассмотрим квадратичную форму $Q = \omega^2(\mathbf{A}*, *)$ в касательном пространстве к точке m. Эта форма называется *производящей функцией* симплектического оператора $\mathbf{A}$ [1].

Ясно, что нулевое подпространство этой формы содержит касательное пространство $T_m(\Lambda \cap \sigma_m)$ к $\Lambda \cap \sigma_m$.

Для доказательства теорем об устойчивости замкнутых траекторий в линейном приближении нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть, в условиях утверждения 3, в каждой точке $m \in \Lambda$ производящая функция Q оператора монодромии невырождена на трансверсали к $\Lambda \cap \sigma_m$ в σ_m. Тогда вложение $i : \Lambda \hookrightarrow \tilde{H}^{-1}(h)$ и гладкая функция $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ из утверждения 3 обладают следующим дополнительным свойством:*

6° *Пусть $\gamma \subset \Lambda$ — любая критическая окружность функции S, $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$ — соответствующая замкнутая траектория возмущённой системы. Рассмотрим производящие функции Q и $\tilde{Q}$ операторов монодромии, отвечающих замкнутым траекториям γ и $\tilde{\gamma}$. Тогда индекс квадратичной формы $\tilde{Q}$ равен сумме индекса квадратичной формы Q и индекса гессиана функции S в любой точке кривой γ:*

$$\operatorname{ind} \tilde{Q} = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} d^2 S.$$

Определение 6. Собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ симплектического оператора $\mathbf{A}$ называется *эллиптическим* [2], если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

1. квадратичная форма $Q(\xi) = \omega^2(\mathbf{A}\xi, \xi)$ знакоопределена на максимальном инвариантном подпространстве, на котором оператор $\mathbf{A}$ не имеет других собственных значений кроме λ и $\bar{\lambda}$;

2. эрмитова квадратичная форма $\frac{1}{2i}\omega^2(\xi, \bar{\xi})$ знакоопределена на отвечающем λ собственном подпространстве в комплексифицированном касательном пространстве.

Напомним, что линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *устойчивым* (по Ляпунову), если норма оператора $\mathbf{A}^n$ ограничена при $n \to \infty$. Симплектический оператор $\mathbf{A}$ называется *структурно устойчивым*, если любой симплектический оператор, достаточно близкий к оператору $\mathbf{A}$, является устойчивым.

Определение 7. Периодическое решение γ данной гамильтоновой системы назовём *орбитально устойчивым в линейном приближении* (или просто *устойчивым в линейном приближении*), если оператор монодромии $\mathbf{A}$ является устойчивым. Решение γ назовём (орбитально) *структурно устойчивым в линейном приближении*, если оператор монодромии $\mathbf{A}$ является структурно устойчивым.

Далее слово "орбитально" по отношению к устойчивости и структурной устойчивости замкнутой траектории в линейном приближении будем опускать.

Например, если все собственные значения оператора $\mathbf{A}$ лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и различны, то решение γ структурно устойчиво в линейном приближении. Отметим также, что любое структурно устойчивое периодическое решение устойчиво и невырождено (в смысле определения 1).

Замечание 3. В случае, когда система имеет дополнительный первый интеграл F, сохраняющийся при данном возмущении, вместо замкнутой траектории γ будем говорить о соответствующем инвариантном двумерном торе, в качестве сечения σ будем рассматривать трансверсаль к тору γ в поверхности $H^{-1}(h) \cap F^{-1}(f)$, а в качестве отображения Пуанкаре A будем брать аналогичное отображение на трансверсали σ. *Оператор монодромии* по-прежнему определяется как линейная часть $\mathbf{A}$ отображения Пуанкаре. Двумерный тор γ назовём *орбитально устойчивым* в линейном приближении на общей поверхности уровня интеграла "энергии" H и дополнительного интеграла F, если оператор монодромии $\mathbf{A}$ является устойчивым. Аналогично определяется структурно устойчивый тор.

Напомним известный факт из теории симплектических операторов [2].

Предложение 1.

А) Симплектический оператор устойчив в том и только том случае, когда он комплексно диагонализуем, и все его собственные значения лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Б) Симплектический оператор структурно устойчив в том и только том случае, когда любое комплексное собственное значение λ этого оператора является эллиптическим.

Замечание. Пусть решение γ структурно устойчиво в линейном приближении. Тогда все собственные значения оператора $\mathbf{A}$ являются эллиптическими и, в частности, лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и отличны от ± 1. Это эквивалентно тому, что при малой деформации симплектического отображения эта неподвижная точка сохранится, быть может слегка изменив свое положение, причём обязательно останется устойчивой в линейном приближении. Это и объясняет употребление термина *структурной* устойчивости периодического решения в линейном приближении.

Введём понятие сильно устойчивого подмногообразия, заполненного замкнутыми траекториями.

Обозначим через $R_1(\mathbf{A}) \subset T_m\sigma_m$ корневое подпространство оператора $\mathbf{A}$, отвечающее собственному значению 1. Нетрудно видеть, что нулевое подпространство квадратичной формы $Q = \omega^2(\mathbf{A}*, *)|_{R_1(\mathbf{A})}$ в точности совпадает с собственным подпространством $E_1(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A}$, отвечающим собственному значению 1.

Определение 8. Пусть $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ — подмногообразие, сплошь заполненное замкнутыми траекториями гамильтоновой системы. Будем говорить, что *подмногообразие Λ сильно устойчиво в линейном приближении*, если в каждой точке $m \in \Lambda$ выполнены следующие условия:

1. все собственные значения оператора $\mathbf{A} = dA(m)$ в $T_m\sigma_m$, отличные от 1, являются эллиптическими (см. определение 6), в частности, лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и отличны от ± 1;

2. квадратичная форма $Q = \omega^2(\mathbf{A}*, *)$ знакоопределена на некоторой трансверсали к касательному пространству $T_m(\Lambda \cap \sigma_m)$ в корневом подпространстве $R_1(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A}$, отвечающем собственному значению 1.

Далее для определённости будем считать, что производящая функция Q *положительно* (отрицательно) определена на указанной трансверсали. Если эта трансверсаль нульмерна (т.е. подпространство $R_1(\mathbf{A})$ совпадает с касательным пространством $T_m(\Lambda \cap \sigma_m)$), то производящую функцию Q будем считать одновременно и *положительно*, и *отрицательно* определённой на этой трансверсали.

Замечание. Нетрудно показать, что любое сильно устойчивое в линейном приближении подмногообразие Λ невырождено (в смысле определения 1), и в каждой его точке $m \in \Lambda$ спектр оператора $\mathbf{A}$ лежит на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и не содержит -1.

Теорема 3. *Пусть подмногообразие* $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, *заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом* H, *сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть гамильтониан* $\tilde{H}$ *возмущённой системы гладко зависит от малого параметра* $\varepsilon \geq 0$, *т.е. имеет вид (4). Пусть траектория* $\gamma_0 \subset \Lambda$ *является боттовским подмногообразием локального максимума (либо минимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 8) функции* $\bar{\mathcal{H}}$, *см. (6). То есть, имеет место "согласованная знакоопределённость". Тогда при достаточно малом* $\varepsilon_0 > 0$ *выживающая согласно теореме 2 замкнутая траектория* $\gamma_\varepsilon \subset \tilde{H}^{-1}(h)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *возмущённой системы структурно устойчива в линейном приближении.*

Траекторию γ_0 из теоремы 3 назовём *экстремальной окружностью* усреднённого возмущения $\bar{\mathcal{H}}$.

Следствие 5. *Пусть подмногообразие* $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, *заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом* H, *сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть гамильтониан* $\tilde{H}$ *возмущённой системы гладко зависит от малого параметра* $\varepsilon \geq 0$, *т.е. имеет вид (4). Пусть усреднённое возмущение* $\bar{\mathcal{H}}$ *является функцией Морса на многообразии* B. *Тогда возмущённая система имеет по меньшей мере одну замкнутую траекторию* $\gamma_\varepsilon \subset \tilde{H}^{-1}(h)$, *структурно устойчивую в линейном приближении. А именно, любая экстремальная окружность* $\gamma_0 \subset \Lambda$ *функции* $\bar{\mathcal{H}}$, *являющаяся её локальным максимумом (либо минимумом или минимаксом, в зависимости от ситуации в определении 8), является "порождающей" для некоторого семейства структурно устойчивых замкнутых траекторий* γ_ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

В действительности, справедливо следующее обобщение теоремы 3, дополняющее утверждение 3 и вытекающее из него, леммы 1 и предложения 1.

Утверждение 4. *Пусть, в условиях теоремы 1, подмногообразие* $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, *заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом* H, *сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть гамильтониан* $\tilde{H}$ *возмущённой системы близок к* H *по норме* C^r, *где* $r \geq 2$. *Тогда вложение* $i : \Lambda \hookrightarrow \tilde{H}^{-1}(h)$ *и гладкая функция* $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ *из утверждения 3 обладают следующим дополнительным свойством:*

7° *Пусть окружность* $\gamma \subset \Lambda$ *является боттовским подмногообразием локального минимума (либо максимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 8) функции* S. *Тогда образ* $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$ *этой окружности при вложении* i *является структурно устойчивой в линейном приближении замкнутой траекторией возмущённой системы.*

Применение термина “сильной устойчивости” к подмногообразию Λ, заполненному замкнутыми траекториями, объясняется следующим следствием из утверждения 4.

Следствие 6. *Пусть подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом H, сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть $\tilde{H}$ — гладкая функция на M, C^2–близкая к функции H. Пусть функция S из утверждения 4 является функцией Ботта, все критические подмногообразия которой — окружности. Тогда система с гамильтонианом $\tilde{H}$ имеет по меньшей мере одну замкнутую траекторию $\tilde{\gamma} \subset \tilde{H}^{-1}(h)$, устойчивую в линейном приближении. А именно, для любой критической окружности $\gamma \subset \Lambda$ функции S, являющейся её боттовским подмногообразием локального максимума (либо минимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 8), её образ $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$ при отображении i является структурно устойчивой в линейном приближении замкнутой траекторией возмущённой системы.*

1.4 Неподвижные точки симплектических отображений

Пусть, как и выше, $M = M^{2n}$ — симплектическое многообразие, снабженное симплектической структурой ω^2. Пусть $A : U \to M$ — симплектический (т.е. сохраняющий 2–форму ω^2) диффеоморфизм некоторой области $U \subset M$ в M. Рассмотрим множество $\Lambda \subset U$ всех неподвижных точек отображения A.

1.4.1 Условия невырожденности, строгой невырожденности и знакоопределённости

Определение 9. Множество Λ неподвижных точек симплектического отображения A назовём *невырожденным*, если оно является гладким подмногообразием в M, и в каждой точке $m \in \Lambda$ ядро оператора $dA(m) - I$ совпадает с касательным пространством $T_m\Lambda$ к подмногообразию Λ:

$$\ker\left(dA(m) - I\right) = T_m\Lambda,$$

где I — тождественный оператор в касательном пространстве T_mM к многообразию M.

В локальных координатах $m = (m_1, \ldots, m_n)$ это условие принимает следующий вид: ранг разности матрицы Якоби $\frac{\partial A}{\partial m}(m)$ и единичной матрицы

I в любой точке $m \in \Lambda$ максимален:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial A}{\partial m}(m) - I\right) = \operatorname{codim}\Lambda.$$

Определение 10. Множество Λ неподвижных точек отображения A назовём *строго невырожденным*, если оно является гладким подмногообразием в M и в каждой его точке $m \in \Lambda$ кратность собственного значения 1 (или, что то же самое, размерность отвечающего 1 корневого подпространства) оператора $dA(m)$ равна $\dim \Lambda$.

Такое условие на подмногообразие Λ накладывалось в работах Ботткола [14] и автоматически выполнялось в работе Мозера [24]. Отметим, что определения невырожденности и строгой невырожденности не предполагают гамильтоновость системы и, в частности, наличие симплектической структуры. Однако симплектическая структура на Λ влияет на возможную структуру жордановой формы операторов $dA(m)$, $m \in \Lambda$. Следующее утверждение, в частности, показывает, что условие строгой невырожденности Λ является существенно более сильным, чем условие обычной невырожденности.

Предложение 2. *Пусть множество Λ неподвижных точек симплектического отображения A невырождено. Тогда:*

(а) В каждой точке $m \in \Lambda$ размерность корневого подпространства $R_1(dA(m))$ оператора $dA(m)$, отвечающего собственному значению 1, не меньше, чем $\dim\Lambda + \dim\ker(\omega^2|_{T_m\Lambda})$. Собственному значению 1 оператора $dA(m)$ линеаризации отображения A отвечает ровно $\dim\Lambda$ жордановых клеток, причём среди них ровно $\operatorname{rank}(\omega^2|_{T_m\Lambda})$ клеток имеют порядок 1.

(б) Множество Λ является строго невырожденным тогда и только тогда, когда оно является симплектическим подмногообразием в M.

(в) Пусть в точке $m \in \Lambda$ выполнено одно из следующих условий:

1. *либо подпространство $T_m\Lambda$ коизотропно (например, лагранжево или совпадает со всем T_mM),*

2. *либо квадратичная форма $Q = \omega^2(dA(m)*, *)$ знакоопределена на трансверсали в корневом подпространстве $R_1(dA(m))$ к собственному подпространству $E_1(dA(m)) \subset R_1(dA(m))$ оператора $dA(m)$ (отвечающим собственному значению 1).*

Тогда все жордановы клетки оператора $dA(m)$, отвечающие собственному значению 1, будут порядка 1 или 2. Среди них будет ровно $\operatorname{rank}(\omega^2|_{T_m\Lambda})$ клеток порядка 1 и $\dim\ker(\omega^2|_{T_m\Lambda})$ клеток порядка 2.

В дальнейшем мы воспользуемся пунктами (б) и (в-2) этого предложения.

Доказательство. Для доказательства п. (а) воспользуемся следующим общим фактом из линейной алгебры:

Размерность корневого подпространства $R_0(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A}$, отвечающего собственному значению 0, равна сумме размерностей следующих подпространств: $L_k = \ker \mathbf{A} \cap \mathrm{Im}(\mathbf{A}^k)$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом жорданова форма оператора $\mathbf{A}$ имеет ровно $\dim L_{k-1} - \dim L_k$ жордановых клеток порядка k, отвечающих собственному значению 0.

Отсюда и из невырожденности Λ сразу получаем, что оператор $dA(m)$ имеет ровно $\dim \Lambda$ жордановых клеток, отвечающих собственному значению 1. Покажем теперь, что ровно $\dim \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda})$ из этих клеток имеют порядок больше 1. Согласно общему факту (см. выше), это число равно размерности подпространства $L_1 = \ker (dA(m) - I) \cap \mathrm{Im}(dA(m) - I)$, где I — тождественный оператор. Но для любого симплектического оператора $\mathbf{A}$ ядро и образ оператора $\mathbf{A} - I$ косоортогональны, так как для любого $\eta \in \ker (\mathbf{A} - I)$ имеем

$$\omega^2(\mathbf{A}\xi - \xi, \eta) = \omega^2(\mathbf{A}\xi, \eta) - \omega^2(\mathbf{A}\xi, \mathbf{A}\eta) = \omega^2(\mathbf{A}\xi, \eta - \mathbf{A}\eta) = 0. \qquad (7)$$

Более того, из невырожденности симплектической структуры и соображения размерностей получаем, что эти подпространства являются косоортогональными дополнениями друг друга. Следовательно, $L_1 = T_m\Lambda \cap T_m^{\perp}\Lambda = \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda})$. Поэтому ровно $\dim \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda})$ клеток имеют порядок больше 1, а значит, ровно $\dim \Lambda - \dim \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda}) = \mathrm{rank}\,(\omega^2|_{T_m\Lambda})$ клеток имеют порядок 1.

Таким образом, размерность отвечающего собственному значению 1 корневого подпространства оператора $dA(m)$, не меньше чем $\dim L_0 + \dim L_1 = \dim \Lambda + \dim \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda})$, что и доказывает п. (а) предложения 2.

Пункт (б) очевидно следует из п. (а), так как строгая невырожденность равносильна тому, что все жордановы клетки оператора $dA(m)$, отвечающие собственному значению 1, имеют порядок 1.

Докажем пункт (в). В случае коизотропного Λ число клеток порядка больше 1 равно

$$\dim \ker (\omega^2|_{T_m\Lambda}) = \mathrm{codim}\,\Lambda,$$

откуда следует, что все эти клетки имеют порядок 2. Это доказывает пункт (в–1). Осталось доказать пункт (в–2).

Рассмотрим оператор $\mathbf{A} = dA(m)|_{R_1(dA(m))}$. Известно, что корневое подпространство $L = R_1(dA(m))$ является симплектическим, поэтому $\mathbf{A}$ —

симплектический оператор, спектр которого состоит из одной 1. Хорошо известно, что любой линейный оператор, спектр которого веществен, раскладывается в прямую сумму (вещественных) "жордановых клеток" (т.е. неприводимых операторов, матрицы которых отличаются от скалярных матриц тем, что на соседней с главной диагональю стоят 1 вместо нулей). Предположим, что одна из жордановых клеток оператора $\mathbf{A}$ имеет порядок больше двух. Это значит, что существуют три вектора $e_1, e_2, e_3 \in L$, для которых $\mathbf{A}e_1 = e_1$, $\mathbf{A}e_2 = e_1 + e_2$, $\mathbf{A}e_3 = e_2 + e_3$. Так как $e_2 \in R_1(dA(m)) \setminus E_1(dA(m))$, то по условию $Q(e_2) = \omega^2(e_1, e_2) \neq 0$. Следовательно, значение $Q(\lambda e_1 + e_3) = \omega^2(e_2, \lambda e_1 + e_3)$ обращается в ноль при подходящем выборе числа λ. Но вектор вида $\lambda e_1 + e_3$ принадлежит $R_1(dA(m)) \setminus E_1(dA(m))$, и поэтому значение $Q(\lambda e_1 + e_3)$ должно быть отличным от нуля. Это приводит к противоречию. Следовательно, все жордановы клетки, отвечающие собственному значению 1, имеют порядок 1 или 2.

Предложение 2 полностью доказано.

Замечание. Необходимость в исследовании коизотропных и, в частности, лагранжевых подмногообразий Λ неподвижных точек симплектических отображений появляется достаточно часто, например, в случае, когда невозмущённая система является интегрируемой. Ясно, что в типичном случае такое лагранжево подмногообразие Λ будет невырожденным, но согласно предложению оно не может быть строго невырожденным. Таким образом, в этом важном для приложений частном случае Λ будет именно *невырожденным*, а не строго невырожденным.

1.4.2 Обобщение геометрической теоремы Пуанкаре. Гомологичные симплектические отображения

Рассмотрим симплектический диффеоморфизм $A : U \to M$ и (возмущённый) симплектический диффеоморфизм $\tilde{A}$, C^1–близкий к диффеоморфизму A.

Предположим сначала, что дано однопараметрическое семейство симплектических отображений $\tilde{A} = A_\varepsilon : U \to M$, $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, гладко зависящее от малого параметра ε и совпадающее с A при $\varepsilon = 0$.

Говорят, что симплектические отображения $A_u : U \to M$ гладкого семейства A_u, $|u| < u_*$, *гомологичны* друг другу [1], если при каждом u векторное поле скоростей $\frac{d}{du}A_u$ имеет глобальную функцию Гамильтона F_u в области $A_u(U)$ $(u_* > 0)$. Другими словами, семейство A_u, $|u| < u_*$, является фазовым потоком некоторой неавтономной гамильтоновой системы с временем u.

Определение 11. *Производящей функцией гладкого семейства* гомологичных симплектических отображений A_u назовём гладкую функцию $\Phi(m, u)$, $m \in M$, $|u| < u_*$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(m, u) + F_u(A_u(m)) = 0, \tag{8}$$

где $\Phi(m, 0) \equiv 0$, F_u — глобальная функция Гамильтона поля скоростей $\frac{d}{du} A_u$.

Ясно, что отображение A_0 и производящая функция $\Phi(m, u)$ однозначно задают семейство отображений A_u.

Замечание 4. Часто производящей функцией семейства отображений называют также функцию $S(m, u)$, удовлетворяющую уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial u}(m, u) + F_u(m) = 0. \tag{9}$$

Отметим, что обе функции $\Phi(m, u)$ и $S(m, u)$ однозначно определяются отображением A_0 и семейством гамильтонианов F_u. Верно и обратное: любая из этих функций однозначно задаёт семейство гамильтонианов F_u (с точностью до константы, зависящей от u), а значит, и семейство гомологичных отображений A_u (если задано отображение A_0). Поясним этот факт, указав геометрический смысл производящих функций $\Phi(m, u)$ и $S(m, u)$ с точки зрения группы Ли, действующей (слева) на многообразии M симплектическими преобразованиями. Соответствующую алгебру Ли $C^\infty(M)$ образуют гладкие функции (гамильтонианы F) на M со скобкой Пуассона $\{F, G\}$, отвечающей симплектической структуре на M. Эта алгебра Ли отождествляется с касательным пространством в единице группы. (Не стоит думать, что эта группа вкладывается в виде подгруппы в группу всех преобразований многообразия M: однопараметрическая подгруппа, отвечающая гамильтонианам $F = \mathrm{const}$, действует на M тождественным преобразованием; кроме того, если связное многообразие M не является компактным, то имеет смысл говорить лишь о “локальных” симплектических преобразованиях, причём отвечающих только элементам группы, близким к единичному элементу.) Легко показать, что функция $\Phi(m, u)$ ($S(m, u)$) является гладким путём в алгебре Ли $C^\infty(M)$, имеющим в каждый момент времени u “такой же” вектор скорости, как у пути A_u в группе Ли. Здесь касательное пространство в любой точке группы Ли *отождествляется с алгеброй Ли* при помощи левого (правого) сдвига в группе.

Мы дадим более общее определение гомологичных отображений. Пусть диффеоморфизм $\tilde{A}$ C^0–близок к диффеоморфизму A.

Определение 12. Два (отдельных) симплектических диффеоморфизма A_0 и A_1 назовём *гомологичными*, если их можно соединить кусочно-гладким (класса C^1) путём A_u, $0 \le u \le 1$, в пространстве $C^\infty(U, M)$ всех гладких отображений, обладающих следующим свойством: для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U$ интеграл 2–формы ω^2 по двумерной трубке $C(A_0(\gamma), A_1(\gamma)) = \cup_{0 \le u \le 1} A_u(\gamma)$, полученной из γ отвечающей этому пути деформацией, равен нулю:

$$\int_{C(A_0(\gamma), A_1(\gamma))} \omega^2 = 0. \tag{10}$$

Замечание 5. Ясно, что отображения семейства A_u, где каждое векторное поле $\frac{d}{du} A_u(m)$ имеет глобальную функцию Гамильтона F_u, гомологичны отображению A_0. Действительно, по определению трубки $C(A_0(\gamma), A_u(\gamma))$ имеем:

$$\frac{d}{du} \int_{C(A_0(\gamma), A_u(\gamma))} \omega^2 = \oint_{A_u(\gamma)} \omega^2(\frac{d}{du} A_u, *) = - \oint_{A_u(\gamma)} dF_u = 0.$$

Это доказывает соотношение (10). Верно и обратное: если все отображения семейства A_u гомологичны отображению A_0, то при любом u поле скоростей $\frac{d}{du} A_u(m)$ имеет глобальную функцию Гамильтона F_u. Это следует из приведённой цепочки равенств, которая показывает, что условие (10) эквивалентно точности 1–формы $\omega^2(\frac{d}{du} A_u, *)$, а значит, и существованию глобальной функции Гамильтона векторного поля $\frac{d}{du} A_u$.

Соглашение. Два *близких* симплектических диффеоморфизма $A_0 = A$ и $A_1 = \tilde{A}$ назовём *гомологичными*, если в определении 12 в качестве соединяющего пути A_u взят "кратчайший": для каждой точки $m \in U$ путь $A_u(m)$, $0 \le u \le 1$, является кратчайшей геодезической, соединяющей точку m с её образом $A_u(m)$ (относительно какой-либо фиксированной римановой метрики). Такой же путь A_u будем рассматривать и в более общем случае — когда существует связное подмножество $\Lambda \subset U$, являющееся деформационным ретрактом U и такое, что отображения $A_0|_\Lambda$ и $A_1|_\Lambda$ близки.

Замечание. В односвязной области U любые два симплектических отображения гомологичны. Это следует из того, что для стягиваемой кривой вида $\gamma = \partial D$, где D — некоторое кусочно-гладкое отображение двумерного круга в U, трубка $C(A_0(\gamma), A_1(\gamma))$ гомологична разности $D \setminus A(D)$ диска D и его образа при отображении A, а интегралы формы ω^2 по любой поверхности D и её образу $A(D)$ совпадают в силу симплектичности отображения A.

Замечание 6. Условие гомологичности отображений не зависит от представителя класса гомотопных путей A_u, соединяющих эти отображения.

Действительно, гомотопным путям A_u отвечают гомотопные трубки $C(A_0(\gamma), A_1(\gamma))$ (для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U$), следовательно, значение интеграла (10) симплектической структуры по этим трубкам — одно и то же. Отсюда, в частности, следует, что гомологичность отображений является отношением эквивалентности.

Теорема 4. *Пусть множество Λ неподвижных точек симплектического отображения A является невырожденным компактным подмногообразием в M. Пусть $\tilde{A}$ — симплектическое отображение, C^1–близкое к A и гомологичное ему. Тогда число геометрически различных неподвижных точек отображения $\tilde{A}$ не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на многообразии Λ. Кроме того, число неподвижных точек этого отображения с учётом кратностей не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на Λ.*

В частности, число геометрически различных неподвижных точек не меньше категории Люстерника-Шнирельмана множества Λ, а их число, считая с кратностями, не меньше суммы чисел Бетти многообразия Λ.

Примеры гомологичных отображений.

1. Важный пример гомологичных отображений даёт следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $A : U \to M$ — симплектический диффеоморфизм, $\Lambda \subset U$ — некоторое компактное связное подмногообразие (возможно, с краем), все точки которого неподвижны при отображении A. Тогда в некоторой окрестности U' подмногообразия Λ в U отображение A гомологично тождественному.*

Доказательство. Возьмем в качестве U' трубчатую окрестность подмногообразия Λ в U. Для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U'$ рассмотрим её "проекцию" $\bar{\gamma} \subset \Lambda$ на Λ. Соединим кривые γ и $\bar{\gamma}$ трубкой $C = C(\gamma, \bar{\gamma}) \subset U'$, состоящей из кратчайших геодезических, соединяющих точки $m \in \gamma$ с их "проекциями" $\bar{m} \in \bar{\gamma}$ на Λ. Так как кривая $\bar{\gamma}$ неподвижна при отображении A, то цепь $C(\gamma, A(\gamma))$ гомологична разности цепи C и её образа $A(C)$ при отображении A. Но интегралы формы ω по цепям C и $A(C)$ совпадают в силу симплектичности отображения A. Значит, $\int_{C(\gamma,A(\gamma))} \omega^2 = (\int_C - \int_{A(C)})\omega^2 = 0$, т.е. отображение A гомологично тождественному. Лемма 2 доказана.

2. Другим примером гомологичных отображений являются отображения Пуанкаре $A : \sigma \to \sigma$ и $\tilde{A} : \tilde{\sigma} \to \tilde{\sigma}$, отвечающие двум близким гамильтоновым системам. Здесь $\sigma = \Sigma \cap H^{-1}(h)$ и $\tilde{\sigma} = \Sigma \cap \tilde{H}^{-1}(h)$ — сечения Пуанкаре невозмущённой и возмущённой системы, определяемые с помощью любой гиперповерхности Σ в M, трансверсально пересекающей траектории систем. Вообще говоря, эти сечения Пуанкаре не обязаны совпадать, и поэтому для отображений Пуанкаре A и $\tilde{A}$ на них не определено понятие гомологичности. Однако между этими сечениями имеется естественный симплектический диффеоморфизм $\varphi : \sigma \to \tilde{\sigma}$. А именно, на гиперповерхности Σ симплектическая структура ω^2 вырождена и в каждой точке её ядро одномерно. Рассмотрим на Σ интегральные кривые этого поля ядер. Так как эти кривые трансверсально пересекают уровень энергии $\sigma = \Sigma \cap H^{-1}(h)$ (в силу симплектичности σ), то движение вдоль этих кривых задаёт некоторый диффеоморфизм $\varphi : \sigma \to \tilde{\sigma}$, который, очевидно, сохраняет симплектическую структуру.

Ясно, что C^r–близким функциям Гамильтона H и $\tilde{H}$ отвечают C^{r-1}–близкие диффеоморфизмы A и $P = \varphi^{-1} \circ \tilde{A} \circ \varphi$.

Лемма 3. *Пусть $A : \sigma \to \sigma$, $\tilde{A} : \tilde{\sigma} \to \tilde{\sigma}$ — отображения Пуанкаре, отвечающие C^2–близким гамильтонианам H и $\tilde{H}$ соответственно. Тогда симплектические диффеоморфизмы A и $P = \varphi^{-1} \circ \tilde{A} \circ \varphi$ гомологичны, где $\varphi : \sigma \to \tilde{\sigma}$ — построенный выше симплектический диффеоморфизм областей определения отображений A и $\tilde{A}$.*

Доказательство. Для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U$ рассмотрим цепь $C = C(A(\gamma), \tilde{A}(\gamma))$ из определения 12 и докажем соотношение (10), т.е. что интеграл формы ω^2 по этой цепи равен нулю. “Замкнём” цепь C при помощи четырёх “трубок” в M^{2n} следующего вида:

первая трубка лежит в поверхности $H^{-1}(h)$ и образована фазовыми траекториями невозмущённой системы, выпущенными из исходной кривой γ;

вторая трубка лежит в поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ и образована фазовыми траекториями возмущённой системы, выпущенными из кривой $\tilde{\gamma} = \varphi(\gamma)$;

третья и четвёртая трубки лежат в секущей поверхности Σ и составлены из траекторий поля “ядер” формы $\omega^2|_\Sigma$ (соединяющих кривую γ с кривой $\tilde{\gamma}$ и кривую $\tilde{A}(\tilde{\gamma})$ с кривой $\varphi^{-1}(\tilde{A}(\tilde{\gamma})) = \varphi^{-1} \circ \tilde{A} \circ \varphi(\gamma) = P(\gamma)$ соответственно).

Обозначим полученный 2–цикл через $[C] = [C(A(\gamma), \tilde{A}(\gamma))]$ (этот цикл является двумерным тором). В силу принципа наименьшего действия Гамильтона [1], ограничение симплектической структуры ω на все четыре добавленные трубки равно нулю. Поэтому в действительности нам нужно доказать, что интеграл 2–формы ω по полученному 2–циклу $[C]$ равен нулю. Для доказательства воспользуемся замкнутостью формы ω^2 и тем, что близким гамильтонианам $\tilde{H}$ отвечают гомотопные 2–циклы $[C]$ в M^{2n}.

Следовательно, доказываемое свойство гомологичности отображений Пуанкаре достаточно доказать для одной и той же гамильтоновой системы (взяв H в качестве $\tilde{H}$). Но любое отображение гомологично самому себе. Это завершает доказательство леммы 3.

Замечание 7. Пусть, в условиях теоремы 1, расслоение подмногообразия Λ на замкнутые траектории невозмущённой системы тривиально. Это эквивалентно существованию глобального сечения Пуанкаре $\sigma \subset H^{-1}(h)$, трансверсально пересекающего каждую траекторию на Λ, причём ровно в одной точке. Тогда утверждение теоремы 1 о числе замкнутых траекторий возмущённой гамильтоновой системы сразу следует из теоремы 4, с учётом леммы 3.

Следствие 7. *Пусть $A : \sigma \to \sigma$, $\tilde{A} : \tilde{\sigma} \to \tilde{\sigma}$ — отображения Пуанкаре, отвечающие C^r–близким гамильтонианам H и $\tilde{H}$ соответственно, $r \geq 1$. Тогда симплектические отображения $A_0 = A$ и $A_1 = \varphi^{-1} \circ \tilde{A} \circ \varphi$ можно соединить путём $A_u : \sigma \to \sigma$, $0 \leq u \leq 1$, в пространстве C^{r-1}–близких и гомологичных друг другу симплектических отображений. Другими словами, существует гладкое семейство функций F_u на σ, $0 \leq u \leq 1$, такое, что отображение A_1 получается из отображения $A_0 = A$ в результате движения за время 1 в силу неавтономной гамильтоновой системы с гамильтонианом F_u и временем u, $0 \leq u \leq 1$.*

Доказательство. Для построения отображения A_u рассмотрим отображение Пуанкаре, отвечающее гамильтоновой системе с гамильтонианом $H_u = (1-u)H + u\tilde{H}$, $0 \leq u \leq 1$. Это отображение действует в поверхности $\sigma_u = \Sigma \cap H_u^{-1}(h)$. Однако эту поверхность можно отождествить с поверхностью σ при помощи естественного симплектического диффеоморфизма $\varphi_u : \sigma \to \sigma_u$, аналогичного диффеоморфизму φ, в результате чего мы получим искомое отображение $A_u : \sigma \to \sigma$, $0 \leq u \leq 1$. Согласно лемме 3, отображения полученного семейства гомологичны. С учётом замечания 5, это доказывает следствие 7.

Отсюда получаем, что любое семейство гомологичных отображений A_u, $0 \leq u \leq 1$, однозначно задаётся отображением $A_0 = A$ и производящей функцией $\Phi(m, u)$ этого семейства (см. определение 11), которая в указанных предположениях будет C^{r-1}–мала.

1.4.3 Локализация неподвижных точек

Сформулируем метод, аналогичный методу усреднения на подмногообразии, позволяющий более точно находить расположение неподвижных точек, учитывая возмущение.

Утверждение 5. *Пусть множество $\Lambda \subset M$ неподвижных точек симплектического отображения $A = A_0$ невырождено, но не обязательно компактно. Пусть $\tilde{A} = A_\varepsilon$, $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, — семейство гомологичных отображений, где $\varepsilon_* > 0$. При каждом значении ε обозначим через F_ε глобальную функцию Гамильтона поля скоростей $\frac{d}{d\varepsilon}A_\varepsilon(m)$. Пусть m_0 — морсовская критическая точка функции*

$$\mathcal{S} = -F_0|_\Lambda. \tag{11}$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ существует однопараметрическое семейство точек m_ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, где каждая точка m_ε является неподвижной точкой возмущённого отображения A_ε.

Функцию $\mathcal{S}$ мы будем называть *возмущением производящей функции.* Этот термин объясняется определением 11 производящей функции семейства отображений.

Рассмотрим случай отдельного симплектического отображения $\tilde{A}$, гомологичного тождественному и близкого к отображению A. В этом случае нет инвариантного определения производящей функции $\tilde{\Psi}$ этого отображения. Производящую функцию можно определить разными способами, некоторые из которых будут описаны ниже в п. 1.4.5. Отметим, что, для любого способа её построения, производящая функция Ψ отображения A будет постоянна на связном подмногообразии Λ его неподвижных точек и все точки этого подмногообразия будут критическими для функции Ψ.

Следующее утверждение обобщает теорему 4 и утверждение 5.

Утверждение 6. *Пусть множество $\Lambda \subset M$ неподвижных точек симплектического отображения $A : U \to M$ невырождено, но не обязательно компактно. Пусть $\tilde{A} : U \to M$ — гомологичное отображение, C^r–близкое к отображению A, где $r \ge 1$. Обозначим $\varepsilon = \|\tilde{A} - A\|_{C^r}$ и пусть $\tilde{\Psi}$ — производящая функция симплектического отображения $\tilde{A}$ (см. ниже в п. 1.4.5). Тогда существует окрестность U' подмногообразия Λ в M^{2n}, зависящая только от невозмущённого отображения, такая что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует вложение $i : \Lambda \hookrightarrow U$ подмногообразия Λ в U обладающее следующими свойствами.*

1° *Образы при вложении i всех критических точек функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi} \circ i$ в точности совпадают с неподвижными точками возмущённого отображения $\tilde{A}$ в U'. В частности, подмногообразие $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$ содержит все неподвижные точки отображения $\tilde{A}$.*

2° *Критическая точка m функции S является морсовской в том и только том случае, когда её образ $i(m)$ является невырожденной неподвижной точкой отображения $\tilde{A}$. Более того, образ при отображении*

$di(m)$ нулевого подпространства гессиана функции S в точке m в точности совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(i(m)) - I$, где $I : T_{i(m)}M \to T_{i(m)}M$ — тождественный оператор.

3° *Вложение i близко к тождественному, а функция S близка к функции $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}^{\circ}|_{\Lambda}$ (с точностью до постоянного слагаемого), где $\tilde{\Psi}^{\circ}$ — любая другая производящая функция симплектического отображения $\tilde{A}$ (или отображения $\tilde{A} \circ A^{-1}$, что не существенно при ограничении на Λ).*

4° *Если возмущённое отображение $\tilde{A}$ гладко зависит от малого параметра: $\tilde{A} = A_{\varepsilon}$, то вложение $i : \Lambda \hookrightarrow M$ и функция S на Λ тоже гладко зависят от этого параметра, причём предел функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\Psi_{\varepsilon} \circ i_{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ совпадает (с точностью до постоянного слагаемого) с возмущением (11) производящей функции, т.е. с функцией $\mathcal{S}$.*

Здесь под близостью двух отображений или функций понимается их ε–близость в C^r–метрике.

1.4.4 Устойчивость неподвижных точек

Определения и утверждения этого пункта аналогичны определениям и утверждениям §1.3 об устойчивости замкнутых траекторий гамильтоновых систем.

Мы приведём условия, гарантирующие устойчивость в линейном приближении некоторых из "выживающих" неподвижных точек. Напомним сначала определение устойчивости неподвижной точки в линейном приближении.

Для любой неподвижной точки $m \in U$ симплектического отображения $A : U \to M$ рассмотрим оператор $dA(m)$ — линейную часть отображения A в этой точке.

Определение. Неподвижная точка m симплектического отображения A называется *устойчивой в линейном приближении* (или устойчивой), если линейный оператор $dA(m)$ является устойчивым. Неподвижная точка m называется *структурно устойчивой в линейном приближении* (или просто структурно устойчивой), если любой симплектический оператор, достаточно близкий к $dA(m)$, является устойчивым.

Из упомянутого факта из теории симплектических операторов (см. предложение 1) следует, в частности, что любая структурно устойчивая неподвижная точка невырождена. Введём понятие *сильно устойчивого подмногообразия* неподвижных точек для симплектического отображения.

Обозначим через $R_1(dA(m)) \subset T_mM$ корневое подпространство оператора $dA(m)$, отвечающее собственному значению 1. Нетрудно видеть, что нулевое подпространство квадратичной формы $Q = \omega^2(\mathbf{A}*, *)|_{R_1(\mathbf{A})}$ в точности совпадает с собственным подпространством $E_1(dA(m))$ оператора $\mathbf{A}$, отвечающим собственному значению 1.

Следующее определение полностью аналогично определению 8.

Определение 13. Пусть Λ — гладкое подмногообразие неподвижных точек симплектического отображения A. Назовём это подмногообразие *сильно устойчивым в линейном приближении*, если в каждой точке $m \in \Lambda$ выполнены следующие условия:

1. все собственные значения оператора $dA(m)$ в T_mM, отличные от 1, являются эллиптическими (см. определение 6), в частности, лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$ и отличны от ± 1;

2. квадратичная форма $Q = \omega^2(dA(m)*, *)$ знакоопределена на некоторой трансверсали к касательному пространству $T_m\Lambda$ в корневом подпространстве $R_1(dA(m))$ оператора $dA(m)$, отвечающем собственному значению 1.

Для определённости будем считать, что производящая функция Q *положительно* (отрицательно) определена на указанной трансверсали. Если эта трансверсаль нульмерна (т.е. подпространство $R_1(dA(m))$ совпадает с касательным пространством $T_m\Lambda$), то производящую функцию Q будем считать одновременно и *положительно*, и *отрицательно* определённой на этой трансверсали.

Замечание. Из определения сильно устойчивого в линейном приближении подмногообразия Λ следует, что в каждой точке $m \in \Lambda$ ядро квадратичной формы $Q = \omega^2(dA(m)*, *)$ в точности совпадает с касательным пространством $T_m\Lambda$ к Λ. Отсюда получаем, что индекс формы Q не зависит от точки $m \in \Lambda$, если Λ связно. Кроме того, любое сильно устойчивое в линейном приближении подмногообразие Λ невырождено, и в любой точке $m \in \Lambda$ спектр оператора $dA(m)$ не содержит -1. Из теории симплектических операторов следует, что спектр оператора $dA(m)$ лежит на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Лемма 4. *Пусть, в условиях утверждения 6, в каждой точке $m \in \Lambda$ спектр оператора $dA(m)$ не содержит -1. Тогда производящая функция Q оператора $dA(m)$ невырождена на трансверсали к Λ. Кроме того, вложение $i : \Lambda \hookrightarrow U$ и гладкая функция $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ из утверждения 6 обладают следующим дополнительным свойством:*

5° *Пусть $m \subset \Lambda$ — любая критическая точка функции S, $\tilde{m} = i(m)$ — соответствующая неподвижная точка отображения $\tilde{A}$. Рассмотрим* *производящие функции Q и $\tilde{Q}$ операторов $dA(m)$ и $d\tilde{A}(\tilde{m})$ соответственно. Тогда индекс квадратичной формы $\tilde{Q}$ равен сумме индекса квадратичной формы Q и индекса гессиана функции S в точке m. Степени вырождения формы $\tilde{Q}$ и гессиана функции S в точке m совпадают друг с другом и с размерностью собственного подпространства оператора $d\tilde{A}(\tilde{m})$, отвечающего собственному значению 1.*

Эта лемма будет доказана в §1.5.

Из утверждения 6, предложения 1 и леммы 4 нетрудно вывести следующее

Утверждение 7. *Пусть, в условиях утверждения 6, множество $\Lambda \subset U$ неподвижных точек симплектического отображения $A : U \to M$ сильно устойчиво в линейном приближении. Тогда вложение $i : \Lambda \hookrightarrow U$ и гладкая функция $S = \tilde{\Psi} \circ i$ из утверждения 6 обладают следующим дополнительным свойством:*

6° *Пусть $m \in \Lambda$ — морсовская критическая точка локального минимума (либо максимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 13) функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi} \circ i$ (т.е. имеет место "согласованная знакоопределённость"). Тогда её образ $i(m)$ при вложении i является структурно устойчивой в линейном приближении неподвижной точкой отображения $\tilde{A}$.*

Следствие. *Пусть множество Λ неподвижных точек отображения A сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть возмущённое симплектическое отображение $\tilde{A}$ гомологично отображению A и гладко зависит от малого параметра: $\tilde{A} = A_\epsilon$, $\varepsilon \geq 0$. Рассмотрим гамильтониан F_0 поля скоростей $\frac{d}{d\varepsilon}A_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$. Пусть $m_0 \in \Lambda$ — морсовская критическая точка локального минимума (либо максимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 13) функции $\mathcal{S} = -F_0|_\Lambda$ (т.е. имеет место "согласованная знакоопределённость"). Тогда выживающая согласно утверждению 5 неподвижная точка m_ε возмущённого отображения A_ε, $\varepsilon > 0$, структурно устойчива в линейном приближении.*

Замечание 8. Пусть выполнены условия леммы 4, т.е.

$$-1 \notin \operatorname{spec} dA(m), \quad m \in \Lambda.$$

Рассмотрим производящие функции Ψ° и $\tilde{\Psi}^\circ$ отображений A и $\tilde{A}$ соответственно (определённые ниже в п. 1.4.5). Тогда (см. доказательство утверждений 6 и 7) вложение i° и функцию S°, аналогичные вложению i и функции S, можно определить следующим естественным образом. Дело в том, что $Q = d^2\Psi^\circ(m)$, и поэтому любое невырожденное подмногообразие $\Lambda \subset U$, в каждой точке m которого $-1 \notin \operatorname{spec} dA(m)$, является *боттовским* критическим подмногообразием производящей функции Ψ°. Для построения подмногообразия $\tilde{\Lambda} = i^\circ(\Lambda)$ проведём через каждую точку $m \in \Lambda$ маленькую (нормальную к Λ) поверхность N_m ($\dim N_m + \dim \Lambda = \dim M$), трансверсальную к Λ и гладко зависящую от точки m. Тогда каждая точка m', лежащая в достаточно малой окрестности U подмногообразия Λ в M, принадлежит ровно одной из поверхностей N_m, которую будем обозначать также через $N_{m'}$.

Определим подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ как множество всех точек $m \in U$, которые являются критическими точками соответствующей функции $\tilde{\Psi}^\circ|_{N_m}$:

$$\tilde{\Lambda} = i^\circ(\Lambda) = \{m \in U \mid d\tilde{\Psi}^\circ(m)|_{T_m N_m} = 0\}. \tag{12}$$

По теореме о неявных функциях, с учётом компактности Λ, это множество действительно является подмногообразием вида $\tilde{\Lambda} = i^\circ(\Lambda)$, где $i^\circ : \Lambda \hookrightarrow U$ — некоторое вложение, близкое к тождественному.

Нетрудно показать, что вложение i° и функция $S^\circ = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}^\circ \circ i^\circ$ обладают перечисленными свойствами 1°–6° (см. утверждения 6, 7 и лемму 4) и следующими свойствами, уточняющими свойство 5° из леммы 4:

7° *Образы $\tilde{m} = i^\circ(m)$ при вложении i° критических точек $m \in \Lambda$ функции S° в точности совпадают с критическими точками функции $\tilde{\Psi}^\circ$ (и с неподвижными точками отображения $\tilde{A}$).*

8° *Пусть $m \in \Lambda$ — любая критическая точка функции S°, $\tilde{m} = i^\circ(m)$ — соответствующая неподвижная точка отображения $\tilde{A}$. Тогда в этой точке квадратичная часть функции $\tilde{\Psi}^\circ$ совпадает с производящей функцией $\tilde{Q}$ симплектического оператора $d\tilde{A}(m)$ (см. определение 5).*

1.4.5 Производящая функция симплектического отображения

Как мы отмечали в п. 1.4.2 и 1.4.3, любое семейство гомологичных симплектических отображений A_ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, можно однозначно задать при помощи производящей функции Φ_ε этого семейства, задав также отображение A_0 (см. замечания 5, 4 и определение 11).

Здесь мы определим производящую функцию *отдельного* симплектического отображения A, гомологичного тождественному (т.е. не обязательно включенного в семейство симплектических отображений).

Примеры производящих функций. Нередко симплектические отображения задаются с помощью производящих функций. Например, пусть на M имеются канонические координаты

$$(p,q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n).$$

Тогда симплектическое отображение $A : (p,q) \to (P,Q)$ как правило (точнее, при выполнении условия $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) \neq 0$) можно задать неявным образом соотношениями

$$P = p + \frac{\partial \Psi(P,q)}{\partial q}, \quad Q = q - \frac{\partial \Psi(P,q)}{\partial P}. \tag{13}$$

Верно и обратное: если гладкое отображение A удовлетворяет таким соотношениям (такое отображение существует тогда и только тогда, когда $\det(I - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial P \partial q}) \neq 0$), то оно автоматически является симплектическим диффеоморфизмом. При этом обе матрицы $\frac{\partial P}{\partial p}$ и $I - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial P \partial q}$ невырождены и взаимно обратны.

Функцию $\Psi(P,q)$ вида (13) называют производящей функцией отображения A. Эта функция обладает следующим важным свойством: *критические точки функции Ψ совпадают с неподвижными точками отображения A, причём морсовские критические точки функции Ψ совпадают с невырожденными неподвижными точками отображения A.*

В связи с этим сформулируем достаточное условие невырожденности множества Λ неподвижных точек отображения A_0 в терминах производящей функции.

Пусть Λ — некоторое подмногообразие, все точки которого неподвижны при симплектическом отображении A. Пусть окрестности U некоторой точки $m \in \Lambda$ отображение A задано с помощью указанной выше производящей функции $\Psi(P,q)$ (относительно некоторых канонических локальных координат p, q в U). Тогда *достаточным условием невырожденности* подмногообразия Λ в области U является условие боттовости Λ по отношению к функции $\Psi(P,q)$, т.е.

$$\dim \ker d^2 \Psi(m) = \dim \Lambda$$

в каждой точке $m \in \Lambda \cap U$.

Существуют разные типы производящих функций симплектического отображения, аналогичные функции (13). Например, симплектическое отображение A может быть задано указанной выше производящей функцией $\Psi(P,q)$, если $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) \neq 0$ (т.е. если функции P, q можно взять в качестве регулярных локальных координат на M). Если $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) = 0$, то это препятствие устраняется заменой некоторых переменных $p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n}$ на соответствующие $q_{i_{k+1}}, \dots, q_{i_n}$ и одновременной заменой этих $q_{i_{k+1}}, \dots, q_{i_n}$ на соответствующие $-p_{i_{k+1}}, \dots, -p_{i_n}$; и, значит, отображение будет задаваться с помощью производящей функции

$$\Psi = \Psi(P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, Q_{i_{k+1}}, \dots, Q_{i_n}, q_{i_1}, \dots, q_{i_k}, -p_{i_{k+1}}, \dots, -p_{i_n}),$$

точную формулу см. в [1]. Принципиальных различий в задании отображений с помощью производящих функций с разными наборами $i_1, \dots, i_k$ нет, так как они получаются друг из друга переобозначением части p на q и q на $-p$, поэтому для простоты мы рассматриваем лишь производящую функцию $\Psi(P, q)$ вида (13).

Предположим теперь, что отображение $A = A_0$ включено в однопараметрическое семейство гомологичных симплектических отображений A_ε. Пусть $\Psi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(P, q)$ — производящая функция отображения A_ε. Так как при любом ε поле скоростей $\frac{d}{d\varepsilon}A_\varepsilon$ обладает глобальной функцией гамильтона F_ε, то можно рассмотреть призводящую функцию $\Phi(m, \varepsilon)$ семейства отображений A_ε, где $\frac{d}{d\varepsilon}\Phi(m, \varepsilon) + F_\varepsilon(A_\varepsilon(m)) = 0$, $\Phi(m, 0) = 0$ (см. определение 11). Рассмотрим функцию $\mathcal{S} = -F_0|\Lambda$. Согласно утверждению 6,

$$\mathcal{S} = \Psi'|_\Lambda + \mathrm{const},$$

где $\Psi' = \frac{d\Psi_\varepsilon}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$.

Замечание. Так как в определении функции $\mathcal{S}$ координаты не использовались, то ограничение функции Ψ' на множество Λ неподвижных точек невозмущённого отображения A не зависит ни от выбора локальных канонических координат p, q, ни от типа производящей функции Ψ.

Отметим также, что аналог функции Ψ из (13) в действительности можно определить для любого отображения A, гомологичного тождественному (т.е. ограничение $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) \neq 0$ несущественно). Такая функция будет зависеть от переменных p, q и определяться следующим равенством:

$$d\Psi(p, q) = (P - p)dq - (Q - q)dP. \tag{14}$$

Такая функция Ψ по-прежнему будет обладать нужными нам свойствами:

1° *Любая неподвижная точка отображения A является критической точкой функции Ψ.*

2° *Критические точки ограничения функции $\tilde{\Psi}$ на некоторое подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ будут совпадать с неподвижными точками отображения $\tilde{A}$.*

Предположим теперь, что в некоторой окрестности подмногообразия Λ заданы глобальные канонические координаты p, q, и отображение $A_\varepsilon : (p, q) \to (P, Q)$ задано производящей функцией $\Psi_\varepsilon(P, q)$, удовлетворяющей условию $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) \neq 0$ во всей этой окрестности. Пусть множество Λ критических точек производящей функции Ψ_0 является боттовским. Нетрудно доказать, что в этом случае множество неподвижных точек отображения A_ε в точности совпадает с множеством критических точек производящей функции Ψ_ε. И тогда теорема 4 и утверждение 5 являются очевидными следствиями соответствующих теорем о критических точках функций, являющихся возмущениями функций Ботта.

Замечание. С точки зрения группы Ли, действующей симплектическими преобразованиями на многообразии M (см. замечание 4), производящая функция *отдельного симплектического преобразования*, гомологичного тождественному, является *отдельным элементом* алгебры Ли $C^\infty(M)$, а не путём в алгебре Ли. При этом производящая функция однозначно строится по симплектическому преобразованию. Кроме того, для производящей функции вида (13) обратное тоже верно: если $\det(\frac{\partial P}{\partial p}) \neq 0$, то по функции Ψ можно однозначно восстановить преобразование A. Однако последнее свойство для нас далее не будет являться существенным.

При исследовании устойчивости неподвижных точек полезен ещё один (в некотором смысле более узкий) класс производящих функций, которые мы будем обозначать Ψ°. Примером такой функции является функция следующего вида. Ее дифференциал имеет вид

$$d\Psi^\circ(p,q) = \frac{1}{2}((P-p)(dQ+dq) - (Q-q)(dP+dp)). \tag{15}$$

Дело в том, что функция Ψ° обладает дополнительным свойством 8° из замечания 8:

3° *В любой неподвижной точке m отображения A гессиан функции Ψ° совпадает с производящей функцией симплектического оператора $dA(m)$:*

$$d^2\Psi^\circ(m)\xi = \omega^2(dA(m)\xi, \xi).$$

Общее определение производящей функции. В действительности, глобальную производящую функцию в окрестности Λ можно определить и в случае, когда не существует глобальных канонических координат p, q. Такая “бескоординатная“ производящая функция $\tilde{\Psi}$ не будет задавать само отображение $\tilde{A}$, но будет обладать свойствами 1°, 2° (см. выше).

Для построения производящей функции рассмотрим “гомотопию”, точнее, C^r–гладкое отображение $g : M \times M \times [0,1] \to M$, $g = g(m,m',u)$, m, $m' \in M$, $0 \le u \le 1$, определённое при любом u в малой окрестности “диагонали” $\Delta = \{(m,m) \,|\, m \in M\}$ в $M \times M$, и удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} g(m,m',0) = m, \quad g(m,m',1) = m', \\ g(m,m,u) = m, \quad 0 \le u \le 1. \end{gathered} \tag{16}$$

При этом зависимость g от переменной u может быть лишь кусочно-гладкой, а не обязательно гладкой. Это значит, что отрезок $[0,1]$ можно представить как объединение конечного числа отрезков $[u_i, u_{i+1}]$, в каждом из которых отображение g является C^r–гладким (r — константа из утверждения 6). Положим

$$h(m,u) = g(m, A(m), u), \quad 0 \le u, v \le 1. \tag{17}$$

Определим функцию Ψ следующим образом: для любого пути m_v, $0 \le v \le 1$, в U положим

$$\Psi(m_1) - \Psi(m_0) = \int_{C(m_v, 0 \le v \le 1)} \omega^2, \tag{18}$$

где $C(m_v, 0 \le v \le 1) = \{h(m_v, u) \,|\, 0 \le u, v \le 1\} \subset U$ — двумерная поверхность в M с координатами u, v, образованная отрезками $h(m_v, u)$, $0 \le u \le 1$, (см. (17)), каждый из которых соединяет точку m_v с её образом $A(m_v)$, $0 \le v \le 1$.

Из соотношения (10) получаем, что функция Ψ определена корректно (с точностью до постоянного слагаемого) в том и только том случае, когда отображение A гомологично тождественному.

Определение 14. Любую функцию Ψ вида (18) будем называть *производящей функцией* отображения A, отвечающей “гомотопии” g.

Например, производящая функция Ψ вида (13) отвечает кусочно-гладкой гомотопии

$$g(p,q;P,Q;u) = \begin{cases} (p + 2u(P-p)\,,\, q), & 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ (P\,,\, q + (2u-1)(Q-q)), & \frac{1}{2} \le u \le 1, \end{cases}$$

где обозначено $m = (p,q)$, $m' = (P,Q)$. Производящая функция Ψ° вида (15) отвечает гладкой гомотопии

$$g^\circ(m, m', u) = (1-u)m + um', \quad 0 \le u \le 1.$$

Подчеркнём, что условие боттовости подмногообразия Λ относительно производящей функции Ψ является *достаточным для невырожденности* Λ в смысле определения 9, но *не* является *необходимым.* В частности, если функция Ψ совпадает с функцией вида Ψ° (например, строится с помощью геодезических некоторой аффинной связности), то невырожденное подмногообразие Λ неподвижных точек отображения A является боттовским для функции Ψ° в том и только том случае, когда нет точек $m \in \Lambda$, в которых дифференциал $dA(m)$ отображения A “переворачивает” касательные вектора, т.е. -1 является собственным значением оператора $dA(m)$. Отметим ещё раз, что любое сильно устойчивое подмногообразие Λ является боттовским для функции Ψ°.

Общие свойства производящих функций. Фиксируем один из способов построения производящей функции, описанных выше. Это эквивалентно фиксированию какой-нибудь “гомотопии” вида (16).

Пусть A — любое симплектическое отображение, гомологичное тождественному, Ψ — производящая функция этого отображения. Тогда, независимо от способа построения, функция Ψ обладает следующими свойствами:

1° *Если A — тождественное отображение, то $\Psi \equiv 0$.*

2° *Если $A(m) = m$ для некоторой точки $m \in M$, то $d\Psi(m) = 0$.*

3° *Пусть $\Lambda \subset M$ — любое связное подмногообразие, A_1 и A_2 — два симплектических отображения, такие, что $A_1|_\Lambda \equiv A_2|_\Lambda$. Тогда $\Psi_1|_\Lambda \equiv \Psi_2|_\Lambda + \mathrm{const}$.*

Рассмотрим теперь два способа построения производящей функции, отвечающие некоторым гомотопиям g и g° вида (16). Пусть Ψ и Ψ° — призводящие функции отображения A, отвечающие гомотопиям g и g° соответственно. Тогда разность этих функций обладает следующим свойством.

4° *Две производящие функции Ψ и Ψ° одного и того же симплектического отображения A отличаются на функцию вида*

$$\Psi(m) - \Psi^\circ(m) = \mathrm{O}(\mathrm{dist}\,(m, A(m))^2),$$

где $\mathrm{dist}\,(m, m')$ — расстояние между двумя точками, понимаемое в смысле некоторой римановой метрики на многообразии M (как нижняя грань длин кривых в M, соединяющих точки m и m').

Докажем свойство 4°. Из определения (18) производящей функции с учётом замкнутости формы ω^2 легко следует, что для любой точки $m \in M$ разность $\Psi(m) - \Psi^\circ(m)$ равна интегралу формы ω^2 по маленькой двумерной поверхности C, ограниченной кривыми $h(m, u)$, $0 \le u \le 1$, и $h^\circ(m, u)$, $0 \le u \le 1$. (Каждая из этих кривых соединяет точки m и $A(m)$, отвечает своей “гомотопии” g и g° вида (16) и определяется по формуле (17).) Не ограничивая общности, мы будем считать, что поверхность C образована кратчайшими отрезками, соединяющими соответствующие точки двух её граничных кривых. Так как длины обеих этих кривых имеют порядок $\mathrm{O}(\mathrm{dist}\,(m, A(m)))$, то площадь поверхности C имеет порядок $\mathrm{O}(\mathrm{dist}\,(m, A(m))^2)$. Следовательно, интеграл формы ω^2 по поверхности C тоже имеет порядок $\mathrm{O}(\mathrm{dist}\,(m, A(m))^2)$.

1.4.6 Связь метода усреднения с производящей функцией

Согласно лемме 3, отображения Пуанкаре A и $\tilde{A}$, отвечающие двум гамильтоновым системам с близкими гамильтонианами H и $\tilde{H}$, гомологичны. Более точно, если Σ — секущая гиперповерхность в M, и $\varphi : \sigma \to \tilde{\sigma}$

— естественный симплектический диффеоморфизм между сечениями Пуанкаре $\sigma = \Sigma \cap H^{-1}(h)$ и $\tilde{\sigma} = \Sigma \cap \tilde{H}^{-1}(h)$, A и $\tilde{A}$ — отображения Пуанкаре, то отображения A и $P = \varphi^{-1} \circ \tilde{A}\varphi$ гомологичны. Следовательно, отображение $P \circ A^{-1}$ гомологично тождественному и значит, согласно п. 1.4.5, оно имеет производящую функцию. Пусть $\tilde{\Psi}$ — производящая функция этого отображения (какого-либо типа).

Как показывает теорема 6 (о расположении неподвижных точек возмущённого отображения), часто важно знать, хотя бы приближенно, явный вид функции $\tilde{\Psi}$. Оказывается, что эту функцию можно получить из "возмущения" $\tilde{H} - H$ функции H путём его "усреднения" по траекториям системы с гамильтонианом H.

Чтобы сформулировать это утверждение более точно, определим понятие усреднения, совершенно аналогичное усреднению (6) по периодическим траекториям.

Пусть $H : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на симплектическом многообразии M, h — её регулярное значение. Рассмотрим на M гамильтонову систему с гамильтонианом H. Пусть $\sigma \subset H^{-1}(h)$ — любая гиперповерхность (не обязательно связная), трансверсально пересекающая фазовые траектории этой системы на $H^{-1}(h)$. Пусть $\sigma' \subset \sigma$ — некоторое подмножество, на котором корректно определено отображение Пуанкаре $A : \sigma' \to \sigma$, отвечающее этой системе. Для любой функции $\mathcal{H}$ на многообразии M определим её *усреднение* $\bar{\mathcal{H}}$ по фазовым траекториям системы с гамильтонианом H, полагая

$$\bar{\mathcal{H}}(m) = \int_0^{T(m)} \mathcal{H}(\gamma(m,t))\, dt, \quad m \in \sigma', \tag{19}$$

где $\gamma(m,t)$ — фазовая траектория системы с гамильтонианом H, выпущенная из точки $m = \gamma(m,0) \in \sigma$, $T(m) > 0$ — время движения по этой траектории до следующего пересечения с секущей поверхностью σ. (В частности, $\gamma(m, T(m)) = A(m)$.) Подчеркнём, что функция (19) определена в открытой области σ' в σ, в отличие от усреднённого возмущения (6).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8. *Пусть гамильтониан $\tilde{H}$ возмущённой системы близок к H по норме C^r, где $r \geq 1$. Обозначим $\varepsilon = \|\tilde{H} - H\|_{C^r}$, $H_1 = (\tilde{H} - H)/\varepsilon$. Пусть $\Sigma \subset M$ — секущая гиперповерхность, и пусть A и $\tilde{A}$ — отображения Пуанкаре на поверхностях $\sigma = \Sigma \cap H^{-1}(h)$ и $\tilde{\sigma} = \Sigma \cap \tilde{H}^{-1}(h)$, отвечающие невозмущённой и возмущённой системам соответственно. Пусть $\varphi : \sigma \to \tilde{\sigma}$ — естественный симплектический диффеоморфизм сечений Пуанкаре (см. лемму 3). Рассмотрим симплектическое отображение $P = \varphi^{-1} \circ \tilde{A} \circ \varphi$ на поверхности σ, гомологичное отображению A. Пусть $\tilde{\Psi}$ — производящая функция отображения $P \circ A^{-1}$. Тогда при любом до-*

статочно малом ε функция $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}\circ A$ близка к ограничению на σ функции $\bar{\mathcal{H}}$, полученной усреднением (19) возмущения $\mathcal{H} = H_1|_\Lambda$ по фазовым траекториям невозмущённой системы.

Здесь под близостью гладких функций понимается их ε–близость в C^{r-1}–норме.

Приведём следствия из этого утверждения, которые мы сформулируем в виде замечаний.

Замечание. Пусть, в условиях утверждения 8, $r \geq 2$ и гамильтонова система с гамильтонианом H имеет подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, сплошь заполненное замкнутыми траекториями. Согласно лемме 2, отображение A, а значит, и отображение $\tilde{A}$ (см. лемму 3), гомологично тождественному. Пусть $\tilde{\Psi}$ — производящая функция отображения $P = \varphi^{-1}\circ\tilde{A}\circ\varphi$. В силу общего свойства 3° производящих функций (см. п. 1.4.5) ограничения на подмногообразие $\bar{\Lambda} = \Lambda\cap\sigma$ функции $\tilde{\Psi}$ и производящей функции отображения $P\circ A^{-1}$ совпадают. Следовательно, из утверждения 8 получаем, что функция $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}|_{\bar{\Lambda}}$ ε–близка к функции $\bar{\mathcal{H}}|_{\bar{\Lambda}}$ (по норме C^{r-1}). Отметим также, что функция $\bar{\mathcal{H}}|_{\bar{\Lambda}}$ по определению не зависит от выбора секущей поверхности σ и совпадает с усреднённым возмущением (6).

Замечание 9. В силу предыдущего замечания, *метод усреднения на подмногообразии* (т.е. теорема 2 и утверждения 1, 2) является следствием теоремы 4 и (более общего) утверждения 5 о неподвижных точках отображений. Аналогичным образом, теорема 3 и следствие 5 об *устойчивости* замкнутых траекторий систем следуют из утверждения 7 об устойчивости неподвижных точек отображений.

Пусть подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ *тривиально расслоено* на замкнутые траектории невозмущённой системы. Это эквивалентно тому, что существует глобальное $(2n-1)$–мерное сечение $\Sigma^{2n-1}\subset M^{2n}$, трансверсально пересекающее каждую траекторию на Λ, причём ровно в одной точке. В частности, $\Lambda\cap\sigma$ диффеоморфно $B = \Lambda/S^1$, и мы будем отождествлять B с $\Lambda\cap\sigma$. Рассмотрим $(2n-2)$–мерные поверхности $\sigma = \Sigma\cap H^{-1}(h)$, $\tilde{\sigma} = \Sigma\cap\tilde{H}^{-1}(h)$, называемые сечениями Пуанкаре, и обозначим $B = \Lambda\cap\sigma$. Рассмотрим отображения Пуанкаре $A:\sigma\to\sigma$ и $\tilde{A}:\tilde{\sigma}\to\tilde{\sigma}$, отвечающие невозмущённой и возмущённой системам соответственно. Как мы уже отмечали, неподвижные точки отображения Пуанкаре в точности совпадают с точками пересечения замкнутых траекторий на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ с сечением Пуанкаре $\tilde{\sigma}$.

Согласно лемме 3, отображения A и $\varphi^{-1}\circ\tilde{A}\circ\varphi$ гомологичны, где $\varphi:\sigma\to\tilde{\sigma}$ — естественный симплектический диффеоморфизм областей определения отображений A и $\tilde{A}$, построенный в п. 1.4.2.

Следовательно, из любого утверждения о неподвижных точках гомологичных симплектических отображений, легко получить соответствующее утверждение о замкнутых траекториях возмущённой системы. При этом в формулировке получающегося утверждения нужно воспользоваться тем, что функция $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}|_{\bar{\Lambda}}$ близка к функции $\bar{\mathcal{H}}|_{\bar{\Lambda}}$. В частности, из утверждений 6, 4 и леммы 1 получаем следующее

Утверждение 9. *Пусть, в условиях теоремы 1, расслоение Λ на замкнутые траектории тривиально. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существуют вложение $i : B \hookrightarrow \Sigma$ подмногообразия B в Σ и гладкие функции $\tilde{T}$ и S на подмногообразии B, обладающие следующими свойствами.*

1° *Образ $\tilde{B} = i(B)$ подмногообразия B при вложении i лежит на поверхности $\tilde{\sigma} = \Sigma \cap \tilde{H}^{-1}(h)$.*

2° *Образы при вложении i всех критических точек функции S в точности совпадают с точками пересечения с поверхностью $\tilde{\sigma}$ замкнутых траекторий системы с гамильтонианом $\tilde{H}$, лежащих на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$. В частности, подмногообразие $\tilde{B}$ содержит точки пересечения всех замкнутых траекторий возмущённой системы на $\tilde{H}^{-1}(h)$ с сечением $\tilde{\sigma}$. При этом для любой критической точки $b \in B$ функции S число $\tilde{T}(b)$ является периодом траектории возмущённой системы, проходящей через точку $i(b)$.*

3° *Точка $b \in B$ является морсовской критической точкой функции S в том и только том случае, когда её образ $i(b)$ при вложении i принадлежит невырожденной замкнутой траектории системы с гамильтонианом $\tilde{H}$. Более того, образ при касательном отображении $di(b)$ нулевого подпространства гессиана функции S в точке b в точности совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(i(b)) - I$, где $d\tilde{A}(i(b))$ — оператор монодромии в точке $i(b)$, I — тождественный оператор.*

4° *Вложение i близко к тождественному, функция $\tilde{T}$ близка к функции T, а функция S близка к функции $-\bar{\mathcal{H}}$, полученной усреднением (6) возмущения (5) по замкнутым траекториям на Λ.*

5° *Если возмущённый гамильтониан $\tilde{H}$ гладко зависит от малого параметра, то вложение $i : B \hookrightarrow \Sigma$ и функция S на B тоже гладко зависят от этого параметра.*

6° *Пусть $b \in B$ — любая критическая точка функции S, $\tilde{b} = i(b)$ — соответствующая точка пересечения поверхности $\tilde{\sigma}$ с замкнутой траекторией $\tilde{\gamma}$ возмущённой системы. Рассмотрим производящие функции Q и $\tilde{Q}$ операторов монодромии, отвечающих замкнутым траекториям $\gamma \ni b$ и $\tilde{\gamma}$. Если производящая функция Q оператора монодромии невырождена на трансверсали к $B = \Lambda \cap \sigma$ в σ, то индекс квадратичной формы $\tilde{Q}$ равен сумме индекса квадратичной формы Q и индекса гессиана функции S*

в любой точке кривой γ:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind}Q + \operatorname{ind}d^2S.$$

7° *Пусть подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$, сильно устойчиво в линейном приближении, и пусть точка $b \in B$ является морсовской точкой локального минимума (либо максимума или минимакса, в зависимости от ситуации в определении 8) функции S. Тогда образ $\tilde{\tilde{b}} = i(b)$ этой точки при вложении i принадлежит структурно устойчивой в линейном приближении замкнутой траектории системы с гамильтонианом $\tilde{H}$.*

Здесь под близостью двух отображений или функций понимается их ε–близость в C^{r-1}–метрике.

Отметим, что утверждение 9 (о локализации и устойчивости замкнутых траекторий) "почти совпадает" с утверждениями 3, 4 — с единственной разницей, что в утверждении 9 вложение i и функция S определены не на всём подмногообразии Λ, а лишь на его пересечении с секущей поверхностью σ. Конечно, в рассматриваемом случае можно "расслоить" окрестность подмногообразия Λ в $H^{-1}(h)$ на однопараметрическое семейство секущих поверхностей, аналогичных поверхности σ. При этом на каждой такой поверхности можно рассмотреть отображение Пуанкаре и его производящую функцию, гладко зависящие от секущей поверхности, а также соответствующее вложение в неё, аналогичное вложению i. В результате мы получим нужные вложение и функцию, определённые на всём Λ. Однако полученная таким образом функция на Λ не будет, вообще говоря, постоянной на замкнутых траекториях невозмущённой системы на Λ. В этом и состоит отличие утверждения 3 о замкнутых траекториях возмущённой системы от немного более слабого (но зато более простого) утверждения 9.

Заметим, что утверждение 9 не охватывает случай любого расслоения, и даже в случае тривиального расслоения является менее общим, чем утверждение 3. Тем не менее, *для приложений* это утверждение очень важно, так как

1. в приложениях случай тривиального расслоения очень распространен, и кроме того,

2. с точки зрения приложений разница между "сильными" и "слабыми" утверждениями в случае тривиального расслоения совершенно не принципиальна (т.е. они совершенно равноценны); более того, удобнее пользоваться именно последними (более слабыми, но зато более простыми) утверждениями, так как в них более просто и явно строится производящая функция.

Для доказательства утверждения 8 мы докажем его обобщение, относящееся к *семействам* гамильтоновых систем.

Пусть $H_u : M \to \mathbb{R}$ — однопараметрическое семейство гладких функций на симплектическом многообразии M, $h \in \mathbb{R}$ — регулярное значение этих функций, $0 \le u \le u_0$. Рассмотрим семейство гамильтоновых систем с гамильтонианами H_u, $0 \le u \le u_0$. Пусть $\Sigma \subset M$ — любая гиперповерхность (не обязательно связная), трансверсально пересекающая фазовые траектории этих систем. Рассмотрим сечения Пуанкаре $\sigma_u = \Sigma \cap H_u^{-1}(h)$ и соответствующие симплектические диффеоморфизмы $\varphi_u : \sigma_0 \to \sigma_u$, $0 \le u \le u_0$ (см. лемму 3). Пусть $\Sigma' \subset \Sigma$ — такая область, что в каждой области $\sigma'_u = \Sigma' \cap H_u^{-1}(h) \subset \sigma_u$ корректно определено отображение Пуанкаре $A_u : \sigma'_u \to \sigma_u$, отвечающее системе с гамильтонианом H_u, $0 \le u \le u_0$.

Определим "возмущение" функции H_0 на многообразии M как семейство функций

$$\mathcal{H}_u = \frac{\partial H_u}{\partial u}, \quad 0 \le u \le u_0. \tag{20}$$

Верна следующая лемма, уточняющая (и обобщающая) утверждение 8.

Лемма 5 (Об усреднённом возмущении). *Рассмотрим на симплектическом многообразии M семейство гамильтоновых систем с гамильтонианами H_u, $0 \le u \le u_0$. При каждом значении u рассмотрим возмущение $\mathcal{H}_u$ функции H_u, $0 \le u \le u_0$, т.е. гладкую функцию (20) на M. В области $\sigma'_u \subset \sigma_u$ рассмотрим функцию $\bar{\mathcal{H}}_u$ — усреднение (19)) возмущения $\mathcal{H}_u$ по фазовым траекториям системы с гамильтонианом H_u, $0 \le u \le u_0$. Пусть $A_u : \sigma'_u \to \sigma_u$ — отображение Пуанкаре, отвечающее гамильтоновой системе с гамильтонианом H_u, $\varphi_u : \sigma_0 \to \sigma_u$ — естественный симплектический диффеоморфизм сечений Пуанкаре, $0 \le u \le u_0$. Пусть $\Phi(m, u)$ — производящая функция семейства гомологичных симплектических отображений $P_u = \varphi_u^{-1} \circ \mathbf{A}_u \circ \varphi_u$ на поверхности σ_0 (см. определение 11). Тогда функции $\Phi(m, u)$ и $\bar{\mathcal{H}}_u$ удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(m, u) + \bar{\mathcal{H}}_u(\varphi_u(m)) = 0,$$

$0 \le u \le u_0$, $m \in \sigma'_0$ (ср. с (9)).

Другими словами, семейство гомологичных симплектических отображений P_u, $0 \le u \le u_0$ (отвечающих отображениям Пуанкаре), на поверхности σ_0 совпадает с композицией отображения A_0 и фазового потока g_F^u неавтономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $F = F_u$: $P_u = g_F^u \circ A_0$, где $F_u = \bar{\mathcal{H}}_u \circ A_u^{-1} \circ \varphi_u$, $0 \le u \le u_0$.

Доказательство. Для доказательства леммы нам нужно показать, что производящая функция $\Phi(m, u)$ семейства гомологичных отображений P_u

имеет вид
$$\Phi(m,u) = -\int_0^u \bar{\mathcal{H}}_{u'}(\varphi_{u'}(m))\,du', \quad 0 \le u \le u_0. \tag{21}$$

Рассмотрим “расширенное фазовое пространство” $M^{2n} \times \mathbb{R}^2_{tu}$ — прямое произведение фазового пространства M^{2n} на вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами t, u. В этом пространстве рассмотрим секущую гиперповерхность $\Sigma \times \mathbb{R}^2$ и гладкую функцию H, определённую равенством $H(m,t,u) = H_u(m)$. Рассмотрим также две 2–формы в пространстве $M^{2n} \times \mathbb{R}^2$: ω^2 и $\Omega^2 = \omega^2 - dH_u \wedge dt$, где 1–форма dH_u определяется по формуле $dH_u = dH - \frac{\partial H_u}{\partial u}du = dH - \mathcal{H}_u du$ (см. (20)). (В локальных координатах $(m,t,u) = (m^1,\dots,m^{2n},t,u)$ на $M^{2n} \times \mathbb{R}^2_{tu}$ форма dH_u имеет вид $dH_u = \frac{\partial H_u}{\partial m^i}(m^1,\dots,m^{2n})dm^i$.)

На поверхности $(\Sigma \times \mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(h)$ в расширенном фазовом пространстве рассмотрим три семейства отображений:
$$\begin{array}{l} P_{0u} = \varphi_u: \quad \sigma_0 \times (0,u) \to \sigma_u \times (0,u), \\ P_{1u} = \mathbf{A}_u \circ \varphi_u: \quad \sigma_0' \times (0,u) \to \sigma_u \times (T_u,u), \\ P_{2u} = P_u = \varphi_u^{-1} \circ \mathbf{A}_u \circ \varphi_u: \quad \sigma_0' \times (T_u,u) \to \sigma_0 \times (T_u,u), \end{array} \tag{22}$$
$0 \le u \le u_0$, где через T_u условно обозначено время движения $T_u(m)$ по фазовой траектории системы с гамильтонианом H_u до следующего пересечения с секущей поверхностью σ_u (это время зависит от начальной точки $m \in \sigma_u'$ рассматриваемой траектории).

Пусть m, m' — любые две точки области σ_0'; $\gamma = \gamma(v)$, $0 \le v \le 1$, — любая гладкая кривая, соединяющая эти точки, $\gamma(0) = m$, $\gamma(1) = m'$. Для любого значения u обозначим через $C_{iu}(\gamma)$ 2–цепь в $M \times \mathbb{R}^2_{tu}$ с координатами u', v $(0 \le u' \le u, 0 \le v \le 1)$, образованную образами кривой γ при отображениях (22):
$$C_{iu}(\gamma) = \cup_{0 \le u' \le u} P_{iu'}(\gamma), \quad i = 0,1,2.$$
Заметим, что цепь $C_{2u}(\gamma)$ целиком лежит в σ_0. Кроме того, интеграл формы ω^2 по цепи $C_{0u}(\gamma)$ равен нулю, а интегралы формы ω^2 по цепям $C_{1u}(\gamma)$ и $C_{2u}(\gamma)$ совпадают:
$$\int_{C_{0u}(\gamma)} \omega^2 = 0, \quad \int_{C_{1u}(\gamma)} \omega^2 = \int_{C_{2u}(\gamma)} \omega^2. \tag{23}$$

Из определения 11 производящей функции Φ семейства отображений следует, что разность $\Phi(m',u) - \Phi(m,u)$ равна интегралу формы ω^2 по 2–цепи $C_{2u}(\gamma) \subset \sigma_0$. Отсюда, с учётом (23), получаем:
$$\Phi(m',u) - \Phi(m,u) = \Big(\int_{C_{1u}(\gamma)} - \int_{C_{0u}(\gamma)}\Big)\omega^2. \tag{24}$$

Из каждой точки $m = \varphi_{u'}(\gamma(v))$, $0 \le u' \le u$, $0 \le v \le 1$, цепи C_{0u} выпустим фазовую траекторию системы с гамильтонианом $H_{u'}$ до следующего её пересечения с поверхностью Σ. Обозначим через $D_u(\gamma)$ 3–цепь в $H^{-1}(h) \subset M \times \mathbb{R}^2_{tu}$ с координатами t, u', v, $0 \le u' \le u$, $0 \le v \le 1$, $0 \le t \le T_{u'v} = T_{u'}(\varphi_{u'}(\gamma(v)))$, образованную этими траекториями.

Ясно, что граница полученной цепи $D_u(\gamma)$ состоит из шести "граней", две из которых совпадают с цепями

$$C_{0u}(\gamma) = D_u(\gamma)|_{t=0}, \quad C_{1u}(\gamma) = D_u(\gamma)|_{t=T_{u'v}},$$

а остальные четыре грани

$$C_u(\gamma) = D_u(\gamma)|_{v=0}, \quad C'_u(\gamma) = D_u(\gamma)|_{v=1}, \quad D_u(\gamma)|_{u'=0}, \quad D_u(\gamma)|_{u'=u}$$

образованы некоторыми фазовыми траекториями систем с гамильтонианами $H_{u'}$. В силу принципа Гамильтона [1], интеграл формы ω^2 по последним двум граням равен нулю, так как они образованы траекториями одной и той же гамильтоновой системы и лежат в её изоэнергетической поверхности. В силу замкнутости формы ω^2, её интеграл по границе цепи $D_u(\gamma)$ равен нулю. Следовательно, разность (24) равна

$$\Phi(m', u) - \Phi(m, u) = (\int_{C'_u(\gamma)} - \int_{C_u(\gamma)})\omega^2, \tag{25}$$

где на цепях $C_u(\gamma)$ и $C'_u(\gamma)$ рассматриваются координаты u, t (как задающие на них ориентацию $du \wedge dt$). Отсюда получаем, что

$$\Phi(m, u) = \int_{C_u(\gamma)} \omega^2, \quad m \in \sigma'_0. \tag{26}$$

(Действительно, из (25) следует справедливость равенства (26) лишь с точностью до постоянного слагаемого, не зависящего ни от m, ни от u; но это слагаемое равно нулю в силу условия $\Phi(m, 0) \equiv 0$ из определения 11.)

Чтобы вычислить интеграл (26), заметим, что, согласно принципу Гамильтона [1], интеграл формы $\Omega^2 = \omega^2 - dH_u \wedge dt$ по цепи $C_u(\gamma)$ равен нулю. Поэтому

$$\Phi(m, u) = \int_{C_u(\gamma)} dH_{u'} \wedge dt.$$

Заметим также, что ограничение формы $dH = dH_u + \mathcal{H}_u du$ на поверхность $H^{-1}(h) \supset C_u(\gamma)$ равно нулю. Отсюда, с учётом того, что ориентация на 2–цепи $C_u(\gamma)$ задаётся формой площади $du' \wedge dt$, имеем:

$$\Phi(m, u) = -\int_{C_u(\gamma)} \mathcal{H}_{u'}\, du' \wedge dt =$$

$$-\int_0^u \int_0^{T_{u'}(\varphi_{u'}(m))} \mathcal{H}_{u'}(\gamma_{u'}(\varphi_{u'}(m),t))\,dt\,du' = -\int_0^u \bar{\mathcal{H}}_{u'}(\varphi_{u'}(m))\,du',$$

где $\gamma_u(m,t)$ — фазовая траектория системы с гамильтонианом H_u, выпущенная из точки $m \in \sigma'_u$, $T_u(m)$ — время движения по этой траектории до следующего пересечения с секущей поверхностью σ_u. (В частности, $\gamma_u(m, T_u(m)) = A_u(m)$.)

Последнее равенство совпадает с требуемым соотношением (21).

Лемма 5 об усреднённом возмущении доказана.

Покажем, что из леммы 5 следует утверждение 8. Пусть функция $\tilde{H} \not\equiv H$ C^r–близка к функции H, т.е. имеет вид $\tilde{H} = H + \varepsilon_0 H_1$, где $\|H_1\|_{C^r} = 1$ ($r \geq 1$), $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Достаточно показать, что функции $\tilde{\Psi} \circ A$ и $\varepsilon_0 \bar{\mathcal{H}}$ ε_0^2–близки, т.е. отличаются на функцию порядка $\mathrm{O}(\varepsilon_0^2)$. (Здесь и всюду далее "близость" и "ограниченность" по отношению к функциям, векторным полям или отображениям понимаются в смысле C^{r-1}–нормы, отвечающей какой-либо римановой метрике на многообразии M, т.е. близость вместе со всеми частными производными по координатам точки m порядков, меньших r.)

Применим обозначения леммы 5 к семейству гамильтоновых систем с гамильтонианами $H_\varepsilon = H + \varepsilon H_1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Пусть $m \in \sigma$ — любая точка, и пусть $\gamma(m,t)$, $0 \leq t \leq T(m)$, — фазовая траектория гамильтоновой системы с гамильтонианом H, выпущенная из точки $m = \gamma(m,0)$ до следующего пересечения (в некоторый момент времени $t = T(m)$) с секущей поверхностью σ. При каждом значении ε рассмотрим аналогичную траекторию $\gamma_\varepsilon(m,t)$, $0 \leq t \leq T_\varepsilon(m)$, системы с гамильтонианом H_ε, где $\gamma_\varepsilon(m,0) = \varphi_\varepsilon(m) \in \sigma_\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Заметим, что векторное поле V_ε, задающее гамильтонову систему с гамильтонианом H_ε, ε_0–близко (в C^{r-1}–норме) к векторному полю V, задающему гамильтонову систему с гамильтонианом H. Отсюда и из теории обыкновенных дифференциальных уравнений получаем следующие факты, на которых будет основано доказательство леммы 5:

1. Функция $T_\varepsilon(m)$ ε_0–близка к функции $T(m)$.

2. При каждом значении t, $0 \leq t \leq T(m)$, отображение $m \mapsto \gamma_\varepsilon(m,t)$ ε_0–близко к отображению $m \mapsto \gamma(m,t)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

3. Отображение $P_{\varepsilon_0} \circ A^{-1}$ ε_0–близко к тождественному.

4. В каждой точке кривой $P_\varepsilon(m)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, вектор скорости $\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(m)$ ограничен.

Пусть $\Phi(m,\varepsilon)$ — производящая функция семейства отображений P_ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ (см. определение 11). Из леммы 5 и первых двух упомянутых фактов следует, что

$$\Phi(m,\varepsilon_0) - \varepsilon_0 \bar{\mathcal{H}}(m) = \mathrm{O}(\varepsilon_0^2).$$

Напомним, что $\tilde{\Psi}$ обозначает производящую функцию (18) отдельного отображения $P_{\varepsilon_0} \circ A^{-1}$, отвечающую некоторой гомотопии g. Из третьего и четвертого упомянутых фактов следует, что

$$\Phi(m,\varepsilon_0) - \tilde{\Psi} \circ A(m) = \mathrm{O}(\varepsilon_0^2).$$

Действительно, из определений производящей функции для семейства отображений и для отдельного отображения, с учётом замкнутости формы ω^2, легко следует, что разность $\Phi(m,\varepsilon_0) - \tilde{\Psi} \circ A(m)$ равна интегралу формы ω^2 по маленькой двумерной поверхности C, ограниченной кривыми $P_\varepsilon(m)$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, и $g(A(m), P_{\varepsilon_0}(m), u)$, $0 \le u \le 1$. (Каждая из этих кривых соединяет точки $A(m)$ и $P_{\varepsilon_0}(m)$, вторая кривая отвечает “гомотопии” g вида (16).) Не ограничивая общности, мы будем считать, что поверхность C образована кратчайшими отрезками, соединяющими соответствующие точки указанных граничных кривых. Так как длины обеих этих кривых имеют порядок $\mathrm{O}(\varepsilon_0)$, то площадь поверхности C имеет порядок $\mathrm{O}(\varepsilon_0^2)$. Следовательно, интеграл формы ω^2 по поверхности C тоже имеет порядок $\mathrm{O}(\varepsilon_0^2)$.

В силу сказанного, разность $\tilde{\Psi} \circ A(m) - \varepsilon_0 \bar{\mathcal{H}}(m)$ имеет порядок $\mathrm{O}(\varepsilon_0^2)$ (в смысле C^{r-1}–нормы). Это доказывает утверждение 8.

1.5 Доказательства теорем о неподвижных точках

Сначала докажем утверждения о неподвижных точках симплектических отображений, сформулированные в §1.4, а затем — утверждения о замкнутых траекториях гамильтоновых систем, сформулированные в §1.1–1.3.

1.5.1 Существование и расположение неподвижных точек

Как мы уже отмечали (см. п. 1.4.3), теорема 4 (оценка числа неподвижных точек) и утверждение 5 (локализация неподвижных точек) следуют из утверждения 6. Докажем это утверждение.

Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим отображение $A : U \to M$, и в каждой неподвижной точке $m \in \Lambda$ рассмотрим “коядро” оператора $dA(m) - I$. Для этого построим сначала его образ $D_m = \mathrm{Im}(dA(m) - I)$, а затем проведём поверхность $\theta_m \ni m$ в M той же размерности, что и Λ, трансверсальную к этому образу (это можно сделать в силу невырожденности Λ). Будем считать, что поверхность $\theta_m \subset M$ гладко зависит от точки $m \in \Lambda$.

Далее будем считать, что построенная поверхность $\theta_m \subset M$ определена для всех точек $m \in U$, с сохранением свойства гладкой зависимости от точки.

Пусть $U \subset M$ — достаточно малая окрестность подмногообразия Λ в M. Зададим в прямом произведении $U \times U$ какую-нибудь кусочно-гладкую (класса C^r) гомотопию C^r–гладких отображений $g_u : U \times U \to M$, $0 \le u \le 1$, $g_0(m_0, m_1) = m_0$, $g_1(m_0, m_1) = m_1$, обладающую следующим свойством: ограничение этой гомотопии на "диагональ" в $U \times U$ является тождественным отображением. Другими словами,

$$g_u(m, m) = m$$

при всех $m \in U$, $0 \le u \le 1$. Отсюда следует, что для любых двух близких точек m_0, m_1 соединяющая их кривая $g_u(m_0, m_1)$, $0 \le u \le 1$, является "короткой" т.е. имеет длину порядка расстояния между точками m_0 и m_1 (в смысле какой-нибудь римановой метрики на M).

Отметим, что отображения $\tilde{A}$ и A гомологичны тождественному в силу леммы 2 и замечания 6. Значит, для них корректно определены производящие функции Ψ и $\tilde{\Psi}$, см. п. 1.4.5. Мы напомним их построение на шаге 3.

Шаг 2. Определим возмущённое подмногообразие $\tilde{\Lambda} \subset U$ как множество всех точек $m \in U$, для которых $\tilde{A}(m) \in \tilde{\theta}_m$:

$$\tilde{\Lambda} = \{m \in U \mid \tilde{A}(m) \in \tilde{\theta}_m\} \subset U. \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что для невозмущённого отображения это множество совпадает с Λ, и согласно теореме о неявных функциях, это множество имеет вид $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$, где вложение $i : \Lambda \to U$ C^r–близко к тождественному, что доказывает первую часть свойства 3° утверждения 6. Теорема о неявных функциях применима, поскольку:

1. отображение $\tilde{A}$ C^r–близко к невозмущённому отображению A и

2. по построению поверхностей θ_m, $m \in \Lambda$, их касательные пространства трансверсальны в $T_m M$ к образам операторов $dA(m) - I$, где I — тождественный оператор в $T_m M$.

Отметим, что, по построению множества $\tilde{\Lambda} \subset U$, оно автоматически содержит все неподвижные точки отображения $\tilde{A}$.

Шаг 3. Дальнейшие наши построения аналогичны построениям из работы Гинзбурга [37], в которой рассматривались периодические системы. Построим в U производящую функцию Ψ по формуле (18). Напомним: эта функция определена с точностью до постоянного слагаемого, и разность её значений в любых двух точках m_0, $m_1 \in U$ равна интегралу 2–формы ω по 2–цепи $\tilde{C} = \tilde{C}(m_v, 0 \le v \le 1)$ с координатами u, v из "прямоугольника" $0 \le u, v \le 1$. Здесь m_v, $0 \le v \le 1$, — любой путь в U с концами в точках m_0, m_1, цепь $\tilde{C}$ составлена из кривых $h(m_v, u) = g_u(m_v, \tilde{A}(m_v))$, $0 \le u \le 1$, каждая из которых соединяет точку m_v с её образом $\tilde{A}(m_v)$:

$$\tilde{\Psi}(m_1) - \tilde{\Psi}(m_0) = \iint_{\tilde{C}(m_0,m_1)} \omega. \tag{28}$$

Из гомологичности отображения $\tilde{A}$ тождественному следует, что гладкая функция $\tilde{\Psi}$ является глобальной однозначной функцией в U, однако она определена не однозначно, а с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Для определённости будем считать, что эта функция обращается в ноль в точке $i(m_0) \in \tilde{\Lambda}$, где m_0 — некоторая фиксированная точка на Λ, i — вложение, построенное на предыдущем шаге. Ясно, что невозмущённая функция Ψ тождественно равна нулю на Λ. Определим гладкую функцию S на подмногообразии Λ, полагая $\varepsilon S = \tilde{\Psi} \circ i$.

Предположим, что отображение $\tilde{A}$ гладко зависит от некоторого малого параметра. Тогда из теоремы о неявных функциях мы сразу получаем гладкую зависимость вложения i и функции εS от этого параметра. Отсюда легко следует и гладкая зависимость функции S от малого параметра, что доказывает первую часть свойства 4°.

Шаг 4. Найдём явный вид дифференциала функции $S : \Lambda \to \mathbb{R}$. Для любой точки $m \in U$ рассмотрим "короткую" кривую $\tilde{h}(m, u) = g_u(m, \tilde{A}(m))$, $0 \le u \le 1$, соединяющую точку $m = g_0(m, \tilde{A}(m))$ с её образом $\tilde{A}(m) = g_1(m, \tilde{A}(m))$ (см. шаг 1). Нетрудно видеть, что дифференциал функции $\tilde{\Psi}$ в произвольной точке $m \in U$ равен

$$d\tilde{\Psi}(m)\eta = \int_0^1 \omega^2(\frac{\partial \tilde{h}(m,u)}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{h}(m,u)}{\partial m}\eta)du, \qquad \eta \in T_m M. \tag{29}$$

В частности, любая неподвижная точка m отображения $\tilde{A}$ является критической точкой функции $\tilde{\Psi}$, так как $\tilde{h}(m, u) = m$, $0 \le u \le 1$.

Рассмотрим сначала частный случай — когда кривые $g_u(m_0, m_1)$, $0 \le u \le 1$, являются геодезическими некоторой аффинной связности:

$$g_u(m_0, m_1) = g_u^\circ(m_0, m_1), \quad \tilde{h}(m, u) = \tilde{h}^\circ(m, u) = g_u^\circ(m, \tilde{A}(m)).$$

Для любого касательного вектора $\xi_0 \in T_m M$ обозначим через $\xi_u \in T_{h(m,u)}M$, $0 \le u \le 1$, параллельный перенос этого касательного вектора вдоль пути $h(m, u)$, $0 \le u \le 1$, относительно этой связности. Рассмотрим билинейную форму $\tilde{Q}$ на U вида

$$\tilde{Q}(\xi_0, \eta) = \int_0^1 \omega(\xi_u, \frac{\partial \tilde{h}^\circ}{\partial m}(m, u)\eta)du.$$

Тогда дифференциал $d\tilde{\Psi}^\circ$ соответствующей функции Ψ° имеет вид

$$d\tilde{\Psi}^\circ(m)\eta = \tilde{Q}(\tilde{\xi}_0, \eta), \tag{30}$$

где $\tilde{\xi}_0 = \frac{\partial \tilde{h}^\circ}{\partial u}(m,u)|_{u=0}$ — вектор, который назовём "вектором смещения" точки m (этот вектор зависит от отображения $\tilde{A}$ и от связности).

Для любой неподвижной точки m отображения $\tilde{A}$ получаем следующие формулы:

$$\tilde{Q}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\omega^2(\xi, d\tilde{A}(m)\eta + \eta), \tag{31}$$

$$d\tilde{\Psi}^\circ(m) = 0, \quad d^2\tilde{\Psi}^\circ(m)\eta = \frac{1}{2}\omega^2(d\tilde{A}(m)\eta - \eta, d\tilde{A}(m)\eta + \eta) = \omega^2(d\tilde{A}(m)\eta, \eta). \tag{32}$$

В частности, в рассматриваемом случае квадратичная часть функции $\tilde{\Psi}^\circ$ в любой неподвижной точке m не зависит от выбора аффинной связности: она в точности совпадает с производящей функцией линеаризованного отображения $d\tilde{A}(m)$. Это доказывает свойство 8° из замечания 8 (см. п. 1.4.4).

Из формулы (31) следует, что в рассматриваемом частном случае в любой точке $m \in \Lambda$, при $\eta \in T_m\Lambda$, имеем $Q(*, \eta) = \omega^2(*, \eta)$ (для невозмущённого отображения). Отсюда, с помощью формулы (30), получаем *важное следствие*: для любого подмногообразия $\tilde{\Lambda}$, C^1–близкого к Λ, для любой его точки $m \in \tilde{\Lambda}$ и любого касательного вектора $\eta \in T_m\tilde{\Lambda}$ имеем

$$d\tilde{\Psi}^\circ(m)\eta = \omega^2(\tilde{\xi}_0, \eta) + o(|\tilde{\xi}_0| \cdot |\eta|) \tag{33}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\tilde{\xi}_0 \in T_mM$ — вектор смещения точки m при отображении $\tilde{A}$, длина касательных векторов понимается по отношению к какой-либо фиксированной римановой метрике на M^{2n}.

Докажем теперь формулу (33) в общем случае — не только для функции Ψ°, но и для любой функции Ψ, определённой при помощи какого-либо семейства "коротких" кривых $h(m,u)$, $0 \le u \le 1$, вообще говоря не являющихся геодезическими $h^\circ(m,u)$, $0 \le u \le 1$, данной аффинной связности (см. шаги 1, 3). Более точно, мы докажем следующую формулу, аналогичную формуле (33):

$$d\tilde{\Psi}(m)\eta = \omega^2(\tilde{\xi}_0, \eta) + o(|\tilde{\xi}_0| \cdot |\eta|), \quad m \in \tilde{\Lambda}, \eta \in T_m\tilde{\Lambda}, \tag{34}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства (34) заметим, что $h(m,u) = m$ при всех $m \in \Lambda$, $0 \le u \le 1$, откуда $\frac{\partial h}{\partial m}(m,u)\eta = \eta$ при всех $\eta \in T_m\Lambda$, $0 \le u \le 1$. Поэтому $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial m}(m,u)\eta = \eta + o(|\eta|) = \mathrm{O}(|\eta|)$ при всех $m \in \tilde{\Lambda}$, $\eta \in T_m\tilde{\Lambda}$.

Отождествим малую окрестность U' (карту) точки m в M с малой окрестностью нуля в касательном пространстве T_mM в этой точке, например, при помощи экспоненциального отображения $\exp_m : T_mM \to M$, отвечающего данной аффинной связности. Такое отождествление позволяет отождествлять касательное пространство в любой точке U' с касательным пространством в точке m. Это отождествление гладким образом зависит от пары точек в U'.

Так как $g(m,m,u) = m$, $\tilde{h}(m,u) = g(m, \tilde{A}(m), u)$, то

$$\frac{\partial \tilde{h}}{u}(m,u) = \frac{\partial g}{u}(m, \tilde{A}(m), u) = \mathrm{O}(|\tilde{\xi}_0|).$$

Согласно доказанному, при каждом u имеем:

$$\omega^2_{\tilde{h}(m,u)}(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(m,u), \frac{\partial \tilde{h}}{\partial m}(m,u)\eta) = \omega_m(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(m,u), \frac{\partial \tilde{h}}{\partial m}(m,u)\eta) + o(|\tilde{\xi}_0| \cdot |\eta|) =$$

$$\omega^2_m(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(m,u), \eta) + o(|\tilde{\xi}_0| \cdot |\eta|), \quad m \in \tilde{\Lambda}, \eta \in T_m\tilde{\Lambda}.$$

Интегрируя последнее выражение по u на отрезке $[0,1]$ и замечая, что в выбранной карте $\int_0^1 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(m,u)du = \tilde{\xi}_0$, получаем требуемую формулу (34).

Таким образом, формула (34) справедлива для любой производящей функции Ψ вида (28) и любого подмногообразия $\tilde{\Lambda}$, C^r–близкого к Λ и, в частности, для подмногообразия, определённого по формуле (27).

Шаг 5. Теперь возьмём любую критическую точку $m \in \tilde{\Lambda}$ функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$ и покажем, что она является неподвижной при отображении $\tilde{A}$, т.е. что вектор “смещения” $\tilde{\xi}_0 = \frac{\partial \tilde{h}(m,u)}{\partial u}|_{u=0}$ равен нулю. В противном случае единичный вектор $\tilde{\xi}_0/|\tilde{\xi}_0|$ был бы близок к подпространству $T_m\theta_m$ (по построению подмногообразия $\tilde{\Lambda}$, см. (27)). С другой стороны, из равенства нулю выражения (34) следует, что этот единичный вектор был бы близок к косоортогональному дополнению $T_m^\perp\tilde{\Lambda}$ к подпространству $T_m\tilde{\Lambda}$. Следовательно, подпространства $T_m\theta_m$ и $T_m^\perp\tilde{\Lambda}$ содержали бы близкие друг к другу единичные вектора. Но последнее противоречит построению поверхностей θ_m, $m \in U$, поскольку в каждой точке m компактного подмногообразия $\Lambda \subset U$ подпространства $T_m\theta_m$ и $T_m^\perp\Lambda = \mathrm{Im}(dA(m) - I)$ трансверсальны друг к другу и имеют дополнительные размерности.

Таким образом, критические точки функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$ совпадают с неподвижными точками отображения $\tilde{A}$. Это доказывает свойство 1° доказываемого утверждения.

Докажем свойство 2° о невырожденных неподвижных точках отображения $\tilde{A}$.

Пусть $m \in \tilde{\Lambda}$ — любая неподвижная точка отображения $\tilde{A}$. Тогда $\tilde{h}(m,u) = m$, так что $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(m,u) = 0$. Отсюда и из формулы (29) дифференциала функции Ψ получаем, что в такой точке m квадратичная часть функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$ имеет следующий вид (как симметричная билинейная форма):

$$d^2\tilde{\Psi}(m)\eta_1\eta = \int_0^1 \omega^2(\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial m \partial u}(m,u)\eta_1, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial m}(m,u)\eta)du, \tag{35}$$

$\eta_1,\ \eta \in T_m M$.

Как мы уже отметили, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial m}(m,u)\eta = \eta + o(|\eta|)$ при $\eta \in T_m\tilde{\Lambda}$. Так как $g(m,m,u) = m$, то $\frac{\partial g}{\partial m}(m,m,u) + \frac{\partial g}{\partial m'}(m,m,u)$ является тождественным оператором и $\frac{\partial^2 g}{\partial m \partial u}(m,m,u) + \frac{\partial^2 g}{\partial m' \partial u}(m,m,u) = 0$. Отсюда $\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial m \partial u}(m,u)\eta_1 = \frac{\partial^2 g}{\partial m \partial u}(m,m,u)(\eta_1 - d\tilde{A}(m)\eta_1) = \mathrm{O}(|d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1|)$ в любой неподвижной точке m отображения $\tilde{A}$, $\eta_1 \in T_m M$. Кроме того, в любой неподвижной точке m отображения $\tilde{A}$ имеем: $\int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial m \partial u}(m,u)\eta_1 du = d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1$.

Подставляя эти равенства в формулу (35), имеем:

$$d^2\tilde{\Psi}(m)\eta_1\eta = \int_0^1 \omega^2(\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial m \partial u}(m,u)\eta_1, \eta + o(|\eta|))du =$$

$$\omega^2(d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1, \eta) + o(|d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1| \cdot |\eta|) \tag{36}$$

при $\varepsilon \to 0$, $\eta_1 \in T_m M$, $\eta \in T_m\tilde{\Lambda}$.

Из построения подмногообразия $\tilde{\Lambda}$ следует, что векторы вида $\xi_1 = d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1$, где $\eta_1 \in T_m\tilde{\Lambda}$, касательны к поверхности θ_m. Отсюда, с учётом невырожденности спаривания на подпространствах θ_m и $T_m\tilde{\Lambda}$ при помощи формы ω^2, получаем, что нулевое пространство гессиана $d^2(\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}})$ в точке m совпадает с ядром оператора

$$B : T_m\Lambda \to T_m\theta_m, \quad B(\eta_1) = d\tilde{A}(m)\eta_1 - \eta_1.$$

В частности, невырожденность гессиана $d^2(\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}})$ в точке m эквивалентна тому, что оператор B является изоморфизмом.

Осталось показать, что ядро оператора B совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(m) - I$. Это следует из того, что оператор $(d\tilde{A}(m) - I) : T_m M = (T_m\tilde{\Lambda}) \oplus N_m \to T_m M = (T_m\theta_m) \oplus (T_m^{\perp}\Lambda)$ задаётся блочной матрицей вида $\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где N_m — ортогональное дополнение к $T_m\tilde{\Lambda}$ в M (относительно какой-либо фиксированной римановой метрики), матрица C невырождена в силу условия невырожденности Λ.

Таким образом, точка m является морсовской критической точкой функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$ в том и только том случае, когда эта точка является невырожденной неподвижной точкой отображения $\tilde{A}$. Более того, в любой критической точке m функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$ нулевое пространство гессиана этой функции совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(m)-I$. Это доказывает свойство 2° утверждения 6.

Итак, свойства 1° и 2° доказаны, а вместе с ними доказана теорема 4 об оценке числа неподвижных точек отображения $\tilde{A}$.

Расположение неподвижных точек. Осталось доказать вторые части свойств 3° и 4° (о близости функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}\circ i$ к ограничению производящей функции на Λ) утверждения 6. Отсюда будет следовать утверждение 5 о расположении неподвижных точек отображения $\tilde{A}$.

Покажем, что для любой другой производящей функции $\tilde{\Psi}^\circ$ возмущённого отображения функции $\tilde{\Psi}\circ i$ и $\tilde{\Psi}^\circ|_\Lambda$ отличаются на малую функцию порядка ε^2 (с точностью до постоянного слагаемого).

Рассмотрим разность значений функции $\tilde{\Psi}^\circ$ в двух точках m_0 и m_1 подмногообразия Λ. Соединим эти точки кривой $\gamma = \{m_v \,|\, 0 \le v \le 1\}$, лежащей на Λ. Согласно определению (28) производящей функции, эта разность равна интегралу формы ω^2 по двумерной цепи $\tilde{C}^\circ(m_0, m_1)$, отвечающей кривой γ. А именно, цепь $\tilde{C}^\circ(m_0, m_1)$ составлена из кривых

$$\gamma_v^\circ = \{\tilde{h}^\circ(m_v, u) \mid 0 \le u \le 1\},$$

и её граница состоит из четырёх кривых γ_0°, γ_1°, γ и $\tilde{A}(\gamma)$.

Соединим точки $\tilde{m}_0 = i(m_0)$ и $\tilde{m}_1 = i(m_1)$ кривой $\tilde{\gamma} = i(\gamma) = \{\tilde{m}_v \,|\, 0 \le v \le 1\}$, на $\tilde{\Lambda}$, где $\tilde{m}_v = i(m_v)$, $0 \le v \le 1\}$. Для разности $\tilde{\Psi}(\tilde{m}_1) - \tilde{\Psi}(\tilde{m}_0)$ рассмотрим аналогичную двумерную цепь $\tilde{C}(m_0, m_1)$, отвечающую кривой $\tilde{\gamma}$.

Нам нужно доказать, что интегралы формы ω^2 по цепям $\tilde{C}(m_0, m_1)$ и $C(m_0, m_1)$ отличаются на величину $o(\varepsilon)$. Но эти две цепи являются противоположными гранями некоторой 3–цепи $D \subset U$, которая строится так. На каждой 2–цепи $\tilde{C}(m_0, m_1)$ и $C(m_0, m_1)$ есть естественные координаты u, v, $0 \le u, v \le 1$. Соединим точки, имеющие одни и те же координаты, отрезком геодезической. Объединение таких отрезков по всем u, v, является искомой 3–цепью D. Обозначим её третью грань, примыкающую к кривым γ и $\tilde{\gamma}$, через C, а четвёртую грань, примыкающую к кривым $\tilde{A}(\gamma)$ и $\tilde{A}(\tilde{\gamma})$, через $\tilde{A}C$. Две оставшиеся (маленькие) грани, примыкающие к точкам m_0 и m_1, обозначим через C_0 и C_1 соответственно.

В силу замкнутости формы ω^2, её интеграл по границе цепи D равен нулю. Следовательно, интересующая нас разность имеет вид

$$\Big(\int_{\tilde{C}(m_0,m_1)} - \int_{C(m_0,m_1)}\Big)\omega^2 = \Big(\int_{\tilde{A}C} - \int_C\Big)\omega^2 + \Big(\int_{C_0} - \int_{C_1}\Big)\omega^2.$$

Первая разность в последней сумме ε^2–близка к разности $(\int_{\tilde{A}(C)} - \int_C)\omega^2$, которая в свою очередь равна нулю в силу симплектичности отображения $\tilde{A}$. Вторая разность в этой сумме мала, так как площади цепей C_0 и C_1 имеют порядок ε^2.

Таким образом,

$$\tilde{\Psi}(i(m_1)) - \tilde{\Psi}(i(m_0)) = \tilde{\Psi}^\circ(m_1) - \tilde{\Psi}^\circ(m_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \quad m_0, m_1 \in \Lambda,$$

для любых двух производящих функций $\tilde{\Psi}^\circ$ и $\tilde{\Psi}$ отображения $\tilde{A}$.

Это доказывает вторую часть свойства 3° утверждения 6.

Пусть теперь отображение $\tilde{A}$ включено в однопараметрическое семейство гомологичных симплектических отображений: $\tilde{A} = A_\varepsilon$. Рассмотрим производящую функцию $\Phi_\varepsilon(m) = \Phi(m, \varepsilon)$ этого семейства (см. определение 11). Ясно, что приведённое доказательство дословно переносится на случай функции $\tilde{\Psi}^\circ = \Phi_\varepsilon$ в качестве производящей функции отображения $\tilde{A}$. Таким образом, функция $S = \frac{1}{\varepsilon}\Psi_\varepsilon \circ i_\varepsilon$ ε–близка к функции $\frac{1}{\varepsilon}\Phi_\varepsilon|_\Lambda$. Так как $\Phi_0 = 0$, то

$$\frac{1}{\varepsilon}\Phi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon) = -F_0 + o(\varepsilon).$$

Значит, при $\varepsilon \to 0$ функция $S = \frac{1}{\varepsilon}\Psi_\varepsilon \circ i_\varepsilon$ стремится к функции $-F_0|_\Lambda = \mathcal{S}$. Это доказывает вторую часть свойства 4° утверждения 6.

Утверждение 6 полностью доказано. Тем самым, доказаны также теорема 4 и утверждение 5.

1.5.2 Устойчивость неподвижных точек

Здесь мы докажем утверждение 7 и вспомогательную лемму 4 из п. 1.4.4.

В любой точке $m \in \Lambda$ рассмотрим оператор монодромии $\mathbf{A} = dA(m)$. Рассмотрим производящую функцию $Q = Q(m)$ этого оператора, т.е. квадратичную форму $Q\xi = \omega^2(\mathbf{A}\xi, \xi)$.

Покажем, что касательное пространство к Λ содержится в ядре квадратичной формы Q. Действительно, соответствующая симметричная билинейная форма имеет вид $Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\omega^2(\mathbf{A}\xi, \eta) + \omega^2(\mathbf{A}\eta, \xi))$. В силу симплектичности оператора $\mathbf{A}$ и кососимметричности формы ω^2, имеем: $\omega^2(\mathbf{A}\eta, \xi) = \omega^2(\mathbf{A}^2\eta, \mathbf{A}\xi) = -\omega^2(\mathbf{A}\xi, \mathbf{A}^2\eta)$, откуда

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{A}\xi, \eta - \mathbf{A}^2\eta). \tag{37}$$

Поскольку любой вектор $\eta \in T_m\Lambda$ неподвижен при отображении $\mathbf{A}$, то в силу (37) он "ортогонален" любому вектору $\xi \in T_mM$ относительно формы Q: $Q(\xi, \eta) = 0$. Это и значит, что

$$T_m\Lambda \subset \ker Q. \tag{38}$$

Пусть $-1 \notin \operatorname{spec} \mathbf{A}$. Из формулы (37) и невырожденности симплектической структуры легко следует, что при указанном предположении в любой точке $m \in \Lambda$ вложение (38) не является строгим, т.е. $T_m\Lambda = \ker Q$. Другими словами, производящая функция $Q = Q(m)$ невырождена на "нормальном" подпространстве к $T_m\Lambda$ в T_mM, т.е. на подпространстве вида $N_m \subset T_mM$, где $\dim N_m + \dim \Lambda = \dim M$. С учётом второй части свойства 8° производящей функции вида Ψ° (см. замечание 8, доказанное на шаге 4, (32)), отсюда получаем, что подмногообразие Λ является боттовским подмногообразием критических точек функции Ψ°. Отсюда и теоремы о неявной функции легко следует свойство 7° из замечания 8.

Доказательство леммы 4. Напомним условие этой леммы.

В лемме 4 предполагается, что в каждой точке $m \in \Lambda$ спектр оператора монодромии $\mathbf{A} = dA(m)$ не содержит -1.

Пусть теперь m — критическая точка функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$. Тем самым, согласно утверждению 6, она неподвижна при отображении $\tilde{A}$. Рассмотрим оператор монодромии $\tilde{\mathbf{A}} = d\tilde{A}(m)$ в этой точке и производящую функцию $\tilde{Q} = \tilde{Q}(m)$ этого оператора, т.е. квадратичную форму $\tilde{Q}\xi = \omega^2(\tilde{\mathbf{A}}\xi, \xi)$.

Лемма 4 утверждает, что в точке m индекс квадратичной формы $\tilde{Q}$ равен сумме индекса квадратичной формы Q, и индекса гессиана функции $\tilde{\Psi}|_{\tilde{\Lambda}}$.

Напомним (см. шаг 2 из п. 1.5.1), что подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ определялось как множество всех точек в окрестности $U \supset \Lambda$, в которых $\tilde{A}(m) \in \tilde{\theta}_m$ (27). Следовательно, в любой неподвижной точке m отображения $\tilde{A}$ касательное подпространство $T_m\tilde{\Lambda}$ к $\tilde{\Lambda}$ в этой точке состоит из всех векторов $\eta \in T_mM$, для которых $\tilde{\mathbf{A}}\eta - \eta \in T_m\theta_m$, т.е. имеет вид

$$T_m\tilde{\Lambda} \subset \{\eta \in T_mM \mid \tilde{\mathbf{A}}\eta - \eta \in T_m\theta_m\} \tag{39}$$

(в действительности, это вложение является равенством).

В каждой точке $m \in \Lambda$ рассмотрим косоортогональное дополнение к подпространству $T_m\theta_m$. Заметим, что полученное подпространство $\theta_m^\perp$ трансверсально к $T_m\Lambda$ (поскольку косоортогональные дополнения $T_m\theta_m$ и $T_m^\perp\Lambda$ к этим подпространствам трансверсальны по построению поверхностей θ_m). Поэтому мы его будем обозначать $\theta_m^\perp = N_m$. Таким образом, касательное пространство (39) к подмногообразию $\tilde{\Lambda}$ имеет вид

$$T_m\tilde{\Lambda} \subset \{\eta \in T_mM \mid \omega^2(\tilde{\mathbf{A}}\eta - \eta, \nu) = 0, \nu \in N_m\}.$$

В силу симплектичности оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ имеем: $\omega^2(\tilde{\mathbf{A}}\eta - \eta, \nu) = \omega^2(\eta, \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\nu) - \omega^2(\eta, \nu) = \omega^2(\eta, \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\nu - \nu)$, так что

$$T_m\tilde{\Lambda} \subset \{\eta \in T_mM \mid \omega^2(\eta, \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\nu - \nu) = 0, \nu \in N_m\}. \tag{40}$$

Так как оператор $\tilde{\mathbf{A}}+I$ обратим, где I — тождественный оператор в T_mM, то при достаточно малом возмущении определено подпространство

$$\tilde{N}_m^\circ = (\tilde{\mathbf{A}}+I)^{-1}N_m.$$

Покажем, что подпространства $T_m\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{N}_m^\circ$ "ортогональны" относительно формы $\tilde{Q}$. Действительно, для любого вектора $\xi\in\tilde{N}_m^\circ$ вектор $\nu=\xi+\tilde{\mathbf{A}}\xi$ принадлежит подпространству N_m. Согласно формуле (37),

$$\tilde{Q}(\eta,\xi)=\frac{1}{2}\omega^2(\tilde{\mathbf{A}}\eta,(I-\tilde{\mathbf{A}}^2)\xi)=\frac{1}{2}\omega^2(\tilde{\mathbf{A}}\eta,(I-\tilde{\mathbf{A}})\nu)=$$

$$\frac{1}{2}\omega^2(\eta,\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(I-\tilde{\mathbf{A}})\nu)=\frac{1}{2}\omega^2(\eta,\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\nu-\nu).$$

Согласно (40), последнее выражение равно нулю для $\eta\in T_m\tilde{\Lambda}$, $\xi\in\tilde{N}_m^\circ$. Это и значит ортогональность подпространств $T_m\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{N}_m^\circ$ относительно формы $\tilde{Q}$.

Осталось заметить, что подпространство $\tilde{N}_m^\circ=(\tilde{\mathbf{A}}+I)^{-1}N_m$ близко к подпространству $N^\circ_{i^{-1}(m)}=(\mathbf{A}+I)^{-1}N_{i^{-1}(m)}$. Кроме того, подпространство $N^\circ_{i^{-1}(m)}$ трансверсально к $T_{i^{-1}(m)}\Lambda$, так как иначе существовал бы ненулевой вектор $\eta\in T_{i^{-1}(m)}\Lambda$, для которого вектор $\mathbf{A}\eta+\eta=2\eta$ принадлежит $N_{i^{-1}(m)}$. Следовательно, форма Q невырождена на N_m°, откуда форма $\tilde{Q}$ невырождена на $\tilde{N}_m^\circ$ и имеет такой же индекс:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ}=\operatorname{ind}Q|_{N_m^\circ}=\operatorname{ind}Q. \tag{41}$$

Далее, в силу (36) и (37), в любой неподвижной точке m отображения $\tilde{A}$ ограничения квадратичных форм $d^2\tilde{\Psi}(m)$ и $\tilde{Q}$ на подпространство $T_m\tilde{\Lambda}$ близки в следующем смысле. Рассмотрим оператор $B=(\tilde{\mathbf{A}}-I)|_{T_m\tilde{\Lambda}}: T_m\tilde{\Lambda}\to T_m\theta_m$. Ввиду (36) форма $d^2\tilde{\Psi}(m)|_{T_m\tilde{\Lambda}}$ имеет вид

$$d^2\tilde{\Psi}(m)\eta_1\eta=\tilde{\omega}_0(B\eta_1,\eta),\quad \eta_1,\eta\in T_m\tilde{\Lambda},$$

где $\tilde{\omega}_0$ — некоторая билинейная форма на прямом произведении подпространств $T_m\theta_m$ и $T_m\tilde{\Lambda}$, близкая к форме $\omega^2|_{(T_m\theta_m)\times(T_m\tilde{\Lambda})}$. Из (37) получаем, что симметричная билинейная форма $\tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}}$ имеет такой же вид:

$$\tilde{Q}\eta_1\eta=\tilde{\omega}_1(B\eta_1,\eta),\quad \eta_1,\eta\in T_m\tilde{\Lambda},\quad 0\le t\le 1,$$

где $\tilde{\omega}_1(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\omega^2(\xi,\tilde{\mathbf{A}}\eta+\eta)$ тоже близка к форме $\omega^2|_{(T_m\theta_m)\times(T_m\tilde{\Lambda})}$. При любом t, $0\le t\le 1$, рассмотрим билинейную форму $\tilde{\omega}_t$ на $(T_m\theta_m)\times(T_m\tilde{\Lambda})$ и билинейную форму Q_t на $T_m\tilde{\Lambda}$ вида

$$\tilde{\omega}_t=(1-t)\tilde{\omega}_0+t\tilde{\omega}_1,\quad Q_t\eta_1\eta=\tilde{\omega}_t(B\eta_1,\eta).$$

Из невырожденности “спаривания” векторов подпространств $T_m\tilde{\Lambda}$ и $T_m\theta_m$ при помощи форм $\tilde{\omega}_t$ следует, что ядро билинейной формы Q_t совпадает с ядром оператора B (при любом t, $0 \le t \le 1$). Отсюда, ввиду симметричности билинейных форм Q_t, их индексы совпадают, $0 \le t \le 1$. В частности, $\operatorname{ind} Q_0 = \operatorname{ind} Q_1$, т.е.

$$\operatorname{ind} d^2\tilde{\Psi}(m)|_{T_m\tilde{\Lambda}} = \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}}.$$

В итоге получаем, что индекс формы $\tilde{Q}$ равен сумме индексов её ограничений на взаимноортогональные подпространства $T_m\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{N}_m^\circ$ (относительно этой формы), $T_mM = T_m\tilde{\Lambda} \oplus \tilde{N}_m^\circ$. Отсюда, с учётом (41),

$$\operatorname{ind} \tilde{Q} = \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}} + \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ} = \operatorname{ind} d^2\tilde{\Psi}(m)|_{T_m\tilde{\Lambda}} + \operatorname{ind} Q.$$

Первое слагаемое в полученной сумме совпадает с индексом гессиана функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi} \circ i$ в рассматриваемой точке $i^{-1}(m)$.

Это завершает доказательство леммы 4.

Заметим, что при замене подмногообразия $\tilde{\Lambda}$ на подмногообразие вида $\tilde{\Lambda}^\circ$ из (12) утверждение леммы 4 останется справедливым. Для доказательства этого факта нужно заменить в приведённом рассуждении подпространство N_m° (“ортогональное” к подпространству $T_m\tilde{\Lambda}$ относительно формы $\tilde{Q}$) на исходное подпространство N_m (“ортогональное” к подпространству $T_m\tilde{\Lambda}^\circ$ относительно формы $\tilde{Q}$). В частности, лемма 4 справедлива для производящей функции вида $\tilde{\Psi}^\circ$ (в качестве функции $\tilde{\Psi}$).

Это завершает доказательство свойств функции Ψ°, перечисленных в замечании 8.

Доказательство утверждения 7. Пусть m — морсовская критическая точка локального минимума функции $S = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi} \circ i$. Согласно утверждению 6, точка $i(m)$ является невырожденной неподвижной точкой отображения $\tilde{A}$. Нам нужно показать, что все собственные значения оператора монодромии $\tilde{\mathbf{A}} = d\tilde{A}(i(m))$ являются эллиптическими.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^N$, и пусть K, L — инвариантные подпространства этого оператора, $K + L = \mathbb{R}^N$, $\dim K + \dim L = N$. Предположим, что спектры операторов $\mathbf{A}|_K$ и $\mathbf{A}|_L$ не пересекаются. Рассмотрим любой линейный оператор $\tilde{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, ε–близкий к $\mathbf{A}$. Тогда существуют (единственные) инвариантные для $\tilde{\mathbf{A}}$ подпространства $\tilde{K}$, $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^N$, ε–близкие к K и L соответственно.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_\varepsilon$. Достаточно показать, что существует ε–близкий к тождественному линейный оператор $T = T_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^N$, такой, что подпространства K и L инвариантны относительно оператора $T\tilde{A}T^{-1} = T_\varepsilon \mathbf{A}_\varepsilon T_\varepsilon^{-1}$.

При рассматриваемом представлении $\mathbb{R}^N = K + L$ преобразование $\mathbf{A}_\varepsilon$ задаётся матрицей вида $\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_\varepsilon & \varepsilon b_\varepsilon \\ \varepsilon c_\varepsilon & d_\varepsilon \end{pmatrix}$, где a_ε, b_ε, c_ε и d_ε ограничены. Преобразование T_ε будем искать в виде матрицы $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & \varepsilon X_\varepsilon \\ \varepsilon Y_\varepsilon & I \end{pmatrix}$, где X_ε, Y_ε ограничены, тогда преобразование T_ε^{-1} с точностью до величин порядка ε^2 задаётся матрицей вида $\begin{pmatrix} I & -\varepsilon X_\varepsilon \\ -\varepsilon Y_\varepsilon & I \end{pmatrix}$. Инвариантность подпространств K и L относительно оператора

$$T_\varepsilon \mathbf{A}_\varepsilon T_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} a_\varepsilon & \varepsilon(b_\varepsilon + X_\varepsilon d_\varepsilon) \\ \varepsilon(Y_\varepsilon a_\varepsilon + c_\varepsilon) & d_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\varepsilon X_\varepsilon \\ -\varepsilon Y_\varepsilon & I \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\varepsilon^2) =$$

$$\begin{pmatrix} a_\varepsilon & \varepsilon(b_\varepsilon - a_\varepsilon X_\varepsilon + X_\varepsilon d_\varepsilon) \\ \varepsilon(Y_\varepsilon a_\varepsilon - d_\varepsilon Y_\varepsilon + c_\varepsilon) & d_\varepsilon \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

эквивалентна (с точностью до $\mathrm{O}(\varepsilon)$) выполнению условий

$$a_0 X_0 - X_0 d_0 = b_0, \quad d_0 Y_0 - Y_0 a_0 = c_0.$$

Покажем, что отсюда однозначно находятся матрицы X_0 и Y_0. Для этого нужно показать, что линейное преобразование матриц вида

$$X \mapsto a_0 X - X d_0 \tag{42}$$

имеет нулевое ядро. Приведём оператор a_0 к жордановой форме, т.е. перейдём к (комплексному) базису в $K_\mathbb{C}$, в котором оператор a_0 задаётся блочно-диагональной матрицей, на диагональных блоках которой стоят "жордановы клетки". (Нам важно лишь, чтобы матрица a_0 была "верхнетреугольной".)

Пусть матрица X принадлежит ядру оператора (42), т.е. $a_0 X = X d_0$. Покажем, что $X = 0$. Если последний блок матрицы a_0 является жордановой клеткой с числом λ на диагонали, то последняя строка матрицы $a_0 X$ совпадает с λx, где x — последняя строка матрицы X. В силу $X d_0 = a_0 X$ строка x является собственным вектором матрицы d_0 с собственным значением λ. Но по условию леммы $\lambda \notin \operatorname{spec} d_0$. Следовательно, строка x равна нулю. Равенство нулю остальных строк матрицы X доказывается по индукции. Таким образом, линейное преобразование (42) действительно невырождено.

Поскольку матрицы X_0 и Y_0 находятся однозначно, то по теореме о неявной функции матрицы X_ε и Y_ε также находятся однозначно, если ε достаточно мало́. Лемма 6 доказана.

Докажем теперь утверждение 7.

Шаг 1. Возьмем в качестве операторов $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ операторы монодромии $dA(m)$ и $d\tilde{A}(m)$. При этом подпространства T_mM и $T_{i(m)}M$, в которых действуют эти операторы, мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^{2n}$ при помощи каких-либо фиксированных локальных координат в окрестности точки m в M. В качестве инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$ рассмотрим его корневое подпространство

$$K = R_1(\mathbf{A}) \subset T_mM,$$

отвечающее собственному значению 1, и косоортогональное дополнение

$$L = K^{\perp}$$

к K в T_mM.

Заметим, что подпространства K и L являются инвариантными симплектическими подпространствами оператора $\mathbf{A}$, причём спектр ограничения этого оператора на подпространство K состоит из 1, а спектр его ограничения на L не содержит 1. В частности, эти спектры не пересекаются.

Согласно лемме 6 существует инвариантное для $\tilde{\mathbf{A}}$ симплектическое подпространство $\tilde{K}$, близкое к K. В силу симплектичности оператора $\tilde{\mathbf{A}}$, его косоортогональное дополнение $\tilde{L} = \tilde{K}^{\perp}$ тоже инвариантно относительно $\tilde{\mathbf{A}}$. Ясно, что подпространства $\tilde{L}$ и L тоже близки.

Шаг 2. Так как оператор $\tilde{\mathbf{A}}|_{\tilde{L}}$ близок к $\mathbf{A}|_L$ и (по условию 1 определения сильной устойчивости Λ) все собственные значения оператора $\mathbf{A}|_L$ являются эллиптическими, то же верно для оператора $\tilde{\mathbf{A}}|_L$. Другими словами, все собственные значения оператора $\tilde{\mathbf{A}}$, "отделённые" от 1, являются эллиптическими (как и для оператора $\mathbf{A}$).

Шаг 3. Покажем теперь, что производящая функция $\tilde{Q}$ оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ положительно определена на подпространстве $\tilde{K}$. Отсюда будет следовать эллиптичность всех собственных значений оператора $\tilde{\mathbf{A}}|_{\tilde{K}}$, а значит, с учётом предыдущих шагов, эллиптичность всех собственных значений оператора $\tilde{\mathbf{A}}$.

Заметим, что морсовость критической точки m по отношению к функции S влечёт невырожденность неподвижной точки $i(m)$ отображения $\tilde{A}$ (согласно свойству 2° утверждения 6). Последнее влечёт невырожденность формы $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ (в силу того, что $\operatorname{spec}\tilde{\mathbf{A}} \not\ni -1$). Следовательно, для доказательства положительной определённости формы $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ нам достаточно показать, что её индекс равен нулю.

Так как квадратичная форма $Q|_L$ невырождена (в силу условия 1 сильной устойчивости Λ), то близкая к ней квадратичная форма $\tilde{Q}|_{\tilde{L}}$ тоже невырождена и имеет такой же индекс:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{L}} = \operatorname{ind} Q|_L.$$

Кроме того, в силу леммы 4, с учётом положительной определённости гессиана $d^2S(m)$ (так как m — морсовская точка локального минимума функции S) и неотрицательной определённости формы $Q|_K$ (в силу условия 2 сильной устойчивости Λ), имеем:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind}Q + \operatorname{ind}d^2S(m) = \operatorname{ind}Q = \operatorname{ind}Q|_L + \operatorname{ind}Q|_K = \operatorname{ind}Q|_L.$$

Таким образом,

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind}Q|_L = \operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{L}}.$$

С другой стороны, $\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{L}} + \operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$. Следовательно, слагаемое $\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ в последней сумме равно нулю, т.е. форма $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ неотрицательно определена.

Отсюда следует эллиптичность всех собственных значений оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ и, тем самым, структурная устойчивость неподвижной точки $i(m)$ отображения $\tilde{A}$, согласно предложению 1. Свойство 6° из утверждения 7 полностью доказано.

Утверждение 7 доказано.

Совершенно аналогично из леммы 4 выводится свойство 6° для производящей функции $\tilde{\Psi}^\circ$. Это доказывает свойства 1°–8° функции $\tilde{\Psi}^\circ$, сформулированные в п. 1.4.4.

1.6 Доказательство теорем о замкнутых траекториях

Перейдём к доказательству утверждений о замкнутых траекториях гамильтоновых систем.

Рассмотрим частный случай ситуации теоремы 1: когда расслоение p подмногообразия Λ на замкнутые траектории невозмущённой системы *тривиально.*

Как мы заметили в п. 1.4.2 (см. замечание 7), в этой ситуации справедливо утверждение 9, вытекающее из утверждений 6, 7 и леммы 3 о неподвижных точках отображений, с учётом утверждения 8 о методе усреднения.

Напомним, что утверждение 9 является "слабым вариантом" утверждений 3, 4, и из него сразу следуют утверждения теорем 1, 2, 3 о числе, локализации и устойчивости замкнутых траекторий возмущённой системы, в указанном частном случае.

Рассмотрим теперь общий случай — когда расслоение Λ на замкнутые траектории не является, вообще говоря, тривиальным.

Как мы уже отмечали (см. п. 1.4.3), для доказательства теорем 1 (оценка числа замкнутых траекторий), 2 (локализация замкнутых траекторий) и утверждений 1, 2 достаточно доказать утверждение 3. Докажем это утверждение. Оно будет аналогично доказательству утверждения 6 о неподвижных точках отображений.

Предположим (согласно ситуации утверждения 3), что гамильтониан $\tilde{H}$ возмущённой системы близок к H по норме C^r, где $r \geq 2$. Обозначим

$$\varepsilon = \|\tilde{H} - H\|_{C^r}, \quad H_1 = (\tilde{H} - H)/\varepsilon,$$

и обозначим через $\bar{\mathcal{H}}$ усреднение (6) возмущения $\mathcal{H} = H_1|_\Lambda$ по замкнутым траекториям невозмущённой системы на Λ.

1.6.1 Существование замкнутых траекторий

Здесь мы докажем свойства 1°, 2°, 3°, 5° из утверждения 3, из которых следует теорема 1.

Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Определим основные объекты, участвующие в доказательстве утверждения.

Пусть $T(m)$, $m \in \Lambda$, — гладкая функция периода системы с гамильтонианом H на Λ.

Для каждой точки $m \in \Lambda$ введём следующие понятия и обозначения.

1. Пусть $\gamma_m = \gamma_m(t)$ — фазовая траектория системы с гамильтонианом H, проходящая через точку m: $\gamma_m(0) = m$. Проведём через точку m маленькую гиперповерхность $\sigma_m \subset H^{-1}(h)$, трансверсальную к траектории γ_m в изоэнергетической поверхности:

$$T_m\sigma_m \oplus T_m\gamma_m = T_m(H^{-1}(h)), \quad m \in \Lambda.$$

Поверхность σ_m назовём *сечением Пуанкаре* в точке m. Будем считать, что эта поверхность гладко зависит от точки $m \in \Lambda$.

2. На поверхности σ_m естественным образом определим *отображение Пуанкаре* $A_m : \sigma'_m \to \sigma_m$, где σ'_m — достаточно малая окрестность точки m в σ_m, гладко зависящая от точки $m \in \Lambda$. А именно, из любой точки $m' \in \sigma'_m$ выпустим фазовую траекторию системы с гамильтонианом H до пересечения с сечением Пуанкаре σ_m через некоторое время $T_m(m')$, близкое к $T(m)$. Эту точку пересечения мы и обозначим через $A_m(m')$. Линейную часть $dA_m(m)$ этого отображения в точке m назовём *оператором монодромии* в точке m.

3. Обозначим $B_m = \Lambda \cap \sigma'_m$. Из условия невырожденности Λ следует, что подмногообразие B_m в точности совпадает с множеством неподвижных точек отображения A_m.

4. Построим в точке m подпространство $\theta_m \subset T_m\sigma_m$ размерности $\dim \theta_m = \dim B_m = \dim \Lambda - 1$, гладко зависящее от точки $m \in \Lambda$. (Это подпространство аналогично поверхности $\theta_m \subset \sigma$ из доказательства утверждения 6.) Для этого рассмотрим в пространстве $T_m\sigma_m$ образ

$$D_m = \mathrm{Im}(dA_m(m) - I), \quad m \in \Lambda,$$

оператора $dA_m(m) - I$, где I — тождественный оператор в $T_m\sigma_m$. В силу невырожденности Λ размерность подпространства D_m в точности равна коразмерности подмногообразия B_m в σ_m. Пусть θ_m — подпространство в $T_m\sigma_m$, трансверсальное к подпространству D_m:

$$\theta_m \oplus D_m = T_m\sigma_m.$$

5. "Перенесём" из точки m подпространство $\theta_m \subset T_m\sigma_m$ во все точки m' сечения Пуанкаре σ_m при помощи какого-нибудь гладкого семейства операторов

$$P_{m,m'} : \theta_m \to T_{m'}\sigma_m, \quad m' \in \sigma_m, \tag{43}$$

такого, что при $m = m'$ оператор является тождественным: $P_{m,m} = Id_{\theta_m}$. Образ оператора $P_{m,m'}$ обозначим через $\theta_{m,m'}$.

Будем считать, не ограничивая общности, что сечение Пуанкаре σ_m, подпространство $\theta_m \subset T_m\sigma_m$ и гладкое семейство операторов $P_{m,m'}$, $m' \in \sigma_m$, гладко зависят от точки $m \in \Lambda$.

Из теоремы о неявных функциях следует, что каждая замкнутая траектория $\gamma \subset \Lambda$, обладает столь малой "трубчатой" окрестностью U_γ в $H^{-1}(h)$, гладко зависящей от траектории γ (точнее, от точки $m \in \Lambda$, где $\gamma = \gamma_m$), что в этой окрестности выполнено следующее:

1. Сечения Пуанкаре $\sigma_m \cap U_\gamma$, $m \in \gamma$, отвечающие точкам траектории γ, попарно не пересекаются и расслаивают всю эту окрестность на диски $\sigma_m \cap U_\gamma$ коразмерности 1. (В действительности, каждое такое расслоение тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению диска на окружность.)

2. Каждый оператор $P_{m,m'}$, $m \in \gamma$, $m' \in \sigma_m \cap U_\gamma$, является изоморфизмом на свой образ $\theta_{m,m'}$.

Далее мы будем считать, что в качестве сечения Пуанкаре σ_m с самого начала был взят диск $\sigma_m \cap U_{\gamma_m}$, $m \in \Lambda$.

В частности, для любой точки m' указанной окрестности U_γ существует ровно одна точка $m = m(m') \in \gamma$, такая, что $m' \in \sigma_m$. Полученное отображение обозначим $\rho_\gamma : m' \mapsto m$. Оно является *гладкой ретракцией*, т.е.

гладким отображением окрестности U_γ на траекторию γ, ограничение которого на γ тождественно. Обозначим через Θ_γ векторное расслоение над окрестностью U_γ со слоем $\theta_{\rho_\gamma(m'),m'}$ над любой точкой $m' \in U_\gamma$.

Пусть $U = \cup_{\gamma \subset \Lambda} U_\gamma$ — достаточно малая окрестность подмногообразия Λ в $H^{-1}(h)$. Фиксируем любую *гладкую ретракцию* $\rho : U \to \Lambda$, т.е. гладкое отображение, ограничение которого на Λ тождественно. (Эту ретракцию можно осуществить, например, при помощи ортогонального проектирования U на подмногообразие Λ в смысле какой-нибудь римановой метрики на $H^{-1}(h)$.)

Шаг 2. Перечислим важные свойства семейства подпространств $\theta_m \subset T_m\sigma_m$, $m \in \Lambda$, на подмногообразии Λ. В результате мы построим естественное действие окружности на этом семействе, являющееся "поднятием" действия окружности на многообразии Λ.

Определим четыре естественных векторных расслоения над многообразием Λ:

1. Векторное расслоение β над Λ, слоем которого в любой точке $m \in \Lambda$ является пространство T_mB_m, где $B_m = \Lambda \cap \sigma_m$.

2. Векторное расслоение Σ над Λ, слоем которого в любой точке $m \in \Lambda$ является пространство $T_m\sigma_m$.

3. Подрасслоение D расслоения Σ, слоем которого в любой точке $m \in \Lambda$ является подпространство $D_m \subset \sigma_m$, т.е. образ оператора $dA_m(m) - I$.

4. Векторное расслоение E над Λ, слоем которого в любой точке $m \in \Lambda$ является коядро оператора $dA(m) - I$, т.е. фактор-пространство
$$E_m = (T_m\sigma_m)/D_m, \quad m \in \Lambda,$$
касательного пространства $T_m\sigma_m$ по подпространству D_m. Другими словами, расслоение E является фактор-расслоением расслоения Σ по подрасслоению D образов операторов $dA_m(m) - I$, $m \in \Lambda$.

Замечание 10. В каждой точке $m \in \Lambda$ подпространство θ_m естественно изоморфно фактор-пространству E_m. Более точно, отображение включения $\theta_m \to T_m\sigma_m$ индуцирует изоморфизм $\theta_m \simeq E_m$. Следовательно, ранг расслоения $E \to \Lambda$ равен размерности подпространства θ_m, т.е. равен $\dim B = \dim \Lambda - 1$.

Рассмотрим на расслоении Σ следующие дополнительные структуры.

Пусть g_H^t, $t \in \mathbb{R}$, — фазовый поток гамильтоновой системы с гамильтонианом H на многообразии M. Этот поток индуцирует касательный поток

$(g_H^t)_*$, $t \in \mathbb{R}$, в касательном расслоении T_*M. Рассмотрим *касательный поток* в расслоении Σ, индуцированный естественным образом, и обозначим его также через $(g_H^t)_*$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на расслоении Σ естественное поле $\mathbf{A}$ *операторов монодромии* $\mathbf{A}_m = dA_m(m)$, $m \in \Lambda$. Ясно, что в любой точке $m \in \Lambda$ оператор монодромии совпадает с касательным отображением $(g_H^{T(m)})_*(m)$ "за период". Поле $\mathbf{A}$ мы также будем называть оператором монодромии (или отображением "за период") на расслоении Σ.

Рассмотрим на расслоении Σ поле $\omega^2|_\Sigma$ билинейных кососимметрических форм $\omega^2|_{T_m\sigma_m}$, т.е. в каждой точке $m \in \Lambda$ рассмотрим ограничение симплектической структуры ω^2 на пространство $T_m\sigma_m$. Хорошо известно, что эта форма невырождена и, тем самым, задаёт *симплектическую структуру* на слоях расслоения Σ.

Легко видеть, что симплектическая структура $\omega^2|_\Sigma$ *инвариантна* относительно оператора монодромии $\mathbf{A}$ на расслоении Σ и, более того, относительно касательного потока $(g_H^t)_*$ в Σ, индуцированного потоком гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

Лемма 7. *Подрасслоения D и β расслоения Σ обладают следующими свойствами:*

1. *Подрасслоения D и β косоортогональны в расслоении Σ относительно указанной симплектической структуры. Другими словами, в каждой точке $m \in \Lambda$ подпространства D_m и B_m являются косоортогональными дополнениями друг друга относительно симплектической структуры $\omega^2|_{T_m\sigma_m}$.*

2. *Подрасслоения D и β инвариантны относительно оператора монодромии $\mathbf{A}$ на Σ и, более того, относительно касательного потока $(g_H^t)_*$ в Σ, индуцированного потоком гамильтоновой системы с гамильтонианом H:*

$$\mathbf{A}D = D, \quad (g_H^t)_*D = D, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{A}\beta = \beta, \quad (g_H^t)_*\beta = \beta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Свойство 1 мы уже неоднократно упоминали. Оно вытекает из следующего свойства любого симплектического оператора $\mathbf{A}$: ядро и образ оператора $\mathbf{A} - I$ являются косоортогональными дополнениями друг друга, где I — тождественный оператор. Свойство 2 является очевидным следствием свойства 1.

Из второго и первого утверждений леммы 7 получаем два соответствующих следствия:

Следствие 8.

1° *Касательный поток $(g_H^t)_*$ на расслоении Σ индуцирует корректно определённый поток на расслоении E, причём отображение $\mathbf{A}_* : E \to E$ "за период" на расслоении E является тождественным:*

$$\mathbf{A}_* = Id_E.$$

Другими словами, действие окружности на Λ поднимается естественным образом на расслоение E — при помощи касательного потока $(g_H^t)_*$ гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

2° *В каждой точке $m \in \Lambda$ имеется невырожденное билинейное спаривание между пространствами E_m и β_m, определяемое формой ω^2. Это спаривание инвариантно относительно действия окружности на обоих расслоениях и индуцирует естественный изоморфизм расслоений $E \simeq \beta^*$.*

Замечание 11. Из свойства 1° получаем, что для любого векторного поля $\mathcal{V}$ на Λ, где $\mathcal{V}_m \in E_m$, $m \in \Lambda$ (т.е. сечения расслоения E), корректно определено *усреднение* $\bar{\mathcal{V}}$ этого поля. А именно, усреднение — это инвариантное поле такого же вида, определяемое формулой

$$\bar{\mathcal{V}}_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\hat{\mathbf{a}}_s)^{-1}\mathcal{V}_{\mathbf{a}_s(m)} ds, \quad m \in \Lambda. \tag{44}$$

Здесь $\mathbf{a}_s : \Lambda \to \Lambda$ — естественное действие окружности на Λ, $\hat{\mathbf{a}}_s : E_m \to E_{\mathbf{a}_s(m)}$ — естественное действие окружности на расслоении E ($s \in S^1$).

При помощи естественного изоморфизма поля подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, и расслоения E (см. замечание 10) перенесём на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, естественное действие окружности на расслоении E. Согласно следствию 8, это действие тоже обладает указанным в этом следствии свойством 2°. Кроме того, согласно замечанию 11, для векторных полей $\mathcal{V}_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$, определена операция усреднения (44).

Шаг 3. Сформулируем основную лемму, являющуюся обобщением результата работы Ботткола [14]. Она будет доказана на шагах 4–5.

Эта лемма относится к произвольным динамическим системам, не являющимся, вообще говоря, гамильтоновыми.

Фиксируем на многообразии Λ риманову метрику (или, по меньшей мере, аффинную связность, например, риманову).

Пусть $U \subset H^{-1}(h)$ — достаточно малая окрестность подмогообразия Λ в поверхности $H^{-1}(h)$.

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом $\tilde{H}$, близким к H в C^2–норме. Перенесём из области U в невозмущённой поверхности $H^{-1}(h)$ на "возмущённую" поверхность $\tilde{H}^{-1}(h)$ следующие объекты:

1. подмногообразие Λ вместе с римановой метрикой и действием окружности на нём;

2. поле сечений Пуанкаре σ_m, $m \in \Lambda$, вместе с семейством окрестностей $U_\gamma \supset \gamma$ и их гладких ретракций $\rho_\gamma : U_\gamma \to \gamma$ (см. шаг 1), переводящих любое сечение Пуанкаре σ_m в точку m, где $m \in \gamma$;

3. поле подпространств $\theta_m \subset T_m\sigma_m$, $m \in \Lambda$, вместе с построенным выше (см. шаг 2) действием на нём окружности;

4. поле операторов $P_{m,m'} : \theta_m \to T_{m'}\sigma_m$ вместе с их образами $\theta_{m,m'}$, где $m' \in U_\gamma$, $m = \rho_\gamma(m') \in \Lambda$ (см. шаг 1);

5. окрестность U вместе с гладкой ретракцией $\rho : U \to \Lambda$ (см. шаг 1).

Это перенесение можно осуществить, например, при помощи какого-нибудь диффеоморфизма $U \to \tilde{H}^{-1}(h)$, близкого к тождественному.

Соглашение. Чтобы не вводить новые обозначения, при перенесении всех указанных объектов на поверхность $\tilde{H}^{-1}(h)$ мы оставим для них те же обозначения, какие они имели на поверхности $H^{-1}(h)$.

Обозначим через V и $\tilde{V}$ векторные поля в окрестности $U \subset H^{-1}(h)$, отвечающие ограничениям систем с гамильтонианами H и $\tilde{H}$ на поверхности $H^{-1}(h)$ и $\tilde{H}^{-1}(h)$ соответственно (с учётом отождествления этих поверхностей, см. соглашение). Значения этих полей в точке m будем обозначать через V_m и $\tilde{V}_m$ соответственно.

Прежде чем сформулировать основную лемму, введём вспомогательное понятие.

Пусть на гладком многообразии Λ фиксирована риманова метрика (или, по меньшей мере, аффинная связность, например, риманова) и задано гладкое действие окружности. Для любой точки $m \in \Lambda$ рассмотрим её "параметризованную орбиту" при этом действии, т.е. гладкую кривую $\gamma_m = \gamma_m(s)$, $s \in S^1$, $\gamma_m(0) = m$. Пусть $\tilde{\gamma}(s)$, $s \in S^1$, — некоторая гладкая кривая, близкая (поточечно) к кривой $\gamma_m(s)$, $s \in S^1$. При каждом значении параметра $s \in S^1$ соединим соответствующие точки $\gamma_m(s)$ и $\tilde{\gamma}(s)$ этих кривых кратчайшей геодезической $g_s(t)$, $0 \le t \le 1$, где $g_s(0) = \gamma_m(s)$, $g_s(1) = \tilde{\gamma}(s)$. Пусть $\eta_s = \frac{d}{dt}|_{t=0} g_s(t)$ — поле векторов скорости этих кривых в точках кривой $\gamma_m(s)$. (Это поле однозначно определяется кривыми $\gamma_m(s)$ и $\tilde{\gamma}(s)$, $s \in S^1$.) Перенесём векторное поле η_s вдоль кривой $\gamma_m(s)$ в точку m (или в любую другую точку её орбиты $\gamma_m(s)$) при помощи действия окружности и "усредним" полученную кривую в пространстве $T_m\Lambda$. Другими словами, рассмотрим в точке m касательный вектор $\bar{\eta}_0 \in T_m\Lambda$, определяемый по формуле

$$\bar{\eta}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathbf{a}_s^{-1})_* \eta_s ds.$$

Здесь s — параметр на окружности $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $\mathbf{a}_s : \Lambda \to \Lambda$ — действие элемента s на Λ.

Определение 15. Инвариантное векторное поле $\bar{\eta}_s = \mathbf{a}_{s*}\eta_0$ вдоль кривой $\gamma_m(s)$ назовём *относительным центром масс* (или *относительным усреднением*) кривой $\tilde{\gamma}(s)$ по отношению к кривой $\gamma_m(s)$, $s \in S^1$. Если векторное поле $\bar{\eta}_s$ равно нулю, то кривую $\gamma_m(s)$ назовём *центром масс* (или *усреднением*) кривой $\tilde{\gamma}(s)$, $s \in S^1$.

Пусть $f : \Lambda \to \Lambda$ — любое гладкое отображение, близкое к тождественному. Будем говорить, что это отображение *сохраняет центры масс* траекторий на Λ, если любая кривая $\gamma_m(s)$ является центром масс соответствующей кривой вида $f(\gamma_m(s))$, $s \in S^1$.

На шагах 4–5 мы докажем следующую основную лемму.

Мы сформулируем основную лемму для произвольных динамических систем, не являющихся, вообще говоря, гамильтоновыми. Напомним, что определение *невырожденности* подмногообразия Λ, заполненного замкнутыми траекториями, в действительности не использовало гамильтоновости этой системы (точнее, гамильтоновости ограничения системы на изоэнергетическую поверхность). Кроме того, при построении поля подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, вместе с естественным действием на нём окружности, гамильтоновость системы также не использовалась.

Лемма 8. *Пусть $\Lambda \subset U$ — невырожденное подмногообразие, заполненное замкнутыми траекториями системы V, не содержащее положений равновесия. Пусть $T : \Lambda \to \mathbb{R}$ — соответствующая гладкая функция периода траекторий на Λ ($T > 0$). Пусть векторное поле $\tilde{V}$ в окрестности U C^{r-1}–близко к векторному полю V ($r \geq 2$). Обозначим $\varepsilon = \|\tilde{V} - V\|_{C^{r-1}}$. Тогда существует окрестность U' подмногообразия Λ в U, такая, что при любом достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $\tilde{T}$ на Λ, C^{r-1}–близкая к функции T, гладкое векторное поле $\xi_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$, на подмногообразии Λ и вложение $i : \Lambda \hookrightarrow U'$, C^{r-1}–близкое к тождественному, обладающие следующими свойствами:*

1° *Функция $\tilde{T}$ и векторное поле ξ_m, $m \in \Lambda$, инвариантны относительно естественного действия окружности на Λ и на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$ (см. шаг 2).*

2° *Для любой точки $m \in \Lambda$ имеет место равенство*

$$di(m)V_m = \frac{\tilde{T}(m)}{T(m)}(\tilde{V}_{i(m)} - P_{m',i(m)}\xi_{m'}),$$

где $m' = \rho_{\gamma_m} \circ i(m)$ *— "проекция" образа* $i(m)$ *точки* m *на траекторию* γ_m, $P_{m,m'} : \theta_m \to \theta_{m,m'}$ *— построенное в (43) семейство операторов (см. шаг 1).*

3° *Условиями* 1°, 2° *и следующим дополнительным условием вложение* i *и векторное поле* $\xi_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$, *определяются однозначно: для любой траектории* $\gamma \subset \Lambda$ *системы* V *кривая* $\gamma(\frac{T}{2\pi}s)$, $s \in S^1$, *совпадает с центром масс образа этой кривой при отображении* $\rho \circ i : \Lambda \to \Lambda$, *где* $\rho : U \to \Lambda$ *— гладкая ретракция (см. шаг 1). Другими словами, для однозначной определённости вложения* i *нужно дополнительно потребовать, чтобы отображение* $\rho \circ i$ *сохраняло центры масс всех замкнутых траекторий на* Λ.

4° *Подмногообразие* $i(\Lambda)$ *содержит все замкнутые траектории системы* $\tilde{V}$ *в* U'. *Эти траектории в точности совпадают с образами при вложении* i *особых окружностей поля* ξ, *т.е. окружностей* $\gamma \subset \Lambda$, *для которых* $\xi|_\gamma = 0$.

5° *Если возмущённый гамильтониан* $\tilde{H}$ *гладко зависит от малого параметра, то вложение* $i : \Lambda \hookrightarrow M$ *и поле* ξ *на* Λ *тоже гладко зависят от этого параметра.*

Следствие. *Вложение* i *и векторное поле* ξ *из леммы 8 обладают следующими дополнительными свойствами.*

6° *Пусть траектория* $\gamma \subset \Lambda$ *системы* V *состоит из особых точек поля* ξ*:* $\xi|_\gamma = 0$. *Тогда невырожденность замкнутой траектории* $i(\gamma)$ *системы* $\tilde{V}$ *равносильна невырожденности особой точки* $m \in \gamma$ *относительно поля* $\xi|_{\sigma_m \cap \Lambda}$. *Более того, для любой точки* $m \in \gamma$ *образ при касательном отображении* $di(m)|_{T_m(\sigma_m \cap \Lambda)}$ *ядра оператора* $\frac{\partial \xi_m}{\partial m}(m)|_{T_m(\sigma_m \cap \Lambda)}$ *в точности совпадает с ядром оператора* $d\tilde{A}(\tilde{m}) - I$, *где* $d\tilde{A}(\tilde{m}) : T_{\tilde{m}}\sigma_{\tilde{m}} \to T_{\tilde{m}}\sigma_{\tilde{m}}$ *— оператор монодромии в точке* $\tilde{m} = i(m)$, $i(\sigma_m \cap \Lambda) = \sigma_{\tilde{m}} \cap \tilde{\Lambda}$, I *— тождественный оператор.*

7° *Пусть* $\varepsilon\mathcal{V}_m$ *— проекция вектора возмущения* $(\tilde{V} - V)|_m$ *на подпространство* θ_m *вдоль подпространства* $D_m \oplus T_m\gamma_m$, $\varepsilon\mathcal{A}_m$ *— аналогичная проекция вектора смещения в точке* m *на подпространство* θ_m, $\bar{\mathcal{V}}$ *— усреднение (44) векторного поля* $\mathcal{V}$ *на* Λ. *Здесь под вектором смещения в точке* m *понимается касательный вектор* $\frac{\partial g_u}{\partial u}|_{u=0}$ *к кратчайшей геодезической* g_u, $0 \le u \le 1$, *соединяющей точки* $g_0 = m$ *и* $g_1 = \tilde{A}_m(m)$, *где* $\tilde{A}_m : \sigma_m \to \sigma_m$ *— возмущённое отображение Пуанкаре. Тогда векторное поле* $\frac{1}{\varepsilon}T(m)\xi_m \in \theta_m$ C^{r-2}*–близко к полю* $\mathcal{A}_m \in \theta_m$ *(возмущение отображения Пуанкаре), а также к полю* $\bar{\mathcal{V}}_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$ *(усреднённое возмущение).*

Ввиду свойства 2°, векторное поле ξ на Λ естественно назвать *ограничением возмущения* системы на Λ. Условие 1° инвариантности означает, что это ограниченное возмущение совпадает со своим “усреднением” $\bar{\xi}$.

Замечание. В некоторых случаях понятие “сохранение центра масс” можно понимать по-другому.

А именно, пусть на базе $B = \Lambda/S^1$ можно ввести симплектическую структуру. Например, это так, если невозмущённая система является гамильтоновой (точнее, ограничением на изоэнергетическую поверхность некоторой гамильтоновой системы), и подмногообразие Λ строго невырождено (см. определение 3). В этом случае векторное поле на Λ совпадает с полем ядер 2–формы $\omega^2|_\Lambda$ на Λ, см. замечание после определения 3.

Условие 3° леммы 8 (единственность) останется справедливо, если под отображением $\Lambda \to \Lambda$, сохраняющим центры масс, понимать любое отображение $f : \Lambda \to \Lambda$, гомотопное тождественному и *гомологичное тождественному* в следующем смысле. Для любой траектории $\gamma \subset \Lambda$ невозмущённой системы интеграл $\int_C \omega^2$ равен нулю, где $C = C(\gamma, f(\gamma))$ — двумерная трубка в Λ, ограниченная кривой γ и её образом $f(\gamma)$. (Считается, что трубка C получена из кривой γ при помощи фиксированной гомотопии между тождественным отображением и отображением f.) При таком понимании “сохранения центра масс” вложение i из леммы 8 будет определено однозначно с точностью до движений вдоль траекторий на Λ (т.е. с точностью до диффеоморфизмов $\Lambda \to \Lambda$, сохраняющих замкнутые траектории невозмущённой системы и саму эту систему). Для полной однозначности вложения i можно дополнительно потребовать, например, чтобы относительный центр масс $\bar{\eta}_s$ образа кривой $\gamma_m(s)$ при отображении $f = \rho \circ i$ относительно этой кривой (см. определение 15) был ортогонален вектору скорости к этой кривой (по отношению к какой-либо S^1–инвариантной римановой метрике на Λ).

Шаг 4. Для доказательства леммы 8 мы построим для обеих систем — исходной системы V и C^{r-1}–близкой к ней возмущённой системе $\tilde{V}$ — соответствующую “надстроенную” динамическую систему в каждом пространстве Θ_m, $m \in \Lambda$ (см. шаг 1).

Надстроенная система. Опишем операцию “надстройки” для любой динамической системы W, заданной в окрестности U_γ некоторой замкнутой траектории $\gamma = \gamma_m \subset \Lambda$. В результате мы получим динамическую систему, определённую в пространстве $\Theta = \Theta_\gamma = \cup_{m' \in U_\gamma} \theta_{\rho_\gamma(m'), m'}$, гладко зависящую от точки $m \in \Lambda$ и обладающую следующим свойством:

Нулевое сечение U_γ расслоения Θ_γ является инвариантным подмногообразием “надстроенной” динамической системы, и её ограничение на нулевое сечение U_γ расслоения Θ_γ совпадает с ограничением исходной динамической системой на U_γ, где $\gamma = \gamma_m$.

Фиксируем замкнутую траекторию $\gamma \subset \Lambda$ невозмущённой системы. Обозначим $T := T|_\gamma$; $U := U_\gamma$; $\theta_{m'} := \theta_{m,m'}$, $P_{m'} := P_{m,m'}$, где $m' \in U_\gamma$, $m = \rho_\gamma(m') \in \gamma$; $\Theta := \Theta_\gamma$ (см. шаг 1).

Пусть W — векторное поле на U, отвечающее данной динамической системе. Определим "надстроенную" динамическую систему на пространстве расслоения Θ следующим образом. Гладкую достаточно малую кривую $m(t) \in U$, $\xi(t) \in \theta_{m(t)}$, $|t| \le t_0$ $(0 < t_0 \ll 1)$ в пространстве этого расслоения назовём *решением надстроенной системы*, если существует векторное поле $\xi^\circ(t) \in \theta_{\rho_\gamma(m(t))}$ вдоль γ, такое, что:

1. Векторное поле $\xi^\circ(t)$ инвариантно относительно естественного действия окружности на поле плоскостей θ_m, $m \in \Lambda$ (см. шаг 2).

2. Вектор скорости $\frac{d}{dt}m(t)$ к "проекции" $m(t)$ этой кривой на U имеет вид

$$\frac{d}{dt}m(t) = W_{m(t)} - P_{m(t)}\xi^\circ(t).$$

Нетрудно видеть, что эти условия корректно определяют динамическую систему на пространстве расслоения Θ, причём эта система обладает указанным выше свойством: нулевое сечение $U = \{\xi = 0\}$ этого расслоения инвариантно относительно "надстроенной" динамической системы, и ограничение этой системы на нулевое сечение совпадает с исходной системой W на U.

Надстроенное отображение Пуанкаре. Пусть теперь векторное поле W в U близко к векторному полю V невозмущённой системы, и $F_m : \sigma_m \to \sigma_m$ — его отображение Пуанкаре, аналогичное отображению Пуанкаре A_m, $m \in \Lambda$.

Фиксируем точку $m_0 \in \gamma \subset \Lambda$, обозначим $\sigma := \sigma_{m_0}$. *Надстроенным сечением Пуанкаре* в точке m_0 назовём гиперповерхность $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$ в Θ, состоящую из "точек" (m, ξ) вида $m \in \sigma$, $\xi \in \theta_m$.

Из каждой "точки" (m, ξ) сечения $\boldsymbol{\sigma}$ выпустим интегральную траекторию $m(t)$, $\xi(t)$ "надстроенной" системы, $m(0) = m$, $\xi(0) = \xi$. Обозначим через $\tau(m, \xi) = \tau_{m_0}(m, \xi)$ момент времени, близкий к периоду $T = T|_\gamma$, в который эта траектория пересечёт сечение $\boldsymbol{\sigma}$, т.е. проекция $m(t)$ этой траектории на U пересечётся с секущей поверхностью σ. Рассмотрим отображение $\mathbf{F}$ поверхности $\boldsymbol{\sigma}$ в себя, переводящее "точку" (m, ξ) в значение выпущенной из неё траектории $(m(t), \xi(t))$ в момент времени $t = \tau(m, \xi)$. Полученное отображение $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{m_0}$ назовём *надстроенным отображением Пуанкаре* в точке $m_0 \in \Lambda$. Ясно, что нулевое сечение $U \cap \boldsymbol{\sigma} = \{(m, \xi) \in \boldsymbol{\sigma} \,|\, \xi = 0\}$ в $\boldsymbol{\sigma}$ инвариантно относительно отображения $\mathbf{F}$, и ограничение отображения

$\mathbf{F}$ на это нулевое сечение совпадает с обычным отображением Пуанкаре $F = F_{m_0} : \sigma \to \sigma$.

Надстроенный оператор монодромии. Обозначим через $\mathbf{A}_{m_0}$ и $\tilde{\mathbf{A}}_{m_0}$, $m_0 \in \Lambda$, надстроенные отображения Пуанкаре, отвечающие невозмущённой и возмущённой системам V и $\tilde{V}$. Эти отображения C^{r-1}–близки.

Отметим важное свойство *невозмущённого* надстроенного отображения Пуанкаре $\mathbf{A}_{m_0}$. Ясно, что любая точка $(m, 0)$ подмногообразия

$$B_{m_0} := \{(m, \xi) \in \boldsymbol{\sigma}_{m_0} \mid m \in \Lambda \cap \sigma_{m_0}, \xi = 0\}$$

в $\boldsymbol{\sigma}_{m_0}$ неподвижна при отображении $\mathbf{A}_{m_0}$. Линеаризацию $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$ отображения $\mathbf{A}_{m_0}$ в этой точке назовём *надстроенным оператором монодромии* в точке $(m, 0)$. Найдём явный вид оператора $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$.

Введём на $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$ локальные “координаты” вида (m, ξ) и выразим оператор монодромии $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$ через “вариации”

$$(\delta m, \delta\xi)$$

этих координат в точке $(m, 0)$. Более точно, рассмотрим естественное разложение касательного пространства $T_{(m,0)}\boldsymbol{\sigma}$ в точке $(m, 0)$ в прямую сумму

$$T_{(m,0)}\boldsymbol{\sigma} = T_m\sigma \oplus \theta_m$$

подпространств θ_m и $T_m\sigma$. (Это разложение однозначно определяется тем, что проекция любого касательного вектора в точке $(m, 0)$ на первое подпространство является его естественной проекцией на нулевое сечение σ расслоения $\boldsymbol{\sigma}$.) Для любого касательного вектора к $\boldsymbol{\sigma}$ в точке $(m, 0)$ обозначим через $(\delta m, \delta\xi)$ компоненты этого вектора при указанном разложении.

Лемма 9. *Пусть $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$ — надстроенный оператор монодромии в точке $(m, 0) \in B_{m_0}$, т.е. линеаризация невозмущённого надстроенного отображения Пуанкаре $\mathbf{A}_{m_0}$ в его неподвижной точке $(m, 0)$. Тогда любой касательный вектор $(\delta m, \delta\xi)$ в точке $(m, 0)$ переводится оператором $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$ в вектор вида*

$$(\delta m', \delta\xi') = (\delta m - T\delta\xi + d, \delta\xi),$$

где $d = d(\delta m, \delta\xi) \in \mathrm{Im}(dA_{m_0}(m) - I)$.

Следствие 9. *Любой касательный вектор, неподвижный относительно надстроенного оператора монодромии $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0)$, касателен к нулевому сечению $\sigma_{m_0} = U \cap \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$ в $\boldsymbol{\sigma}_{m_0}$. Другими словами, в любой точке $m \in$*

σ_{m_0} множества неподвижных векторов оператора монодромии $dA_{m_0}(m)$ и надстроенного оператора монодромии $d\mathbf{A}_{m_0}(m,0)$ совпадают, $m_0 \in \Lambda$.

Следствие 10. *Пусть $d\mathbf{A}_{m_0}(m,0)$ — надстроенный оператор монодромии в точке $(m,0) \in \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$, I — тождественный оператор в касательном пространстве в точке $(m,0)$ к надстроенному сечению Пуанкаре $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда образ оператора $d\mathbf{A}_{m_0}(m,0) - I$ совпадает с касательным пространством к нулевому сечению σ_{m_0} в $\boldsymbol{\sigma}_{m_0}$.*

Доказательство. Пусть $\xi^* \in T_{(m,0)}\Theta$ — любой линейный функционал в точке $(m,0)$, ограничение которого на сумму подпространства

$$D_m = \operatorname{Im}(dA_{m_0}(m) - I)$$

и касательного пространства к траектории γ_m равно нулю. Для доказательства леммы 9 нам достаточно показать, что

$$\xi^*\delta m' = \xi^*(\delta m - T\delta\xi). \tag{45}$$

Выпустим из точки $(m,0)$ фазовую траекторию $(m(t),\xi(t))$, $0 \le t \le T$, надстроенной системы. Она имеет вид $m(t) = \gamma_m(t)$, $\xi(t) \equiv 0$. Перенесём касательный вектор $(\delta m, \delta\xi)$ вдоль этой траектории при помощи касательного потока, отвечающего надстроенной динамической системе, обозначим полученное поле векторов через $(\delta m(t), \delta\xi(t))$, $0 \le t \le T$. Так как оператор монодромии совпадает с отображением "за период" этой системы (точнее, с композицией этого отображения и проекции на $T_{(m,0)}\boldsymbol{\sigma}$ вдоль касательного пространства $T_{(m,0)}\gamma_m$ к траектории), то $\xi^*(\delta m') = \xi^*(\delta m(T))$.

Перенесём функционал ξ^* в касательные пространства к другим точкам траектории γ_m при помощи кокасательного потока $((g_H^t)^{-1})^*$, отвечающего системе V. Обозначим полученное поле функционалов через $\xi^*(t) = (g_H^{-t})^*\xi^*$, $0 \le t \le T$. Тогда из определения надстроенной системы получаем:

$$\frac{d}{dt}(\xi^*(t)\delta m(t)) = -\xi^*(t)\delta\xi(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Ясно, что $\xi^*(t)\delta\xi(t) \equiv \xi^*\delta\xi$ (так как по построению надстроенной системы вектор $\delta\xi(t)$ совпадает с вектором $(g_H^t)^*\delta\xi$ с точностью до некоторого элемента подпространства $D_{m(t)} = \operatorname{Im}(dA_{m(t)}(m(t)) - I)$). Следовательно,

$$\xi^*(T)\delta m(T) = \xi^*\delta m - T\xi^*\delta\xi.$$

Ясно также, что при отображении "за период" функционал ξ^* не изменится (так как он перейдёт в функционал $\xi^*(T) = (dA^{-1})^*\xi^* = \xi^* + (dA^{-1})^*(I -$

$dA)^*\xi^* = \xi^*$, где $dA = dA_{m_0}(m)$). Отсюда получаем требуемое равенство (45).

Лемма 9 доказана.

Для доказательства следствия 9 заметим, что подпространства θ_m и $\mathrm{Im}(dA_{m_0}(m) - I)$ в σ пересекаются лишь по нулевому вектору. Следовательно, так как $\delta\xi \in \theta_m$, то равенство нулю вектора вида $-T\delta\xi + d$, где $d \in \mathrm{Im}(dA_{m_0}(m) - I)$, $T > 0$, влечёт равенство нулю вектора $\delta\xi$. Это доказывает следствие 9.

Докажем следствие 10. В силу следствия 9 и условия невырожденности Λ, ядро оператора $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0) - I$ имеет размерность $\dim B_{m_0} = \dim \theta_m$. Следовательно, размерность подпространства $\mathrm{Im}(d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0) - I)$ равна $\mathrm{codim}_{\boldsymbol{\sigma}_{m_0}} \theta_m = \dim \sigma_{m_0}$. С другой стороны, так как любой вектор $(\delta m, \delta\xi)$ переходит при операторе монодромии в вектор вида $(*, \delta\xi)$, то образ оператора $d\mathbf{A}_{m_0}(m, 0) - I$ лежит в подпространстве $T_{(m,0)}\sigma_{m_0}$. Из соображения размерностей, отсюда получаем, что этот образ в точности совпадает с $T_{(m,0)}\sigma_{m_0}$. Это доказывает следствие 10.

Обозначим через Λ_γ образ подмногообразия $\Lambda \cap U_\gamma$ при естественном вложении в нулевое сечение Θ_γ.

Замечание 12. Из следствия 9, в частности, следует, что подмногообразие Λ_γ является *невырожденным* подмногообразием, заполненным замкнутыми траекториями *надстроенной системы*, отвечающей системе V. (Строго говоря, надстроенная система, к которой мы применяем здесь термин невырожденности, не является, вообще говоря, ограничением гамильтоновой системы на изоэнергетическую поверхность, в отличие от определения 1. Тем не менее, как уже отмечалось выше, это определение очевидным образом обобщается на случай произвольных динамических систем.) При этом, в силу следствия 10, семейство подпространств $T_{(m,0)}\theta_m$, $m \in \Lambda_\gamma$, в фазовом пространстве надстроенной системы может служить полным аналогом семейства подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, в фазовом пространстве системы V.

Шаг 5. Определим возмущённое подмножество $\tilde{B}_{m_0}$ в надстроенном сечении Пуанкаре $\boldsymbol{\sigma}_{m_0}$ как множество всех "точек" $(m, \xi) \in \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$, образ каждой из которых при надстроенном отображении Пуанкаре $\tilde{\mathbf{A}}_{m_0}$ имеет вид $(m, *)$, где $*$ — некоторый вектор из подпространства $\theta_{m_0,m}$:

$$\tilde{B}_{m_0} = \{(m, \xi) \in \boldsymbol{\sigma}_{m_0} \mid \tilde{\mathbf{A}}_{m_0}(m, \xi) = (m, *)\}.$$

Обозначим

$$\tilde{\Lambda}_\gamma = \cup_{m_0 \in \gamma} \tilde{B}_{m_0}.$$

Это множество лежит в $\Theta_\gamma = \cup_{m_0 \in \gamma} \boldsymbol{\sigma}_{m_0}$. Отметим замечательное свойство множества $\tilde{\Lambda}_\gamma$:

Множество $\tilde{\Lambda}_\gamma$ совпадает с объединением всех замкнутых траекторий возмущённой надстроенной системы в Θ_γ.

В самом деле, нам достаточно показать, что множество $\tilde{B}_{m_0}$ в точности совпадает с множеством неподвижных точек надстроенного отображения Пуанкаре $\tilde{\mathbf{A}}_{m_0}$. Но это легко следует из определения множества $\tilde{B}_{m_0}$, так как, согласно определению надстроенной системы, надстроенное отображение Пуанкаре переводит любую "точку" $(m, P_{m_0,m}\xi)$ в точку вида $(*, P_{m_0,*}\xi)$.

Таким образом (см. замечание 12), для невозмущённой системы множество $\tilde{\Lambda}_\gamma$ совпадает с Λ_γ и, значит, является гладким подмногообразием. Из теоремы о неявных функциях, с учётом следствия 10, следует, что при достаточно малом возмущении множество $\tilde{\Lambda}_\gamma$ тоже является гладким подмногообразием и имеет вид $\tilde{\Lambda}_\gamma = j_\gamma(\Lambda_\gamma)$, где вложение $j_\gamma : \Lambda_\gamma \to \Theta_\gamma$ C^{r-1}–близко к тождественному. Для определённости определим вложение j_γ однозначно условием $\rho \circ j_\gamma = Id_{\Lambda_\gamma}$, где $\rho : U \to \Lambda$ — гладкая ретракция (см. шаг 1).

Далее мы будем рассматривать $\tilde{\Lambda}_\gamma \subset \Theta_\gamma$ как подмногообразие в U_γ.

Фиксируем любую шаровую окрестность Λ_{m_0} точки m_0 в Λ_γ. Из любой точки $j_\gamma(m)$, где $m \in \Lambda_{m_0}$, выпустим траекторию $\tilde{\gamma}_{\gamma,m} = \tilde{\gamma}_{\gamma,m}(t) \subset \tilde{\Lambda}_\gamma$ возмущённой надстроенной системы. Обозначим через $\tilde{T}_\gamma(m)$ момент времени t, близкий к $T = T|_\gamma$, в который эта траектория вернется в точку $j_\gamma(m)$.

Для построения искомого вложения i нам нужно выбрать среди всех траекторий $\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(t)$, $m \in \Lambda_{m_0}$, такую траекторию, которую мы сопоставим исходной траектории γ при отображении i. Спроектируем подмногообразие $\tilde{\Lambda}_\gamma$ на Λ при помощи ретракции $\rho : U \to \Lambda$. В результате мы получим траектории на подмногообразии Λ вида

$$\rho(\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(t)), \quad 0 \le t \le \tilde{T}_\gamma(m),$$

при этом $\rho(\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(0)) = m$, $m \in \Lambda_{m_0}$.

Ясно, что каждая траектория $\tilde{\gamma}_m := \rho(\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(\frac{\tilde{T}_\gamma(m)}{2\pi}s))$ C^{r-1}–близка к соответствующей невозмущённой траектории $\gamma_m := \gamma_m(\frac{T(m)}{2\pi}s)$, $s \in S^1$. Рассмотрим относительный центр масс $\bar{\eta} = \bar{\eta}_{m_0,m,s}$, $s \in S^1$ (т.е. относительное усреднение) траектории $\tilde{\gamma}_m$ по отношению к траектории γ_{m_0}, см. определение 15. Напомним, что относительное усреднение $\bar{\eta}$ является инвариантным векторным полем вдоль траектории γ_{m_0}. Покажем, что существует и единственна точка $m \in \Lambda_{m_0}$, для которой это относительное усреднение равно нулю. (Образ этой точки при отображении j_γ мы и обозначим через $i(m_0)$.)

В самом деле, рассмотрим отображение $\Lambda_{m_0} \to T_{m_0}\Lambda$, переводящее точку $m \in \Lambda_{m_0}$ в относительное усреднение соответствующей кривой, т.е.

в вектор $\bar{\eta}_{m_0,m,0} \in T_{m_0}\Lambda$. Легко видеть, что при невозмущённом отображении (т.е. отвечающем невозмущённой системе V) точка m_0 переходит в 0, и дифференциал невозмущённого отображения в точке m_0 является *тождественным оператором* в $T_{m_0}\Lambda$. Ясно, что возмущённое отображение C^{r-1}–близко к невозмущённому (так как возмущённая надстроенная система C^{r-1}–близка к невозмущённой надстроенной системе, то же верно для вложения j_γ, а значит, и для траекторий $\tilde{\gamma}_m$). Следовательно, по теореме о неявной функции, существует ровно одна точка $m = m(m_0) \in \Lambda_{m_0}$, которая при возмущённом отображении переходит в 0. Положим $i(m_0) = j_\gamma(m)$, $\tilde{T}(m_0) = \tau_{m_0}(j_\gamma(m))$.

Аналогичное построение проведём для всех точек m_0' траектории γ, а затем и для всех траекторий $\gamma' \subset \Lambda$. В итоге мы получим некоторое отображение $i : \Lambda \to U$ и функцию $\tilde{T} : \Lambda \to \mathbb{R}$.

Покажем, что любая точка $m_0' = \gamma_{m_0}(\frac{T(m_0)}{2\pi}s') \in \gamma$ при отображении i переходит в соответствующую точку $m' = \tilde{\gamma}_{\gamma,m}(\frac{\tilde{T}(m_0)}{2\pi}s')$ траектории надстроенной возмущённой системы, выходящей из точки $m = i(m_0)$. Другими словами, нужно показать, что для любого элемента $s' \in S^1$ траектория $\gamma_{m_0}(\frac{T(m_0)}{2\pi}(s+s'))$ является центром масс траектории $\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(\frac{\tilde{T}(m_0)}{2\pi}(s+s'))$, $s \in S^1$. Это следует из следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть на многообразии Λ задано гладкое действие окружности, и кривая $\gamma_m(s)$, $s \in S^1$, — орбита точки $m \in \Lambda$ при этом действии. Пусть кривая $\gamma_m(s)$ является центром масс некоторой кривой $\tilde{\gamma}(s)$ на Λ, $s \in S^1$. Тогда для любого элемента $s' \in S^1$ кривая $\gamma_m(s+s')$ является центром масс кривой $\tilde{\gamma}(s+s')$, $s \in S^1$. Другими словами, взятие центра масс коммутирует с естественным действием окружности на пространстве параметризованных замкнутых кривых.*

Доказательство. Нужно показать, что центр масс кривой $\tilde{\gamma}(s+s')$, $s \in S^1$, относительно кривой $\gamma_m(s+s')$, $s \in S^1$, равен нулю. Обозначим через $\mathbf{a}_s : \Lambda \to \Lambda$ действие элемента $s \in S^1$ на многообразии Λ. Тогда касательный вектор в точке $\gamma_m(s')$, аналогичный вектору $\bar{\eta}_0$ в точке $\gamma_m(0)$, имеет вид

$$\bar{\eta}_0(s') = \int_0^{2\pi} (\mathbf{a}_s^{-1})_* \eta_{s+s'} ds = \int_0^{2\pi} (\mathbf{a}_{s'})_* (\mathbf{a}_{s+s'}^{-1})_* \eta_{s+s'} ds = (\mathbf{a}_{s'})_* \bar{\eta}_0.$$

По определению 15 центра масс вектор $\bar{\eta}_0$ равен нулю, поэтому вектор $\bar{\eta}_0(s')$, тоже равен нулю. Это доказывает лемму 10.

Таким образом, построенное отображение $i : \Lambda \to U$ удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, а также условию 5° леммы 8.

Докажем свойство 4°. Пусть $\tilde{\gamma}_m$ — замкнутая траектория возмущённой системы, $\gamma = \gamma_{m_0}$ — центр масс траектории $\rho(\tilde{\gamma}_m)$ на Λ. Ясно, что $\tilde{\gamma}_m \subset \Lambda_\gamma$. Легко видеть, что $i(m_0) = m$ и $i(\gamma_{m_0}) = \tilde{\gamma}_m$. Это доказывает свойство 4°.

Осталось показать, что отображение $i : \Lambda \to U$ является гладким и C^{r-1}–близко к тождественному (отсюда автоматически будет следовать, что оно является вложением). Это следует из теоремы о неявных функциях с учётом следующих фактов:

1. надстроенная система на $U_{\gamma_{m_0}}$ гладко зависит от "параметра" $m_0 \in \Lambda$;
2. для невозмущённой системы вложение i тождественно;
3. семейство возмущённых надстроенных систем C^{r-1}–близко к семейству невозмущённых надстроенных систем (по переменным $m_0 \in \Lambda$ и $m \in U_{\gamma_{m_0}}$).

Действительно, отображение $\rho \circ i : \Lambda \to \Lambda$, $m_0 \mapsto m(m_0)$, задаётся соотношением "относительный центр масс траектории $\rho(\tilde{\gamma}_{\gamma,m}(\frac{\tilde{T}(m)}{2\pi}s))$ по отношению к траектории $\gamma_{m_0}(\frac{T(m_0)}{2\pi}s)$ равен нулю ($s \in S^1$)". Для возмущённой системы это соотношение C^{r-1}–близко к аналогичному соотношению для невозмущённой системы. Для невозмущённой системы это соотношение задаёт тождественное отображение, причём якобиан из теоремы о неявных функциях всюду отличен от нуля. Следовательно, по теореме о неявных функциях, с учётом компактности Λ, отображение $\rho \circ i$ C^{r-1}–близко к тождественному. Так как отображение $j : \Lambda \to \tilde{\Lambda}$ тоже C^{r-1}–близко к тождественному, то и отображение $i = j \circ (\rho \circ i) : \Lambda \to \tilde{\Lambda}$ C^{r-1}–близко к тождественному.

Лемма 8 полностью доказана.

Доказательство следствия леммы 8. Ясно, что векторное поле $\bar{\mathcal{V}}_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$ (усреднённое возмущение) близко к полю $\mathcal{A}_m \in \theta_m$ (возмущение отображения Пуанкаре). Для доказательства свойства 7° заметим, что возмущение $\mathcal{A}$ отображения Пуанкаре мало меняется при C^{r-1}–близких к тождественным деформациях подмногообразия Λ в U, поскольку это верно для невозмущённой системы. Следовательно, усреднённое возмущение на подмногообразии Λ близко к усреднённому возмущению на его деформации $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$. Но последнее в точности равно векторному полю $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{T}\xi$ в силу его инвариантности (свойство 2°).

Докажем свойство 6° о невырожденных замкнутых траекториях. Рассмотрим любую точку $m_0 \in \Lambda$, в которой $\xi_{m_0} = 0$. В силу инвариантности поля ξ имеем $\xi|_\gamma = 0$, где $\gamma = \gamma_{m_0} \subset \Lambda$ — (невозмущённая) траектория, выпущенная из точки m_0. Отсюда следует, что $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$ — замкнутая траектория возмущённой системы. Пусть $\tilde{T} = \tilde{T}(m_0)$ — период этой траектории. Нам нужно найти соответствующий оператор монодромии в точке $i(m_0)$.

1. Обозначим через $g^t_{\tilde{V}}$ поток возмущённой системы. Обозначим через $dg^t_{\tilde{V}}$ соответствующий касательный поток вдоль траектории $\tilde{\gamma}$.

Проведём через точку $i(m_0)$ маленькую трансверсаль σ к траектории $\tilde{\gamma}$ в U. Удобно при этом считать, что $\sigma \cap i(\Lambda) = i(\sigma_{m_0} \cap \Lambda)$. Обозначим через $d\tilde{A}(i(m_0))$ оператор монодромии в точке $i(m_0)$, действующий в пространстве $T_{i(m_0)}\sigma$. Этот оператор равен композиции оператора $dg_{\tilde{V}}^{\tilde{T}}$ и проекции на пространство $T_{i(m_0)}\sigma$ вдоль вектора $\tilde{V}$.

2. Фиксируем любой вектор $\delta\xi \in \theta_{m_0}$ и перенесём его в остальные точки m траектории γ при помощи естественного действия окружности на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$. Перенесём полученные векторы в точки кривой $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$ при помощи операторов $P_{m',i(m)} : \theta_{m'} \to \theta_{m',i(m)}$, $m \in \gamma$, где $m' = m'(m) = \rho_\gamma \circ i(m)$. В итоге мы получим в каждой точке $\tilde{\gamma}(t) = i(m)$ траектории $\tilde{\gamma}$ некоторый вектор $\delta\xi_t \in \theta_{m',i(m)}$, $0 \le t \le \tilde{T} = \tilde{T}(m)$, где $\delta\xi_0 = \delta\xi_{\tilde{T}}$.

Рассмотрим вспомогательный линейный оператор

$$\tilde{L}_{m_0} : \theta_{m_0} \to T_{i(m_0)}\sigma,$$

переводящий вектор $\delta\xi$ в проекцию вектора

$$\delta\xi' = \int_0^{\tilde{T}} dg_{\tilde{V}}^{\tilde{T}-t} \delta\xi_t \, dt$$

на пространство $T_{i(m_0)}\sigma$ вдоль вектора $\tilde{V}_{i(m)}$. Образ оператора $\tilde{L}_{m_0}$ в $T_{i(m_0)}\sigma$ мы обозначим через $\tilde{\theta}_{i(m_0)}$.

Обозначим через $D_{i(m_0)}$ какое-нибудь подпространство в $T_{i(m_0)}\sigma$, близкое к подпространству $D_{m_0} = \mathrm{Im}(dA_{m_0}(m_0) - I)$.

Покажем, что подпространство $\tilde{\theta}_{i(m_0)}$ имеет ту же размерность, что и подпространство $\theta_{m,i(m_0)}$, и тоже трансверсально к подпространству $D_{i(m_0)}$. Другими словами, оператор $\tilde{L}_{m_0}$ является изоморфизмом подпространств θ_{m_0} и $\tilde{\theta}_{i(m_0)}$, причём имеет место разложение $T_{i(m_0)}\sigma = \tilde{\theta}_{i(m_0)} \oplus D_{i(m_0)}$. В самом деле, для невозмущённой системы имеем:

$$L_{m_0}\xi = T\xi + d(\xi), \quad \text{где} \quad d(\xi) \in \mathrm{Im}(dA_{m_0}(m_0) - I). \tag{46}$$

Значит, при достаточно малом возмущении трансверсальность образа оператора $\tilde{L}_{m_0}$ к подпространству $D_{i(m_0)}$ сохраняется.

3. Мы утверждаем, что на любом векторе $\tilde{\eta} \in T_{i(m_0)}(\tilde{\Lambda} \cap \sigma)$ оператор монодромии действует по формуле

$$d\tilde{A}(i(m_0))\tilde{\eta} = \tilde{\eta} + \tilde{L}_{m_0} \circ \frac{\partial \xi_m}{\partial m}(m_0) \circ (di(m_0))^{-1}\tilde{\eta}. \tag{47}$$

В самом деле, пусть $\tilde{\eta} = di(m_0)\eta$, где $\eta \in T_{m_0}\Lambda$. Обозначим $m_t = \gamma_{m_0}(\frac{T}{\tilde{T}}t) \in \Lambda$, $\eta_t = dg_V^{\frac{T}{\tilde{T}}t}(m_0)\eta$ — вектор из пространства $T_{m_t}\Lambda$, $0 \le t \le \tilde{T}$.

Дифференцируя равенство из свойства 2° на особой кривой $\tilde{\gamma} = i(\gamma)$, получаем, что семейство векторов

$$\tilde{\eta}_t = dg_{\tilde{V}}^{\tilde{T}-t} \circ di(m_t)\eta_t, \quad 0 \le t \le \tilde{T},$$

в точке $i(m_0)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\eta}_t = -dg_{\tilde{V}}^{\tilde{T}-t}\delta\xi_t, \quad 0 \le t \le \tilde{T}. \tag{48}$$

Здесь $\delta\xi_t = \delta\xi_t(\eta)$ — инвариантное векторное поле вдоль кривой $\tilde{\gamma}$, отвечающее вектору $\delta\xi = \delta\xi(\eta) = \frac{\partial\xi_m}{\partial m}(m_0)\eta \in \theta_{m_0}$ (см. п. 2).

Найдём разность векторов $\tilde{\eta}_0 = dg_{\tilde{V}}^{\tilde{T}} \circ di(m_0)\eta$ и $\tilde{\eta}_{\tilde{T}} = di(m_0)\eta_{\tilde{T}}$. С одной стороны, разность векторов $\eta_{\tilde{T}}$ и η_0 пропорциональна вектору V_{m_0}. Поэтому разность $\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_{\tilde{T}}$ равна

$$d\tilde{A}(i(m_0))\tilde{\eta} - \tilde{\eta}$$

с точностью до вектора, пропорционального вектору $\tilde{V}_{i(m_0)}$. С другой стороны, из уравнения (48) находим, что проекция этой разности на подпространство $T_{i(m_0)}\sigma$ вдоль вектора $\tilde{V}_{i(m_0)}$ равна

$$\tilde{L}_{m_0}\delta\xi(\eta) = \tilde{L}_{m_0} \circ \frac{\partial\xi_m}{\partial m}(m_0) \circ (di(m_0))^{-1}\tilde{\eta}.$$

Это доказывает равенство (47) для любого вектора $\tilde{\eta} \in T_{i(m_0)}(\tilde{\Lambda} \cap \sigma)$.

4. Таким образом, в силу (47) образ при отображении $di(m_0)$ ядра оператора $\frac{\partial}{\partial m}\xi_m|_{\sigma_{m_0}\cap\Lambda}(m_0)$ в точности совпадает с ядром оператора

$$B : T_{i(m_0)}(\tilde{\Lambda} \cap \sigma) \to \tilde{\theta}_{i(m_0)}, \quad B\tilde{\eta} = d\tilde{A}(i(m_0))\tilde{\eta} - \tilde{\eta}.$$

В частности, для любой особой точки m_0 векторного поля $\xi|_{\sigma_{m_0}\cap\Lambda}$ невырожденность этой точки означает, что оператор B является изоморфизмом.

Осталось показать, что ядро оператора B совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(i(m_0)) - I$. Это следует из того, что в силу (47) оператор

$$(d\tilde{A}(i(m_0)) - I) : T_{i(m_0)}\sigma = (T_{i(m_0)}(\tilde{\Lambda} \cap \sigma)) \oplus N_{i(m_0)} \to T_{i(m_0)}\sigma = \tilde{\theta}_{i(m_0)} \oplus D_{i(m_0)}$$

задаётся блочной матрицей вида $\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где матрица C невырождена в силу условия невырожденности Λ. Здесь $N_{i(m_0)}$ — трансверсаль к $T_{i(m_0)}(\sigma \cap \tilde{\Lambda})$ в $T_{i(m_0)}\sigma$, близкая к трансверсали к $T_{m_0}(\sigma_{m_0} \cap \Lambda)$ в $T_{m_0}\sigma_{m_0}$.

Таким образом, в особой точке m_0 поля ξ образ при касательном отображении $di(m_0)$ ядра оператора линеаризации поля $\xi|_{\sigma_{m_0}\cap\Lambda}$ в точке m_0 в точности совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}(i(m_0)) - I$.

В частности, особая точка m_0 является невырожденной для поля $\xi|_{\sigma_{m_0}\cap\Lambda}$ в том и только том случае, когда образ замкнутой траектории γ_{m_0} при отображении i является невырожденной замкнутой траекторией возмущённой системы.

Это доказывает свойство 6°, а тем самым, и всё следствие из леммы 8.

Вернёмся к доказательству утверждения 3 о замкнутых траекториях гамильтоновых систем.

Шаг 6. Здесь мы построим функцию ψ на Λ, постоянную на замкнутых траекториях невозмущённой системы с гамильтонианом H, т.е. инвариантную относительно действия окружности на Λ.

Пусть $i : \Lambda \to \tilde{H}^{-1}(h)$ — вложение, удовлетворяющее условиям леммы 8.

Функция ψ будет определена с точностью до константы, и разность её значений в любых двух точках m_0, $m_1 \in \Lambda$ определим следующим образом. Соединим точки m_0 и m_1 какой-нибудь кусочно-гладкой кривой $m_v \in \Lambda$, $0 \le v \le 1$, и рассмотрим 2–цепь $C(m_*)$ в Λ с координатами v, s, образованную траекториями $\gamma_{m_v}(\frac{T(m_v)}{2\pi}s)$, $0 \le s \le 2\pi$, выпущенными из точек этой кривой ($0 \le v \le 1$). (Эта цепь не является, вообще говоря, вложенной в Λ, т.е. разным значениям параметров v, s на $C(m_*)$ может отвечать одна и та же точка на Λ.) Положим

$$\psi(m_1) - \psi(m_0) = \iint_{i(C(m_*))} \omega^2.$$

Докажем корректность этого определения, т.е. что разность $\psi(m_1) - \psi(m_0)$ не зависит от выбора пути, соединяющего точки m_0 и m_1. Это эквивалентно тому, что для любого замкнутого пути m_v, $0 \le v \le 1$, интеграл формы ω^2 по образу соответствующего 2–цикла $C(m_*)$ при вложении i равен нулю. Но отображение i не меняет класс когомологий циклов на Λ, так как оно близко к тождественному. Следовательно, в силу замкнутости формы ω^2,

$$\iint_{i(C(m_*))} \omega^2 = \iint_{C(m_*)} \omega^2.$$

Так как цикл $C(m_*)$ целиком лежит на изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h)$ и образован траекториями системы с гамильтонианом H, то, в силу принципа наименьшего действия Гамильтона, последний интеграл равен нулю. Это доказывает корректность определения функции ψ на Λ.

По построению, функция ψ инвариантна относительно действия окружности на Λ.

Для определённости будем считать, что эта функция обращается в ноль в некоторой фиксированной точке $m_0 \in \Lambda$. Так как при $\varepsilon = 0$ функция

ψ тождественно равна нулю, мы будем обозначать построенную функцию через $\psi = \varepsilon S$.

Шаг 7. Найдём явный вид дифференциала функции ψ.

Пусть $Q = Q_m(\xi, \eta)$, $\xi \in \theta_m$, $\eta \in T_m\Lambda$, $m \in \Lambda$, — любое поле билинейных форм на подмногообразии Λ. Определим *усреднение* $\bar{Q} = \bar{Q}_m(\xi, \eta)$ этого поля. Это — инвариантная билинейная форма такого же вида, определяемая по формуле

$$\bar{Q}_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{\mathbf{a}_s(m)}(\hat{\mathbf{a}}_s\xi, (\mathbf{a}_s)_*\eta)ds, \quad m \in \Lambda.$$

Здесь $\mathbf{a}_s : \Lambda \to \Lambda$, $\mathbf{a}_s(m) = \gamma_m(\frac{T(m)}{2\pi}s)$, — естественное действие окружности на подмногообразии Λ, $\hat{\mathbf{a}}_s : \theta_m \to \theta_{\mathbf{a}_s(m)}$ — естественное действие окружности на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$. Ясно, что форма Q инвариантна относительно естественного действия окружности на полях θ_m и $T_m\Lambda$, $m \in \Lambda$.

Рассмотрим на Λ поле билинейных форм $\tilde{Q} = \tilde{Q}_m(\xi, \eta)$, $\xi \in \theta_m$, $\eta \in T_m\Lambda$, $m \in \Lambda$, полагая

$$\tilde{Q}_m(\xi, \eta) = \omega^2(P_{m', i(m)}\xi_{m'}, di(m)\eta),$$

где $m' = \rho_{\gamma_m} \circ i(m)$, $\xi_{m'} \in \theta_{m'}$ — вектор, получающийся из вектора $\xi \in \theta_m$ перенесением в точку $m' \in \gamma_m$, близкую к точке m, при помощи естественного действия окружности на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$. Пусть $\bar{\tilde{Q}}$ — поле билинейных форм, являющееся усреднением (см. выше) поля $\tilde{Q}$.

Покажем, что дифференциал функции ψ в любой точке $m \in \Lambda$ имеет вид

$$d\psi(m)\eta = \tilde{T}(m)\bar{\tilde{Q}}_m(\xi_m, \eta), \quad m \in \Lambda, \eta \in T_m\Lambda, \tag{49}$$

где $\tilde{T}$ и $\xi_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$, — функция на Λ и векторное поле из леммы 8. Отметим, что отсюда будет следовать, что в любой особой точке $m \in \Lambda$ поля ξ квадратичная часть функции ψ равна

$$d^2\psi(m)\eta_1\eta = \tilde{T}(m)\bar{\tilde{Q}}_m(\frac{\partial \xi_m}{\partial m}\eta_1, \eta), \quad \eta \in T_m\Lambda. \tag{50}$$

В самом деле, дифференциал функции ψ в точке $m \in \Lambda$ имеет вид

$$d\psi(m)\eta = \int_0^{2\pi}(di(m)^*\omega^2)((\mathbf{a}_s)_*\eta, \frac{T(m)}{2\pi}V_{\mathbf{a}_s(m)})ds.$$

По свойству 2° вложения i (см. лемму 8) имеем $di(m)V_m = \frac{\tilde{T}(m)}{T(m)}(\tilde{V}_{i(m)} - P_{m', i(m)}\xi_{m'})$. Но векторное поле $\tilde{V}$ кососортогонально всем векторам, касательным к поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ и, в частности, вектору $di(m)(\mathbf{a}_s)_*\eta$. Кроме того, $\xi_{\mathbf{a}_s(m)} = \hat{\mathbf{a}}_s \xi_m$ по свойству инвариантности 1° векторного поля ξ (см. лемму 8). Отсюда следует формула (49) дифференциала функции ψ.

Замечание. Для невозмущённой системы, т.е. в случае $i = Id_\Lambda$, билинейная форма Q, определённая выше, имеет вид

$$Q_m(\xi, \eta) = \omega^2(\xi, \eta), \quad m \in \Lambda, \xi \in \theta_m, \eta \in T_m\Lambda,$$

т.е. совпадает со спариванием при помощи симплектической структуры. Согласно следствию 8, см. шаг 2, спаривание Q инвариантно относительно естественного действия окружности на полях подпространств θ_m и $T_m\Lambda$, $m \in \Lambda$. Поэтому усреднение $\bar{Q}$ формы Q совпадает с формой Q. Значит, невозмущённая форма $\bar{Q}$ задаёт *невырожденное* билинейное спаривание на подпространствах θ_m и β_m, $m \in \Lambda$, где $\beta_m = T_m(\sigma_m \cap \Lambda)$.

Шаг 8. Теперь возьмём любую критическую точку $m \in \Lambda$ функции ψ и покажем, что её образ $i(m)$ является неподвижной точкой при отображении Пуанкаре $\tilde{A}_m$, т.е. что вектор "смещения" ξ_m равен нулю. Действительно, по нашему предположению, с учётом (49), этот вектор ортогонален всем касательным к Λ векторам относительно формы $\bar{\tilde{Q}}$, см. предыдущий шаг. Но замечание, сделанное на предыдущем шаге, показывает, что форма $\bar{\tilde{Q}}$ задаёт невырожденное спаривание на подпространствах θ_m и β_m, $m \in \Lambda$. Отсюда получаем, что из равенства нулю значения $\bar{\tilde{Q}}_m(\xi_m, \eta)$ при любом $\eta \in T_m\Lambda$ следует, что $\xi_m = 0$.

Наконец, из формулы (50) с учётом свойства 6° (следствие основной леммы 8) получаем, что образ при отображении $di(m)$ нулевого пространства гессиана функции ψ в критической точке $m \in \Lambda$ совпадает с ядром оператора $d\tilde{A}_{m_0}(i(m)) - I$. В частности, боттовость критической траектории $\gamma \subset \Lambda$ для функции $\psi : \Lambda \to \mathbb{R}$ эквивалентна невырожденности замкнутой траектории $i(\gamma)$ возмущённой системы.

Отсюда немедленно следуют свойства 1°–3°, 5° из утверждения 3. Свойство 4° из этого утверждения, а также свойства 6° и 7° (из леммы 1 и утверждения 4) будут доказаны ниже.

Итак, теорема 1 доказана.

1.6.2 Расположение замкнутых траекторий

В этом пункте мы докажем метод усреднения на подмногообразии. Точнее, мы докажем более сильную формулировку метода усреднения, т.е. пункт 4° утверждения 3.

Рассмотрим функцию $S = \frac{1}{\varepsilon}\psi$ на подмногообразии Λ, построенную выше (шаг 6). Мы должны показать, что функция $-S$ близка к функции $\bar{\mathcal{H}}$, полученной усреднением (6) возмущения $\mathcal{H} = \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{H} - H)$ по замкнутым траекториям невозмущённой системы на Λ.

Заметим, что это — локальное утверждение, т.е. его достаточно проверить на конечном числе каких-либо фиксированных областей в Λ, покрывающих всё Λ. Мы докажем это утверждение в шаровой окрестности любой точки $m \in \Lambda$ и, тем самым, в трубчатой окрестности соответствующей траектории $\gamma_m \subset \Lambda$ (в силу компактности, многообразие Λ покрывается конечным числом таких окрестностей).

Проведём через точку $m \in \Lambda$ сечение Пуанкаре σ_m в $H^{-1}(h)$, трансверсальное к траектории γ_m. Пусть $A : \sigma_m \to \sigma_m$ — отображение Пуанкаре, $\tilde{A} : \tilde{\sigma}_m \to \tilde{\sigma}_m$ — возмущённое отображение Пуанкаре, $\tilde{\Psi}$ — производящая функция отображения $\tilde{A}$.

Пусть $\xi_m \in \theta_m$, $m \in \Lambda$, — векторное поле из леммы 8. Согласно следствию этой леммы (свойство 7°), векторное поле $\frac{1}{\varepsilon}T(m)\xi_m$, $m \in \Lambda$, C^{r-2}–близко к возмущению $\mathcal{A}$ отображения Пуанкаре, т.е. к векторному полю $\mathcal{A}_m \in \theta_m$, где $\mathcal{A}_m$ — проекция на θ_m "вектора смещения" точки m. Поэтому формула (49) дифференциала функции S совершенно аналогична формуле (34) дифференциала ограничения на Λ производящей функции $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Psi}$. Но согласно утверждению 8 о методе усреднения (см. п. 1.4.6) последняя функция близка к функции $-\overline{\mathcal{H}}$.

Это доказывает пункт 4° утверждения 3. Тем самым, метод усреднения полностью доказан.

1.6.3 Устойчивость замкнутых траекторий

Здесь мы докажем свойство 7° из утверждения 4 об устойчивости замкнутых траекторий возмущённой гамильтоновой системы.

Доказательство проведём совершенно аналогично доказательству в случае неподвижных точек отображений.

Как в предыдущем пункте, утверждение является "локальным", т.е. нет необходимости рассматривать целую окрестность подмногообразия Λ, а достаточно рассмотреть шаровую окрестность какой-либо точки $m \in \Lambda$. Проведём через точку m сечение Пуанкаре σ_m в $H^{-1}(h)$, трансверсальное к траектории γ_m. Пусть $A : \sigma_m \to \sigma_m$ — отображение Пуанкаре, $\tilde{A} : \tilde{\sigma}_m \to \tilde{\sigma}_m$ — возмущённое отображение Пуанкаре.

Пусть $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ — гладкая функция из утверждения 3, и пусть $m \in \Lambda$ — её критическая точка: $dS(m) = 0$. В частности, $i(\gamma_m)$ — замкнутая траектория возмущённой системы. Обозначим через $\tilde{m} = \tilde{\sigma}_m \cap i(\gamma_m)$ точку пересечения этой замкнутой траектории с сечением Пуанкаре $\tilde{\sigma}_m$, т.е. $\tilde{m}$ — неподвижная точка отображения $\tilde{A}$. Рассмотрим в точках m и $\tilde{m}$ квадратичные формы $Q = \omega^2(dA(m)*, *)$ и $\tilde{Q} = \omega^2(d\tilde{A}(\tilde{m})*, *)$. Эти формы —

производящие функции операторов монодромии $dA(m)$ в точке m и $d\tilde{A}(\tilde{m})$ в точке $\tilde{m}$.

1. Докажем сначала свойство 6° из леммы 1 об индексах гессиана функции S и квадратичной формы $\tilde{Q}$:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} d^2S(m). \tag{51}$$

Напомним: в лемме 1 предполагается, что в точке m (как и в любой точке на Λ) производящая функция $Q = Q(m)$ невырождена на "нормальном" подпространстве к $T_m(\Lambda\cap\sigma_m)$ в $T_m\sigma_m$, т.е. на подпространстве вида $N_m \subset T_m\sigma_m$, где

$$N_m \oplus T_m(\Lambda\cap\sigma_m) = T_m\sigma_m. \tag{52}$$

Это эквивалентно тому, что оператор $dA(m)+I$ невырожден.

Как и в случае отображений, для доказательства равенства (51) нам достаточно построить два подпространства:

1. подпространство $N_m^\circ \subset T_m\sigma_m$ в точке m, обладающее свойством (52),

2. близкое к нему подпространство $\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ \subset T_{\tilde{m}}\tilde{\sigma}_m$ в точке $\tilde{m}$, ортогональное касательному пространству $T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})$ к $\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda}$ относительно квадратичной формы $\tilde{Q}$, где $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$.

Рассмотрим подпространство $\tilde{\theta}_{\tilde{m}}$ из доказательства следствия леммы 8. Напомним, что это подпространство близко к некоторому подпространству в точке m, трансверсальному к $\operatorname{Im}(dA(m)-I)$, и обладает следующим свойством: для любого касательного вектора $\tilde{\eta}\in T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})$ вектор $d\tilde{A}(\tilde{m})\tilde{\eta}-\tilde{\eta}$ принадлежит подпространству $\tilde{\theta}_{\tilde{m}}$.

Последнее в точности означает, что подпространство $T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})$ обладает по отношению к подпространству $\tilde{\theta}_{\tilde{m}}$ свойством (39). Другими словами, касательное пространство к подмногообразию $\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda}$ в точке $\tilde{m}$ имеет в точности такой вид, как если бы мы строили это подмногообразие по семейству подпространств $\tilde{\theta}_{\tilde{m}}$ (см. случай отображений, п. 1.5.2).

Отсюда, используя построения из п. 1.5.2, легко построить подпространства $\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ$ и N_m°. А именно, нужно положить $\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ := (d\tilde{A}(\tilde{m})+I)^{-1}\tilde{N}_{\tilde{m}}$, где $\tilde{N}_{\tilde{m}} := \tilde{\theta}_{\tilde{m}}^\perp$, I — тождественный оператор в $T_{\tilde{m}}\tilde{\sigma}_m$.

С учётом формулы (37), подпространства $\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ$ и $T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})$ действительно ортогональны относительно квадратичной формы $\tilde{Q}$.

2. Завершение доказательства леммы 1 проводится совершенно аналогично случаю отображений. Проведём это рассуждение ещё раз.

Ясно, что форма Q невырождена на N_m°, откуда форма $\tilde{Q}$ невырождена на $\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ$ и имеет такой же индекс:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{N}_{\tilde{m}}^\circ} = \operatorname{ind} Q|_{N_m^\circ} \equiv \operatorname{ind} Q.$$

Осталось показать, что индекс формы $\tilde{Q}|_{T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})}$ равен индексу гессиана $d^2\psi(\tilde{m})$ функции ψ (а значит, и функции S) в точке $\tilde{m}$. В силу (50), (47) и (46) гессиан функции $\psi|_{\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda}}$ в точке $\tilde{m}$ имеет вид

$$d^2\psi(\tilde{m})\eta_1\eta = \tilde{\omega}_0(d\tilde{A}(\tilde{m})\eta_1 - \eta_1, \eta), \quad \eta_1, \eta \in T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m \cap \tilde{\Lambda}), \tag{53}$$

где $\tilde{\omega}_0$ — некоторая билинейная форма на прямом произведении подпространств $\tilde{\theta}_{\tilde{m}}$ и $T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m \cap \tilde{\Lambda})$, близкая к форме $\omega^2|_{\tilde{\theta}_{\tilde{m}}\times(T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda}))}$. В частности, билинейная форма $\tilde{\omega}_0$ невырождена.

Аналогичным образом, билинейная форма $\tilde{\omega}_1$ вида

$$\tilde{\omega}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\omega^2(\xi, d\tilde{A}(\tilde{m})\eta + \eta), \quad \xi \in \tilde{\theta}_{\tilde{m}}, \eta \in T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m \cap \tilde{\Lambda}),$$

а также билинейные формы $\tilde{\omega}_t = (1-t)\tilde{\omega}_0 + t\tilde{\omega}_1$, тоже являются невырожденными, $0 \le t \le 1$. Отсюда, в силу симметричности билинейных форм Q_t вида $Q_t\eta_1\eta = \tilde{\omega}_t(B\eta_1, \eta)$ на подпространстве $T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m \cap \tilde{\Lambda})$, их индексы совпадают, $0 \le t \le 1$. Следовательно, индекс квадратичной формы вида (53) не изменится, если в её определении заменить билинейную форму $\tilde{\omega}_0$ на форму $\tilde{\omega}_1$. Это и значит, что индексы квадратичных форм $d^2\psi(\tilde{m})$ и $\tilde{Q}|_{T_{\tilde{m}}(\tilde{\sigma}_m\cap\tilde{\Lambda})}$ совпадают, т.е. верна формула (51).

Это завершает доказательство леммы 1.

3. Итак, мы доказали свойство 6° леммы 1 о связи индексов гессиана функции ψ и квадратичной формы $\omega^2(d\tilde{A}(i(m))*, *)$. Отсюда, дословным повторением рассуждений в случае отображений, выводится свойство 7° утверждения 4 об орбитальной устойчивости замкнутых траекторий возмущённой системы.

1.7 Некоторые частные случаи

Формулировка основной леммы 8 обладает следующими (неизбежными) “недостатками”.

1. Эта формулировка является довольно громоздкой, поскольку требует дополнительных построений: нужно определить семейство подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, с действием на нём окружности и семейство операторов “переноса” $P_{m,m'}$ этих подпространств в целую окрестность подмногообразия Λ.

2. Условия этой леммы не гарантируют единственности искомого вложения i, если не наложить дополнительного требования сохранения центра масс. При этом понятие центра масс тоже нужно специально определять, и при этом определении всё равно остается произвол при выборе римановой метрики на Λ и построении проектирования на Λ.

Эти недостатки удаётся устранить в некоторых специальных (но важных для приложений) частных случаях.

1.7.1 Случай строгой невырожденности

Чтобы сформулировать основную лемму 8, нам понадобилось определить довольно сложный (и, по сути, дополнительный, т.е. технический) объект — семейство подпространств $\theta_m \in T_m M$, $m \in \Lambda$, вместе с действием окружности на этом поле подпространств.

В этом пункте мы опишем частный случай, в котором формулировка леммы упрощается, так как нет необходимости вводить этот объект.

В работе Ботткола [14] доказан частный случай теоремы 1 (точнее, сообщается идея доказательства). А именно, в отличие от теоремы 1, в работе Ботткола подмногообразие Λ предполагается *строго невырожденным* (см. определение 3), т.е. в любой точке $m \in \Lambda$ корневое подпространство оператора $dA_m(m)$, отвечающее собственному значению 1, совпадает с $T_m\Lambda \cap \sigma$. (В действительности, в этой работе Боттокол предполагает также (в гамильтоновом случае), что либо симплектическая структура является точной в окрестности Λ, либо $H^1(\Lambda) = 0$. Однако это ограничение одинаково несущественно как в нашей конструкции, так и в конструкции Ботткола, поэтому мы его здесь не рассматриваем.)

Напомним, что в доказанной выше теореме 1 подмногообразие Λ предполагается лишь *невырожденным* (см. определение 1), и не накладываются никакие ограничения на симплектическую структуру или топологию расслоения $S^1 \to \Lambda \to B$.

Оказывается, что в случае *строго невырожденного* Λ семейство подпространств $\theta_m \in T_m M$, $m \in \Lambda$, и действие окружности на расслоении $\cup_{m\in\Lambda}\theta_m$ не нужно строить специально, так как они уже есть:

1. Роль подпространства θ_m $(m \in \Lambda)$ в этом случае играет ортогональное дополнение в $T_m\Lambda$ к касательному вектору $V(m)$ к траектории, проходящей через точку m. Здесь ортогональность понимается в смысле какой-либо S^1–инвариантной римановой метрики на Λ.

2. Действие окружности на указанном поле подпространств индуцируется естественным действием окружности на Λ.

С учётом такого определения подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, формулировка Ботткола полностью аналогична формулировке леммы 8. (При этом Боттокол не вводил, конечно, специального обозначения для этих подпространств.)

Сформулируем результат Ботткола [14] более точно. Фиксируем любую риманову связность на $H^{-1}(h)$ в окрестности Λ и перенесём каждое подпространство θ_m, $m \in \Lambda$, в близкие к m точки $m' \in H^{-1}(h)$ при помощи экспоненциального отображения, отвечающего связности. Более точно, оператор $P_{m,m'}$ "переноса" из точки m в точку $m' = \exp_m(\xi_0)$ определяется как $P_{m,m'}(\xi) = \exp(\xi_0 + \xi)$.

Теорема Ботткола [14] утверждает, что существует вложение $i : \Lambda \to \tilde{H}^{-1}(h)$, S^1–инвариантное векторное поле ξ на Λ, касательное к Λ и ортогональное ограничению невозмущённого поля V на Λ, и S^1–инвариантная функция $\tilde{T}$ на Λ, близкая к T, такие, что в любой точке $m \in \Lambda$

$$di(m)V_m = \frac{\tilde{T}(m)}{T(m)}\tilde{V}(m) + P_{m,i(m)}\xi_m.$$

Кроме того, такие вложение i и векторное поле ξ определены однозначно, если потребовать дополнительно, чтобы каждая траектория $\gamma(t) \subset \Lambda$ совпадала с центром масс её образа при отображении $\rho \circ i : \Lambda \to \Lambda$, где $\rho : U \to \Lambda$ — ортогональная проекция на подмногообразие Λ.

При помощи этого утверждения Ботткол строит инвариантную функцию S на Λ совершенно аналогично нашему построению (см. п. 1.6.1).

Отметим, что Ботткол не приводит подробного доказательства своей теоремы, а лишь сообщает его идею в сжатом виде: "Доказательство состоит в решении линеаризованной системы и затем решении системы путём итерации. Параллельный перенос нужен не только для придания смысла уравнению, но и его независимость от дифференциала вложения i необходима чтобы избежать потерю производных при итерации" [14] (перевод мой — Е. К.). Эта идея совпадает с идеей приведённого доказательства (см. п. 1.6.1), если под "итерацией" понимать "решение надстроенной динамической системы" (построенной нами в ходе доказательства), а под "потерей производных" — "несовпадение касательных векторов в точке самопересечения траектории".

1.7.2 Случай плоской базы

Рассмотрим ещё один частный случай ситуации теоремы 1. Пусть база B расслоения подмногообразия Λ на замкнутые траектории является плоской, т.е. обладает *плоской аффинной связностью.*

В этом случае построения, необходимые для формулировки и доказательства леммы 8 (а значит, и доказательства теоремы 1) можно значительно упростить. При этом однозначность построения будет в естественном смысле выполнена, и не понадобится понятие центра масс.

Замечание 13. Если при этом подмногообразие Λ строго невырождено (см. предыдущий пункт), то формулировка леммы 8 ещё более упростится. Именно такая ситуация (точнее, специальный случай её обобщения, см. следующий пункт) изучалась в работе Мозера [25]. Более точно, в этой работе доказывается оценка числа замкнутых траекторий гамильтоновой системы на изоэнергетической поверхности вблизи положения равновесия $m \in H^{-1}(h)$. Рассматривается масштабная замена, в результате которой невозмущённой системой становится линеаризованная система, задаваемая квадратичной частью функции Гамильтона, а подмногообразие Λ (в наших обозначениях) является стандартной сферой в чётномерном симплектическом подпространстве $E \subset T_mM$. Основным результатом работы Мозера [25] (относящимся к гамильтонову случаю) является теорема 4 [25], согласно которой при любом достаточно малом ε число замкнутых траекторий системы с гамильтонианом H на поверхности $H^{-1}(h+\varepsilon^2)$ не меньше $\frac{1}{2}\dim E$.

Рассмотрим векторное расслоение над Λ со слоем $(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$ в любой точке $m \in \Lambda$. Тогда на этом расслоении легко построить плоскую связность, являющуюся "поднятием" аффинной связности на базе B. А именно, поднятие плоской связности на расслоение $(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$, $m \in \Lambda$, однозначно определяется следующим условием: *проекция на B параллельного переноса вдоль любой кривой на Λ является параллельным переносом на B.* В частности, естественное действие окружности на расслоении $(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$, $m \in \Lambda$, является параллельным переносом искомой связности и полученная связность коммутирует с естественным действием окружности на этом расслоении и тоже является плоской.

Эта связность обладает следующим (характеристическим) свойством: для любого цикла $\gamma \ni m$ на Λ, гомотопного замкнутым траекториям на Λ, оператор голономии, т.е. параллельный перенос вдоль γ, является тождественным оператором в пространстве $(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$.

Перенесём эту плоскую связность на поле подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, см. шаг 2. Рассмотрим какое-нибудь "продолжение" этого поля подпространств во все точки окрестности U подмногообразия Λ в $H^{-1}(h)$, т.е. рассмотрим поле Θ подпространств θ_m, $m \in U$, ограничение которого на Λ совпадает с исходным. Указанную плоскую связность нетрудно продолжить на это поле подпространств θ_m, $m \in U$, так, чтобы полученная связность снова была плоской.

В терминах построенной связности основную лемму 8 можно переформулировать так (мы переформулируем только основные свойства 1°, 2° и 3° этой леммы).

Предложение 3. *Пусть в условиях леммы 8 база B расслоения подмногообразия Λ на замкнутые траектории обладает плоской аффинной* *связностью. Тогда существуют S^1–инвариантная гладкая функция $\tilde{T}$ на Λ, близкая к функции периода T, и вложение $i : \Lambda \to \tilde{H}^{-1}(h)$, близкое к тождественному, обладающие следующими свойствами. Для любой точки $m \in \Lambda$ вектор*

$$\xi_{i(m)} := \tilde{V}_{i(m)} - \frac{T(m)}{\tilde{T}(m)} di(m) V_m$$

в точке $i(m)$ принадлежит подпространству $\theta_{i(m)}$. При этом векторное поле $\xi_m \in \theta_m$, $m \in \tilde{\Lambda}$, на подмногообразии $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$ параллельно относительно указанной плоской связности на расслоении $\Theta = \cup_{m \in U} \theta_m$.

Эти условия определяют вложение i однозначно, с точностью до диффеоморфизмов подмногообразия Λ на себя, сохраняющих естественное действие окружности. В частности, подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ вместе с действием на нём окружности определено однозначно.

Доказательство предложения 3 полностью аналогично доказательству основной леммы 8. Отличие состоит в том, что в данной ситуации все "надстроенные" системы совпадают на пересечении своих областей определения. Поэтому можно рассмотреть "единую" надстроенную систему, не зависящую от траектории $\gamma \subset \Lambda$. У этой системы однозначно находится подмногообразие $\tilde{\Lambda} = j(\Lambda)$, заполненное её замкнутыми траекториями. На этом подмногообразии по обычной формуле строится гладкая функция S, инвариантная относительно действия окружности.

Чтобы выбрать какой-нибудь диффеоморфизм $i : \Lambda \to \tilde{\Lambda}$, сохраняющий действие окружности, можно поступить как в общем случае: выбрать сначала какой-нибудь диффеоморфизм $j : \Lambda \to \tilde{\Lambda}$, близкий к тождественному, и подобрать (уже однозначно) отображение i так, чтобы диффеоморфизм $j^{-1} \circ i : \Lambda \to \Lambda$ сохранял центры масс.

На аналогичной идее основано доказательство результата работы Мозера [25], в которой рассматривался специальный случай описанной ситуации. В этой работе доказан следующий аналог утверждения 3 для описанной в замечании 13 ситуации: *для любого достаточно малого ε существуют гладкие функции S и $\tilde{T}$ на сфере Λ, инвариантные относительно действия окружности S^1, и такое вложение i этой сферы в малую окрестность точки m, что образ при вложении i любой критической окружности функции S лежит на поверхности $H^{-1}(h + \varepsilon^2)$ и является замкнутой траекторией рассматриваемой гамильтоновой системы.* Отличие от утверждения 3 состоит лишь в том, что образ сферы Λ при вложении i не лежит, вообще говоря, на изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h + \varepsilon^2)$, но тем не менее образ любой критической окружности функции S лежит на этой поверхности. Как мы уже отмечали (см. следствие 3 из п. 1.1.3), из приведённого утверждения с учётом работы Вейнстейна [36] действительно следует, что число замкнутых траекторий на поверхности $H^{-1}(h+\varepsilon^2)$ не меньше $\frac{1}{2}\dim E$.

Доказательство Мозера [25] аналогично доказательству предложения 3 в случае плоской связности. Однако предложение 3 не применимо к ситуации, рассмотренной Мозером. Дело в том, что если на базе $B = \Lambda/S^1$ существует плоская аффинная связность, то на подмногообразии Λ тоже существует плоская аффинная связность. (Для римановых связностей последнее утверждение неверно!) Дело в том, что касательное расслоение $T_*\Lambda$ над Λ изоморфно прямой сумме расслоения со слоем $(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$, $m \in \Lambda$, и тривиального линейного расслоения над Λ (т.е. со слоем $\mathbb{R}$). Так как на обоих расслоениях есть плоская связность, то Λ является плоским. А в ситуации, рассмотренной Мозером, Λ является сферой, которая не является, вообще говоря, плоской.

Однако, если добавить прямую к касательному расслоению $T_*\Lambda$ к сфере, то полученное расслоение над сферой Λ станет тривиальным, и поэтому будет обладать плоской связностью. Оказывается, что в этом случае аналог предложения 3 останется справедливым.

В следующем пункте мы сформулируем утверждение, которое обобщает случай плоской базы B и применимо в ситуации, рассмотренной Мозером.

Замечание. Укажем отличие доказательства теоремы 1 в общем случае — когда нет никаких ограничений на топологию расслоения подмногообразия $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ на замкнутые траектории невозмущённой системы. В частности, когда не предполагается, что база $B = \Lambda/S^1$ этого расслоения обладает плоской аффинной связностью, или что расслоение удовлетворяет условиям предложения 4.

Доказательство (см. п. 1.6.1) утверждения 3 (обобщающего теорему 1) проводилось по схеме доказательства предложения 3: мы рассматривали "надстроенную" динамическую систему, т.е. систему в пространстве некоторого расслоения над исходным фазовым пространством, ограничение которой на нулевое сечение совпадает с данной системой. Отличие доказательства состоит в том, что надстроенная система была *локальной*: она зависела от параметра — траектории $\gamma \subset \Lambda$, и была определена лишь в малой окрестности U_γ этой траектории. Каждую такую локальную надстроенную систему мы строили в действительности при помощи некоторой *плоской аффинной связности* в окрестности точки $p(\gamma)$ на базе B, гладко зависящей от замкнутой траектории $\gamma \subset \Lambda$. (Локально, т.е. в окрестности любой точки, плоская связность всегда существует!)

Итак, в общем случае при доказательстве теоремы 1 мы рассмотрели целое *семейство надстроенных систем*, в котором параметром служит точка

$p(\gamma)$ на базе $B = \Lambda/S^1$, или замкнутая траектория $\gamma \subset \Lambda$. Грубо говоря, мы фактически рассмотрели "дважды надстроенную" систему, т.е. систему, заданную в пространстве некоторого расслоения $\cup_{b\in B}\Theta_{p^{-1}(b)}$ над B. Все слои этого расслоения инвариантны относительно надстроенной системы, и её ограничение на любой слой Θ_γ является в свою очередь надстроенной системой.

1.7.3 Случай плоского или стабильно плоского подмногообразия

Пусть база B расслоения Λ на замкнутые траектории не является, вообще говоря, плоским. Но пусть само подмногообразие Λ обладает *плоской аффинной связностью, коммутирующей с действием окружности*, и для которой оператор голономии является тождественным. (При этом действие окружности уже не является, вообще говоря, параллельным переносом.)

Если же Λ не является плоским, то предположим ещё более общую ситуацию. А именно, предположим, что Λ является стабильно плоским, т.е. после прибавления тривиального расслоения к касательному расслоению $T_*\Lambda$, на полученном расслоении

$$E = \mathbb{R}^N \oplus T_*\Lambda \tag{54}$$

над Λ существует *плоская связность*, которая

1. согласована (т.е. коммутирует) *с действием окружности*, и
2. для которой *оператор голономии является тождественным оператором*

(N — достаточно большое натуральное число). При этом предполагается, что окружность действует на пространстве $\mathbb{R}^N$ тождественными преобразованиями, а под оператором голономии понимается параллельный перенос вдоль замкнутой траектории на Λ.

Если система зависит от N параметров, то в качестве пространства $\mathbb{R}^N$ можно взять пространство параметров системы. Например, в работе Мозера [25] рассматривается в действительности случай $N = 1$, и в качестве пространства $\mathbb{R}^1$ берётся пространство значений энергии H.

Замечание. Условие согласованности связности с действием окружности, определённых на одном и том же расслоении E над Λ допускает следующую переформулировку. Рассмотрим на расслоении $E = \mathbb{R}^N \oplus T_*\Lambda$ поле $\mathcal{K}$ операторов $\mathcal{K}_m$, $m \in \Lambda$, называемое *ковариантной производной действия окружности* и определяемое равенством

$$\mathcal{K}_m\xi = \nabla_{\frac{d}{ds}a_s(m)}(da_s(m)\xi)|_{s=0}, \quad \xi \in E_m, m \in \Lambda, \tag{55}$$

где $a_s : \mathbb{R}^N \oplus \Lambda \to \mathbb{R}^N \oplus \Lambda$ — действие элемента $s \in S^1$ на многообразии $\mathbb{R}^N \oplus \Lambda$, $da_s : E_m \to E_{a_s(m)}$ — соответствующее касательное отображение. Тогда согласованность связности с действием окружности равносильна *параллельности* поля операторов $\mathcal{K}$ относительно этой связности:

$$\nabla \mathcal{K} = 0,$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, отвечающий связности на расслоении (54).

Другими словами, мы предполагаем, что действие окружности на расслоении (54) является "равномерным" по отношению к плоской связности. Это условие на Λ обобщает условие предложения 3, поскольку в случае плоской базы B существует плоская аффинная связность на Λ, являющаяся "поднятием" плоской связности на B, такая, что ковариантная производная $\mathcal{K}$ действия окружности *тождественно равна нулю*, а не только параллельна. Последнее следует из того, что в этом случае действие окружности на $T_*\Lambda$ camó является параллельным переносом.

Замечание. В каждой точке $m \in \Lambda$ оператор $e^{-2\pi \mathcal{K}_m}$ совпадает с оператором голономии, т.е. с параллельным переносом вдоль окружности $a_s(m)$, $s \in S^1$, и поэтому является тождественным. Отсюда следует, что существует S^1–инвариантная риманова метрика на подмногообразии Λ, согласованная со связностью на расслоении (54), т.е. сохраняющаяся при параллельном переносе. Относительно этой метрики оператор $\mathcal{K}_m$ является кососимметричным.

Как и в предыдущем пункте, перенесём эту плоскую связность (вместе с полем операторов $\mathcal{K}_m$ и римановой метрикой) на поле подпространств

$$\mathbb{R}^{N+1}_m \oplus \theta_m, \quad m \in \Lambda, \tag{56}$$

где θ_m, $m \in \Lambda$, — поле, описанное на шаге 2, $\mathbb{R}^{N+1}_m = \mathbb{R}_{m,t} \oplus \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}_{m,t} = T_m\gamma_m$. Так как изоморфизм между расслоениями $\cup_{m\in\Lambda}(T_m\Lambda)/(T_m\gamma_m)$ и $\cup_{m\in\Lambda}\theta_m$ коммутирует с действием окружности (следствие 8, см. шаг 2), то перенесённая связность тоже будет коммутировать с естественным действием окружности на поле подпространств (56). В частности, перенесённое поле операторов $\mathcal{K}_m$ опять будет параллельным.

Как и выше, рассмотрим любое "продолжение" поля подпространств θ_m, $m \in \Lambda$, во все точки окрестности U подмногообразия Λ в M, т.е. рассмотрим поле подпространств

$$\mathbb{R}^{N+1}_m \oplus \theta_m, \quad m \in U, \tag{57}$$

ограничение которого на Λ совпадает с полем (56). Перенесённую плоскую связность вместе с полем операторов $\mathcal{K}_m$, $m \in \Lambda$, нетрудно продолжить на поле подпространств (57), так, чтобы полученное поле операторов $\mathcal{K}_m$, $m \in U$, на расслоении (57) снова было параллельно относительно полученной связности.

Справедливо следующее обобщение предложения 3, аналогичное лемме 8, из которого следует результат работы Мозера [25] (при $N = 1$).

Предложение 4. *В условиях леммы 8 рассмотрим расслоение $\mathbb{R}^N \oplus (T_*\Lambda)$ над Λ с естественным действием окружности S^1 на нём, где $N \in \mathbb{N}_+$. Пусть существует плоская связность на этом расслоении, коммутирующая с естественным действием окружности, причём операторы голономии, отвечающие замкнутым траекториям на Λ, являются тождественными. Пусть $\mathcal{K}$ — соответствующее параллельное поле операторов (55) на этом расслоении. Рассмотрим соответствующие действие окружности, плоскую связность и параллельное поле операторов $\mathcal{K}$ на расслоении (57). Тогда существуют вложение $i : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^N \times U$, близкое к тождественному, и гладкая S^1–инвариантная функция $\tilde{T}$ на Λ, близкая к функции периода T, обладающие следующими свойствами.*

1° *Для любой точки $m \in \Lambda$ вектор*

$$\xi_m = \frac{\tilde{T}(m)}{T(m)} \tilde{V}_{i(m)} - di(m) V_m$$

принадлежит подпространству $\mathbb{R}^{N+1}_{i(m)} \oplus \theta_{i(m)}$, и его параллельный перенос в точку m ортогонален вектору V_m.

2° *Векторное поле ξ вдоль подмногообразия $i(\Lambda)$ удовлетворяет уравнению*

$$\nabla_{di(m)V_m} \xi_m = \frac{2\pi}{T(m)} \mathcal{K}_{i(m)} \xi_m, \quad m \in \Lambda,$$

где ∇ — ковариантная производная относительно плоской связности на поле подпространств (57).

3° *Среднее значение вектор-функции $h \circ i$ вдоль каждой траектории $\gamma \subset \Lambda$ равно 0, где $h : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}^N$ — проекция на первый сомножитель. В частности, для любой траектории γ, такой, что $\xi|_{i(\gamma)} = 0$, её образ $i(\gamma)$ целиком лежит на поверхности $h^{-1}(0)$.*

4° *При этом возмущённое подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ вида $\tilde{\Lambda} = i(\Lambda)$ единственно. Более того, вложение i определено однозначно с точностью до диффеоморфизмов подмногообразия Λ на себя, сохраняющих естественное действие окружности на Λ.*

Отметим, что в этом предложении требуется существование плоской связности на расслоении над Λ со слоем $\mathbb{R}^N \oplus (T_m\Lambda)$, размерность которого на $N + 1$ больше, чем размерность слоя из предложения 3. За счёт этого "надстроенное" фазовое пространство в доказательстве предложения 4 будет иметь размерность на $2N+2$ больше, чем в доказательстве аналогичной леммы 8. А именно, кроме указанного увеличения на $N+1$ размерности слоя, нужно ввести $N+1$ дополнительных параметров системы: значение периода $\tilde{T}$ и значения параметров $h \in \mathbb{R}^N$.

Замечание. Пусть $N=0$, т.е. подмногообразие Λ является плоским и существует требуемая плоская связность на расслоении $T_*\Lambda$, т.е. коммутирующая с действием окружности и имеющая тождественный оператор голономии, отвечающий замкнутым траекториям на Λ. Тогда справедливо следующее уточнение предложения 4. А именно, пункт 3° этого предложения можно заменить условием $i(\Lambda) \subset h^{-1}(0)$.

Доказательство предложения 4 совершенно аналогично доказательству предложения 3 и основной леммы 8. Основное отличие состоит в том, что при доказательстве предложения 4 (как и при доказательстве Мозера [25]) рассматривается *некомпактное* подмногообразие $\mathbb{R}^N \times \Lambda \subset \mathbb{R}^N \times U$, заполненное замкнутыми траекториями невозмущённой системы. Строится соответствующее вложение $i : D^N \times \Lambda \to \mathbb{R}^N \times U$, близкое к тождественному, при котором образы замкнутых траекторий *не лежат*, вообще говоря, на поверхностях $\{h = \mathrm{const}\}$, где D^N — окрестность нуля в $\mathbb{R}^N$. После этого, чтобы выделить траектории на нулевом уровне $H^{-1}(0)$, рассматривается на подмногообразии $i(D^N \times \Lambda)$ "усреднённая" вектор-функция h^* и берется множество уровня $(h^*)^{-1}(0)$ этой функции [25]. Ясно, что построенное подмногообразие естественно расслоено на окружности, диффеоморфно Λ и содержит все замкнутые траектории возмущённой системы на поверхности $h^{-1}(0)$.

2 Некоторые обобщения и дополнения

2.1 Роль постоянства значений энергии, функции периода и симплектической структуры

2.1.1 Замкнутые траектории фиксированного периода

Отметим, что из теоремы 1 следует существование указанного числа замкнутых траекторий на любой изоэнергетической поверхности $\tilde{H}^{-1}(h')$, близкой к исходной, а не только на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$, поскольку значение энергии можно рассматривать как дополнительный параметр возмущения. В любом случае, теорема 1 оценивает число замкнутых траекторий, лежащих на одной и той же изоэнергетической поверхности. Оказывается, что вместо значения энергии можно фиксировать период замкнутых траекторий и получать аналогичную оценку для числа таких траекторий.

Приведём здесь аналог теорем 1, 2 и 3 для случая, когда период замкнутых траекторий на подмногообразии $\Lambda \subset M$ постоянен, и требуется оценить число замкнутых траекторий возмущённой системы с тем же периодом. Пусть, например, все траектории невозмущённой системы на Λ имеют период 1 (для некоторых траекторий этот период может не быть минимальным). Отметим, что в данном случае поверхность Λ не обязательно лежит на изоэнергетической поверхности и, более того, может содержать критические точки гамильтониана, так что среди траекторий на Λ могут быть особые точки. Определим отображение Пуанкаре как поток $A = g_H^1$ системы за время 1 во всём фазовом пространстве (но не как ограничение этого потока лишь на изоэнергетическую поверхность).

Определение невырожденности и сильной устойчивости Λ в этом случае совпадает с определениями 9 и 13 в случае отображений.

Теорема 5. *Пусть подмногообразие $\Lambda \subset M$, заполненное замкнутыми 1–периодическими траекториями невозмущённой системы, компактно (без края) и невырождено. Тогда число замкнутых 1–периодических траекторий возмущённой системы не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на фактор-многообразии $B = \Lambda/S^1$. При этом число таких траекторий с учётом кратностей не меньше минимального числа критических функции Морса на B.*

При этом функция f на фактор-многообразии B называется гладкой, если функция $f \circ p$ на Λ является гладкой. Гладкая функция f на B называется морсовской, если функция $f \circ p$ на многообразии Λ является боттовской, и любое её критическое подмногообразие является замкнутой траекторией невозмущённой системы на Λ (например, положением равновесия).

Теорема 6. *Пусть в условиях теоремы 5 возмущённая система гладко зависит от малого параметра ε, т.е. имеет гамильтониан вида (4). Рассмотрим на Λ усреднённое возмущение, т.е. гладкую функцию вида $\bar{\mathcal{H}}(m) = \int_0^1 \mathcal{H}(\gamma(m,t))\,dt$, $m \in \Lambda$, где $\mathcal{H} = H_1|_\Lambda$, $\gamma(m,t)$ — решение невозмущённой системы с начальным условием $\gamma(m,0) = m$. Пусть $\gamma_0 \subset \Lambda$ — боттовская критическая траектория функции $\bar{\mathcal{H}}$. Тогда существует однопараметрическое семейство замкнутых 1–периодических траекторий γ_ε возмущённой системы. Это семейство гладко зависит от параметра возмущения ε, где ε достаточно мало, и γ_ε совпадает с γ_0 при $\varepsilon = 0$. При этом, если траектория γ_0 является положением равновесия, то траектория γ_ε тоже является положением равновесия.*

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы 5 подмногообразие $\Lambda \subset M$ сильно устойчиво в линейном приближении. Пусть гамильтониан $\tilde{H}$ возмущённой системы гладко зависит от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, т.е. имеет вид (4). Пусть траектория $\gamma_0 \subset \Lambda$ является боттовским подмногообразием локального максимума (или минимума либо минимакса, в зависимости от ситуации в определении 13) функции $\bar{\mathcal{H}}$, т.е. имеет место "согласованная знакоопределённость". Тогда выживающая согласно теореме 6 замкнутая 1–периодическая траектория γ_ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, возмущённой системы структурно устойчива в линейном приближении.*

В теореме 7 структурная устойчивость замкнутой траектории γ_ε понимается в следующем смысле. В случае, когда траектория γ_0 является положением равновесия, утверждается, что положение равновесия γ_ε является структурно устойчивой неподвижной точкой отображения $\tilde{A} = g^1_{\tilde{H}}$, а в случае, когда γ_0 не является положением равновесия, утверждается, что замкнутая траектория γ_ε орбитально структурно устойчива в линейном приближении на соответствующей поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$.

Доказательство. Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве

$$M \times \mathbb{R}_{(h)} \times S^1_{(t)} \tag{58}$$

гамильтонову систему относительно симплектической структуры

$$\omega^2 - dh \wedge dt \tag{59}$$

и функции Гамильтона $H - h$, где $t \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ — параметр на окружности. Известно, что решениям такой системы на неособой изоэнергетической поверхности $\{H - h = 0\}$ отвечают решения исходной системы. Ясно, что при этом соответствии 1–периодическим траекториям исходной системы в точности отвечают периодические решения полученной системы на поверхности $\{H-h=0\}$. При этом каждой 1–периодической траектории исходной системы, не являющейся положением равновесия, отвечает однопараметрическое семейство периодических траекторий системы (58), (59), где параметром семейства служит время $t \in S^1$. (В действительности, 1–периодическая траектория исходной системы — это тоже параметризованная кривая $\gamma(t)$, где $\gamma(1)=\gamma(0)$, однако обычно траектории, отличающиеся сдвигом времени, считают совпадающими.)

Условие невырожденности Λ эквивалентно тому, что замкнутые траектории новой системы (58), (59) заметают невырожденное подмногообразие

$$\Lambda \times S^1 \subset \{H-h=0\}.$$

Согласно утверждению 3, существуют гладкое вложение i и гладкая S^1–инвариантная функция S на подмногообразии $\Lambda \times S^1$, удовлетворяющие условиям этого утверждения. Так как система имеет циклическую переменную t, то все объекты, строящиеся при доказательстве утверждения 3 (и необходимые для формулировки основной леммы 8), можно взять не зависящими от t. Так как при доказательстве утверждения 3 указан однозначный способ построения функции S и вложения i, то функция S и вложение i будут инвариантными относительно сдвигов времени $t \mapsto t+t_0$. Отсюда следует, что функция S *однозначно* опускается на исходное подмногообразие Λ, а вложение i коммутирует со сдвигом времени в фазовом пространстве (58). Кроме того, согласно утверждению 3, функция S инвариантна относительно естественного действия окружности на $\Lambda \times S^1$. Следовательно, эта функция однозначно опускается на фактор-множество $B=\Lambda/S^1$. Отсюда, с учётом утверждений 3 и 4, следуют теоремы 5, 6, 7. При этом в случае, когда $\gamma_0 \subset \Lambda$ не является положением равновесия, нужно воспользоваться свойством 3° из утверждения 3 о совпадении образа гессиана функции S при отображении $di(m)$ с ядром оператора $d\tilde{A}(i(m))-I$.

Аналогичное доказательство показывает, что такие же утверждения верны в следующей более общей ситуации.

2.1.2 Замкнутые траектории фиксированного типа

Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2_{h,\lambda}$ задана гладкая регулярная кривая μ (обычно можно считать, что она связна и замкнута). Более точно, рассмотрим любое погружение окружности или прямой в эту плоскость, где окружность или прямая рассматривается с точностью до гладких замен параметра. Например, кривая μ может иметь вид $\{h=\mathrm{const}\}$ или $\{\lambda=\mathrm{const}\}$.

Пусть Λ — гладкое подмногообразие в симплектическом многообразии M, сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом H, причём на Λ задана гладкая функция периода T. Рассмотрим на Λ две гладкие S^1–инвариантные функции: H и T, а также задаваемое этими функциями гладкое S^1–инвариантное отображение в плоскость

$$\Lambda \to \mathbb{R}^2_{h,\lambda}, \quad h = H(m), \lambda = T(m), \quad m \in \Lambda. \tag{60}$$

Пусть образ этого отображения лежит на кривой μ. При этом считается, что если кривая μ имеет самопересечения, то для каждой точки $m \in \Lambda$ указывается также значение параметра $u = u(m)$ на кривой μ, гладко зависящее от точки m, такое, что $\mu(u(m)) = (H(m), T(m))$.

Предположим, что в любой точке $m \in \Lambda$ выполнено одно из следующих условий:

1. либо $dH(m) \neq 0$,
2. либо касательная к кривой $\mu(u) \subset \mathbb{R}^2_{h,\lambda}$ в точке $u_0 = u(m)$ не параллельна оси λ или, что эквивалентно, кривая $\mu(u)$ локально имеет вид графика функции $\lambda = \lambda(h)$.

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве

$$M \times \mathbb{R}^2_{(h,\lambda)}$$

подмногообразие коразмерности 2, имеющее вид

$$\{H(m) - h = 0, \, (h, \lambda) \in \mu\}. \tag{61}$$

В силу условий 1, 2 это множество является подмногообразием вблизи Λ.

Для любой функции H на многообразии M рассмотрим отрезки траекторий $\gamma(t)$, $t \in [0, \lambda]$, системы с гамильтонианом H. Траектории γ, для которых энергия $h = H|_\gamma$ и промежуток времени λ удовлетворяют соотношению (61), назовём траекториями типа (61). Далее мы будем считать, что тип (61) траекторий фиксирован. Траектории этого типа, замыкающиеся через время λ, назовём *замкнутыми траекториями фиксированного типа*.

Через любую точку $m \in \Lambda$ проведём сечение Пуанкаре σ в подмногообразии (61), т.е. гиперповерхность, трансверсально пересекающую фазовую траекторию, проходящую через точку m. Рассмотрим отображение Пуанкаре A поверхности σ на себя, задаваемое траекториями $\gamma(t)$, $t \in [0, \lambda]$, фиксированного типа (61). Другими словами, $A : \gamma(0) \mapsto \gamma(\lambda)$.

Подмногообразие Λ назовём *невырожденным*, если оно удовлетворяет условию определения 1 по отношению к построенному отображению Пуанкаре A.

Утверждение 10. *Пусть множество $\Lambda \subset M$, заполненное замкнутыми траекториями фиксированного типа (61) системы с гамильтонианом H, невырождено. Пусть $\tilde{H}$ — гладкая функция на многообразии M, C^2–близкая к функции H. Тогда справедливы полные аналоги теорем 5, 6, 7 о числе, расположении и устойчивости замкнутых траекторий фиксированного типа (61) системы с гамильтонианом $\tilde{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим в многообразии $M \times \mathbb{R}^2_{(h,\lambda)} \times S^1_{(\tau)}$ гиперповерхность

$$\bar{M} = M \times \mu \times S^1_{(\tau)},$$

где $\mu \subset \mathbb{R}^2_{(h,\lambda)}$ — регулярная кривая, описанная выше. Рассмотрим ограничение на эту поверхность 2–формы

$$\Omega^2 = \omega^2(m) - \lambda dh \wedge d\tau.$$

Нетрудно видеть, что многообразие $\bar{M}$ является симплектическим относительно симплектической структуры $\Omega^2|_{\bar{M}}$.

Ясно также, что траектории $\gamma(t)$, $t \in [0, \lambda]$, системы с гамильтонианом H на M (типа (61)) взаимно-однозначно отвечают траекториям $\gamma(\lambda\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, системы с гамильтонианом $(H(m) - h)|_{\bar{M}}$ на неособой изоэнергетической поверхности $\{H(m) - h = 0\}$ в $\bar{M}$.

В частности, в фазовом пространстве $\bar{M}$ последней системы имеется невырожденное компактное подмногообразие, диффеоморфное $\Lambda \times S^1$ и заполненное замкнутыми траекториями.

Применение к последней гамильтоновой системе доказанных утверждений о замкнутых траекториях с фиксированным уровнем энергии, даёт соответствующие утверждения о замкнутых траекториях фиксированного типа. При этом, как и в случае фиксированного периода (см. выше), нужно воспользоваться тем, что гамильтониан и симплектическая структура инвариантны относительно сдвигов $\tau \mapsto \tau + \tau_0$, и поэтому функция S на $\Lambda \times S^1$ и вложение i будут инвариантны относительно таких сдвигов.

Утверждение 10 доказано.

Отметим различие метода усреднения в теоремах 2 и 6. В теореме 2 мы рассматриваем нестандартное усреднение по времени, т.е. мы не делим интеграл (6) на функцию T периода замкнутой траектории. Это существенно при исследовании порождающих замкнутых траекторий при фиксированном значении энергии, так как функция периода T, вообще говоря, *не является постоянной* на подмногообразии $\Lambda \subset H^{-1}(h)$.

Однако в некоторых важных случаях функция периода на подмногообразии Λ из теоремы 1 будет константой. А именно, верно следующее утверждение.

Утверждение 11. *Пусть N — связное подмногообразие фазового пространства (M^{2n}, ω^2), сплошь заполненное замкнутыми траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Пусть дифференциал $d(H|_N)$ ограничения функции H на N всюду отличен от нуля на N. Пусть на N имеется непрерывная функция T периода системы вдоль замкнутых траекторий. Тогда эта функция является гладкой функцией лишь от значения h гамильтониана H на N. Более того, в этом случае функция периода имеет вид $T = dI(h)/dh$, где значение $I(h)$ равно интегралу формы ω^2 по 2–цепи, составленной из T–периодических траекторий однопараметрического семейства траекторий вида $\gamma_{h'} \subset N \cap H^{-1}(h')$, $h_0 \le h' \le h$.*

Другими словами, функция периода T в этом случае равна производной по h от “площади” $I(h)$, заметаемой замкнутыми T–периодическими траекториями вида $\gamma_{h'} \subset N \cap H^{-1}(h')$ данной системы, где $h_0 \le h' \le h$, h_0 — фиксированное значение гамильтониана H.

Доказательство. Имеется геометрическое доказательство утверждения 11, которое в данной ситуации совершенно аналогично стандартному [19, 24], рассматривавшемуся в случае, когда всё фазовое пространство заполнено замкнутыми траекториями. Мы здесь докажем лишь первую часть утверждения, так как она легко следует из метода усреднения. При этом будем предполагать, что каждое подмногообразие вида $\Lambda = N \cap H^{-1}(h)$ почти всюду невырождено в смысле определения 1.

Возьмём возмущённый гамильтониан вида $\tilde{H} = H - \varepsilon$. Заметим, что возмущённая система на исходном уровне энергии $\tilde{H}^{-1}(h)$ совпадает с невозмущённой системой на близком уровне $H^{-1}(h+\varepsilon)$. Очевидно, что усреднённое возмущение $\mathcal{H}$ на Λ с точностью до знака совпадает с периодом T траекторий на Λ. Поэтому, если функция периода T отлична от константы на подмногообразии Λ, то из утверждения 1 сразу следует, что это подмногообразие нельзя включить в семейство аналогичных подмногообразий $\Lambda_\varepsilon \subset H^{-1}(h+\varepsilon)$, $\Lambda_0 = \Lambda$. Это противоречит условию отличия от нуля дифференциала функции $H|_N$ на Λ. Утверждение доказано.

Таким образом, если исходное подмногообразие $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ можно включить в однопараметрическое семейство аналогичных подмногообразий $\Lambda = \Lambda_h$, заполненных замкнутыми траекториями системы и зависящих от значения гамильтониана, то непрерывная функция периода T замкнутых траекторий на Λ будет константой. Поэтому усреднённое возмущение в этой ситуации можно определить по формуле

$$\bar{\mathcal{H}}(m) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{H}(\gamma(m,t))\,dt, \quad m \in \Lambda,$$

и при таком его определении теорема 2 и утверждения 1–3 останутся верными. Если при этом функция $I(h)$ выпукла, т.е. $I''(h) \neq 0$ всюду на N, то множества постоянства энергии на N в точности совпадают с множествами постоянства периода на N. Следовательно, подмногообразия Λ из теорем 1 и 2 будут совпадать с подмногообразиями Λ из теорем 5 и 6.

2.1.3 Возмущение симплектической структуры

Отметим, что во всех приведённых выше теоремах симплектическая структура ω^2 предполагалась фиксированной на многообразии M^{2n}. В приложениях симплектическая структура иногда меняется при возмущении. Оказывается, что в некоторых таких случаях приведённые теоремы останутся верными. Например, это так, если $H^2(\Lambda) = 0$, либо $H^1(B) = 0$, либо выполнено некоторое более слабое ограничение на топологию расслоения (2). Здесь $H^2(\Lambda)$ — группа двумерных когомологий де Рама многообразия Λ.

Однако во многих случаях, важных для приложений, например, когда Λ — тор, утверждения этих теорем уже не будут верны при произвольных малых возмущениях симплектической структуры. Тем не менее, эти теоремы обобщаются и на общий случай, если наложить естественные для гамильтоновой механики ограничения на допустимые возмущения симплектической структуры.

Пусть на гладком связном многообразии Λ задано действие окружности.

Операцию усреднения на таком Λ можно применять не только к функциям, но и к дифференциальным формам. Для любого пути m_v, $0 \le v \le 1$, на подмногообразии Λ рассмотрим цепь $C(m_*)$ с координатами v, t (задающими на ней ориентацию $dv \wedge dt$), образованную фазовыми траекториями $\gamma_{m_v}(t)$, $0 \le t \le T(m_v)$, выпущенными из точек этого пути.

Определение 16. Замкнутую 2–форму α^2 на многообразии Λ назовём *сохраняющей центр тяжести* [1, 16, 4], если для любого замкнутого пути m_v, $0 \le v \le 1$, на многообразии Λ интеграл формы α^2 по цепи $C(m_*)$ равен нулю. *Усреднением* такой 2–формы на Λ назовём гладкую функцию χ на Λ, определённую по формуле

$$\chi(m_1) - \chi(m_0) = \int_{C(m_*)} \alpha^2, \quad m_0, m_1 \in \Lambda.$$

Нетрудно видеть, что последний интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки m_0, m_1 на Λ, так что функция χ определена корректно с точностью до постоянного слагаемого. Функция χ, очевидно, инвариантна относительно действия окружности на Λ.

Заметим, что для любого односвязного многообразия Λ любая замкнутая 2–форма α^2 на этом многообразии сохраняет центр тяжести. Аналогичное верно для многообразий Λ, у которых $H^2(\Lambda) = 0$, либо $H^1(B) = 0$, где $B = \Lambda/S^1$.

Из доказательства утверждения 3 легко следует следующее утверждение.

Утверждение 12. *Теоремы 1, 2, 3, 5, 6, 7 и утверждение 10 останутся верными, если при возмущении системы допустить C^1–малое возмущение $\tilde{\omega}^2$ симплектической структуры ω^2, потребовав при этом сохранение её класса когомологий. Более того, последнее требование можно заменить следующим более слабым условием: 2–форма*

$$\alpha^2 = (\tilde{\omega}^2 - \omega^2)|_\Lambda$$

на подмногообразии Λ сохраняет центр тяжести. При этом в методе усреднения вместо усреднённого возмущения $\bar{\mathcal{H}}$ гамильтониана нужно рассмотреть его сумму $\bar{\mathcal{H}} + \chi$ с усреднением χ возмущения $\frac{1}{\varepsilon}\alpha^2$ симплектической структуры. Здесь $\mathcal{H} = \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{H} - H)|_\Lambda$ — возмущение гамильтониана, $\bar{\mathcal{H}}$ — его усреднение (6), $\varepsilon = \|\tilde{H} - H\|_{C^2} + \|\tilde{\omega}^2 - \omega^2\|_{C^1}$.

Подчеркнём ещё раз, что на исходную симплектическую структуру ω^2 не нужно накладывать никаких ограничений (все нужные условия будут автоматически выполнены). Далее, в главе 3, будет описан результат по небесной механике, где обобщённая теорема Пуанкаре применяется к ещё более общему случаю — когда невозмущённая симплектическая структура вырождена.

2.2 Положения равновесия

Теперь мы перейдём к обобщению теоремы 1 в следующей ситуации: когда подмножество, заполненное замкнутыми траекториями невозмущённой системы, содержит *положения равновесия* системы и, тем самым, лежит на *особой изоэнергетической поверхности*. При этом, как в утверждении 12, будем предполагать, что симплектическая структура также изменяется при возмущении системы.

Пусть, как и в теореме 1, Λ — некоторое связное инвариантное подмножество изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h)$, заполненное замкнутыми траекториями системы. Пусть, как и раньше, расслоение Λ на замкнутые траектории является периодическим, т.е. на Λ задана *непрерывная положительная* функция периода $T : \Lambda \to \mathbb{R}$, такая, что $g_H^{T(m)}(m) = m$, где через g_H^t обозначен поток системы с гамильтонианом H. Другими словами, каждая траектория γ на Λ "замыкается" через время $T|_\gamma$.

В отличие от теоремы 1, мы будем теперь считать, что некоторые из траекторий на Λ являются *положениями равновесия*, т.е. критическими точками гамильтониана. В частности, рассматриваемая изоэнергетическая поверхность $H^{-1}(h)$ не является регулярной.

Пусть точка $m \in \Lambda$ является положением равновесия системы с гамильтонианом H. Нетрудно показать, что если точка m не является изолированной в Λ, то число 1 является одним из собственных значений симплектического оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$ в этой точке. Будем предполагать, что в окрестности особой точки m множество Λ "устроено" так же, как для соответствующей линеаризованной системы. Это приводит к следующему определению.

Определение 17. Пусть множество $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ сплошь заполнено замкнутыми траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом H, и имеется непрерывная функция периода $T : \Lambda \to \mathbb{R}$. Пусть точка $m \in \Lambda$ является положением равновесия этой системы. Точку m назовём *невырожденной особенностью* множества Λ, если выполнены следующие условия:

1. Единица является одним из собственных значений симплектического оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$.
2. Ограничение $d^2H(m)|_{E(m)}$ гессиана функции H на отвечающее 1 собственное подпространство $E(m) = E_1(A) \subset T_mM$ оператора A является невырожденной квадратичной формой в точке m.

Число $\dim E(m) - 1$ назовём *размерностью* множества Λ в точке m, а индекс квадратичной формы $d^2H(m)|_{E(m)}$ — индексом особой точки m.

Ясно, что индекс невырожденной особой точки неотрицателен и не больше размерности множества Λ в этой точке плюс 1. Определение 17 обобщает аналогичные определения из работ Вейнстейна [35] и Мозера [25], в которых предполагалась знакоопределённость формы $d^2H(m)|_{E(m)}$. Из определения 17 получаем следующее

Следствие 11. *Пусть точка $m \in \Lambda$ является невырожденной особенностью множества Λ. Тогда:*

1. *Собственное подпространство $E(m)$ оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$, отвечающее собственному значению 1, является симплектическим и, в частности, чётномерным.*

2. *Точка m является морсовской критической точкой функции H.*

3. *На подпространстве $E = E(m)$ существуют канонические координаты $p_1, q_1, \ldots, p_d, q_d$ ($2d = \dim E$), в которых гамильтониан и симплектическая структура линеаризованной системы на E имеют вид*

$$d^2H(m)|_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \omega_i(p_i^2 + q_i^2), \quad \omega^2(m)|_E = \sum_{i=1}^{d} dp_i \wedge dq_i, \tag{62}$$

где ω_i — некоторый набор ненулевых чисел вида $\omega_i = \frac{2\pi k_i}{T(m)}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $2d = \dim E$. В частности, индекс невырожденной особой точки m является чётным числом.

Отсюда получаем, что существует разложение

$$T_m M = E \oplus F \tag{63}$$

касательного пространства в точке m в прямую сумму симплектических подпространств, таких, что оба подпространства E и F инвариантны относительно оператора линеаризации системы с гамильтонианом H в точке m, причём все траектории линеаризованной системы на подпространстве E замыкаются через время $T = T(m)$, а на подпространстве F нет неособых траекторий, замыкающихся через время T.

Доказательство. 1) Покажем, что собственное подпространство $E(m)$ оператора A является симплектическим. Обозначим через B оператор линеаризации системы с гамильтонианом H в точке m. Тогда $A = e^{T(m)B}$. Следовательно, операторы A и B коммутируют, а значит, подпространство $E = E(m)$ инвариантно относительно оператора B. С другой стороны, по определению гамильтоновой системы, для любых векторов η, ξ в точке m $\omega^2(\xi, B\eta) = d^2H(m)\xi\eta$. Отсюда, с учётом условия 2, получаем, что ограничение формы ω^2 и оператора B на подпространство E невырождены. В частности, подпространство E является симплектическим.

2) В силу симплектичности подпространства E, его косоортогональное дополнение F тоже симплектично, и справедливо разложение (63). Следовательно, ограничение линеаризованной системы на F не имеет неособых траекторий, замыкающихся через время T. Отсюда следует невырожденность формы $d^2H(m)|_F$ и, тем самым, морсовость точки m.

3) Фиксируем на пространстве E любое S^1–инвариантное скалярное произведение (его можно построить при помощи усреднения по действию окружности какого-нибудь скалярного произведения). Согласно теореме из линейной алгебры, существует ортогональный базис, в котором квадратичная форма $Q = d^2H(m)|_E$ приводится к "диагональному виду", причём набор диагональных элементов этой формы не зависит от базиса. Рассмотрим

соответствующее разложение пространства E в прямую сумму ортогональных подпространств E_i, которые ортогональны относительно формы Q и на которых эта форма пропорциональна скалярному квадрату, причём разным подпространствам отвечают разные коэффициенты пропорциональности. Согласно теореме из линейной алгебры, такое разложение единственно.

Заметим, что подпространства E_i инвариантны относительно линеаризованной системы, поскольку линеаризованная система сохраняет скалярное произведение и форму Q, а значит, и разложение $E = \oplus E_i$. Отсюда, с учётом невырожденности формы Q, следует симплектичность подпространств E_i, а также их попарная косоортогональность. Осталось заметить, что по теореме из линейной алгебры в каждом из подпространств E_i существует ортогональный базис, в котором ограничение симплектической структуры на E_i приводится к каноническому виду, т.е. задаётся блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой стоят блоки вида $\lambda_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $\lambda_i > 0$. Домножим пару базисных векторов, отвечающих каждому такому блоку, на соответствующее число $1/\sqrt{\lambda_i}$. В качестве искомых канонических координат $p_1, q_1, \dots, p_d, q_d$ в E возьмём координаты, отвечающие построенному базису.

Следствие 11 доказано.

Определение 18. Пусть $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ — подмножество, сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом H и содержащее положения равновесия этой системы. Назовём Λ *невырожденным*, если оно имеет лишь невырожденные особенности. Более точно, Λ должно удовлетворять следующим условиям:

1. Любое положение равновесия на Λ является невырожденной особенностью этого подмножества, в частности, оно является морсовской критической точкой функции Гамильтона H.

2. Дополнение в Λ к множеству всех положений равновесия является невырожденным в смысле определения 1, в частности, оно является гладким подмногообразием фазового пространства.

При этом предполагается, что размерность последнего подмногообразия совпадает с размерностью множества Λ в каждой его особой точке. Кроме того, для любой особой точки, имеющей индекс больше нуля и меньше размерности Λ, пересечение множества $\Lambda \setminus \{m\}$ с любой сколь угодно малой окрестностью точки m непусто.

Оказывается, что любое *компактное* невырожденное подмногообразие

Λ имеет только "конические" особенности, т.е. особенности следующего вида.

Определение 19. Пусть $m \in \Lambda$ — невырожденная особая точка множества Λ, сплошь заполненного замкнутыми траекториями. Точку m назовём *конической особенностью* множества Λ, если выполнены следующие условия:

1. Существует вложение i° (класса C^∞ вне нуля и дифференцируемое в нуле, но, вообще говоря, не гладкое в нуле) подпространства $E(m)$ в сколь угодно малую шаровую окрестность U_m точки m, при котором конус
$$\mathcal{C}(m) = \{\xi \in E(m) \mid d^2H(m)\xi = 0\} \tag{64}$$
переходит в пересечение множества Λ с окрестностью U_m, вершина 0 конуса $\mathcal{C}(m)$ переходит в точку m и $di^\circ(0) = id_{E(m)}$.

2. При вложении $i^\circ|_{\mathcal{C}(m)}$ траектории линеаризованной системы на конусе $\mathcal{C}(m)$ переходят в траектории системы на Λ. При этом вектор скорости линеаризованной системы в любой точке $\xi \in \mathcal{C}(m)$ переходит в вектор скорости системы в точке $m' = i^\circ(\xi)$ с коэффициентом $T(m')/T(m)$.

Пояснение. Определение 19 означает, что в касательном пространстве T_mM в точке m имеется ненулевое собственное подпространство $E = E_1(A)$ оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$, отвечающее собственному значению 1. Это подпространство расслоено на T–периодические траектории линеаризованной системы в точке m. При этом конус (64) в этом подпространстве в точности совпадает с множеством векторов в T_mM, "касательных" к множеству Λ.

Заметим, что подмногообразие $\mathcal{C}_\varepsilon(m) = \{d^2H(m) = \varepsilon\} \cap E(m)$ в $E(m)$, где $\varepsilon \neq 0$, инвариантно относительно естественного действия окружности в $E(m)$ при помощи линеаризованной системы в точке m (поскольку гессиан $d^2H(m)$ является интегралом потока $dg_H^t(m)$).

Наложим малое возмущение на функцию Гамильтона H, при котором изоэнергетическая поверхность $\tilde{H}^{-1}(h)$ становится регулярной. Чтобы сформулировать основное утверждение, нам нужно построить гладкое подмногообразие $\Lambda^* \subset M$, получающееся из Λ некоторыми перестройками типа морсовских около каждой особой точки $m \in \Lambda$. Для построения этого подмногообразия нам понадобится следующая

Лемма 11. *Пусть m — невырожденная особая точка множества Λ. Рассмотрим ограничения линеаризованной системы на два инвариантных множества: конус $\mathcal{C} = \{d^2H(m) = 0\} \cap E(m)$ и подмногообразие $\mathcal{C}_\varepsilon = \{d^2H(m) = \varepsilon\} \cap E(m)$, где $\varepsilon \neq 0$. Существует проекция $r : \mathcal{C}_\varepsilon \to \mathcal{C}$, при* *которой ограничение линеаризованной системы на подмногообразие $\mathcal{C}_\varepsilon$ переходит в ограничение этой системы на конус $\mathcal{C}$, причём прообраз начала координат при этой проекции диффеоморфен $(2k-1)$–мерной сфере S^{2k-1}, где $2k$ — индекс квадратичной формы $-\varepsilon d^2H(m)|_{E(m)}$. Ограничение отображения r на множество $\mathcal{C}_\varepsilon \setminus S^{2k-1}$ является диффеоморфизмом этого подмногообразия на подмногообразие $\mathcal{C} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $p_1, q_1, \ldots, p_d, q_d$ — канонические координаты на подпространстве $E = E(m)$ из следствия 11. Без ограничения общности будем считать, что в формуле (62) $\varepsilon\omega_i > 0$ при $i = 1, \ldots, k$ и $\varepsilon\omega_i < 0$ при $i = k+1, \ldots, d$. Обозначим

$$u = (p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k), \quad v = (p_{k+1}, q_{k+1}, \ldots, p_d, q_d),$$

и введём на подпространстве E скалярное произведение вида

$$u^2 = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(p_i^2 + q_i^2), \quad v^2 = -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=k+1}^{d}\omega_i(p_i^2 + q_i^2).$$

Таким образом, $\varepsilon d^2H(m)|_E = u^2 - v^2$, $\mathcal{C}_\varepsilon = \{u^2 - v^2 = \varepsilon^2\} \subset E$. Заметим, что $u \neq 0$ на $\mathcal{C}_\varepsilon$. Определим проекцию $r : \mathcal{C}_\varepsilon \to \mathcal{C}$ по формуле

$$r(x, y) = (u\sqrt{\frac{v^2}{u^2}}, v).$$

Прообразом точки 0 при этой проекции является $(2k-1)$–мерная сфера $\mathcal{C}_\varepsilon \cap \{v = 0\}$, вне которой проекция является диффеоморфизмом. Кроме того, при указанной проекции любое решение линеаризованной системы, очевидно, перейдёт в некоторое другое решение линеаризованной системы.

Лемма доказана.

Припишем каждому положению равновесия $m = m_j \in \Lambda$ знак $\varepsilon = \varepsilon_j = \pm 1$ по следующему естественному правилу. Этот знак зависит от того, больше или меньше значение энергии h, чем значение $\tilde{h}_j$ возмущённого гамильтониана $\tilde{H}$ в его критической точке $\tilde{m}_j$, близкой к точке m_j: $\varepsilon_j = \operatorname{sgn}(h - \tilde{h}_j)$. Набор $\{\varepsilon_j\}$ этих знаков мы назовём *типом возмущения*.

Ясно, что если подмножество Λ компактно и невырождено, то оно содержит лишь конечное число $m_1, \ldots, m_N$ положений равновесия. К каждому *коническому* положению равновесия $m = m_j \in \Lambda$, $1 \leq j \leq N$, применим следующую конструкцию.

1) Выкинем из Λ точку m и рассмотрим маленький шар U_m с центром в этой точке. Будем отождествлять множество $U_m \cap \Lambda$ с конусом $\mathcal{C}(m) \subset E(m)$ из (64) при помощи вложения $i^\circ : E(m) \to U_m$ из определения 19.

2) Далее, рассмотрим в подпространстве $E(m) \subset T_m M$ гладкое подмногообразие (“ручку”)

$$\mathcal{C}_\varepsilon(m) = \{\xi \in E(m) | d^2 H(m)\xi = \varepsilon\}, \tag{65}$$

где ε — достаточно малое по модулю число знака ε_j: $|\varepsilon| \ll 1$, $\operatorname{sgn}\varepsilon = \varepsilon_j = \pm 1$.

3) Наконец, приклеим к подмногообразию $\Lambda \cap U_m \setminus \{m\}$ гладкую “ручку” $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon(m) \subset E(m)$ из (65) при помощи отображения

$$r|_{\mathcal{C}_\varepsilon \setminus S^{2k-1}} : \mathcal{C}_\varepsilon \setminus S^{2k-1} \to \mathcal{C} \setminus \{0\},$$

где $r = r_j$ — отображение из леммы 11, $2k = 2k_j$ — индекс формы $-\varepsilon_j d^2 H(m)|_{E(m)}$. Здесь мы используем указанное выше отождествление конуса $\mathcal{C} = \mathcal{C}(m)$ с множеством $\Lambda \cap U_m$.

В результате мы получим некоторое замкнутое гладкое многообразие Λ^*, которое можно реализовать как гладкое подмногообразие

$$\Lambda^* \subset \Lambda \cup (\cup_{j=1}^N U_{m_j}) \subset M,$$

близкое к подмножеству Λ.

Определение. Полученное гладкое многообразие Λ^* вместе со структурой периодического расслоения на нём назовём *морсовским разрешением* исходного множества Λ, отвечающим данному типу возмущения гамильтониана.

Ясно, что в случае, когда Λ не содержит положений равновесия, имеем $\Lambda^* = \Lambda$.

По построению, многообразие Λ^* зависит только от невозмущённой системы, набора вложений из определения 19 и типа возмущения, т.е. набора знаков $\{\varepsilon_j, 1 \le j \le N\}$. При этом на Λ^* имеется естественная структура периодического расслоения со слоем окружность, и имеется естественная проекция

$$r : \Lambda^* \to \Lambda, \tag{66}$$

при которой все слои этого расслоения переходят в траектории невозмущённой системы на Λ. Прообраз каждой особой точки m_j при этой проекции диффеоморфен $(2k-1)$–мерной сфере, где $2k = 2k_j$ — индекс формы $-\varepsilon_j d^2 H(m_j)|_{E(m_j)}$.

Итак, морсовское разрешение Λ^* является гладким многообразием и получается из невырожденного множества Λ, имеющего лишь конические особенности, выкидыванием каждой особой точки m_j и вклеиванием вместо неё сферы размерности $2k_j - 1$, естественно расслоенной на окружности.

Теорема 8. *Пусть $\Lambda \subset H^{-1}(h)$ — подмножество, сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы с гамильтонианом H и содержащее положения равновесия этой системы. Пусть подмножество Λ компактно и невырождено (см. определение 18), т.е. содержит лишь невырожденные особенности. Тогда все эти особенности являются коническими и существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для любой гладкой функции $\tilde{H}$ и симплектической структуры $\tilde{\omega}^2$, гомологичной структуре ω^2, где*

$$\|\tilde{H} - H\|_{C^4} + \|\tilde{\omega}^2 - \omega^2\|_{C^1} \leq \varepsilon, \tag{67}$$

выполнено следующее. Если h не является критическим значением функции $\tilde{H}$, то число замкнутых траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $\tilde{H}$ и симплектической структурой $\tilde{\omega}^2$ на поверхности $\tilde{H}^{-1}(h)$ не меньше, чем минимальное число критических точек гладкой функции на фактор-многообразии $B^* = \Lambda^*/S^1$, где Λ^* — морсовское разрешение множества Λ, отвечающее данному типу возмущения гамильтониана.

В действительности, теорема 8 останется верной, если условие гомологичности возмущённой и невозмущённой симплектической структуры заменить следующим условием: 2–форма $\tilde{\omega}^2 - \omega^2$ сохраняет центры тяжести (см. определение 16).

Как мы уже отмечали, размерность отвечающего 1 собственного подпространства $E = E(m) = E_1(A)$ оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$ всегда чётна (так как на $E \setminus \{0\}$ имеется локально свободное действие окружности при помощи потока $dg_H^t(m)$; чётномерность E следует также из его симплектичности, см. следствие 11):

$$\dim E(m) \equiv 0 \pmod 2.$$

Кроме того, так как пересечение подмногообразия Λ^* с окрестностью U_j является гиперповерхностью в E, то его размерность нечётна и равна

$$\dim \Lambda^* = \dim E - 1.$$

В частности, размерность собственного подпространства $E = E_1(A)$ одинакова для всех положений равновесия на Λ.

Замечание. Пусть Λ не является отдельным положением равновесия, т.е. $\dim \Lambda = \dim \Lambda^* > 0$. Легко видеть, что в этом случае для любой особой точки $m \in \Lambda$ гессиан $d^2H(m)$ функции Гамильтона не является знакоопределённым на отвечающем 1 собственном подпространстве $E(m) = E_1(A)$ оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$. Заметим также, что гессиан $d^2H(m)$ функции H является интегралом линеаризованной системы в касательном пространстве в точке m. Поэтому, если Λ не является отдельным положением равновесия, то $\dim E \geq 4$ и

$$\dim \Lambda = \dim \Lambda^* = \dim E - 1 \geq 3.$$

Замечание. Рассмотрим частный случай описанной ситуации — когда подмножество Λ нульмерно и состоит из одного положения равновесия m. При этом, напомним, задано число $T = T(m) > 0$. Невырожденность такого $\Lambda = \{m\}$ означает, что на собственном подпространстве $E = E_1(A)$ оператора $A = dg_H^{T(m)}(m)$, отвечающем собственному значению 1, гессиан $d^2H(m)$ функции Гамильтона *знакоопределен*. В частности, имеется знак $\varepsilon = \pm 1$ ограничения этого гессиана на собственное подпространство $E = E_1(A)$. Знак ε мы назовём знаком точки $\Lambda = \{m\}$. Если в этом случае тип возмущения согласован со знаком точки m (т.е. совпадает с ним), то подмногообразие Λ^* совпадает с "ручкой" (65), т.е. является нечётномерной сферой размерности $\dim \Lambda^* = \dim E - 1$. Если тип возмущения противоположен знаку точки m, то подмногообразие Λ^* пусто, и теорема 8 ничего не утверждает.

Замечание. Частный случай последней ситуации был изучен Мозером [25] и Вейнстейном [34, 35, 36]. А именно, используя наши обозначения, в этих работах подмножество Λ совпадало с (положительным) положением равновесия, а подмногообразие Λ^* было диффеоморфно сфере. При этом в качестве параметра возмущения бралось значение h гамильтониана. Как мы уже упоминали (см. §1.7), основным результатом работы Мозера (относящимся к гамильтонову случаю) является теорема 4 [25], согласно которой в этой ситуации число замкнутых траекторий системы с гамильтонианом H на поверхности $H^{-1}(h + \varepsilon^2)$ не меньше $\frac{1}{2}\dim E$.

Доказательство теоремы 8. Не ограничивая общности, будем считать, что значение гамильтониана на множестве Λ является нулевым: $h = 0$. Пусть m_j, $1 \leq j \leq N$, — набор особых точек множества Λ.

Шаг 1. На этом шаге мы построим специальные координаты в окрестности каждого положения равновесия m_j множества Λ.

Фиксируем какое-нибудь положение равновесия $m_j \in \Lambda$, т.е. критическую точку гамильтониана H. В силу следствия 11 точка m_j является морсовской критической точкой функции H. Согласно лемме Морса [11], существует окрестность U_j точки m_j в M и координаты

$$x^1, \dots x^{2n}, \quad (x^1)^2 + \dots + (x^{2n})^2 \leq 4r_0^2,$$

в этой окрестности, в которых функция H совпадает со своим гессианом, т.е. является квадратичной формой

$$H_0 = \pm (x^1)^2 \pm \dots \pm (x^{2n})^2.$$

Далее мы будем считать радиус $2r_0$ окрестности U_j достаточно малым и не зависящим от возмущения (подробнее выбор радиуса $2r_0$ окрестности U_j см. ниже, шаг 6).

Простое видоизменение леммы Морса показывает, что существует C^2–близкая к тождественной замена координат в U_j, при которой функция $\tilde{H}$ становится этой же квадратичной формой с точностью до константы $\tilde{h}_j$. Отсюда следует, что существует C^2–близкий к тождественному (вообще говоря не симплектический) диффеоморфизм D всего многообразия M на себя, при котором в каждой окрестности U_j имеем $\tilde{H} \circ D = H + \tilde{h}_j$.

Для удобства сделаем ещё одну линейную замену координат

$$(x^1, \dots x^{2n}) \to (y^1, \dots y^{2n}) \tag{68}$$

в U_j, при которой подпространства $E = E(m_j)$ и $F = E^{\perp}$ из (63) становятся координатными подпространствами:

$$E = \{y^{2d+1} = \dots = y^{2n} = 0\}, \quad F = \{y^1 = \dots = y^{2d} = 0\}. \tag{69}$$

При этом будем считать, что на E координаты имеют вид $y^{2i-1} = \sqrt{|\omega_i|}p_i$, $y^{2i} = \sqrt{|\omega_i|}q_i$, $1 \leq i \leq d$, где $p_1, q_1, \dots, p_d, q_d$ — канонические координаты на E из (62), $2d = \dim E$. Ввиду инвариантности подпространств E и F относительно линеаризованной системы, в построенных координатах функция H имеет вид $H = H_E + H_F$, где H_E и H_F — квадратичные формы, зависящие только от переменных $y^1, \dots, y^{2d}$ и $y^{2d+1}, \dots, y^{2n}$ соответственно.

Согласно лемме 6 (см. п. 1.5.2) существует подпространство $\tilde{E} \subset T_{m_j}M$, близкое к E, инвариантное относительно оператора линеаризации возмущённой системы в точке m_j. Ясно, что это подпространство и его косоортогональное дополнение $\tilde{F} = \tilde{E}^{\perp}$ инвариантны относительно возмущённой линеаризованной системы. Для возмущённой системы сделаем аналогичную линейную замену $(\tilde{x}^1, \dots \tilde{x}^{2n}) \to (\tilde{y}^1, \dots \tilde{y}^{2n})$, близкую к (68), отвечающую инвариантным подпространствам $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$. При этом, в силу невырожденности форм $d^2H(m_j)|_E$ и $d^2H(m_j)|_F$, можно выбрать последнюю замену так, чтобы коэффициенты форм $d^2\tilde{H}(m_j)|_{\tilde{E}}$ и $d^2\tilde{H}(m_j)|_{\tilde{F}}$ в координатах $\tilde{y}$ совпадали с коэффициентами форм $d^2H(m_j)|_E$ и $d^2H(m_j)|_F$ в координатах y.

Таким образом, существуют (быть может, меньшие) окрестности U_j особых точек m_j и константа $c > 0$, зависящие только от невозмущённой системы, такие, что для любого возмущения вида (67) существует диффеоморфизм D фазового пространства на себя, C^2–близкий к тождественному, такой, что

$$\begin{gathered} (D^*\tilde{H} - H)|_{U_j} \equiv \tilde{h}_j, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \|D^*\tilde{H} - H\|_{C^2} + \|D^*\tilde{\omega}^2 - \omega^2\|_{C^1} \leq c\varepsilon, \end{gathered} \tag{70}$$

где диффеоморфизм D зависит от возмущения и C^2–близок к тождественному. В частности,

$$\sum_{i=1}^{N} |\tilde{h}_j| \leq c\varepsilon. \tag{71}$$

Далее будем считать, не ограничивая общности, что диффеоморфизм D является тождественным.

Согласно сказанному, мы можем считать, не ограничивая общности, что в координатной окрестности U_j любой критической точки $m_j \in \Lambda$ функции H выполняются тождества

$$H \equiv H_0, \quad \tilde{H} \equiv H_0 + \tilde{h}_j,$$

где

$$H_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial y^k \partial y^l}(m_j) y^k y^l = \pm(y^1)^2 \pm \ldots \pm (y^{2n})^2, \tag{72}$$

и подпространства $E = E(m_j)$ и $F = F(m_j)$ имеют вид (69). При этом на симплектическую структуру по-прежнему накладывается C^1–малое возмущение. Это возмущение симплектической структуры не произвольно, а удовлетворяет следующим условиям:

1. разность $\tilde{\omega}^2 - \omega^2$ гомологична нулю или, по меньшей мере, сохраняет центры тяжести;

2. в каждой точке m_j подпространства E и F остаются косоортогональными и, тем самым, инвариантны относительно обеих линеаризованных систем: невозмущённой и возмущённой.

В итоге мы получаем, что в новых координатах $y^1, \ldots y^{2n}$ гамильтониан H является квадратичной формой (72), $\tilde{H} = H + \tilde{h}_j$, и сфера любого радиуса в подпространстве E инвариантна относительно потока линеаризованной системы.

Сделаем теперь масштабную замену координат, точнее, семейство таких замен.

Фиксируем значение $r \in (0, r_0)$. В окрестности $U_j \ni m_j$ сделаем (каноническую) масштабную замену $y = ry_r$, $H = H(m_j) + r^2 H_r$ (с добавлением константы), $\omega^2 = r^2\omega_r^2$, $\tilde{\omega}^2 = r^2\tilde{\omega}_r^2$. Таким образом, в новых координатах рассматриваемая окрестность U_r имеет (большой) радиус порядка r_0/r, и в ней *гамильтониан постоянен* и является *квадратичной формой* H_0; невозмущённый уровень энергии равен нулю, а возмущённый положителен: $h_r = 0$, $\tilde{h}_r = -\tilde{h}/r^2$. И невозмущённая, и возмущённая симплектические структуры зависят от r.

Итак, в координатах y_r гамильтониан $\tilde{H}_r = H_r = H$ является квадратичной формой, не зависящей от r, и совпадает с квадратичной частью H_0 из (72) функции H в точке m_j.

Пусть $\omega_{kl}(y)$ — компоненты симплектической структуры ω^2 в координатах $y^1, \dots y^{2n}$. Нетрудно видеть, что компоненты $(\omega_r)_{kl}(y_r)$ симплектической структуры ω_r^2 имеют вид

$$(\omega_r)_{kl}(y_r) = \omega_{kl}(ry_r), \tag{73}$$

поэтому в шаре радиуса 2 они отличаются от констант $\omega_{kl}(0)$ на величину порядка r.

Более точно, существует число $C > 0$, зависящее только от невозмущённой системы, такое, что в шаре $(y^1)^2 + \ldots + (y^{2n})^2 \le 4$ радиуса 2 имеет место неравенство

$$\|\omega_r^2 - \omega_0^2\|_{C^1} \le Cr \tag{74}$$

при любом $r \in (0, r_0)$, где $\omega_0^2 := \lim_{r\to 0} \omega_r^2 = \omega^2(0)$.

Симплектическую структуру ω_0^2, коэффициенты которой не зависят от точки, назовём *модельной*. Гамильтонову (линейную) систему с гамильтонианом H_0 из (72) и симплектической структурой ω_0^2 назовём *модельной* гамильтоновой системой. Таким образом, невозмущённая система r–близка к модельной системе. Следовательно, возмущённая система $(r + \varepsilon)$–близка к модельной системе.

Более точно, в силу (74), при выполнении неравенств (70) в шаре $(y^1)^2 + \ldots + (y^{2n})^2 \le 4$ радиуса 2 имеет место неравенство

$$\|D^*\tilde{\omega}_r^2 - \omega_0^2\|_{C^1} \le c\varepsilon + Cr \tag{75}$$

при любом $r \in (0, r_0]$, где $r_0 \le 1$. Здесь мы воспользовались формулой (73), в силу которой в любом шаре фиксированного радиуса

$$\|D^*\tilde{\omega}_r^2 - \omega_r^2\|_{C^1} \le \|D^*\tilde{\omega}^2 - \omega^2\|_{C^1}$$

при любом $r \in (0,1]$.

Дальнейшее доказательство проведём в несколько шагов, полностью аналогичных шагам в доказательстве утверждения 3 (см. п. 1.6.1).

Шаг 2. Рассмотрим модельную гамильтонову систему, т.е. линеаризованную систему с гамильтонианом H_0 и симплектической структурой ω_0^2.

Пусть $S = S^{2d-1}$ — единичная сфера в подпространстве E. Положим $h_- = \min H_0|_S$, $h_+ = \max H_0|_S$.

Рассмотрим в пространстве E окрестность $K \subset E$ сферы S, т.е. "кольцо", ограниченное сферами радиусов $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ с центрами в начале координат. Рассмотрим разбиение кольца K на множества уровней функции H_0, полагая

$$K_h := K \cap H_0^{-1}(h), \quad \min(\frac{9}{4}h_-, \frac{1}{4}h_-) < h < \frac{9}{4}h_+.$$

Ясно, что каждое из множеств K_h является гладким подмногообразием в поверхности $H_0^{-1}(h)$, сплошь заполненным замкнутыми траекториями модельной (т.е. линеаризованной) гамильтоновой системы с гамильтонианом H_0 и симплектической структурой ω_0^2.

Покажем, что подмногообразие K_h *невырождено* (в смысле определения 1) и, более того, строго невырождено. Для любой точки $\eta \in K_h$ рассмотрим любой касательный вектор ξ к поверхности $H_0^{-1}(h)$ в этой точке, который при операторе монодромии неподвижен с точностью до некоторого вектора, касательного к подмногообразию K_h. Это значит, в частности, что вектор $A\xi - \xi$ принадлежит подпространству E. Согласно следствию 11, разложим вектор ξ в сумму $\xi_E + \xi_F$, где $\xi_E \in E$, $\xi_F \in F$. Тогда $A\xi_F - \xi_F \in E$. С другой стороны, ввиду инвариантности подпространства F относительно оператора A, имеем $A\xi_F - \xi_F \in F$, откуда $A\xi_F - \xi_F = 0$, т.е. $\xi_F \in E$. Таким образом, $\xi \in E$, а значит, $\xi \in T_\eta K_h$. Это доказывает строгую невырожденность подмногообразия K_h.

Применим к модельной системе и подмногообразию K_h утверждение 3.

Фиксируем положение равновесия m_j. Пусть для определённости оно положительное: $\varepsilon_j = +1$, так что

$$\tilde{h}_j < h = 0.$$

Далее индекс j будем иногда опускать.

Шаг 3. Рассмотрим сначала более простой случай: когда исходное множество Λ состоит из одного положения равновесия m, т.е.

$$\Lambda = \{m\}.$$

В этом случае функция H_0 положительно определена на подпространстве E, и поэтому подмногообразие K_1 является единичной сферой: $K_1 = S$

(см. (72)). В частности, это подмногообразие компактно. Следовательно, сфера S (в качестве подмногообразия Λ) по отношению к линеаризованной системе удовлетворяет всем требованиям утверждения 3.

Согласно утверждению 3, существует столь малое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любой гамильтоновой системы в шаре U, ε_0–близкой к модельной, существует вложение $i : S \to \tilde{H}^{-1}(1)$ и S^1–инвариантные гладкие функции ψ и $\tilde{T}$ на S, такие, что:

1. Функция $\tilde{T}$ близка к $T(m)$, а вложение i близко к тождественному.

2. Для любой критической окружности $\gamma \subset S$ функции ψ окружность $i(\gamma)$ является замкнутой траекторией возмущённой системы с периодом $\tilde{T}(\gamma)$.

Здесь близость понимается в смысле C^2–нормы в пространстве гамильтонианов и C^1–нормы в пространстве симплектических структур.

Пусть величина возмущения $\varepsilon > 0$ из (67) столь мала, что

$$c\varepsilon + C\sqrt{c\varepsilon} \leq \varepsilon_0$$

и $\varepsilon \leq 1$. Покажем, что система с гамильтонианом $D^*\tilde{H}_r = H_0$ и симплектической структурой $D^*\tilde{\omega}_r^2$ достаточно близка к модельной системе.

Напомним (71), что возмущение уровня энергии имеет порядок ε: $|\tilde{h}| \leq c\varepsilon$. Положим

$$r = \sqrt{-\tilde{h}}.$$

Отсюда, в силу (75), получаем, что при возмущении исходной системы вида (67), в шаре радиуса 2 возмущение симплектической структуры имеет вид

$$\|D^*\tilde{\omega}_r^2 - \omega_0^2\|_{C^1} \leq c\varepsilon + Cr \leq \varepsilon_0.$$

Кроме того, возмущённый гамильтониан совпадает с исходным: $D^*\tilde{H}_r = H_0$, а возмущённый уровень энергии равен $-\tilde{h}/r^2 = 1$. Следовательно, применимо утверждение 3.

Осталось заметить, что сфера S совпадает с “клеткой” Λ^* вместе с действием окружности. Итак, в случае, когда множество Λ является отдельным положением равновесия, теорема 8 доказана.

Шаг 4. Пусть теперь множество Λ не является отдельным положением равновесия. Фиксируем положение равновесия $m_j \in \Lambda$, $1 \leq j \leq N$. Пусть U — шар радиуса 2 в пространстве $E = E(m_j)$.

Для каждой точки $m = (y^1, \dots y^{2n}) \in S \subset E$ единичной сферы $S = E \cap \{(y^1)^2 + \ldots + (y^{2n})^2 = 1\}$ в подпространстве $E = E(m_j)$ проведём следующие построения, аналогичные построениям, необходимым для формулировки основной леммы 8 (см. п. 1.6.1):

0. На поверхности $K_h \ni m$ фиксируем естественное действие окружности, задаваемое ограничением линеаризованной системы на K_h.

1. Выберем маленькую секущую гиперповерхность Σ_m, гладко зависящую от точки m и трансверсальную к траекториям γ_m. Например, в качестве гиперповерхности Σ_m можно взять площадку, ортогональную к траектории γ_m относительно стандартного скалярного произведения в U_j. Положим $\sigma_m = \Sigma_m \cap H_0^{-1}(H_0(m))$ (это — симплектическое подмногообразие).

2. В каждой точке m единичной сферы S в собственном подпространстве E рассмотрим подпространство $\theta_m = E \cap T_m\sigma_m$ в $T_m\sigma_m$.

3. Кроме того, из каждой точки m единичной сферы в подпространстве E, перенесём подпространство θ_m во все точки $m' \in \sigma_m$. Другими словами, построим линейный оператор $P_{m,m'} : \theta_m \to T_{m'}(H_0^{-1}(H_0(m)))$, $m' \in \sigma_m$, где $P_{m,m} = Id_{\theta_m}$. Образ этого оператора обозначим через $\theta_{m,m'}$. Таким образом, оператор $P_{m,m'}$ является изоморфизмом подпространств θ_m и $\theta_{m,m'}$:

$$P_{m,m'} : \theta_m \to \theta_{m,m'}, \quad m' \in \sigma_m.$$

4. Наконец, пусть F — косоортогональное (а значит, и ортогональное) дополнение к подпространству E в T_mM. Через каждую точку m единичной сферы S в подпространстве E проведём маленькую площадку F_m, параллельную подпространству F, и "спроектируем" её на поверхность $H_0^{-1}(H_0(m))$ при помощи градиентного потока функции H_0. В результате проектирования мы получим маленькую поверхность $N_m \subset H_0^{-1}(H_0(m))$ той же размерности, что и F, и тоже трансверсально пересекающую E в точке m. Фиксируем также на поверхности $K_h \ni m$ риманову связность (относительно индуцированной римановой метрики).

Все построенные объекты предполагаются гладко зависящими от точек $m \in S = E \cap \{(y^1)^2 + \ldots + (y^{2n})^2 = 1\}$ и $m' \in \sigma_m$. При помощи гомотетии с центром в начале координат перенесём все построенные объекты с единичной сферы на сферу любого радиуса $r > 0$ и, в частности, мы получим эти объекты в проколотом шаре $U \setminus \{0\}$ радиуса 2.

Изменяя $r \in (0, 2)$, мы получаем в пересечении $E^\circ = E \cap U \setminus \{0\}$ подпространства E со всей проколотой окрестностью U следующие объекты: гладкое действие окружности на каждом подмногообразии $H_0^{-1}(h) \cap E^\circ$, поле сечений Пуанкаре $\sigma_m \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $m \in E^\circ$, поле подпространств

$$\theta_m \subset T_m\sigma_m, \quad m \in E^\circ,$$

поле "операторов переноса"

$$P_{m,m'} : \theta_m \to \theta_{m,m'}, \quad m \in E^\circ, m' \in \sigma_m,$$

семейство “нормалей” $N_m \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $m \in E^\circ$, и риманову метрику на каждом подмногообразии $H_0^{-1}(h) \cap E \cap U \setminus \{0\}$.

Здесь мы неоднократно воспользовались тем, что разбиение пространства на множества уровней $H_0^{-1}(h)$ функции H_0 сохраняется при гомотетии. Последнее следует из *однородности* функции H_0 в рассматриваемых координатах $y^1, \ldots, y^{2n}$.

Ясно, что поверхности N_m семейства “нормалей” попарно не пересекаются, и их объединение является (конусообразной) окрестностью множества E° в U. Поэтому корректно определена ретракция ρ указанной окрестности на множество E°, переводящая каждую нормаль N_m в точку m:

$$\rho(N_m) = m, \quad m \in E \cap U \setminus \{0\}.$$

Построенная ретракция ρ является гладкой и обладает следующим свойством: она отображает (конусообразную) окрестность поверхности E° в саму эту поверхность с сохранением значений функции H_0. При этом

$$\rho(m) = m, \quad m \in E^\circ.$$

Аналогично, изменяя $r \in (0, r_0)$, мы получаем в пересечении $E \cap U_j \setminus \{m_j\}$ подпространства E со всей проколотой $2r_0$–окрестностью U_j точки m_j все перечисленные объекты.

Продолжим полученные объекты во все остальные точки $m \in \Lambda \setminus U_j$ множества Λ гладким образом. При этом нужно указать заранее, как мы будем определять аналогичные объекты на “нулевом уровне” $\tilde{H}^{-1}(0)$ возмущённого гамильтониана (более точно, на “множестве нулевого уровня возмущённого гамильтониана”). Внутри и вне окрестностей U_j мы будем определять эти объекты *разными способами.*

Введём в фазовом пространстве любую риманову метрику. Выпустим из поверхности $H^{-1}(0) \setminus \{m_1, \ldots, m_N\}$ фазовые траектории градиентного потока функции H. *Вне окрестностей* U_j движение вдоль этих траекторий осуществляет некоторый диффеоморфизм между уровнями невозмущённого и возмущённого гамильтонианов. При помощи этого диффеоморфизма мы и будем переносить все объекты на нулевой уровень возмущённого гамильтониана. В частности, мы будем переносить подмножество Λ с действием окружности на нём. Перенесённые таким способом объекты назовём *вторичными объектами.*

Однако в окрестности U_j мы уже фактически имеем нужные объекты на нулевом (как и на любом другом) уровне возмущённого гамильтониана, так как мы их задали *на всех уровнях* невозмущённого гамильтониана H, а возмущённый гамильтониан имеет те же множества уровней, что и невозмущённый. Построенные нами объекты мы назовём *первичными объектами.*

Эти объекты не являются, вообще говоря, перенесением при помощи градиентного потока функции H. Дело в том, что мы их будем рассматривать как определённые на самом подмногообразии $\Lambda^* \cap U_j \subset \tilde{H}^{-1}(0)$, где

$$\Lambda^* \cap U_j = E \cap H_0^{-1}(-\tilde{h}_j).$$

Осталось построить “плавный переход” между этими двумя способами, т.е. “согласовать” в некоторой промежуточной области все пять объектов, построенных разными способами.

Начнём с основного объекта — подмногообразия Λ^* вместе со структурой периодического расслоения на нём. Поясним, что все вторичные объекты, в частности, само подмногообразие $\Lambda^* \subset \tilde{H}^{-1}(0)$ вместе со структурой периодического расслоения на нём, получаются их перенесением с $\Lambda \subset H^{-1}(0)$ на нулевой уровень $\tilde{H}^{-1}(0)$ возмущённого гамильтониана. Но вблизи точки m_j такого перенесения в принципе не может быть, так как множество $H_0^{-1}(0)$ не является гладким подмногообразием. Мы вместо такого перенесения рассматриваем первичный объект: объявляем в качестве подмногообразия $\Lambda^* \cap U_{m_j}$ “ручку” $\mathcal{C}_\varepsilon(m)$ из (65) вместе с (первичными) объектами на ней. Поэтому для возможности перехода к (вторичным) объектам вне окрестностей U_j мы должны добиться, в частности, чтобы построенные (разными способами) подмногообразия Λ^* в $\tilde{H}^{-1}(0)$ совпадали, вместе с действием окружности на них (при любом значении $\tilde{h}_j$).

Для этого изменим риманову метрику вблизи границы шара U так, чтобы в малой окрестности конуса $\mathcal{C}(m_j) = E \cap H_0^{-1}(0)$ вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ векторное поле $u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ на E, вдоль которого мы осуществляли ретракцию $r = r_j$ при доказательстве леммы 11, было ортогонально множествам уровня функции H_0. Перенесём в этой окрестности все объекты с множества $H_0^{-1}(0)$ на каждое близкое множество $H_0^{-1}(\varepsilon)$. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon = -\tilde{h}_j$ вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ перенесённое (т.е. вторичное) множество Λ^* совпадёт с первичным множеством Λ^* — “ручкой” $\mathcal{C}_\varepsilon(m)$ из (65). Кроме того, по лемме 11, вне указанного шара перенесённое с множества Λ на Λ^* действие окружности (при помощи градиентного потока функции H_0) будет совпадать с естественным действием окружности на Λ^*. Поэтому вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ подмногообразие Λ^* вместе со структурой периодического расслоения на нём будет определено однозначно (при любом значении $\varepsilon = -\tilde{h}_j$), т.е. одинаково при обоих способах определения.

Осталось определить остальные четыре объекта 1–4 вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ в U, так, чтобы они “плавно перешли” из первичных объектов во вторичные.

Мы построим новые (промежуточные) объекты в шаре радиуса 1 вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ в U. При этом внутри шара радиуса $\frac{1}{2}$ мы оставим уже построенные (первичные) объекты, а вне шара радиуса 1 будем переносить все объекты при помощи градиентного потока (т.е. “оставим” вторичные объекты). Подчеркнём, что мы будем строить новые объекты в шаре U не для любых поверхностей, близких к поверхностям уровней функции H_0, а только для конкретных множеств уровня данной функции H_0 в U. При этом мы не будем строить явного переноса с одной поверхности на другую, а будем рассматривать все объекты как первичные.

Лемма 12. *Пусть H_0 — фиксированная функция, равная квадратичной части (72) невозмущённого гамильтониана H в особой точке m_j. Тогда в проколотом шаре $U \setminus \{0\}$ радиуса 2 существуют поле сечений Пуанкаре $\sigma_m \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $m \in E^\circ = E \cap U \setminus \{0\}$, поле подпространств $\theta_m \subset T_m\sigma_m$, $m \in E^\circ$, поле “операторов переноса”$P_{m,m'} : \theta_m \to \theta_{m,m'}$, $m \in E^\circ$, $m' \in \sigma_m$, семейство “нормалей” $N_m \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $m \in E^\circ$, и семейство римановых метрик на поверхностях $H_0^{-1}(h) \cap E^\circ$, обладающие следующими свойствами.*

1. *Для любой точки $m \in E^\circ$, принадлежащей шару радиуса $\frac{1}{2}$, эти объекты совпадают с первичными объектами.*

2. *Для любой точки $m \in E^\circ$, лежащей вне шара радиуса 1, эти объекты совпадают со вторичными объектами.*

3. *Для любой точки $m \in H_0^{-1}(0) \cap E^\circ$ эти объекты совпадают с объектами обоих типов.*

Доказательство. Заметим, что на множестве $H_0^{-1}(0)$ объекты обоих типов совпадают (так как “перенос с помощью градиентного потока” является тождественным на $H_0^{-1}(0)$).

Построим естественную аффинную структуру на множестве первичных объектов 1–4, определённых для поверхностей уровня фиксированной функции H_0 и фиксированных невырожденных подмножеств $K_h \subset H_0^{-1}(h)$ вне шара радиуса $\frac{1}{2}$ в U.

Любые две римановы метрики g_0 и g_1 на поверхностях K_h соединим гомотопией $g_u = (1-u)g_0 + ug_1$, $0 \le u \le 1$.

Фиксируем любую точку $m \in H_0^{-1}(0) \cap E^\circ$ и рассмотрим все имеющиеся объекты в этой точке.

Любые две секущие поверхности σ_{m0}, $\sigma_{m1} \subset H_0^{-1}(H_0(m))$ соединим гомотопией $\sigma_{mu} \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $0 \le u \le 1$, которую определим так. Из любой точки $m' \in \sigma_{m0}$ выпустим фазовую траекторию $\gamma_{m'}(t)$ линеаризованной системы. Пусть эта траектория пересекла поверхность σ_{m1} в момент времени $t = \tau(m')$. Положим $\sigma_{mu} := \{A_{mu}(m') \,|\, m' \in \sigma_{m0}\}$, $0 \le u \le 1$, где $A_{mu}(m') := \gamma_{m'}(u\tau(m'))$.

Любые два подпространства $\theta_{m0} \subset T_{m0}\sigma_{m0}$, $\theta_{m1} \subset T_{m1}\sigma_{m1}$ соединим гомотопией $\theta_{mu} \subset T_{mu}\sigma_{mu}$, $0 \leq u \leq 1$, полагая $\theta_{mu} = E \cap T_m\sigma_{mu}$.

Любые два семейства операторов переноса $P_{m,m'_0,0} : \theta_{m0} \to \theta_{m,m'_0,0}$, $m'_0 \in \sigma_{m0}$, и $P_{m,m'_1,1} : \theta_{m1} \to \theta_{m,m'_1,1}$, $m'_1 \in \sigma_{m1}$, соединим гомотопией $P_{m,m'_u,u} : \theta_{mu} \to \theta_{m,m'_u,u}$, $m'_u \in \sigma_{mu}$, $0 \leq u \leq 1$, которую определим так. Для любой точки $m'_0 \in \sigma_{m0}$ и любого вектора $\xi \in \theta_{m0}$ положим $m'_u = A_{mu}(m'_0)$, $\xi_{mu} := dA_{mu}(m)\xi_{m0} \in \theta_{mu}$, $P_{m,m'_u,u}\xi_{mu} := (1-u)dA_{mu}(m'_0) \circ P_{m,m'_0,0}\xi_{m0} + udA_{mu}(m'_0) \circ dA_{m1}(m'_0)^{-1} \circ P_{m,m'_1,1}\xi_{m1}$.

Любые две "нормали" $N_{m0} \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $N_{m1} \subset H_0^{-1}(H_0(m))$ соединим гомотопией $N_{mu} \subset H_0^{-1}(H_0(m))$, $0 \leq u \leq 1$, которую определим так. Через любую точку $m_0 \in N_{m0}$ проведём площадку, параллельную подпространству E. Пусть эта площадка пересекла поверхность N_{m1} в точке $m_1 = m_1(m_0)$. Соединим эти точки кратчайшей геодезической $m_u = m_u(m_0)$, $0 \leq u \leq 1$. Положим $N_{mu} = \{m_u(m_0) \,|\, m_0 \in N_{m0}\}$, $0 \leq u \leq 1$.

Соединим первичные и вторичные объекты в проколотой окрестности точки 0 гомотопией указанного вида.

Возьмем C^∞–гладкую функцию $u(r)$, $0 \leq r \leq 2$, вида $0 \leq u(r) \leq 1$ при $0 \leq r \leq 2$; $u(r) = 1$ при $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$; $u(r) = 0$ при $1 \leq r \leq 2$. При каждом значении $r \in [0,2]$ для любой точки $m \in E \cap U$, принадлежащей сфере радиуса r, определим риманову метрику $g(m) := g_{u(r)}(m)$ в этой точке, и аналогично четыре других объекта.

Построенные объекты удовлетворяют условиям леммы. Лемма 12 доказана.

Вернёмся к первичным объектам, определённым в шаре U и окрестности U_j точки m_j.

Отметим, что все первичные объекты в U (U_j) по построению *инвариантны* относительно гомотетии с центром в 0 (в точке m_j) с любым коэффициентом гомотетии, меньшим 1. Отсюда получаем важную связь между первичными объектами в шаре U радиуса 2 и $2r_0$–окрестности U_j точки m_j:

При отображении шара U в шар U_j, являющемся гомотетией с любым коэффициентом вида $r \in (0, r_0)$, все первичные объекты в шаре U переходят в соответствующие первичные объекты в шаре U_j.

Шаг 5. Рассмотрим в подпространстве E открытое кольцо $K \subset E$, содержащее единичную сферу S и ограниченное сферами радиусов $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ в E. Напомним (шаг 2), что кольцо K разбито на гиперповерхности $K_h = K \cap H_0^{-1}(h)$, $\frac{9}{4}h_- < h < \frac{9}{4}h_+$.

Обозначим через $U = \{(y^1)^2 + \ldots + (y^{2n})^2 < 4\}$ открытый шар радиуса 2 с центром в начале координат. Это — область фазового пространства модельной (т.е. линеаризованной) системы.

Каждая поверхность K_h является гладким невырожденным инвариантным подмногообразием в поверхности $H_0^{-1}(h)$, сплошь заполненным замкнутыми траекториями модельной (т.е. линеаризованной) гамильтоновой системы с гамильтонианом H_0 и симплектической структурой ω_0^2.

В отличие от предыдущего случая, поверхности K_h не компактны. Тем не менее, аналогичное доказательство показывает, что вблизи любого компактного S^1–инвариантного подмножества в невырожденном подмногообразии, заполненном замкнутыми траекториями, справедлив аналог утверждения 3.

В нашем случае справедлив следующий аналог утверждения 3.

Лемма 13. *Существуют столь малые числа $\varepsilon_* > 0$, $\tau > 0$ и окрестность Ω единичной сферы $S \subset E$ в шаре U, зависящие только от невозмущённой системы, такие, что для любого $\varepsilon_0 \in [0, \varepsilon_*]$ и любой гамильтоновой системы с гамильтонианом $\tilde{H} = H_0$ и симплектической структурой $\tilde{\omega}^2$, ε_0–близкой к модельной:*

$$\|\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2\|_{C^1} \leq \varepsilon_0, \tag{76}$$

существует вложение $i : K \to U$ и S^1–инвариантные гладкие функции ψ и $\tilde{T}$ на K, обладающие следующими свойствами:

1. *Функция $\tilde{T}$ ε_0–близка к числу $T(m_j)$, а вложение i ε_0–близко к тождественному.*

2. *Вложение i сохраняет значение гамильтониана: $H_0 \circ i = H_0|_K$.*

3. *Для любой окружности $\gamma \subset K$, являющейся критической для функции $\psi|_{K_h}$ её образ $i(\gamma)$ является замкнутой траекторией возмущённой системы с периодом $\tilde{T}(\gamma)$, где $h = H_0(\gamma)$.*

4. *Любая замкнутая траектория возмущённой системы, пересекающая область Ω и имеющая период в промежутке $[T(m_j) - \tau, T(m_j) + \tau]$, является образом при отображении i некоторой окружности $\gamma \subset K$, являющейся критической для функции $\psi|_{K_h}$.*

Отметим, что доказательство утверждения 3 основано на основной лемме 8, а при доказательстве этой леммы указан однозначный способ построения вложения i и функции $\tilde{T}$, зависящий только от следующих объектов: способа переноса подмногообразия K_h с поверхности $H_0^{-1}(h)$ на $\tilde{H}^{-1}(h)$, поля сечений σ_m, подпространств θ_m, поля операторов переноса $P_{m,m'}$, ретракции ρ и римановой метрики на K_h (два последних объекта нужны для однозначности построения вложения i). Так как в нашем случае $\tilde{H} = H_0$, то все эти объекты были фиксированы на предыдущем шаге (как первичные).

Отметим также, что по вложению i однозначно строится функция ψ (с точностью до постоянного слагаемого).

Поэтому доказательство леммы 8 даёт однозначный способ построения вложения i и функций $\tilde{T}$ и ψ, удовлетворяющих требованиям леммы 13. В частности, этот способ не зависит от выбора локальных координат в фазовом пространстве.

Шаг 6. На этом шаге мы выберем малый радиус $r_0 > 0$ окрестности U_j точки m_j. Для этого введём следующие обозначения.

Обозначим через d норму оператора $(A_F - I)^{-1}$, где $A_F = A|_F$:

$$d = \|(A_F - I)^{-1}\|. \tag{77}$$

Обозначим через B такое положительное число, что для любого $\varepsilon_0 \in [0, 1]$, любой возмущённой гамильтоновой системы $\tilde{V}$ с гамильтонианом H_0 и симплектической структурой вида (76) и любой точки y единичной сферы в U выполнялось неравенство

$$|g^t_{\tilde{V}}(y) - g^t_V(y)| \leq B\varepsilon_0, \quad 0 \leq t \leq 2T(m),$$

где V — модельная (т.е. линеаризованная) гамильтонова система. Обозначим через b такое положительное число, что для любого числа $\tilde{T}$ из отрезка $[0, 2T(m_j)]$ и любой точки y единичной сферы в U

$$|g^{\tilde{T}}_V(y) - Ay| \leq b|\tilde{T} - T(m_j)|.$$

Тогда для любого $\tilde{T} \in [0, 2T(m_j)]$ имеем

$$|g^{\tilde{T}}_{\tilde{V}}(y) - Ay| \leq |g^{\tilde{T}}_{\tilde{V}}(y) - g^{\tilde{T}}_V(y)| + |g^{\tilde{T}}_V(y) - Ay| \leq B\varepsilon_0 + b|\tilde{T} - T(m_j)|. \tag{78}$$

Пусть $\varepsilon_* > 0$ — число из леммы 13. Уменьшим, если нужно, радиус r_0 окрестности U_j и возьмём малые числа $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $Cr_0 + c\varepsilon \leq \varepsilon_*$, где C и c — константы из (74) и (70);

2. пересечение единичной сферы в U с u–окрестностью подпространства E целиком лежит в окрестности Ω из леммы 13, где

$$u = d(B(c\varepsilon + Cr_0) + b\tau); \tag{79}$$

3. для любой точки $m \in \Lambda$, принадлежащей r_0–окрестности точки m_j,

$$|T(m) - T(m_j)| \leq \tau; \tag{80}$$

4. при любом $\varepsilon_0 \in [0, \min(\varepsilon_*, Cr_0 + c\varepsilon)]$ вложение i из леммы 13 достаточно близко к тождественному (подробнее см. ниже):
$$i \approx Id_K. \tag{81}$$

Наложим на исходную гамильтонову систему любое ε–малое возмущение вида (67).

Для любого $r \in (0, r_0]$ рассмотрим в шаре U радиуса 2 две гамильтоновы системы, близкие к модельной: невозмущённую и возмущённую системы с гамильтонианом H_0 и симплектическими структурами ω_r^2 и $D^*\tilde{\omega}_r^2$ из (73). В силу (74) и (75) невозмущённая и возмущённая системы (Cr)– и $(Cr+c\varepsilon)$–близки к модельной системе соответственно. Значит, ввиду выбора чисел ε и r (см. условие 1), эти системы удовлетворяют условию (76) леммы 13 (близость к модельной системе).

Построим соответствующие этим системам вложения i_r, $\tilde{i}_r : K \to U$, функции $\psi_r, \tilde{\psi}_r$ и функции $T_r, \tilde{T}_r$ на K, существующие в силу леммы 13. При этом мы построим эти вложения и функции по однозначному алгоритму, указанному при доказательстве утверждения 3 (см. лемму 8).

Сделаем теперь при каждом r обратную замену координат в шаре U, переводящую этот шар в $2r$–окрестность rU точки m_j в U_j. Другими словами, при каждом r перенесём все построенные вложения и функции на маленькое кольцо rK, лежащее в $2r_0$–окрестности U_j точки m_j. В итоге мы получим для обеих систем однопараметрическое семейство вложений $rK \to U_j$ и функций на кольцах $rK \subset U_j$, $0 < r \le r_0$. Мы утверждаем, что для любых двух разных значений $r, r' \in (0, r_0]$ на пересечении колец rK и $r'K$ построенные вложения и функции, отвечающие одной и той же системе, совпадут. Это следует из однозначности построения этих вложений и функций (т.е. независимости этого построения от выбора координат), с учётом замечания, сделанного в конце шага 4.

В итоге мы получаем для невозмущённой системы единое вложение $i^\circ : E' \setminus \{m_j\} \to U_j \setminus \{m_j\}$ и функции T° и ψ°, определённые в проколотой поверхности $E' \setminus \{m_j\}$, где
$$E' = E \cap \frac{3}{4} r_0 U \subset U_j.$$
Для возмущённой системы мы получаем некоторое вложение $\tilde{i}^\circ : E' \setminus \{m_j\} \to U_j$ и функции $\tilde{T}^\circ$ и $\tilde{\psi}^\circ$ в $E' \setminus \{m_j\}$.

Продолжим вложения i°, $\tilde{i}^\circ$ и функцию периода T° в точку m_j, полагая $i^\circ(m_j) = \tilde{i}^\circ(m_j) = m_j$, $T^\circ(m_j) = T(m_j)$.

Лемма 14. *Пусть радиус r_0 окрестности U_j и возмущение ε исходной системы достаточно малы (см. выше). Тогда соответствующие вложе-*

ния i°, $\tilde{i}^\circ : E' \to U_j$ *и функции* $T^\circ : E' \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}^\circ : E' \setminus \{m_j\} \to \mathbb{R}$ *обладают следующими свойствами:*

1. *Вложения* i°, $\tilde{i}^\circ$ *и функции* T°, $\tilde{T}^\circ$ *являются гладкими в проколотой поверхности* $E' \setminus \{m_j\}$.

2. *Вложения* i°, $\tilde{i}^\circ$ *и функция* T° *являются непрерывными на* E'.

3. *Любая замкнутая траектория невозмущённой (возмущённой) системы, пересекающая* r_0*–окрестность точки* m_j *и имеющая период, лежащий в отрезке* $[T(m_j) - \tau, T(m_j) + \tau]$, *является образом при отображении* i° $(\tilde{i}^\circ)$ *некоторой окружности* $\gamma \subset E'$ *и имеет период* $T^\circ \circ i^{\circ -1}$ $(\tilde{T}^\circ \circ (\tilde{i}^\circ)^{-1})$. *Здесь* $\tau > 0$ *— фиксированное выше маленькое число.*

4. *Вложение* i° *и функция* T° *на* E' *являются "почти гладкими" в следующем смысле. Существует гладкое семейство вложений* $i_r : S \to U$ *и гладкое семейство функций* $T_r : S \to \mathbb{R}$, $|r| < 2r_0$, *такие, что вложение* i_0 *является тождественным отображением сферы* $S = S^{2d-1} \subset E$ *на себя,* $T_0 \equiv T(m_j)$ *и* $i^\circ(ry) = ri_r(y)$, $T^\circ(ry) = T_r(y)$ *при любых* $y \in S^{2n-1}$, $0 \leq r < 2r_0$.

Следствие 12. *Пересечение множества* Λ *с* r_0*–окрестностью точки* m_j *лежит в поверхности* $i(E')$ *и совпадает с пересечением множества* $i^\circ(\mathcal{C}(m_j))$ *с этой окрестностью, где* $\mathcal{C}(m_j) = E' \cap H_0^{-1}(0)$. *При этом* $T^\circ|_{\mathcal{C}(m_j)} = T \circ i^\circ$.

Доказательство. 1) Пункт 1 леммы 14 очевиден.

2) По построению вложений и функций на E', для любой точки $y \in S$ единичной сферы S в подпространстве E верны следующие формулы:

$$\begin{matrix} i^\circ(ry) = ri_r(y), & T^\circ(ry) = T_r(y), & \psi^\circ(ry) = \psi_r(y), \\ \tilde{i}^\circ(ry) = r\tilde{i}_r(y), & \tilde{T}^\circ(ry) = \tilde{T}_r(y), & \tilde{\psi}^\circ(ry) = \tilde{\psi}_r(y), \end{matrix} \quad 0 < r \leq r_0.$$

Согласно лемме 13, в силу (Cr)– и $(Cr + c\varepsilon)$–близости невозмущённой и возмущённой систем к модельной системе, вложения i_r и $\tilde{i}_r$ тоже (Cr)– и $(Cr + c\varepsilon)$–близки к тождественному отображению соответственно. Аналогичное верно для функций T_r и $\tilde{T}_r$.

В частности, так как отображения i_r и $\tilde{i}_r$ ограничены, а $|T_r - T(m_j)| = \mathrm{O}(r)$, то справедлив пункт 2 леммы 14.

3) Заметим, что семейства вложений i_r и функций T_r на кольце K гладко зависят от r и гладким образом продолжаются в точку $r = 0$. При этом $i_0 = Id_K$, $T_0 \equiv T(m_j)$. Это доказывает пункт 4.

4) Осталось доказать пункт 3 леммы 14. Доказательство проведём для возмущённой системы (для невозмущённой системы доказательство аналогично).

Возьмем любую точку m из r_0–окрестности точки m_j в U_j, через которую проходит замкнутая траектория возмущённой гамильтоновой системы с периодом $\tilde{T}$, где $|\tilde{T} - T(m_j)| \le \tau$.

Представим радиус-вектор из точки m_j в точку m в виде ry, где

$$0 < r < r_0, \tag{82}$$

и y — некоторый единичный вектор в U. Рассмотрим у сферы $S \subset E$ окрестность Ω из леммы 13. Согласно лемме 13 нам достаточно показать, что $y \in \Omega$.

Представим единичный вектор y в виде $y = y_E + y_F$, где $y_E \in E$, $y_F \in F$. Обозначим через $\tilde{V}_r$ возмущённую систему в U с гамильтонианом H_0 и симплектической структурой $D^*\tilde{\omega}_r^2$ из (67), (73). В силу (78) и (75),

$$|y - Ay| = |g_{\tilde{V}_r}^{\tilde{T}}(y) - Ay| \le B(c\varepsilon + Cr) + b\tau.$$

С другой стороны,

$$|y_F| = |(A_F - I)^{-1}(A_F y_F - y_F)| \le d|Ay - y|$$

ввиду (77). Следовательно, с учётом (79) и (82), $|y_F| \le d(B(c\varepsilon + Cr) + b|\tau|) < u$; т.е. точка y лежит в пересечении единичной сферы в U и с u–окрестностью подпространства E. Следовательно, $y \in \Omega$. Это доказывает пункт 3 леммы 14.

Лемма 14 полностью доказана.

Докажем следствие 12 из этой леммы. Рассмотрим множество $\mathcal{C} = \mathcal{C}(m_j) = E' \cap H_0^{-1}(0)$. По построению, вложение $i^\circ : E' \to M$ сохраняет значение гамильтониана, т.е. $H_0 \circ i^\circ = H_0|_{E'}$. Отсюда, вследствие (80) и пункта 3 леммы 14, пересечение r_0–окрестности точки m_j с множеством Λ лежит в поверхности $i^\circ(\mathcal{C})$, причём функция периода T на указанном пересечении совпадает с функцией $T^\circ \circ i^{\circ -1}$. Так как $U_j \cap \Lambda \setminus \{m_j\}$ является гладким подмногообразием той же размерности, что и подмногообразие $i^\circ(\mathcal{C} \setminus \{0\})$, то указанное пересечение является открытым подмножеством в подмногообразии $i^\circ(\mathcal{C} \setminus \{0\})$. В силу компактности Λ, его пересечение с проколотой r_0–окрестностью точки m_j замкнуто в этой окрестности, а значит, замкнуто и в её пересечении с подмногообразием $i^\circ(\mathcal{C})$. Следовательно, пересечение Λ с проколотой r_0–окрестностью точки m_j является связной компонентой пересечения проколотой r_0–окрестности точки m_j и множества $i^\circ(\mathcal{C})$. Но последнее множество связно в силу (81) и связности множества $\mathcal{C} \cap S \simeq S^{2k-1} \times S^{2(d-k)-1}$. Это доказывает следствие 12.

Шаг 7. На этом шаге мы выберем допустимую величину $\varepsilon > 0$ возмущения исходной гамильтоновой системы.

Напомним (см. шаг 4), что в выбранной r_0–окрестности U_j точки m_j ($r_0 = r_{0j}$) мы можем построить вложения i°, $\tilde{i}^\circ$ и функции T°, $\tilde{T}^\circ$ ещё одним способом. А именно, мы могли с самого начала фиксировать в шаре U вместо первичных объектов объекты, "плавно переходящие" из первичных объектов во вторичные, см. лемму 12. Будем считать, что числа r_0, τ, ε на шаге 6 подбирались именно для этих объектов, и i°, T° — вложение и функция на E', построенные по этим объектам.

Аналогичные построения проведём для каждой особой точки m_j, $1 \le j \le N$, уменьшая при этом, если нужно, величину $\varepsilon > 0$. В результате мы получим набор $(2r_{0j})$–окрестностей U_j точек m_j, в которых имеется вложение i_j° и функция T_j°, $1 \le j \le N$. Кроме того, для любого ε–малого возмущения исходной системы в каждой окрестности U_j однозначно строятся соответствующие вложение $\tilde{i}_j^\circ$ и функции $\tilde{T}_j^\circ$, $\tilde{\psi}_j^\circ$ на диске $E'(m_j) \subset E(m_j) \cap U_j$.

Вспомним теперь (см. шаг 4), что вне окрестностей U_j', $1 \le j \le N$, мы можем фиксировать объекты второго типа, т.е. мы можем переносить их с невозмущённого множества $H^{-1}(0)$ на нулевой уровень возмущённого гамильтониана $\tilde{H}$ при помощи градиентного потока функции H, где U_j' — это r_{0j}–окрестность точки m_j.

Уменьшим, если нужно, число $\varepsilon > 0$, чтобы при любом ε–малом возмущении (67) был справедлив аналог утверждения 3 для некомпактного подмногообразия $\Lambda \setminus \cup_{j=1}^N U_j'$. Заметим, что на пересечении этого подмногообразия с каждой окрестностью U_j все объекты, нужные для однозначности построения вложения i и функции $\tilde{T}$, совпадают: по лемме 12 вне шара U_j' объекты в шаре U_j совпадают с вторичными объектами.

Следовательно, при любом ε–малом возмущении (67) мы получаем требуемое вложение $i : \Lambda^* \to \tilde{H}^{-1}(0)$ и S^1–инвариантные функции ψ, $\tilde{T}$ на многообразии Λ^*, обладающие следующим свойством. Образ при вложении i любой критической окружности γ функции ψ является замкнутой траекторией возмущённой системы с периодом $\tilde{T}|_\gamma$, причём функция $\tilde{T}$ близка к функции $T \circ r$, где $r : \Lambda^* \to \Lambda$ — естественная проекция (66).

Теорема 8 доказана.

2.3 Негамильтонов случай

В заключение приведём формулировки основных результатов данной работы для случая произвольных динамических систем, т.е. не обязательно являющихся гамильтоновыми. Рассмотрим произвольную динамическую систему на произвольном гладком многообразии M^n, задаваемую векторным полем V на M^n. Пусть имеется гладкое подмногообразие $\Lambda \subset M^n$, не содержащее особых точек и сплошь заполненное замкнутыми траекториями системы. Пусть расслоение (2) этого подмногообразия замкнутыми траекториями является периодическим, т.е. на Λ имеется непрерывная функция T, равная периоду замкнутых траекторий (не обязательно минимальному периоду).

Для любой точки $m \in \Lambda$ рассмотрим секущую поверхность $\sigma_m \ni m$ и отображение Пуанкаре $A_m : \sigma_m \to \sigma_m$ этой поверхности в себя, задаваемое потоком поля V за время, близкое к значению $T(m)$ функции периода в точке m. Не ограничивая общности, мы далее будем считать, что функция периода T на Λ тождественно равна 1.

Пусть подмногообразие Λ невырождено в смысле определения 1, т.е. в каждой точке $m \in \Lambda$ множество касательных векторов, неподвижных при касательном отображении $dA(m)$, совпадает с касательным пространством к поверхности $\Lambda \cap \sigma_m$ в точке m. Как в доказательстве утверждения 3 (см. п. 1.6.1), рассмотрим на Λ поле фактор-пространств $E_m = (T_m\sigma_m)/\mathrm{Im}(dA(m)-I)$, $m \in \Lambda$, являющихся коядрами операторов $dA(m)-I$, $m \in \Lambda$. Полученное поле E фактор-пространств является векторным расслоением $E \to \Lambda$ над многообразием Λ. Легко видеть, что это расслоение не зависит от выбора секущих поверхностей σ_m. Точнее, оно корректно определено с точностью до естественного послойного изоморфизма расслоений.

Как мы уже отмечали в п. 1.6.1 (следствие 8), исходное действие окружности на Λ очевидным образом поднимается на полученное расслоение E — при помощи касательного потока данной динамической системы. В частности, отображение "за период" является тождественным оператором на расслоении E. Отсюда следует, что пространство орбит E/S^1 действия окружности на расслоении E является некоторым расслоением над фактор-многообразием $B = \Lambda/S^1$, которое мы будем обозначать через $pE := E/S^1$.

При этом из условия невырожденности Λ легко следует, что ранг полученного векторного расслоения pE над B равен размерности $\dim B = \dim \Lambda - 1$ этого многообразия, причём тотальное пространство pE ориентируемо. Следовательно, класс Эйлера $e(pE)$ этого расслоения является целым числом, которое называется его *числом Эйлера.* (Здесь и далее, говоря о числе Эйлера, мы предполагаем, что расслоение (2) является локально тривиальным, так что его база B является обычным гладким многообразием.) Напомним "геометрический" смысл числа Эйлера. Оно равно алгебраическому числу нулей любого сечения общего положения $S : B \to pE$ векторного расслоения pE над B.

Рассмотрим возмущённое векторное поле $\tilde{V}$, C^1–близкое к полю V. Следующая теорема аналогична теореме 1.

Теорема 9. *Пусть подмногообразие Λ, заполненное замкнутыми траек-*

ториями невозмущённой системы, компактно (без края) и невырождено. Тогда число замкнутых траекторий возмущённой системы не меньше минимального числа нулей гладкого сечения $S : B \to pE$ векторного расслоения pE над B. Кроме того, число таких траекторий, считая с кратностями, не меньше минимального числа нулей сечения общего положения этого векторного расслоения.

В частности, если число Эйлера $e(pE)$ расслоения pE отлично от нуля, то возмущённая система имеет не менее одной замкнутой траектории. При этом число таких траекторий, считая с кратностями, не меньше модуля $|e(pE)|$ числа Эйлера этого расслоения.

Опишем теперь *метод усреднения на подмногообразии* для произвольных динамических систем. Пусть возмущённое векторное поле имеет вид

$$\tilde{V} = V + \varepsilon V_1 + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{83}$$

где ε — малый параметр. Рассмотрим ограничение $\mathcal{V} = V_1|_\Lambda$ возмущения V_1 на Λ, и определим усреднение $\bar{\mathcal{V}}$ полученного векторного поля по формуле

$$\bar{\mathcal{V}} = \int_0^1 dg^{-t} \mathcal{V}_{g^t(m)}\, dt,$$

где g^t — поток векторного поля V за время t. Напомним, что мы считаем, не ограничивая общности, что функция периода T на Λ тождественно равна 1. Полученное векторное поле $\bar{\mathcal{V}}$ на многообразии Λ спроектируем на фактор-расслоение $E = \cup_{m\in\Lambda}(T_m\sigma_m)/\mathrm{Im}(dA(m) - I)$ с помощью естественной проекции $\pi_m : T_m\sigma \to E_m$, $m \in \Lambda$. Нетрудно показать, что полученное сечение $\pi(\bar{\mathcal{V}})$ расслоения E S^1–инвариантно, а значит, корректно "проектируется" на некоторое сечение $p\pi(\bar{\mathcal{V}})$ векторного расслоения pE. Это сечение назовём *усреднённым возмущением*, так как оно аналогично усреднённому возмущению $\bar{\mathcal{H}}$ в случае гамильтоновых систем. Нетрудно проверяется, что такое определение усреднённого возмущения не зависит от выбора секущих поверхностей σ_m, $m \in \Lambda$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 2 для динамических систем общего вида, т.е. не обязательно гамильтоновых.

Теорема 10. *Пусть подмногообразие Λ, заполненное замкнутыми траекториями невозмущённой системы, невырождено, но не обязательно компактно. Пусть возмущённое векторное поле $\tilde{V}$ гладко зависит от малого параметра ε, т.е. имеет вид (83). И пусть $b_0 \in B$ — невырожденный нуль усреднённого возмущения, т.е. сечения $p\pi(\bar{\mathcal{V}})$ векторного расслоения pE. Пусть $\gamma_0 = p^{-1}(b_0) \subset \Lambda$ — траектория невозмущённой системы, отвечающая точке b_0. Тогда существует однопараметрическое семейство* *замкнутых траекторий γ_ε возмущённой системы, гладко зависящее от параметра возмущения ε, где ε достаточно мало, и γ_ε совпадает с γ_0 при $\varepsilon = 0$.*

Теоремы 9 и 10 следуют из более сильной леммы 8 (см. п. 1.6.1), в формулировке и доказательстве которой, напомним, гамильтоновость системы не использовалась.

Итак, в случае произвольных динамических систем, т.е. не обязательно гамильтоновых, нужно знать топологию некоторого векторного расслоения pE над V–многообразием B, определяемого невозмущённой системой. Оказывается, что во многих важных случаях это расслоение послойно изоморфно касательному расслоению T_*B фактор-многообразия B.

Утверждение 13. *В следующих случаях определённое выше векторное расслоение pE над V–многообразием $B = \Lambda/S^1$ послойно изоморфно касательному расслоению T_*B этого V–многообразия:*

1) когда невозмущённая система является ограничением гамильтоновой системы на неособую изоэнергетическую поверхность $M_h = H^{-1}(h)$;

2) когда Λ строго невырождено, т.е. в каждой точке $m \in \Lambda$ кратность числа 1 в спектре оператора $dA(m)$ в точности равна размерности фактор-многообразия B.

Доказательство. В случае гамильтоновой системы достаточно заметить, что симплектическая структура задаёт невырожденное спаривание между подпространствами $T_m(\Lambda \cap \sigma_m)$ и E_m, $m \in \Lambda$. В случае строго невырожденного Λ, в качестве подпространства E_m можно взять $T_m(\Lambda \cap \sigma_m)$. Это доказывает утверждение 13.

В частности, во всех этих случаях число Эйлера $e(pE)$ расслоения pE совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(B)$ фактор-многообразия B. Поэтому, если эйлерова характеристика V–многообразия B для такой системы отлична от нуля, то согласно теореме 9 возмущённая система имеет по меньшей мере одну замкнутую траекторию. Если же $\chi(B) = 0$ и расслоение (2) локально тривиально, то существует сколь угодно близкая динамическая система, не имеющая ни одной замкнутой траектории вблизи Λ. Последнее следует из теоремы 10 и существования всюду ненулевого векторного поля на любом гладком многообразии B, таком, что $\chi(B) = 0$ [13].

3 Относительно периодические движения планетно-спутниковой системы

3.1 Формулировки теорем

Рассмотрим задачу о движении системы $N+1$ материальных точек в евклидовой плоскости, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона, где $N \geq 2$. Предположим, что одно из тел системы M_0 — Солнце — является центральным телом массы 1, а остальные тела $M_1, \ldots, M_N$ разбиты на две группы: n планет с массами порядка μ, и $N-n$ спутников с массами ещё меньшего порядка $\mu\nu$, где μ, ν — два малых параметра. Тела притягиваются друг к другу с ньютоновским потенциалом

$$U = -\sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

где m_i — масса точки M_i, $r_{ij} = |M_j - M_i|$, $0 \leq i, j \leq N$, — попарные расстояния между точками. Уравнения движения имеют вид

$$m_i \frac{d^2 M_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial M_i}, \quad 0 \leq i \leq N. \tag{84}$$

Здесь мы считаем, не ограничивая общности, что гравитационная постоянная равна 1. Этого всегда можно добиться с помощью изменения масштаба времени.

Отметим, что система уравнений движения в кокасательном расслоении к конфигурационному многообразию является гамильтоновой системой с гамильтонианом, равным полной энергии системы

$$H = T + U,$$

относительно стандартной симплектической структуры $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$. Здесь

$$T = \sum_{i=0}^{N} \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i}$$

— кинетическая энергия системы.

3.1.1 Постановка задачи. Модельная задача

Поставим задачу об отыскании семейств τ–периодических движений описанной системы во вращающейся системе координат с постоянной угловой скоростью. Такие движения однозначно характеризуются следующим свойством: через период $\tau > 0$ расположения и скорости всех тел системы отличаются от исходных своих положений поворотом на один и тот же угол $\alpha \bmod 2\pi$ вокруг начала координат.

Определение 20. Такие движения будем называть *относительно периодическими* движениями с *параметрами* τ, α. Ясно, что все движения, получающиеся из такого движения сдвигом начального момента времени на некоторое число и поворотом на некоторый угол вокруг начала координат, тоже являются относительно периодическими с теми же параметрами τ, α. Фазовые траектории этих движений образуют двумерный тор γ, и всех их мы будем считать за *одно относительно периодическое движение*. Относительно периодическое движение назовём *невырожденным*, если двумерный тор γ является невырожденным множеством неподвижных точек отображения $g^{\tau}_{H-\omega_1 M}$ (см. определение 9).

Отметим, что движения во вращающейся системе координат с угловой скоростью ω_1 описываются гамильтоновой системой с гамильтонианом $H - \omega_1 M$, где

$$M = \sum_{i=0}^{N} [\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i] \tag{85}$$

— интеграл кинетического момента. Рассмотрим редукцию задачи о движении $N+1$ тела при помощи интеграла M, т.е. перейдём к "приведённой" системе, полученной ограничением исходной системы на множество уровня функции M и факторизацией фазового пространства по орбитам системы с гамильтонианом M. Ясно, что любое относительно периодическое движение γ перейдёт при редукции в одно периодическое движение $\bar{\gamma}$ приведённой системы с периодом τ. Если движение $\bar{\gamma}$ орбитально устойчиво в линейном приближении (см. определение 7), то исходное движение γ задачи $N+1$ тел назовём *орбитально устойчивым в линейном приближении относительно периодическим движением.*

Замечание 14. Нетрудно показать, что если исходный двумерный тор γ отвечает относительно периодическому движению и является сильно устойчивым в линейном приближении множеством неподвижных точек отображения $g^{\tau}_{H-\omega_1 M}$ (см. определение 13), то это относительно периодическое движение структурно устойчиво в линейном приближении, т.е. движение $\bar{\gamma}$ является структурно устойчивой замкнутой траекторией. Действительно, в силу предложения 2 и изотропности тора γ, корневое подпространство K оператора $A = dg^{\tau}_{H-\omega_1 M}(m)$, отвечающее собственному значению 1, четырёхмерно, $m \in \gamma$. Так как оно содержит плоскость $T_m\gamma$, то его косоортогональное дополнение $L = K^{\perp}$ содержится в $T^{\perp}_m\gamma$. Следовательно, приведённый оператор монодромии $\bar{A} : (T_m^{\perp}\gamma)/(T_m\gamma) \to (T_m^{\perp}\gamma)/(T_m\gamma)$ естественно сопряжён оператору $A|_L$. Отсюда получаем эллиптичность всех собственных значений оператора $\bar{A}$, что и даёт структурную устойчивость траектории $\bar{\gamma}$.

Положительные числа μ, ν, а также ω (его смысл будет ясен ниже) будем считать независимыми малыми параметрами задачи:

$$\mu \ll 1, \quad \nu \ll 1, \quad \omega \ll 1. \tag{86}$$

Другими параметрами задачи будут являться фиксированное число α и набор из $N-1$ целых чисел, порядки которых зависят от ω. Опишем эти числа более точно.

Введём сначала более удобную нумерацию точек системы. Напомним, что мы неявно предполагаем, что каждой планете сопоставлена своя группа спутников. Для записи такого соответствия введём новую нумерацию точек при помощи двух индексов: M_{ij}, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le n_i$. Здесь M_{00} — Солнце,

$$M_{i0}, \quad 1 \le i \le n, \qquad \text{и} \qquad M_{ij}, \quad 1 \le j \le n_i,$$

— планеты и их спутники соответственно. Будем говорить, что эти спутники образуют вместе со своей планетой i–тую *спутниковую систему.*

Переобозначение. Изменим масштабы измерения масс: будем считать, что массы планет и их спутников имеют вид

$$\mu m_{i0}, \quad 1 \le i \le n, \qquad \text{и} \qquad \mu\nu m_{ij}, \quad 1 \le j \le n_i,$$

соответственно, где $m_{ij} = \mathrm{const} > 0$, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le n_i$. Обозначим также $M_i = M_{i0}$, $m_i = m_{i0}$, $1 \le i \le n$.

Замечание 15. В действительности (см. теоремы 13 и 14 ниже), для справедливости основных наших результатов (теоремы 11 и 12, см. ниже), можно не требовать постоянство параметров m_i, m_{ij}, а достаточно лишь выполнения следующих более слабых условий:

1. для каждой планеты число m_i ограничено и отделено от нуля,
2. для каждого спутника, кроме случая двойной планеты, отношение $\nu\frac{m_{ij}}{m_i}$ его массы к массе его планеты мало, так что сумма всех таких отношений мала (эта сумма играет роль малого параметра ν_i).

Это эквивалентно тому, что параметры m_i и $\frac{m_{ij}}{m_i}$, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le n$, не обязательно константы, а лишь ограничены, и m_i отделены от нуля. Подчеркнём, что для любой двойной планеты не нужно требовать малость параметра ν_{i1}. То есть, если какая-либо планета имеет лишь один спутник, то для этого спутника условие 2 несущественно и заменяется требованием ограниченности числа νm_{i1}.

Мы будем исследовать специальные решения такой задачи $N+1$ тел, для которых расстояние между каждой планетой и её спутниками имеет порядок 1 и много меньше, чем попарные расстояния между Солнцем и центрами масс спутниковых систем. Последние попарные расстояния имеют один и тот же порядок $R \gg 1$, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{R^3} = \omega^2 \mu \tag{87}$$

и являющийся автоматически большим. (Соотношение (87) является естественным и отвечает второму закону Кеплера.)

Согласно этому, введём "относительные координаты". А именно, из каждой планеты проведём радиус-векторы

$$\mathbf{y}_{ij} = M_{ij} - M_{i0}, \qquad 1 \le j \le n_i,$$

в спутники этой планеты, $1 \le j \le n_i$. Рассмотрим также "нормированный" радиус-вектор

$$\mathbf{x}_i = (C_i - M_{00})/R, \qquad 1 \le i \le n,$$

проведённый из Солнца M_{00} в центр масс

$$C_i = (m_{i0}M_{i0} + \nu \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}M_{ij})/(m_{i0} + \nu \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij})$$

этой спутниковой системы. (Здесь, вообще говоря, нужно рассматривать ещё один радиус-вектор, а именно, проведённый из начала координат в центр масс C всех точек, но так как C является циклической переменной, мы можем его исключить, что эквивалентно переходу к системе координат с началом в C.)

Кроме того, будем предполагать, что "месяцы" много меньше, чем "годы". Более точно, изменим масштаб времени и будем считать, что средние угловые скорости Ω_{ij} вращений радиус-векторов $\mathbf{y}_{ij}$ являются "быстрыми" и имеют порядок 1 (месяцы), а средние угловые скорости ω_i вращений радиус-векторов $\mathbf{x}_i$ являются "медленными" и имеют порядок ω (годы):

$$\omega_i \sim \omega, \quad \Omega_{ij} \sim 1, \qquad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n_i. \tag{88}$$

В качестве *модельной* задачи рассмотрим набор N независимых *задач Кеплера*:

$$\begin{cases} \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} & = -\omega^2 \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3} \qquad (1 \le i \le n) \\ \frac{d^2\mathbf{y}_{ij}}{dt^2} & = -m_i \frac{\mathbf{y}_{ij}}{|\mathbf{y}_{ij}|^3} \qquad (1 \le j \le n_i). \end{cases} \tag{89}$$

Легко видеть, что при $\alpha \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ относительно периодическим движениям модельной задачи с заданным набором средних частот (88) отвечают круговые движения задач Кеплера с этим набором частот. При этом траектории этих "круговых" движений образуют N–мерный тор в конфигурационном пространстве, который мы обозначим Λ°. Координатами на этом торе служат угловые координаты ψ_i, ψ_{ij}, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le n_i$. При этом для любой "точки" этого тора существует ровно одно движение модельной задачи (89), при котором все тела движутся по круговым орбитам с данными частотами.

3.1.2 Существование и устойчивость периодических движений

Рассмотрим набор (88) "средних частот" вращений радиус-векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_{ij}$ при относительно периодических движениях модельной задачи, отвечающих тору Λ°. Ясно, что набор "средних *относительных* частот" $\omega_i - \omega_1$, $\Omega_{ij} - \omega_1$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$, является *максимально резонансным*, т.е. пропорционален некоторому целочисленному набору k_i, K_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$.

Другими словами, набор "средних частот" ω_i, Ω_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$, имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_1 + k_i \tfrac{2\pi}{\tau} && (1 \le i \le n) \\ \Omega_{ij} &= \omega_1 + K_{ij} \tfrac{2\pi}{\tau} && (1 \le j \le n_i), \end{aligned} \tag{90}$$

где k_i и K_{ij} — *целые числа*, равные числу оборотов соответствующего радиус-вектора вокруг нуля (во вращающейся системе координат с угловой скоростью ω_1). Здесь мы считаем, не ограничивая общности, что $k_1 = 0$, так что вещественное число $\alpha = \omega_1 \tau$ равно полному углу поворота первой планеты через период. Согласно (88), все целые числа k_i, отвечающие набору медленных частот планет, имеют порядок $\omega\tau$, а все целые числа K_{ij}, отвечающие набору быстрых частот спутников, велики и имеют порядок τ:

$$k_1 = 0, k_2 \sim \ldots \sim k_n \sim \omega\tau, \qquad K_{ij} \sim \tau, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n_i. \tag{91}$$

Ясно, что любое движение модельной задачи (89), отвечающее круговым движениям с частотами (90), является относительно периодическим с параметрами

$$\tau, \qquad \alpha = \omega_1 \tau. \tag{92}$$

Ясно, что относительный период τ отделён от нуля (в силу (91)). Будем предполагать, что он не слишком велик, точнее, $\tau \ll \frac{1}{\omega^2}$, т.е.

$$\omega^2 \tau \ll 1. \tag{93}$$

Замечание 16. Без ограничения общности будем считать, что $\tau = \tau_{min} > 0$ — *минимальный относительный период* относительно периодических движений с частотами (90), т.е. что набор целых чисел $k_2 \dots k_n$, K_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$, несократим. (Этого можно добиться, разделив τ на наибольший общий делитель этих чисел.) В случае системы с *более чем одной планетой* ($n > 1$) относительный период $\tau = 2\pi/\omega$ всегда большой, точнее, он имеет порядок, не меньше $\mathrm{O}(\frac{1}{\omega})$ в силу (91). Поэтому условие (93) означает, что τ не слишком велико. Для системы с *одной планетой* и *одним спутником* ($N = 2$, $n = 1$) относительный период ограничен и равен $\tau_{min} = 2\pi/(\Omega_{11} - \omega_1) = \mathrm{O}(1)$. Поэтому условие (93) выполнено автоматически. Для системы с *одной планетой* и *несколькими спутниками* ($n = 1$, $N > 2$) минимальный относительный период тоже может быть ограниченным. В любом случае, можно искать относительно периодические движения, для которых период τ из (92) удовлетворяет условию (93), не зависимо от того, совпадает ли он с минимальным периодом τ_{min}. Например, можно считать, что $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Приступим к формулировке основного результата.

Существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, такие, что для любого сколь угодно большого $C > 0$ существуют положительные функции $\mu_0 = \mu_0(\omega)$, $\nu_0 = \nu_0(\omega)$, обладающие следующими свойствами.

Выберем любое значение параметра ω, $0 < \omega < c_1$. Пусть ω_i, Ω_{ij}, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le n_i$, — набор ненулевых вещественных чисел, имеющих вид (88), (90), (93), где число считается эквивалентным 1, если оно лежит в промежутке $[\frac{1}{C}, C]$, и малым, если оно меньше числа $\frac{\pi}{c_2}$. Пусть при этом числа $|\frac{\omega_i}{\omega}|$, $1 \le i \le n$, не только ограничены, но и отделены друг от друга и от нуля константой $\frac{1}{C}$, и то же верно для наборов чисел $|\Omega_{ij}|$, $1 \le j \le n_i$, при любом фиксированном i (это предположение означает, что тор Λ° отделён от "области столкновений").

Рассмотрим N–мерный тор Λ° в конфигурационном пространстве, отвечающий круговым движениям модельной задачи (89) с частотами ω_i, Ω_{ij}. Определим значения параметров τ, α относительно периодических движений в определении 20 по формулам (90), (92).

Теорема 11. *Пусть в указанных предположениях $\alpha \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, причём число $\alpha \bmod 2\pi$ отделено от нуля (константой $\frac{1}{C}$ либо числом $c_2\omega^2\tau$). Тогда при любых достаточно малых значениях μ, ν: $0 \le \mu \le \mu_0(\omega)$, $0 \le \nu \le \nu_0(\omega)$ выполнено следующее:*

A) Существует не менее 2^{N-2} (считая с кратностями) относительно периодических движений планетно-спутниковой системы, с параметрами τ, α, и среди этих движений не менее $N-1$ геометрически различных, где $N+1$ — число всех тел системы, $N \ge 2$.

Б) При каждом таком движении “средние частоты” радиус-векторов $\mathbf{x}_i = (C_i - M_0)/R$, $\mathbf{y}_{ij} = M_{ij} - M_{i0}$ *в точности равны* ω_i, Ω_{ij}, *а движения* $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{y}_{ij}(t)$ *этих радиус-векторов близки к круговым движениям (с теми же частотами) тора* Λ° *модельной задачи (89).*

В) Пусть набор частот (90), (93) круговых движений модельной задачи и малые параметры (86) удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

1. *Значение* $\alpha \bmod \pi$ *отделено от нуля (константой* $\frac{1}{C}$ *либо числом* $\frac{c_2}{2}\omega^2\tau$*).*

2. *При движениях, отвечающих тору* Λ°*, во всех* N *задачах Кеплера модельной задачи (89) все тела вращаются “в одну сторону”, т.е. угловые скорости* ω_i, Ω_{ij} *имеют один и тот же знак.*

3. *Рассмотрим производящую функцию* Ψ *отображения “за период”* g_H^τ *(см. (14) из п. 1.4.5). Пусть функция* $S = \Psi|_{\tilde\Lambda\cap\Sigma}$ *на* $(N-2)$*–мерном торе* $\tilde\Lambda \cap \Sigma$ *является морсовской, где* Σ *— секущая поверхность к двумерным торам относительно периодических движений на* Λ°, $\tilde\Lambda$ *— некоторый* N*–мерный тор,* ω^2*–близкий к* Λ° *(его построение см. ниже).*

Тогда через каждую критическую точку функции S *проходит боттовский двумерный тор функции* Ψ*. Все эти двумерные торы инвариантны и невырождены, т.е. отвечающие им движения являются невырожденными относительно периодическими движениями. По меньшей мере одно из этих движений орбитально устойчиво в линейном приближении на общей поверхности уровня интегралов энергии* H *и кинетического момента* M *(см. определение 7 и замечание 3 в §1.3). Более точно, любой морсовской точке локального минимума функции* S *отвечает относительно периодическое движение, являющееся орбитально структурно устойчивым в линейном приближении на общей поверхности интегралов энергии и кинетического момента.*

Здесь близость движений $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{y}_{ij}(t)$ к круговым движениям понимается в том смысле, что движение $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\tau/\omega)$ относительно “собственного времени планеты” $\tau = \omega t$ отличается от (ω_i/ω)–частотного кругового движения на величину порядка $\mu + \nu/R^2$, а движение $\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_{ij}(t)$ отличается от кругового движения спутника с частотой Ω_{ij} на величину порядка ω^2. При этом близки как сами вектор-функции, так и их первые производные по τ и t соответственно.

В действительности (см. ниже), движение вектора $\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_{ij}(t)$ близко к относительно периодическому движению (предельной) *задачи Хилла* и отличается от него на величину порядка $\mu\omega^2 + \nu$, а в случае двойной либо отдельной планеты (при $n_i \leq 1$) — на величину порядка $\mu\omega^2$.

3.1.3 Симметричные относительно периодические движения. "Парады" планетно-спутниковой системы

Перейдём теперь к описанию *симметричных* относительно периодических движений планетно-спутниковой системы, которые рассматривал ещё Пуанкаре [28].

Определение 21. Рассмотрим задачу, описывающую движение $N+1$ точек в плоскости. Движение задачи назовём *симметричным*, или *обратимым*, если существует прямая l в плоскости движения и момент времени $t = t_0$, для которых выполнено одно из двух эквивалентных условий:

1. в момент времени $t = t_0$ все тела расположены на прямой l (т.е. наблюдается "парад" планет и спутников), а их скорости в этот момент времени ортогональны прямой l;

2. положения всех тел в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$ получаются из положений этих тел в момент времени $2t_0 - t$ осевой симметрией относительно оси l.

Все тела (материальные точки) системы считаются пронумерованными. Порядок, в котором расположены эти точки на прямой l в момент времени t_0, назовём *"типом парада"* планетно-спутниковой системы. Ясно, что любое движение задачи $N+1$ тел, получающиеся из симметричного движения сдвигом времени и поворотом плоскости на некоторый угол, тоже является симметричным. Все такие движения мы будем считать *одним и тем же симметричным движением.*

Рассмотрим модельную задачу (89), распадающуюся на N независимых задач Кеплера, и всевозможные её решения, отвечающие круговым движениям задач Кеплера с каким-нибудь фиксированным набором частот. Траектории таких движений заметают N–мерный тор Λ°. Найдём симметричные движения среди таких движений, и найдём число всех симметричных движений.

Пусть набор частот не является резонансным, т.е. не представляется в виде (90). Покажем, что среди этих движений имеется ровно 2^{N-1} симметричных движений этой задачи. А именно, в момент времени $t = t_0$ возникает разбиение множества всех планет и спутников на два подмножества, в зависимости от направлений радиус-векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_{ij}$ в этот момент времени:

если два радиус-вектора сонаправлены, то отвечающие им точки попадают в одно подмножество, а если эти радиус-векторы противоположно направлены, то эти точки попадают в разные подмножества. Ясно, что всего имеется 2^{N-1} таких разбиений, а значит, 2^{N-1} типов парадов на торе Λ°.

Пусть теперь набор частот круговых движений имеет вид (90), т.е. движения являются относительно периодическими с параметрами τ, α. Оказывается, что среди 2^{N-1} симметричных движений, описанных выше, имеются пары совпадающих движений. Действительно, в любой момент времени, отличающийся от t_0 на число, кратное полупериоду $\frac{\tau}{2}$, все точки должны располагаться на одной прямой (отличающейся от l поворотом на угол $\frac{\alpha}{2}$). Верно и обратное: если при круговых движениях всех радиус-векторов существуют два различных момента времени, в которые все радиус-векторы коллинеарны одной прямой, то рассматриваемое движение относительно периодично, и разность указанных моментов времени кратна полупериоду этого движения. Таким образом, моментам времени вида $t_0 + \frac{\tau k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, и только им, отвечают некоторые разбиения множества всех точек на два подмножества, где $\tau = \tau_{min}$ — минимальный относительный период на торе Λ°. При этом легко показать, что всем чётным k отвечает одно и то же разбиение, всем нечётным k — некоторое другое разбиение, причём эти два разбиения не совпадают. Таким образом, все 2^{N-1} разбиений разбиваются на пары, которым отвечают совпадающие симметричные движения.

Поэтому в случае резонансного набора частот (т.е. относительно периодических движений вида (90) число различных симметричных движений модельной задачи с этими частотами равно 2^{N-2}. Другими словами, на торе Λ°, заполненном траекториями относительно периодических движений, имеется ровно 2^{N-2} различных симметричных движений.

Теорема 12. *Пусть, в условиях теоремы 11, $\alpha \bmod \pi \neq 0$, причём число $\alpha \bmod \pi$ отделено от нуля (константой $\frac{1}{C}$ либо числом $\frac{c_2}{2}\omega^2\tau$). Тогда среди относительно периодических движений планетно-спутниковой системы, с параметрами τ, α, существует ровно 2^{N-2} различных симметричных движений. Каждое из этих движений близко к одному из 2^{N-2} описанных выше симметричных движений модельной задачи (89). Для любого такого движения планетно-спутниковой системы через промежутки времени, кратные полупериоду $\frac{\tau}{2}$, наблюдаются парады: все точки системы располагаются на одной прямой (которая через промежутки времени, кратные $\frac{\tau}{2}$, поворачивается на углы, кратные $\frac{\alpha}{2}$).*

3.2 Вспомогательные утверждения

Здесь мы сформулируем утверждения, необходимые для доказательства теорем 11, 12. Доказательства этих вспомогательных утверждений будут даны ниже в §3.4.

3.2.1 Основная лемма о невозмущённой задаче, задача Хилла

Рассмотрим на конфигурационном многообразии Q с указанными координатами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторное поле ускорений, отвечающее задаче (84) о движении планетно-спутниковой системы. Фиксируем положительное число ω и рассмотрим зависимость этого поля от трёх малых параметров μ, ν и $\frac{1}{R}$, связанных соотношением (87) (в действительности, зависимость имеется лишь от параметров μ, ν, так как значение $\frac{1}{R} = \omega^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}$ определяется однозначно и автоматически мало́). Ввиду аналитичности потенциальной энергии интуитивно ясно, что для каждой такой тройки значений этих параметров существует линейная замена масштаба времени, такая что при стремлении параметров μ, ν (а значит, и $\frac{1}{R}$) к нулю полученное векторное поле ускорений будет иметь конечный и ненулевой предел. Предельное поле при $\mu \to 0$, $\nu \to 0$ (а значит, и $\frac{1}{R} \to 0$) на Q назовём невозмущённым полем ускорений, а отвечающую ему динамическую систему в фазовом пространстве T_*Q назовём невозмущённой системой, или *невозмущённой задачей*. Ясно, что невозмущённая задача определена однозначно, с точностью до линейной замены масштаба времени.

Пусть теперь фиксирована невозмущённая задача. Тогда нетрудно определить невозмущённые интегралы энергии H и кинетического момента M (см. (85)). Для этого нужно домножить каждую из этих функций на некоторое положительное число, зависящее от параметров μ, ν и $1/R$, так, чтобы при построенной выше замене масштаба времени существовала предельная функция, отличная от нуля. Ясно, что невозмущённые интегралы энергии H и кинетического момента M определены однозначно, с точностью до положительных множителей (конечно, при условии, что невозмущённая задача фиксирована).

Оказывается, что при каждом фиксированном $\omega > 0$ невозмущённая задача, отвечающая $\mu \to 0$, $\nu \to 0$ (а значит, $\rho \to 0$, где $\rho = 1/R$), распадается на n независимых *задач Кеплера*, отвечающих планетам, и $N - n$ задач, отвечающих спутникам и совпадающих с (предельной) *задачей Хилла*.

Более точно, мы утверждаем, что невозмущённое поле ускорений на конфигурационном многообразии Q описывается системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} & = -\omega^2 \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3} & (1 \le i \le n) \\ \frac{d^2\mathbf{y}_{ij}}{dt^2} & = -m_i \frac{\mathbf{y}_{ij}}{|\mathbf{y}_{ij}|^3} - \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{ij}) & (1 \le j \le n_i), \end{array} \right. \tag{94}$$

где функция $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяется формулой

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{3\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 - |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2}{2|\mathbf{x}|^5}. \tag{95}$$

Функцию F мы будем условно называть "предельным потенциалом действия Солнца на спутник". Здесь $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{3\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{x} - |\mathbf{x}|^2 \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^5}$. Отметим, что переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ автоматически являются медленными и быстрыми переменными соответственно, когда ω мало́.

Отсюда получаем, что невозмущённая система в фазовом пространстве T_*Q эквивалентна системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{llll} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \omega \frac{\boldsymbol{\xi}_i}{m_i}, & \frac{d\boldsymbol{\xi}_i}{dt} = -\omega m_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3} & & (1 \le i \le n) \\ \frac{d\mathbf{y}_{ij}}{dt} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}}{m_{ij}}, & \frac{d\boldsymbol{\eta}_{ij}}{dt} = -m_{ij}(m_i \frac{\mathbf{y}_{ij}}{|\mathbf{y}_{ij}|^3} + \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{ij})) & & (1 \le j \le n_i). \end{array} \right. \tag{96}$$

Замечание. Подчеркнём, что динамическая система (96) не является невозмущённой системой на T_*Q, однако эквивалентна ей в следующем естественном смысле. Можно считать, что система (96) определена на пространстве T^*Q, двойственном к пространству T_*Q. Тогда при естественном сопоставлении вектору "скоростей" $\{\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}, \frac{d\mathbf{y}_{ij}}{dt}\} \in T_mQ$ в точке $m = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{ij}\} \in Q$ ковектора "импульсов" $\{\boldsymbol{\xi}_i = \frac{m_i}{\omega}\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}, \boldsymbol{\eta}_{ij} = m_{ij}\frac{d\mathbf{y}_{ij}}{dt}\} \in T^*_mQ$ невозмущённая система (на T_*Q) переходит в систему (96) (на T^*Q). Это и означает, что система (96) эквивалентна невозмущённой системе. Далее мы будем отождествлять фазовое пространство T_*Q с T^*Q при помощи указанного здесь изоморфизма, и называть невозмущённой системой систему (96).

Отметим, что в конфигурационном пространстве система (96) совпадает с системой (94). Обозначим

$$\bar{m}_i = m_i + \nu \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}, \quad \tilde{m}_i = \frac{\bar{m}_i}{1 + \mu \bar{m}_i}, \quad \tilde{m}_{ij} = \frac{m_{ij} m_i}{m_i + \nu m_{ij}} \tag{97}$$

— суммарную массу i–той планеты и всех её спутников и "приведённые" массы планет и спутников.

Лемма 15 (О невозмущённой системе). *При любом фиксированном значении $\omega > 0$ невозмущённая система для рассматриваемой задачи $N+1$ тел имеет вид (96). При этом выполнено следующее:*

1. *Возмущённая (реальная) система в фазовом пространстве T^*Q име-*

ет следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} & = \omega(\frac{\boldsymbol{\xi}_i}{\tilde{m}_i} + \mu\sum_{i'\neq i}\boldsymbol{\xi}_{i'}) \qquad\qquad\qquad (1\le i\le n) \\ \frac{d\boldsymbol{\xi}_i}{dt} & = -\omega\bar{m}_i\left(\frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3} + \nu\rho^2\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial\mathbf{x}_i} + \mu\sum_{i'\neq i}\bar{m}_{i'}(\frac{\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i'}}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i'}|^3} + \nu\rho^2\frac{\partial\tilde{F}_{ii'}}{\partial\mathbf{x}_i})\right) \\ \frac{d\mathbf{y}_{ij}}{dt} & = \frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}}{\tilde{m}_{ij}} + \frac{\nu}{m_i}\sum_{j'\neq j}\boldsymbol{\eta}_{ij'} \qquad\qquad\qquad (1\le j\le n_i) \\ \frac{d\boldsymbol{\eta}_{ij}}{dt} & = -m_i\left(m_{ij}\frac{\mathbf{y}_{ij}}{|\mathbf{y}_{ij}|^3} + \omega^2(\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial\mathbf{y}_{ij}} + \mu\sum_{i'\neq i}\bar{m}_{i'}\frac{\partial\tilde{F}_{ii'}}{\partial\mathbf{y}_{ij}})\right), \end{array}\right. \tag{98}$$

где $\rho = \frac{1}{R} = \omega^{2/3}\mu^{1/3}$, $\tilde{F}_i$, $\tilde{F}_{ii'}$ *— некоторые аналитические функции, зависящие от конфигурационных переменных* $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_{ij}$, *параметров* m_i, m_{ij} *и малых параметров* ν, ρ, *и имеющие свои аналитические продолжения при* $\nu = 0$, $\rho = 0$. *При этом*

$$\tilde{F}_i|_{\rho=0,\nu=0} = \sum_{j=1}^{n_i}\frac{m_{ij}}{m_i}F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{ij}),$$

где функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *— предельный потенциал (95) действия Солнца на спутник.*

2. *Интеграл (85) кинетического момента имеет вид*

$$M = [\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}] + \varepsilon[\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}] = \sum_{i=1}^{n}(I_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_i}I_{ij}),$$

где $I_i = [\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i]$, $I_{ij} = [\mathbf{y}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij}]$, $\varepsilon = \mu\nu\omega R$. *Возмущённый интеграл энергии близок к функции*

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{K}_i + \frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{S}_j^{(i)}),$$

где

$$\tilde{K}_i = \frac{\boldsymbol{\xi}_i^2}{2\tilde{m}_i} - \frac{\bar{m}_i}{|\mathbf{x}_i|}, \quad \tilde{S}_j^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}^2}{2\tilde{m}_{ij}} - \frac{m_i m_{ij}}{|\mathbf{y}_i|}, \quad 1\le j\le n_i, 1\le i\le n. \tag{99}$$

Более точно, возмущённый интеграл энергии отличается от функции H_0 *на возмущение порядка* $\mu + \nu\rho^2 + \nu\frac{\varepsilon}{\omega} = \mu + \nu(\omega^2+\nu)\frac{\mu}{\omega}^{\frac{2}{3}}$, *зависящее только от конфигурационных переменных.*

3. *Симплектическая структура в координатах* $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *имеет вид* $d\boldsymbol{\xi}\wedge\mathbf{x} + \varepsilon d\boldsymbol{\eta}\wedge\mathbf{y}$.

Из пункта 1 легко находим невозмущённую систему. А именно, для любого фиксированного $\omega \neq 0$, при $\mu = \nu = 0$ (а значит, $\rho = 0$, $\varepsilon = 0$) невозмущённая система (98) превращается в систему (96).

Напомним классическую задачу Хилла [20], являющуюся частным случаем описанной задачи о движении планетно-спутниковой системы. Она относится к системе типа Солнце-Земля-Луна ($N = 2$, $n = 1$) и определяется следующим образом. (Здесь мы опишем более общую постановку этой задачи, рассмотренную Мультоном в работе [26].)

Определение 22. *Задачей Хилла* назовём следующий частный случай плоской задачи трёх тел. Первое тело (Солнце) имеет массу 1, а два других тела (планета и спутник) имеют малую суммарную массу $m_1 + m_2 = \mu \ll 1$. Кроме того, расстояние между двумя этими телами много меньше, чем расстояние от их центра масс до первого (массивного) тела. Точкой конфигурационного многообразия является пара векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в плоскости, где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, проведённый из первого (массивного) тела в центр масс двух других тел, $\mathbf{y}/R$ — радиус-вектор из второго тела в третье, $1/R \ll 1$. Предполагается дополнительно, что величина ω из (87) достаточно мала. *Решением Хилла* называется относительно периодическое решение этой задачи, имеющее специальный вид, см. ниже.

Предельной задачей Хилла назовём динамическую систему в описанном конфигурационном многообразии, зависящую от параметра ω и получающуюся из задачи Хилла предельным переходом при стремлении к нулю параметров μ и $\frac{1}{R}$, связанных соотношением (87). (Это эквивалентно предельному переходу при $\mu \to 0$, где параметр $\frac{1}{R} = \omega^{2/3}\mu^{1/3}$ автоматически стремится к нулю.) Так как в предельной задаче Хилла движение $\mathbf{x}(t)$ радиус-вектора $\mathbf{x}$ описывается задачей Кеплера, это движение можно "фиксировать" и изучать задачу о движении радиус-вектора $\mathbf{y}$ при заданном движении радиус-вектора $\mathbf{x}$. Такую задачу мы тоже будем иногда называть *предельной задачей Хилла.*

Найдём явный вид задачи Хилла и предельной задачи Хилла.

Непосредственно проверяется, что предельная задача Хилла задаётся следующими уравнениями в конфигурационном пространстве:

$$\begin{cases} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= -\omega^2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \\ \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} &= -\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} - \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{cases} \tag{100}$$

Обозначим $\theta = m_1/(m_1 + m_2)$. Нетрудно видеть, что задача Хилла задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= -\omega^2 (\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \theta(1-\theta)\rho^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, \rho)) \\ \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} &= -\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, \rho), \end{cases}$$

где $\rho = \frac{1}{R}$, $\tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, \rho)$ — "потенциал взаимодействия спутника с Солнцем", определяемый из соотношения

$$\theta(1-\theta)\rho^2 \tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, \rho) = \frac{1-\theta}{|\mathbf{x} - \theta\rho\mathbf{y}|} + \frac{\theta}{|\mathbf{x} + (1-\theta)\rho\mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|}. \tag{101}$$

Разложение функции $\frac{1}{|\mathbf{x}+\rho\mathbf{y}|}$ в степенной ряд по переменной ρ в нуле:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} + \rho\mathbf{y}|} = (|\mathbf{x}|^2 + 2\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + |\mathbf{y}|^2)^{-1/2} =$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|} - \rho\frac{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{|\mathbf{x}|^3} + \rho^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathrm{O}(\rho^3), \quad \rho \to 0, \tag{102}$$

показывает, что функция $\tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, \rho)$ является аналитической по всем своим аргументам в области $|\mathbf{x}| > \rho|\mathbf{y}|$, $\rho > 0$, $0 < \theta < 1$, и что функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ действительно является её пределом при $\rho \to 0$:

$$\tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta, 0) \equiv F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Отметим, что "предельная задача Хилла", в отличие от "задачи Хилла", не зависит от параметра θ, и, тем самым, от отношения $\frac{m_1}{m_2}$ между массами планеты и спутника.

Комментарий. Изначально Хилл рассматривал задачу, получающуюся из описанной "задачи Хилла" предельным переходом при $\theta \to 0$ [20, 6]. Лишь затем результат Хилла был обобщен Мультоном [26] на случай произвольного $\theta \in (0, 1)$. Тем не менее, в данной работе мы называем "задачей Хилла" описанную задачу для произвольного θ, а при определении "предельной задачи Хилла" мы берем в этой задаче предел при стремлении к нулю параметров μ и $\rho = \frac{1}{R}$, связанных соотношением (87).

Таким образом, невозмущённая задача (96) действительно распадается на n независимых задач Кеплера, отвечающих планетам, и $N - n$ задач, отвечающих спутникам и являющихся предельной задачей Хилла. Далее, говоря о задаче Хилла, мы всегда будем иметь в виду предельную задачу Хилла (100).

Комментарий. Из системы уравнений (96) видно, что невозмущённую задачу можно решать отдельно для каждой спутниковой системы, причём в два шага: сначала нужно решить задачу для планеты, а потом для каждого её спутника. Более точно, сначала из первой половины уравнений (96) нужно найти зависимость от времени t радиус-вектора $\mathbf{x}_i$, а затем, с помощью второй половины уравнений, найти зависимость от t радиус-векторов $\mathbf{y}_{ij}$, $1 \le j \le n_i$. Опишем эти два шага.

Шаг 1. Первая половина уравнений (96) описывает медленное движение $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$ нормированного радиус-вектора $\mathbf{x}_i$, который, напомним, проведен из Солнца в центр масс i–той спутниковой системы, $1 \le i \le N$. Эта система уравнений является гамильтоновой и совпадает с обычной задачей Кеплера для i–той планеты.

Шаг 2. На втором шаге нужно решить оставшуюся половину уравнений (96), распадающуюся на (предельные) задачи Хилла и описывающую быстрые движения радиус-векторов $\mathbf{y}_{ij}$, $1 \le j \le n_i$. А именно, радиус-вектор $\mathbf{y}_{ij}$ движется в потенциале, который складывается из следующих двух потенциалов:

1. потенциала задачи Кеплера;

2. малого добавочного потенциала $\omega^2 F(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_{ij})$, описывающего влияние Солнца на спутник.

При этом вторая часть потенциала зависит также от переменной $\mathbf{x}_i$, зависимость которого от времени t уже была найдена на первом шаге. Таким образом, вторая система уравнений тоже является гамильтоновой системой, но уже *неавтономной*, т.е. зависит от времени.

Замечание 17. Рассмотрим случай планетной системы с двойными планетами, т.е. когда все $n_i \le 1$. Определим невозмущённую систему, зависящую от параметра ν, устремив μ к нулю. Тогда, согласно пункту 1 леммы 15, определённая таким образом невозмущённая задача не будет зависеть от параметра ν и совпадает с задачей (96).

Замечание 18. Подчеркнём ещё раз, что невозмущённая система (96) не является гамильтоновой, в отличие от возмущённой. Причиной является то, что симплектическая структура становится вырожденной при нулевом значении возмущения (т.е. при $\mu = 0$, $\nu = 0$).

Замечание 19. Поясним геометрический смысл функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, когда число n_i спутников i–той планеты больше 1 ($1 \le i \le N$). Рассмотрим функцию

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}}{m_i} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j).$$

Оказывается, что функция $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*)$ может быть получена с помощью предельного перехода при $R \to \infty$ из потенциала взаимодействия всех спутников i–той планеты с Солнцем:

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*) \equiv \tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*; 0, 0).$$

Здесь “возмущённая” функция $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*; \nu, \rho)$ зависит от параметров m_i, m_{ij} и при $n_i > 1$ определяется так:

$$\nu\rho^2 \tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*; \nu, \rho) = \frac{m_i/\bar{m}_i}{|\mathbf{x} - \nu\rho\delta|} + \nu \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}/\bar{m}_i}{|\mathbf{x} + \rho\mathbf{y}_j - \rho\nu\delta|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \tag{103}$$

где $\delta = \delta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}}{\bar{m}_i}\mathbf{y}_j$ — радиус-вектор из планеты в центр масс её спутниковой системы, $\bar{m}_i$ — суммарная масса i–той планеты и всех её спутников (97). Нетрудно видеть, что при любых значениях параметров $m_i > 0$, $m_{ij} > 0$ функция $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu, \rho)$ является аналитической по всем своим аргументам в области $|\mathbf{x}| > \rho\nu|\delta|$, $\rho, \nu > 0$, и стремится к функции $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при $\rho \to 0$. Это следует из разложения (102) и того, что по построению радиус-вектора $\mathbf{x}_i$ он соединяет Солнце с *центром масс* i–той спутниковой системы. Значит, в сумме (103) линейные по ρ члены взаимно сократятся, и она действительно имеет порядок $\mathrm{O}(\nu\rho^2)$ при $\rho \to 0$ (равномерно по ν).

При $n_i = 1$ положим $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu, \rho) = \tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta_i, \rho)$, см. (101), где $\theta_i = \nu m_{i1}/(m_i + \nu m_{i1})$, так что при $n_i = 1$ функция $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu, 0) \equiv F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ не зависит от ν.

3.2.2 Невырожденность в модельной и невозмущённой задачах (леммы о задаче Кеплера и задаче Хилла)

Рассмотрим невозмущённую задачу (96). Как было отмечено в предыдущем пункте, эта система описывает кеплеровские движения каждой планеты. Точнее, движения векторов $\mathbf{x}_i$, ξ_i (радиус-вектора и импульса i–той планеты) описываются гамильтоновой системой с гамильтонианом ωK_i относительно стандартной симплектической структуры ω_i^2, где

$$K_i = \frac{\xi_i^2}{2m_i} - \frac{m_i}{|\mathbf{x}_i|}, \quad \omega_i^2 = d\xi_i \wedge d\mathbf{x}_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{104}$$

Кроме того, система (96) описывает движения (предельной) задачи Хилла для каждого спутника этой планеты. Точнее, движение j–того спутника описывается (неавтономной) гамильтоновой системой с гамильтонианом $S_j^{(i)} + \omega^2 m_{ij} F(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_{ij})$ относительно стандартной симплектической структуры ω_{ij}^2, где

$$S_j^{(i)} = \frac{\eta_{ij}^2}{2m_{ij}} - m_i \frac{m_{ij}}{|\mathbf{y}_{ij}|}, \quad \omega_{ij}^2 = d\eta_{ij} \wedge d\mathbf{y}_{ij}, \quad 1 \le j \le n_i, \tag{105}$$

вектор-функция $\mathbf{x}_i(t)$ отвечает какому-либо решению $\mathbf{x}_i(t)$, $\xi_i(t)$ предыдущей задачи (для планеты), ср. с (99).

Рассмотрим *модельную* задачу (89), полученную из невозмущённой системы (96) отбрасыванием члена порядка ω^2. Получим набор N независимых задач Кеплера ($N = n + \sum_{i=1}^n n_i$), т.е. гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H^\circ = \sum_{i=1}^n (\omega K_i + \sum_{j=1}^{n_i} S_j^{(i)})$$

относительно симплектической структуры

$$\sum_{i=1}^n (d\boldsymbol{\xi}_i \wedge \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{n_i} d\boldsymbol{\eta}_{ij} \wedge \mathbf{y}_{ij}).$$

Соответствующие движения относительно вращающейся системы координат (с угловой скоростью ω_1) описываются системой с гамильтонианом $H^\circ - \omega_1 M^\circ$, где

$$M^\circ = \sum_{i=1}^n (I_i + \sum_{j=1}^{n_i} I_{ij}),$$

$I_i = [\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i]$, $I_{ij} = [\mathbf{y}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij}]$ — интегралы кинетического момента в задачах Кеплера (104), (105).

Фиксируем любую точку $m^\circ \in \Lambda^\circ$ фазового пространства, отвечающую круговым движениям задач Кеплера с соответствующими частотами ω_i, Ω_{ij} (все такие точки образуют N–мерный тор Λ°). Из условий (88) на эти частоты следует, что радиусы r_i, r_{ij} этих круговых движений отделены от нуля и бесконечности.

Рассмотрим в фазовом пространстве отображение "за период", т.е. поток $g^\tau_{H^\circ - \omega_1 M^\circ}$ модельной системы за время τ, и линейную часть этого отображения в точке m°.

Лемма 16 (О задаче Кеплера). *В задачах Кеплера (104), (105), на которые распадается модельная задача (89), существуют канонические замены координат* $(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i) \to (\varphi_i \bmod 2\pi, I_i, q_i, p_i)$, $1 \le i \le n$, $(\mathbf{y}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij}) \to (\varphi_{ij} \bmod 2\pi, I_{ij}, q_{ij}, p_{ij})$, $1 \le j \le n_i$, *при которых линейная часть в точке* $m^\circ \in \Lambda^\circ$ *отображения "за период"* $g^\tau_{H^\circ - \omega_1 M^\circ}$ *для модельной задачи становится блочно-диагональной матрицей, состоящей из блоков*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\omega\tau}{m_i r_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_i & \frac{1}{I_i}\sin\alpha_i \\ 0 & 0 & -I_i \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\tau}{m_{ij} r_{ij}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_{ij} & \frac{1}{I_{ij}}\sin\alpha_{ij} \\ 0 & 0 & -I_{ij} \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} \end{pmatrix}.$$

Здесь $I_i = I_i(m^\circ)$, $1 \le i \le n$, $I_{ij} = I_{ij}(m^\circ)$, $1 \le j \le n_i$, *— значения интегралов кинетического момента в задачах Кеплера (104), (105);* $\alpha_i =$

$\omega_i\tau \equiv \alpha \bmod 2\pi$, $\alpha_{ij} = \Omega_{ij}\tau \equiv \alpha \bmod 2\pi$; τ и α — параметры относительно периодических движений на торе Λ°. Аналогичное верно для любого относительного периода τ и соответствующего угла α.

Рассмотрим теперь невозмущённую задачу (96) по отношению к какой-либо (i–той) планете и её (j–тому) спутнику, относительно системы координат, равномерно вращающейся с угловой частотой ω_i, $1 \le i \le n$. Движение планеты $\mathbf{x}_i(t)$, $\xi_i(t)$ остается как в модельной задаче. Фиксируем *круговое* движение $\mathbf{x}_i(t)$, $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ планеты с частотой ω_i и рассмотрим задачу для спутника, описываемую гамильтонианом и симплектической структурой

$$S_j^{(i)} + \omega^2 m_{ij} F(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_{ij}) - \omega_1 I_{ij}, \qquad \omega_{ij}^2, \tag{106}$$

$1 \le j \le n_i$. (Эта задача совпадает с (предельной) задачей Хилла относительно системы координат, равномерно вращающейся вместе с планетой.) Ясно, что периодическим движениям этой задачи отвечают относительно периодические движения (предельной) задачи Хилла. Полученную задачу мы будем называть (предельной) *задачей Хилла для j–того спутника i–той планеты.*

Лемма 17 (О задаче Хилла). *Пусть частота ω_i i–той планеты в наборе (88) достаточно мала. Фиксируем круговое движение $\mathbf{x}_i(t)$ этой планеты с частотой ω_i в силу соответствующей задачи Кеплера (104). Тогда для каждого спутника этой планеты существует периодическое движение $\mathbf{y}_{ij}(t)$ соответствующей (предельной) задачи Хилла (94), (106), обладающее следующими свойствами. Это движение ω^2–близко к круговому Ω_{ij}–частотному движению модельной задачи Кеплера, и имеет ту же среднюю частоту Ω_{ij}. Такое движение единственно, т.е. любые два таких движения получаются друг из друга сдвигом начала отсчёта времени на число, кратное периоду $\tau_{ij} = \frac{2\pi}{\Omega_{ij}-\omega_i}$.*

Замечание 20. Пусть числа $\omega > 0$, ω_i и Ω_{ij} имеют вид (88), т.е. удовлетворяют соотношениям $\frac{1}{C} < \frac{\omega_i}{\omega} < C$, $\frac{1}{C} < \Omega_{ij} < C$. Из леммы 17 следует, что существует константа $c_1 = c_1(C) > 0$, такая, что при любом значении ω, $0 < \omega \le c_1$, задача Хилла для j–того спутника i–той планеты имеет относительно периодическое движение, при котором средние угловые скорости планеты и спутника равны соответственно ω_i и Ω_{ij}.

Движение из леммы 17 будем называть (предельным) *движением Хилла* j–того спутника.

Фиксируем набор частот ω_i, Ω_{ij} вида (88). Рассмотрим любую точку m фазового пространства, отвечающую круговым движениям задач Кеплера для планет и движениям Хилла для спутников, с соответствующими частотами ω_i, Ω_{ij}. Все такие точки m образуют N–мерный тор, который мы обозначим через Λ. Согласно лемме 17, тор Λ ω^2–близок к тору Λ°, отвечающему круговым движениям модельных задач Кеплера.

Леммы 15, 16 и 17 мы докажем в следующих пунктах, а пока выведем из них важное следствие.

Ясно, что невозмущённая задача близка к модельной задаче. Но отсюда, вообще говоря, не следует, что решения невозмущённой задачи останутся близки к решениям модельной задачи на больших промежутках времени, например, при $t \in [0, \tau]$. (Отметим, что $\tau =\to \infty$ при $\omega \to 0$, если $n \geq 2$.) Тем не менее, справедливо следующее утверждение о том, что вблизи тора Λ решения невозмущённой задачи "устроены" так же, как решения модельной задачи вблизи тора Λ°, на промежутке времени вида $[0, \tau]$, где τ удовлетворяет условию (93).

В окрестности любой точки $m \in \Lambda$ рассмотрим отображение "за период" для невозмущённой задачи, т.е. поток невозмущённой системы (96) за время τ. Рассмотрим линейную часть этого отображения в точке m.

Разложим фазовое пространство невозмущённой (96) задачи в прямую сумму фазовых пространств задач Кеплера, отвечающих планетам и спутникам. Для любой точки $m \in \Lambda$ рассмотрим произвольный базис $e(m)$, состоящий из базисов, касательных к фазовым пространствам задач Кеплера. Таким образом, базис $e(m)$ состоит из n групп, i–тая из которых состоит из базиса, отвечающего i–той планете, и базисов, отвечающих всем её спутникам (в базисе $e(m)$ все векторы, отвечающие планете, идут перед векторами, отвечающими её спутникам), $1 \leq i \leq n$.

Заметим, что в предельной задаче Хилла движение планеты не зависит от движения спутника. Следовательно, в любом базисе $e(m)$ указанного вида линейная часть отображения "за период" невозмущённой системы в точке m задаётся *блочной нижнетреугольной* матрицей. При этом под диагональю такой матрицы ненулевым блоком может быть только блок, отвечающий какой-либо планете и какому-либо её спутнику.

Следствие 13. *Для любой точки m тора Λ, отвечающего предельным движениям Хилла невозмущённой задачи, существует набор канонических базисов в касательных пространствах к фазовым пространствам задач Кеплера (104), (105) в этой точке, обладающий следующим свойством. Линейная часть отображения "за период" невозмущённой системы (96) в общем базисе $e(m)$, состоящем из базисов этого набора, задаётся блочной (нижнетреугольной) матрицей, на диагональных блоках которой стоят матрицы из леммы 16, в которых числа α_{ij}, быть может, заменены на $\omega^2\tau$–близкие к ним числа вида $\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + \mathrm{O}(\omega^2\tau)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n_i$. При этом базисные векторы, отвечающие планетам, совпадают с соответствующими координатными векторами из леммы 16,* *первые два вектора любого базиса, отвечающего спутнику, ω–близки к соответствующим координатным векторам из леммы 16, а другие два вектора ограничены. Здесь τ — любой относительный период движения, например, вида $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ или минимальный положительный период $\tau = \tau_{min}$.*

Замечание 21. В силу следствия 13 существует константа $c_2 > 0$, такая, что $|\tilde{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}| < \frac{c_2}{3}\omega^2\tau$. Пусть $c_2\omega^2\tau < \pi$, т.е. выполнено условие (93). Тогда, если угол $\alpha \bmod 2\pi$ отделён от нуля на величину, не меньшую, чем $c_2\omega^2\tau$, то $\tilde{\alpha}_{ij} \bmod 2\pi \neq 0$. Поэтому N–мерный тор Λ, заполненный замкнутыми τ–периодическими траекториями невозмущённой системы, *невырожден*.

Замечание 22. В матрице из следствия 13 элементы под диагональю, вообще говоря, не ограничены. Из этого следствия можно вывести, что эти элементы имеют порядок $\mathrm{O}(\omega^2 e^{c\tau})$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от константы c_1 из замечания 20.

Доказательство. Для каждой планеты невозмущённая задача совпадает с модельной, поэтому в качестве искомых базисных векторов, отвечающих планетам, мы сразу возьмём координатные векторы, отвечающие каноническим координатам $(\varphi_i \bmod 2\pi, I_i, q_i, p_i)$, $1 \le i \le n$, из леммы 16.

Для каждого спутника обозначим через e_1, e_2, e_3, e_4 координатный базис, отвечающий соответствующим каноническим координатам

$$(\varphi_{ij} \bmod 2\pi, I_{ij}, q_{ij}, p_{ij}), \quad 1 \le j \le n_i,$$

из леммы 16. Мы построим новый канонический базис f_1, f_2, f_3, f_4, удовлетворяющий требованию доказываемого следствия 13, причём векторы f_1 и f_2 этого базиса будут ω–близки к векторам e_1 и e_2 соответственно, а векторы f_3 и f_4 — ограничены.

Рассмотрим движение Хилла j–того спутника i–той планеты как относительно периодическое движение. Пусть β_{ij}, τ_{ij} — параметры этого движения, см. определение 20. Отметим, что минимальный положительный период τ_{ij} движения Хилла имеет порядок 1, а угол β_{ij} имеет порядок ω: $\tau_{ij} = 2\pi/(\Omega_{ij} - \omega_i) \sim 1$, $\beta_{ij} = \omega_i\tau_{ij} \sim \omega$, где ω_i и Ω_{ij} — средние частоты движений планеты и спутника соответственно.

По лемме 17, движение Хилла ω^2–близко к движению задачи Кеплера. Но для задачи Кеплера, согласно лемме 16, линеаризация отображения "за период" τ_{ij} задаётся матрицей

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta_{ij} & \frac{1}{I_{ij}}\sin\beta_{ij} \\ 0 & 0 & -I_{ij}\sin\beta_{ij} & \cos\beta_{ij} \end{pmatrix}$$

относительно координат $(\varphi_{ij} \bmod 2\pi, I_{ij}, q_{ij}, p_{ij})$, где $a = \frac{-3\tau_{ij}}{m_{ij} r_{ij}^2}$. Следовательно, в любой точке p замкнутой траектории решения Хилла, линеаризация отображения "за период" τ_{ij} (при фиксированном движении планеты) задаётся некоторой матрицей $\tilde{A}_{ij}$, ω^2–близкой к матрице A_{ij}. Нас интересует линеаризация отображения "за период" $\tau = N_{ij}\tau_{ij}$, где N_{ij} — натуральное число порядка τ. Эта линеаризация задаётся матрицей $\tilde{A}_{ij}^N$.)

Далее мы будем отождествлять линейные операторы с их матричными представлениями относительно координат $(\varphi_{ij} \bmod 2\pi, I_{ij}, q_{ij}, p_{ij})$. Заметим, что

а) спектр оператора A_{ij} состоит из трёх чисел: $\operatorname{spec} A_{ij} = \{1, e^{\pm i\beta_{ij}}\}$,

б) спектр оператора $\tilde{A}_{ij}$ содержит 1, так как касательный вектор к траектории периодического движения Хилла неподвижен при отображении "за период",

в) оператор $\tilde{A}_{ij}$ (как и A_{ij}) является симплектическим, т.е. сохраняет стандартную симплектическую билинейную форму ω_{ij}^2, задаваемую матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, так как является дифференциалом отображения "за период" некоторой неавтономной гамильтоновой системы.

г) операторы A_{ij} и $\tilde{A}_{ij}$ ω^2–близки.

Мы выведем из этих свойств, что спектр оператора $\tilde{A}_{ij}$ тоже состоит из трёх чисел: $\operatorname{spec} \tilde{A}_{ij} = \{1, e^{\pm i\tilde{\beta}_{ij}}\}$, где $\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \mathrm{O}(\omega^2)$. Более того, существует канонический базис f_1, f_2, f_3, f_4, в котором оператор $\tilde{A}_{ij}$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tilde{\beta}_{ij} & \frac{1}{I_{ij}}\sin\tilde{\beta}_{ij} \\ 0 & 0 & -I_{ij}\sin\tilde{\beta}_{ij} & \cos\tilde{\beta}_{ij} \end{pmatrix}. \tag{107}$$

Если мы это докажем, то следствие будет доказано: N_{ij}–ная степень последней матрицы имеет такой же вид, как соответствующая матрица в лемме 16, с той лишь разницей, что угол α_{ij} нужно заменить на $N_{ij}\tilde{\beta}_{ij} = \alpha_{ij} + N_{ij}(\tilde{\beta}_{ij} - \beta_{ij}) = \alpha_{ij} + \mathrm{O}(\omega^2\tau)$.

Поясним, что здесь мы рассматриваем задачу Хилла j–того спутника i–той планеты при *фиксированном круговом движении* этой планеты. Поэтому во всей невозмущённой задаче матрица оператора монодромии не будет, вообще говоря, блочно-диагональной, а лишь блочной нижнетреугольной.

Для нахождения спектра оператора $\tilde{A}_{ij}$ найдём его характеристический многочлен $\tilde{\chi}(\lambda)$. Из свойств б), в) получаем, что

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda\cos\beta_{ij} + 1),$$

$$\tilde{\chi}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda t+1),$$

где $t = \mathrm{tr}\tilde{A}_{ij}$ — след оператора $\tilde{A}_{ij}$. С другой стороны, из явного вида матрицы A_{ij} и ω^2–близости к ней матрицы $\tilde{A}_{ij}$ (свойство г), с учётом того, что $\cos\beta_{ij} = 1+\mathrm{O}(\omega^2)$, $\sin\beta_{ij} = \mathrm{O}(\omega)$, имеем следующую связь между их определителями и следами:

$$\det\tilde{A}_{ij} - \det A_{ij} = \mathrm{tr}\tilde{A}_{ij} - \mathrm{tr}A_{ij} + \mathrm{O}(\omega^3).$$

Отсюда и из симплектичности матрицы $\tilde{A}_{ij}$ находим: $\mathrm{tr}\tilde{A}_{ij} = \mathrm{tr}A_{ij}+\mathrm{O}(\omega^3) = 2\cos\beta_{ij}+\mathrm{O}(\omega^3) = 2\cos\tilde{\beta}_{ij}$, где $\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij}+\mathrm{O}(\omega^2)$, что и доказывает утверждение о спектре оператора $\tilde{A}_{ij}$.

Осталось построить канонический базис f_1, f_2, f_3, f_4, “приводящий” симплектический оператор $\tilde{A}_{ij}$ к виду (107). Перейдём к новому каноническому базису, ω^2–близкому к исходному базису e_1, e_2, e_3, e_4, в котором первый базисный вектор касателен к траектории движения Хилла в некоторой её точке p. Построенный базис мы для простоты обозначений снова обозначим через e_1, e_2, e_3, e_4. В этом базисе первый столбец и вторая строка матрицы $\tilde{A}_{ij}$ имеют нужный вид: $(1,0,0,0)^\tau$ и $(0,1,0,0)$.

Рассмотрим разность $\tilde{A}_{ij}-I$ оператора $\tilde{A}_{ij}$ и тождественного оператора I. Нетрудно видеть, что ранг оператора $\tilde{A}_{ij}-I$ равен трём и, более того, его образ $\mathrm{Im}(\tilde{A}_{ij}-I)$ совпадает с некоторым инвариантным трёхмерным подпространством L^3, натянутым на векторы вида $e_1+\mathrm{O}(\omega^2)$, $e_3+\mathrm{O}(\omega)$ и $e_4+\mathrm{O}(\omega)$ (равные $\frac{1}{a}(\tilde{A}_{ij}e_2-e_2)$, $\frac{1}{I_{ij}\beta_{ij}}(\tilde{A}_{ij}e_4-e_4)$ и $-\frac{1}{I_{ij}\beta_{ij}}(\tilde{A}_{ij}e_3-e_3)$ соответственно). Из симплектичности оператора $\tilde{A}_{ij}$ следует, что первый базисный вектор e_1 принадлежит подпространству L^3. Значит, L^3 натянуто также на вектора e_1, $e_3+\mathrm{O}(\omega)$, $e_4+\mathrm{O}(\omega)$.

Применяя к последним векторам оператор $\tilde{A}_{ij}-E$ ещё раз, аналогичным образом получаем, что образ L^2 оператора $(\tilde{A}_{ij}-E)^2$ двумерен и натянут на векторы вида $e_3+\mathrm{O}(\omega)$ и $e_4+\mathrm{O}(\omega)$. (Ясно, что подпространство L^2 инвариантно относительно оператора $\tilde{A}_{ij}$, и спектр оператора $\tilde{A}_{ij}|_{L^2}$ равен $e^{\pm i\tilde{\beta}_{ij}}$.)

Выберем в подпространстве L^2 какой-нибудь канонический базис $\tilde{e}_3$, $\tilde{e}_4$, векторы которого ω–близки к e_3, e_4, а в косоортогональном дополнении K^2 к L^2 — канонический базис $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2$, где вектор $\tilde{e}_2$ ω–близок к e_2. (Эти базисы можно выбрать однозначно, потребовав, например, чтобы проекции векторов $\tilde{e}_3$ и $\tilde{e}_4$ на плоскость векторов e_3, e_4 имели вид e_3, $(1+\mathrm{O}(\omega))e_4$, а проекция вектора $\tilde{e}_2$ на плоскость векторов e_1, e_2 имела вид $(1+\mathrm{O}(\omega))e_2$.) Так как подпространства K^2 и L^2 инвариантны относительно оператора $\tilde{A}_{ij}$, то в новом базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$, $\tilde{e}_4$, ω–близком к e_1, e_2, e_3, e_4, этот оператор имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}. \tag{108}$$

Домножив векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ на подходящее положительное число, ω–близкое к 1, легко добиться равенства $a_0 = a$.

Заменим теперь вектор $\tilde{e}_4$ на ограниченный вектор

$$\tilde{\tilde{e}}_4 = \frac{1}{I_{ij} \sin \tilde{\beta}_{ij}} (\tilde{e}_3 \cos \tilde{\beta}_{ij} - \tilde{A}_{ij} \tilde{e}_3)$$

(этот вектор ограничен, поскольку оператор $\tilde{A}_{ij}|_{L^2}$ ω–близок к тождественному). Домножим векторы $\tilde{e}_3$ и $\tilde{\tilde{e}}_4$ на подходящее положительное число, так, чтобы значение симплектической структуры на них стало равным ± 1. (Потом мы покажем, что в действительности последнее значение равно 1.) Ясно, что в построенном базисе, который мы обозначим через f_1, f_2, f_3, f_4, симплектический оператор $\tilde{A}_{ij}$ примет нужный вид (107).

Покажем, что положительное число, на которое мы домножили векторы $\tilde{e}_3$ и $\tilde{\tilde{e}}_4$, ограничено. Это равносильно тому, что значение симплектической структуры на паре векторов $\tilde{e}_3$ и $\tilde{\tilde{e}}_4$ отделено от нуля. Последнее равносильно тому, что число $a_3 / \sin \beta_{ij}$ отделено от нуля, и следует из следующей цепочки:

$$1 - \sin^2 \tilde{\beta}_{ij} = \cos^2 \tilde{\beta}_{ij} = \left(\frac{a_1 + a_4}{2} \right)^2 \geq a_1 a_4 = 1 + a_2 a_3,$$

поскольку $|a_2| = \mathrm{O}(\omega) = \mathrm{O}(\sin \beta_{ij})$.

Осталось показать, что построенный базис f_1, f_2, f_3, f_4 является симплектическим, т.е. что значение симплектической структуры на на паре векторов $\tilde{e}_3$ и $\tilde{\tilde{e}}_4$ положительно. Другими словами, нужно показать, что $a_3 < 0$. Для этого применим “соображения непрерывности”.

Воспользуемся тем, что симплектические матрицы, первый столбец которых имеет вид $(1, 0, 0, 0)^\tau$, образуют подгруппу Ли в группе всех обратимых матриц. В частности, они образуют гладкое подмногообразие G в пространстве матриц (точнее, для любой точки из G существует её координатная окрестность, пересечение которой с G является некоторым координатным подпространством в этой окрестности). Зададим на подмногообразии G какую-нибудь риманову метрику, например, полученную ограничением на G стандартной евклидовой метрики в объемлющем пространстве матриц. Соединим ω^2–близкие матрицы A_{ij} и $\tilde{A}_{ij}$ кратчайшей кривой

$\tilde{A}(t) = A(t)$, $0 \le t \le 1$, в группе G, где $A(0) = A_{ij}$, $A(1) = \tilde{A}_{ij}$. Тогда все матрицы $A(t)$, $0 \le t \le 1$, удовлетворяют условиям б), в) и г), см. выше. Значит, по доказанному, спектр каждой матрицы $A(t)$ состоит из трёх чисел: $\operatorname{spec} A(t) = \{1, e^{\pm i\beta(t)}\}$, где $\beta(t) = \beta_{ij} + \mathrm{O}(\omega^2)$. Кроме того, при каждом t существует однозначно определённый базис $\tilde{e}_1(t)$, $\tilde{e}_2(t)$, $\tilde{e}_3(t)$, $\tilde{e}_4(t)$, в котором оператор $A(t)$ имеет вид (108). Так как, по доказанному, значение $a_3(t)/\sin\beta(t)$ отделено от нуля и непрерывно зависит от t, оно остается одного знака при всех t. При $t = 0$ имеем $a_3(0) = -\sin\beta_{ij} < 0$, а значит, число $a_3 = a_3(1)$ тоже отрицательно.

Таким образом, построенный базис f_1, f_2, f_3, f_4 действительно является симплектическим. Это завершает доказательство следствия 13.

Пусть $e(m)$ — базис из следствия 13. Применим к базису $e(m)$ следующую операцию "растяжения". Домножим базисные векторы, отвечающие всем спутникам, на число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ — любое достаточно малое число. Обозначим полученный базис через $e_\varepsilon(m)$. Ясно, что $e_\varepsilon(m)$ является *каноническим базисом* фазового пространства относительно симплектической структуры $\omega^2_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}(\omega^2_i + \varepsilon\sum_{i=1}^{n_i}\omega^2_{ij})$.

Будем считать число $\varepsilon \ll 1$ дополнительным параметром возмущения системы. (Затем мы возьмём его зависящим от возмущения, полагая $\varepsilon = \mu\nu\omega R = \mu^{\frac{2}{3}}\nu\omega^{\frac{1}{3}}$. При этом нам будет важно, что $\varepsilon \to 0$ при $\mu \to 0$ и любых ограниченных ω, ν.)

Обозначим через A_0 блочно-диагональную матрицу из леммы 16 о задаче Кеплера. Из следствия 13 легко получаем

Следствие 14. *В любой точке $m \in \Lambda$ оператор $A = dg^\tau_V(m)$ линейной части отображения "за период" невозмущённой системы (96) во вращающейся системе координат имеет следующий вид. Матрица A_ε оператора A относительно базиса $e_\varepsilon(m)$ является блочной нижнетреугольной матрицей, причём её блоки на диагонали имеют такой же вид, как в базисе $e(m)$ из следствия 13, а блоки под диагональю имеют порядок $\mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$. В частности, ядро матрицы $A_\varepsilon - I$ близко к подпространству, натянутому на N векторов базиса $e_\varepsilon(m)$, являющихся первыми векторами базисов, отвечающих планетам и спутникам.*

Доказательство. Заметим, что матрица из следствия 13 является блочной нижнетреугольной, причём любой её ненулевой блок под диагональю отвечает одной планете и одному спутнику.

Ясно, что при любом $\varepsilon > 0$ диагональные блоки матрицы A_ε — такие же, как в базисе $e = e(m)$, и поэтому в силу следствия 13 они близки к блокам матрицы A_0. Аналогичное верно для всех блоков, отвечающих двум планетам либо двум спутникам. Остальные блоки матрицы A_ε получаются из соответствующих блоков матрицы оператора A в базисе e умножением на положительное число, равное $\sqrt{\varepsilon}$ для блоков под диагональю и $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ для блоков над диагональю.

Следовательно, блоки матрицы A_ε под диагональю $\sqrt{\varepsilon}$–малы при $\varepsilon \to 0$. Так как все блоки над диагональю нулевые, следствие доказано.

Следствие 14 понадобится нам для доказательства достаточного условия орбитальной устойчивости относительно периодического движения.

Отметим, что в этом следствии предполагается, что тор Λ, а значит, и частоты ω_i, Ω_{ij} на нём, фиксированы. Если этого не предполагать, то с учётом замечания 22 блоки матрицы A_ε под диагональю имеют порядок $\mathrm{O}(\omega^2 e^{c\tau}\sqrt{\varepsilon})$. Так как $\omega^2\sqrt{\varepsilon} = \mu^{\frac{1}{3}}\nu^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{13}{6}}$, то даже в случае $\tau = \mathrm{O}(\omega)$ элементы матрицы A_ε под диагональю являются малыми только при *очень малом возмущении*, точнее, при $\mu^2\nu^3 \ll e^{-\frac{d}{\omega}}$, где $d > 0$ — некоторая константа. Последняя величина экспоненциально мала по ω и имеет порядок $o(\omega^k)$ для любого положительного числа k.

3.3 План доказательства

Доказательства теорем 11 и 12 будут основаны на обобщённой геометрической теореме Пуанкаре (точнее, на теореме 5 о неподвижных точках отображений) и сформулированных в §3.2 трёх леммах 15, 16, 17 и следствии 13, которые будут доказаны в следующем параграфе 3.4.

3.3.1 Существование относительно периодических движений

Доказательство пунктов А, Б теоремы 11 проведём в четыре шага.

Шаг 1. Положим $\mu = \nu = 0$ и рассмотрим невозмущённую задачу. Согласно лемме 15, она имеет вид (96), т.е. “распадается” на n задач Кеплера и $N - n$ (предельных) задач Хилла [20].

Фиксируем любое достаточно малое ω, и для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots n_i$ рассмотрим относительно периодическое решение соответствующей предельной задачи Хилла, с заданными средними частотами ω_i и Ω_{ij} из (90), (93). Такое решение существует, согласно лемме 17 о предельной задаче Хилла. Более точно, согласно этой лемме, невозмущённая задача, отвечающая рассматриваемым индексам i, j в системе (96), имеет относительно периодическое решение, при котором движение вектора $\mathbf{x}_i$ является круговым, а движение вектора $\mathbf{y}_{ij}$ ω^2–близко к круговому движению с частотой Ω_{ij} соответствующей задачи Кеплера.

Нетрудно видеть, что полученные относительно периодические траектории системы (96) заметают N–мерный тор Λ во всём фазовом пространстве задачи, ω^2–близкий к тору Λ°, так как на нём координатами можно взять угловые координаты ψ_i и ψ_{ij} всех N радиус-векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_{ij}$. Заметим, что этот тор инвариантен, а с учётом следствия 13 *невырожден* (см. замечание 21), и решениям на нём отвечают круговые движения радиус-векторов $\mathbf{x}_i$ и (близкие к круговым) движения радиус-векторов $\mathbf{y}_{ij}$. Заметим также, что невозмущённая система на торе Λ задаётся векторным полем, близким к полю

$$V_1^\circ = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i \frac{\partial}{\partial\psi_i} + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}\frac{\partial}{\partial\psi_{ij}}), \tag{109}$$

а аналогичная невозмущённая система, отвечающая системе с гамильтонианом M, на этом торе определяется полем

$$V_2^\circ = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial\psi_i} + \sum_{j=1}^{n_i}\frac{\partial}{\partial\psi_{ij}}). \tag{110}$$

Вблизи построенного тора Λ рассмотрим отображение g_V^τ фазового пространства на себя, равное потоку невозмущённой системы V за время τ. Подчеркнём ещё раз, что тор Λ совпадает с множеством неподвижных точек отображения g_V^τ.

Шаг 2. Перейдём к угловым координатам r, ψ на евклидовой плоскости, в результате чего радиус-вектора $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_{ij}$ представятся в виде пар чисел (r_i, ψ_i), $1 \le i \le n$, и (r_{ij}, ψ_{ij}), $1 \le j \le n_i$, соответственно. Соответствующие импульсы обозначим через p_{r_i}, $p_{r_{ij}}$. Будем обозначать

$$r = \{r_i, r_{i1}, \ldots, r_{in_i} \mid 1 \le i \le n\}, \quad \psi = \{\psi_i, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in_i} \mid 1 \le i \le n\},$$

$$p_r = \{p_{r_i}, p_{r_{i1}}, \ldots, p_{r_{in_i}} \mid 1 \le i \le n\}, \quad p_\psi = \{p_{\psi_i}, p_{\psi_{i1}}, \ldots, p_{\psi_{in_i}} \mid 1 \le i \le n\}.$$

Для любых достаточно малых μ, ν рассмотрим возмущённую систему $\tilde{V}$ и определим близкий N–мерный тор $\tilde{\Lambda}$ следующим образом. Точка m фазового пространства принадлежит множеству $\tilde{\Lambda}$, если при отображении $g_{\tilde{V}}^\tau$ все отвечающие этой точке радиус-векторы $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_{ij}$, а также "радиальные импульсы" p_{r_i}, $p_{r_{ij}}$, не меняются, т.е. могут измениться лишь угловые импульсы p_{ψ_i}, $p_{\psi_{ij}}$. Другими словами,

$$\tilde{\Lambda} = \{m \mid g_{\tilde{V}}^\tau(m) \in \theta_m\} = \{m = (\psi, p_\psi, r, p_r) \mid \psi' = \psi, r' = r, p_r' = p_r\},$$

где $\theta_m = \{\psi = \mathrm{const}, r = \mathrm{const}, p_r = \mathrm{const}\} \ni m$ — площадка, параллельная координатному подпространству, отвечающему координатам p_ψ; $(\psi', p_\psi', r', p_r')$ — координаты точки $m' = g_{\tilde{V}}^\tau(m)$, $g_{\tilde{V}}^t = g_{H-\omega_1 M}^t$ — фазовый поток возмущённой системы.

Покажем, что такие точки действительно образуют N–мерный тор, близкий к невозмущённому тору Λ.

1) Как мы заметили на первом шаге, ввиду того, что период τ не слишком велик (т.е. имеет порядок $o(\frac{1}{\omega}^2)$, см. (93)), тор Λ является невырожденным множеством, заполненным τ–периодическими траекториями невозмущённой системы.

2) Выведем из следствия 13, что в каждой точке $m \in \Lambda$ образ D_m оператора $dg^\tau_V(m) - I$ трансверсален площадке θ_m, где I — тождественный оператор. Напомним, что площадка θ_m натянута на N векторов, каждый из которых лежит в фазовом пространстве соответствующей задачи Кеплера и трансверсален её изоэнергетической поверхности. Поэтому в координатах из леммы 16 площадка θ_m обладает таким же свойством. Значит, в базисе из следствия 13 площадка θ_m имеет такой же вид, т.е. натянута на N векторов, каждый из которых ограничен и является линейной комбинацией второго базисного вектора соответствующего базиса из следствия 13 и других векторов этого же базиса. Но, в силу явного вида матрицы оператора $dg^\tau_V(m)$ и следствия 13, подпространство D_m трансверсально любому подпространству указанного вида.

3) Из леммы 15 следует, что для любого фиксированного ω при $\mu \to 0$, $\nu \to 0$ возмущённая система стремится к невозмущённой. Следовательно, при достаточно малых μ, ν отображение g^τ_V становится сколь угодно близким к невозмущённому отображению g^τ_V.

Таким образом, теорема о неявных функциях применима, и множество $\tilde\Lambda$ действительно является N–мерным тором, близким к тору Λ.

По построению, все неподвижные точки отображения g^τ_V попали в тор $\tilde\Lambda$, откуда с помощью пункта 1 леммы 15 получаем пункт Б) теоремы 11.

Шаг 3. Теперь рассмотрим на торе $\tilde\Lambda$ гладкую функцию S, дифференциал которой имеет вид

$$dS(m) = \sum_{i=1}^{n}((p'_{\psi_i} - p_{\psi_i})d\psi_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_i}(p'_{\psi_{ij}} - p_{\psi_{ij}})d\psi_{ij}), \tag{111}$$

где p'_{ψ_i}, $p'_{\psi_{ij}}$ — набор угловых импульсов образа точки m при отображении Пуанкаре g^τ_V, $\varepsilon = \mu\nu\omega R = \mu^{\frac{2}{3}}\nu\omega^{\frac{1}{3}}$. Такая функция действительно существует, так как она равна ограничению на тор $\tilde\Lambda$ производящей функции вида (14) симплектического отображения g^τ_V (см. п. 1.4.5).

Действительно, напомним, что для любого симплектического отображения, заданного в канонических координатах $p, q \bmod 2\pi$ функциями $p' = p'(p, q)$, $q' = q'(p, q)$, можно определить (по меньшей мере локально) производящую функцию $\Psi = \Psi(m)$ вида (14), $m = (p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. Для этого рассмотрим 1–форму $\alpha = (p'-p)dq+(q-q')dp' = \sum_{i=1}^n((p'_i-p_i)dq_i+(q_i - q'_i)dp'_i)$. Из симплектичности отображения легко следует, что эта форма замкнута: $d\alpha = 0$, а значит, локально она является точной. Определим производящую функцию Ψ равенством

$$d\Psi(m) = \alpha(m) = (p' - p)dq + (q - q')dp'.$$

В нашей ситуации, согласно пункту 3 леммы 15, аналогичная 1–форма α определяется по формуле

$$\alpha(m) = (\boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{\xi})d\mathbf{x} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\boldsymbol{\xi}' + \varepsilon(\boldsymbol{\eta}' - \boldsymbol{\eta})d\mathbf{y} + \varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{y}')d\boldsymbol{\eta}'.$$

Совершенно аналогично доказательству теоремы 5 можно доказать, что эта форма точна, а значит, функция Ψ корректно определена. А именно, для доказательства точности формы α нужно показать, что возмущение симплектической структуры “сохраняет центр тяжести”. Последне в данном случае очевидно, так как возмущённая симплектическая структура является стандартной симплектической структурой на кокасательном расслоении конфигурационного многообразия и, тем самым, точна. Невозмущённая симплектическая структура тоже точна (как предел точных 2–форм), хотя не является невырожденной. Значит, возмущение симплектической структуры является точной 2–формой и, следовательно, сохраняет центр тяжести.

Таким образом, функция S на нашем торе $\tilde{\Lambda}$ определена корректно, с точностью до постоянного слагаемого.

Проведём в фазовом пространстве задачи трансверсаль вида

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\psi_i + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}\psi_{ij}) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(\psi_i + \sum_{j=1}^{n_i}\psi_{ij}) = 0 \right\},$$

к исходным двумерным торам на Λ, заполненным периодическими траекториями невозмущённой системы. (Поверхность Σ действительно трансверсальна этим двумерным торам, так как эти торы касательны к двум векторным полям, явно указанным на шаге 1.)

Ограничим функцию S на $(N-2)$–мерный тор, являющийся пересечением N–мерного тора $\tilde{\Lambda}$ с трансверсалью Σ. Рассмотрим критические точки этого ограничения. В силу (111), это — в точности точки $m \in \Sigma \cap \tilde{\Lambda}$, которые при отображении g_V^τ смещаются вдоль двумерной плоскости, натянутой на векторы

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon\omega_i\frac{\partial}{\partial p_{\psi_i}} + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}\frac{\partial}{\partial p_{\psi_{ij}}}), \quad V_2 = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_{\psi_i}} + \sum_{j=1}^{n_i}\frac{\partial}{\partial p_{\psi_{ij}}}).$$

Рассмотрим любую такую точку. Пусть при отображении g_V^τ она смещается на вектор $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$. Осталось показать, что эта точка неподвижна при отображении g_V^τ, т.е. что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Шаг 4. Идея нашего доказательства будет состоять прежде всего в том, что полная энергия H и кинетический момент M являются первыми интегралами системы и, следовательно, сохраняются при рассматриваемом отображении. Кроме того, мы воспользуемся тем, что вектор коэффициентов (λ_1, λ_2) мал, если параметр возмущения μ мал. И наконец, мы воспользуемся пунктом 2 леммы 15, из которого следует, что дифференциалы функций H и M в рассматриваемой точке близки к линейным комбинациям дифференциалов dp_{ψ_i}, $dp_{\psi_{ij}}$ угловых импульсов планет и спутников с коэффициентами $\frac{\omega_i}{\omega}$, $\frac{\varepsilon}{\omega}\Omega_{ij}$ и 1, ε соответственно.

В силу леммы 15, приращение кинетического момента M при сдвиге вдоль вектора $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ в точности равно $\varepsilon(N\lambda_1 + \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij})\lambda_2)$. Так как значение кинетического момента M сохраняется, то

$$N\lambda_1 + \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij})\lambda_2 = 0. \tag{112}$$

В силу леммы 15, приращение энергии H складывается из приращений кинетических энергий задач Кеплера, отвечающих планетам и спутникам, при соответствующих коэффициентам λ_1, λ_2 изменениях соответствующих угловых импульсов.

Приращение кинетической энергии i–той планеты при изменении её углового импульса на величину $\varepsilon(\lambda_1 + \omega_i\lambda_2)$ эквивалентно $\varepsilon(\lambda_1 + \omega_i\lambda_2)\omega_i/\omega$ (т.е. отличается от этого числа умножением на некоторое число, близкое к 1); приращение кинетической энергии j–того спутника этой планеты при изменении его углового импульса на величину $\lambda_1 + \Omega_{ij}\lambda_2$ эквивалентно $\frac{\varepsilon}{\omega}(\lambda_1\Omega_{ij} + \lambda_2\Omega_{ij}^2)$.

Складывая полученные приращения, получаем, что полное приращение интеграла энергии при сдвиге вдоль вектора $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ равно $\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1\omega_i + \lambda_2\omega_i^2 + \sum_{j=1}^{n_i}(\lambda_1\Omega_{ij} + \lambda_2\Omega_{ij}^2))$, с точностью до величин, много меньших, чем $\frac{\varepsilon}{\omega}(|\lambda_1|+|\lambda_2|)$, а при отсутствии спутников — много меньших, чем $\varepsilon(|\lambda_1|+|\lambda_2|)$ при $\mu \ll 1$. Для определённости будем считать, что спутники есть, т.е. $n < N$ (в противном случае рассуждения аналогичны). Так как значение энергии H сохраняется, то

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{n}(\omega_i + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}) + \lambda_2\sum_{i=1}^{n}(\omega_i^2 + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}^2) = o(|\lambda_1| + |\lambda_2|). \tag{113}$$

Таким образом, малый вектор коэффициентов (λ_1, λ_2) удовлетворяет линейной системе уравнений (112), (113). С учётом того, что по условию величины Ω_{ij} ограничены и отделены от нуля, отсюда следует, что либо выполняется требуемое равенство $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, либо определитель

$$N\sum_{i=1}^{n}(\omega_i^2 + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}^2) - (\sum_{i=1}^{n}(\omega_i + \sum_{j=1}^{n_i}\Omega_{ij}))^2$$

этой системы близок к нулю. Но матрица этой линейной системы — это в точности матрица Грама для системы двух векторов V_1° и V_2° из (109), (110), т.е. матрица (2×2), составленная из попарных скалярных произведений этих векторов. Такая матрица всегда неотрицательно определена, её вырожденность эквивалентна пропорциональности векторов V_1°, V_2°, а близость её определителя к нулю эквивалентна близости векторов V_1°, V_2° к пропорциональным векторам. Последнее невозможно, так как все компоненты вектора V_2° равны 1, а вектор V_1° имеет n различных компонент порядка ω и $N-n$ различных компонент порядка 1. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, все критические точки функции $S|_{\Sigma\cap\tilde{\Lambda}}$ неподвижны при отображении $g_{\tilde{V}}^{\tau}$ и, следовательно, являются критическими точками функции S.

Шаг 5. Покажем, что морсовским критическим точкам функции $S|_{\Sigma\cap\tilde{\Lambda}}$ отвечают невырожденные замкнутые траектории возмущённой системы. Доказательство проведём совершенно аналогично доказательству свойства 2° утверждения 6, см. п. 1.5.1.

Квадратичная часть функции S в любой критической точке $m \in \tilde{\Lambda}$ имеет вид

$$d^2S(m) = \sum_{i=1}^{n}((dp'_{\psi_i} - dp_{\psi_i})d\psi_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_i}(dp'_{\psi_{ij}} - dp_{\psi_{ij}})d\psi_{ij}). \qquad (114)$$

Из построения подмногообразия $\tilde{\Lambda}$ следует, что векторы вида $\xi_1 = dg_{\tilde{V}}^{\tau}(m)\eta_1 - \eta_1$, где $\eta_1 \in T_m\tilde{\Lambda}$, касательны к площадке θ_m. Отсюда, с учётом формулы (114), получаем, что нулевое пространство квадратичной формы $d^2S(m)$ совпадает с ядром оператора

$$B : T_m\tilde{\Lambda} \to T_m\theta_m, \quad B(\eta_1) = dg_{\tilde{V}}^{\tau}(m)\eta_1 - \eta_1.$$

Осталось показать, что ядро оператора B совпадает с ядром оператора $dg_{\tilde{V}}^{\tau}(m) - I$, где I — тождественный оператор. Это следует из того, что оператор $(dg_{\tilde{V}}^{\tau}(m) - I) : T_mM = (T_m\tilde{\Lambda}) \oplus N_m \to T_mM = (T_m\theta_m) \oplus D_m$ задаётся блочной матрицей вида $\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где матрица C невырождена вследствие невырожденности тора Λ (см. выше). Здесь $N_m = \{d\psi = 0\} \subset T_mM$ — подпространство, “нормальное” к тору Λ°, заполненному круговыми орбитами задач Кеплера.

Таким образом, критические точки функции $S|_{\Sigma\cap\tilde{\Lambda}}$ совпадают с точками пересечения двумерных торов, отвечающих τ–периодическим траекториям возмущённой системы, с сечением Σ. При этом морсовским критическим точкам в точности отвечают невырожденные двумерные торы.

Отсюда получаем требуемую оценку для минимального числа относительно периодических движений. А именно, воспользуемся известными оценками для минимального числа критических точек гладкой функции на многообразии в случае, когда это многообразие — $N-2$–мерный тор [13]. Согласно этим оценкам, число геометрически различных критических точек не меньше категории Люстерника-Шнирельмана рассматриваемого многообразия, которая для $(N-2)$–мерного тора равна $N-1$. Число критических точек, считая с кратностями, не меньше суммы чисел Бетти этого многообразия, которая для $(N-2)$–мерного тора равна 2^{N-2}. Это завершает доказательство пунктов А, Б теоремы 11.

Замечание 23. В сущности, приведённое доказательство совпадает со стандартным, см. доказательство теорем 1, 5. Отличие от стандартного доказательства состоит в том, что здесь применить теорему 5 непосредственно нельзя, так как невозмущённая система в отличие от возмущённой не является гамильтоновой.

3.3.2 Устойчивость относительно периодических движений

Докажем пункт В теоремы 11 об устойчивости замкнутых траекторий. Доказательство проведём аналогично доказательству утверждения 7 об устойчивости в линейном приближении неподвижных точек симплектических отображений.

Опишем сначала идею доказательства. В отличие от ситуации теоремы 3, в задаче о движении планетно-спутниковой системы невозмущённая система не является гамильтоновой. Поэтому теорему 3 нельзя применить непосредственно, однако можно применить аналогичные рассуждения.

Рассмотрим любое периодическое движение возмущённой задачи, и найдём оператор монодромии, отвечающий этому движению. Пусть $m_0 \in \Lambda$ — точка, близкая к начальной точке m этого движения, $e_\varepsilon(m_0)$ — канонический базис из следствия 13, где

$$\varepsilon = \mu\nu\omega R = \mu^{\frac{2}{3}}\nu\omega^{\frac{1}{3}}.$$

Перенесём базис $e_\varepsilon(m_0)$ в точку m. С помощью следствия 14 можно показать, что в этом базисе оператор монодромии возмущённой системы близок к оператору монодромии из леммы 16. Поэтому в данной ситуации также применимы рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 3. Перейдём к подробному доказательству.

Пусть $m \in \tilde\Lambda \cap \Sigma$ — морсовская критическая точка локального минимума функции $S|_{\tilde\Lambda\cap\Sigma}$. Покажем, что проходящий через эту точку двумерный инвариантный тор $\gamma \ni m$ возмущённой системы орбитально устойчив в линейном приближении на общей поверхности уровня функций H и M.

Шаг 1. Положим $\varepsilon = \mu\nu\omega R$ (это число стремится к нулю при $\mu \to 0$ и любых фиксированных ω, ν). Пусть $e_\varepsilon = e_\varepsilon(m_0)$ — базис из следствия 14.

Согласно доказанному, любая критическая точка $m \in \tilde\Lambda$ функции S неподвижна относительно отображения Пуанкаре. Рассмотрим оператор линеаризации $\tilde A = dg^\tau_{\tilde V}(m)$ возмущённого отображения Пуанкаре в точке m. Перенесём в точку m базис $e = e(m_0)$ (из некоторой близкой к точке m точки $m_0 \in \Lambda$). Полученный базис тоже обозначим через e.

Применим к базису e указанную выше операцию растяжения, зависящую от ε. Обозначим через $\tilde A_\varepsilon$ матрицу оператора $\tilde A$ в полученном базисе e_ε.

Как и в следствии 14, обозначим через A_0 блочно-диагональную матрицу из леммы 16.

Покажем, что для возмущённой системы справедлив следующий аналог следствия 14:

1. Матрица $\tilde A_\varepsilon$ оператора $\tilde A$ в базисе e_ε близка к блочно-диагональной матрице A_0.

2. Подпространство $T_m\tilde\Lambda \subset T_mM$ близко к подпространству, натянутому на N базисных векторов базиса e_ε, являющихся первыми векторами базисов, отвечающих планетам и спутникам.

Здесь близость подпространств в касательном пространстве T_mM понимается в смысле евклидовой структуры в T_mM, отвечающей базису e_ε (т.е. базис e_ε считается ортонормированным по отношению к этой структуре).

Для доказательства воспользуемся тем, что базис e составлен из двух групп векторов, отвечающих планетам и спутникам соответственно. Другими словами, базисные векторы первой группы касательны к пространству вида $\{\mathbf{y}_{ij} = \mathrm{const}, \boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathrm{const}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n_i\}$, а базисные векторы второй группы касательны к пространству вида $\{\mathbf{x}_i = \mathrm{const}, \boldsymbol{\xi}_i = \mathrm{const}, 1 \le i \le n\}$. При этом базис e_ε получается из базиса e умножением всех векторов второй группы (отвечающих спутникам) на число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Кроме того, мы воспользуемся тем, что оператор $\tilde A$ и подпространство $T_m\tilde\Lambda$ близки к оператору A и подпространству $T_m\Lambda$ соответственно.

Как в следствии 14, диагональные блоки матрицы $\tilde A_\varepsilon$ — такие же, как блоки матрицы оператора $\tilde A$ в базисе e. Поэтому, в силу близости операторов $\tilde{A}$ и A, с учётом следствия 13, указанные блоки матрицы $\tilde{A}_\varepsilon$ близки к соответствующим блокам матрицы A_0. Аналогичное верно для всех блоков, отвечающих двум планетам либо двум спутникам. Остальные блоки матрицы $\tilde{A}_\varepsilon$ получаются из соответствующих блоков матрицы оператора $\tilde{A}$ в базисе e умножением на положительное число, равное $\sqrt{\varepsilon}$ для блоков под диагональю и $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ для блоков над диагональю.

Следовательно, блоки матрицы $\tilde{A}_\varepsilon$ *под диагональю*, отвечающие одной планете и одному спутнику, малы при достаточно малом возмущении, поскольку они $\sqrt{\varepsilon}$–малы, как и для матрицы A_ε. Осталось найти элементы матрицы $\tilde{A}_\varepsilon$, лежащие *над диагональю* и отвечающие одной планете и одному спутнику.

Согласно лемме 15 (1), для каждой планеты "влияние" спутников на её движение имеет порядок $\mathrm{O}(\frac{\nu}{R^2})$. Отсюда следует, что любой блок матрицы оператора $\tilde{A}$ в базисе e, лежащий над диагональю и отвечающий какой-либо планете и какому-либо спутнику, имеет такой же порядок $\mathrm{O}(\frac{\nu}{R^2})$. (Действительно, в системе "уравнений в вариациях", отвечающей замкнутой траектории, проходящей через точку m, "вариации спутников" входят в правые части уравнений на "вариации планет" с коэффициентами порядка $\mathrm{O}(\frac{\nu}{R^2})$. Поэтому для любого решения системы "уравнений в вариациях", у которого начальные значения "вариаций планет" равны 0, а начальные значения "вариаций спутников" имеют порядок 1, в момент времени τ значения "вариаций планет" имеют порядок $\mathrm{O}(\frac{\nu}{R^2})$.) Следовательно, любой блок матрицы $\tilde{A}_\varepsilon$, лежащий над диагональю и отвечающий какой-либо планете и какому-либо спутнику, имеет порядок $\mathrm{O}(\frac{\nu}{R^2\sqrt{\varepsilon}})$. С учётом того, что $\varepsilon = \mu\nu\omega R$, $\frac{1}{R^3} = \omega^2\mu$, последнее выражение равно

$$\frac{\nu}{R^2\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\nu}{R^5\omega\mu}} = \sqrt{\nu}\omega^{\frac{7}{6}}\mu^{\frac{1}{3}}$$

и, значит, при любом фиксированном ω это выражение стремится к 0, когда $\mu \to 0$ (или $\nu \to 0$).

Итак, в (каноническом) базисе e_ε матрица $\tilde{A}_\varepsilon$ оператора монодромии близка к блочно-диагональной матрице A_0. Это доказывает свойство 1, приведённое выше. Подчеркнём, что обе матрицы A_0 и $\tilde{A}_\varepsilon$ являются симплектическими (в отличие от матриц A и A_ε) и близки друг к другу.

Докажем теперь свойство 2 о подпространстве $T_m\tilde{\Lambda}$. Достаточно показать, что в базисе e_ε подпространство $T_m\tilde{\Lambda}$ близко к ядру оператора, задаваемого матрицей $A_0 - I$, где I — тождественный оператор.

По построению подмногообразия $\tilde{\Lambda}$ (см. шаг 2 предыдущего доказательства), подпространство $T_m\tilde{\Lambda}$ состоит из всех векторов, образ которых при отображении $\tilde{A}-I$ принадлежит подпространству $T_m\theta_m$. Напомним (см. там же), что площадка θ_m натянута на N векторов, каждый из которых лежит в фазовом пространстве соответствующей задачи Кеплера и трансверсален её изоэнергетической поверхности. Поэтому в базисах e и e_ε площадка θ_m обладает таким же свойством. В частности, она имеет "один и тот же вид" в базисах e и e_ε. Но в базисе e_ε оператор $\tilde{A} - I$ задаётся матрицей $\tilde{A}_\varepsilon - I$, которая по доказанному близка к матрице $A_0 - I$. Ясно, что прообраз подпространства θ_m при отображении, задаваемом матрицей $A_0 - I$ — это в точности ядро этого отображения. Следовательно, по теореме о неявной функции, прообраз подпространства θ_m при отображении, задаваемом матрицей $\tilde{A}_\varepsilon - I$, близок к ядру матрицы $A_0 - I$.

Это доказывает близость подпространства $T_m\tilde{\Lambda}$ в базисе e_ε к ядру оператора, задаваемого матрицей $A_0 - I$.

Шаг 2. Рассмотрим две симплектических матрицы: матрицу A_0 и близкую к ней матрицу $\tilde{A}_\varepsilon$. Напомним, что A_0 — блочно-диагональная матрица из леммы 16, а матрица $\tilde{A}_\varepsilon$ задаёт оператор монодромии $\tilde{A}$ в каноническом базисе e_ε.

Далее матрицы A_0 и $\tilde{A}_\varepsilon$ будем рассматривать как близкие симплектические операторы в пространстве $\mathbb{R}^{4N}$ относительно фиксированного канонического базиса.

Рассмотрим инвариантные подпространства оператора A_0: его корневое подпространство

$$K = R_1(A_0) \subset \mathbb{R}^{4N},$$

отвечающее собственному значению 1, и косоортогональное дополнение

$$L = K^\perp$$

к K в $\mathbb{R}^{4N}$.

Заметим, что подпространства K и L являются инвариантными подпространствами оператора A_0, причём спектр ограничения этого оператора на подпространство K состоит из 1, а спектр его ограничения на L не содержит 1. В частности, эти спектры не пересекаются.

Согласно лемме 6 существует инвариантное для $\tilde{A}_\varepsilon$ симплектическое подпространство $\tilde{K}$, близкое к K. В силу симплектичности оператора $\tilde{A}_\varepsilon$, его косоортогональное дополнение $\tilde{L} = \tilde{K}^\perp$ тоже инвариантно относительно $\tilde{A}_\varepsilon$. Ясно, что подпространства $\tilde{L}$ и L тоже близки.

Рассмотрим квадратичную форму $\tilde{Q}\xi = \omega^2(\tilde{A}_\varepsilon\xi - \xi)$ в T_mM. Мы покажем, что ограничения этой формы на подпространства $\tilde{K} \cap T_m\Sigma \simeq \tilde{K}/T_m\gamma$ и $\tilde{L}$ являются знакоопределёнными формами. Отсюда будет следовать сильная устойчивость двумерного инвариантного тора $\gamma \ni m$ как множества неподвижных точек отображения $g^\tau_{H-\omega_1 M}$, а значит, с учётом замечания 14, структурная устойчивость относительно периодического движения.

Шаг 3. Покажем, что форма $\tilde{Q}|_{\tilde{L}}$ знакоопределена.

Заметим, что в силу условий 1, 2 пункта В теоремы 11, ограничение квадратичной формы $Q\xi = \omega^2(A_0\xi, \xi)$ на инвариантное подпространство L является знакоопределённой формой. В самом деле, из явного вида блочно-диагональной матрицы A_0 (см. лемму 16) получаем, что соответствующая квадратичная форма $Q\xi = \omega^2(A_0\xi, \xi)$ задаётся блочно-диагональной матрицей, диагональные блоки которой имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\omega\tau}{m_i r_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_i \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_i}\sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\tau}{m_{ij} r_{ij}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{ij} \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_{ij}}\sin\alpha \end{pmatrix},$$

$1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$. Следовательно, квадратичная форма $Q|_L$ знакоопределена в том и только том случае, когда $\alpha \bmod \pi \ne 0$ и все числа I_i, I_{ij} одного знака, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n_i$.

Согласно лемме 16, $I_i = [\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i]$, $I_{ij} = [\mathbf{y}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij}]$. Поэтому знаки чисел I_i, I_{ij} совпадают со знаками угловых скоростей ω_i, Ω_{ij} планет и спутников. По условию 2 теоремы 11 последние знаки совпадают. Итак, квадратичная форма $Q|_L$ знакоопределена.

Так как оператор $\tilde{A}_\varepsilon|_{\tilde{L}}$ близок к $A_0|_L$, то квадратичная форма $\tilde{Q}$ тоже близка к Q. Поэтому квадратичная форма $\tilde{Q}|_{\tilde{L}}$ является знакоопределённой. Отметим также, что

$$\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{L}} = \operatorname{ind} Q|_L. \tag{115}$$

Шаг 4. Покажем теперь, что производящая функция $\tilde{Q}$ оператора $\tilde{A}_\varepsilon$ положительно определена на подпространстве $\tilde{K} \cap T_m\Sigma$.

Заметим, что нулевое подпространство формы $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ совпадает с ядром оператора $(\tilde{A}-I)|_{\tilde{K}}$ (в силу того, что $-1 \notin \operatorname{spec}\tilde{A}$). Но из морсовости критической точки m по отношению к функции $S|_{\Sigma\cap\tilde{\Lambda}}$ следует, что $\ker(\tilde{A}-I)|_{\tilde{K}} = T_m\gamma$. Значит, форма $\tilde{Q}|_{\tilde{K}\cap T_m\Sigma}$ невырождена. Следовательно, для доказательства положительной определённости формы $\tilde{Q}|_{\tilde{K}\cap T_m\Sigma}$ нам достаточно показать, что индекс формы $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ равен нулю.

Докажем сначала следующий аналог леммы 4 об индексе гессиана функции S, определённо на торе $\tilde{\Lambda}$.

Лемма 18. *Пусть $m \in \tilde{\Lambda}$ — морсовская критическая точка функции $S|_{\tilde{\Lambda}\cap\Sigma}$, и пусть $\tilde{Q}$ — производящая функция оператора монодромии $\tilde{A}$ в точке m. Тогда*

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} d^2S(m).$$

Доказательство проведём совершенно аналогично доказательству леммы 4 (см. п. 1.5.2). Напомним, что доказательство этой леммы было основано на следующих двух фактах:

1. существует подпространство $\tilde{N}_m^\circ \subset T_m M$, ортогональное подпространству $T_m\tilde{\Lambda}$ относительно формы $\tilde{Q}$, такое, что
$$T_m M = T_m\tilde{\Lambda} \oplus \tilde{N}_m^\circ \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ} = \operatorname{ind} Q;$$

2. $$\operatorname{ind} d^2 S(m) = \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}}. \tag{116}$$

Если мы докажем эти факты, то получим требуемое равенство:
$$\operatorname{ind} \tilde{Q} = \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ} + \operatorname{ind} \tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}} = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} d^2 S(m).$$

Доказательство. 1) Пусть, как на шаге 5 предыдущего доказательства, $N_m = \{d\psi = 0\} \subset T_m M$ — подпространство, "нормальное" к тору Λ°, заполненному круговыми орбитами задач Кеплера. Из определения подмногообразия $\tilde{\Lambda}$ следует, что
$$T_m\tilde{\Lambda} = \{\eta \in T_m M \mid \tilde{A}_\varepsilon\eta - \eta \in \theta_m\} =$$
$$\{\eta \in T_m M \mid \omega^2(\tilde{A}_\varepsilon\eta - \eta, \nu) = 0, \nu \in N_m\} =$$
$$\{\eta \in T_m M \mid \omega^2(\eta, \tilde{A}_\varepsilon^{-1}\eta - \eta\nu) = 0, \nu \in N_m\}.$$

Рассмотрим подпространство $N_m^\circ = (A_0 + I)^{-1} N_m$, где I — тождественный оператор в $T_m M$. Из явного вида оператора A_0 видно, что ядро оператора $A_0 - I$ трансверсально к подпространству N_m, а поэтому оно трансверсально к N_m°. Рассмотрим близкое к нему подпространство
$$\tilde{N}_m^\circ = (\tilde{A}_\varepsilon + I)^{-1} N_m.$$

В силу близости операторов $\tilde{A}_\varepsilon$ и A_0 и близости подпространства $T_m\tilde{\Lambda}$ к ядру оператора $A_0 - I$ (шаг 1), подпространство $\tilde{N}_m^\circ$ близко к N_m° и трансверсально к $T_m\tilde{\Lambda}$. Поэтому форма $\tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ}$ невырождена и имеет такой же индекс:
$$\operatorname{ind} \tilde{Q}|_{\tilde{N}_m^\circ} = \operatorname{ind} Q|_{N_m^\circ} = \operatorname{ind} Q.$$

Покажем, что подпространства $T_m\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{N}_m^\circ$ "ортогональны" относительно формы $\tilde{Q}$, рассматриваемой как симметричная билинейная форма (37). Действительно, для любого вектора $\xi \in \tilde{N}_m^\circ$ вектор $\nu = \xi + \tilde{A}_\varepsilon\xi$ принадлежит подпространству N_m. Согласно формуле (37), имеем
$$\tilde{Q}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}\omega^2(\tilde{A}_\varepsilon\eta, (I - \tilde{A}_\varepsilon^2)\xi) = \frac{1}{2}\omega^2(\tilde{A}_\varepsilon\eta, (I - \tilde{A}_\varepsilon)\nu) =$$

$$\frac{1}{2}\omega^2(\eta, \tilde{A}_\varepsilon^{-1}(I - \tilde{A}_\varepsilon)\nu) = \frac{1}{2}\omega^2(\eta, \tilde{A}_\varepsilon^{-1}\nu - \nu).$$

Но для любых $\eta \in T_m\tilde{\Lambda}$, $\xi \in \tilde{N}_m^\circ$ последнее выражение равно нулю (см. выше). Это и значит ортогональность подпространств $T_m\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{N}_m^\circ$ относительно формы $\tilde{Q}$.

2) Рассмотрим оператор

$$B : T_m\tilde{\Lambda} \to T_m\theta_m, \quad B\eta = \tilde{A}_\varepsilon\eta - \eta, \quad \eta \in T_m\tilde{\Lambda}.$$

Из формулы (114) получаем, что в любой критической точке m функции S симметричная билинейная форма, отвечающая квадратичной форме $d^2S(m)$, имеет следующий вид в базисе e_ε:

$$d^2S(m)\eta_1\eta = \omega^2(B\eta_1, \eta) = \omega_0(B\eta_1, \eta), \quad \eta_1, \eta \in T_m\tilde{\Lambda},$$

где ω_0 — ограничение симплектической структуры на прямое произведение подпространств $(T_m\theta_m) \times (T_m\tilde{\Lambda})$. Из (37) получаем, что симметричная билинейная форма $\tilde{Q}|_{T_m\tilde{\Lambda}}$ имеет такой же вид:

$$\tilde{Q}\eta_1\eta = \omega_1(B\eta_1, \eta), \quad \eta_1, \eta \in T_m\tilde{\Lambda},$$

где билинейная форма

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\omega^2(\xi, \tilde{A}_\varepsilon\eta + \eta), \quad \xi \in T_m\theta_m, \eta \in T_m\tilde{\Lambda},$$

близка к форме ω_0. При любом t, $0 \le t \le 1$, рассмотрим билинейную форму ω_t на $(T_m\theta_m) \times (T_m\tilde{\Lambda})$ и билинейную форму Q_t на $T_m\tilde{\Lambda}$ вида

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1, \quad Q_t\eta_1\eta = \omega_t(B\eta_1, \eta).$$

Из невырожденности “спаривания” векторов подпространств $T_m\tilde{\Lambda}$ и $T_m\theta_m$ при помощи симплектической структуры ω^2 следует, что ядро билинейной формы Q_t совпадает с ядром оператора B (при любом t, $0 \le t \le 1$). Отсюда, ввиду симметричности билинейных форм Q_t, их индексы совпадают, $0 \le t \le 1$. В частности, $\operatorname{ind} Q_0 = \operatorname{ind} Q_1$, что и доказывает формулу (116).

Это завершает доказательство леммы 18 об индексе гессиана функции S.

Шаг 5. Из неотрицательной определённости гессиана $d^2S(m)$ (так как m — морсовская точка локального минимума функции $S|_{\tilde{\Lambda}\cap\Sigma}$) и формы $Q|_K$ (см. явный вид матрицы Q на шаге 3), с учётом леммы 18, имеем:

$$\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} d^2S(m) = \operatorname{ind} Q = \operatorname{ind} Q|_L + \operatorname{ind} Q|_K = \operatorname{ind} Q|_L.$$

С другой стороны, $\operatorname{ind}\tilde{Q} = \operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{L}} + \operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$. Следовательно, с учётом (115), слагаемое $\operatorname{ind}\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ в последней сумме равно нулю, т.е. форма $\tilde{Q}|_{\tilde{K}}$ неотрицательно определена.

Согласно предложению 1, это доказывает сильную устойчивость тора γ (как множества неподвижных точек отображения $g^{\tau}_{H-\omega_1 M}$) и, тем самым, структурную устойчивость соответствующего относительно периодического движения возмущённой системы. Пункт В теоремы 11 доказан.

Теорема 11 полностью доказана.

3.3.3 Существование симметричных относительно периодических движений

Здесь мы докажем теорему 12, следуя идеям Пуанкаре [28] об обратимости задачи $N+1$ тел.

Пусть l — любая прямая в плоскости движения. В фазовом пространстве T^*Q определены следующие три инволюции, сохраняющие значение гамильтониана H:

1. Каноническая инволюция $S_l : T^*Q \to T^*Q$ (осевая симметрия), отвечающая преобразованию конфигурационного многообразия Q, переводящему все материальные точки рассматриваемой системы в точки, симметричные им относительно прямой l.

2. "Антиканоническая" инволюция P ("обращение времени"), переводящая пару (q, p) фазового пространства в пару $(q, -p)$, где q и p — "координаты" и "импульсы".

3. "Антиканоническая" инволюция $P_l = PS_l = S_l P$.

Каждое из этих преобразований является инволюцией, т.е. совпадает со своим обратным преобразованием. При этом вторая и третья инволюции являются антиканоническими, т.е. переводят симплектическую структуру ω^2 в $-\omega^2$ и, тем самым, переводят траектории системы в траектории системы "с обращением времени".

Заметим, что из единственности решения задачи Хилла (лемма 17) следует, что соответствующее движение $q(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ является симметричным. А именно, рассмотрим любой момент времени $t = t_0$, в который векторы $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ сонаправлены и, значит, все точки лежат на одной и той же прямой, которую обозначим l. Тогда движение $q'(t) = P_l(\mathbf{x}(2t_0 - t), \mathbf{y}(2t_0 - t))$ тоже является решением задачи Хилла, а значит, совпадает с движением $q(t)$. Отсюда легко получаем существование 2^{N-2} симметричных движений невозмущённой задачи (89). А именно, каждому разбиению множества всех планет и спутников на два подмножества (т.е. каждому типу “парада”, см. п. 3.1.3) отвечает симметричное движение задачи (89), при котором в момент времени $t = t_0$ все радиус-векторы, отвечающие точкам из одного подмножества, сонаправлены.

Фиксируем любое разбиение из п. 3.1.3 (т.е. тип парада) и рассмотрим соответствующее симметричное решение невозмущённой задачи. Без ограничения общности будем считать, что $t_0 = 0$, и прямая l совпадает с осью абсцисс (см. определение 21). Тогда, по определению симметричного движения, условие симметричности этого движения эквивалентно тому, что при $t = 0$ угловые координаты ψ_i, ψ_{ij} всех радиус-векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_{ij}$ кратны π, а их радиальные импульсы p_{r_i}, $p_{r_{ij}}$ равны нулю:

$$\psi_i(0) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi), \ \psi_{ij}(0) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi), \ p_{r_i}(0) = 0, \ p_{r_{ij}}(0) = 0. \tag{117}$$

Пусть l — прямая абсцисс. Обозначим условно через (φ, I, q, p) набор координат $(\varphi_i \,\mathrm{mod}\, 2\pi, I_i, q_i, p_i)$, $1 \le i \le n$, $(\varphi_{ij} \,\mathrm{mod}\, 2\pi, I_{ij}, q_{ij}, p_{ij})$, $1 \le j \le n_i$, из леммы 16. Из построения этих координат при доказательстве леммы 16 (см. явный вид (132) этих координат в п. 3.4.2 ниже) будет следовать, что инволюции S_l, P, P_l имеют следующий вид:

$$S_l(\varphi, I, q, p) = (-\varphi, -I, q, p), \quad P(\varphi, I, q, p) = (\varphi, -I, q, -p),$$
$$P_l(\varphi, I, q, p) = (-\varphi, I, q, -p). \tag{118}$$

Обозначим через R_α преобразование фазового пространства T^*Q, отвечающее повороту плоскости на угол α.

Выведем из следствия 13 следующее его уточнение

Следствие 15. *Пусть точка $m \in \Lambda$ отвечает симметричному движению невозмущённой задачи (96), распадающейся на задачи Кеплера и Хилла. Тогда существует базис $e(m)$ в точке m, удовлетворяющий условиям следствия 13 и следующим условиям:*

1. *В базисе $e(m)$ инволюция $P_l = PS_l = S_lP$ задаётся блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой стоят блоки вида*
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{119}$$
где l — ось симметрии рассматриваемого движения.

2. *Направление каждого базисного вектора базиса $e(m)$ ω–близко к соответствующей координатной оси из леммы 16.*

Доказательство. Заметим, что композиция инволюции P_l и отображения g_V^τ является инволюцией, где V — невозмущённая система (94) во вращающейся системе координат с угловой скоростью ω_1. Действительно, инволюция P_l переводит векторное поле V невозмущённой системы в $-V$, откуда $P_l g_V^\tau P_l = g_{-V}^\tau$. Следовательно, $(P_l g_V^\tau)^2 = Id$.

Отсюда следует, что композиция инволюции $dP_l(m) : T_mM \to T_mM$ и оператора монодроми $A = A(m) = d(R_{-\alpha} g_V^\tau)(m)$ тоже является инволюцией, где R_α — поворот плоскости на угол α. Действительно, в силу коммутирования потока g_V^t с любыми поворотами плоскости,

$$(P_l R_{-\alpha} g_V^\tau)^2 = P_l g_V^\tau (R_{-\alpha} P_l R_{-\alpha}) g_V^\tau = P_l g_V^\tau P_l g_V^\tau = Id.$$

Здесь мы воспользовались очевидным свойством осевой симметрии и поворотов: $R_{-\alpha} P_l = P_l R_\alpha$.

Следовательно, при инволюции $dP_l(m)$ оператор монодромии A переходит в оператор A^{-1}. Отсюда получаем, что инволюция $dP_l(m)$ переводит любое корневое подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ, в корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\frac{1}{\lambda}$.

Следовательно, инвариантные симплектические подпространства K и $L = K^\perp$ оператора A_{ij}, отвечающего задаче Хилла (см. доказательство следствия 13), инвариантны относительно инволюции dP_l. Так как по следствию 13 эти подпространства ω–близки к исходным координатным подпространствам, то на каждом из них инволюция имеет ровно два собственных значения: 1 и -1, причём каждое собственное подпространство ω–близко к соответствующей координатной оси в силу (118).

Возьмем в качестве базиса, отвечающего рассматриваемому спутнику, канонический базис, ω–близкий к координатному базису из леммы 16 и составленный из собственных векторов e_1, e_2 и e_3, e_4 операторов $A_{ij}|_K$ и $A_{ij}|_L$ соответственно.

Заметим следующее:

1. В силу единственности решения Хилла, вектор e_1 этого базиса (отвечающий собствнному значению 1) касателен к траектории этого решения.

2. Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица оператора $A_{ij}|_L$ в каноническом базисе e_3, e_4 подпространства L. Из того, что в этом базисе инволюция $dP_l(m)|_L$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а композиция $dP_l(m)A(m)$ является инволюцией, нетрудно получить, что $a = d$.

Отсюда следует, что, путём домножения векторов e_1 и e_2 на ω–близкие к единице взаимнообратные числа, а также домножения векторов e_3 и e_4 на ограниченные взаимнообратные положительные числа, можно добиться, чтобы матрица оператора A_{ij} в новом базисе f_1, f_2, f_3, f_4 имела нужный вид, см. следствие 13.

Следствие 15 доказано.

Докажем теорему 12.

Шаг 1. Рассмотрим оператор $A' = A'(m) = dg_V^{\tau/2}(m) : T_mM \to T_{m'}M$, где $m' = g_V^{\tau/2}(m)$. Покажем, что в базисах $e(m)$ и $e(m')$ из следствия 15 этот оператор задаётся нижнетреугольной блочной матрицей, на диагональных блоках которой стоят матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\omega\tau}{2m_ir_i^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\tilde\alpha_i}{2} & \frac{1}{I_i}\sin\frac{\tilde\alpha_i}{2} \\ -I_i\sin\frac{\tilde\alpha_i}{2} & \cos\frac{\tilde\alpha_i}{2} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n, \tag{120}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\tau}{2m_{ij}r_{ij}^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\tilde\alpha_{ij}}{2} & \frac{1}{I_{ij}}\sin\frac{\tilde\alpha_{ij}}{2} \\ -I_{ij}\sin\frac{\tilde\alpha_{ij}}{2} & \cos\frac{\tilde\alpha_{ij}}{2} \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le n_i, \tag{121}$$

или, быть может, матрицы, отличающиеся от этих матриц знаком, где $\tilde\alpha_i = \omega_i\tau + \mathrm{O}(\omega^2\tau)$, $\tilde\alpha_{ij} = \Omega_{ij}\tau + \mathrm{O}(\omega^2\tau)$, — числа из следствия 13. (В действительности, все эти матрицы стоят в указанных блоках со знаком “плюс”.)

Воспользуемся следствием 15. Как при доказательстве этого следствия, рассмотрим предельную задачу Хилла (106) для i–той планеты и её j–того спутника. Это эквивалентно рассмотрению случая Солнце-Земля-Луна, т.е. $N = 2$, $n = 1$. Зафиксируем круговое движение планеты и обозначим через $A_{ij} = A_{ij}(m)$ оператор монодромии системы, отвечающей j–тому спутнику, т.е. оператор монодромии предельной задачи Хилла (106). Оператор A_{ij} действует в касательном пространстве к фазовому пространству задачи Кеплера, отвечающего j–тому спутнику. Аналогичным образом, обозначим через $A'_{ij} = A'_{ij}(m)$ и $(dP_l)_{ij} = (dP_l)_{ij}(m)$ операторы, отвечающие действию операторов $A'(m)$ и $dP_l(m)$ в касательном пространстве к фазовому пространству этого спутника.

Рассмотрим в точке m два оператора: оператор монодромии $A(m)$ и инволюцию $dP_l(m)$. Заметим, что действие на эти операторы сопряжением при помощи отображения A' переводит их в операторы $A(m')$ и $A(m')dP_{R_{\alpha/2}(l)}(m')$ в точке m' соответственно:

$$A'AA'^{-1} = dg_V^{\tau/2}d(R_{-\alpha}g_V^\tau)dg_V^{-\tau/2} = dR_{-\alpha}dg_V^\tau(m') = A,$$

$$A'dP_lA'^{-1} = dg_V^{\tau/2}dP_ldg_V^{-\tau/2} = dg_V^\tau dP_l = dg_V^\tau R_{-\alpha}R_\alpha dP_l = AdP_{R_{\alpha/2}(l)}.$$

Отсюда следует, что оператор A'_{ij} переводит корневые подпространства операторов $A_{ij}(m)$ и $(dP_l)_{ij}(m)$ в корневые подпространства операторов $A_{ij}(m')$ и $A_{ij}(m')(dP_{R_{\alpha/2}(l)})_{ij}(m')$, с сохранением собственных значений, отвечающих этим корневым подпространствам.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 и e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 — базисные векторы базисов $e(m)$ и $e'(m)$ соответственно, отвечающие рассматриваемому спутнику.

Из явного вида оператора монодромии A и инволюции dP_l в этих базисах (см. следствие 15) получаем:

1. Корневое подпространство оператора $A_{ij}(m)$, отвечающее собственному значению 1, и его косоортогональное дополнение двумерны и имеют вид $\langle e_1, e_2\rangle$ и $\langle e_3, e_4\rangle$ соответственно.

2. Корневые подпространства инволюции $(dP_l)_{ij}(m)$, отвечающие собственным значениям -1 и 1, двумерны и имеют вид $\langle e_1, e_4\rangle$ и $\langle e_2, e_3\rangle$ соответственно.

Из явного вида оператора монодромии $A(m')$ и инволюции $dP_{R_{\alpha/2}(l)}(m')$ получаем:

1. Корневое подпространство оператора $A_{ij}(m')$, отвечающее собственному значению 1, и его косоортогональное дополнение двумерны и имеют вид $\langle e'_1, e'_2\rangle$ и $\langle e'_3, e'_4\rangle$ соответственно.

2. Корневые подпространства инволюции $A_{ij}(m')(dP_{R_{\alpha/2}(l)})_{ij}(m')$, отвечающие собственным значениям -1 и 1, двумерны и имеют вид $\langle e'_1, R_{\alpha/2}e'_4\rangle$ и $\langle e'_2+\frac{\lambda}{2}e'_1, R_{\alpha/2}e'_3\rangle$ соответственно, где $\lambda = -\frac{3\tau}{m_{ij}r_{ij}^2}$, $R_{\alpha/2}$ — вторая матрица из (121).

Следовательно, оператор A' следующим образом действует на векторы e_1, e_2, e_3, e_4:

$$e_1 \mapsto \pm e'_1, \quad e_2 \mapsto \pm(e'_2 + \frac{\lambda}{2}e'_1), \quad e_3 \mapsto \pm R_{\alpha/2}e'_3, \quad e_4 \mapsto \pm R_{\alpha/2}e'_4.$$

Отсюда, с учётом симплектичности оператора A', получаем, что в канонических базисах e_1, e_2, e_3, e_4 и e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 матрицы операторов $A'_{ij}|_K$, $A'_{ij}|_L$ с точностью до знака имеют вид (121).

Шаг 2. Как мы заметили в п. 3.1.3, симметричное решение является относительно периодическим тогда и только тогда, когда в момент времени $t = \frac{\tau}{2}$ угловые координаты всех радиус-векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_{ij}$ имеют вид $\frac{\alpha}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а их радиальные импульсы равны нулю:

$$\psi_i(\frac{\tau}{2}) \equiv \frac{\alpha}{2} \pmod \pi, \quad \psi_{ij}(\frac{\tau}{2}) \equiv \frac{\alpha}{2} \pmod \pi, \quad p_{r_i}(\frac{\tau}{2}) = 0, \quad p_{r_{ij}}(\frac{\tau}{2}) = 0. \tag{122}$$

Покажем, что при любых достаточно малых значениях параметров μ, ν условия (117), (122) однозначно определяют значения r_i, r_{ij} и p_{r_i}, $p_{r_{ij}}$ как функции от этих параметров. В самом деле, для применения теоремы о неявных функциях нужно проверить невырожденность следующей матрицы частных производных:

$$\frac{\partial(\psi(\frac{\tau}{2}), p_r(\frac{\tau}{2}))}{\partial(p_\psi(0), r(0)),} \tag{123}$$

где $\psi(t), r(t), p_\psi(t), p_r(t)$ — решение невозмущённой системы (96), записанное относительно полярных координат и полярных импульсов материальных точек в плоскости движения.

По доказанному на шаге 1, в базисах $e(m)$, $e(m')$ из следствия 15 оператор (123) задаётся блочной нижнетреугольной матрицей, являющейся соответствующим минором матрицы из (120). Этот минор является блочной нижнетреугольной матрицей, на диагонали которой стоят блоки следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \mp\frac{3\omega\tau}{2m_i r_i^2} & 0 \\ 0 & \mp I_i \sin\frac{\tilde{\alpha}_i}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mp\frac{3\tau}{2m_{ij} r_{ij}^2} & 0 \\ 0 & \mp I_{ij} \sin\frac{\tilde{\alpha}_{ij}}{2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица невырождена, если $\frac{\tilde{\alpha}_i}{2} \bmod \pi \neq 0$, $\frac{\tilde{\alpha}_{ij}}{2} \bmod \pi \neq 0$.

Последнее условие выполнено, если:

1. $c_2\omega^2\tau < \pi$, т.е. выполнено усиление условия (93),
2. число $\alpha \bmod \pi$ отделено от нуля на величину, не меньшую $\frac{c_2}{2}\omega^2\tau$.

Это следует из того, что $|\tilde{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}| < \frac{c_2}{3}\omega^2\tau$, см. замечание 21.

Следовательно, матрица (123) тоже невырождена, а значит, применима теорема о неявной функции.

Это завершает доказательство теоремы 12.

3.4 Доказательство вспомогательных утверждений

Здесь мы докажем леммы 15, 16 и 17, сформулированные в §3.2.

3.4.1 Доказательство леммы о невозмущённой системе

При доказательстве теорем 11 и 12 мы неоднократно опирались на лемму 15 о невозмущённой системе. В данном разделе мы дадим доказательство этой леммы, построив явно переменные импульсов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ и выписав в явном виде возмущённую систему в полученных фазовых переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. После этого будет легко найти невозмущённую систему, устремив возмущение к нулю.

Дадим точную формулировку утверждения, из которого следует лемма 15. Рассмотрим аналитическую функцию $\tilde{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{i*}; \nu, \rho)$ — потенциал (103) действия Солнца на спутники i–той планеты. Определим аналогичный потенциал $\tilde{F}_{ii'} = \tilde{F}_{ii'}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{y}_{i*}, \mathbf{y}_{i'*}; \nu, \rho)$ суммарного действия i'–той спутниковой системы на спутники i–той планеты и i–той спутниковой системы на спутники i'–той планеты, полагая

$$\nu\rho^2 \bar{m}_i \bar{m}_{i'} \tilde{F}_{ii'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{i*}, \mathbf{y}_{i'*}; \nu, \rho) = \frac{m_i m_{i'}}{|\mathbf{x} - \nu\rho(\delta_i - \delta_{i'})|} +$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\nu m_{i'} m_{ij}}{|\mathbf{x} + \rho\mathbf{y}_j - \rho\nu(\delta_i - \delta_{i'})|} + \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \frac{\nu m_i m_{i'j'}}{|-\mathbf{x} + \rho\mathbf{y}_{j'} + \rho\nu(\delta_i - \delta_{i'})|} +$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \frac{\nu^2 m_{ij} m_{i'j'}}{|\mathbf{x} + \rho(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j'}) - \rho\nu(\delta_i - \delta_{i'})|} - \frac{\bar{m}_i \bar{m}_{i'}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}|}, \tag{124}$$

где $i \neq i'$, $1 \leq i, i' \leq n$, $\bar{m}_i$ и векторы δ_i — такие же, как в (97) и замечании 19. Ясно, что $\tilde{F}_{ii'} \equiv \tilde{F}_{i'i}$.

Утверждение 14. *Существуют переменные импульсов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, линейно зависящие от $\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{y}}$, такие, что в фазовых переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ задача о движении планетно-спутниковой системы является гамильтоновой системой относительно симплектической структуры*

$$\sum_{i=1}^{n} (d\boldsymbol{\xi}_i \wedge d\mathbf{x}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{n_i} d\boldsymbol{\eta}_{ij} \wedge d\mathbf{y}_{ij}) \tag{125}$$

с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i + \mu\omega \sum_{1 \leq i < i' \leq n} K_{ii'} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\nu \sum_{1 \leq j < j' \leq n_i} S_{jj'}^{(i)}. \tag{126}$$

При этом интеграл кинетического момента с точностью до положительного множителя равен $M = [\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}] + \varepsilon[\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}]$.

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(\mu, \nu, 1/R) = \nu\sqrt{\frac{\mu}{R}} = \mu\nu\omega R$ — масштабный множитель перехода от планетной системы к спутниковой системе;

$$H_i = \omega(\tilde{K}_i + \frac{\nu}{R^2} \bar{m}_i \tilde{F}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{S}_j^{(i)}$$

— гамильтониан задач Хилла (или Кеплера — в случае $n_i = 0$), отвечающих i–той спутниковой системе, состоящий из энергий $\tilde{K}_i$, $S_j^{(i)}$, $1 \le j \le n_i$, взаимодействия i–той планеты с Солнцем и её j–тым спутником соответственно (99) и потенциала $\tilde{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{i*}; \nu, \frac{1}{R})$ взаимодействия этих спутников с Солнцем (103);

$$K_{ii'} = \langle \xi_i, \xi_{i'} \rangle - \frac{\bar{m}_i \bar{m}_{i'}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}|} + \frac{\nu \bar{m}_i \bar{m}_{i'}}{R^2} \tilde{F}_{ii'}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{y}_{i*}, \mathbf{y}_{i'*}; \nu, \frac{1}{R})$$

— "энергия взаимодействия двух спутниковых систем", состоящая по определению из кинетической энергии $\langle \xi_i, \xi_{i'} \rangle$ и суммы потенциалов взаимодействия точек одной (i–той) спутниковой системы с точками другой (i'–той) спутниковой системы;

$$S_{jj'}^{(i)} = \frac{\langle \boldsymbol{\eta}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij'} \rangle}{m_i} - \frac{m_{ij} m_{ij'}}{|\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{y}_{ij'}|}$$

— энергия взаимодействия двух спутников (j–того и j'–того) одной и той же (i–той) спутниковой системы.

Кроме того, здесь мы обозначили, как в (97), через $\bar{m}_i$ суммарную массу i–той планеты и всех её спутников, $\tilde{m}_i = \frac{\bar{m}_i}{1+\mu \bar{m}_i}$, $\tilde{m}_{ij} = \frac{m_{ij} m_i}{m_i + \nu m_{ij}}$, где, напомним, μm_i — масса i–той планеты, $\mu \nu m_{ij}$ — масса её j–того спутника, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le n$.

Замечание 24. Из формул (102), (103) и (124) (см. также замечание 19) видно, что потенциалы $\tilde{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{i*}; \nu, \rho)$ и $\tilde{F}_{ii'}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{y}_{i*}, \mathbf{y}_{i'*}; \nu, \rho)$ получаются малыми возмущениями из функции F. Точнее, они аналитичны по всем своим аргументам, и при $\nu = \rho = 0$ равны соответственно

$$\tilde{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{i*}; 0, 0) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}}{m_i} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{ij}) \qquad \text{и}$$

$$\tilde{F}_{ii'}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{y}_{i*}, \mathbf{y}_{i'*}; 0, 0) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}}{m_i} F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{y}_{ij}) + \sum_{j'=1}^{n'_i} \frac{m_{i'j'}}{m'_i} F(\mathbf{x}_{i'} - \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{i'j'}).$$

Поэтому каждое слагаемое в последних двух суммах естественно назвать "предельным потенциалом действия Солнца на спутник" и "предельным потенциалом действия одной планеты на спутник другой планеты" соответственно. (Безусловно, эти потенциалы дают малый вклад в энергию (126), так как они входят в неё с малыми коэффициентами порядков $\frac{\nu}{R^2}$ и $\frac{\mu\nu}{R^2}$ соответственно.)

Для доказательства утверждения 14 мы построим в явном виде переменные импульсов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ и покажем, что функция H из формулы (126) равна полной энергии системы, умноженной на $\omega R/\mu$.

Легко видеть, что слагаемые в H, не зависящие от импульсов, дают в сумме потенциальную энергию, умноженную на $\omega R/\mu$.

Вычислим кинетическую энергию. Мы воспользуемся тем, что сделанный нами переход от координат $(M_0, M_1, \dots, M_N)$ в конфигурационном пространстве к координатам $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ можно осуществить путём двукратного применения следующего преобразования, называемого преобразованием Пуанкаре.

Преобразование Пуанкаре в задаче $N+1$ тела. Рассмотрим конфигурационное многообразие Q планетной системы (т.е. системы $N+1$ материальных точек в евклидовой плоскости), состоящее из всевозможных наборов радиус-векторов $M_0, M_1, \dots, M_N$ масс $c_0 = 1$, $c_1 = \lambda m_1, \dots, c_N = \lambda m_N$, где $\lambda \ll 1$. Многообразие Q мы будем рассматривать как линейное пространство. Рассмотрим линейное преобразование L в этом пространстве, перейдя к новому набору радиус-векторов

$$\tilde{M}_0 = C, \tilde{M}_1 = M_1 - M_0, \dots, \tilde{M}_N = M_N - M_0,$$

где $C = \frac{M_0 + c_1 M_1 + \ldots + c_N M_N}{1 + c_1 + \ldots + c_N}$ — радиус-вектор в центр тяжести системы.

Определение 23. Преобразование L называют *преобразованием Пуанкаре* конфигурационного многообразия планетной системы.

Отметим, что можно было бы рассмотреть другое преобразование, а именно, *преобразование Якоби* $\tilde{M}_0 = C$, $\tilde{M}_1 = M_1 - C, \dots, \tilde{M}_N = M_N - C$. Однако, это преобразование приводит к более громоздким формулам. Кроме того, оно привело бы нас к ожидаемому результату лишь в случае обычной планетной системы, т.е. системы без спутников.

Рассмотрим теперь сопряжённое пространство Q^*, т.е. пространство всех линейных функционалов на пространстве Q (точнее, на касательном пространстве к Q в любой его точке). Это пространство можно рассматривать как пространство всех наборов $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$, где каждый элемент $\mathbf{p}_i$ — линейный функционал в плоскости, т.е. ковектор. В самом деле, значение функционала, отвечающего такому набору, на конфигурации $(M_0, M_1, \dots, M_N)$ можно положить равным сумме $\sum_{i=0}^{N} \langle \mathbf{p}_i, M_i \rangle$. Ясно, что невырожденное линейное преобразование L в Q индуцирует некоторое линейное преобразование L^* в Q^*, при котором набор $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ переходит, скажем, в набор $\tilde{\mathbf{p}}_0, \tilde{\mathbf{p}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_N$.

Рассмотрим в пространстве Q^* вещественнозначную функцию кинетической энергии $T = \sum_{i=0}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2c_i}$. Рассмотрим также функцию кинетического момента $M = \sum_{i=0}^{N} [M_i, \mathbf{p}_i]$ на пространстве T^*Q. И рассмотрим функцию полного импульса $P = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_N$ на Q^*, принимающую значения в пространстве ковекторов — линейных функционалов в плоскости.

Лемма 19. *При преобразовании Пуанкаре L конфигурационного пространства Q функции T и P на Q^* преобразуются следующим образом:*

А) Кинетическая энергия $T = \sum_{i=0}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2c_i}$ принимает вид

$$T = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2c_i} + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1 + \ldots + \tilde{\mathbf{p}}_N)^2 =$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\tilde{p}_i^2}{2\lambda m_i} + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1 + \ldots + \tilde{\mathbf{p}}_N)^2, \tag{127}$$

где $\bar{c}_0 = 1 + c_1 + \ldots + c_N = 1 + \lambda(m_1 + \ldots + m_N)$. Это выражение можно переписать так:

$$T = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=0}^{N} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2\tilde{c}_i} + \sum_{1 \le i < i' \le N}^{N} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_{i'} \rangle =$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2\lambda \tilde{m}_i} + \sum_{1 \le i < i' \le N} \langle \tilde{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_{i'} \rangle, \tag{128}$$

где $\tilde{c}_i = c_0 c_i/(c_0 + c_i) = c_i/(1 + c_i)$, $1 \le i \le N$.

Б) Полный импульс $P = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_N$ превращается в импульс “самого массивного” тела:

$$P = \tilde{\mathbf{p}}_0. \tag{129}$$

Кинетический момент $M = \sum_{i=0}^{N} [M_i, \mathbf{p}_i]$ в фазовом пространстве T^*Q инвариантен при преобразовании L: $M = \sum_{i=0}^{N} [\tilde{M}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i]$.

Доказательство. Доказательство пунктов А, Б проводится прямой подстановкой в функции T и P следующих явных формул преобразования L^* импульсов: $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{1+c_1+\ldots+c_N}\tilde{\mathbf{p}}_0$, $\mathbf{p}_i = \tilde{\mathbf{p}}_i + \frac{c_i}{1+c_1+\ldots+c_N}\tilde{\mathbf{p}}_0$, $1 \le i \le N$.

Инвариантность кинетического момента следует из его инвариантности относительно любого преобразования пространства T^*Q, индуцированного преобразованием пространства Q вида $\tilde{M}_i = a_{ij} M_j$, где матрица $\|a_{ij}\|$ невырождена. Последнее верно, так как преобразование импульсов имеет вид $\tilde{\mathbf{p}}_i = b_{ik} \mathbf{p}_k$, где $\sum_k b_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$, откуда имеем:

$$\sum_{i=0}^{N} [\tilde{M}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i] = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} [\tilde{M}_j, \tilde{\mathbf{p}}_k] a_{ij} b_{ik} = \sum_{i=0}^{N} [\tilde{M}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i].$$

Доказательство утверждения 14. Рассмотрим сначала случай планетной системы без спутников. Заметим, что переход от координат M к координатам $\mathbf{x}$ является композицией преобразования Пуанкаре L и гомотетии

$\tilde{M}_i = R\mathbf{x}_i$, $1 \le i \le N$. Полагая $\tilde{\mathbf{p}}_i = \mu\xi_i/\sqrt{R}$, $1 \le i \le N$, $\tilde{\mathbf{p}}_0 = 0$, получаем из формулы (128) требуемое выражение кинетической энергии T с точностью до нужного множителя. А именно, TR/μ равно $\sum_{i=1}^N \frac{\xi_i^2}{2\tilde{m}_i} + \mu\sum_{1\le i<j\le N}\langle\xi_i, \xi_j\rangle$. Поэтому, в частном случае планетной системы без спутников, гамильтониан H действительно равен произведению $\frac{R}{\mu}(T+U)$ полной энергии системы на коэффициент $\frac{R}{\mu}$. Отметим, что хотя симплектическая структура $d\tilde{\mathbf{p}} \wedge d\tilde{M} = \mu\sqrt{R}d\xi \wedge d\mathbf{x}$ отличается от стандартной $d\xi \wedge d\mathbf{x}$, но лишь постоянным множителем, что можно компенсировать изменением масштаба времени.

В общем случае планетно-спутниковой системы заметим, что для перехода от радиус-векторов $(M_0, M_1, \ldots, M_N)$ к координатам $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_{ij}$ нужно применить следующие три преобразования. А именно, сначала нужно применить преобразование Пуанкаре L ко всей системе (см. выше), затем нужно применить преобразование L к каждой спутниковой системе $\tilde{M}_{ij}$, $0 \le j \le n_i$, а потом нужно сделать нормирующую гомотетию $\tilde{\tilde{M}}_{i0} = \tilde{C}_i = R\mathbf{x}_i$, $1 \le i \le n$, $\tilde{\tilde{M}}_{ij} = \mathbf{y}_{ij}$, $0 \le j \le n_i$. Для простоты формул мы далее будем считать, что у всех планет есть спутники, т.е. все n_i положительны.

Шаг 1. Первое применение преобразования L к исходным конфигурационным переменным даёт, согласно (127),

$$T = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2c_i} + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1 + \ldots + \tilde{\mathbf{p}}_N)^2 = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_0^2}{2\bar{c}_0} + \sum_{i=1}^n \tilde{T}_i + \frac{1}{2}(\tilde{P}_1 + \ldots + \tilde{P}_n)^2,$$

где $\tilde{T}_i = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2c_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{ij}^2}{2c_{ij}} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu m_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{ij}^2}{2\mu\nu m_{ij}}$ — кинетическая энергия i–той спутниковой системы, $\tilde{P}_i = \tilde{\mathbf{p}}_i + \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\mathbf{p}}_{ij}$ — импульс i–той спутниковой системы.

Шаг 2. Положим $\tilde{\mathbf{p}}_0 = 0$ и применим преобразование L по отдельности к каждой спутниковой системе. В результате по формуле (128) имеем $\tilde{T}_i = \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i^2}{2\mu\bar{m}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}^2}{2\mu\nu\tilde{m}_{ij}} + \frac{1}{\mu m_i}\sum_{1\le j<j'\le n_i}\langle\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}, \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij'}\rangle$, где $\bar{m}_i = m_i + \nu\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$, $\tilde{m}_{ij} = \frac{m_{ij}m_i}{m_i+\nu m_{ij}}$. По формуле (129) имеем $\tilde{P}_i = \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i$.

Отсюда, с учётом предыдущего шага, получаем

$$T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i^2}{2\mu\bar{m}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}^2}{2\mu\nu\tilde{m}_{ij}} + \sum_{1\le j<j'\le n_i} \frac{\langle\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}, \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij'}\rangle}{\mu m_i} \right) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i^2}{2\mu\tilde{m}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}^2}{2\mu\nu\tilde{m}_{ij}} + \sum_{1\le j<j'\le n_i} \frac{\langle\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}, \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij'}\rangle}{\mu m_i} \right) + \sum_{1\le i<i'\le n}\langle\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i, \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{i'}\rangle,$$

где $\tilde{m}_i = \frac{\bar{m}_i}{1+\mu\bar{m}_i}$, $1 \le i \le n$.

Шаг 3. Сделаем теперь “нормировку”: положим при $1 \le i \le n$

$$\tilde{\tilde{M}}_i = R\mathbf{x}_i, \quad \tilde{\tilde{M}}_{ij} = \mathbf{y}_{ij},$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_i = \frac{\mu}{\sqrt{R}}\boldsymbol{\xi}_i, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij} = \mu^{3/2}\nu\boldsymbol{\eta}_{ij}. \tag{130}$$

Тогда окончательно получаем: $T =$

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i^2}{2\tilde{m}_i R} + \mu\nu\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\eta_{ij}^2}{2\tilde{m}_{ij}} + \frac{\mu\nu^2}{m_i}\sum_{1\le j<j'\le n_i}\langle\boldsymbol{\eta}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij'}\rangle\right) + \frac{\mu^2}{R}\sum_{1\le i<i'\le n}\langle\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_{i'}\rangle.$$

С учётом того, что $\mu\nu\omega R = \varepsilon$, произведение кинетической энергии T на $\omega R/\mu$ равно

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\omega\frac{\xi_i^2}{2\tilde{m}_i} + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\eta_{ij}^2}{2\tilde{m}_{ij}} + \frac{\varepsilon\nu}{m_i}\sum_{1\le j<j'\le n_i}\langle\boldsymbol{\eta}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ij'}\rangle\right) + \omega\mu\sum_{1\le i<i'\le n}\langle\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_{i'}\rangle,$$

что и требовалось (см. (126), (99)).

Осталось заметить, что симплектическая структура, согласно (130), имеет вид

$$d\mathbf{p}\wedge dM = d\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}\wedge d\tilde{\tilde{M}} = \mu\sqrt{R}\sum_{i=1}^{n}(d\boldsymbol{\xi}_i\wedge d\mathbf{x}_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_i}d\boldsymbol{\eta}_{ij}\wedge d\mathbf{y}_{ij}),$$

так как, напомним, $\varepsilon = \nu\sqrt{\frac{\mu}{R}}$. Эта симплектическая структура отличается от указанной в формуле (125) лишь множителем $\mu\sqrt{R}$. Как неоднократно отмечалось выше, наличие этого множителя можно компенсировать изменением масштаба времени. Утверждение 14 доказано.

Это завершает доказательство основной леммы 15 о невозмущённой системе.

3.4.2 Круговые движения задачи Кеплера (невырожденность)

Здесь будет доказана лемма 16 о задаче Кеплера.

Рассмотрим более подробно плоскую *задачу Кеплера*, задаваемую системой уравнений

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{k\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3},$$

где $\mathbf{q}$ — радиус-вектор точки в плоскости. В фазовом пространстве система является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{km}{|\mathbf{q}|} = T + U, \tag{131}$$

где $T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$, $U = -\frac{km}{|\mathbf{q}|}$ — кинетическая и потенциальная энергия системы, $\mathbf{p}$ — фазовый импульс точки. Движения задачи в области отрицательных значений энергии H являются периодическими. При этом, согласно законам Кеплера, орбита движения точки является эллипсом, у которого один из фокусов помещён в начало координат, причём движение полностью определяется своей орбитой и начальным положением точки на орбите.

Поверхность круговых движений в плоской задаче Кеплера. Линейная часть отображения Пуанкаре. Как отмечалось выше, плоская задача Кеплера инвариантна относительно всех поворотов плоскости, так что она имеет первый интеграл кинетического момента $M = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]$. Отметим два простых свойства круговых движений в задаче Кеплера:

Во-первых, из уравнений движения следует, что для любого $r > 0$ однозначно (с точностью до изменения направления вращения) определено удовлетворяющее системе уравнений круговое движение точки по окружности радиуса r. При этом угловая скорость этого движения равна $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{r^3}}$, а энергия H и кинетический момент M равны соответственно $h = -\frac{km}{2r}$ и $M = m\omega r^2 = \pm m\sqrt{kr}$. В частности, значения h и M монотонно (при $\omega > 0$ или $\omega < 0$) зависят от значения ω и принимают любые значения в областях $h < 0$ и $M \neq 0$ соответственно. Далее мы будем считать, что значения параметров r, ω, h, M кругового движения связаны между собой указанным образом.

Во-вторых, круговым движениям в точности отвечают равновесные, т.е. стационарные, положения точки по отношению к вращающейся системе координат с угловой скоростью ω. Следовательно, для любого $\alpha \neq 0$ круговое движение является относительно периодическим с параметрами $\tau = \frac{\alpha}{\omega}, \alpha$. Другими словами, такое движение является $\frac{\alpha}{\omega}$–периодическим относительно вращающейся системы координат с угловой скоростью ω (а также с любой угловой скоростью вида $(1 + \frac{2\pi k}{\alpha})\omega$, где k — целое число).

Для любого $\omega \neq 0$ обозначим через γ_ω фазовую траекторию задачи Кеплера, отвечающую круговому движению с угловой скоростью ω. Инвариантную двумерную поверхность $\cup_{\omega\neq 0}\gamma_\omega$ в фазовом пространстве, образованную всеми этими траекториями, назовём *поверхностью круговых движений*. Эта поверхность является гладкой и диффеоморфна двумерному цилиндру.

Рассмотрим ограничение системы на изоэнергетическую поверхность $P_h = H^{-1}(h)$ в фазовом пространстве. Напомним, что система, описывающая движение относительно вращающейся системы координат с угловой скоростью ω, является гамильтоновой с гамильтонианом $H - \omega M$. Значит, круговым движениям в точности отвечают стационарные положения такой системы.

Лемма 16 из §3.2 является следствием следующей леммы.

Лемма 20. *Пусть H — гамильтониан (131) плоской задачи Кеплера, M — интеграл кинетического момента. Фиксируем произвольное число $\omega \neq 0$. Тогда:*

а) Критические точки функции $H - \omega M$ в точности отвечают круговому движению γ_ω задачи Кеплера с угловой скоростью ω. При этом функция $H - \omega M$ является боттовской, и по отношению к этой функции индекс критической окружности γ_ω равен 1.

б) Множество критических точек ограничения $M|_{P_h}$ интеграла M на изоэнергетическую поверхность $P_h = H^{-1}(h)$ совпадает с окружностью γ_ω, отвечающей круговому движению. Функция $M|_{P_h}$ является боттовской и достигает максимума на окружности γ_ω.

в) Рассмотрим в фазовом пространстве задачи Кеплера систему координат $\varphi \bmod 2\pi$, $I \equiv M$, q, p вида

$$I = p_\psi = M, \quad p = rp_r, \quad \varphi = \psi - \frac{2rp_r}{p_\psi}, \quad q = \ln(\frac{km^2r}{p_\psi^2}), \tag{132}$$

где r, ψ — полярные координаты в плоскости движения, p_r, p_ψ — соответствующие импульсы. Тогда эти координаты являются каноническими, и относительно них поверхность круговых движений совпадает с координатным симплектическим подпространством $\{q = p = 0\}$:

$$\cup_{\omega\neq 0}\gamma_\omega = \{q = p = 0\}.$$

При этом, для любого $\omega \neq 0$, в любой точке окружности γ_ω квадратичная часть функции $H - \omega M$ имеет диагональный вид относительно указанных координат:

$$\delta^2(H - \omega M)|_{\gamma_\omega} = -\frac{3}{2mr^2}\delta I^2 + \frac{\omega}{2}(\frac{\delta p^2}{I} + I\delta q^2). \tag{133}$$

Кроме того, в указанных координатах гамильтониан H задачи Кеплера не зависит от угловой переменной $\varphi \bmod 2\pi$ и имеет вид

$$\frac{H}{k^2m^3} = \frac{p^2 + I^2}{2I^4e^{2q}} - \frac{1}{I^2e^q}.$$

В частности, ограничение $\bar{H}$ гамильтониана H на поверхность круговых движений $\{q = p = 0\}$ имеет вид $\bar{H} = \bar{H}(I) = -\frac{k^2m^3}{2I^2}$, и каждая окружность γ_ω на поверхности $\{q = p = 0\}$ задаётся уравнением $\gamma_\omega = \{\frac{d\bar{H}}{dI} \equiv \frac{k^2m^3}{I^3} = \omega\}$.

Из пункта в) этой леммы сразу получаем следующее важное следствие, из которого следует, в частности, лемма 16.

Следствие 16. *Рассмотрим окружность γ_ω, отвечающую круговому движению задачи Кеплера с угловой скоростью ω. Тогда в любой точке этой окружности, относительно канонических координат $\varphi \bmod 2\pi$, $I = M$, q, p из леммы 20, справедливы следующие матричные представления для некоторых линейных операторов в этой точке:*

1) Линеаризация системы с гамильтонианом $H - \omega M$ задаётся матрицей вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{mr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega/I \\ 0 & 0 & -\omega I & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Рассмотрим поток системы с гамильтонианом $H - \omega M$, т.е. задачи Кеплера относительно плоскости, вращающейся вокруг центра с угловой скоростью ω. Линеаризация $A_t = e^{tB}$ этого потока задаётся симплектической матрицей вида

$$A_t = e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3t}{mr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega t) & \sin(\omega t)/I \\ 0 & 0 & -I\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

3) Производящая функция симплектического оператора $A = A_t = e^{tB}$, т.е. квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = \omega^2(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, задаётся матрицей вида

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3t}{mr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega t)/I \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 20. Первая часть пункта а) этой леммы очевидна. Так как энергия h монотонно зависит от угловой скорости ω (см. выше), то из первой части пункта а) сразу получаем первую часть пункта б).

Докажем вторую часть пункта б). При переходе к полярным координатам $\psi \bmod 2\pi$, $r > 0$ и соответствующим полярным импульсам $p_\psi = M$, p_r гамильтониан (131) задачи Кеплера принимает следующий вид:

$$H = \frac{p_r^2 + p_\psi^2/r^2}{2m} - \frac{km}{r}.$$

Непосредственно проверяется, что множество $\gamma = \gamma_\omega$ критических точек функции $H - \omega M$ задаётся условиями

$$p_r = 0, \quad \omega = \frac{p_\psi}{mr^2}, \quad p_\psi^2 = km^2 r. \tag{134}$$

Зафиксируем значение M, и рассмотрим ограничение гамильтониана H на полученную гиперповерхность. Легко видеть, что γ является боттовским множеством минимумов этого ограничения. Действительно, непосредственный подсчёт показывает, что квадратичная часть функции $H - \omega M$ в любой точке окружности γ имеет вид

$$2\delta^2(H - \omega M)|_\gamma = \frac{\delta p_\psi^2}{mr^2} - \frac{4\omega}{r}\delta p_\psi \delta r + \frac{1}{m}\delta p_r^2 + m\omega^2 \delta r^2.$$

Полагая $p_\psi = M = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, получаем положительно определённую квадратичную форму, что и требовалось. Теперь можно воспользоваться следующим общим фактом, а именно, что *боттовское критическое подмногообразие ограничения одной функции F на регулярное множество уровня другой функции G является боттовским критическим подмногообразием ограничения второй функции G на регулярное множество уровня первой функции F, причём индексы этого боттовского подмногообразия в этих двух случаях дают в сумме полную размерность многообразия.* Отсюда получаем вторую часть пункта б).

Докажем вторую часть пункта а), т.е. боттовость окружности γ относительно функции $H - \omega M$. Нетрудно построить в касательном пространстве любой точки окружности γ новые канонические координаты $\delta\varphi$, δI, δq, δp, относительно которых квадратичная часть гамильтониана $H - \omega M$ примет диагональный вид. А именно, рассмотрим следующее преобразование координат в касательном пространстве:

$$\delta I = \delta p_\psi, \quad \delta p = r\delta p_r, \quad \delta\varphi = \delta\psi - \frac{2r}{I}\delta p_r, \quad \delta q = \frac{\delta r}{r} - \frac{2}{I}\delta p_\psi.$$

То есть, координаты I, p — это “чистые импульсы”: I — это угловой импульс (кинетический момент) планеты, p — с точностью до множителя радиальный импульс, а конфигурационные переменные $\delta\varphi \bmod 2\pi$, δq получаются из конфигурационных координат $\delta\psi \bmod 2\pi, \delta r$ прибавлением импульсов. При указанной замене квадратичная часть функции $H - \omega M$ в любой точке из (134) принимает диагональный вид (133). Отсюда мы заключаем, что окружность γ действительно является боттовским подмногообразием индекса 1 для функции $H - \omega M$, что завершает доказательство пункта а).

Оказывается, что построенное нами каноническое преобразование касательного пространства можно продолжить до канонического преобразования (132) самого фазового пространства (из которого выкинута гиперповерхность $p_\psi = M = 0$ и плоскость “столкновения” $r = 0$). Непосредственно проверяется, что преобразование координат (132) действительно является каноническим, отображает взаимно однозначно область $r > 0$, $p_\psi = M \neq 0$ на область $I = M \neq 0$, и что гамильтониан H при этом преобразовании принимает вид, указанный в лемме 20.

Далее, заметим, что окружности (134) при всевозможных $\omega \neq 0$ заметают поверхность $\{q = p = 0, I \neq 0\}$. Непосредственно проверяется, что в любой точке этой поверхности замена координат в касательном пространстве совпадает с построенным выше линейным преобразованием. Это завершает доказательство пункта в) леммы 20.

Наконец, обозначим через h ограничение функции H на рассматриваемую инвариантную симплектическую поверхность $q = p = 0$, являющуюся несвязным объединением двух плоских колец. Ясно, что $h = h(I)$. Прямая подстановка значений $q = p = 0$ в гамильтониан H даёт нужный вид гамильтониана: $h = -\frac{k^2m^3}{2I^2}$. Равенство $dh = \omega dI$ очевидно, так как множество $q = p = 0$ образовано окружностями (134) при всевозможных $\omega \neq 0$, а каждая из этих окружностей, по доказанному, является множеством критических точек функции $H - \omega I$.

Лемма 20, а значит, и лемма 16, полностью доказана.

3.4.3 Существование периодических движений задачи Хилла

Здесь мы докажем лемму 17 о предельной задаче Хилла.

Из следствия 16 следует, что оператор монодромии задачи Кеплера, т.е. линейная часть фазового потока $g^t_{H-\omega M}$ системы с гамильтонианом $H-\omega M$ за время $t = \tau$ в равновесном решении γ_ω задаётся матрицей вида

$$A = e^{\tau B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\tau}{mr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos|\alpha| & \sin|\alpha| \\ 0 & 0 & -\sin|\alpha| & \cos|\alpha| \end{pmatrix}$$

относительно некоторых канонических координат $\delta\varphi, \delta I, \delta\tilde{q}, \delta\tilde{p}$ в касательном пространстве, где $\alpha = \omega\tau$. Здесь $\varphi \bmod 2\pi, I, q, p$ — координаты (132) из леммы 16, $\delta\tilde{q} = \sqrt{|I|}\delta q$, $\delta\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{|I|}}\delta p$ — каноническая замена переменных.

Поясним здесь, почему при угле α в формуле для матрицы A возник знак модуля. Действительно, поскольку угловая скорость ω и интеграл площадей $I = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]$ имеют один знак, то $\omega I = |\omega I| > 0$. Значит, в правом нижнем блоке матрицы B из следствия 16 оба ненулевых сомножителя имеют фиксированные знаки, не зависящие от знака ω. Таким образом, при $\omega > 0$ правый нижний блок матрицы A оператора монодромии является поворотом на угол $-\alpha$, а при $\omega < 0$ — поворотом на угол α. Знаки остальных ненулевых коэффициентов матрицы A не зависят от знака ω.

Итак, оператор монодромии для периодического решения γ задачи Кеплера во вращающейся системе координат задаётся матрицей A. Рассмотрим две матрицы, полученные из A следующим образом.

1) Рассмотрим оператор $A - I$, являющийся разностью оператора монодромии A и тождественного оператора I. Ясно, что касательное пространство к периодической траектории γ лежит в ядре этого оператора: $T_m\gamma \subset \ker(A - I)$. Напомним, что в терминологии теоремы 5 периодическое решение γ называется *невырожденным* (по отношению к периоду τ), если это включение является равенством.

2) Рассмотрим следующую матрицу, полученную окаймлением матрицы оператора $A - I$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \omega \\ & A-I & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3\tau}{mr^2} & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos|\alpha| - 1 & \sin|\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & -\sin|\alpha| & \cos|\alpha| - 1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ядро этой матрицы одномерно, или, что эквивалентно, $\omega\tau \neq 0$ и невырожден её блок

$$\begin{pmatrix} \cos|\alpha| - 1 & \sin|\alpha| \\ -\sin|\alpha| & \cos|\alpha| - 1 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{tg}\,|\frac{\alpha}{2}| \begin{pmatrix} -\sin|\frac{\alpha}{2}| & \cos|\frac{\alpha}{2}| \\ -\cos|\frac{\alpha}{2}| & -\sin|\frac{\alpha}{2}| \end{pmatrix},$$

то в терминологии теоремы 1 решение γ называется невырожденным (по отношению к периоду τ).

Чтобы не путать эти две невырожденности, мы будем во втором случае говорить, что решение γ *изоэнергетически невырождено*. Аналогично определяются невырожденные и изоэнергетически невырожденные подмногообразия произвольной размерности, заполненные траекториями периодических решений произвольной гамильтоновой системы.

Из явного вида матрицы A легко видеть, что в рассматриваемой задаче условия невырожденности и изоэнергетической невырожденности эквивалентны и имеют место тогда и только тогда, когда $\tau \neq 0$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, из следствия 16, с помощью теоремы о неявных функциях, получаем следующие следствия.

Следствие 17. *Пусть H — гамильтониан (131) плоской задачи Кеплера, M — интеграл кинетического момента этой задачи. Пусть γ — фазовая траектория кругового движения задачи Кеплера с угловой скоростью ω. Пусть σ — сечение Пуанкаре в фазовом пространстве задачи, трансверсально пересекающее траекторию γ в произвольно заданной его* *точке. Пусть $\tau > 0$, $\alpha = \omega\tau \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим (не обязательно гамильтонову) задачу, τ–периодически зависящую от времени и полученную малым возмущением системы с гамильтонианом $H - \omega M$. Тогда при любом достаточно малом возмущении существует единственное τ–периодическое решение $\tilde{\gamma}$ возмущённой задачи, близкое к решению γ, пересекающее сечение σ в нулевой момент времени.*

Это утверждение легко следует из невырожденности решения γ при $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. выше), и доказывается при помощи теоремы о неявных функциях. Отметим, что в случае, когда возмущение системы является гамильтоновым, решение $\tilde{\gamma}$ будет также изоэнергетически невырожденным.

Имеется следующий аналог следствия 17 в вырожденном случае, т.е. при $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (нас будет интересовать случай $k = 1$).

Следствие 18. *Пусть, в условиях следствия 17, $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим однопараметрическое семейство невозмущённых задач с гамильтонианом $H - \tilde{\omega} M$, зависящих от параметра $\tilde{\omega}$. Пусть $\gamma = \gamma(\omega)$ — периодическое решение этой задачи, отвечающее круговому относительно периодическому движению задачи Кеплера с параметрами $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tilde{\omega})$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\omega}\tilde{\tau}(\tilde{\omega})$. Наложим на эту систему (не обязательно гамильтоново) возмущение порядка $(\tilde{\omega} - \omega)^2$, являющееся $\tilde{\tau}$–периодическим по времени. Тогда:*

1. *При любом $\tilde{\omega}$, достаточно близком к ω, существует единственное относительно периодическое решение $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{\omega})$ возмущённой задачи, пересекающее сечение σ в нулевой момент времени и имеющее те же параметры $\tilde{\tau}$, $\tilde{\alpha}$.*

2. *Решение $\tilde{\gamma}$ невырождено по отношению к периоду $\tilde{\tau}$ и отличается от решения γ не более, чем на величину порядка $(\tilde{\omega} - \omega)^2$ возмущения задачи.*

3. *Для любого целого n, порядок которого не превосходит $\frac{1}{|\tilde{\omega} - \omega|}$ и для которого $n\tilde{\alpha} \bmod 2\pi$ отделено от нуля более чем на величину порядка $|\tilde{\omega} - \omega|$, решение $\tilde{\gamma}$ невырождено по отношению к периоду $n\tilde{\tau}$.*

Замечание 25. Из следствий 17 и 18 получаем, что всевозможные периодические решения возмущённой системы образуют окружность. Это следует из того, что сечение Пуанкаре σ можно выбрать гладко зависящим от точки на траектории γ. Однако часто, например, при наличии у системы подходящих симметрий, эти решения фактически совпадают. Более точно, автономность системы или существование циклической переменной M гарантируют соответственно, что все периодические решения получаются друг из друга сдвигом начала отсчёта времени или поворотом на некоторый угол.

Замечание 26. Из следствия 18 легко следует, что если возмущённая система является гамильтоновой, то решение $\tilde{\gamma}$ не только невырождено, но и изоэнергетически невырождено по отношению к периоду $\tilde{\tau}$.

Доказательство следствий 17, 18. Следствие 17 вытекает из невырожденности (и изоэнергетической невырожденности) решения γ при $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Докажем, что из второй части пункта 2 следствия 18 следует его первая часть и пункт 3. Более того, мы докажем, что для любого целого n, порядок которого не превосходит $\frac{1}{|\tilde{\omega}-\omega|}$, и для которого величина $\min_{k\in\mathbb{Z}} |n\tilde{\alpha} - 2\pi k|$ отделена от нуля величиной большей, чем порядка $|\tilde{\omega}-\omega|$, периодическое решение $\tilde{\gamma}$ является невырожденным по отношению к периоду $n\tilde{\tau}$, и изоэнергетически невырожденным, если возмущённая система является гамильтоновой. В самом деле, так как возмущение имеет порядок $(\tilde{\omega}-\omega)^2$ и, согласно пункту 2, решение $\tilde{\gamma}$ отличается от γ на величину порядка $(\tilde{\omega}-\omega)^2$, то оператор монодромии $\tilde{A}$, отвечающий решению $\tilde{\gamma}$, отличается от оператора A, отвечающего круговому движению задачи Кеплера, на величину того же порядка $(\tilde{\omega}-\omega)^2$. Отсюда следует, что оператор $\tilde{A}^n$ отличается от A^n на сколь угодно малую величину (в действительности — на величину порядка $|\tilde{\omega}-\omega|$). Далее, из явного вида оператора A легко найти его степень A^n. А именно, это блочно-диагональная матрица, состоящая из жордановой клетки и матрицы поворота на угол $n\tilde{\alpha}$. Вычитая из этой матрицы единичную матрицу, получаем, что ядро полученного и любого $|\tilde{\omega}-\omega|$–близкого к нему оператора одномерно. В частности, ядро оператора $\tilde{A}^n - I$ одномерно, что доказывает невырожденность решения $\tilde{\gamma}$ по отношению к периоду $n\tilde{\tau}$.

Докажем пункты 1, 2 следствия 18. Воспользуемся методом усреднения. Рассмотрим систему при $\tilde{\omega} = \omega$, т.е. задачу Кеплера. Хорошо известно, что задача Кеплера является периодической системой в области отрицательных значений интеграла энергии, т.е. все её решения в указанной области являются периодическими с периодом τ, являющимся гладкой функцией в фазовом пространстве.

Покажем сначала, что каждая изоэнергетическая поверхность $P = P_h$ задачи Кеплера является невырожденным множеством, заполненным τ–периодическими решениями, см. определение из §2.1 (изоэнергетическая невырожденность этой поверхности выполнена в силу периодичности системы). В самом деле, согласно утверждению 11 (см. также [25] или [22]), из периодичности системы следует, что период τ решений постоянен на каждой изоэнергетической поверхности P_h и является функцией от значения энергии h. Более того, функция периода имеет вид $\tau(h) = I'(h)$, где

$I = I(h)$ — переменная действия данной периодической системы. Поскольку в области круговых движений переменная I совпадает с интегралом кинетического момента M, то из явного вида гамильтониана в этой области (см. лемму 20 (в)) следует, что функция $I(h)$ является выпуклой, и поэтому функция $\tau(h)$ является монотонной, и её производная нигде не обращается в ноль. Отсюда легко следует невырожденность изоэнергетической поверхности P_h (по отношению к функции минимального периода τ).

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство возмущённых систем, зависящих от параметра $\tilde{\omega}$. С точностью до величины порядка $(\tilde{\omega} - \omega)^2$, возмущённая система является гамильтоновой с гамильтонианом $H - \tilde{\omega}M$. Найдём усреднённое возмущение последней гамильтоновой системы и покажем, что траектория γ является невырожденным множеством его нулей. Возмущение M является первым интегралом невозмущённой системы и поэтому постоянно на каждой её траектории. Значит, усреднение возмущения на изоэнергетической поверхности P_h равно самому M. Далее, согласно лемме 20 (б), траектория γ является боттовским подмногообразием ограничения функции M на P_h. Значит, согласно методу усреднения на подмногообразии (точнее, аналогу теоремы 6 для неавтономных τ–периодических систем), возмущённая система имеет единственную $\tilde{\tau}$–периодическую траекторию $\tilde{\gamma}$, близкую к γ и пересекающую сечение σ в нулевой момент времени. При этом главная (гамильтонова) часть возмущения однозначно определяет эту траекторию, с точностью до величины порядка $(\tilde{\omega} - \omega)^2$. Пункт 1 следствия 18 доказан. Кроме того, доказана вторая часть пункта 2.

Следствие 18 полностью доказано.

Из следствия 18 при $k = 1$ получаем лемму 17 о предельной задаче Хилла.

Замечание 27. Отметим, что приведённое доказательство существования и единственности решения Хилла $\tilde{\gamma}$ можно видоизменить, так чтобы оно опиралось на метод усреднения для автономных систем. В самом деле, рассмотрим всю предельную задачу Хилла (96), а не только её вторую часть, относящуюся к спутнику. Тогда при нулевом значении параметра возмущения первая половина уравнений системы имеет в правых частях одни нули, а вторая её часть совпадает с задачей Кеплера для спутника с гамильтонианом H_y. Идея состоит в том, что главная часть возмущения имеет порядок ω (у первой половины уравнений), и с точностью до величины порядка ω^2 возмущённая система является гамильтоновой по отношению к симплектической структуре $d\boldsymbol{\xi} \wedge d\mathbf{x} + d\boldsymbol{\eta} \wedge d\mathbf{y}$, с гамильтонианом $H_y + \omega H_x - \omega M$. Здесь H_x — гамильтониан задачи Кеплера для планеты, $M = M_x + M_y$ — полный интеграл кинетического момента. Ясно, что главная часть $H_x - M_x - M_y$ возмущения системы постоянна на траекториях невозмущённой системы, и поэтому её усреднение по периодическим решениям невозмущённой системы на поверхности $P = H_y^{-1}(h)$ в точности равно её ограничению на поверхность P. Согласно пунктам а), б) леммы 20, критические точки этого ограничения образуют боттовский двумерный тор γ_0, отвечающий круговому движению спутника с данным значением энергии h и круговому движению планеты с единичной угловой скоростью. Значит, по методу усреднения, существует единственное периодическое движение γ_ω предельной задачи Хилла, гладко зависящее от ω и совпадающее с γ_0 при $\omega = 0$.

Отметим, что метод усреднения обобщается на случаи, аналогичные возникающему при изучении планетно-спутниковой системы: когда невозмущённая симплектическая структура вырождена. Однако из конкретного вида возмущения в планетно-спутниковой системе следует, что усреднённое возмущение является константой на рассматриваемом N–мерном торе, и тем самым не имеет боттовских критических подмножеств. Поэтому теоремы, аналогичные теореме 7, не могут гарантировать структурную устойчивость периодических решений планетно-спутниковой системы. Можно лишь утверждать справедливость теоремы 11 (B).

3.5 Обобщения. Двойные планеты

Покажем, что справедливы обобщения леммы 15 и теоремы 11, уже упомянутые выше в замечаниях 15 и 17.

3.5.1 Случай “индивидуальных” малых параметров

Каждой планете сопоставим малый параметр μ_i — суммарную массу этой планеты и всех её спутников, а каждому спутнику сопоставим малый параметр ν_{ij} — отношение массы этого спутника к соответствующей суммарной массе μ_i, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le n$.

Теорема 13. *Утверждения теорем 11 и 12 останутся верными, если вместо малого параметра ν ввести набор $N - n$ индивидуальных малых параметров ν_{ij}, отвечающих всем спутникам, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le n$.*

Доказательство. Заметим, что переход от параметра ν к индивидуальным малым параметрам ν_{ij} эквивалентен тому, что величины $\frac{m_{ij}}{m_i}$ перестают быть фиксированными, оставаясь лишь ограниченными. В частности, некоторые из них могут стремиться к нулю. Поэтому теорема 13 в действительности утверждает, что в такой более общей постановке задачи теоремы 11, 12 остаются справедливы.

Итак, рассмотрим случай, когда все величины m_i фиксированы, а величины $\frac{m_{ij}}{m_i}$ ограничены.

Из уравнений (98) возмущённой системы видно, что основная трудность возникает, когда какое-нибудь $\frac{m_{ij}}{m_i}$ стремится к нулю. Применим следующую "регуляризацию" системы уравнений (98): сделаем индивидуальную замену импульсов, перейдя к новым фазовым импульсам спутников $\frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}}{\tilde{m}_{ij}}$.

Воспользуемся следующими фактами:

1. Функции $\tilde{F}_i$ и $\tilde{F}_{ii'}$ являются гладкими (и даже аналитическими) по всем своим переменным и параметрам m_i, $\frac{m_{ij}}{m_i}$.

2. Производные функций $\tilde{F}_i$ и $\tilde{F}_{ii'}$ по переменным $\mathbf{y}_{ij}$ имеют порядок $\frac{m_{ij}}{m_i}$ (это следует из того, что при обращении в ноль параметра $\frac{m_{ij}}{m_i}$ функции $\tilde{F}_i$ и $\tilde{F}_{ii'}$ не зависят от переменной $\mathbf{y}_{ij}$).

Следовательно, при указанной замене переменных возмущённая система уравнений (98) перейдёт в систему такого же вида, а значит, основная лемма 15 о невозмущённой системе останется верна. Это доказывает теорему 13.

3.5.2 Двойные планеты. Обобщённая задача Хилла

В заключение сформулируем важный частный случай теорем 11, 12 из §3.1.

Пусть i–тая планета имеет ровно один спутник: $n_i = 1$. Соответствующую спутниковую систему, состоящую из i–той планеты и её спутника, назовём *двойной планетой.* Рассмотрим соответствующий индивидуальный параметр $\theta_i = \nu_{i1} \in (0,1)$ (см. выше). Будем считать, что суммарная масса двойной планеты имеет вид $\mu_i = \mu m_i$. Тогда массы i–той планеты и её спутника равны соответственно $\mu(1-\theta_i)m_i$ и $\mu\theta_i m_i$ ($\mu \ll 1$).

Для остальных планет (имеющих более одного спутника) будем считать, что массы их спутников имеют вид $\mu\nu m_{ij}$, где $\nu \ll 1$.

Согласно теореме 13, утверждения теорем 11 и 12 останутся справедливыми, если значения параметров μ, ν, а также параметров θ_i, отвечающих двойным планетам, достаточно малы. Оказывается, что последнее ограничение не существенно, т.е. верна

Теорема 14. *Для планетно-спутниковой системы, в которой имеются двойные планеты, теоремы 11, 12 верны без предположения о малости соответствующих параметров θ_i, отвечающих двойным планетам. Другими словами, если в данной системе имеются двойные планеты, то для* *справедливости утверждения теоремы 11 достаточно выполнения условий 1, 2 замечания 15, т.е. чтобы μ, $\nu \to 0$, а для каждой двойной планеты параметр θ_i может быть произвольным.*

Доказательство. При получении невозмущённой системы из системы (98) малость параметра ν используется только как коэффициент при суммах вида $\sum_{j' \neq j} \eta_{ij'}$ в уравнениях на $\frac{d\mathbf{y}_{ij}}{dt}$. Однако эти суммы отсутствуют, если планета имеет не более одного спутника, т.е. когда $n_i \leq 1$. Поэтому малость параметров θ_i, отвечающих двойным планетам, не существенна.

Замечание 28. Аналогичное доказательство показывает, что в случае системы Солнце–Земля–Луна ($N = 2$, $n = 1$) теорема 14 останется верной без предположения о малости параметра μ. Такие решения хорошо известны [26, 6], и их называют обобщёнными решениями Хилла или просто решениями Хилла. В случае планетной системы без спутников ($n_i = 0$), утверждения теорем 11, 12 также известны и были получены в работе Красинского [8]. В случае Солнце-планета-спутники теорема 12 была получена в работе [12] Тхая.

Список литературы

[1] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

[2] *А. В. Валиньо.* Комплексный росток на неполномерных лагранжевых торах. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Москва, 1983, рукопись.

[3] *А. Гивенталь.* Периодические отображения в симплектической топологии // Функц. Ан. и приложения, 1987, т. 23.

[4] *П. Л. Гинзбург.* Новые обобщения геометрической теоремы Пуанкаре // Функц. Ан. и приложения, 1987, т. 21, No. 2, с. 16-22.

[5] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия. Методы гомологий // М.: Наука, 1984.

[6] *К. Л. Зигель.* Лекции по небесной механике: Пер. с нем. // М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

[7] *В. В. Козлов.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмурдского гос. ун-та, 1995. 432 с.

[8] *Г. А. Красинский.* Квазипериодические и периодические решения // В сб.: Малые планеты. Под ред. Н. С. Самойловой-Яхонтовой. М.: Наука, 1973, гл. VII.

[9] *Е. А. Кудрявцева, Н. Н. Нехорошев.* Оценка числа выживающих при возмущении замкнутых траекторий гамильтоновых систем // Совместные заседания семинара им. И. Г. Петровского и Моск. матем. общества (девятнадцатая сессия, 20-24 января 1998 г.) УМН, 1998. Т. 53, вып. 4, с. 206-207.

[10] *Е. А. Кудрявцева.* Периодические движения планетной системы с двойными планетами. Обобщённая задача Хилла // Рукопись депонирована в ВИНИТИ, в декабре 1998 г., N 3727-В98.

[11] *Дж. Милнор.* Теория Морса // М.: Наука, 1961.

[12] *В. Н. Тхай.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // Прикладная математика и механика, 1995, т. 59, вып. 3, с. 355-365.

[13] *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс.* Курс гомотопической топологии / М.: Наука, 1989.

[14] *M. Bottkol.* Bifurcation of periodic orbits on manifolds, and hamiltonian systems // Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v. 83, p. 1060-1062.

[15] *M. Chaperon.* Une idee du type “geodesique brisee” pour les system Hamiltoniens // C. R. Ac. Sci. Paris, Ser. 1, Math., 1984, v. 298, p. 293-296.

[16] *C. C. Conley, E. Zehnder.* The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold // Invent. Math., 1983, v. 73, p. 33-49.

[17] *A. Floer.* Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kahler manifolds // Duke Math. J., 1986, v. 53, p. 1-32.

[18] *F. B. Fuller.* An index of fixed point type for periodic orbits // Amer. J. Math., 1967, v. 89, p. 133-148.

[19] *W. B. Gordon.* On the relation between period and energy in periodic dynamical systems // J. Math. Mach., 1969, v. 19, p. 111-114.

[20] *G. W. Hill.* Researches in the lunar theory // Amer. J. Math., 1878. V. 1. P. 5-26; 129-147; 245-260.

[21] *M. A. Krasnosel'skii.* On special coverings of a finite dimentional sphere // Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R., 1955, v. 103, p. 961-964.

[22] *E. A. Kudryavtseva.* Generalized geometric Poincaré theorem for small perturbations // Regular & Chaotic Dynamics, 1998, vol. 3, No. 2, p. 45-65.

[23] *G. Liu, G. Tian.* Floer homology and Arnold conjecture // 1996, to appear.

[24] *J. Moser.* Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold // Comm. on pure and appl. math., 1970, v. 23, p. 609-636.

[25] *J. Moser.* Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein // Comm. on pure and appl. math., 1976, v. 29, p. 727-747.

[26] *F. R. Moulton.* A class of periodic solutions of the problem of three bodies with application to the lunar theory // Trans. Amer. Soc., 7, 537-577 (1906).

[27] *K. Ono.* On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds // Invent. Math. 119 (1995).

[28] *H. Poincaré.* Methodes nouvelles de la mechanique celeste. V. 3, chap. 28. Paris: Gauthier Villars, 1899. Русский перевод: А. Пуанкаре. Новые методы небесной механики // В кн. Избр. труды. Т. I-II. — М.: Наука, 1971, 771 с. 1972, с. 9-356.

[29] *G. Reeb.* Sur certaines proprietes topologiques des trajectoires des systemes dynamiques // Acad. Roy. Sci. Lett. et Beaux-Arts de Belgique. Cl. des Sci. Memoires in 8°, Ser. 2, 1952, v. 27, No. 29.

[30] *I. Satake.* On a generalization of the notion of manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1956, v. 42, p. 359-363.

[31] *J. C. Sikorav.* Points fixes d'un symplectomorphisme homologue a l'identite // J. Diff. Geom., 1982, v. 22, p. 49-79.

[32] *J. C. Sikorav.* Problemes d'intersection et de points fixes en geometrie hamiltonienne // Comm. Math. Helvet., 1987, v. 62, p. 62-73.

[33] *C. Viterbo.* Symplectic topology as the geometry of generating functions // Math. Annalen, 1992, v. 292, p. 685-710.

[34] *A. Weinstein.* Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems // Annals of Math., 1973, v. 98, p. 377-410.

[35] *A. Weinstein.* Normal modes for nonlinear hamiltonian systems // Inventiones math., 1973, v. 20, p. 47-57.

[36] *A. Weinstein.* Symplectic V-manifolds, periodic orbits of Hamiltonian systems, and the volume of certain riemannian manifolds // Comm. on pure and appl. math., 1977, v. 30, p. 265-271.

[37] *A. Weinstein.* Bifurcations and Hamilton's principle // Math. Zeitschr., 1978, v. 159, p. 235-248.

[38] *A. Weinstein.* On extending the Conley Zehnder fixed point theorem to other manifolds // Proc. Symp. Pure Math., 1986, v. 45. / Providence, R. J.: AMS 1986.