МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

механико-математический факультет

На правах рукописи

КРАСАУСКАС Римвидас Людвикович

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИЭДРАЛЬНЫХ ГОМОЛОГИЙ

/ 01.01.04 - геометрия и топология /

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-матеметических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
ст.научный сотрудник СОЛОВЬЕВ Ю.П.

МОСКВА 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена исследованию диэдральных гомологий топологических пространств и их приложению к проблеме вычисления рациональных гомотопических групп пространств автоморфизмов гомеоморфизмов и диффеоморфизмов односвязных многообразий.

Исследования автоморфизмов многообразий имеет богатую историю и связана с работами таких математиков как Ж.-П.Серр, С.П.Новиков, Ж.Серф, А.Хэтчер, Д.Бургеля, Р.Лашоф, Ф.Вальдхаузен и др. Вкратце отметим ключевые результаты в этой области, полученные до 1986 г. и непосредственно связанные с настоящей диссертацией. Во-первых, это теоремы о стабилизации конкордантностей (Хэтчер [29], Бургеля-Лашоф [26]), утверждающие, что естественное тотображение пространств конкордантностей многообразия M^n

$$\mathcal{C}_{Cat}(M) \longrightarrow \mathcal{C}_{Cat}(M\times I), \quad Cat = Diff, Top,$$

является $\varphi_{Cat}(n)$-связным, где $\varphi_{Diff}(n) = \left[\frac{n-15}{14}\right]$, $\varphi_{Top}(n) = \left[\frac{n-15}{7}\right]$. Во-вторых, это исследование Вальдхаузена [41], который построил в 1978 г. алгебраический К-функтор топологических пространств. В терминах этого К-функтора выражается гомотопический функтор $\mathcal{C}^s_{Cat}(M) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{C}_{Cat}(M\times I^m)$ стабильных конкордантностей (см. подробности в § 3.1). В третьих, сюда надо отнести теорему Д.Бургеля [23], доказанную в 1983 г., которая утверждает, что приведенные рациональные К-группы Вальдхаузена $\widetilde{K}_*(X)\otimes Q$ односвязного топологического пространства X изоморфны приведенным циклическим гомологиям $\overline{HC}_{*-1}(X;Q)$ Б.Л.Цыгана [19] и А.Кона [27]. Кроме того, в диссертации используется минимальная модель для вычисления $HC_*(X;Q)$ в терминах минимальной модели односвязного пространства X, построенная М.Вигю и Д.Бургеля [38].

Исходным пунктом настоящей диссертации являются работы [I3], [I5] Ю.П.Соловьева и автора, в которых доказывается эрмитов аналог теоремы Д.Бургеля, связывающий рациональную эрмитову алгебраическую К-теорию топологических пространств с диэдральными гомологиями. Вместе с результатами Бургеля-Федоровича [25] это дает эффективную схему для вычисления рациональных гомотопических групп пространств гомеоморфизмов многообразий в терминах диэдральных гомологий с рациональными коэффициентами.

Сформулируем здесь одну из теорем работы [I5]. Пусть M^n - компактное односвязное многообразие, $Homeo(M,\partial)$ и $G(M,\partial)$ - пространства гомеоморфизмов и гомотопических самоэквивалентностей, неподвижных на крае ∂M, с компактно-открытой топологией, а $G(M,\partial)/Homeo(M,\partial)$ - гомотопический слой отображения $BHomeo(M,\partial) \longrightarrow BG(M,\partial)$.

Теорема [I5]. При $k \leq \varphi_{Top}(n)$, $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \pi_k\left(G(M,\partial)/Homeo(M,\partial)\right) = \dim {}^{-1}\overline{HD}_k(M;\mathbb{Q}) - \dim \widetilde{H}_{k+1}(M;\mathbb{Q}) + \dim \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{k+4i+\varepsilon-1}(M;\mathbb{Q}),\ \varepsilon=(-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Таким образом, чтобы вычислить ранги групп $\pi_k Homeo(M,\partial)$ необходимо знать рациональные гомологии многообразия M, ранги групп $\pi_k G(M,\partial)$ и диэдральные гомологии с рациональными коэффициентами многообразия M. В настоящей диссертации вычисления диэдральных гомологий проведены до конца для $\mathbb{C}P^m$, $\mathbb{H}P^m$, комплексных квадрик и некоторых грассмановых многообразий. Обозначим через M одно из перечисленных многообразий. Ранги групп $\pi_k G(M)$ вычислены методом Сулливана. Все это позволяет получить ранги групп $\pi_k Homeo(M\times D^{2\ell},\partial)$ и $\pi_k Diff(M\times D^m,\partial)$ до размерностей $\varphi_{Top}(\dim M+2\ell)$ и $\varphi_{Diff}(\dim M+m)$ соответственно.

Остановимся подробнее на вопросе о природе циклических и диэдральных гомологий. Опишем конструкции этих гомологий в простейшем случае алгебры A над полем нулевой характеристики k. Пусть $\{CH_*(A), b\}$ - комплекс для вычисления гомологий Хохшилда алгебры A с коэффициентами в бимодуле A, т.е.

$$CH_0(A) \xleftarrow{b_1} CH_1(A) \xleftarrow{b_2} \ldots \xleftarrow{b_n} CH_n(A) \xleftarrow{b_{n+1}} \ldots$$

где $CH_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$, $b_n = d_0 - d_1 + \ldots + (-1)^n d_n$,

$$d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n, \quad 0 \le i \le n-1,$$

$$d_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}.$$

Определим на $CH_n(A)$ оператор $T_n = (-1)^n t_n$, где

$$t_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}.$$

В случае, когда алгебра обладает инволюцией $* : A \to A$ (т.е. $*^2 = id$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$) определим дополнительно оператор $R_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} r_n$, где

$$r_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0^* \otimes a_n^* \otimes \ldots \otimes a_1^*.$$

В первом случае, в силу соотношения $T_n^{n+1} = id$, на $CH_n(A)$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}/(n+1)$, а во втором - операторы T_n и R_n порождают действие группы диэдра порядка $2(n+1)$, т.к. $T_n \cdot R_n = R_n \cdot T_n^{-1}$ и $(R_n)^2 = id$. Циклические гомологии $HC_*(A)$ и диэдральные гомологии $HD_*(A)$ определяются как гомологии комплексов, составленных из коинвариантов соответствующих действий

$$\{Coinv_{\mathbb{Z}/(n+1)} CH_n(A), b_n\}, \quad \{Coinv_{\mathbb{Z}/(n+1) \rtimes \mathbb{Z}/2} CH_n(A), b_n\},$$

где дифференциалы b_n определены также как и выше. А.Кон [27] предложил следующий подход к определению циклических гомологий для алгебры A над произвольным коммутативным кольцом k. Последовательность модулей $\{CH_0(A), CH_1(A), \ldots\}$ совместно с операторами d_i и s_j, где d_i определены выше, а s_j задается формулой

мулой $s_j(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=a_0\otimes\ldots\otimes a_j\otimes 1\otimes a_{j+1}\otimes\ldots\otimes a_n$, образует симплициальный модуль $CH.(A)$, т.е. некоторый контравариантный функтор из категории Δ линейно упорядоченных множеств в категорию k-модулей. Если мы хотим одновременно рассматривать и операторы t_n, действующие на каждом $CH_n(A)$, то естественно получим контравариантный функтор из некоторой большей категории Λ (ΔC в основном тексте), так называемый циклический модуль. Оказывается, что циклический модуль это тоже самое, что правый модуль над некоторой k-алгеброй $k[\Lambda]$ (см. подробности ниже или [32]). Положим по определению

$$HC_*(A)=\mathrm{Tor}_*^{k[\Lambda]^{op}}(k.,CH.(A)).$$

Диэдральные гомологии в случае поля нулевой характеристики были определены Б.Л.Цыганом [20]. В общем случае любого коммутативного кольца это было сделано в работах [11], [12] С.В.Лапина, Ю.П.Соловьева и автора, где построена соответствующая малая категория Ξ (ΔD в основном тексте). Таким образом, категории Λ и Ξ лежат в основе конструкций циклических и диэдральных гомологий. Они обладают следующими тремя свойствами:

(a) содержит Δ в качестве подкатегории;

(в) имеет теже самые объекты;

(c) каждый морфизм единственным образом представляется ввиде композиции некоторого автоморфизма и морфизма из категории Δ.

Малую категорию, которая удовлетворяет условиям (a) – (c) будем называть категорией типа Δ, а гомологии, ассоциированные с такой категорией - гомологиями с внутренними симметриями. Это понятие с одной стороны достаточно широкое, включающее известные гомологии такого сорта, а с другой стороны ограничения (a) – (c) обеспечивают сохранение некоторых фундаментальных свойств. Например, условие (c) существенно для леммы I.I.2. Здесь мы естественно подходим к вопросу описания всевозможных таких гомологий и установлению места циклических и диэдральных гомологий среди них.

Приступим теперь к изложению содержания диссертации по главам. В первой главе исследуются конструкции гомологий с внутренними симметриями и их связи с эквивариантными гомологиями. Полученные результаты будут использоваться для диэдральных гомологий во второй главе. § I.I посвящен изучений категорий типа Δ. Они образуют категорию $Cat\Delta$, морфизмы которой - это функторы, сохраняющие подкатегорию Δ. Каждой категории Σ типа Δ сопоставим последовательность автоморфизмов $\{Aut_\Sigma[0], Aut_\Sigma[1], \dots\}$, которая, как оказывается, определяет так называемую скрещенную симплициальную группу (сокращенно CS-группу).

Теорема I.I.4. Категория $Cat\Delta$ эквивалентна категории CS-групп $CS\text{-}Groups$.

CS-группа $G.$ - это симплициальное множество, n-мерные симплексы которого G_n образуют группу с некоторыми дополнительными условиями (см. определение I.I.3). Из самого определения I.I.3 следует, что в категории CS-групп имеется финальный объект $W.$, состоящий из групп Вейля системы корней B.

Предложение I.I.5. CS-группа $W.$ содержит ровно семь CS-подгрупп

$$\begin{tikzcd}
 & & W. & \\
 & & T. \arrow[u, hook] & \\
 & D. \arrow[ur, hook] & & S. \arrow[ul, hook] \\
R. \arrow[ur, hook] & & C. \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \\
 & 1. \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

имеющих следующие группы в качестве групп n-мерных симплексов $1_n = 1$, $C_n = \mathbb{Z}/(n+1)$, $S_n = \Sigma_{n+1}$, $R_n = \mathbb{Z}/2$, $D_n = \mathbb{Z}/(n+1) \ltimes \mathbb{Z}/2$, $T_n = \mathbb{Z}/2 \times \Sigma_{n+1}$, $W_n = (\mathbb{Z}/2)^{n+1} \ltimes \Sigma_{n+1}$. Образующие перечислены в таблице в основном тексте.

Предложение I.I.6. Любая CS-группа $G.$ представляется как расширение одной из выше перечисленных CS-групп $P.$ посредством некоторой симплициальной группы $H.$

$$H. \rightarrowtail G. \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P.$$

При этом проекция π является расслоением Кана.

Далее приводится примеры CS-групп $C^{(k)}_{\cdot}$, $Q.$, $B.$ и др., отвечающие кратным циклическим и кватернионным гомологиям, группам кос Артина и др. Рассматриваются их топологические и гомотопические свойства.

Предложение I.I.8. Имеют место следующие гомеоморфизмы и гомотопические эквивалентности: $|C.| \cong |C^{(k)}_{\cdot}| \cong S^1, k<\infty, |C^{(\infty)}_{\cdot}| \cong \mathbb{R}$, $|D.| \cong |Q.| \cong S^1 \sqcup S^1$, $|S.| \simeq |W.| \simeq *$, $|T.| \simeq |R.| = * \sqcup *$.

Параграф завершается полным описанием конечных связных (в смысле симплициальных множеств) CS-групп. Таковыми являются CS-группы из последовательности $1.$, $C.$, $C^{(2)}_{\cdot}, \ldots, C^{(n)}_{\cdot}, \ldots$ и только они (предложение I.I.9).

Связи скрещенных симплициальных групп с эквивариантной топологией исследуются в § I.2. Для малой категории $\mathcal{L}$ и произвольной категории $\mathcal{C}$ функторы из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{C}$ далее будем называть $\mathcal{L}$-объектами категории $\mathcal{C}$ ($\mathcal{L}$-множествами, $\mathcal{L}$-пространствами, если $\mathcal{C} = Sets$, $\mathcal{C} = Spaces$ и т.д.). Фиксируем CS-группу $G.$ и ей отвечающею категорию ΔG типа Δ. С каждым симплициальным множеством $X.$ ассоциируется им порожденное ΔG^{op}-множество $GX.$ (см. определение I.2.I). Фактически получается функтор G, который определяет монаду (G, μ, ε) с естественным умножением μ и единицей ε. Причем задание ΔG^{op}-множества $X.$ эквивалентно заданию некоторой алгебры $(X., \xi)$, $\xi : GX. \to X.$, над монадой (G, μ, ε).

Лемма I.2.3. Для CS-группы $G.$ и симплициального множества $X.$ имеет место естественный гомеоморфизм геометрических реализаций $\Phi(X.) : |GX.| \longrightarrow |G.| \times |X.|$.

Обозначим через $s. : Spaces \to \Delta^{op}Sets$ функтор сингулярного симплициального множества топологического пространства.

Теорема I.2.4. Пусть $G.$ - CS-группа.

A. Отображение $\bar{\mu} = |\mu| \circ \Phi(G.)^{-1} : |G.| \times |G.| \longrightarrow |G.|$ превращает $|G.|$ в топологическую группу.

B. Алгебра $(X., \xi)$ над монадой (G, μ, ε) определяет композицию $\bar{\xi} = |\xi| \circ \Phi(X.)^{-1} : |G.| \times |X.| \longrightarrow |X.|$, которая задает действие группы $|G.|$ на пространстве $|X.|$.

C. Если группа $|G.|$ непрерывно действует на пространстве Y посредством отображения $\mathcal{V} : |G.| \times Y \longrightarrow Y$, то некоторый естественный мономорфизм симплициальных множеств

$$\Psi(Y) : Gs.(Y) \longrightarrow s.|G.| \times s.(Y)$$

определяет алгебру над монадой (G, μ, ε) посредством отображения $\bar{\mathcal{V}} = s.\mathcal{V} \circ \Psi(Y) : Gs.(Y) \longrightarrow s.(Y)$.

Категорию топологических пространств с действием топологической группы $|G.|$ и эквивариантных отображений обозначим через $|G.|\text{-}Spaces$. Формально обращая слабые эквивалентности (т.е. отображения, индуцирующие изоморфизмы гомотопических групп) получаем гомотопическую категорию $Ho(|G.|\text{-}Spaces)$ и аналогично $Ho(\Delta G^{op}Sets)$.

Следствие I.2.5. Соответствия $(X., \xi) \longmapsto (|X.|, \bar{\xi})$ и $(Y, \nu) \longmapsto (s.(Y), \bar{\nu})$ из теоремы I.2.4 индуцируют эквивалентность категорий $Ho(\Delta G^{op} Sets)$ и $Ho(|G.|\text{-}Spaces)$.

В конце параграфа решается вопрос каким топологическим группам отвечают рассмотренные примеры CS-групп. Оказывается, что $|R.| \cong \mathbb{Z}/2$, $|C.| \cong SO(2)$, $|D.| \cong O(2)$.

§ I.3 посвящен связи между гомологиями с внутренними симметриями и эквивариантными гомологиями. Для малой категории L и коммутативного кольца с единицей k определим k-алгебру $k[L]$, как алгебру порожденную морфизмами категории L с наложенными соотношениями $f \cdot g = f \circ g$, если композиция определена, и $f \cdot g = 0$ в противном случае. Оказывается, что задать ΔG^{op}- k-модуль $M. = \{M_n\}$ -это тоже самое, что задать левый модуль $\bigoplus_n M_n$ над алгеброй $k[\Delta G]^{op}$. Все это верно и для ΔG^{op}-цепных комплексов k-модулей.

Определение I.3.2. Для ΔG^{op}-цепного комплекса k-модулей $M._*$ определим гомологии CS-группы $G.$ с коэффициентами в $M._*$ как градуированный k-модуль

$$H_*(G., M._*) = \mathrm{Tor}_*^{k[\Delta G]^{op}}(k., M._*).$$

Для ΔG^{op}-пространства $X.$ определим $G.$-гомологии с коэффициентами в k, полагая $HG_*(X.; k) = H_*(G., N_*(X., k))$, где $N_*(\ , k)$ - функтор нормализованных сингулярных k-цепей.

ΔG^{op}-пространство $X.$ - это функтор $\Delta G^{op} \longrightarrow Spaces$. Определим пространство $\|X.\|_{\Delta G}$ как гомотопический копредел $\mathrm{holim}_{\Delta G^{op}}(X.)$.

Лемма I.3.5. Имеет место изоморфизм

$$HG_*(X.; k) \cong H_*(\|X.\|_{\Delta G}; k).$$

Теорема I.3.6. Пусть $X.$ - ΔG^{op}-пространство. Тогда существует естественное квазирасслоение

$$\|X.\|_{\Delta} \longrightarrow \|X.\|_{\Delta G} \longrightarrow B(\Delta G)$$

эквивалентное расслоению

$$|X.| \longrightarrow E|G.| \times_{|G.|} |X.| \longrightarrow B|G.|,$$

где действие топологической группы $|G.|$ на $|X.|$ задается как в теореме I.2.4.

Следствие I.3.I3. Классифицирующее пространство категории ΔG гомотопически эквивалентно классифицирующему пространтсву топологической группы $|G.|$. В частности:

$$B(\Delta R) \simeq B\mathbb{Z}/2, \quad B(\Delta C) \simeq BSO(2), \quad B(\Delta D) \simeq BO(2).$$

Вторая глава посвящена диэдральным гомологиям топологических пространств. В § 2.I по любой дискретной группе L строится диэдральное множество $\Gamma.(L)$ (см. пример 2.I.I). В случае, когда k - поле характеристики ноль, имеется изоморфизм $HD_*(k[L]) \cong$ $\cong HD_*(\Gamma.(L); k)$. Если вместо L подставим симплициальную группу $L.$, то получим диэдральное симплициальное множество $\Gamma.(L.)$ и диэдральное пространство $\Gamma.(|L.|)$.

Теорема 2.I.2. Для любой симплициальной группы $L.$ имеет место $O(2)$-эквивариантная гомотопическая эквивалентность

$$|\Gamma.(L.)| \simeq B(L.)^{SO(2)},$$

где действие $O(2)$ на $|\Gamma.(L.)|$ определено в § I.2, а на $B(L.)^{SO(2)}$ индуцируется естественным правым действием $O(2)$ на $SO(2)$.

Далее определяется рефлексивные, циклические и диэдральные гомологии с коэффициентами в коммутативном кольце k связного топологического пространства X формулой

$$HG_*(X; k) = HG_*(\Gamma.(|\Omega.X|); k), \quad G. = R., C., D.,$$

где $\Omega.X$ - симплициальная группа петель Кана на пространстве X.

Теорема 2.I.4. Для связного пространства X имеют место изоморфизмы

(a) $HR_*(X;k) \cong H_*(E\mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} X^{SO(2)};k)$,

(в) $HC_*(X;k) \cong H_*(ESO(2) \times_{SO(2)} X^{SO(2)};k)$,

(c) $HD_*(X;k) \cong H_*(EO(2) \times_{O(2)} X^{SO(2)};k)$,

где в правых частях стоят сингулярные гомологии расслоений, ассоциированных с главными универсальными расслоениями групп $\mathbb{Z}/2$, $SO(2)$ и $O(2)$.

В § 2.2 напоминается необходимые сведения из теории минимальных моделей Сулливана (ссылки: [3], [17] и [37]). Потом проводится построение минимальных моделеййдля следующих многообразий: $\mathbb{C}P^m$, $\mathbb{H}P^m$, комплексной квадрики, комплексного грассманова многообразия $Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ двумерных плоскостей.

В § 2.3 строится модель для вычисления диэдральных гомологий с рациональными коэффициентами односвязных топологических пространств Всвязи с применениями рассматриваются дре разновидности диэдральных гомологий: ${}^{+1}HD_* = HD_*$ и ${}^{-1}HD_*$. Единственное отличие в определениях - это противоположные знаки операторов r_n на уровне цепей. Пусть Y - односвязное топологическое пространство, а $\mathcal{M}(Y) = \{\Lambda X, d\}$ - минимальная модель Сулливана. Таким образом, $X = \oplus_{i\geq 2} X^i$ - градуированное векторное пространство над $\mathbb{Q}$, порождающее свободную градуированную коммутативную алгебру ΛX, а d - разложимый дифференциал степени $+1$. Положим $\overline{X} = \oplus_{i\geq 1} \overline{X}^i$, $\overline{X}^i = X^{i+1}$, и определим дифференцирование степени -1 : $\beta: \Lambda(X\oplus\overline{X}) \longrightarrow \Lambda(X\oplus\overline{X})$, полагая $\beta(x) = \overline{x}$, $\beta(\overline{x}) = 0$. Определим далее дифференциальную градуированную $\mathbb{Q}$-алгебру

$\mathcal{C}(\mathcal{M}(Y)) = \{\Lambda(\langle\omega\rangle \oplus X \oplus \bar{X}), D\}$, полагая, что $\langle\omega\rangle$ - это одномерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$, порожденное элементом ω степени 2, и задавая дифференциал D по формулам
$D\omega = 0,\ Dx = dx + \omega\bar{x},\ x \in X,\ D\bar{x} = -\beta(dx)$.

Теорема 2.3.2. На алгебре $\mathcal{C}(\mathcal{M}(Y))$ действует группа $\mathbb{Z}/2$ посредством оператора $\tau: \tau(\omega) = -\omega,\ \tau(x) = x,\ \tau(\bar{x}) = -\bar{x}$, разлагая ее на инвариантную и антиинвариантную части $\mathcal{C}(\mathcal{M}(Y)) = {}^{+1}\mathcal{D}(\mathcal{M}(Y)) \oplus {}^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{M}(Y))$. Имеют место изоморфизмы
$${}^{\alpha}HD_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*({}^{\alpha}\mathcal{D}(\mathcal{M}(Y))),\ \alpha = \pm 1.$$

В § 2.4 вычисляются диэдральные гомологии с рациональными коэффициентами ${}^{\pm 1}HD_*(M;\mathbb{Q})$ для тех многообразий, которые были рассмотрены в § 2.2. Сформулируем полученные результаты в виде рядов Пуанкаре $P_{\alpha_{HD}}(t),\ \alpha = \pm 1,$ приведенных диэдральных гомологий ${}^{\alpha}\widetilde{HD}_*(M;\mathbb{Q})$, выраженных через ряды Пуанкаре $P_H(t)$ приведенных сингулярных гомологий $\tilde{H}_*(M;\mathbb{Q})$ следующим образом:

(i) $M = \mathbb{C}P^m,\ p = 1;\ M = \mathbb{H}P^m,\ p = 2:$
$$P_{\alpha_{HD}}(t) = P_H(t)\, t^{(1+\alpha)[2p(m+1)-2]-1}\left(1 - t^{4p(m+1)-4}\right)^{-1};$$

(ii) M - квадрика в $\mathbb{C}P^{2m+1}$:
$$P_{\alpha_{HD}}(t) = \frac{P_H(t)\, t^{(1+\alpha)(4m-2)}}{1 - t^{8m-4}} + \frac{t^{4m}(1 + t^{4m-1})(t^{-2\alpha m} + t^{2\alpha m + 8m - 4})}{(1 - t^{4m})(1 - t^{8m-4})};$$

(iii) $M = Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ - комплексное грассманово многообразие двумерных плоскостей в $\mathbb{C}^m$ (при $m = 4, 5, 6$):
$$P_{\alpha_{HD}}(t) = \frac{P_H(t)\, t^{(1+\alpha)(2m-2)}}{1 - t^{4m-4}} + \frac{B_m(t)(t^{-\alpha(2m-4)} + t^{\alpha(2m-4)+4m-4})}{(1 - t^{4m-8})(1 - t^{4m-4})}$$
где $B_m(t) = t^{4m-9} A_m(t) + t^{6m-4} A_m(t^{-1})$, а многочлен

$A_m(t)$ определяется по формуле $\langle A_m(t), t^k\rangle = \max\{\langle P_H(t) - t^{2m} P_H(t^{-1}), t^k\rangle, 0\}$.

На многообразия, перечисленные в пунктах (i)-(iii), ниже будем ссылаться как на многообразия из списка.

В третьей главе рассматриваются приложения. В § 3.1 напоминается нужные результаты о гомотопическом типе групп автоморфизмов многообразий: стабилизация конкордантностей, алгебраическая К-теория Вальдхаузена и ее эрмитов аналог, связь с диэдральными гомологиями. В частности выясняется, что необходимо исследовать рациональный тип пространства гомотопических самоэквивалентностей $G(M)$ многообразия M. § 3.2 содержит вычисления рациональных гомотопических групп $\pi_k(G(M))\otimes Q$ для многообразий M из списка. Используется метод Сулливана. Результаты вычислений запишем через ряды Пуанкаре $P_\pi(t)$ градуированного векторного пространства $\pi_*(G(M))\otimes Q$ согласно пунктам списка $(i)-(iii)$:

$$(i)\quad P_\pi(t) = \sum_{i=1}^{m} t^{2pi+1};$$

$$(ii)\quad P_\pi(t) = \sum_{i=1}^{2m} t^{2i-1} + \sum_{i=1}^{m-2} 2t^{2i-1} + t^{2m-1}(1+t^2);$$

$$(iii)\quad P_\pi(t) = (m-3)t + (m-2)t^3 + \sum_{i=3}^{m} (m-i+1)t^{2i-1}.$$

В § 3.3 суммируются все вычисления и получаются окончательные результаты. Ранги гомотопических групп пространств автоморфизмов многообразий из списка выражаются через размерности диэдральных гомологий с рациональными коэффициентами и ранги гомотопических групп пространств гомотопических самоэквивалентностей, которые вычислены в § 2.4 и § 3.2 соответственно.

Теорема 3.3.1. Для многообразия M^n из списка при условии $k \le \left[\frac{n+2l-15}{7}\right]$ выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Homeo}(M \times D^{2l}, \partial) = \dim^{-1} \widetilde{HD}_{k+1}(M; \mathbb{Q}) - \dim \widetilde{H}_{k+2}(M; \mathbb{Q}) + \operatorname{rank} \pi_{k+2l} G(M) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim \widetilde{H}_{k+4i+2}(M; \mathbb{Q}).$$

Теорема 3.3.2. Для многообразий M^n из списка при условии $k \leq \left[\frac{n+m-15}{14}\right]$ выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Diff}(M \times D^m, \partial) = \operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Homeo}(M \times D^m, \partial),$$

когда $m = 2l$;

$$= \dim^{+1} \widetilde{HD}_{k+1}(M; \mathbb{Q}) + \operatorname{rank} \pi_{k+m} G(M) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim \widetilde{H}_{k+4i+2}(M; \mathbb{Q}),$$

когда $m = 2l+1$.

Отметим некоторые пересечения настоящей работы с известными результатами. Дайер, Хопкинс и Кан в статье [28] доказали более сильное утверждение, чем следствие 1.2.5: соответствующие гомотопические категории эквивалентны как замкнутые модельные категории по Квиллену. Теорема 1.3.6 анонсирована автором для циклических и диэдральных гомологий в [7] раньше, чем она появилась у Бургеля и Федоровича [24] для циклических гомологий (она отсутствовала в препринте к этой статье). Изоморфизм 2.1.4 (ii) был анонсирован рядом авторов: Гудвилли, Бургеля, Федоровичем и др. Первое полное доказательство этого изоморфизма появилось в работе [24]. Вычисления рациональных гомотопических групп пространств автоморфизмов односвязных многообразий раньше были проведены только (кроме D^m и S^m) для $M \times D^m$, $M = \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2$, и только для размерностей $\leq \min\{\varphi_{CAT}(\dim M + m), \dim M - 2\}$ [22]. Эти результаты полностью согласуются с нашими вычислениями.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.П.Соловьеву.

ГЛАВА I. ГОМОЛОГИИ С ВНУТРЕННИМИ СИММЕТРИЯМИ

§ I.I. Скрещенные симплициальные группы

Пусть Δ - категория конечных линейно упорядоченных множеств $[n]=\{0,1,2,\dots,n\}$, $n=0,1,2,\dots$, и неубывающих отображений. Пусть Δ^{op} - дуальная категория. Хорошо известно, что она порождается морфизмами $d_i:[n]\longrightarrow[n-1]$, $s_i:[n]\longrightarrow[n+1]$, $0\le i\le n$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i\ , \quad i<j; \tag{I.I.I}$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i\ , & i<j, \\ id\ , & i=j,\ j+1, \\ s_j d_{i-1}\ , & i>j+1; \end{cases} \tag{I.I.2}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i\ , \quad i\le j. \tag{I.I.3}$$

I.I.I. Определение. Малая категория Σ называется категорией типа Δ, если она содержит Δ в качестве подкатегории, имеет теже самые объекты и каждый морфизм $f\in Hom_\Sigma([n],[m])$ единственным образом представляется в виде композиции $f=\varphi\circ g$, где $g\in Aut_\Sigma[n]$, $\varphi\in Hom_\Delta([n],[m])$.

Таким образом, категория Σ типа Δ полностью определяется набором автоморфизмов $Aut_\Sigma[n]$, $n=0,1,\dots$, и правилами коммутирования с морфизмами из Δ. Совокупность таких Σ образует категорию $Cat\Delta$, морфизмы которой - это функторы, сохраняющие Δ.

I.I.2. Пример: категория ΔW. Определим последовательность групп $W_n=(\mathbb{Z}/2)^{n+1}\rtimes\Sigma_{n+1}$, $n=0,1,2,\dots$ Здесь $\mathbb{Z}/2=\{+1,-1\}$, а Σ_{n+1} - симметрическая группа, действующая справа на множестве $[n]=\{0,1,\dots,n\}$: $(i,\tau)\longmapsto\tau^*(i)$, $i\in[n]$, $\tau\in\Sigma_{n+1}$.

Умножение определено по формуле

$$((\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n),\tau)\cdot((\varepsilon'_0,\dots,\varepsilon'_n),\tau')=((\varepsilon_0\cdot\varepsilon'_{\tau^*(0)},\dots,\varepsilon_n\cdot\varepsilon'_{\tau^*(n)}),\tau\cdot\tau')$$

На $W_\cdot=\{W_0,W_1,\dots\}$ введем структуру симплициального множества, задавая операторы граней и вырождений следующим образом

$$d_i((\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n),\tau)=((\varepsilon_0,\dots,\widehat{\varepsilon_i},\dots,\varepsilon_n),d_i\tau),$$

$$(d_i\tau)^*(j)=\begin{cases}\tau^*(j), & i>j,\ \tau^*(i)>\tau^*(j);\\ \tau^*(j)-1, & i>j,\ \tau^*(i)<\tau^*(j);\\ \tau^*(j+1), & i\le j,\ \tau^*(i)>\tau^*(j+1);\\ \tau^*(j+1)-1, & i\le j,\ \tau^*(i)<\tau^*(j+1);\end{cases} \qquad (I.I.4)$$

$$s_i((\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n),\tau)=((\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_i,\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_n),s_i\tau),$$

$$(s_i\tau)^*(j)=\begin{cases}\tau^*(j), & i>j, & \tau^*(i)>\tau^*(j)\\ \tau^*(j)+1, & i>j, & \tau^*(i)<\tau^*(j)\\ \tau^*(j-1), & i<j-1, & \tau^*(i)>\tau^*(j-1)\\ \tau^*(j-1)+1, & i<j-1, & \tau^*(i)<\tau^*(j-1)\\ \tau^*(i)+(1-\varepsilon_i)/2, & i=j; & \\ \tau^*(i)+(1+\varepsilon_i)/2, & i=j-1. & \end{cases} \qquad (I.I.5),\ (I.I.6)$$

Наконец определим категорию ΔW типа Δ коммутационными соотношениями в дуальном виде (т.е. для категории ΔW^{op}):

$$d_i\cdot\omega=(d_i\omega)\cdot d_{\omega^*(i)},\quad s_j\cdot\omega=(s_j\omega)\cdot s_{\omega^*(j)} \qquad (I.I.7)$$

Здесь ω^* означает действие группы W_n на множестве $[n]$, индуцированное проекцией $W_n=(\mathbb{Z}/2)^{n+1}\ltimes\Sigma_{n+1}\longrightarrow\Sigma_{n+1}$.

I.I.3. Определение. Скрещенная симплициальная группа - это пара $(G_\cdot,\gamma)$, состоящая из симплициального множества $G_\cdot$ и симплициального отображения $\gamma: G_\cdot\longrightarrow W_\cdot$, для которого выполняются условия:

(i) множество G_n является группой, а отображение $\gamma_n : G_n \to W_n$ - гомоморфизмом для всех n ;

(ii) для всех n при $0 \le i \le n$ имеют место равенства

$$d_i(g_1 \cdot g_2) = (d_i g_1) \cdot (d_{\gamma(g_1)^*(i)} g_2), \qquad (I.I.8)$$
$$s_i(g_1 \cdot g_2) = (s_i g_1) \cdot (s_{\gamma(g_1)^*(i)} g_2).$$

Морфизмом скрещенных симплициальных групп $(G_., \gamma) \to (G'_., \gamma')$ называется такое симплициальное отображение $f : G_. \longrightarrow G'_.$, что f_n - гомоморфизм для всех n, причем $\gamma = \gamma' \circ f$. Далее для краткости скрещенные симплициальные группы будем называть CS-группами, а вместо $(G_., \gamma)$ и $\gamma(g)^*$ часто будем писать $G_.$ и g^* соответственно.

Т.I.4. Теорема. Категория $Cat\Delta$ эквивалентна категории CS-групп.

Доказательство. Пусть Σ - категория типа Δ. Построим CS-группу $(G_., \gamma)$, $G_n = Aut^{op}_{\Sigma}[n]$, в пять шагов. Для удобства будем работать в дуальной категории Σ^{op}. Буквой g (возможно со штрихами) будем обозначать элементы из $G_.$.

Шаг I: структура симплициального множества. Согласно определению I.I.I, морфизм $d_i \cdot g$ категории Σ^{op} однозначно записывается в виде $g' \cdot d_j$. Соответствие $g \longmapsto g'$ определяет отображение $d_i : G_n \longrightarrow G_{n-1}$. Аналогично получаем отображения s_i : $G_n \longrightarrow G_{n+1}$. Симплициальные тождества (I.I.I) - (I.I.3) выполняются автоматически в силу единственности.

Шаг 2: построение гомоморфизмов $e_n, \tilde{e}_n : G_n \longrightarrow \Sigma_{n+1}$. Равенство $d_i \cdot g = g' \cdot d_j$ из I-го шага задает также соответствие $(d_i, g) \longmapsto d_j$, определяющее правое действие группы G_n на множестве $[n]$: $g^*(i) = j$. Это равносильно заданию гомоморфизма в симметрическую группу $e_n : G_n \longrightarrow \Sigma_{n+1}$ (см. пример

ТI.I.2). Совершенно также из равенств $s_i \cdot g = g'' \cdot s_k$ получаем гомоморфизм $\tilde{e}_n : G_n \longrightarrow \Sigma_{n+1}$.

Шаг 3: равенство гомоморфизмов e и $\tilde{e}$. Введем сокращения $g^* = e(g)^*$, $\tilde{g}^* = \tilde{e}(g)^*$. В результате шагов I и 2 имеем равенства

$$d_i \cdot g = (d_i g) \cdot d_{g^*(i)}\ , \quad s_j \cdot g = (s_j g) \cdot s_{\tilde{g}^*(j)}, \tag{I.I.9}$$

которые позволяют проводить преобразования

$$d_i \cdot s_j \cdot g = (d_i s_j g) \cdot d_{(s_j g)^*(i)} \cdot s_{\tilde{g}^*(j)}\ ,$$

$$s_{j-1} \cdot d_i \cdot g = (s_{j-1} d_i g) \cdot s_{\widetilde{(d_i g)}^*(j-1)} \cdot d_{g^*(i)}.$$

Когда $i<j$, левые части этих равенств совпадают согласно (I.I.2). Из единственности разложения вытекает

$$d_{(s_j g)^*(i)} \cdot s_{\tilde{g}^*(j)} = s_{\widetilde{(d_i g)}^*(j-1)} \cdot d_{g^*(i)}.$$

Так как это соотношение для морфизмов категории Δ^{op} типа (I.I.2), то обязательно $g^*(i) \neq \tilde{g}^*(j)$. В случае, когда $i > j+1$, аналогично получаем

$$d_{(s_j g)^*(i)} \cdot s_{\tilde{g}^*(j)} = s_{\widetilde{(d_{i-1} g)}^*(j)} \cdot d_{g^*(i-1)}.$$

Опять непременно $g^*(i-1) \neq \tilde{g}^*(j)$. Таким образом, если $i \neq j$, то всегда $g^*(i) \neq \tilde{g}^*(j)$. Следовательно, $g^* = \tilde{g}^*$, т.е. $e = \tilde{e}$.

Шаг 4: поднятие отображений $e_n : G_n \longrightarrow \Sigma_{n+1}$ до симплициального отображения $j : G. \longrightarrow W.$. Согласно (I.I.3) при $i > j$ имеем $s_{i+1} s_j = s_j s_i$. Переставляя этот оператор с элементом g получим тождество (в силу единственности):

$$s_{(s_j g)^*(i+1)} \cdot s_{g^*(j)} = s_{(s_i g)^*(j)} \cdot s_{g^*(i)}.$$

Опять из (I.I.3) следует, что при $g^*(i) > g^*(j)$ имеем $(s_i g)^*(j) = g^*(j)$, а при $g^*(i) < g^*(j)$ - $(s_i g)^*(j) = g^*(j) + 1$. Заметим, что это в точности первые два соотношения из (I.I.5).

Если $i<j-1$, то аналогично получаются остальные два соотношения из (I.I.5). Однако остается неопределенность: $(s_i g)^*(j)$ равняется либо $g^*(i)$, либо $g^*(i)+1$. В первом случае положим $\varepsilon_i(g)=+1$, а во втором - $\varepsilon_i(g)=-1$. Определим отображение $\gamma: G. \longrightarrow W.$ по формуле $g \longmapsto ((\varepsilon_0(g),\dots,\varepsilon_n(g)), e(g))$ Оказывается, что γ - симплициальное отображение. Действительно, коммутирование с операторами вырождения обеспечивается соотношениями (I.I.5) и (I.I.6) для $\varepsilon_i=\varepsilon_i(g)$, $\tau=e(g)$ и остается только проверить, что

$$(\varepsilon_0(s_i g),\dots,\varepsilon_{n+1}(s_i g)) = (\varepsilon_0(g),\dots,\varepsilon_i(g),\varepsilon_i(g),\dots,\varepsilon_n(g)).$$

Для примера докажем равенство $\varepsilon_i(s_i g)=\varepsilon_i(g)$. Согласно (I.I.3) и (I.I.5) имеем

$$(s_i s_i g)^*(i)=(s_{i+1}s_i g)^*(i)=\begin{cases}(s_i g)^*(i), & (s_i g)^*(i+1)>(s_i g)^*(i),\\ (s_i g)^*(i)+1, & (s_i g)^*(i+1)<(s_i g)^*(i).\end{cases}$$

Если $\varepsilon_i(g)=+1$, то $(s_i g)^*(i+1)=g^*(i)+1>g^*(i)=(s_i g)^*(i)$. Следовательно, $(s_i s_i g)^*(i)=(s_i g)^*(i)$, что означает $\varepsilon_i(s_i g)=+1$. Если $\varepsilon_i(g)=-1$, то $(s_i g)^*(i+1)=g^*(i)<g^*(i)+1=(s_i g)^*(i)$. Значит , $(s_i s_i g)^*(i)=(s_i g)^*(i)+1$, т.е. $\varepsilon_i(s_i g)=-1$. Коммутирование γ с операторами граней проверяется аналогично.

Шаг 5: проверка условий (i) и (ii) определения I.I.3. По определению отображения $\gamma: G. \longrightarrow W.$ имеем

$$d_i(g_1\cdot g_2)\cdot d_{(g_1 g_2)^*(i)} = d_i\cdot(g_1\cdot g_2)=(d_i\cdot g_1)\cdot g_2 =$$
$$=(d_i g_1)\cdot d_{g_1^*(i)}\cdot g_2 = (d_i g_1)\cdot(d_{g_1^*(i)}g_2)\cdot d_{g_2^* g_1^*(i)}.$$

Тогда из условия единственности следует, что

$d_i(g_1 g_2)=(d_i g_1)\cdot(d_{g_1^*(i)}g_2)$ и аналогично $s_j(g_1 g_2)=(s_j g_1)\cdot(s_{g_1^*(j)}g_2)$.

Это как раз пункт (ii) определения I.I.3. Проверим пункт (i), т.е. покажем, что $\gamma_n: G_n \longrightarrow W_n$ - гомоморфизм. По самому построению γ имеем $e_n(g_1 g_2)=e_n(g_1)\cdot e_n(g_2)$. Осталось проверить

I.I.IO

$$\varepsilon_i(g_1\cdot g_2) = \varepsilon_i(g_1)\,\varepsilon_{g_1^*(i)}(g_2). \tag{I.I.10}$$

Заметим, что (I.I.6) можно записать в виде

$$(s_i g)^*\left(i+\frac{1-\varepsilon}{2}\right) = g^*(i) + \frac{1-\varepsilon\cdot\varepsilon_i(g)}{2}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Следовательно, с одной стороны

$$(s_i(g_1\cdot g_2))^*(i) = (g_1 g_2)^*(i) + (1-\varepsilon_i(g_1 g_2))/2,$$

а с другой

$$(s_i(g_1 g_2))^*(i) = ((s_i g_1)(s_{g_1^*(i)} g_2))^*(i) = (s_{g_1^*(i)} g_2)^*(s_i g_1)^*(i) =$$

$$= (s_{g_1^*(i)} g_2)^*\left(g_1^*(i) + \frac{1-\varepsilon_i(g_1)}{2}\right) = g_2^* g_1^*(i) + (1-\varepsilon_i(g_1)\,\varepsilon_{g_1^*(i)}(g_2))/2,$$

что доказывает равенство (I.I.10).

Итак, по категории Σ типа Δ мы построили CS-группу $G.$. Теперь наоборот, исходя из CS-группы $G.$ построим категорию ΔG типа Δ с объектами $[n]$, $n=0,1,\ldots$, и такими морфизмами, что в дуальной категории ΔG^{op} они имеют вид $f = g\circ\varphi$, где $g\in G.$, а φ - морфизм из подкатегории Δ^{op}. Композиция морфизмор полностью определяется правилами коммутации

$$d_i\cdot g = (d_i g)\cdot d_{g^*(i)}, \quad s_j\cdot g = (s_j g)\cdot s_{g^*(j)}.$$

В силу функториальности всех конструкций соответствие $G.\mapsto \Delta G$ определяет эквивалентность категорий CS-групп и $Cat\Delta$. $\square$

Таким образом, изучение категорий типа Δ мы свели к изучению CS-групп. Прямо из определения CS-группы ясно, что CS-группа $W. = (W., id)$ играет исключительную роль. Будем говорить, что CS-группа $G.$ порождена некоторым семейством своих элементов, если симплициальное подмножество в $G.$, порожденное этими элементами, доставляет систему образующих для групп G_n в каждой размерности n.

I.I.5. Предложение. CS-группа $W.$ содержит ровно семь CS-подгрупп, приведенных в следующем списке

Обозначение	Образующие	Группа n-мерных симплексов
1.	$\varnothing$	1
C.	$((+1,+1),\tau)$	$\mathbb{Z}/(n+1)$
S.	$((+1,+1,+1),\tau)$	Σ_{n+1}
R.	$((-1),id)$	$\mathbb{Z}/2$
D.	$((-1,-1),id)$	$\mathbb{Z}/(n+1)\ltimes\mathbb{Z}/2$
T.	$((-1),id),((+1,+1,+1),\tau)$	$\mathbb{Z}/2\times\Sigma_{n+1}$
W.	$((+1,-1),id)$	$(\mathbb{Z}/2)^{n+1}\ltimes\Sigma_{n+1}$

Здесь τ - транспозиция: $\tau^*(0)=1,\ \tau^*(1)=0,\ \tau^*(i)=i,\ i>1$.
Диаграмма включений имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & W. & \\
 & & T. \arrow[u] & \\
 & D. \arrow[ur] & & S. \arrow[ul] \\
R. \arrow[ur] & & C. \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & 1. \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Представим элементы группы W_n мономиальными матрицами: элементу $\omega=(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n;\sigma)\in W_n$ сопоставим матрицу $A(\omega)$ размеров $(n+1)\times(n+1)$ с единственными ненулевыми элементами $A_{i,\sigma(i)}(\omega)=\varepsilon_i$. Ясно, что $A(\omega\cdot\omega')=A(\omega)\cdot A(\omega')$. Матрица $A(d_i\omega)$ получается из матрицы $A(\omega)$ вычеркиванием i-той строки и $\sigma(i)$-того столбца, а $A(s_j\omega)$ получается при удвоении j-той строки и $\sigma(j)$-того столбца, причем на месте их пересечения подставляется 2×2 матрица $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, когда $\varepsilon_j=1$, и $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$, когда $\varepsilon_j=-1$. Далее будем отождествлять элементы ω и матрицы

. Элемент порождает

$A(\omega)$. Элемент $t_1 = ((1,1),\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ порождает группу $\mathbb{Z}/2$ в размерности 1, а его всевозможные вырождения в размерности n имеют вид

$$(t_n)^k = \left(\begin{array}{c|c} & \overbrace{\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{smallmatrix}}^{k} \\ \hline \underbrace{\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{smallmatrix}}_{n-k+1} & \end{array}\right)$$

и образуют циклическую группу $\mathbb{Z}/(n+1)$. Получается циклическая CS-группа $C_.$. Вырождения элемента $r_0 = (\in 1); id)$ имеют вид

$$r_n = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

и порождают группы $\mathbb{Z}/2$ в каждой размерности, т.е. рефлексивную CS-группу $R_.$. Рассмотрим теперь элемент $u = ((-1,-1), id)$. Ясно, что $d_0 u = r_0$, $u \cdot r_1 = t_1$. Применяя далее операторы вырождения получим r_n и t_n в размерности n. Эти элементы порождают группу диэдра $\mathbb{Z}/(n+1) \rtimes \mathbb{Z}/2$ в силу соотношений $t_n r_n = r_n t_n^{-1}$, $t_n^{n+1} = r_n^2 = id$. Таким образом, мы получили диэдральную CS-группу $D_.$. Отметим действие симплициальных операторов:

$$\begin{cases} d_i r_n = r_{n-1} \\ s_j r_n = r_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_i t_n = t_{n-1}, \; i>0, \\ s_j t_n = t_{n+1}, \; j>0. \end{cases} \tag{I.I.II}$$

Подгруппы $\Sigma_{n+1} \subset W_n$ представленные матрицами с неотрицательными элементами, образуют симметрическую CS-группу $S_.$ с образующим элементом $v = ((1,1,1),\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Действительно, $d_2 v = t_1$, а циклические перестановки t_n и транспозиции соседних элементов $(s_2)^{n-1} v$ порождают всю группу Σ_{n+1}. Теперь ясно, что элементы $r_0 = (\in 1); id)$ и $v = ((1,1,1),\tau)$ порождают CS-подгруппу $T_. \subset W_.$, включающею матрицы из элементов одного знака. Далее доказательство, что элемент $((+1,-1),id)$ порождает всю CS-группу $W.$ и что уже все CS-подгруппы перечислены, не представляет трудностей. $\square$

Ниже все семь CS-групп $1., C., S., R., D., T., W.$ будем называть простыми.

I.I.6. Предложение. Любая CS-группа $G.$ представляется как расширение простой CS-группы $P.$ посредством некоторой симплициальной группы $H.$

$$H. \rightarrowtail G. \xrightarrow{\pi} \twoheadrightarrow P.$$

При этом проекция π является расслоением Кана.

Доказательство. Пусть $G. = (G.., \gamma)$, $\gamma : G. \longrightarrow W.$. Определим CS-группу $P. = \gamma(G.) \subset W.$. Согласно предложению I.I.5 $P.$ - простая CS-группа. Отображение π однозначно определяется отображением γ. Положим $H. = \ker \pi = \ker \gamma \subset G.$. Так как $H.$ никак не переставляет индексов симплициальных операторов, это симплициальная группа. Докажем, что $\pi : G. \longrightarrow P.$ - расслоение Кана (см. [34]). Пусть задан такой набор $g_0, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, g_n$ элементов из G_{n-1}, что $d_i g_j = d_{j-1} g_i$, при $i<j, i \neq k \neq j$, и имеется такой $x \in P_n$, что $d_i x = \pi(g_i)$ для всех $i \neq k$. Надо найти такой $g \in G_n$, что $\pi(g) = x$, $d_i g = g_i$, $i \neq k$. В силу сюръективности π найдется такой $y \in G_n$, что $\pi(y) = x$. Положим $h_i = g_i \cdot (d_i y)^{-1}$ для всех $i \neq k$. Тогда $\pi(h_i) = \pi(g_i) \cdot (d_i \pi(y))^{-1} = \pi(g_i) \cdot (d_i x)^{-1} = 1$. Это означает, что $h_i \in H_{n-1}$. Оказывается, выполняются равенства $d_i h_j = d_{j-1} h_i$ при $i<j$, $i \neq k$. Действительно,

$$d_i h_j = d_i [g_j \cdot (d_j y)^{-1}] = (d_i g_j) \cdot d_{g_j^*(i)} [(d_j y)^{-1}] =$$

$$= (d_i g_j) \cdot d_{(d_j x)^*(i)} \cdot d_{x^*(j)} (y^{-1}) = (d_{j-1} g_i) \cdot d_{(d_i x)^*(j-1)} d_{x^*(i)} (y^{-1}) =$$

$= (d_{j-1} g_i) \cdot d_{g_i^*(j-1)} [(d_i y)^{-1}] = d_{j-1} [g_i \cdot (d_i y)^{-1}] = d_{j-1} h_i$.

Так как симплициальные группы удовлетворяют условию Кана (см. [34]), найдется элемент $h \in H_n$, удовлетворяющий условиям $h_i = d_i h$, $i \neq k$. Положим $g = h \cdot y$. Тогда g является искомым элементом в силу равенств: $d_i g = d_i h \cdot d_i y = h_i \cdot d_i y = g_i$ и $\pi(g) = \pi(h) \cdot \pi(y) = x$.

Используя матричное представление для CS-группы $W.$ из доказательства предложения I.I.5 построим новые примеры CS-групп.

I.I.7. Примеры.

(i) Пусть $\varepsilon : \Pi \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ - гомоморфизм некоторой группы Π в группу $\mathbb{Z}/2 = \{+1, -1\}$. Определим CS-группу $W.(\Pi, \varepsilon)$ полагая, что $W_n(\Pi, \varepsilon)$ - группа мономиальных матриц $(n+1)\times(n+1)$ с ненулевыми элементами из группы Π, а отображение γ: $W.(\Pi, \varepsilon) \longrightarrow W.$ индуцируется гомоморфизмом ε. Симплициальные операторы определяются аналогично случаю CS-группы $W.$. Отметим изоморфизмы $W.(\mathbb{Z}/2, id) \cong W.$, $W.(\{1\}, 1) \cong S.$.

(ii) Кратная циклическая CS-группа $C.^{(\ell)}$, $\ell = 2, 3, \dots, \infty$, определяется как CS-подгруппа в $W.(\mathbb{Z}/\ell, 1)$, порожденная элементом $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, где a - образующая группы $\mathbb{Z}/\ell$ ($\mathbb{Z}/\infty = \mathbb{Z}$). Ясно, что группа n-мерных симплексов $C_n^{(\ell)} = \mathbb{Z}/\ell(n+1)$, причем

$$(\mathbb{Z}/\ell). \rightarrowtail C.^{(\ell)} \twoheadrightarrow C.$$

(iii) CS-группа $Q.^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2, \dots$, определяется как CS-подгруппа в $W.(\mathbb{Z}/4\ell$, приведение по $mod 2)$, порожденная элементами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^{2\ell} & 0 \end{pmatrix}$ и (a), где a - образующая в $\mathbb{Z}/4\ell$. Имеет место расширение

$$(\mathbb{Z}/2\ell). \rightarrowtail Q.^{(\ell)} \twoheadrightarrow D.$$

CS-группа $Q. = Q.^{(1)}$ состоит из обобщенно-кватернионных групп

Q_n. Категория ΔQ рассматривалась Ж.-Л.Лодэ.

(iv) CS-группа кос Артина $B.$ состоит из групп кос B_n, сплетенных из $n+1$ нитей. При действии оператора d_i в косе i-тая нить исчезает, а оператор s_j удваивает j-тую нить. Имеет место расширение $A. \rightarrowtail B. \twoheadrightarrow S.$, где $A.$ - симплициальная группа крашенных кос.

Исследуем теперь топологические и гомотопические свойства геометрических реализаций рассмотренных CS-групп.

I.I.8. Предложение. Имеют место следующие гомеоморфизмы и гомотопические эквивалентности: $|C.| \cong |C.^{(k)}| \cong S^1$, $k < \infty$, $|D.| \cong |Q.^{(k)}| \cong S^1 \amalg S^1$, $|C.^{(\infty)}| \cong \mathbb{R}$, $|T.| \simeq |R.| = * \amalg *$, $|S.| \simeq |W.| \simeq *$.

Доказательство. Рассмотрим только CS-группы $S., C., C.^{(k)}$. Остальные случаи разбираются аналогично. Для CS-группы $S.$ сначала без труда приверяется, что $\pi_1 |S.| = 0$, а потом можно построить стягивающую гомотопию в целочисленных цепях по формуле

$$s: \mathbb{Z} S_n \longrightarrow \mathbb{Z} S_{n+1}, \quad s(\sigma)^*(i) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \sigma^*(i-1)+1, & i > 0, \end{cases}$$

где $\sigma \in S_n = \Sigma_{n+1}$. Это доказывает стягиваемость $|S.|$. CS-группа $C.$ обладает только двумя невырожденными симплексами t_0 и t_1, т.е. $|C.|$ - простейшее клеточное разбиение окружности S^1. Пространство $|C.^{(\ell)}|$ ℓ-кратно накрывает $|C.|$ и представляет из себя измелченную окружность в случае $\ell < \infty$ и прямую $\mathbb{R}$ разбитую на счетное число отрезков в случае $\ell = \infty$. $\square$

Напомним, что симплициальное множество называется конечным, если содержит только конечное число невырожденных симплексов.

I.I.9. Предложение. Связными конечными CS-группами являются $1., C., C.^{(2)}, \ldots, C.^{(\ell)}, \ldots$ и только они.

Доказательство. Пусть $G.$ - связная конечная CS-группа. Согласно предложению I.I.6 представим ее в виде расширения $H. \rightarrowtail G. \xrightarrow{\pi} P.$ простой CS-группы $P.$ посредством симплициальной группы $H.$. Последняя может быть только дискретной. Действительно, она конечна и удовлетворяет условию Кана. Следовательно, связная компонента - стандартный симплициальный симплекс $\Delta^n_.$, который обладает структурой симплициальной группы только при $n = 0$. С другой стороны, $P.$ конечна и связна, - значит, равняется либо $1.$, либо $C.$, согласно предложению I.I.8. В первом случае $G. = H.$ и $G.$ тривиальна, т.к. связна. Во втором случае рассмотрим геометрическую реализацию нашего расширения:

$$H = |H.| \rightarrowtail |G.| \xrightarrow{|\pi|} |C.| \cong S^1.$$

Из того, что π расслоение Кана, следует, что $|\pi|$ - расслоение Серра (см. [4]). Причем, это накрытие, т.к. слой H дискретен. В § I.2 показано, что геометрическая реализация определяет функтор из категории CS-групп в категорию топологических групп. Таким образом, у нас имеется расширение группы $|C.| \cong SO(2)$ (см. предложение I.2.6) одновременно являющиеся связным накрытием. Ясно, что $|G.| \cong SO(2)$ и $H \cong \mathbb{Z}/\ell$ для некоторого $\ell = 2, 3, \ldots$ Следовательно, $G.$ как симплициальное множество совпадает с $C^{(\ell)}_{..}$ Докажем по индукции, что групповые умножения тоже совпадают. При $n = 0$, $G_0 \cong \mathbb{Z}/\ell \cong C^{(\ell)}_0$. Пусть $G_m \cong C^{(\ell)}_m$. Обозначим умножение в G_{m+1} через $*$, а в $C^{(\ell)}_{m+1}$ - стандартно. Для любых элементов $a, b \in G_{m+1}$ имеем $\pi(a*b) = \pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$ в группе C_{m+1}. Значит, $h = (a*b)(ab)^{-1} \in H_{m+1}$, а в силу индуктивного предположения $d_0(a*b) = (d_0 a)(d_{a^*(0)} b) = d_0(ab)$. С другой стороны $d_0(a*b) = d_0(hab) = d_0 h \cdot d_0(ab)$. Следовательно, $d_0 h = 1$ и $h = 1$, т.е. $a*b = ab$. $\square$

§ I.2. Связь с эквивариантной топологией

Сначала напомним некоторые известные понятия, чтобы фиксировать обозначения. Будем работать с категорией множеств $Sets$ и категорией хаусдорфовых компактно порожденных пространств $Spaces$. Функтор из малой категории L в некоторую категорию $\mathcal{C}$ будем называть L-объектом в категории $\mathcal{C}$. Категорию всевозможных таких функторов будем обозначать через $L\mathcal{C}$. Например, Δ^{op}-множества т.е. симплициальные множества образуют категорию $\Delta^{op}Sets$; ΔG^{op}-пространства образуют категорию $\Delta G^{op}Spaces$ и т.д.

Пусть Δ^n - n-мерный геометрический симплекс: $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\}$. Через δ^i и σ^j будем обозначать стандартные отображения кограницы и вырождения. Геометрической реализацией Δ^{op}-множества (пространства) $X_\cdot$ называется факторпространство (с компактно порожденной топологией)

$$|X_\cdot| = (\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n)/\sim$$

по отношению эквивалентности $(d_i x, u) \sim (x, \delta^i u)$, $(s_j x, u) \sim (x, \sigma^j u)$. Класс элемента (x, u) обозначим через $[x, u]$.

Сингулярное симплициальное множество $S(Y)$ ассоциированное с топологическим пространством Y определяется как Δ^{op}-множество, представленное в виде композиции контравариантного и ковариантного функторов

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \longrightarrow & Spaces & \longrightarrow & Sets \\ [n] & \longmapsto & \Delta^n & \longmapsto & Y^{\Delta^n} = Map(\Delta^n, Y) \end{array} \tag{I.2.I}$$

Известно, что функтор геометрической реализации является левым сопряженным к сингулярному функтору S. Единицу и коединицу сопряжения обозначим через

$$\alpha : 1 \longrightarrow s.|?| \,, \quad \beta : |s.(?)| \longrightarrow 1. \qquad (I.2.2)$$

I.2.I. Определение. Пусть $G.$ - CS-группа. Определим функтор $G : \Delta^{op}Sets \to \Delta^{op}Sets$, $X. \longmapsto GX.$, полагая $GX_n = G_n \times X_n$, $d_i(g,x) = (d_i g, d_{g^*(i)}x)$, $s_j(g,x) = (s_j g, s_{g^*(j)}x)$. Определим еще естественные преобразования $\mu : GG \longrightarrow G$, $\varepsilon : 1 \longrightarrow G$ по формулам $\mu(g_1,(g_2,x)) = (g_1 g_2, x)$, $\varepsilon(x) = (1,x)$. Тройка (G,μ,ε) образует монаду (см. [I8]) в категории $\Delta^{op}Sets$, т.е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} GGG \arrow[r, "G\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & GG \arrow[d, "\mu"] \\ GG \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, equal] & GG \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "G\varepsilon"'] \arrow[dl, equal] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad (I.2.3)$$

Заметим, что $GX.$ фактически является ΔG^{op}-множеством. Это свободное ΔG^{op}-множество, порожденное Δ^{op}-множеством $X.$. Вообще продолжение структуры Δ^{op}-множества $Y.$ до структуры ΔG^{op}-множества эквивалентно заданию алгебры $(Y., \xi)$ над монадой (G,μ,ε) (см. [I8]), т.е. заданию такого симплициального отображения, $\xi : GY. \to Y.$, что следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd} GGY. \arrow[r, "G\xi"] \arrow[d, "\mu"'] & GY. \arrow[d, "\xi"] \\ GY. \arrow[r, "\xi"] & Y. \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y. \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, equal] & GY. \arrow[d, "\xi"] \\ & Y. \end{tikzcd} \qquad (I.2.4)$$

Действительно, достаточно определить ξ по формуле $\xi(g,x) = gx$.

I.2.2. Замечание. Для любой CS-группы $G.$ и топологического пространства Y Δ^{op}-множество $s.(Y)$ обладает канонической структурой ΔG^{op}-множества следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ - категория конечных множеств $\{0,1,\ldots,n\}$, $n=0,1,2,\ldots$, и произвольных отображений между ними. Заметим, что следующая диаграмма, составленная из очевидных функторов, коммутативна

$$\begin{tikzcd} & \Delta W \arrow[dr] & \\ \Delta \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "i"] & & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Причем, первая стрелка из (I.2.I) пропускается через $\Delta \xrightarrow{i} \mathcal{F}$. Определим ΔG^{op}-множество как композицию

$$\Delta G \xrightarrow{\Delta\gamma} \Delta W \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow Spaces \xrightarrow{(Y)^{\Delta^?}} Sets$$

Соответствующая алгебра $(s.(Y),\omega)$ над монадой (G,μ,ε) определена по формулам $\omega(g,\sigma)(u)=\sigma(g^*(u))$, где $\sigma:\Delta^n\longrightarrow Y$, $g\in G_n$, $u=(t_0,\ldots,t_n)\in\Delta^n$, а $g^*(u)=(t_{(g^{-1})^*(0)},\ldots,t_{(g^{-1})^*(n)})$

I.2.3. Лемма. Для CS-группы $G.$ и Δ^{op}-множества $X.$ формула $\Phi(X.):[(g,x),u]\longmapsto([g,u],[x,g^*(u)])$ определяет естественный гомеоморфизм: $\Phi(X.):|GX.|\longrightarrow|G.|\times|X.|$.

Доказательство. Чтобы убедиться в корректности, дадим эквивалентное определение. Положим $\Phi(X.)=(|p|,\varphi)$, где $p:GX.\to$ $\to G$ задается формулой $p(g,x)=g$, а $\varphi:|GX.|\longrightarrow|X.|$ - это отображение, сопряженное композиции

$$GX.\xrightarrow{G\alpha} Gs.|X.|\xrightarrow{\omega} s.|X.|.$$

Здесь α - это естественное преобразование (I.2.2), а ω определено в замечании I.2.2.

Построим теперь обратное отображение $\Phi':|G.|\times|X.|\longrightarrow$ $\longrightarrow|GX.|$. Любая точка из $|G.|\times|X.|$ единственным образом представляется в виде $([h,v],[y,w])$, где $h\in G_a$, $y\in X_\ell$ - невырожденные симплексы, а v и w - внутренние точки симплексов Δ^a и Δ^ℓ соответственно (см. [34]). Пусть $h^*(v)=\{t_0,\ldots,t_a\}$ и $w=\{t_0',\ldots,t_\ell'\}$. Обозначим $h^*(v)^{(m)}=\sum_{i=0}^m t_i$, $w^{(n)}=\sum_{j=0}^n t_j'$ и расположим различные элементы множества

$\{h^*(v)^{(m)}\}_{0\le m\le a} \cup \{w^{(n)}\}_{0\le n\le b}$ в порядке возрастания $0<q_0<\ldots<q_c=1$. Далее определим внутреннюю точку $u=(t_0'',\ldots,t_c'')$ симплекса Δ^c, полагая $t_i''=q_i-q_{i-1}$, $0\le i\le c$, $q_{-1}=0$. Пусть теперь $i_1<\ldots<i_{c-a}$ - такие индексы i, что $q_i\notin\{h^*v^{(m)}\}$, а $j_1<\ldots<j_{c-b}$ - такие j, что $q_j\notin$ $\notin\{w^{(n)}\}$. Заметим, что $\sigma^{i_1}\ldots\sigma^{i_{c-a}}u=h^*(v)$ и $w=$ $=\sigma^{j_1}\ldots\sigma^{j_{c-b}}u$. Наконец, определим отображение

$\Phi':([h,v],[y,w])\longmapsto[(g,x),(g^{-1})^*(u)]$,

где g и x имеют вид

$$g=(s_{i_{c-a}}\cdots s_{i_1}h^{-1})^{-1},\quad x=s_{j_{c-b}}\cdots s_{j_1}y.$$

Проверим, что $\Phi\circ\Phi'=id$: $\Phi(\Phi'([h,v],[y,w]))=$ $=\Phi([(g,x),(g^{-1})^*(u)])=([g,(g^{-1})^*u],[x,u])=([h,v],[y,w])$. Действительно, $[x,u]=[s_{j_{c-b}}\cdots s_{j_1}y,u]=$ $=[y,\sigma^{j_1}\ldots\sigma^{j_{c-b}}u]=[y,w]$ и $[g,(g^{-1})^*u]=$ $=[(s_{i_{c-a}}\cdots s_{i_1}h^{-1})^{-1},(g^{-1})^*u]=[s_{k_{c-b}}\cdots s_{k_1}h,(s_{i_{c-a}}\cdots s_{i_1}h^{-1})^*u]=$ $=[h,\sigma^{k_1}\ldots\sigma^{k_{c-b}}(s_{i_{c-a}}\cdots s_{i_1}h^{-1})^*u]=[h,(h^{-1})^*\sigma^{i_1}\ldots\sigma^{i_{c-a}}u]=$ $=[h,(h^{-1})^*h^*v]=[h,v]$, где $k_1=(h^{-1})^*(i_1)$, $k_2=$ $=(s_{i_1}h^{-1})^*(i_2),\ldots,k_{c-a}=(s_{i_{c-a-1}}\cdots s_{i_1}h^{-1})^*(i_{c-a})$.

Аналогично проверяется тождество $\Phi'\circ\Phi=id$.

I.2.4. Теорема. Пусть $G.$ - CS-группа.

A. Отображение $\bar\mu=|\mu|\circ\Phi(G.)^{-1}:|G.|\times|G.|\longrightarrow|G.|$ превращает $|G.|$ в топологическую группу.

B. Алгебра $(X.,\xi)$ над монадой (G,μ,ε) определяет композицию $\bar\xi=|\xi|\cdot\Phi(X.)^{-1}:|G.|\times|X.|\longrightarrow|X.|$, которая задает непрерывное действие группы $|G.|$ на пространстве $|X.|$.

C. Если группа $|G.|$ непрерывно действует на пространстве Y посредством отображения $\vartheta:|G.|\times Y\longrightarrow Y$, то некоторый естественный мономорфизм Δ^{op}-множеств $\Psi(Y): Gs.(Y) \to s.|G.|\times s.(Y)$ определяет алгебру $(s.(Y), \bar{\nu})$ над ~~операдой~~ монадой (G, μ, ε) посредством отображение $\bar{\nu} = s.\nu \circ \Psi(Y): Gs.(Y) \longrightarrow s.(Y)$.

Доказательство A. Нетрудно усмотреть, что вложение отмеченной точки $* \to |G.|$ является двухсторонней единицей для $\bar{\mu}$. Отображение $\chi: |G.| \to |G.|$, определенное по формуле $[g,u] \mapsto [g^{-1}, g^{*}(u)]$, обращает групповое умножение. Это следует из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
{|G.|} \arrow[r, "1\times\chi"] \arrow[dr, "*"'] & {|G.|\times|G.|} \arrow[d, "\bar{\mu}"] & {|GG.|} \arrow[l, "\Phi(G.)"'] \arrow[dl, "|\mu|"] \\
& {|G.|} &
\end{tikzcd}$$

$$(1\times\chi)[g,u] = ([g,u], [g^{-1}, g^{*}(u)]) = \Phi[(g, g^{-1}), u],$$

$$|\mu|[(g, g^{-1}), u] = [1, u] = *.$$

Ассоциативность умножения $\bar{\mu}$ следует из пункта B.

Доказательство B. Ассоциативность действия $\bar{\xi}$ - это в точности коммутативность правого квадрата в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
{|GGX.|} \arrow[rrr, "\Phi^2"] \arrow[dr, "|\mu|"] \arrow[ddd, "|G\xi|"'] & & & {|G.|\times|G.|\times|X.|} \arrow[dl, "\bar{\mu}\times 1"'] \arrow[ddd, "1\times\bar{\xi}"] \\
& {|GX.|} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "|\xi|"] & {|G.|\times|X.|} \arrow[d, "\bar{\xi}"] & \\
& {|X.|} \arrow[r, equal] & {|X.|} & \\
{|GX.|} \arrow[ur, "|\xi|"] \arrow[rrr, "\Phi"] & & & {|G.|\times|X.|} \arrow[ul, "\bar{\xi}"']
\end{tikzcd}$$

Здесь $\Phi^2 = (1\times\Phi(X.)) \circ \Phi(GX.)$ - гомеоморфизм. Следовательно, достаточно установить коммутативность всех остальных квадратов. Для центрального, нижнего и левого квадратов это вытекает из определения $\bar{\xi}$ и свойств алгебры (I.2.4). Из вычислений $(1\times\bar{\xi})\circ\Phi^2 = (1\times\bar{\xi})\circ(1\times\Phi)\circ\Phi = (1\times\bar{\xi}\circ\Phi)\circ\Phi = (1\times|\xi|)\circ\Phi = \Phi\circ|G\xi|$ следует коммутативность внешнего квадрата. Осталось проверить верхний квадрат. Сравним значения на элементах

$$(\Phi\circ|\mu|)[(g,h,x),u] = ([gh,u],[x,(gh)^*u]),$$

$$((\bar{\xi}\times 1)\circ\Phi^2)[(g,h,x),u] = (|\mu|\circ\Phi^{-1}\times 1)([g,u],[h,g^*u];$$

$$[x,h^*g^*(u)]) = (|\mu|\times 1)([(g,h),u],[x,h^*g^*(u)]) =$$

$$= ([gh,u],[x,h^*g^*(u)])$$, т.е. $\Phi\circ|\mu| = (\bar{\xi}\times 1)\circ\Phi^2$, что и требовалось.

Справедливость равенства $\bar{\xi}(1,z) = z$ обеспечивается наличием единицы в алгебре $(X_\cdot,\xi)$ (см. (I.2.4)).

Доказательство C. Отображение Ψ определим как композицию

$$G s.(Y) \xrightarrow{(p,\omega)} G.\times s.(Y) \xrightarrow{\alpha\times 1} s.|G.|\times s.(Y),$$

где $p(g,y)=g$, а α и ω определены в (I.2.2) и замечании I.2.2. Заметим, что второе отображение инъективно, а первое обладает обратным $(g,x)\mapsto(g,g^{-1}x)$. Следовательно, Ψ является мономорфизмом. Далее доказательство заключается в прямой проверке коммутативности подходящих диаграмм и полностью аналогично доказательству пункта B.

Рассмотрим теперь категорию $\Delta G^{op}Sets$ и категорию $|G.|$-$Spaces$ пространств с действием топологической группы $|G.|$ и $|G.|$-эквивариантных отображений. Формально обращая слабые эквивалентности (см. [4]), т.е. отображения, индуцирующие изоморфизмы гомотопических групп, получаем гомотопические категории

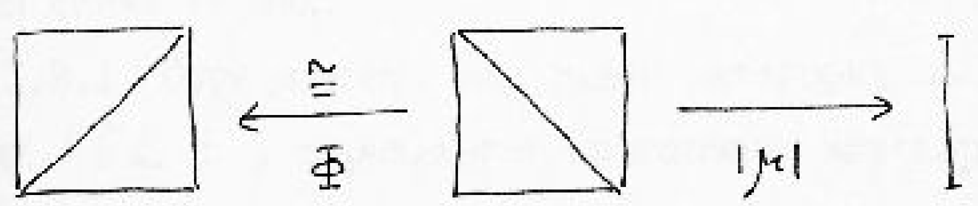
$Ho\,\Delta G^{op}Sets$ и $Ho\,|G.|\text{-}Spaces$.

I.2.5. Следствие. Соответствия $(X., \xi) \longmapsto (|X.|, \bar{\xi})$ и $(Y, \vartheta) \longmapsto (s.(Y), \bar{\vartheta})$ из теоремы I.2.4 определяют сопряженные функторы $\Delta G^{op}Sets \rightleftarrows |G.|\text{-}Spaces$, задающие эквивалентность категорий $Ho\,\Delta G^{op}Sets$ и $Ho\,|G.|\text{-}Spaces$.

Доказательство непосредственно следует из сопряженности функтора геометрической реализации и сингулярного функтора, а также простейшего критерия эквивалентности гомотопических категорий из [35]. $\square$

I.2.6. Предложение. Имеют место изоморфизмы топологических групп $|C.| \cong |C.^{(\ell)}| \cong SO(2)$, $\ell < \infty$, $|C.^{(\infty)}| \cong \mathbb{R}$, $|R.| \cong \mathbb{Z}/2$, $|D.| \cong O(2)$, $|Q.| \cong$ (нормализатор максимального тора в $SU(2)$).

Доказательство. Рассмотрим умножение в топологической группе $|C.|$ на клеточном уровне



$|C.| \times |C.|$ $\qquad$ $|CC.|$ $\qquad$ $|C.|$

Здесь Φ - гомеоморфизм различных клеточных разбиений квадрата (точнее тора), а отображение $|\mu|$ линейно на каждом треугольнике, причем диагональ переводится в отмеченную точку $*$:

$|\mu|[(t_1, t_1), u] = [t_1^2, u] = [1, u] = *$. Таким образом, $\bar{\mu} = |\mu| \circ \Phi^{-1}$ определяет сложение по $mod\,\mathbb{Z}$ на единственном невырожденном симплексе из $|C.|$, т.е. $|C.| \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong SO(2)$. Случаи $C.^{(\ell)}$, $\ell = 2, 3, \dots, \infty$, разбираются аналогично, а изоморфизм $|R.| \cong \mathbb{Z}/2$ очевиден.

Рассмотрим теперь группу $|D.|$, содержащую $|C.|$ и $|R.|$ в качестве подгрупп. Пусть $\tau \in \mathbb{Z}/2$ - образующая, $v \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong |C.|$, $u = (v, 1-v) \in \Delta^1$. Тогда $v \cdot \tau = \bar{\mu}([t_1^{-1} u], [\tau_1, t_1^* u]) =$

$$= |\mu|[(t_1, \tau_1), u] = [t_1 \tau_1, u] = [\tau_1 t_1, u] = |\mu|[(\tau_1, t_1), u] =$$

$$= \bar{\mu}([\tau_1, u], [t_1, \tau_1^* u]) = \tau \cdot (1-v),$$

т.к. $\tau_1^*(v, 1-v) = (1-v, v)$. Таким образом, $|D.| \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2 \cong$ $\cong O(2)$. Последнее утверждение доказывается используя расширение из примера I.I.7 (iii). □

§ I.3. Гомологии с внутренними симметриями

Фиксируем для всего параграфа CS-группу $G.$ и коммутативное кольцо с единицей k. Рассмотрим категорию k-модулей и категорию цепных комплексов k-модулей. Соответствующие ΔG^{op}-объекты сокращенно будем называть ΔG^{op}-модулями и ΔG^{op}-цепными комплексами. Оказывается, на это можно посмотреть и с более традиционной точки зрения.

I.3.I. Определение. Для малой категории L определим k-алгебру $k[L]$, порожденную морфизмами категории L с наложенными соотношениями

$$f \cdot g = \begin{cases} f \circ g, & \text{если композиция определена,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что задание ΔG^{op}-модуля (цепного комплекса) $M. = \{M_n\}$ эквивалентно заданию левого модуля (цепного комплекса модулей) $\bigoplus_n M_n$ над алгеброй $k[\Delta G]^{op}$. Поэтому далее мы будем отождествлять эти понятия.

С каждым ΔG^{op}-пространством $X.$ естественно связывается ΔG^{op}-цепной комплекс $N_*(X., k)$, где $N_*(, k)$ - это функтор нормализованных сингулярных k-цепей. Заметим, что когда $X.$ является $\Delta G^{op}_{\cdot}$-множеством, фактически получаем $\Delta G^{op}_{\cdot}$-модуль $N_*(X_\cdot, k)$ свободно им порожденный. Если $X_\cdot = *$, то получаем тривиальный $\Delta G^{op}_{\cdot}$-модуль $k_\cdot = N_*(*, k)$.

I.3.2. Определение. Гомологии CS-группы $G_\cdot$ с коэффициентами в $\Delta G^{op}_{\cdot}$-цепном комплексе $M_{\cdot *}$ -это градуированный модуль

$$H_*(G_\cdot, M_{\cdot *}) = \mathrm{Tor}_*^{k[\Delta G]^{op}}(k_\cdot, M_{\cdot *}).$$

Для $\Delta G^{op}_{\cdot}$-пространства $X_\cdot$ определим $G_\cdot$-гомологии (с коэффициентами в k), полагая

$$HG_*(X_\cdot, k) = H_*(G_\cdot, N_*(X_\cdot, k)).$$

I.3.3. Замечание. Пример $\Delta D^{op}_{\cdot}$-модуля $CH_\cdot(A)$, построенного по алгебре A с инволюцией, рассматривался на стр.6 введения. Данное там определение диэдральных гомологий $HD_*(A)$ в случае поля k нулевой характеристики эквивалентно следующему определению: $HD_*(A) = H_*(D_\cdot, CH_\cdot(A))$. Доказательство можно найти в [12]. Частный случай $\Delta D^{op}_{\cdot}$-модуля $CH_\cdot(A)$, когда A является групповой алгеброй $k[\Pi]$ дискретной группы Π, можно получить из $\Delta D^{op}_{\cdot}$-множества $\Gamma_\cdot(\Pi)$ (см. пример 2.1.1): $CH_\cdot(k[\Pi]) \cong$ $\cong N_*(\Gamma_\cdot(\Pi), k)$. Следовательно, имеется изоморфизм

$$HD_*(k[\Pi]) \cong HD_*(\Gamma_\cdot(\Pi), k).$$

I.3.4. Определение. Пусть L - малая категория, и пусть имеется функтор $L \xrightarrow{X} Spaces$. Определим гомотопический копредел $\mathrm{hocolim}_L X$ как классифицирующее пространство $B(\mathcal{C}X)$ топологической категории $\mathcal{C}X$ с пространством объектов $\coprod_{\ell \in Ob L} X(\ell)$ и с морфизмами из $x \in X(\ell)$ в $x' \in X(\ell')$, состоящими из таких морфизмов категории L $\alpha : \ell \to \ell'$, что $X(\alpha)(x) = x'$. Морфизмы в $\mathcal{C}X$ топологизируются как подпространство в

$$\coprod_{\ell, \ell' \in Ob L} X(\ell) \times \mathrm{Hom}_L(\ell, \ell').$$

Если $X_\cdot$ - ΔG^{op}-пространство, то положим

$\|X_\cdot\|_{\Delta G} = hocolim_{\Delta G^{op}}(X_\cdot)$.

I.3.5. Лемма. Для ΔG^{op}-пространства $X_\cdot$ имеет место изоморфизм $HG_*(X_\cdot, k) \cong H_*(\|X_\cdot\|_{\Delta G}; k)$.

Доказательство. Вычисление $Tor_*^{k[\Delta G]^{op}}(k_\cdot, N_*(X_\cdot, k))$ исходя из стандартной свободной резольвенты второго аргумента $N_*(X_\cdot, k)$ - это тоже самое, что вычисление клеточных гомологий пространства $\|X_\cdot\|_{\Delta G}$ с коэффициентами в k. $\square$

I.3.6. Теорема. Пусть $X_\cdot$ - ΔG^{op}-пространство. Тогда существует естественное квазирасслоение

$$\|X_\cdot\|_\Delta \longrightarrow \|X_\cdot\|_{\Delta G} \longrightarrow B(\Delta G)$$

гомотопически эквивалентное расслоению

$$|X_\cdot| \longrightarrow E|G_\cdot| \times_{|G_\cdot|} |X_\cdot| \longrightarrow B|G_\cdot|,$$

где действие топологической группы $|G_\cdot|$ задается теоремой I.2.4.

Доказательству этой теоремы посвящена остальная часть параграфа.

I.3.7. Предложение. Для ΔG^{op}-множества $X_\cdot$ имеется естественное квазирасслоение $\|X_\cdot\|_\Delta \longrightarrow \|X_\cdot\|_{\Delta G} \longrightarrow B(\Delta G)$.

Доказательство. Включение $i : \Delta \hookrightarrow \Delta G$ определяет для любого ΔG^{op}-множества $X_\cdot : \Delta G^{op} \longrightarrow Sets$ функтор (см. определение I.3.4) $i_{X_\cdot} : \mathcal{C}(X_\cdot \circ i) \longrightarrow \mathcal{C}(X_\cdot)$. Рассмотрим для любого $x \in Ob\, \mathcal{C}(X_\cdot) = \coprod_{n \geq 0} X_n$ категорию $x / i_{X_\cdot}$ (см. [36]). Напомним, что объекты этой категории - это пары (y, f): $y \in Ob\, \mathcal{C}(X_\cdot)$, $y \in X_{n(y)}$, $f : [n(y)] \longrightarrow [n(x)]$ - такой морфизм категории ΔG, что $f^*(x) = y$ (здесь $f^* = X_\cdot(f)$). Морфизм из (y, f) в (y', f') - это морфизм категории Δ $\varphi : [n(y')] \longrightarrow [n(y)]$, такой, что $\varphi^*(y) = y'$ и коммута-

тивна следующая диаграмма
$$\begin{tikzcd} {[n(y')]} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f'"'] & & {[n(y)]} \arrow[dl, "f"] \\ & {[n(x)]} & \end{tikzcd}$$

Заметим, что f полностью определяет пару $(y, f) = (f^*(x), f)$. Следовательно, малые категории $(x / i_{X.})$ и $(n(x) \setminus i)^{op}$ изоморфны. Рассморим классифицирующее пространство $B(n(x)\setminus i) = \| Hom_{\Delta G}(\cdot\ , [n(x)]) \|_{\Delta}$. Так как Δ^{op}-множество $[m] \mapsto Hom_{\Delta G}([m], [n(x)])$ изоморфно Δ^{op}-множеству вида $G([m] \mapsto Hom_{\Delta}([m], [n(x)])) = G\Delta^{n(x)}_{.}$, согласно предложению I.3.8 и лемме I.2.3, имеем
$$B([n(x)]\setminus i) \cong |G\Delta^{n(x)}_{.}| \cong |G.| \times \Delta^{n(x)} \simeq |G.|.$$
Теперь отметим, что любой морфизм $x \longrightarrow x'$ категории $\mathcal{C}(X.)$, которому отвечает морфизм $\psi : [n(x')] \longrightarrow [n(x)]$ категории Δ, индуцирует эквивалентность $B(x/i_{X.}) \xrightarrow{\simeq} B(x'/i_{X.})$ в силу естественности. Если ψ - произвольный морфизм из ΔG, то он представляется в виде композиции автоморфизма и морфизма из Δ, значит, тоже индуцирует эквивалентность. Существование квазирасслоения $|G.| \longrightarrow \|X.\|_{\Delta} \longrightarrow \|X.\|_{\Delta G}$ теперь вытекает из теоремы B Квиллена [36]. Сравнивая с аналогичным квазирасслоением в случае тривиального ΔG^{op}-множества $*$ получаем отображение квазирасслоений
$$\begin{tikzcd} {|G.|} \arrow[r] \arrow[d, equal] & {\|X.\|_{\Delta}} \arrow[r] \arrow[d] & {\|X.\|_{\Delta G}} \arrow[d] \\ {|G.|} \arrow[r] & {\|*\|_{\Delta}} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & {\|*\|_{\Delta G}} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\ & * & B(\Delta G) \end{tikzcd}$$

Таким образом, мы получили квазирасслоение, которое нужно:

$$\|X.\|_\Delta \longrightarrow \|X.\|_{\Delta G} \longrightarrow B(\Delta G).$$

I.3.8. Предложение[21]. Для Δ^{op}-множества $X.$, $\|X.\|_\Delta$ естественно гомотопически эквивалентно $|X.|$. $\square$

I.3.9. Следствие. Если $f: X. \longrightarrow Y.$ такое отображение ΔG^{op}-множеств, что $|f|: |X.| \longrightarrow |Y.|$ - гомотопическая эквивалентность тогда $\|f\|: \|X.\|_{\Delta G} \longrightarrow \|Y.\|_{\Delta G}$ - тоже эквивалентность. $\square$

I.3.10. Предложение. Для Δ^{op}-множества $X.$ имеется естественная гомотопическая эквивалентность $\varphi: \|GX.\|_{\Delta G} \xrightarrow{\simeq} |X.|$.

Доказательство. Пусть L - малая категория. Если даны два функтора $A: L^{op} \longrightarrow Spaces$ и $B: L \longrightarrow Spaces$, определим "интеграл" $\int_{\ell \in L} A(\ell) \times B(\ell)$ как факторпространство

$\coprod_{\ell \in ob L} A(\ell) \times B(\ell)/_\sim$ по отношению эквивалентности

$(A(f)(x), y) \sim (x, B(f)(y))$, где f - морфизм категории L. Например, для Δ^{op}-множества $X.$ имеем $|X.| = \int_{[n]\in\Delta} X_n \times \Delta^n$, где $\{\Delta^n\}_{n\geq 0}$ интерпретируется как стандартное Δ-пространство $[n] \mapsto \Delta^n$. Рассмотрим теперь $\|GX.\|_{\Delta G}$ с этой точки зрения:

$$\|GX.\|_{\Delta G} = hocolim_{\Delta G^{op}} GX. = \int_{[m]\in\Delta G} GX_m \times B(\Delta G/[m]) =$$

$$= \int_{[m]\in\Delta G} \int_{[n]\in\Delta} X_n \times Hom_{\Delta G}([m],[n]) \times B(\Delta G/[m]) =$$

$$= \int_{[n]\in\Delta} X_n \times \int_{[m]\in\Delta G} Hom_{\Delta G}([m],[n]) \times B(\Delta G/[m]) =$$

$$= \int_{[n]\in\Delta} X_n \times B(\Delta G/[n]) \xrightarrow{\simeq} \int_{[n]\in\Delta} X_n \times B(\mathcal{I}/[n]) \xrightarrow{\simeq}$$

$$\xrightarrow{\simeq} \int_{[n]\in\Delta} X_n \times \Delta^n = |X.|.$$ Здесь мы воспользовались проекци-

ей $\Delta G \to \mathcal{F}$ из замечания I.2.2 и отображением Δ-пространств $B(\mathcal{F}/[n]) \longrightarrow \Delta^n$, определенным на внутренности симплекса

$$\left\{ \begin{tikzcd} {[m_0]} \arrow[r] \arrow[drr, "f_0"'] & {[m_1]} \arrow[r] \arrow[dr, "f_1"] & \dots \arrow[r] & {[m_k]} \arrow[dl, "f_k"] \\ & & {[n]} & \end{tikzcd} \right\} \times \Delta^k$$

как единственное аффинное отображение $\Delta^k \longrightarrow \Delta^n$, переводящее i-тую вершину симплекса Δ^k в $f_i(0)$-тую вершину симплекса Δ^n. Мы получим гомотопические эквивалентности в силу гомотопической тривиальности пространств $B(\Delta G/[n])$, $B(\mathcal{F}/[n])$, Δ^n.

I.3.II. Предложение. Для ΔG^{op}-множества $X.$ имеет место естественная гомотопическая эквивалентность

$$\| X. \|_{\Delta G} \simeq E|G.| \times_{|G.|} |X.|.$$

Доказательство. Как мы знаем из § I.2 ΔG^{op}-множество $X.$ определяет алгебры $(X., \xi)$ над монадой (G, μ, ε). В этой ситуации определена двухсторонняя бар-конструкция $B.(G, G, X.)$. (см. [I8]) в категории $\Delta G^{op} Sets$. Это симплициальное ΔG^{op}-множество $[n] \longmapsto B_n(G, G, X.) = \underbrace{GG\dots G}_{n+1}X.$, операторы граней которого определяется посредством μ и ξ, а вырождений - посредством ε. Согласно [I8] имеет место симплициальная гомотопическая эквивалентность над категорией $\Delta G^{op} Sets$

$$\{[n] \longmapsto B_n(G, G, X.)\} \xrightarrow{\simeq} \{[n] \longmapsto X.\}$$

что влечет эквивалентность ΔG^{op}-пространств

$$|[n] \longmapsto B_n(G, G, X.)| \xrightarrow[\simeq]{\alpha} X.$$

Согласно предложению I.3.9 получаем

$$\| \, |[n] \longmapsto B_n(G, G, X.)| \, \|_{\Delta G} \xrightarrow[\simeq]{\|\alpha\|_{\Delta G}} \| X. \|_{\Delta G} \qquad (I.3.I)$$

Теперь рассмотрим композицию отображений

$$\|G^{n+1}X.\|_{\Delta G} \xrightarrow{\varphi} |G^n X.| \xrightarrow{\Phi} |G.|\times|G^{n-1}X.| \xrightarrow{\Phi} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\Phi} |G.|^{n-1}\times|GX.| \xrightarrow{id\times\Phi} |G.|^n\times|X.|,$$

где эквивалентность φ определена в предложении I.3.I0, а гомеоморфизмы Φ определены в лемме I.2.3. Получается корректно определенное отображение бар-конструкций

$$\{[n]\longmapsto \|B_n(G,G,X.)\|_{\Delta G}\} \longrightarrow B.(*,|G|,|X.|).$$

Так как это гомотопическая эквивалентность в каждой размерности, то после геометрической реализации получим

$$|[n]\mapsto \|B_n(G,G,X.)\|_{\Delta G}| \xrightarrow{\simeq} |[n]\mapsto B_n(*,|G.|,|X.|)| \quad (I.3.2)$$

Причем, последнее пространство представляет из себя одностороннюю бар-конструкцию $B(*,|G.|,|X.|)=E|G.|\times_{|G.|}|X.|$. Теперь из (I.3.I) и (I.3.2) вытекает нужная эквивалентность. □

Доказательство теоремы I.3.6 теперь прямо следует из предложений I.3.7 и I.3.II в случае, когда $X.$ является ΔG^{op}-множеством. В общем случае, когда $X.$ - произвольное ΔG^{op}-пространство, тогда $s.(X.)$ - ΔG^{op}-объект в категории симплициальных множеств (см. § I.2). Доказательство теперь завершает применение следующих свойств бисимплициальных множеств (т.е. $(\Delta\times\Delta)^{op}$-множеств из [40]).

I.3.I2. Лемма. (i) Если $X_{..}\longrightarrow Y_{..}\longrightarrow Z_{..}$ - такая последовательность $(\Delta\times\Delta)^{op}$-множеств, что для каждого n $Z_{.n}$ связно, а $|X_{.n}|\longrightarrow|Y_{.n}|\longrightarrow|Z_{.n}|$ является квазирасслоением, тогда таковым является и $|X_{..}|\longrightarrow|Y_{..}|\longrightarrow|Z_{..}|$.

(ii) Если $X_{..}\longrightarrow Y_{..}$ - такое отображение $(\Delta\times\Delta)^{op}$-множеств, что $|X_{.n}|\longrightarrow|Y_{.n}|$ - гомотопическая эквивалентность для всех n, тогда таковым является и отображение $|X_{..}|\longrightarrow|Y_{..}|$. □

I.3.I3. Следствие. $B(\Delta G)\simeq B|G.|$, в частности $B(\Delta R)\simeq \simeq B\mathbb{Z}/2$, $B(\Delta C)\simeq BSO(2)$, $B(\Delta D)\simeq BO(2)$. □

ГЛАВА 2. ДИЭДРАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 2.I. Рефлексивные, циклические и диэдральные гомологии

Рассмотрим подробнее категории типа Δ : $\Delta R, \Delta C$ и ΔD, которые соответствуют CS-группам $R.$, $C.$ и $D.$. Категория ΔD^{op} порождается образующими d_i и s_j подкатегории Δ^{op} и образующими автоморфизмов $Aut_{\Delta D^{op}}[n] = D_n$ t_n и r_n, которые удовлетворяют соотношениям (см. § I.I и особенно I.I.II)

$$t_n^{n+1} = id, \quad r_n^2 = id, \quad t_n r_n = r_n t_n^{-1}$$

$$\begin{cases} d_i r_n = r_{n-1} d_{n-i} \\ s_j r_n = r_{n+1} s_{n-j} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_i t_n = t_{n-1} d_{i-1}, \; i>0 \\ s_j t_n = t_{n+1} s_{j-1}, \; j>0 \end{cases} \tag{2.I.I}$$

Категорию ΔC^{op} (соответственно ΔR^{op}) получим после отказа от образующей r_n (соответственно t_n). Для ΔR^{op}-, ΔC^{op}- и ΔD^{op}-объектов будем употреблять названия: рефлексивные, циклические и диэдральные объекты.

2.I.I. Пример. Пусть Π - дискретная группа. Определим диэдральное множество $\Gamma.(\Pi)$:

$$\Gamma_n(\Pi) = \underbrace{\Pi \times \Pi \times \ldots \times \Pi}_{n+1},$$

$$d_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n), \; 0 \le i \le n-1,$$

$$d_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_n x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$s_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$t_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

$$r_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0^{-1}, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}).$$

Соотношения (2.I.I) проверяются непосредственно. Если Π - топологическая группа, то получим диэдральное пространство $\Gamma.(\Pi)$. Если $\Pi.$ - симплициальная группа, то $\Gamma.(\Pi.)$ - диэдральное симплициальное множество.

В § I.2 было показано, что на геометрической реализации любого $\Delta G^{op}_{\cdot}$-множества ($\Delta G^{op}_{\cdot}$-пространства, $\Delta G^{op}_{\cdot}$-симплициального множества) каноническим образом действцет топологическая группа $|G.|$. В нашем случае $|R.| \cong \mathbb{Z}/2$, $|C.| \cong SO(2)$, $|D.| \cong O(2)$, как доказано в предложении I.2.6. Основными в настоящем параграфе являются теоремы 2.I.2 и 2.I.4.

2.I.2. Теорема. Для симплициальной группы $\Pi.$ имеет место $O(2)$- эквивариантная гомотопическая эквивалентность

$$|\Gamma.(\Pi.)| \simeq B(\Pi.)^{SO(2)}$$

где действие $O(2)$ на $B(\Pi.)^{SO(2)}$ индуцируется каноническим правым действием $O(2)$ на $SO(2)$.

Доказательство приводится ниже.

2.I.3. Определение. Рефлексивные, циклические и диэдральные гомологии связного топологического пространства X с коэффициентами в коммутативном кольце k определяются по формуле

$$HG_*(X;k) = HG_*(\Gamma.(|\Omega.X|), k), \quad G. = R., C., D.$$

Здесь $\Omega.X$ - симплициальная группа петель Кана на симплициальном множестве $s.(X)$ (см. [34] или [35]).

2.I.4. Теорема. Для связного топологического пространства X имеют место изоморфизмы

$$(i)\quad HR_*(X;k) \cong H_*(E\mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} X^{SO(2)}; k);$$

$$(ii)\quad HC_*(X;k) \cong H_*(ESO(2) \times_{SO(2)} X^{SO(2)}; k);$$

(iii) $HD_*(X;k) \cong H_*(EO(2) \times_{O(2)} X^{SO(2)}; k)$,

где в правых частях стоят сингулярные гомологии расслоений, ассоциированных с главными универсальными расслоениями.

Доказательство прямо вытекает из леммы I.3.5 и теорем I.3.6, 2.I.2. $\square$

Остальная часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 2.I.2. Некаторые конструкции представляют и самостоятельный интерес.

Напомним, что категория Δ изоморфна категории $\overline{\Delta}$, имеющей в качестве объектов "линейные категории" $[n]_\Delta$, $n = 0, 1, \dots$, отвечающие линейно упорядоченным множествам $\{0 < 1 < \dots < n\}$, а в качестве морфизмов - всевозможные функторы между ними. Категорию $[n]_\Delta$ удобно изображать диаграммой

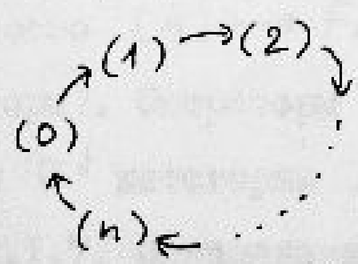
$$(0) \longrightarrow (1) \longrightarrow (2) \longrightarrow \dots \longrightarrow (n).$$

При этом $\delta^i : [n-1]_\Delta \longrightarrow [n]_\Delta$ - это функтор, пропускающий единственный объект (i), а $\sigma^j : [n+1]_\Delta \longrightarrow [n]_\Delta$ - функтор, отправляющий единственный морфизм $(j) \longrightarrow (j+1)$ в тождественный. В дальнейшем нам потребуются аналогичные интерпретации для категорий ΔR, ΔC и ΔD.

2.I.5. Определение.

(i) Категория $\overline{\Delta R}$. Объекты теже самые как и в категории $\overline{\Delta}$, а морфизмы - ковариантные и контравариантные функторы.

(ii) Категория $\overline{\Delta C}$. Объекты - это категории $[n]_C$, $n = 0, 1, \dots$, порожденные диаграммами



Морфизмы - это такие функторы, которые индуцируют отображения классифицирующих пространств степени $+1$ (степень определена, т.к. $B[n]_C \simeq S^1$ для всех n).

(iii) Категория $\overline{\Delta D}$. Объекты - это категории $[n]_D = [n]_C$, $n = 0, 1, \dots$, а морфизмы - ковариантные и контравариантные функторы, задающие отображения степеней ± 1 в классифицирующих пространствах.

2.1.6. Замечание. Легко устанавливается изоморфизмы малых категорий $\Delta R \cong \overline{\Delta R}$, $\Delta C \cong \overline{\Delta C}$, $\Delta D \cong \overline{\Delta D}$. Имеются следующие соответствия морфизмов (морфизмы δ^i, σ^j, τ_n, ρ_n двойственны морфизмам d_i, s_j, t_n, r_n соответственно):

(i) морфизмы δ^i и σ^j в $\overline{\Delta R}$ определяются как в $\overline{\Delta}$, а морфизм $\rho_n : [n]_R \to [n]_R$ - это контравариантный функтор, действующий по формуле $(i) \mapsto (n-i)$ на объектах;

(ii) морфизмы δ^i и σ^j в $\overline{\Delta C}$ определяются соответствующими морфизмами из категории $\overline{\Delta}$, используя очевидные включения $[n]_\Delta \hookrightarrow [n]_C$ (добавление морфизма $(n) \to (0)$), а морфизм τ_n - это функтор, поворачивающий категорию $[n]_C$ против часовой стрелки, т.е. на объектах определен формулой $(i) \mapsto (i-1)$; $(-1) = (n)$,

(iii) в категории $\overline{\Delta D}$ морфизмы δ^i, σ^j и τ_n определены как в категории $\overline{\Delta C}$, а ρ_n - индуцируется функтором ρ_n из $\overline{\Delta R}$ посредством включений $[n]_R \hookrightarrow [n]_D$.

Рассмотрим произвольную малую категорию L. Одно из определений нерва $B.(L)$ категории L гласит, что это симплициальное множество $[n] \mapsto Funct([n]_\Delta, L)$ (здесь $Funct$ означает функторы). Операторы граней и вырождений порождаются морфизмами δ^i и σ^j категории $\overline{\Delta}$.

2.1.7. Определение. Циклическим нервом малой категории L

будем называть циклическое множество $\Gamma.(L) : [n] \longmapsto$
$\longmapsto Funct([n]_c, L)$. Циклическая структура индуцируется морфизмами категории ΔC.

Если категория L обладает инволюцией $*$, т.е. таким контравариантным функтором $* : L \longrightarrow L$, что $*^2 = id$, тогда нерв $B.(L)$ приобретает рефлексивную структуру: $Funct([n]_\Delta, L) = Funct([n]_R, L)$, а $r_n : Funct([n]_R, L) \to Funct([n]_R, L)$ определяем по формуле $f \longmapsto * \circ f \circ \rho_n$.

Совершенно аналогично, циклический нерв $\Gamma.(L)$ при наличии инволюсии в L превращается в диэдральное множество $[n] \longmapsto$
$\longmapsto Funct([n]_D, L)$. Заметим, что это согласуется с примером 2.I.I, если группу интерпретировать как категорию.

Пусть теперь $G.$ - произвольная CS-группа. Построим функтор $(\ )^G : \Delta^{op}Sets \longrightarrow \Delta^{op}Sets$, $X. \longmapsto X.^G$, где $X_n^G = Hom_{\Delta^{op}Sets}(G\Delta^n_., X.)$, а операторы граней и вырождений индуцируются отображениями $G\delta^i : G\Delta^{n-1}_. \longrightarrow G\Delta^n_.$, $G\sigma^j : G\Delta^{n+1}_. \longrightarrow G\Delta^n_.$

2.I.8. Лемма. Для любого Δ^{op}-множества $X.$ $X.^G$ обладает структурой ΔG^{op}-множества.

Доказательство. По определению $\Delta^n_. = Hom_\Delta(\cdot, [n])$. Аналогично Δ^{op}-множество $G\Delta^n_.$ интерпретируется как $Hom_{\Delta G}(\cdot, [n])$. Изоморфизм задается формулой $(g, \varphi) \longmapsto$
$\longmapsto \varphi \circ g^*$. Теперь структуру ΔG^{op}-множества на $X.^G$ определим задавая правое действие группы G_n на $Hom_{\Delta G}(\cdot, [n])$ формулой $\psi \longmapsto g^* \circ \psi$. $\square$

Пусть $X.$ - рефлексивное множество. Определим естественное вложение $\iota : X.^C \hookrightarrow X.^D$ как композицию

$$X_n^C = Hom_{\Delta^{op}Sets}(C\Delta^n_., X.) \xrightarrow{\cong} Hom_{\Delta R^{op}Sets}(RC\Delta^n_., X.) \searrow$$

$$\hookrightarrow Hom_{\Delta^{op}Sets}(D\Delta^n_\cdot, X_\cdot) = X_n^D.$$

Здесь мы воспользовались изоморфизмом $RC\Delta^n_\cdot \cong D\Delta^n_\cdot$.

2.I.9. Предложение. Пусть L - малая категория. Циклическое множество $\Gamma_\cdot(L)$ изоморфно $B_\cdot(L)^C$. Если L обладает инволюцией, тогда структура диэдрального множества на $\Gamma_\cdot(L)$ индуцируется вложением $i: B_\cdot(L)^C \hookrightarrow B_\cdot(L)^D$.

Доказательство. Как известно из доказательства леммы 2.I.8, Δ^{op}-множество $C\Delta^n_\cdot$ изоморфно $Hom_{\Delta C}(\cdot, [n])$. Заменим теперь категорию ΔC ей изоморфной категорией $\overline{\Delta C}$ и ограничивая функторы $[k]_c \to [n]_c$ на подкатегорию $[k]_\Delta \subset [k]_c$ (см. замечание 2.I.6 (ii)) получаем естественное вложение $J_n: C\Delta^n_\cdot \hookrightarrow B[n]_c$

$$C\Delta^n_k = Hom_{\overline{\Delta C}}([k]_c, [n]_c) \longrightarrow Funct([k]_\Delta, [n]_{c}) = B_k[n]_c.$$

Набор J_n, $n = 0, 1, \ldots$, определяет отображение $I: \Gamma_\cdot(L) \to B_\cdot(L)^C$ посредством композиции

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_n(L) & \xrightarrow{\qquad\qquad I_n \qquad\qquad} & B_n(L)^C \\
\| & & \| \\
Funct([n]_c, L) \xrightarrow{B_\cdot} & Hom_{\Delta^{op}Sets}(B_\cdot[n]_c, B_\cdot(L)) & \xrightarrow{J_n^*} Hom_{\Delta^{op}Sets}(C\Delta^n_\cdot, B_\cdot L)
\end{array}$$

Отображение I сохраняет циклическую структуру и согласованна с диэдральной, т.к. действие операторов t_n и τ_n на $\Gamma_n(L)$ и на $B_n(L)^C$ индуцированно "подкручиванием" и "отражением" категории $[n]_c$ посредством операторов τ_n и ρ_n. Инъективность отображения I очевидна. Сюръективность следует из того, что все одномерные симплексы, которые соответствуют морфизмам вида $(n) \to (0)$, $(i) \to (i+1)$, $0 \le i \le n-1$ порождающим все остальные, содержатся в $C\Delta^n_\cdot$. $\square$

2.I.I0. Лемма. Для дискретной группы Π Δ^{op}-множество $B_\cdot(\Pi)$ полно, т.е. удовлетворяет условию Кана. Рефлексивная структура на

$B.(\Pi)$, порожденная инволюцией $x \mapsto x^{-1}$, индуцирует гомотопически тривиальное действие группы $\mathbb{Z}/2$ на $B(\Pi) = |B.(\Pi)|$.

Доказательство. Полнота Δ^{op}-множества $B.(\Pi)$ проверяется непосредственно. Далее заметим, что пространство $B(\Pi)$ является пространством Эйленберга-Маклейна типа $K(\Pi, 1)$. Следовательно, достаточно доказать, что на фундаментальной группе индуцируется тривиальное действие. Рефлексивная структура на $B.(\Pi)$ индуцирует следующее отображение на 1-остове пространства $B(\Pi)$: $[x, (u, 1-u)] \mapsto [x^{-1}, (1-u, u)]$ (см. § I.2). Таким образом, петля, представляющая элемент x, переходит в петлю, отвечающею элементу $(x^{-1})^{-1} = x$. $\square$

Доказательство теоремы 2.I.2 в случае дискретной группы теперь выведем из предложения 2.I.9, лемм 2.I.8, 2.I.10и следующего утверждения.

2.I.II. Предложение. Пусть $G.$ - CS-группа, а $X.$ - Δ^{op}-множество. На пространствах $|X.|^{|G.|}$ и $|X.^{G}|$ действует группа $|G.|$: в первом случае действие индуцировано умножением справа, а во втором определено в силу леммы 2.I.8 и теоремы I.2.4. Тогда

(i) имеет место естественное $|G.|$-эквивариантное отображение

$$F: |X.^{G}| \longrightarrow |X.|^{|G.|};$$

(ii) в случае полного $X.$, F - гомотопическая эквивалентность.

Доказательство приводится ниже.

Завершим теперь доказательство теоремы 2.I.2. Полагая $G.=C.$ сразу получаем $SO(2)$-эквивариантную эквивалентность $|\Gamma(\Pi)| \simeq B(\Pi)^{SO(2)}$. Полагая $G.=D.$, выводим, что действие $O(2)$ на $|\Gamma(\Pi)|$ индуцированно вложением $B(\Pi)^{SO(2)} \hookrightarrow B(\Pi)^{O(2)}$. Действительно, отображение

$f: SO(2) \to B(L)$ распространяется на $O(2)$ по формуле $f(r\theta) = f = f(\theta)$, где $\theta \in SO(2)$, а r - отражение. Следовательно, $(rf)(\theta) = f(\theta r) = f(r\theta^{-1}) = f(\theta^{-1})$, т.е. действие $O(2)$ на $B(L)^{SO(2)}$ порождено каноническим правым действием $O(2)$ на $SO(2)$. В общем случае симплициальной группы $\Pi.$ следует воспользоваться леммой I.3.I2(ii). Доказательство теоремы 2.I.2 закончено. $\square$

Доказательство предложения 2.I.II. Без труда проверяется, что функтор $X. \mapsto X.^G$ является правым сопряженным к функтору $X. \mapsto GX.$, т.е. имеется естественная биекция

$$Hom_{\Delta^{op}Sets}(GX., Y.) \underset{\check{g} \longleftarrow\!\shortmid\, g}{\overset{f \longmapsto \hat{f}}{\rightleftarrows}} Hom_{\Delta^{op}Sets}(X., Y.^G)$$

Аналогично функтор $G^2 = GG$ обладает правым сопряженным функтором $X. \longmapsto X.^{G^2} = \{[n] \mapsto Hom_{\Delta^{op}Sets}(G^2\Delta^n_., X.)\}$. Имеет место естественный изоморфизм функторов $X.^{G^2} \cong (X.^G)^G$, т.к. они оба сопряжены справа к функтору G^2.

Напомним теперь, что ΔG^{op}-множество $X.$ - это Δ^{op}-множество $X.$ плюс структура алгебры над монадой (G, μ, ε) (см. § I.2). Обозначим через θ отображение $X.^G \longrightarrow X.^{G^2} \cong (X.^G)^G$, индуцированное монадным умножением $\mu: G^2\Delta^n_. \to G\Delta^n_.$. Тогда морфизм $\theta^\vee$: $GX.^G \longrightarrow X.^G$ превращает $X.^G$ в алгебру над нашей монадой. Алгебра $(X.^G, \theta^\vee)$ как раз соответствует структуре ΔG^{op}-множеттва на $X.^G$, определенной в лемме 2.I.8.

Определим наконец отображение $F: |X.^G| \longrightarrow |X.|^{|G.|}$ как сопряженное к композиции

$$|G.| \times |X.^G| \xrightarrow{\Phi^{-1}} |GX.^G| \xrightarrow{|ev|} |X.|,$$

где $ev = (id_{X.^G})^\vee$, а $\Phi = \Phi(X.^G)$ определено в лемме I.2.3.

Доказательство пункта (i) теперь сводится к рутинной проверке коммутативности нужных диаграмм с использованием свойств сопряженных функторов, так как условия уже сформулированны на функториальном языке.

Доказательство (ii). Пусть $X_\cdot$ - полное Δ^{op}-множество. Убедимся, что $X_\cdot^G$ - тоже полно. Для этого нужно показать, что любое отображение $f : \Lambda^n_\cdot(i) \longrightarrow X_\cdot^G$ произвольного "фунтика" $\Lambda^n_\cdot(i)$ состоящего из всех $(n-1)$-мерных граней симплекса $\Delta^n_\cdot$ кроме i-той, продолжается на весь симплекс $\Delta^n_\cdot$. Но это равносильно существованию продолжения $f^\vee : G\Lambda^n_\cdot(i) \longrightarrow X_\cdot$ до $G\Delta^n_\cdot \longrightarrow X_\cdot$, которое обеспечивается полнотой $X_\cdot$. Докажем далее, что сопряженные функторы G и $(\cdot)^G$ индуцируют биекцию гомотопических классов $[Y_\cdot, X_\cdot^G] \cong [GY_\cdot, X_\cdot]$. Пусть $f, g : Y_\cdot \longrightarrow X_\cdot^G$, $f \simeq g$.

Рассмотрим следующею коммутативную диаграмму и ей сопряженную:

$$\begin{tikzcd}
Y_\cdot \sqcup Y_\cdot \arrow[r, "f \sqcup g"] \arrow[d, "\nabla_{Y_\cdot}"'] \arrow[dr, "\partial_0 \sqcup \partial_1"] & X_\cdot^G \\
Y_\cdot & Y_\cdot \times I_\cdot \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GY_\cdot \sqcup GY_\cdot \arrow[r, "f^\vee \sqcup g^\vee"] \arrow[d, "\nabla_{GY_\cdot}"'] \arrow[dr, "G\partial_0 \sqcup G\partial_1"] & X_\cdot \\
GY_\cdot & G(Y_\cdot \times I_\cdot) \arrow[l, "G\sigma"'] \arrow[u, "h^\vee"']
\end{tikzcd}$$

Здесь $Y_\cdot \times I_\cdot$ - цилиндр над $Y_\cdot$, $I_\cdot = \Delta^1_\cdot$, $\partial_i : Y_\cdot \longrightarrow Y_\cdot \times I_\cdot$ - вложения в нижнее и верхнее основания, $\nabla_{Y_\cdot}$ - отображение кодиагонали, h - гомотопия, σ - проекция. Отметим, что $G(Y_\cdot \times I_\cdot)$ вместе с отображениями $G\partial_i$, $i = 0, 1$, $\nabla_{GY_\cdot}$, $G\sigma$ образуют цилиндрический объект в смысле Квиллена [35]. Значит, коммутативность второй диаграммы показывает, что $f^\vee \simeq g^\vee$. Сохранение гомотопности в обратную сторону доказывается аналогично с использованием "путевого" объекта (path object).

Теперь из существования следующей коммутативной диаграммы для любого Δ^{op}-множества $Y_\cdot$ вытекает, что отображение $F : |X_\cdot^G| \longrightarrow$

$\to |X.|^{|G.|}$ является гомотопической эквивалентностью.

$$\begin{array}{ccccc} [Y., X.^G] & \xrightarrow{|\,|} & [|Y.|, |X.^G|] & \xrightarrow{F_*} & [|Y.|, |X.|^{|G.|}] \\ \wr\| & & & & \wr\| \\ [GY., X.] & \xrightarrow{|\,|} & [|GY.|, |X.|] & \xleftarrow[\cong]{\Phi^*} & [|G.|\times|Y.|, |X.|] \end{array}$$

§ 2.2. Минимальные модели Сулливана.

В настоящем параграфе вкратце напоминается необходимые сведения из теории минимальных моделей Сулливана. Основные ссылки [3], [17] и [37]. Потом строим минимальные модели многообразий, для которых в § 2.4 будут вычислены циклические и диэдральные гомологии.

Начиная с этого места и до конца главы будем работать с векторными пространствами и алгебрами над $\mathbb{Q}$, которые будем называть просто модулями и алгебрами. Дифференциальные неотрицательно градуированные коммутативные (в градуированном смысле) алгебры сокращенно будем называть DGC-алгебрами. Они образуют категорию $DGCA$. Аналогично, градуированные коммутативные алгебры будем называть GC-алгебрами, а соответствующую категорию обозначать через GCA.

Согласно теории Сулливана, каждому односвязному топологическому пространству Y , имеющему гомотопический тип конечного клеточного пространства, сопоставляется его минимальная модель $\mathcal{M}Y = \{\Lambda X, d\}$, т.е. некоторая DGC-алгебра, свободно порожденная как GC-алгебра градуированным модулем $X = \oplus_{i\geq 2} X^i$ с разложимым дифференциалом d степени $+1$. Последнее условие означает, что $dX^i \subset \Lambda(X)^{i+1}$ состоит из разложимых элементов. Модель $\mathcal{M}Y$ содержит всю информацию о рациональном гомотопическом типе пространства Y . В частности имеет место изоморфизм $H^*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}Y)$. Теория минимальных моделей распространяется и на более широкий класс нильпотентных пространств (см. [3], [17]). Нильпотентная модель $\{\Lambda X, d\}$ среди прочих условий удовлетворяет следующему: $\dim X^i < \infty$ для всех i.

2.2.2. Предложение ([17]). Пусть $H^*(Y;\mathbb{Q}) = \Lambda X$ - алгебра когомологий связного нильпотентного пространства Y. Тогда минимальная модель $\mathcal{M} Y$ совпадает с самой алгеброй ΛX, наделенной тривиальным дифференциалом $d=0$. $\square$

2.2.3. Примеры. (i) Для сферы нечетной размерности S^{2n+1} имеем $\mathcal{M}(S^{2n+1}) = \{\Lambda\langle x\rangle, d=0\}$ - внешняя алгебра с одной образующей x размерности $|x| = 2n+1$.

(ii) Когда пространство Y является H-пространством, его алгебра рациональных когомологий свободна. Так обстоит дело в частности, когда $Y = \Omega Z$ - пространство петель односвязного пространства Z. В этом случае $\mathcal{M}(\Omega Z) = \{\Lambda X, d=0\}$, где $X^i = Hom(\pi_{i+1} Z, \mathbb{Q})$.

2.2.4. Предложение ([3]). Пусть когомологии односвязного пространства Y имеет вид $H^*(Y;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$. Здесь $x_1,\dots,x_n$ - четные образующие, а $f_1,\dots,f_m$ - регулярная последовательность разложимых элементов, т.е. f_k в алгебре $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_{k-1})$ не является делителем нуля для всех $1\le k\le m$. Тогда $\mathcal{M} Y = \{\Lambda\langle x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m\rangle, d\}$, $dx_i = 0$, $1\le i\le n$, $du_j = f_j$, $1\le j\le m$, $|u_j| = |f_j| - 1$.

2.2.5. Примеры.

(i) Рассмотрим пространство Y, для которого $H^*(Y;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^{m+1})$, $|x| = 2p$. Тогда $\mathcal{M} Y = \{\Lambda\langle x,u\rangle, d\}$, $|x| = 2p$, $|u| = 2p(m+1)-1$, $dx=0$, $du = x^{m+1}$. Таковыми, например, являются многообразия S^{2p} $(m=1)$, $\mathbb{C}P^m$ $(p=1)$, $\mathbb{H}P^m$ $(p=2)$, $\mathbb{C}aP^2$ $(p=4, m=2)$.

(ii) Пусть $Y = \mathcal{Q}^{2m}$ - квадрика в пространстве $\mathbb{C}^{2m+1}$. Тогда, как указано в [I], $H^*(Q^{2m};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x,y]/(xy,\ x^{2m}-y^2), |x|=2$. Таким образом, $\mathcal{M}Q^{2m} = \{\Lambda\langle x,y,u,v\rangle, d\}$, $|u|=2m+1$, $|v|=4m-1$, $dx=dy=0$, $du=xy$, $dv=x^{2m}-y^2$.

(iii) Рассмотрим теперь случай, кагда $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ - комплексное грассманово многообразие двумерных плоскостей в $\mathbb{C}^m$. Заметим, что имеется изоморфизм ($U(k)$ - группа унитарных матриц) $Gr_{\mathbb{C}}(2,m) \cong U(m)/U(2)\times U(m-2)$. Воспользуемся следующим описанием рациональных когомологий этого пространства (см. [2]). Вложим тензорное произведение алгебр многочленов $\mathbb{Q}[\sigma_1',\sigma_2']$ и $\mathbb{Q}[\sigma_1'',\dots,\sigma_{m-2}'']$ в алгебру $\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_m]$, $|t_i|=2$, так, что $\sigma_i'=\sigma_i'(t_1,t_2)$ и $\sigma_j''=\sigma_j''(t_3,\dots,t_m)$- элементарные симметрические многочлены. Тогда, оказывается, что

$$H^*(U(m)/U(2)\times U(m-2);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\sigma_1',\sigma_2']\otimes\mathbb{Q}[\sigma_1'',\dots,\sigma_{m-2}'']/I,$$

где $I=(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$- идеал, порожденный элементарными симметрическими многочленами от переменных $t_1,\dots,t_m$. Используя формулу $\sigma_k = \sigma_k''+\sigma_1'\sigma_{k-1}''+\sigma_2'\sigma_{k-2}''$, где $\sigma_i''=0$, при $i<0$, $i>m-2$, $\sigma_0''=1$, и обозначая классы (в факторалгебре) элементов σ_1',σ_2' и $\sigma_1'',\dots,\sigma_{m-2}''$ через x,y и $s_1,\dots,s_{m-2}$ соответственно, получим соотношения

$$\begin{cases} 0 = s_1 + x \\ 0 = s_2 + xs_1 \\ 0 = s_3 + xs_2 + ys_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = s_{m-2} + xs_{m-3} + ys_{m-4} \\ 0 = xs_{m-2} + ys_{m-3} \\ 0 = ys_{m-2} \end{cases} \tag{2.2.I}$$

Теперь по индукции без труда доказывается формула

$$s_n = \sum_{0\le i\le[\frac{n}{2}]} (-1)^{n-i}\binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i.$$

Таким образом, элементы S_n полностью выражаются через x и y; $S_{m-1}(x,y)=yS_{m-2}(x,y)=0$. Следовательно, получаем изоморфизм $H^*(Gr_{\mathbb{C}}(2,m);\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[x,y]/(f(x,y),g(x,y))$, где $f(x,y)=S_{m-1}(x,y)$, $g(x,y)=yS_{m-2}(x,y)$. Так как f и g не имеют общих делителей, можно воспользоваться предложением 2.2.4 для получения минимальной модели $\mathcal{M}(Gr_{\mathbb{C}}(2,m))=\{\Lambda\langle x,y,u,v\rangle,d\}$, $|x|=2$, $|y|=4$, $|u|=2m-3$, $|v|=2m-1$, $dx=dy=0$, $du=f(x,y)$, $dv=g(x,y)$.

§ 2.3. Диэдральные гомологии с рациональными коэффициентами.

Целью настоящего параграфа является построение модели для вычисления диэдральных гомологий $HD_*(Y;\mathbb{Q})$ односвязного топологического пространства Y. Согласно § 2.I нам достаточно вычислить гомологии $H_*(EO(2)\times_{O(2)}Y^{SO(2)};\mathbb{Q})$. Приведем сначала известные результаты работы [38] касающиеся циклических гомологий. $HC_*(Y;\mathbb{Q})\cong H_*(ES^1\times_{S^1}Y^{S^1};\mathbb{Q})$. В этом параграфе для краткости будем обозначать группы $SO(2)$ и $\mathbb{Z}/2$ через S^1 и $\mathbb{Z}_2$ соответственно.

Напомним, что определения и обозначения, касающиеся минимальных моделей, введены в § 2.2. Пусть $\mathcal{M}Y=\{\Lambda X,d\}$ - минимальная модель Сулливана односвязного пространства Y. По градуированному модулю $X=\oplus_{i\geq 2}X^i$ построим новый градуированный модуль $\overline{X}=\oplus_{i\geq 1}\overline{X}^i$, полагая $\overline{X}^i=X^{i+1}$. Определим DGC-алгебру $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathcal{M}Y)=\{\Lambda(X\oplus\overline{X}),d_H\}$ с дифференциалрм d_H: $d_Hx=dx$, $d_H\overline{x}=-\beta(dx)$, где β - дифференцирование степени -1 на $\Lambda(X\oplus\overline{X})$, однозначно заданное формулами $\beta(x)=\overline{x}$, $\beta(\overline{x})=0$. Рассмотрим далее одномерный модуль $\langle\omega\rangle$, порожденный элементом ω степени $|\omega|=2$ и определим DGC-

алгебру $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{M}Y) = \{\Lambda(\langle\omega\rangle \oplus X \oplus \bar{X}), d_C\}$ с дифференциалом $d_C : d_C(\omega) = 0,\ d_C u = d_H u + \omega\beta(u)$, $u \in \Lambda(X \oplus \bar{X})$.

2.3.I. Теорема ([38]). Пусть $\{\Lambda X, d\}$ - минимальная модель односвязного пространства Y, тогда расширение

$$\{\Lambda\langle\omega\rangle, d\} \xrightarrow{\bar{p}} \{\Lambda(\langle\omega\rangle \oplus X \oplus \bar{X}), d_C\} \xrightarrow{\bar{i}} \{\Lambda(X \oplus \bar{X}), d_H\}$$

где $\bar{p}$ - вложение, а $\bar{i}$ - проекция, является моделью для расслоения $Y^{S^1} \xrightarrow{i} ES^1 \times_{S^1} Y^{S^1} \xrightarrow{p} BS^1$. $\square$

Как непосредственное следствие получаем изоморфирмы

$$HH_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*(Y^{S^1};\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{H}(\mathcal{M}Y)),$$
$$HC_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*(ES^1 \times_{S^1} Y^{S^1};\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{C}(\mathcal{M}Y)).$$

Нас будет интересовать рефлексивные и диэдральные гомологии, т.е. пространства $E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} Y^{S^1}$ и $EO(2) \times_{O(2)} Y^{S^1}$. Рассмотрим следующие накрытия

$$\begin{aligned} Y^{S^1} \simeq E\mathbb{Z}_2 \times Y^{S^1} &\longrightarrow E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} Y^{S^1} \\ ES^1 \times_{S^1} Y^{S^1} \simeq EO(2) \times_{S^1} Y^{S^1} &\longrightarrow EO(2) \times_{O(2)} Y^{S^1} \end{aligned} \qquad (2.3.I)$$

с группой $\mathbb{Z}_2$ в качестве накрывающих преобразований. Ясно, что на когомологиях пространств Y^{S^1} и $ES^1 \times_{S^1} Y^{S^1}$ индуцируется действие группы $\mathbb{Z}_2$. В ситуации, когда группа $\mathbb{Z}_2$ действует на модуле M над $\mathbb{Q}$ посредством образующей τ, введем обозначения для инвариантов $(\varepsilon = +1)$ и антиинвариантов $(\varepsilon = -1)$ $\mathrm{Inv}_\tau^\varepsilon M = \{x \in M \mid \tau x = \varepsilon x\}$. Отметим, что $M \cong \mathrm{Inv}_\tau^{+1} M \oplus \mathrm{Inv}_\tau^{-1} M$. Из существования накрытий (2.3.I) следуют изоморфизмы $H^*(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} Y^{S^1};\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Inv}_\tau^{+1} H^*(Y^{S^1};\mathbb{Q})$, $H^*(EO(2) \times_{O(2)} Y^{S^1}) \cong \mathrm{Inv}_\tau^{+1} H^*(ES^1 \times_{S^1} Y^{S^1})$.

Далее из теоремы 2.I.4 получим разложения

$$HH_*(Y;\mathbb{Q}) \cong {}^{+1}HR_*(Y;\mathbb{Q}) \oplus {}^{-1}HR_*(Y;\mathbb{Q}),$$
$$HC_*(Y;\mathbb{Q}) \cong {}^{+1}HD_*(Y;\mathbb{Q}) \oplus {}^{-1}HD_*(Y;\mathbb{Q}),$$

где ${}^{+1}HR_* = HR_*$, ${}^{+1}HD_* = HD_*$, а ${}^{-1}HR_*$ и ${}^{-1}HD_*$ определяются как соответствующие антиинварианты. Разновидность диэдральных гомологий ${}^{-1}HD_*(Y;\mathbb{Q})$ появляется в приложениях и имеет непосредственной эквивалентное определение (см. § 3.I). Тоже самое верно и для рефлексивных гомологий ${}^{-1}HR_*(Y;\mathbb{Q})$.

Следующая теорема является основным результатом настоящего параграфа.

2.3.2. Теорема. Пусть $\mathcal{M}Y = \{\Lambda X, d\}$ - минимальная модель для односвязного пространства Y. На расширении из теоремы 2.3.I

$$\Lambda\langle\omega\rangle \xrightarrow{\bar{p}} \mathcal{C}(\mathcal{M}Y) \xrightarrow{\bar{i}} \mathcal{H}(\mathcal{M}Y)$$

действует группа $\mathbb{Z}_2$ посредством оператора h, определенного формулами $h(\omega) = -\omega$, $h(x) = x$, $h(\bar{x}) = -\bar{x}$. Обозначим ${}^{\varepsilon}\mathcal{R} = \mathrm{Inv}_h^{\varepsilon}\mathcal{H}$, ${}^{\varepsilon}\mathcal{D} = \mathrm{Inv}_h^{\varepsilon}\mathcal{C}$. Тогда имеются изоморфизмы

(i) ${}^{\varepsilon}HR_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*({}^{+\varepsilon}\mathcal{R})$;

(ii) ${}^{\varepsilon}HD_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H^*({}^{+\varepsilon}\mathcal{D})$.

Доказательство. Легко проверяется, что оператор h коммутирует с d_c и d_H, а также с отображениями $\bar{p}$ и $\bar{i}$. Таким образом, определено действие группы $\mathbb{Z}_2$ на нашем расширении. Итак, в когомологиях возникает два типа инволюций h и τ (последняя из выше описанной геометрической инволюции τ), задающие два действия группы $\mathbb{Z}_2$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что h и τ совпадают на $H^*(\mathcal{H})$ и $H^*(\mathcal{C})$ хотябы с точностью до изоморфизма.

Рассморим категорию $\mathbb{Z}_2$-пространств $\mathbb{Z}_2Spaces$. Каждое $\mathbb{Z}_2$-пространство удобно задавать парой (P,τ), где P - пространство, а $\tau: P \longrightarrow P$ - инволюция, $\tau^2 = id$. Окружность $S^1 = SO(2)$ будем считать $\mathbb{Z}_2$-пространством (S^1, τ_{S^1}), $\tau_{S^1}: \theta \longmapsto \theta^{-1}$. Пространство свободных петель Y^{S^1} снабдим инволюцией $\tau: f \longmapsto f \circ \tau_{S^1}$. Это как раз геометрическая инволюция, возникающая из рефлексивной структуры на $\Gamma.(|\Omega.Y|)$ (см. § 2.I). Далее нам понадобится $\mathbb{Z}_2$-эквивариантный аналог теории минимальных моделей Сулливана: каждому нильпотентному $\mathbb{Z}_2$-пространству сопоставляется минимальная $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебра. Докажем, что $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебра $(\mathcal{H}, h)$ является минимальной моделью для (Y^{S^1}, τ) (заметим, что Y^{S^1} нильпотентно - см., например, [39]). Тем самым совпадение h и τ в когомологиях $H^*(\mathcal{H})$ будет доказана.

Характеризуем сначала $\mathbb{Z}_2$-пространство (Y^{S^1}, τ) некоторым универсальным свойством. Пусть $ev: Y^{S^1} \times S^1 \longrightarrow Y$ - отображение взятия значения. Для любого $\mathbb{Z}_2$-пространства Z имеется биективное отображение $\varphi \longmapsto \varphi^\vee$

$$Hom_{\mathbb{Z}_2 Spaces}(Z, Y^{S^1}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2 Spaces}(Z \times S^1, Y),$$

где $\mathbb{Z}_2$ действует на $Z \times S^1$ диагонально, а $Y = (Y, id)$. Оно строится по следующей диаграмме в категории $\mathbb{Z}_2 Spaces$

$$\begin{tikzcd} Z \times S^1 \arrow[dr, "\varphi^\vee"] \arrow[d, "\varphi \times 1_{S^1}"'] & \\ Y^{S^1} \times S^1 \arrow[r, "ev"'] & Y \end{tikzcd}$$

Биективность отображения $\varphi \mapsto \varphi^\vee$ означает, что $\mathbb{Z}_2$-пространство (Y^{S^1}, τ) и отображение ev универсальны: они единственны, удовлетворяющие этим условиям.

Рассмотрим теперь двойственную ситуацию в категории $\mathbb{Z}_2$-DGC-

алгебр. Ясно, что $\mathbb{Z}_2$-пространству соответствует модель $\mathcal{M} = (\mathcal{M}Y, id)$; для (S^1, τ_{S^1}) имеем модель $(\{\Lambda\langle\xi\rangle\}, \xi \mapsto -\xi)$, $|\xi| = 1$. С целью построить $\mathbb{Z}_2$-модель для (Y^{S^1}, τ) построим $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебру $\mathcal{N}$ и морфизм $\varepsilon : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \Lambda\langle\xi\rangle$ универсальные в следующем смысле: для произвольной $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебры A отображение $\varphi \mapsto \varphi^\vee$

$$Hom_{\mathbb{Z}_2 DGCA}(\mathcal{N}, A) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2 DGCA}(\mathcal{M}, A \otimes \Lambda\langle\xi\rangle),$$

построенное по коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \Lambda\langle\xi\rangle & \xleftarrow{\ \varphi^\vee\ } & \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi \otimes 1_{\Lambda\xi}} & & \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \otimes \Lambda\langle\xi\rangle & \xleftarrow{\ \varepsilon\ } & \end{array}$$

является биективным.

Морфизм $\varphi^\vee : \mathcal{M} = \Lambda X \longrightarrow A \otimes \Lambda\xi$ определяется своим значением на X. Для каждого $x \in X$ элемент $\varphi^\vee(x)$ разлагается в сумму $\varphi^\vee(x) = \ell(x) \otimes 1 + m(x) \otimes \xi$, что определяет линейные отображения $\ell, m : X \longrightarrow A$ степеней 0 и -1. Так как $\varphi^\vee$ $\mathbb{Z}_2$-эквивариантно, а инволюция h на ΛX действует тривиально, имеем $h\ell(x) \otimes 1 + hm(x) \otimes (-\xi) = \ell(x) \otimes 1 + m(x) \otimes \xi$. Значит, $h\ell(x) = \ell(x)$, $hm(x) = -m(x)$. Таким образом, $\mathcal{N}$ как $\mathbb{Z}_2$-GC-алгебра имеет вид $(\Lambda(X \oplus \bar{X}), h) = (\mathcal{H}, h)$, $hx = x$, $h\bar{x} = -\bar{x}$, а $\varepsilon : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \Lambda\xi$ определяется по формулам $\varepsilon(x) = x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x} \otimes \xi$. Это и есть универсальное решение нашей задачи в категории $\mathbb{Z}_2 GCA$. Определим теперь дифференциал на $\mathcal{N}$ так как на $\mathcal{H}$: $\delta(x) = dx$, $\delta(\bar{x}) = -\beta(dx)$. Тогда уже легко проверяется, что $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебра $\mathcal{N} = (\mathcal{H}, h)$ и отображение ε являются универсальными (в выше описанном смысле) в категории $\mathbb{Z}_2 DGCA$. Обозначим через $\mathcal{N}'$ $\mathbb{Z}_2$-модель для

(Y^{S^1}, τ). Отображение взятия значения $ev: Y^{S^1}\times S^1 \longrightarrow Y$ порождает морфизм $\mathbb{Z}_2$-DGC-алгебр $\lambda: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}'\otimes \Lambda\xi$. Ввиду универсальности $\mathcal{N}$, существует морфизм $\hat{\lambda}: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$, для которого $(\hat{\lambda}\otimes 1_{\Lambda\xi})\circ \varepsilon = \lambda$.

Рассмотрим теперь расслоение $Y^{S^1} \xrightarrow{\pi} Y$, $\pi(f) = f(1)$, $1\in S^1$, со слоем ΩY - пространством петель. Это расслоение допускает сечение $\sigma: Y \longrightarrow Y^{S^1}$, $y \longmapsto f_y$, где $f_y(\theta) = y$ для любого $\theta\in S^1$. Итак, получаем диаграмму $\mathbb{Z}_2$-пространств

$$\Omega Y \longrightarrow Y^{S^1} \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Y,$$

которая порождает диаграмму в категории $\mathbb{Z}_2 DGCA$

$$\mathcal{M} \underset{\sigma^*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}' \longrightarrow (\{\Lambda\bar{X}, 0\}, h),$$

где $\sigma^*\circ\pi^* = id$, а $(\Lambda\bar{X}, h)$, $h\bar{x} = -\bar{x}$, - $\mathbb{Z}_2$-модель пространства петель $\Omega Y \subset Y^{S^1}$ (см. пример 2.2.3(ii)). Теперь из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{N}' \arrow[dl, shift left, "\sigma^*"] \arrow[dr] & \\
\mathcal{M} \arrow[ur, shift left, "\pi^*"] \arrow[dr, shift left, "\bar{\pi}"] & & \Lambda\bar{X} \\
 & \mathcal{N} \arrow[ul, shift left, "\bar{\sigma}"] \arrow[uu, "\hat{\lambda}"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

где $\bar{\pi}$ и $\bar{\sigma}$ определены по формулам $\bar{\pi}(x) = x\otimes 1$, $\bar{\sigma}(x\otimes 1) = x$, $\bar{\sigma}(1\otimes\bar{x}) = 0$, вытекает, что $\hat{\lambda}$ биекция, т.е. изоморфизм в категории $\mathbb{Z}_2 DGCA$. Это доказывает пункт (i) теоремы.

Рассмотрим далее расслоение на окружности

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r] & EO(2)\times Y^{S^1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & EO(2)\times_{S^1} Y^{S^1} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
 & Y^{S^1} & ES^1\times_{S^1} Y^{S^1}
\end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

Заметим, что над каждой точкой $[u, f] \in EO(2)\times_{S^1} Y^{S^1}$ имеется каноническое вложение слоя $S^1 \hookrightarrow EO(2)\times Y^{S^1}$, заданное формулой $\theta \mapsto (u\theta^{-1}, \theta f)$. Таким образом, расслоение ориентировано и мы можем рассмотреть кусок последовательности Гизина

$$H^{*-2}(ES^1\times_{S^1} Y^{S^1};Q) \xrightarrow{J} H^*(ES^1\times_{S^1} Y^{S^1};Q) \xrightarrow{I} H^*(Y^{S^1};Q) \quad (2.3.3)$$

На тотальном пространстве расслоения (2.3.2) действует группа $\mathbb{Z}_2$ посредством инволюции $(u,f) \mapsto (ur, rf)$. Возникает отображение из слоя над точкой $[u,f]$ в слой над точкой $[ur, rf]$:

$$\theta = (u\theta^{-1}, \theta f) \longmapsto (u\theta^{-1}r, r\theta f) = (ur\theta, \theta^{-1}rf) = \theta^{-1},$$

меняющее ориентацию расслоения. Теперь напомним, что гомоморфизм Гизина $J: H^{*-2}(Z;Q) \longrightarrow H^*(Z;Q)$, $Z = ES^1\times_{S^1} Y^{S^1}$, отождествляется с дифференциалом спектральной последовательности Серра расслоения (2.3.2)

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p-2,1} & \xrightarrow{\quad d_2 \quad} & E_2^{p,0} \\ \| & & \| \\ H^{p-2}(Z;Q)\otimes H^1(S^1;Q) & & H^p(Z;Q)\otimes H^0(S^1;Q) \end{array}$$

который конечно является $\mathbb{Z}_2$-эквивариантным. Тогда гомоморфизм J антиэквивариантен, т.к. антиэквивариантно отождествление $H^{p-2}(Z;Q)$ и $H^{p-2}(Z;Q)\otimes H^1(S^1;Q)$. С другой стороны, отображение J является антиэквивариантным относительно инволюции h, т.к. оно индуцируется умножением на элемент ω (см. [38]), а $h(\omega) = -\omega$ по определению.

Итак, у нас есть точная последовательность

$$H^*(\mathcal{C}) \xrightarrow{\quad J \quad} H^*(\mathcal{C}) \xrightarrow{\quad I \quad} H^*(\mathcal{H}),$$

изоморфная последовательности (2.3.3). Она снабжена инволюциями r и h, причем, как уже доказано, $r = h$ на $H^*(\mathcal{H})$ и выполняются равенства $Jr + rJ = 0$, $Jh + hJ = 0$, $Ir = rI$, $Ih = hI$.

. Теперь для доказательства пункта (ii) достаточно построить автоморфизм λ модуля $H^*(\mathcal{C})$, переводящий r в h, в том смысле, что $r\lambda = \lambda h$. Положим $\lambda = \frac{1}{2}(1+rh)$, тогда $r\lambda = \frac{1}{2}(r+r^2h) = \frac{1}{2}(r+h) = \frac{1}{2}(rh+1)h = \lambda h$. Остается только показать, что λ изоморфизм.

Рассмотрим фильтрацию $H^*(\mathcal{C}) = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$, где $F_n = im\, J^n$, $n = 1, 2, \dots$ Заметим, что λ коммутирует с J: $J\lambda = \frac{1}{2}(J - rJh) = \lambda J$. Получаем коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F_n/F_{n+1} & \xrightarrow{J_n} & F_{n+1}/F_{n+2} \\ \lambda_n \downarrow & & \downarrow \lambda_{n+1} \\ F_n/F_{n+1} & \xrightarrow{J_n} & F_{n+1}/F_{n+2} \end{array} \tag{2.3.4}$$

где отображения λ_n и J_n индуцированы отображениями λ и J соответственно. Отображение I индуцирует изоморфизм $F_0/F_1 \xrightarrow{\cong} im\, I$, т.к. $F_1 = im\, J \cong ker\, I$. Вместе с равенством $I\lambda = \frac{1}{2}(I + rIh) = \frac{1}{2}(1+rh)I = I$ (вспомним, что $r = h$ на $H^*(\mathcal{H})$) это доказывает биективность отображения λ_0. Теперь по индукции из сюръективности J_n и коммутативности диаграммы (2.3.4) следует сюръективность всех λ_n. В силу конечномерности наших градуированных модулей в каждой размерности получаем, что все λ_n - изоморфизмы. Далее опять по индукции доказываем, что λ индуцирует изоморфизмы $F_0/F_n \longrightarrow F_0/F_n$ для всех n. Пусть F_n имеет градуировку $F_n = \bigoplus_{i \geq 0} F_n^i$. Из того, что $deg\, J = 2$ вытекает, что заведомо $F_n^k = 0$, когда $k < 2n$. Следовательно, λ - изоморфизм в каждом прямом слагаемом F_0^i, что и требовалось доказать. $\square$

2.3.3. Следствие. Для односвязного пространства Y гомологии $H_{*+1}(Y; \mathbb{Q})$ выделяются прямым слагаемым в ${}^{+1}HD_*(Y; \mathbb{Q})$.

Доказательство. В работе [39] доказано, что $H_{*+1}(Y;\mathbb{Q})$ выделяется прямым слагаемым в $HC_*(Y;\mathbb{Q})$. Причем вложение реализуется отображением DG-модулей $\{\Lambda X, d\} \to \mathscr{C} = \{\Lambda(\langle\omega\rangle \oplus X \oplus \bar{X}, d_c\}$ степени -1, заданным формулой $u \mapsto (-1)^{|u|} 1 \otimes \beta(u)$. Теперь достаточно заметить, что образ этого отображения лежит в антиинвариантной части ${}^{-1}\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$. $\square$

§ 2.4. Вычисления.

Настоящий параграф содержит вычисления циклических и диэдральных гомологий с рациональными коэффициентами для пространств $Y = \mathbb{C}P^m, \mathbb{H}P^m, Q^{2m}, Gr_{\mathbb{C}}(2,n)$, $n = 4, 5, 6$.

Начнем с рассмотрения длинной точной последовательности

$$\ldots \to H^{*+1}(\mathscr{H}) \xrightarrow{B} H^*(\mathscr{C}) \xrightarrow{J} H^{*+2}(\mathscr{C}) \xrightarrow{I} \tag{2.4.I}$$
$$\xrightarrow{I} H^{*+2}(\mathscr{H}) \to \ldots$$

ассоциированной с короткой точной последовательностью (см. § 2.3)

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\cdot\omega} \mathscr{C} \xrightarrow{i} \mathscr{H}$$

Отметим, что отображения I и J уже рассматривались в § 2.3, а отображение B на представителях задается формулой $y \mapsto 1 \otimes \beta(y)$. Для краткости обозначим $HH^* = H^*(\mathscr{H})$, $HC^* = H^*(\mathscr{C})$. Градуированный модуль HH^* обладает естественным дифференциалом $B' = IB$ степени -1. Из точной последовательности (2.4.I) вытекает $B'^2 = IBIB = 0$.

2.4.I. Лемма. Имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{im} J/\operatorname{im} J^2 \xrightarrow{a} H_*(HH^*, B') \xrightarrow{b} \ker J \cap \operatorname{im} J \to 0,$$

где отображения a и b задаются формулами $a: [Jx] \mapsto [Ix]$, $b: [y] \mapsto By$.

Доказательство. Здесь будем часто пользоваться точностью последовательности (2.4.I) без отдельного упоминания. Корректность отображений a и b проверяется непосредственно. Разберем случай отображения a. Если $Jx = Jx'$, то найдется такой $y \in HH^*$, что $x - x' = By$. Следовательно, $I(x-x') = IBy$ т.е. Ix и Ix' гомологичны. Далее доказательство проведем по пунктам $(i) - (iii)$.

(i) Мономорфность a. Если $Ix = IBy$, то $I(x - By) = 0$ и найдется такой z, что $x - By = Jz$. Таким образом, $Jx = J^2 z$, т.е. $[Jx] = 0$ в фактормодуле $im\, J / im\, J^2$.

(ii) Точность в среднем члене. Имеем $b \cdot a [Jx] = BIx = 0$, а такие y, что $By = 0$, представляются в виде $y = Ix$, что означает $[y] = a[Jx]$.

(iii) Эпиморфность b. Пусть $z \in \ker J \cap im\, J$. Тогда существует такой y, что $z = By$, причем $IBy = Iz = 0$. □

2.4.2. Замечание. Как обычно можно рассмотреть приведенный вариант наших (ко)гомологий $\widetilde{HH}^*$ и $\widetilde{HC}^*$. Нетрудно проверить, что $HH^* \cong Q \oplus \widetilde{HH}^*$ и $HC^* \cong \Lambda\langle\omega\rangle \oplus \widetilde{HC}^*$. Имеет место приведенный аналог точной последовательности (2.4.I). Причем, как показано в [38] оператор J нильпотентен на $\widetilde{HC}^*$. Циклические гомологии будем называть квазисвободными, если $J = 0$ на $\widetilde{HC}^*$. Из леммы 2.4.I тогда вытекает, что квазисвободность эквивалентна равенству $H_*(\widetilde{HH}^*, B') = 0$.

Далее понадобится одна техническая лемма из работы [30].

2.4.3. Лемма ([30]). Пусть DGC-алгебра $\{E, d\}$ конечного типа (т.е. конечномерна в каждой размерности) имеет вид $E = A \otimes \Lambda Z$, где GC-алгебра A градуирована только четными степенями, а модуль Z - только нечетными степенями. Тогда, если $z \in Z$, $dz \in A$ не является делителем нуля, имеется изоморфизм $H^*(\bar{E},\bar{d}) \cong H^*(E,d)$, где $\bar{E} = E/(dz, z)$, а $\bar{d}$ индуцируется дифференциалом d. $\square$

2.4.4. Пример. Пусть $Y = \mathbb{C}P^m$ или $Y = \mathbb{H}P^m$. Тогда (см. пример 2.2.5) $\mathcal{M}Y = \{\Lambda\langle x, u\rangle, d\}$, $|x| = 2p$, $|u| = 2p(m+1)-1$, $dx = 0$, $du = x^{m+1}$, где $p = 1, 2$. Модель $\mathcal{H}(\mathcal{M}Y)$ имеет вид $\{\Lambda\langle x, u, \bar{x}, \bar{u}\rangle, d_H\}$, x, u - такие как выше, $|\bar{x}| = |x| - 1$, $|\bar{u}| = |u| - 1$, $d_H x = d_H \bar{x} = 0$, $d_H u = x^{m+1}$, $d_H \bar{u} = -\beta(x^{m+1}) = -(m+1)x^m\bar{x}$. Если к элементу u применим лемму 2.3.4, получим $H^*(\mathcal{H}) \cong H^*(\bar{\mathcal{H}})$, $\bar{\mathcal{H}} = \{\Lambda\langle x, \bar{x}, \bar{u}\rangle / x^{m+1}, \delta\}$, $\delta x = \delta \bar{x} = 0$, $\delta \bar{u} = x^m \bar{x}$. (Здесь мы линейной заменой убрали коэффициент $-(m+1)$). Таким образом, элементы x и $\bar{x}$ порождают идеал коциклов, а элемент $x^m\bar{x}$ - идеал кограниц в $\widehat{HH}^*$. Значит, имеются две серии когомологических классов в $\widehat{HH}^*$: $x^{n+1}\bar{u}^k$, $\bar{x}x^n\bar{u}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le n \le m-1$. Так как первая серия переводится во вторую посредством дифференциала $B' = IB$, то $H_*(\widehat{HH}^*, B') = 0$. Это означает квазисвободность циклических гомологий, т.е. $J = 0$, согласно замечанию 2.4.2. Теперь из приведенного варианта точной последовательности (2.4.I) получаем мономорфизм $I: \widehat{HC}^* \longrightarrow \widehat{HH}^*$, отображающий некоторый базис модуля $\widehat{HC}^*$ на элементы $\bar{x}x^n\bar{u}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le n \le m-1$. Следовательно, ряд Пуанкаре для приведенных циклических гомологий имеет вид

$$P_{HC}(t) = t^{-1} P_H(t) (1 - t^{2p(m+1)-2})^{-1},$$

где $P_H(t)$ - ряд Пуанкаре обыкновенных приведенных гомологий. Напомним теперь, что оператор h действует по формулам $\bar{x} \mapsto -\bar{x}$, $x \mapsto x$, $\bar{u} \mapsto -\bar{u}$, и из теоремы 2.3.2 получим ряды Пуанкаре для приведенных диэдральных гомологий

$$P_{\alpha HD}(t) = P_H(t)\, t^{(1+\alpha)[2p(m+1)-2]-1} (1 - t^{4p(m+1)-4})^{-1}, \quad \alpha = \pm 1.$$

2.4.5. Пример. Пусть $Y = Q^{2k}$ - квадрика в $\mathbb{C}P^{2k+1}$. Согласно примеру 2.2.5 (ii), $\mathcal{M}Y = \{\Lambda\langle x,y,u,v\rangle, d\}$, $|x|=2$, $|y|=2k$, $|u|=2k+1$, $|v|=4k-1$, $dx=dy=0$, $du=xy$, $dv=x^{2k}-y^2$. К DGC-алгебре $\mathcal{H}(\mathcal{M}Y) = \{\Lambda\langle x,y,\bar{x},\bar{y},u,v,\bar{u},\bar{v}\rangle, d_H\}$ дважды применяя лемму 2.4.3 получим

$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = \{\Lambda\langle\bar{x},\bar{y}\rangle \otimes \Lambda\langle x,y,\bar{u},\bar{v}\rangle/(xy,\, x^{2k}-y^2),\ \delta\},$$

$$\delta x = \delta y = \delta\bar{x} = \delta\bar{y} = 0,\quad \delta\bar{u} = -\beta(xy) = -x\bar{y} - \bar{x}y,$$

$$\delta\bar{v} = -\beta(x^{2k}-y^2) = -2kx^{2k-1}\bar{x} + 2y\bar{y}.$$

Рассмотрим для удобства разложение модуля HH^* на три части $HH^* = HH^*_{(0)} \oplus HH^*_{(1)} \oplus HH^*_{(2)}$: $HH^*_{(1)}$ состоит из элементов нечетной степени, $HH^*_{(2)}$ - из элементов, содержащих произведение $\bar{x}\bar{y}$, а $HH^*_{(0)}$ - остальная часть. Аналогичное разложение имеют модули $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$, $\mathcal{C}$ и HC^*. Дифференциал δ на базисе модуля $\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{(0)}$ легко вычисляется

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m) = [-2mk\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}x^{2k-1} - n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m y]\otimes\bar{x} +$$
$$+[-n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m x + 2m\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}y]\otimes\bar{y},$$

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m x) = [-2mk\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}x^{2k}]\otimes\bar{x} + [-n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m x^2]\otimes\bar{y}$$

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m x^l) = [-n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m x^{l+1}]\otimes\bar{y},\quad 1<l<2k,$$

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m x^{2k}) = 0,$$

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m y) = [-n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m x^{2k}]\otimes\bar{x} + [2m\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}x^{2k}]\otimes\bar{y}.$$

Следующие элементы из $\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{(0)}$ заведомо являются коциклами

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{u}^n\bar{v}^m x^{2k}, \\
\bar{v}^m y + 2m\bar{u}\bar{v}^{m-1}x^{2k-1}, \\
\bar{v}^m x - 2mk\bar{u}\bar{v}^{m-1}y - 2(m-1)mk\bar{u}^2\bar{v}^{m-2}x^{2k-1} \\
\bar{v}^m x^l,\quad 2\le l\le 2k-1.
\end{array}\right\} \quad (2.4.2)$$

Так как кограницы в $\overline{\overline{\mathcal{H}}}_{(0)}$ отсутствуют, все эти элементы образуют базис для некоторого подмодуля $\widehat{HH}^*_{(0)} \subseteq \widehat{\widehat{HH}}^*_{(0)}$. Из формул для дифференциала δ видно, что модуль $\overline{\overline{\mathcal{H}}}_{(2)}$ состоит целиком из циклов, а кограницами не являются только базисные элементы вида $\bar{u}^n \bar{v}^m \bar{x}\bar{y}$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. они представляют базис для $HH^*_{(2)}$. Отображение $B' : HH^*_{(1)} \longrightarrow HH^*_{(2)}$ является эпиморфизмом. Действительно, если $z = \bar{u}^n \bar{v}^m (x\bar{y} - ky\bar{x})$, $[z] \in HH^*_{(1)}$, то $B'[z] = [\beta(z)] = (k+1)\bar{u}^n \bar{v}^m \bar{x}\bar{y}$. Теперь из леммы 2.4.I и замечания 2.4.2 вытекает, что $im\, J \cap HC^*_{(2)} = 0$, т.е. имеет место изоморфизм $I : HC^*_{(2)} \longrightarrow HH^*_{(2)}$. Из точной последовательности (2.4.I) и нильпотентности J на $\widehat{HC}^*$ получаем, что $\widehat{HC}^*_{(0)} = 0$, следовательно, $HC^*_{(0)} \cong \Lambda\langle\omega\rangle$. С целью вычислить $HC^*_{(1)}$ рассмотрим комплекс градуированных модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{(0)} \xrightarrow{d_c} \mathcal{C}_{(1)} \xrightarrow{d_c} \mathcal{C}_{(2)} \longrightarrow 0.$$

Если вычислим эйлерову характеристику χ в каждой фиксированной размерности, то убедимся, что $\chi = 0$. В когомологиях это дает следующее равенство рядов Пуанкаре

$$P_{HC^*_{(1)}}(t) = tP_{HC^*_{(0)}}(t) + t^{-1}P_{HC^*_{(2)}}(t) = \frac{t}{1-t^2} + \frac{t^{2k-1}}{(1-t^{2k})(1-t^{4k-2})}.$$

Отображение $B : \widehat{\widehat{HH}}^*_{(0)} \longrightarrow HC^{*-1}_{(1)}$ - эпиморфизм, т.к. $\widehat{HC}^*_{(0)} = 0$. Получаем неравенства для размерностей

$$dim\,(\widehat{HH}^*_{(0)}) \leq dim\,(\widehat{\widehat{HH}}^*_{(0)}) \leq dim\,(HC^{*-1}_{(1)}).$$

Если теперь вычислим $dim\,(\widehat{HH}^*_{(0)})$ исходя из базиса (2.4.2), то получим ровно $dim\,(HC^{*-1}_{(1)})$. Значит, $\widehat{HH}^*_{(0)} = \widehat{\widehat{HH}}^*_{(0)}$, а $B : \widehat{\widehat{HH}}^*_{(0)} \longrightarrow HC^{*-1}_{(1)}$ - изоморфизм. Из (2.4.I) следует, что $J = 0$ на $HC^*_{(1)}$. Объединяя с ранее доказанным равенством $im\, J \cap HC^*_{(2)} = 0$, получаем, что $J = 0$ на всем модуле $\widehat{HC}^*$, что означает квазисвободность циклических гомологий в нашем случае. Ряд Пуанкаре для приведенных циклических гомологий имеет вид

$$P_{HC}(t) = P_{HC^*_{(1)}}(t) + P_{HC^*_{(2)}}(t) = \frac{t}{1-t^2} + \frac{t^{2k-1}+t^{2k}}{(1-t^{2k})(1-t^{4k-2})}.$$

В силу равенства $\frac{t}{1-t^2} + \frac{t^{2k-1}+t^{4k-1}}{(1-t^{4k-2})} = P_H(t)(1-t^{4k-2})^{-1}$

ряд $P_{HC}(t)$ можем записать в более удобном виде

$$P_{HC}(t) = \frac{P_H(t)t^{-1}}{1-t^{4k-2}} + \frac{t^{2k}(1+t^{4k-1})}{(1-t^{2k})(1-t^{4k-2})}.$$

Члены $(1-t^{2k})$ и $(1-t^{4k-2})$ в знаменателях отвечают антиинвариантным относительно инволюции h элементам $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Числители тоже антиинвариантны. Это позволяет сразу записать ряды Пуанкаре для приведенных диэдральных гомологий $P_{\alpha HD}(t) =$

$$= \frac{P_H(t)t^{(1+\alpha)(4k-2)-1}}{1-t^{8k-4}} + \frac{t^{4k}(1+t^{4k-1})(t^{-2\alpha k}+t^{2\alpha k+8k-4})}{(1-t^{4k})(1-t^{8k-4})}.$$

2.4.6. Пример. Пусть $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ - комплексное грассманово многообразие. Отметим, что $Gr_{\mathbb{C}}(2,4)$ изоморфно квадрике $Q^4 \subset \mathbb{C}P^5$, которая уже рассмотрена в примере 2.4.5. Разберем случай $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2,5)$. Согласно примеру 2.2.5 (iii),

$$MY = \{\Lambda\langle x,y,u,v\rangle, d\},\ |x|=2,\ |y|=4,\ |u|=7,\ |v|=9,$$

$$dx = dy = 0,\ du = x^4-3x^2y+y^2,\ dv = x^3y-2xy^2.$$

Далее будем действовать полностью аналогично примеру 2.4.5. Дважды применим лемму 2.4.3 к DGC-алгебре $\mathcal{H}(MY)$ и получим

$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = \{\Lambda\langle\bar{x},\bar{y}\rangle \otimes \Lambda\langle x,y,\bar{u},\bar{v}\rangle/(x^4-3x^2y+y^2,\ x^3y-2xy^2), \delta\},$$

$$\delta x = \delta y = \delta\bar{x} = \delta\bar{y} = 0,\quad \delta\bar{u} = (-4x^3+6xy)\bar{x} + (-3x^2+$$

$$+2y)\bar{y},\ \delta\bar{v} = (-3x^2+2y)\bar{x}^2 + (-x^3+4xy)\bar{y}.$$

Если фиксировать представители классов базиса когомологий модели

$$MY:\ \mathcal{B}Y = \{1, x, x^2, y, x^3, xy, x^4, x^2y, x^5, x^6\},$$

тогда значения дифференциала записывается однозначно

$$\delta(\bar{u}^n\bar{v}^m z) = [n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m F_{z,1} + m\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}F_{z,2}]\bar{x} +$$

$$+[n\bar{u}^{n-1}\bar{v}^m F_{z,3} + m\bar{u}^n\bar{v}^{m-1}F_{z,4}]\bar{y}$$

где $z \in \mathcal{B}(Y)$, а многочлены $F_{2,i} = F_{2,i}(x,y)$ перечислены в следующей таблице

	1	2	3	4
1	$-4x^3+6xy$	$3x^2y-2x^4$	$3x^2-2y$	$-x^3+4xy$
x	$-4x^4+6x^2y$	$-\frac{4}{5}x^5$	$3x^3-2xy$	$-x^4+4x^2y$
x^2	$-\frac{8}{5}x^5$	$-\frac{4}{5}x^6$	$3x^4-2x^2y$	$\frac{3}{5}x^5$
y	$-\frac{2}{5}x^5$	$-\frac{1}{5}x^6$	$-3x^2y+2x^4$	$\frac{2}{5}x^5$
x^3	$-\frac{8}{5}x^6$	0	$\frac{11}{5}x^5$	$\frac{3}{5}x^6$
xy	$-\frac{2}{5}x^6$	0	$\frac{4}{5}x^6$	$\frac{2}{5}x^6$
x^4	0	0	$\frac{11}{5}x^6$	0
x^2y	0	0	$\frac{4}{5}x^6$	0
x^5	0	0	0	0
x^6	0	0	0	0

Аналогично примеру 2.4.5 перечисляются некоторые представители классов гомологий из $\widehat{HH}^{*}_{(0)}$: $\bar u^n \bar v^m x^6$, $\bar u^n \bar v^m x^5$, $\bar u^n \bar v^m (4x^4 - 11x^2y)$, $\bar v^m x^4$, $\bar v^m x^3 - \frac{3}{4} m \bar u \bar v^{m-1} x^2 y$, $\bar v^m xy - \frac{m}{2} \bar u \bar v^{m-1} x^2 y$,

$\bar v^m x^2 + m \bar u \bar v^{m-1}(2xy - x^3) - \frac{1}{8}(m-1) m \bar u^2 \bar v^{m-2} x^2 y$,

$\bar v^m y - \frac{1}{2} m \bar u \bar v^{m-1} xy + \frac{1}{8}(m-1) m \bar u^2 \bar v^{m-2} x^2 y$,

$\bar v^m x + m \bar u \bar v^{m-1}(2y - x^2) + \frac{1}{2}(m-1) m \bar u^2 \bar v^{m-2}(x^3 - 3xy) +$

$+$

$+\frac{1}{4}(m-2)(m-1)m\,\bar{u}^3\bar{v}^{m-3}x^2y$; $n, m = 0, 1, 2, \ldots$

Оказывается, что эти элементы образуют базис модуля $\widetilde{HH}^*_{(0)}$, а модуль $HH^*_{(2)}$ обладает базисом $\bar{u}^n\bar{v}^m z\,\bar{x}\bar{y}$, $z \in \{1, x, y\}$; $n, m = 0, 1, \ldots$ Причем имеются изоморфизмы $HC^*_{(2)} \cong \widetilde{HH}^*_{(2)}$, $\widetilde{HH}^*_{(0)} \cong HC^{*-1}_{(1)}$ и $\widetilde{HC}^*_{(0)} = 0$, от куда вытекает квазисвободность циклических гомологий. Доказательство всех этих утверждений полностью аналогично рассуждениям из примера 2.4.5.

Если положим $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2, 6)$, то $\mathcal{M}Y = \{\Lambda\langle x, y, u, v\rangle, d\}$, $|x| = 2$, $|y| = 4$, $|u| = 10$, $|v| = 12$, $dx = dy = 0$, $du = f$, $dv = g$.

Аналогично разобранным случаям имеем

$$\bar{\mathcal{H}} = \{\Lambda\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle \otimes \Lambda\langle x, y, \bar{u}, \bar{v}\rangle / (x^5 - 4x^3y + 3xy^2, x^4y - 3x^2y^2 + y^3), \delta\},$$

$$\delta x = \delta y = \delta\bar{x} = \delta\bar{y} = 0, \quad \delta\bar{u} = (5x^4 - 12x^2y + 3y^2)\bar{x} + (-4x^3 + 6xy)\bar{y}, \quad \delta\bar{v} = (4x^3y - 6xy^2)\bar{x} + (x^4 - 6x^2y + 3y^2)\bar{y}.$$

Для модели $\mathcal{M}Y$ выберем представители базиса когомологий $BY = \{1, x, x^2, y, x^3, xy, x^4, x^2y, y^2, x^5, x^3y, x^6, x^4y, x^7, x^8\}$. Далее вычисляется значения дифференциала δ на элементах $\bar{u}^n\bar{v}^m z$, $z \in BY$, (значения многочленов $F_{z,i}$ перечислены в таблице на следующей странице). Далее совершенно аналогично находится базис модуля $\widetilde{HH}^*_{(0)}$ и доказывается, что элементы $\bar{u}^n\bar{v}^m z\,\bar{x}\bar{y}$, $z \in \{1, x, x^2, y, x^3, x^4\}$ составляют базис для $HH^*_{(2)}$, а из изоморфизмов $HC^*_{(2)} \cong HH^*_{(2)}$, $HC^{*-1}_{(1)} \cong \widetilde{HH}^*_{(0)}$, $\widetilde{HC}^*_{(0)} = 0$ выводится квазисвободность циклических гомологий.

Во всех трех случаях $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2, m)$, $m = 4, 5, 6$, циклические гомологии можно записать единообразно. Пусть многочлен $A_m(t)$ определен своими коэффициентами при t^k по формуле

$$\langle A_m(t), t^k\rangle = \max\{\langle P_H(t) - t^{2m} P_H(t^{-1}), t^k\rangle, 0\}.$$

Положим $B_m(t) = t^{2m-5} A_m(t) + t^{4m-4} A_m(t^{-1})$.

Тогда ряды Пуанкаре для приведенных циклических и диэдральных гомологий записываются в виде $(\alpha = \pm 1)$:

$$P_{HC}(t) = \frac{P_H(t)\, t^{-1}}{1 - t^{2m-2}} + \frac{B_m(t)}{(1 - t^{2m-4})(1 - t^{2m-2})},$$

$$P_{\alpha HD}(t) = \frac{P_H(t)\, t^{(1+\alpha)(2m-2)-1}}{1 - t^{4m-4}} + \frac{B_m(t)\,(t^{(2m-4)(1+\alpha)} + t^{\alpha(2m-4)+6m-8})}{(1 - t^{4m-8})(1 - t^{4m-4})}.$$

2.4.7. Замечание. Отметим, что вычисления циклических гомологий для случая квадрики и грассмановых многообразий являются новыми. Циклические гомологии оказываются квазисвободными, что подтверждает гипотезу [ЗФ], которая предполагает это для пространств, когомологии которых удовлетворяют условиям предложения 2.2.4. Приведенные формулы рядов Пуанкаре циклических и диэдральных гомологий для $Y = Gr_{\mathbb{C}}(2, m)$ можно доказать при всех m, если считать эту гипотезу верной в данном случае.

$z \backslash i$	1	2	3	4
1	$-5x^4+12x^2y-3y^2$	$-4x^3y+6xy^2$	$4x^3-6xy$	$-x^4+6x^2y-3y^2$
x	$-4x^5+8x^3y$	$-2x^6+4x^4y$	$4x^4-6x^2y$	$2x^3y$
x^2	$-4x^6+8x^4y$	$-\frac{4}{7}x^2$	$4x^5-6x^3y$	$2x^4y$
y	$-x^6+2x^4y$	$-\frac{1}{7}x^7$	$2x^5-4x^3y$	x^6-2x^4y
x^3	$-\frac{8}{7}x^7$	$-\frac{4}{7}x^8$	$4x^6-6x^4y$	$\frac{5}{7}x^2$
xy	$-\frac{2}{7}x^7$	$-\frac{1}{7}x^8$	$2x^6-4x^4y$	$\frac{2}{7}x^7$
x^4	$-\frac{8}{7}x^8$	0	$\frac{13}{7}x^7$	$\frac{5}{7}x^8$
x^2y	$-\frac{2}{7}x^8$	0	$\frac{4}{7}x^7$	$\frac{2}{7}x^8$
y^2	$-\frac{1}{14}x^8$	0	$\frac{1}{7}x^7$	$\frac{1}{14}x^8$
x^5	0	0	$\frac{13}{7}x^8$	0
x^3y	0	0	$\frac{4}{7}x^8$	0
x^6, x^4y, x^7, x^8	0	0	0	0

§ 3.I. Автоморфизмы многообразий и алгебраическая K-теория топологических пространств.

Рассмотрим категории компактных топологических многообразий TOP и компактных гладких многообразий $DIFF$. Группа гомеоморфизмов $Homeo(M,N)$ многообразия M, неподвижных на подмногообразии $N \subset M$, снабжается компактно открытой топологией, а группа аналогичных диффеоморфизмов $Diff(M,N)$ (здесь M и N - гладкие) - C^∞-топологией. Будем употреблять также обозначения A_{TOP} и A_{DIFF} для автоморфизмов $Homeo$ и $Diff$.

Далее нам понадобятся пространства конкордантностей

$$C_{CAT}(M) = A_{CAT}(M\times I, M\times\{0\}\cup \partial M\times I), \quad CAT = TOP, DIFF,$$

обладающие следующим свойствам (см. [22], [26]):

(I) Стабилизация. Существует естественная $\varphi_{CAT}(n)$-эквивалентность $C_{CAT}(M^n) \to C_{CAT}(M^n\times I)$. Здесь φ_{CAT} - возрастающая функция, стремящаяся в ∞, при $n \to \infty$. Известны оценки $\varphi_{TOP}(n) \geqslant \left[\frac{n-15}{7}\right]$, $\varphi_{DIFF} \geqslant \frac{1}{2}\varphi_{TOP}$. Предполагается, что $\varphi_{TOP}(n) \sim \frac{n}{4}$.

(2) Каноническая инволюция. Определим естественную (с точностью до гомотопии) инволюцию на $C_{CAT}(M)$. Для этого рассмотрим подгруппу $A^{\pi}_{CAT}(M\times I, \partial M\times I)$ тех автоморфизмов в $A_{CAT}(M\times I, \partial M\times I)$, которые коммутируют с проекцией на отрезок I. Композиция $C_{CAT}(M) \longrightarrow A_{CAT}(M\times I, \partial M\times I) \longrightarrow$

$$\to A_{CAT}(M\times I, \partial M\times I)/A^{\pi}_{CAT}(M\times I, \partial M\times I)$$

является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, естественная инволюция на

$$A_{CAT}(M\times I, \partial M\times I)/A^{\pi}_{CAT}(M\times I, \partial M\times I), \quad f \mapsto (1_M\times \partial)\circ f\circ(1_M\circ \partial),$$

где ∂ - отражение относительно середины отрезка I, индуцирует инволюцию на $C_{CAT}(M)$.

(3) Петлевая структура. Пространство $C_{CAT}(M\times I^k)$ обладает $(k+1)$-кратной структурой пространства пелель, т.к. на нем естественно действует операда $(k+1)$-мерных кубиков (см. [18]).

Заменим теперь топологические группы $A_{CAT}(M,N)$, $CAT=TOP, DIFF$, соответствующими сингулярными симплициальными группами для сравнения с большими группами $\widetilde{A}_{CAT}(M,N)$, которые могут быть определены только симплициально: k-мерный симплекс в $\widetilde{A}_{CAT}(M,N)$ - это CAT-автоморфизм многообразия $\Delta^k\times M$, тождественный на $\Delta^k\times N$ и сохраняющий отображения граней. Ясно, что $A_{CAT}(M,N)\subseteq \widetilde{A}_{CAT}(M,N)$. Определим пространство $\widetilde{A}_{CAT}/A_{CAT}$ как гомотопический слой отображения классифицирующих пространств

$$\widetilde{A}_{CAT}/A_{CAT}\longrightarrow BA_{CAT}\longrightarrow B\widetilde{A}_{CAT}.$$

3.I.I. Теорема ([22], [26]). Существуют гомотопические функторы S_{TOP}, S_{DIFF} из категории конечных клеточных пространств в категорию бесконечнократных пространств петель, такие, что

(i) для любого компактного (топологического, гладкого) многообразия M^n имеется гомотопическая $\varphi_{CAT}(n)$-эквивалентность ($CAT=TOP$, $DIFF$) $i_{CAT}: BC_{CAT}(M^n)\longrightarrow S_{CAT}(M^n)$;

(ii) существует инволюция $\tau: S_{CAT}(X)\to S_{CAT}(X)$, разлагающая $S_{CAT}(X)_{odd}$ (локализация вне двойки) в инвариантную и антиинвариантную части

$$S_{CAT}(X)_{odd}\cong Inv^{+1}S_{CAT}(X)\times Inv^{-1}S_{CAT}(X),$$

причем $\Omega i_{CAT}: C_{CAT}(M^n)\to\Omega S_{CAT}(M^n)$ - гомотопически эквивариантно, если $C_{CAT}(M^n)$ снабжено канонической инволюцией, а $S_{CAT}(M^n)$- инволюцией $(-1)^n\tau$;

(iii) имеет место гомотопическая $\varphi_{CAT}(n)$-эквиватентность

$$\pi_k A(M,\partial M)/\hat{A}_{CAT}(M,\partial M)\otimes\mathbb{Q}\cong\widetilde{KO}(\Sigma^k(M\sqcup *))\otimes\mathbb{Q}$$
$CAT = TOP, DIFF.$

Доказательство сводится к прямому построению пространства $S_{CAT}(M)$ как распетливания бесконечнократного пространства петель $\lim\limits_{k\to\infty} C_{CAT}(M\times I^k)$. Подробное доказательство можно найти в [26]. $\square$

Пусть $G(M,N)$ - пространство гомотопических самоэквивалентностей (с компактно открытой топологией) многообразия M неподвижных на N. Аналогично $\hat{A}_{CAT}$ можно определить симплициальное множество $\tilde{G}(M,N)$, гомотопически эквивалентное пространству $G(M,N)$. Определим теперь пространство

$$\tilde{G}(M,N)/\hat{A}_{CAT}(M,N)\simeq G(M,N)/\hat{A}_{CAT}(M,N)$$

как гомотопический слой естественного отображения

$$\hat{A}_{CAT}(M,N)\longrightarrow\tilde{G}(M,N).$$

Используя теорию перестроек можно доказать следующее утверждение.

3.1.2. Теорема ([26]). Для односвязного многообразия M имеют место изоморфизмы

$$\pi_k G(M,\partial M)/\hat{A}_{CAT}(M,\partial M)\otimes\mathbb{Q}\cong\widetilde{KO}(\Sigma^k(M\sqcup *))\otimes\mathbb{Q},$$

$CAT = TOP, DIFF.$

Остановимся теперь подробнее на результатах Ф.Вальдхаузена [41], относящиеся к алгебраической К-теории топологических пространств.

Пусть $R.$ - симплициальное или топологическое кольцо с единицей. Пусть $\pi : R.\longrightarrow\pi_0(R.)$ - проекция на компоненты связности Построим функтор $R.\longmapsto K(R.)$ в категорию бесконечнократных пространств петель следующим образом. Обозначим через $\widehat{GL}_n(R.)$ симплициальный монойд $n\times n$ матриц A, таких, что $\pi_0 A$ - обратимая матрица. Определим $\widehat{GL}_\infty(R.)$ как предел

$$\widehat{GL}_\infty(R.) = \lim_{n\to\infty} \widehat{GL}_n(R.)$$

относительно вкючения $\widehat{GL}_n(R.) \hookrightarrow \widehat{GL}_{n+1}(R.)$.

Заметим, что классифицирующее пространство $B\widehat{GL}_\infty(R.)$ имеет фундаментальную группу $\pi_1 B\widehat{GL}_\infty(R.) = GL_\infty(\pi_0 R.)$, обладающую совершенным коммутатором. Таким образом, можем применять плюс конструкцию Квиллена и определить

$$K(R.) = B\widehat{GL}_\infty(R.)^+ \times K_0(\pi_0(R.)),$$

где $K_0(A)$ обозначает алгебраический K_0-функтор дискретного кольца A. Исходя из связного топологического пространства X можно построить симплициальное кольцо следующим образом. Рассмотрим симплициальную группу петель Кана $\Omega.X$ на пространстве X (см. § 2.I) и образуем групповое кольцо $\mathbb{Z}[\Omega.X]$. Полагая $R. = \mathbb{Z}[\Omega.X]$ получаем определение алгебраического К-функтора топологических пространств $K(X) = K(\mathbb{Z}[\Omega.X])$. Каноническая инволюция на групповом кольце $\mathbb{Z}[\Omega.X]$: $g \mapsto g^{-1}$, $g \in \Omega.X$, определяет инволюцию на К-функторе $K(X)$ разлагая его на произведение симметрической и антисимметрической части $K^{sym}(X) \times K^{a}(X)$ после локализации вне двойки. Имеется также приведенный вариант К-функтора $\widetilde{K}(X)$, определенный как гомотопический слой отображения $K(X) \to K(*)$, индуцированного проекцией пространства X в отмеченную точку. Далее гомотопический функтор $X \mapsto L(X)$, принимающий значения в категории бесконечнократных пространств петель, будем называть гомологическим, если функтор $X \mapsto \pi_* L(X)$ является обобщенной теорией гомологий. Имеются два способа аппроксимировать функтор $K(X)$ гомологическими функторами. Во-первых, это стабилизированный К-функтор $K^{st}(X)$ с естественным преобразованием $\alpha : K(X) \to$ $\to K^{st}(X)$. Приведенный вариант функтора $K^{st}(X)$ определяется как предел $\tilde{K}^{st}(X) = \lim_{r\to\infty} \Omega^r \tilde{K}(\Sigma^r X)$ по отображениям $\tilde{K}(X) \to$ $\to \Omega\tilde{K}(\Sigma X)$. Во-вторых - гомологический функтор $h(\ ;K(*))$, отвечающий обобщенной теории гомологий со спектром $K(*)$, и естественное преобразование $\beta : h(\ ;K(*)) \to$ $\to K(X)$. Определим пространства $Wh_{DIFF}(X)$, $Wh_{TOP}(X)$ как гомотопический слой отображения α и кослой отображения β, т.е. существуют гомотопические расслоения бесконечнократных пространств петель

$$Wh_{DIFF}(X) \longrightarrow K(X) \xrightarrow{\alpha} K^{st}(X),$$
$$h(X;K(*)) \xrightarrow{\beta} K(X) \longrightarrow Wh_{TOP}(X).$$

Заметим, что все эти функторы обладают инволюциями, происходящими из канонической инволюции на групповом кольце, причем, преобразования функторов эквивариантны.

3.I.3. Теорема ([4I]). Существуют естественные преобразования

$$S_{CAT}(X) \longrightarrow \Omega Wh_{CAT}(X), \quad CAT = TOP, DIFF,$$

являющиеся рациональными гомотопическими эквивалентностями. Если X односвязно, тогда эти преобразования эквивариантны относительно заданных инволюций.

Теперь отметим следующий результат, выражающий симметрическую и антисимметрическую части алгебраического К-функтора топологических пространств через диэдральные гомологии.

3.I.4. Теорема ([I4]). Для односвязного пространства X имеют место естественные изоморфизмы

$$K^s_{*+1}(X)\otimes Q \cong {}^{-1}HD_*(X;Q);$$
$$K^a_{*+1}(X)\otimes Q \cong {}^{+1}HD_*(X;Q). \qquad \square$$

§ 3.2. Пространства гомотопических самоэквивалентностей.

В настоящем параграфе вычислены рациональные гомотопические группы пространства гомотопических самоэквивалентностей $G(M)$ для многообразий $M = \mathbb{C}P^m, \mathbb{H}P^m, Q^{2m}, Gr_{\mathbb{C}}(2, m)$ (см. § 2.2) используя технику Сулливана [37].

Будем использовать соглашения и сокращения из § 2.2. Каждой DGC-алгебре $\{\Lambda, d\}$ сопоставим DG-алгебру Ли $\{L(\Lambda), \delta\}$ следующим образом. Как градуированный модуль

$L(\Lambda) = \bigoplus_{i \geq 0} L_i(A)$,

где $L_i(\Lambda)$ - модуль всех дифференцирований алгебры Λ степени $-i$, коммутирующих с d в случае, когда $i = 0$. Скобка Ли и дифференциал δ определяются по формулам:

$$[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - (-1)^{ij} \psi \circ \varphi, \quad \varphi \in L_i(\Lambda), \ \psi \in L_j(\Lambda);$$

$$\delta : L_i(\Lambda) \to L_{i-1}(\Lambda), \ \delta(\varphi) = d \circ \varphi - (-1)^i \varphi \circ d.$$

3.2.I. Теорема ([37]). Пусть Y - односвязное конечное клеточное простpанство, а $\mathcal{M}Y$ - минимальная модель. Тогда $\{L(\mathcal{M}Y), \delta\}$ - модель квилленовского типа для $BG(Y)$. В частности, $H_*(L(\mathcal{M}Y), \delta) \cong \pi_*(\Omega BG(Y)) \otimes \mathbb{Q} \cong$ $\cong \pi_* G(Y) \otimes \mathbb{Q}$. $\square$

Проведем теперь вычисления для наших примеров, записывая рее вультаты в виде рядов Пуанкаре $P_\pi(t)$ градуированного модуля $\pi_* G(Y) \otimes \mathbb{Q}$.

3.2.2. Пример. Пусть $Y = \mathbb{C}P^m, \mathbb{H}P^m$. Тогда минимальная модель имеет вид $\mathcal{M}Y = \{\Lambda\langle x, u\rangle, d\}$, $|x| = 2p$, $|u| = 2p(m+1) - 1$, $dx = 0$, $du = x^{m+1}$, $p = 1, 2$ (см. пример 2.2.5(i)). Обозначим дифференцирование алгебры $\mathcal{M}Y$ переводящее образующее a в образующую b и зануляющее другие образующие, через (a, b). Имеем следующий базис для $L(\mathcal{M}Y)$: $(x,1)$, (y, x^i), $0 \le i \le m$. Отметим, что $\delta(x,1) = (m+1)(y, x^m)$.

Действительно, $\delta(x,1)(x) = d[(x,1)(x)] + (x,1)(dx) = = 0 = (m+1)(y, x^m)(x)$, $\delta(x,1)(y) = d[(x,1)(y)] + + (x,1)(dy) = 0 + (m+1)x^m = (m+1)(y, x^m)(y)$.

По размерностным причинам $\delta(y, x^i) = 0$, $0 \le i < m$. Следовательно, элементы (y, x^i), $0 \le i < m$, образуют базис для гомологий $H_*(L(\mathcal{M}Y), \delta)$. Теперь, используя теорему 3.2.I, получим искомый ряд Пуанкаре

$$P_\pi(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^{\deg(y, x^i)} = \sum_{j=1}^{m} t^{2pj+1}.$$

3.2.3. Пример. Пусть $Y = Q^{2m}$ - квадрика в $\mathbb{C}P^{2m+1}$. Согласно примеру 2.2.5 (ii) минимальная модель имеет вид $\mathcal{M}Y = \{\Lambda\langle x, y, u, v\rangle, d\}$, $|x| = 2$, $|y| = 2m$, $|u| = = 2m+1$, $|v| = 4m-1$, $dx = dy = 0$, $du = xy$, $dv = x^{2m} - y^2$.

Модуль $L(\mathcal{M}Y)$ порожден нечетными элементами (u, x^i), $0 \le i \le m-1$, (u, y), (v, x^i), $0 \le i \le 2m-1$, $(v, x^i y)$, $0 \le i \le m-2$, и четными - (y, x^i), $0 \le i \le m-1$, $(x,1)$, (v, u).

Дифференциал δ нетривиален на четных элементах

$$\delta(y, x^i)(u) = d[(y, x^i)(u)] + (y, x^i)(du) = (y, x^i)(xy) = x^{i+1};$$

$$\delta(x,1)(u) = d[(x,1)(u)] + (x,1)(du) = (x,1)(xy) = y \ne 0$$

$$\delta(v, u)(v) = d[(v, u)(v)] + (v, u)(du) = du = xy \ne 0.$$

Причем δ является мономорфизмом. Действительно, из размерностных соображений достаточно проверить, что линейно независимы пары элементов $\delta(x,1)$, $\delta(y, x^{m-1})$ и $\delta(y, x)$, $\delta(v, u)$.

Но это очевидно из равенств $\delta(x,1)(u)=y$, $\delta(y,x^{m-1})(u)=x^m$ и $\delta(y,x)(u)=x^2$, $\delta(v,u)(u)=0$. Таким образом, дифференциал δ четномерную часть градуированного модуля $L(\mathcal{M}Y)$ мономорфно отображает в нечетномерную часть. Следовательно, ряд Пуанкаре $P_\pi(t)$ выражается в виде разницы

$$P_\pi(t)=4t+3(t^3+\ldots+t^{2m-1})+2t^{2m+1}+(t^{2m+3}+\ldots$$
$$\ldots+t^{4m-1})-t^{-1}[2t^2+t^4+\ldots+t^{2m-4}+2t^{2m-2}+t^{2m}]=$$
$$=\sum_{i=1}^{2m}t^{2i-1}+\sum_{i=1}^{m-2}t^{2i-1}+t^{2m-1}(1+t^2).$$

3.2.4. Пример. Пусть $Y=Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ - многообразие Грассмана. Как показано в примере 2.2.5 (iii), минимальная модель имеет вид

$$\mathcal{M}(Y)=\{\Lambda\langle x,y,u,v\rangle,d\},\ |x|=2,\ |y|=4,\ |u|=2m-3,\ |v|=$$
$$=2m-1,\ dx=dy=0,\ du=f(x,y),\ dv=g(x,y),$$

где $f(x,y)=s_{m-1}(x,y)$, $g(x,y)=y\,s_{m-2}(x,y)$,

$$s_n(x,y)=\sum_{0\le i\le[\frac{n}{2}]}(-1)^{n-i}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}y^i.$$

Градуированный модуль $L(\mathcal{M}Y)$ обладает нечетномерными образующими вида (u,x^iy^j), (v,x^iy^j) и четномерными образующими $(y,1)$, $(x,1)$, (y,x), (v,u) . Дифференциал δ на четномерных образующих мономорфен. Действительно, $\delta(y,1)\neq 0$, т.к. $\delta(y,1)(u)=(y,1)(f(x,y))\neq 0$, а для доказательства линейной независимости дифференцирований заметим, что

$$\delta(v,u)(v)=du+(v,u)(dv)=f(x,y)\neq 0,$$
$$\delta(v,u)(u)=d[(v,u)(u)]+(v,u)(du)=0.$$

Следовательно, достаточно убедиться в линейной независимости $\delta(x,1)(u) = (x,1)(f(x,y))$ и $\delta(y,x)(u) = (y,x)(f(x,y))$.

Это без труда проверяется прямым вычислением.

Теперь, аналогично примеру 3.2.3, ряд Пуанкаре вычисляется как разность

$$P_\pi(t) = \sum_{i=1}^{m}(m-i+1)t^{2i-1} - t^{-1}(3t^2+t^4) =$$

$$= (m-3)t + (m-2)t^3 + \sum_{i=3}^{m}(m-i+1)t^{2i-1}.$$

§ 3.3. Рациональные гомотопические группы пространств автоморфизмов многообразий.

В настоящем параграфе суммируется все вычисления и при помощи результатов, приведенных в § 3.I, формулируются ответы через размерности диэдральных гомологий с рациональными коэффициентами (см. § 2.4) и ранги гомотопических групп пространств гомотопических самоэквивалентностей (см. § 3.2). Вычисления рангов гомотопических групп пространств автоморфизмов проводятся для следующих многообразий: комплексное проективное многообразие $\mathbb{C}P^m$, кватернионное проективное многообразие $\mathbb{H}P^m$, квадрика Q^{2m} в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{2m+1}$ и грассманово многообразие $Gr_{\mathbb{C}}(2,m)$ двумерных комплексных плоскостей в пространстве $\mathbb{C}^m$. На все эти многообразия будем ссылаться как на многообразия из списка.

3.3.I. Теорема. Для многообразий M^n из списка при условии $k \in \varphi_{TOP}(n+2l)$ выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Homeo}(M\times D^{2l},\partial) = \dim{}^{-1}\widetilde{HD}_{k+1}(M;Q) - \dim \widetilde{H}_{k+2}(M;Q) +$$

$$+\operatorname{rank} \pi_{k+2l} G(M) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim \widetilde{H}_{k+4i+\varepsilon}(M;Q),\quad \varepsilon = (-1)^{\frac{n}{2}+l}.$$

Доказательство. Если прямо воспользоваться теоремой, приведенной на стр. 4 введения, то нужное равенство прямо следует из точной гомотопической последовательности расслоения

$$G(M,\partial M)/\operatorname{Homeo}(M,\partial M) \to B\operatorname{Homeo}(M,\partial M) \to BG(M,\partial M)$$

и того факта, что градуированные модули $\pi_* G(M)\otimes Q$ ненулевые только в нечетных размерностях, как показывают вычисления в § 3.2. Отметим также, что здесь мы пользуемся следующим равенством

$$\pi_k G(M\times D^2, \partial) = \pi_k G(M\times D^2, M\times S^{2-1}) \cong \pi_{k+2} G(M).$$

3.3.2. Теорема Для многообразий M^n из списка при условии $k \le \varphi_{DIFF}(n+m)$ выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Diff}(M\times D^m, \partial) = \operatorname{rank} \pi_k \operatorname{Homeo}(M\times D^m, \partial),$$

когда $m = 2l$;

$$= \dim^{+1} \widetilde{HD}_{k+1}(M;\mathbb{Q}) +$$

$$+ \operatorname{rank} \pi_{k+m} G(M) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim \widetilde{H}_{k+4i+2}(M;\mathbb{Q}),$$

когда $m = 2l+1$.

Доказательство см. ниже. □

Отметим некоторые пересечения настоящей работы с известными результатами. Дайер, Хопкинс и Кан в статье [28]доказали более сильное утверждение, чем следствие I.2.5: соответствующие гомотопические категории эквивалентны как замкнутые модельные категории по Квиллену. Теорема I.3.6 анонсирована автором для циклических и диэдральных гомологий в [7] раньше, чем она появилась у Бургеля и Федоровича [24]для циклических гомологий (она отсутствовала в препринте к этой статье). Изоморфизм 2.I.4 (ii) был анонсирован рядом авторов: Гудвилли, Бургеля, Федоровичем и др. Первое полное доказательство этого изоморфизма появилось в работе [24]. Вычисления рациональных гомотопических групп пространств автоморфизмов односвязных многообразий раньше были проведены только (кроме D^m и S^m) для $M\times D^m$, $M = \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2$ и только для размерностей $\le \min\{\varphi_{CAT}(\dim M+m), \dim M-2\}$. Эти результаты полностью согласуются с нашими вычислениями.

Доказательство теоремы 3.3.2. В четномерном случае получается розно такой же результат, как и для гомеоморфизмов. Это следует из рациональной гомотопической эквивалентности

$$K^s(*) \underset{\mathbb{Q}}{\cong} K^{st}(*).$$

Действительно, известно, что

$$K_i(*)\otimes\mathbb{Q} = K_i(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0, \\ \mathbb{Q}, & i=4k+1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Каноническая инволюция на $K(*)$ (определена в § 3.1) действует так, что

$$K_i^s(*)\otimes\mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0, \\ 0, & i\neq 0. \end{cases}$$

С другой стороны, изоморфизм

$$K_i^{st}(*)\otimes\mathbb{Q} \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0, \\ 0, & i\neq 0, \end{cases}$$

доказан Вальдхаузеном в работе [41].

ЛИТЕРАТУРА

I. Бабенко И.К. О вещественных гомотопических свойствах полных пересечений // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1979.Т.43.№5.С.I004-I024.

2. Борель А. О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли. - В сб.: Расслоенные пространства и их приложения. - М.: ИЛ, 1958. С.163-246.

3. Боусфилд О.Н., Гугенхейм В.К.А.М. О PL -теории Де Рама и рациональном гомотопическом типе. - В кн. Гомотопическая теория дифференциальных форм. М.: Мир, I98I. С.86-I7I.

4. Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, I97I.

5. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.

6. Красаускас Р.Л. О кососимплициальных группах // Тезисы XXУII конференции Литовского математического общества. Вильнюс: ВГУ. 1986. С.9-I0.

7. Красаускас Р.Л. Минимальные модели для вычисления циклических и диэдральных гомологий // XУIII конференция молодых ученых МГУ, механико-математический фак. 1986. С. 49-50.

8. Красаускас Р.Л. Кососимплициальные группы // Литовский мат. сборник. 1987. Т.27. № I. С. 89-99.

9. Красаускас Р.Л. Рациональный тип гомеоморфизмов квадрики в комплексном проективном пространстве // XXУIII конференция Литовского математического общества: Тезисы докладов. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР. 1987. С. I70-I7I.

I0. Красаускас Р.Л. Мултипликативная бесконечнократно петлевая структура в алгебраической К-теории // Мат. заметки. 1986. Т.39. Вып.6. С. 850-858.

II. Красаускас Р.Л., Лапин С.В., Соловьев Ю.П. Диэдральные гомологии когомологии // Вестник МГУ. Сер.I. Матем., мех. 1987. № 4. С. 28-32.

12. Красаускас Р.Л., Лапин С.В., Соловьев Ю.П. Диэдральные гомологии и когомологии. Основные понятия и конструкции // Мат. сборник. 1987. № 5. С. 25-48.

13. Красаускас Р.Л., Соловьев Ю.П. Диэдральные гомологии и эрмитова К-теория топологических пространств // УМН. 1986. Т.41. Вып.2. С. 195-196.

14. Красаускас Р.Л., Соловьев Ю.П. Некоторые топологические приложения эрмитовой К-теории // Тезисы Бакинской международной топологической конференции. 1987. Ч.2. С. 157.

15. Лапин С.В. Диэдральные гомологии $A[x]$, $A[x, x^{-1}]$ и некоторых других алгебр // Мат. заметки. 1987. Т.41. № 2. С. 238-247.

16. Лапин С.В. Диэдральные гомологии тензорной алгебры и колец косых многочленов // Вестник МГУ. Сер.I. Матем., мех. 1987. № 6. С. 65-67.

17. Леманн Д. Гомотопическая теория дифференциальных форм. - В кн. Гомотопическая теория дифференциальных форм. М.: Мир, 1981. С. 7--83.

18. Мэй Дж. Геометрия итерированных пространств петель. - В кн. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических протсранствах. М.: Мир, 1977.

19. Цыган Б.Л. Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда // УМН. 1983. Т.38. Вып.2. С. 217-218.

20. Цыган Б.Л. О гомологиях некоторых матричных супералгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т.20. № 2. С. 90-91.

21. Bousfield A.K., Kan D.M. Homotopy limits,

completions and localizations. Lecture Notes in Math. Vol. 304. Springer-Verlag, 1972.

22. Burghelea D. The rational homotopy groups of Diff (M) and Homeo (M) in stability range // Lecture Notes in Math. Vol. 763. Springer, 1979. P. 604-626.

23. Burghelea D. Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces I. // Contemp. Math. 1986. V. 67. N. 2. P. 80-112.

24. Burghelea D., Fiedorowicz Z. Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces II. // Topology. 1986. Vol. 25. N. 3. P. 303-317.

25. Burghelea D., Fiedorowicz Z. Hermitian algebraic K-theory of simplicial rings and topological spaces // J. Math. Pures et Appl. Ser. 9. 1985. V. 64. P. 175-235.

26. Burghelea D., Lashof R. Geometric transfer and the homotopy type of the automorphism groups of manifolds // Trans. A.M.S. 1982. V. 269. N. 1. P. 1-39.

27. Connes A. Cohomologie cyclique et foncteur Ext^n // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1983. T. 296. P. 253-256.

28. Dwyer W.G., Hopkins M.J., Kan D.M. The homotopy theory of cyclic sets // Trans. A.M.S. 1985. V. 291. N. 1. P. 281-289.

29. Hatcher A. Higher simple homotopy theory // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 101-137.

30. Heydemann-Tcherkez M.-C., Vigué-Poirrier M. Aplication de la théorie des polynômes de Hilbert-Samuel à l'étude de certaines algèbres differentielles // C.R. Acad. Sci. Paris. 1974. T. 278. P. 1607-1610.

31. Hsiang W.-C., Staffeld R.E. A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces // Invent. math. 1982. V.68. P.227-239.
32. Karoubi M. Homologie cyclique des groups et des algebres // C.R. Acad. Sci. Paris. 1983. T.297. P.381-384.
33. Loday J.L., Quillen D. Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices // Comment. Math. Helv. 1984. V.59. P.565-591.
34. May J.P. Simplicial objects in algebraic topology. Princeton: Van Nostrand, 1967.
35. Quillen D.G. Rational homotopy theory // Ann. Math. 1969. N.90. P.205-295.
36. Quillen D. Higher algebraic K-theory I. Lectures Notes in Math. Vol. 341. Springer, 1973.
37. Sullivan D. Infinitesimal computations in topology // Publ. Math. IHES. 1977. N.47. P.269-331.
38. Vigué-Poirrier M., Sullivan D. The homology theory of the closed geodesic problem // J. Diff. Geometry. 1976. V.11. P.633-644.
39. Vigué-Poirrier M., Burghelea D. A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces // J. Diff. Geometry. 1985. N.2. P.243-253.
40. Waldhausen F. Algebraic K-theory of generalised free products I, II // Ann. Math. 1978. N.108. P.136-256.
41. Waldhausen F. Algebraic K-theory of topological spaces I // Proc. Symp. Pure Math. 1978. V.32. P.35-60.