

ФГБОУ ВПО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

**Козлов Иван Константинович**

**ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ В  
СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ И ПУАССОНОВОЙ  
ГЕОМЕТРИИ**

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор А. А. Ошемков

Москва - 2013

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Основные определения</b>	<b>17</b>
1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы . . . . .	17
1.2 Примеры симплектических и пуассоновых многообразий . . . .	21
1.3 Невырожденные особенности . . . . .	24
1.4 Круговые молекулы . . . . .	31
1.5 Бигамильтоновы структуры . . . . .	33
<b>2 Классификация лагранжевых расслоений</b>	<b>35</b>
2.1 Основные результаты главы 2 . . . . .	35
2.2 Инварианты лагранжевых расслоений . . . . .	44
2.2.1 Пуассоново действие . . . . .	45
2.2.2 Решетка в кокасательном расслоении . . . . .	48
2.2.3 Препятствие к построению сечения . . . . .	49
2.3 Доказательство теорем классификации . . . . .	51
2.3.1 Аффинные расслоения . . . . .	52
2.3.2 Эквивалентность аффинных и почти лагранжевых расслоений . . . . .	52
2.3.3 Доказательство теорем 9 и 10 . . . . .	53
2.3.4 Реализация инвариантов . . . . .	56
2.4 Классификация лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями . . . . .	59
2.4.1 Целочисленные аффинные многообразия . . . . .	60
2.4.2 Фундаментальная группа бутылки Клейна . . . . .	61

2.4.3	Полные целочисленные аффинные поверхности . . . . .	63
2.4.4	Остальные инварианты . . . . .	75
2.5	Примеры лагранжевых и почти лагранжевых расслоений . . . . .	81
2.6	Классификация при помощи теории пучков . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур</b>	<b>89</b>
3.1	Основные результаты главы 3 . . . . .	89
3.2	Доказательство теоремы Жордана-Кронекера . . . . .	95
3.2.1	Самосопряжённые операторы в симплектическом пространстве . . . . .	96
3.2.2	Доказательство теоремы Жордана-Кронекера. Общий случай . . . . .	100
3.2.3	Вещественная теорема Жордана-Кронекера . . . . .	104
3.2.4	Единственность формы Жордана-Кронекера . . . . .	106
3.3	Линейные инвариантные подпространства . . . . .	109
3.4	Локальное устройство невырожденных бигамильтоновых структур . . . . .	115
3.5	Доказательство основных теорем . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли <math>so(4)</math></b>	<b>125</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	125
4.2	Основные результаты главы 4 . . . . .	129
4.2.1	Случай $\varkappa > 0, b = 0$ . . . . .	136
4.3	Доказательство основных утверждений . . . . .	140
4.3.1	Критические точки ранга 1 . . . . .	140
4.3.2	Типы бифуркационных диаграмм. (Случай $b \neq 0$ ) . . . . .	150
4.3.3	Критические точки ранга 0 . . . . .	158
4.3.4	Доказательство теорем 42, 43 и 44 . . . . .	163
4.4	Классический случай Ковалевской ( $\varkappa = 0$ ) . . . . .	169

4.5	Рисунки к главе 4 . . . . .	176
-----	-----------------------------	-----

# Введение

## Актуальность темы

В диссертации изучаются различные инварианты слоений, естественным образом возникающие в симплектической и пуассоновой геометрии. А именно, рассмотрены следующие три типа слоений и связанные с ними задачи:

1. Лагранжевы расслоения. Локально тривиальное расслоение называется лагранжевым, если его тотальное пространство является симплектическим многообразием, и все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями этого симплектического многообразия. В диссертации изучается вопрос, когда два лагранжевых расслоения послойно симплектоморфны, и проведена классификация лагранжевых расслоений с компактным тотальным пространством над двумерными поверхностями.
2. Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур. В диссертации изучается некоторый класс распределений, естественным образом возникающих на многообразии, на котором заданы две согласованные невырожденные скобки Пуассона, и исследован вопрос, какие из этих распределений являются интегрируемыми, то есть какие из них задают слоение на данном многообразии.
3. Слоение Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ . В диссертации исследуются топологические свойства интегрируемого случая для уравнений Эйлера на алгебре Ли  $so(4)$ , являющегося аналогом классического случая Ковалевской в динамике твёрдого тела.

Хорошо известно, что симплектическая геометрия возникла из гамильтонова формализма классической механики. Рассматриваемые в диссертации объекты и вопросы также связаны с изучением гамильтоновых систем в механике и физике. Рассматриваются слоения и их инварианты, которые могут быть полезны при исследовании различных интегрируемых гамильтоновых и бигамильтоновых систем.

Изучение первого типа слоений — лагранжевых расслоений — можно рассматривать как изучение глобальных инвариантов слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем. Из классической теоремы Лиувилля о существовании координат действие-угол следует, что отображение момента любой интегрируемой гамильтоновой системы задаёт лагранжево расслоение с особенностями. В диссертации изучается глобальное устройство лагранжевых расслоений без особенностей.

Имеется много работ, посвящённых изучению лагранжевых расслоений с особенностями, а также исследованию свойств различных классов особенностей лагранжевых расслоений. Среди этих работ следует отметить работы М. Ф. Атьи [34], В. Гийемина, С. Стернберга [41] и Т. Дельзанта [39], в которых подробно изучены торические многообразия, т.е. многообразия с заданными на них гамильтоновыми действиями тора. Также имеется много работ, посвящённых изучению особенностей слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем. Ссылки на эти работы, а также изложение общей теории о топологических свойствах слоений Лиувилля можно найти в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [6] и обзоре А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова [37].

В работе [40] Х. Дюистермаат предложил классифицировать лагранжевы расслоения при помощи теории пучков. В частности, он ввел инварианты, полностью определяющие лагранжевы расслоения — решётку на базе лагранжева расслоения и лагранжев класс Черна. Однако даже в случае малой размерности получение полного списка лагранжевых расслоений (например, для данной базы) с помощью инвариантов, описанных Дюистермаатом является, как правило, нетривиальной задачей. Тем не менее, К. Н. Мишачёву в работе [49] удалось получить такой список для лагранжевых рас-

слоений над ориентируемыми двумерными поверхностями. Там же Мишачёв показал, что среди двумерных поверхностей только двумерный тор и бутылка Клейна могут быть базой лагранжева расслоения.

В дальнейшем Нгуен Тьен Зунг в работе [61] обобщил понятие лагранжева класса Черна на случай, когда лагранжево расслоение содержит некоторые определённые классы особенностей, а Н. К. Леунг и М. Симингтон в работах [45] и [55] классифицировали тотальные пространства лагранжевых расслоений с невырожденными негиперболическими особенностями с точностью до диффеоморфизма.

В диссертации описана классификация лагранжевых расслоений над бутылкой Клейна, и тем самым завершена классификация лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями. При этом был введён новый, более широкий класс почти лагранжевых расслоений, отличный от класса лагранжевых расслоений тем, что форма на тотальном пространстве не обязательно замкнута. Для этого нового класса почти лагранжевых расслоений найдены классифицирующие инварианты, и приведён пример нетривиального почти лагранжева расслоения, не являющегося лагранжевым.

Лагранжевы расслоения над бутылкой Клейна были независимо (и практически одновременно) классифицированы Д. Сепе [54].

Изучение второго типа слоений — инвариантных слоений невырожденных бигамильтоновых структур — связано с исследованием топологических свойств бигамильтоновых систем и локального строения согласованных скобок Пуассона. Хорошо известно, что интегрируемость многих гамильтоновых систем в математике, механике и физике связана с наличием в них бигамильтоновой структуры. Оказывается, что многие гамильтоновы системы являются гамильтоновыми сразу относительно двух скобок Пуассона и любой их линейной комбинации, которая также является скобкой Пуассона.

После работы Ф. Магри [46], в которой было впервые показано, как бигамильтонова структура может быть использована для нахождения первых интегралов системы, была установлена бигамильтоновость многих классических задач механики и физики. Метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в работах [14, 15] и использованный ими

при интегрировании многомерных аналогов интегрируемых систем, описывающих динамику твёрдого тела, на алгебрах Ли, также может быть переформулирован в бигамильтоновых терминах. Критерий полноты семейства функций, построенных с помощью бигамильтонова подхода, был получен в работах А. В. Болсинова [1, 2]. Некоторые методы изучения особенностей интегрируемых систем с помощью бигамильтоновой техники были предложены в работах [36] и [38].

Недавно, используя теорему Жордана–Кронекера о нормальной форме пары кососимметрических билинейных форм на конечномерном линейном пространстве, И. С. Захаревичем [60], А. Панасюком [52] и Ф. Туриэлем [57–59] был получен ряд результатов о локальном устройстве пары согласованных скобок Пуассона. Несмотря на эти важные результаты, до сих пор остаются открытыми некоторые вопросы о локальном и глобальном устройстве бигамильтоновых структур. В частности, с точки зрения поиска новых методов интегрирования гамильтоновых систем представляет интерес вопрос о поиске слоений Лиувилля, которые можно описать в терминах самой бигамильтоновой структуры, или, более общо, о поиске интегрируемых распределений, естественным образом связанных с бигамильтоновой структурой.

В диссертации исследована интегрируемость инвариантных распределений, которые определяются тем, что каждый их слой является подпространством, инвариантным относительно группы автоморфизмов соответствующего касательного пространства, сохраняющих билинейные формы, заданные согласованными скобками Пуассона. Задача об интегрируемости инвариантных распределений была поставлена ранее в работе [3].

Наконец изучение третьего типа рассматриваемых слоений — слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  — связано с исследованием топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и с исследованием классического случая Ковалевской в динамике твёрдого тела.

На сегодняшний день вычисление глобальных топологических инвариантов слоений Лиувилля для известных случаев интегрируемости являет-



ся одним из важных направлений исследований в механике твёрдого тела. Начиная с 80-х годов XX века было написано множество работ по исследованию топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификации особенностей, построению бифуркационных диаграмм и определению типов бифуркаций, вычислению локальных и глобальных инвариантов слоения Лиувилля и траекторных инвариантов. В диссертации используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, основы которой были заложены в работах А. Т. Фоменко, Х. Цишанга [27] и А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко [4]. Подробное изложение этой теории содержится в книге А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [6]. Одной из предпосылок к созданию этой теории послужили работы М. П. Харламова [29–31], в которых была подробно исследована топология наиболее сложных случаев (Ковалевской и Горячева–Чаплыгина) в динамике твёрдого тела. В дальнейшем было написано множество работ, посвященных топологическому анализу, а также вычислению инвариантов для интегрируемых систем классической механики, среди которых следует отметить работы А. А. Ошемкова [21, 51], О. Е. Орёл [19], П. И. Топалова [25], О. Е. Орёл, П. Е. Рябова [50], А. В. Болсинова, П. Х. Рихтера, А. Т. Фоменко [5], П. В. Морозова [16, 17] и П. Е. Рябова, М. П. Харламова [24].

Волчок Ковалевской — одна из самых известных интегрируемых гамильтоновых систем классической механики. В работе [43] Софьей Ковалевской было показано, что кроме случаев Эйлера, Лагранжа и открытого ею ранее в работе [44] интегрируемого случая в динамике твёрдого тела не существует никаких других систем, которые были бы аналогичным образом интегрируемы при каждом значении постоянной площадей. Волчок Ковалевской сложнее для изучения, чем волчки Эйлера и Лагранжа, поэтому представляют интерес различные методы, которые позволили бы каким-нибудь образом упростить работу с этим волчком. В диссертации рассмотрено однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на пучке алгебр Ли  $\mathfrak{so}(4) - \mathfrak{e}(3) - \mathfrak{so}(3, 1)$ , найденное в работе [12], и показано, что некоторая информация о классическом случае Ковалевской, являющимся интегрируемой гамильтоновой системой на алгебре Ли  $\mathfrak{e}(3)$ , может быть

получена из изучения интегрируемых гамильтоновых систем на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ .

Идея рассмотрения интегрируемых гамильтоновых систем на компактных алгебрах Ли может оказаться плодотворной — орбиты коприсоединённого представления компактной алгебры Ли компактны, что значительно упрощает анализ заданных на них интегрируемых гамильтоновых систем. Ранее интегрируемые гамильтоновы системы на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  изучались в работах [20] (компактный аналог случая Клебша), [28] (случай Соколова) и [32] (компактный аналог случая Стеклова).

Детальный топологический анализ классического случая Ковалевской содержится в книге М. П. Харламова [31] (см. также [29] и [30]). В частности, там описаны бифуркационные диаграммы отображения момента и исследованы перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Тонкий лиувиллев анализ, а также описание круговых молекул для классического случая Ковалевской содержатся в работе [5] (метод круговых молекул, используемый в диссертации, был предложен А. В. Болсиновым [35]). Все необходимые результаты о классическом случае Ковалевской в удобной для нас форме собраны в книге [6].

В диссертации для рассматриваемых интегрируемых случаев на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  сделано следующее: построены бифуркационные диаграммы отображения момента, проверена невырожденность особых точек ранга 0 и 1, классифицированы невырожденные положения равновесия, определены перестройки торов Лиувилля и описаны круговые молекулы для особых точек бифуркационных диаграмм.

## Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Завершение классификации лагранжевых расслоений с компактными тотальными пространствами над двумерными поверхностями.
2. Описание всех инвариантных слоений невырожденных бигамильтоно-

вых структур в окрестности регулярной точки.

3. Топологический анализ интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ .

## Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, топологии и линейной алгебры. При исследовании топологии слоения Лиувилля случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

## Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Классифицированы все лагранжевы расслоения с компактными тотальными пространствами над бутылкой Клейна.
2. Введён класс почти лагранжевых расслоений, обобщающих понятие лагранжева расслоения. Построен набор классифицирующих инвариантов для почти лагранжевых расслоений. Также построено нетривиальное почти лагранжево расслоение, не являющееся лагранжевым (доказано, что не любые решётка и препятствие к построению сечения могут быть реализованы лагранжевым расслоением).
3. Описаны все инвариантные распределения невырожденной бигамильтоновой структуры в окрестности регулярной точки, и установлено, какие из них являются интегрируемыми.
4. Для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  построены бифуркационные диаграммы отображения момента, проверена

невырожденность особых точек ранга 0 и 1, классифицированы невырожденные положения равновесия, вычислены перестройки торов Лиувилля и круговые молекулы особых точек бифуркационных диаграмм.

## **Теоретическая и практическая ценность**

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, при исследовании лиувиллевых слоений и возмущений интегрируемых систем, а также при исследовании бигамильтоновых систем и согласованных скобок Пуассона.

Полученные результаты о лагранжевых расслоениях могут быть использованы при изучении глобальных топологических инвариантов интегрируемых систем, а также при изучении лагранжевых слоений на симплектических многообразиях.

Полученные результаты об интегрируемости инвариантных распределений невырожденных бигамильтоновых структур могут быть использованы при изучении различных бигамильтоновых систем и при изучении локального устройства согласованных скобок Пуассона.

Полученные результаты о топологии слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  могут быть использованы при исследовании слоений Лиувилля различных интегрируемых систем.

## **Апробация диссертации**

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовниченко (Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г.);

- вторая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2010», (Белград, Сербия, 7–13 сентября 2010 г.);
- XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 11–15 апреля 2011 г.);
- международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (23-я сессия), посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г.);
- XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 9–13 апреля 2012 г.);
- международная топологическая конференция «Александровские Читения», (Москва, 21–25 мая 2012 г.);
- XVII Geometrical Seminar (Златибор, Сербия, 3–8 сентября 2012 г.);
- XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 8–13 апреля 2013 г.);
- четвёртая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2013» (Ижевск, 10–14 июня 2013 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

- на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко и проф. А.С. Мищенко (неоднократно: 2008 – 2013 гг.);
- на семинаре «Динамические системы» под руководством проф. А.М. Стёпина в 2010 г.;
- на семинаре «Некоммутативная геометрия и топология» под руководством проф. А.С. Мищенко в 2010 г.;

- на семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством акад. С.П. Новикова, чл.-корр. В.М. Бухштабера и проф. Б.А. Дубровина (неоднократно: 2011–2013 гг.);
- на семинаре «Геометрия в целом» под руководством проф. И.Х. Сабитова в 2012 г.;
- на семинаре «Геометрия и топология» под руководством проф. Т.Е. Панова и доц. А.В. Пенского в 2013 г.;
- на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством проф. Э.Б. Винберга в 2013 г.;
- на семинаре «Oberseminar Differentialgeometrie» под руководством проф. Г. Книпера (совместный семинар Рурского университета в Бохуме и Технического университета в Дортмунде, Германия, 2009);
- на семинаре «Hamiltonian Dynamics Seminar» под руководством проф. Т.С. Ратью (Федеральная политехническая школа Лозанны, Лозанна, Швейцария, 2012).

## Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах [62–73], список которых приведен в конце диссертации.

## Структура и объём

Диссертация состоит из введения и четырёх глав. Текст диссертации изложен на 193 страницах и содержит 7 таблиц и 34 рисунка. Список литературы содержит 73 наименования.

## Содержание работы

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; описываются основные результаты диссертации.

В **первой главе** приводятся необходимые определения и классические результаты о симплектических и пуассоновых многообразиях, а также об интегрируемых гамильтоновых и бигамильтоновых системах, используемые в настоящей диссертации.

Во **второй главе** изучаются глобальные инварианты лагранжевых расслоений и проведена классификация лагранжевых расслоений над бутылкой Клейна (теоремы 13 и 14). Также в этой главе введено понятие почти лагранжевых расслоений, обобщающее понятие лагранжевых расслоений (Определение 15), и описаны классифицирующие инварианты для почти лагранжевых расслоений. Показано, что почти лагранжево расслоение полностью определяется, с точностью до лагранжевой эквивалентности (т.е. с точностью до послонного диффеоморфизма, тождественно действующего на базе и переводящего одну форму в другую) и поднятия 2-формы с базы, двумя своими инвариантами: решеткой на базе и первым препятствием к построению сечения (теорема 9). Решетка на базе лагранжева расслоения введена в работе Х. Дюистермаата [40]. Первое препятствие к построению сечения является известным инвариантом, используемым в алгебраической топологии.

Также установлено, когда поднятие 2-формы с базы не меняет почти лагранжево расслоение (а именно, доказано, что поднятие 2-формы  $\varphi$  с базы почти лагранжева расслоения с решеткой  $P$  не меняет расслоение тогда и только тогда, когда  $\varphi = d\alpha$  для некоторого сечения  $\alpha : B^n \rightarrow T^*B^n/P$ , теорема 10). Для лагранжевых расслоений аналогичное утверждение было доказано К. Н. Мишачёвым [49].

Кроме того, доказана теорема реализации о том, что любые решетка и препятствие к построению сечения могут быть реализованы некоторым почти лагранжевым расслоением (теорема 11) и построен пример решетки и препятствия к построению сечения, которые не могут быть реализованы

лагранжевым расслоением (пример 7). Тем самым построен пример нетривиального почти лагранжева расслоения, не являющегося лагранжевым.

В **третьей главе** описаны все инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур в окрестности регулярных точек (теоремы 28 и 29). Кроме того, в разделе 3.2 этой главы приведено доказательство теоремы Жордана-Кронекера, которая используется при описании локального устройства пары согласованных невырожденных скобок Пуассона, и дано описание всех подпространств линейного пространства с заданными на нём двумя симплектическими формами, инвариантных относительно автоморфизмов этого линейного пространства, сохраняющих формы (теоремы 32 и 33).

Наконец в **четвёртой главе** изучается топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , который был открыт И. В. Комаровым в работе [12]. В диссертации для рассматриваемого интегрируемого случая на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  сделано следующее: построены бифуркационные диаграммы отображения момента (теоремы 42 и 45), проверена невырожденность особых точек ранга 0 и 1 (леммы 20, 21, и 23), классифицированы невырожденные положения равновесия (леммы 20 и 23), определены перестройки торов Лиувилля (теорема 43) и описаны круговые молекулы для особых точек бифуркационных диаграмм (теорема 44).

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Андрею Александровичу Ошемкову за постановку задач и за неоценимую помощь на всех этапах написания работы. Автор благодарен профессору А. В. Болсинову за плодотворные дискуссии и ценные замечания к работе и профессору Т. С. Ратью за обсуждения задач. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ и, в особенности, заведующему кафедрой академику РАН А. Т. Фоменко за творческую атмосферу и поддержку.



# Глава 1

## Основные определения

В этом разделе приводятся необходимые сведения о симплектических и пуассоновых многообразиях, а также об интегрируемых гамильтоновых и бигамильтоновых системах, используемые в этой работе.

Все необходимые сведения о симплектических многообразиях и интегрируемых гамильтоновых системах можно найти в [6], а также в обзоре [37]. Излагаемые в этом разделе факты о бигамильтоновых системах и пуассоновых многообразиях можно найти в работе [3].

### 1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы

Прежде всего дадим определения симплектических и пуассоновых многообразий.

**Определение 1.** *Симплектическое многообразие  $(M^{2n}, \omega)$  — это многообразие с заданной на нём невырожденной замкнутой 2-формой  $\omega$ .*

**Определение 2.** *Скобкой Пуассона на многообразии  $M$  называется кососимметричное билинейное отображение*

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

и тождеству Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Скобку Пуассона также иногда называют пуассоновой структурой на многообразии, а многообразие со скобкой Пуассона называют пуассоновым многообразием. Любое симплектическое многообразие является пуассоновым (но не наоборот) — скобка Пуассона двух функций  $f$  и  $g$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  определяется по формуле

$$\{f, g\} = \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \text{где} \quad \Omega^{ij} \omega_{jk} = \delta_k^i.$$

Условия кососимметричности, билинейности и тождество Лейбница гарантируют, что любая скобка Пуассона на многообразии  $M^n$  может быть задана при помощи бивекторного поля  $\mathcal{A} \in \Gamma(\wedge^2 TM)$  (то есть при помощи кососимметричного тензорного поля  $(2, 0)$ ) по формуле

$$\{f, g\} = \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Тождество Якоби при этом эквивалентно выполнению следующей системы уравнений на компоненты бивекторного поля  $\mathcal{A}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{A}^{sk} + \frac{\partial \mathcal{A}^{ki}}{\partial x^s} \mathcal{A}^{sj} + \frac{\partial \mathcal{A}^{jk}}{\partial x^s} \mathcal{A}^{si} = 0.$$

Любую симплектическую структуру  $\omega$  на многообразии  $M$  можно рассматривать как отображение  $\omega : TM \rightarrow T^*M$ . Аналогично, любую скобку Пуассона можно рассматривать как отображение  $\mathcal{A} : T^*M \rightarrow TM$ .

Любая функция  $H$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  задаёт векторное поле

$$v_H = \omega^{-1} dH,$$

называемое *гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом  $H$* . Аналогично, гамильтоновы векторные поля можно определить на произвольном пуассоновом многообразии  $(M, \mathcal{A})$  по формуле

$$v_H = \mathcal{A}dH.$$

Гамильтоново векторное поле  $v_H$  также иногда обозначают через  $\text{sgrad}H$  и называют косым градиентом функции  $H$ .

Отметим, что в других работах могут использоваться различные соглашения о знаках: в определении гамильтоновых векторных полей или скобки Пуассона на симплектическом многообразии может ставиться знак минус.

**Утверждение 1.** Для любых функций  $f$  и  $g$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  выполнены следующие тождества:

$$v_f(g) = \omega(v_f, v_g) = -\{f, g\}, \quad (1.1.1)$$

$$[v_f, v_g] = -v_{\{f, g\}}. \quad (1.1.2)$$

Как следствие, отображение  $f \rightarrow -v_f$  — это гомоморфизм алгебр Ли.

*Доказательство.* Нужно воспользоваться тождеством Якоби.

$$[v_f, v_g](h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} = -v_{\{f, g\}}(h)$$

□

Две функции  $f$  и  $g$  на пуассоновом многообразии  $(M, \mathcal{A})$  называются *коммутирующими*, если  $\{f, g\} = 0$ . Функция  $f$  называется *функцией Казимира* скобки Пуассона, если она коммутирует с любой другой функцией на многообразии относительно этой скобки.

Функцию  $f$  на фазовом пространстве  $M$  называют *первым интегралом* гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$ , если она постоянна на всех траекториях системы. Иными словами, функция  $f$  является первым интегралом системы  $\dot{x} = v_H$  тогда и только тогда, когда  $v_H(f) = 0$  или, что эквивалентно,  $\{f, H\} = 0$ .

**Определение 3.** Динамическая система  $\dot{x} = v_H$  на  $(M^{2n}, \omega)$  называется *интегрируемой*, если существует набор первых интегралов  $f_1, \dots, f_n$  такой, что

- эти интегралы  $f_i$  функционально независимы почти всюду

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0;$$

- функции  $f_i$  попарно коммутируют (относительно соответствующей скобки Пуассона):

$$\{f_i, f_j\} = 0;$$

- все гамильтоновы векторные поля  $v_{f_i}$  полны.

Отметим, что последнее условие автоматически выполнено, если фазовое пространство  $(M^{2n}, \omega)$  компактно (все векторные поля на компактных многообразиях полны).

Также отметим, что, так как векторные поля  $v_{f_i}$  полны и коммутируют между собой, любая интегрируемая гамильтонова система задаёт *гамильтоново действие* группы  $\mathbb{R}^n$  на фазовом пространстве  $(M^{2n}, \omega)$ : это действие сопоставляет элементу  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  сдвиг за единичное время вдоль гамильтонова векторного поля  $v_{f_\lambda}$  с гамильтонианом  $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ .

**Определение 4.** Разбиение фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы на связные компоненты поверхностей уровня  $\{f_i = \text{const}, i = 1, \dots, n\}$  называется *слоением Лиувилля* этой системы.

Два слоения Лиувилля называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм, переводящий слои первого слоения Лиувилля в слои второго слоения Лиувилля.

Отображение  $\mathcal{F} : (M^{2n}, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое сопоставляет точке  $x$  фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^{2n}, \omega, f_1, \dots, f_n)$  точку  $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$  называется *отображением момента* этой интегрируемой гамильтоновой системы.

Следующая классическая теорема гарантирует, что окрестности всех (связных) компактных регулярных слоёв отображения момента устроены одинаково.

**Теорема 1** (Теорема Лиувилля). *Рассмотрим произвольную интегрируемую гамильтонову систему  $(M^{2n}, \omega, H = f_1, \dots, f_n)$ .*

1. *Любая связная компактная компонента  $T_x$  регулярной поверхности уровня первых интегралов  $\{f_i = \text{const}, i = 1, \dots, n\}$  диффеоморфна  $n$ -мерному тору  $\mathbb{T}^n$ .*
2. *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности  $U$  тора Лиувилля  $T_x$  тривиально — оно диффеоморфно прямому произведению тора  $\mathbb{T}^n$  на диск  $D^n$ .*

3. В окрестности  $U = \mathbb{T}^n \times D^n$  существует система координат  $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:

(a)  $s_1, \dots, s_n$  — координаты на базе  $D^n$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — стандартные угловые координаты на торе  $\mathbb{T}^n$ ,  $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

(b) Симплектическая структура имеет вид  $\omega = \sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge ds_i$ .

(c) Переменные действия  $s_i$  являются функциями от интегралов  $f_1, \dots, f_n$ .

(d) В переменных действие-угол поток гамильтонова векторного поля  $v_H$  выпрямляется, т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = c_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема Лиувилля обосновывает введение следующих определений.

**Определение 5.** Подмногообразие симплектического многообразия  $L \subset (M^{2n}, \omega)$  называется лагранжевым, если

$$\dim L = n = \frac{1}{2} \dim M^{2n} \quad \text{и} \quad \omega|_L \equiv 0.$$

**Определение 6.** Локально тривиальное расслоение  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$  называется лагранжевым расслоением, если тотальное пространство  $(M^{2n}, \omega)$  является симплектическим многообразием, каждый слой которого  $F^n$  является лагранжевым подмногообразием.

## 1.2 Примеры симплектических и пуассоновых многообразий

**Пример 1.** Классический пример симплектического многообразия (а также лагранжева расслоения) — это кокасательное расслоение  $\pi_0 : T^*B \rightarrow B^n$  к любому гладкому многообразию  $B^n$ , симплектическая структура на котором определяется следующим образом.

На тотальном пространстве  $T^*B$  кокасательного расслоения  $\pi_0 : T^*B \rightarrow B^n$  существует *каноническая 1-форма*  $\gamma_0$ , заданная формулой

$$\langle \gamma_0, v \rangle = \langle \alpha, (\pi_0)_* v \rangle$$

для любого вектора  $v \in T_{(x,\alpha)}(T^*B)$  в точке  $\alpha \in T_x^*B$ . Здесь через  $\langle \alpha, v \rangle$  обозначено значение ковектора  $\alpha$  на векторе  $v$ . Форму  $\gamma_0$  иногда ещё называют *1-формой Лиувилля*.

Дифференциал этой 1-формы  $\omega_0 = d\gamma_0$  — это *каноническая 2-форма* на  $T^*B$ . Форма  $\omega_0$  замкнута и невырождена (т.е. является канонической симплектической структурой). Легче всего проверить это в координатах.

В канонических координатах  $p_i, q^i$ , где  $q^i$  — координаты на базе, а  $p_i$  — двойственные координаты в слое (координаты ковектора в базисе  $dq^i$ ), каноническая 1-форма имеет вид

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^n p_i dq^i.$$

Поэтому в канонических координатах  $p_i, q^i$  каноническая 2-форма  $\omega_0$  задаётся формулой

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

По теореме Дарбу любое симплектическое многообразие локально симплектоморфно кокасательному расслоению. Сразу сформулируем более общую теорему Дарбу-Вейнштейна о локальном устройстве пуассоновых многообразий.

**Теорема 2** (Теорема Дарбу-Вейнштейна). *В окрестности произвольной точки  $x$  пуассонова многообразия  $M^n$  существуют локальные координаты*

$$p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m, s_1, \dots, s_k, \quad (2m + k = n),$$

*в которых скобка Пуассона имеет вид*

$$\{p_i, q_j\} = \delta_j^i, \quad \{s_i, s_j\} = \varphi_{ij}(s_1, \dots, s_k),$$

*где все функции  $\varphi_{ij}$  обращаются в ноль в точке  $x$ . Все остальные попарные скобки координатных функций при этом равны нулю.*

**Пример 2.** Ещё один хорошо известный пример симплектических многообразий — это орбиты коприсоединённого представления алгебр Ли. Рассмотрим алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  произвольной (вещественной) группы Ли  $G$ . Хорошо известно, что для любого элемента  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  двойственного пространства к алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  соответствующая орбита коприсоединённого представления

$$O(\xi) = \{\text{Ad}_g^* \xi \mid g \in G\}$$

является гладким (погруженным) многообразием. Симплектическая структура  $\omega$  на орбите коприсоединённого представления определяется по следующей формуле: паре касательных векторов  $\text{ad}_{a_1}^*(\xi)$  и  $\text{ad}_{a_2}^*(\xi)$  в точке  $\xi \in O(\xi)$  форма  $\omega$  сопоставляет число

$$\omega(\text{ad}_{a_1}^*(\xi), \text{ad}_{a_2}^*(\xi)) = \xi([a_1, a_2]).$$

Можно проверить, что определённая таким образом форма (она также называется формой Кириллова) корректно определена, невырождена и замкнута (см., например, [47]).

На самом деле, орбиты коприсоединённого представления являются частным случаем следующего более общего примера симплектических многообразий.

**Пример 3.** Любое пуассоново многообразие можно рассматривать как набор симплектических многообразий: любое пуассоново многообразие распадается в дизъюнктивное объединение своих симплектических листов, каждый из которых является симплектическим многообразием. Две точки принадлежат одному симплектическому листу тогда и только тогда, когда одну из них можно перевести в другую при помощи последовательных сдвигов вдоль гамильтоновых векторных полей. По-другому симплектические листы можно определить как слои характеристического распределения, которое сопоставляет точке  $x$  многообразия  $(M, \mathcal{A})$  образ бивектора Пуассона в этой точке  $\text{Im } \mathcal{A}|_x \subset T_x M$ .

Каждый симплектический лист наделяется естественной структурой гладкого многообразия, погруженного в исходное пуассоново многообразие.

Пуассонова структура задаёт симплектическую структуру на каждом симплектическом листе по формуле:

$$\omega(v_f, v_g) = \{f, g\}.$$

**Пример 4.** На двойственном пространстве  $\mathfrak{g}^*$  к любой конечномерной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  существует естественная линейная скобка Пуассона, заданная формулой

$$\{f, g\} = \langle x, [df|_x, dg|_x] \rangle \quad (1.2.1)$$

Здесь через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено значение ковектора из  $\mathfrak{g}^*$  на векторе из  $\mathfrak{g}$ , а через  $[\cdot, \cdot]$  обозначен коммутатор в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . В формуле (1.2.1) мы воспользовались каноническим отождествлением  $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ . Скобка (1.2.1) называется также *скобкой Ли-Пуассона*.

### 1.3 Невырожденные особенности

**Определение 7.** Точка  $x \in (M^{2n}, \omega)$  называется *особой (или критической) точкой* отображения момента, если  $\text{rk } d\mathcal{F}|_x < n$ . Число  $\text{rk } d\mathcal{F}|_x$  называется *рангом* особой точки  $x$ , а число  $n - \text{rk } d\mathcal{F}|_x$  называется *корангом* точки  $x$ . Образ объединения всех особых точек отображения момента называется *бифуркационной диаграммой*.

Дадим определение невырожденной особой точки отображения момента  $\mathcal{F} : (M^{2n}, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Начнём со случая особой точки ранга 0.

Любая функция  $f : (M^{2n}, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  определяет в каждой своей критической точке  $x$  (т.е. в точке, в которой  $df|_x = 0$ ) линейный оператор  $A_f : (T_x M^{2n}, \omega) \rightarrow (T_x M^{2n}, \omega)$ , заданный формулой  $A_f = \omega^{-1} d^2 f$ .

**Утверждение 2.** Построенный оператор  $A_f = \omega^{-1} d^2 f$  является элементом симплектической алгебры Ли  $sp(T_x M^{2n}, \omega)$ .

Напомним, что симплектическая алгебра Ли  $sp(2n, \mathbb{R})$  состоит из  $(2n \times 2n)$ -матриц  $A$  (с вещественными коэффициентами), удовлетворяющих уравнению

$$\Omega A + A^T \Omega = 0,$$



где  $\Omega$  — это кососимметрическая матрица

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

(Здесь  $E_n$  — это единичная  $(n \times n)$ -матрица.)

*Доказательство.* Утверждение несложно доказать, воспользовавшись теоремой Дарбу, и явно проверив в симплектических координатах, что матрица оператора  $A_f$  имеет требуемый вид. По-другому это утверждение также можно доказать следующим образом.

Векторное поле  $v_f$  порождает однопараметрическую группу симплектоморфизмов  $\Phi_t^f : (M^{2n}, \omega) \rightarrow (M^{2n}, \omega)$ , оставляющих точку  $x$  неподвижной. Соответствующие дифференциалы  $d\Phi_t^f : (T_x M, \omega) \rightarrow (T_x M, \omega)$  задают однопараметрическую группу линейных симплектоморфизмов  $d\Phi_t^f \in Sp(T_x M)$ , т.е. задают кривую в симплектической группе Ли  $Sp(T_x M)$ . Соответствующий элемент касательной алгебры  $A_f \in sp(T_x M)$  — касательный вектор к кривой  $d\Phi_t^f$  в единице  $e \in Sp(T_x M)$  — и есть оператор  $A_f = \omega^{-1} d^2 f$  (это можно проверить явными вычислениями в локальных координатах).  $\square$

Отображение  $f \rightarrow A_f$  — это гомоморфизм алгебр Ли: если  $df|_x = 0$  и  $dg|_x = 0$ , то

$$[A_f, A_g] = A_{\{f, g\}}.$$

Доказанное утверждение позволяет отождествить симплектическую алгебру Ли  $sp(2n, \mathbb{R})$  и алгебру Ли квадратичных форм на линейном симплектическом пространстве  $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i)$ .

**Лемма 1.** *Рассмотрим вещественное линейное симплектическое пространство  $(V^{2n}, \omega)$ . Симплектическая алгебра Ли  $sp(V^{2n}, \mathbb{R})$  канонически изоморфна алгебре Ли квадратичных форм  $f = \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij} x^i x^j$ ,  $(a_{ij} = a_{ji})$  на пространстве  $V^{2n}$ . Оператору  $A \in sp(V^{2n})$  соответствует форма  $f_A(v) = \frac{1}{2} \omega(v, Av)$ . Коммутатору двух элементов  $A, B \in sp(V^{2n})$  соответствует скобка Пуассона двух функций  $f_A, f_B$*

$$f_{[A, B]} = \{f_A, f_B\}.$$

*Доказательство.* Матрица  $A$  принадлежит алгебре Ли  $sp(2n, \mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда матрица  $\Omega A$  симметрична  $\Omega A = (\Omega A)^T$ , т. е. является матрицей квадратичной формы.  $\square$

Рассмотрим особую точку  $x \in (M^{2n}, \omega)$  ранга 0 отображения момента  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  (т.е.  $df_i|_x = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ ). Функции  $f_1, \dots, f_n$  коммутируют, поэтому соответствующие операторы  $A_{f_1}, \dots, A_{f_n}$  порождают некоторую коммутативную подалгебру  $\mathfrak{h}_x \subset sp(T_x M)$ .

**Определение 8.** Особая точка  $x \in (M^{2n}, \omega)$  ранга 0 называется *невыврожденной* особой точкой (ранга 0), если соответствующая подалгебра  $\mathfrak{h}_x \subset sp(T_x M)$  является подалгеброй Картана.

Теорема Уильямсона классифицирует все подалгебры Картана алгебры  $sp(2n, \mathbb{R})$  с точностью до сопряжения. При формулировке следующей теоремы мы используем представление симплектической алгебры Ли при помощи алгебры Ли квадратичных форм (см. лемму 1).

**Теорема 3** (Теорема Уильямсона). *Для любой подалгебры Картана  $\mathfrak{h} \subset sp(2n, \mathbb{R})$  существуют линейные координаты  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$  линейного симплектического пространства  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  такие, что  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ , и следующие  $n$  квадратичных полиномов образуют базис в  $\mathfrak{h}$ :*

- $f_j(p, q) = p_j^2 + q_j^2$  (эллиптический тип)  $j = 1, \dots, k_e$
- $f_j(p, q) = p_j^2 - q_j^2$  (гиперболический тип)  $j = k_e + 1, \dots, k_e + k_h$
- $f_j(p, q) = p_j q_j + p_{j+1} q_{j+1}$   
 $f_{j+1}(p, q) = p_j q_{j+1} - p_{j+1} q_j$  (фокус-фокус)  $j = k_e + k_h + 1, k_e + k_h + 3, \dots, k_e + k_h + 2k_f = n$

*Подалгебры, соответствующие разным тройкам  $(k_e, k_h, k_f)$  не сопряжены.*

В общем случае, особая точка  $x \in (M^{2n}, \omega)$  ранга  $r$  называется невырожденной, если она переходит в невырожденную особую точку ранга 0 после редукции по гамильтонову действию. Это означает следующее. Пусть

$L_x \subset T_x M^{2n}$  — это подпространство, порожденное векторами  $v_{f_1}, \dots, v_{f_n}$  (это касательное пространство к орбите гамильтонова действия  $L_x = T_x O_x$ ),  $L_x^\perp$  — косоортогональное дополнение к  $L_x$ . Так как функции  $f_i$  коммутируют, форма  $\omega$  индуцирует на пространстве  $L_x^\perp/L_x$  симплектическую структуру  $\tilde{\omega}$ . (Форма  $\tilde{\omega}$  корректно определена, так как пространство  $L_x$  изотропно.)

Любая линейная комбинация  $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$  ( $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ), которая оставляет точку  $x$  на месте (т.е. если функция  $f$  принадлежит стабилизатору точки  $x$  относительно гамильтонова действия:  $f \in St_x$ ), определяет линейный оператор  $A_f : (L_x^\perp/L_x, \tilde{\omega}) \rightarrow (L_x^\perp/L_x, \tilde{\omega})$ . Действительно, функция  $f$  коммутирует со всеми функциями  $f_i$ , поэтому соответствующее действие поля  $v_f$  сохраняет пространство  $L_x$ , а, следовательно, и  $L_x^\perp$ .

Отображение  $St_x \rightarrow sp(L_x^\perp/L_x)$  задаёт некоторую коммутативную подалгебру  $\mathfrak{h}_x \subset sp(L_x^\perp/L_x)$ .

**Определение 9.** Особая точка  $x \in (M^{2n}, \omega)$  ранга  $r$  называется *невырожденной* особой точкой (ранга  $r$ ), если соответствующая подалгебра  $\mathfrak{h}_x \subset sp(L_x^\perp/L_x)$  является подалгеброй Картана.

Типом невырожденной особой точки отображения момента называется тип соответствующей картановской подалгебры (т.е. соответствующая тройка чисел  $(k_e, k_h, k_f)$ ). Очевидно, что ранг невырожденной особой точки типа  $(k_e, k_h, k_f)$  равен  $n - k_e - k_h - 2k_f$ .

Теорема Элиассона утверждает, что слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки полностью определяется рангом и типом соответствующей картановской подалгебры. А именно, слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особенности распадается в прямое произведение следующих 4 типов слоения:

1. Слоение  $L_{\text{ell}}$  — это слоение в окрестности нуля в  $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ , порождённое функцией  $p^2 + q^2$ .
2. Слоение  $L_{\text{hyp}}$  — это слоение в окрестности нуля в  $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ , порождённое функцией  $p^2 - q^2$ .

3. Слоение  $L_{\text{foc}}$  — это слоение в окрестности нуля в  $(\mathbb{R}^4, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2)$ , порождённое двумя коммутирующими функциями  $p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - q_1p_2$ .
4. Слоение  $L_{\text{reg}}$  — это слоение в окрестности нуля в  $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ , порождённое функцией  $p$ .

**Теорема 4** (Теорема Элиассона). *Всякое слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки типа  $(k_e, k_h, k_f)$  и ранга  $r$  локально симплектоморфно прямому произведению  $k_e$  экземпляров слоения  $L_{\text{ell}}$ ,  $k_h$  экземпляров слоения  $L_{\text{hyp}}$ ,  $k_f$  экземпляров слоения  $L_{\text{foc}}$  и  $r$  экземпляров слоения  $L_{\text{reg}}$ .*

В двумерном и четырёхмерном случаях ситуация значительно упрощается. В двумерном случае (для систем с одной степенью свободы) существуют только две невырожденные особенности. Любая гамильтонова система  $\dot{x} = v_H$  на двумерном многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  (с полными полями почти нигде не обращающимися в ноль) автоматически является интегрируемой — гамильтониан  $H$  системы является её первым интегралом. Невырожденные особенности такой интегрируемой системы при этом в точности совпадают с невырожденными особенностями функции  $H$  в смысле теории Морса.

**Лемма 2** (Лемма Дарбу-Морса). *Для любой невырожденной критической точки  $x$  функции  $H$  на двумерном симплектическом многообразии  $(M^2, \omega)$  существуют такие локальные симплектические координаты  $p, q$ , что функция  $H$  зависит либо только от  $p^2 + q^2$ , либо только от  $pq$ :*

$$H = H(p^2 + q^2) \text{ (эллиптический случай),}$$

$$H = H(pq) \text{ (гиперболический случай).}$$

В четырёхмерном случае (для систем с двумя степенями свободы) существуют четыре типа невырожденных особенностей ранга 0.

**Теорема 5.** *Пусть  $x$  — невырожденная особая точка ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, f)$ . Пусть многообразие  $M^4$ , симплектическая структура  $\omega$  и обе функции  $H$  и  $f$  являются вещественно-аналитическими. Тогда в окрестности точки  $x \in M^4$  существуют координаты  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$ , в которых симплектическая структура имеет вид*

$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ , а функции  $H$  и  $f$  одновременно приводятся к одному из следующих видов:

1. случай центр-центр:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

2. случай центр-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

3. случай седло-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2 q_2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2 q_2); \end{aligned}$$

4. случай фокус-фокус:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2), \\ f &= f(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2). \end{aligned}$$

Также в этой работе нам потребуются следующие факты о полулокальном устройстве особенностей (т.е. об устройстве слоения Лиувилля в окрестности особого слоя отображения момента). Для простоты мы ограничимся случаем систем с одной и двумя степенями свободы (т.е. для интегрируемых гамильтоновых систем на двумерном и четырехмерном многообразиях соответственно).

Начнём с систем с одной степенью свободы. Пусть далее все особенности интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^2, \omega, H)$  являются невырожденными (иными словами,  $H$  — функция Морса на  $M^2$ ).

**Определение 10.** *Атом* (или *2-атом* в терминологии [6]) — это росток слоения Лиувилля на особом слое. Иными словами, две особенности (рассматриваемые с полулокальной точки зрения) соответствуют одному и тому

же атому тогда и только тогда, когда некоторые их окрестности ливиллево эквивалентны. Количество особых точек в особом слое называется *сложностью атома*.

Следующая теорема является известным фактом из теории Морса.

**Утверждение 3.** *Существует ровно два атома сложности 1 — эллиптический (атом  $A$ ) и гиперболический (атом  $B$ ). Все атомы большей сложности — гиперболические, т.е. все их особые точки являются гиперболическими особыми точками.*

Все гиперболические особенности малой сложности описаны. Единственные 2-атомы, которые встречаются в этой работе — это атомы  $A$ ,  $B$  и  $C_2$  (см. рис. 1.1). Все эти особенности подробно описаны в книге [6].

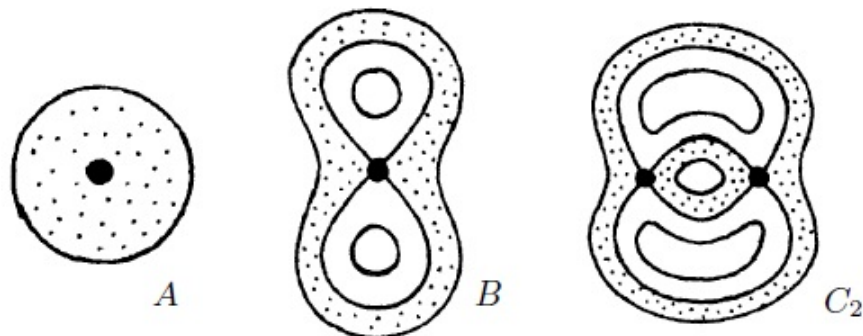


Рис. 1.1: Атомы  $A$ ,  $B$  и  $C_2$

Рассмотрим теперь системы с 2 степенями свободы. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [6]).

**Утверждение 4.** *В размерности 4 существует только одна, с точностью до ливиллево эквивалентности, эллиптическая особенность ранга 1, и она является прямым произведением эллиптического атома  $V_{ell}$  и регулярного слоения  $V_{reg}$  (т.е. просто прямого произведения  $D^1 \times S^1$ ).*

Классификация гиперболических особенностей ранга 1 была описана А. Т. Фоменко и Х. Цишангом в их работе [27]. Мы сформулируем полученный ими результат, переформулировав его в терминах почти прямых произведений.

**Теорема 6.** В размерности 4 любая гиперболическая особенность ранга 1 лувиллево эквивалентна особенностям одного из следующих двух видов:

1. прямое произведение  $V_{hyp} \times V_{reg}$ ;
2. фактор прямого произведения  $V_{hyp} \times V_{reg}$  по действию группы  $\mathbb{Z}_2$  определённого формулой

$$(x, s, \varphi) \longrightarrow (\tau(x), s, \varphi + \pi),$$

где  $x \in V_{hyp}$ ,  $(\varphi, s)$  — координаты действие-угол на  $V_{reg}$ , а  $\tau$  — это инволюция  $V_{hyp} \rightarrow V_{hyp}$ , неподвижные точки которой — это некоторые вершины гиперболического атома  $V_{hyp}$ .

В этой работе, при анализе случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  нам встретятся только 3 типа гиперболических точек ранга 1. Два из них — это прямые произведения регулярного слоения и атомов  $B$  и  $C_2$ . Соответствующие перестройки мы будем обозначать той же буквой, что и исходный атом. Третья перестройка, которая обозначается через  $A^*$  — это почти прямое произведение  $(B \times V_{reg})/\mathbb{Z}_2$ , где инволюция на атоме  $B$  — это центральная симметрия. Все эти перестройки подробно описаны в [6] (впервые они были обнаружены М. П. Харламовым в [29, 30]).

## 1.4 Круговые молекулы

Вкратце напомним понятия меченых и круговых молекул (подробнее о круговых молекулах и инвариантах Фоменко-Цишанга см., например, [6]).

**Определение 11.** Особые точки бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  — это образы особых точек ранга 0 и вырожденных точек ранга 1, а также точки пересечения (или самопересечения) гладких дуг, из которых состоит бифуркационная диаграмма  $\Sigma$ .

**Определение 12.** Гладкая параметризованная кривая  $\gamma$  без самопересечений в плоскости  $\mathbb{R}^2(H, f)$  называется *допустимой*, если она пересекает бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  трансверсально и не проходит через особые точки бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ .

Прообраз любой допустимой кривой — это трёхмерное многообразие с заданным на нём слоением Лиувилля. Возникает естественный инвариант этого слоения — *меченая молекула*, которая представляет из себя граф, ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критическим слоям, в которых происходят бифуркации. При этом в вершинах графа помещают символы, которые обозначают типы бифуркаций (эти перестройки обозначаются той же буквой, что и соответствующие особенности ранга 1:  $A$ ,  $B$ ,  $C_2$ ,  $A^*$  и т.д.). Также графу приписывают определённый набор меток трёх типов ( $r$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ ), которые указывают, как связаны между собой различные бифуркации. Меченая молекула также называется *инвариантом Фоменко-Цишанга* и *тонким лиувиллевым инвариантом*. Молекула без меток называется *грубой молекулой*.

Меченая молекула — это полный инвариант слоения Лиувилля на трёхмерном многообразии  $Q_\gamma^3$ , являющимся прообразом допустимой кривой при отображении момента.

**Теорема 7** (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [6, т. 1, гл. 4]). *Два слоения Лиувилля на  $(Q_{\gamma_1}^3)$  и  $(Q_{\gamma_2}^3)$  лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченые молекулы совпадают.*

Круговая молекула особой точки  $x$  бифуркационной диаграммы — это меченая молекула, которая описывает слоение Лиувилля в полном прообразе достаточно малой замкнутой допустимой кривой, обходящей вокруг точки  $x$ . В этой работе для простоты мы укажем только  $r$ -метки круговых молекул. Знание круговых молекул позволяет многое узнать о молекулах, соответствующих различным допустимым кривым (например, иногда молекулу кривой можно “склеить” из частей круговых молекул). Примеры круговых молекул приведены в таблицах 4.4 и 4.5.

При анализе случая Ковалевской на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  мы воспользуемся следующими известными фактами о локальном устройстве и круговых молекулах особых точек ранга 0 для систем с двумя степенями свободы (см., например, [6]).



**Теорема 8.** *Особые точки типа центр-центр, центр-седло и седло-седло сложности 1 любой интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы  $(M^4, \omega, H, f)$  устроены следующим образом.*

1. *Существует ровно одна, с точностью до ливиллевой эквивалентности, особенность типа центр-центр. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки типа центр-центр является объединением двух кривых, выходящих из этой точки. Круговая молекула особенности имеет вид  $A - A$ , при этом метка  $r$  равна 0.*
2. *Любая особенность типа центр-седло ливиллево эквивалентна прямому произведению седлового атома и эллиптического атома  $A$ . В окрестности точки, являющейся образом точки типа центр-седло, бифуркационная диаграмма является объединением кривой, проходящей через эту точку, и другой кривой, выходящей из этой точки. Круговая молекула получается добавлением атома  $A$  на конце каждого ребра соответствующего седлового атома, все метки  $r$  равны  $\infty$ .*
3. *Существует ровно 4 особенности типа седло-седло сложности 1 (т.е. содержащие ровно одну особую точку на слое). Эти особенности полностью различаются своими круговыми молекулами.*

При анализе случая Ковалевской на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  возникает только две особенности типа седло-седло — особенность типа прямого произведения  $B \times B$  и особенность типа почти прямого произведения  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ . В этом полупрямом произведении группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия. Это те же особенности, что возникают при анализе классического случая Ковалевской. Две другие особенности типа седло-седло (вида  $(B \times D_1)/\mathbb{Z}_2$  и  $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ) в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  не возникают.

## 1.5 Бигамильтоновы структуры

**Определение 13.** Две скобки Пуассона  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  на многообразии  $M$  называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация с постоянными

коэффициентами  $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$  тоже является скобкой Пуассона.

Пару согласованных скобок Пуассона на многообразии также называют *бигамильтоновой структурой*. Динамическую систему  $\dot{x} = v$  на многообразии  $M$ , на котором заданы две согласованные скобки Пуассона  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , называют бигамильтоновой, если она является гамильтоновой сразу относительно обеих скобок Пуассона и любой их нетривиальной линейной комбинации.

Если одна из скобок Пуассона является невырожденной, то вместо пары, состоящей из двух скобок Пуассона  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , можно рассмотреть пару, состоящую из скобки Пуассона  $\mathcal{B}$  и поля эндоморфизмов  $P = \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$ , связывающего эти две скобки. Этот оператор  $P$  называется *оператором рекурсии*. Известно, как можно описать согласованность двух скобок в терминах оператора (см., например, [3]).

**Определение 14.** Тензор Нийенхейса  $N_P$  поля эндоморфизмов  $P$  задаётся формулой

$$N_P(X, Y) = [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY] + P^2[X, Y]$$

для любых векторных полей  $X$  и  $Y$ .

**Утверждение 5.** Пусть скобка Пуассона  $\mathcal{B}$  на многообразии  $M$  невырождена. Тогда другая скобка Пуассона  $\mathcal{A}$  на  $M$  согласована со скобкой  $\mathcal{B}$  тогда и только тогда, когда равен нулю тензор Нийенхейса  $N_P$  поля эндоморфизмов  $P = \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$ .

## Глава 2

# Классификация лагранжевых расслоений

### 2.1 Основные результаты главы 2

Лагранжево расслоение — это локально тривиальное расслоение  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ , тотальное пространство  $(M^{2n}, \omega)$  которого является симплектическим многообразием, и все слои которого являются лагранжевыми подмногообразиями этого симплектического многообразия.

В этом разделе описана классификация всех лагранжевых расслоений с компактными и связными слоями над двумерными поверхностями с точностью до послыйного симплектоморфизма, тождественного на базе (т.е. с точностью до *лагранжевой эквивалентности*).

Ранее Х. Дюистермаатом в работе [40] были введены инварианты, полностью определяющие лагранжевы расслоения — решетка на базе лагранжева расслоения и лагранжев класс Черна. Эти инварианты достаточно сложны для вычисления, тем не менее К.Н. Мишачёву, используя результаты, полученные Дюистермаатом, в работе [49] удалось классифицировать все лагранжевы расслоения над ориентируемыми двумерными поверхностями. При этом Мишачёв показал, что среди двумерных поверхностей только двумерный тор и бутылка Клейна могут быть базой лагранжева расслоения.

В главе 2 диссертации классифицированы все лагранжевы расслоения над бутылкой Клейна (см. теоремы 13 и 14), и тем самым полностью решена задача классификации лагранжевых расслоений над двумерными поверхно-

стями.

При этом мы используем несколько другой набор инвариантов, чем тот, что был использован в работе Мишачёва [49]. А именно, показано, что лагранжево расслоение определяется с точностью до лагранжевой эквивалентности и поднятия 2-формы с базы своей решеткой на базе и первым препятствием к построению сечения (см. теорему 9 и замечание 2). Тем не менее, не все решетки и препятствия к построению сечения могут быть реализованы лагранжевыми расслоениями (см. пример 7). Поэтому в этой работе введён более широкий класс почти лагранжевых расслоений. Показано, что так же, как и лагранжевы расслоения, почти лагранжевы расслоения определяются этими двумя инвариантами с точностью до лагранжевой эквивалентности и поднятия 2-формы с базы (см. теорему 9); установлено, когда поднятие 2-формы с базы не меняет почти лагранжево расслоение (см. теорему 10) и доказано, что любые решетка и препятствия к построению сечения могут быть реализованы некоторым почти лагранжевым расслоением (см. теорему 11).

Результаты этой главы опубликованы в работе [62].

Сформулируем теперь основные полученные результаты. Прежде всего дадим определение почти лагранжевых расслоений. Они отличаются от лагранжевых тем, что форма на тотальном пространстве не обязательно замкнута.

**Определение 15.** Локально тривиальное расслоение  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  мы будем называть *почти лагранжевым расслоением*, если на тотальном пространстве  $M^{2n}$  задана 2-форма  $\eta$ , удовлетворяющая следующим трем условиям:

1. Форма  $\eta$  невырождена.
2. Ограничение формы  $\eta$  на каждый слой тождественно равно нулю:

$$\eta|_{E_x} \equiv 0.$$

3.  $d\eta = \pi^*\psi$  для некоторой 3-формы  $\psi$  на базе  $B^n$ .

Почти лагранжево расслоение является лагранжевым тогда и только тогда, когда  $d\eta = 0$ .

**Пример 5.** Важный способ получения новых почти лагранжевых расслоений — поднятие 2-формы с базы. Для любого почти лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  и для любой 2-формы  $\varphi$  на базе  $B^n$  подкрученное расслоение

$$\pi : (M^{2n}, \eta + \pi^* \varphi) \rightarrow B^n$$

также является почти лагранжевым. Подкрученное лагранжево расслоение является лагранжевым тогда и только тогда, когда *подкручивающая 2-форма* замкнута:  $d\varphi = 0$ .

В этой работе мы будем рассматривать (почти) лагранжевы расслоения с точностью до следующего отношения эквивалентности.

**Определение 16.** Пусть  $\pi_i : (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$  — два почти лагранжевых расслоения над одной и той же базой  $B^n$ . Послойный диффеоморфизм  $f : (M_1^{2n}, \eta_1) \rightarrow (M_2^{2n}, \eta_2)$ , тождественно действующий на базе и переводящий одну форму в другую ( $f^* \eta_2 = \eta_1$ ), называется *лагранжевой эквивалентностью*.

Другими словами, отображение  $f : (M_1^{2n}, \eta_1) \rightarrow (M_2^{2n}, \eta_2)$  является лагранжевой эквивалентностью тогда и только тогда, когда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} (M_1^{2n}, \eta_1) & \xrightarrow{f} & (M_2^{2n}, \eta_2) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & & B^n \end{array}$$

Кратко опишем теперь два инварианта почти лагранжевых расслоений, которые потребуются нам при формулировке основных теорем. Первый инвариант — решетка на базе — был введён для лагранжевых расслоений Х. Дюистермаатом в работе [40].

**Определение 17.** *Решеткой ранга  $k$*  на многообразии  $B^n$  мы будем называть подрасслоение  $P$  кокасательного расслоения  $T^*B$  такое, что

1. Каждый слой  $P_x$  решетки  $P$  является подгруппой  $T_x^*B$  по сложению.
2. Для любой точки  $x \in B^n$  существуют такие локальные координаты  $x^1, \dots, x^n$ , что решетка  $P$  порождается (в каждом кокасательном пространстве как подгруппа по сложению) ковекторами  $dx^1, \dots, dx^k$ .

**Замечание 1.** В работе [40] рассматривались только решетки ранга  $n$  и они назывались решетками в  $T^*B$ . В работах [49] и [62] решетками ранга  $k$  назывались подрасслоения  $T^*B$ , пересечение которых с каждым слоем кокасательного расслоения является дискретной подгруппой ранга  $k$ :

$$\mathbb{Z}^k \simeq P_x \subset T_x^*B \simeq \mathbb{R}^n.$$

Решетки в смысле определения 17 назывались замкнутыми решетками ранга  $k$ , потому что любое их (локальное) сечение является замкнутой 1-формой. Тем не менее, все рассматриваемые в этой работе (а также в работах [49] и [62]) решетки являются замкнутыми, поэтому мы будем для краткости называть их просто решетками.

Две решетки на  $B$  и  $B'$  *изоморфны* тогда и только тогда, когда существует диффеоморфизм  $f : B \rightarrow B'$ , дифференциал которого  $df$  переводит одну решетку в другую.

**Утверждение 6.** Любому (почти) лагранжеву расслоению  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  с компактными и связными слоями соответствует решетка  $P$  ранга  $n$  на базе  $B^n$ .

В разделе 2.2.2 доказано утверждение 6 и описаны основные свойства решеток, которые потребуются в этой работе.

**Договоренность 1.** В этой работе мы будем рассматривать только те лагранжевы и почти лагранжевы расслоения, для которых выполняются следующие два условия:

1. все слои рассматриваемых расслоений связны,
2. решетка  $P$  на базе корректна определена.

Оба условия автоматически выполнены, если слои связны и компактны.

Второй инвариант — первое препятствие к построению сечения — является известным инвариантом, используемым в алгебраической топологии. Подробное описание этого инварианта дано в разделе 2.2.3. Для почти лагранжевых расслоений это препятствие — это некоторый класс вторых когомологий с локальными коэффициентами  $\gamma \in H^2(B, \{\pi_1(F)\})$ , который равен нулю тогда и только тогда, когда существует сечение над 2-остовом базы. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между точками решетки  $P$  и элементами локальных коэффициентов  $\pi_1(\{F_x\})$  (см. замечание 4). Поэтому мы обозначаем группу первых препятствий к построению сечений через  $H^2(B, P)$ , а не через  $H^2(B, \{\pi_1(F)\})$ .

**Теорема 9.** *Для любых двух почти лагранжевых расслоений  $\pi_i : (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$  ( $i = 1, 2$ ) с одинаковыми соответствующими решетками  $P_i \subset T^*B$  и препятствиями к построению сечения  $\gamma_i \in H^2(B, P_i)$  существует такая 2-форма  $\varphi$  на базе  $B$ , что расслоение  $\pi_1 : (M_1^{2n}, \eta_1 + \pi_1^*\varphi) \rightarrow B^n$  лагранжево эквивалентно второму расслоению  $\pi_2 : (M_2^{2n}, \eta_2) \rightarrow B^n$ .*

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} (M_1^{2n}, \eta_1 + \pi_1^*\varphi) & \xrightarrow{f} & (M_2^{2n}, \eta_2) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & & B^n \end{array}$$

В частности, если препятствие к построению сечения тривиально, то есть, если расслоение допускает сечение, мы получаем следующее важное следствие из теоремы 9.

**Следствие 1.** *Если почти лагранжево расслоение  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  с решеткой  $P$  допускает сечение  $s : B^n \rightarrow (M^{2n}, \eta)$ , то оно лагранжево эквивалентно подкрученному факторкасательному расслоению  $\pi_0 : (T^*B/P, \omega_0 + \pi_0^*(s^*\eta)) \rightarrow B^n$ .*

Для лагранжевых расслоений утверждение аналогичное теореме 9 в терминах теории пучков доказано Х. Дюистермаатом [40] (см. также краткое описание этих результатов в разделе 2.6).

**Теорема 10.** Два почти лагранжеевых расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta + \pi^* \varphi_i) \rightarrow V^n$  ( $i = 1, 2$ ) с соответствующей решеткой  $P$  лагранжеево эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\varphi_1 - \varphi_2 = d\alpha$  для некоторого сечения  $\alpha : V^n \rightarrow T^*V^n/P$ .

Для лагранжеевых расслоений это утверждение было доказано К. Н. Мишачёвым в работе [49].

Доказательство теорем 9 и 10 см. в разделе 2.3.3.

**Определение 18.** Сечения  $s : V^n \rightarrow T^*V/P$  называется *решетчатой 1-формой* на многообразии  $V^n$ . Подгруппу  $H^2(V, \mathbb{R})$ , порожденную дифференциалами решетчатых 1-форм, мы будем обозначать через  $H_P^2(V)$ . Элементы факторгруппы  $H^2(V, \mathbb{R})/H_P^2(V)$  мы будем называть *нетривиальными подкручиваниями*.

**Замечание 2.** Теоремы 9 и 10 верны как для почти лагранжеевых, так и лагранжеевых расслоений. Формулировки соответствующих теорем для лагранжеевых расслоений дословно такие же, нужно просто заменить слова “почти лагранжеевы” на “лагранжеевы”.

**Теорема 11.** Любые решетка  $P \subset T^*V^n$  и препятствие  $\gamma \in H^2(V, P)$  могут быть реализованы некоторым почти лагранжеевым расслоением  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow V^n$ .

Доказательство теоремы 11 см. в разделе 2.3.4.

Однако существует естественное препятствие, которое мешает реализовать решетки и препятствия к построению сечения при помощи лагранжеевых расслоений.

**Определение 19.** Пусть  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow V^n$  — почти лагранжеево расслоение такое, что  $d\eta = \pi^* \psi$ . Класс  $[\psi] \in H^3(V^n, \mathbb{R})$  мы будем называть *препятствием к построению симплектической структуры*.

Следующее утверждение немедленно следует из теоремы 9.

**Лемма 3.** У любых двух почти лагранжеевых расслоений, реализующих одни и те же решетку  $P \subset T^*V$  и препятствие  $\gamma \in H^2(V, P)$  препятствия к



построению симплектической структуры  $[\psi] \in H^3(B^n, \mathbb{R})$  совпадают. Решетку и препятствие к построению сечения можно реализовать лагранжевым расслоением тогда и только тогда, когда соответствующее препятствие к построению симплектической структуры тривиально  $[\psi] = 0$ .

Пример 7 (см. раздел 2.5) доказывает, что препятствие  $[\psi] \in H^3(B^n, \mathbb{R})$  не всегда тривиально.

В двумерном случае лагранжевы и почти лагранжевы расслоения суть одно и то же. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 11.

**Следствие 2.** *Для любой решетки  $P$  на двумерной поверхности  $B^2$  и для любого препятствия  $\gamma \in H^2(B^2, P)$  существует лагранжево расслоение  $\pi : (M^4, \omega) \rightarrow B^2$  с решеткой  $P$  и первым препятствием  $\gamma$ .*

Поэтому для классификации всех лагранжевых расслоений с компактными тотальными пространствами над двумерными поверхностями нам остаётся сделать следующее:

1. Классифицировать все решетки  $P$  ранга 2 на двумерных поверхностях  $B^2$ .
2. Для каждой решетки  $P$  на двумерной поверхности  $B^2$  найти нетривиальные подкручивания  $H^2(B, \mathbb{R})/H_P^2(B)$  и вычислить пространство препятствий к построению сечений  $H^2(B, P)$ .

**Лемма 4** (К. Н. Мишачёв, [49]). *Среди замкнутых двумерных поверхностей только тор  $\mathbb{T}^2$  и бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$  могут быть базой лагранжева расслоения  $\pi : (M^4, \omega) \rightarrow B^2$  с компактным тотальным пространством  $(M^4, \omega)$ .*

Лагранжевы расслоения над тором  $\mathbb{T}^2$  были классифицированы Мишачёвым в [49] (см. также теоремы 12 и 14). В этой работе разобран случай  $B^2 = \mathbb{K}^2$ . Вначале мы классифицируем все решетки  $P$  ранга 2 на бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$  (см. теорему 13). Затем мы вычисляем все остальные инварианты (см. теорему 14).

**Замечание 3.** Лагранжевы расслоения над бутылкой Клейна были независимо (и практически одновременно) классифицированы Д. Сепе (см. [54]). Ответы совпали.

В этом разделе через  $(A, b)$  мы будем обозначать аффинное преобразование  $x \mapsto Ax + b$ .

**Теорема 12** (К. Н. Мишачёв, [49]). 1. Любая решетка  $P$  (ранга 2) на торе  $\mathbb{T}^2$  изоморфна одной из следующих решеток.

- Серия  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$ . Тор с решеткой  $(\mathbb{T}^2, P)$  — это просто фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по сдвигам

$$g = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Здесь  $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ . Необходимо, чтобы  $\det \begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix} \neq 0$ .

- Серия  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$ . Тор  $(\mathbb{T}^2, P)$  снова является фактором плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Теперь образы порождающих фундаментальной группы  $g, h \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$  имеют вид

$$g = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right).$$

Здесь  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Решетки из разных серий попарно неизоморфны.

3. Две решетки  $\mathbb{T}_{u_1,v_1;w_1,z_1}^2$  и  $\mathbb{T}_{u_2,v_2;w_2,z_2}^2$  изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы  $C, D \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ , что  $\begin{pmatrix} u_2 & w_2 \\ v_2 & z_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ v_1 & z_1 \end{pmatrix} D$ .

4. Решетки из серии  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$  попарно неизоморфны.

В разделе 2.4.3 этой работе классифицированы все решетки на бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$ .

Напомним, что фундаментальная группа бутылки Клейна  $\mathbb{K}^2$  — это группа с двумя порождающими  $g, h$  и одним соотношением  $g^{-1}hgh = e$ :

$$\pi_1(\mathbb{K}^2) = \langle g, h \mid g^{-1}hgh = e \rangle.$$

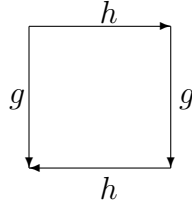


Рис. 2.1: Бутылка Клейна

Это несложно доказать, внимательно посмотрев на фундаментальный четырёхугольник бутылки Клейна (см. рис. 2.1).

**Теорема 13.** 1. Любая решетка  $P$  (ранга 2) на бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$  изоморфна одной из следующих решеток.

- Серия  $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}^2$ . Бутылка Клейна вместе с решеткой  $(\mathbb{K}^2, P)$  изоморфна фактору плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию группы  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ . Образы порождающих фундаментальной группы  $g, h \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$  суть

$$g = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \quad h = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{m-\delta}{2}y \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$$

Порождающие удовлетворяют единственному соотношению  $g^{-1}hgh = e$ . Здесь  $m, \delta \in \mathbb{Z}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ ,  $m \geq 0$ , и  $\delta$  равно 0 или 1. Если  $\delta = 0$ , то  $m$  чётно.

2. Описанные решетки на бутылке Клейна попарно неизоморфны.

Следующая теорема доказана в разделе 2.4.4 (в случае тора утверждения этой теоремы доказаны К. Н. Мишачёвым в работе [49]).

**Теорема 14.** Пусть  $P$  — решетка ранга 2 на двумерной поверхности  $B^2$ . Тогда

1. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  пространство препятствий  $H^2(\mathbb{T}^2, P)$  изоморфно  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Группа  $H_P^2(\mathbb{T}^2)$  является подгруппой  $H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ , порождённой числами  $u, v, w, z$ .
2. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$  пространство препятствий  $H^2(\mathbb{T}^2, P)$  изоморфно  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ . Группа  $H_P^2(\mathbb{T}^2)$  является подгруппой  $H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ , порождённой числами  $x$  и  $y$ .

3. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$  ( $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ ) пространство препятствий  $H^2(\mathbb{K}^2, P)$  изоморфно  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$  (где  $\mathbb{Z}_0$  формально полагается равным  $\mathbb{Z}$ ). Группа  $H_P^2(\mathbb{K}^2)$  тривиальна.
4. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{2m,y;1,x}^2$  ( $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ ) пространство препятствий  $H^2(\mathbb{K}^2, P)$  изоморфно  $\mathbb{Z}_{4m}$  (где  $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$ ). Группа  $H_P^2(\mathbb{K}^2)$  тривиальна.

Информация об инвариантах тора и бутылки Клейна собрана воедино в таблице 2.1.

Таблица 2.1: Инварианты лагранжевых расслоений

База	Серия	Нетривиальные подкручивания		$H^2(B^2, P)$	
		$H^2(B^2, \mathbb{R})$	$H_P^2(B^2)$	$\mathcal{Z}^2(B^2, P)$	$\mathcal{B}^2(B^2, P)$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$	$\mathbb{R}$	$u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$0$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{n,y;x}^2$	$\mathbb{R}$	$x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$0 \oplus n\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$	$0$	$0$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{2m,y;1,x}^2$	$0$	$0$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$4m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

В частности, было доказано следующее утверждение.

**Следствие 3.** Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{n,\delta;x,y}$ , где  $n > 0$ , существует ровно  $2n$  лагранжевых расслоений  $\pi : (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^2$  с решеткой  $P$ . Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{0,\delta;x,y}$  число лагранжевых расслоений с решеткой  $P$  счетно.

Решетка  $P$  лежит в серии  $\mathbb{K}_{0,\delta;x,y}$  тогда и только тогда, когда монодромия соответствующей решетки на торе  $\mathbb{T}^2$ , двулистно накрывающем бутылку Клейна, тривиальна.

## 2.2 Инварианты лагранжевых расслоений

В этом разделе описаны два ключевых инварианта почти лагранжевых расслоений, которые используются в этой работе — в разделе 2.2.2 дано определение решетки на базе почти лагранжева расслоения, а в разделе 2.2.3 —

первого препятствия к построению сечения. Кроме того, в разделе 2.2.1 мы опишем ещё одно важное понятие, связанное с (почти) лагранжевыми расслоениями — пуассоново действие (естественное послойное действие кокасательного расслоения к базе  $T^*B$  на тотальном пространстве почти лагранжева расслоения). Все основные теоремы о почти лагранжевых расслоениях удастся доказать именно благодаря наличию этого действия.

### 2.2.1 Пуассоново действие

Любому ковектору  $\alpha \in T_x^*B$  на базе (почти) лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  соответствует векторное поле  $v_\alpha$  на слое  $F_x = \pi^{-1}(x)$ , а именно векторное поле двойственное к 1-форме  $\pi^*\alpha$  относительно 2-формы  $\eta$ . Это векторное поле  $v_\alpha$  задается формулой

$$\eta(w, v_\alpha) = \langle \pi^*\alpha, w \rangle$$

для любого вектора  $w \in T_zM$  в точке  $z \in F_x$ .

**Утверждение 7.** *Рассмотрим произвольное почти лагранжево расслоение  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ . Тогда*

1. *Отображение  $\alpha \rightarrow v_\alpha$  устанавливает изоморфизм*

$$T_x^*B \simeq T_z(F_x)$$

*для любой точки  $x \in B$  и для любой точки  $z \in F_x$ .*

2. *Векторные поля  $v_\alpha$  коммутируют между собой.*

*Доказательство.* 1. Векторное поле  $v_\alpha$  касается слоя  $F_x$ , так как ограничение формы  $\eta$  на каждый слой  $F_x$  равно нулю.

Отображение  $\alpha \rightarrow v_\alpha$  изоморфно отображает  $T_x^*B$  на  $T_x(F_x)$ , так как размерности этих пространств совпадают, и у отображения  $\alpha \rightarrow v_\alpha$  нет ядра. Векторные поля  $v_\alpha$  не имеют нулей, т.е.  $v_\alpha(z) \neq 0$ , так как форма  $\eta$  невырождена.

2. Вначале докажем утверждение для случая, когда расслоение лагранжево, то есть когда  $d\eta = 0$ . Векторные поля  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  коммутируют, так как

$$[v_\alpha, v_\beta] = -X_{(\eta(v_\alpha, v_\beta))} = 0.$$

Здесь через  $X_f$  обозначено векторное поле  $\eta^{-1}df$ . Первое равенство следует из тождества для коммутатора гамильтоновых векторных полей (см. тождество (1.1.2)). Последнее равенство выполнено, так как слой лагранжев. Утверждение для лагранжевых расслоений доказано.

Докажем теперь утверждение в общем случае, когда  $d\eta = \pi^*\psi$ . Тогда  $d\psi = 0$ , так как  $d^2\eta = 0$ , а следовательно, локально  $\psi = d\varphi$  для некоторой 2-формы  $\varphi$  на базе  $B$ . Но векторные поля  $v_\alpha$  не меняются при поднятии 2-формы с базы. Следовательно, они коммутируют.

□

Если все векторные поля  $v_\alpha$  полны, то корректно определено естественное послойное действие кокасательного расслоения  $T^*B$  на тотальном пространстве  $(M^{2n}, \eta)$  почти лагранжева расслоения. Действие ковектора  $\alpha$  — это сдвиг за единичное время вдоль векторного поля  $v_\alpha$ .

**Определение 20.** Это послойное действие  $T^*B$  на  $(M^{2n}, \eta)$  мы будем называть *пуассоновым действием*.

Отметим, что все векторные поля  $v_\alpha$  заведомо полны, если тотальное пространство  $(M^{2n}, \eta)$  компактно.

**Утверждение 8.** Пусть  $\alpha$  — это 1-форма на базе  $B^n$  почти лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ . Обозначим через  $s_\alpha$  сдвиг за единичное время вдоль поля  $v_\alpha = \eta^{-1}(\pi^*\alpha)$ . Тогда

$$s_\alpha^*\eta = \eta + \pi^*(d\alpha), \tag{2.2.1}$$

если сдвиг  $s_\alpha$  корректно определен.

*Доказательство.* Производная Ли формы  $\eta$  вдоль векторного поля  $v_\alpha$  по формуле Картана равна

$$L_{v_\alpha}\eta = i_{v_\alpha}(d\eta) + d(i_{v_\alpha}\eta) \tag{2.2.2}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как  $d\eta = \pi^*\psi$ , а  $\pi_*(v_\alpha) = 0$ . Второе же равно  $d(\pi^*\alpha)$  по построению  $v_\alpha$ .  $\square$

Пуассоново действие позволяет построить локальные координаты действие-угол в окрестности любой точки лагранжева расслоения и тем самым доказать, что лагранжево расслоение локально лагранжево эквивалентно кокасательному расслоению. Докажем сразу более общее утверждение о том, что почти лагранжевы расслоения локально лагранжево эквивалентны подкрученному кокасательному расслоению.

**Утверждение 9.** *В окрестности любой точки  $z \in (M^{2n}, \eta)$  почти лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  существуют такие локальные координаты  $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$ , что*

1. координаты  $q^i$  постоянны на слоях,
2. матрица формы  $\eta$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \Omega \end{pmatrix},$$

где  $E$  — это единичная  $(n \times n)$ -матрица, а  $\Omega$  — матрица, зависящая только от  $q^1, \dots, q^n$ .

*Доказательство.* Возьмём локальные координаты  $q^1, \dots, q^n$  на базе  $B^n$  и поднимем их до локальных координат в окрестности точки  $z$ .

Фиксируем произвольное (локальное) сечение  $s : B \rightarrow E$ . В качестве  $p_i$  возьмём время сдвига точек сечения  $s$  вдоль векторных полей  $v_{dq^i}$ .

В построенных координатах  $(p_i, q^j)$  матрица формы  $\eta$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \Omega \end{pmatrix}$ , так как  $v_{dq^i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$  по построению.

Остаётся лишь заметить, что матрица  $\Omega$  не зависит от координат  $p_i$ , так как  $d\eta = \pi^*\psi$ .  $\square$

**Следствие 4.** *В окрестности любой точки  $z \in (M^{2n}, \omega)$  тотального пространства лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$  существуют локальные координаты  $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$  такие, что*

1. координаты  $q^i$  постоянны вдоль слоёв лагранжева расслоения,

2. симплектическая структура имеет вид  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$ .

*Доказательство.* Так как  $d\omega = 0$ , сечение  $s$  в доказательстве утверждения 9 может быть выбрано лагранжевым (в некоторой окрестности точки  $z$ ).  $\square$

### 2.2.2 Решетка в кокасательном расслоении

Первый инвариант (почти) лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  — это решетка на базе  $B^n$  расслоения. Эта решетка  $P$  — ядро изотропии пуассонова действия  $T^*B$  на  $(M^{2n}, \eta)$ , то есть решетка  $P$  состоит из всех ковекторов, тождественно действующих на соответствующем слое.

**Утверждение 10.** *Рассмотрим почти лагранжево расслоение  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ , для которого пуассоново действие корректно определено (все векторные поля  $v_\alpha$  полны). Группа изотропии пуассонова действия (т.е. множество ковекторов, которые задают тождественное действие на соответствующем слое) является решеткой в кокасательном расслоении  $P \subset T^*B$ .*

При доказательстве утверждения 10 мы воспользуемся следующим очевидным утверждением.

**Утверждение 11.** *Подмногообразие  $P \subset T^*B$  является решеткой ранга  $k$  на многообразии  $B$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *подмногообразию  $P$  трансверсально пересекает каждый слой по дискретной подгруппе ранга  $k$ :*

$$\mathbb{Z}^k \simeq P_x \subset T_x^*B \simeq \mathbb{R}^n$$

2. *любое локальное сечение  $P$  является замкнутой 1-формой.*

*Доказательство утверждения 10.* Действие  $T^*B$  является транзитивным в каждом слое, так как векторные поля  $v_\alpha$  порождают все касательное пространство  $T_z(F_x)$  в каждой точке  $z \in F_x$ . Поэтому слой  $F_x$  диффеоморфен



фактору группы  $\mathbb{R}^n \simeq T_x^*V$  по стабилизатору  $Z_x$  произвольной точки  $z \in F_x$ . (Стабилизатор  $Z_x$  не зависит от точки  $z$ , так как группа  $\mathbb{R}^n$  абелева, а действие транзитивно.) Слой  $F_x$  является  $n$ -мерным многообразием, поэтому стабилизатор  $Z_x$  должен быть дискретной подгруппой в  $T_x^*V$ .

При помощи теоремы о неявной функции несложно показать, что стабилизаторы  $Z_x$  гладко зависят от точки  $x$ . Поэтому множество ковекторов  $P$ , тождественно действующих на соответствующем слое, действительно является решеткой в кокасательном расслоении  $T^*V$ .

Любое (локальное) сечение решетки  $P$  замкнуто, так как  $s_\alpha^*\eta = \eta + \pi^*(d\alpha)$ , а сдвиг вдоль сечения решетки переводит (почти) лагранжево расслоение в себя.  $\square$

**Следствие 5.** *Если слой (почти) лагранжева расслоения компактен, то он диффеоморфен тору  $\mathbb{T}^n$ . Более общо, если все векторные поля  $v_\alpha$  полны, то слой расслоения диффеоморфен  $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$ .*

В этой работе мы часто будем использовать следующее несложное утверждение.

**Утверждение 12.** *Пусть  $P$  — это решетка на многообразии  $V^n$ . Тогда*

1. *Факторкокасательное расслоение  $\pi_0 : (T^*V/P, \omega_0) \rightarrow V^n$  является корректно определенным лагранжевым расслоением. Симплектическая структура  $\omega_0$  индуцируется канонической 2-формой на кокасательном расслоении.*
2. *Для любого сечения  $\alpha : V^n \rightarrow T^*V/P$  дифференциал  $d\alpha$  является корректно определенной 2-формой на  $V^n$  (дифференциал  $d\alpha$  не зависит от выбора локального представителя формы  $\alpha$ ).*

### 2.2.3 Препятствие к построению сечения

Напомним вкратце понятие препятствия к построению сечения. Подробнее о теории препятствий можно прочитать в [33] или в [26].

Рассмотрим клеточное пространство  $B$ . В этом разделе через  $e_i^k$  обозначена  $i$ -я  $k$ -мерная клетка пространства  $B$ , а соответствующее характеристическое отображение обозначено через  $\chi_i^k : D^k \rightarrow B$ .

Пусть  $\pi : E \rightarrow B$  — это локально тривиальное расслоение над клеточным комплексом  $B$  с гомотопически  $k$ -простым слоем  $F$  (здесь *гомотопическая  $k$ -простота*  $F$  означает, что гомотопические группы  $\pi_k(F, y_0)$  канонически изоморфны для разных точек  $y_0 \in F$ ).

Пусть над  $k$ -остовом задано сечение  $s : B^k \rightarrow E$ . Тогда каждой клетке  $e_i^{k+1}$  соответствует элемент  $c_i \in \pi_k(F)$  гомотопической группы слоя  $F$  над этой клеткой. Действительно, индуцированное расслоение  $(\chi_i^{k+1})^* E \rightarrow D^{k+1}$  над каждой клеткой  $e_i^{k+1}$  тривиально (локально тривиальное расслоение над диском тривиально), поэтому для каждой  $(k+1)$ -мерной клетки отображение  $s$  порождает отображение  $s|_{\partial D^{k+1}} : S^k \rightarrow F$ .

Говорят, что на многообразии  $B$  задана *система локальных коэффициентов*, если каждой точке  $x \in B$  сопоставлена группа  $G_x$ , и каждому пути  $s$  из  $x$  в  $y$ , рассматриваемому с точностью до гомотопии с фиксированными концами, соответствует гомоморфизм  $\gamma_s : G_x \rightarrow G_y$ . Композиции путей, там где эта операция определена, при этом должна соответствовать композиция гомоморфизмов.

Если слой гомотопически  $k$ -прост, то обозначим через  $\{\pi_k(F)\}$  локальные коэффициенты, соответствующие  $k$ -й гомотопической группе слоя. Так как клетки односвязны (и даже стягиваемы), то группы  $\pi_k(F)$  над каждой клеткой могут быть канонически отождествлены. Следовательно, набор  $c_i$  задает  $(k+1)$ -мерную клеточную коцепь  $c \in \mathcal{C}^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$ , называемую *препятствующей коцепью*.

Каждая препятствующая коцепь  $c$  — коцикл. Класс  $[c] \in H^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$  называется *препятствием к распространению сечения  $s$  на  $(k+1)$ -остов*. Отметим, что прибавление любой кограницы может быть реализовано сменой сечения на  $k$ -остове без изменения его на  $(k-1)$ -остове. А именно, верно следующее утверждение.

**Утверждение 13.** Пусть заданы локально тривиальное расслоение  $\pi : E \rightarrow$

$B$ , и сечение  $s : B^k \rightarrow E^k$ , которому соответствует препятствующая коцепь  $c \in \mathcal{C}^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$ . Тогда для любой коцепи  $\tilde{c}$  когомологичной препятствующей коцепи  $c$  (т. е.  $\tilde{c} - c = \delta b$ , где  $b \in \mathcal{C}^k(B, \{\pi_k(F)\})$ ) существует такое сечение  $\tilde{s} : B^k \rightarrow E^k$ , совпадающее с  $s$  на  $(k-1)$ -остове  $B^{k-1}$ , что  $\tilde{c}$  является препятствующей коцепью для сечения  $\tilde{s}$ .

Рассмотрим теперь (почти) лагранжево расслоение  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  с решеткой  $P$ .

**Замечание 4.** Как множество, решетка  $P$  находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с локальными коэффициентами  $\{\pi_1(F)\}$ . В разделе 2.2.1 показано, что каждый слой кокасательного расслоения  $T_x^*B \simeq \mathbb{R}^n$  транзитивно действует на соответствующем слое (почти) лагранжева расслоения  $F_x$ . Поэтому группа изотропии  $P_x$  этого действия находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с фундаментальной группой  $\pi_1(F_x)$ . Поэтому группу первых препятствий к построению сечений  $H^2(B, \{\pi_1(F)\})$  мы обозначаем через  $H^2(B, P)$ .

В частности, если  $\pi : (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$  ( $i = 1, 2$ ) — два почти лагранжевых расслоения с решеткой  $P$ , то их препятствия лежат в одной и той же группе  $H^2(B, P)$ , а следовательно их можно сравнивать.

**Замечание 5.** Отметим, что слой  $F$  рассматриваемых (почти) лагранжевых расслоений диффеоморфен  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{n-m}$ , а следовательно, он гомотопически  $k$ -прост для любого  $k$ .

## 2.3 Доказательство теорем классификации

В этом разделе доказаны теоремы 9, 10 и 11, которые описывают классифицирующие инварианты для почти лагранжевых расслоений. Ключевым фактом при доказательстве этих теорем становится наличие пуассонова действия — послойного действия кокасательного расслоения к базе  $T^*B$  на тотальном пространстве (почти) лагранжева расслоения. Чтобы подчеркнуть это, мы вначале в разделе 2.3.1 формализуем понятие расслоения с послойным действием на нём другого расслоения, а затем в разделе 2.3.2 покажем,

что пуассоново действие определяет почти лагранжево расслоение с точностью до поднятия 2-формы с базы. После этого в разделах 2.3.3 мы докажем теоремы 9 и 10, а затем в разделе 2.3.4 — теорему 11.

### 2.3.1 Аффинные расслоения

Пусть  $P$  — решетка на многообразии  $B$ . Мы будем говорить, что расслоение  $T^*B/P$  *послойно действует* на расслоении  $\pi : E \rightarrow B$ , если каждый слой  $T_x^*B/P$  действует на соответствующем слое  $F_x = \pi^{-1}(x)$  расслоения  $\pi : E \rightarrow B$ . (Естественно, действие должно гладко зависеть от точки  $x$ ).

**Определение 21.** Локально тривиальное расслоение  $\pi : E \rightarrow B$  мы будем называть *аффинным расслоением с присоединенным расслоением  $T^*B/P$* , если на  $\pi : E \rightarrow B$  задано послойное действие  $T^*B/P$ , которое является свободным и транзитивным в каждом слое.

Действие элемента  $\alpha \in T_x^*B/P$  на точке  $z \in F_x \subset E$  будем обозначать через  $\alpha \cdot z$ .

**Пример 6.** Для любого почти лагранжева расслоения с решеткой  $P$  пуассоново действие задает на тотальном пространстве структуру аффинного расслоения с присоединенным расслоением  $T^*B/P$ .

Линейное аффинное пространство с фиксированной точкой канонически эквивалентно присоединенному векторному пространству. Для аффинных расслоений ситуация аналогична.

**Утверждение 14.** Любое аффинное расслоение  $\pi : E \rightarrow B$  с сечением  $s : B \rightarrow E$  канонически эквивалентно своему присоединенному расслоению  $T^*B/P$ . Точке  $\alpha \in T_x^*B/P$  при этом соответствует точка  $\alpha \cdot s(x) \in E$ .

### 2.3.2 Эквивалентность аффинных и почти лагранжевых расслоений

Покажем, что пуассоново действие определяет почти лагранжево расслоение однозначно с точностью до поднятия 2-формы с базы.

**Теорема 15.** Любое аффинное расслоение  $\pi : E \rightarrow B$  с присоединенным расслоением  $T^*B/P$  может быть реализовано некоторым почти лагранжевым расслоением  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$  с решеткой  $P$ .

*Доказательство.* Рассмотрим покрытие  $\{U_\alpha\}$  базы  $B^n$ , над каждым элементом которого существует сечение  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$ . Каждое расслоение  $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$  канонически эквивалентно факторкасательному расслоению  $T^*U_\alpha/P$ . Обозначим через  $\eta_\alpha$  2-форму на  $\pi^{-1}(U_\alpha)$ , индуцированную канонической 2-формой на  $T^*U_\alpha$ . Рассмотрим разбиение единицы  $\phi_i$ , согласованное с покрытием  $\{U_i\}$ , и положим  $\eta = \sum_i \phi_i \eta_i$ .

Расслоение  $\pi : (E, \eta) \rightarrow B^n$  является почти лагранжевым расслоением с решеткой  $P$ , для которого пуассоново действие  $T^*B/P$  совпадает с исходным действием присоединенного расслоения  $T^*B/P$ . Явно проверим это в координатах. Для любой точки  $z \in E$  в координатах  $(p, q)$ , где координаты  $q^1, \dots, q^n$  постоянны на слоях, а координаты  $p_1, \dots, p_n$ , соответствуют ковекторам  $dq^i$ , матрица формы  $\phi_i \eta_i$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & \phi_i E \\ -\phi_i E & \phi_i \Phi_i \end{pmatrix}$ , где  $\Phi_i$  — некоторая  $(n \times n)$ -матрица, зависящая только от  $q^1, \dots, q^n$ . Значит, в этих координатах матрица формы  $\eta$  равна  $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \sum_i \phi_i \Phi_i \end{pmatrix}$ .  $\square$

**Теорема 16.** Два почти лагранжевых расслоения лагранжево эквивалентны с точностью до подкручивания тогда и только тогда, когда им соответствуют эквивалентные аффинные расслоения.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Подкручивание не меняет структуру аффинного расслоения (поля  $v_\alpha = \eta^{-1}(\pi^* \alpha)$  одни и те же для обоих расслоений).

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\pi_i : (M^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$  ( $i = 1, 2$ ) — два почти лагранжевых расслоения, которым соответствует одно и то же аффинное расслоение. Покажем, что  $\eta_1 - \eta_2 = \pi^* \varphi$ . Индуцируем эту форму  $\varphi$  при помощи (локальных) сечений. Из утверждения 8 следует, что формы  $\eta_1$  и  $\eta_2$  одинаково изменятся при переходе к другому сечению, поэтому форма  $\varphi$  корректно определена.  $\square$

### 2.3.3 Доказательство теорем 9 и 10

*Доказательство теоремы 10.* Теорема легко следует из доказанных ранее утверждений, а именно из теоремы 16 и утверждения 8. Достаточ-

но заметить, что послыйный автоморфизм почти лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ , сохраняющий пуассоново действие  $T^*B/P$  — это сдвиг на решетчатую 1-форму  $\alpha : B^n \rightarrow T^*B/P$ .  $\square$

Докажем теперь теорему 9. Для этого удобно “забыть” о симплектической структуре, оставив только пуассоново действие — перейдём от почти лагранжевых расслоений к аффинным (см. раздел 2.3.2).

Фиксируем клеточное разбиение пространства  $B$ . Так же, как и в разделе 2.2.3, через  $e_i^k$  мы будем обозначать  $i$ -ю  $k$ -мерную клетку пространства  $B$ , а через  $\chi_i^k : D^k \rightarrow B$  обозначено соответствующее характеристическое отображение. Для любого расслоения  $\pi : E \rightarrow B$  через  $\pi^l : E^l \rightarrow B^l$  обозначено индуцированное расслоение над  $l$ -остовом.

**Теорема 17.** *Два аффинных расслоения  $\pi_i : E_i \rightarrow B$  ( $i = 1, 2$ ) с присоединенным расслоением  $\pi_0 : T^*B/P \rightarrow B$ , где  $P$  — решетка на  $B$ , эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует одно и то же первое препятствие к построению сечения  $\gamma_1 = \gamma_2 \in H^2(B, P)$ .*

*Доказательство.* В одну сторону очевидно — у эквивалентных расслоений препятствия совпадают. В другую сторону — пусть у расслоений  $\pi_i : E_i \rightarrow B$  препятствия совпадают. Построим эквивалентность расслоений поостовно, а для каждого остова — поклеточно.

Пусть над  $(k-1)$ -остовом  $B^{k-1}$  уже построена эквивалентность:

$$E_1^{k-1} \sim_{k-1} E_2^{k-1}$$

Построим эквивалентность над  $k$ -клеткой  $e_j^k$ . Аффинное расслоение с фиксированным сечением канонически эквивалентно соответствующему присоединенному (см. утверждение 14). Поэтому для построения эквивалентности над клеткой  $e_j^k$  достаточно задать два сечения  $s_i : D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_i$  ( $i = 1, 2$ ) так, чтобы эквивалентность, переводящая их друг в друга, совпала с эквивалентностью  $\sim_{k-1}$  на  $(k-1)$ -остовах.

Таким образом, для построения эквивалентности над клеткой  $e_j^k$  достаточно найти стягиваемое сечение  $s_1^k : \partial D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_1$  такое, что соответствующее ему относительно  $\sim_{k-1}$  сечение  $s_2^k : \partial D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_2$  будет стягиваемым

(сечение  $s$  над границей клетки  $\partial e_j^k$  будем называть *стягиваемым*, если оно продолжается на всю клетку  $e_j^k$ ). После этого достаточно перевести сечения над клетками друг в друга.

Рассмотрим три случая.

**Случай**  $k = 1$ . Над 1-остовом у обоих аффинных расслоений  $\pi_i : E_i \rightarrow B$  существуют сечения  $s_i^1 : B^1 \rightarrow E_i^1$ . Более того, используя утверждение 13, эти сечения  $s_i^1$  можно выбрать так, чтобы их препятствующие коцепи совпали.

**Случай**  $k = 2$ . Пусть эквивалентность  $\sim_1$  над 1-остовом определяется сечениями  $s_i^1 : B^1 \rightarrow E_i$  ( $i = 1, 2$ ) над 1-остовом  $B^1$  такими, что их препятствующие коцепи совпадают. Покажем, что тогда эквивалентность  $\sim_1$  может быть продолжена на 2-остов.

Рассмотрим произвольную 2-клетку  $e_j^2$ . Выберем произвольное сечение  $s_1 : D^2 \rightarrow (\chi_j^2)^* E_1$  над этой клеткой  $e_j^2$ . Требуется доказать, что сечение  $s_2 : S^1 \rightarrow (\chi_j^2)^* E_2$ , соответствующее сечению  $s_1|_{\partial e_j^2} : S^1 \rightarrow (\chi_j^1)^* E_1$  относительно эквивалентности  $\sim_1$ , будет стягиваемым. отождествим аффинные расслоения  $(\chi_j^2)^* E_i \rightarrow D^2$  с соответствующими присоединенными расслоениями  $(\chi_j^2)^*(T^*B/P) \rightarrow D^2$ . Без ограничения общности можно считать, что сечение  $s_1 : D^2 \rightarrow E_1^1$  переходит в нулевое сечение.

Даны два сечения  $s_i^1 : B^1 \rightarrow E_i$ , обозначим через  $\tilde{s}_i : S^1 \rightarrow (\chi_j^2)^*(T^*B/P)$  ( $i = 1, 2$ ) соответствующие сечения расслоений  $(\chi_j^2)^*(T^*B/P) \rightarrow D^2$  над  $\partial D^2$ . Эти сечения  $\tilde{s}_i$  задают один и тот же элемент группы  $\pi_1((\chi_j^2)^*(T^*B/P))$  (этим сечениям соответствуют равные препятствия). Поэтому разности  $\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1$  соответствует нулевой элемент группы  $\pi_1((\chi_j^2)^*(T^*B/P))$ . То есть сечение  $\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1$  будет стягиваемым. Поэтому сечение  $s_2$  стягиваемо, что и требовалось доказать.

**Случай**  $k > 2$ . Для локально тривиальных расслоений  $(\chi_j^k|_{e_j^k})^* E_i \rightarrow D^k$  любое сечение продолжается с  $\partial e_j^k \simeq S^{k-1}$  на всю клетку  $e_j^k \simeq D^k$ . Действительно, препятствие к продолжению этого сечения лежит в группе  $\pi_{k-1}(F) = \pi_{k-1}(T^m \times \mathbb{R}^{n-m})$ , которая тривиальна при  $k > 2$ .  $\square$

### 2.3.4 Реализация инвариантов

Докажем теперь теорему 11. Для этого достаточно доказать, что аффинными расслоениями могут быть реализованы все возможные препятствия (см. раздел 2.3.2).

**Теорема 18.** Пусть  $P$  — решетка на многообразии  $B$ . Для любого класса  $\gamma \in H^2(B, P)$  существует аффинное расслоение с присоединенным расслоением  $T^*B/P$  и препятствием к построению сечения  $\gamma$ .

*Доказательство.* Возьмём произвольный представитель  $c \in \gamma$ . Явно построим расслоение, реализующее препятствующую коцепь  $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$ . Строить расслоение будем поостовно, а для одного остова поклеточно.

Заметим, что устройство расслоения над каждой клеткой определено однозначно. А именно, пусть  $\pi : E \rightarrow B$  — некоторое аффинное расслоение с присоединенным расслоением  $T^*B/P$ . Тогда индуцированное расслоение  $(\chi_j^k)^*E \rightarrow D^k$  для каждой клетки  $e_j^k$  тривиально (локально тривиальное расслоение над диском тривиально). Любое тривиальное расслоение над диском допускает сечение. Поэтому индуцированное расслоение  $(\chi_j^k)^*E \rightarrow D^k$  эквивалентно  $(\chi_j^k)^*(T^*B/P) \rightarrow D^k$ .

Пусть уже построено аффинное расслоение  $\pi^{k-1} : E^{k-1} \rightarrow B^{k-1}$  с присоединенным расслоением  $(T^*B/P)^{k-1}$ . Остаётся лишь показать, как “приклеить” клетку  $e_j^k$  с заданным на ней расслоением  $(\chi_j^k)^*(T^*B/P) \rightarrow D^k$  к расслоению  $\pi^{k-1} : E^{k-1} \rightarrow B^{k-1}$ . Для этого достаточно задать сечение над границей рассматриваемой клетки

$$s|_{\partial e_j^k} : S^{k-1} \rightarrow (\chi_j^k|_{\partial e_j^k})^* E^{k-1}.$$

Рассмотрим четыре случая.

**Случай  $k = 1$ .** Сечение над  $\partial e_j^1$  существует, так как слои связны.

**Случай  $k = 2$ .** Требуется построить расслоение над 2-остовом  $B^2$  с препятствующей коцепью  $c$ . Выберем на границе каждой двумерной клетки  $\partial e_j^2$  по точке  $b_j$ . Коцепь  $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$  сопоставляет каждой точке  $b_j$  элемент решетки  $p_j \in P_{b_j}$ .



Нужно найти сечение

$$s|_{\partial e_j^2} : S^2 \rightarrow (\chi_j^2|_{\partial e_j^2})^* E^1,$$

которое задает над клеткой  $e_j^2$  элемент  $p_j$ .

Заметим, что расслоение  $\pi^1 : E^1 \rightarrow B^1$  эквивалентно  $(T^*B/P)^1$ , так как аффинное расслоение  $\pi^1 : E^1 \rightarrow B^1$  допускает сечение  $s^1 : B^1 \rightarrow E^1$ . Расслоение  $(T^*B/P)^1$  можно представить как фактор  $(T^*B)^1$  по  $P^1$ .

Представим окружность  $\partial e_j^2 \simeq S^1$ , в виде отрезка  $I = [b_j^1, b_j^2]$  с отождествленными концами (соответствующими точке  $b_j \in \partial e_j^2$ ). Обозначим через  $(T^*B)^I$  расслоение, индуцированное над отрезком  $I$  кокасательным расслоением  $T^*B$ . Расслоение  $(T^*B)^I \rightarrow I$  тривиально, поэтому существует сечение  $s_I : I \rightarrow (T^*B)^I$  такое, что  $s_I(b_j^1) = 0$  и  $s_I(b_j^2) = p_j$  (значения над концами отрезка отличаются на  $p_j$ ). Сечение  $s_I : I \rightarrow (T^*B)^I$  индуцирует искомое сечение  $E^1 \simeq (T^*B/P)^1$ .

**Случай  $k = 3$ .** Покажем, что расслоение  $\pi^2 : E^2 \rightarrow B^2$  может быть продолжено с  $B^2$  на клетку  $e_j^3$  (т. е. что у расслоения  $(\chi_j^3|_{\partial e_j^3})^* E^2 \rightarrow S^2$  существует сечение). Нужно воспользоваться тем, что препятствующая коцепь является коциклом.

Случай, когда образ сферы  $\chi_j^3(\partial e_j^3)$  не пересекается с 1-остовом  $B^1$  тривиален. В этом случае образ  $\chi_j^3(\partial e_j^3)$  содержится в какой-то открытой клетке  $\text{Int } e_m^2$ . Любое сечение  $s : \text{Int } e_m^2 \rightarrow E^2$  задает сечение над  $\partial e_j^3$ . (Сечение  $s$  существует, так как расслоение над диском тривиально). Без ограничения общности можно считать, что на  $\partial e_j^3$  существует такая точка  $s_0$ , что  $\chi_j^3(s_0) \in B^1$ . Представим сферу  $\partial e_j^3 \simeq S^2$  с фиксированной точкой  $s_0$  как диск со стянутой в точку границей. Другими словами, фиксируем произвольное отображение пар пространств  $g : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\partial e_j^3, s_0)$ , которое диффеоморфно отображает внутренность диска  $\text{Int } D^2 = D^2 \setminus \partial D^2$  на  $\partial e_j^3 \setminus s_0$ . Обозначим через  $\chi : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (B^2, B^1)$  соответствующее отображение диска в 2-остов.

Покажем теперь, что любое сечение  $s^1 : B^1 \rightarrow E^2$  продолжается с точки  $s_0$  на всю сферу  $S^2$ . Для этого рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_2(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_2(B^2, B^1) & & \\
\downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \\
H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_2(\partial e_j^3, s_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\chi_j^3|_{\partial e_j^3})_*} & H_2(B^2, B^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{c} \{\pi_1(F)\} \\
& & & & (2.3.1)
\end{array}$$

В этой диаграмме через  $c$  обозначена препятствующая коцепь, соответствующая сечению  $s^1$ ; через  $h_2$  — гомоморфизм Гуревича; через  $h_1$  — композиция изоморфизма

$$g_* : \pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \pi_2(\partial e_j^3, s_0)$$

с гомоморфизмом Гуревича

$$\pi_2(\partial e_j^3, s_0) \rightarrow H_2(\partial e_j^3, s_0; \mathbb{Z}).$$

Гомоморфизмы  $h_1$  и  $h_2$  на самом деле являются изоморфизмами, так как в данном случае гомоморфизмы Гуревича являются изоморфизмами. Сечение  $s^1$  продолжается с  $s_0$  на  $\partial e_j^3$  тогда и только тогда, когда отображение  $\pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$  тривиально. Рассмотрим нижнюю строчку диаграммы (2.3.1). Легко видеть, что отображение

$$\partial_* \circ (\chi_j^3|_{\partial e_j^3})_* \circ c : H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$$

есть в точности ограничение клеточной коцепи  $\delta c : \mathcal{C}^3(B, \mathbb{Z}) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$  на подпространство

$$H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^3(B^3, B^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{C}^3(B, \mathbb{Z}).$$

По построению  $\delta c = 0$ , поэтому композиция гомоморфизмов в нижней строчке тривиальна. Но отображение  $\partial_*$  является изоморфизмом, поэтому отображение  $\pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$  тривиально. Значит, над сферой  $\partial e_j^3 \simeq S^2$  существует сечение.

**Случай**  $k > 3$ . Для того, чтобы построить сечение над  $\partial e_j^k \simeq S^{k-1}$ , разобьем сферу  $S^{k-1}$  на два полушария  $D_i^{k-1}$  ( $i = 1, 2$ ). Над каждым из полушарий сечение существует (расслоение над  $D_i^{k-1}$  тривиально). Кроме того, над

“экватором”  $D_1^{k-1} \cap D_2^{k-1}$  разность сечений задает элемент гомотопической группы  $\pi_{k-2}(F)$ , которая тривиальна ( $F \simeq \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ). Поэтому сечения над полушариями  $D_i^{k-1}$  можно склеить воедино, изменив их в малой окрестности “экватора”  $D_1^{k-1} \cap D_2^{k-1}$ .

Теорема 18 полностью доказана. Тем самым доказана и теорема 11.  $\square$

## 2.4 Классификация лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями

В этом разделе доказаны теоремы 13 и 14 о классификации лагранжевых расслоений с компактными тотальными пространствами над бутылкой Клейна с точностью до лагранжевой эквивалентности.

Теорема 13, которая описывает решетки на бутылке Клейна, доказана в разделе 2.4.3. Кроме того, в разделе 2.4.3 классифицированы все полные целочисленные аффинные поверхности. В разделе 2.4.1 показано, что понятие решетки максимального ранга эквивалентно понятию целочисленной аффинной структуры, и что любая целочисленная аффинная структура на замкнутой двумерной поверхности полна. В разделе 2.4.2 описаны свойства фундаментальной группы бутылки Клейна, которые потребуются нам при доказательстве теоремы 13.

Теорема 14, которая описывает остальные инварианты почти лагранжевых расслоений (нетривиальные подкручивания и препятствия к построению сечения), доказана в разделе 2.4.4. В этом разделе используются следующие обозначения:

- Через  $(A, \vec{b})$  обозначено аффинное преобразование  $\vec{x} \rightarrow A\vec{x} + \vec{b}$ .
- Через  $\text{Aff}_n$  обозначена группа аффинных преобразований  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$ .
- Через  $\text{AGL}(2, \mathbb{Z})$  обозначена группа аффинных преобразований  $(A, \vec{b})$  с целочисленной матрицей  $A$ .

### 2.4.1 Целочисленные аффинные многообразия

Говорят, что на многообразии  $M^n$  задана *аффинная структура*, если существует атлас  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , у которого все функции склейки  $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$  являются аффинными преобразованиями. Аффинная структура называется *целочисленной*, если все функции склейки  $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$  являются аффинными преобразованиями  $x \rightarrow Ax + \vec{b}$  с целочисленной матрицей  $A$  (т. е. все функции склейки  $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$  лежат в группе  $GL_n(\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \subset \text{Aff}_n$ ).

**Определение 22.** Многообразие с аффинной структурой называется *аффинным многообразием*. Многообразие с целочисленной аффинной структурой называется *целочисленным аффинным многообразием*. Аффинный диффеоморфизм называется *изоморфизмом*.

Любое многообразие может служить базой лагранжева расслоения (касательное расслоение является лагранжевым расслоением). Если предположить, что тотальное пространство компактно, то ситуация изменится.

**Лемма 5.** *Многообразие  $V^n$  может служить базой лагранжева расслоения  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow V^n$  с компактным тотальным пространством  $(M^{2n}, \omega)$  тогда и только тогда, когда  $V^n$  является целочисленным аффинным многообразием.*

Причина проста: целочисленная аффинная структура и решетка (максимального ранга) — это одно и то же.

**Утверждение 15.** *Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между целочисленными аффинными структурами и решетками (максимального ранга).*

*Доказательство.* Решетка порождается дифференциалами локальных целочисленных аффинных координат  $dx^i$ .  $\square$

В [48] Дж. Милнор получил результат, который может быть переформулирован следующим образом.

**Теорема 19.** *Среди компактных ориентируемых двумерных поверхностей только на торе  $\mathbb{T}^2$  существует аффинная структура.*

**Следствие 6.** *Компактное целочисленное аффинное многообразие — это либо тор  $\mathbb{T}^2$ , либо бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$ .*

Аффинную структуру на многообразии  $M^n$  можно естественным образом индуцировать на произвольное накрывающее пространство  $\widetilde{M}^n$ . Если аффинное многообразие  $U^n$  односвязно, то его можно изоморфно погрузить в аффинное пространство  $\mathbb{R}^n$  — достаточно изоморфно отобразить окрестность произвольной точки  $x \in U^n$  в окрестность произвольной точки  $y \in \mathbb{R}^n$ , а затем продолжить отображение вдоль путей. Локальный изоморфизм  $D : U^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  между односвязным аффинным многообразием  $U^n$  и аффинным пространством  $\mathbb{R}^n$  называется *отображением развертки*. Отображение развертки определено однозначно с точностью до аффинного преобразования пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 23.** Аффинное многообразие называется *полным*, если его тотальное пространство изоморфно  $\mathbb{R}^n$ .

Из [42] несложно вывести следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Любая целочисленная аффинная структура на торе  $\mathbb{T}^n$  полна.*

**Следствие 7.** *Любая целочисленная аффинная структура на компактной двумерной поверхности полна.*

*Доказательство.* Целочисленная аффинная поверхность — это либо тор  $\mathbb{T}^2$ , либо бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$ . Бутылка Клейна двулистно накрывается тором. □

## 2.4.2 Фундаментальная группа бутылки Клейна

В разделе 2.4 используется ряд простых утверждений про фундаментальную группу бутылки Клейна.

**Утверждение 16.** *Фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$  — это группа с двумя порождающими  $g, h$  и одним соотношением*

$$g^{-1}hgh = e. \tag{2.4.1}$$

*Доказательство.* Напомним, что для любого клеточного комплекса с одной 0-мерной клеткой 1-мерные клетки задают порождающие элементы фундаментальной группы, а 2-мерные клетки – связывающие их соотношения (см., например, [22]). Бутылка Клейна может быть реализована как четырёхугольник со сторонами, склеенными как на рисунке 2.1.  $\square$

**Определение 24.** Порождающие  $g, h \in \pi_1(K^2)$ , связанные единственным соотношением (2.4.1) мы будем называть *стандартными порождающими*.

**Утверждение 17.** Пусть  $g, h$  – стандартные порождающие  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ . Тогда любой элемент  $x \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$  единственным образом представляется в виде  $h^k g^l$ . Отображение  $(k, l) \rightarrow x$  устанавливает изоморфизм между  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$  и полупрямым произведением  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  со следующей групповой операцией:

$$(k, l)(m, n) = (k + (-1)^l m, l + n).$$

*Доказательство.* Из соотношения (2.4.1) вытекает, что  $g^l h^k = h^{(-1)^l k} g^l$  где  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Поэтому отображение  $(k, l) \rightarrow x$  является гомоморфизмом. Остаётся доказать, что у отображения нет ядра, т. е. что  $h^k g^l \neq e$ .

Достаточно доказать, что  $h^k \neq e$ , так как в соотношении (2.4.1) суммарная степень  $g$  равна 0. Сошлемся на следующий факт [13, теорема 4.10]: в группе, порождённой элементами  $a_1, \dots, a_n$ , связанными единственным циклически несократимым соотношением, содержащим  $a_n$ , каждое нетривиальное соотношение должно содержать  $a_n$ . (Слово называется *несократимым*, если в нем не встречается подряд символов  $a_i$  и  $a_i^{-1}$ , и называется *циклически несократимым*, если оно несократимо, и первый и последний символ не являются обратными друг к другу.)  $\square$

Опишем всевозможные пары стандартных порождающих.

**Утверждение 18.** Пусть  $g, h$  – стандартные порождающие  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ . Другая пара элементов  $g_1, h_1 \in \pi_1(K^2)$  является стандартными порождающими  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$  тогда и только тогда, когда  $h_1 = h^{\epsilon_1}$ ,  $g_1 = h^k g^{\epsilon_2}$ , где  $\epsilon_1 = \pm 1$ ,  $\epsilon_2 = \pm 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* ( $\Leftarrow$ ) Несложно проверить, что  $g_1^{-1}h_1g_1h_1 = e$ , и что пара  $g_1, h_1$  порождает всю группу  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$  (элементы  $g$  и  $h$  выражаются через  $g_1$  и  $h_1$ ).

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $g_1 = (k_1, l_1)$ ,  $h_1 = (k_2, l_2)$ . Из соотношения (2.4.1) следует, что  $l_1 = 0$ . Наконец,  $k_1 = \pm 1$  и  $l_2 = \pm 1$ , так как любой элемент должен представляться в виде  $h_1^p g_1^q$ .  $\square$

Выясним теперь, какие элементы  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$  сохраняют ориентацию.

**Утверждение 19.** *Если  $g, h$  — стандартные порождающие  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ , то элемент  $g$  не сохраняет ориентацию, а элемент  $h$  сохраняет.*

*Доказательство.* Заметим, что при склейке сторон четырёхугольника, как на рисунке 2.1, элемент  $g \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$  не сохраняет ориентацию, а  $h$  сохраняет. Утверждение 19 теперь легко следует из утверждения 18.  $\square$

### 2.4.3 Полные целочисленные аффинные поверхности

В этом разделе классифицированы все полные целочисленные аффинные поверхности с точностью до изоморфизма.

**Теорема 20.** *Любая полная целочисленная аффинная поверхность диффеоморфна одной из следующих: плоскость  $\mathbb{R}^2$ , цилиндр  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$ , лист Мёбиуса  $\mathbb{M}^2$ , тор  $\mathbb{T}^2$  и бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$ .*

Теорему 20 несложно вывести из теоремы 19, однако для полноты изложения мы приведем независимое доказательство этого факта.

Целочисленные аффинные структуры на торе  $\mathbb{T}^2$  и бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$  описаны соответственно в теоремах 12 и 13. Полные целочисленные аффинные структуры на остальных поверхностях описаны в следующей теореме (каждая полная целочисленная аффинная поверхность  $B^2$  представлена как фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию фундаментальной группы  $\pi_1(B^2)$ .)

**Теорема 21.** *1. Существует только одна полная целочисленная аффинная плоскость  $\mathbb{R}^2$  (это плоскость с естественной аффинной структурой).*

2. Любой полный целочисленный аффинный цилиндр  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$  изоморфен одному из следующих:

- Серия  $C_{u,v}^2$ . Образ порождающей фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1)$  имеет вид

$$t = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \right).$$

Здесь  $u, v \in \mathbb{R}$ . Необходимо, чтобы  $(u, v) \neq (0, 0)$ .

- Серия  $C_{n,y}^2$ . Образ порождающей фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1)$  имеет вид

$$g = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) \right).$$

Здесь  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ .

Две аффинные структуры  $C_{u_1,v_1}^2$  и  $C_{u_2,v_2}^2$  изоморфны тогда и только тогда, когда существует матрица  $C \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$  такая, что  $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ .

Остальные целочисленные аффинные цилиндры попарно неизоморфны.

3. Любой полный целочисленный аффинный лист Мёбиуса  $\mathbb{M}^2$  изоморфен одному из следующих:

- Серия  $\mathbb{M}_{\delta,x}^2$ . Образ порождающей фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{M}^2)$  имеет вид

$$g = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ , и  $\delta$  равно 0 или 1.

Все эти листы Мёбиуса попарно неизоморфны.

Результаты собрано воедино в таблице 2.2.

**Замечание 6.** Для неориентируемых поверхностей  $t_2 = g^2$ , т. е. элементы в трех правых столбцах порождают ориентируемое двулистное накрытие поверхности.



Таблица 2.2: Полные целочисленный аффинные поверхности

База	Серия	$g$	$h$	$t_1$	$t_2$
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	—	—	—	—
$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$	$C_{u,v}^2$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	—
$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$	$C_{n,y}^2$	—	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$	—	—
$\mathbb{M}^2$	$\mathbb{M}_{\delta,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{n,y;x}^2$	—	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{0,y;\delta,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\delta y}{y} \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{n,y;0,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ny}{y} \\ y \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{2n,y;1,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(2n-1)y}{y} \\ y \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$

Оставшаяся часть раздела 2.4.3 посвящена доказательству теорем 12, 13, 20 и 21.

**Схема доказательства теоремы 20.** Любое полное целочисленное аффинное многообразие  $B^n$  — это фактор  $\mathbb{R}^n$  по действию фундаментальной группы  $\pi_1(B^n)$ . Действие  $\pi_1(B^n)$  свободно, и каждый элемент действует как аффинное преобразование  $(A, \vec{b})$  с целочисленной матрицей  $A$ .

Так как действие свободно, у любого элемента  $g \in \pi_1(B^n)$  существует собственный вектор с собственным значением 1. Несложно показать, что в размерности  $n = 2$  у всех элементов  $g \in \pi_1(B^n)$  есть общий собственный вектор с собственным значением 1. Далее задача решается простым перебором.

**Вспомогательные утверждения.** В этом разделе мы часто будем использовать следующие простые утверждения.

**Утверждение 20.** Подгруппа  $G \subset \text{Aff}_n \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  действует свободно на  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда для любого элемента  $(A, \vec{b}) \in G$  уравнение  $(A - E)x = -\vec{b}$  не имеет решений.

*Доказательство.* Утверждение равносильно тому, что  $Ax + \vec{b} \neq x$  для любых  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $(A, \vec{b}) \in G$ . □

**Следствие 8.** Если группа  $G \subset \text{Aff}_n$  действует свободно, то линейные части  $A$  всех элементов  $(A, \vec{b}) \in G$  имеют собственное значение 1.

Также нам понадобится следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Любой  $n$ -мерный вектор  $v = (v_1, \dots, v_n)$  с целочисленными координатами взаимно-простыми в совокупности (т. е. для которых не существует целого числа отличного от  $\pm 1$ , делящего все координаты  $v_i$  вектора) можно включить в целочисленный базис.*

*Доказательство.* Доказательство легко проводится индукцией по размерности  $n$ .

- База.  $n = 2$ . Дан вектор  $v = (v_1, v_2)$  такой, что  $\text{НОД}(v_1, v_2) = 1$ . При помощи алгоритма Евклида можно найти такие  $m, n \in \mathbb{Z}$ , что  $v_1 m + v_2 n = 1$ . Вектор  $(-n, m)$  искомым  $\begin{vmatrix} v_1 & -n \\ v_2 & m \end{vmatrix} = 1$ .
- Шаг. Пусть  $k \in \mathbb{Z}$  — наибольшее число делящее первые  $n$  компонент вектора  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ . По предположению индукции можно так заменить первые  $n$  базисных векторов, что в новом базисе  $v = (k, 0, \dots, 0, v_{n+1})$ . Задача сведена к уже разобранным случаю  $n = 2$ .

□

**Доказательство теоремы 20.** Пусть  $G \subset \text{AGL}(2, \mathbb{Z})$  — подгруппа, свободно действующая на  $\mathbb{R}^2$  так, что факторпространство  $\mathbb{R}^2/G$  — многообразие (действие группы  $G$  — это действие фундаментальной группы  $\pi_1(B^2)$  на универсальном накрытии  $U^2 \simeq \mathbb{R}^2$ ). Нужно показать, что фактор  $\mathbb{R}^2/G$  диффеоморфен одной из поверхностей из теоремы 20.

**Приведение элементов  $G$  к каноническому виду.** Для начала покажем, к какому виду может быть приведен каждый элемент группы  $G$ .

**Утверждение 21.** *Для любого элемента  $g \in G$  существует такой целочисленный базис  $\mathbb{R}^2$ , что в нем матрица линейного отображения  $dg$  имеет следующий вид:*

- $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ , если  $g$  сохраняет ориентацию,

- $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , где  $\delta$  равно 0 или 1, если  $g$  не сохраняет ориентацию.

Для каждого элемента  $g \in G$  соответствующее число  $n$  или  $\delta$  определено однозначно.

*Доказательство.* Существование базиса. Возьмём собственный вектор  $e_1$  оператора  $dg$  с собственным значением 1 и дополним его до базиса. Пусть в новом базисе  $e_1, e_2$  выполнено равенство  $dg = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ . Если  $m < 0$  и  $g$  сохраняет ориентацию, обратим  $e_1$ , чтобы получить  $m > 0$ . Если  $g$  не сохраняет ориентацию, заменим  $e_2$  на  $e_2 - [\frac{m}{2}]e_1$  (где  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ), чтобы сделать  $m$  равным 0 или 1.

Единственность. Пусть  $A = dg$  и  $B = A - E$ , где  $E$  — единичная матрица. Элемент в правом верхнем углу ( $n$  или  $\delta$ ) полностью определяется наибольшим целым числом  $N$ , делящим все элементы матрицы  $B$ . Если  $g$  сохраняет ориентацию, то  $N = n$ . Если  $g$  не сохраняет ориентацию, то делитель  $N$  и элемент  $\delta$  либо оба четные ( $\delta = 0, N = 2$ ), либо оба нечетные ( $N = \delta = 1$ ). Делитель  $N$  является инвариантом, так как все элементы  $B$  в новых координатах будут целочисленными комбинациями элементов  $B$  в старых координатах.  $\square$

**Следствие 9.** След  $dg$  равен  $1 + \det(dg)$ .

Напомним, что репером аффинного пространства называется пара: точка пространства и базис присоединенного векторного пространства.

**Определение 25.** Назовем пару: точка аффинного пространства  $\mathbb{R}^n$  и целочисленный базис присоединенного векторного пространства — *целочисленным репером*.

**Лемма 7.** Для любого элемента  $g \in G$ , не являющегося сдвигом, существует такой целочисленный репер  $\mathbb{R}^2$ , что в нем  $g$  имеет вид

- $\left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$  и  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y \neq 0$ , если  $g$  сохраняет ориентацию,

- $\left( \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , а  $\delta$  равно 0 или 1, если  $g$  не сохраняет ориентацию.

*Доказательство.* Рассмотрим базис из утверждения 21. Пусть векторная часть элемента  $g$  имеет вид  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ . Перенесем начало координат либо в точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ -z_1/n \end{pmatrix}$ , если  $g$  сохраняет ориентацию, либо в точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2/2 \end{pmatrix}$ , если  $g$  не сохраняет ориентацию.  $\square$

**Ключевая лемма.** Двумерный случай удается полностью разобрать благодаря следующей лемме.

**Лемма 8.** *Существует такой базис  $\mathbb{R}^2$ , в котором линейные части всех элементов группы  $G$  имеют верхнетреугольный вид.*

*Доказательство.* Случай, когда все элементы  $G$ , сохраняющие ориентацию, являются сдвигами, тривиален — достаточно привести любой элемент, не сохраняющий ориентацию, к верхнетреугольному виду.

Пусть  $g_1, g_2 \in G$  такие, что  $dg_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $m \neq 0$ , и  $dg_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Тогда  $\text{tr}(d(g_1^k g_2)) = a_{11} + a_{22} + mka_{21}$ . По следствию 9 каждое из этих чисел должно быть равно 0 или 2. Значит  $a_{21} = 0$ .  $\square$

Обозначим через  $T$  подгруппу сдвигов в  $G$ , а через  $H$  — подгруппу элементов в  $G$ , сохраняющих ориентацию. Тогда  $T \triangleleft H \triangleleft G$ . Подгруппа сдвигов  $T$  изоморфна  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Z}^2$ , так как все орбиты действия группы  $G$  дискретны. В этом разделе элементы  $T$ ,  $H$  и  $G$  обозначены через  $t$ ,  $h$  и  $g$  соответственно.

**Утверждение 22.** *Группа  $G$  может быть порождена не более чем четырьмя элементами: группа  $T$  порождается не более чем двумя элементами, а группы  $H/T$  и  $G/H$  — каждая не более чем одним. При этом, если фактор  $\mathbb{R}^2/G$  ориентируем, то  $G$  может быть порождена не более чем тремя элементами.*

*Доказательство.* Докажем, что либо  $H = T$ , либо  $H/T \simeq \mathbb{Z}$ . Приведем матрицы  $dg$  всех элементов  $g \in G$  к верхнетреугольному виду. Тогда отображе-

ние, которое сопоставляет  $h \in H$  правый верхний элемент матрицы  $dh$

$$dh = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow m$$

задает гомоморфизм из  $H$  в  $\mathbb{Z}$  с ядром  $T$ . □

**Компактные аффинные многообразия.** Докажем следующее утверждение.

**Лемма 9.** *Только тор и бутылка Клейна могут быть полными замкнутыми целочисленными аффинными поверхностями.*

*Доказательство.* Фактор  $\mathbb{R}^2$  по  $G$  заведомо не может быть замкнутой двумерной поверхностью, отличной от  $S^2$ ,  $\mathbb{RP}^2$ ,  $T^2$  и  $\mathbb{K}^2$ : у фундаментальных групп остальных поверхностей слишком много порождающих. Известно, что фундаментальная группа ориентированной замкнутой поверхности рода  $g$  задаётся  $2g$  образующими  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  с единственным соотношением:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Неориентируемые поверхности двулистно накрываются ориентируемыми поверхностями.

Аффинная структура на многообразии  $M^n$  задает погружение универсального накрывающего пространства  $\widetilde{M}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  (отображение развертки, см. раздел 2.4.1). Сферу  $S^2$  в плоскость погрузить нельзя, поэтому сфера не может быть аффинным многообразием. Проективная плоскость двулистно накрывается сферой, поэтому она тоже не может быть аффинным многообразием. □

**Некомпактные аффинные многообразия.** Нужно доказать следующее утверждение.

**Лемма 10.** *Только плоскость, цилиндр и лист Мёбиуса могут быть некомпактными полными целочисленными аффинными двумерными многообразиями.*

Плоскость соответствует случаю  $G = e$ ; цилиндр соответствует случаю, когда группа  $G$  совпадает с  $H$  и порождается одним элементом сохраняющим ориентацию; лист Мёбиуса — случаю, когда  $G$  порождается одним элементом, не сохраняющим ориентацию.

*Доказательство леммы 10.* Вначале докажем, что группа  $H$  циклическая.

**Утверждение 23.** *Если  $H$  не является циклической, то фактор по действию  $H$  — тор.*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что факторпространство  $\mathbb{R}^2/H$  компактно. Случай, когда  $T$  порождена двумя элементами, тривиален. Остается разобрать случай, когда  $H$  порождена элементами  $h$  и  $t$ .

Сначала докажем, что  $H$  коммутативна. Рассмотрим целочисленный аффинный базис из леммы 7 для элемента  $g$ . Если сдвиг  $t$  имеет вид  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right)$ , то коммутатор  $[g, t] = gtg^{-1}t^{-1}$  имеет вид  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} nz \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ . Неравенство  $z \neq 0$  противоречило бы предположению, что группа  $T$  порождена одним элементом  $t$ .

Факторпространство компактно, так как для любого вектора  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  существует такой элемент  $g^k t^l \in H$ , что  $g^k t^l \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ , где  $0 \leq \tilde{u} < x$  и  $0 \leq \tilde{v} < y$ . Элемент  $g^k t^l$  имеет вид  $\left(\begin{pmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} lx \\ ky \end{pmatrix}\right)$ , поэтому  $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+knv+lx \\ v+ky \end{pmatrix}$ . Остается сперва фиксировать нужное  $k$ , а затем  $l$ .  $\square$

Итак, группа  $H$  циклическая. Докажем, что группа  $G$  тоже циклическая. Начнем с простого алгебраического утверждения.

**Утверждение 24.** *Если бесконечная циклическая группа  $G_1$  является подгруппой индекса 2 в группе  $G_2$ , то  $G_2$  либо коммутативна, либо изоморфна группе матриц*

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} \epsilon & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1, m \in \mathbb{Z} \right) \right\}.$$

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что у бесконечной циклической группы всего два автоморфизма.  $\square$

**Лемма 11.** *Группа  $G$  — циклическая тогда и только тогда, когда  $H$  — циклическая.*

*Доказательство.* Пусть  $H$  порождена элементом  $h$ , а  $g$  — элемент не сохраняющий ориентацию. Тогда  $g^2 = h^l$  так как  $g^2 \in H$ . Тогда квадрат элемента  $g' = gh^{-[\frac{l}{2}]}$  (где  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ) равен либо  $e$ , либо  $h$  (по утверждению 24 либо  $g$  и  $h$  коммутируют, либо  $l = 0$ ). Любое аффинное преобразование  $f$  такое, что  $f^2 = e$ , является симметрией. У симметрии есть неподвижные точки. Поэтому  $g'$  порождает  $G$ .  $\square$

Лемма 10 теперь легко следует из леммы 7.  $\square$

Теорема 20 полностью доказана.  $\square$

*Доказательство теорем 12, 13 и 21.* Нужно доказать следующее:

1. Любая целочисленная аффинная поверхность  $B^2$  изоморфна одной из поверхностей из таблицы 2.2 (нужно привести действие  $\pi_1(B^2)$  к требуемому виду).
2. Все целочисленные аффинные поверхности из таблицы 2.2 корректно определены (нужно показать, что действие каждой группы  $G$  из таблицы 2.2 свободно, и что факторпространство  $\mathbb{R}^2/G$  — многообразие).
3. Нужно доказать утверждения теорем 12, 13 и 21 про то, что поверхности из разных серий неизоморфны.

**Приведение к требуемому виду.** Рассмотрим целочисленную аффинную поверхность  $B^2$ . Чтобы привести действие  $\pi_1(B^2)$  к требуемому в таблице 2.2 виду достаточно воспользоваться леммами 7 и 8. После этого становится ясно, какой базис нужно выбрать.

Рассмотрим случай бутылки Клейна  $B^2 = \mathbb{K}^2$  (остальные случаи аналогичны).

Рассмотрим порождающие фундаментальной группы  $g, h \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$ , связанные единственным соотношением  $g^{-1}hgh = e$ . Нужно привести порождающие  $g$  и  $h$  к требуемому виду при помощи следующих операций:

- Можно менять целочисленный аффинный базис  $\mathbb{R}^2$ ,
- Можно менять порождающие фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ .

Элемент  $h$  сохраняет ориентацию (см. утверждение 19), поэтому по лемме 8 существует целочисленный аффинный базис, в котором

$$g = \left( \begin{pmatrix} \sigma & m \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right),$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , и  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma = \pm 1$ ,  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ .

Чтобы облегчить запись, в этой части доказательства мы не будем менять обозначения для параметров элементов  $g$  и  $h$  (например,  $n$  всегда будет обозначать элемент в правом верхнем углу матрицы  $dh$ ).

Без ограничения общности можно считать, что  $\sigma = 1$ . Несложно проверить, что равенство  $g^{-1}hgh = e$  выполнено тогда и только тогда, когда  $x_1 + y_1 + ny_2 = y_1 - \sigma x_1 + \sigma n x_2 - m x_2$  и  $x_2 + y_2 = y_2 + \sigma x_2$ . Если  $\sigma = -1$ , то  $x_2 = 0$ , и следовательно  $n = 0$  (иначе действие  $h$  не свободно). Если же  $h$  — сдвиг, то по лемме 8 существует целочисленный аффинный базис  $\mathbb{R}^2$  такой, что  $\sigma = 1$ . Теперь

$$dg = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad dh = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем линейные части  $dg$  и  $dh$  к требуемому в условии виду. Если  $m$  и  $n$  — нечетные, то изменим четность  $m$ , заменив  $g$  на  $hg$  (это корректная замена главных элементов — см. утверждение 18). Теперь сделаем замену базиса из утверждения 21 — если  $n < 0$ , то обратим первый базисный вектор  $e_1$  (чтобы сделать  $n \geq 0$ ). После этого заменим второй базисный вектор  $e_2$  на  $e_2 - [\frac{m}{2}]e_1$  (чтобы сделать  $m$  равным 0 или 1). Итак,

$$dg = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad dh = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ ,  $\delta$  равно 0 или 1, и  $n$  четно, если  $\delta = 1$ .

Приведем теперь векторные части элементов  $g$  и  $h$  к требуемому виду. Перенесем начало координат в точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ -z_1/n \end{pmatrix}$ , чтобы сделать  $y_2$  равным 0. Затем, если  $x_2 < 0$ , заменим  $e_1, e_2$  на  $-e_1, -e_2$ , чтобы сделать  $x_2 > 0$ . После этого, если  $y_1 < 0$ , заменим  $g$  на  $g^{-1}$ , чтобы изменить знак  $y_1$ . Оставшиеся условия на параметры  $g$  и  $h$  (т. е.  $x_1 = \frac{n-\delta}{2}x_2$ ) вытекают из формулы  $g^{-1}hgh$ .



**Аффинные поверхности в таблице 2.2** корректно определены.

Рассмотри группу  $G$  из таблицы 2.2. Чтобы доказать, что группа  $G$  действует свободно, нужно проверить, что для любого элемента  $(A, \vec{b}) \in G$  уравнение  $(A - E)\vec{x} = -\vec{b}$  не имеет решений (см. утверждение 20). Это делается явно. Чтобы облегчить проверку в случае бутылки Клейна, опишем все элементы соответствующих групп.

**Лемма 12.** Пусть  $a = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x \\ x \end{pmatrix} \right)$  и  $b = \left( \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Тогда

$$a^k b^l = \left( \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+(-1)^{l-1}}{2}\delta + (-1)^l kn \\ 0 & (-1)^l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k\alpha x + \frac{k(k-1)}{2}nx + ly \\ kx \end{pmatrix} \right) \quad (2.4.2)$$

Докажем, что фактор  $\mathbb{R}^2/G$  — многообразие. Для всех поверхностей  $B^2$  кроме бутылки Клейна это практически очевидно. В случае бутылки Клейна достаточно заметить, что фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию подгруппы  $H \subset G$ , состоящей из элементов, сохраняющих ориентацию, — тор.

**Неизоморфность серий.** Аффинные структуры на недиффеоморфных поверхностях попарно неизоморфны, и структуры из разных серий на ориентируемых поверхностях попарно неизоморфны (для цилиндра и для тора одна серия состоит из сдвигов, а вторая нет).

Утверждения про серии  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  и  $C_{u,v}^2$  практически очевидны: матрица  $C$  соответствует замене репера, а  $D$  — замене базиса фундаментальной группы.

Случай тора  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$  был разобран Мишачёвым в [49] (этот случай может также быть разобран аналогично рассматриваемому ниже случаю бутылки Клейна). Рассмотрим бутылку Клейна. Следующая лемма описывает все изоморфизмы между двумя целочисленными аффинными структурами на бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$ .

**Лемма 13.** Пусть две целочисленные аффинные структуры  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  на бутылке Клейна задаются двумя парами  $g_1, h_1$ , и  $g_2, h_2$  стандартных порождающих  $\mathbb{K}^2$ , где  $h_i = \left( \begin{pmatrix} 1 & n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_i y_i \\ y_i \end{pmatrix} \right)$  и  $g_i = \left( \begin{pmatrix} 1 & \delta_i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Автоморфизм  $f$  плоскости переводит структуру  $\mathcal{A}_1$  в структуру  $\mathcal{A}_2$  тогда и только тогда, когда существуют такие  $\epsilon_1 = \pm 1$ ,  $\epsilon_2 = \pm 1$  и  $k \in \mathbb{Z}$ ,

что

$$fh_1f^{-1} = h_2^{\epsilon_1}, \quad (2.4.3)$$

$$fg_1f^{-1} = h_2^k g_2^{\epsilon_2}. \quad (2.4.4)$$

Если  $g_1 \neq g_2$  или  $h_1 \neq h_2$ , то таких автоморфизмов  $f$  не существует (т. е. аффинные структуры из разных серий неизоморфны). Если же  $g_1 = g_2$  и  $h_1 = h_2$ , то  $f$  является автоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1.  $f = \left( \begin{pmatrix} \epsilon_2 & \mu \\ 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \frac{ky}{2} \end{pmatrix} \right)$ , где  $\mu = \frac{-\epsilon_1\delta + \epsilon_1kn + \epsilon_2\delta}{2}$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}$

2. Если  $n \neq 0$ , то  $\epsilon_2 = 1$ .

3. Если  $n$  нечетно, то  $k$  четно.

4. Если  $\delta \neq 0$  (и  $n$  четно), то  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ .

*Доказательство.* То, что  $f$  — автоморфизм тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнениям (2.4.3) и (2.4.4), следует из утверждения 18 (о том, как выглядят все автоморфизмы  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ ).

Заметим далее, что автоморфизм  $f$  сохраняет первый базисный вектор  $e_1$ , так как  $e_1$  — единственный собственный вектор с собственным значением 1 для всех элементов  $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ . Выпишем теперь явно действие изоморфизма. Следующее утверждение доказывается прямым вычислением.

**Утверждение 25.** Пусть  $e = \left( \begin{pmatrix} 1 & \tilde{m} \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right)$ , где  $\tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{y}, \sigma \in \mathbb{R}$ . Тогда при сопряжении автоморфизмом  $f = \left( \begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$ , где  $\sigma_1 = \pm 1$ ,  $\sigma_2 = \pm 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  имеют места равенства

$$fef^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & (\sigma-1)\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\tilde{m} \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1\tilde{x} + \lambda\tilde{y} + (1-\sigma)\sigma_2\lambda z_2 - \sigma_1\sigma_2\tilde{m}z_2 \\ (1-\sigma)z_2 + \sigma_2\tilde{y} \end{pmatrix} \right) \quad (2.4.5)$$

В частности, если  $a$  и  $b$  — те же, что и в лемме 13, то выполнены следующие равенства.

$$faf^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1\sigma_2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1\frac{n-\delta}{2}y - \sigma_1\sigma_2nz_2 + \lambda y \\ \sigma_2y \end{pmatrix} \right), \quad (2.4.6)$$

$$fbf^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & -2\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1x + 2\sigma_2\lambda z_2 - \delta\sigma_1\sigma_2z_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} \right). \quad (2.4.7)$$

Поэтому уравнения (2.4.3) и (2.4.4) будут эквивалентны следующему набору уравнений

$$\sigma_1\sigma_2n_1 = \epsilon_1n_2, \quad (2.4.8)$$

$$-2\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\delta_1 = \delta_2 - kn_2, \quad (2.4.9)$$

$$\sigma_1\frac{n_1 - \delta_1}{2}y_1 - \sigma_1\sigma_2n_1z_2 + \lambda y_1 = \frac{n_2 - \epsilon_1\delta_2}{2}y_2, \quad (2.4.10)$$

$$\sigma_2y_1 = \epsilon_1y_2, \quad (2.4.11)$$

$$\sigma_1x_1 + 2\sigma_2\lambda z_2 - \delta_1\sigma_1\sigma_2z_2 = k\frac{n_2 - \delta_2}{2}y_2 + \frac{k(k-1)}{2}n_2y_2 + \epsilon_2x_2, \quad (2.4.12)$$

$$2z_2 = ky_2. \quad (2.4.13)$$

Уравнения (2.4.8) и (2.4.9) получаются из сравнения линейных частей у элементов  $h_1$ ,  $h_2$  и  $g_1$ ,  $g_2$  соответственно. Уравнения (2.4.10) и (2.4.11) — из сравнения векторов сдвига у  $h_1$  и  $h_2$ , а (2.4.12) и (2.4.13) — из векторов сдвига  $g_1$  и  $g_2$ .

Так как  $y_i > 0$ , а  $\sigma_i = \pm 1$  и  $\epsilon_i = \pm 1$ , то из уравнения (2.4.11) вытекает, что  $\sigma_2 = \epsilon_1$  и  $y_1 = y_2$ . Аналогично, из уравнения (2.4.8) следует, что  $n_1 = n_2$ . Кроме того, если  $n_i \neq 0$ , то  $\sigma_1 = 1$ .

Уравнения (2.4.9) и (2.4.13) дают соответственно  $\lambda = \frac{-\sigma_2\delta_2 + k\sigma_2n_2 + \sigma_1\delta_1}{2}$  и  $z_2 = \frac{ky_2}{2}$ . Подставляя полученные равенства в уравнение (2.4.12), получаем, что  $y_1 = y_2$ ,  $\sigma_1 = \epsilon_2$ .

Остается показать, что  $\delta_1 = \delta_2$ . Если  $n_1 (= n_2)$  нечетно, то  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  (и  $k$  четно, так как  $\lambda$  целое). Если же  $n_1 (= n_2)$  четно, то  $\sigma_2\delta_2 = \sigma_1\delta_1$ , так как  $\lambda$  целое (т. е.  $\delta_1 = \delta_2$ , и если  $\delta_i \neq 0$ , то  $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

Оставшееся уравнение (2.4.10) будет выполнено автоматически. Лемма 13 доказана. □

Теоремы 12, 13 и 21 полностью доказаны. □

#### 2.4.4 Остальные инварианты

Рассмотрим полную решетку  $P$  на двумерной поверхности  $B^2$ . Найдем нетривиальные подкручивания  $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B^2)$  и группу первых препятствий  $H^2(B^2, P)$ .

**Теорема 22.** Для любой полной решетки  $P$  на двумерном многообразии  $B^2$ , отличном от тора и бутылки Клейна, пространство препятствий  $H^2(B^2, P)$  и нетривиальные подкручивания  $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B)$  тривиальны.

*Доказательство.* Напомним, что полные решетки существуют только на торе, бутылке Клейна, цилиндре, листе Мёбиуса и на плоскости (см. теорему 20). Нетривиальные подкручивания отсутствуют:  $H_P^2(B^2) = 0$ , так как база некомпактна. Препятствий нет:  $H^2(B^2, P) = 0$ , так как база  $B^2$  может быть стянута к окружности или к точке.  $\square$

Оставшаяся часть раздела 2.4.4 посвящена доказательству теоремы 14 — вычислению инвариантов для лагранжевых расслоений над тором и над бутылкой Клейна. У бутылки Клейна также нет нетривиальных подкручиваний, так как  $H^2(\mathbb{K}^2, \mathbb{R}) = 0$ . Итак, остается найти нетривиальные подкручивания для тора, а также препятствия к построению сечения для тора и бутылки Клейна.

**Нетривиальные подкручивания.** Нетривиальные подкручивания для тора были найдены Мишачёвым в [49] (там нетривиальные подкручивания назывались *когомологическими инвариантами сдвига*), поэтому приведем лишь набросок доказательства.

Напомним, что на торе  $\mathbb{T}^2$  существуют только две серии решеток: серия  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  и серия  $\mathbb{T}_{n,z;u}^2$ . Тор  $\mathbb{T}^2$  с решеткой  $P$  — это фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ .

Для решетки  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  порождающие  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$  имеют вид

$$g = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Для решетки  $\mathbb{T}_{n,z;u}^2$  порождающие  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$  имеют вид

$$g = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Чтобы найти все нетривиальные подкручивания  $H^2(B, P)/H_P^2(B)$ , возьмем произвольную решетчатую 1-форму  $\alpha$  и найдем когомологический класс

дифференциала  $[d\alpha] \in H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ . В двумерном случае достаточно найти интеграл  $\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha$ .

Любой решетчатой 1-форме  $\alpha$  на торе  $\mathbb{T}^2$  соответствует 1-форма  $\tilde{\alpha}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которая под действием группы  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$  переходит в себя с точностью до 1-формы вида  $m dx + n dy$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$  (т.е. с точностью до глобального сечения решетки  $\mathbb{Z}^2$ ).

**Утверждение 26.** Пусть  $\tilde{\alpha}$  — 1-форма, для которой  $(g^{-1})^* \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} + k dx + l dy$  и  $(h^{-1})^* \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} - p dx - q dy$ , где  $k, l, p, q \in \mathbb{Z}$ . Тогда для обеих серий решеток  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  и  $\mathbb{T}_{n,z;u}^2$  выполнено

$$\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha = pu + qv + kw + lz$$

(для второй серии  $v$  и  $w$  формально считаются равными 0).

Для серии  $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$  все возможные  $k, l, p, q$  реализуются.

Для серии  $\mathbb{T}_{n,z;u}^2$  решетчатая 1-форма  $\alpha$  с таким представителем  $\tilde{\alpha}$  существует тогда и только тогда, когда  $k = 0$ .

*Набросок доказательства.* Интеграл  $\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha$  равен интегралу от  $d\tilde{\alpha}$  по параллелограмму, натянутому на вершины  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} u+w \\ v+z \end{pmatrix}$ . Для подсчета последнего интеграла достаточно применить формулу Стокса.

Единственное соотношение на  $k, l, p, q$  вытекает из условия  $g^* h^* \tilde{\alpha} = h^* g^* \tilde{\alpha}$ .

□

**Препятствия к построению сечений.** Найдем всевозможные препятствия к построению сечений  $H^2(B, P)$ . Для этого достаточно найти пространство коциклов  $\mathcal{Z}^2(B, P)$  и затем профакторизовать его по множеству кограниц  $\mathcal{B}^2(B, P)$ . Множество коциклов  $\mathcal{Z}^2(B, P)$  находится как множество (препятствующих) коцепей  $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$  таких, что  $\delta c = 0$ . Для нахождения множества кограниц  $\mathcal{B}^2(B, P)$  достаточно узнать, как меняется препятствующая коцепь  $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$  при изменении сечения над 1-остовом  $B^1$  (см. утверждение 13).

Покажем, как это может быть сделано на примере решеток  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$  и  $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}^2$ .

Решетка  $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$ . Тор  $\mathbb{T}^2$  с решеткой  $P$  — это фактор плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию подгруппы  $G$  группы аффинных преобразований  $\text{Aff}_2$ , порожденной элементами

$$g = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ .

Решетка на торе  $\mathbb{T}^2$  индуцируется стандартной целочисленной решеткой  $\mathbb{Z}^2$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Индуцированная решетка корректно определена, так как у  $g$  и  $h$  целочисленные матрицы линейных частей.

Фиксируем на торе  $\mathbb{T}^2$  следующую структуру клеточного комплекса: представим тор в виде параллелограмма  $OO_1O_2O_3$ , натянутого на вершины  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ , и со сторонами, отождествленными, как на рисунке 2.2 слева.

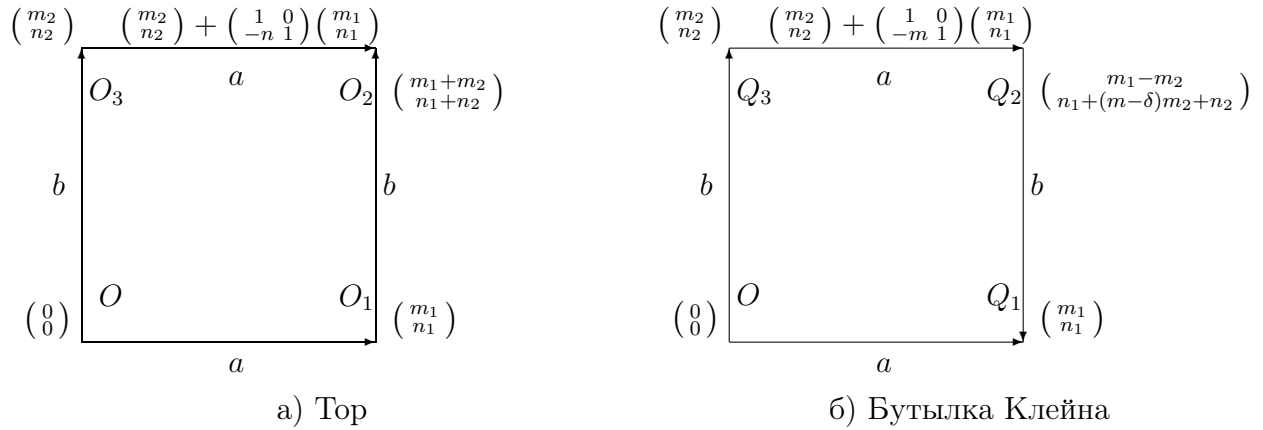


Рис. 2.2: Препятствие к построению сечений.

Фиксируем теперь способ задания препятствующих коцепей  $c \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2, P)$  целочисленными векторами: отождествим коцепь  $c \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2, P)$  и соответствующий ей элемент решетки  $P$  в точке  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , выберем в слое  $P_O$  некоторый базис.

**Утверждение 27.** В данном случае

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ nm \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Поэтому  $H^2(\mathbb{T}^2, P) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ .

*Доказательство.* Так как 3-мерных клеток нет, то

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{T}^2, P) = \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\},$$

поэтому для нахождения  $H^2(\mathbb{T}^2, P)$  остается найти пространство кограниц  $\mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P)$ .

Для нахождения пространства кограниц  $\mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P)$  возьмем два сечения  $s^1, \tilde{s}^1$  над 1-остовом  $B^1$  и найдем разность соответствующих препятствующих коцепей. Мы будем использовать следующее понятие. Пусть  $\alpha$  — это решетчатая 1-форма на пути  $s : I = [0, 1] \rightarrow B$  с началом и концом в точке  $x$  (т. е.  $\alpha : I \rightarrow T^*B/P$ ,  $\alpha(t) \in T_{s(t)}^*B/P$ ). Поднимем решетчатую 1-форму  $\alpha$ , рассматриваемую как сечение  $T^*B/P$ , до сечения  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow T^*B$  вдоль пути  $s$ . Разность  $p = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) \in P_x$  является элементом решетки  $P$  в точке  $x$ . В дальнейшем мы будем говорить, что *решетчатая 1-форма  $\alpha$  изменяется на (элемент решетки)  $p$  вдоль пути  $s$ .*

Сечения  $s^1, \tilde{s}^1$  отличаются на решетчатую 1-форму  $\alpha$  на 1-остове  $B^1$ . Предположим, что форма  $\alpha$  изменяется на  $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$  вдоль ребра  $a = OO_1$  и изменяется на  $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$  вдоль ребра  $b = OO_3$ .

Найдем разность препятствующих коцепей для  $s^1$  и  $\tilde{s}^1$ . Для этого достаточно описать изменение формы  $\alpha$  вдоль  $\partial e_i^2$ . Найдем изменения  $p_1, p_2 \in P$  формы  $\alpha$  вдоль путей  $OO_1O_2$  и  $OO_3O_2$  соответственно, а затем возьмем разность  $p_1$  и  $p_2$ .

Для примера найдем изменение формы  $\alpha$  вдоль ребра  $O_3O_2$ . Вначале разберем случай  $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Заметим, что ребро  $O_3O_2$  отождествляется с ребром  $a = OO_1$  при помощи преобразования  $g = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right)$ . Преобразованию  $g$  соответствует линейное преобразование кокасательной плоскости  $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  с матрицей  $(dg)^* = \left( \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ . Поэтому, если форма  $\alpha$  изменяется на  $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$  вдоль  $OO_1$ , то она изменяется на  $\begin{pmatrix} m_1 \\ -m_1n+n_1 \end{pmatrix}$  вдоль  $O_3O_2$ .

Если сечения  $s^1$  и  $\tilde{s}^1$  отличаются в точке  $O_3$  на  $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ , то форма  $\alpha$  отличается на  $\begin{pmatrix} m_1+m_2 \\ -m_1n+n_1+n_2 \end{pmatrix}$  вдоль  $OO_3O_2$ . Остальные вычисления довольно наглядно продемонстрированы на рисунке 2.2 слева.

В итоге получается, что сечениям  $s^1$  и  $\tilde{s}^1$  соответствует различающая

коцепь  $\binom{0}{nm_1}$ . □

Решетка из серии  $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}^2$ . База  $B$  снова фактор плоскости по действию группы  $G \subset \text{Aff}_2$ . На этот раз  $B$  — бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$ , а

$$G = \left\langle g = \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix} \right), h = \left( \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle,$$

где  $\alpha = \frac{m-\delta}{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ ,  $\delta$  равно 0 или 1

Рассуждения аналогичны предыдущему примеру. В данном случае бутылка Клейна может быть отождествлена с параллелограммом  $OQ_1Q_2Q_3$ , натянутым на вершины  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha y + x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $Q_3 = \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix}$ , и со сторонами, отождествленными, как на рисунке 2.2 справа (при этом  $Q_2Q_1 = gh(OQ_3)$ ).

**Утверждение 28.** 1. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$  имеет место изоморфизм  $H^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$ . Точнее

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} 2p \\ mq \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Для решетки  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{m,y;1,x}^2$  имеет место изоморфизм  $H^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z}_{2m}$ . Точнее

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} 2mp \\ q \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*Доказательство.* В данном случае различающая коцепь двух сечений  $s^1, \tilde{s}^1$  равна  $\binom{2m_2}{(\delta-m)m_2-mm_1}$  (см. рис. 2.2 справа).

Действительно,  $Q_3Q_2 = g(OQ_1)$  и  $Q_2Q_1 = gh(OQ_3)$ . Поэтому форма  $\alpha$  изменяется на  $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$  вдоль  $OQ_3Q_2$  и изменяется на  $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta-m & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$  вдоль  $OQ_1Q_2$ . Таким образом подгруппа  $\mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) \subset \mathcal{Z}^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  порождается векторами  $(2, \delta - m)$  и  $(0, -m)$ . Если  $\delta = 0$ , то эта подгруппа изоморфна  $2\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Если же  $\delta = 1$ , то подгруппа изоморфна  $2m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . □



## 2.5 Примеры лагранжевых и почти лагранжевых расслоений

В этом разделе приведен пример нетривиального почти лагранжева расслоения (см. пример 7), а также построен полный список лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями с точностью до послойного симплектоморфизма (см. пример 8).

**Пример 7.** Приведем пример *почти лагранжева расслоения с нетривиальным препятствием к построению симплектической структуры* (см. определение 19). А именно, построим такое расслоение  $\pi : (M^6, \eta) \rightarrow \mathbb{T}^3$  над тором  $\mathbb{T}^3$ , что тотальное пространство  $M^6$  компактно и  $d\eta = \pi^*\psi$  для некоторой 3-формы  $\psi$ , задающей ненулевой элемент 3-когомологий базы  $[\psi] \in H^3(\mathbb{T}^3, \mathbb{R})$  (см. утверждение 29). Тем самым мы докажем, что существуют решетка  $P$  на торе  $\mathbb{T}^3$  и препятствие к построению сечения  $\gamma \in H^2(\mathbb{T}^3, P)$ , которые не могут быть реализованы никаким лагранжевым расслоением (см. лемму 3).

Реализуем это расслоение как фактор подкрученного кокасательного расслоения. А именно, рассмотрим расслоение  $\pi_0 : (T^*\mathbb{R}^3, \omega_0 + \pi_0^*\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  со стандартными координатами  $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ , где  $x, y, z$  — координаты, постоянные на слоях,  $\alpha, \beta, \gamma$  — координаты в слое,  $\omega_0 = d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy + d\gamma \wedge dz$ , а  $\varphi = 2xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx + 2zdx \wedge dy$ . Введем далее лагранжевы изоморфизмы  $s_1, s_2, s_3$  и  $f_1, f_2, f_3$ , действующие на тотальном пространстве  $T^*\mathbb{R}^3$  по следующим формулам:

$$s_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha + 1, \beta, \gamma) \quad (2.5.1)$$

$$s_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha, \beta + 1, \gamma) \quad (2.5.2)$$

$$s_3(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma + 1) \quad (2.5.3)$$

$$f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x + 1, y, z, \alpha, \beta + z, \gamma - y) \quad (2.5.4)$$

$$f_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y + 1, z, \alpha - z, \beta, \gamma + x) \quad (2.5.5)$$

$$f_3(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z + 1, \alpha + y, \beta - x, \gamma) \quad (2.5.6)$$

Обозначим через  $\pi : (M^6, \eta) \rightarrow B^3$  расслоение, получающееся при факторизации расслоения  $\pi_0 : (T^*\mathbb{R}^3, \omega_0 + \pi^*\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  по описанным изоморфизмам  $s_i, f_j$ .

**Утверждение 29.** *Построенное расслоение  $\pi : (M^6, \eta) \rightarrow B^3$  — это почти лагранжево расслоение с нетривиальным препятствием к построению симплектической структуры.*

*Доказательство.* Доказательство утверждения разобьем на три шага.

ШАГ 1. Построенное расслоение  $\pi : (M^6, \eta) \rightarrow B^3$  — это локально тривиальное расслоение над тором  $\mathbb{T}^3$  со слоем  $\mathbb{T}^3$ . Действительно, база является тором, так как изоморфизмы  $f_i$  действуют на  $\mathbb{R}^3$  как единичные сдвиги вдоль осей. Каждый слой является тором, так как в нем отождествляются в точности координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , отличающиеся на целочисленные вектора. Чтобы в этом убедиться, достаточно явно проверить, что каждый коммутатор  $[f_i, f_j] = f_i f_j f_i^{-1} f_j^{-1}$  переводит любую точку  $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  в точку  $(x, y, z, \alpha + \tilde{m}_1, \beta + \tilde{m}_2, \gamma + \tilde{m}_3)$  для некоторых целых  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$  (зависящих от  $i$  и  $j$ ). Расслоение локально тривиально, так как фактор базы — многообразие.

ШАГ 2. Расслоение  $\pi : (M^6, \eta) \rightarrow B^3$  является почти лагранжевым. Действительно, форма  $\omega_0 + \pi_0^*\varphi$  корректно индуцируется на факторрасслоение, так как  $s_i, f_j$  — послойные симплектоморфизмы.

ШАГ 3. Препятствие к построению симплектической структуры нетривиально. Действительно, если  $\psi$  — такая 3-форма на  $B^3$ , что  $d\eta = \pi^*\psi$ , то  $\int_{B^3} \psi = 6(\neq 0)$ . Это вытекает из того, что  $d(\omega_0 + \pi_0^*\varphi) = \pi_0^*(6dx \wedge dy \wedge dz)$ .  $\square$

**Пример 8.** Выпишем теперь список, в котором содержатся все лагранжевы расслоения над двумерными поверхностями с точностью до послойного симплектоморфизма (см. леммы 14, 15, и 16). Подчеркнем, что в этом списке будут послойно симплектоморфные между собой расслоения.

*Расслоения над тором  $\mathbb{T}^2$ .* Реализуем их как фактор подкрученного касательного расслоения. А именно, рассмотрим расслоение  $\pi_0 : (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , со стандартными координатами  $(x, y, \alpha, \beta)$ , где  $x, y$  — координаты, постоянные на слоях,  $\alpha, \beta$  — координаты в слое, а  $\omega_\lambda = d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy + \lambda dx \wedge dy$ .

Введем также два лагранжевых изоморфизма  $s_1, s_2$ , действующие на тотальном пространстве по следующим формулам:

$$s_1(x, y, \alpha, \beta) = (x, y, \alpha + 1, \beta) \quad (2.5.7)$$

$$s_2(x, y, \alpha, \beta) = (x, y, \alpha, \beta + 1) \quad (2.5.8)$$

Расслоения с решеткой  $\mathbb{T}_{n,y_0;x_0}^2$ . Пусть  $t, h$  — лагранжевы изоморфизмы, задаваемые следующими формулами:

$$t(x, y, \alpha, \beta) = (x + x_0, y, \alpha, \beta + \frac{nm_0 + n_0}{y_0}y) \quad (2.5.9)$$

$$h(x, y, \alpha, \beta) = (x + ny, y + y_0, \alpha - \frac{m_0}{x_0}x, \beta - n\alpha + \frac{nm_0}{x_0}x) \quad (2.5.10)$$

Обозначим через

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$$

расслоение, получающееся при факторизации расслоения  $\pi_0 : (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$  по изоморфизмам  $s_1, s_2$  и  $t, h$ .

**Лемма 14.** *Любое лагранжево расслоение  $\pi : (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{T}^2$  с соответствующей решеткой из серии  $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$  послойно симплектоморфно одному из расслоений*

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$$

для некоторых  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Докажем это утверждение за два шага.

ШАГ 1.  $\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$  — это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой  $P$  из серии  $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$  и препятствием  $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 + n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in P_O$ . Доказательство того, что построенное расслоение действительно является лагранжевым расслоением над тором со слоем тор, аналогично утверждению 29.

Для того, чтобы убедиться, что у построенного лагранжева расслоения соответствующая решетка — из серии  $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ , достаточно рассмотреть действие изоморфизмов  $t$  и  $h$  на слое  $F_O$  над началом координат  $O$ .

Проверим, что у построенного расслоения препятствие совпадает с указанным в условии. Для этого построим сечение над 1-остовом с препятствующей коцепью  $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix}$ . В данном случае 1-остов может быть отождествлен с параллелограммом  $OO_1O_2O_3$ , натянутым на вершины  $O = (0, 0, 0, 0)$ ,  $O_1 = (x_0, 0, 0, 0)$ ,  $O_2 = (x_0, y_0, 0, 0)$ ,  $O_3 = (0, y_0, 0, 0)$  (сравни с параллелограммом из раздела 2.4.4). Возьмем сечение над 1-остовом тора, которому соответствуют отрезки  $OO_1$  и  $OO_3$  (над отрезками  $OO_1$  и  $OO_3$  соответственно). В таком случае над  $O_2O_3$  сечение будет задаваться отрезком  $O_3Q_3$ , где  $Q_3 = (x_0, y_0, -m_0, nm_0)$ . Аналогично, над  $O_1O_2$  сечение — отрезок  $O_1Q_2$ , где  $Q_2 = (x_0, y_0, 0, nm_0 + n_0)$ . Осталось заметить, что точки  $Q_2$  и  $Q_3$  отличаются в точности на  $(0, 0, m_0, n_0)$ .

**ШАГ 2.** Докажем собственно утверждение леммы. Остается показать, что расслоения  $\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$  реализуют все нетривиальные подкручивания расслоения  $\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_0) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ . Действительно,  $\omega_\lambda - \omega_0 = \pi^*(\lambda dx \wedge dy)$  и  $\int_{\mathbb{T}^2} \lambda dx \wedge dy = \lambda x_0 y_0$ .  $\square$

*Расслоения с решеткой  $\mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ .* На этот раз определим лагранжевы изоморфизмы  $t_1, t_2$  по следующим формулам:

$$t_1(x, y, \alpha, \beta) = (x + u, y + v, \alpha - \delta x, \beta - \delta y) \quad (2.5.11)$$

$$t_2(x, y, \alpha, \beta) = (x + w, y + z, \alpha + \gamma x, \beta + \gamma y) \quad (2.5.12)$$

для некоторых  $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$  таких, что линейные комбинации  $\gamma u + \delta w$  и  $\gamma v + \delta z$  целочисленные. Иными словами,  $\gamma(u, v) + \delta(w, z) = (m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ .

Обозначим через

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$$

расслоение, получающее при факторизации расслоения  $\pi_0 : (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$  по изоморфизмам  $s_1, s_2$  и  $t_1, t_2$ .

**Лемма 15.** *Любое лагранжево расслоение  $\pi : (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{T}^2$  с соответствующей решеткой из серии  $\mathbb{T}_{u, v, w, z}^2$  послойно симплектоморфно одному из расслоений*

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$$

для некоторых  $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Доказательство аналогично лемме 14. В данном случае  $\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$  — это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой  $P$  из серии  $\mathbb{T}_{u, v, w, z}^2$  и препятствием  $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \in P_O$ .  $\square$

*Расслоения над бутылкой Клейна с решеткой  $\mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$ .* Все лагранжевы расслоения над бутылкой Клейна могут быть получены из некоторого расслоения  $\pi : (I^2 \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow I^2$  над параллелограммом  $I^2$  отождествлением точек над противоположными сторонами при помощи некоторых послонных симплектоморфизмов  $g$  и  $h$ .

База  $I^2$  — параллелограмм, натянутый на вершины  $(0, 0)$ ,  $(x_0, 0)$ ,  $(\frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$  и  $(x_0 + \frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$  для некоторых  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $m, \delta \in \mathbb{Z}$ . В стандартных координатах  $(x, y, \alpha, \beta)$ , где  $x, y$  — координаты на базе, а  $\alpha, \beta \pmod{1}$  — координаты в слое, форма  $\omega$  имеет вид  $d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy$ . Послонные симплектоморфизмы  $g, h$  задаются следующими формулами:

$$h(x, y, \alpha, \beta) = \left( x + my + \frac{m-\delta}{2}y_0, y + y_0, \right. \\ \left. \alpha + \frac{m_0}{x_0}x + \left(\frac{mm_0}{x_0} + \frac{n_0}{x_0}\right)y, -m\alpha + \beta + \frac{n_0}{x_0}x \right) \quad (2.5.13)$$

$$g(x, y, \alpha, \beta) = \left( x + (\delta - m)y + \frac{m - \delta}{2}y_0 + x_0, -y + y_0, \alpha, (\delta - m)\alpha - \beta \right) \quad (2.5.14)$$

для некоторых  $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ .

Обозначим через

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$$

фактор расслоения  $\pi : (I^2 \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow I^2$  по изоморфизмам  $g$  и  $h$  (точнее при склейке расслоений над боковыми сторонами параллелограмма  $I^2$ ).

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 14.

**Лемма 16.** *Любое лагранжево расслоение над бутылкой Клейна послонно симплектоморфно одному из расслоений*

$$\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2,$$

для некоторых  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta, m, m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ .

В данном случае  $\pi : (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$  — это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой  $P$  из серии  $\mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$ , у которого одна из препятствующих коцепей равна  $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \in P_O$ .

Необязательно рассматривать все возможные  $x_0, y_0, \delta, m, m_0, n_0$ . По теореме 13 можно считать, что  $x_0, y_0 > 0$ ,  $m > 0$ ,  $\delta$  равно 0 или 1, а  $m$  чётно при  $\delta = 1$ . По теореме 14 при  $\delta = 0$  достаточно рассмотреть  $m_0 \pmod{2}$  и  $n_0 \pmod{m}$ , а при  $\delta = 1$  достаточно рассмотреть  $m_0 \pmod{2m}$  и  $n_0 = 0$ .

В частности, при  $m \neq 0$  достаточно рассмотреть лишь конечный набор пар целых чисел  $m_0, n_0$ .

## 2.6 Классификация при помощи теории пучков

В этом разделе мы кратко опишем теоремы о классификации лагранжевых расслоений при помощи когомологий Чеха (когомологий с коэффициентами в пучке), доказанные Дюистермаатом в его работе [40] и использованные Мишачёвым в [49] (необходимые факты из теории пучков см. в [11, том 3, глава 14]).

**Теорема 23** (Х. Дюистермаат, [40]). *Пусть  $P$  — решетка на многообразии  $V$ . Два лагранжевых расслоения  $\pi_i : (M_i, \omega_i) \rightarrow V$  с соответствующей решеткой  $P$  лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же элемент группы  $H^1(V, \Lambda(T^*V/P))$  (1-когомологий Чеха с коэффициентами в пучке  $\Lambda(T^*V/P)$  лагранжевых сечений расслоения  $T^*V/P$ ).*

В частности, мы получаем следующее следствие, которое является лагранжевым аналогом следствия 1.

**Следствие 10.** *Если лагранжево расслоение  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow V^n$  с решеткой  $P$  допускает лагранжево сечение  $s : V^n \rightarrow M^{2n}$ , то оно лагранжево эквивалентно факторкасательному расслоению  $\pi_0 : (T^*V/P, \omega_0) \rightarrow V^n$ .*

*Набросок доказательства теоремы 23.* Любое лагранжево расслоение можно задать следующим образом. Рассмотрим произвольное покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  базы  $V$ , над каждым элементом которого  $U_\alpha$  существует лагранжево сечение  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$  (например,  $U_\alpha$  стягиваемы). Благодаря наличию пуассонова действия, выбор лагранжева сечения тривиализует лагранжево расслоение

(иными словами, будем считать следствие 10 уже доказанным). Поэтому лагранжево расслоения  $\pi : (M^{2n}, \omega) \rightarrow B$  полностью определяется набором функций склеек  $\gamma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow T^*B/P$  (т. е.  $\gamma_{\alpha\beta} \circ s_\alpha = s_\beta$ ).

Множество функций склеек образует коцикл некоторых когомологий базы (если перейти от первого сечения ко второму, а затем от второго третьего, то это всё равно, что перейти от первого сечения к третьему). Прибавление кограницы соответствует смене набора сечений  $s_\alpha$  над элементами покрытия.

Чтобы избавиться от неоднозначности при выборе покрытия остаётся взять прямой предел по множеству открытых покрытий, упорядоченных относительно операции измельчения (вписывания). Описанным элементам когомологий базы, соответствующим различным покрытиям, в пределе соответствует искомый элемент когомологий базы с коэффициентами в пучке лагранжевых сечений расслоения  $T^*B/P$ .  $\square$

**Теорема 24** (Х. Дюистермаат, [40]). *Для любой решетки  $P$  на многообразии  $B$  следующая последовательность пучков точна:*

$$0 \longrightarrow \Lambda(T^*B/P) \xrightarrow{i} \Gamma(T^*B/P) \xrightarrow{d} Z^2B \longrightarrow 0,$$

где  $\Gamma(T^*B/P)$  — пучок сечений фактор кокасательного расслоения  $T^*B/P$  (пучок решетчатых 1-форм на  $B$ ),  $Z^2B$  — пучок замкнутых 2-форм на  $B$ , отображение  $i$  — это естественное вложение, а  $d$  — дифференциал. Этой короткой последовательности соответствует длинная точная последовательность когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{i_*} & H^0(B, \Gamma(T^*B/P)) & \xrightarrow{d_*} & H^0(B, Z^2B) & \longrightarrow & H^1(B, \Lambda(T^*B/P)) & \xrightarrow{i_*} \\ & & \xrightarrow{i_*} & H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) & \xrightarrow{d_*} & H^1(B, Z^2B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Эта теорема следующим образом соотносится с описанной в этой работе классификацией почти лагранжевых расслоений:

- Группа  $H^1(B, \Gamma(T^*B/P))$  задаёт множество всех почти лагранжевых расслоений с точностью до лагранжевой эквивалентности и поднятия 2-формы с базы (это утверждение аналогично теореме 23 для лагранжевых расслоений).

- Ядро отображения  $H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^1(B, Z^2B)$  — это все почти лагранжевы расслоения с тривиальным препятствием к построению сечения (это утверждение становится более понятным, если проверить, что  $H^1(B, Z^2B) \simeq H^3(B, \mathbb{R})$ ).
- Фактор  $H^0(B, Z^2B)/dH^0(B, \Gamma(T^*B/P))$  соответствует множеству нетривиальных подкручиваний данного лагранжева расслоения. (Здесь следует воспользоваться простым фактом из теории кохомологий Чеха: нулевые кохомологии Чеха с коэффициентами в пучке есть в точности глобальные сечения этого пучка. В данном случае это 2-формы на пространстве  $B$  и решетчатые 1-формы для пучков  $Z^2B$  и  $\Gamma(T^*B/P)$  соответственно.)



## Глава 3

# Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур

### 3.1 Основные результаты главы 3

В главе 3 мы исследуем интегрируемость некоторых расслоений, которые естественным образом возникают при рассмотрении пар согласованных невырожденных скобок Пуассона на вещественных и комплексных многообразиях.

**Договоренность 2.** • В вещественном случае все рассматриваемые в этом разделе объекты (многообразия, дифференциальные формы и т.д.) предполагаются гладкими (класса  $C^\infty$ ).

- В комплексном случае все рассматриваемые объекты комплексно-аналитичны.

Поскольку понятие невырожденной скобки Пуассона эквивалентно понятию симплектической структуры, мы перейдем от рассмотрения двух согласованных скобок Пуассона к рассмотрению двух дифференциальных 2-форм на многообразии. Кроме того, поскольку любую из форм можно заменить на линейную комбинацию рассматриваемой пары форм, то мы будем считать, что одна из форм невырождена, а вторая может быть как вырождена, так и невырождена.

**Определение 26.** Пару дифференциальных 2-форм  $(\omega_0, \omega_1)$  на многообразии  $M$  мы будем называть *согласованными*, если выполнены следующие

условия:

1. Форма  $\omega_0$  невырождена.
2. Обе формы  $\omega_0$  и  $\omega_1$  замкнуты:

$$d\omega_0 = 0, \quad d\omega_1 = 0.$$

3. Тензор Нийенхейса поля эндоморфизмов  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  равен нулю:

$$N_P = 0.$$

Пару согласованных 2-форм мы также будем называть *невырожденной бигамильтоновой структурой*.

**Замечание 7.** Подчеркнём, что в этой работе мы будем рассматривать только упорядоченные пары согласованных структур — первая форма  $\omega_0$  пары  $(\omega_0, \omega_1)$  всегда предполагается невырожденной.

В этой работе мы будем исследовать инвариантные распределения, которые определяются следующим образом.

**Определение 27.** Подпространство  $W$  линейного пространства  $V$ , на котором задана пара билинейных форм  $A$  и  $B$ , мы будем называть *инвариантным*, если оно инвариантно относительно действия группы автоморфизмов  $\text{Aut}(V, A, B)$ .

Иногда вместо пары форм на линейном пространстве мы будем рассматривать пару, состоящую из билинейной формы  $B$  и оператора  $P$ . При этом мы будем отождествлять пару  $(B, P)$  с парой билинейных форм  $(B \circ P, B)$ .

**Определение 28.** Распределение  $F$  на многообразии  $M$ , на котором задана пара согласованных дифференциальных 2-форм  $(\omega_0, \omega_1)$ , мы будем называть *инвариантным*, если каждое подпространство  $F_x$  является инвариантным подпространством соответствующего касательного пространства  $(T_x M, \omega_0, \omega_1)$ .

Для краткости, мы будем говорить, что распределение является *интегрируемым* (соответственно неинтегрируемым) *в некоторой точке*, если оно является интегрируемым в некоторой окрестности этой точки (соответственно не является интегрируемым ни в какой окрестности этой точки).

В этой работе мы исследуем интегрируемость инвариантных распределений в окрестности точки общего положения. Задача об интегрировании инвариантных распределений была поставлена в [3]. Для определения того, какие точки невырожденных бигамильтоновых структур мы будем рассматривать, нам потребуется следующие две теоремы из линейной алгебры.

**Теорема 25** (Теорема Жордана–Кронекера). *Пусть  $A$  и  $B$  — две кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ . Если поле  $\mathbb{K}$  алгебраически замкнуто, то существует такой базис пространства  $V$ , что матрицы обеих форм  $A$  и  $B$  одновременно приводятся к блочно-диагональному виду:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

где каждая пара соответствующих блоков  $A_i$  и  $B_i$  имеет один из следующих видов:

1. Жорданов блок с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda \\ \hline & & & & & & \\ -\lambda & & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & -\lambda & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) \quad B_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

2. Жорданов блок с собственным значением  $\infty$

$$A_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) \quad B_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \\ \hline & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

### 3. Кронекеров блок

$$A_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 & 0 \\ \hline & & & & & & & \\ -1 & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \quad B_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & -1 \end{array} \right)$$

Каждый кронекеров блок — это  $(2k_i + 1) \times (2k_i + 1)$  блок, где  $k_i \geq 0$ . В частности, если  $k_i = 0$ , то  $A_i$  и  $B_i$  — это две  $1 \times 1$  нулевые матрицы

$$A_i = (0) \quad B_i = (0)$$

Доказательство теоремы 25 дано в разделе 3.2.2.

**Теорема 26** (Вещественная теорема Жордана–Кронекера). Любые две косимметрические билинейные формы  $A$  и  $B$  на вещественном конечномерном векторном пространстве  $V$  можно одновременно привести к блочно-диагональному виду, при этом каждый блок будет либо кронекеровым блоком, либо жордановым блоком с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , либо вещественным жордановым блоком с комплексным собственным значением  $\lambda = \alpha + i\beta$ :

$$A_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \Lambda & E & \\ & & & & \Lambda & \ddots \\ & & & & & \ddots & E \\ & & & & & & & \Lambda \\ \hline & & & & & & & \\ -\Lambda & & & & & & & \\ -E & -\Lambda & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & -E & -\Lambda \end{array} \right) \quad B_i = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & E & & \\ & & & & E & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & E \\ \hline & & & & & & & \\ -E & & & & & & & \\ & -E & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & -E \end{array} \right)$$

Здесь  $\Lambda$  и  $E$  — это  $2 \times 2$  матрицы:  $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  и  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Доказательство теоремы 26 дано в разделе 3.2.3.

Пару блочно-диагональных матриц (3.1.1), состоящую из жордановых и кронекеровых блоков, мы будем называть формой Жордана–Кронекера пары форм  $A$  и  $B$ . Форма Жордана–Кронекера пары форм  $A$  и  $B$  определена однозначно с точностью до перестановки блоков.

Если одна из форм невырождена, то в форме Жордана–Кронекера нет кронекеровых блоков.

**Определение 29.** Пусть  $(\omega_0, \omega_1)$  — пара согласованных 2-форм на многообразии  $M$ . Точку  $x_0 \in M$  мы будем называть *регулярной*, если в некоторой её окрестности  $Ox_0$  постоянны следующие инварианты Жордана–Кронекера:

- количество различных собственных значений  $\lambda_i$  операторов

$$P_x : T_x M \longrightarrow T_x M,$$

- количество и размеры жордановых блоков, отвечающих каждому собственному значению  $\lambda_i$ .

Регулярные точки можно также описать следующим образом. Напомним, что локальным репером называется набор векторных полей, заданных в окрестности некоторой точки многообразия, и линейно независимых в каждой точке этой окрестности.

**Замечание 8.** Точка  $x_0 \in M$  является регулярной тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки существует локальный репер  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  такой, что матрицы обеих форм  $\omega_0$  и  $\omega_1$  имеют блочно-диагональный вид, как в теореме Жордана–Кронекера

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix},$$

но каждое собственное значение  $\lambda_i(x)$  зависит от точки многообразия:

$$A_i = \left( \begin{array}{c|c} 0 & J(\lambda_i(x)) \\ \hline -J^T(\lambda_i(x)) & 0 \end{array} \right), \quad B_i = \left( \begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -E & 0 \end{array} \right). \quad (3.1.2)$$

Следующие две теоремы позволяют свести задачу к случаю одного собственного значения в комплексном случае или к случаям одного вещественного или двух комплексно-сопряжённых собственных значений в вещественном случае.

**Теорема 27** (Ф. Туриэль, [57]). Пусть  $(\omega_0, \omega_1)$  — пара согласованных 2-форм на многообразии  $M$ . Тогда у любой регулярной точки  $x_0 \in (M, \omega_0, \omega_1)$

существует окрестность  $Ox$  изоморфная прямому произведению многообразий, с заданными на них парами согласованных 2-форм:

$$(Ox, \omega_0, \omega_1) = \prod (O_i x, \omega_{0,i}, \omega_{1,i}),$$

где характеристический многочлен каждой пары форм  $(\omega_{0,i}, \omega_{1,i})$  нельзя разложить в произведение двух нетривиальных взаимно-простых многочленов.

**Теорема 28.** Пусть многообразие  $M$ , с заданным парой согласованных 2-форм  $(\omega_0, \omega_1)$  распадается в прямое произведение

$$(M, \omega_0, \omega_1) = (M', \omega'_0, \omega'_1) \times (M'', \omega''_0, \omega''_1),$$

где  $(\omega'_0, \omega'_1)$  и  $(\omega''_0, \omega''_1)$  — пары согласованных 2-форм на  $M'$  и  $M''$  соответственно. Тогда, если характеристические многочлены  $\chi'$  и  $\chi''$  пар форм  $(\omega'_0, \omega'_1)$  и  $(\omega''_0, \omega''_1)$  взаимно-просты (в каждой точке многообразия), то любое инвариантное распределение  $F$  на  $M$  является прямым произведением инвариантных распределений  $F'$  и  $F''$  на  $M'$  и  $M''$  соответственно. При этом инвариантное распределение  $F$  на  $M$  интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируемы соответствующие распределения  $F'$  на  $M'$  и  $F''$  на  $M''$ .

Случай одного и двух комплексно-сопряжённых собственных значений описывается следующей теоремой.

**Теорема 29.** Рассмотрим пару согласованных форм  $\omega_0, \omega_1$  на  $M$  с одним собственным значением  $\lambda$  или с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ . Пусть  $x_0$  — регулярная точка  $M$ . Предположим, что в точке  $x_0$  соответствующее разложение Жордана–Кронекера пространства  $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$  состоит из жордановых  $k_1 + 1, k_2, \dots, k_n$  блоков, где  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ . Тогда существует окрестность точки  $x_0$ , в которой все инвариантные распределения, кроме, может быть,  $\text{Ker} (P - \lambda E)^{k_i}$  и  $\text{Ker} (P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , являются интегрируемыми. В случае одного собственного значения  $\lambda$ , распределения  $\text{Ker} (P - \lambda E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , являются интегрируемыми в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда

собственное значение  $\lambda$  постоянно в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Аналогично, в случае пары комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , распределения  $\text{Ker} (P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , являются интегрируемыми в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда функции  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Доказательство теорем 28 и 29 приведено в разделе 3.5.

**Замечание 9.** Инвариантные распределения можно определить для произвольной пары согласованных скобок Пуассона. В этой работе мы рассматриваем только случай жордановых блоков, потому что наличие кронекеровых блоков существенно усложняет устройство множества инвариантных подпространств. Даже в случае, когда подпространство  $(V, A, B)$  состоит только из одного кронекерова блока, множество инвариантных подпространств не является дискретным. Подпространство  $U \subset (V, A, B)$  инвариантно тогда и только тогда, когда либо  $U \subset I$ , либо  $I \subset U$ , где

$$I = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \text{Ker} (A + \lambda B).$$

Например, для скобок  $A = \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}$  и  $B = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z}$  распределение  $\text{Ker} (dz + xdy)$  является инвариантным, но не интегрируемым.

## 3.2 Доказательство теоремы Жордана-Кронекера

Для полноты изложения в этом разделе приведено доказательство теоремы Жордана-Кронекера о нормальной форме пары кососимметрических билинейных форм на конечномерном линейном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Доказательство теоремы Жордана-Кронекера можно найти в [10] и [56] (отметим, что доказательство в [56] опирается на результаты из книги [8]). Приведём в этом разделе доказательство, опубликованное ранее в работе [64], отличное от доказательств, описанных в работах [10] и [56].

Все рассматриваемые линейные пространства конечномерны. В случае, когда характеристика поля равна 2, мы будем формально считать, что

форма  $A$  на пространстве  $V$  кососимметрична тогда и только тогда, когда  $A(v, v) = 0$  для любого вектора  $v \in V$ .

### 3.2.1 Самосопряжённые операторы в симплектическом пространстве

Вначале рассмотрим случай, когда одна из форм невырождена. (Без ограничения общности можно считать, что это форма  $B$ ). Переформулируем задачу.

Для простоты в этом разделе, если специально не оговорено противное, мы будем считать, что  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  (по поводу случая  $\text{char } \mathbb{K} = 2$  см. замечание 11).

Напомним, что любая билинейная форма  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  задаёт отображение  $B : V \rightarrow V^*$  по формуле

$$\langle u, Bv \rangle = B(u, v),$$

где  $\langle u, Bv \rangle$  — это значение ковектора  $Bv$  на векторе  $u$ . Если билинейная форма невырождена, т.е.  $\text{Ker } B = 0$ , то описанное отображение является изоморфизмом  $V \simeq_B V^*$ .

Рассмотрим оператор  $P = B^{-1}A : V \rightarrow V$ , заданный формулой

$$B(u, Pv) = A(u, v).$$

Оператор  $P$  самосопряжён относительно обеих форм  $A$  и  $B$ :

$$A(Pu, v) = A(u, Pv), \quad B(Pu, v) = B(u, Pv)$$

В дальнейшем нам потребуются следующие простые утверждения.

**Утверждение 30.** *Если оператор  $P$ , действующий в симплектическом пространстве  $(V, B)$ , самосопряжён, то ортогональное дополнение к любому инвариантному подпространству  $W \subset V$  также инвариантно. То есть*

$$PW \subset W \Rightarrow PW^\perp \subset W^\perp$$



*Доказательство.* Для любого  $v \in W^\perp$  и любого  $u \in W$  имеем  $B(u, Pv) = B(Pu, v) = 0$ , так как  $Pu \in W$ .  $\square$

**Утверждение 31.** Пусть  $P$  — самосопряжённый оператор в симплектическом пространстве  $(V, B)$  над полем  $\mathbb{K}$ , характеристика которого не равна 2. Тогда для любого вектора  $v \in V$  все вектора  $v, Pv, \dots, P^n v, \dots$  попарно ортогональны.

*Доказательство.* Действительно,  $B(P^i v, P^j v) = B(P^{i+j} v, v) = B(v, P^{i+j} v) = 0$ .  $\square$

**Замечание 10.** В случае  $\text{char } \mathbb{K} = 2$  утверждение 31 останется верным, если дополнительно потребовать, что  $B(v, Pv) = 0$  для всех векторов  $v \in V$ . Действительно,  $B(P^i v, P^j v) = B(P^k v, P^k v) = 0$ , если  $i + j = 2k$ , и  $B(P^i v, P^j v) = B(P^k v, P(P^k v)) = 0$ , если  $i + j = 2k + 1$ .

Теорема 25 теперь может быть переформулирована следующим образом.

**Теорема 30.** Для любого самосопряжённого оператора  $P : V^{2n} \rightarrow V^{2n}$ , действующего на симплектическом пространстве  $(V^{2n}, B)$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{K}$ , характеристика которого не равна 2, существует такой базис  $V^{2n}$ , что матрицы оператора  $P$  и формы  $B$  одновременно приводятся к блочно-диагональному виду

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

При этом каждая пара блоков  $P_i$  и  $B_i$  имеет вид

$$P_i = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \lambda & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & & \lambda & 1 & & \\ & 0 & & & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \end{array} \right) \quad B_i = \left( \begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & -1 \end{array} \right)$$

*Доказательство теоремы 30.* Доказательство разобьём на два шага.

**ШАГ 1.** Вначале докажем утверждение в случае, когда оператор  $P$  нильпотентный:  $P^m = 0$ .

Выделим один блок. Допустим, что степень нильпотентности оператора  $P$  равна  $m$ , т.е.

$$P^m = 0, \quad P^{m-1} \neq 0$$

Рассмотрим произвольный вектор  $e_1 \in V$  такой, что  $P^{m-1}e_1 \neq 0$ . Пусть  $e_i = P^{i-1}e_1$ . Тогда подпространство  $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$  изотропно. Также несложно проверить, что вектора  $e_i$  линейно независимы.

Так как форма  $B$  невырождена на  $V$ , существует вектор  $f_m \in V$  такой, что

$$B(e_i, f_m) = \delta_m^i$$

Существование такого вектора  $f_m$  также легко следует из следующих двух простых утверждений из линейной алгебры.

**Утверждение 32.** *Любое изотропное подпространство симплектического пространства содержится в некотором лагранжевом подпространстве.*

**Утверждение 33.** *Любой базис  $e_1, \dots, e_n$  лагранжева подпространства  $L \subset (V, B)$  можно расширить до симплектического базиса  $e_i, f_j$  пространства  $(V, B)$ :*

$$B(e_i, f_j) = \delta_j^i$$

Положим  $f_i = P^{m-i}f_m$ . Тогда вектора  $e_i, f_j$  образуют базис жорданова блока. Легко видеть, что

$$B(e_i, e_j) = 0, \quad B(f_i, f_j) = 0 \tag{3.2.1}$$

(это утверждение 31). Также несложно проверить, что

$$B(e_i, f_j) = \delta_j^i$$

Действительно,  $B(e_i, f_j) = B(e_i, P^{m-j}f_m) = B(P^{m-j}e_i, f_m) = B(e_{m+i-j}, f_m) = \delta_m^{m+i-j} = \delta_j^i$ .

Отсюда следует, что вектора  $e_i, f_j$  линейно независимы. В базисе  $e_1, \dots, e_m,$

$f_1, \dots, f_m$  матрицы ограничения оператора  $P$  и формы  $B$  на подпространство  $W = \langle e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m \rangle$  равны

$$P = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ \hline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, нам удалось выделить один жорданов блок. Используя утверждение 30, можно перейти от пространства  $V$  к подпространству  $W^\perp$  — ортогональному дополнению к  $W$  относительно формы  $B$ . Выделяя в пространстве  $W^\perp$  аналогичным образом жордановы блоки, мы получим требуемый вид матриц оператора и формы в нильпотентном случае.

ШАГ 2. Общий случай. Пространство  $V$  распадается в прямую сумму корневых подпространств оператора  $P$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V^\lambda$$

Напомним, что корневое подпространство с собственным значением  $\lambda$  состоит из всех векторов  $v \in V$  таких, что  $(P - \lambda E)^m v = 0$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .

**Утверждение 34.** Пусть  $P$  — самосопряжённый оператор в симплектическом пространстве  $(V, B)$ . Тогда корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно формы  $B$ :

$$V^\lambda \perp_B V^\mu, \quad \lambda \neq \mu.$$

*Доказательство.* Если  $\lambda \neq \mu$ , то ограничение оператора  $(P - \lambda E)$  на  $V^\mu$  является невырожденным оператором. Поэтому для любого вектора  $v \in V^\mu$  корректно определён вектор  $w = (P - \lambda E)^{-1}v \in V^\mu$ , задаваемый равенством  $(P - \lambda E)w = v$ .





то положим  $U_2 = \langle e_1, f_0 \rangle$  и  $W_2 = U_2^{\perp A}$ . Если же такого вектора  $e_1$  нет, то алгоритм завершил свою работу. При этом нам удалось выделить один кронекеров  $1 \times 1$  блок, так как  $f_0 \in \text{Ker } A \cap \text{Ker } B$ .

Таким образом (если алгоритм не завершил свою работу на первом шаге), после двух шагов матрицы форм имеют вид

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & & A_2 \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right)$$

ШАГ  $2k + 1$ . После  $2k$  шагов уже построены подпространства  $U_{2k}, W_{2k}$  и базис  $f_0, e_1, f_1, \dots, f_{k-1}, e_k$  пространства  $U_{2k}$  такие, что

1. Все вектора  $e_i, f_j$  ортогональны пространству  $W_{2k}$  относительно формы  $A$ :

$$U_{2k} \perp_A W_{2k}$$

2. Все вектора, возможно, кроме вектора  $e_k$  ортогональны подпространству  $W_{2k}$  относительно формы  $B$ :

$$U_{2k-1} \perp_B W_{2k},$$

где  $U_{2k-1} = \langle f_0, e_1, f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$ .

3. При этом ограничения форм  $A$  и  $B$  на подпространство  $U_{2k}$  определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A(e_i, f_j) &= \delta_{j+1}^i, & A(e_i, e_j) &= 0, & A(f_i, f_j) &= 0 \\ B(e_i, f_j) &= \delta_j^i, & B(e_i, e_j) &= 0, & B(f_i, f_j) &= 0 \end{aligned}$$

Проще говоря, матрицы форм имеют вид

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ \hline & & & & & 0 & \\ & & & & & & A_{2k} \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & B_{2k-1} \end{array} \right)$$

Выделим в пространстве  $\widehat{W}_{2k-1} = W_{2k} \oplus \langle e_k \rangle$  ещё один блок матрицы  $B$ .

Если существует такой вектор  $f_k \in W_{2k}$ , что

$$B(e_k, f_k) = 1,$$

то положим  $U_{2k+1} = U_{2k} \oplus \langle f_k \rangle$  и  $W_{2k+1} = U_{2k+1}^{\perp B} \cap \widehat{W}_{2k-1}$ . Если же такого вектора  $f_k \in W_{2k}$  нет, то алгоритм завершил свою работу.

ШАГ  $2k + 2$ . После предыдущих шагов уже построены подпространства  $U_{2k+1}, W_{2k+1}$  и базис  $f_0, e_1, f_1, \dots, e_k, f_k$  пространства  $U_{2k+1}$  такие, что

1. Все вектора  $e_i, f_j$  ортогональны подпространству  $W_{2k+1}$  относительно формы  $B$ :

$$U_{2k+1} \perp_B W_{2k+1}$$

2. Все вектора, возможно, за исключением  $f_k$  ортогональны подпространству  $W_{2k+1}$  относительно формы  $A$ :

$$U_{2k} \perp_A W_{2k+1},$$

где  $U_{2k} = \langle f_0, e_1, f_1, \dots, e_k \rangle$

3. При этом ограничения форм  $A$  и  $B$  на подпространство  $U_{2k+1}$  определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A(e_i, f_j) &= \delta_{j+1}^i, & A(e_i, e_j) &= 0, & A(f_i, f_j) &= 0 \\ B(e_i, f_j) &= \delta_j^i, & B(e_i, e_j) &= 0, & B(f_i, f_j) &= 0 \end{aligned}$$

На этот раз матрицы форм имеют вид

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & & A_{2k} \\ 0 & & & & & \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ \hline & & & & -1 & 0 \\ 0 & & & & & B_{2k+1} \end{array} \right)$$

Выделим в пространстве  $\widehat{W}_{2k} = W_{2k+1} \oplus \langle f_k \rangle$  ещё один блок матрицы  $A$ . Если существует такой вектор  $e_{k+1} \in W_{2k+1}$ , что

$$A(e_{k+1}, f_k) = 1,$$

то положим  $U_{2k+2} = U_{2k+1} \oplus \langle e_{k+1} \rangle$  и  $W_{2k+2} = U_{2k+2}^{\perp A} \cap \widehat{W}_{2k}$ . Если же такого вектора  $e_{k+1} \in W_{2k+1}$  не существует, то процедура выделения блока завершена.

Ясно, что описанный процесс завершится, так как подпространства  $U_i$  образуют семейство вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$$

размерность которых монотонно возрастает:  $\dim U_i = i$ .

Если процесс остановится на нечётном шаге (не удалось найти вектор  $e_{k+1}$ ), то будет выделен кронекеров блок ( $U_{2k+1}$  будет  $(2k+1) \times (2k+1)$  кронекеровым блоком). Если же процесс остановится на чётном шаге (не нашли вектор  $f_k$ ), то  $U_{2k}$  будет  $2k \times 2k$  жордановым блоком с собственным значением  $\infty$ .

Теорема Жордана–Кронекера полностью доказана.

**Замечание 12.** На самом деле можно было обойтись и без теоремы 30. Если поле  $\mathbb{K}$  алгебраически замкнуто, то всегда существует вырожденная линейная комбинация форм  $A + \lambda B$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . Если поле  $\mathbb{K}$  не является алгебраически замкнутым, то теорема 30 останется верной тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора  $P$  принадлежат полю  $\mathbb{K}$ , или, что эквивалентно, если характеристический многочлен оператора  $P$  разлагается на линейные множители над полем  $\mathbb{K}$  (так же, как и в теореме о жордановой нормальной форме). Кронекеровы блоки и жордановы блоки с собственным значением  $\infty$  можно выделить над любым полем (мы не пользовались алгебраической замкнутостью поля в этой части доказательства).

### 3.2.3 Вещественная теорема Жордана–Кронекера

Приведём два доказательства вещественного аналога теоремы Жордана–Кронекера.

Для простоты будем предполагать, что мы уже выделили все кронекеровы блоки и жордановы блоки с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (это можно сделать, см. замечание 12), а затем разложили пространство в прямую



сумму корневых подпространств оператора  $P = B^{-1}A$ . (Здесь под корневым подпространством, отвечающим паре комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , мы имеем в виду ядро  $\text{Ker} (P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^N$ , где  $N$  — достаточно большое натуральное число). Аналогично доказательству утверждения 34 можно показать, что корневые подпространства, отвечающие различным парам комплексно-сопряжённых собственных значений, попарно ортогональны относительно обеих форм  $A$  и  $B$ .

*Первое доказательство.* Достаточно комплексифицировать пространство и применить комплексную теорему Жордана–Кронекера. Несложно проверить, что если  $e_1 + i\widehat{e}_1, \dots, e_n + i\widehat{e}_n, f_1 + i\widehat{f}_1, \dots, f_n + i\widehat{f}_n$  — базис комплексного жорданова блока с собственным значением  $\lambda = \alpha + i\beta$ , то

$$\sqrt{2}e_1, \quad \sqrt{2}\widehat{e}_1, \dots, \sqrt{2}e_n, \quad \sqrt{2}\widehat{e}_n, \quad \sqrt{2}f_1, \quad -\sqrt{2}\widehat{f}_1, \quad \dots, \quad \sqrt{2}f_n, \quad -\sqrt{2}\widehat{f}_n$$

— базис вещественного жорданова блока с комплексным собственным значением  $\alpha + i\beta$ . Чтобы доказать это, следует учесть, что вектора  $e_j + i\widehat{e}_j$  и  $f_k + i\widehat{f}_k$  ортогональны сопряжённым векторам  $e_l - i\widehat{e}_l$  и  $f_m - i\widehat{f}_m$ , так как они принадлежат различным корневым подпространствам оператора  $P = B^{-1}A$ .  $\square$

*Второе доказательство.* В каждом корневом подпространстве оператора  $P$ , соответствующем паре комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , существует комплексная структура  $J$ , самосопряжённая относительно  $A$  и  $B$ .

Эта комплексная структура  $J$  — это полупростая часть оператора  $\frac{P - \alpha E}{\beta}$ . Оператор  $J$  действительно является комплексной структурой, т.е.  $J^2 = -E$ , так как характеристический полином оператора  $\frac{P - \alpha E}{\beta}$  равен  $(t^2 + 1)^n$ . Оператор  $J$  самосопряжён, так как он является полиномом от  $P$ .

Определим следующие комплексные билинейные формы на  $V$ :

$$A^{\mathbb{C}}(u, v) = A(u, v) - iA(u, Jv) \quad \text{и} \quad B^{\mathbb{C}}(u, v) = B(u, v) - iB(u, Jv)$$

$A^{\mathbb{C}}$  и  $B^{\mathbb{C}}$  являются корректно определёнными комплексными кососимметрическими билинейными формами на  $V$ , так как оператор  $J$  самосопряжён относительно  $A$  и  $B$ .

Осталось применить комплексную теорему Жордана–Кронекера и заметить, что если  $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  — базис комплексного жорданова блока с собственным значением  $\lambda = \alpha + i\beta$ , то

$$e_1, -Je_1, \dots, e_n, -Je_n, f_1, Jf_1, \dots, f_n, Jf_n$$

— базис вещественного жорданова блока с комплексным собственным значением  $\alpha + i\beta$ .  $\square$

### 3.2.4 Единственность формы Жордана–Кронекера

Докажем теперь, что количество и типы блоков в форме Жордана–Кронекера определены однозначно.

**Теорема 31.** *Рассмотрим конечномерное векторное пространство  $V$  над алгебраически замкнутым или вещественным полем  $\mathbb{K}$ . Тогда форма Жордана–Кронекера произвольной пары кососимметрических билинейных форм  $A$  и  $B$  на пространстве  $V$  определена однозначно с точностью до перестановки блоков.*

Разобьём доказательство теоремы 31 на две части: вначале в утверждении 35 докажем однозначную определённость набора жордановых блоков, а затем — в утверждении 36 — однозначность набора кронекеровых блоков.

**Утверждение 35.** *Количество и типы жордановых блоков в форме Жордана–Кронекера определены однозначно (с точностью до перестановки этих блоков).*

*Доказательство утверждения 35.* Пусть вначале в разложении Жордана–Кронекера нет кронекеровых блоков. Без ограничения общности можно считать, что форма  $B$  невырождена. Тогда форма Жордана–Кронекера пары форм  $A$  и  $B$  однозначно определяется жордановой нормальной формой оператора  $P = B^{-1}A$ . В вещественном случае форма Жордана–Кронекера определяется вещественной жордановой нормальной формой оператора  $P$ .

Общий случай сводится к невырожденному следующим образом. Рассмотрим подпространство  $I \subset V$ , порождённое ядрами форм общего положения (мы будем считать, что форма  $A + \lambda B$  общего положения, если

$rk(A + \lambda B) \geq rk(A + \mu B)$  для любой другой формы  $A + \mu B$ ):

$$I = \bigoplus_{\lambda\text{-общ. пол.}} Ker(A + \lambda B)$$

Рассмотрим далее подпространство  $I^\perp$ , состоящее из всех векторов  $v \in V$ , ортогональных к подпространству  $I$  относительно всех форм  $A + \lambda B$ ,  $\lambda \in \bar{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  (если  $\lambda = \infty$ , то под  $A + \lambda B$  мы будем формально понимать форму  $B$ ):

$$I^\perp = \{v \in V \mid (A + \lambda B)(u, v) = 0 \quad \forall u \in I, \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbb{K}}\}$$

Используя теорему Жордана–Кронекера, несложно проверить, что пространство  $I$  изотропно относительно всех форм  $A + \lambda B$ ,  $\lambda \in \bar{\mathbb{K}}$ , поэтому корректно определено ограничение каждой формы  $A + \lambda B$  на пространство  $J = I^\perp/I$ . Также, используя теорему Жордана–Кронекера, несложно проверить, что факторпространство  $(J, A|_J, B|_J)$  изоморфно сумме всех жордановых блоков вне зависимости от выбора формы Жордана–Кронекера пространства  $(V, A, B)$ . (Мы будем говорить, что две тройки  $(V_i, A_i, B_i)$ ,  $i = 1, 2$  изоморфны, если существует изоморфизм пространств  $V_1$  и  $V_2$ , переводящий формы  $A_1$  и  $B_1$  соответственно в формы  $A_2$  и  $B_2$ ).

Пространство  $J = I^\perp/I$  определено однозначно (т.е. не зависит от выбора формы Жордана–Кронекера пространства  $(V, A, B)$ ), поэтому количество и типы жордановых блоков в форме Жордана–Кронекера произвольной пары кососимметрических форм  $A$  и  $B$  тоже определены однозначно.

Утверждение 35 доказано. □

**Утверждение 36.** *Количество и размеры кронекеровых блоков в форме Жордана–Кронекера определены однозначно (с точностью до перестановки этих блоков).*

*Доказательство утверждения 36.* Вектор с полиномиальными коэффициентами

$$\vec{f}(\mu) = f_0 + \dots + \mu^k f_k,$$

где  $f_0, \dots, f_k \in V$ , а  $\mu$  рассматривается как формальный параметр, мы будем называть цепочкой, если  $\vec{f}(\mu) \in Ker(B - \mu A)$ . Обозначим через  $\mathcal{Z}_{\leq m}$  множество всех цепочек  $\vec{f}(\mu)$  таких, что  $deg(\vec{f}(\mu)) \leq m$ .

Количество и размеры кронекеровых блоков можно легко найти при помощи следующего утверждения.

**Утверждение 37.** *Если в форме Жордана–Кронекера пары форм  $A$  и  $B$  присутствует  $M$  кронекеровых блоков размера  $(2p_i + 1) \times (2p_i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , то*

$$\dim \mathcal{Z}_{\leq m} = \sum_{p_i \leq m} (m - p_i + 1) \quad (3.2.3)$$

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что форма  $B$  — общего положения (иными словами, в форме Жордана–Кронекера нет жордановых блоков с собственным значением  $\infty$ ).

Цепочки образуют векторное пространство, поэтому если  $\vec{f}_1(\mu)$  и  $\vec{f}_2(\mu)$  — две цепочки, то и любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами  $\lambda_1 \vec{f}_1(\mu) + \lambda_2 \vec{f}_2(\mu)$  тоже является цепочкой. В частности, если  $\vec{f}_1(\mu)$  и  $\vec{f}_2(\mu)$  — две цепочки такие, что  $\vec{f}_1(0) = \vec{f}_2(0)$ , то их разность имеет вид  $\vec{f}_1(\mu) - \vec{f}_2(\mu) = \mu \vec{g}(\mu)$ , где  $\vec{g}(\mu)$  — некоторая третья цепочка.

Несложно явно проверить, что если  $f_0^i, e_1^i, f_1^i, e_2^i, f_2^i, \dots, e_k^i, f_k^i$  — базис  $i$ -того кронекерова блока, в котором матрицы форм имеют вид (3.2.2), то вектор  $\vec{F}_i(\mu) = f_0^i + \mu f_1^i + \dots + \mu^k f_k^i$  является цепочкой. Так как форма  $B$  — общего положения, для любого вектора  $f \in \text{Ker } B$  существует такая линейная комбинация  $\vec{F}(\mu) = \sum \lambda_i \vec{F}_i(\mu)$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ , что  $\vec{F}(0) = f$ . Поэтому многочлены вида  $\mu^j \vec{F}_i(\mu)$  образуют базис пространства  $\mathcal{Z}_{\leq m}$ .

Требуемую формулу (3.2.3) для размерности пространства  $\mathcal{Z}_{\leq m}$  легко получить, явно описав все вектора вида  $\mu^j \vec{F}_i(\mu)$ , лежащие в  $\mathcal{Z}_{\leq m}$ : это вектора

$$\vec{F}_1(\mu), \quad \mu \vec{F}_1(\mu), \quad \dots \quad \mu^{m-p_1} \vec{F}_1(\mu), \quad \vec{F}_2(\mu), \quad \dots \quad \mu^{m-p_M} \vec{F}_M(\mu).$$

Утверждение 37 доказано. □

Так как пространства цепочек  $\mathcal{Z}_{\leq m}$  не зависят от выбора формы Жордана–

Кронекера пространства  $(V, A, B)$ , то из утверждения 37 следует, что количество и размеры кронекеровых блоков тоже определены инвариантно.

Утверждение 36 доказано. □

Теорема 31 полностью доказана.

### 3.3 Линейные инвариантные подпространства

В этом разделе мы опишем все инвариантные подпространства линейного пространства  $V$ , на котором заданы две кососимметрические билинейные формы  $A$  и  $B$ , одна из которых невырождена (мы будем считать, что форма  $B$  невырождена). При этом вместо пары билинейных форм  $A$  и  $B$  нам будет удобнее рассматривать пару, состоящую из невырожденной билинейной формы  $B$  и оператора  $P = B^{-1}A$ , самосопряжённого относительно формы  $B$ .

Все теоремы об устройстве линейных инвариантных подпространств немедленно следуют из устройства группы автоморфизмов  $\text{Aut}(V, B, P)$ , описанной П. Чжан в [53].

**Редукция проблемы.** Для начала сведём задачу к случаю, когда собственный многочлен оператора  $P$  неразложим. Корневым подпространством  $V^\lambda$  оператора  $P$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ , мы будем называть множество  $\text{Ker}(P - \lambda E)^N$ , где число  $N$  достаточно велико. В вещественном случае мы будем рассматривать либо корневые подпространства отвечающие вещественному собственному значению, либо корневые подпространства, отвечающие паре комплексно-сопряжённых собственных значений. Корневым подпространством, отвечающим паре комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , мы будем называть ядро

$$\text{Ker}(P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^N.$$

Отметим, что так как оператор  $P$  самосопряжён, то корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно формы  $B$ . Поэтому ограничение формы  $B$  на каждое корневое подпространство невырождено.

**Теорема 32.** Пусть  $P$  — самосопряжённый оператор на линейном вещественном или комплексном симплектическом пространстве  $(V, B)$ . Рассмотрим разложение пространства  $V$  в сумму корневых подпространств оператора  $P$ :

$$V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda$$

Тогда подпространство  $W \subset V$  инвариантно тогда и только тогда, когда оно разлагается в прямую сумму своих пересечений с корневыми подпространствами

$$W = \bigoplus_{\lambda} (W \cap V^{\lambda})$$

и каждое пересечение  $W \cap V^{\lambda}$  является инвариантным подпространством соответствующего корневого подпространства  $(V^{\lambda}, B|_{V^{\lambda}}, P|_{V^{\lambda}})$ .

Для доказательства теоремы 32 достаточно воспользоваться тем, что подпространство пространства  $V$  инвариантно тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно групп  $\text{Aut}(V^{\lambda}, B|_{V^{\lambda}}, P|_{V^{\lambda}})$ , естественным образом вложенных в  $\text{Aut}(V, B, P)$ .

Далее в этом разделе мы будем считать, что характеристический многочлен оператора  $P$  неразложим. Это значит, что у оператора  $P$  только одно собственное значение в комплексном случае, и либо одно вещественное, либо пара комплексно-сопряжённых значений в вещественном случае.

**Случай одного собственного значения.** Вначале рассмотрим случай, когда собственное значение только одно. Без ограничения общности можно считать, что это собственное значение равно 0 (иными словами, можно считать, что оператор  $P$  — нильпотентный).

**Теорема 33.** Пусть  $P$  — нильпотентный самосопряжённый оператор на симплектическом пространстве  $(V, B)$ . Тогда любое подпространство  $W \subset V$ , инвариантное относительно группы автоморфизмов  $\text{Aut}(V, B, P)$ , имеет вид

$$W = \bigoplus_{i=1}^s (\text{Ker } P^{k_i} \cap \text{Im } P^{l_i}), \quad (3.3.1)$$

для некоторых  $s \in \mathbb{N}$ ,  $k_i, l_i \geq 0$ .

**Следствие 11.** Если пространство  $(V, B, P)$  является суммой жордановых блоков одной и той же высоты  $k$ , то инвариантные подпространства — это в точности пространства

$$\text{Ker } P^i = \text{Im } P^{k-i}$$

Следующее замечание позволяет ввести ограничения на количество слагаемых и их виды в формуле (3.3.1).

**Замечание 13.** Сумму подпространств вида  $\text{Ker } P^{k_i} \cap \text{Im } P^{l_i}$  можно также описать следующим образом. Обозначим через  $V_J^k$  сумму всех жордановых блоков высоты (ровно)  $k$ . Далее обозначим через  $U^m(V_J^k)$  подпространство  $V_J^k$ , состоящее из всех векторов высоты  $m$ .

Пусть пространство  $(V, B, P)$  является суммой жордановых блоков высоты  $k_1, \dots, k_N$ , где  $k_1 > k_2 > \dots > k_N$ . Тогда любое инвариантное подпространство имеет вид

$$U^{m_1}(V_J^{k_1}) \oplus \dots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}), \quad (3.3.2)$$

где

$$\begin{aligned} 0 \leq m_1 - m_2 \leq k_1 - k_2 \\ \dots \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$0 \leq m_{N-1} - m_N \leq k_{N-1} - k_N$$

Теорема 33 легко следует из следующей теоремы об устройстве алгебры Ли группы автоморфизмов  $\text{Aut}(V, B, P)$  в случае одного собственного значения, поэтому мы опишем только возможную схему доказательства.

**Теорема 34** (П. Чжан, [53]). Пусть пространство  $(V, A, B)$  состоит из  $l_i$  жордановых  $k_i$ -блоков с собственным значением 0, где  $i = 1, \dots, N$  и  $k_1 > k_2 > \dots > k_N$ . Рассмотрим базис пространства  $V$ , в котором матрицы оператора  $P = B^{-1}A$  и формы  $B$  имеют блочно-диагональный вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_N \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

при этом блоки  $P_i$  и  $B_i$  равны

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ E_{2l_i} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & E_{2l_i} \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad B_i = \begin{pmatrix} & & & Q_{2l_i} \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & \\ Q_{2l_i} & \ddots & & \end{pmatrix}, \quad (3.3.5)$$





$V_J^{k_i}$ . Поэтому любое инвариантное подпространство  $W$  разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$W = \bigoplus (W \cap V_J^{k_i})$$

Таким образом, задача сводится к случаям, когда есть только один или два типа жордановых блоков. Вначале, используя теорему 34, можно доказать следствие 11. Тем самым будет доказано, что инвариантными подпространствами пространства  $V_J^{k_i}$  являются подпространства  $U^m(V_J^{k_i})$  и только они. После этого остаётся доказать неравенства (3.3.3). Они вытекают из следующих двух утверждений, которые также могут быть легко доказаны при помощи теоремы 34.

**Утверждение 38.** *Если в инвариантном подпространстве  $W \subset (V, B, P)$  существует вектор  $v \in V_J^{k_1} \cap \text{Im } P^l$ , то  $V_J^{k_2} \cap \text{Im } P^l \subset W$  для любого  $k_2 < k_1$ .*

**Утверждение 39.** *Если в инвариантном подпространстве  $W \subset (V, B, P)$  существует вектор  $v \in V_J^{k_2} \cap \text{Ker } P^k$ , то  $V_J^{k_1} \cap \text{Ker } P^k \subset W$  для любого  $k_2 < k_1$ .*

□

**Вещественный случай.** Рассмотрим теперь случай двух комплексно-сопряжённых собственных значений. Этот случай легко сводится к комплексному благодаря наличию естественной комплексной структуры.

**Лемма 17.** *В каждом корневом подпространстве оператора  $P$ , соответствующем паре комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , полупростая часть оператора  $\frac{P-\alpha E}{\beta}$  является комплексной структурой  $J$ , самосопряжённой относительно  $A$  и  $B$ .*

*Доказательство леммы 17.*  $J$  является комплексной структурой, т.е.  $J^2 = -E$ , так как характеристический полином  $\frac{P-\alpha E}{\beta}$  равен  $(t^2 + 1)^n$ . Оператор  $J$  самосопряжён, так как он является полиномом от  $P$ . □

Пусть пространство  $(V, A, B)$  состоит только из вещественных жордановых блоков с одинаковым комплексным собственным значением  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

Обозначим через  $V^{\mathbb{C}}$  комплексификацию пространства  $V$  при помощи комплексной структуры  $J$  из леммы 17. Определим следующие комплексные билинейные формы на  $V$ :

$$A^{\mathbb{C}}(u, v) = A(u, v) - iA(u, Jv), \quad \text{и} \quad B^{\mathbb{C}}(u, v) = B(u, v) - iB(u, Jv).$$

Формы  $A^{\mathbb{C}}$  и  $B^{\mathbb{C}}$  являются корректно определёнными комплексными билинейными формами на  $V$ , так как оператор  $J$  самосопряжён относительно  $A$  и  $B$ .

Отметим, что пространство  $V^{\mathbb{C}}$  состоит из тех же блоков, что и пространство  $V$ , т.е. каждому вещественному жорданову  $k$ -блоку с собственным значением  $\alpha + i\beta$  в разложении  $V$  соответствует комплексный жорданов  $k$ -блок с тем же собственным значением в разложении пространства  $V^{\mathbb{C}}$ .

При комплексификации автоморфизмы пространства  $(V, A, B)$  переходят в автоморфизмы пространства  $(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}})$ , а вещественные инвариантные подпространства — в комплексные инвариантные подпространства.

**Теорема 35.** Пусть пространство  $(V, A, B)$  состоит только из вещественных жордановых блоков с одинаковым комплексным собственным значением  $\lambda = \alpha + i\beta$ . Тогда любой автоморфизм  $Q \in \text{Aut}(V, A, B)$  сохраняет естественную комплексную структуру  $J$  из леммы 17:

$$QJ = JQ.$$

Как следствие, имеет место естественное взаимно-однозначное соответствие

$$\text{Aut}(V, A, B) \cong \text{Aut}(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}). \quad (3.3.9)$$

Подпространство  $U \subset (V, A, B)$  инвариантно тогда и только тогда, когда оно  $J$ -инвариантно и соответствующее подпространство  $U^{\mathbb{C}}$  пространства  $(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}})$  инвариантно.

*Доказательство.* Автоморфизм  $Q \in \text{Aut}(V, A, B)$  сохраняет структуру  $J$  потому, что он сохраняет формы  $A$  и  $B$ . Для доказательства того, что инвариантные подпространства комплексифицируются можно воспользоваться тем, что если инвариантное подпространство  $U$  содержит вектор  $u$ , то она

содержит и всевозможные (конечные) линейные комбинации векторов вида  $Qu$ , где  $Q \in \text{Aut}(V, A, B)$ . Для доказательства того, что если  $u \in U$ , то и  $Ju \in U$  достаточно фиксировать произвольную форму Жордана-Кронекера и рассмотреть операторы, которые действуют на одном вещественном жордановом блоке при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c & -d \\ d & c \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} c & -d \\ d & c \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad c^2 + d^2 \neq 0$$

и тривиально действуют на остальных жордановых блоках. □

### 3.4 Локальное устройство невырожденных бигамильтоновых структур

В этом разделе мы опишем основные результаты, доказанные Туриэлем в [57], переформулировав их в удобном для нас виде. В работе [57] описана структура согласованных 2-форм в окрестности таких регулярных точек  $x_0 \in (M, \omega_0, \omega_1)$ , что каждое собственное значение либо постоянно, либо не имеет критических точек в некоторой окрестности точки  $x_0$ :

$$\lambda_i(x) \equiv \text{const} \quad \text{или} \quad d\lambda_i(x) \neq 0.$$

Такие регулярные точки мы будем называть *регулярными некритическими*.

Следующая общая теорема позволяет свести задачу к случаю, когда характеристический многочлен поля эндоморфизмов  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  неразложим.

**Теорема 36** (Ф. Туриэль, [57]). *Пусть  $(\omega_0, \omega_1)$  — пара согласованных 2-форм на многообразии  $M$ . Предположим, что характеристический многочлен  $\chi(x)$  поля эндоморфизмов  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  распадается в прямое произведение многочленов взаимно-простых в каждой точке многообразия  $M$ :*

$$\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x), \quad \text{НОД}(\chi_1(x), \chi_2(x)) \equiv 1.$$

Тогда у любой точки  $x \in M$  существует окрестность  $Ox$ , которую можно разложить в прямое произведение

$$(Ox, \omega_0, \omega_1) = (O'x, \omega'_0, \omega'_1) \times (O''x, \omega''_0, \omega''_1)$$

так, что характеристические многочлены пар форм  $(\omega'_0, \omega'_1)$  и  $(\omega''_0, \omega''_1)$  равны  $\chi_1(x)$  и  $\chi_2(x)$  соответственно.

Отметим, что теорема 36 выполнена в окрестности любой регулярной точки.

Случай постоянных собственных значений описывается следующей теоремой.

**Определение 30.** Невырожденную бигамильтонову структуру  $(\omega_0, \omega_1)$  мы будем называть *плоской* в точке  $x \in M$ , если в существуют такие локальные координаты в окрестности этой точки, в которых матрицы обеих форм  $\omega_0$  и  $\omega_1$  записываются с постоянными коэффициентами.

**Теорема 37** (Ф. Туриэль, [57]). *Невырожденная бигамильтонова структура  $(\omega_0, \omega_1)$  является плоской в окрестности точки  $x \in M$  тогда и только тогда, когда точка  $x$  регулярна и все собственные значения постоянны.*

Случай одного собственного значения без критических точек описывается следующими теоремами 38 и 39.

**Определение 31.** Пару невырожденных бигамильтоновых структур  $(M', \omega'_0, \omega'_1)$  и  $(M'', \omega''_0, \omega''_1)$  мы будем называть *изоморфными*, если существует диффеоморфизм  $f : M' \rightarrow M''$  такой, что  $f^*\omega''_0 = \omega'_0$ , и  $f^*\omega''_1 = \omega'_1$ .

**Теорема 38** (Ф. Туриэль, [57]). *Рассмотрим две пары согласованных 2-форм  $(\omega'_0, \omega'_1)$  и  $(\omega''_0, \omega''_1)$  на многообразиях  $M'$  и  $M''$  такие, что каждой паре соответствует только одно непостоянное собственное значение без критических точек. Тогда регулярные точки  $x' \in M'$  и  $x'' \in M''$  имеют изоморфные окрестности тогда и только тогда, когда разложения Жордана–Кронекера пар форм  $(\omega'_0, \omega'_1)$  и  $(\omega''_0, \omega''_1)$  в этих точках совпадают (т.е. состоят из одного и того же набора жордановых блоков).*

Не все инварианты Жордана–Кронекера можно реализовать неплоскими согласованными 2-формами.

**Теорема 39** (Ф. Туриэль, [57]). Пусть  $(\omega_0, \omega_1)$  — пара согласованных 2-форм на многообразии  $M$  с одним собственным значением  $\lambda$ , которое не имеет критических точек на  $M$ . Тогда для любой регулярной точки  $x_0 \in M$  в разложении Жордана–Кронекера соответствующего касательного пространства  $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$  наибольший жорданов блок всегда (строго) больше, чем остальные жордановы блоки.

Для каждого набора жордановых блоков, в котором самый большой жорданов блок только один, опишем реализующую его невырожденную бигамильтонову структуру.

**Теорема 40** (Ф. Туриэль, [57]). Пусть  $\omega_0$  и  $\omega_1$  — согласованные 2-формы на многообразии  $M$ , а  $x_0 \in M$  — регулярная точка. Пусть далее  $y$  поля эндоморфизмов  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  только одно собственное значение  $\lambda$  и  $d\lambda|_{x_0} \neq 0$ . Пусть разложение Жордана–Кронекера пары форм  $\omega_0$  и  $\omega_1$  в точке  $x_0$  состоит из жордановых  $k_1 + 1, k_2, \dots, k_n$  блоков, где  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ . Тогда в окрестности точки  $x_0$  существуют локальные координаты

$$(x_1^1, \dots, x_1^{k_1}, y_1^1, \dots, y_1^{k_1}, x_2^1, \dots, \dots, y_n^{k_n}, z, \lambda)$$

такие, что

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \left( \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{k_s} dx_s^i \wedge dy_s^i \right) + dz \wedge d\lambda \\ \omega_1 &= \lambda \omega_0 + \left( \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{k_s-1} dx_s^i \wedge dy_s^{i+1} \right) + \alpha \wedge d\lambda + dy_1^1 \wedge d\lambda, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где

$$\alpha = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{k_s} \left( i + \frac{1}{2} \right) y_s^i dx_s^i + \left( i - \frac{1}{2} \right) x_s^i dy_s^i. \quad (3.4.2)$$

Иными словами, матрицы форм имеют следующий вид:

$$\omega_0 = \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & E_{k_1} & & & & \\ -E_{k_1} & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & E_{k_n} & \\ & & & -E_{k_n} & 0 & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{array} \right), \quad (3.4.3)$$

$$\omega_1 = \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & J_{k_1}(\lambda) & & & 0 & \alpha_1 \\ -J_{k_1}^T(\lambda) & 0 & & & 0 & \beta_1 + \delta \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & J_{k_n}(\lambda) & 0 & \alpha_n \\ & & & -J_{k_n}^T(\lambda) & 0 & 0 & \beta_n \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\alpha_1^T & -\beta_1^T - \delta^T & \dots & -\alpha_n^T & -\beta_n^T & -\lambda & 0 \end{array} \right),$$

где

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y_s^1 \\ \frac{5}{2}y_s^2 \\ \vdots \\ (k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad \beta_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_s^1 \\ \frac{3}{2}x_s^2 \\ \vdots \\ (k_s - \frac{1}{2})x_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

**Замечание 14.** • Подчеркнём, что последняя координата — это собственное значение  $\lambda$ . Также отметим, что  $\frac{\partial}{\partial z}$  — это гамильтоново векторное поле с гамильтонианом  $\pm\lambda$  относительно формы  $\omega_0$ . (Знак  $\pm$  зависит от соглашения о знаках при определении гамильтонова векторного поля.)

- Слагаемое  $\alpha \wedge d\lambda$  нужно, чтобы форма  $\omega_1$  была замкнута.
- Слагаемое  $dy_1^1 \wedge d\lambda$  нужно, чтобы инварианты Жордана-Кронекера в окрестности точки  $x_0$  были постоянны.

**Следствие 12.** Поле эндоморфизмов  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  задаётся формулой

$$\begin{aligned}
P = & \lambda E + \left( \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^{k_s} \left( \frac{\partial}{\partial x_s^{j+1}} + (j + \frac{1}{2})y_s^j \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes dx_s^j + \right. \\
& \left( \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-j}} + (k_s + \frac{1}{2} - j)x_s^{k_s-j+1} \frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_j^{k_s} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes dy_s^{k_s+1-j} \Big) + \\
& \left( \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^{k_s} -((j - \frac{1}{2})x_s^j + \delta_s^1 \delta_j^1) \frac{\partial}{\partial x_s^j} + (j + \frac{1}{2})y_s^j \frac{\partial}{\partial y_s^j} \right) \otimes d\lambda,
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

где мы формально полагаем  $x_s^i = y_s^i = 0$ , если  $i > k_s$  или  $i \leq 0$ . Иными словами, матрица этого поля эндоморфизмов имеет вид

$$P = \left( \begin{array}{ccccc|cc}
J_{k_1}^T(\lambda) & 0 & & & & 0 & -\beta_1 - \delta \\
0 & J_{k_1}(\lambda) & & & & 0 & \alpha_1 \\
& & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
& & & J_{k_n}^T(\lambda) & 0 & 0 & -\beta_n \\
& & & 0 & J_{k_n}(\lambda) & 0 & \alpha_n \\
\hline
\alpha_1^T & \beta_1^T + \delta^T & \dots & \alpha_n^T & \beta_n^T & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{array} \right), \tag{3.4.6}$$

где вектора  $\alpha_i, \beta_i$  и  $\delta$  задаются формулами (3.4.4).

Из формулы (3.4.5) немедленно следует, что

$$\begin{aligned}
(P - \lambda E) \frac{\partial}{\partial x_s^j} &= \frac{\partial}{\partial x_s^{j+1}} + (j + \frac{1}{2})y_s^j \frac{\partial}{\partial z} \\
(P - \lambda E) \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j}} &= \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-j}} + (k_s + \frac{1}{2} - j)x_s^{k_s-j+1} \frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_j^{k_s} \frac{\partial}{\partial z} \\
(P - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \lambda} &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{j=1}^{k_s} -((j - \frac{1}{2})x_s^j + \delta_s^1 \delta_j^1) \frac{\partial}{\partial x_s^j} + (j + \frac{1}{2})y_s^j \frac{\partial}{\partial y_s^j} \right).
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Несколько раз применяя формулы (3.4.7) получаем, что

$$(P - \lambda E)^p \frac{\partial}{\partial x_s^j} = (P - \lambda E) \frac{\partial}{\partial x_s^{j+p-1}} = \frac{\partial}{\partial x_s^{j+p}} + (j + p - \frac{1}{2})y_s^{j+p-1} \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4.8}$$

и что

$$\begin{aligned}
(P - \lambda E)^p \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j}} &= (P - \lambda E) \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+2-j-p}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j-p}} + (k_s + \frac{3}{2} - j - p)x_s^{k_s+2-j-p} \frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_{j+p}^{k_s+1} \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

**Вещественный случай.** Случай одной пары комплексно-сопряжённых собственных значений на самом деле аналогичен соответствующему комплексному случаю, потому что почти-комплексная структура из леммы 17 оказывается интегрируемой.

**Теорема 41** (Ф. Туриэль, [57]). Пусть  $(\omega_0, \omega_1)$  — пара согласованных 2 форм на вещественном многообразии  $M$  с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ . Тогда полупростая часть  $J$  оператора  $\frac{P-\alpha E}{\beta}$ , где  $P = \omega_0^{-1}\omega_1$  является комплексной структурой на  $M$ . Пусть  $M^{\mathbb{C}}$  — комплексификация многообразия  $M$  при помощи комплексной структуры  $J$ . Тогда формы  $\omega_0^{\mathbb{C}}$  и  $\omega_1^{\mathbb{C}}$  заданные формулами

$$\omega_0^{\mathbb{C}}(u, v) = \omega_0(u, v) - i\omega_0(u, Jv), \quad \text{и} \quad \omega_1^{\mathbb{C}}(u, v) = \omega_1(u, v) - i\omega_1(u, Jv) \quad (3.4.10)$$

являются согласованными голоморфными формами на  $M^{\mathbb{C}}$ . Оператор  $P$  коммутирует с комплексной структурой  $J$ , поэтому он задаёт оператор  $P^{\mathbb{C}}$  на  $M^{\mathbb{C}}$ . Имеет место равенство  $P^{\mathbb{C}} = (\omega_0^{\mathbb{C}})^{-1}\omega_1^{\mathbb{C}}$ , поэтому паре форм  $(\omega_0^{\mathbb{C}}, \omega_1^{\mathbb{C}})$  на  $M^{\mathbb{C}}$  соответствует ровно одно собственное значение  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

**Замечание 15.** В условиях теоремы 41, если вместо комплексной структуры  $J$  взять комплексную структуру  $-J$ , то при комплексификации паре форм будет соответствовать собственное значение  $\alpha - i\beta$ .

### 3.5 Доказательство основных теорем

Теорема 27 является прямым следствием теоремы 36. Теорема 28 вытекает из теорем 27 и 32. Таким образом, остаётся доказать только Теорему 29. Случай пары комплексно-сопряжённых собственных значений сводится к случаю одного собственного значения при помощи теорем 35 и 41, поэтому теорему 29 достаточно доказать для случая одного собственного значения. Этому посвящён весь настоящий раздел.

Регулярные некритические точки образуют открытое всюду плотное множество, поэтому достаточно доказать теорему 29 только для них. Случай, когда собственные значения постоянны (т.е. когда невырожденная бигамильтонова структура плоская), тривиален. Поэтому остаётся разобрать случай



одного непостоянного собственного значения без критических точек (т.е. случай из теоремы 40). Доказательство проводится прямым вычислением. Явно опишем каждое инвариантное распределение и проверим его инволютивность (формула для векторных полей, задающих распределения, приведена в лемме 18).

Вначале опишем локальный репер

$$e_1^0, e_1^1, \dots, e^{k_1}, f_1^0, \dots, f_1^{k_1}, e_2^1, \dots, e_n^{k_n}, f_n^1, \dots, f_n^{k_n} \quad (3.5.1)$$

в окрестности точки  $x_0$ , в котором матрицы форм  $\omega_0$  и  $\omega_1$  состоят из жордановых блоков. Базис меньших блоков (т.е. жордановых  $k_2, \dots, k_n$ -блоков):

$$\begin{aligned} e_s^1 &= \frac{\partial}{\partial x_s^1} - \frac{(k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}}, \\ e_s^i &= (P - \lambda E)^{i-1} e_s^1 = \frac{\partial}{\partial x_s^i} - \frac{(k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_s-i+1}} + \alpha_s^i \frac{\partial}{\partial z}, \\ f_s^{k_s} &= \frac{\partial}{\partial y_s^1} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}}, \\ f_s^i &= (P - \lambda E)^{k_s-i} f_s^{k_s} = \frac{\partial}{\partial y_s^i} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^i} + \beta_s^i \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_s^i &= (i - \frac{1}{2})y_s^{i-1} - \frac{(k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} ((k_s - i + \frac{3}{2})x_1^{k_s-i+2} + \delta_i^{k_s+1}) \\ \beta_s^i &= (i + \frac{1}{2})x_s^{i+1} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} ((i + \frac{1}{2})x_1^{i+1} + \delta_0^i) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Базис большего  $(k_1 + 1)$ -блока:

$$\begin{aligned}
e_1^0 &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_{s=1}^n \left( \sum_{j=1}^{k_s} -\left(j + \frac{1}{2}\right) x_s^{j+1} \frac{\partial}{\partial x_s^j} + \left(j - \frac{1}{2}\right) y_s^{j-1} \frac{\partial}{\partial y_s^j} \right) \\
e_1^i &= (P - \lambda E)^i e_1^0 = \sum_{s=1}^n \left( \left( \frac{1}{2} x_s^1 + \delta_s^1 \right) \frac{\partial}{\partial x_s^i} - \left( k_s + \frac{1}{2} \right) y_s^{k_s} \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-i+1}} \right) + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z} \\
f_1^{k_1} &= \frac{1}{\left( \frac{1}{2} x_1^1 + 1 \right)} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_1}}, \\
f_1^i &= (P - \lambda E)^{k_1-i} f_1^{k_1} = \frac{1}{\left( \frac{1}{2} x_1^1 + 1 \right)} \frac{\partial}{\partial y_1^i} + \beta_1^i \frac{\partial}{\partial z}, \\
f_1^0 &= \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= \sum_{s=1}^n \left( \frac{1}{2} x_s^1 + \delta_s^1 \right) \left( i - \frac{1}{2} \right) y_s^{i-1} - \left( k_s + \frac{1}{2} \right) y_s^{k_s} \left( k_s - i + \frac{3}{2} \right) x_s^{k_s-i+2} \\
\beta_1^i &= \frac{1}{\frac{1}{2} x_1^1 + 1} \left( \left( i + \frac{1}{2} \right) x_1^{i+1} + \delta_0^i \right).
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

При этом мы формально полагаем  $x_s^i = y_s^i = 0$ , если  $i > k_s$  или  $i \leq 0$ . В частности,  $\gamma_1 = 0$ .

Векторные поля (3.5.2) и (3.5.4) были выбраны так, чтобы было выполнено следующее утверждение.

**Утверждение 40.** *В условиях теоремы 40 в локальном репере (3.5.1), заданном формулами (3.5.2) и (3.5.4), матрицы форм  $\omega_0$  и  $\omega_1$  имеет блочно-диагональный вид*

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \tag{3.5.6}$$

где  $A_1, B_1$  — это жорданов  $(k_1+1)$ -блок, а  $A_i, B_i$  при  $i > 1$  — это жордановы  $k_i$ -блоки.

Из устройства инвариантных подпространств (см. замечание 13) вытекает следующее утверждение.

**Лемма 18.** В условиях теоремы 29 в базисе (3.5.1), заданном формулами (3.5.2) и (3.5.4), инвариантные распределения имеют вид

$$U^{m_1+1}(V_J^{k_1+1}) \oplus \dots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_1^{m_1}}, e_1^{k_1}, \dots, e_1^{k_1-m_1} \right\rangle \oplus$$

$$\bigoplus_{s=2}^N \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+2}}, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+1}} - \frac{(k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_s^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s-1}}, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s}} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}} \right\rangle. \quad (3.5.7)$$

*Доказательство теоремы 29.* Для доказательства теоремы 29 остаётся проверить инволютивность распределений (3.5.7). Это делается прямым вычислением — нужно найти коммутаторы векторных полей, задающих распределение (3.5.7) и проверить, касаются ли они этого распределения.

Распределения  $\text{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , неинтегрируемы, потому что коммутатор векторных полей

$$u_s = \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+1}} - \frac{(k_s + \frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}, \quad (3.5.8)$$

$$v_s = \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s}} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}} \quad (3.5.9)$$

не касается соответствующего распределения. Действительно,

$$[u_s, v_s] = \delta_{m_s}^{k_s} \left( \frac{k_s}{(\frac{1}{2}x_1^1 + 1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}} \right). \quad (3.5.10)$$

Несложно проверить, что векторные поля  $\frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}$  касаются инвариантного распределения (3.5.7) тогда и только тогда, когда  $m_1 \geq m_s$ . Для распределений  $\text{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , выполнены соотношения  $m_1 = m_s - 1 < m_s = k_s$ . Поэтому в этих случаях коммутатор  $[u_s, v_s]$  не касается  $\text{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$ .

Доказательство того, что инвариантные распределения, отличные от  $\text{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$ , где  $i > 1$ , интегрируемы, можно немного упростить, если воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что

$$\left[ e_1^m, \frac{\partial}{\partial x_s^i} \right] \in \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \quad \left[ e_1^m, \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-i}} \right] \in \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

при  $i > 1$ , и что векторные поля  $\frac{\partial}{\partial z}$  принадлежат любому инвариантному распределению (за исключением тривиального нульмерного распределения). Отсюда следует, что единственные нетривиальные коммутаторы векторных полей из формулы (3.5.7), которые могут не касаться распределения — это попарные коммутаторы векторных полей  $e_1^0, e_1^1, u_s$  и  $v_s$ . Из устройства инвариантных подпространств (см. замечание 13), следует, что единственное инвариантное распределение, содержащее векторное поле  $e_1^0$ , совпадает со всем касательным расслоением. Также из замечания 13 следует, что единственное инвариантное распределение, содержащее векторное поле  $e_1^1$ , отличное от всего касательного расслоения и от  $\text{Ker} (P - \lambda E)^{k_i}$ , где  $i > 2$ , — это распределение  $\text{Im} (P - \lambda E)$ . Отдельно докажем инволютивность этого распределения.

**Утверждение 41.** *В условиях теоремы 40 распределение  $\text{Im} (P - \lambda E)$  инволютивно.*

*Доказательство.* Так как  $N_P = 0$ , выполнено равенство

$$\begin{aligned} [(P - \lambda E)u, (P - \lambda E)v] &= (P - \lambda E)([u, Pv] + [Pu, v] - (P + \lambda E)[u, v]) + \\ &\quad (\mathcal{L}_{(P - \lambda E)v}\lambda)u - (\mathcal{L}_{(P - \lambda E)u}\lambda)v \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Распределение  $\text{Im} (P - \lambda E)$  инволютивно, потому что  $\mathcal{L}_{(P - \lambda E)u}\lambda = 0$  для любого векторного поля  $u$ . □

Таким образом, теорема 29 полностью доказана. □

## Глава 4

# Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$

### 4.1 Постановка задачи

В главе 4 диссертации мы вычислим некоторые топологические инварианты для интегрируемого случая на алгебре Ли  $so(4)$ , который является обобщением классического случая Ковалевской в динамике твёрдого тела. Хорошо известно (см., например, [6]), что классический случай Ковалевской может быть задан уравнениями Эйлера на алгебре Ли  $e(3)$ . В этой работе мы изучим однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на пучке алгебр Ли  $so(4) - e(3) - so(3, 1)$ , найденное в работе [12], которое включает в себя классический случай Ковалевской как интегрируемую гамильтонову систему на алгебре Ли  $e(3)$ . В этой работе для рассматриваемых интегрируемых случаев на алгебре Ли  $so(4)$  сделано следующее:

1. построены бифуркационные диаграммы отображения момента (теоремы 42 и 45),
2. проверена невырожденность точек ранга 1 и 0 (леммы 20, 21 и 23),
3. найдены типы невырожденных положений равновесия (леммы 20 и 23),
4. определены перестройки торов Лиувилля (теорема 43) и круговые молекулы для особых точек бифуркационных диаграмм (теорема 44).

**Замечание 16.** Используя полученные в этой работе результаты, несложно получить классификацию изоэнергетических поверхностей с точностью до грубой Лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, для каждой изоэнергетической поверхности  $H = \text{const}$  несложно построить соответствующую молекулу без меток (инвариант Фоменко). В этой работе мы не приводим полный список инвариантов Фоменко для рассматриваемой интегрируемой системы, поскольку описание всех возможных молекул будет достаточно громоздким — молекулы будут зависеть не только от типа бифуркационных диаграмм, но и от значения гамильтониана в особых точках ранга 0.

При вычислении этих топологических инвариантов мы будем использовать некоторые факты и обозначения из теории топологической классификации, развитой в работах А. Т. Фоменко и его учеников. Определения топологических инвариантов (атомов, молекул), а также основные факты этой теории можно найти в книге [6].

Кроме того, в разделе 4.4 мы покажем, как связаны между собой результаты для классического случая Ковалевской и для рассматриваемой в этой работе системы на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ . Топологические свойства классического случая Ковалевской хорошо известны и были подробно изучены в книге М. П. Харламова [31] (см. также [29] и [30]). В частности, там описаны бифуркационные диаграммы отображения момента и исследованы перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Круговые молекулы (а также тонкий лиувиллев анализ) для классического случая Ковалевской содержатся в работе [5]. Все необходимые результаты о классическом случае Ковалевской в удобной для нас форме собраны в книге [6].

Бифуркационные диаграммы и типы невырожденных особенностей для случая нулевой постоянной площадей ( $b = 0$ ) были описаны в работе [63].

Опишем теперь рассматриваемое однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем на пучке алгебр Ли  $\mathfrak{so}(4) - \mathfrak{e}(3) - \mathfrak{so}(3, 1)$ . Начнём с описания этого пучка алгебр Ли.

Рассмотрим шестимерное пространство  $\mathbb{R}^6$  и фиксируем в нём некоторый базис  $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ . Введём на этом пространстве  $\mathbb{R}^6$  следующее однопараметрическое семейство коммутаторов, зависящих от параметра  $\varkappa \in \mathbb{R}$ :

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k, \quad (4.1.1)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  — знак перестановки  $\{123\} \rightarrow \{ijk\}$ . Несложно проверить, что случай  $\varkappa > 0$  соответствует алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , случай  $\varkappa = 0$  — алгебре Ли  $\mathfrak{e}(3)$ , а  $\varkappa < 0$  — алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ .

В координатах  $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$  двойственного линейного пространства, соответствующих базису  $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ , скобка Ли-Пуассона имеет аналогичный вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (4.1.2)$$

Для любого значения параметра  $\varkappa \in \mathbb{R}$  скобка (4.1.2) обладает двумя функциями Казимира:

$$g_1 = \mathbf{x}^2 + \varkappa \mathbf{J}^2, \quad g_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{J} \rangle, \quad (4.1.3)$$

где через  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{J}$  обозначены трёхмерные вектора  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(J_1, J_2, J_3)$  соответственно, а через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено евклидово скалярное произведение двух векторов из  $\mathbb{R}^3$ . Напомним, что функции называются функциями Казимира некоторой скобки Пуассона, если они коммутируют относительно этой скобки с любой другой функцией. Совместные поверхности уровня

$$M_{a,b} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \mid g_1(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = a, \quad g_2(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = b\} \quad (4.1.4)$$

являются орбитами коприсоединённого представления, за исключением случая, когда  $\varkappa \leq 0, a = 0, b = 0$  (в этом случае поверхность уровня является объединением нескольких орбит коприсоединённого представления). Во всех остальных случаях поверхности  $M_{a,b}$  являются симплектическими листами скобки (4.1.2), в частности, скобка (4.1.2) задаёт на них структуру симплектического многообразия. Если  $\varkappa > 0$  и  $a > 2\sqrt{\varkappa}|b|$ , то эти орбиты  $M_{a,b}$  являются четырёхмерными подмногообразиями  $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ , диффеоморфными произведению двух двумерных сфер  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ . Если  $\varkappa > 0$ , то особые орбиты

$a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$  диффеоморфны двумерной сфере  $\mathbb{S}^2$ . Если  $\varkappa > 0$ , то орбит, удовлетворяющих условию  $a < 2\sqrt{\varkappa}|b|$ , не существует. Отметим также, что если  $\varkappa = 0$ , то неособые орбиты  $a > 0$  диффеоморфны кокасательному расслоению к двумерной сфере  $T^*\mathbb{S}^2$  (в частности, они некомпактны).

В этой работе мы будем исследовать следующий интегрируемый случай уравнений Эйлера, заданный на описанном выше пучке алгебр Ли  $\mathfrak{so}(4) - \mathfrak{e}(3) - \mathfrak{so}(3, 1)$  (см. например, [7] или [12]). В описанных выше координатах  $(J_i, x_j)$  гамильтониан равен

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1x_1, \quad (4.1.5)$$

а интеграл имеет вид

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2)^2, \quad (4.1.6)$$

где  $c_1$  — произвольная постоянная.

В этом разделе мы изучим указанные интегрируемые гамильтоновы системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) на неособых орбитах  $M_{a,b}$  алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ .

Прежде всего сделаем несколько замечаний об элементарных свойствах рассматриваемых систем.

**Замечание 17.** Без ограничения общности можно считать, что  $c_1 = 1$ , а  $\varkappa = -1, 0$  или  $1$ , поскольку при замене координат и параметров системы по формулам

$$J' = \mu J, \quad x' = \lambda \mu x, \quad a' = \mu^2 \lambda^2 a, \quad b' = \mu^2 \lambda b, \quad c'_1 = \frac{\mu}{\lambda} c_1, \quad \varkappa' = \lambda^2 \varkappa,$$

где  $\lambda, \mu$  — произвольные константы, гамильтониан и интеграл умножаются на  $\mu^2$  и  $\mu^4$  соответственно. Тем не менее, мы не будем избавляться от  $c_1$  и  $\varkappa$ , чтобы формулы в дальнейшем имели “однородный вид” (например, гамильтониан и интеграл являются однородными функциями относительно  $\mathbf{J}, \mathbf{x}, c_1$ ).

**Замечание 18.** Несложно проверить, что при  $\varkappa = 0$  (и при  $c_1 = 1$ ) мы получаем классический случай Ковалевской в том виде, в котором он, например,



описан в книге [6]. Точнее, в книге [6] гамильтониан в 2 раза меньше, чем гамильтониан (4.1.5), а первый интеграл в 4 раза меньше, чем интеграл (4.1.6). Отметим также, что в книге [6] используются следующие обозначения:  $S_i = J_i$ ,  $R_j = x_j$ , значение  $b$  интеграла  $g_2$  обозначается через  $g$ , а значение  $a$  интеграла  $g_1$  полагается равным 1.

**Замечание 19.** При замене координат  $(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \rightarrow (-\mathbf{J}, \mathbf{x})$  интеграл  $g_1$ , гамильтониан (4.1.5) и интеграл (4.1.6) сохраняются, а интеграл  $g_2$  меняет знак. Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $b \geq 0$ .

**Замечание 20.** Отметим также, что система обладает следующими двумя естественными симметриями, которые сохраняют гамильтониан (4.1.5), первый интеграл (4.1.6) и оба интеграла  $g_1$  и  $g_2$ . Первая симметрия  $\sigma_2$  меняет знаки у координат  $J_2$  и  $x_2$  и сохраняет остальные координаты:

$$\sigma_2 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (J_1, -J_2, J_3, x_1, -x_2, x_3).$$

Аналогично вторая симметрия  $\sigma_3$  одновременно меняет знаки у координат  $J_3$  и  $x_3$ :

$$\sigma_3 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (J_1, J_2, -J_3, x_1, x_2, -x_3).$$

## 4.2 Основные результаты главы 4

Сформулируем теперь основные полученные результаты. Вначале мы опишем результаты для случая, когда  $b \neq 0$ , а потом — для случая  $b = 0$ . Начнём с описания бифуркационной диаграммы отображения момента.

**Лемма 19.** Пусть  $b \neq 0$  и  $\varkappa \neq 0$ . Тогда для любой неособой орбиты  $M_{a,b}$  (то есть для любой такой орбиты, что  $a^2 - 4\varkappa b^2 \neq 0$ ) бифуркационная диаграмма  $\Sigma_{h,k}$  интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$ :

1. Прямая  $k = 0$ ;

2. Параметрическая кривая

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = \left( 4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4} \right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4, \quad (4.2.1)$$

где  $z \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

3. Объединение двух парабол

$$k = \left( h - \kappa c_1^2 - \frac{a}{\kappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa} \right)^2 \quad (4.2.2)$$

и

$$k = \left( h - \kappa c_1^2 - \frac{a}{\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa} \right)^2. \quad (4.2.3)$$

**Замечание 21.** Подчеркнём, что лемма 19 верна как для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , так и для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ . Напомним, что для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$  параметр  $a$  удовлетворяет неравенству  $a \geq 2\sqrt{\kappa}|b|$ , а для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$  параметр  $a$  может принимать любые действительные значения.

Доказательство леммы 19 содержится в разделе 4.3.1.

Для того чтобы построить бифуркационную диаграмму отображения момента, остаётся выкинуть из кривых, описанных в лемме 19, некоторые их части. Точное описание бифуркационных диаграмм дано в следующей теореме.

**Теорема 42.** Пусть  $\kappa > 0$  и  $b > 0$ . Функции  $f_k, f_r, f_m, f_t$  и  $f_l$ , заданные формулами

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\kappa b^{2/3}c_1^{4/3} - \kappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}} \quad (4.2.4)$$

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \kappa b^{2/3}c_1^{2/3} \quad (4.2.5)$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\kappa c_1^2} + \kappa^2 c_1^2 \quad (4.2.6)$$

$$f_t(b) = \left( \frac{\kappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right)^2 + \kappa t^2, \quad \text{где } b = t \left( \frac{\kappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right) \quad (4.2.7)$$

$$f_l(b) = 2\sqrt{\kappa}|b| \quad (4.2.8)$$

делят область  $\{b > 0, a > 2\sqrt{\kappa}b\} \subset \mathbb{R}^2(a, b)$  на 9 областей (см. рис. 4.1 и 4.2). На рисунках 4.3 – 4.21 для каждой из этих областей указана соответствующая бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) на орбите  $M_{a,b}$  алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ . Точнее, в каждом из случаев указано, из каких частей прямой  $k = 0$ , кривой (4.2.1) и двух парабол (4.2.2) и (4.2.3) состоит бифуркационная диаграмма отображения момента.

Напомним, что бифуркационная диаграмма для орбиты  $M_{a,b}$  с  $b < 0$  совпадает с бифуркационной диаграммой для орбиты  $M_{a,-b}$  (см. замечание 19).

**Замечание 22.** На рисунках 4.3 – 4.21 дуги  $y_8z_2, z_2z_1, y_5z_3, z_8z_9, z_8z_{11}$  и  $z_9z_{11}$  принадлежат параметрической кривой (4.2.1). Остальные дуги бифуркационных диаграмм очевидным образом распределяются между кривыми.

**Замечание 23.** В дальнейшем мы будем использовать следующую нумерацию для областей из  $\mathbb{R}^2(a, b)$ :

1. Область I: это область  $\{\kappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_l(b) < a < f_t(b)\}$ ;
2. Область II:  $\{\kappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_t(b) < a < f_k(b)\}$ ;
3. Область III :  $\{\kappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_k(b) < a < f_r(b)\}$ ;

4. Область IV:  $\{\varkappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_r(b) < a < f_m(b)\}$ ;
5. Область V:  $\{f_m(b) < a\}$ ;
6. Область VI:  $\{0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_t(b) < a < f_r(b)\}$ ;
7. Область VII:  $\{0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad \max(f_t(b), f_r(b)) < a < f_m(b)\}$ ;
8. Область VIII:  $\{0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_l(b) < a < \min(f_r(b), f_t(b))\}$ ;
9. Область IX:  $\{0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_r(b) < a < f_t(b)\}$ .

Мы продолжим нумерацию на области прямой  $b = 0$  следующим образом:

10. Область X:  $\{b = 0, \quad \varkappa^2 c_1^2 < a\}$ ;
11. Область XI:  $\{b = 0, \quad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2\}$ ;
12. Область XII:  $\{b = 0, \quad 0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}\}$ ;

Подробное описание расположения кривых, из которых состоит бифуркационная диаграмма отображения момента, дано в разделе 4.3.2. Доказательство теоремы 42 дано в разделе 4.3.4. Фактически, для доказательства теоремы 42 достаточно знать типы критических точек ранга 0, которые описаны в следующей лемме (определение невырожденности особых точек ранга 0 и их типов см. в главе 1, а также, например, в [6]).

**Лемма 20.** *Пусть  $\varkappa > 0$  и  $b > 0$ . Тогда образы критических точек ранга 0 лежат в объединении следующих трёх семейств точек.*

1. *Точка пересечения парабол (4.2.2) и (4.2.3) (точка  $z_5$  на рис. 4.15). Она имеет координаты*

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa}, \quad k = \frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}.$$

*Если  $a > f_m(b)$ , где функция  $f_m(b)$  задаётся формулой (4.2.6), то в прообразе этой точки на орбите  $M_{a,b}$  лежат ровно две критические точки ранга 0. Если  $a = f_m(b)$ , то в прообразе одна критическая точка ранга 0, а если  $a < f_m(b)$ , то в прообразе нет критических точек ранга 0. Если  $a > f_m(b)$ , то все критические точки из этой серии являются невырожденными особыми точками типа центр-седло.*

2. Точки пересечения парабол (4.2.2), (4.2.3) с кривой (4.2.1). Соответствующие значения параметра  $z$  на кривой (4.2.1) задаются равенством

$$z^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2} c_1^2$$

На каждой неособой орбите  $M_{a,b}$  каждой точке пересечения кривой (4.2.1) с одной из парабол соответствует ровно одна критическая точка ранга 0. Обе критические точки, для которых  $z < 0$  (т.е. точки  $z_1$  и  $z_4$  на рис. 4.3–4.25), имеют тип центр-центр.

Типы оставшихся точек пересечения описаны в таблице 4.1. Здесь  $z_{+l}$  и  $z_{+r}$  — это оставшиеся точки пересечения кривой (4.2.1) с левой параболой (4.2.2) и правой параболой (4.2.3) соответственно, а функции  $f_r(b)$ ,  $f_m(b)$  и  $f_t(b)$  задаются формулами (4.2.5), (4.2.6) и (4.2.7) соответственно. (На рис. 4.3–4.21 точка  $z_{+r}$  обозначается как  $z_3$ ,  $z_6$  или  $z_{11}$  в зависимости от типа точки. Точка  $z_{+l}$  обозначается как  $z_5$ ,  $z_7$ ,  $z_{12}$ ,  $z_9$  или  $z_{10}$ .)

		$0 < b^2 < \kappa^3 c_1^4$	$b^2 > \kappa^3 c_1^4$
$a > f_m(b)$	$z_{+r}$	центр-центр	центр-центр
	$z_{+l}$	седло-седло	седло-седло
$f_m(b) > a > f_t(b)$ $a \neq f_r(b)$	$z_{+r}$	центр-центр	центр-седло
	$z_{+l}$	центр-седло	седло-седло
$f_t(b) > a > f_l(b)$ $a \neq f_r(b)$	$z_{+r}$	центр-центр	центр-седло
	$z_{+l}$	центр-центр	центр-седло

Таблица 4.1: Типы точек пересечения кривой (4.2.1) и парабол (4.2.2) и (4.2.3).

3. Точки пересечения кривой (4.2.1) и прямой  $k = 0$  (точки  $z_{10}$ ,  $z_{11}$  и  $z_1$  на рис. 4.3–4.21). В прообразе каждой точки пересечения, лежащей правее точки

$$h = \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa}$$

(т.е. правее точки пересечения параболы (4.2.3) и прямой  $k = 0$ ) лежат ровно две критические точки ранга 0, при этом типы этих двух точек совпадают. Прообразы остальных точек пересечения пусты. Иными словами,

- если  $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$  и  $a < f_t(b)$ , где функция  $f_t(b)$  задаётся формулой (4.2.7), то в прообразе нет критических точек ранга 0 из этой серии;
- если  $a > f_t(b)$  и  $a > f_k(b)$ , где  $f_k(b)$  задаётся формулой (4.2.4), то на орбите лежат 2 точки из этой серии;
- если  $f_k(b) > a > f_t(b)$  (это возможно только при  $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ ), то в прообразе лежат 6 точек из этой серии.
- если  $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$  и  $a < f_t(b)$ , то в прообразе лежат 4 точки из этой серии.

Точкам пересечения с параметром  $z > z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$ , т.е. имеющим параметр больший, чем у точки возврата кривой (4.2.1) (это точки  $y_{10}$  и  $z_1$  на рис. 4.3–4.18), соответствуют точки типа центр-центр. Если  $a \neq f_t(b)$ , то точкам пересечения с параметром  $z < z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$  (это точка  $y_{11}$  на рис. 4.6–4.8) соответствуют точки типа центр-седло.

Доказательство леммы 20 дано в разделе 4.3.3.

Как оказалось, в рассматриваемом случае знание типов критических точек позволяет не только построить бифуркационные диаграммы отображения момента, но и определить все перестройки торов Лиувилля, а также круговые молекулы особых точек отображения момента. Так же, как и доказательство теоремы 42, доказательство теорем 43 и 44 содержится в разделе 4.3.4.

Так же, как и в классическом случае Ковалевской, перестройки торов, отвечающие гладким регулярным дугам бифуркационной диаграммы, могут быть одного из четырёх типов. В терминологии из [6] они соответствуют атомам  $A$ ,  $A^*$ ,  $B$  и  $C_2$  (см. краткое описание этих атомов в главе 1).

**Теорема 43.** На рисунках 4.3–4.30 для каждой бифуркационной диаграммы отображения момента указаны перестройки торов Лиувилля, соответствующие различным частям бифуркационных диаграмм, а также отмечены все особые точки этих бифуркационных диаграмм.

Особые точки бифуркационных диаграмм обозначены  $y_1$ – $y_{13}$  и  $z_1$ – $z_{11}$ . Они соответствуют точкам возврата, точкам пересечения и точкам касания кривых, из которых состоит бифуркационная диаграмма отображения момента (напомним, что эти кривые описаны в лемме 19).

Особые точки  $y_1, y_3, y_7, y_{10}$ – $y_{12}, z_1, z_3$ – $z_7$  и  $z_9$ – $z_{11}$  соответствуют невырожденным особенностям отображения момента  $\mathcal{F} = (H, K) : M_{a,b}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Точкам, отмеченным одинаковыми буквами, соответствуют невырожденные особенности одного и того же типа. Тип этих невырожденных особенностей указан в леммах 20 и 23.

Точки  $y_2, y_4, y_5, y_6, y_8, y_9, y_{13}, z_2$  и  $z_8$  соответствуют вырожденным одномерным орбитам действия группы  $\mathbb{R}^2$ , порождённого гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) на  $M_{a,b}$ . Следующее утверждение гарантирует, что особенности в прообразе остальных точек бифуркационных диаграмм являются невырожденными.

**Лемма 21.** *Рассматриваемые интегрируемые гамильтоновы системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) являются боттовскими на всех неособых орбитах  $M_{a,b}$  алгебр Ли  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $\mathfrak{e}(3)$  и  $\mathfrak{so}(3,1)$ . Иными словами, для неособых значений параметров  $a$  и  $b$  все критические точки в прообразе неособых точек бифуркационных диаграмм (т.е. точек, не являющихся точками пересечения, касания или излома гладких дуг бифуркационных диаграмм) являются невырожденными точками ранга 1.*

Доказательство леммы 21 содержится в разделе 4.3.1. Подчеркнём, что в этой работе боттовость систем доказана для всех неособых орбит пучка  $\mathfrak{so}(4) - \mathfrak{e}(3) - \mathfrak{so}(3,1)$ .

**Замечание 24.** Несложно понять, как устроены бифуркационные диаграммы для остальных неособых орбит, не изображённых на рис. 4.3–4.30. Например, при  $a = f_k(b)$ ,  $\varkappa > 0$  параметрическая кривая (4.2.1) пересекает прямую  $k = 0$  в точке возврата. Не приходится сомневаться, что критические точки ранга 0, в которых происходит перестройка бифуркационных диаграмм, вырождаются. В разделе 4.3.3 при доказательстве леммы 19 мы фактически докажем более общее утверждение, что оставшиеся точки — в окрестности

которых бифуркационная диаграмма не перестраивается при переходе из одной области плоскости  $\mathbb{R}^2(a, b)$  в другую — остаются невырожденными, и их тип не меняется.

**Теорема 44.** *В таблицах 4.4 и 4.5 указаны круговые молекулы всех особых точек бифуркационных диаграмм, изображенных на рисунках 4.3–4.30. Особым точкам диаграмм, отмеченным одинаковыми буквами, соответствуют одни и те же круговые молекулы.*

**Замечание 25.** Для точек, лежащих на границе бифуркационных диаграмм круговая молекула в таблицах 4.4 и 4.5 обходится против часовой стрелки. Хотя единственная неоднозначность в данном случае может возникнуть только для точки  $z_2$ . Для этой точки круговая молекула должна состоять из двух одинаковых молекул, каждая из которых имеет такой же вид, как и для вырожденной особенности типа эллиптическая бифуркация удвоения периода. (Подробнее о вырожденных особенностях, см., например, [6].)

Подчеркнём, что в теоремах 43 и 44 рассмотрен не только случай  $\varkappa > 0, b \neq 0$ , но и случаи  $\varkappa > 0, b = 0$  и  $\varkappa = 0$ . Отметим, что при  $\varkappa = 0$  полученные результаты полностью совпадают с уже известными результатами для классического случая Ковалевской (см., например, [6]).

**Замечание 26.** В книге [6] в списке круговых молекул для случая Ковалевской допущена неточность: молекулы для точек  $y_8$  и  $y_9$  нужно повторить дважды.

#### 4.2.1 Случай $\varkappa > 0, b = 0$

Опишем теперь результаты в случае, когда  $b = 0$ . Так же, как и лемма 19, следующая лемма доказана в разделе 4.3.1.

**Лемма 22.** *Пусть  $\varkappa \neq 0$  и  $b = 0$ . Тогда для любой неособой орбиты  $M_{a,0}$  (т.е. для тех орбит, для которых  $a \neq 0$ ) бифуркационная диаграмма  $\Sigma_{h,k}$  интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$ :*



1. Прямая  $k = 0$ ;

2. Объединение параболы

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2 + 4ac_1^2 \quad (4.2.9)$$

и касательной к этой параболе в точке  $h = 0$

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4ac_1^2 + \varkappa^2 c_1^4) \quad (4.2.10)$$

3. Объединение двух парабол

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2; \quad (4.2.11)$$

и

$$k = \left( h - \varkappa c_1^2 - \frac{2a}{\varkappa} \right)^2. \quad (4.2.12)$$

Так же, как и лемма 19, лемма 22 верна как для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , так и для алгебры Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ .

Теперь для построения бифуркационных диаграмм отображения момента, остаётся выкинуть из кривых, описанных в лемме 22, некоторые их части. Точное описание бифуркационных диаграмм дано в теореме 45 (см. также рисунки 4.22–4.25).

Опишем теперь критические точки ранга 0. Так же, как и лемма 20, следующая лемма доказана в разделе 4.3.3.

**Лемма 23.** Пусть  $\varkappa > 0$  и  $b = 0$ . Тогда образы критических точек ранга 0 лежат в объединении следующих трёх семейств точек:

1. Точка пересечения парабол (4.2.11) и (4.2.12) (точка  $z_5$  на рис. 4.22).

Эта точка имеет координаты

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa}, \quad k = \frac{a^2}{\varkappa^2}.$$

Если  $a > \varkappa^2 c_1^2$ , то в прообразе этой точки на орбите  $M_{a,0}$  лежат ровно две критические точки ранга 0. Если  $a = \varkappa^2 c_1^2$ , то в прообразе одна критическая точка ранга 0, а если  $a < \varkappa^2 c_1^2$ , то в прообразе нет критических точек ранга 0. Если  $a > \varkappa^2 c_1^2$ , то все критические точки из этой серии являются невырожденными особыми точками типа центр-седло.

2. Точки пересечения верхней параболы (4.2.9) и касательной (4.2.10) с параболой (4.2.11) и (4.2.12).

Для любого  $a > 0$  у прямой (4.2.10) и левой параболы (4.2.11) две точки пересечения с координатами

$$h = \pm 2\sqrt{ac_1}, \quad k = (\pm 2\sqrt{ac_1} - \varkappa^2 c_1^2)^2,$$

и в прообразе каждой из этих точек на орбите  $M_{a,0}$  лежит по одной критической точке ранга 0.

(a) Критическая точка в прообразе верхней точки пересечения (т.е. точки  $y_1$  на рис. 4.22 - 4.25) является невырожденной особой точкой типа центр-центр.

(b) Если  $a > \varkappa^2 c_1^2$ , то критическая точка  $p$  в прообразе нижней точки пересечения (т.е. точки  $y_3$  на рис. 4.22,  $z_{10}$  на рис. 4.23 и  $z_9$  на рис. 4.24, 4.25) является невырожденной особой точкой типа седло-седло. Если  $\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$ , то  $p$  — невырожденная особая точка типа центр-седло, а если  $a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$ , то  $p$  — невырожденная особая точка типа центр-центр.

(c) В прообразе точки пересечения верхней параболы (4.2.9) с правой параболой (4.2.12) (точка  $z_7$  на рис. 4.22-4.25)

$$h = \frac{a}{\varkappa}, \quad k = \left(\frac{a}{\varkappa} - \varkappa c_1^2\right)^2 + 4ac_1^2$$

на каждой орбите  $M_{a,0}$  (где  $a > 0$ ) лежат ровно две критические точки ранга 0, и обе эти точки являются невырожденными особыми точками типа центр-центр.

3. Точка пересечения прямой  $k = 0$  и касательной (4.2.10) (точки  $z_1$  на рис. 4.22 и 4.23). Эта точка имеет координаты

$$h = \frac{\varkappa c_1^2}{2} + \frac{2a}{\varkappa}, \quad k = 0.$$

Если  $a > \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$ , то в прообразе этой точки пересечения на орбите  $M_{a,0}$  лежат две невырожденные критические точки ранга 0 типа центр-центр. Если  $a = \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$ , то в прообразе лежит одна критическая точка

ранга 0, а если  $a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$ , то в прообразе нет критических точек ранга 0.

В случае, когда  $\varkappa > 0$  и  $b = 0$ , будет три качественно различных типа бифуркационных диаграмм. Это связано с тем, что функции  $f_k, f_r, f_m, f_t$  и  $f_l$ , заданные формулами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) и (4.2.8) соответственно, делят луч  $\{b = 0, a \geq 0\}$  на 3 части.

**Теорема 45.** *В случае, когда  $\varkappa > 0$  и  $b = 0$ , вид бифуркационной диаграммы зависит от значения параметра  $a$ . В следующих трёх случаях получаются качественно различные диаграммы:*

1.  $0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$ ,
2.  $\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$ ,
3.  $\varkappa^2 c_1^2 < a$ .

Соответствующие бифуркационные диаграммы приведены на рис. 4.22–4.25, где формулы для прямых и парабол указаны в лемме 22.

**Замечание 27.** На рис. 4.22–4.25 дуги  $z_2 z_1$ ,  $z_8 z_9$  и  $z_8 z_{10}$  принадлежат прямой (4.2.10), а дуга  $y_4 z_7$  — верхней параболе (4.2.9). Остальные дуги очевидным образом распределяются между кривыми.

**Замечание 28.** Бифуркационные диаграммы из теоремы 45 можно описать явно. Во всех трёх случаях бифуркационная диаграмма содержит следующие две части парабол:

$$P_0 = \left\{ (h, k) \mid k = \left( h - \varkappa c_1^2 - \frac{2a}{\varkappa} \right)^2, \quad \frac{a}{\varkappa} \leq h \leq \frac{2a}{\varkappa} \right\}$$

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = (h - \varkappa c_1^2)^2 + 4ac_1^2, \quad 0 \leq h \leq \frac{a}{\varkappa} \right\}$$

Если  $a > \varkappa^2 c_1^2$ , то бифуркационной диаграмме также принадлежат следующие

щие два отрезка и часть параболы:

$$E_1 = \{(h, k) \mid k = -2\kappa c_1^2 h + (4ac_1^2 + \kappa^2 c_1^4), \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h \leq \frac{\kappa c_1^2}{2} + \frac{2a}{\kappa}\}$$

$$E_2 = \{(h, k) \mid k = 0, \quad \kappa c_1^2 \leq h \leq \frac{\kappa c_1^2}{2} + \frac{2a}{\kappa}\}$$

$$P_2 = \{(h, k) \mid k = (h - \kappa c_1^2)^2, \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h \leq \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa}\}$$

Если  $\frac{\kappa^2 c_1^2}{4} < a < \kappa^2 c_1^2$ , то кроме частей парабол  $P_0$  и  $P_1$  бифуркационной диаграмме принадлежат отрезки  $E_1$  и  $E_2$ , а также следующая часть параболы:

$$P_3 = \{(h, k) \mid k = (h - \kappa c_1^2)^2, \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h \leq 2\sqrt{ac_1^2}\}$$

В случае же  $a < \frac{\kappa^2 c_1^2}{4}$  бифуркационная диаграмма состоит из частей парабол  $P_0, P_1, P_3$  и следующего отрезка  $E_3$ :

$$E_3 = \{(h, k) \mid k = -2\kappa c_1^2 h + (4ac_1^2 + \kappa^2 c_1^4), \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h \leq 2\sqrt{ac_1^2}\}$$

**Замечание 29.** Отметим, что при  $a = \kappa^2 c_1^2$  касательная (4.2.10) проходит через точку пересечения парабол (4.2.11) и (4.2.12), а при  $a < \frac{\kappa^2 c_1^2}{4}$  касательная (4.2.10) проходит через точку пересечения параболы (4.2.11) и прямой  $k = 0$ .

Перестройки торов Лиувилля и круговые молекулы особых точек описаны ранее в теоремах 43 и 44 соответственно.

## 4.3 Доказательство основных утверждений

### 4.3.1 Критические точки ранга 1

В этом разделе мы докажем леммы 19 и 22 о том, что бифуркационные диаграммы содержатся в описанных в этих леммах кривых. Для этого мы вначале опишем в утверждении 42 все критические точки отображения момента, а затем рассмотрим их образ при отображении момента. Отметим, что все эти критические точки, кроме точек из утверждения 55, являются критическими точками ранга 1.

Подчеркнём, что в этом разделе мы не налагаем ограничений на параметры  $\kappa$  и  $b$  (т.е.  $\kappa, b \in \mathbb{R}$ , если не оговорено противное).

**Утверждение 42.** Множество точек, где гамильтоновы векторные поля, соответствующие гамильтониану (4.1.5) и интегралу (4.1.6), линейно зависимы, является объединением следующих шести семейств. Первые три семейства четырёхпараметрические, а последние три — трёхпараметрические.

Четырёхпараметрические семейства:

$$1. x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \quad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$$

$$2. J_2 = 0, \quad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}$$

$$3. x_1 = \varkappa c_1 + \left(J_1 - c_1 \frac{x_3}{J_3}\right) \frac{x_2}{J_2}, \quad x_2 = J_2 \frac{(J_1 x_3 - \varkappa c_1 J_3)(J_1 J_3 - c_1 x_3) + J_2^2 J_3 x_3}{(J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + J_2^2 J_3^2},$$

где  $J_2 J_3 \neq 0$ .

Трёхпараметрические семейства:

$$4. J_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad J_1 x_3 - J_3 x_1 = 0$$

$$5. J_3 = 0, \quad x_3 = 0, \\ ((x_1 - \varkappa c_1) J_1 + J_2 x_2)(J_2(x_1 - \varkappa c_1) - J_1 x_2) + c_1 x_2(x_1(x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0$$

$$6. J_1 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0$$

**Замечание 30.** Далее будет показано, что объединение семейств 3, 4, 5 и 6 образует единое подмножество, связанное тем, что образы точек из этого множества содержатся в объединении двух парабол (4.2.2) и (4.2.3) (если  $\varkappa \neq 0$  и  $b \neq 0$ ). Все эти четыре семейства можно объединить в одно четырёхмерное алгебраическое подмногообразие (добавив к точкам из этих семейств некоторые точки из семейства 2):

$$\begin{cases} (x_1 - \varkappa c_1) J_2 J_3 = (J_1 J_3 - c_1 x_3) x_2 \\ (x_2 J_3 - x_3 J_2) J_2 J_3 = (J_1 J_3 - c_1 x_3)(J_1 x_3 - J_3 x_1) \\ ((x_1 - \varkappa c_1) J_1 + J_2 x_2)(J_2(x_1 - \varkappa c_1) - J_1 x_2) + c_1 x_2(x_1(x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что, если  $J_2 J_3 \neq 0$ , то третье уравнение вытекает из первых двух (чтобы показать это, можно дважды воспользоваться тем, что

если у двух уравнений на две неизвестных есть ненулевое решение, то определитель матрицы должен быть равен нулю. В первом случае это уравнения на  $J_2J_3$  и  $J_1J_3 - c_1x_3$ . Во втором случае к уравнению на определитель нужно добавить первое уравнение и получить систему на  $J_3$  и  $x_3$ ). Поэтому это алгебраическое многообразие действительно является четырёхмерным, несмотря на то, что оно задаётся тремя уравнениями. Скорее всего, задать объединение этих четырёх семейств 3–6 всего двумя полиномиальными уравнениями нельзя, однако в этой работе нам не потребуется этот факт.

*Доказательство.* Точки, в которых гамильтоновы векторные поля  $v_H$  и  $v_K$  линейно зависимы — это в точности точки, в которых равны нулю все 15 миноров ранга 2 матрицы  $(v_H, v_K)$ , составленной из координат векторов  $v_H$  и  $v_K$ .

Заметим, что минор  $\Delta_{13}$ , соответствующий первой и третьей строке, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \{J_1, H\} & \{J_1, K\} \\ \{J_3, H\} & \{J_3, K\} \end{vmatrix} = 16c_1 (c_1x_2 - J_1J_2) (J_2J_3 (\varkappa c_1 - x_1) + (J_1J_3 - c_1x_3) x_2)$$

Поэтому либо  $x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}$ , либо  $J_2J_3 (\varkappa c_1 - x_1) + (J_1J_3 - c_1x_3) x_2 = 0$ .

Вначале разберём случай  $x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}$ . После подстановки  $x_2$  в матрицу из миноров сразу видно первое решение

$$x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \quad x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}. \quad (4.3.1)$$

Дальше задача решается простым перебором. Если  $x_3 = \frac{J_1J_3}{c_1}$ , то получаются следующие три семейства решений:

$$x_1 = \varkappa c_1, \quad x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}, \quad x_3 = \frac{J_1J_3}{c_1}, \quad (4.3.2)$$

$$J_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{J_1J_3}{c_1}, \quad (4.3.3)$$

$$J_1 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \quad (4.3.4)$$

Если же  $x_3 \neq \frac{J_1 J_3}{c_1}$ , то подходят следующие два семейства решений:

$$J_1 x_3 - J_3 x_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad (4.3.5)$$

$$J_1 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad (4.3.6)$$

Пусть теперь  $J_2 J_3 (\varkappa c_1 - x_1) + (J_1 J_3 - c_1 x_3) x_2 = 0$ ,  $x_2 \neq \frac{J_1 J_2}{c_1}$ . Возможны два варианта: либо  $J_2 J_3 = 0$ , либо  $x_1 = \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}$ .

Если  $J_2 = 0$ , то получается второе четырёхпараметрическое семейство точек ранга один:

$$J_2 = 0, \quad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}. \quad (4.3.7)$$

Если же  $J_2 \neq 0$ ,  $J_3 = 0$ , то получается следующее решение:

$$\begin{aligned} J_3 = 0, \quad x_3 = 0, \\ (x_1 - \varkappa c_1) x_2 (J_2^2 - J_1^2) + J_1 J_2 ((x_1 - \varkappa c_1)^2 - x_2^2) + c_1 x_2 (x_1 (x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Разберём теперь случай  $x_1 = \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}$ . Легко проверить, что в данном случае минор  $\Delta_{12}$  равен

$$-16c_1 \left( x_2 (J_2^2 J_3^2 + (J_1 J_3 - c_1 x_3)^2) - J_2 ((\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 x_3 - c_1 J_1 x_3^2 - \varkappa c_1 J_1 J_3^2) \right).$$

Коэффициент при  $x_2$  не равен нулю, так как случай  $J_2 J_3 = 0$  уже разобран. Выражая из этого уравнения  $x_2$ , мы получаем девятое решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}, \\ x_2 &= J_2 \frac{(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 x_3 - c_1 J_1 x_3^2 - \varkappa c_1 J_1 J_3^2}{(J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + J_2^2 J_3^2}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Таким образом, все случаи разобраны. Остаётся собрать все решения воедино. Очевидно, что семейство (4.3.4) является частным случаем решения (4.3.6), а решения (4.3.3) — частным случаем (4.3.7). Остаётся заметить, что семейство (4.3.2) содержится в семействах (4.3.7), (4.3.8) и (4.3.9). Утверждение 42 доказано.  $\square$

Докажем теперь лемму 19. Для этого покажем, что образы особых точек из утверждения 42 лежат на кривых из леммы 19.

**Утверждение 43.** Пусть  $\varkappa \neq 0$  и  $b \neq 0$ . Тогда образы семейств критических точек, перечисленных в утверждении 42, устроены следующим образом:

1. Образы особых точек из семейства 1 лежат на прямой  $k = 0$ .
2. Образы особых точек из семейства 2 лежат на кривой (4.2.1).
3. Образы особых точек из семейств 3, 4, 5 и 6 лежат на объединении двух парабол (4.2.2) и (4.2.3).

*Доказательство.* 1. Явно проверяется, что  $k = 0$ .

2. Уравнения (4.2.1) можно получить следующим образом. Возьмём в качестве параметра  $z$  функцию  $J_3^2 + c_1 x_1$ . Заметим, что  $J_3^2 + c_1 x_1 \neq 0$ , так как  $b \neq 0$ . Поэтому из формулы для  $b$  можно выразить  $J_1$ , а затем из формулы для  $a$  можно выразить  $x_2$ . Остаётся подставить полученные выражения для  $J_1$  и  $x_2$  в уравнения для гамильтониана (4.1.5) и первого интеграла (4.1.6), после чего заменить  $J_3^2 + c_1 x_1$  на  $z$ . В результате уравнения (4.1.5) и (4.1.6) примут вид (4.2.1), что и требовалось.
3. Можно явно проверить, что для любой точки семейств 3, 4 и 5 выполняется одно из двух уравнений (4.2.2) или (4.2.3).

В данном случае проще вначале убедиться в том, что  $k = \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2$ , где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности между  $v_K$  и  $v_H$  (т.е.  $v_K + \lambda v_H = 0$ ), а затем проверить, что

$$-\frac{\lambda}{2} = h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}$$

При проверке этого равенства удобно воспользоваться соотношением

$$\frac{a}{b} = \frac{x_3}{J_3} + \varkappa \frac{J_3}{x_3},$$

которое верно, если  $J_3 \neq 0$  и  $x_3 \neq 0$ . Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  указан в утверждении 48.

Утверждение 43 доказано. □



В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение про критические точки из серии 2 из утверждения 42.

**Утверждение 44.** Пусть  $\varkappa \neq 0$  и  $b \neq 0$ . Тогда при  $z^2 > \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2$  в прообразе точек кривой (4.2.1) либо нет критических точек, либо особые точки в прообразе образуют две критические окружности, и симметрия  $(J_3, x_3) \rightarrow (-J_3, -x_3)$  переводит эти окружности друг в друга.

*Доказательство.* Несложно проверить, что при фиксированном параметре  $z$  особые точки из серии 2 задаются следующими уравнениями

$$J_1 = \frac{bc_1}{z}, \quad J_2 = 0, \quad x_1 = \frac{z - J_3^2}{c_1}, \quad x_3 = \frac{b}{z} J_3,$$

где координаты  $J_3$  и  $x_2$  удовлетворяют уравнению вида

$$\left( \frac{J_3^2}{c_1} + d \right)^2 + x_2^2 = R^2 \quad (4.3.10)$$

для некоторых констант  $d$  и  $R$ , зависящих от  $\varkappa, a, b$  и  $z$ . Отсюда следует, что для доказательства утверждения остаётся показать, что  $J_3 \neq 0$  при  $z^2 > \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2$ . Это несложно проверить явно: при  $J_3 = 0$  уравнение (4.3.10) будет иметь вид

$$z^4 - ac_1^2 z^2 + \varkappa b^2 c_1^4 = 0,$$

которое имеет решения в точности при

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2 < z^2 < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2.$$

Утверждение 44 доказано. □

Докажем теперь лемму 22.

**Утверждение 45.** Пусть  $\varkappa \neq 0$  и  $b = 0$ . Тогда образы семейств критических точек, перечисленных в утверждении 42, устроены следующим образом:

1. Образы особых точек из семейства 1 лежат на прямой  $k = 0$ .

2. Образы особых точек из семейства 2 принадлежат объединению параболы (4.2.9) и касательной (4.2.10).
3. Образы особых точек из семейств 3, 4, 5 и 6 лежат на объединении парабол (4.2.11) и (4.2.12).

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством утверждения 43 за исключением следующего. Во-первых, при нахождении образа семейства 2 нужно также рассмотреть случай  $J_3^2 + c_1x_1 = 0$ . Несложно явно проверить, что в этом случае образ лежит на параболе (4.2.9). Во-вторых, нужно рассмотреть семейство 6 и показать, что его образ лежит на левой параболе (4.2.11).  $\square$

Докажем теперь лемму 21 про невырожденность точек ранга 1. Для этого мы воспользуемся следующим простым критерием невырожденности точек ранга 1 (см. [6]).

**Утверждение 46.** Пусть  $(M^4, \omega)$  — симплектическое многообразие и  $y_0 \in (M, \omega)$  — критическая точка ранга 1 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$  и интегралом  $K$ . Обозначим через  $F = \alpha H + \beta K$  нетривиальную линейную комбинацию, для которой точка  $y_0$  является критической точкой, а через  $A_F$  — линеаризацию соответствующего гамильтонова векторного поля  $v_F$  в этой точке  $y_0$ . Точка  $y_0$  является невырожденной тогда и только тогда, когда оператор  $A_F$  имеет ненулевое собственное значение.

В данном случае система задана на пуассоновом многообразии. Поэтому удобно воспользоваться следующим соображением.

**Утверждение 47.** Пусть в локальных координатах  $(p^1, \dots, p^k, q^1, \dots, q^k, z^1, \dots, z^m)$  в окрестности точки  $x_0$  скобка Пуассона имеет вид  $\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial p^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}$ . Пусть  $x_0$  — критическая точка для гамильтонова векторного поля  $v_F$  с гамильтонианом  $F$ . Тогда линеаризация  $A_F$  гамильтонова векторного

поля  $v_F$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial p^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial z^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dz^j \right) - \\ & \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial p^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial z^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dz^j \right) \end{aligned}$$

Проще говоря, матрица оператора  $A_F$  имеет следующий вид:

$$A_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial z} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если  $\hat{F}$  — ограничение функции  $F$  на симплектический лист, то спектр линеаризации поля  $v_F$  отличается от спектра линеаризации поля  $v_{\hat{F}}$  добавлением нулей в количестве равном коразмерности симплектического листа. Поэтому, так же, как и в симплектическом случае, для проверки невырожденности точки ранга 1 достаточно проверить, что спектр соответствующего оператора не состоит из одних нулей.

Это проверяется явно. Для удобства проверки, в следующем утверждении мы приведём для всех критических точек ранга 1 рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы (т.е. для всех точек из утверждения 42 кроме точек ранга 0 из утверждения 55) коэффициент пропорциональности  $\lambda$  между гамильтоновыми векторными полями, соответствующими гамильтониану (4.1.5) и интегралу (4.1.6), а также опишем спектр линеаризации соответствующего гамильтонова векторного поля  $v_{K+\lambda H}$ .

**Утверждение 48.** *Для каждой критической точки ранга 1 из утверждения 42 укажем такое  $\lambda$ , что  $v_K + \lambda v_H = 0$  в этой точке, и такое  $\mu$ , что спектр оператора  $A_{K+\lambda H}$  состоит из четырёх нулей и  $\pm\mu$ .*

*Четырёхпараметрические семейства:*

1. Семейство 1. Коэффициент пропорциональности  $\lambda = 0$ , т.к.  $\text{sgrad } K =$

$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Нетривиальное собственное значение:

$$\mu = 8i |(\kappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 - 2c_1 J_1 x_3|.$$

2. Семейство 2. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 - J_1^2),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = 64c_1 (J_1^2 - J_3^2 - c_1 x_1) \left( (J_1^2 - c_1 x_1) (x_1 - \kappa c_1) - c_1 x_2^2 \right).$$

3. Семейство 3. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2 \left( \kappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2 - 2c_1 J_1 \frac{x_3}{J_3} \right),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32\lambda \left( (J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + \left( (J_1^2 + J_2^2) - c_1 \frac{J_1 x_3}{J_3} \right)^2 + J_2^2 (\kappa c_1^2 + J_3^2) \right).$$

Трехпараметрические семейства:

4. Семейство 4. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 + J_1^2 - 2c_1 x_1),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32\lambda \left( (J_1^2 - c_1 x_1)^2 + (J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 \right)$$

5. Семейство 5. В этом пункте мы будем считать, что  $x_2 \neq 0$ , потому что все точки из семейства 5, удовлетворяющие условию  $x_2 = 0$ , либо имеют ранг 0, либо принадлежат семейству 6. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2) + \frac{4}{x_2} J_1 J_2 (x_1 - \kappa c_1),$$

Если при этом  $x_1 \neq \frac{\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$ , то квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = \frac{16\lambda^2 J_2 \gamma}{x_2 (\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1)},$$

где

$$\gamma = (c_1 J_1 x_2^2 - J_1 (x_1 - \varkappa c_1) (J_1^2 - J_2^2 - c_1 x_1) - J_2 x_2 (\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1)).$$

Если  $x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$ , то либо  $x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$ , либо  $x_2 = \pm \frac{\varkappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2}{2c_1}$ . В первом случае  $\mu = 0$ , во втором

$$\mu^2 = -32 J_2^2 \lambda (\varkappa c_1^2 + (J_1 \mp J_2)^2)$$

6. Семейство 6. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2 (\varkappa c_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32 \lambda c_1^2 (\varkappa J_2^2 + x_1^2 + x_3^2).$$

**Замечание 31.** Для семейства 2, если обозначить  $z = J_3^2 + c_1 x_1$ , то

$$\mu^2 = 16 \frac{c_1^2}{\varkappa z} \left( \frac{b^2 c_1^2}{z^2} - z \right) ((2\varkappa z - a)^2 - (a^2 - 4\varkappa b^2)).$$

Поэтому для этой серии нулевой спектр могут иметь только точки в прообразе точки возврата кривой (4.2.1) и точек касания этой кривой с параболой (4.2.2) и (4.2.3).

**Замечание 32.** Для семейства 5 ненулевые координаты векторного поля  $v_H$  имеют вид

$$\{J_3, H\} = 2c_1 x_2, \quad \{x_3, H\} = 2J_1 x_2 - 2J_2 x_1 + 2\varkappa c_1 J_2,$$

а ненулевые координаты векторного поля  $v_K$  равны

$$\begin{aligned} \{J_3, K\} &= -8c_1 J_1 J_2 x_1 + 4c_1 J_1^2 x_2 - 4c_1 J_2^2 x_2 + 8\varkappa c_1^2 J_1 J_2 - 4\varkappa c_1^3 x_2 \\ \{x_3, K\} &= 4J_1^3 x_2 + 4J_1 J_2^2 x_2 - 4J_2^3 x_1 - 4J_1^2 J_2 x_1 - 8c_1 J_2 x_1^2 - 8c_1 J_2 x_2^2 + \\ & 4\varkappa c_1 J_2^3 + 4\varkappa c_1 J_1^2 J_2 + 12\varkappa c_1^2 J_2 x_1 - 4\varkappa c_1^2 J_1 x_2 - 4\varkappa^2 c_1^3 J_2 \end{aligned}$$

Это позволяет найти коэффициент пропорциональности в этом случае.

**Замечание 33.** Для семейства 5, если  $\gamma = 0$ , то, с учётом исходных уравнений, задающих семейство 5, мы получаем, что

$$J_2(2c_1x_1 - \varkappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2)(J_2x_2(2c_1x_1 + J_2^2 - \varkappa c_1^2) + J_1(J_2^2 + c_1x_1)(x_1 - \varkappa c_1)) = 0.$$

Если  $J_2 \neq 0$ , то мы можем однозначно выразить  $x_2$  и получить, что

$$\frac{c_1^3 J_1^3 (x_1 - \varkappa c_1)^2 (\varkappa J_2^2 + x_1^2)}{J_2^2 (2c_1x_1 - \varkappa c_1^2 + J_2^2)^2} = 0.$$

После этого проверка невырожденности делается простым перебором.

*Доказательство леммы 21.* Для доказательства невырожденности точек ранга 1 мы воспользуемся утверждением 46. Коэффициенты пропорциональности и спектры соответствующих операторов указаны в утверждении 48. После этого проверка невырожденности осуществляется простым перебором. Лемма 21 доказана.  $\square$

### 4.3.2 Типы бифуркационных диаграмм. (Случай $b \neq 0$ )

В этом разделе мы покажем, что кривые из леммы 19 расположены друг относительно друга так, как это показано на рисунках 4.3–4.21 (для соответствующих значений параметров  $a$  и  $b$ ). Тем самым мы фактически опишем все возможные бифуркационные диаграммы отображения момента. В первую очередь нас будут интересовать особые точки бифуркационных диаграмм, т.е. точки пересечения, точки касания и точки возврата этих кривых.

Прежде всего, очевидно, что для любых значений параметров  $a$  и  $b$  параболы (4.2.2) и (4.2.3) пересекаются с прямой  $k = 0$  в точках

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}, \quad \text{и} \quad h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}$$

соответственно, и пересекаются друг с другом в точке

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa}, \quad k = \frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}. \quad (4.3.11)$$

Таким образом, остаётся описать, как расположена относительно прямой  $k = 0$  и парабол (4.2.2), (4.2.3) кривая (4.2.1).

В этом разделе мы вначале опишем эту кривую (4.2.1) (см. утверждение 49), затем определим количество её точек пересечения с описанными выше параболой (см. утверждение 50) и прямой  $k = 0$  (см. утверждение 51). После этого оставшаяся часть раздела будет посвящена исследованию взаимного расположения найденных “особых” точек. Итоговый результат может быть сформулирован следующим образом.

**Лемма 24.** *Функции  $f_k, f_r, f_m, f_t$  и  $f_l$ , заданные формулами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) и (4.2.8) соответственно, делят область  $\{b > 0, a > 2\sqrt{\varkappa}b\}$  на 9 областей. В каждой из этих областей точки пересечения, точки касания и точки возврата прямой  $k = 0$ , парабол (4.2.2), (4.2.3) и кривой (4.2.1) расположены на этих четырёх кривых в таком порядке, как это указано на рис. 4.3–4.21.*

Начнём с описания кривой (4.2.1).

**Утверждение 49.** *Пусть  $\varkappa \neq 0$ . Тогда для любых  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ , кривая (4.2.1) содержит одну точку возврата*

$$z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2} \quad (4.3.12)$$

*и две точки экстремума*

$$z_{+ext} = \frac{|b|}{\sqrt{\varkappa}} \quad \text{и} \quad z_{-ext} = -\frac{|b|}{\sqrt{\varkappa}}. \quad (4.3.13)$$

*Точка  $z_{-ext}$  является локальным минимумом для любых значений  $a$  и  $b$ . Если  $b > \varkappa^{3/2} c_1^2$ , то точка  $z_{+ext}$  является локальным максимумом. Если же  $b < \varkappa^{3/2} c_1^2$ , то точка  $z_{+ext}$  является локальным минимумом. (Если  $b = \varkappa^{3/2} c_1^2$ , то точка  $z_{+ext}$  совпадает с точкой возврата  $z_{cusp}$ .) Иными словами, функция  $k(z)$  монотонно возрастает между точками  $z_{+ext}$  и  $z_{cusp}$ , и монотонно убывает на остальных участках луча  $z > 0$ .*

*График соответствующей функции является выпуклым вверх при  $z < z_{cusp}$  и выпуклым вниз при  $z > z_{cusp}$ .*

*При  $z \rightarrow \pm \infty$  кривая (4.2.1) асимптотически стремится к прямой*

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4a c_1^2 \varkappa^2 c_1^4).$$

Кроме того, при  $z \rightarrow \pm 0$  обе функции  $h(z)$  и  $k(z)$  одновременно стремятся к  $+\infty$ , причём

$$\frac{k(z)}{h^2(z)} \xrightarrow{z \rightarrow \pm 0} 1.$$

Опишем теперь точки пересечения кривой (4.2.1) с остальными кривыми: с параболой (4.2.2) и (4.2.3) и прямой  $k = 0$ . Начнём с точек пересечения с параболой. Доказательство следующего утверждения проводится прямым вычислением.

**Утверждение 50.** Пусть  $\varkappa \neq 0$  и  $b \neq 0$ . Тогда у кривой (4.2.1) и левой параболы (4.2.2) две точки пересечения и одна точка касания. Соответствующие значения параметра  $z_{+l}$  и  $z_{-l}$  точек пересечения задаются соотношением

$$z^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2. \quad (4.3.14)$$

Точка касания соответствует значению параметра

$$z_{lt} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2\varkappa}. \quad (4.3.15)$$

Аналогично, у кривой (4.2.1) и правой параболы (4.2.3) две точки пересечения, при этом соответствующие значения параметра  $z_{+r}$  и  $z_{-r}$  задаются соотношением

$$z^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2, \quad (4.3.16)$$

и одна точка касания, соответствующая значению параметра

$$z_{rt} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2\varkappa} \quad (4.3.17)$$

**Замечание 34.** В утверждении 50 (и далее) мы считаем, что  $z_{+l} > 0$  и  $z_{+r} > 0$ . Как следствие,  $z_{-l} < 0$  и  $z_{-r} < 0$ .

Найдём теперь количество точек пересечения прямой  $k = 0$  и кривой (4.2.1).

**Утверждение 51.** Пусть  $\varkappa > 0$ . Тогда количество точек пересечения прямой  $k = 0$  и кривой (4.2.1) следующим образом зависит от параметров  $a$  и



б. Рассмотрим функцию

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\kappa b^{2/3}c_1^{4/3} - \kappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}}.$$

1. Пусть  $b > \kappa^{3/2}c_1^2$ . Тогда, если  $a > f_k(b)$ , то у прямой  $k = 0$  и кривой (4.2.1) ровно 3 точки пересечения. Если же  $a < f_k(b)$ , то будет 1 точка пересечения, а если  $a = f_k(b)$ , то точек пересечения ровно 2.
2. Пусть  $0 < b < \kappa^{3/2}c_1^2$ . Тогда, если  $a < f_k(b)$ , то у прямой  $k = 0$  и кривой (4.2.1) ровно 3 точки пересечения. Если же  $a > f_k(b)$ , то будет 1 точка пересечения, а если  $a = f_k(b)$ , то точек пересечения ровно 2.
3. Если  $b = \kappa^{3/2}c_1^2$ , то при любом значении параметра  $a$  у прямой  $k = 0$  и кривой (4.2.1) ровно 1 точка пересечения.

	$0 < b^2 < \kappa^3 c_1^4$	$b^2 = \kappa^3 c_1^4$	$b^2 > \kappa^3 c_1^4$
$a > f_k(b)$	1	1	3
$a = f_k(b)$	2	1	2
$a < f_k(b)$	3	1	1

Таблица 4.2: Количество пересечений кривой (4.2.1) с прямой  $k = 0$ .

Результаты утверждения 51 собраны воедино в таблице 4.2

*Доказательство.* Ясно, что при  $z < 0$  пересечений нет, так как

$$k(z) = 4ac_1^2 - 4\kappa c_1^2 z - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \left( \frac{b^2 c_1^2}{z^2} - \kappa c_1^2 \right)^2 > 0.$$

Из утверждения 49 следует, что при  $z > 0$  у функции  $k(z)$  будет два локальных экстремума:

$$z_{+\text{ext}} = \frac{b}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{и} \quad z_{\text{cusp}} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}.$$

Остаётся посмотреть, как расположены эти экстремумы, и сравнить значения функции  $k(z)$  в них с нулём. Утверждение 51 доказано.  $\square$

Таким образом, на кривой (4.2.1) были найдены точки  $z_{\text{cusp}}, z_{\pm\text{ext}}, z_{\pm l}, z_{\pm r}, z_{lt}$  и  $z_{rt}$ , заданные формулами (4.3.12), (4.3.13), (4.3.14), (4.3.15), (4.3.16) и (4.3.17) соответственно. Установим теперь, в каком порядке следуют эти точки на оси  $z$ . Очевидно, что

$$z_{-l} < z_{-\text{ext}} < z_{-r} < 0,$$

и что значения параметра  $z$  для остальных описанных точек больше нуля. Введём следующие функции

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3} c_1^{2/3}$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2$$

Следующее утверждение доказывается прямым вычислением.

**Утверждение 52.** Пусть  $\varkappa > 0$ . Тогда, в зависимости от значений параметров  $a$  и  $b$  точки  $z_{\text{cusp}}, z_{+\text{ext}}, z_{+l}, z_{+r}, z_{lt}$  и  $z_{rt}$  (описанные в утверждениях 49 и 50) располагаются на луче  $z > 0$  так, как это описано в таблице 4.3.

	$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$	$b^2 > \varkappa^3 c_1^4$
$a > f_m(b)$	$z_{rt} > z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{+\text{ext}} > z_{+r} > z_{lt}$	$z_{rt} > z_{+l} > z_{+\text{ext}} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} > z_{lt}$
$a = f_m(b)$	$z_{rt} = z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{+\text{ext}} = z_{+r} > z_{lt}$	$z_{rt} > z_{+l} = z_{+\text{ext}} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} = z_{lt}$
$f_r(b) < a < f_m(b)$	$z_{+l} > z_{rt} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{lt} > z_{+r}$
$a = f_r(b)$	$z_{+l} > z_{rt} = z_{\text{cusp}} = z_{+r} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{+l} = z_{\text{cusp}} = z_{lt} > z_{+r}$
$a < f_r(b)$	$z_{+l} > z_{+r} > z_{\text{cusp}} > z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{lt} > z_{\text{cusp}} > z_{+l} > z_{+r}$

Таблица 4.3: Взаиморасположение точек кривой (4.2.1).

Опишем теперь, когда три кривые пересекаются в одной точке.

**Утверждение 53.** Пусть  $\varkappa > 0$ ,  $b \neq 0$  и  $a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$ . Тогда прямая  $k = 0$ , кривая (4.2.1) и правая парабола (4.2.3) не могут пересекаться в одной точке. Прямая  $k = 0$ , кривая (4.2.1) и левая парабола (4.2.2) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$a = \left( \frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right)^2 + \varkappa t^2, \quad b = t \left( \frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right) \quad (4.3.18)$$

для некоторого  $t \in \mathbb{R}$ .

Заметим, что в формуле (4.3.18) параметр  $a$  однозначно выражается через  $b$ , поэтому формула (4.3.18) задаёт функцию, которую мы обозначили через  $a = f_t(b)$  (см. формулу (4.2.7)).

*Доказательство утверждения 53.* Несложно явно проверить, что в условиях утверждения точки ранга 1, которые лежат в семействах 1, 2, а также в одном из семейств 3, 4, 5 и 6 — это точки

$$x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2}{2c_1}, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Для этих точек выполнено равенство (4.3.18), при этом  $t = J_1$ . Поэтому, если выполнено равенство (4.3.18), то кривые пересекаются в одной точке.

Докажем теперь, что если три кривые пересекаются в одной точке, то выполнено равенство (4.3.18). Несложно проверить, что единственная точка кривой (4.2.1), которая может быть точкой тройного пересечения — это точка пересечения с левой параболой  $z_{+l}$  (это также легко следует из геометрических соображений). Так как по предположению кривые пересекаются в одной точке, то выполнено равенство

$$\varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} = \frac{b^2 c_1^2}{z_{+l}^2} + 2z_{+l}$$

Подставляя равенство (4.3.14), получаем

$$(z - \varkappa c_1^2)^2 = \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} c_1^2. \quad (4.3.19)$$

Делая замену

$$z = \frac{t^2 + \varkappa c_1^2}{2},$$

где  $\operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(b)$ , получаем

$$\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} = \frac{(t^2 - \varkappa c_1^2)^2}{4c_1^2}. \quad (4.3.20)$$

Подставляя выражения (4.3.19) и (4.3.20) в формулу (4.3.14), получаем искомого выражение для  $a$  из формулы (4.3.18). Отсюда немедленно вытекает формула (4.3.18) для  $b$ . Утверждение 53 доказано.  $\square$

Из утверждений 49, 50, 51, 52 и 53 следует, что взаимное расположение кривых из леммы 19 качественно отличаются в зависимости от того, как расположены значения параметров  $a$  и  $b$  относительно функций  $f_k, f_r, f_m$ , и  $f_t$ , заданных формулами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) и (4.2.7) соответственно.

Так как при  $\varkappa > 0$  значения параметров  $a$  и  $b$  должны удовлетворять неравенству  $a^2 - 4\varkappa b^2 \geq 0$ , мы также рассмотрим функцию

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b|.$$

Опишем теперь, как расположены графики функций  $f_k, f_r, f_m, f_t$  и  $f_l$ , относительно друг друга.

**Утверждение 54.** Пусть  $\varkappa > 0$ . Обозначим через  $\alpha_0$  единственный корень уравнения  $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ . Графики функций  $f_k, f_r, f_m, f_t$  и  $f_l$ , заданные формулами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) и (4.2.8) соответственно, симметричны относительно оси  $b = 0$ , а при  $b > 0$  устроены так, как это показано на рис. 4.1 и 4.2. Иными словами, при  $b > 0$  все графики пересекаются в точке

$$M = (\varkappa^{3/2}c_1^2, 2\varkappa^2c_1^2),$$

а графики функций  $f_r$  и  $f_t$  пересекаются в точке

$$N = (\alpha_0^3\varkappa^{3/2}c_1^2, f_r(\alpha_0^3\varkappa^{3/2}c_1^2)).$$

Далее, если  $0 < b^2 < \alpha_0^6\varkappa^3c_1^4$ , то

$$f_k < f_l < f_r < f_t < f_m.$$

Если  $\alpha_0^6\varkappa^3c_1^4 < b^2 < \varkappa^3c_1^4$ , то

$$f_k < f_l < f_t < f_r < f_m.$$

Если же  $b^2 > \varkappa^3c_1^4$ , то

$$f_l < f_t < f_k < f_r < f_m.$$

*Доказательство утверждения 54.* Доказательство проводится прямым вычислением. Для примера сравним функции  $f_t$  и  $f_r$ . Докажем, что  $f_t > f_r$  при

$0 < b^2 < \alpha_0^6 \varkappa^3 c_1^4$  и  $f_t < f_r$  при  $\alpha_0^6 \varkappa^3 c_1^4 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$  и при  $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$ . Для простоты будем считать  $b \geq 0$ .

Достаточно найти точки пересечения функций и затем сравнить функции на каждом из участков. Покажем только, как найти точки пересечения кривых  $f_r$  и  $f_t$ . В этих точках выполнено равенство

$$a \pm 2\sqrt{\varkappa}b = \left( \frac{b^{2/3}}{c_1^{1/3}} \pm \sqrt{\varkappa}b^{1/3}c_1^{1/3} \right)^2$$

Подставляя выражения для  $a$  и  $b$  из формулы (4.2.7) для  $f_t$  получаем

$$\frac{(t \pm \sqrt{\varkappa}c_1)^2}{2c_1} = \frac{b^{1/3}}{c_1^{1/3}} |b^{1/3} \pm \sqrt{\varkappa}c_1^{2/3}|$$

Находя из этого уравнения  $t$  и подставляя его в формулу (4.2.7) для  $b$ , мы получаем искомые решения  $b^2 = \varkappa^3 c_1^4$  и  $b^2 = \alpha_0^6 \varkappa^3 c_1^4$ .  $\square$

Теперь мы докажем лемму 24.

*Доказательство леммы 24*. Лемма 24 легко следует из доказанных ранее утверждений 49, 50, 51, 52, 53 и геометрических соображений. Для примера мы разберём случай  $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ ,  $f_t(b) < a < f_l(b)$ .

В этом случае, у кривой (4.2.1) три точки пересечения с прямой  $k = 0$ . Также нам известно, что параметр точки касания с правой параболой  $z_{rt}$  больше параметров остальных точек пересечения и касания кривой (4.2.1) с параболой и больше параметра точки возврата  $z_{\text{cusp}}$ . Поэтому из того, что при  $z > z_{\text{cusp}}$  кривая (4.2.1) выпукла вниз, следует, что эта кривая должна касаться парабол и дважды пересекать прямую  $k = 0$  в “криволинейном треугольнике”, образованном параболой и прямой  $k = 0$ . Таким образом, нам остаётся показать, что третья точка пересечения прямой  $k = 0$  расположена слева от вершины левой параболы. Для этого достаточно заметить, что третья точка пересечения имеет параметр  $0 < z < z_{\text{cusp}}$  (это следует из утверждения 49), а также, что точка пересечения с левой параболой расположена слева от вершины. Последнее утверждение следует из выполненного в данном случае неравенства

$$\varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} > \frac{b^2 c_1^2}{z_{+l}^2} + 2z_{+l},$$

которое доказывається так же, как и в утверждении 53.

□

### 4.3.3 Критические точки ранга 0

В этом разделе мы докажем леммы 20 и 23 о типах критических точек ранга 0. Прежде всего опишем все критические точки отображения момента ранга 0, а затем найдём их типы и образ при отображении момента. Напомним, что на неособой орбите (т.е. на орбитах  $M_{a,b}$ , где  $a^2 - 4\kappa b^2 > 0$ ) неособые точки ранга 0 — это в точности точки, в которых равны нулю оба гамильтоновых векторных поля  $v_H$  и  $v_K$ . Подчеркнём, что следующее утверждение верно для любого значения параметра  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Утверждение 55.** *Множество всех точек, в которых равны нулю гамильтоновы векторные поля  $v_H$  и  $v_K$  с гамильтонианами (4.1.5) и (4.1.6) соответственно, является объединением следующих (двухпараметрических) семейств в пространстве  $\mathbb{R}^6(J, x)$ :*

1.  $(J_1, J_2, 0, \kappa c_1, 0, 0)$ ,
2.  $(J_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$ ,
3.  $(J_1, 0, J_3, \frac{\kappa c_1^2 + J_1^2}{2c_1}, 0, \frac{J_1 J_3}{c_1})$ .

*Доказательство.* Координаты векторного поля  $v_H$ :

$$\begin{aligned} \{J_1, H\} &= -2J_2J_3, & \{J_2, H\} &= 2J_1J_3 - 2c_1x_3 \\ \{J_3, H\} &= 2c_1x_2, & \{x_1, H\} &= 2J_2x_3 - 4J_3x_2 \\ \{x_2, H\} &= 4J_3x_1 - 2J_1x_3 - 2\kappa c_1J_3, & \{x_3, H\} &= 2J_1x_2 - 2J_2x_1 + 2\kappa c_1J_2 \end{aligned}$$

Видно, что  $x_2 = 0$  и что либо  $J_2 = 0$ , либо  $J_3 = 0, x_3 = 0$ . Далее задача решается простым перебором. □

*Доказательство лемм 20 и 23.* То, что образы точек ранга 0 лежат на указанных кривых проверяется прямым вычислением. Для серий 1 и 2 можно

легко явно найти все точки на каждой орбите  $M_{a,b}$ . Например, для серии 1 для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} J_1^2 + J_2^2 + 2\kappa c_1^2 &= a \\ \kappa c_1 J_1 &= b \end{aligned}$$

Докажем теперь утверждение про количество точек из серии 3 на орбите  $M_{a,b}$ . Случай  $b = 0$  тривиален, поэтому мы будем считать  $b \neq 0$ . Несложно проверить, что множество этих точек (точнее соответствующие параметры  $J_1$  и  $J_3$ ) задаются следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} J_1^5 - 2\kappa c_1^2 J_1^3 - 4bc_1 J_1^2 + (4ac_1^2 + \kappa^2 c_1^4) J_1 - 4\kappa bc_1^3 &= 0 \\ J_3^2 &= \frac{2bc_1 - \kappa c_1^2 J_1 - J_1^3}{2J_1} \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Легко видно, что каждой точке в образе соответствуют ровно две точки в прообразе (у этих точек совпадают координаты  $J_1$ , а координаты  $J_3$  отличаются знаком). Чтобы найти точное количество решений вначале разобьём множество параметров  $(a, b)$  на области, на которых это количество постоянно, а затем решим задачу для каждой из областей. Немного упростим уравнения (4.3.21), для этого обозначим

$$\hat{b} = \frac{b}{\kappa^{3/2} c_1^2}, \quad \hat{a} = \frac{a}{\kappa^2 c_1^2}, \quad s = \frac{J_1}{\kappa^{1/2} c_1}.$$

Тогда количество точек в образе равно количеству решений уравнения

$$s^5 - 2\hat{b}s^3 - 8\hat{b}s^2 + (4\hat{a} + 1)s - 4\hat{b} = 0 \quad (4.3.22)$$

на промежутке

$$0 \leq s + s^3 \leq 2\hat{b}. \quad (4.3.23)$$

Отметим, что функция  $s + s^3$  монотонно возрастает, поэтому неравенства (4.3.23) задают отрезок. Заметим, что, если мы варьируем параметры  $a$  и  $b$ , то количество решений может измениться только в следующих случаях:

1. У уравнения (4.3.22) есть кратные корни.

2. Одна из крайних точек отрезка (4.3.23) является решением уравнения (4.3.22). (При этом легко видеть, что точка 0 не может быть корнем уравнения (4.3.22), поэтому нужно проверить только точку  $s + s^3 = 2\hat{b}$ ).

Можно проверить, что точка  $s + s^3 = 2\hat{b}$  является решением уравнения (4.3.22) тогда и только тогда, когда  $a = f_t(b)$  (напомним, что функция  $f_t(b)$  задаётся формулой (4.2.7), и что  $a = f_t(b)$  тогда и только тогда, когда три кривые бифуркационной диаграммы пересекаются в одной точке, см. утверждение 53). Так же можно проверить, что в достаточно малой окрестности любой точки кривой  $a = f_t(b)$  (кроме, может быть, тех точек, в которой уравнение (4.3.22) имеет кратные корни) у точек в области  $a > f_t(b)$  в образе точек на одну больше, чем у точек в области  $a < f_t(b)$ .

Далее, несложно проверить, что уравнение (4.3.22) имеет кратные корни в следующих случаях:

$$\begin{cases} a = \pm 2\sqrt{\varkappa}b \\ a = f_k(b) \end{cases},$$

где  $f_k(b)$  задаётся формулой (4.2.4).

В случае  $a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$  единственный кратный корень — это  $s = 1$  кратности 2. Отсюда вытекает, что при  $b^2 < \varkappa^3 c_1^4$  и  $2\sqrt{\varkappa}|b| < a < f_t(b)$  в образе нет точек из серии 3, а при  $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$  и  $2\sqrt{\varkappa}|b| < a < f_t(b)$  в образе ровно две точки из серии 3. Так как при увеличении параметра  $a$  (при фиксированном  $b$ ) количество точек в образе увеличивается на 1 при переходе через кривую  $a = f_t(b)$ , то мы получаем, что в области  $a > f_t(b), a > f_k(b)$  в образе ровно одна точка, а в области  $f_k(b) > a > f_t(b)$  — три.

Таким образом, утверждение про количество точек на каждой орбите доказано. Остаётся доказать утверждение про их типы. Это несложно сделать, воспользовавшись следующим критерием (подробнее см. [6]).

**Утверждение 56.** Пусть  $(M^4, \omega)$  — симплектическое многообразие и  $x_0 \in (M, \omega)$  — критическая точка ранга 0 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$  и интегралом  $K$ . Тогда точка  $x_0$  является невырожденной тогда и только тогда, когда линейаризации  $A_H$  и  $A_K$  в точке  $x_0$  гамильтоновых векторных полей  $v_H$  и  $v_K$  обладают следующими



свойствами:

1. операторы  $A_H$  и  $A_K$  линейно независимы,
2. существует линейная комбинация  $\lambda A_H + \mu A_K$ , у которой все собственные значения различны и не равны 0.

При этом, если точка  $x_0$  невырождена, то она полностью определяется спектром любой линейной комбинации  $\lambda A_H + \mu A_K$  без нулевых собственных значений. Точнее, тип точки следующим образом зависит от типа спектра.

- Если спектр некоторой линейной комбинации  $\lambda A_H + \mu A_K$  имеет вид  $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , то точка  $x_0$  — критическая точка типа седло-седло.
- Если спектр имеет вид  $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , то точка  $x_0$  — критическая точка типа центр-центр.
- Если спектр имеет вид  $i\alpha, -i\alpha, \beta, -\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , то точка  $x_0$  — критическая точка типа центр-седло.
- Если спектр имеет вид  $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , то точка  $x_0$  — критическая точка типа фокус-фокус.

Вычислим спектр линеаризации гамильтонова векторного поля  $v_H$  с гамильтонианом (4.1.5), воспользовавшись утверждением 47.

**Утверждение 57.** Для всех трёх серий критических точек ранга 0 из утверждения 55 спектр линеаризации гамильтонова векторного поля  $v_H$  с гамильтонианом (4.1.5) содержит нулевое собственное значение с кратностью 2. Кроме того, этот спектр содержит следующие элементы:

1. Для серии 1 критических особых точек ранга 0 спектр также содержит значения  $\pm\sqrt{2}\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\kappa\beta^2}}$ , где

$$\alpha = \kappa c_1^2 - J_1^2 - J_2^2 = \left(2\kappa c_1^2 - \frac{a}{\kappa}\right)$$

$$\beta = c_1 J_2 = c_1^2 a - \kappa^2 c_1^4 - \frac{b^2}{\kappa}$$

2. Для серии 2 спектр также содержит значения

$$\pm 2\sqrt{c_1(x_1 - \varkappa c_1)} \quad \text{и} \quad \pm 2\sqrt{-J_1^2 + 2c_1x_1 - \varkappa c_1^2}$$

3. Для серии 3 спектр также содержит значения

$$\pm 4iJ_3 \quad \text{и} \quad \pm \sqrt{2}\sqrt{J_1^2 - 2J_3^2 - \varkappa c_1^2}$$

Заметим далее, что для доказательства невырожденности точки нам достаточно проверить, что все 4 указанных собственных значения для оператора  $A_H$  не равны 0, и что существует такое  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что спектр оператора  $A_F$ , где  $F = K + \lambda H$ , имеет ровно 2 ненулевых собственных значения. Действительно, ограничения операторов  $A_H$  и  $A_K$  будут линейно независимы, так как в противном случае спектр любой их линейной комбинации получался бы из спектра оператора  $A_H$  умножением на константу (это следует из утверждения 47). При этом можно не проверять, что все собственные значения оператора  $A_H$  различны, так как в рассматриваемом случае спектр некоторой линейной комбинации  $H + \mu F$  будет иметь 4 различных ненулевых значения.

Для серий 2 и 3 искомым коэффициент пропорциональности  $\lambda$  уже был указан нами в утверждении 48 (можно положить  $\lambda = 2(\varkappa c_1^2 - J_1^2)$  и  $\lambda = 0$  для серий 2 и 3 соответственно). Для серии 1 можно воспользоваться тем, что  $k = \frac{\lambda^2}{4}$  для критических точек в прообразе парабол (4.2.2) и (4.2.3) и формально положить  $\lambda = \sqrt{\frac{k}{2}}$ . Тогда для функции  $F = K + \sqrt{\frac{k}{2}}H$  спектр оператора  $A_F$  состоит из 4 нулей и

$$\pm 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\varkappa b^2 - a^2}{\varkappa^2} \left( \frac{a^2 - 2\varkappa c_1^2}{\varkappa} + \sqrt{\frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}} \right)}.$$

Теперь несложно проверить, что все указанные в леммах 20 и 23 точки действительно являются невырожденными. (Отметим, что вырождения точек происходят на границах областей плоскости  $\mathbb{R}^2(a, b)$  и связаны с тем, что в окрестности точки происходит перестройка бифуркационной диаграммы.)

Типы критических точек легко находятся при помощи утверждений 56 и 57. Леммы 20 и 23 доказаны.  $\square$

#### 4.3.4 Доказательство теорем 42, 43 и 44

Теоремы 42, 43 и 44 легко следуют из уже доказанных лемм 19, 20, 22, 23 и следующих простых геометрических соображений.

1. Во-первых, мы воспользуемся тем, что орбиты коприсоединённого представления  $M_{a,b}$  алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$  компактны. В частности, так как образ компактного множества компактен, это позволит нам при построении бифуркационных диаграмм отбросить все неограниченные области.
2. Во-вторых, мы воспользуемся некоторыми известными утверждениями об устройстве невырожденных особенностей. Необходимые нам утверждения описаны в теореме 8 (подробнее об устройстве невырожденных особенностей см. [6]).
3. В-третьих, так как мы рассматриваем двухпараметрическое семейство орбит  $M_{a,b}$ , мы воспользуемся тем, что некоторые инварианты системы непрерывно зависят от параметров  $a$  и  $b$  (например, при малом шевелении параметров не может измениться количество торов в прообразе регулярных точек из “одной и той же области”).

Также мы воспользуемся стабильностью перестроек  $A$ ,  $B$  и  $A^*$ .

В этом разделе мы не будем рассматривать классический случай Ковалевской ( $\varkappa = 0$ ), потому что он был разобран ранее в работе [31] и подробно описан в книге [6]. Также мы не будем подробно рассматривать случай  $b = 0$ : доказательство утверждений в этом случае аналогично доказательству в случае  $b \neq 0$ .

*Доказательство теорем 42 и 43.* Ранее было показано, что искомые бифуркационные диаграммы отображения момента содержатся в объединении кривых, описанных в лемме 19. Поэтому для доказательства теорем остаётся выкинуть из описанных кривых некоторые их части и определить перестройки для оставшихся дуг. Покажем, как это может быть сделано, используя полученную ранее информацию о типах критических точек ранга 0 (см. леммы 20 и 23).

Мы докажем теоремы 42 и 43 для значений параметров  $a$  и  $b$  из области  $I$ , т.е. для случая  $|b| > \varkappa^{3/2}c_1^2$ ,  $2\sqrt{\varkappa}b < a < f_t(b)$  (где функция  $f_t(b)$  задана формулой (4.2.7)). Остальные случаи разбираются аналогично.

Бифуркационная диаграмма отображения момента в этом случае должна иметь вид, указанный на рис. 4.3, 4.4, 4.5. Кроме того, для удобства изложения, на рисунке 4.31 изображен ещё один увеличенный фрагмент рис. 4.3 (чуть более крупный, чем фрагмент на рис. 4.4), на котором выброшенные кривые изображены пунктиром. На рис. 4.31 точками  $P$ ,  $Q$  и  $R$  обозначены соответственно левая точка пересечения кривой (4.2.1) и прямой  $k = 0$ , точка пересечения парабол (4.2.2) и (4.2.3), а также точка пересечения правой параболы (4.2.3) и прямой  $k = 0$ .

Прежде всего, отбросим все неограниченные области (т.к. орбиты  $\mathfrak{so}(4)$  компактны) и все области, лежащие ниже прямой  $k = 0$  (очевидно, что  $k \geq 0$ ). Заметим далее, что образу отображения момента не принадлежат “криволинейные треугольники”  $y_{12}y_{13}P$  и  $z_1z_2R$ . Действительно, точка  $z_1$  является самой правой точкой в образе орбит коприсоединенного представления, потому что все точки в прообразе самой правой точки на прямой  $k = 0$  должны быть точками типа центр-центр, а правее точки  $z_1$  нет образов критических точек ранга 0. Аналогично, если бы точка  $P$  принадлежала образу отображения момента, то она была бы самой левой и самой нижней точкой в некоторой своей окрестности. Поэтому в её прообразе должны были бы лежать точки ранга 0, что неверно.

Далее, зная типы всех точек ранга 0, мы можем легко определить перестройки, соответствующие всем дугам, которые содержат образ одной из этих особых точек ранга 0. Единственная неоднозначность в данном случае возникает для точки  $y_{10}$ . Эта точка является образом двух точек типа центр-центр, поэтому а priori возможны 3 варианта: в прообразе камеры слева от точки  $y_{10}$  лежит либо 4 тора, либо 2 тора, либо 0 торов. Покажем, что реализуется только первый случай. При увеличении параметра  $a$  — в случае  $f_t(b) < a < f_k(b)$  — возникает точка  $y_7$  типа седло-седло, поэтому в прообразе точек из соседней с ней камеры должно быть 4 тора. Из соображений непрерывности в рассматриваемом случае  $a < f_t(b)$  в камере слева от точки

$y_{10}$  тоже должно быть 4 тора.

Остаётся определить, принадлежат ли бифуркационной диаграмме “криволинейный треугольник”  $y_8 z_2 Q$  и дуга  $y_8 y_{13}$ , а также какие перестройки соответствуют их дугам. Кривая  $y_8 Q$  не принадлежит бифуркационной диаграмме, а кривая  $z_2 Q$  принадлежит, потому что в рассматриваемом случае в прообразе точки  $q$  нет особых точек ранга 0. Здесь мы используем следующее несложное утверждение.

**Утверждение 58.** Пусть  $(M^4, \omega)$  — компактное симплектическое многообразие,  $H, K$  — две коммутирующие (относительно скобки Пуассона) функции на  $M^4$ , независимые почти всюду. Пусть в окрестности точки  $x \in \mathbb{R}^2$  бифуркационная диаграмма устроена так же, как и для особых точек ранга 0 типа центр-центр (т.е. две дуги на границе образа отображения момента пересекаются трансверсально) или типа центр-седло (т.е. гладкую дугу на границе образа отображения момента трансверсально пересекает другая дуга). Тогда в прообразе точки  $x$  существует особая точка ранга 0.

*Доказательство.* Случай “типа центр-центр” очевиден. Разберём второй случай, когда дуга  $\gamma$  трансверсально пересекает дугу границы  $\delta$  в точке  $x$ . Рассмотрим последовательность точек  $x_n$  на кривой  $\gamma$ , сходящуюся к точке  $x$ . Для каждой точки  $x_n$  выберем произвольную особую точку  $y_n$  в прообразе. Так как орбиты компактны, из последовательности  $y_n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $z_n$ . Обозначим  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ . Тогда  $\mathcal{F}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(z_n) = x$ , где  $\mathcal{F} = (H, K)$  — отображение момента. Каждой точке  $z_n$  соответствует одномерное подпространство  $\mathbb{R}^2$  — образ дифференциала отображения момента  $\text{Im}(d\mathcal{F})$ . Очевидно, что это подпространство  $\text{Im}(d\mathcal{F})$  совпадает с касательным пространством к дуге  $\gamma$ . У последовательности подпространств  $\text{Im}(d\mathcal{F}|_{z_n})$ , очевидно, существует предел при  $n \rightarrow \infty$  — касательное пространства  $T_x \gamma$ . Тогда в точке  $z$  дифференциал отображения момента обращается в нуль сразу на двух линейно подпространствах: с одной стороны, это пространство  $T_x \gamma$ , а, с другой, — касательное пространство  $T_x \delta$ , потому что  $\delta$  — граница образа отображения момента. Дуги  $\delta$  и

$\gamma$  пересекаются трансверсально, поэтому эти два подпространства линейно независимы. Поэтому точка  $z$  является особой точкой ранга 0. Утверждение 58 доказано.  $\square$

Аналогичным образом можно показать, что в диаграмме не могут присутствовать отдельные куски какой-либо дуги — “свободный” конец такой дуги, не принадлежащий никакой другой дуге, обязан содержать в прообразе критическую точку ранга 0.

Остаётся показать, что дуги  $y_{13}y_8$  и  $y_8z_2$  принадлежат бифуркационной диаграмме, и что им соответствуют перестройки  $2B$  и  $2A^*$  соответственно. Начнём с дуги  $y_8z_2$ . Нам уже известно (см. утверждение 44), что в прообразе точек на этой дуге либо нет критических точек, либо лежат две критические окружности, при этом в последнем случае симметрия  $(J_3, x_3) \rightarrow (-J_3, -x_3)$  переводит эти окружности друг в друга. Для начала покажем, что, если в прообразе лежат две критические окружности, то каждая из них задаёт перестройку  $A^*$ . Поскольку окружностей две, и они задают перестройки, переводящие два тора в два, и система обладает симметрией, то, кроме перестройки  $2A^*$ , это может быть только перестройка  $C_2$ . Чтобы показать, что последний случай невозможен, рассмотрим изоэнергетические поверхности  $H = \text{const}$  при значениях энергии  $H$  близкой к  $h_0 = \frac{b^2 c_1^2}{z_{rt}^2} + 2z_{rt}$ , где  $z_{rt}$  задаётся формулой (4.3.17) (это значение энергии соответствует точке касания правой параболы (4.2.3) и параметрической кривой (4.2.1)). Так как при значениях  $H$  близких к  $h_0$  нет точек, в которых гамильтоново векторное поле  $v_H$  обращается в ноль, то тип изоэнергетической поверхности не меняется в окрестности значения  $h_0$ . Однако при увеличении параметра энергии  $H > h_0$  изоэнергетическая поверхность, очевидно, несвязна: её грубая молекула состоит из двух экземпляров  $A - A$ . Поэтому она несвязна и при меньшем значении  $H$ . Однако, если бы перестройка на кривой  $y_8z_2$  имела тип  $C_2$ , то изоэнергетическая поверхность была бы связна. Поэтому кривой  $y_8z_2$  может соответствовать только перестройка типа  $2A^*$ .

Покажем теперь, что эти перестройки на кривой  $y_8z_2$  действительно существуют. Для этого вначале заметим, что при достаточно больших значениях

параметра  $a$  (точнее, при  $a > f_m(b)$ ) эти перестройки существуют (и имеют тип  $2A^*$ ). Для этого достаточно показать, что круговая молекула точки  $y_3$  имеет вид, указанный в таблице 4.4. Это так, потому что в прообразе точек из области “слева” от точки  $y_3$  лежит один тор, а в прообразе точек из области “справа” — два. Это легко вытекает из анализа типа критических точек в случае  $f_r(b) < a < f_m(b)$  и следует в случае  $a > f_m(b)$  из соображений непрерывности. Отметим, что при  $a > f_m(b)$  на кривой  $y_3z_2$  перестройка имеет тип  $2A^*$ , потому что критическая точка ранга 0 в прообразе точки  $z_5$  имеет тип центр-седло, и поэтому перестройка на кривой  $y_3z_5$  должна быть ориентируемой.

Из соображений непрерывности, перестройки на кривой  $y_8z_2$  существуют и в случаях  $a < f_m(b)$ . Опишем последний переход поподробнее. С одной стороны, перестройки типа  $A^*$  являются устойчивыми, поэтому они должны выживать при малом шевелении параметров  $a$  и  $b$ . Поэтому множество точек  $a, b$  для которых перестройки на кривой  $y_8z_2$  существуют и имеют тип  $2A^*$  является открытым множеством. С другой стороны, множество точек, где гамильтоновы векторные поля  $v_H$  и  $v_K$  линейно зависимы, является замкнутым подмножеством  $\mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^7(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa)$ . Поэтому, так как орбиты  $so(4)$  компактны, образ всех критических точек с  $\varkappa > 0$  при отображении  $(H, K, a, b, \varkappa) : \mathbb{R}^7(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa) \rightarrow \mathbb{R}^5$  является замкнутым множеством. Поэтому множество точек  $a, b$  для которых перестройки на кривой  $y_8z_2$  существуют, является замкнутым подмножеством. Отсюда следует, что эти перестройки существуют и имеют тип  $2A^*$  при любом значении параметра  $a > 2\sqrt{\varkappa}b$  (и  $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ ).

Докажем наконец, что дуге  $y_8y_{13}$  соответствует перестройка типа  $2B$ . Дуга  $y_8y_{13}$  принадлежит бифуркационной диаграмме, потому что в области “снизу” от неё лежат 4 тора, а в области “сверху” — 2. Количество торов в областях также несложно найти, внимательно посмотрев на типы критических точек ранга 0. Например, в области “сверху” лежат 2 тора, потому что точка  $y_{12}$  — это образ одной точки типа центр-седло, а следовательно перестройка на кривой  $y_{12}z_3$  имеет тип  $B$  (т.е. один тор перестраивается в два).

Заметим далее, что дуге  $y_8y_{13}$  соответствуют две одинаковые перестройки. Более того, верно следующее утверждение.

**Утверждение 59.** *Прообраз достаточно малой окрестности особой точки  $y_8$  состоит из двух компонент связности, при этом симметрия  $\sigma_3 : (J_3, x_3) \rightarrow (-J_3, -x_3)$  переводит эти компоненты друг в друга.*

*Доказательство утверждения 59.* Прообраз достаточно маленького вертикального отрезка справа от точки  $y_8$  (т.е. при чуть больших значениях гамильтониана  $H$ ) несвязен. Это следует из уже доказанного факта о том, что перестройки на дуге  $y_8z_2$  имеют тип  $2A^*$ . В прообразе малой окрестности точки  $y_8$  нет особых точек, в которых гамильтоново векторное  $v_H$  обращалось бы в ноль (в прообразе малой окрестности этой точки все критические точки имеют ранг 1), поэтому при сдвиге маленького вертикального отрезка вдоль оси  $H$  в этой окрестности, топологический тип прообраза не меняется. Поэтому прообраз точки  $y_8$  состоит из двух компонент, и симметрия переводит их друг в друга. Отсюда следует утверждение 59.  $\square$

Таким образом, дуге  $y_8y_{13}$  соответствуют две одинаковые перестройки, которые переводят два тора в четыре. То, что это две перестройки типа  $B$  следует из соображений непрерывности, так же, как и ранее для перестройки  $2A^*$ : при  $a > f_t(b)$  дуге  $y_7y_8$  соответствует перестройка типа  $2B$  (круговая молекула точки типа седло-седло в прообразе точки  $y_7$  однозначно определяется тем, что в одной из соседних областей лежат 4 тора).

Таким образом, были найдены все необходимые перестройки. Теоремы 42 и 43 доказаны.  $\square$

*Доказательство теоремы 44.* Устройство круговых молекул для невырожденных особенностей ранга 0 хорошо известно и подробно описано в книге [6]. Остаётся доказать теорему 44 для образов вырожденных особых точек ранга 1. Так как количество торов во всех областях и перестройки известны, то почти во всех случаях круговые молекулы (без меток) для вырожденных особых точек определяются однозначно. Неоднозначность при построении



круговой молекулы для точек  $y_8$  и  $y_9$  несложно разрешить, воспользовавшись тем, что этим точкам должны соответствовать две одинаковые круговые молекулы (см. утверждение 59). Метки у вырожденных молекул находятся стандартными методами (“правила сложения меток”, соображения непрерывности), описанными, например, в [6] или [18].  $\square$

#### 4.4 Классический случай Ковалевской ( $\varkappa = 0$ )

В этом разделе мы покажем, что бифуркационные диаграммы для классического случая Ковалевской, заданного на алгебре Ли  $e(3)$  при помощи гамильтониана

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2x_1, \quad (4.4.1)$$

и интеграла

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 - 2x_2)^2, \quad (4.4.2)$$

получается в результате предельного перехода  $\varkappa \rightarrow 0$  из бифуркационных диаграмм интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и первым интегралом (4.1.6) (где  $c_1 = 1$ ) на алгебре Ли  $so(4)$ . При этом предельном переходе  $\varkappa \rightarrow 0$  сохраняются типы критических точек ранга 0, перестройки торов Лиувилля и круговые молекулы особых точек отображения момента.

Устройство бифуркационных диаграмм для классического случая Ковалевской было подробно описано М. П. Харламовым [31] (см. также [6]). Однако в этом разделе мы не просто сравним ответы, но и покажем, как, используя полученную информацию о случае Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ , построить бифуркационную диаграмму для классического случая Ковалевской и вычислить некоторые его инварианты, прибегнув при этом по возможности к наименьшим дополнительным вычислениям.

В этом разделе через  $\Sigma(a, b, \varkappa)$  мы будем обозначать бифуркационную диаграмму для орбиты  $M_{a,b}$  алгебры Ли, для которой значение параметра пучка равно  $\varkappa$ .

**Лемма 25.** Рассмотрим произвольные  $a, b \in \mathbb{R}$ , где  $a > 0$ . Тогда точка  $x$  принадлежит бифуркационной диаграмме  $\Sigma(a, b, 0)$  тогда и только тогда, когда существует последовательность точек  $x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, \varkappa_n) = (a, b, 0)$ .

*Доказательство.* В одну сторону, из утверждения 42 следует, что у любой критической точки  $z$  на алгебре Ли  $e(3)$  (т.е. для точки со значением параметра  $\varkappa = 0$ ) существует сходящаяся к ней последовательность критических точек  $z_n$  на алгебре Ли  $so(4)$  (т.е. со значением параметра  $\varkappa > 0$ ). Поэтому образ точки  $z$  является пределом образов точек  $z_n$ .

В другую сторону, доказательство от противного. Пусть точка  $x \in \mathbb{R}^2$  — регулярная, т.е.  $x \notin \Sigma(a, b, 0)$ , но существует последовательность  $x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$  такая, что  $x_n \rightarrow x$  и  $(a_n, b_n, \varkappa_n) \rightarrow (a, b, 0)$  при  $\varkappa \rightarrow 0$ . Для того, чтобы прийти к противоречию, выберем у каждой точки  $x_n$  точку  $z_n$  в прообразе и докажем, что у последовательности  $z_n$  существует сходящаяся подпоследовательность. Для этого покажем, что последовательность  $z_n$  содержится в некотором компактном множестве  $A \subset \mathbb{R}^7(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa)$ .

Рассмотрим два небольших замкнутых диска  $\overline{D}_1$  и  $\overline{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$ , содержащие точки  $x$  и  $(a, b)$  соответственно, а также небольшой отрезок  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ . Тогда множество

$$A = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa) \mid (H, K, g_1, g_2, \varkappa)(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa) \in \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \times [0, T]\}$$

компактно. Действительно,  $A \subset \mathbb{R}^7$  — замкнутое множество, так как  $\overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \times [0, T]$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^5$ , и отображение  $(H, K, g_1, g_2, \varkappa) : \mathbb{R}^7(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa) \rightarrow \mathbb{R}^5$  непрерывно. Остаётся показать, что множество  $A$  ограничено. Для этого заметим, что множество чисел  $(x_1, x_2, x_3)$  ограничено, так как интеграл  $g_1 = \varkappa \mathbf{J}^2 + \mathbf{x}^2$  ограничен сверху и снизу некоторыми константами. Остаётся заметить, что множество чисел  $(J_1, J_2, J_3)$  тоже ограничено, так как

$$J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 = H - 2c_1 x_1,$$

и правая часть ограничена, так как  $(H, K) \in \overline{D}_1$  для всех точек из  $A$ . Лемма 25 доказана.  $\square$

**Замечание 35.** Во-первых, в данном случае утверждение леммы 25 можно усилить: вместо произвольной последовательности точек  $x_n$  можно рассматривать только последовательности с фиксированными значениями параметров  $(a, b)$ . Иными словами, для последовательности  $x_n$  из леммы 25 можно считать, что  $a_n = a$  и  $b_n = b$ . В общем случае, для произвольного семейства интегрируемых гамильтоновых систем, подобный переход требует отдельного доказательства — нужно строго показать, что для любой критической точки  $z \in M_{a,b,0}$  существует сходящаяся к ней последовательность критических точек  $z \in M_{a,b,\varkappa_n}$ .

Во-вторых, при доказательстве достаточности наличия сходящейся подпоследовательности мы существенно воспользовались видом данной интегрируемой гамильтоновой системы. Если бы мы рассматривали семейство интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на компактных многообразиях, то доказательство достаточности можно было бы немного упростить: прообраз замкнутой окрестности множества параметров  $\overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \times [0, T]$  был бы компактом, как замкнутое подмножество компактного множества.

В-третьих, также для построения бифуркационной диаграммы можно воспользоваться следующим соображением — число точек в прообразе регулярной точки не меняется при малом шевелении параметров. Зная это, можно легко найти количество торов, соответствующее каждой области при  $\varkappa = 0$ . Области с разным количеством торов должны разделяться дугой бифуркационной диаграммы.

Несложно получить точные уравнения для кривых, которые содержат бифуркационную диаграмму отображения момента при  $\varkappa = 0$ . Для этого достаточно перейти к пределу  $\varkappa \rightarrow 0$  в уравнениях для кривых (4.2.1) и (4.2.2) (правая парабола (4.2.3) при стремлении  $\varkappa \rightarrow 0$  “сдвигается вправо на бесконечность”, поэтому у неё нет предельных точек при  $\varkappa = 0$ ).

**Лемма 26.** Пусть  $\varkappa = 0$  и  $b \neq 0$ . Тогда для любой неособой орбиты  $M_{a,b}$  (то есть для любой такой орбиты, что  $a > 0$ ) бифуркационная диаграмма  $\Sigma_{h,k}$  интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) содержится в объединении следующих трёх семейств

кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$ :

1. Прямая  $k = 0$ :

2. Параметрическая кривая,

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = 4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4}, \quad (4.4.3)$$

где  $z \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;

3. Парабола

$$k = \left( h - \frac{2b^2}{a} \right)^2. \quad (4.4.4)$$

Аналогично при  $b = 0$  мы получаем следующее утверждение.

**Лемма 27.** Пусть  $\varkappa = 0$  и  $b = 0$ . Тогда для любой неособой орбиты  $M_{a,0}$  (т.е. для тех орбит, для которых  $a > 0$ ) бифуркационная диаграмма  $\Sigma_{h,k}$  интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$ :

1. Прямая  $k = 0$ ;

2. Объединение параболы

$$k = h^2 + 4ac_1^2 \quad (4.4.5)$$

и касательной к этой параболе в точке  $h = 0$

$$k = 4ac_1^2; \quad (4.4.6)$$

3. Парабола

$$k = h^2. \quad (4.4.7)$$

Выясним теперь, какие из областей, описанных в теоремах 42 и 45, выживают при стремлении  $\varkappa \rightarrow 0$ . Несложно проверить, что при этом предельном переходе кривые  $f_k, f_r, f_t$  и  $f_l$ , заданные формулами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.7), и (4.2.8) соответственно, переходят в кривые

$$a = \frac{3}{4} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}, \quad a = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}, \quad a = \frac{1}{2^{2/3}} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} \quad \text{и} \quad b = 0$$

соответственно. (При фиксированном  $b \neq 0$  кривая  $f_m(b)$  не имеет предельных точек в области  $\{a > 0, b > 0\}$  при стремлении  $\varkappa \rightarrow 0$ .) Найденные кривые делят область  $\{a > 0, b > 0\}$  на 4 части, которые мы в этой работе будем обозначать следующим образом:

1. Область  $I'$ : это область  $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad 0 < a < \frac{1}{2^{2/3}} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$ ;
2. Область  $II'$ :  $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{1}{2^{2/3}} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a < \frac{3}{4} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$ ;
3. Область  $III'$ :  $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{3}{4} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a < \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$ ;
4. Область  $IV'$ :  $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a\}$ .

Если  $\varkappa = 0$ , то все кривые  $f_r, f_k, f_t$  и  $f_l$  пересекаются только в начале координат, поэтому в этом случае мы будем рассматривать только одну дополнительную область прямой  $b = 0$ :

1. Область  $V'$ :  $\{\varkappa = 0, \quad b = 0, \quad 0 < a\}$ .

**Замечание 36.** При  $\varkappa = 0$  без ограничения общности можно считать, что  $a = 1$  (остальные орбиты получаются из случая  $a = 1$  подходящей заменой переменных). Несложно проверить, что прямая  $a = 1$  пересекает области  $I'$ – $V'$  по следующим подмножествам: первые четыре области она пересекает по интервалам  $2 < b^2, (4/3)^{3/2} < b^2 < 2, 1 < b^2 < (4/3)^{3/2}$  и  $0 < b^2 < 1$  (интервалы перечислены в порядке возрастания номера области), а область  $V'$  — по одной точке  $b = 0$ .

Теперь несложно понять, какой вид должны иметь бифуркационные диаграммы для классического случая Ковалевской: неформально говоря, они должны получаться из диаграмм, изображенных на рис. 4.3–4.14 (или на рис. 4.22 при  $b = 0$ ) выбрасыванием всех “правых дуг”, т.е. всех дуг, принадлежащих правой параболе (4.2.3), и дуги  $z_1 z_2$ . А именно, верны следующие две теоремы.

**Теорема 46** (М. П. Харламов, [31]). Пусть  $\varkappa = 0$  и  $b > 0$ . Кривые

$$a = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}, \quad a = \frac{3}{4} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{2^{2/3}} \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}$$

делят область  $a > 0, b > 0$  на 4 области. На рисунках 4.27– 4.30 для каждой из этих областей указана соответствующая бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) на орбите  $M_{a,b}$  алгебры Ли  $\mathfrak{e}(3)$ . При этом увеличенные фрагменты на рис. 4.27, 4.28, 4.29 и 4.30 имеют тот же вид, что и на рис. 4.14, 4.11, 4.8 и 4.5 соответственно.

**Замечание 37.** На рис. 4.27–4.30 дуги  $y_1y_2, y_2y_3, y_3y_5, y_2y_7, y_7y_8, y_1y_{12}, y_{12}y_{13}$  и  $y_{13}y_8$  принадлежат параболе (4.4.4). Остальные дуги очевидным образом распределяются между кривой (4.4.3) и прямой  $k = 0$ .

**Теорема 47** (М. П. Харламов, [31]). Бифуркационная диаграмма для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1.5) и интегралом (4.1.6) на орбите  $M_{a,0}$  алгебры Ли  $\mathfrak{e}(3)$  (т.е в случае  $\varkappa = 0, b = 0, a > 0$ ) изображена на рисунке 4.26. В данном случае бифуркационная диаграмма состоит из двух частей парабол

$$P_1 = \{(h, k) \mid k = h^2 + 4ac_1^2, \quad 0 \leq h\}$$

$$P_2 = \{(h, k) \mid k = h^2, \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h\}$$

и двух лучей

$$E_1 = \{(h, k) \mid k = 4ac_1^2, \quad -2\sqrt{ac_1^2} \leq h\}$$

$$E_2 = \{(h, k) \mid k = 0, \quad 0 \leq h\}$$

*Доказательство теорем 46 и 47.* Прежде всего необходимо проверить невырожденность критических точек для случая  $\varkappa = 0$ , потому что при изменении параметров критические точки, вообще говоря, могут вырождаться (например, для рассматриваемой интегрируемой системы на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  это происходит при переходе из одной области значения параметров  $a, b$  в другую). Тем не менее, все вычисления, сделанные в разделах 4.3.1 и 4.3.3 для точек ранга 1 и 0 соответственно, остаются верными и для случая  $\varkappa = 0$ , поэтому несложно проверить, что всем неособым точкам бифуркационной диаграммы соответствуют невырожденные критические точки ранга 1, и что

все критические точки ранга 0 также невырождены и имеют тот же тип, то и соответствующие критические точки ранга 0 для алгебры Ли  $so(4)$ .

Далее, из соображений непрерывности, в прообразе каждой регулярной точки образа отображения момента для алгебры Ли  $e(3)$  должно быть столько же торов, сколько и в прообразе регулярной точки из соответствующей области для алгебры Ли  $so(4)$ . Аналогично, должно совпадать количество критических окружностей в прообразах неособых точек бифуркационных диаграмм. (Количество критических окружностей не уменьшается, потому что все особенности невырождены. При малом шевелении параметра сложная особенность может распасться на несколько простых, но в данном случае этого не происходит — это следует из явного вида бифуркационной диаграммы. Количество критических окружностей не увеличивается из тех же соображений, что и при доказательстве в лемме 25 того факта, что в окрестности регулярной точки не может быть точек бифуркационных диаграмм).

Теперь, зная типы критических точек ранга 0, количества торов и критических окружностей, мы можем восстановить все перестройки торов Лиувилля практически однозначно. Нам остаётся воспользоваться стабильностью перестроек  $A, B$  и  $A^*$  и соображениями непрерывности, чтобы избавиться от неоднозначности для некоторых дуг. Например, для случая  $\kappa = 0, b = 0$  дуге  $P_1$  соответствует перестройка типа  $C_2$ , а не  $2A^*$ , потому что дуге  $y_3z_5$  соответствует перестройка типа  $C_2$ .

□

## 4.5 Рисунки к главе 4

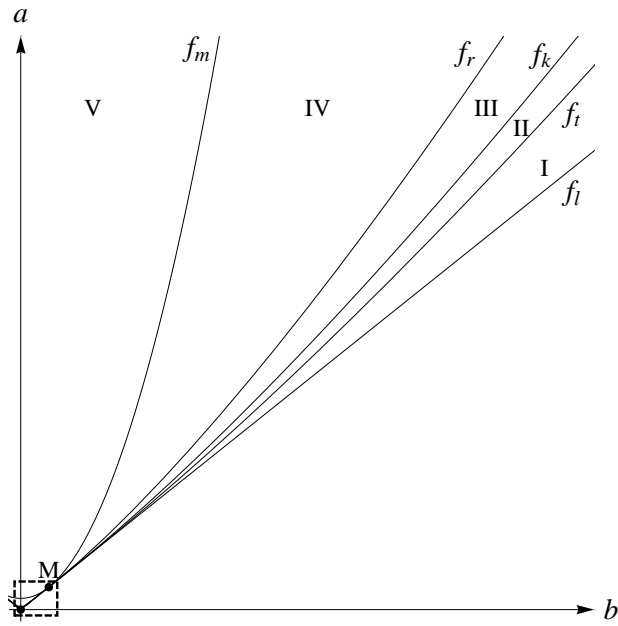


Рис. 4.1: Разбиение области параметров

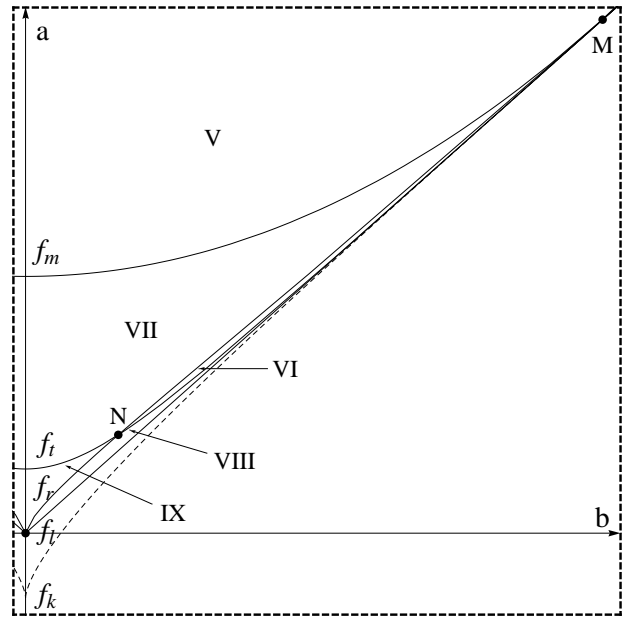


Рис. 4.2: Увеличенный фрагмент рис. 4.1

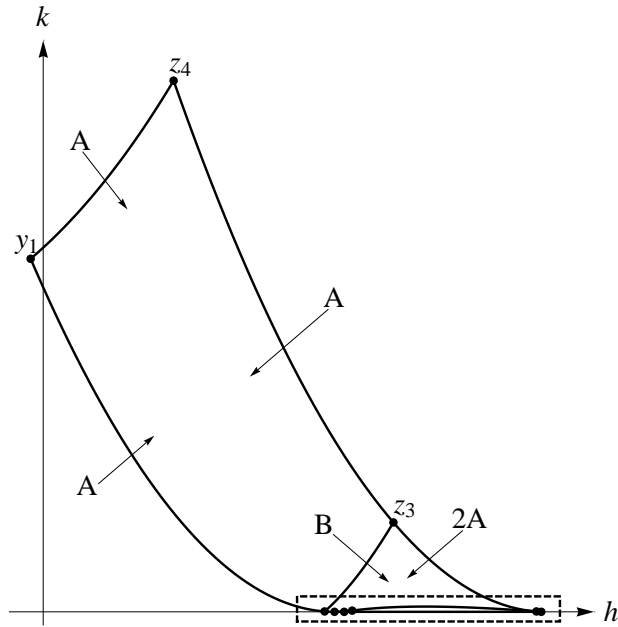


Рис. 4.3: Область I:  $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$ ,  $f_l(b) < a < f_t(b)$

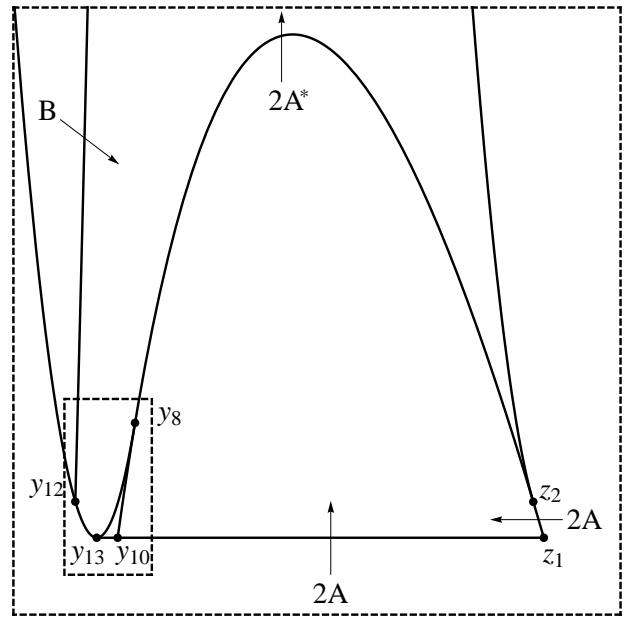


Рис. 4.4: Область I: увеличенный фрагмент рис. 4.3



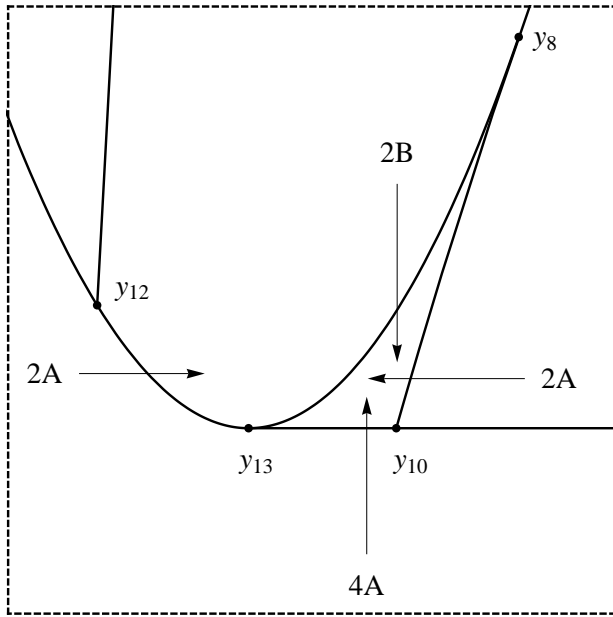


Рис. 4.5: Область I: увеличенный фрагмент рис. 4.4

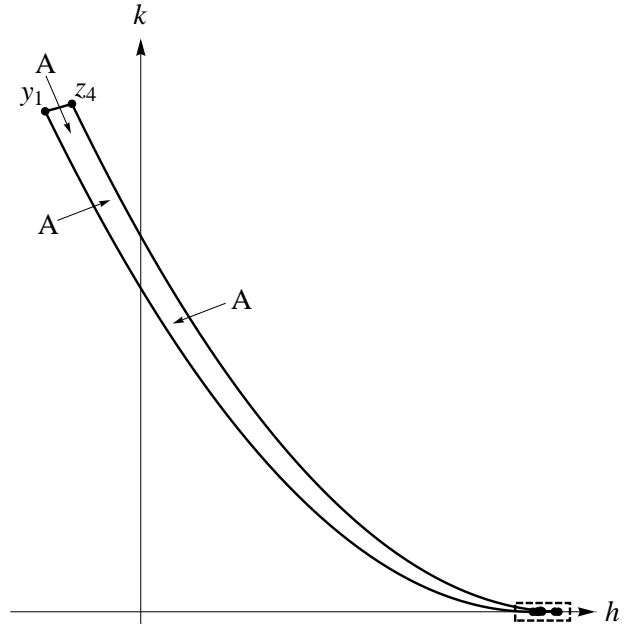


Рис. 4.6: Область II:  $zc_1^4 < b^2$ ,  $f_t(b) < a < f_k(b)$

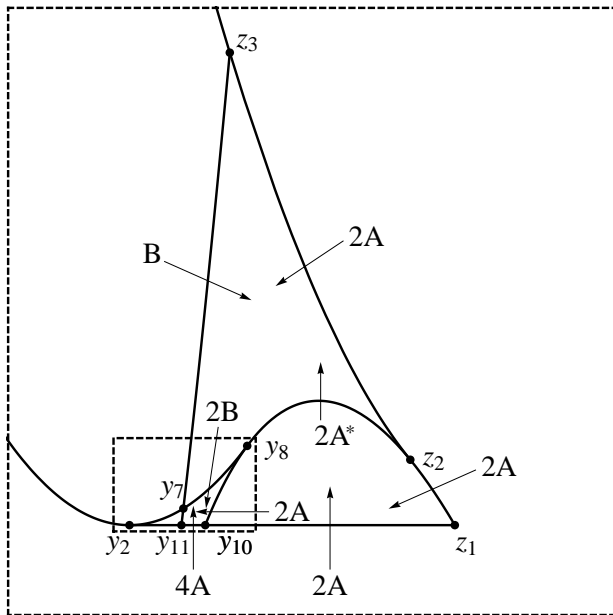


Рис. 4.7: Область II: увеличенный фрагмент рис. 4.6

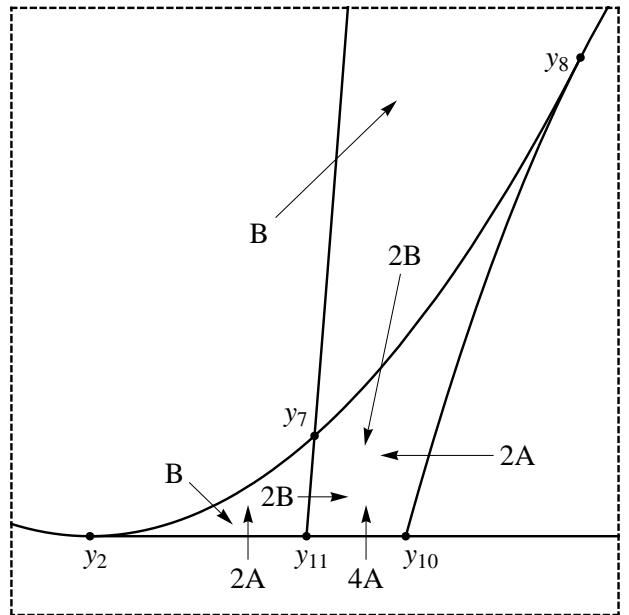


Рис. 4.8: Область II: увеличенный фрагмент рис. 4.7

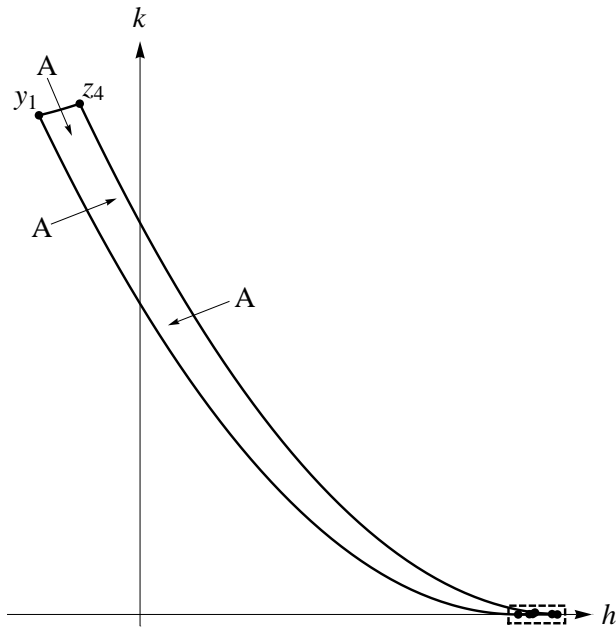


Рис. 4.9: Область III:  $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$ ,  $f_k(b) < a < f_r(b)$

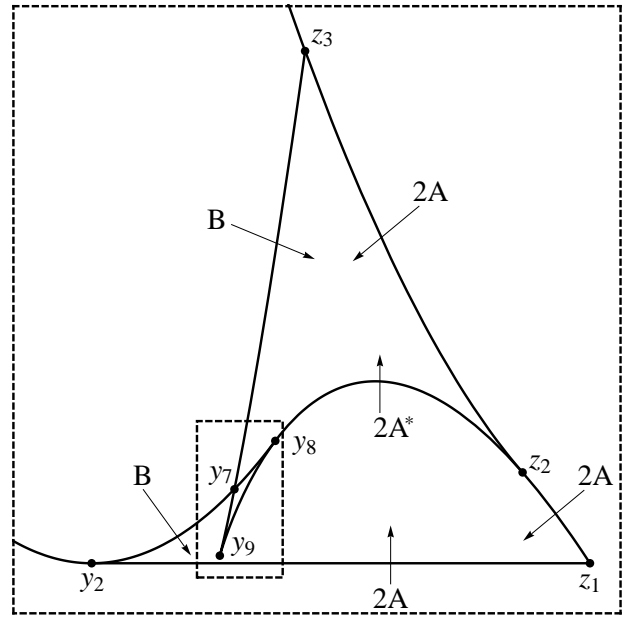


Рис. 4.10: Область III: увеличенный фрагмент рис. 4.9

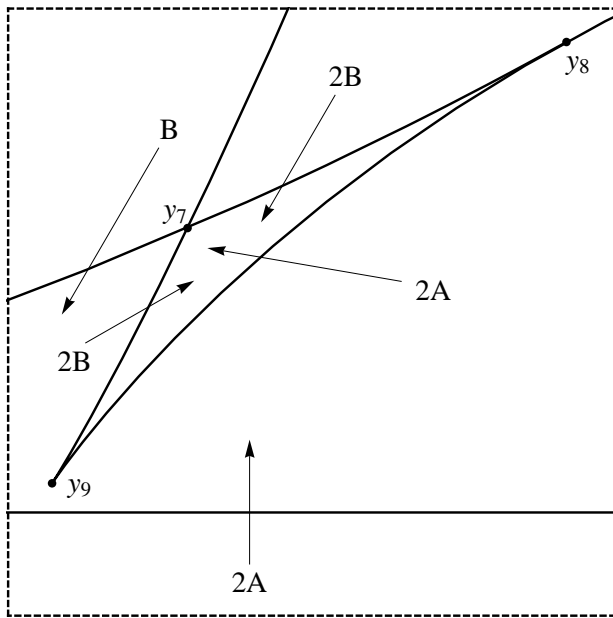


Рис. 4.11: Область III: увеличенный фрагмент рис. 4.10

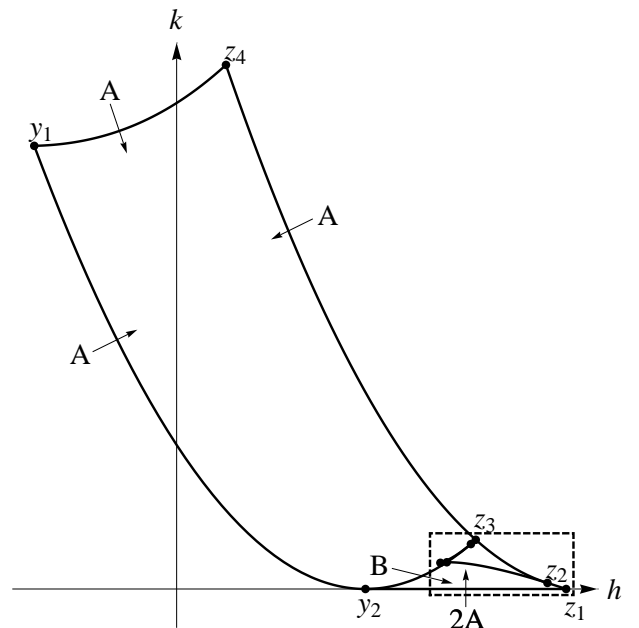


Рис. 4.12: Область IV:  $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$ ,  $f_r(b) < a < f_m(b)$

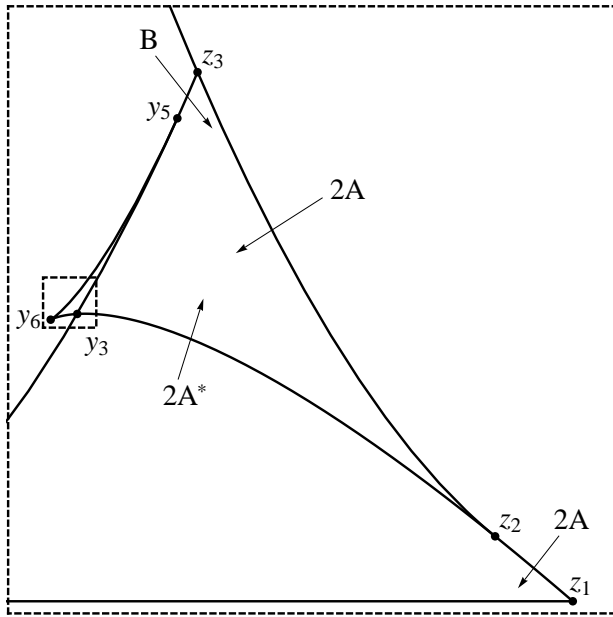


Рис. 4.13: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 4.12

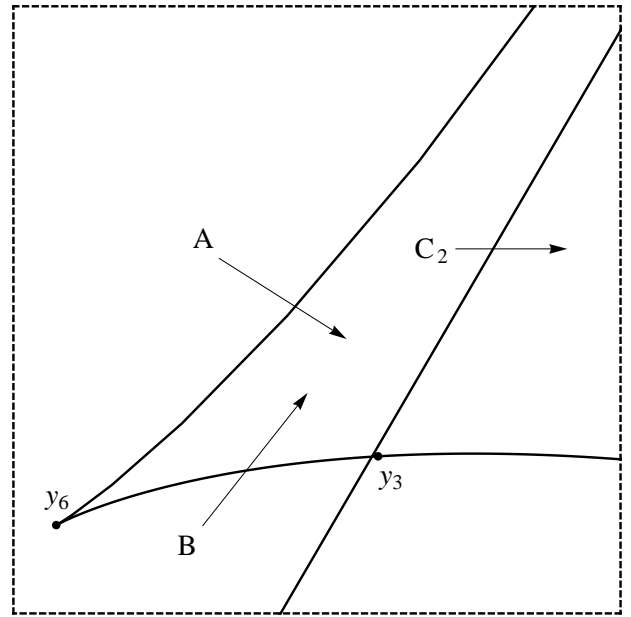


Рис. 4.14: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 4.13

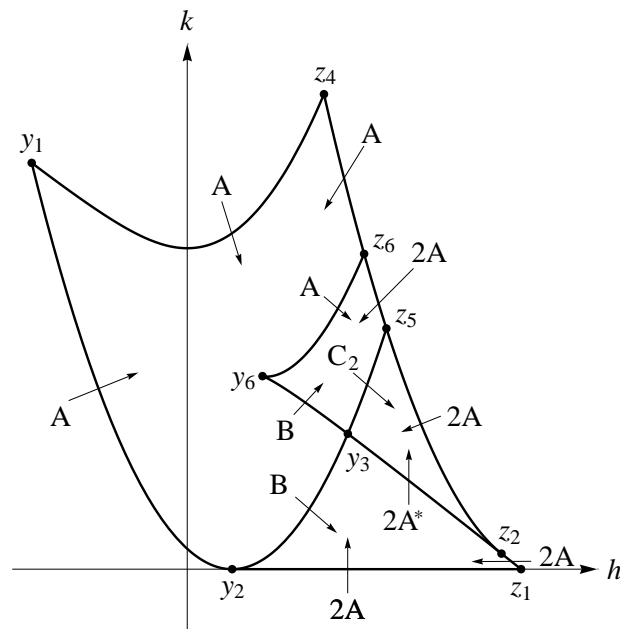


Рис. 4.15: Область V:  $f_m(b) < a$

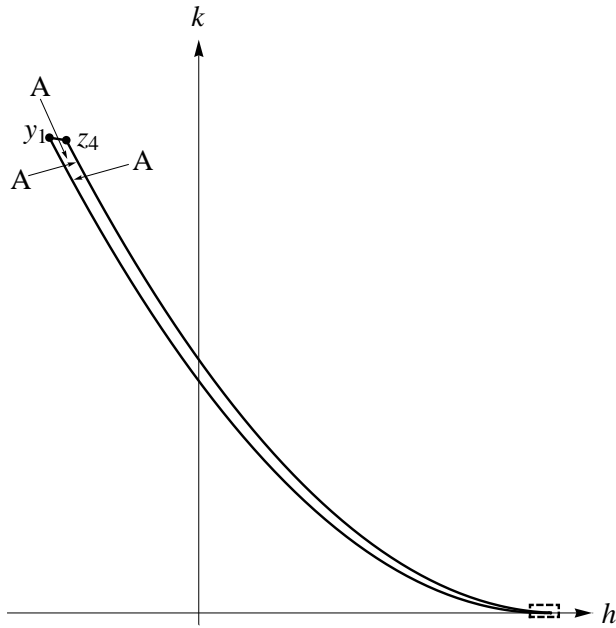


Рис. 4.16: Область VI:  $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$ ,  $f_t(b) < a < f_r(b)$

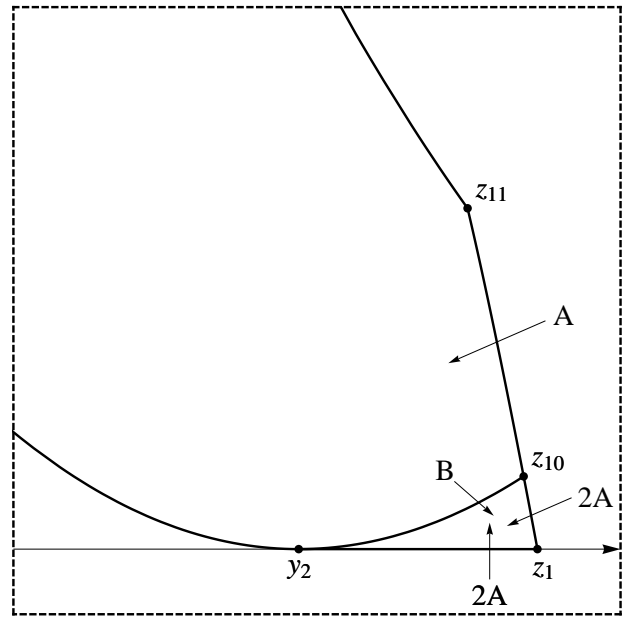


Рис. 4.17: Область VI: увеличенный фрагмент рис. 4.16

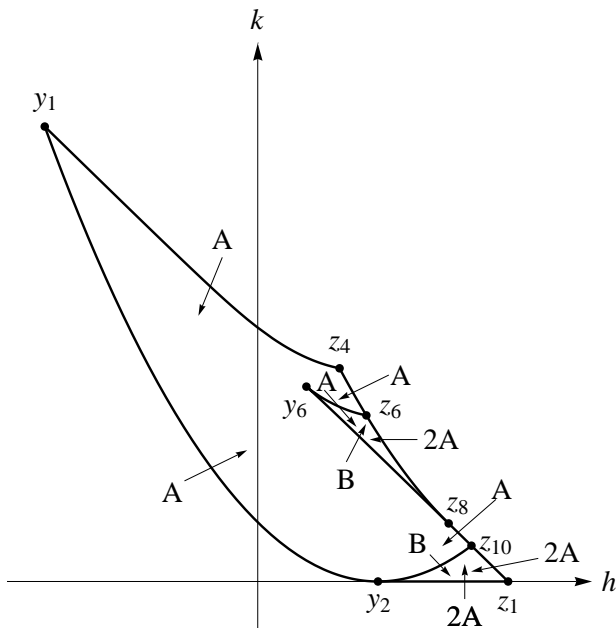


Рис. 4.18: Область VII:  $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$ ,  $\max(f_t(b), f_r(b)) < a < f_m(b)$

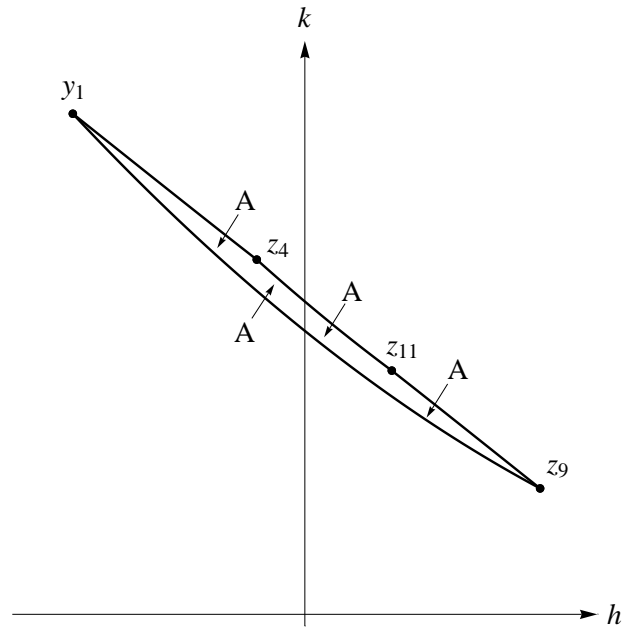


Рис. 4.19: Область VIII:  $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$ ,  $f_l(b) < a < \min(f_r(b), f_t(b))$

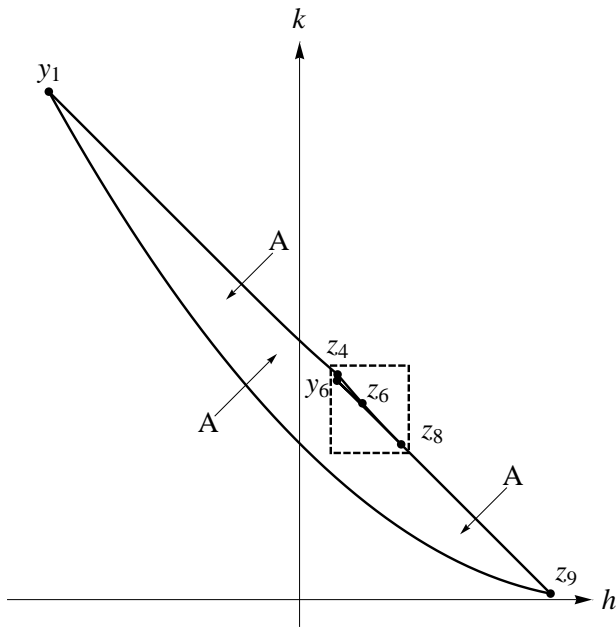


Рис. 4.20: Область IX:  $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, f_r(b) < a < f_t(b)$

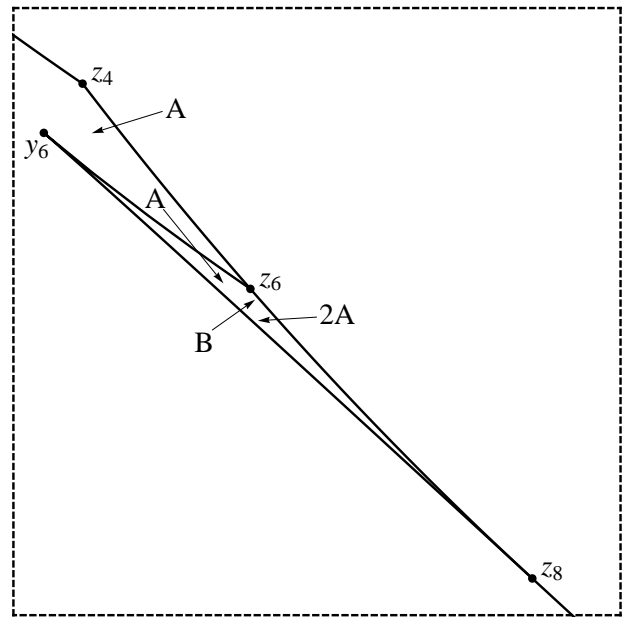


Рис. 4.21: Область IX: увеличенный фрагмент рис. 4.20

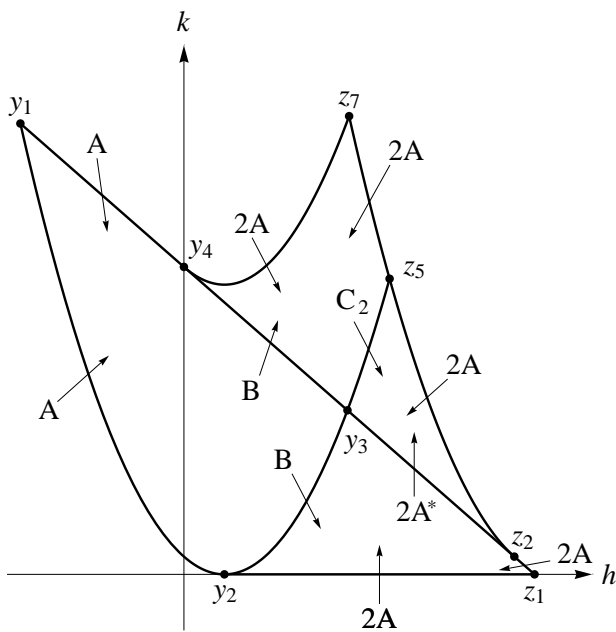


Рис. 4.22: Область X:  $b = 0, \varkappa^2 c_1^2 < a$

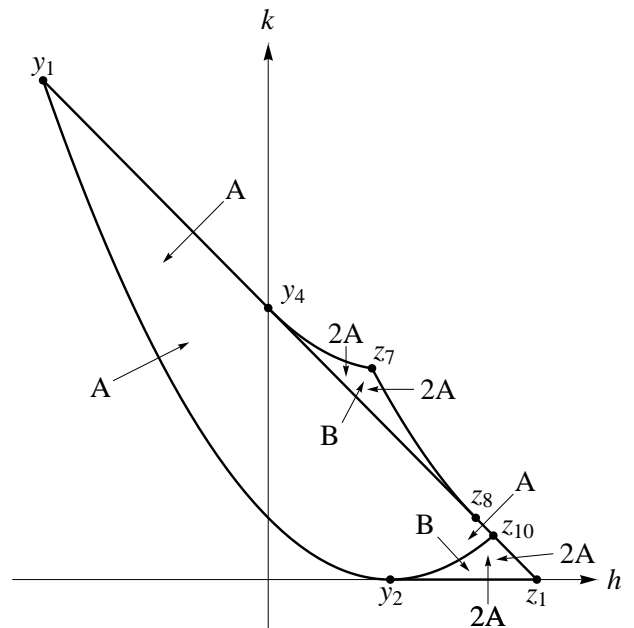


Рис. 4.23: Область XI:  $b = 0, \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$

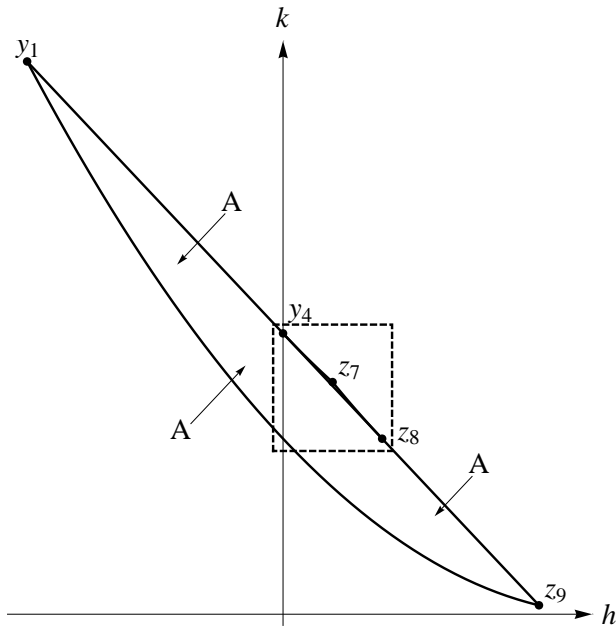


Рис. 4.24: Область XII:  $b = 0$ ,  $0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$

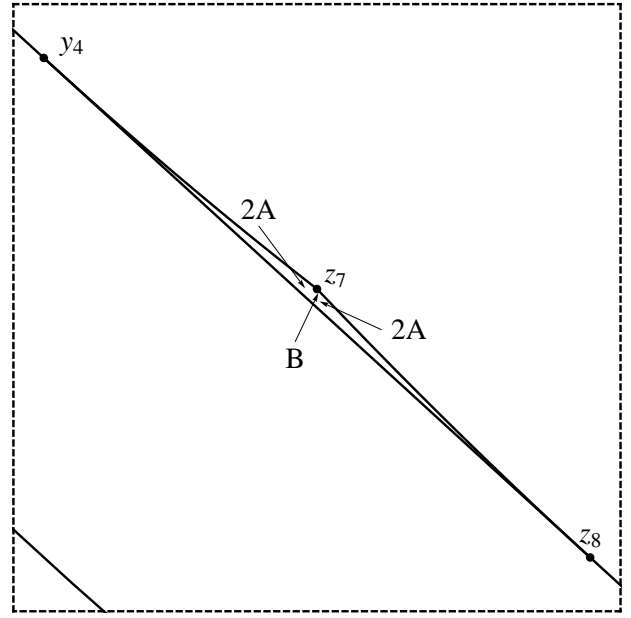


Рис. 4.25: Область XII: увеличенный фрагмент рис. 4.24

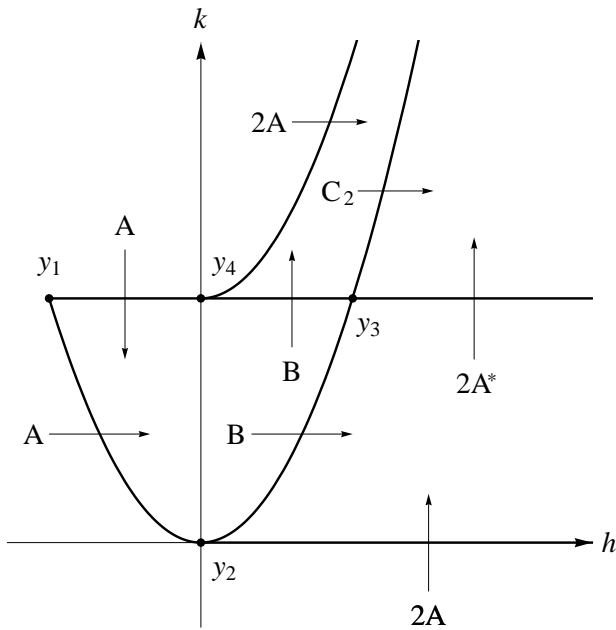


Рис. 4.26: Классический случай Ковалевской:  $\varkappa = 0$ ,  $b = 0$

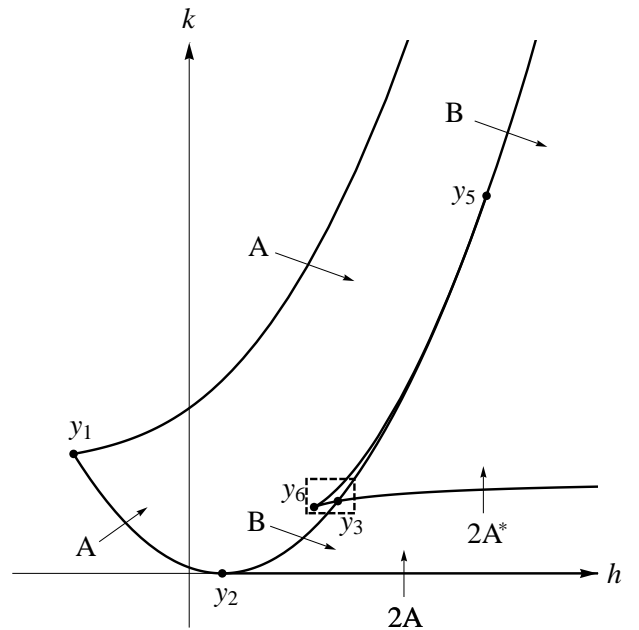


Рис. 4.27: Классический случай Ковалевской:  $\varkappa = 0$ ,  $a = 1$ ,  $0 < b^2 < 1$

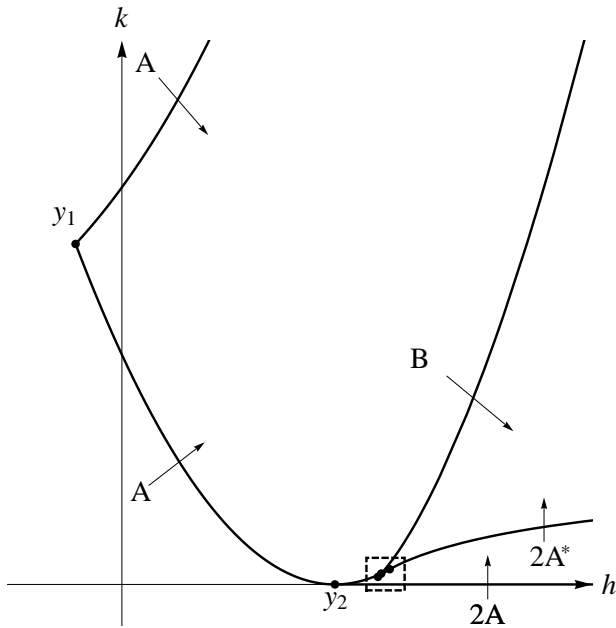


Рис. 4.28: Классический случай Ковалевской:  $\varkappa = 0$ ,  $a = 1$ ,  $1 < b^2 < (4/3)^{3/2}$

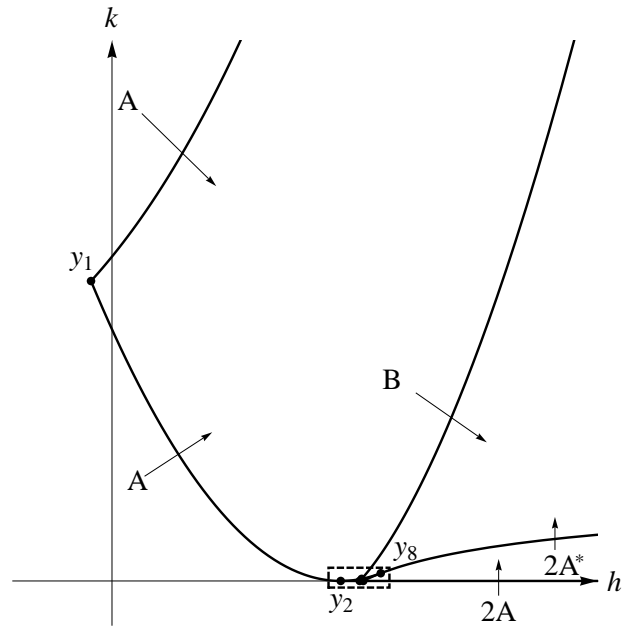


Рис. 4.29: Классический случай Ковалевской:  $\varkappa = 0$ ,  $a = 1$ ,  $(4/3)^{3/2} < b^2 < 2$

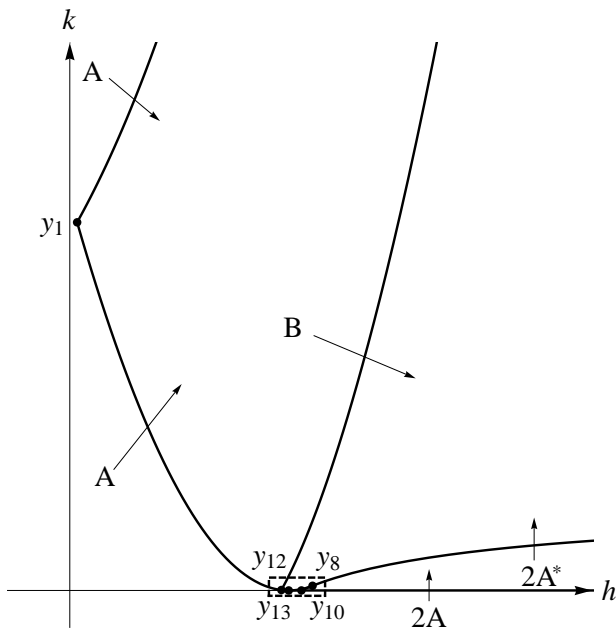


Рис. 4.30: Классический случай Ковалевской:  $\varkappa = 0$ ,  $a = 1$ ,  $2 < b^2$

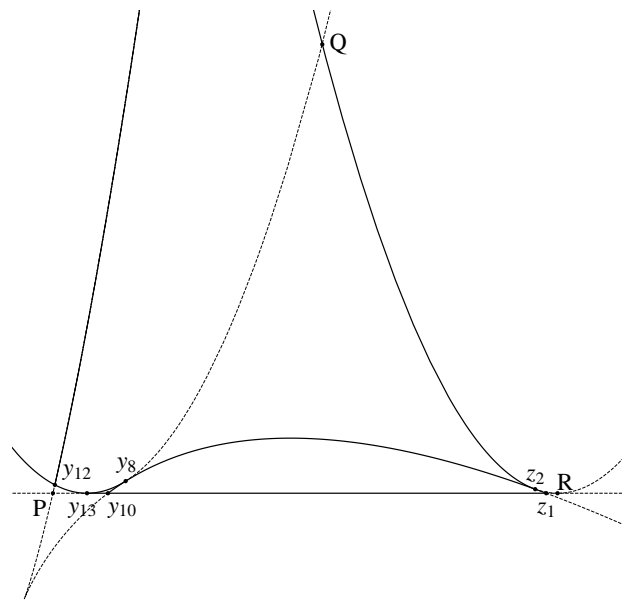


Рис. 4.31: Область I: Дополнительный график

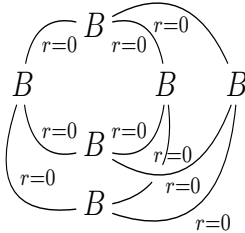
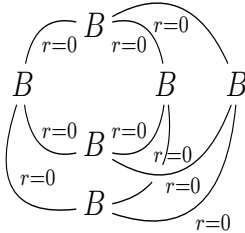
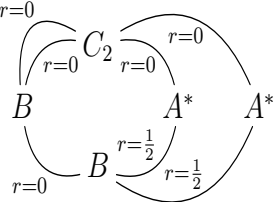
$y_1$	$A \xrightarrow{r=0} A$		
$y_2$	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$	$y_7$	
$y_3$		$y_8$	$A \xrightarrow{r=1/2} B \xrightarrow[r=\infty]{r=\infty} A^*$ дважды
		$y_9$	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=\infty}$ дважды
$y_4$	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$	$y_{10}$	$A \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=0} A$
$y_5$	$A \xrightarrow{r=0} C_2 \xrightarrow[r=\infty]{r=\infty} B$	$y_{11}$	$A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=\infty} B$ дважды
		$y_{12}$	$A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=\infty} B$
$y_6$	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=\infty}$	$y_{13}$	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$ дважды

Таблица 4.4: Круговые молекулы, классический случай Ковалевской.



$z_1$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$	$z_6$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} A \end{array}$
$z_2$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \\ A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \end{array}$	$z_7$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
$z_3$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$	$z_8$	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=0} B \xrightarrow{r=0} A \\ \nearrow_{r=0} A \end{array} \end{array}$
$z_4$	$A \xrightarrow{r=0} A$	$z_9$	$A \xrightarrow{r=0} A$
$z_5$	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=\infty} C_2 \nearrow_{r=\infty} A \\ \nearrow_{r=\infty} A \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$	$z_{10}$	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$
		$z_{11}$	$A \xrightarrow{r=0} A$

Таблица 4.5: Круговые молекулы для точек  $z_1$ – $z_{11}$ .

# Литература

- [1] А. В. Болсинов, “Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента”, *Доклады АН СССР*, **301**:5 (1988), 1037–1040.
- [2] А. В. Болсинов, “Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92.
- [3] А. В. Болсинов, А. М. Изосимов, А. Ю. Коняев, А. А. Ошемков, “Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, **28** (2012), 119–191.
- [4] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45**:2(272) (1990), 49–77.
- [5] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42.
- [6] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: Издат. дом “Удмурт. ун-т”, 1999.
- [7] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, Москва; Ижевск, 2003.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М., Наука, 1988

- [9] И. М. Гельфанд, И. С. Захаревич, “Спектральная теория пучка кососимметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на  $S^1$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:2 (1989), 1–11.
- [10] Г. Б. Гуревич, “Канонизация пары бивекторов”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, **8** (1950), 355–363.
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986.
- [12] И. В. Комаров, “Базис Ковалевской для атома водорода”, *ТМФ*, **47**:1 (1981), 67–72.
- [13] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974;
- [14] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56.
- [15] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 396–415.
- [16] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 113–138.
- [17] П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа”, *Матем. сб.*, **195**:3 (2004), 69–114.
- [18] П. В. Морозов, *Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела*, кандидатская диссертация, МГУ, мех.-матем. ф-т, 2006.
- [19] О. Е. Орел, “Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина”, *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 105–128.

- [20] А. А. Ошемков, “Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на  $so(4)$ ”, *УМН*, **42:6(258)** (1987), 199–200.
- [21] А. А. Ошемков, “Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, **25:2** (1993), 23–110.
- [22] В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, МЦНМО, М. 2004.
- [23] П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, *Теоретическая и математическая физика*, **134:2** (2003), 207–226.
- [24] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, “Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил”, *Матем. сб.*, **203:2** (2012), 111–142.
- [25] П. И. Топалов, “Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела”, *Матем. сб.*, **187:3** (1996), 143–160.
- [26] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [27] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:3** (1990), 546–575.
- [28] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли  $so(4)$ , *Матем. сб.*, **200:6** (2009), 119–142
- [29] М. П. Харламов, “Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской”, *Прикладная математика и механика*, **47:6** (1983), 922–930.

- [30] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Доклады АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325.
- [31] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1988.
- [32] Х. Хоршиди, “Топология интегрируемой гамильтоновой системы для случая Стеклова на алгебре Ли  $so(4)$ ”, *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика.*, **61**:5 (2006), 58–61.
- [33] С.-Ц. Ху, *Теория гомотопий*, Мир, М., 1964;
- [34] М. F. Atiyah, “Convexity and commuting Hamiltonians”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **14** (1982), 1–15.
- [35] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of Fomenko–Zieschang topological invariant”, *Adv. in Soviet Math.*, **6** (1991), 147–183.
- [36] A. V. Bolsinov, A. M. Izosimov, *Singularities of bi-Hamiltonian systems*, arXiv:1203.3419 [math-ph].
- [37] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 1–67.
- [38] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **14**:4–5 (2009), 431–454.
- [39] T. Delzant, “Hamiltoniens periodiques et image convexe de l’application moment” *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, **116**:3 (1988), 315–339.
- [40] J. J. Duistermaat, “On global action–angle coordinates”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 687–706.

- [41] V. Guillemin, S. Sternberg, “Convexity properties of the moment map”, *Inventiones Mathematicae*, **67**:3 (1982), 491–513.
- [42] D. Freid, W. Goldman, M.W. Hirsh, “Affine manifolds with nilpotent holonomy”, *Comment. Math. Helv.*, **56**:4 (1981), 487–523.
- [43] S. Kowalewski, “Sur une propriété du système d’équations différentielles qui définit la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Mathematica*, **14** (1889), 81–83.
- [44] S. Kowalewski, “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Mathematica* **12** (1889), 177–232.
- [45] N.C. Leung, M. Symington, *Almost toric symplectic four-manifolds*, arXiv:math/0312165 [math.SG].
- [46] F. Magri, A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation, *J. Math. Phys.*, **19**:5 (1978), 1156–1162.
- [47] D. McDuff and D. Salomon, *Introduction to Symplectic Topology*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.
- [48] J. Milnor, “On the existence of a connection with curvature zero”, *Comment. Math. Helv.*, **32** (1958), 215–223.
- [49] K.N. Mishachev, “The classification of Lagrangian bundles over surfaces”, *Differential Geom. Appl.*, **6**:4 (1996), 301–320.
- [50] O.E. Orel, P.E. Ryabov, “Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **3**:2 (1998), 82–91.
- [51] A.A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations, Topological classification of integrable Hamiltonian systems”, AMS, Providence, RI, 1991, 67–146.
- [52] A. Panasyuk, “Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank”, *Banach Center Publ.* **51** (2000), 251–261.

- [53] P. Zhang *Algebraic properties of compatible Poisson structures*. Preprint (Loughborough University, no. 10–02). 2010.
- [54] D. Sepe, “Classification of Lagrangian fibrations over a Klein bottle”, *Geometriae Dedicata*, **149**:1 (2010), 347–362.
- [55] M. Symington, *Four dimensions from two in symplectic topology*, arXiv:math/0210033 [math.SG].
- [56] R. C. Thompson, “Pencils of complex and real symmetric and skew matrices”, *Linear Algebra and its Applications*, **147** (1991), 323–371.
- [57] F. J. Turiel, “Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles”, *Manuscripta Math.*, **82**:1 (1994), 349–362.
- [58] F. J. Turiel, *On the local theory of Veronese webs*, arXiv:1001.3098v1 [math.DG].
- [59] F. J. Turiel, *The local product theorem for bihamiltonian structures*, arXiv:1107.2243v1 [math.SG].
- [60] I. S. Zakharevich, *Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation*, arXiv:math/9908034v3 [math.SG].
- [61] Nguyen Tien Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II : Topological classification”, *Compositio Math.*, **138**:2 (2003): 125–156.

### Публикации автора по теме диссертации

Из официального Перечня ВАК:

- [62] И. К. Козлов, “Классификация лагранжевых расслоений”, *Матем. сб.*, **201**:11 (2010), 89–136.
- [63] И. К. Козлов, Т. С. Ратью, “Бифуркационная диаграмма для случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ ”, *Доклады Академии Наук*, **447**:5 (2012), 486–489.

*И. К. Козлову принадлежат построение бифуркационных диаграмм отображения момента и классификация невырожденных положений равновесия.*

- [64] И. К. Козлов, “Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера”, *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), 857–870.

Прочие:

- [65] И. К. Козлов, “Классификация лагранжевых расслоений”, Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовниченко, Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 года, с. 284.
- [66] I. K. Kozlov, “Classification of Lagrangian fibrations”, Second International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2010”, Belgrade, Serbia, 7–13 September 2010, p. 21.
- [67] И. К. Козлов, “Классификация почти лагранжевых расслоений”, XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 11–15 апреля 2011 г.
- [68] И. К. Козлов, “Почти торические расслоения над двумерными поверхностями”, Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (23-я сессия), посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (1901–1973), Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г., МГУ, с. 237–238.
- [69] И. К. Козлов, “Бифуркационная диаграмма для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ .” XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 9–13 апреля 2012 г.
- [70] I. K. Kozlov, “Symplectic invariants of almost toric 4-manifolds”, International Topological Conference Alexandroff Readings, Moscow, Russia, May 21–25, 2012, p. 39.



- [71] I. K. Kozlov, “The topology of Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra  $\mathfrak{so}(4)$ ”, XVII Geometrical Seminar, Zlatibor, Serbia, 3–8 September 2012, p.44–45.
- [72] И. К. Козлов, “Инварианты Жордана-Кронекера алгебр Ли.”, XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 8–13 апреля 2013 г.
- [73] I. K. Kozlov, “Local properties of bi-Hamiltonian systems”, Fourth International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2013”, Izhevsk, Russia, 10–14 June 2013, p. 36.