

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Коровина Наталья Валентиновна

УДК 514.745.82, 517.938.5

Геометрия интегрируемых случаев динамики твердого тела

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
академик РАН, профессор А. Т. Фоменко,
д.ф.-м.н., профессор А. В. Болсинов.

Москва — 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
0.1. Постановка задачи	4
0.2. Структура текста	9
1. Предварительные сведения	11
1.1. Базовые определения	11
1.2. Ограничения на систему	14
1.3. Пример (каноническая особенность)	16
1.4. Общий случай	16
1.5. Редукция на сечение изоэнергетической поверхности	17
1.6. Инварианты траекторной эквивалентности для систем на изоэнергетических инвариантных 3-поверхностях	19
1.6.а. Функция вращения	20
1.6.б. Λ -инвариант	21
1.6.в. Δ и Z -инварианты	21
1.7. Инварианты в случае произвольной инвариантной 3-поверхности, общая ситуация	24
1.8. Полнота набора ρ , Λ , Δ , Z для систем на инвариантных 3-поверхностях	24
1.9. Изготовление траекторных инвариантов для 4-окрестностей	26
2. О редукции	29
2.1. Редукция — общий случай	29
2.2. Редукция Марседена-Вайнштейна	41
2.2.а. Конструкция	42
3. Особенность типа седло-центр	45
3.1. Построение модели особенности типа седло-центр	45
3.2. Редуцированная система	49
3.3. Спроектированная система	50
3.4. Три системы на двумерных площадках	51
3.5. Неоднозначность выбора кривой γ при построении инвариантов 4-окрестности	52
3.5.а. Доказательство теоремы 3.5.1	57
3.6. Поведение функции вращения в окрестности особой точки типа седло-центр	59

3.7. Критерий траекторной эквивалентности и полный траекторный инвариант	66
3.8. Каноническая особенность типа седло-центр. Поведение инвариантов и упрощение критерия траекторной эквивалентности	84
3.9. Теорема реализации	87
3.9.а. Пример неканонической особенности.	87
3.9.б. Реализация	90
4. Эллиптический случай.	96
5. Топологическая траекторная эквивалентность двух интегрируемых систем с двумя степенями свободы на больших уровнях энергии	99
5.1. Случаи Эйлера и Лагранжа в механике твердого тела	99
5.1.а. Слоения Лиувилля	101
5.2. Функция вращения задачи Лагранжа	102
5.3. Свойства функций вращения геодезических потоков	105
5.4. Основная теорема	112
5.5. Окончательные результаты	124
Список литературы	128

Введение

0.1. Постановка задачи

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (ИГС) $v = \text{sgrad } H$ с двумя степенями свободы, заданную на некотором гладком четырехмерном симплектическом многообразии (M^4, ω) . Пусть эта система вполне интегрируема по Лиувиллю при помощи дополнительного интеграла F . Это означает, что функции H и F коммутируют относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической формой ω , и являются функционально независимыми (другими словами, векторы $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$ почти всюду на M^4 линейно независимы).

Определение 0.1.1. Разбиение M^4 в связные компоненты совместных поверхностей уровня функций H и F называется *лиувиллевым слоением*.

Теорема Лиувилля описывает поведение системы в окрестности регулярного компактного слоя слоения Лиувилля. А именно, каждый такой слой диффеоморфен двумерному тору. Слоение Лиувилля в малой окрестности такого тора тривиально, и на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение.

Определение 0.1.2. Эти торы называются *торами Лиувилля*, или *лиувиллевыми торами*.

На многообразии M^4 имеется пуассоново действие группы \mathbb{R}^2 , определяемое как действие, порожденное сдвигами вдоль интегральных траекторий векторных полей $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } F$.

Определение 0.1.3. Точка $x \in M^4$ называется *особой*, если векторы $\text{sgrad } H(x)$, $\text{sgrad } F(x)$ линейно зависимы. Соответствующая орбита пуассонова действия $O = O(x)$, проходящая через точку x , также называется *особой*. *Рангом орбиты* $O(x)$ называется ранг матрицы, составленной из координат векторов $\text{sgrad } H(x)$, $\text{sgrad } F(x)$.

Можно показать, что ранг этой матрицы не зависит от выбора точки x орбиты O и совпадает с размерностью орбиты, поэтому определение корректно.

Рассмотрим орбиту x нулевого ранга, т. е. неподвижную особую точку пуассонова действия. Тогда определено действие \mathbb{R}^2 на касательном пространстве $T_x M^4$, сохраняющее форму ω . Следовательно, оно индуцирует (абелеву) подгруппу симплектических преобразований в группе $Sp(4, \mathbb{R})$ симплектических преобразований касательного

пространства $T_x M^4$. Алгебра Ли этой подгруппы является коммутативной подалгеброй алгебры Ли $sp(4, \mathbb{R})$ и порождается линейными частями векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$.

Определение 0.1.4. Особая (неподвижная) точка называется *невырожденной*, если подалгебра, порожденная линейными частями векторов $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } F$, является подалгеброй Картана в $sp(4, \mathbb{R})$. В частности, в таком случае эта подалгебра является максимальной коммутативной подалгеброй в $sp(4, \mathbb{R})$.

Предполагается, что ИГС C^∞ -гладкая.

Теорема 0.1.5 (Элиассона). [26, 30, 32, 35]

В окрестности невырожденной особой точки x нулевого ранга на многообразии M^4 существуют гладкие симплектические координаты (p_1, p_2, q_1, q_2) такие, что в этих координатах гамильтониан и интеграл одновременно могут быть приведены к одному из следующих видов:

- 1) $H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$, $F = F(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$ (эллиптическая особая точка, или точка типа центр-центр);
- 2) $H = H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$, $F = F(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$ (особая точка типа седло-центр);
- 3) $H = H(p_1 q_1, p_2 q_2)$, $F = F(p_1 q_1, p_2 q_2)$ (особая точка типа седло-седло).
- 4) $H = H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$, $F = F(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$ (особая точка типа фокус-фокус).

Указанные функции H , F в этом случае являются C^∞ -гладкими функциями двух переменных.

Теорема 0.1.5 была впервые доказана Рюссманом [32] в аналитическом случае, позднее Веем [35] был получен ее многомерный аналог. Элиассоном [26] был полностью разобран случай эллиптической особой точки в гладком случае и в той же работе [26] сообщается, что, по-видимому гладкая теорема верна и в общем случае. Полное доказательство в C^∞ -гладком случае имеется в [30].

Рассмотрим целиком слой L слоения Лиувилля, содержащий невырожденную неподвижную особую точку x . В эллиптическом случае $L = \{x\}$. Во всех остальных случаях $\dim L > 0$. Вообще говоря, L может содержать несколько неподвижных особых точек. Можно, однако, показать, что если все они невырожденные, то они одного типа

[23]. Поэтому можно говорить также о типе всего (невырожденного) особого слоя, а не только о типе особой точки.

Говоря об особых точках и особых орбитах пуассонова действия и их окрестностях, естественно различать две ситуации: локальную (когда рассматриваются малые окрестности особых точек) и полулокальную (когда рассматриваются малые окрестности протяженных объектов — особых слоев слоения Лиувилля).

Наложим на ИГС еще одно дополнительное условие — условие *нерасщепляемости*. Его точное определение будет дано ниже, в п. 1.2. Такое ограничение определяет широкий и естественный класс особенностей. Например, для всех известных реальных примеров интегрируемых систем это условие оказывается выполненным. Кроме того, в [31] показано, что любая нерасщепляемая невырожденная особенность в случае, когда все слои слоения Лиувилля компактны, лиувиллево эквивалентна (в полулокальном смысле) *особенности типа почти прямого произведения* простейших особенностей: эллиптической, седловой и типа фокус-фокус (точное определение см. в [6]).

Нас будут интересовать ИГС с двумя степенями свободы и поведение их траекторий в четырехмерных окрестностях особых слоев типа седло-центр. Целью является полулокальная классификация ИГС в таких окрестностях с точностью до *топологической траекторной эквивалентности*, т.е. с точностью до существования гомеоморфизма окрестностей, переводящего траектории первой системы в траектории второй системы. Более подробно структура особенности типа седло-центр будет описана в главе 1, однако важно отметить, что в невырожденном нерасщепляемом случае все особенности типа седло-центр являются особенностями не только типа полупрямого произведения, но на самом деле типа прямого произведения, см. [23], а также теорему 1.4.1.

Задача возникает и решается в более общем контексте траекторной классификации ИГС на многообразиях. Отметим несколько похожих ситуаций.

1. *Траекторная классификация ИГС с одной степенью свободы вблизи компактного особого слоя.*

Эта проблема тривиальна. Имеется некоторое двумерное симплектическое многообразие (M^2, ω) с функцией Морса H на нем и рассматривается малая окрестность U компактной связной компонентны некоторого особого уровня функции H . Лиувиллево слоение на U в этом случае имеет один особый слой — граф K , являющийся критическим уровнем H . Этот слой состоит из траекторий: вершинами графа K являются неподвижные (они же особые) точки системы, а соединяющие их ребра являются особыми траекториями. Множество $U \setminus K$ состоит из некоторого

числа колец, тривиально расслоенных на окружности (рис. 0.1.1), являющиеся регулярными траекториями системы. Из этого описания ясно, что топология пары

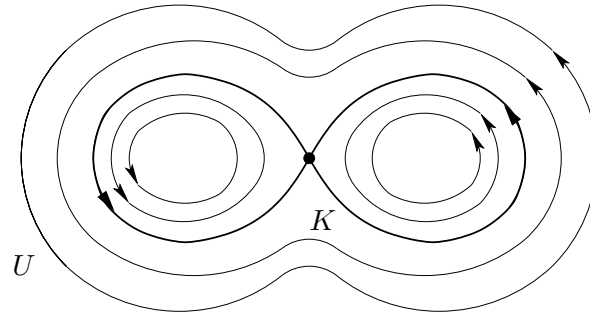


Рис. 0.1.1:

(U, K) определяет класс топологической траекторной эквивалентности.

2. *Траекторная классификация ИГС в окрестностях регулярных торов.*

Здесь ответ на задачу траекторной классификации дает теорема Лиувилля. А именно, в ситуации двух степеней свободы на каждом регулярном слое (торе Лиувилля) траектории выпрямляются и, следовательно, динамика определяется одним числом (числом вращения), отвечающим за линейную обмотку. Таким образом, необходимо сравнить ростки функций вращения для рассматриваемых систем (с точностью до некоторого дробно-линейного преобразования, отвечающего за выбор базисных циклов на торах). (Определение числа вращения и функции вращения дано в главе 1.6.)

Очевидно, что рассуждение обобщается на случай большего числа степеней свободы.

3. *Траекторная классификация ИГС, ограниченных на их 3-мерные изоэнергетические поверхности.*

Эта задача и в топологическом, и в гладком случае полностью решена А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко [8], [22].

4. *Траекторная эквивалентность некоторых конкретных задач динамики твердого тела или геодезических потоков на определенных уровнях энергии.* См. например [1–3, 9, 10, 27, 34].

На [9] остановимся подробнее. В главе 5 рассматриваются интегрируемые случаи динамики твердого тела: случай Эйлера (с двумя совпадающими главными моментами инерции) и случай Лагранжа с произвольным потенциалом. Эти случаи

рассматриваются на изоэнергетических уровнях больших энергии, что эквивалентно рассмотрению окрестности специальной особой точки — бесконечности.

Доказывается, что любая система типа Лагранжа на достаточно высоком изоэнергетическом уровне траекторно эквивалентна некоторой системе типа Эйлера (в общем случае, с другими параметрами). Верно и обратное утверждение: для любой системы типа Эйлера, произвольных фиксированных моментах инерции для системы Лагранжа и произвольного фиксированного уровня энергии, существует множество потенциалов такое, что система типа Лагранжа с выбранным потенциалом траекторно эквивалентна системе типа Эйлера на выбранном изоэнергетическом уровне.

Отметим, что в зонах малых и средних значений интеграла потенциал оказывает в общем случае существенное влияние. А именно, в зоне малых энергий даже бифуркационная диаграмма может выглядеть достаточно сложным образом (и, соответственно, класс лиувиллевой эквивалентности), не говоря уже о более тонкой траекторной классификации. В зоне же средних энергий класс лиувиллевой эквивалентности стабилизируется, однако с траекторной точки зрения система может быть устроена сложно.

5. *Траекторная классификация ИГС в окрестности невырожденной эллиптической особой орбиты.*

Задача решена О.Е. Орел [14] для случая произвольного числа степеней свободы. В той же работе был получен полный гладкий траекторный инвариант для неспециальной нерезонансной ИГС с двумя степенями свободы (см. главу 4, а также замечание к теореме 4.0.12).

6. *Траекторная классификация ИГС в окрестности невырожденной особой точки типа седло-седло.*

Следуя классической теореме Гробмана-Хартмана, получим, что любые две ИГС в окрестностях своих невырожденных особых точек типа седло-седло траекторно эквивалентны.

7. *Симплектическая полулокальная классификация интегрируемых систем с одной степенью свободы.* См. [25, 33] (в [25] разобрана простейшая особенность — так называемая “восьмерка”, а в [33] разобран общий случай).

8. *Симплектическая классификация ливиллевых слоений для ИГС с двумя степенями свободы в окрестности особого слоя типа фокус-фокус.* См. [36].

Отметим, что последние два отмеченных результата формально не относятся к рассматриваемому типу задач. А именно, в них обсуждается другой тип эквивалентности ИГС — с точностью до симплектоморфизма. Однако результаты этих работ и методы, которыми они получены, позволяют рассматривать эти задачи в одном контексте с траекторной эквивалентностью. Оказывается, что симплектические инварианты имеют близкую к траекторным природу.

0.2. Структура текста

Необходимые определения, а также структура особенности типа седло-центр, описаны в главе 1. Необходимые инварианты ρ , Λ и Δ определены в п.1.6. В главе 2 описывается редукция ИГС типа редукции по Болсинову-Фоменко [8] в общем случае (а не только необходимая в [8] редукция на изоэнергетических поверхностях), а также редукция по Марсдену-Вайнстайну. В главе 3 строится модель ИГС в окрестности невырожденного особого слоя типа седло-центр (п. 3.1), устанавливается связь между двумя редукциями (п. 3.4), обсуждается корректность определения инвариантов в четырехмерной окрестности этого особого слоя и поведение инвариантов (пп. 3.5, 3.6), и, наконец, доказывается критерий траекторной эквивалентности и строится полный траекторный инвариант ИГС в окрестности особого слоя типа седло-центр (п. 3.7). Кроме того, в п. 3.8 сформулированы и доказаны свойства инвариантов для канонических особенностей, а также получено упрощение полного траекторного инварианта, а в п. 3.9 обсуждаются примеры и доказывается теорема реализации (построение ИГС с заранее заданными инвариантами). В главе 4 представлены результаты О.Е.Орел [14] о полном гладком траекторном инварианте в окрестности невырожденного эллиптического особого слоя и замечание к ним, а в главе 5 разбирается задача о траекторной эквивалентности систем Эйлера и Лагранжа на больших уровнях энергии [9]. В главе 5 параллельно получены некоторые интересные свойства функций вращения геодезических потоков на двумерных сфере и торе.

Отметим также, что обе задачи — траекторная классификация ИГС в окрестности особого слоя и вопрос траекторной эквивалентности двух конкретных систем на больших уровнях энергии — по сути имеют одну природу. А именно, изучается вопрос траекторной эквивалентности систем в окрестностях особых слоев. Целью является изучение

“окрестностных” траекторных инвариантов. Настоящая полулокальная ситуация (когда размерность особого слоя больше нуля и изучаются траекторные свойства системы в его полной четырехмерной окрестности), рассматривается впервые.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям академику РАН, профессору А. Т. Фоменко и доктору физико-математических наук, профессору А. В. Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. Предварительные сведения

1.1. Базовые определения

Определение 1.1.1. *Отображением момента* называется отображение

$$\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{F}(x) = (H(x), F(x)).$$

Бифуркационной диаграммой называется образ особых орбит при отображении момента, т.е. множество

$$\Sigma = \{(H(x), F(x)) \mid x : \text{rk}(dH(x), dF(x)) < 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Множество Σ имеет меру нуль и обычно состоит из кусков гладких кривых (которые могут пересекаться), а также из особых точек: изолированных точек Σ , точек пересечения или касания кривых, и т.д. Слоение Лиувилля локально тривиально над каждой компонентой связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Иными словами, можно сказать, что в случае, когда все слои слоения Лиувилля компактны, прообразом отображения момента каждой точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ является некоторое число торов, и эти числа равны для всех точек из одной компоненты связности $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ (следствие теоремы Лиувилля).

На рис. 1.1.1 показаны несколько примеров бифуркационных диаграмм реальных

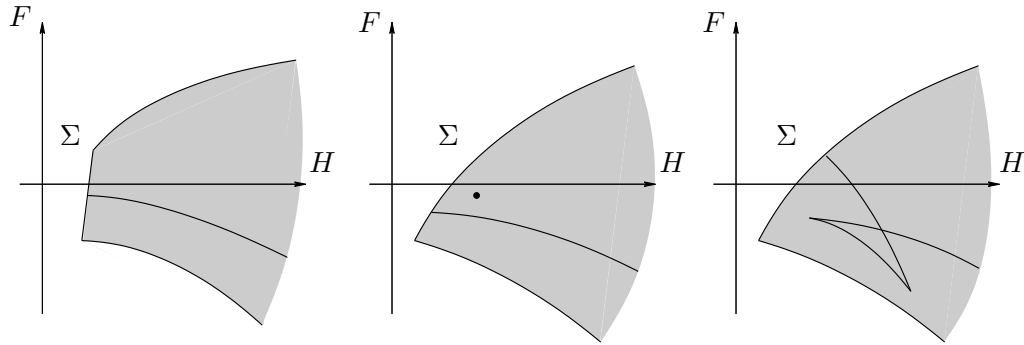


Рис. 1.1.1:

систем. Это бифуркационные диаграммы для одного из случаев интегрируемости динамики твердого тела — случая Клебша. При различном выборе параметров задачи получаются различные типы бифуркационных диаграмм, изображенных на рис. 1.1.1. Затемненная область — это образ отображения момента $\mathcal{F}(M^4)$, жирная точка на второй картинке — изолированная точка Σ .

Ясно, что особые точки в смысле пуассонова действия и особые точки в смысле отображения момента — это одни и те же точки.

Обозначим $\mathcal{B}(M^4)$ базу лиувиллева слоения на M^4 . Напомним, что точками пространства $\mathcal{B}(M^4)$ являются слои слоения Лиувилля, то есть связные компоненты совместных поверхностей уровня функций $H(x), F(x)$. Пространство $\mathcal{B}(M^4)$ представляет собой CW-комплекс и накрывает $\mathcal{F}(M^4)$.

Определение 1.1.2. Две ИГС, заданные на многообразиях M_1, M_2 , называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $\psi : M_1 \rightarrow M_2$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.

Определение 1.1.3. Две динамические системы, заданные на многообразиях M_1, M_2 , называются *непрерывно*, или *топологически траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\psi : M_1 \rightarrow M_2$, переводящий траектории первой системы в траектории второй системы с сохранением ориентации. Если многообразия M_1, M_2 ориентированы, требуется, чтобы отображение ψ сохраняло ориентацию. Параметр (время) вдоль траекторий при этом отображении может не сохраняться.

Определение 1.1.4. Две динамические системы v_1, v_2 , заданные на многообразиях M_1, M_2 , называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\psi : M_1 \rightarrow M_2$, переводящий поток σ_1^t (отвечающий системе v_1) в поток σ_2^t (отвечающий системе v_2), т.е. $\sigma_2^t = \psi \circ \sigma_1^t \circ \psi^{-1}$. При этом, если многообразия M_1, M_2 ориентированы, требуется, чтобы отображение ψ сохраняло ориентацию.

Замечание 1.1.5. Отношение лиувиллевой эквивалентности можно ввести лишь на множестве ИГС, в то время как отношения траекторной эквивалентности и топологической сопряженности действуют для более широкого класса динамических систем.

Замечание 1.1.6. Отметим, что топологическая сопряженность двух систем является более жестким условием по сравнению с траекторной эквивалентностью, т.к. кроме сохранения траекторий гомеоморфизм ψ обязан сохранять и время вдоль них.

Напомним еще одно важное понятие [5, 20, 21].

Определение 1.1.7. *Атомом* (или *2-атомом*) называется двумерная связная компактная поверхность P^2 с границей, с функцией Морса $f : P^2 \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей единственное критическое значение, и такой, что линия уровня, отвечающая этому критическому значению, связна.

Определение 1.1.8 (эквивалентное геометрическое). *Атомом* называется пара (P^2, K) , где P^2 является связной компактной двумерной поверхностью с краем, а K — связным графом в P^2 , так что выполнены следующие условия:

- 1) K либо состоит из одной точки, т.е. изолированной вершины степени 0 (см. рис. 1.1.2, этот атом по определению называется атомом A , или минимаксной бифуркацией), либо все вершины графа K имеют степень 4 (такие атомы называются *седловыми*, см., например, рис. 1.1.2);

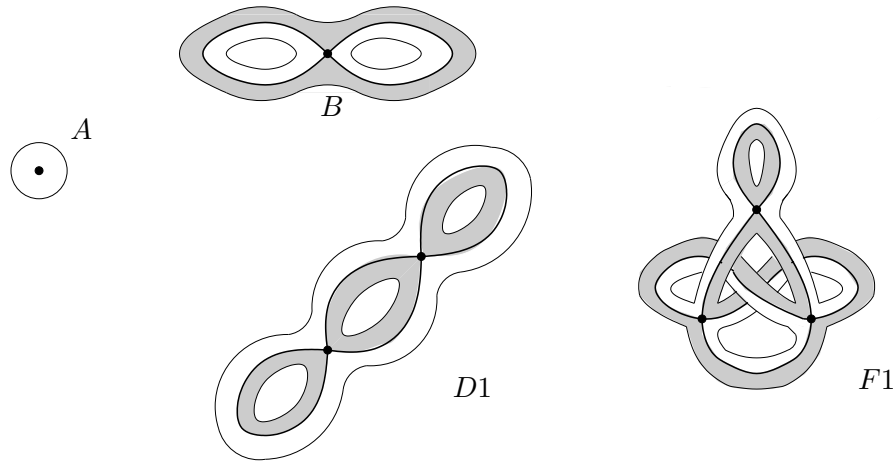


Рис. 1.1.2:

- 2) Каждая компонента связности множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$, а множество этих колец может быть разделено на два класса: положительные и отрицательные кольца, таким образом, что
- 3) каждому ребру графа K инцидентны в точности одно положительное и одно отрицательное кольцо.

Деление колец на положительные и отрицательные показано на рис. 1.1.2 в виде затемнения одного из классов (например, положительные кольца затемнены, тогда отрицательные — обычные).

Атомы, а также атомы со звездочками (нам последние не понадобятся, поэтому точное определение не дается) в точности описывают бифуркации торов Лиувилля, соответствующие пересечению кривых бифуркационной диаграммы. Они обычно обозначаются заглавными буквами с индексами. Для атомов с небольшим числом вершин приняты некоторые стандартные обозначения, см., например, [5].

Пусть γ — небольшая дуга, пересекающая кривую γ_s бифуркационной диаграммы в некоторой точке $y \neq y_0$ (см. рис. 1.1.3). Рассмотрим полный прообраз $Q^3 := \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ этой

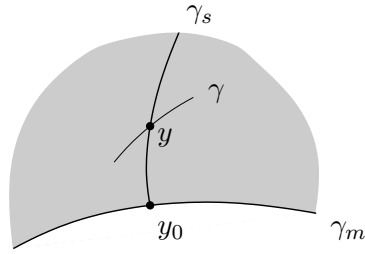


Рис. 1.1.3:

дуги. Q^3 является трехмерным инвариантным подмногообразием в M^4 , можно полагать, что это малая 3-окрестность особого слоя $\mathcal{F}^{-1}(y)$ (в некотором “большом” трехмерном подмногообразии многообразия M^4 , инвариантном относительно гамильтонова потока). Такие Q^3 называют также *3-атомами*.

1.2. Ограничения на систему

Пусть теперь L является слоем типа седло-центр, а $U(L)$ некоторая малая (четырёхмерная) окрестность L . ИГС предполагается C^∞ -гладкой. Наложим на нее некоторые ограничения:

- 1) Все слои лиувиллева слоения на $U(L)$ компактны (в этом случае все регулярные слои являются двумерными торами, как следует из теоремы Лиувилля).
- 2) Все особые точки, лежащие на L , являются невырожденными (определение невырожденности см. во введении). Как уже было отмечено, их типы в этом случае одинаковы. Назовем такой особый слой L также *невырожденным*.
- 3) ИГС нерезонансна. Это означает, что торы с иррациональной обмоткой всюду плотны. В этом случае лиувиллево слоение не зависит от выбора дополнительного интеграла и целиком определяется гамильтонианом.

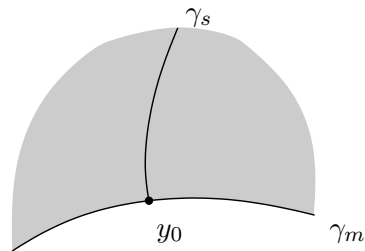


Рис. 1.2.1:

- 4) ИГС *нерасщепляема*, то есть бифуркационная диаграмма в окрестности точки $y_0 = \mathcal{F}(L)$ имеет вид, показанный на рис. 1.2.1: в кусок гладкой кривой γ_m трансверсально втыкается кусок другой гладкой кривой γ_s . Затемненная область — это $\mathcal{F}(U(L))$. Жирной точкой y_0 показан образ особых точек ранга нуль, образами особых орбит ранга 1 являются кривые γ_s и γ_m .

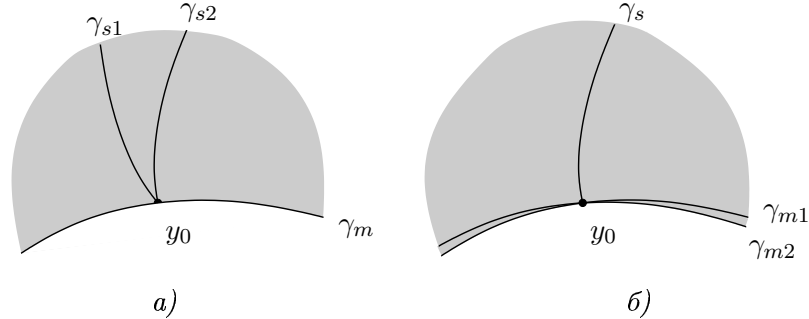


Рис. 1.2.2:

Более точно, условие 4) означает следующее. Каждой особой точке ранга нуль, лежащей на L , соответствует “полукрестик” на бифуркационной диаграмме (см. теорему Элиассона 0.1.5). Полукрестики, соответствующие различным особым точкам L , обязаны совпадать. Например, кривые из разных полукрестиков не могут полностью различаться (как, например, γ_{s1} , γ_{s2} на рис. 1.2.2 а)), а также касаться даже с бесконечной степенью касания (как, например, γ_{m1} , γ_{m2} на рис. 1.2.2 б)). Касание с бесконечной степенью невозможно для аналитических систем, однако возможно для гладких. Здесь необходимо отметить, что в некоторых случаях от касания (минимаксных кривых) можно избавиться при помощи изменения выбора дополнительного интеграла.

- 5) Без ограничения общности можно считать, что особый слой L является полным прообразом точки y_0 при отображении \mathcal{F} . Если это не так, необходимо ограничиться рассмотрением связной компоненты $\mathcal{F}^{-1}(y_0)$. Аналогично, $U(L)$ является полным прообразом диска с центром в точке y_0 .
- 6) ИГС *неспециальна*. Это означает следующее. Рассмотрим для какой-нибудь особой точки x_j ранга нуль, лежащей на слое L , симплектические координаты p_i, q_i из теоремы Элиассона 0.1.5. Пусть $f = p_1 q_1$, $s = p_2^2 + q_2^2$, в этом случае $H = H(f, s)$, $F = F(f, s)$. Неспециальность ИГС на особом слое L означает, что $\frac{\partial H}{\partial f} \Big|_{x_j} \neq 0$, $\frac{\partial H}{\partial s} \Big|_{x_j} \neq 0$. Ниже (см. определение 3.6.3 и замечание 3.6.4) будет показано, что это условие не зависит от выбора особой точки $x_j \in L$.

1.3. Пример (каноническая особенность)

Рассмотрим пример особенности типа седло-центр. Рассмотрим атом A и произвольный седловой атом $V = (P^2, K)$ (многообразие P^2 ориентированное). Пусть эти 2-атома являются двумерными симплектическими поверхностями с краем, с формами ω_1 и ω_2 соответственно, а также функциями f_1 и f_2 , задающими на двумерном диске и P^2 структуры атомов A и V . Рассмотрим теперь прямое произведение $A \times V$ с симплектической структурой $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Функции f_1 и f_2 поднимаются на это прямое произведение, коммутируют относительно ω и определяют поэтому слоение Лиувилля на $A \times V$. Точками типа седло-центр являются в точности вершины особого графа K атома V (умноженного на особую вершину A), и все они лежат на одном особом слое, совпадающем с K . Прямое произведение $A \times V$ является четырехмерной окрестностью этого особого слоя. Отметим еще, что пересечению кривой γ_s соответствует седловая бифуркация V , а пересечению кривой γ_m — минимаксная A .

1.4. Общий случай

С точки зрения лиувиллевой эквивалентности все невырожденные нерасщепляемые особенности типа седло-центр устроены канонически (п. 1.3). А именно, лиувиллево слоение в $U(L)$ может быть описано в виде прямого произведения типа $A \times V$, для некоторого подходящего седлового атома V . При этом вся информация, необходимая для описания структуры слоения Лиувилля в окрестности особенности типа седло-центр, содержится в атоме V . Более точно, выполнена теорема [23]:

Теорема 1.4.1. *Любая невырожденная нерасщепляемая особенность типа седло-центр в случае, когда все слои лиувиллева слоения компактны, лиувиллево эквивалентна канонической особенности вида $A \times V$ для некоторого подходящего седлового атома $V = (P^2, K)$.*

Пространство $\mathcal{B}(U)$ представляет собой некоторую “раскрытую книжку”, накрывающую непустую часть бифуркационной диаграммы, “корешок” которой накрывает седловую кривую γ_s (см. рис. 1.4.1). Этот корешок также будет обозначаться γ_s . Над левой и правой частями бифуркационной диаграммы имеется некоторое количество листов книжки, равное соответственно количеству граничных положительных или отрицательных окружностей для атома V , определяющего особенность. На рис. 1.4.2 показано это соответствие для особенности $A \times B$ (B — стандартное обозначение самого

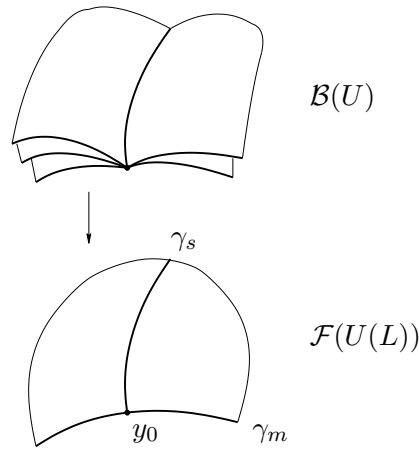


Рис. 1.4.1:

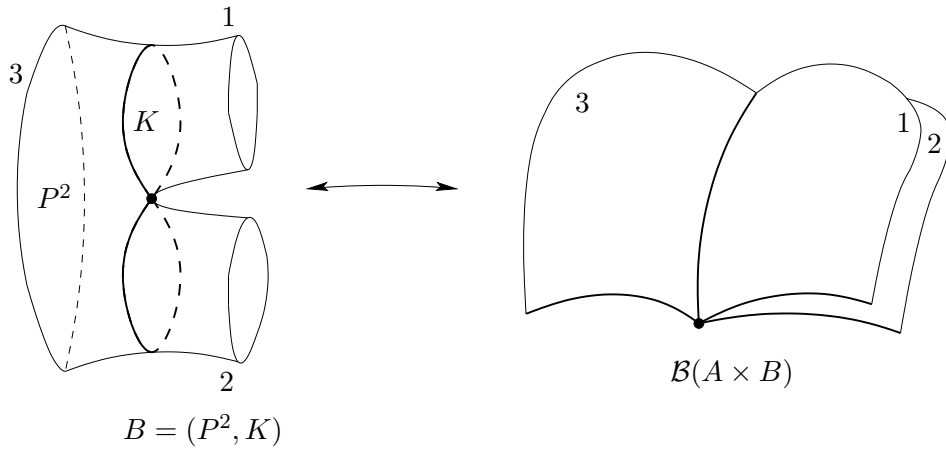


Рис. 1.4.2:

простого седлового атома — "восьмерки", см. рис. 1.1.2).

1.5. Редукция на сечение изоэнергетической поверхности

Рассмотрим какую-нибудь малую гладкую дугу γ , пересекающую стенку γ_s бифуркационной диаграммы в точке $y \neq y_0$ (рис. 1.1.3.) Рассмотрим 3-атом $Q^3 := \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$.

Определение 1.5.1. *Трансверсальное сечение, или трансверсальная площадка* — это некоторая двумерная поверхность $P_{tr} \subset Q^3$, трансверсальная интегральным траекториям системы $v = \text{sgrad } H$, такая, что любая интегральная траектория системы v , находящаяся в Q^3 , пересекает P_{tr} .

Известно [5, 20, 21], что на 3-атоме Q^3 определено расслоение Зейфerta над некоторой двумерной поверхностью P^2 : $\pi : Q^3 \xrightarrow{S^1} P^2$ с особыми слоями (если они присутствуют)

типа (2,1).

В интересующем нас случае, т.е. вблизи особого слоя типа седло-центр, у расслоения Зейферта нет особых слоев, поверхность P_{tr} (если доказано ее существование) может быть реализована в виде сечения расслоения π , и кроме того, поверхность P_{tr} диффеоморфна P^2 , а многообразию Q^3 диффеоморфно $P^2 \times S^1$. Кроме того, P^2 , P_{tr} диффеоморфны атому V , определяющему особенность. Все это следует из общего описания возможной структуры 3-атомов [5, 20, 21] и теоремы 1.4.1.

Сначала для простоты предположим, что малая дуга $\gamma = \{H = const\}$ трансверсально пересекает γ_s . В п. 2.1 будет показано, как поступить в общем случае.

Рассмотрим изоэнергетический 3-атом $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$. В [8] показано, что для такого 3-атома существует трансверсальное сечение P_{tr} . Пусть $x \in P_{tr}$ произвольная точка. Проведем через x интегральную траекторию гамильтонова поля $v = \text{sgrad } H$. В какой-то момент она впервые вернется на сечение P_{tr} и пересечет его в некоторой точке y .

Определение 1.5.2. Соответствие $\sigma : P_{tr} \rightarrow P_{tr}$, $x \mapsto y$ называется *отображением Пуанкаре*.

Точки пересечения x_1, \dots, x_n трансверсальной площадки с периодическими траекториями системы v являются неподвижными точками отображения Пуанкаре.

Ограничим на P_{tr} симплектическую структуру ω .

Лемма 1.5.3. *Форма $\omega|_{P_{tr}}$ является симплектической структурой на P_{tr} .*

Доказательство. Необходимо показать, что $\omega|_{P_{tr}}$ является замкнутой и невырожденной 2-формой. Замкнутость следует из замкнутости ω . Для доказательства невырожденности найдем ядро $\omega|_{Q^3}$. Оно одномерно, поскольку ω невырожденна на M^4 . Кроме того, оно содержит вектор v :

$$\omega(w, v) = \omega(w, \text{sgrad } H) = w(H) = 0 \quad \forall w \in T_x Q^3,$$

поскольку $H = const$ на Q^3 . Отсюда следует, что ядро формы $\omega|_{Q^3}$ порождается v , тогда из трансверсальности P_{tr} полю v следует невырожденность $\omega|_{P_{tr}}$. \square

На трансверсальном сечении P_{tr} существует однозначно определенная гамильтонова система с одной степенью свободы $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ с гладким гамильтонианом \mathcal{H} . Эта система обладает интересным свойством:

Предложение 1.5.4. [8, 17] *На трансверсальной площадке P_{tr} существует гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ с морсовским гамильтонианом $\mathcal{H} : P_{tr} \rightarrow \mathbb{R}$,*

так что отображение Пуанкаре $\sigma : P_{tr} \rightarrow P_{tr}$ является сдвигом вдоль интегральных траекторий векторного поля w на время $t = 1$ [8].

Гамильтонианом этого векторного поля является ограничение на сечение P_{tr} функции $-2\pi s$, где s является переменной действия, соответствующей циклу, являющемуся ориентированным слоем расслоения Зейферта $\pi : Q^3 \rightarrow P^2$ [17].

Определение 1.5.5. Гамильтонова система $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ на P_{tr} называется *редуцированной*. Ее также называют *поток* Пуанкаре.

В [8] доказана следующая теорема:

Теорема 1.5.6. а) Пусть две ИГС (v, M^4) , (v', M'^4) топологически траекторно эквивалентны. Рассмотрим два изоэнергетических 3-атома Q^3 и Q'^3 , соответствующих друг другу при этой эквивалентности, и пусть $P_{tr} \subset Q^3$ — любое гладкое трансверсальное сечение. Тогда существует гладкое трансверсальное сечение $P'_{tr} \subset Q'^3$ такое, что потоки Пуанкаре на P_{tr} и P'_{tr} топологически сопряжены.

б) Обратно, пусть даны системы v и v' на (изоэнергетических) 3-атомах Q^3 и Q'^3 . Пусть внутри Q^3 и Q'^3 существуют гладкие трансверсальные сечения P_{tr} , P'_{tr} такие, что потоки Пуанкаре на этих сечениях топологически сопряжены. Тогда две системы v и v' топологически траекторно эквивалентны на Q^3 и Q'^3 .

Отсюда следует, что для решения задачи топологической траекторной эквивалентности систем на изоэнергетических поверхностях Q^3 (далее будет показано, что Q^3 может быть выбрана инвариантной более общего типа) необходимо изучить инварианты топологической сопряженности гамильтоновых систем на 2-атомах (трансверсальных площадках P_{tr}).

Опишем эти инварианты (см., например, [8]).

1.6. Инварианты траекторной эквивалентности для систем на изоэнергетических инвариантных 3-поверхностях

Итак, пусть вначале $\gamma = \{H = \text{const}\}$ трансверсальна седловой кривой γ_s , $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ — инвариантное изоэнергетическое подмногообразие, P_{tr} — некоторая трансверсальная площадка в Q^3 , $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ — редуцированная система на P_{tr} . Без ограничения общности пусть на особом графе $\mathcal{H} = 0$.

1.6.a. Функция вращения

Одним из следствий теоремы Лиувилля является то, что на регулярных совместных поверхностях уровня гамильтониана и интеграла (торах Лиувилля) траектории системы $v = \text{sgrad } H$, записанные в канонических переменных действие-угол, выпрямляются, иначе говоря, система, записанная в переменных действие-угол, имеет вид:

$$\dot{s}_1 = 0$$

$$\dot{s}_2 = 0$$

$$\dot{\varphi}_1 = c_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = c_2$$

Следовательно, на каждом торе Лиувилля определено *число вращения* $\rho = \frac{c_1}{c_2}$. Если $c_2 = 0$, положим, что число вращения равно плюс или минус бесконечности, в зависимости от знака c_1 .

Для нахождения числа вращения не обязательно использовать переменные действие-угол.

Лемма 1.6.1. Пусть $(x \bmod 2\pi, y \bmod 2\pi)$ — произвольная система координат на торе, координатные линии которой гомотопны координатным линиям канонических угловых переменных φ_1, φ_2 . Рассмотрим x и y в качестве координат на плоскости, накрывающих тор. Пусть $(x(t), y(t))$ — произвольная интегральная траектория поля v . Тогда $\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Лемму 1.6.1 можно взять в качестве определения числа вращения.

Таким образом, понятие числа вращения определяется для более широкого класса динамических систем, чем только ИГС.

Число вращения зависит от выбора координат на торе. Более точно, как следует из леммы 1.6.1, оно определяется относительно выбора базиса циклов в фундаментальной группе, но не относительно конкретного выбора координат.

Выберем и зафиксируем пару базисных циклов (λ, μ) . Далее гладко продолжим выбранный базис (λ, μ) на близкие торы.

Определение 1.6.2. Функцией вращения (обычно также обозначается ρ) называется зависимость числа вращения от тора в выбранном базисе.

Таким образом, можно говорить о функции вращения как о функции на пространстве $\mathcal{B}(U)$.

Замечание 1.6.3. Функция вращения определена на каждом из регулярных кусков пространства $\mathcal{B}(U)$, а не только на части, соответствующей кривой γ .

1.6.б. Λ -инвариант

Рассмотрим особые точки x_1, \dots, x_n гамильтонова векторного поля $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ на P_{tr} . Пусть λ_i, μ_i — собственные числа линеаризации системы в точке x_i . Если все особые точки x_1, \dots, x_n являются невырожденными, то в силу гамильтоновости векторного поля можно считать, что $\lambda_i = -\mu_i, \lambda_i > 0$.

Поскольку мы рассматриваем окрестность $U(L)$ невырожденного особого слоя L типа седло-центр, то предположение о невырожденности точек x_1, \dots, x_n векторного поля на двумерной трансверсальной площадке можно считать выполненным.

Рассмотрим теперь числа $\Lambda_i = \lambda_i^{-1}$.

Определение 1.6.4. Λ -инвариантом называется набор вещественных чисел $\Lambda = \{\Lambda_1 : \dots : \Lambda_n\}$, рассматриваемый с точностью до пропорциональности.

Необходимо заметить, что поверхность P_{tr} может быть выбрана неоднозначно. В [8] доказано, что эта неоднозначность не влияет на значение Λ -инварианта, являющегося топологическим траекторным инвариантом исходной системы на Q^3 .

1.6.в. Δ и Z -инварианты

После выбрасывания особого графа K (соответствующего уровню $\mathcal{H} = 0$) поверхность P_{tr} распадается на кольца. Рассмотрим некоторое кольцо C .

Определение 1.6.5. Граничная окружность кольца C называется *внутренней*, если она примыкает к графу K и *внешней* в противоположном случае. Кольцо C называется *положительным*, если гамильтонов поток σ^t течет по внешней границе кольца в положительном направлении. В противоположном случае оно называется *отрицательным*. Ориентация на кольце задается при помощи внешней нормали, взяв направление исходного гамильтонова векторного поля на 3-атоме.

Эквивалентно: Кольцо атома называется *положительным* (*отрицательным*), если на нем гамильтониан $\mathcal{H} > 0$ (< 0).

Свойство кольца быть положительным или отрицательным сохраняется при топологической сопряженности потоков на P_{tr} или при топологической траекторной эквивалентности систем на 3-атомах.

На каждом кольце атома определены переменные действие-угол s и φ . Угловая переменная определена неоднозначно. В качестве ее начала отсчета выберем некоторый гладкий “отрезок” N , соединяющий пару точек на внешней и внутренней границах кольца и трансверсальный траекториям. Воспользуемся предложением, описывающим поведение остальных линий уровня угловой переменной [8]:

Предложение 1.6.6. Пусть $C = C_m$ — произвольное кольцо атома (P, K) , K_{m_1}, \dots, K_{m_p} — ребра графа K , примыкающие к данному кольцу C , S_{m_1}, \dots, S_{m_p} — вершины графа K , являющиеся концами ребер K_{m_1}, \dots, K_{m_p} . Тогда

- а) На каждом ребре K_{m_i} существует единственная внутренняя точка x_i , являющаяся предельной точкой некоторой гладкой линии уровня $N = \{\varphi = \alpha_i\}$ угловой переменной φ на кольце C . При этом начальный отрезок N совпадает с N_1 .
- б) Отрезки N_i разбивают кольцо на прямоугольники, на каждом из которых все линии уровня $\{\varphi = \text{const}\}$, за исключением N_i , втыкаются в особые точки S_{m_i} .
- в)

$$N_1 = \{\varphi = 0\}, \quad N_{i+1} = \left\{ \varphi = 2\pi \frac{\sum_{j=1}^i \Lambda_{m_j}}{\sum_{j=1}^p \Lambda_{m_j}} \right\} \quad \text{при } i = 1, \dots, p$$

См. также рис. 1.6.1.

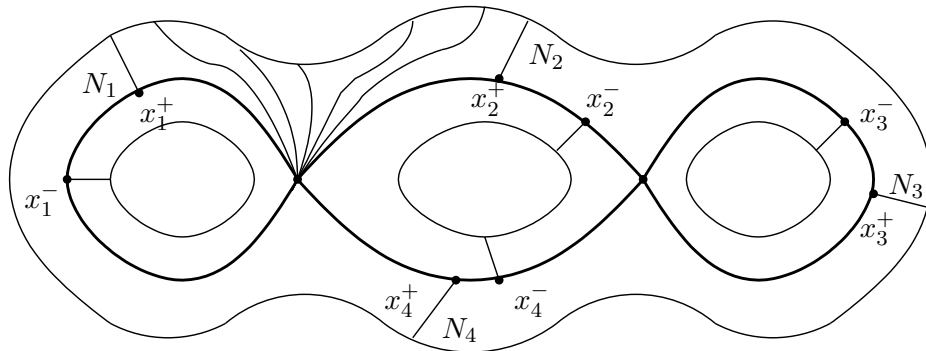


Рис. 1.6.1:

Рассмотрим какое-нибудь ребро K_i графа K . К нему примыкает одно положительное и одно отрицательное кольцо. На каждом из них определим в соответствии с предложением угловую переменную и отрезки раздела. На каждом ребре K_i мы получим пару точек x_i^+ и x_i^- , являющиеся концами линий уровня угловой переменной, втыкающимися в K_i , см. снова рис. 1.6.1. (Знаки “+” и “-” указывают на знак кольца.)

Обозначим t_i время, необходимое для перемещения из точки x_i^+ в точку x_i^- под действием потока σ_t .

Рассмотрим одномерную цепь $l = \sum_i t_i K_i$. Эта цепь не является инвариантом гамильтоновой системы на площадке, поскольку отрезки раздела не определены однозначно. Неоднозначность заключается в том, что для каждого кольца отрезки раздела можно сдвигать на одну и ту же величину. То есть точки раздела x_i^+ или x_i^- , принадлежащие одному кольцу, сдвинутся на одну и ту же величину, изменив, соответственно времена t_i на эту же самую величину.

Пусть \tilde{P} — замкнутая поверхность, получаемая из P_{tr} заклеивкой всех граничных окружностей дисками. Тогда граф K задает клеточное разбиение поверхности \tilde{P} . Рассмотрим отвечающие этому разбиению группы $C_1(\tilde{P})$, $Z_1(\tilde{P})$, $B_i(\tilde{P})$, $i = 0, 1$ вещественных клеточных цепей, циклов и границ. Неоднозначность выбора отрезков раздела теперь очень легко учесть.

Следствие 1.6.7. *Цепь $l \in C_1(\tilde{P})$ определена с точностью до одномерных границ, то есть ее класс $[l] \in C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$ является корректно определенным, и как следует из предложения 1.6.6, инвариантом гамильтоновой системы на атоме в смысле топологической сопряженности.*

Замечание 1.6.8. Из утверждения в) предложения 1.6.6 также следует, что Λ является инвариантом топологической сопряженности систем на атоме.

Инвариант $[l]$ можно разделить на два более простых инварианта. Изготовим их из самой цепи l . Пусть $\partial : C_1(\tilde{P}) \rightarrow B_0(\tilde{P})$ — стандартный граничный оператор.

Определение 1.6.9. Граница $\Delta = \partial(l)$ цепи l называется Δ -инвариантом гамильтоновой системы w на атоме (P_{tr}, K) .

Кроме того, введем какое-нибудь скалярное произведение на пространстве $C_1(\tilde{P})$. Пусть теперь

$$\pi : C_1(\tilde{P}) \rightarrow Z_1(\tilde{P})$$

ортогональная проекция на подпространство циклов $Z_1(\tilde{P})$. Рассмотрим образ цепи l под действием π .

Определение 1.6.10. Класс гомологий $Z = [\pi(l)] \in H_1(\tilde{P}) = Z_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$ называется Z -инвариантом гамильтоновой системы w на атоме (P_{tr}, K) .

Из определений ясно, что Δ и Z не зависят от выбора представителя в классе $[l]$, следовательно, они действительно являются инвариантами гамильтоновой системы на атоме. Кроме того, в паре (Δ, Z) содержится столько же информации о системе, сколько и в классе $[l]$, поскольку с помощью отображения $\pi : C_1(\tilde{P}) \rightarrow Z_1(\tilde{P})$ был фактически задан изоморфизм

$$C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P}) \simeq C_1(\tilde{P})/Z_1(\tilde{P}) + Z_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P}) \simeq B_0(\tilde{P}) + H_1(\tilde{P}).$$

1.7. Инварианты в случае произвольной инвариантной 3-поверхности, общая ситуация

Что изменится, если теперь выбрать в качестве γ не изоэнергетическую кривую $\{H = \text{const}\}$, а произвольную кривую, трансверсальную γ_s ? (На самом деле вместо изоэнергетических кривых можно брать не только произвольные кривые, трансверсальные γ_s , но и некоторый более широкий класс *допустимых* кривых, который будет описан ниже, см. определение 2.1.1.)

Мы получим некоторую инвариантную в смысле потока v 3-поверхность $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ (в общем случае, не изоэнергетическую). Для нее аналогично можно выбрать двумерную площадку P_{tr} , трансверсальную интегральным траекториям v , а также определить симплектическую структуру и отображение Пуанкаре.

В п. 2.1 будет доказано существование трансверсальной площадки, а также аналогии леммы 1.5.3 (о симплектической структуре на P_{tr}) и предложения 1.5.4 (об отображении Пуанкаре). А именно, на P_{tr} строится гамильтонова система, обладающая уже упомянутым свойством: сдвиг на $t = 1$ совпадает с образом отображения Пуанкаре. Теорема 1.5.6 о сведении траекторной эквивалентности на Q^3 к топологической сопряженности на P_{tr} выполняется дословно.

Следовательно, можно снова говорить о редуцированной системе на P_{tr} и обсуждать ее инварианты топологической сопряженности Λ, Δ, Z .

1.8. Полнота набора ρ, Λ, Δ, Z для систем на инвариантных 3-поверхностях

Рассмотрим инвариантное подмногообразие $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ для некоторой допустимой гладкой дуги γ (см. определение 2.1.1), пересекающей γ_s в точке $y \neq y_0$. Тогда в соответствии с теорией Болсинова-Фоменко [8] инварианты ρ, Λ, Δ и Z полностью описывают поведение траекторий системы $v = \text{sgrad } H$ на Q^3 . Более точно, выполнены

следующие два утверждения.

Теорема 1.8.1. Пусть даны две гладкие гамильтоновы системы w и w' с морсовскими гамильтонианами на гомеоморфных 2-атомах P и P' (например, редуцированные системы на трансверсальных площадках, см. главу 2.1). Пусть Λ, Δ, Z и Λ', Δ', Z' — соответствующие инварианты. Тогда системы w и w' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $\varphi : P_{tr} \rightarrow P'_{tr}$, сохраняющий ориентацию и знак гамильтониана, а тройку инвариантов (Λ, Δ, Z) переводящий в (Λ', Δ', Z') . Последнее условие является комбинаторным.

Теорема 1.8.2. [Т. 1.5.6+Т. 1.8.1]

Пусть даны две гладкие гамильтоновы системы v и v' на их инвариантных 3-многообразиях $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ и $Q'^3 = \mathcal{F}'^{-1}(\gamma')$, где $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ — отображения момента для v, v' соответственно, а γ, γ' — малые допустимые дуги на бифуркационных диаграммах, пересекающие седловые кривые. Предположим, что v и v' ливиллево эквивалентны на Q^3 и Q'^3 .

Тогда эти системы топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие трансверсальные площадки P_{tr} и P'_{tr} и сохраняющий их ориентацию и знаки гамильтонианов редуцированных систем гомеоморфизм $\varphi : P_{tr} \rightarrow P'_{tr}$, который тройку (Λ, Δ, Z) переводит в (Λ', Δ', Z') .

Замечание 1.8.3. В теоремах 1.8.1 и 1.8.2 нет никаких условий на ρ .

Уточнение 1.8.4. Функция вращения, записанная в стандартном базисе, состоящем из однозначно определенного цикла и цикла, высекаемого трансверсальной площадкой, совпадает с функцией периода редуцированной системы на P_{tr} .

Поскольку ρ является инвариантом траекторной эквивалентности, то следовало бы потребовать дополнительно сопряженности функций вращения ρ и ρ' , вычисленных для систем v и v' соответственно. Однако, далее будет показано, что ρ, ρ' монотонно стремятся к плюс или минус бесконечности при приближении к особому слою, в зависимости от того, является ли соответствующее кольцо атома положительным или отрицательным. То есть фактически в качестве инварианта остаются знаки ρ на кольцах и ее пределы на внешних границах колец.

Ориентация трансверсальной площадки при помощи потока системы v и знак гамильтониана редуцированной системы определяют разбиение 2-атома на положительные и отрицательные кольца, следовательно, определяют и знаки ρ на

кольцах. А равенства пределов легко добиться, укоротив, если нужно, дуги γ, γ' , что уменьшит окрестности $U(L), U'(L')$. Именно о таких окрестностях идет речь в теореме 1.8.2. Аналогично можно поступить с выбором P_{tr} и P'_{tr} . Поэтому справедливо формулировать теоремы 1.8.1 и 1.8.2 без условий на ρ .

1.9. Изготовление траекторных инвариантов для 4-окрестностей

Замечание 1.9.1. Отметим, что построенные инварианты ρ, Λ, Δ, Z зависят

1. от выбора базисных циклов на регулярных торах — инвариант ρ ;
2. от выбора трансверсального сечения при фиксированной инвариантной 3-поверхности (т.е. при фиксированной γ) — инварианты Λ, Δ, Z ;
3. от выбора точки на особой кривой γ_s бифуркационной диаграммы, через которую проходит γ — инварианты Λ, Δ, Z ;
4. от выбора непосредственно кривой γ (в классе допустимых кривых, пересекающих кривую γ_s и проходящих через ее фиксированную точку) — инварианты Λ, Δ, Z .

Первые два условия являются зависимыми. Сначала разберемся с выбором базисных циклов.

В случае, когда мы находимся в четырехмерной окрестности особого слоя типа седло-центр, имеется один однозначно определенный базисный цикл. Это слой расслоения Зейферта (он же — стягивающийся при приближении к кривой γ_m бифуркационной диаграммы цикл) с ориентацией, заданной потоком.

Второй цикл не является однозначно определенным, но если задано трансверсальное сечение, можно в качестве второго базисного цикла взять соответствующую граничную окружность и выбрать ориентацию так, чтобы пара циклов была положительно ориентирована.

Уточнение 1.9.2. (Выбор ориентации.) Это означает следующее. У нас уже имеется ориентация на $U(L)$; тогда, уменьшая, если нужно, окрестность $U(L)$, инвариантное многообразие Q^3 может рассматриваться как часть границы $U(L)$. Следовательно, ориентация на Q^3 также определена, значит, определена и ориентация любого ее граничного тора. Именно эта последняя ориентация и имеется в виду при определении ориентации второго базисного цикла на торе.

Итак, можно учитывать только неоднозначность выбора трансверсального сечения, т.к. сечение содержит информацию о недостающем базисном цикле, необходимом для вычисления функции вращения. При этом изотопии трансверсального сечения несущественны, важен класс гомологичных сечений. Т.е. опять-таки получается, что речь идет о некотором выборе циклов на регулярных торах Лиувилля, близких к особому слою слоения Лиувилля. Ответ на вопрос о зависимости инвариантов от выбора трансверсального сечения известен [8].

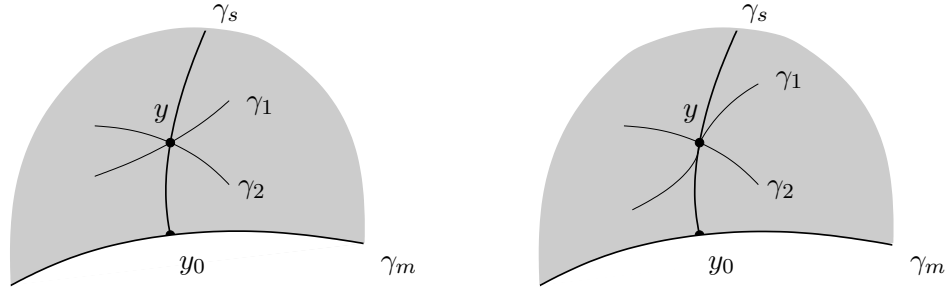


Рис. 1.9.1:

Третье условие — очевидно, существенно.

Четвертое условие. Нужно разобраться, как различаются инварианты Λ , Δ , Z для двух кривых γ_1 , γ_2 из класса допустимых, пересекающих γ_s в одной точке (рис. 1.9.1), при условии, что трансверсальные площадки на инвариантных подмногообразиях $Q_1 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_1)$, $Q_2 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_2)$ выбраны согласованно (это будет сделано в п. 3.5).

Определение 1.9.3. Трансверсальные площадки P_{tr}^1 для Q_1^3 и P_{tr}^2 для Q_2^3 выбраны согласованно, если их особые графы совпадают.

Лемма 1.9.4. Пусть фиксирован особый граф $K \subset Q^3$. По этой информации однозначно восстанавливаются вторые базисные циклы на торах Лиувилля, то есть любое трансверсальное сечение P_{tr} определяется с точностью до изотопии графом K , в том случае, если оно существует.

Замечание 1.9.5. Вопрос существования трансверсального сечения обсуждается в лемме 2.1.2.

Доказательство. Нужно доказать, что для каждого кольца атома P его граница как граница трансверсального сечения определяется с точностью до изотопии положением особого графа на особом слое слоения Лиувилля — прообразе $L = \mathcal{F}^{-1}(y)$ точки y . Рассмотрим какое-нибудь кольцо атома и соответствующий ему граничный тор в Q^3 . Пусть выбранному кольцу соответствует лист X книжки $\mathcal{B}(U)$.

Вопрос заключается в том, можно ли выбрать по окружности из разных гомотопических классов на торе так, чтобы они стягивались на один и тот же граф на L .

Особый слой L слоения Лиувилля топологически является прямым произведением $K \times S^1$. Нас интересует часть $K \times S^1$, соответствующая выбранному листу X книжки $\mathcal{B}(U)$.

Регулярные слои являются торами. При стягивании на L такой тор нужно преобразовать следующим образом. Нужно взять регулярный тор, выбрать на нем четное число непересекающихся окружностей, гомологичных первому (однозначно определенному) базисному циклу. После этого производится склейка тора по парам окружностей, согласно топологии графа K . Или, что то же самое, нужно посмотреть, как выбранное кольцо обходит K , умножить на окружность и после этого произвести склейки согласно обходу.

Поэтому нужную часть L (границу регулярной части U , соответствующую листу X) можно рассматривать в виде тора с отождествленными окружностями, информация о склейках при этом сохранится. Особый граф K (его часть, соответствующая рассматриваемой части особого слоя) превратится в обычную окружность на торе, некоторые точки которой выделены и поделены на пары. При склейке тора в особую поверхность пары точек должны будут склеиться согласно инволюции. Чтобы получить теперь границу трансверсального сечения из окружности=расклеенного графа, ее можно как угодно непрерывно деформировать на торе. Ясно, однако, что такие деформации не меняют гомотопического класса окружности на торе. Поэтому окружности из разных классов на граничных регулярных торах не могут стянуться на один и тот же особый граф на особом слое. \square

Замечание 1.9.6. Видно, однако, что из одного и того же цикла на торе можно после непрерывной деформации и последующей склейки получить разные графы на L . Это, в частности, означает, что изотопные трансверсальные сечения могут задаваться неизотопными графами на особом слое.

2. О редукции

2.1. Редукция — общий случай

Пусть $y \in \gamma_s$, где γ_s — седловая кривая бифуркационной диаграммы. Рассмотрим малую окрестность W точки y (см. рис. 2.1.1а).

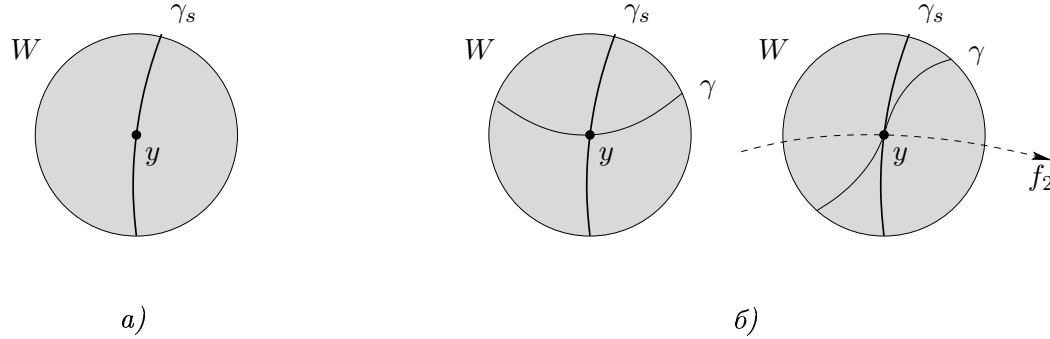


Рис. 2.1.1:

Без ограничения общности будем считать, что $M^4 = \mathcal{F}^{-1}(W)$ связно. Пусть бифуркация при переходе через γ_s описывается седловым атомом $V = (P^2, K)$. Тогда $M^4 \simeq Q^3 \times I \simeq P^2 \times S^1 \times I$ в смысле Лиувиллевой эквивалентности. Пусть f_2 — функция Морса на P^2 , задающая структуру атома на P^2 , индуцированную слоением Лиувилля на M^4 ; при этом f_2 можно считать определенной на M^4 . Ясно, что $\{H, f_2\} = 0$, также можно полагать, что H и f_2 функционально независимы. Можно полагать $f_2 = 0$ на особом графе K (на γ_s , соответственно). Рассмотрим также переменную действия s , отвечающую однозначно определенному базисному циклу (слою расслоения Зейферта).

Будем полагать, что (s, f_2) являются координатами на плоскости $\mathbb{R}^2(H, F)$ бифуркационной диаграммы. В общем случае это условие выполнено на отдельных листах книжки $\mathcal{B}(M^4)$, накрывающей W , однако накрытие не обязано сохранять f_2, s .

Определение 2.1.1. *Допустимой* называется произвольная гладкая кривая, пересекающая γ_s в точке y и являющаяся графиком некоторой функции от f_2 , возможно, имеющим вертикальную касательную в точке y (и только в ней), см. рис. 2.1.1б). Очевидно, что малые гладкие дуги, пересекающие γ_s трансверсально, являются допустимыми.

Пусть γ — произвольная допустимая кривая. Будем считать, что γ — достаточно малая дуга, чтобы в инвариантном подмногообразии $\mathcal{F}^{-1}(\gamma) =: Q^3 \subset M^4$ имелось двумерное

сечение P_{tr} , трансверсальное интегральным траекториям системы v — *трансверсальная площадка* (см. определение 1.5.1). Сейчас мы докажем существование P_{tr} .

Аналогично ситуации изоэнергетической поверхности, симплектическую структуру на P_{tr} нужно задавать в виде ограничения исходной структуры ω на эту площадку. Здесь необходимо отметить, что ранее (см. лемму 1.5.3) площадка P_{tr} выбиралась так, чтобы быть трансверсальной слоям расслоения Зейферта (являющимися интегральными линиями поля $\text{sgrad } s$), а также интегральным траекториям поля $v = \text{sgrad } H$. При этом последнее условие гарантировало невырожденность формы $\omega|_{P_{tr}}$ в случае, когда Q^3 была изоэнергетической. Ясно поэтому, что теперь необходимо выбирать P_{tr} не только трансверсальной слоям расслоения Зейферта и потоку $v = \text{sgrad } H$, но также и потоку $\text{sgrad } \alpha$, где условие $\alpha(s, f_2) = \text{const}$ задает кривую γ .

Лемма 2.1.2. *Пусть допустимая кривая γ задана условием $\alpha(s, f_2) = \text{const}$. Тогда в многообразии $Q^3 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ существует трансверсальная площадка P_{tr} такая, что выполнены следующие условия:*

(1) форма $\omega|_{P_{tr}}$ невырожденна, и, следовательно, является симплектической структурой на P_{tr} .

(2) P_{tr} трансверсальна полям $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } s$.

Кроме того, если $\frac{\partial \alpha}{\partial s} \neq 0$, то площадку P_{tr} можно выбрать в любом гомотопическом классе, если же $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$, то в положении особого графа площадки P_{tr} на особом слое для каждого его ребра существует не более одной (гомотопически) запрещенной ситуации (лемма 1.9.4 показывает, что класс сечения определяется положением особого графа на особом слое).

Доказательство. Найдем ядро формы $\omega|_{Q^3}$. Очевидно, что

$$0 = w(\alpha) = \omega(w, \text{sgrad } \alpha) \quad \forall w \in T_x Q^3, \quad x \in Q^3.$$

Поскольку ядро одномерно, оно порождается вектором $\text{sgrad } \alpha$.

Покажем теперь, что трансверсальное сечение можно выбрать трансверсальным векторному полю $\text{sgrad } \alpha$ (и одновременно $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } s$). Трансверсальность полю $\text{sgrad } \alpha$ будет гарантировать невырожденность $\omega|_{P_{tr}}$.

Ввиду того, что Q^3 — узкая окрестность особого слоя $L = \mathcal{F}^{-1}(y)$, достаточно показать трансверсальность на L . Особый слой L гомеоморфен $K \times S^1$, где K — особый граф атома P^2 . После выбрасывания из L замкнутых траекторий поля v слой L распадется на кольца.

Известно [8], что с точностью до диффеоморфизма для каждого из колец возможны следующие три случая (см. рис. 2.1.2):

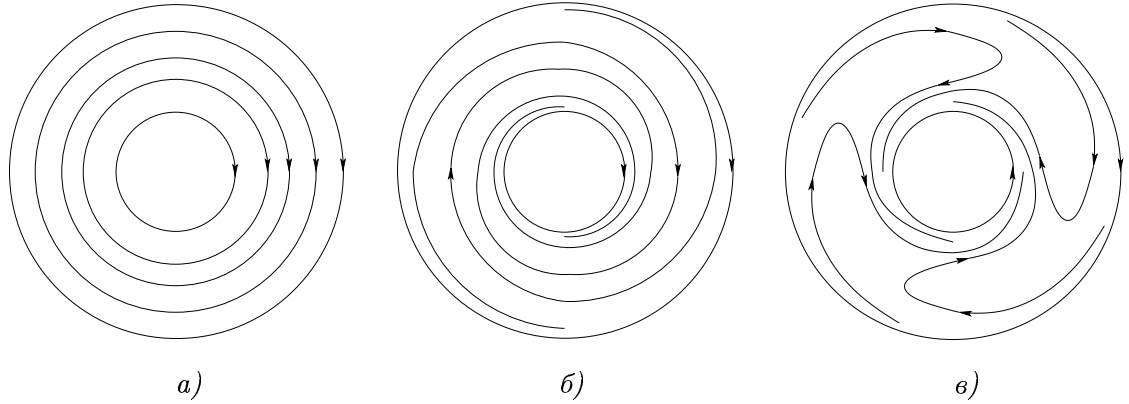


Рис. 2.1.2:

- а) Все интегральные траектории поля v замкнуты на кольце.
- б) Все интегральные траектории незамкнуты, причем граничные окружности кольца являются для каждой из траекторий предельными циклами, имеющими одинаковые ориентации.
- в) Все интегральные траектории незамкнуты, причем граничные окружности кольца являются для каждой из траекторий предельными циклами, имеющими противоположные ориентации.

Докажем, пользуясь идеями [23], что в нашем случае невозможен случай в). Обозначим S_1, S_2 граничные окружности кольца. Они являются интегральными траекториями поля v . Нужно доказать, что S_1, S_2 имеют одинаковые ориентации.

С точки зрения M^4 окружности S_i содержатся в однопараметрических семействах $S_i(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-1, 1)$ невырожденных замкнутых одномерных орбит пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 , порожденной полями $\text{sgrad } H, \text{sgrad } f_2$. Образом семейств $S_1(\varepsilon), S_2(\varepsilon)$ при отображении момента является часть бифуркационной диаграммы — кусок кривой γ_s .

Рассмотрим точку $x \in S_i$. В окрестности x выберем координаты p_1, q_1, p_2, q_2 в соответствии с теоремой Дарбу. Поскольку $dH(x) \neq 0$, можно выбрать их так, что $H = p_1$. Поскольку $\{H, f_2\} = 0$, то $f_2 = f_2(p_1, p_2, q_2)$. В качестве локальных координат на многообразии $M_i = \{S_i(\varepsilon) \mid \varepsilon \in (-1, 1)\}$ можно взять p_1 и q_1 .

В самом деле, S_i задается условиями $\frac{\partial f_2}{\partial p_2} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = 0$. Кроме того, f_2 является функцией

Морса на компоненте P^2 многообразия $M^4 \simeq P^2 \times S^1 \times I$. Это означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$$

невырождена в точках M_i . Отсюда по теореме о неявной функции получим, что на M_i координаты p_2, q_2 локально выражаются через p_1, q_1 . Тогда

$$H = p_1, \quad f_2 = f_2(p_1, p_2(p_1, q_1), q_2(p_1, q_1)) = f_2(p_1, p_2(p_1), q_2(p_1)) =: \tilde{f}_2(p_1) = \tilde{f}_2(H).$$

В выбранной системе координат получим:

$$\text{sgrad } f_2(x) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial p_1} \text{sgrad } H. \quad (2.1.1)$$

Поскольку p_1 является также параметром на дуге γ_s , то

$$\dot{\gamma}_s(y) = \left(1, \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial p_1} \right),$$

откуда видно, что величина $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial p_1} =: c$ определяется кривой γ_s , и поэтому одинакова для S_1, S_2 .

Для периодического интеграла s на особом слое выполнено:

$$\text{sgrad } s = a \text{sgrad } H + b \text{sgrad } f_2, \quad (2.1.2)$$

где a, b — постоянные.

Сравнивая (2.1.1) и (2.1.2), получим:

$$\text{sgrad } s = (a + bc) \text{sgrad } H.$$

Это означает, что векторы $\text{sgrad } s$ и $\text{sgrad } H$ либо одинаково ориентированы, либо направлены в противоположные стороны одновременно для S_1 и S_2 . Поскольку поле $\text{sgrad } s$ невырождено на всем многообразии M^4 , ориентации $\text{sgrad } H$ для S_1, S_2 одинаковы.

Итак, возможны только случаи рис. 2.1.2*а*) и *б*).

Выберем какое-нибудь сечение. Пересечением его с особым слоем является граф. Зафиксируем вершины этого графа. Наша цель — на каждом из колец подправить кривую, соединяющую две вершины так, чтобы она была трансверсальна векторным полям $\text{sgrad } H, \text{sgrad } s$ и $\text{sgrad } \alpha$. При этом концы кривой фиксированы и она должна остаться в том же гомотопическом классе. (См. рис. 2.1.3, соответствует случаю рис. 2.1.2*б*.)

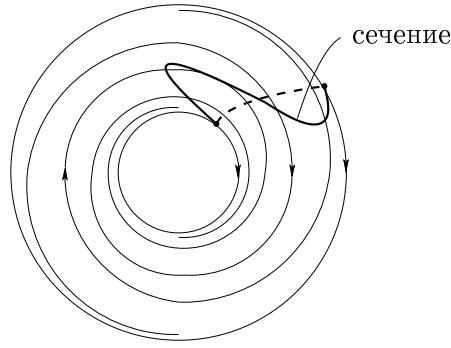


Рис. 2.1.3:

Выберем координаты на кольце. В качестве угловой координаты можно выбрать угловую переменную φ , соответствующую выживающей при переходе через γ_s переменной действия s . При этом началом отсчета угла φ положим какую-нибудь интегральную кривую поля $\text{sgrad } f_2$.

Это некоторый “отрезок”, соединяющий точки на внутренней и внешней границах кольца и втыкающийся в границы кольца трансверсально. В самом деле, пусть на P^2 заданы координаты x, y , так что $f_2 = f_2(x, y)$, а ω^{ij} компоненты матрицы, обратной к задающей форму ω , в координатах s, φ, x, y . Поскольку $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и одновременно $\text{sgrad } s = -\omega^{12} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \omega^{13} \frac{\partial}{\partial x} - \omega^{14} \frac{\partial}{\partial y}$, получим, что

$$\omega^{13} = \omega^{14} = 0. \quad (2.1.3)$$

Тогда

$$\text{sgrad } f_2 = \left(\omega^{23} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \omega^{24} \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega^{34} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \omega^{34} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Отсюда ясно, что если $\omega^{34} \neq 0$, то поток $\text{sgrad } f_2$ втыкается в границы особого кольца трансверсально. Покажем, что $\omega^{34} \neq 0$. Предположим противное. Тогда, учитывая (2.1.3), определитель матрицы (ω^{ij}) равен $(\omega^{13}\omega^{24})^2 + (\omega^{14}\omega^{23})^2 = 0$, поэтому матрица (ω^{ij}) вырожденна, что невозможно. Значит, $\omega^{34} \neq 0$.

В качестве второй координаты u на кольце возьмем некоторую параметризацию выбранной интегральной кривой; пусть $0 \leq u \leq 1$. Накроем также кольцо бесконечной полосой, т.е. пусть $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H &= \frac{\partial H}{\partial s} \text{sgrad } s + \frac{\partial H}{\partial f_2} \text{sgrad } f_2 \\ \text{sgrad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial s} \text{sgrad } s + \frac{\partial \alpha}{\partial f_2} \text{sgrad } f_2 \end{aligned}$$

Величины $\frac{\partial H}{\partial s}$, $\frac{\partial H}{\partial f_2}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial f_2}$ постоянны на особом слое, т.е. не зависят от φ, u . Кроме того, $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, а векторное поле $\text{sgrad } f_2$ касается линий уровня φ , поэтому каждое

из векторных полей $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } \alpha$ (поднятых на бесконечную полосу) имеет вид, как на рис. 2.1.4. Поскольку $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } \alpha$ не зависят от φ , то их поведение указано только при $\varphi = 0$.

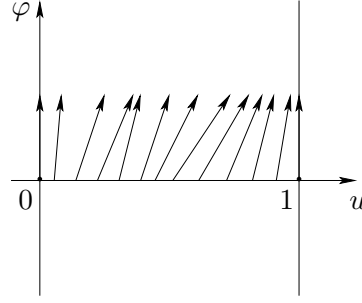


Рис. 2.1.4:

Отметим, что в зависимости от знаков $\frac{\partial H}{\partial s}$, $\frac{\partial H}{\partial f_2}$ (или $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial f_2}$, соответственно) наклон или направление полей могут быть другими (однако, φ -компонента и знак u -компоненты постоянны для каждого из полей). Пусть $\text{sgrad } f_2 = k(u) \frac{\partial}{\partial u}$, где $k(u) = 0$ только при $u = 0, 1$.

Отметим, что в обоих случаях рис. 2.1.2а) и б) $\frac{\partial H}{\partial s} \neq 0$.

I. Случай рис. 2.1.2б). Здесь $\frac{\partial H}{\partial f_2} \neq 0$.

1. $\frac{\partial \alpha}{\partial s} \neq 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial f_2} \neq 0$.

А) знаки $\frac{\frac{\partial H}{\partial s}}{\frac{\partial H}{\partial f_2}}$ и $\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial s}}{\frac{\partial \alpha}{\partial f_2}}$ одинаковы.

В этом случае для функций $f(u) = \frac{\frac{\partial H}{\partial s}}{\frac{\partial H}{\partial f_2} k(u)}$ и $g(u) = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial s}}{\frac{\partial \alpha}{\partial f_2} k(u)}$ выполнено: непрерывные на $(0, 1)$ всюду отличные от нуля функции $f(u)$ и $g(u)$ стремятся к бесконечности одного знака при $u \rightarrow 0, 1$, причем интегралы $\int_0^1 f(u) du$ и $\int_0^1 g(u) du$ расходятся в нуле и единице.

В самом деле, функции $f(u)$ и $g(u)$ имеют смысл тангенсов углов наклона интегральных кривых полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } \alpha$ соответственно. Тогда сами интегральные кривые задаются некоторыми функциями от u , которые, в свою очередь, являются с точностью до констант интегралами $\int_0^1 f(u) du$ и $\int_0^1 g(u) du$. Следовательно, первый из них расходится, поскольку границы кольца являются предельными для интегральных кривых поля $\text{sgrad } H$, а второй расходится потому, что $g(u) = \text{const} \cdot f(u)$.

Нам нужно построить гладкую кривую — функцию $r(u)$, которая пересекает все интегральные кривые полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } \alpha$

трансверсально, так чтобы при этом перепад $r(1) - r(0)$ являлся любой наперед заданной величиной (определяемой неподвижными узлами особого графа).

Мы будем строить функцию $h(u) = r'(u)$. На $h(u)$ имеются следующие ограничения: непрерывность на $[0, 1]$, отсутствие точек совпадения с $f(u)$, $g(u)$, интеграл $\int_0^1 h(u)du = \int_0^1 r'(u)du$ сходится и равен наперед заданной величине $r(1) - r(0)$. Очевидно, наиболее существенным является последнее ограничение, но и ему нетрудно удовлетворить, учитывая, что $\int_0^1 f(u)du$ и $\int_0^1 g(u)du$ расходятся, а функции $f(u)$, $g(u)$ всюду положительны. См. рис. 2.1.5а).

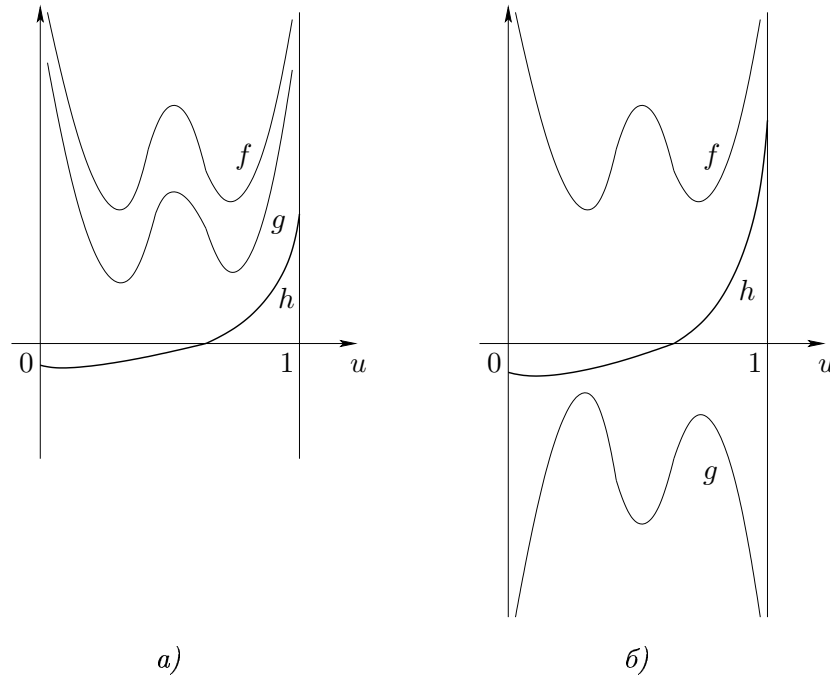


Рис. 2.1.5:

Б) знаки $\frac{\partial H}{\partial s}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial f_2}$ различны.

Аналогично А), учитывая, что $f(u)$, $g(u)$ теперь разного знака. См. рис. 2.1.5б).

2. $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$. Аналогично, рассматривая функции $f(u)$, $g(u)$, получим, что отличие от I.1. состоит в том, что $g(u) \equiv 0$. Следовательно, проблема будет только в том случае, если у исходного сечения граничные точки были на одном уровне, т.е. если $r(1) - r(0) = 0$.

Если граничные точки отвечают двум разным вершинам особого графа, то можно чуть-чуть пошевелить одну из них, чтобы стало $r(1) - r(0) \neq 0$.

Очевидно, что можно сделать это шевеление таким, чтобы на примыкающих кольцах не возникло такой же проблемной ситуации.

Если обе граничные точки отвечают в действительности одной и той же вершине особого графа, то ситуация сложнее. Шевеление ничего не дает, т.к. при этом смещаются оба конца одновременно. Кроме того, нетрудно видеть, что в этом случае нельзя построить кривую $r(u)$ такую, чтобы она везде была трансверсальна интегральным кривым $\text{sgrad } s_2$. Проблему, однако, можно решить с помощью изменения гомотопического класса кривой. В этом случае, конечно, изменится и класс сечения P_{tr} .

3. $\frac{\partial \alpha}{\partial f_2} = 0$. Это условие означает, что поле $\text{sgrad } \alpha$ вертикально, т.е. пропорционально $\text{sgrad } s$. Таким образом, мы оказываемся в более простой и известной ситуации. А именно, нужно поступить точно так же, как и в изоэнергетическом случае. (Или, что то же самое, точно так же, как и в I.1, но рассматривая вместо двух функций $f(u), g(u)$ одну $f(u)$.)

II. Случай рис. 2.1.2a). Здесь $\frac{\partial H}{\partial f_2} = 0$, поэтому поле $\text{sgrad } H$ вертикально, т.е. пропорционально $\text{sgrad } s$ и мы снова, как и в случае I.3, оказываемся в более простой ситуации двух полей. Ясно, что пользуясь уже доказанным, можно построить трансверсальную площадку и в этом случае.

Трансверсальность полю $\text{sgrad } s$ получилась автоматически, поскольку функция $h(u)$ определена на всем отрезке $[0, 1]$, т.е. касательная к $r(u)$ нигде не вертикальна.

Кроме того, очевидно, что при $\frac{\partial \alpha}{\partial s} \neq 0$ функцию $h(u)$ можно задать так, чтобы она имела наперед заданные значения в нуле и единице. Таким образом, можно состыковать куски новопостроенных графов на различных кольцах.

В случае $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$ при помощи изменения класса сечения можно добиться, например, того, чтобы величины $r(1) - r(0)$ были одного знака для всех колец. В этом случае на каждом из колец также можно придать функции $h(u)$ наперед заданные значения в нуле и единице.

Итак, в случае $\frac{\partial \alpha}{\partial s} \neq 0$ можно реализовать любой класс гомотопных сечений в виде трансверсального сечения, а в случае $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$ — возможно, не любой. Опишем, какие положения особого графа P_{tr} на особом слое могут являться запрещенными. Рассмотрим ребра особого графа. Если ребро соединяет разные вершины графа, то запрещенных положений нет. Если же ребро в действительности выходит и входит в одну и ту же вершину, а интегральная траектория поля $\text{sgrad } f_2$, лежащая на особом слое является

замкнутой (что выполнено не всегда), то (замкнутое) ребро особого графа не может лежать в том же гомотопическом классе, что и интегральная траектория поля $\text{sgrad } f_2$.

Таким образом, трансверсальные сечения существуют во всех случаях, но иногда не во всех гомотопических классах. Также можно отметить, что всегда существует бесконечно много трансверсальных сечений. \square

Замечание 2.1.3. С этого момента P_{tr} всегда будет обозначать трансверсальное сечение.

Пусть выбран какой-нибудь регулярный тор. На нем имеется однозначно определенный базисный цикл λ — слой расслоения Зейферта, пусть μ — какой-нибудь цикл, дополняющий λ до базиса. В окрестности выбранного тора рассмотрим соответствующие циклам (λ, μ) переменные действие-угол $(s, \varphi, s_2, \varphi_2)$ ((s, φ) соответствуют λ , а (s_2, φ_2) соответствуют μ). Пусть $s_2 = G(s, f_2)$, G'_1 обозначает производную по s , а G'_2 по f_2 .

Замечание 2.1.4. Из леммы 2.1.2 следует, что для каждой точки y седловой кривой γ_s может существовать некоторое множество запрещенных гомотопических классов для особого графа при выборе трансверсальной площадки в 3-мерном инвариантном подмногообразии, соответствующем y . Нетрудно видеть, однако, что существует окрестность $W(y)$ точки y на γ_s такая, что каждое из множеств разрешенных классов, соответствующих каждой из точек этой окрестности, не меньше множества разрешенных классов, соответствующих y . Кроме того, для каждого из колец особого слоя существует не более одного ограничения. Следовательно, если рассмотреть конечное множество окрестностей $W(y_i)$, то для каждого из колец существует в общей сложности не более конечного числа запрещений. Отсюда следует, что трансверсальные площадки можно выбирать в непрерывной зависимости от точки на γ_s .

Если мы при этом находимся вблизи особого слоя типа седло-центр, необходимо также рассматривать окрестность точки y_0 (см. рис. 1.9.1). Отметим, что любое запрещающее условие накладывается замкнутостью траектории $\text{sgrad } f_2$ на особом слое. Из равенства $\text{sgrad } s_2 = G'_1 \text{sgrad } s + G'_2 \text{sgrad } f_2$ следует, что траектория $\text{sgrad } f_2$ замкнута тогда и только тогда, когда G'_1 является целым числом. Ниже будет показано, см. (3.6.6), что $G'_1 \rightarrow \text{const}$ при стремлении к точке y_0 . Поэтому y_0 также порождает окрестность, в которой на каждом кольце накладывается не более одного запрещающего условия.

Из замечания 2.1.4 следует, что в некотором гомотопическом классе существуют трансверсальные площадки для всех возможных гладких кривых γ , пересекающих седловую кривую γ_s трансверсально или так, что γ является графиком непрерывной функции по f_2 .

P_{tr} будет теперь выбираться в этом гомотопическом классе. (Ясно, что классов, удовлетворяющих нужному условию, на самом деле бесконечно много.)

Абсолютно аналогично ситуации изоэнергетической 3-поверхности можно определить отображение Пуанкаре $\sigma : P_{tr} \rightarrow P_{tr}$.

Покажем, что на P_{tr} существует гамильтонова система $w = \text{sgrad } \mathcal{H}_P$ обладающая свойством согласованности с отображением Пуанкаре: сдвиг точки x вдоль интегральной траекторий системы w на время $t = 1$ совпадает с ее образом $\sigma(x)$ под действием отображения Пуанкаре.

Определение 2.1.5. Такую систему $w = \text{sgrad } \mathcal{H}_P$ также будем называть *редуцированной*.

Аналогично [8] выполнена следующая теорема:

Теорема 2.1.6. На гладкой трансверсальной площадке P_{tr} существует гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } \mathcal{H}_P$ (относительно формы $\omega|_{P_{tr}}$), так что выполнены следующие условия:

- (а) отображение Пуанкаре на P_{tr} совпадает со сдвигом на $t = 1$ вдоль поля w ;
- (б) функция f_2 является интегралом поля w ;
- (в) условия (а) и (б) определяют поле w однозначно (гамильтониан \mathcal{H}_P определен, соответственно, с точностью до константы). Если дифференциал отображения Пуанкаре не является тождественным отображением, то функция \mathcal{H}_P является функцией Морса на P_{tr} .

Доказательство из [8] повторяется дословно. См. предложение 7.2 из [8]. □

Зафиксируем некоторый лист книжки $\mathcal{B}(M^4)$. Пусть теперь μ — цикл, отсекаемый сечением P_{tr} . Пусть $s_2 = G(s, f_2)$, а $H = H(s, f_2) = \overline{H}(s, s_2)$, $\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_P(f_2) = \overline{\mathcal{H}}_P(s_2)$ (все это можно делать на выбранном листе $\mathcal{B}(M^4)$).

Теорема 2.1.7. \mathcal{H}_P можно найти в явном виде. А именно, на выбранном выше листе $\mathcal{B}(M^4)$ выполнено:

$$\mathcal{H}_P(f_2) = \overline{\mathcal{H}}_P(s_2) = 2\pi \int \frac{\overline{H}'_2(\overline{\zeta}_P(s_2), s_2)}{\overline{H}'_1(\overline{\zeta}_P(s_2), s_2)} ds_2, \quad (2.1.4)$$

где $s = \overline{\zeta}_P(s_2)$ находится из условий $\alpha(s, f_2) = \text{const}$ и $s_2 = G(s, f_2)$.

Доказательство. Необходимо проверить, что сдвиг на единицу вдоль интегральных траекторий поля $w = \text{sgrad } \mathcal{H}_P$ совпадает с отображением Пуанкаре. Достаточно проверять это условие только для точек, лежащих на торах Лиувилля, т.е. лишь на *регулярных* совместных поверхностях уровня H, F (или f_2).

В качестве трансверсального сечения выберем сначала специальное — двумерную поверхность, задаваемую в окрестности выбранного тора уравнениями $\alpha(s, f_2) = \text{const}$, $\varphi = 0$. В качестве локальных координат на этом сечении можно выбрать s_2 и φ_2 , поскольку $\alpha(s, f_2) = \text{const}$ является допустимой кривой (см. определение 2.1.1), а f_2 является функцией s_2 . Симплектическая структура (локально) имеет вид $ds_2 \wedge d\varphi_2$.

За время $t = 1$ точка $(s_2, \varphi_2) \in P_{tr}$ под действием потока w перейдет в $(s_2, \varphi_2 + \frac{d\overline{\mathcal{H}}_P}{ds_2})$. Исходная система v на M^4 в переменных $(s, \varphi, s_2, \varphi_2)$ имеет вид

$$\text{sgrad } H = \frac{\partial \overline{H}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2},$$

поэтому за время t точка $(s, \varphi, s_2, \varphi_2) \in M^4$ под действием потока v перейдет в точку $(s, \varphi + \frac{\partial \overline{H}}{\partial s} t, s_2, \varphi_2 + \frac{\partial \overline{H}}{\partial s_2} t)$. Следовательно, время $t = \tau$ первого следующего протыкания траекторией трансверсальной площадки можно найти из условия $\varphi + \frac{\partial \overline{H}}{\partial s} \tau = \varphi \pm 2\pi$, иначе говоря, $\tau = \pm \frac{2\pi}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial s}}$, где знак выбирается так, чтобы τ было положительным. Без ограничения общности можно считать, что

$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial s}}. \quad (2.1.5)$$

Тогда из условия $\varphi_2 + \frac{\partial \overline{H}}{\partial s_2} \tau = \varphi_2 + \frac{d\overline{\mathcal{H}}_P}{ds_2}$ получим

$$\frac{d\overline{\mathcal{H}}_P}{ds_2} = 2\pi \frac{\frac{\partial \overline{H}}{\partial s_2}}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial s}}. \quad (2.1.6)$$

Чтобы найти функцию $\overline{\mathcal{H}}_P(s_2)$, необходимо вспомнить, что на поверхности P_{tr} переменные s и s_2 не являются независимыми, а $s = \overline{\zeta}_P(s_2)$ (из $s_2 = G(s, f_2)$ и $\alpha(s, f_2) = \text{const}$). Тогда \mathcal{H}_P можно найти в явном виде:

$$\overline{\mathcal{H}}_P(s_2) = 2\pi \int \frac{\overline{H}'_2(\overline{\zeta}_P(s_2), s_2)}{\overline{H}'_1(\overline{\zeta}_P(s_2), s_2)} ds_2.$$

В случае другого знака в формуле (2.1.5) $\overline{\mathcal{H}}_P(s_2)$ находится аналогично.

Остается посмотреть, что будет, если трансверсальное сечение выбрано произвольным образом. Отметим, что любая пара изотопных сечений отображается друг на друга при помощи гамильтонова потока $v = \text{sgrad } H$, и это отображение сохраняет симплектическую структуру и функцию $\overline{\mathcal{H}}_P(s_2)$ (2.1.4), а также согласовано с отображением Пуанкаре.

Поэтому трансверсальное сечение можно локально выбирать наиболее удобным способом. \square

Замечание 2.1.8. Учитывая, что на каждом из листов $\mathcal{B}(M^4)$ функция $\overline{\mathcal{H}}_P(s_2)$ (2.1.4) гладко зависит от $\overline{\zeta}_P(s_2)$, s , а $\overline{\zeta}_P(s_2)$ гладко зависит от P , если $\alpha(s, f_2)$ достаточно гладкая функция, получим, что $\overline{\mathcal{H}}_P$ гладко зависит от площадки P . Это означает, что $\mathcal{H}_P(f_2)$ гладко зависит от переменных s, f_2 , т.е. что существует такая функция $\mathcal{H}(s, f_2)$, что $\mathcal{H}_P(f_2) = \mathcal{H}(\zeta_P(f_2), f_2)$, где $\zeta_P(f_2) = \overline{\zeta}_P(s_2(f_2))$.

Интересно посмотреть, как теоремы 2.1.6 и 2.1.7

- (а) согласуются с теоремой 1.5.4 о существовании редукции в случае изоэнергетической поверхности Q^3 , т.е. что будет, если положить $\alpha(s, f_2) = H(s, f_2)$;
- (б) применяются в случае $\alpha(s, f_2) = s$ (этот частный случай понадобится в дальнейшем).

Следствие 2.1.9. Пусть $\alpha(s, f_2) = H(s, f_2)$. Тогда выполнена теорема 1.5.4, т.е. можно положить $\mathcal{H}(s, f_2) = -2\pi s$ (а $\mathcal{H}_P(f_2) = -2\pi\zeta_P(f_2)$).

Доказательство. Из $\alpha(\zeta_P(f_2), f_2) = const$ получим:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s} \frac{d\zeta_P}{df_2} + \frac{\partial\alpha}{\partial f_2} = 0. \quad (2.1.7)$$

Поскольку

$$\frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} = \frac{d\overline{\mathcal{H}}_P}{ds_2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial s} \frac{d\zeta_P}{df_2} + \frac{\partial s_2}{\partial f_2} \right),$$

а из $H(s, f_2) = \overline{H}(s, s_2(s, f_2))$ следует

$$\overline{H}'_2 = \frac{H'_2}{\frac{\partial s_2}{\partial f_2}} \quad \text{и} \quad \overline{H}'_1 = H'_1 - \frac{H'_2}{\frac{\partial s_2}{\partial f_2}} \frac{\partial s_2}{\partial s},$$

то, используя (2.1.6), получим:

$$\frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} = 2\pi \frac{H'_2}{H'_1 \frac{\partial s_2}{\partial f_2} - H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial s}} \left(\frac{\partial s_2}{\partial s} \frac{d\zeta_P}{df_2} + \frac{\partial s_2}{\partial f_2} \right). \quad (2.1.8)$$

Кроме того, из $\mathcal{H}(\zeta_P(f_2), f_2) = \mathcal{H}_P(f_2)$ следует

$$\frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} = \mathcal{H}'_1 \frac{d\zeta_P}{df_2} + \mathcal{H}'_2. \quad (2.1.9)$$

Сравнивая (2.1.8) и (2.1.9), а также учитывая (2.1.7) и $\alpha(s, f_2) = H(s, f_2)$, получим:

$$\mathcal{H}'_1 \left(-\frac{H'_2}{H'_1} \right) + \mathcal{H}'_2 = 2\pi \frac{H'_2}{H'_1}$$

Приводя подобные слагаемые, получим

$$\frac{H'_2}{H'_1}(2\pi + \mathcal{H}'_1) = \mathcal{H}'_2,$$

откуда видно, что $\mathcal{H}(s, f_2) = -2\pi s$ является решением. (Т.е. $\mathcal{H}_P(f_2) = \zeta_P(f_2)$.)

Результат согласуется с теоремой 1.5.4. □

Следствие 2.1.10. Пусть $\alpha(s, f_2) = s$. Тогда можно положить

$$\mathcal{H}(s, f_2) = 2\pi \int \frac{H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial f_2}}{H'_1 \frac{\partial s_2}{\partial f_2} - H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial s}} df_2 + \mathcal{G}(s),$$

где $\mathcal{G}(s)$ — любая гладкая функция. Иначе говоря, годится любая функция $\mathcal{H}(s, f_2)$ с условием

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_2} = 2\pi \frac{H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial f_2}}{H'_1 \frac{\partial s_2}{\partial f_2} - H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial s}}.$$

Доказательство. В этом случае $\alpha'_2(s, f_2) = 0$, и поэтому $\frac{d\zeta_P}{df_2} = 0$ из (2.1.7); тогда аналогично доказательству следствия 2.1.9 при сравнении (2.1.8) и (2.1.9) получим:

$$\frac{2\pi H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial f_2}}{H'_1 \frac{\partial s_2}{\partial f_2} - H'_2 \frac{\partial s_2}{\partial s}} = \mathcal{H}'_2,$$

откуда и вытекает требуемое. □

Замечание 2.1.11. Следствия 2.1.9 и 2.1.10 выполнены с учетом формулы (2.1.5), т.е. в предположении $\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} > 0$.

2.2. Редукция Марседена-Вайнштейна

Редукция Марседена-Вайнштейна [28, 29] является инструментом, позволяющим в общем случае, когда на многообразии задано гладкое пуассоново (также называемое гамильтоновым) действие некоторой группы G . В общем случае это позволяет перейти от системы на многообразии (M, ω) к *редуцированной* системе на многообразии меньшей размерности $(\mu^{-1}(0)/G, \omega_{MW})$ для некоторой симплектической структуры ω_{MW} , где μ — отображение момента, соответствующее действию G .

В нашем случае у гамильтоновой системы имеется периодический интеграл

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \alpha,$$

где λ (однозначно определенный) цикл на торах = слой расслоения Зейферта, α дифференциальная 1-форма действия, т.е. $d\alpha = \omega$, как в доказательстве теоремы Лиувилля. F имеет смысл переменной действия, соответствующей циклу λ .

Все траектории векторного поля $\text{sgrad } F$ замкнуты с периодом 2π . Поэтому на многообразии имеется пуассоново действие окружности: сдвиги вдоль траекторий поля $\text{sgrad } F$.

Опишем конструкцию редукции Марсдена-Вайнштейна в случае, когда $G = S^1$.

2.2.a. Конструкция

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, на котором задано гладкое симплектическое действие окружности:

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow \text{Symp}(M) \\ t &\mapsto \psi_t. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Иными словами, имеется гладкое симплектическое действие группы \mathbb{R}^1 , которое является 2π -периодическим. Пусть это действие пуассоново, т.е. существует функция $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\frac{d\psi_t(p)}{dt} = \text{sgrad } F(p).$$

Тогда отображение момента, соответствующее действию, задается функцией F :

$$\begin{aligned} \mu = F : M &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto F(p). \end{aligned}$$

Замечание 2.2.1. Ранее рассматривалось другое отображение момента \mathcal{F} , см. главу 1. Оно строилось для другого пуассонова действия — действия группы \mathbb{R}^2 .

Теорема 2.2.2. Пусть (M, ω) — четырехмерное симплектическое многообразие с заданной на нем гамильтоновой системой $v = \text{sgrad } H$, $x \in \mathbb{R}$ является регулярным значением отображения момента, так что $Q^3 := F^{-1}(x)$ является подмногообразием M . Предположим, что действие группы S^1 на Q^3 является свободным, так что Q^3/S^1 также является многообразием.

Тогда

(а) многообразие Q^3 является коизотропным и соответствующее изотропное слоение задается орбитами S^1 ;

(б) Фактор $M_{\text{red}} = Q^3/S^1$ является симплектическим многообразием с формой ω_{MW} , определяемой свойством

$$\pi^* \omega_{MW} = \omega|_{Q^3},$$

где $\pi : Q^3 \rightarrow Q^3/S^1$ — каноническая проекция. (Звездочка обозначает кокасательное индуцированное отображение, т.е.

$$\pi^* \omega_{MW}(v, w) = \omega_{MW}(D\pi(p)v, D\pi(p)w)$$

для любых $v, w \in T_p Q^3$).

Следствие 2.2.3. Тогда на симплектическом многообразии $(Q^3/S^1, \omega_{MW}) \simeq (P^2, \omega_{MW})$ можно рассмотреть гамильтонову систему с гамильтонианом $\tilde{H}(f_2) = H(s, f_2)$ (т.к. на Q^3/S^1 значение s постоянно).

Определение 2.2.4. Описанная в теореме 2.2.2 и следствии 2.2.3 процедура называется *редукцией Марсдена-Вайнштейна*.

Замечание 2.2.5. С этого момента редукцию, описанную в пп. 1.5, 2.1 будем называть просто *редукцией*, а редукцию, описанную в этой главе — *редукцией Марсдена-Вайнштейна*. Аналогично, говоря о гамильтоновых системах, будем различать *редуцированные системы* и *редуцированные в смысле Марсдена-Вайнштейна системы*. Связь между этими системами будет разъяснена в п. 3.4.

Доказательство теоремы 2.2.2. (а) S^1 компактна и действует свободно на Q^3 , поэтому фактормножество $Q^3/S^1 =: M_{red}$ является многообразием.

Являясь гиперповерхностью, Q^3 коизотропна. На самом деле $(T_p Q)^\omega$ натянута на $\text{sgrad } F(p)$, поскольку $(T_p Q)^\omega$ одномерно и

$$\omega(\text{sgrad } F, w) = w(F) = 0, \text{ т.к. } Q^3 = \{F = \text{const}\}.$$

Поэтому векторы из TQ^ω касаются орбит действия окружности.

(б) В каждой точке $p \in Q^3$ форма ω индуцирует симплектическую форму $\bar{\omega}_p$ на $T_p Q/T_p Q^\omega \simeq T_p(M_{red})$, невырожденность которой очевидна по построению. Из инвариантности ω следует, что $\psi_t^*(\bar{\omega}_{\psi_t(p)}) = \bar{\omega}_p$ для всех t . Отсюда следует, что ω опускается до корректно определенной формы ω_{MW} на фактормногообразии M_{red} . \square

Замечание 2.2.6. Доказательство теоремы 2.2.2 можно провести и явными вычислениями. Пусть $p \in F^{-1}(x)$. Выберем локальные координаты: θ вдоль орбиты, проходящей через точку p , μ задается отображением момента F , η_1, η_2 — поднятия координат с $F^{-1}(0)/S^1$. В этих координатах симплектическая форма ω имеет вид

$$\omega = Ad\theta \wedge d\mu + \sum_{j=1}^2 B_j d\theta \wedge d\eta_j + \sum_{j=1}^2 C_j d\mu \wedge d\eta_j + Dd\eta_1 \wedge d\eta_2.$$

Поскольку $d\mu = \omega\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \cdot\right)$, то $A = 1$, $B_j = 0$, откуда

$$\omega = d\theta \wedge d\mu + \sum_{j=1}^2 C_j d\mu \wedge d\eta_j + Dd\eta_1 \wedge d\eta_2.$$

Кроме того, ω является симплектической формой, поэтому она невырождена, и, следовательно, $D \neq 0$. Ограничим теперь форму ω на поверхность Q^3 :

$$\omega|_{Q^3} = (d\theta \wedge d\mu + \sum_{j=1}^2 C_j d\mu \wedge d\eta_j + Dd\eta_1 \wedge d\eta_2)|_{\mu=const} = Dd\eta_1 \wedge d\eta_2,$$

откуда следует, что для $\omega_{MW} = Dd\eta_1 \wedge d\eta_2$

$$\omega|_{Q^3} = \pi^* \omega_{MW}.$$

3. Особенность типа седло-центр

3.1. Построение модели особенности типа седло-центр

Рассмотрим произвольную особенность M^4 типа седло-центр. Она лиувиллево эквивалентна особенности типа прямого произведения двух атомов: $A \times V$ (теорема 1.4.1).

Атом A диффеоморфен двумерному диску D^2 с полярными координатами (s, φ) , слоение задается функцией s . Атом V диффеоморфен двумерной поверхности P^2 с координатами (x, y) , слоение задается функцией $f_2(x, y)$. Кроме того, пусть (s, φ) являются парой переменных действие-угол, т.е. $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ на M^4 . (Они отвечают однозначно определенному циклу λ на торах Лиувилля.) Это утверждение означает, что можно выбрать переменные x, y таким образом, чтобы выполнялось $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. В самом деле, на M^4 имеется периодический интеграл s , поэтому переменную φ можно выбрать параметром на (замкнутых) интегральных траекториях $\text{sgrad } s$. Далее, P^2 реализуется как глобальное сечение расслоения на M^4 , слоями которого являются как раз траектории поля $\text{sgrad } s$. Поэтому можно зафиксировать координаты x, y на этом сечении и распространить на M^4 при помощи действия окружности, порождаемого сдвигами вдоль $\text{sgrad } s$.

Без ограничения общности особенности на атомах задаются значениями $s = 0, f_2 = 0$. Отметим также, что функции s и f_2 находятся в инволюции, а бифуркационная диаграмма в этих координатах выпрямляется (и имеет вид горизонтальной прямой, в которую втыкается вертикальный луч).

Итак, $M^4 \simeq D^2 \times P^2$. Обозначим Ω симплектическую форму на M^4 .

Лемма 3.1.1. Пусть u, v — регулярные симплектические координаты на атоме $A = D^2$ (относительно ограничения Ω на двумерный уровень, соответствующий фиксированным x, y), а (s, φ) — пара переменных действие-угол. Тогда

$$s = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой Элиассона (теорема 0.1.5), можно полагать, что для переменной действия выполнено

$$s = f(u^2 + v^2),$$

где f — некоторая гладкая за исключением, быть может, нуля функция. Отсюда следует

$$u = \sqrt{f^{-1}(s)} \cos \varphi, \quad v = \sqrt{f^{-1}(s)} \sin \varphi,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \left(\frac{1}{2\sqrt{f^{-1}(s)}} \frac{df^{-1}(s)}{ds} \cos \varphi ds - \sqrt{f^{-1}(s)} \sin \varphi d\varphi \right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(\frac{1}{2\sqrt{f^{-1}(s)}} \frac{df^{-1}(s)}{ds} \sin \varphi ds + \sqrt{f^{-1}(s)} \cos \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{df^{-1}(s)}{ds} ds \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку s, φ — также симплектические координаты на множителе $A = D^2$ всюду, кроме нуля, т.е. $du \wedge dv = ds \wedge d\varphi$ всюду, кроме нуля, получим, что $f^{-1}(s) = 2s$, т.е. $f(s) = \frac{1}{2}s$ и $s = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. \square

Замечание 3.1.2. Из леммы 3.1.1 следует, что переменная действия s является гладкой на M^4 .

Таким образом, гамильтониан является C^∞ -гладкой функцией s и f_2 : $H = H(s, f_2(x, y))$ (см. также теорему Элиассона 0.1.5), симплектическая структура Ω задается в координатах s, φ, x, y матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ -a & -c & 0 & \omega \\ -b & -d & -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь a, b, c, d, ω — гладкие функции от переменных s, φ, x, y . Это условие эквивалентно гладкости формы Ω .

Система дифференциальных уравнений, описывающих гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на $A \times V$, имеет общий вид (учитываем, что $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{s} &= k \left(-d \frac{\partial H}{\partial x} + c \frac{\partial H}{\partial y} \right), \\ \dot{\varphi} &= k \left(-\omega \frac{\partial H}{\partial s} + b \frac{\partial H}{\partial x} - a \frac{\partial H}{\partial y} \right), \\ \dot{x} &= k \left(d \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial y} \right), \\ \dot{y} &= k \left(-c \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial H}{\partial x} \right), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

где $k = (-\omega + (ad - bc))^{-1}$.

Функции a, b, c, d, ω не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять некоторым условиям. Найдем эти ограничения.

Вычислим $\text{sgrad } s$:

$$\text{sgrad } s = k \left(-\omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + d \frac{\partial}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

Поскольку $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, вытекают необходимые условия:

$$\begin{aligned} k \cdot (-\omega) &= 1, \\ d = c &= 0 \text{ (т.к. } k \neq 0). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Из определения функции k видно, что $c = d = 0$ влечет $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Форма Ω замкнута, отсюда следует:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial a}{\partial \varphi} + \frac{\partial c}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s} &= 0, \\ -\frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial d}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Подставим $c = d = 0$ (3.1.2) в систему условий (3.1.3):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial a}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s} &= 0, \\ -\frac{\partial b}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Из (3.1.4) следует, что все функции не зависят от φ :

$$\begin{aligned} a &= a(x, y, s), \\ b &= b(x, y, s), \\ c &= 0, \\ d &= 0, \\ \omega &= \omega(x, y, s), \end{aligned}$$

и связаны соотношением

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s} = 0. \tag{3.1.5}$$

Отсюда, в частности, следует, что Ω имеет вид

$$\Omega = ds \wedge d\varphi + a(s, x, y) ds \wedge dx + b(s, x, y) ds \wedge dy + \omega(s, x, y) dx \wedge dy, \tag{3.1.6}$$

а система (3.1.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= c(s, x, y), \\ \dot{x} &= -\frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

где

$$c(s, x, y) := \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{b}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a}{\omega} \frac{\partial H}{\partial y}.\tag{3.1.8}$$

Лемма 3.1.3. *Рассмотрим один из торов Лиувилля, задаваемых условием $\{s = \text{const}, f_2 = \text{const}\}$. Тогда скорость $c(s, x, y)$ гамильтонова потока $\text{sgrad } H$ по φ на самом деле не зависит от точки на торе, т.е. $c(s, x, y) = c(s, f_2)$.*

Доказательство. Поскольку $\{s, f_2\} = 0$, то

$$[\text{sgrad } s, \text{sgrad } f_2] = \text{sgrad}\{s, f_2\} = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли. Это означает, что потоки $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и $\text{sgrad } f_2$ коммутируют и на многообразии M^4 определено действие Φ группы \mathbb{R}^2 , порожденное сдвигами вдоль векторных полей $\text{sgrad } s$, $\text{sgrad } f_2$. Торы Лиувилля являются орбитами этого действия. Кроме того, каждый тор можно представить в виде факторпространства \mathbb{R}^2/H_x , где x — точка на торе, а $H_x \simeq \mathbb{Z}^2$ — стационарная подгруппа \mathbb{R}^2 .

Чтобы определить угловые координаты на торе, нужно в решетке H_x выбрать базис e_1, e_2 . Тогда угловые координаты точки $\Phi(a_1 e_1 + a_2 e_2)x$ будут $\varphi_i = 2\pi a_i \bmod 2\pi$. (Они, возможно, будут отличаться от канонических началом отсчета, однако для доказательства леммы это не важно.)

Тогда на торе выполнено: векторные поля $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$ и $\text{sgrad } s, \text{sgrad } f_2$ связаны между собой линейной заменой с постоянными коэффициентами. Кроме того, известно, что $\text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, поэтому можно полагать $e_1 = \text{sgrad } s(x)$ и $\varphi_1 = \varphi$ с точностью до изменения начала отсчета (на торе). Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} &= \text{sgrad } s = \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_2} &= A \text{sgrad } s + B \text{sgrad } f_2 \\ &= A \frac{\partial}{\partial \varphi} + B \left(\frac{1}{\omega} \left(a \frac{\partial f_2}{\partial y} - b \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \\ &= \left(A + \frac{B}{\omega} \left(a \frac{\partial f_2}{\partial y} - b \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B}{\omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

где A, B постоянны на торе.

Учитывая, что поле $\mathcal{X} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$ касается тора, трансверсально $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и его траектории замкнуты (поскольку лежат на сечении $s, f_2, \varphi = const$), получим, что вектор e_2 в базисе H_x можно выбрать так, чтобы поле \mathcal{X} отличалось от $\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$ лишь на множитель (возможно, зависящий от точки). Тогда $B \neq 0$ и

$$A + \frac{B}{\omega} \left(a \frac{\partial f_2}{\partial y} - b \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{\omega} \left(a \frac{\partial f_2}{\partial y} - b \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = -\frac{A}{B} =: F(s, f_2). \quad (3.1.10)$$

Из (3.1.10) и определения $c(s, x, y)$ (3.1.8) вытекает

$$c(s, x, y) = \frac{\partial H}{\partial s}(s, f_2) + \frac{\partial H}{\partial f_2}(s, f_2) F(s, f_2) = c(s, f_2).$$

□

Следствие 3.1.4. *Рассмотрим связную нерегулярную поверхность совместного уровня $\{s = const, f_2 = const\}$. Тогда скорость $c(s, x, y)$ гамильтонова потока $s \operatorname{grad} H$ по φ на самом деле не зависит от точки на этой поверхности, т.е. $c(s, x, y) = c(s, f_2)$.*

Доказательство. Из соображений непрерывности, пользуясь результатом леммы 3.1.3, получим, что на каждом из колец особого слоя скорость $c(s, x, y)$ есть функция s и f_2 . Поскольку уровень связан, то скорости одинаковы для всех колец. □

Следствие 3.1.5. *Из леммы 3.1.3 и следствия 3.1.4 следует, что скорость $c(s, x, y)$ есть на самом деле функция на пространстве $\mathcal{B}(U)$.*

3.2. Редуцированная система

Система (3.1.1) должна редуцироваться на площадке $P^2(s) = \{s = const, \varphi = const\}$ к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где $\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_P(f_2)$ — гамильтониан редуцированной системы на $P^2(s)$.

Рассмотрим какое-нибудь кольцо атома V . Тогда для второй переменной действия на этом кольце выполнено

$$s_2 = G(s, f_2) \quad (3.2.2)$$

для некоторой гладкой функции G . В частности, $G'_1 = A$, $G'_2 = B$ (3.1.9).

Пусть

$$\begin{aligned}\bar{H}(s, s_2) &= \bar{H}(s, G(s, f_2)) = H(s, f_2), \\ \bar{\mathcal{H}}_P(s_2) &= \bar{\mathcal{H}}_P(G(s, f_2)) = \mathcal{H}_P(f_2),\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s_2} \frac{\partial G}{\partial s}, \\ \frac{\partial H}{\partial f_2} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial s_2} \frac{\partial G}{\partial f_2}, \\ \frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} &= \frac{d\bar{\mathcal{H}}_P}{ds_2} \frac{\partial G}{\partial f_2},\end{aligned}$$

и из теоремы 2.1.7 следует, что

$$\frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} = \frac{d\bar{\mathcal{H}}_P}{ds_2} G'_2 = 2\pi \frac{\frac{\partial \bar{H}}{\partial s_2}}{\frac{\partial \bar{H}}{\partial s}} G'_2 = 2\pi \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}, \quad (3.2.3)$$

откуда получим, что система (3.2.1) на каждом из кусков M^4 , соответствующих кольцам атома V , эквивалентна

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{2\pi}{\omega} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{2\pi}{\omega} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} \frac{\partial f_2}{\partial x}.\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

3.3. Спроектированная система

Рассмотрим также проекцию потока (3.1.7) на площадку $P^2(s)$. Такая проекция определена корректно, т.к. скорость по φ не зависит от φ , см. следствие 3.1.5. Используя (3.1.7), получим, что проекция потока (3.1.7) на площадку $P^2(s)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{\omega} H'_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega} H'_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}.\end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Эту систему будем называть *спроектированной*.

Замечание 3.3.1. Сравнивая системы (3.2.4) и (3.3.1), видим, что скорости этих систем на каждом из кусков многообразия, соответствующих кольцам атома V , отличаются лишь на множитель:

$$v_{red} = \frac{2\pi G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} v_{proj}, \quad (3.3.2)$$

где v_{red} и v_{proj} — скорости соответственно редуцированной и спроектированной систем.

3.4. Три системы на двумерных площадках

Только что мы рассматривали трансверсальную площадку вида

$$\{s = const, \varphi = const\}.$$

Эта площадка является двумерным многообразием с краем, на котором имеется симплектическая структура и две гамильтоновы системы — редуцированная и спроектированная.

В п.2.2 было построено некоторое двумерное симплектическое многообразие $(Q^3/S^1, \omega_{MW})$ с гамильтоновой системой на нем — редуцированной в смысле Марсдена-Вайнштейна. Кроме того, учитывая природу многообразия Q^3 , фактормногообразия Q^3/S^1 можно рассматривать в качестве подмногообразия-сечения слоения Зейферта многообразия Q^3 .

Возникает естественный вопрос: как связаны между собой симплектические многообразия $(P^2(s), \omega)$, $(Q^3/S^1, \omega_{MW})$ и три гамильтоновы системы: редуцированная, спроектированная и редуцированная в смысле Марсдена-Вайнштейна?

Связь редуцированной и спроектированной систем указана в замечании 3.3.1. А именно, они отличаются на множитель (3.3.2). Кроме того, докажем следующую теорему.

Теорема 3.4.1. (а) многообразия $(P^2(s), \omega)$ и $(Q^3/S^1, \omega_{MW})$ симплектоморфны;

(б) спроектированная и редуцированная в смысле Марсдена-Вайнштейна системы совпадают.

Доказательство. (а) Дiffeоморфность многообразий $P^2(s)$ и Q^3/S^1 следует из строения Q^3 как слоения Зейферта, площадка $P^2(s) \simeq Q^3/S^1$ является базой этого слоения. Кроме того, в слоении отсутствуют особые слои.

Симплектоморфность по сути доказана в п. 3.1 и теореме 2.2.2. Нужно рассмотреть координатное представление ограничения исходной формы ω на Q^3 и в одном случае ограничить его на $P^2(s)$, а в другом опустить на Q^3/S^1 в виде $\omega \circ D\pi$. Необходимо учесть соответствие обозначений $\theta = \varphi$, $\mu = s$, $\eta_1 = x$, $\eta_2 = y$. См. координатное представление в замечании 2.2.6.

(б) Очевидно, учитывая соответствие координат, симплектическую форму и явный вид спроектированной системы, см. формулы (3.3.1).

□

3.5. Неоднозначность выбора кривой γ при построении инвариантов 4-окрестности

Пусть точка y лежит на “седловой” кривой бифуркационной диаграммы. Рассмотрим две гладкие кривые γ_1 и γ_2 , пересекающие γ_s в точке y трансверсально или так, что γ_i является графиком некоторой функции по f_2 , возможно, имеющим вертикальную касательную. Пусть $Q_1^3 := \mathcal{F}^{-1}(\gamma_1)$, $Q_2^3 := \mathcal{F}^{-1}(\gamma_2)$ (см. рис.1.9.1, см. стр. 27). Предполагается также, что $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_2}(y) \neq 0$. Это условие является условием общего положения и гарантирует существование редуцированных систем $w = \text{sgrad } \mathcal{H}_P$ с морсовскими гамильтонианами \mathcal{H}_P на трансверсальных площадках P_{tr} . Кроме того, пусть без ограничения общности все $\mathcal{H}_P = 0$ на особом графе.

Теорема 3.5.1. Пусть $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_2}(y) \neq 0$. Если площадки P_{tr}^1 для Q_1^3 и P_{tr}^2 для Q_2^3 выбраны согласованно, т.е. если их особые графы совпадают на особом слое (см. определение 1.9.3 и лемму 1.9.4), то инварианты Λ , Δ , Z редуцированных систем на P_{tr}^1 , P_{tr}^2 совпадают.

Замечание 3.5.2. Из леммы 2.1.2 следует, что для положения особого графа существует бесконечно много незапрещенных гомотопических классов. В этих классах трансверсальные площадки для Q_1^3 и Q_2^3 всегда можно выбрать согласованно.

Для доказательства теоремы 3.5.1 нам понадобятся еще несколько понятий и вспомогательных утверждений.

Определение 3.5.3. Рассмотрим какую-нибудь особую точку x_i редуцированной системы $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ на трансверсальной площадке P_{tr} . На каждом из четырех примыкающих ребер особого графа рассмотрим по точке. Проведем через эти точки по отрезку, трансверсальному ребру графа. Область на атоме, высекаемая с помощью этих четырех отрезков (являющаяся окрестностью особой точки) называется *крестом* (рис. 3.5.1).

Пусть Λ_i — компонента Λ -инварианта, соответствующая x_i (величина, обратная к собственному значению линеаризации поля $\text{sgrad } \mathcal{H}$ в точке x_i).

Рассмотрим какую-нибудь из “четвертинок”, на которые граф K разбивает крест. Обозначим $\Pi(\mathcal{H})$ время движения редуцированной системы на площадке P_{tr} по участку траектории, заключенному в этой четвертинке. Тогда $\Pi(\mathcal{H})$ имеет вид:

$$\Pi(\mathcal{H}) = -\Lambda_i \ln |\mathcal{H} - \mathcal{H}(x_i)| + c(\mathcal{H}), \quad (3.5.1)$$

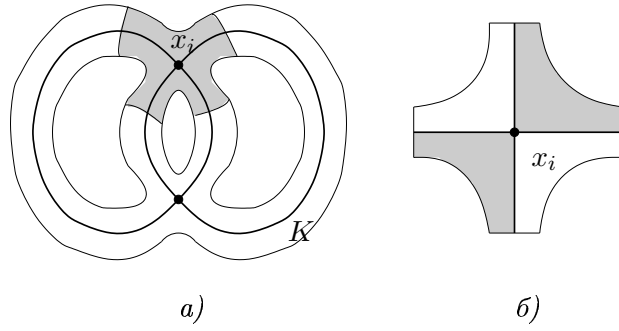


Рис. 3.5.1: а) Крест на атоме; б) крест с разбиением на положительные и отрицательные “четвертинки”.

где $c(\mathcal{H})$ — непрерывная функция при $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}(x_i)$, $\mathcal{H}(x_i)$ — значение \mathcal{H} в особой точке (или, что то же самое, на особом графе K).

Разложение (3.5.1) вытекает из следующего вспомогательного предложения (лемма 8.2 из [8], I). На евклидовой плоскости (x, y) рассмотрим функцию $\mathcal{H} = xy$, произвольную симплектическую структуру ω в окрестности начала координат и векторное поле $\text{sgrad } \mathcal{H}$. Рассмотрим также область в \mathbb{R}^2 , которая ограничена положительными полуосями x - и y -координат, гиперболой $\mathcal{H} = xy = 1$ и двумя произвольными кусками гладких кривых l_1 и l_2 , пересекающими линии уровня \mathcal{H} трансверсально. Обозначим $\Pi(\varepsilon)$ время движения по линии уровня $\mathcal{H} = \varepsilon$ от точки дуги l_1 до точки дуги l_2 (рис. 3.5.2).

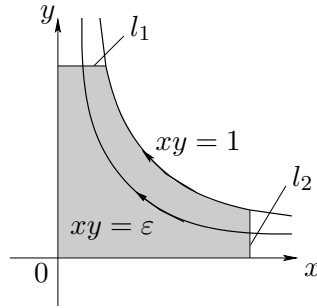


Рис. 3.5.2: Определение функции $\Pi(\varepsilon)$.

Предложение 3.5.4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:

$$\Pi(\varepsilon) = -P_n(\varepsilon) \ln(\varepsilon) + c(\varepsilon),$$

где P_n — некоторый полином степени n , а $c(\varepsilon)$ — функция класса C^n на $[0, 1]$. При этом коэффициенты a_i многочлена

$$P_n(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_n\varepsilon^n$$

совпадают с коэффициентами a_{ii} в тейлоровском разложении

$$\omega(x, y) \simeq \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j.$$

Чтобы получить теперь (3.5.1), необходимо воспользоваться следующим обобщением леммы Морса и теоремы Дарбу [24].

Лемма 3.5.5. Пусть S — невырожденная седловая особая точка гамильтониана \mathcal{H} на атоме P , $\mathcal{H}(S) = 0$. Тогда в окрестности S существует регулярная система координат (x, y) такая, что

а) $\mathcal{H} = xy$;

б) $\omega = \omega(z)dx \wedge dy$, где $z = xy$.

С помощью леммы 3.5.5 выберем координаты, что даст возможность воспользоваться предложением 3.5.4 на четвертинке и получить (3.5.1).

Определение 3.5.6. Крест будем называть *каноническим*, если $c(0) = 0$.

Как выбрать канонический крест? Воспользуемся для этого идеями [8, 11].

Лемма 3.5.7. Пусть в окрестности вершины x_i выбраны координаты в соответствии с леммой 3.5.5. Рассмотрим крест $\{|xy| < \varepsilon_0, -1 < x, y < 1\}$, где ε_0 — некоторое положительное число. Такой крест является каноническим.

Доказательство. Обозначим γ_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, траекторию векторного поля $\text{sgrad } \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \varepsilon$. Параметризуем γ_ε при помощи времени:

$$\gamma_\varepsilon = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, \Pi(\varepsilon)].$$

Тогда

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \text{sgrad } \mathcal{H} = \left(-\frac{x}{\omega(xy)}, \frac{y}{\omega(xy)} \right),$$

и поэтому

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \omega(xy) \frac{-x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\Pi(\varepsilon)} dt = \Pi(\varepsilon), \quad (3.5.2)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon) &= \int_{\gamma_\varepsilon} \omega(xy) \frac{-x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \int_1^\varepsilon \omega(\varepsilon) \frac{-x dx + \frac{\varepsilon}{x} d\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)}{x^2 + \frac{\varepsilon^2}{x^2}} = \int_\varepsilon^1 \omega(\varepsilon) \frac{\left(x + \frac{\varepsilon^2}{x^3}\right) dx}{x^2 + \frac{\varepsilon^2}{x^2}} \\ &= \omega(\varepsilon) \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \omega(\varepsilon) \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\omega(\varepsilon) \ln \varepsilon \sim -\omega(0) \ln \varepsilon + o(1). \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Учитывая, что $\omega(0) = \Lambda_i$, получим, что выбранный крест — канонический. \square

Замечание 3.5.8. Канонические кресты выбираются неоднозначно. Можно, например, изменять границы крестов произвольным образом, сохраняя точки пересечения с ребрами особого графа так, чтобы эти кривые оставались трансверсальными ребрам особого графа. Кроме того, можно подвергать крест сдвигам вдоль векторного поля $\text{sgrad } \mathcal{H}$.

Можно изготовить канонический крест из произвольного креста, не находя координат из леммы 3.5.5. Воспользовавшись только леммой Морса, выберем произвольный крест и какие-нибудь координаты (x, y) , $-1 < x, y < 1$ в окрестности особой (седловой) точки так, чтобы гамильтониан в этих координатах принял вид $\mathcal{H} = xy$. Компонентой симплектической структуры является некоторая функция $\omega(x, y)$, а границы креста задаются условиями $|x|, |y| = 1$, $|xy| < \varepsilon$. Проведем для этого креста вычисления, аналогичные (3.5.2-3.5.3):

$$\begin{aligned}
 \Pi(\varepsilon) &= \int_{\gamma_\varepsilon} \omega(x, y) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, y) - \omega(x, 0) + \omega(x, 0) - \omega(0, 0) + \omega(0, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \\
 &= \left. \begin{aligned}
 &\int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \\
 &+ \int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, y) - \omega(x, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \int_{\gamma_\varepsilon} \omega(0, 0) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)
 \end{aligned}$$

Преобразуем первый интеграл из (3.5.4):

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \int_{\varepsilon}^1 (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{dx}{x},$$

откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \rightarrow \int_0^1 (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{dx}{x}. \quad (3.5.5)$$

Перед преобразованием второго интеграла из (3.5.4) заметим, что из гладкости функции ω следует, что она представима в виде

$$\omega(x, y) = \omega(0, 0) + xg(x) + yh(y) + xyk(x, y),$$

где $g(x)$, $h(y)$, $k(x, y)$ — гладкие функции. Поэтому получим:

$$\omega(x, 0) = \omega(0, 0) + xg(x),$$

$$\omega(0, y) = \omega(0, 0) + yh(y),$$

а также

$$\omega(x, y) - \omega(x, 0) - \omega(0, y) + \omega(0, 0) = xyk(x, y),$$

откуда получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, y) - \omega(x, 0) - \omega(0, y) + \omega(0, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} &= \int_{\gamma_\varepsilon} xyk(x, y) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_\varepsilon^1 \varepsilon k\left(\frac{\varepsilon}{y}, y\right) \frac{dy}{y} = \varepsilon r(\varepsilon) \ln \varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $r(\varepsilon)$ — непрерывная в окрестности нуля функция. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ второй интеграл в (3.5.4)

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (\omega(x, y) - \omega(x, 0)) \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} \rightarrow \int_0^1 (\omega(0, y) - \omega(0, 0)) \frac{dy}{y}. \quad (3.5.6)$$

Из (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\Pi(\varepsilon) = \omega(0, 0) \ln \varepsilon + \int_0^1 (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{dx}{x} + \int_0^1 (\omega(0, y) - \omega(0, 0)) \frac{dy}{y} + o(1) \quad (3.5.7)$$

Из выражения (3.5.7) следует, что канонический крест можно получить из произвольного отрезанием (или приклеиванием, в зависимости от знака) прямоугольников, длины

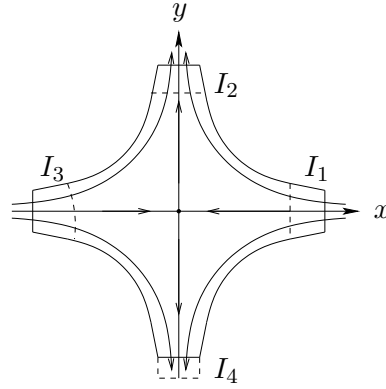


Рис. 3.5.3:

которых, если измерять их по особому графу, равны (рис.3.5.3):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{dx}{x}, & I_2 &= \int_0^1 (\omega(0, y) - \omega(0, 0)) \frac{dy}{y}, \\ I_3 &= \int_0^{-1} (\omega(x, 0) - \omega(0, 0)) \frac{dx}{x}, & I_4 &= \int_0^{-1} (\omega(0, y) - \omega(0, 0)) \frac{dy}{y}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Отметим, что если x, y — координаты не из леммы Морса, а только $\mathcal{H} = \mathcal{H}(xy)$, то везде в (3.5.4-3.5.8) появятся коэффициенты $\mathcal{H}'(xy)$ или $\mathcal{H}'(0)$.

Доказательство теоремы 3.5.1. Если выполнено условие согласованности P_{tr}^1 и P_{tr}^2 , то особый граф K у них общий. Следовательно, эти площадки пересекаются по графу K , а в особых точках x_i , происходит касание площадок (т.к. касательная плоскость к обеим площадкам натянута на касательные векторы к ребрам особого графа).

Собственные числа линеаризации редуцированной системы на трансверсальной площадке являются мультипликаторами отображения Пуанкаре. Собственные векторы отображений Пуанкаре для площадок P_{tr}^1, P_{tr}^2 совпадают, т.к. являются касательными к ребрам K . Динамика на K совпадает для двух площадок. Следовательно, и собственные числа линеаризаций отображений Пуанкаре для P_{tr}^1, P_{tr}^2 также совпадают.

Отсюда следует, что Λ -инварианты для P_{tr}^1 и P_{tr}^2 (или, что то же самое, для Q_1^3 и Q_2^3) совпадают.

Остается сравнить инварианты Δ и Z . Для этого достаточно сравнить между собой цепи l_1, l_2 для площадок P_{tr}^1, P_{tr}^2 соответственно. При этом нужно выбрать начальные отрезки раздела на кольцах согласованно.

Рассмотрим вершину x_i графа K . Выберем для нее какие-нибудь кресты на площадках P_{tr}^1, P_{tr}^2 так, чтобы их границы пересекали ребра графа K в одних и тех же точках (рис.3.5.4).

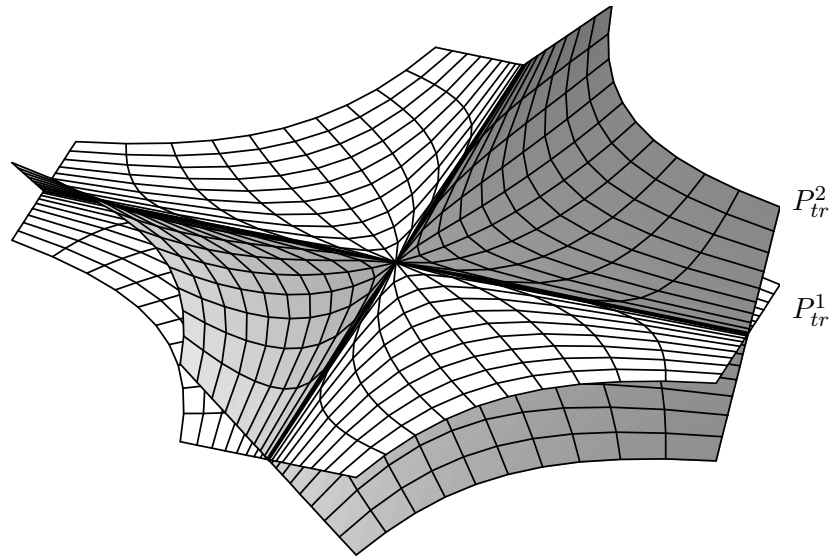


Рис. 3.5.4:

В окрестности x_i рассмотрим взаимно-однозначную проекцию площадки P_{tr}^2 на P_{tr}^1 , обладающую следующим свойством. Линии уровня гамильтониана \mathcal{H}_2 редуцированной системы на P_{tr}^2 должны отобразиться в линии уровня гамильтониана \mathcal{H}_1 редуцированной

системы на P_{tr}^1 . Такую проекцию можно провести каноническим образом, отождествляя линии уровня, соответствующие одинаковым значениям функции периода (учитывая, что на каждой площадке значение функции периода стремится к бесконечности при приближении к особому слою). При этом нас не интересует время вдоль траекторий, важно лишь, чтобы отображение было гладким.

Выберем теперь на P_{tr}^1 (в окрестности x_i) координаты (x, y) в соответствии с леммой Морса, так что $\mathcal{H}_1 = xy$, а $\mathcal{H}_2 = f(\mathcal{H}_1)$, для некоторой функции f . Общему особому графу K соответствуют $x = 0, y = 0$.

Посмотрим, как определяются границы канонических крестов на K . От произвольно выбранных крестов нужно отрезать куски, длины которых равны $I_j, j = 1, \dots, 4$ (3.5.8). Пусть функции $\omega^1(x, y), \omega^2(x, y)$ являются компонентами симплектических форм на P_{tr}^1 и P_{tr}^2 соответственно. Тогда значения интегралов $I_j, j = 1, \dots, 4$ определяются этими функциями, ограниченными на особый граф K .

Лемма 3.5.9. *В окрестности особой точки x_i функции ω^1 и ω^2 в выбранных координатах (x, y) совпадают на K :*

$$\omega^1(x, 0) = \omega^2(x, 0), \quad \omega^1(0, y) = \omega^2(0, y).$$

Доказательство. Известно, что векторные поля $\text{sgrad } \mathcal{H}_1$ и $\text{sgrad } \mathcal{H}_2$ равны на K . Запишем их в координатах (x, y) на $y = 0$:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } \mathcal{H}_1(x, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega^1(x, 0)} \\ \frac{1}{\omega^1(x, 0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \\ \text{sgrad } \mathcal{H}_2(x, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega^2(x, 0)} \\ \frac{1}{\omega^2(x, 0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{H}_1}(x, 0). \end{aligned}$$

Известно, что линейаризации потоков $\text{sgrad } \mathcal{H}_1$ и $\text{sgrad } \mathcal{H}_2$ должны совпадать (в частности, из-за совпадения динамики на особом графе для разных площадок), и кроме того, $\omega^1(0, 0) = \omega^2(0, 0)$ (и равны соответствующей рассматриваемой вершине компоненте Λ -инварианта), а функция \mathcal{H}_1 зависит от произведения xy . Поэтому очевидно, что $\frac{\partial f}{\partial \mathcal{H}_1}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{H}_1}(0, 0) = 1$. Но тогда из выписанных равенств следует, что $\omega^1(x, 0) = \omega^2(x, 0)$. Аналогично $\omega^1(0, y) = \omega^2(0, y)$. Лемма 3.5.9 доказана. \square

Докажем теперь, что Δ - и Z -инварианты совпадают.

Из леммы 3.5.9 следует, что величины $I_j, j = 1, \dots, 4$ (3.5.8) совпадают для P_{tr}^1, P_{tr}^2 , а $\frac{\partial f}{\partial \mathcal{H}_1}(0, 0) = 1$, следовательно, для получения канонических крестов от произвольных крестов с совпадающими граничными точками на особом графе необходимо отрезать или

приклеить куски одной и той же длины. Отсюда следует, что канонические кресты для P_{tr}^1 и P_{tr}^2 можно выбрать так, чтобы их границы пересекали особый граф K в одних и тех же точках.

Отметим, что длины оставшихся ленточек, если их измерять по K (т.е. измерять время движения потоков по графу K между границами канонических крестов), совпадают.

На P_{tr}^1 и P_{tr}^2 рассмотрим соответствующие друг другу кольца и проведем на них начальные отрезки раздела (линии уровня угловой переменной $\varphi = 0$) так, чтобы их границы на K совпали между собой. Проведем теперь остальные отрезки раздела на выбранных кольцах P_{tr}^1 и P_{tr}^2 . Как определяются эти остальные отрезки? Берется какая-нибудь траектория, она естественным образом параметризована временем. Мы делим ее на куски, времена проходов по которым пропорциональны величинам Λ_i , соответствующим этим кольцам. Функции периода для колец P_{tr}^1 и P_{tr}^2 отличаются на некоторую непрерывную функцию $c(\mathcal{H})$, причем по доказанному $c(0) = 0$. Отсюда следует, что границы отрезков раздела на K совпадают для P_{tr}^1 и P_{tr}^2 .

В самом деле, для каждой пары кусков колец между отрезками раздела разница во времени прохода равна $\frac{\Lambda_i}{\Lambda}c(\mathcal{H})$, где $\Lambda = \sum_i \Lambda_i$. На K динамика одинакова, $c(0) = 0$, поэтому границы отрезков раздела на K совпадают.

Поскольку динамика на графе одинаковая для обеих площадок, то и коэффициенты цепей l одинаковы. Отсюда следует, что и Δ , Z -инварианты для Q_1^3 и Q_2^3 совпадают. Теорема 3.5.1 доказана. \square

Следствие 3.5.10. *Поскольку существуют семейства площадок, непрерывно зависящие от точки на седловой кривой (см. замечание 2.1.4), т.е. иными словами, существуют такие гомотопические классы площадок, что в них существуют трансверсальные площадки для всех точек седловой кривой γ_s , то можно рассмотреть (непрерывные) зависимости чисел Λ , Δ и Z от точки на особой кривой γ_s бифуркационной диаграммы. В теореме 3.7.2 будет доказано, что эти функции являются корректно определенными инвариантами траекторной эквивалентности систем на $U(L)$.*

3.6. Поведение функции вращения в окрестности особой точки типа седло-центр

Пространство $\mathcal{B}(U)$ представляет собой “раскрытую книжку”, которая естественным образом накрывает образ отображения момента \mathcal{F} (рис. 1.4.1, стр. 17). Выберем и зафиксируем лист X этой книжки. Естественно отождествлять X с левым или правым (соответственно) углами множества $\mathcal{F}(U(L))$.

Определение 3.6.1. Пусть $\Pi(\mathcal{H})$ обозначает полный период движения по P_{tr} под действием потока $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ вдоль интегральной траектории, соответствующей заданному значению \mathcal{H} . Эта функция называется *функцией периода*.

Зафиксируем на торах листа X базис, состоящий из стягивающегося цикла и цикла, высекаемого трансверсальной площадкой P_{tr} . Функция вращения, записанная в этом базисе, совпадает с функцией периода редуцированной системы на P_{tr} .

Нам снова понадобится вспомогательное предложение 3.5.4 о представлении функции периода $\Pi(\varepsilon)$, стр. 53.

Рассмотрим произвольное кольцо атома. Можно разбить его на прямоугольники с помощью гладких дуг N_i , трансверсальных линиям уровня функции \mathcal{H} . Применим предложение 3.5.4 к каждому из этих прямоугольников. Пусть $\Pi_i(\mathcal{H})$ обозначает время движения под действием гамильтонова потока внутри i -го прямоугольника от N_i к N_{i+1} вдоль интегральной кривой, соответствующей заданному значению \mathcal{H} . Тогда

$$\Pi_i(\mathcal{H}) = -\Lambda_{m_i} \ln \mathcal{H} + c^{(i)}(\mathcal{H}).$$

Здесь m_i обозначает номер вершины атома, принадлежащей границе i -го прямоугольника, а $c^{(i)}(\mathcal{H})$ непрерывная функция на $[0, h]$ (h соответствует значению \mathcal{H} на внешней границе выбранного кольца) Также можно получить

$$\Pi_i(\mathcal{H}) = -P_n^{(i)}(\mathcal{H}) \ln \mathcal{H} + c_n^{(i)}(\mathcal{H}),$$

где $P_n^{(i)}(\mathcal{H})$ является многочленом степени n со свободным коэффициентом Λ_{m_i} , а $c_n^{(i)}(\mathcal{H})$ — функция класса C^n на $[0, h]$.

Легко видеть, что

$$\Pi(\mathcal{H}) = -\Lambda \ln(\mathcal{H}) + c(\mathcal{H}) \tag{3.6.1}$$

где $\Lambda = \sum_i \Lambda_{m_i}$, а $c(\mathcal{H})$ — некоторая непрерывная функция на $[0, h]$. Кроме того,

$$\Pi(\mathcal{H}) = -P_n(\mathcal{H}) \ln \mathcal{H} + c_n(\mathcal{H}), \tag{3.6.2}$$

где $P_n(\mathcal{H})$ — многочлен степени n со свободным коэффициентом Λ , $c_n(\mathcal{H})$ — функция класса C^n на $[0, h]$.

Замечание 3.6.2. Поскольку функции $c_0(\mathcal{H})$ и $c_1(\mathcal{H})$ связаны соотношением

$$c_0(\mathcal{H}) = -a_1 \mathcal{H} \ln \mathcal{H} + c_1(\mathcal{H}), \quad \text{где } a_1 \in \mathbb{R},$$

то на самом деле $c_0(\mathcal{H})$ является C^1 -гладкой при $\mathcal{H} \neq 0$.

Пусть s, s_2 — переменные действия, соответствующие выбранному базису, состоящему из стягивающегося цикла и компоненты границы P_{tr} ; $s, f_2 = f_2(x, y)$ — координаты как в п. 3.1 (по сути координаты, определяемые леммой 1.4.1); $H = H(s, f_2)$ зависимость гамильтониана от s, f_2 . Мы ограничиваемся в данный момент рассмотрением отдельного листа книжки $\mathcal{B}(U)$, поэтому, более точно, f_2 представляет собой ограничение этой функции на часть 4-многообразия, соответствующую выбранному листу.

Определение 3.6.3. Система *неспециальна*, если $\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial H}{\partial f_2}(0, 0) \neq 0$.

Замечание 3.6.4. Поскольку $H = H(s, f_2)$ на всем M^4 , очевидно, что свойство неспециальности системы не зависит от выбора листа книжки $\mathcal{B}(U)$. Кроме того, ясно, что в качестве f_2 можно брать, вообще говоря, любую функцию f_2 , постоянную на слоях лиувиллева слоения, с единственным условием $df_2 \neq 0$. Например, годится функция $f = p_1 q_1$, определяемая теоремой Элиассона 0.1.5. См. также условие 6) из п. 1.2.

Замечание 3.6.5. Пусть H'_i обозначает частную производную функции H по i -му аргументу (т.е. $H'_1 = \frac{\partial H}{\partial s}, H'_2 = \frac{\partial H}{\partial f_2}$). Как будет яснее видно из дальнейшего, условие $H'_2(0, 0) \neq 0$ нужно для того, чтобы спроектированные системы на близких к нулевому уровню площадках были невырожденными, см. уравнения (3.3.1), а условие $H'_1(0, 0) \neq 0$ гарантирует невыделенность площадки $P_{tr}(0) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_m)$ среди прочих (на ней, в частности, будет существовать предел редуцированных систем, являющийся обычной ИГС), см. ниже доказательство леммы 3.6.7.

Замечание 3.6.6. Из невырожденности особого слоя следует, что $H'_1(0, 0)$ и $H'_2(0, 0)$ не могут быть одновременно равны нулю. Неспециальный случай является случаем общего положения. Реальные физические задачи обычно также являются неспециальными.

Лемма 3.6.7 (о поведении функции вращения).

Пусть система неспециальна. Тогда линии уровня функции вращения ρ на выбранном листе X пространства $\mathcal{B}(U)$ параллельны γ_s и втыкаются в γ_m трансверсально, т.е. более точно, существует гомеоморфизм листа X на стандартный, см. рис. 3.6.1. Кроме того, ρ монотонно стремится к бесконечности при приближении к γ_s .

Доказательство. В качестве координат на окрестности точки y_0 на листе X можно выбрать переменные s и f_2 ($s \geq 0, f_2 \geq 0$ для определенности). Естественно считать, что уравнение $s = 0$ задает кривую γ_m , а уравнение $f_2 = 0$ (при $s \geq 0$) — кривую γ_s . Рассмотрим теперь семейство кривых $\Gamma = \{s = const\}$, являющихся трансверсальными

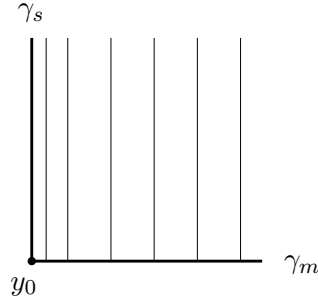


Рис. 3.6.1: “Стандартный” лист X книжки $\mathcal{B}(U)$.

седловой кривой γ_s бифуркационной диаграммы. Оно включает в себя и кривую γ_m . Каждой из кривых $\gamma \in \Gamma$ соответствует некоторое инвариантное подмногообразие в $U(L)$, причем подмногообразия $Q_{s_0} = \mathcal{F}^{-1}(\{s = s_0\})$, $s_0 \neq 0$ являются трехмерными, а подмногообразие Q_0 , соответствующее $\gamma = \gamma_m$, является двумерным.

Для каждого из подмногообразий Q_s можно выбрать трансверсальную площадку $P_{tr}(s)$, так, чтобы все вместе они образовали гладко зависящее от s семейство. Особая двумерная площадка Q_0 будет при этом являться одной из площадок семейства. На каждой из площадок $P_{tr}(s)$, $s > 0$, имеется редуцированная система. Редуцированные системы также образуют гладкое семейство.

Чтобы вычислить функцию вращения, рассмотрим снова базис (λ, μ) , состоящий из стягивающегося цикла λ и цикла μ , являющегося пересечением трансверсальной площадки $P_{tr}(s)$ с лиувилевым тором. Как было отмечено выше, функция вращения в базисе (λ, μ) совпадает с функцией периода редуцированной системы на $P_{tr}(s)$.

Отметим сначала, что на каждой из площадок $P_{tr}(s)$, $s \neq 0$, выполнено

$$\Pi(s, f_2) = \rho(s, f_2) = \frac{1}{2\pi} K(s, f_2) \bar{\Pi}(s, f_2) \quad (3.6.3)$$

где $\Pi(s, f_2)$ — функция периода на $P_{tr}(s)$ для редуцированной системы, $\bar{\Pi}(s, f_2)$ — функция периода для системы на $P_{tr}(s)$ с гамильтонианом $\mathcal{H} = f_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{\omega(s, x, y)} \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega(s, x, y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

а $K(s, f_2) = \frac{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}{H'_2 G'_2}(s, f_2)$ (здесь $G(s, f_2) = s_2(s, f_2)$). Выражение (3.6.3) получается сравнением выражений (3.2.4) и (3.6.4).

Замечание 3.6.8. Поскольку $\omega(s, x, y) \neq 0$ из-за невырожденности симплектической формы, см. п. 3.1, системы (3.6.4) на разных уровнях s качественно устроены одинаково.

А именно, они имеют одни и те же особые точки и особые графы, причем все особые точки являются гиперболическими. В частности, для всех уровней выполнено предложение 3.5.4. Кроме того, система (3.6.4) на площадке $P_{tr}(0)$ устроена аналогично, т.е. на ней имеется предел спроектированных (=редуцированных по Марсдену-Вайнштейну) систем, совпадающий с естественным движением на $P_{tr} = Q_0$.

Поскольку $s_2 = G(s, f_2)$, то (на уровне $P(s)$) получим:

$$G'_2(s, f_2) = \left. \frac{ds_2}{df_2} \right|_{s=const} = \frac{\bar{\Pi}(s, f_2)}{2\pi} \quad (3.6.5)$$

(следует из того, что s_2 является переменной действия на кольцах $P(s)$ и $\frac{df_2}{ds_2}$ — скорость системы с гамильтонианом f_2 (3.6.4) по соответствующей угловой переменной φ_2). Из (3.6.1) и (3.6.5) следует:

$$\begin{aligned} G'_2(s, f_2) &= \frac{1}{2\pi} (-\Lambda(s) \ln f_2 + c(s, f_2)), \\ G(s, f_2) &= \frac{\Lambda(s)}{2\pi} (1 - \ln f_2) f_2 + \tilde{c}(s, f_2), \end{aligned}$$

и поэтому

$$G'_1(s, f_2) = \frac{\Lambda'(s)}{2\pi} (1 - \ln f_2) f_2 + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, f_2). \quad (3.6.6)$$

Здесь $c(s, f_2)$ непрерывна по f_2 и гладкая по s , $\tilde{c}(s, f_2)$ соответственно C^1 -гладкая.

Тогда для множителя из формулы (3.2.4) выполнено:

$$\frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} \rightarrow \frac{H'_2}{H'_1} \text{ при } f_2 \rightarrow 0, \quad (3.6.7)$$

поскольку G'_2 порядка $\ln f_2$ при $f_2 \rightarrow 0$, а G'_1 непрерывна в $f_2 = 0$, т.к. $(1 - \ln f_2)f_2 \rightarrow 0$.

Кроме того, аналогично получим, что

$$\frac{G'_1}{G'_2} \sim \frac{\Lambda'(s) f_2 \ln f_2}{\Lambda(s) \ln f_2} \xrightarrow{f_2 \rightarrow 0} 0. \quad (3.6.8)$$

Следовательно, если система неспециальна, то $\frac{H'_2}{H'_1}(s, 0) \neq 0$ в целой окрестности нуля, значит, и $\frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2) \neq 0$ также.

Замечание 3.6.9. Из вышесказанного следует, что и редуцированные системы качественно не отличаются на разных уровнях $P_{tr}(s)$, в том числе и на $P_{tr}(0)$, см. (3.2.4). Здесь необходимо также использовать, что $\Lambda(s)$ определяется величиной $\omega(s, x, y)$ (см. (3.2.4)), поэтому на самом деле системой (3.6.4), а значит, $\Lambda(s)$ — гладкая функция по s , $s \geq 0$. Кроме того, все вышеописанные свойства функции $G(s, f_2)$ также выполнены при всех $s \geq 0$.

Отметим также, что из (3.6.7) следует, что для функции $K(s, f_2) = \frac{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}{H'_2 G'_2}(s, f_2)$ выполнено:

$$K(s, f_2) \rightarrow \frac{H'_1}{H'_2} \text{ при } f_2 \rightarrow 0. \quad (3.6.9)$$

Снова воспользуемся (3.6.2) при $n = 0$ и $n = 1$:

$$\begin{aligned} \rho(s, f_2) &= \Pi(s, f_2) = -\Lambda(s) \ln \mathcal{H}_{P(s)}(f_2) + c_0(s, f_2) \\ &= -(\Lambda(s) + a(s)\mathcal{H}_{P(s)}(f_2)) \ln \mathcal{H}_{P(s)}(f_2) + c_1(s, f_2). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $\mathcal{H}_{P(s)}(f_2) = h(f_2)f_2$, где $h(0) \neq 0$, т.к. $\mathcal{H}_{P(s)}(0) = 0$ и $h(0) = \lim_{f_2 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{P(s)}(f_2)}{f_2} = \mathcal{H}'_{P(s)}(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \rho(s, f_2) &= -\Lambda(s) \ln f_2 + \tilde{c}_0(s, f_2) \\ &= -(\Lambda(s) + a(s)h(0)f_2) \ln f_2 + \tilde{c}_1(s, f_2). \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Функции \tilde{c}_0 и c_0 непрерывны по f_2 и гладкие по s , а функции \tilde{c}_1 и c_1 класса C^1 по f_2 и гладкие по s .

Из (3.6.10) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial s} &= -\Lambda'(s) \ln f_2 + \frac{\partial \tilde{c}_0}{\partial s}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial f_2} &= -(\Lambda(s) + a(s)h(0)f_2) \frac{1}{f_2} - a(s)h(0) \ln f_2 + \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial f_2} \\ &= -\frac{\Lambda(s)}{f_2} - a(s)h(0) \ln f_2 - a(s)h(0) + \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial f_2}. \end{aligned}$$

При малых $f_2 \neq 0$ из первого уравнения следует, что $\frac{\partial \rho}{\partial s}$ существует, а из второго — что $\frac{\partial \rho}{\partial f_2} < const < 0$. Последнее выполнено, поскольку $-a(s)h(0) + \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial f_2}$ непрерывна, и значит, ограничена, $a(s)$, $\Lambda(s) > 0$ также непрерывны и ограничены в окрестности точки $(0, 0)$ и поэтому существует окрестность нуля и константа $C > 0$ такие, что

$$-\frac{\Lambda(s)}{f_2} - a(s)h(0) \ln f_2 = -\frac{1}{f_2} \left(\Lambda(s) + \underbrace{a(s)h(0)f_2 \ln f_2}_{\rightarrow 0, f_2 \rightarrow 0} \right) < -\frac{C}{f_2} \rightarrow -\infty \text{ при } f_2 \rightarrow 0.$$

Поскольку все величины по s гладкие, можно перейти к пределу величины $\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}, \frac{\partial \rho}{\partial f_2} \right)$ при $s \rightarrow 0$, $f_2 \neq 0$. Отсюда следует, что в малой окрестности особой точки градиент функции ρ (в переменных s, f_2) существует, ненулевой и непараллелен $\gamma_s = \{f_2 = 0\}$. Это означает, что линии уровня функции вращения относительно переменных s, f_2 втыкаются в кривую $\{s = 0\} = \gamma_s$ трансверсально.

Параллельность линий уровня ρ седловой кривой следует из того, что для любого фиксированного s функция вращения $\rho(s, f_2) \rightarrow \infty$ при $f_2 \rightarrow 0$.

Теперь нужно исследовать поведение предела функции вращения на самой кривой γ_m . Для этого понадобится представление (3.6.3). Учитывая замечания 3.6.8 и 3.6.9, формула (3.6.3) выполнена при всех $s \geq 0$ (а не только $s > 0$). Ясно, что $\Pi(0, f_2) \rightarrow \infty$ при $f_2 \rightarrow 0$, поскольку $\bar{\Pi}(0, f_2) \rightarrow \infty$.

Остается убедиться в монотонности $\Pi(0, f_2)$ при $f_2 \rightarrow 0$. Используя (3.6.3), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_2}(0, f_2) = \frac{1}{2\pi} (K\bar{\Pi})'_{f_2}(0, f_2) = \frac{1}{2\pi} (K'_2\bar{\Pi} + K\bar{\Pi}'_2)(0, f_2) \quad (3.6.11)$$

Условие того, что $\Pi(0, f_2)$ монотонна, эквивалентно тому, что $K'_2\bar{\Pi} + K\bar{\Pi}'_2$ сохраняет знак, т.е. что $K'_2\bar{\Pi} + K\bar{\Pi}'_2 \neq 0$.

$$K'_2\bar{\Pi} + K\bar{\Pi}'_2 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\Pi}'_2}{\bar{\Pi}} \neq -\frac{K'_2}{K}. \quad (3.6.12)$$

Докажем, что левая часть (3.6.12) стремится к бесконечности при $f_2 \rightarrow 0$, в то время, как правая — некоторое фиксированное число в точке $(0, 0)$. Это гарантирует наличие проколотой окрестности точки $(0, 0)$, где выполнено (3.6.12).

В силу (3.6.2), для $n = 1$, существует функция c_1 , гладкая по s и C^1 -гладкая по f_2 , такая, что

$$\bar{\Pi}(s, f_2) = -(\Lambda(s) + a_1(s)f_2) \ln f_2 + c_1(s, f_2), \quad (3.6.13)$$

откуда получим ($a_1 = a_1(0)$):

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}'_2(s, f_2) &= -\frac{\Lambda(s) + a_1(s)f_2}{f_2} - a_1(s) \ln f_2 + \frac{\partial c_1}{\partial f_2}(s, f_2) \\ \frac{\bar{\Pi}'_2}{\bar{\Pi}}(0, f_2) &= \frac{-\frac{\Lambda+a_1f_2}{f_2} - a_1 \ln f_2 + c'_1(f_2)}{-(\Lambda + a_1f_2) \ln f_2 + c_1(f_2)} = \frac{-(\Lambda + a_1f_2) - a_1f_2 \ln f_2 + c'_1(f_2)f_2}{-(\Lambda + a_1f_2)f_2 \ln f_2 + c_1(f_2)f_2} \\ &= \frac{1 + \frac{a_1f_2 \ln f_2}{\Lambda+a_1f_2} - \frac{c'_1(f_2)f_2}{\Lambda+a_1f_2}}{f_2 \ln f_2 - \frac{c_1(f_2)f_2}{\Lambda+a_1f_2}} \sim \frac{1}{f_2 \ln f_2} \rightarrow \infty \text{ при } f_2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Кроме того, из (3.6.13) и определения G'_2 (3.6.5) также получим:

$$\begin{aligned} G''_{12}(s, f_2) &= \frac{1}{2\pi} \left((-\Lambda'(s) + a'_1(s)f_2) \ln f_2 + \frac{\partial}{\partial s} c_1(s, f_2) \right) \sim -\frac{\Lambda'(s)}{2\pi} \ln f_2 \text{ при } f_2 \rightarrow 0, \\ G''_{22}(s, f_2) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\Lambda(s)}{f_2} + a_1(s) \ln f_2 + a_1(s) + \frac{\partial}{\partial f_2} c_1(s, f_2) \right) \sim -\frac{\Lambda(s)}{2\pi f_2} \text{ при } f_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому, используя также (3.6.8)

$$\begin{aligned}
K'_2(s, f_2) &= \frac{\partial}{\partial f_2} \left(\frac{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}{H'_2 G'_2} \right) (s, f_2) = \frac{\partial}{\partial f_2} \left(\frac{H'_1}{H'_2} - \frac{G'_1}{G'_2} \right) (s, f_2) \\
&= \frac{H''_{12} H'_2 - H'_1 H''_{22}}{(H'_2)^2} (s, f_2) - \frac{G''_{12} G'_2 - G'_1 G''_{22}}{(G'_2)^2} (s, f_2) \\
&= \frac{H''_{12} H'_2 - H'_1 H''_{22}}{(H'_2)^2} (s, f_2) - \frac{G''_{12}}{G'_2} (s, f_2) + \frac{G'_1}{G'_2} \frac{G''_{22}}{G'_2} (s, f_2) \\
&\sim \frac{H''_{12} H'_2 - H'_1 H''_{22}}{(H'_2)^2} (s, f_2) - \frac{\Lambda'(s) \ln f_2}{\Lambda(s) \ln f_2} + \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} f_2 \frac{1}{f_2 \ln f_2} \\
&\rightarrow \frac{H''_{12} H'_2 - H'_1 H''_{22}}{(H'_2)^2} (s, 0) - \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} \text{ при } f_2 \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (3.6.9),

$$\frac{K'_2}{K}(0, f_2) \rightarrow \left(\frac{H''_{12} H'_2 - H'_1 H''_{22}}{(H'_2)^2} (0, 0) - \frac{\Lambda'(0)}{\Lambda} \right) \frac{H'_2}{H'_1} (0, 0) \text{ при } f_2 \rightarrow 0. \quad (3.6.15)$$

Таким образом, из (3.6.14) и (3.6.15) следует, что $\frac{\Pi'_2}{\Pi}(0, f_2)$ стремится к бесконечности, а $\frac{K'_2}{K}(0, f_2)$ — к константе. Возвращаясь назад, это означает, что функция $\Pi(0, f_2)$ монотонна при $f_2 \rightarrow 0$. \square

3.7. Критерий траекторной эквивалентности и полный траекторный инвариант

Мы предполагаем, что ИГС удовлетворяет условиям 1)-6) п. 1.2. Кроме того, требуется, чтобы траекторный гомеоморфизм сохранял ориентацию многообразия.

Пусть заданы две особенности типа седло-центр с седловыми атомами V и V' ; $\mathcal{B}(U)$ и $\mathcal{B}'(U')$ — базы их лиувиллевых слоений. Объекты V и $\mathcal{B}(U)$, а также V' и $\mathcal{B}'(U')$ являются связанными между собой: каждому кольцу атома можно однозначно поставить в соответствие некоторый лист книжки, а именно, тот лист, на который проектируется тор Лиувилля, содержащий граничную окружность атома, соответствующую выбранному кольцу (см. рис. 1.4.2, стр. 17). Особому графу соответствует корешок книжки. Обозначим это соответствие $\eta : V \rightarrow \mathcal{B}(U)$, соответственно $\eta' : V' \rightarrow \mathcal{B}'(U')$.

Рассмотрим два отображения:

$$\zeta : V \rightarrow V'$$

— диффеоморфизм определяющих особенности атомов, и

$$\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$$

— гомеоморфизм соответствующих книжек.

Определение 3.7.1. Отображения ζ и ξ называются *согласованными*, если для любого кольца C атома V кольцу $\zeta(C)$ атома V' соответствует тот же лист $\mathcal{B}'(U')$, что и образ листа $\mathcal{B}(U)$, соответствующего C при отображении ξ , иначе говоря, если $\eta' \circ \zeta = \xi \circ \eta$.

Напомним, что в п. 3.5 построены функции Λ , Δ , Z , зависящие от точки на седловой кривой γ_s и класса трансверсальной площадки. См. теорему 3.5.1, а также следствие 3.5.10 к ней.

Теорема 3.7.2. Пусть $v, v' — ИГС с двумя степенями свободы, рассматриваемые в четырехмерных окрестностях U, U' своих особых слоев типа седло-центр и удовлетворяющие условиям 1)-6) п. 1.2. Пусть v, v' лиувиллево эквивалентны в окрестностях U, U' и им соответствуют диффеоморфные атомы $V \simeq V'$. Тогда v, v' топологически траекторно эквивалентны в U, U' тогда и только тогда, когда существуют:$

- диффеоморфизм атомов $\zeta : V \rightarrow V'$,
- гомеоморфизм баз лиувиллевых слоев $\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$,
- выбор классов трансверсальных сечений для v и для v' ,

такие, что:

1. ζ и ξ являются согласованными,
2. ξ сохраняет функцию вращения ρ как функцию на книжке, и
3. инварианты Λ, Δ, Z как функции одной переменной на седловой кривой.

(При этом все инварианты вычисляются относительно выбранных классов трансверсальных сечений и как следствие базисных циклов на торах Лиувилля.)

Замечание 3.7.3. Каждый из инвариантов Λ, Δ и Z , вычисленный в какой-нибудь точке кривой γ_s , является набором чисел. Каждый из элементов такого набора жестко привязан к некоторой вершине или ребру особого графа атома. Пусть вершины и ребра особого графа атома V занумерованы, а инварианты вычисляются относительно этой нумерации. Требование, чтобы отображение ξ сохраняло инварианты, подразумевает, что нумерация вершин и ребер особого графа атома V' индуцирована нумерацией особого графа атома V при помощи отображения ζ .

Замечание 3.7.4. Отображение ζ и его согласованность с ξ нужны лишь для фиксации нумераций особых графов атомов V и V' , чтобы потом сравнивать инварианты относительно этих нумераций. Таким образом, это условие является по сути комбинаторным, поскольку нужен способ зафиксировать "комбинаторный тип траекторного гомеоморфизма". Поэтому теорему 3.7.2 можно переформулировать следующим образом:

Эквивалентная переформулировка теоремы 3.7.2.

Пусть v, v' — ИГС с двумя степенями свободы, рассматриваемые в четырехмерных окрестностях U, U' своих особых слоев типа седло-центр и удовлетворяющие условиям 1)-6) п. 1.2. Пусть задан послыйный лиувиллев гомеоморфизм

$$\eta : U \rightarrow U'$$

и фиксирован его комбинаторный тип. Тогда η можно продеформировать до траекторного гомеоморфизма $\tilde{\psi} : U \rightarrow U'$, не меняя комбинаторного типа, тогда и только тогда, когда естественную проекцию η на $\mathcal{B}(U)$ можно продеформировать до гомеоморфизма

$$\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U'),$$

сохраняющего функцию вращения и инварианты Λ, Δ, Z на седловой кривой, вычисленных относительно некоторого выбора гомотопических классов трансверсальных площадок для v, v' .

Доказательство.

Необходимость. Нетривиальным является сохранение инвариантов Λ, Δ, Z .

Выберем для первой системы какое-нибудь гладкое инвариантное подмногообразие $Q^3 \subset U(L)$, являющееся прообразом гладкой дуги γ , пересекающей γ_s трансверсально, при отображении момента. В Q^3 выберем также какую-нибудь трансверсальную площадку P_{tr} .

Образ $Q^3 = \tilde{\psi}(Q^3)$ при траекторном гомеоморфизме $\tilde{\psi}$ может не являться гладким подмногообразием в $U'(L')$, однако он является гладким многообразием. Q^3 собрано из торов Лиувилля и особого слоя, поэтому вся негладкость содержится по сути в негладкости кривой $\xi(\gamma)$. Трансверсальная площадка $P_{tr} \subset Q^3$ перейдет в некоторую возможно негладкую площадку $\tilde{\psi}(P_{tr}) \subset Q^3$. Вместо $\tilde{\psi}(P_{tr})$ мы рассмотрим изотопную площадку P'_{tr} такую, чтобы каждый тор Лиувилля в Q^3 пересекал ее по (гладкой) окружности, трансверсальной потоку. На окружностях P'_{tr} естественным образом определена параметризация φ_2 , индуцированная соответствующей угловой переменной на соответствующем торе. P'_{tr} является гладким многообразием и указанное слоение на

окружности задает на P'_{tr} структуру атома V . Кроме того, на P'_{tr} определено отображение Пуанкаре.

На P'_{tr} можно построить редуцированную систему. На P'_{tr} не определено естественной симплектической структуры, поэтому речь не идет о гамильтоновости. Однако, редуцированная система будет связана с отображением Пуанкаре σ' так же, как и в гладком случае: сдвиг на единицу вдоль траекторий редуцированной системы совпадает с σ' . Докажем существование редуцированной системы.

Движение по P'_{tr} должно происходить вдоль окружностей, являющихся пересечением P'_{tr} с лиувиллевыми торами (или по особому графу, также являющемуся пересечением P'_{tr} со слоем слоения Лиувилля). Поэтому построение можно проводить по отдельности на каждой такой окружности. Из нерезонансности системы v' следует, что почти для любой точки $x' \in P'_{tr}$ замыкание ее орбиты (под действием σ') является окружностью — пересечением P'_{tr} и тора Лиувилля. Из-за специфики системы v' ограничение σ' на эту окружность сопряжено повороту на некоторый угол $2\pi\beta$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. В силу иррациональности β для любого $t \in \mathbb{R}$ существует последовательность целых чисел $n_k \rightarrow \infty$ такая, что $(\beta n_k - t) \bmod 2\pi \rightarrow 0$, откуда можно положить

$$\sigma^t(x') := \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{n_k}(x'). \quad (3.7.1)$$

В остальных точках P'_{tr} отображение σ^t строится из соображений непрерывности, поскольку иррациональные окружности всюду плотны на P'_{tr} .

Замечание 3.7.5. Можно было поступить по-другому. А именно, каждая окружность P'_{tr} изотопна на своем торе Лиувилля некоторой окружности, лежащей на некоторой трансверсальной площадке. Следовательно, на этой изотопной окружности определен поток для редуцированной системе (на своей площадке). Нетрудно видеть, что этот поток можно перенести на нашу окружность из P'_{tr} с помощью потока v' . Получится то же самое, что и при помощи (3.7.1).

Замечание 3.7.6. При помощи потока v' можно перенести редуцированную систему с настоящей трансверсальной площадки на изотопную ей, но трансверсальную лишь $\text{sgrad } s$ и v' , т.е. не обязательно трансверсальную $\text{sgrad } \alpha$ (см. лемму 2.1.2).

Докажем, что топологическая траекторная эквивалентность систем на Q^3 и Q^3 влечет за собой топологическую сопряженность редуцированных систем на P_{tr} и P'_{tr} , где площадки P_{tr} , P'_{tr} могут быть настоящими трансверсальными или “плохими”.

Из траекторной эквивалентности систем v и v' следует, что на площадках P_{tr} и P'_{tr} отображения Пуанкаре σ и σ' сопряжены; здесь используется, что при изотопии площадок

класс сопряженности отображения Пуанкаре не меняется. Теперь нужно показать, что из сопряженности отображений Пуанкаре следует сопряженность соответствующих потоков Пуанкаре $\sigma^t, \sigma^{t'}$ (редуцированных систем).

Пусть $g : P_{tr} \rightarrow P'_{tr}$ — сопрягающий σ и σ' гомеоморфизм.

Системы v и v' нерезонансны, поэтому для почти любой точки $x \in P_{tr}$ получим, см. (3.7.1): для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и последовательности целых чисел $n_k \rightarrow \infty$ (так, что $(\beta n_k - t) \bmod 2\pi \rightarrow 0$) выполнено

$$\begin{aligned}\sigma^t(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{n_k}(x), \\ \sigma^{t'}(g(x)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma'^{n_k}(g(x)).\end{aligned}$$

Отметим, что $\beta' = \beta$ совпадают из-за сопряженности σ, σ' и совпадают с числом вращения на соответствующем торе.

Перейдем к пределу в равенстве $\sigma'^{n_k}(g(x)) = g(\sigma^{n_k}(x))$:

$$\sigma^{t'}(g(x)) = g(\sigma^t(x)).$$

Из соображений непрерывности и того, что иррациональные торы всюду плотны, получим, что потоки Пуанкаре сопряжены на P_{tr}, P'_{tr} : $\sigma^{t'} \circ g = g \circ \sigma^t$.

Дадим теперь расширенное толкование Λ -, Δ - и Z -инвариантов для “плохих” площадок. Рассмотрим какую-нибудь плохую площадку P'_{tr} .

Λ -инвариант (расширенный). Выбросим из P'_{tr} особый слой и рассмотрим какое-нибудь из получившихся колец. Будем считать без ограничения общности, что оно положительно. Разобьем площадку на кресты произвольным образом с помощью непрерывных отрезков, пересекающих особый граф в неособых точках. Тогда компоненту Λ_i Λ -инварианта можно интерпретировать как

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Pi_i(\rho)}{\rho}, \quad (3.7.2)$$

где $\Pi_i(\rho)$ — время прохода между границами соответствующей четвертинки креста, для редуцированной системы. При этом для настоящей трансверсальной площадки получим:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Pi_i(\rho)}{\rho} = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{-\Lambda_i \ln \mathcal{H} + c_i(\mathcal{H})}{-\Lambda \ln \mathcal{H} + c(\mathcal{H})} = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{\frac{\Lambda_i}{\Lambda} - \frac{c_i(\mathcal{H})}{\Lambda \ln \mathcal{H} - c(\mathcal{H})}}{1 - \frac{c(\mathcal{H})}{\Lambda \ln \mathcal{H} - c(\mathcal{H})}} = \frac{\Lambda_i}{\Lambda},$$

где $\Lambda = \sum \Lambda_i$, \mathcal{H} — гамильтониан редуцированной системы, а $c_i(\mathcal{H}), c(\mathcal{H})$ — непрерывные бесконечно малые в окрестности нуля функции. Кроме того,

$$(\Lambda_1 : \dots : \Lambda_n) = \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda} : \dots : \frac{\Lambda_n}{\Lambda} \right),$$

поэтому интерпретация (3.7.2) корректна.

Ясно, что величина (3.7.2) сохраняется при изотопиях площадки. Необходимо также показать, что (3.7.2) не зависит от выбора “плохой” кривой, пересекающей седловую кривую в той же самой точке (предполагая при этом, что особый граф фиксирован на особом слое). Из этого, в частности, будет следовать, что (3.7.2) корректно определена и для плохих площадок тоже.

Отметим, что если предел (3.7.2) существует, то его значение не зависит от выбора отрезков, разбивающих площадку на кресты. Это следует из того, что изменение отрезков влечет изменение функции $\Pi_i(\rho)$ на непрерывную, в то время как знаменатель ρ стремится к бесконечности. Далее, для настоящих площадок выполнено:

$$\begin{aligned}\Pi_i(\rho) &= -\Lambda_i \ln \mathcal{H} + c_i(\mathcal{H}) = -\Lambda_i \ln f_2 + \tilde{c}_i(f_2), \\ \rho &= -\Lambda \ln \mathcal{H} + c(\mathcal{H}) = -\Lambda \ln f_2 + \tilde{c}(f_2),\end{aligned}$$

поэтому, учитывая, что каждая окружность плохой площадки является окружностью и некоторой настоящей площадки либо ее изотопии, а также глобальную определенность f_2 на каждом из листов книжки, то и на плохой площадке выполнено

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Pi_i(\rho)}{\rho} = \lim_{f_2 \rightarrow 0} \frac{-\Lambda_i \ln f_2 + \tilde{c}_i(f_2)}{-\Lambda \ln f_2 + \tilde{c}(f_2)} = \frac{\Lambda_i}{\Lambda}. \quad (3.7.3)$$

Здесь также необходимо воспользоваться тем, что любую плохую кривую γ всегда можно зажать между двумя допустимыми γ_1 и γ_2 (см. рис. 3.7.1). А значит, плохую

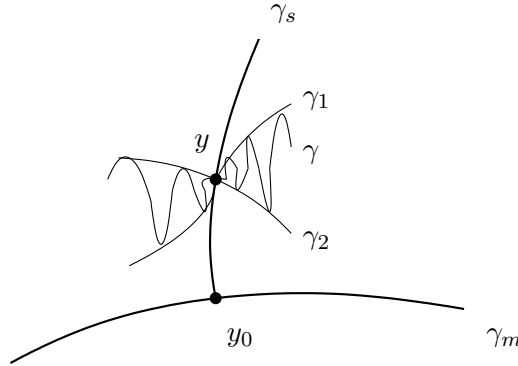


Рис. 3.7.1:

площадку P'_{tr} можно “зажать” между двумя настоящими или изотопными настоящим P^1_{tr} и P^2_{tr} , так что особый граф y P'_{tr} , P^1_{tr} и P^2_{tr} будет общим. Кроме того, между P^1_{tr} и P^2_{tr} имеется семейство площадок (настоящих или изотопных им), с тем же самым особым графом, так что все окружности P'_{tr} включены во множество окружностей этого семейства площадок. Здесь необходимо отметить, что из леммы 2.1.2 вытекает, что в некоторых случаях реализуются не все гомотопические классы трансверсальных площадок, однако,

поскольку запрещения касаются только особого графа, который является общим для всех площадок строящегося семейства, то очевидно, что существуют классы, незапрещенные для всех кривых семейства.

Поэтому функции \tilde{c} и \tilde{c}_i ограничены, т.к. все функции \tilde{c} и \tilde{c}_i ограничены и их имеется компактное множество, откуда и вытекает (3.7.3).

Δ - и Z -инварианты (расширенные). Выберем на каждом из колец P'_{tr} по отрезку, втыкающемуся в неособую часть особого графа. Тогда можно каждую из окружностей кольца поделить на части, пропорциональные соответствующим величинам Λ , используя уже имеющееся начало отсчета. Таким образом, получатся аналоги отрезков раздела. Аналогично случаю гамильтоновой системы на двумерной площадке можно теперь рассмотреть цепь $l = \sum t_i K_i$, а также $[l] \in C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$, поскольку хотя плохая площадка и не является гладким подмногообразием, однако как гладкое многообразие диффеоморфна двумерной поверхности P ; \tilde{P} получается из P заклеивкой всех граничных окружностей.

Необходимо показать, что $[l]$ в расширенном толковании не зависит от выбора плохой кривой γ , пересекающей γ_s в одной и той же точке. Докажем, что для каждой плохой площадки P'_{tr} расширенный $[l]$ совпадает со значением настоящего инварианта для допустимых кривых, пересекающих γ_s в той же самой точке. Так же, как мы поступили выше в случае Λ -инварианта, зажмем плохую кривую γ между двумя допустимыми γ_1 и γ_2 , а площадку P'_{tr} — между хорошими площадками P^1_{tr} и P^2_{tr} . Пространство между P^1_{tr} и P^2_{tr} заполнено траекториями редуцированных систем на каких-то площадках (выше было отмечено, что редукция на конкретной окружности не зависит от площадки, на которой эта траектория расположена.) Выберем также какие-нибудь “треугольники раздела”. См. рис. 3.7.1 и 3.7.2.

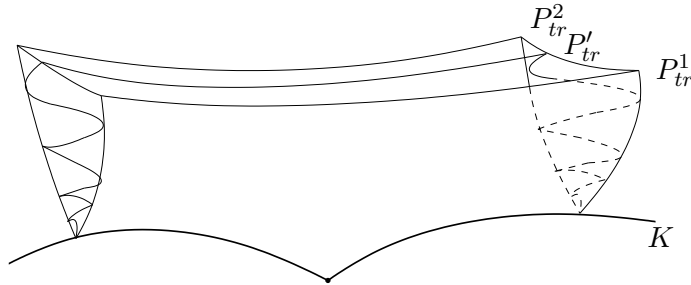


Рис. 3.7.2:

Выберем какой-нибудь лист книжки. Тогда для всех точек (s, f_2) части окрестности точки y , находящейся между кривыми γ_1 и γ_2 (обозначим ее W), выполнено на

выбранном листе:

$$\Pi(s, f_2) = -\Lambda(s) \ln f_2 + c(s, f_2), \quad (3.7.4)$$

для некоторой функции $c(s, f_2)$.

Очевидно также, что f_2 является параметром на γ . Покажем, что функция $c(s, f_2)$ является непрерывной на W . Тогда абсолютно аналогично доказательству теоремы 3.5.1 можно будет заключить, что значение расширенного $[l]$ для γ совпадает со значением $[l]$ для хороших кривых, проходящих через точку y (например, γ_1 и γ_2).

Пусть $f, f \geq 0$ — параметризация минимаксной кривой γ_m (вернее, ее половины, соответствующей выбранному листу). Тогда при помощи леммы 3.6.7 о поведении функции вращения функцию f можно определить на всем листе как $f = f(s, f_2)$ (f непрерывна). В самом деле, пусть уровень $f = \text{const}$ соответствует линии уровня функции вращения. Тогда получим для всех точек W :

$$\Pi(f(s, f_2)) = -\Lambda(s) \ln f(s, f_2) + c'(f(s, f_2)), \quad (3.7.5)$$

где c' непрерывна по f (и в точке y тоже). Сравнивая (3.7.4) и (3.7.5), в точке (s, f_2) получим:

$$\begin{aligned} c(s, f_2) &= -\Lambda(s) \ln f(s, f_2) + \Lambda(s) \ln f_2 + c'(f(s, f_2)) \\ &= -\Lambda(s) \ln \frac{f(s, f_2)}{f_2} + c'(f(s, f_2)). \end{aligned}$$

Достаточно показать, что величина $\frac{f(s, f_2)}{f_2}$ отделена от нуля на W , тогда из непрерывности c', f и \ln будет следовать, что $c(s, f_2)$ непрерывна. Вообще из этой формулы видно, что непрерывность $c(s, f_2)$ эквивалентна отделенности от нуля $\frac{f(s, f_2)}{f_2}$.

Рассмотрим семейство хороших кривых между γ_1 и γ_2 , заполняющее W . Ясно, что ограничение $c(s, f_2)$ на каждую такую кривую непрерывно, следовательно на каждой такой кривой величина $\frac{f(s, f_2)}{f_2}$ отделена от нуля. Поскольку семейство хороших кривых между γ_1 и γ_2 компактно, то имеется и глобальная отделенность от нуля $\frac{f(s, f_2)}{f_2}$ на всем W .

Итак, необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что если условия теоремы выполнены, то гомеоморфизм $\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$ можно подправить, т.е. существует другой гомеоморфизм $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$, обладающий всеми свойствами гомеоморфизма ξ , такой, что под его действием гладкие кривые γ , трансверсальные γ_s переходят в гладкие кривые, трансверсальные γ'_s . Это следует из леммы 3.6.7. Мы будем считать, что ξ уже подправлен.

Разобьем доказательство на несколько шагов:

1 шаг. Выбор 3-блоков.

Седловую кривую γ_s параметризуем при помощи однозначно определенной переменной действия s , $s \geq 0$ (соответствующей периодическому интегралу). $s = 0$ отвечает точке y_0 (см. рис. 3.7.3). Аналогично доказательству леммы 3.6.7

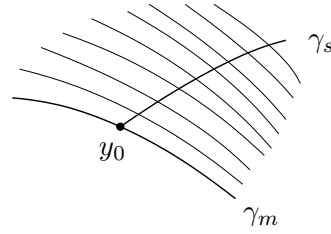


Рис. 3.7.3:

рассмотрим для системы v гладкое однопараметрическое семейство кривых $\Gamma = \{\alpha(s, f_2) = const\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(H, F)$ (например, $\{s = const\}$), трансверсально пересекающих γ_s , так что граница γ_m бифуркационной диаграммы входит в Γ .

Семейство Γ естественно параметризуется точкой s пересечения с кривой γ_s . Каждой кривой $\gamma(s) \in \Gamma$, $s \neq 0$ соответствует инвариантное трехмерное подмногообразие $Q^3(s) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma(s))$, кривой $\gamma(0) = \gamma_m$ соответствует 2-атом $\mathcal{F}^{-1}(\gamma_m)$. На каждом из 3-атомов $Q^3(s)$ выберем трансверсальное сечение $P(s)$ так, чтобы эти площадки гладко зависели от параметра s и стягивались на 2-атом $P(0) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_m)$ при $s \rightarrow 0$. (При необходимости можно уменьшить окрестность U .) То, что при $s \rightarrow 0$ $P(s)$ стягиваются на атом $P(0)$, очевидно.

Ясно, что эту конструкцию можно поднять с плоскости $\mathbb{R}^2(H, F)$ на пространство $\mathcal{B}(U)$ — т.е. поднять на $\mathcal{B}(U)$ кривые $\gamma(s)$ (они превращаются на книжке в пучок лучей, по числу листов книжки), а дальше считать \mathcal{F} проекцией U на $\mathcal{B}(U)$, а не на $\mathbb{R}^2(H, F)$.

Определение 3.7.7. 3-блоком называется множество $B = \{P_{tr}(s) \mid s \geq 0\} \subset U$.

Итак, мы выбрали некоторый 3-блок для системы v на $U(L)$. При помощи отображения ξ , сохраняющего инварианты, для каждого s на $\mathcal{B}(U)$ строится пучок лучей и по этому семейству можно построить некоторый 3-блок для системы v' на $U'(L')$:

$$B' = \{P'_{tr}(s) \mid s \geq 0\} \subset U'(L')$$

(параметризация переносится с γ_s на γ'_s при помощи ξ). 3-блок B' не является однозначно определенным. Каждый из 3-блоков B, B' диффеоморфен $P^2 \times [0, 1)$.

2 шаг. На каждой из двумерных площадок $P(s)$, $s > 0$, 3-блока B имеется гамильтонова система, являющаяся редукцией v на трансверсальную площадку. При $s = 0$ имеется система, являющаяся пределом редуцированных систем на соседних площадках, см. замечание 3.6.9. Кроме того, отметим, что на площадках $P(s)$, $s \geq 0$, имеются редуцированные в смысле Марседена-Вайнштейна системы, гладко зависящие от параметра s . При $s = 0$ это естественная гамильтонова система, имеющаяся на $P(0)$ (т.к. $P(0) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_m)$ — двумерная поверхность, инвариантная под действием потока v). Редуцированная система отличается от спроектированной на непрерывный множитель, см. (3.3.2), (3.6.7).

Итак, предел редуцированных систем при $s \rightarrow 0$ существует, и его можно получить из естественной системы на $P(0)$. Предел редуцированных систем на $P(0)$ будем для краткости также называть редуцированной системой.

Для каждого $s \geq 0$ редуцированные системы на $P(s)$ и $P'(s)$ в силу совпадения траекторных инвариантов топологически траекторно сопряжены. Это означает, что для каждого s существует непрерывно зависящий от s гомеоморфизм

$$\psi(s) : P(s) \rightarrow P'(s),$$

сопрягающий редуцированные системы, т.е. по сути имеется гомеоморфизм

$$\psi : B \rightarrow B',$$

который сопрягает редуцированные системы на каждом “уровне” s . Конструкция непрерывно зависит от s , что следует из явного построения сопрягающего гомеоморфизма $\psi(s)$ на отдельном уровне $P(s)$ [8].

3 шаг. Поднимем отображение ψ до отображения $\tilde{\psi}$ между блоками вида $P^2 \times (0, 1) \times S^1$.

Это можно сделать аналогично доказательству теоремы 1.5.6. А именно, рассмотрим произвольную точку $x \in U \setminus P(0)$. Тогда $x \in Q^3(s)$, $s > 0$.

Обозначим $\sigma_s : P(s) \rightarrow P(s)$, $\sigma'_s : P'(s) \rightarrow P'(s)$ отображения Пуанкаре.

Проведем через точку x интегральную траекторию поля v . Двигаясь по этой траектории в обратном направлении, мы в какой-то момент впервые пересечем $P(s)$ в точке z . Пусть время движения от z до x равняется t , а время движения от z до $\sigma_s(z)$ равняется c . На $P'(s)$ имеется точка $z' = \psi(z)$. Рассмотрим интегральную траекторию поля v' , проходящую через z' . Пусть c' — время прохода вдоль интегральной траектории поля v' от $z' = \psi(z)$ до $\sigma'_s(z') = \psi(\sigma_s(z))$. Сместимся по этой траектории на время $t' = \frac{tc'}{c}$. Полученную точку обозначим $\tilde{\psi}(x)$.

4 шаг. Окончательное построение отображения

$$\tilde{\psi} : U(L) \rightarrow U'(L').$$

Осталось понять, что происходит на площадках $P(0)$, $P'(0)$, соответствующих границам блоков вида $P^2 \times (0, 1) \times S^1$. То есть на уровне $P^2 \times \{0\} \times \{pt\}$, где третий множитель S^1 стянут в точку.

Границу нужно стянуть по траекториям периодического интеграла. Это стягивание определено корректно. Траектории $\text{sgrad } s$ для v переходят в траектории $\text{sgrad } s'$ для v' . В самом деле, каждая траектория периодического интеграла лежит на некотором торе Лиувилля. На конкретном торе Лиувилля поле v является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами полей $\text{sgrad } s$ и $\text{sgrad } f_2$; аналогично для v' . Поэтому отображение $\tilde{\psi}$, построенное на 3-м шаге, является линейным на соответствующих торах Лиувилля (в фиксированных координатах, соответствующих выбранным классам трансверсальных сечений).

На каждом торе $\tilde{\psi}$ переводит интегральные траектории $\text{sgrad } f_2$ в траектории $\text{sgrad } f'_2$. Кроме того, отображение $\tilde{\psi}$ сохраняет функцию вращения (поскольку ее сохраняет ξ , а значит, и ψ) и переводит интегральные траектории v в траектории v' . Учитывая, что коэффициенты v относительно $\text{sgrad } s$ и $\text{sgrad } f_2$ и коэффициенты v' относительно $\text{sgrad } s'$ и $\text{sgrad } f'_2$ одинаковы, получим, что $\tilde{\psi}$ переводит траектории $\text{sgrad } s$ в траектории $\text{sgrad } s'$, т.е. $\tilde{\psi}$ на $P(0)$ определено при помощи стягивания корректно.

Как устроено $\tilde{\psi}$ на $P(0)$, можно понять и без этого стягивания. А именно, отображение $\tilde{\psi}$ на поверхности $P(0)$ совпадает с ψ . В самом деле, посмотрим, как устроено ψ . Оно переводит траектории системы-предела редуцированных систем в траектории системы-предела редуцированных систем. (Отметим, что они же являются траекториями естественных систем на $P(0)$ и $P'(0)$ соответственно.) Ясно, что нужно каждый раз совмещать траектории с одинаковым значением предела функции периода (что соответствует сохранению функции вращения на торах). Необходимо также уточнить, как зависит $\tilde{\psi}$ от естественного параметра на каждой такой линии уровня. Отображение $\tilde{\psi}$ должно быть непрерывным “в направлении времени”, т.е. по близким к $P(0)$ траекториям и по $P(0)$ движение должно происходить за близкое время. Очевидно, что тогда $\tilde{\psi}$ должно совпадать с ψ на $P(0)$, поскольку при построении $\tilde{\psi}$ на траекториях, не лежащих на $P(0)$ мы пользовались естественным временем на траектории и строили отображение

пропорционально этому времени, находя коэффициент пропорциональности при помощи отображения Пуанкаре. На $P(0)$ скорости движения естественной и редуцированной (предела) систем отличаются на множитель, постоянный для каждой траектории, см. (3.3.2) и (3.6.7). Так что и на $P(0)$ отображение $\tilde{\psi}$ на отдельных траекториях строится пропорционально естественному времени, а для нахождения коэффициента пропорциональности используется редуцированная система. Для завершения доказательства остается вспомнить, что редуцированные системы (а следовательно, и времена движения для них) непрерывно зависят от уровня s .

5 шаг. Отображение $\tilde{\psi}$ является гомеоморфизмом.

Очевидно, что непрерывность $\tilde{\psi}$ необходимо проверить лишь на 3-блоках, т.е. на каждой из трансверсальных площадок $P(s)$, $s \geq 0$.

Каждой точке $x \in U(L)$ соответствует некоторое инвариантное подмногообразие и в нем трансверсальная площадка. Пусть $s(x)$ обозначает номер площадки, соответствующей x . Аналогично для $x' \in U'(L')$.

Рассмотрим какую-нибудь точку $x_0 \in P(s(x_0))$. Здесь возможны два случая:

- $s(x_0) > 0$. Без ограничения общности все окрестности точек x_0 или $\tilde{\psi}(x_0)$ можно считать “квадратными” по пространству-времени (рис. 3.7.4). На 3-блоках

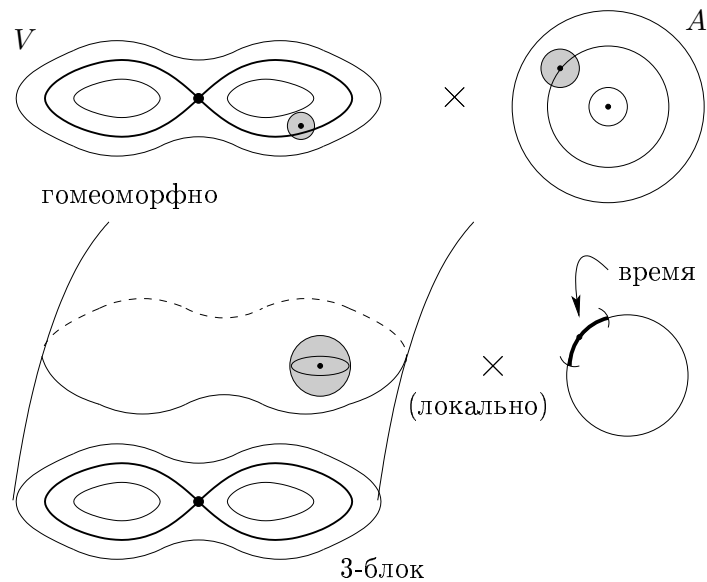


Рис. 3.7.4:

B , B' можно ввести метрику d прямого произведения, поскольку имеются

гомеоморфизмы

$$B \simeq B' \simeq P^2 \times [0, s_{\max}).$$

Тогда пусть

$$W_\varepsilon(x_0) = \{x \in U(L) \mid T(x) < \varepsilon, d(\tilde{\sigma}(x), x_0) < \varepsilon\}$$

$$W'_\varepsilon(\tilde{\psi}(x_0)) = \{x' \in U'(L') \mid T(x') < \varepsilon, d(\tilde{\sigma}'(x'), \tilde{\psi}(x_0)) < \varepsilon\}$$

где $T(x)$ или $T(x')$ обозначает минимальное по модулю время, требующееся для попадания точки x на “свою” площадку $P(s(x))$ или точки x' на $P'(s(x'))$ при движении вдоль интегральной траектории поля v или v' (по смыслу), $\tilde{\sigma}(x) \in P_{tr}(s(x))$ или $\tilde{\sigma}'(x') \in P'_{tr}(s(x'))$ — точка этого “наиболее быстрого попадания”.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0, s(x_0))$. Пусть

$$c'_{\max} = \sup\{c'(\psi(x)) \mid x \in B' : d(\psi(x), \psi(x_0)) < \varepsilon\},$$

$$c_{\min} = \inf\{c(x) \mid x \in B : d(x, x_0) < \varepsilon\},$$

где числа $c(x)$, $c'(\psi(x))$ определяются, как при построении отображения $\tilde{\psi}$ (шаг 3). Отметим, что $c_{\min}, c'_{\max} > 0$, поскольку $s(x_0) - \varepsilon > 0$ и поэтому величины $c(x)$, $c'(\psi(x))$ отделены от нуля при всех x , удовлетворяющих условиям $d(x, x_0) < \varepsilon$, $d(\psi(x), \psi(x_0)) < \varepsilon$.

Выберем $\delta_1 < \frac{c_{\min}}{c'_{\max}} \cdot \varepsilon$. Поскольку отображение ψ непрерывно, то существует такое $\delta_2 \in (0, \varepsilon)$, что при $x \in B$

$$d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(\psi(x), \psi(x_0)) < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для любого $x \in U(L)$ выполнено:

$$T(x) < \delta \leq \delta_1 \Rightarrow T(\tilde{\psi}(x)) = T(x) \cdot \frac{c'}{c} < \delta_1 \frac{c'}{c} < \delta_1 \frac{c'_{\max}}{c_{\min}} < \varepsilon$$

$$d(\tilde{\sigma}(x), x_0) < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow d(\psi(\tilde{\sigma}(x)), \psi(x_0)) = d(\tilde{\sigma}'(\tilde{\psi}(x)), \tilde{\psi}(x_0)) < \varepsilon$$

Отсюда вытекает, что

$$\tilde{\psi}(W_\delta(x_0)) \subset W'_\varepsilon(\tilde{\psi}(x_0)),$$

т.е. что $\tilde{\psi}$ непрерывна на $P(s)$ для любого $s > 0$.

- $s(x_0) = 0$. Аналогично предыдущему пункту заметим, что можно без ограничения общности положить (см. рис. 3.7.5):

$$W_\varepsilon(x_0) = \{x \in U(L) \mid d(\tilde{\sigma}(x), x_0) < \varepsilon, s(x) < \varepsilon\},$$

$$W'_\varepsilon(\tilde{\psi}(x_0)) = \{x \in U'(L') \mid d(\tilde{\sigma}'(x), \tilde{\psi}(x_0)) < \varepsilon, s'(x) < \varepsilon\}.$$

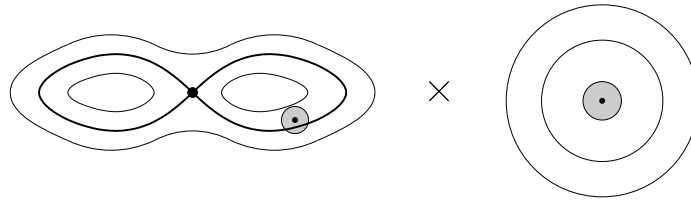


Рис. 3.7.5:

Дальше остается воспользоваться непрерывностью ψ на 3-блоках. Этого достаточно, т.к. ввиду специфики окрестностей нет необходимости следить за движением вдоль интегральных линий переменной действия (мы остались вблизи особого слоя вне зависимости от значения φ). См. также конец предыдущего (4го) шага (непрерывность “в направлении времени”).

□

Замечание 3.7.8. На регулярной части слоения Лиувилля для любого листа $X \subset \mathcal{B}(U)$ и $(s, f_2) \in X$:

$$\tilde{\psi}(s, \varphi, f_2, \varphi_2) = (\xi(s), \varphi, \xi(f_2), \varphi_2)$$

Замечание 3.7.9. В лемме 3.6.7 было показано, что значение функции вращения при приближении к седловой кривой (в малой окрестности точки y_0) монотонно стремится к бесконечности, но знак ρ не учитывался. Впрочем, для описания поведения линий уровня знак был несущественен. Нетрудно видеть, что знаки ρ на каждом из “левых” листов $\mathcal{B}(U)$ равны между собой и отличаются от (также равных между собой) знаков ρ на “правых” листах $\mathcal{B}(U)$. Об ориентации базисных циклов см. уточнение 1.9.2.

Выберем какое-нибудь разбиение атома V на положительные и отрицательные кольца. Положим $\varepsilon = +1$, если оно совпадает с разбиением V на положительные и отрицательные кольца по знаку функции вращения, и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

Отметим, что разбиение колец атома на положительные и отрицательные по знаку ρ совпадает с разбиением, введенным для определения инварианта Δ .

Используя информацию о поведении ρ , можно показать, что ρ не оказывает влияния на класс топологической траекторной эквивалентности системы. А именно, в качестве следствия теоремы 3.7.2 докажем теорему о полном траекторном инварианте. Для этого понадобится еще одно определение.

Определение 3.7.10. Пусть особый граф K атома V содержит n вершин и l ребер. Зафиксируем нумерации вершин и ребер K . Тогда *ростком инвариантов* $\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z)$

называется класс эквивалентности функций, определенных при $s \geq 0$ (напомним, что при $s = 0$ речь идет о пределе редуцированных систем):

$$\Lambda \times \Delta \times Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+l}$$

$$s \mapsto (\Lambda_1(s) : \dots : \Lambda_n(s), \Delta_1(s), \dots, \Delta_n(s), Z_1(s), \dots, Z_l(s)),$$

по следующему отношению эквивалентности. Два набора функций

$$(\Lambda_1^1(s) : \dots : \Lambda_n^1(s), \Delta_1^1(s), \dots, \Delta_n^1(s), Z_1^1(s), \dots, Z_l^1(s)), \quad s \geq 0,$$

$$(\Lambda_1^2(t) : \dots : \Lambda_n^2(t), \Delta_1^2(t), \dots, \Delta_n^2(t), Z_1^2(t), \dots, Z_l^2(t)), \quad t \geq 0$$

называются *эквивалентными*, если существуют окрестности нуля $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}$, непрерывная строго возрастающая замена переменной

$$r : W_1 \rightarrow W_2, \quad r(s) = t, \quad r(0) = 0, \quad r(W_1) \subset W_2,$$

и непрерывная функция $k(s)$, $k(0) \neq 0$, такие, что

$$\Lambda_i^1(s) = k(s)\Lambda_i^2(r(s)), \quad i = 1, \dots, n$$

(т.е. $(\Lambda_1^1(s) : \dots : \Lambda_n^1(s)) = (\Lambda_1^2(r(s)) : \dots : \Lambda_n^2(r(s))) \in \mathbb{R}P^n$),

$$\Delta_i^1(s) = \Delta_i^2(r(s)), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$Z_j^1(s) = Z_j^2(r(s)), \quad j = 1, \dots, l.$$

Замечание 3.7.11. Росток инвариантов любой реальной C^∞ -гладкой системы всегда имеет C^∞ -гладкого представителя, т.е. существует параметризация седловой кривой s , $s \geq 0$ такая, что функции $\Lambda(s)$, $\Delta(s)$, $Z(s)$ — C^∞ -гладкие.

Доказательство. В самом деле, пусть s , $s \geq 0$ — значение периодического интеграла. Нужно показать, что инварианты редуцированных систем на $P(s)$ (в том числе и при $s = 0$, тогда имеются предел площадок = двумерное инвариантное подмногообразие $P(0)$ и система = предел редуцированных систем при $s \rightarrow 0$) гладко зависят от s . Отметим, что площадки $P(s)$ можно выбрать гладко зависящими от s .

Воспользуемся уравнениями (3.6.4) и (3.2.4): для систем на $P(s)$ с гамильтонианом f_2 :

$$\dot{x} = -\frac{1}{\omega(s, x, y)} \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\omega(s, x, y)} \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

и с гамильтонианом \mathcal{H} редуцированной системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{2\pi}{\omega(s, x, y)} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2) \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{2\pi}{\omega(s, x, y)} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2) \frac{\partial f_2}{\partial x},\end{aligned}$$

Требуемое вытекает из следующих соображений:

1. Λ -инварианты первой и второй систем совпадают при равных s ,
2. Λ -, Δ - и Z -инварианты первой системы C^∞ -гладко зависят от s , в том числе и при $s = 0$ (ввиду гладкости функций ω и f_2),
3. Скорости первой и второй систем отличаются на множитель, постоянный для каждой траектории,
4. Δ -, Z -инварианты первой и второй систем отличаются поэтому на множитель $\lim_{f_2 \rightarrow 0} \frac{2\pi H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2) = \frac{2\pi H'_2}{H'_1}(s, 0)$ (см. формулу (3.6.7)), являющийся C^∞ -гладким, поскольку H является C^∞ -гладкой функцией при всех s, f_2 , и система неспециальна.

□

Теорема 3.7.12. Пусть v, v' — ИГС с двумя степенями свободы, рассматриваемые в малых 4-мерных окрестностях \tilde{U}, \tilde{U}' своих особых невырожденных слоев типа седло-центр и удовлетворяющие условиям 1)-6) п. 1.2. Пусть v, v' лиувиллево эквивалентны в этих окрестностях, им соответствуют гомеоморфные атомы $V \simeq V'$, и на атоме V выбрано какое-нибудь разбиение на положительные и отрицательные кольца. Пусть y_0, y'_0 — образы особых слоев при отображениях момента для v и v' соответственно. Тогда v, v' топологически траекторно эквивалентны в некоторых 4-мерных окрестностях $U \subset \tilde{U}, U' \subset \tilde{U}'$ своих особых слоев тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм атомов $\zeta : V \rightarrow V'$ и выбор классов трансверсальных сечений для систем v и v' такие, что

1. $\varepsilon = \varepsilon'$ (разбиение на положительные и отрицательные кольца на атоме V' индуцировано разбиением на атоме V при помощи ζ),
2. ростки инвариантов совпадают:
 $\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z) = \text{germ}_{y'_0}(\Lambda', \Delta', Z')$.

Таким образом, полным инвариантом топологической траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в четырехмерных окрестностях невырожденных особых слоев типа седло-центр является набор $(\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z), \varepsilon)$.

Эквивалентная переформулировка теоремы 3.7.12.

Пусть v, v' — ИГС с двумя степенями свободы, рассматриваемые в четырехмерных окрестностях \tilde{U}, \tilde{U}' своих особых слоев типа седло-центр и удовлетворяющие условиям 1)-6) п. 1.2. Пусть задан послыйный лиувиллев гомеоморфизм

$$\eta : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$$

и фиксирован его комбинаторный тип. Тогда η можно продеформировать на некоторых меньших окрестностях $U \subset \tilde{U}, U' \subset \tilde{U}'$ особого слоя до траекторного гомеоморфизма $\psi : U \rightarrow U'$, не меняя комбинаторного типа, тогда и только тогда, когда η сохраняет знак функции вращения, и существует некоторый выбор гомотопических классов трансверсальных площадок для v, v' , так что ростки инвариантов, вычисленных относительно этого выбора трансверсальных площадок, совпадают.

Доказательство. Пусть v и v' — две ИГС, для которых выполнены условия теоремы, и уже выбран гомеоморфизм $\zeta : V \rightarrow V'$. Пусть ростки инвариантов совпадают, а $\varepsilon = \varepsilon'$. Докажем, что в этом случае существуют окрестности особых слоев $U(L), U'(L')$ и гомеоморфизм $\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$ такие, что ξ сохраняет функцию вращения ρ и Λ, Δ, Z -инварианты. В этом случае можно будет воспользоваться теоремой 3.7.2.

Выберем окрестности особых точек U, U' и какой-нибудь гомеоморфизм $\xi_\rho : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$ так, чтобы ξ_ρ сохранял ρ . Ясно, что это можно сделать, если система неспециальна и $\varepsilon = \varepsilon'$. А именно, нужно воспользоваться результатом леммы 3.6.7 о поведении ρ вблизи особой точки, где было показано, что линии уровня ρ параллельны γ_s и втыкаются в γ_m трансверсально. Поэтому для построения ξ_ρ достаточно выпрямить линии уровня ρ на $\mathcal{B}(U)$ и $\mathcal{B}'(U')$, и учитывая монотонность предела ρ на γ_m и γ'_m , совместить и значения ρ , а не только линии уровня.

Далее, уменьшая, если нужно, окрестности U и U' , добьемся того, чтобы функции Λ, Δ и Z , определенные на кусках седловых кривых γ_s и γ'_s , попавших в выбранные окрестности, были сопряжены. Ясно, что это можно сделать, если ростки инвариантов совпадают для систем v и v' . Мы должны теперь подправить ξ_ρ таким образом, чтобы полученное отображение ξ сохраняло функции Λ, Δ, Z .

Отображение ξ_ρ каким-то образом перенесло Λ, Δ, Z -инварианты на кривую γ'_s . Поскольку ξ_ρ гомеоморфизм, а ростки инвариантов для v и v' совпадают ($\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z) = \text{germ}_{y'_0}(\Lambda', \Delta', Z')$), то и ростки $\text{germ}_{y'_0}((\Lambda, \Delta, Z) \circ \xi_\rho^{-1}|_{\gamma'_s}) = \text{germ}_{y'_0}(\Lambda', \Delta', Z')$ совпадают.

Это означает, что существует гомеоморфизм $\xi_\gamma : \gamma'_s \rightarrow \gamma'_s$, сопрягающий $(\Lambda, \Delta, Z) \circ \xi_\rho^{-1}|_{\gamma'_s}$ и (Λ', Δ', Z') . Из-за параллельности линий уровня функции вращения на $\mathcal{B}'(U')$ седловой кривой γ'_s следует, что гомеоморфизм корешка $\xi_\gamma : \gamma'_s \rightarrow \gamma'_s$ можно продолжить до гомеоморфизма всей книжки (обозначим его той же буквой)

$$\xi_\gamma : \mathcal{B}'(U') \rightarrow \mathcal{B}'(U'),$$

сохраняющего функцию вращения, уменьшив при этом U' , если требуется (см. рис. 3.7.6).

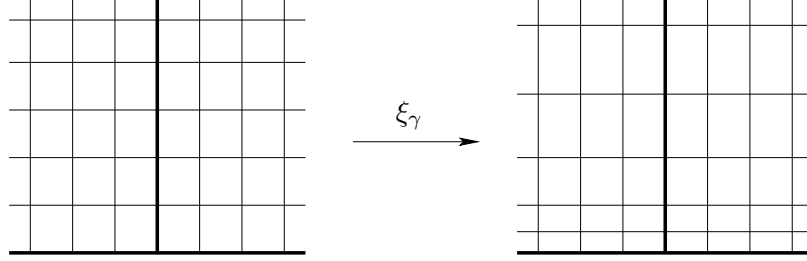


Рис. 3.7.6:

Итого для $U = \xi_\rho^{-1} \circ \xi_\gamma^{-1}(U')$ получим: отображение

$$\xi = \xi_\gamma \circ \xi_\rho : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}'(U')$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.7.2. Во-первых, ξ сохраняет функцию вращения, так как каждое из отображений ξ_γ и ξ_ρ ее сохраняет. Во-вторых, ξ сохраняет функции Λ , Δ и Z на седловой кривой, т.к.

$$\begin{aligned} (\Lambda', \Delta', Z') \circ \xi|_{\gamma_s} &= ((\Lambda', \Delta', Z') \circ \xi_\gamma)|_{\gamma'_s} \circ \xi_\rho|_{\gamma_s} \\ &= (\Lambda, \Delta, Z) \circ \xi_\rho^{-1}|_{\gamma'_s} \circ \xi_\rho|_{\gamma_s} = (\Lambda, \Delta, Z) \end{aligned}$$

Для завершения доказательства применяется теорема 3.7.2. □

Следствие 3.7.13. *В случае канонической особенности ситуация сильно упрощается (см. п. 3.8). А именно, воспользовавшись леммами 3.8.1 и 3.8.2, получим, что полным траекторным инвариантом являются инварианты редуцированной системы Λ , Δ , Z , вычисленные в точке u_0 , знак ε и некоторая функция одной переменной на γ_s .*

Следствие 3.7.14. *Рассмотрим простейший седловой атом — “восьмерку” B (рис. 3.7.7). Инварианты Λ , Δ и Z для такого атома всегда тривиальны, поэтому все определяется инвариантом ε . Следовательно, все особенности типа седло-центр, класс ливиллевой эквивалентности которых описывается атомом B , разбиваются на два класса, по числу негомеоморфных способов разбить атом на положительные и отрицательные кольца, используя знак функции вращения. Любые две особенности из одного класса траекторно эквивалентны друг другу.*

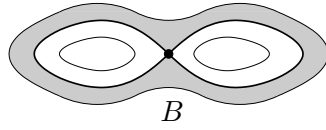


Рис. 3.7.7:

Замечание 3.7.15. Изменение ориентации на $U(L)$ влечет изменение знака ε на противоположный (т.к. знак ρ меняется на противоположный), не влияет на значение Λ -инварианта, а также изменяет знаки у всех величин Δ_i и Z_j . Поэтому если мы хотим рассматривать в качестве траекторных гомеоморфизмов не только те из них, которые сохраняют ориентацию окрестности $U(L)$, но и те, которые ее обращают, то тогда необходимо считать эквивалентными не только совпадающие наборы:

$$(\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z), \varepsilon) = (\text{germ}_{y'_0}(\Lambda', \Delta', Z'), \varepsilon'),$$

но и получающиеся из них одновременным изменением знаков Δ , Z и ε , т.е.:

$$(\text{germ}_{y_0}(\Lambda, \Delta, Z), \varepsilon) = (\text{germ}_{y'_0}(\Lambda', -\Delta', -Z'), -\varepsilon').$$

3.8. Каноническая особенность типа седло-центр. Поведение инвариантов и упрощение критерия траекторной эквивалентности

Рассмотрим каноническую особенность вида $A \times V$, см. п. 1.3, а именно, пусть разложение в прямое произведение носит симплектический характер.

Пусть имеются двумерные диск $D^2(s, \varphi)$ и поверхность $P^2(x, y)$ с симплектическими структурами ω_1, ω_2 . Координаты (s, φ) являются переменными действие-угол на D^2 . Рассмотрим функции s (на поверхности D^2) и $f_2(x, y)$ (на поверхности P^2), задающие структуры атомов A, V соответственно. Пусть $\omega_1 = ds \wedge d\varphi$, $\omega_2 = \omega(x, y)dx \wedge dy$ для некоторой функции ω .

Рассмотрим $D^2 \times P^2$, со структурой $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ и гамильтонианом $H = H(s, f_2)$.

Для наблюдения за поведением инвариантов выберем семейство кривых, трансверсальных γ_s , в виде $\{s = \text{const}\}$. Далее, семейство трансверсальных площадок $P(s)$ без ограничения общности имеет вид:

$$P(s) = \{s = \text{const}, \varphi = 0\}.$$

Ограничением симплектической формы ω на $P(s)$ является ω_2 . На $P(s)$ мы снова

рассматриваем две системы: редуцированную по Болсинову-Фоменко

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{2\pi}{\omega(x,y)} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{2\pi}{\omega(x,y)} \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1} \frac{\partial f_2}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.8.1}$$

и редуцированную по Марседену-Вайнштейну = спроектированную

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{\omega(x,y)} H'_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega(x,y)} H'_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.8.2}$$

Отметим, что хотя множитель $\frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}$ в (3.8.1) определялся для каждого кольца по отдельности, но предел этой величины на особом графе не зависит от выбора кольца, см. (3.6.7).

На $P(s)$ рассмотрим также систему с гамильтонианом $f_2(x, y)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{\omega(x,y)} \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{1}{\omega(x,y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.8.3}$$

Напомним, что уровень $s = 0$ не отличается от прочих (на нем, в частности, имеется предел редуцированных систем). См. замечания 3.6.8 и 3.6.9.

Лемма 3.8.1 (о поведении Λ -инварианта). *Инвариант Λ постоянен вдоль седловой кривой γ_s .*

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь трансверсальную площадку $P(s)$ из семейства. Сравним для нее инварианты Λ систем (3.8.1) и (3.8.3).

Заметим, что особые точки обеих систем совпадают, а собственные значения в них отличаются на множитель, одинаковый для всех особых точек. Это означает, что на $P(s)$ инварианты Λ редуцированной системы и системы с гамильтонианом f_2 совпадают. Поскольку система (3.8.3) с гамильтонианом f_2 никак не зависит от параметра s , то значения Λ -инварианта одинаковы для всех точек γ_s . \square

Лемма 3.8.2. *Пусть $\bar{\Delta}_i, \bar{Z}_j$ — компоненты Δ и Z -инвариантов для системы на атоме P^2 с гамильтонианом $f_2(x, y)$, а Δ_i, Z_j — компоненты Δ и Z -инвариантов для редуцированной системы на уровне $P(s) \simeq P^2$. Тогда*

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{H'_1}{H'_2}(s, 0) \bar{\Delta}_i, \\ Z_j &= \frac{1}{2\pi} \frac{H'_1}{H'_2}(s, 0) \bar{Z}_j,\end{aligned}$$

Доказательство. Системы (3.8.1) и (3.8.3) отличаются лишь на множитель $\frac{2\pi H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2)$.

Выберем начало отсчета угловой переменной одинаковым образом. Но тогда и остальные ее линии уровня совпадают для (3.8.1) и (3.8.3). В самом деле, на каждой окружности $\{f_2 = \text{const}\}$ (траектории обеих систем) движение отличается скоростью, причем скорости (3.8.1) и (3.8.3) для одной траектории отличаются на множитель, постоянный на траектории: $\frac{2\pi H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2)$. Отрезки раздела определяются долями времени обхода, пропорциональными величинам Λ_i , одинаковым для обеих систем (лемма 3.8.1).

Скорости движения по особому слою отличаются на множитель $2\pi \frac{H'_2}{H'_1}(s, 0)$ (предел $\frac{2\pi H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1}(s, f_2)$ при $f_2 \rightarrow 0$, см. (3.6.7)). Следовательно, коэффициенты цепей \bar{l} (3.8.3) и l (3.8.1) отличаются также на множитель:

$$l = \frac{1}{2\pi} \frac{H'_1}{H'_2}(s, 0) \bar{l}.$$

Это означает, что точно такое же изменение коснется и инвариантов Δ, Z . □

Предложение 3.8.3. Пусть вычислены значения (Λ, Δ, Z) -инварианта для редуцированной системы на $P(0)$:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \Delta(0) = \Delta_0, \quad Z(0) = Z_0.$$

Тогда можно указать в явном виде и функции $\Lambda(s), \Delta(s), Z(s)$:

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \Lambda_0, \\ \Delta(s) &= \frac{H'_2}{H'_1}(0, 0) \frac{H'_1}{H'_2}(s, 0) \Delta_0, \\ Z(s) &= \frac{H'_2}{H'_1}(0, 0) \frac{H'_1}{H'_2}(s, 0) Z_0. \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

Замечание 3.8.4. То есть фактически инвариантом канонической особенности является набор инвариантов $((\Lambda, \Delta, Z), \varepsilon)$, вычисленный в одной точке кривой γ_s , плюс некоторая функция одной переменной.

Доказательство. Необходимо воспользоваться тем, что $\Lambda(s) = \Lambda_0$ (лемма 3.8.1) и сравнить уравнения (3.8.1) для $P(0)$ и $P(s)$. По аналогии с доказательством леммы 3.8.2

$$\begin{aligned} \frac{2\pi H'_2}{H'_1}(s, 0) \Delta(s) &= \frac{2\pi H'_2}{H'_1}(0, 0) \Delta(0), \\ \frac{2\pi H'_2}{H'_1}(s, 0) Z(s) &= \frac{2\pi H'_2}{H'_1}(0, 0) Z(0), \end{aligned}$$

откуда и вытекает (3.8.4). □

Предложение 3.8.3 можно переформулировать немного по-другому:

Предложение 3.8.5. Пусть вычислены значения (Λ, Δ, Z) -инварианта для естественной системы на $P(0)$: $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{\Delta}_0, \tilde{Z}_0)$. Тогда можно указать в явном виде функции $\Lambda(s)$, $\Delta(s)$, $Z(s)$ (для редуцированной системы):

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \tilde{\Lambda}_0 (= \Lambda_0), \\ \Delta(s) &= \frac{H'_2(0,0)}{2\pi} \frac{H'_1}{H'_2}(s,0) \tilde{\Delta}_0, \\ Z(s) &= \frac{H'_2(0,0)}{2\pi} \frac{H'_1}{H'_2}(s,0) \tilde{Z}_0.\end{aligned}\tag{3.8.5}$$

Доказательство. Необходимо воспользоваться тем, что

$$\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 = \Lambda(s),$$

лемма 3.8.1, и связью редуцированной и естественной (она же — предел спроектированных) систем на $P(0)$ (см. уравнения (3.8.1) и (3.8.2)), откуда по аналогии с доказательством леммы 3.8.2 следует (3.8.5). \square

3.9. Теорема реализации

Возникает естественный вопрос: не являются ли все особенности каноническими? То есть существует ли, вообще говоря, пример особенности, являющейся прямым произведением атомов A и V лишь с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, а симплектическим прямым произведением — не являющейся? Лемма 3.8.1 помогает дать утвердительный ответ на этот вопрос.

Кроме того, существует ли особенность типа седло-центр, такая, что ее траекторный инвариант равен произвольному заранее заданному? Т.е. пусть фиксированы седловой атом V , C^∞ -гладкая функция $g : [0, +\delta) \rightarrow \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+l}$ (см. определение 3.7.10 и замечание 3.7.11) и знак $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Существует ли особенность лиувиллева типа $A \times V$ такая, что ее траекторный инвариант равен $(\text{germ}_0 g, \varepsilon)$?

3.9.a. Пример неканонической особенности.

Построим сначала пример неканонической особенности.

Пример 3.9.1. Рассмотрим снова два атома: $A = (D^2(s), s = \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$ и $V = D_1$ — см. рис.3.9.1 и лемму 3.1.1. (или любой другой плоский ориентируемый с двумя вершинами),

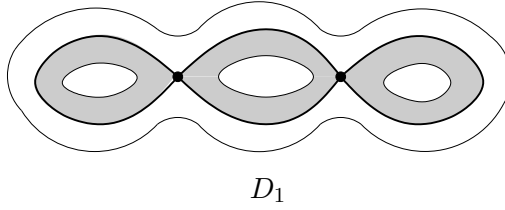


Рис. 3.9.1:

пусть функция $f_2(x, y)$ задает слоение на втором атоме. Для простоты мы предполагаем, что второй атом — плоский, так что все можно представлять себе на обычной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, однако конструкцию можно обобщить на любой атом. Будем считать, что вершинами атома V являются точки $M_0 : x, y = 0$ и $M_1 : x, y = 1$ и что ребра сингулярного графа втыкаются в эти точки в направлениях, параллельных координатным осям. Рассмотрим на $A \times V$ две системы. Первая — каноническая, с симплектической структурой $\Omega = ds \wedge d\varphi + dx \wedge dy$ и гамильтонианом $H = H(s, f_2)$, а вторая — с симплектической структурой

$$\tilde{\Omega} = ds \wedge d\varphi + \omega(s, x, y)dx \wedge dy + a(s, x, y)ds \wedge dx + b(s, x, y)ds \wedge dy, \quad (3.9.1)$$

и тем же самым гамильтонианом. Симплектическая структура (3.9.1) выбрана не случайно. Функция $\omega(s, x, y)$ выбирается произвольным образом (при фиксированном значении s форма $\omega(s, x, y)dx \wedge dy$ будет симплектической формой на трансверсальной площадке, так что естественно сначала задать именно функцию $\omega(s, x, y)$). Далее, можно подобрать функции $a(s, x, y)$ и $b(s, x, y)$ таким образом, чтобы $\tilde{\Omega}$ была симплектической структурой на $A \times V$. Докажем соответствующую лемму.

Лемма 3.9.2. *Пусть на $A \times V$ задана функция $\omega(s, x, y)$. Тогда можно подобрать функции $a(s, x, y)$, $b(s, x, y)$ так, чтобы форма*

$$\tilde{\Omega} = ds \wedge d\varphi + \omega(s, x, y)dx \wedge dy + a(s, x, y)ds \wedge dx + b(s, x, y)ds \wedge dy$$

была симплектической структурой особенности седло-центр модельного типа, см. главу 3.1, т.е. чтобы выполнялось (3.1.5) :

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s} = 0.$$

Доказательство. Имеется одно неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, связывающее две функции, причем относительно каждой из этих функций уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Очевидно, что по теореме существования решения ОДУ оно имеет множество решений. \square

Мы рассматриваем инвариантные 3-поверхности $\{s = \text{const}\}$, и трансверсальные площадки $P(s)$ в них задаются условием $\varphi = 0$.

Предположим, что линейризации потока Пуанкаре первой системы $(A \times V, \Omega, H)$ в точках M_0, M_1 площадки $P(s)$ выглядят как

$$M_0 : \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = -\lambda_1 y \end{cases} \quad \text{и} \quad M_1 : \begin{cases} \dot{x} = \lambda_2(x-1) \\ \dot{y} = -\lambda_2(y-1) \end{cases}$$

Таким образом, Λ -инвариант равен

$$\Lambda = \{\lambda_1^{-1} : \lambda_2^{-1}\}.$$

Что произойдет, если заменить форму Ω на форму $\tilde{\Omega}$? То есть рассмотреть линейризации потока Пуанкаре второй системы $(A \times V, \tilde{\Omega}, H)$ в точках M_0, M_1 площадки $P(s)$? Правые части систем дифференциальных уравнений домножатся на значение $\frac{1}{\omega(s,x,y)}$ в точке M_0 или M_1 соответственно:

$$M_0 : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\lambda_1}{\omega(s,0,0)}x \\ \dot{y} = -\frac{\lambda_1}{\omega(s,0,0)}y \end{cases} \quad \text{и} \quad M_1 : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\lambda_2}{\omega(s,1,1)}(x-1) \\ \dot{y} = -\frac{\lambda_2}{\omega(s,1,1)}(y-1) \end{cases}$$

а Λ -инвариант будет равен

$$\tilde{\Lambda} = \left\{ \frac{\omega(s,0,0)}{\lambda_1} : \frac{\omega(s,1,1)}{\lambda_2} \right\} = \left\{ \Lambda_1 : \frac{\omega(s,1,1)}{\omega(s,0,0)} \Lambda_2 \right\},$$

т.е. величины Λ и $\tilde{\Lambda}$, являясь элементами $\mathbb{R}P^1$, отличаются на $\frac{\omega(s,1,1)}{\omega(s,0,0)}$. Из такого представления можно сделать следующие выводы.

Во-первых, не все особенности являются каноническими, поскольку значения функции $\omega(s,x,y)$ не обязаны совпадать в точках M_0, M_1 при всех s , а для канонических особенностей Λ от s не зависит.

Во-вторых, подобрав нужным образом функцию $\omega(s,x,y)$, можно добиться того, чтобы множитель $\frac{\omega(s,1,1)}{\omega(s,0,0)}$ был тождественно равен любой наперед заданной гладкой функции $f(s)$ (с условием $\inf f(s) > 0$ из-за гиперболичности потоков Пуанкаре на всех трансверсальных площадках).

Докажем последнее утверждение (то есть подберем $\omega(s,x,y)$ по $f(s)$). Поскольку мы ограничиваемся малыми окрестностями особого слоя, возможны три случая:

а) $f(0) > 1$ и можно полагать, что в рассматриваемой окрестности $f(s) > 1$;

б) $0 < f(0) < 1$ и можно полагать, что в рассматриваемой окрестности $0 < f(s) < 1$;

в) $f(0) = 1$ и можно полагать, что в рассматриваемой окрестности $\frac{1}{2} < f(s) < 2$ и что площадка $P(s)$ целиком находится в области $-1 < x, y < 2$.

Достаточно проверить следующие условия:

1. $\omega(s, 0, 0) = 1$;
2. $\omega(s, 1, 1) = f(s)$;
3. $\omega(s, x, y) \neq 0$ на всей площадке $P(s)$.

Поступим следующим образом:

а): положим $\omega(s, x, y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (f(s) - 1) + 1$. Проверка: 1. и 2. очевидны; $\omega(s, x, y) =$ полный квадрат*положительное число $+1 > 0$.

б): положим $\omega(s, x, y) = (1 - f(s)) \left(\frac{x+y}{2} - 1\right)^2 + f(s)$. Проверка: 1. и 2. очевидны; $\omega(s, x, y) =$ положит. число*полн. кв. + положит. число > 0 .

в): положим $\omega(s, x, y) = f(s) \frac{x+y}{2} + \left(1 - \frac{x+y}{2}\right)$. Проверка: 1. и 2. очевидны.

Обозначим $t = \frac{x+y}{2}$, $g(s, t) = \omega(s, x, y) = f(s)t + (1 - t)$. По условию $-1 < t < 2$, функция $g(s, t)$ линейна по t , $\frac{1}{2} < f(s) < 2$, поэтому

$$\begin{aligned} \omega(s, x, y) = g(s, t) &> \inf_s \{g(s, -1), g(s, 2)\} = \inf_s \{-f(s) + 2, 2f(s) - 1\} \\ &\geq \inf_{\frac{1}{2} < w < 2} \{-w + 2, 2w - 1\} = 0. \end{aligned}$$

3.9.б. Реализация

Теперь мы ответим на вопрос о существовании ИГС заданного лиувиллева типа с заданным траекторным инвариантом.

Зафиксируем особенность типа седло-центр. Это означает, что выбран и зафиксирован седловой атом V с n вершинами и l ребрами, определяющий топологию особенности (теорема 1.4.1). Рассмотрим все возможные ИГС такого лиувиллева типа. Опишем множество значений их траекторных инвариантов.

Легко видеть, что имеются тривиальные ограничения на функцию

$$g = (\Lambda, \Delta, Z) : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+l}.$$

Во-первых, значение Λ -инварианта не может быть произвольной точкой пространства $\mathbb{R}P^n$, поскольку по определению все компоненты Λ -инварианта реальной системы являются положительными.

Определение 3.9.3. Значение $\Lambda = \{\Lambda_1 : \dots : \Lambda_n\} \in \mathbb{R}P^n$ мы будем называть *допустимым*, если точка $\Lambda \in \mathbb{R}P^n$ имеет представителя со всеми положительными компонентами.

Чуть позже будет показано, что все допустимые Λ реализуются в виде инвариантов некоторых систем.

Во-вторых, значения Δ - и Z -инвариантов также должны быть допустимыми (см. например, [8]).

Определение 3.9.4. [8].

Зафиксируем значение Λ -инварианта. Значения $\Delta \in \mathbb{R}^n$, $Z \in \mathbb{R}^l$ называются *допустимыми*, если среди всех ИГС на атоме V с заданным значением Λ -инварианта найдется такая, что ее инварианты равны (Λ, Δ, Z) .

В [8] были доказаны утверждения, описывающие пространства допустимых значений Δ - и Z -инвариантов. В частности, допустимые значения Δ -инварианта образуют линейное подпространство пространства $B_0(\tilde{P})$, зависящее от значения Λ , а допустимые значения Z -инварианта образуют все множество $H_1(\tilde{P})$.

Определение 3.9.5. Функция

$$g = (\Lambda, \Delta, Z) : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+l}$$

называется *допустимой*, если наборы всех ее значений являются соответственно допустимыми Λ -, Δ - и Z -инвариантами ($(\Delta, Z)(s)$ является допустимым или нет в зависимости от конкретного значения $\Lambda(s)$), и кроме того, росток $\text{germ}_0 g$ имеет C^∞ -гладкого представителя (см. замечание 3.7.11).

Докажем теперь следующую теорему реализации:

Теорема 3.9.6. Для любого атома $V = (P^2, K)$ с фиксированным разбиением колец на положительные и отрицательные, любой допустимой g и произвольного ε существует особенность, ливиллево эквивалентная $A \times V$, траекторный инвариант которой совпадает с $(\text{germ}_0 g, \varepsilon)$.

Для доказательства нам понадобится следующее [8].

Рассмотрим какой-нибудь 2-атом P с особым графом K и гамильтоновой системой $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ на нем. Пусть $-\delta \leq \mathcal{H} \leq \delta$ на P . Рассмотрим произвольное ребро K_i особого графа. Разрежем поверхность P вдоль гладкого отрезка, трансверсально пересекающего

ребро K_i и все траектории w . Рассмотрим также отдельно некоторый “прямоугольник” $M_i = [0, m_i] \times [-\delta, \delta]$, где $m_i > 0$, и горизонтальное гамильтоново векторное поле на M_i такое, чтобы время прохождения каждой траектории внутри M_i было равно m_i . Вклеим этот M_i в разрез на P , так что в итоге время движения на ребре K_i и всех близких к нему траекториях увеличится на m_i . Описанную операцию назовем *вклейкой* куска в исходный поток на ребре K_i графа K .

Рассмотрим также обратную операцию. Выберем снова трансверсальный K_i и остальным траекториям поля w гладкий отрезок и рассмотрим его сдвиг вдоль гамильтонова потока на время m_i . Получится еще один трансверсальный отрезок. Вырежем из P прямоугольник длины m_i и склеим берега разрезов, т.е. первоначальный отрезок и его образ при сдвиге на m_i . Эта операция называется *вырезанием* куска потока на ребре K_i графа K .

В силу теоремы Дарбу можно считать, что склейки, необходимые при определении операций вклейки и вырезания, проведены гладко, так что из гладких гамильтоновых систем получаются гладкие гамильтоновы системы. Операции вклейки и вырезания являются взаимно-обратными. См. рис. 3.9.2.

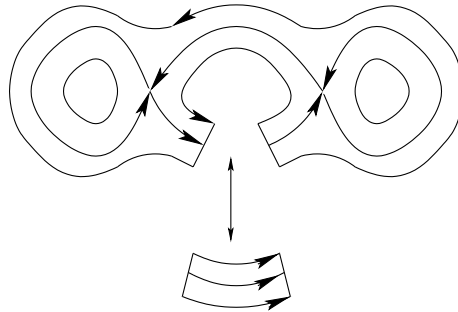


Рис. 3.9.2:

Можно рассмотреть общую операцию, являющуюся композицией описанных. На каждом ребре K_i графа K рассмотрим произвольное вещественное число m_i . Совокупность чисел m_i можно трактовать как некоторую вещественную одномерную коцепь m на графе K . На каждом из ребер K_i применим операцию вклейки, если $m_i > 0$, или операцию вырезания, если $m_i < 0$ (куска длины $|m_i|$). Обозначим Φ_m композицию таких элементарных операций (результат не зависит от порядка их применения).

Определение 3.9.7. Операция Φ_m называется *операцией вклейки-вырезания* куска потока, отвечающего данной коцепи m .

Операция Φ_m индуцирует действие Φ_m^* группы одномерных коцепей графа K на пространстве гамильтоновых систем на данном атоме с морсовскими гамильтонианами, а также и на классах топологической сопряженности. То есть Φ_m^* , в частности, действует на инварианты Λ , Δ , Z .

Опишем специальную систему с $\Delta = 0$ и $Z = 0$ (систем с нулевыми инвариантами Δ и Z достаточно много, нам потребуется некоторая выделенная система.)

Рассмотрим простейшие системы на крестах, окружающих вершины K . Представим каждый крест на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ в виде области $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|\mathcal{H}| < \varepsilon$; пусть $\mathcal{H} = xy$. На этом кресте рассмотрим форму $\Lambda_j dx \wedge dy$ и гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$, где Λ_j является компонентой Λ -инварианта в соответствующей особой точке. (Такой крест ранее назывался *каноническим*). Функция времени движения по куску траектории векторного поля w , находящемуся внутри канонического креста, равна для каждой из четвертинок креста $-\Lambda_j \ln |\mathcal{H}|$. Склеим теперь канонические кресты, чтобы получилась система на атоме P , по следующему правилу. Склейка производится по граничным отрезкам, каждый из которых параметризован функцией \mathcal{H} , склеиваются точки отрезков с одинаковым значением \mathcal{H} . Кроме того, пользуясь теоремой Дарбу, можно гладко сшить и симплектические структуры, и гамильтоновы потоки. В результате получится некоторая гамильтонова система $w = \text{sgrad } \mathcal{H}$ на атоме P . Заметим, что отрезки, по которым склеивались кресты, в точности будут отрезками раздела, необходимыми при определении Δ , Z , так что Δ - и Z -инварианты действительно получатся равными нулю.

Определение 3.9.8. Построенная система называется *0-моделью* данного атома V с фиксированным инвариантом Λ .

Доказательство теоремы 3.9.6. Доказательство будет проведено в 2 шага:

- 1) Построение 3-блока, на каждом уровне $P^2(s)$ которого имеется (редуцированная) система с инвариантами, в совокупности равными $g(s)$;
- 2) Восстановление системы на 4-окрестности графа $K \subset P^2(0)$ по 3-блоку.

Мы считаем, что ориентация на $A \times V$ уже задана. Тогда равенство значения инварианта ε заданному означает просто выбор одного из двух вариантов разбивки колец атома V на положительные и отрицательные. При этом этот выбор может быть по определению сделан только одновременно с выбором ориентации однозначно определенного цикла λ (и относительно него), т.е. грубо говоря, границы атома A . Ориентация λ должна совпадать с направлением гамильтонова потока искомой системы, что понадобится на втором шаге

при восстановлении системы по 3-блоку. Поэтому мы сразу зафиксируем ориентацию λ и вслед за ней ориентацию колец (= направление потока) атома V , согласно заданному значению ε . Дальнейшие манипуляции уже не повлияют на ε .

Кроме того, можно для определенности полагать, что g является C^∞ -гладкой (поскольку росток любой допустимой g имеет гладкого представителя, см. замечание 3.7.11).

Теперь построим 3-блок. Для этого построим сначала более простой 3-блок с гладким семейством систем. А именно, пусть на уровне $P^2(s)$ система является 0-моделью с Λ -инвариантом, равным $\{g_1(s) : \dots : g_n(s)\}$. При этом из двух возможных способов ориентировать интегральные линии систем на уровнях мы выберем тот, который совпадает с уже выбранной ориентацией колец.

Далее, известно [8], что операция Φ_m^* не меняет Λ -инварианта системы и что с помощью подходящей операции вклейки-вырезания можно из 0-модели получить систему с любыми заданными наперед допустимыми Δ - и Z -инвариантами.

Поэтому с помощью некоторой операции вклейки-вырезания на каждом уровне $P^2(s)$ можно подправить теперь 3-блок так, чтобы функция Δ -инварианта приняла заданное значение. Поскольку $g(s)$ — гладкое отображение, то и длина вклеиваемого-вырезаемого куска на каждом ребре будет какой-то гладкой функцией. За Z -инвариантом следить пока не будем (то есть, неважно, каким он получится). Отметим только, что полученная функция Z -инварианта будет гладко зависеть от s .

Кроме того, известно [8], что существуют такие коцепи m , что операция Φ_m^* не меняет Δ -инварианта. А именно, m может быть произвольным коциклом, и с помощью таких операций можно получить любое допустимое значение Z . Отсюда следует, что с помощью операции вклейки-вырезания можно еще раз подправить 3-блок, добившись того, чтобы и функция Z -инварианта приняла заданное значение. При этом снова длины вклеиваемых-вырезаемых кусков на каждом ребре будут гладкими функциями, поэтому все корректно.

Без ограничения общности можно считать, что на построенном 3-блоке гамильтониан $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f_2)$ не зависит от s (здесь f_2 функция, задающая структуру атома V на поверхности P^2), а вся зависимость системы от уровня s содержится в функции $\omega(s, x, y)$ — компоненте симплектической формы $\Omega = \omega(s, x, y)dx \wedge dy$.

Для проведения второго шага нужно подобрать такие функции $a(s, x, y)$ и $b(s, x, y)$, чтобы они удовлетворяли (3.1.5), см. лемму 3.9.2. На $A \times V$ рассмотрим симплектическую форму

$$\Omega = ds \wedge d\varphi + a(s, x, y)ds \wedge dx + b(s, x, y)ds \wedge dy + \omega(s, x, y)dx \wedge dy.$$

Чтобы найти гамильтониан $H(s, f_2)$, вспомним, что должно быть выполнено (3.2.3):

$$\frac{d\mathcal{H}_P}{df_2} = 2\pi \frac{H'_2 G'_2}{H'_1 G'_2 - H'_2 G'_1},$$

откуда получим

$$\frac{H'_1}{H'_2} = \frac{G'_1}{G'_2} + \frac{2\pi}{\mathcal{H}'_P}. \quad (3.9.2)$$

Выше было показано (3.6.8), что $\frac{G'_1}{G'_2}(s, f_2) \rightarrow 0$ при $f_2 \rightarrow 0$. Поэтому правая часть в (3.9.2) не равна нулю в точке $(0, 0)$, и если рассмотреть на плоскости параметров (s, f_2) векторное поле единичной длины и наклона (3.9.2), то оно будет интегрируемо в окрестности $(0, 0)$. Остается выбрать функцию $H(s, f_2)$ так, чтобы она была невырожденной и постоянной на интегральных траекториях.

Построенная система имеет в качестве полного траекторного инварианта заданный: $(\text{germ}_0 g, \varepsilon)$. □

4. Эллиптический случай.

В этой главе будут сформулированы результаты О.Е.Орел [14]. Первая теорема была сформулирована и доказана в [14] для случая ИГС с произвольным числом степеней свободы. Мы используем эти результаты в случае ИГС с двумя степенями свободы. Вторая теорема сформулирована здесь как в работе [14] (см. также замечание после формулировки теоремы).

Бифуркационная диаграмма в окрестности эллиптической особой точки имеет вид, показанный на рис. 4.0.3: образ отображения момента диффеоморфен окрестности нуля

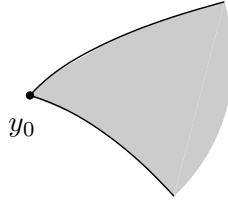


Рис. 4.0.3:

угла $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Бифуркационная диаграмма — это образы сторон этого угла, т.е. две кривые, выходящие трансверсально из вершины y_0 , являющейся образом эллиптической особой точки x_0 . Пусть U — это четырехмерная окрестность особой точки x_0 . Пространство $\mathcal{B}(U)$, точкам которого соответствуют торы Лиувилля, удобно в эллиптическом случае отождествлять с образом отображения момента. Лиувиллево слоение на U диффеоморфно прямому произведению двух атомов A .

Теорема 4.0.9. Пусть v и v' — две нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Они топологически (гладко) траекторно эквивалентны в четырехмерных окрестностях U, U' своих эллиптических особых точек x_0, x'_0 тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\xi : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U')$, обладающий следующими свойствами:

1. ξ сохраняет тип точек слоений $\mathcal{B}(U)$ и $\mathcal{B}(U')$;
2. ξ сохраняет функцию вращения.

Необходимо отметить, что в случае эллиптической особой точки существует способ однозначного выбора базисных циклов. А именно, необходимо брать циклы, исчезающие при приближении к стенкам бифуркационной диаграммы. Ориентацию на них задает гамильтонов поток.

Замечание 4.0.10. Первое условие теоремы означает по существу то, что ξ должно сохранять тип точек отображения момента, то есть что угловая точка переходит в угловую точку (граница угла переходит в границу угла, внутренняя часть — во внутреннюю часть, но эти условия выполняются автоматически, т.к. ξ — гомеоморфизм).

В работе [14] был также получен полный *гладкий* траекторный инвариант для гладких неспециальных систем.

Пусть в окрестности эллиптической особой точки гамильтониан $H = H(u_1, u_2)$ является C^2 -гладкой функцией переменных u_1, u_2 (отметим, что $u_1 = p_1^2 + q_1^2$, $u_2 = p_2^2 + q_2^2$, для некоторых симплектических координат p_i, q_i , см. теорему 0.1.5). В этом случае функция вращения $\rho(u_1, u_2)$ является C^1 -гладкой. Тогда имеет смысл говорить о гладкой траекторной эквивалентности.

Определение 4.0.11. ИГС называется *неспециальной* в эллиптической особой точке, если

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \right|_{(0,0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \right|_{(0,0)} \neq 0.$$

Как было отмечено в [14], случай неспециальной системы является случаем общего положения; кроме того, почти все реальные физические задачи являются гладкими и неспециальными.

Теорема 4.0.12. *Полным гладким траекторным инвариантом неспециальной нерезонансной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки x_0 является тройка чисел*

$$Tr(x_0) = (\rho(y_0), \text{sign } \rho_1(y_0), \text{sign } \rho_2(y_0)),$$

где $\rho(y_0)$ — предел функции вращения в точке y_0 , а $\rho_i(y_0)$ — производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных к бифуркационной диаграмме.

Тройки $Tr(x_0)$ и $Tr(x'_0)$ являются эквивалентными, если они либо совпадают, либо

$$\rho'(y'_0) = \frac{1}{\rho(y_0)}, \quad \text{sign } \rho'_1(y'_0) = \text{sign } \rho_2(y_0), \quad \text{sign } \rho'_2(y'_0) = \text{sign } \rho_1(y_0).$$

Две неспециальные нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы гладко траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 тогда и только тогда, когда тройки $Tr(x_0)$ и $Tr(x'_0)$ эквивалентны.

Замечание 4.0.13. В работе [14] эта теорема была сформулирована не совсем точно. А именно, учитывалась лишь возможность поменять местами знаки $\text{sign } \rho_1(y_0)$ и $\text{sign } \rho_2(y_0)$,

в то время как такая смена порядка означает изменение порядка базисных циклов. Это, в свою очередь, означает изменение функции вращения на обратную ей. Поэтому тройки нужно рассматривать с точностью до одновременного изменения первой величины на обратную и изменения порядка знаков.

5. Топологическая траекторная эквивалентность двух интегрируемых систем с двумя степенями свободы на больших уровнях энергии

В этой главе рассматриваются две классические системы, описывающие движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой — интегрируемые случаи Эйлера (с двумя совпадающими главными моментами инерции) и Лагранжа. Доказывается, что при достаточно больших значениях интеграла энергии система Лагранжа с фиксированными параметрами топологически траекторно эквивалентна некоторой системе Эйлера. Это означает, в частности, что движение в поле силы тяжести осесимметричного твердого тела с неподвижной точкой, расположенной на оси симметрии, на достаточно больших уровнях энергии будет качественно таким же, как движение другого осесимметричного твердого тела, закрепленного в центре масс (заметим, что в этом случае сила тяжести не оказывает влияния на движение тела).

Параллельно получены интересные свойства функций вращения интегрируемых геодезических потоков на двумерной сфере и двумерном торе.

Результаты получены в [9]. См. также замечание 5.4.2.

5.1. Случай Эйлера и Лагранжа в механике твердого тела

Рассмотрим шестимерное линейное пространство $e(3)^*$, двойственное к алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства. На нем определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, $[a, b]$ обозначает коммутатор в алгебре Ли $e(3)$, $d_x f$ и $d_x g$ — дифференциалы функций f и g в точке x соответственно. При стандартном отождествлении пространства $e(3)^*$ и алгебры $e(3)$ можно считать, что $d_x f, d_x g \in e(3)$. В естественных координатах $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ на $e(3)^*$ (координаты S_i отвечают вращениям, а координаты R_i — сдвигам в \mathbb{R}^3) эта скобка выглядит так:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0, \quad (5.1.1)$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Уравнениями Эйлера на пространстве $e(3)^*$ со скобкой (5.1.1) называется по определению система уравнений

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}, \quad (5.1.2)$$

где H — некоторая гладкая функция на $e(3)^*$. (5.1.2) является гамильтоновой системой на $e(3)^*$ со скобкой (5.1.1). Ее гамильтонианом является функция H .

Вводя обозначения $S = (S_1, S_2, S_3)$, $R = (R_1, R_2, R_3)$, уравнения (5.1.2) можно также переписать в виде обобщенных уравнений Кирхгофа:

$$\dot{S} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right) \times S + \left(\frac{\partial H}{\partial R} \right) \times R, \quad \dot{R} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right) \times R.$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^6(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3)$ четырехмерное подмногообразие

$$M_0^4 = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = 0\},$$

являющееся орбитой коприсоединенного представления. Известно, что скобка Пуассона (5.1.1), ограниченная на это подмногообразие, невырождена, а само M_0^4 симплектоморфно кокасательному расслоению к сфере [4]. Не ограничивая общности, можно считать $c = 1$, т.к. можно сделать линейную замену, которая сохранит скобку (5.1.1).

Рассмотрим теперь две системы на T^*S^2 :

- (Случай Эйлера)

— с гамильтонианом $H_E = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2B} + \frac{S_3^2}{2C}$: эта система соответствует движению твердого тела с главными моментами инерции A, B, C , закрепленного в центре масс. Нас будет интересовать случай $A = B$. При этих условиях дополнительный интеграл линеен: $K = S_3$.

Без ограничения общности будем считать, что

$$H_E = S_1^2 + S_2^2 + \gamma S_3^2.$$

- (Случай Лагранжа)

— с гамильтонианом $H_L = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2C} + aR_3$ и дополнительным интегралом $K = S_3$, что соответствует движению в поле силы тяжести осесимметричного твердого тела, закрепленного в центре масс. Известны и обобщения классического случая Лагранжа, где вместо потенциала $U(R) = aR_3$ рассматриваются другие потенциалы. Поэтому будем считать, что $U(R) = V(R_3)$, где $V(x)$ — некоторая выпуклая гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$. Итак, рассматривается система с гамильтонианом

$$H_L = S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2 + V(R_3). \quad (5.1.3)$$

Ее дополнительный интеграл по-прежнему линеен и равен $K = S_3$. Условие выпуклости гарантирует боттовость системы и отсутствие седловых критических окружностей.

Для сравнения с точки зрения траекторной классификации систем Эйлера и Лагранжа необходимо воспользоваться аналогом теоремы 1.8.2. Отличие от ситуации главы 1 здесь состоит в том, что теперь нас интересует не локальное строение окрестности особого слоя внутри изоэнергетической поверхности, а вся изоэнергетическая поверхность. Поэтому нужно учесть информацию о лиувилевом слое на выбранной изоэнергетической поверхности (инвариант *меченая молекула*, см. [21]), "траекторную" информацию о каждой из окрестностей особых слоев (дословно согласно теореме 1.8.2) и функцию вращения на каждом из ребер молекулы.

Первым шагом на этом пути является определение типов лиувилевых слоев каждой из систем. Ответ на этот вопрос известен, см. [6, 7, 16].

5.1.a. Слоения Лиувилля

А именно, слоения Лиувилля систем Эйлера при $g = 0$ на всех неособых изоэнергетических подмногообразиях и при любых $\gamma \neq 1$ диффеоморфны между собой. Слоения Лиувилля систем Лагранжа для различных уровней энергии могут быть недиффеоморфны, однако для любого значения $\beta \neq 1$ существует значение $H = h_0$, начиная с которого лиувиллевы слоения на любых изоэнергетических поверхностях $\{H = h > h_0\}$ диффеоморфны между собой и слоению Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности задачи Эйлера. На рис. 5.1.1 указана соответствующая меченая молекула

$$A \cdot \frac{r = 1/2}{\varepsilon = 1} \cdot A$$

Рис. 5.1.1:

(полный инвариант Лиувиллева слоения в соответствии с теорией Болсинова-Фоменко [21]), а на рис. 5.1.2 показаны бифуркационные диаграммы обоих рассматриваемых случаев динамики твердого тела в координатах H, K . Для случая Лагранжа представлена одна из возможных бифуркационных диаграмм, в общем случае диаграмма зависит, конечно, от потенциала V ; вдали от начала координат бифуркационная диаграмма всегда представляет собой две расходящиеся кривых — именно эта область нас и интересует.

Интересующее нас слоение описывается следующим очень простым образом. Изоэнергетические поверхности диффеоморфны вещественным проективным пространствам $\mathbb{R}P^3$. Нужно взять два полнотория, расслоенных стандартным образом на торы, стягивающиеся на ось полнотория, и склеить их между собой по граничным торам так, чтобы получилось многообразие $\mathbb{R}P^3$.

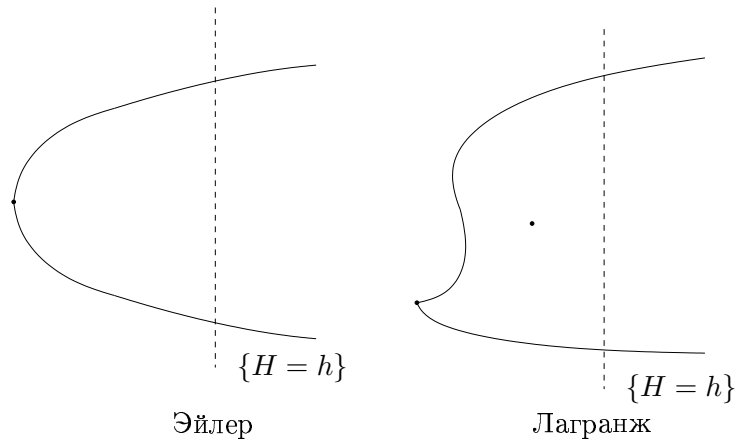


Рис. 5.1.2:

Ясно, что в силу простоты лиувиллевых слоений рассматриваемых систем для установления траекторной эквивалентности достаточно сравнить функции вращения на единственном ребре молекулы.

Таким образом, необходимо как-либо параметризовать семейства торов Лиувилля, отвечающие ребру молекулы, а далее одинаковым образом выбрать базисные циклы на торах. Если функции вращения в выбранных базисах окажутся сопряженными (поскольку параметры выбирались независимо для разных систем), т.е. будут переходить друг в друга при гладкой замене параметра, то системы траекторно эквивалентны.

5.2. Функция вращения задачи Лагранжа

Заметим, что мы можем рассматривать одну систему (5.1.3). Случаю Эйлера будет соответствовать нулевой потенциал $V(R_3) \equiv 0$ и (возможно) другое значение параметра γ . Вычислим функцию вращения такой системы на ребре молекулы (рис.5.1.1).

Известен принцип Мопертюи [4, 12, 13], позволяющий построить по натуральной гамильтоновой системе на многообразии T^*M^n траекторно эквивалентный ей на некотором изоэнергетическом уровне геодезический поток на том же многообразии. Это утверждение выглядит следующим образом:

Теорема 5.2.1 (Принцип Мопертюи). *Рассмотрим на T^*M^n две натуральные гамильтоновы системы с гамильтонианами*

$$H = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x)p_i p_j + V(x),$$

$$\tilde{H} = \sum_{i,j=1}^n \frac{g^{ij}(x)}{h-V(x)} p_i p_j$$

где g^{ij} — тензор, обратный к метрическому, а $V(x)$ — гладкий потенциал, заданный на M^n . Пусть h — достаточно большое значение энергии, такое, чтобы $h > \max_x V(x)$. Пусть $Q^{2n-1} = \{H(x, p) = h\} = \{\tilde{H}(x, p) = 1\}$ — $(2n - 1)$ -мерный изоэнергетический уровень (для обеих систем).

Тогда системы $v = \text{sgrad } H$ и $\tilde{v} = \text{sgrad } \tilde{H}$ гладко траекторно эквивалентны на уровне Q^{2n-1} .

Обратим внимание, что вторая система в этом утверждении является геодезическим потоком римановой метрики $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$ на многообразии M^n , где $\tilde{g}_{ij}(x) = (h - V(x))g_{ij}(x)$.

При помощи принципа Мопертюи можно от (5.1.3) перейти к рассмотрению траекторно эквивалентного (5.1.3) на уровне $\{H_L = h\}$ геодезического потока метрики

$$ds^2 = \frac{h - V(z)}{\beta} \frac{(dx^2 + dy^2 + \beta dz^2)}{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\beta}}.$$

Переходя к сферическим координатам (r, φ, θ) :

$$x = r \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$z = r \sin \theta$$

получим на сфере $r = 1$

$$ds^2 = \frac{h - V(\sin \theta)}{\beta + \text{tg}^2 \theta} (d\varphi^2 + (\beta + \text{tg}^2 \theta) d\theta^2).$$

Другими словами, гамильтониан этого геодезического потока есть

$$H = \frac{1}{2} \frac{\beta + \text{tg}^2 \theta}{(h - V(\sin \theta))} \left(p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{\beta + \text{tg}^2 \theta} \right).$$

а дополнительный интеграл — $F = p_\varphi$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $H = \frac{1}{2}$. Тогда тор Лиувилля задается условием $p_\varphi = t$:

$$W(t, \theta) = (h - V(\sin \theta)) - (\beta + \text{tg}^2 \theta) t^2 \geq 0.$$

Проекция тора Лиувилля на сферу изображена на рис. 5.2.1 — это "цилиндр" на сфере, заданный условием $\theta \in [x_1, x_2]$, где $x_1(t), x_2(t)$ — корни уравнения $W(t, \theta) = 0$ (относительно θ).

Выберем теперь базис на торах однопараметрического семейства. В окрестностях особых слоев такой базис определен однозначно: в качестве одного из базисных циклов

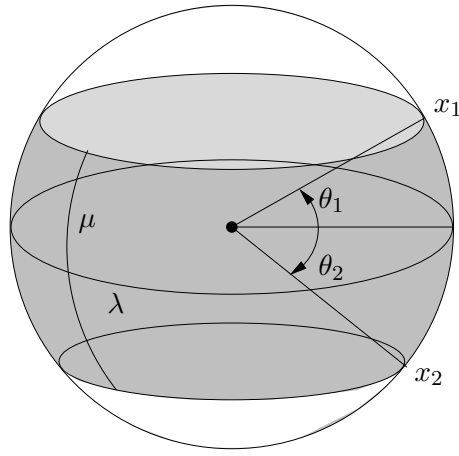


Рис. 5.2.1:

можно взять слой (однозначно определенного) S^1 -расслоения, а в качестве второго — исчезающий цикл. Если мы разрежем Q^3 по какому-нибудь тору Лиувилля, то Q^3 распадется на два куска-полнотория. Таким образом, на каждом из этих кусков будет однозначно определен базис на семействе торов. Но нам нужно определить базис на семействе торов всего ребра, а не половины. При этом видно, что при склейке трехмерных кусков базисы, выбранные на каждом из них по отдельности, не будут совпадать, поскольку $Q^3 \simeq T^*S^2 \simeq \mathbb{R}P^3$.

Заметим, что описанные однозначно определенные циклы задаются условиями $\lambda = \{\theta = const\}$, $\mu = \{\varphi = const\}$. Они изображены на рис. 5.2.1. Нетрудно видеть, что нужно на одном куске Q^3 задать базис как $(\lambda, \lambda + \mu)$, а на другом — как $(-\lambda, -\lambda + \mu)$. Тогда мы получим базис на всем однопараметрическом семействе торов, и он будет гладко зависеть от параметра t .

Известно, что в общем случае функция вращения имеет вид

$$\rho(F) = \frac{\frac{\partial H}{\partial I_1}}{\frac{\partial H}{\partial I_2}} = -\frac{\frac{\partial I_2}{\partial F}}{\frac{\partial I_1}{\partial F}}, \quad (5.2.1)$$

где I_1, I_2 — переменные действия, отвечающие циклам λ_1, λ_2 : $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1} (p_x dx + p_y dy)$, $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_2} (p_x dx + p_y dy)$, F — параметр, определяющий семейство торов, например, значение дополнительного интеграла.

В нашем базисе переменные действия имеют вид:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=const} t d\varphi = t, \quad I_2 = \begin{cases} I + t, t \geq 0 \\ I - t, t \leq 0 \end{cases}.$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=\text{const}} \sqrt{W(t, \theta)} d\theta.$$

Следовательно, функция вращения по формуле (5.2.1) равна

$$\rho(t) = -\frac{\partial I_2}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\partial I}{\partial t} - 1, & t \geq 0 \\ -\frac{\partial I}{\partial t} + 1, & t \leq 0 \end{cases}. \quad (5.2.2)$$

Окончательный результат:

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{(\beta + \text{tg}^2(x)) t}{\sqrt{h - V(\sin(x)) - (\beta + \text{tg}^2(x)) t^2}} dx \mp 1, \quad (5.2.3)$$

где x_1, x_2 — корни знаменателя подынтегральной функции $W(t, x)$ (и зависят от t), параметр t меняется так, чтобы эти корни существовали.

Функция вращения задачи Лагранжа (в похожем виде) была вычислена ранее О.Е.Орел [15].

5.3. Свойства функций вращения геодезических потоков

Пусть на двумерной сфере или двумерном торе задана линейно интегрируемая глобально лиувиллева метрика $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$ [18, 19]. Это означает следующее. Переменные x и y являются глобальными периодическими координатами на торе, а $f(x)$ — некоторая гладкая периодическая функция. Без ограничения общности мы будем считать ее заданной на отрезке-периоде $[0, L]$, $f(0) = f(L) = 0$, $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, L]$; все критические точки f являются невырожденными. Метрика ds^2 при этих условиях является глобально линейно интегрируемой, т.е. геодезический поток этой метрики обладает линейным интегралом. Если рассматривается случай сферы, то чтобы обобщить [18, 19] нужно сферу представить в виде фактор-пространства тора по инволюции $\sigma(x, y) = (-x, -y)$.

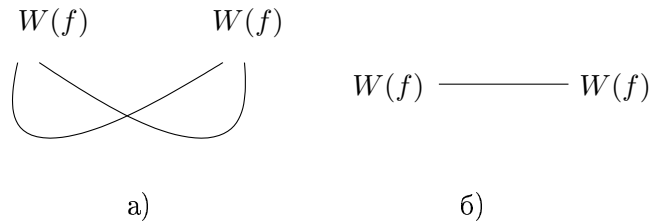


Рис. 5.3.1:

На рис.5.3.1а,б показаны грубые молекулы линейно интегрируемых геодезических потоков таких метрик на двумерных торе и сфере соответственно. $W(f)$ обозначает деревья, построенные по функции $f(x)$, см. рис.5.3.2.

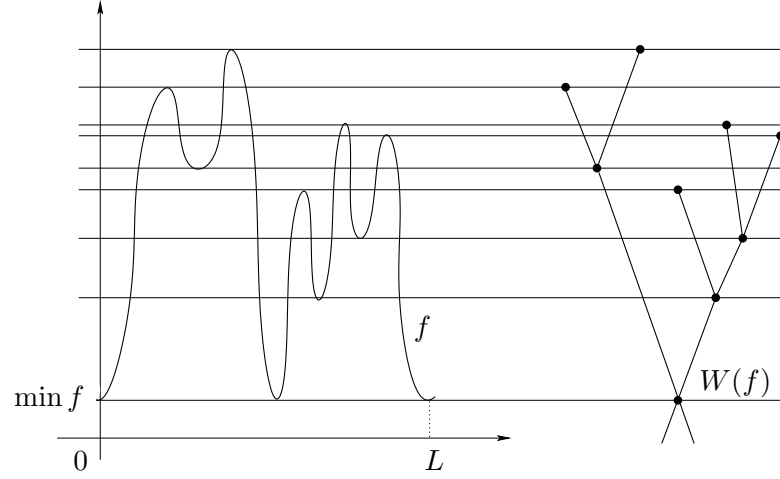


Рис. 5.3.2:

Согласно классификации интегрируемых геодезических потоков [19], функция вращения на торе Лиувилля, заданном уравнением $p_y = t = const$, на ребрах, где $|F| > \min(f(x))$, имеет вид:

$$\rho(t) = \frac{1}{L} \int_{x_1}^{x_2} \frac{2tdx}{\sqrt{f(x) - t^2}},$$

где $[x_1, x_2]$ — один из нескольких возможных отрезков, где $f(x) - t^2 \geq 0$ (определяемых уравнением $f(x) - t^2 = 0$).

Функция $f(x)$ имеет на своем своем периоде один или несколько изолированных максимумов, каждый из которых соответствует какому-то атому A молекулы.

Лемма 5.3.1. Пусть гладкая функция $f(x)$ имеет изолированный максимум в точке x_0 , т.е. $f(x_0) = \text{лостх } f(x) > 0$, $f'(x_0) = 0$. Тогда пределы функции вращения на ребре молекулы при приближении к атому A

$$\lim_{t \rightarrow \pm \sqrt{f(x_0)}} \rho(t)$$

полностью определяются величиной $\frac{f''(x_0)}{f(x_0)}$, т.е. равны $\pm \frac{2\pi\sqrt{2}}{L} \sqrt{-\frac{f(x_0)}{f''(x_0)}}$

Замечание 5.3.2. Результат верен и тогда, когда локальный максимум вырожден. В этом случае предел равен $\pm\infty$.

Доказательство. Ввиду нечетности функции вращения достаточно рассмотреть случай $t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}$. Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{L} \int_{x_1}^{x_2} \frac{2tdx}{\sqrt{f(x) - t^2}} = \frac{1}{L} \int_{x_1}^{x_0} \frac{2tdx}{\sqrt{f(x) - t^2}} + \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_2} \frac{2tdx}{\sqrt{f(x) - t^2}} \\ &= \frac{1}{L} \int_{t^2}^{f(x_0)} \frac{2t\alpha_1'(s)ds}{\sqrt{s - t^2}} + \frac{1}{L} \int_{f(x_0)}^{t^2} \frac{2t\alpha_2'(s)ds}{\sqrt{s - t^2}} = \frac{1}{L} \int_{t^2}^{f(x_0)} \frac{2t(\alpha_1'(s) - \alpha_2'(s))ds}{\sqrt{s - t^2}},\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

где $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$ — функции, обратные к $f(x)$ на интервалах монотонности (x_1, x_0) и (x_0, x_2) соответственно.

Положим теперь

$$\varphi(s) = \begin{cases} (\alpha_1'(s) - \alpha_2'(s)) \sqrt{f(x_0) - s}, & t^2 \leq s < f(x_0), \\ \sqrt{-\frac{2}{f''(x_0)}}, & s = f(x_0). \end{cases}\tag{5.3.2}$$

Докажем, что φ непрерывна на отрезке $[t^2, f(x_0)]$. Очевидно, что достаточно проверить в точке $s = f(x_0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow f(x_0)} \varphi(s) &= \lim_{s \rightarrow f(x_0)} \left[\left(\frac{1}{f'(\alpha_1(s))} - \frac{1}{f'(\alpha_2(s))} \right) \sqrt{f(x_0) - f(\alpha_1(s))} \right] \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0^-} \frac{\sqrt{f(x_0) - f(x_1)}}{f'(x_1)} - \lim_{x_2 \rightarrow x_0^+} \frac{\sqrt{f(x_0) - f(x_2)}}{f'(x_2)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0^-} \frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1 - x_0)^2}}{f''(\zeta_1)(x_1 - x_0)} - \lim_{x_2 \rightarrow x_0^+} \frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2 - x_0)^2}}{f''(\zeta_2)(x_2 - x_0)} \\ &= -\sqrt{-\frac{1}{2f''(x_0)}} \left(\lim_{x_1 \rightarrow x_0^-} \frac{|x_1 - x_0|}{x_1 - x_0} - \lim_{x_2 \rightarrow x_0^+} \frac{|x_2 - x_0|}{x_2 - x_0} \right) \\ &= 2\sqrt{-\frac{1}{2f''(x_0)}} = \sqrt{-\frac{2}{f''(x_0)}}, \text{ т.к. } x_1 < x_0 < x_2.\end{aligned}$$

Здесь $\xi_1, \zeta_1 \in [x_1, x_0]$, $\xi_2, \zeta_2 \in [x_0, x_2]$, $\xi_i, \zeta_i \rightarrow x_0$ при $s \rightarrow f(x_0)$ ($x_1 \rightarrow x_0$ слева, $x_2 \rightarrow x_0$ справа).

Теперь воспользуемся формулой:

$$\int_a^b \frac{\psi(x)dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int_0^{\pi/2} \psi(a \sin^2 s + b \cos^2 s) ds,\tag{5.3.3}$$

где $a < b$ и $\psi(x)$ — любая непрерывная функция на $[a, b]$. Эта последняя формула верна для всех непрерывных функций ψ и доказывается заменой $x = a \sin^2 s + b \cos^2 s$.

Итак, из (5.3.1) получим:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{L} \int_{t^2}^{f(x_0)} \frac{2t(\alpha'_1(s) - \alpha'_2(s))ds}{\sqrt{s-t^2}} = \frac{1}{L} \int_{t^2}^{f(x_0)} \frac{2t(\alpha'_1(s) - \alpha'_2(s))\sqrt{f(x_0)-s}}{\sqrt{(f(x_0)-s)(s-t^2)}} ds \\ &= \frac{4t}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) ds.\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \rho(t) &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \frac{4t}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) ds \\ &= \frac{4\sqrt{f(x_0)}}{L} \frac{\pi}{2} \lim_{u \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi(u) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{L} \sqrt{-\frac{f(x_0)}{f''(x_0)}}\end{aligned}$$

□

Отметим также, что $\rho(0) = 0$. Этот факт не является очевидным, поскольку $f'(0) = f'(L) = 0$.

Поэтому найдем $\lim_{t \rightarrow 0} t\varphi(t^2)$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} t\varphi(t^2) &= \lim_{t \rightarrow 0} t(\alpha'_1(t^2) - \alpha'_2(t^2))\sqrt{f(x_0) - t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{f(x_0) - t^2} (\lim_{t \rightarrow 0} t\alpha'_1(t^2) - \lim_{t \rightarrow 0} t\alpha'_2(t^2)),\end{aligned}\tag{5.3.5}$$

если все три предела существуют.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{f(x_0) - t^2} &= \sqrt{f(x_0)}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} t\alpha'_1(t^2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f'(\alpha_1(t^2))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(\alpha_1(t^2))}}{f'(\alpha_1(t^2))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{f''(\xi_t)}{2}\alpha_1^2(t^2)}}{f''(\zeta_t)\alpha_1(t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2f''(0)}},\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

$$\text{аналогично } \lim_{t \rightarrow 0} t\alpha'_2(t^2) = -\frac{1}{\sqrt{2f''(0)}}$$

Здесь ξ_t, ζ_t — промежуточные точки из отрезка $[0, \alpha_1(t^2)]$. Из (5.3.5), (5.3.6) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\varphi(t^2) = \sqrt{2\frac{f(x_0)}{f''(0)}},\tag{5.3.7}$$

следовательно, в выражении (5.3.4)

$$\rho(t) = \frac{4}{L} \int_0^{\pi/2} t\varphi(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) ds$$

подынтегральная функция при $t = 0$ везде, кроме точки $s = 0$, равна нулю, а в точке $s = 0$ — найденному значению (5.3.7). Следовательно, интеграл равен нулю, что и требовалось. Поэтому $\rho(0) = 0$.

Из доказанной леммы 5.3.1 легко вытекает

Следствие 5.3.3. Пусть функции $f_0(x)$, $f(x)$, определенные на одном и том же отрезке, имеют ровно по одному максимуму на этом отрезке; $\max f_0(x) = y_0$, $\max f(x) = y$ и эти значения достигаются в точках x_{max}^0 и x_{max} соответственно. Пусть также функции

$$\rho_0(t) = \frac{1}{L} \int_{x_1^0(t)}^{x_2^0(t)} \frac{2tdx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{L} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{2tdx}{\sqrt{f(x) - t^2}}$$

— монотонны.

Тогда $\rho(t)$ и $\rho_0(t)$ непрерывно сопряжены $\iff \frac{f_0''(x_{max}^0)}{y_0} = \frac{f''(x_{max})}{y}$.

Доказательство. Ясно, что условия монотонности функций $\rho(t)$ и $\rho_0(t)$, а также совпадения пределов на концах отрезков гарантируют наличие замены переменной, переводящей одну из функций в другую. \square

Лемма 5.3.4. Пусть гладкая функция $f(x)$ имеет изолированный максимум в точке x_0 , т.е. $f(x_0) = \text{лостях } f(x) > 0$, $f'(x_0) = 0$. Тогда пределы производной функции вращения на ребре молекулы при приближении к атому A

$$\lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{f(x_0)}} \rho'(t)$$

полностью определяются величинами $f(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$ и $f^{(4)}(x_0)$, а именно, равны

$$\pm \left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{L} \sqrt{-\frac{1}{f''(x_0)}} + \frac{\pi\sqrt{2}f(x_0)}{6L} \frac{(5f'''(x_0)^2 - 3f''(x_0)f^{(4)}(x_0))}{f''(x_0)^3 \sqrt{-f''(x_0)}} \right) \quad (5.3.8)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой (5.3.4) из доказательства леммы 5.3.1. Продифференцируем выражение (5.3.4):

$$\rho'(t) = \frac{4}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) ds$$

$$+ \frac{4t}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi'(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) \cdot 2t \sin^2 s ds, \quad (5.3.9)$$

откуда получим

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \rho'(t) = \frac{4}{L} \int_0^{\pi/2} ds \cdot \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi(t^2) + \frac{8f(x_0)}{L} \int_0^{\pi/2} \sin^2 s ds \cdot \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi'(t^2) \quad (5.3.10)$$

Первое слагаемое уже было вычислено в доказательстве леммы 5.3.1 с точностью до множителя $t = \sqrt{f(x_0)}$, для вычисления второго слагаемого необходимо найти

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi'(t^2):$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi'(t^2) &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \left((\alpha_1'(t^2) - \alpha_2'(t^2)) \sqrt{f(x_0) - t^2} \right)' \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \left[\frac{d}{dx_1} \left(\frac{1}{f'(x_1)} \sqrt{f(x_0) - f(x_1)} \right) \frac{1}{f'(x_1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{1}{f'(x_2)} \sqrt{f(x_0) - f(x_2)} \right) \frac{1}{f'(x_2)} \right], \end{aligned}$$

где $x_1 = \alpha_1(t^2)$, $x_2 = \alpha_2(t^2)$.

Обозначим

$$A_i(t) = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{1}{f'(x_i)} \sqrt{f(x_0) - f(x_i)} \right) \frac{1}{f'(x_i)}, \quad (5.3.11)$$

тогда

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi'(t^2) = \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} (A_1(t) - A_2(t)) \quad (5.3.12)$$

Преобразуем $A_i(t)$ (5.3.11):

$$A_i(t) = -\frac{2f''(x_i)(f(x_0) - f(x_i)) + f'(x_i)^2}{2f'(x_i)^3 \sqrt{f(x_0) - f(x_i)}} \quad (5.3.13)$$

Разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} A_i(t) &= -\frac{-\frac{f''f'''}{3}\bar{x}_i^3 + (-\frac{f''''2}{12} - \frac{f''f^{(4)}}{4})\bar{x}_i^4 + o(\bar{x}_i^4)}{\sqrt{2}f''^3 \sqrt{-f''\bar{x}_i^3|\bar{x}_i|} + \frac{5\sqrt{2}}{3}f''^2 f''' \sqrt{-f''\bar{x}_i^4|\bar{x}_i|} + o(\bar{x}_i^5)} \\ &= \frac{\frac{f''f'''}{3} + (\frac{f''''2}{12} + \frac{f''f^{(4)}}{4})\bar{x}_i + o(\bar{x}_i)}{\sqrt{2}f''^3 \sqrt{-f''|\bar{x}_i|} + \frac{5\sqrt{2}}{3}f''^2 f''' \sqrt{-f''\bar{x}_i|\bar{x}_i|} + o(\bar{x}_i^2)} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Здесь для краткости записи опущен аргумент x_0 у производных функции f ; кроме того, $\bar{x}_i = x_i - x_0$, $i = 1, 2$.

Позднее нам также понадобится другое представление (5.4.8).

Для дальнейшего нам понадобятся следующие утверждения:

Лемма 5.3.5.

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = -1,$$

$$\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + o(\bar{x}_1).$$

Лемма 5.3.6.

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1||\bar{x}_2|} = -\frac{1}{3} \frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)}.$$

Доказательства лемм 5.3.5 и 5.3.6 будут даны ниже.

Таким образом числитель выражения $A_1(t) - A_2(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{f'' f''' \sqrt{2}}{3} f''' \sqrt{-f''} (|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|) + \frac{f'' f''' 5\sqrt{2}}{3} f''' \sqrt{-f''} (\bar{x}_2 |\bar{x}_2| - \bar{x}_1 |\bar{x}_1|) \\ & + \left(\frac{f'''^3}{12} + \frac{f'' f^{(4)}}{4} \right) \sqrt{2} f''' \sqrt{-f''} (\bar{x}_1 |\bar{x}_2| - \bar{x}_2 |\bar{x}_1|) + o(\bar{x}_1^2) \\ & = \sqrt{2} f''' \sqrt{-f''} |\bar{x}_1| |\bar{x}_2| \left(\frac{f'' f''' |\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{3} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} + \frac{5 f'''^2 \bar{x}_2 |\bar{x}_2| - \bar{x}_1 |\bar{x}_1|}{9} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} \right) \\ & + \left(\frac{f'''^2}{12} + \frac{f'' f^{(4)}}{4} \right) \frac{\bar{x}_1 |\bar{x}_2| - \bar{x}_2 |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} + o(\bar{x}_1^2), \end{aligned}$$

а знаменатель равен

$$\left(\sqrt{2} f''' \sqrt{-f''} \right)^2 |\bar{x}_1| |\bar{x}_2| + o(\bar{x}_1^2).$$

Используя леммы 5.3.5, 5.3.6, а также учитывая, что $\bar{x}_1 < 0$, $\bar{x}_2 > 0$, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} (A_1(t) - A_2(t)) &= \frac{-\frac{f'''^2}{9} + 2\frac{5f'''^2}{9} - 2\left(\frac{f'''^2}{12} + \frac{f'' f^{(4)}}{4}\right)}{\sqrt{2} f''' \sqrt{-f''}} \\ &= \frac{5f'''^2 - 3f'' f^{(4)}}{6\sqrt{2} f''' \sqrt{-f''}} \end{aligned}$$

Подставляя $\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi(t^2)$ (найденное при доказательстве леммы 5.3.1), а также $\lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \varphi'(t^2)$ в выражение (5.3.10), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}} \rho'(t) &= \frac{4\pi}{L} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{f''(x_0)}} + \frac{8f(x_0)\pi}{L} \frac{(5f'''^2(x_0) - 3f''(x_0)f^{(4)}(x_0))}{4 \cdot 6\sqrt{2} f''(x_0)^3 \sqrt{-f''(x_0)}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}}{L} \sqrt{-\frac{1}{f''(x_0)}} + \frac{\pi\sqrt{2}f(x_0)}{6L} \frac{(5f'''^2(x_0) - 3f''(x_0)f^{(4)}(x_0))}{f''(x_0)^3 \sqrt{-f''(x_0)}} \end{aligned}$$

□

Доказательства лемм 5.3.5 и 5.3.6.

Доказательство леммы 5.3.5. Поскольку x_1, x_2 являются корнями уравнения $f(x) = t^2$, т.е. $f(x_1) = f(x_2)$, то при $t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}$ выполнено равенство

$$\frac{1}{2} f''(x_0) \bar{x}_1^2 + o(\bar{x}_1^2) = \frac{1}{2} f''(x_0) \bar{x}_2^2 + o(\bar{x}_2^2),$$

откуда, деля крайние части равенства на $\frac{1}{2} f''(x_0) \bar{x}_1^2$, получим:

$$1 + o(1) = \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} + o\left(\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2}\right).$$

Это означает, в частности, что имеются такие бесконечно малые при $t \rightarrow \sqrt{f(x_0)}$ функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, что

$$1 + \alpha(t) = \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} + \beta(t) \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} + \beta(t) \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} = (1 + \beta(t)) \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} = 1 + \alpha(t) \rightarrow 1,$$

откуда

$$\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} = \frac{1 + \alpha(t)}{1 + \beta(t)} \rightarrow 1.$$

Учитывая, что по смыслу $x_1 < x_0 < x_2$, а значит, $\bar{x}_1 < 0 < \bar{x}_2$, получим

$$\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} \rightarrow -1.$$

Второе утверждение $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + o(\bar{x}_1)$ следует из уже доказанного: нужно домножить обе части равенства $\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = -1 + o(1)$ на \bar{x}_1 . \square

Доказательство леммы 5.3.6. Аналогично доказательству леммы 5.3.5 имеем:

$$\frac{1}{2} f''(x_0) \bar{x}_1^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \bar{x}_1^3 + o(\bar{x}_1^3) = \frac{1}{2} f''(x_0) \bar{x}_2^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \bar{x}_2^3 + o(\bar{x}_2^3),$$

откуда после группирования членов, используя лемму 5.3.5, получим

$$\frac{1}{2} f''(x_0) (|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|) (|\bar{x}_2| + |\bar{x}_1|) = \frac{1}{6} f'''(x_0) (\bar{x}_1^3 - \bar{x}_2^3) + o(\bar{x}_1^3).$$

Следовательно, снова используя лемму 5.3.5 и $\bar{x}_1 < 0 < \bar{x}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} &= \frac{1}{3} \frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)} \frac{\bar{x}_1^3 - \bar{x}_2^3}{(|\bar{x}_1| + |\bar{x}_2|) |\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} + o(1) \\ &= \frac{1}{3} \frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)} \frac{1 - \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}\right)^3}{(-1 + \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1})(-1) \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}} + o(1) \\ &= \frac{1}{3} \frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)} \frac{1 + 1 + o(1)}{-(-1 - 1 + o(1))(-1 + o(1))} + o(1) \\ &= -\frac{1}{3} \frac{f'''(x_0)}{f''(x_0)} + o(1) \end{aligned}$$

\square

5.4. Основная теорема

Теорема 5.4.1. Пусть гладкая функция $f_0(x)$ обладает следующими свойствами:

- (1) соответствующая функция вращения $\rho_0(t)$ обладает положительной производной на всем отрезке $[-T, T]$ изменения параметра t , где $T^2 = \sup_{x \in [0, L]} f_0(x)$, $T > 0$;

(2) $f'_0(x) \neq 0$, если только x не совпадает с концом отрезка $[0, L]$ или точкой локального максимума функции f_0 , $f'_0(0) = f'_0(L) = 0$, $f''_0(0), f''_0(L) > 0$;

(3) $f_0(x)$ имеет ровно один локальный максимум x_0 на $[0, L]$.

Пусть гладкая функция $v(x)$, определенная также на отрезке $[0, L]$, такова, что $v(0) = v(L) = 0$, $v'(0) = v'(L) = 0$.

Тогда существует некоторое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если выполнено $\|v\|_{C^4} \leq \varepsilon_0$, то функция вращения $\rho(\tau)$ возмущенной системы, соответствующей гладкой функции $f(x) = f_0(x) + v(x)$, также монотонно возрастает при допустимых значениях параметра τ .

Замечание 5.4.2. C^4 -норма в формулировке теоремы 5.4.1 является существенным условием. Отметим, что в работе [9] была допущена неточность.

Пример 5.4.3. Пусть в окрестности точки (единственного) локального максимума $x_0 = 0$ выполнено $f_0(x) = 1 - x^2$. Тогда

$$\rho_0(t) = \frac{1}{L} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{2tdx}{\sqrt{1-x^2-t^2}} = \frac{2t}{L} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-t^2}} \Big|_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2\pi t}{L}$$

очевидно, монотонно возрастает. Покажем, что для любого значения $\varepsilon_0 > 0$ существует возмущение $v \in C^3$, $\|v\|_{C^3} < \varepsilon_0$, такое, что функция вращения возмущенной системы не будет монотонно возрастающей. А именно, мы воспользуемся леммой 5.3.4 и вычислим производную возмущенной функции вращения в точке максимума. Пусть $f_\varepsilon(x) = f_0(x) + v_\varepsilon(x)$, где v_ε — сглаживание функции

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} x^4, & x^2 \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\right) \\ \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\varepsilon, \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^4\right), & x^2 \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\right) \end{cases}$$

См. рис. 5.4.1.

Функция $f_\varepsilon(x)$ также имеет локальный максимум в нуле. Используя лемму 5.3.4, $v_\varepsilon(0) = v'_\varepsilon(0) = v''_\varepsilon(0) = v'''_\varepsilon(0) = 0$, получим:

$$\rho'_{\varepsilon, N}(0) = \frac{2\pi}{L} - \frac{\pi}{L} \frac{f_\varepsilon^{(4)}(0)}{8} = \frac{\pi}{L} \left(2 - \frac{v_\varepsilon^{(4)}(0)}{8} \right) = \frac{\pi}{L} (2 - 3) < 0,$$

в то время как $\|v\|_{C^3} = 24 \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\right)^{1/2} \leq 24 \frac{\varepsilon}{24} = \varepsilon$.

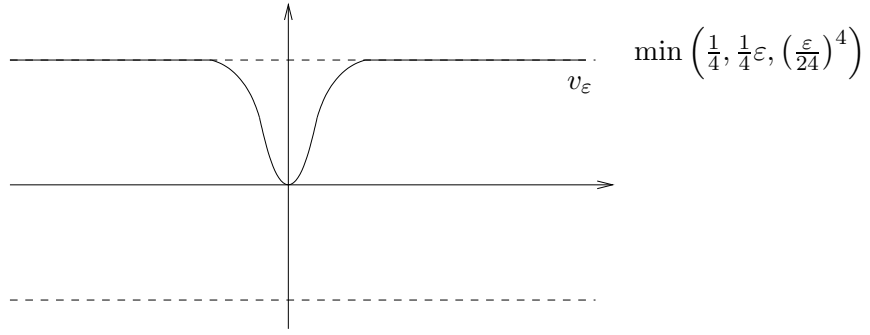


Рис. 5.4.1:

Доказательство теоремы 5.4.1. При помощи линейной замены параметра τ можно добиться, чтобы отрезок изменения τ совпадал с отрезком изменения t . Условия совпадения значений функций f_0 и f , а также значений их производных на концах отрезка от этого не нарушатся. Будем поэтому считать, что имеются две функции f и f_0 , определенные на одном отрезке и имеющие на нем по одному максимуму, причем значения в этих максимумах совпадают, а $\|v\|_{C^4} = \|f - f_0\|_{C^4} \leq \varepsilon_0$ и $v(0) = v(L) = v'(0) = v'(L) = 0$. При условии, что функция вращения $\rho_0(t)$, соответствующая $f_0(x)$, монотонна, мы ищем такое ε_0 , чтобы функция вращения $\rho(t)$, соответствующая $f(x) = f_0(x) + v(x)$, также была монотонна.

Поскольку $\rho(t)$ (5.3.4) нечетна, достаточно показать, что она монотонна на $[0, T]$.

По функции $f_0(x)$ мы выберем окрестности концов отрезка $[0, T]$ и величину ε_0 допустимого возмущения v так, что функция вращения $\rho(t)$ возмущенной задачи будет монотонна на этих окрестностях, т.е. без ограничения общности на некоторых отрезках $[0, \tau_1]$, $[T - \tau_2, T]$. Далее, на оставшемся отрезке $[\tau_1, T - \tau_2]$ можно ограничить производную $f'_0(x)$ снизу некоторой положительной величиной. Это позволит рассмотреть интеграл, определяющий функцию вращения, как интеграл от некоторой непрерывной на всем отрезке определения функции, причем v можно будет интерпретировать как ее малое возмущение. Это последнее условие также даст ограничение на величину значения ε_0 .

Пусть $m = \min_{[-T, T]} \rho'_0(t)$.

(I) Рассмотрим сначала окрестность точки $t = 0$. Нетрудно видеть, что интеграл вида

$$\frac{2t}{L} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}}$$

вблизи точки $t = 0$ можно представить в виде суммы

$$\frac{2t}{L} \left(\int_{x_1}^{\delta} + \int_{\delta}^{L-\delta} + \int_{L-\delta}^{x_2} \right) \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} =: c_1(f_0, t) + c_2(f_0, t) + c_3(f_0, t)$$

для некоторого фиксированного δ . Без ограничения общности можно считать, что $0 < \tau_1 < \delta$. При этом второй ("средний") интеграл при $t < \min\{\sqrt{f_0(\delta)}, \sqrt{f_0(L-\delta)}\}$ является интегралом с фиксированными пределами интегрирования и без особенностей, поэтому путем ограничения нормы возмущения v можно сделать изменение производной этого среднего интеграла сколь угодно малым:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_2(f_0, t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{L} \int_{\delta}^{L-\delta} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \right) = \frac{2}{L} \int_{\delta}^{L-\delta} \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \int_{\delta}^{L-\delta} \frac{f_0(x)}{\sqrt{f_0(x) - t^2}^3} dx \end{aligned}$$

Требуемое ограничение на норму v возможно найти, поскольку функция $\frac{y}{\sqrt{y-t^2}^3}$ непрерывно зависит от y при

$$y \geq \min\{f_0(\delta), f_0(L-\delta)\} > t^2.$$

Поэтому $\forall c > 0 \exists \varepsilon_1 > 0$ такое, что при $\|v\|_{C^0} = \max_{[\delta, L-\delta]} |v| < \varepsilon_1$ выполнено

$$(1) f(\delta) > t^2, f(L-\delta) > t^2,$$

$$(2) \left| \frac{f(x)}{\sqrt{f(x) - t^2}^3} - \frac{f_0(x)}{\sqrt{f_0(x) - t^2}^3} \right| < c \quad \forall x \in [\delta, L-\delta].$$

Пусть $c = \frac{m}{3}$, тогда при $\|v\|_{C^4} < \varepsilon_1$

$$\left| \frac{d}{dt}c_2(f, t) - \frac{d}{dt}c_2(f_0, t) \right| < \frac{m}{3} \quad (5.4.1)$$

"Крайние" интегралы $c_1(f, t)$ и $c_3(f, t)$ имеют одинаковую структуру, поэтому достаточно разобраться только с производной первого из них:

$$\frac{d}{dt}c_1(f_0, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{L} \int_{x_1}^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \right). \quad (5.4.2)$$

Произведем замену переменной: $a \cdot y^2 = f_0(x)$, где $a = \frac{f_0''(0)}{2}$. Иначе говоря,

$$y^2 = x^2\psi(x), \quad \text{где } \psi(0) = 1,$$

а также

$$\begin{aligned} 2ydy &= (2x\psi(x) + x^2\psi'(x))dx \\ dx &= \frac{2y}{2x\psi(x) + x^2\psi'(x)}dy = \frac{y}{x\psi(x) + \frac{x^2\psi'(x)}{2}}dy \\ &= \frac{x\sqrt{\psi(x)}}{x\psi(x) + \frac{x^2\psi'(x)}{2}}dy = \frac{\sqrt{\psi(x)}}{\psi(x) + \frac{x\psi'(x)}{2}}dy = (1 + h(y))dy, \end{aligned}$$

где $h(y)$ — бесконечно малая при $y \rightarrow 0$ (поскольку $\psi(x)$ непрерывна и $\psi(0) = 1$).

Тогда $\frac{d}{dt}c_1(f_0, t)$ (5.4.2) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_1(f_0, t) &= \frac{2}{L} \frac{d}{dt} \left(t \int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{dy}{\sqrt{ay^2 - t^2}} (1 + h(y)) \right) \\ &= \frac{2}{L} \frac{d}{dt} \left((1 + \tilde{h}(t)) t \int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{dy}{\sqrt{ay^2 - t^2}} \right) \\ &= \frac{2}{L} \frac{d}{dt} \left((t + t\tilde{h}(t)) \frac{\ln(\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 - t^2})}{\sqrt{a}} \Big|_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \right) \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Здесь δ_y — некоторая константа.

Важно отметить, как связаны между собой функции $h(y)$ и $\tilde{h}(t)$. Известно, что h — бесконечно малая при $y \rightarrow 0$. Докажем, что \tilde{h} также является бесконечно малой при $t \rightarrow 0$. Из определения функции $h(y)$

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\sqrt{\psi(x)}}{\psi(x) + \frac{x\psi'(x)}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{1 + a_1x + o(x)}}{1 + a_1x + o(x) + \frac{x(a_1 + o(1))}{2}} - 1 \\ &= \frac{1 + \frac{a_1x}{2} + o(x)}{1 + \frac{3a_1x}{2} + o(x)} - 1 = 1 - a_1x + o(x) - 1 \\ &= -a_1x + o(x) = -a_1y + o(y) = yg(y), \text{ где } a_1 = \psi'(0) = g(0), \end{aligned}$$

видно, что она представима в виде $h(y) = yg(y)$, где $g(y)$ некоторая ограниченная вблизи точки $y = 0$ функция. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{h(y)}{\sqrt{ay^2 - t^2}} dy &= \int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{yg(y)}{\sqrt{ay^2 - t^2}} dy = g(\xi_t) \int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{y}{\sqrt{ay^2 - t^2}} dy \\ &= g(\xi_t) \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 - t} \Big|_{\frac{t^2}{a}}^{\delta_y^2} = \frac{g(\xi_t) \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}}{a} \end{aligned}$$

является ограниченной функцией. Здесь мы воспользовались теоремой о промежуточном значении, ξ_t — некоторая точка между $\frac{\sqrt{t}}{a}$ и δ_y . Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \left(\int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{h(y) dy}{\sqrt{ay^2 - t^2}} \right) / \left(\int_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \frac{dy}{\sqrt{ay^2 - t^2}} \right) \\ &= \frac{g(\xi_t) \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}}{a} \left(\frac{\ln(\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 - t^2})}{\sqrt{a}} \Big|_{\frac{t}{\sqrt{a}}}^{\delta_y} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(\xi_t) \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}}{a} \left(\frac{\ln(\sqrt{a}\delta_y + \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}) - \ln t}{\sqrt{a}} \right)^{-1} \\
&= \frac{g(\xi_t) \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}}{\sqrt{a}(\ln(\sqrt{a}\delta_y + \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}) - \ln t)}
\end{aligned}$$

Числитель этой функции ограничен при $t \rightarrow 0$, а знаменатель стремится к бесконечности, следовательно, это бесконечно малая при $t \rightarrow 0$.

Преобразуя (5.4.3), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{a}L} \left((1 + \tilde{h}(t) + t\tilde{h}'(t)) \left(\ln(\sqrt{a}\delta_y + \sqrt{a\delta_y^2 - t^2}) - \ln t \right) \right. \\
&\left. - (t + t\tilde{h}(t)) \left(\frac{t}{\sqrt{a\delta_y^2 - t^2}(\sqrt{a}\delta_y + \sqrt{a\delta_y^2 - t^2})} - \frac{1}{t} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Главный член в выражении (5.4.4) при $t \rightarrow 0$ равен $-\frac{\ln t}{\sqrt{a}}$, остальная часть является непрерывной функцией. Нужно понять, что произойдет с производной функции вращения при замене $f_0(x)$ на $f_0(x) + v(x)$, если возмущение $v(x)$ выбрано, как указано в условии теоремы.

Во-первых, изменится значение второй производной: $f''(0) = f_0''(0) + v''(0)$, что изменит константу a в асимптотическом разложении (5.4.4) при $t \rightarrow 0$. Кроме того, изменится непрерывный добавок. А именно, добавление к $f_0(x)$ малой по C^4 -норме функции $v(x)$ повлечет за собой малое по C^2 -норме изменение $\psi(x)$, что, в свою очередь, повлечет малое по C^1 -норме изменение $h(y)$ и затем малое по C^0 -норме изменение $\tilde{h}(t)$. Очевидно, что можно ограничить C^4 -норму возмущения v константой ε_2 и выбрать τ_1 так, чтобы во-первых, $f''(0) > 0$, а во-вторых, выражение, вычисленное для $f(x)$ аналогично (5.4.4), отличалось от (5.4.4) не более, чем на $\frac{m}{3}$ при $t \in [0, \tau_1]$.

Как было отмечено выше, аналогично можно поступить с другим "крайним" интегралом. Мы считаем, что для обоих "крайних" интегралов подобрана общая величина τ_1 и также общая константа ε_2 . Отметим также, что из доказанного следует, что $\rho'(0) = +\infty$ для любой функции $f(x)$ с $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$ — а именно такие функции рассматриваются в траекторных задачах для систем с невырожденными особенностями.

(II) Рассмотрим теперь окрестность точки $t = T$.

Прежде всего отметим, что используя лемму 5.3.4, можно вычислить пределы $\rho_0'(T)$ и $\rho'(T)$. Учитывая, что $\rho_0'(T)$ положительна и то, что зависимость предела $\rho'(T)$ от

значений производных функции f непрерывная, можно выбрать такое ε_3 , что если $\|v\|_{C^4} < \varepsilon_3$, то и $\rho'(T)$ положительна.

Что происходит в окрестности точки T ? Рассмотрим выражение (5.3.9) для функции вращения:

$$\rho'(t) = \underbrace{\frac{4}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) ds}_{I_1(f;t)} + \underbrace{\frac{4t}{L} \int_0^{\pi/2} \varphi'(t^2 \sin^2 s + f(x_0) \cos^2 s) \cdot 2t \sin^2 s ds}_{I_2(f;t)},$$

Здесь первое слагаемое $I_1(f;t)$ является интегралом от непрерывной функции. Кроме того, эта функция всюду положительна и имеет вид (5.3.2):

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= (\alpha_1'(s) - \alpha_2'(s)) \sqrt{f(x_0) - s} \\ &= \frac{\sqrt{f(x_0) - f(\alpha_1(s))}}{f'(\alpha_1(s))} - \frac{\sqrt{f(x_0) - f(\alpha_2(s))}}{f'(\alpha_2(s))} \\ &= \frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_1)}{2}(\alpha_1(s) - x_0)^2}}{f''(\lambda_1)(\alpha_1(s) - x_0)} - \frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_2)}{2}(\alpha_2(s) - x_0)^2}}{f''(\lambda_2)(\alpha_2(s) - x_0)} \\ &= -\frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_1)}{2}}}{f''(\lambda_1)} - \frac{\sqrt{-\frac{f''(\xi_2)}{2}}}{f''(\lambda_2)}, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

где $\xi_i, \lambda_i \in [\alpha_1(s), \alpha_2(s)]$.

Рассмотрим теперь второе слагаемое $I_2(f;t)$. При доказательстве леммы 5.3.4 был найден в том числе и его предел при $t \rightarrow T$. При доказательстве использовалось фактически асимптотическое разложение функции $\varphi'(u)$ при $u \rightarrow T^2 = f(x_0)$, а именно, была найдена главная часть этого разложения. Представим эту функцию немного в другом виде. Для этого мы подправим леммы 5.3.5 и 5.3.6 следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} &= -\sqrt{\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}}, & \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} &= -\sqrt{\frac{f''(\xi_2)}{f''(\xi_1)}} \\ \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1||\bar{x}_2|} &= -\frac{1}{3} \frac{f'''(\zeta_1) + f'''(\zeta_2) \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{3/2}}{f''(x_0) \left(1 + \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{1/2}\right) \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Здесь $\xi_1, \zeta_1 \in [x_1, x_0]$, $\xi_2, \zeta_2 \in [x_0, x_2]$ — некоторые промежуточные точки (причем ξ_i те же, что и в (5.4.5)).

В самом деле,

$$s = f(x_i(s)) = f(x_0) + \frac{f''(\xi_i)}{2} \bar{x}_i^2,$$

откуда

$$f''(\xi_1)\bar{x}_1^2 = f''(\xi_2)\bar{x}_2^2$$

и следовательно, учитывая знаки,

$$\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = -\sqrt{\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}}.$$

Кроме того,

$$s = f(x_i(s)) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\bar{x}_i^2 + \frac{f'''(\zeta_i)}{6}\bar{x}_i^3,$$

откуда

$$f''(x_0)(|\bar{x}_2| + |\bar{x}_1|)(|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|) = \frac{1}{3}(f'''(\zeta_1)\bar{x}_1^3 - f'''(\zeta_2)\bar{x}_2^3)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1||\bar{x}_2|} &= \frac{1}{3} \frac{f'''(\zeta_1)\bar{x}_1^3 - f'''(\zeta_2)\bar{x}_2^3}{f''(x_0)(|\bar{x}_2| + |\bar{x}_1|)|\bar{x}_1||\bar{x}_2|} \\ &= \frac{1}{3} \frac{f'''(\zeta_1) - f'''(\zeta_2) \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}\right)^3}{f''(x_0)\left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} - 1\right)(-1)\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{f'''(\zeta_1) + f'''(\zeta_2) \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{3/2}}{f''(x_0) \left(1 + \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{1/2}\right) \left(\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Перепишем также разложение (5.3.14) в другом виде. Нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} f''(x_i) &= f''(x_0) + f'''(x_0)\bar{x}_i + \frac{f^{(4)}(\eta_1^i)}{2}\bar{x}_i^2 \\ f(x_0) - f(x_i) &= -\frac{f''(x_0)}{2}\bar{x}_i^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}\bar{x}_i^3 - \frac{f^{(4)}(\eta_2^i)}{24}\bar{x}_i^4 \\ f'(x_i) &= f''(x_0)\bar{x}_i + \frac{f'''(x_0)}{2}\bar{x}_i^2 + \frac{f^{(4)}(\eta_3^i)}{6}\bar{x}_i^3 \\ &= f''(x_0)\bar{x}_i + \frac{f'''(\eta_4^i)}{2}\bar{x}_i^2 \\ (f(x_0) - f(x_i))^{1/2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-f''(x_0)|\bar{x}_i|} + g_i(\mu^i)\bar{x}_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

где

$$g_i(\mu^i) = -\frac{1}{2} \frac{2f''(\mu^i)(f(x_0) - f(\mu^i)) + f'(\mu^i)^2}{2(f(x_0) - f(\mu^i))^{3/2}} = (-1)^i(p_i + q_i|\bar{\mu}^i|)$$

Здесь $\mu^i = \mu^i(x) \in [x_1, x_0]$ или $[x_0, x_2]$ соответственно, $\bar{\mu}^i = \mu^i - x_0$, а p_i и q_i зависят от значений производных функции f , вычисленных в нескольких промежуточных точках.

По аналогии с (5.3.11-5.3.13) получим:

$$\varphi'(t^2) = A_1(t) - A_2(t),$$

где

$$A_i(t) = -\frac{2f''(x_i)(f(x_0) - f(x_i)) + f'(x_i)^2}{2f'(x_i)^3 \sqrt{f(x_0) - f(x_i)}}$$

и $x_i = \alpha_i(t^2)$, $\bar{x}_i = x_i - x_0$.

Следовательно, учитывая также (5.4.7), получим:

$$A_i(t) = \frac{A + A_1^i \bar{x}_i + A_2^i \bar{x}_i^2 + A_3^i \bar{x}_i^3}{B|\bar{x}_i| + B_1^i \bar{x}_i |\bar{x}_i| + B_2^i \bar{x}_i^2 |\bar{x}_i| + B_3^i \bar{x}_i^3 |\bar{x}_i| + B_4^i \bar{x}_i^4 |\bar{x}_i| + B_5^i \bar{x}_i^5 |\bar{x}_i|}, \quad (5.4.8)$$

где A, B — некоторые константы, зависящие от значений производных функции f в точке x_0 , а A_j^i, B_k^i ($i = 1, 2, j = 1..3, k = 1..5$) — величины, зависящие от значений производных функции f в промежуточных точках (в общем случае, лежащих между x_1 и x_2) и от $\bar{\mu}^1 \in [x_1 - x_0], \bar{\mu}^2 \in [0, x_2 - x_1]$. Производные берутся до 4-го порядка.

Далее, разность $\varphi'(t^2) = A_1(t) - A_2(t)$ с помощью разложения (5.4.8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{A + A_1^1 \bar{x}_1 + \dots}{B|\bar{x}_1| + B_1^1 \bar{x}_1 |\bar{x}_1| + \dots} - \frac{A + A_1^2 \bar{x}_2 + \dots}{B|\bar{x}_2| + B_1^2 \bar{x}_2 |\bar{x}_2| + \dots} \\ &= \frac{AB(|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|) + B(A_1^1 \bar{x}_1 |\bar{x}_2| - A_1^2 \bar{x}_2 |\bar{x}_1|) + A(B_1^2 \bar{x}_2 |\bar{x}_2| - B_1^1 \bar{x}_1 |\bar{x}_1|) + \dots}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2| (B^2 + B(B_1^1 \bar{x}_1 + B_1^2 \bar{x}_2) + \dots)} \\ &= \frac{\frac{A}{B} \frac{|\bar{x}_2| - |\bar{x}_1|}{|\bar{x}_1| |\bar{x}_2|} + \frac{1}{B} (-A_1^1 - A_1^2) + \dots}{1 + \frac{B_1^1}{B} \bar{x}_1 + \frac{B_1^2}{B} \bar{x}_2 + \frac{B_1^1 B_1^2}{B^2} \bar{x}_1 \bar{x}_2} \end{aligned}$$

Здесь многоточиями обозначены члены высших порядков. Понятно, что пользуясь (5.4.7), можно получить представление $\varphi'(t^2) = A_1(t) - A_2(t)$ и в явном виде. Пользуясь теперь (5.4.6), можно сделать вывод, что $\varphi'(t^2)$ непрерывно зависит от \bar{x}_1 , производных функции f вплоть до 4-й, вычисленных в некоторой (малой) окрестности особой точки, а также от $\bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2$.

Так что можно поступить следующим образом:

- 1) Пусть $0 < m < \min_{[-T, T]} \rho'_0(t)$.
- 2) Мы начинаем с $\varphi'(t^2)$, вычисленной при $v = 0$, т.е. $f = f_0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varphi'(t^2)$, рассматриваемая как функция $\bar{x}_i, \bar{\mu}^i$ и производных f вплоть до 4-й, как функция многих переменных мало изменялась при изменении каждой из переменных не более чем на ε . "Мало изменялась" означает не более чем на некоторую фиксированную константу, выбранную так, чтобы

$$|I_2(f; t) - I_2(f_0; t)| < \frac{m}{2}.$$

Осталось выбрать ε .

При необходимости уменьшая ε , аналогично получим, что $\varphi(t^2)$ как функция от производных f (5.4.5) как функция многих переменных ($f''(\xi_1), f''(\xi_2), f''(\lambda_1), f''(\lambda_2)$) мало изменяется при изменении каждой из переменных не более чем на ε . "Мало" означает так, чтобы

$$|I_1(f; t) - I_1(f_0; t)| < \frac{m}{2}.$$

3) Выберем такую окрестность (a, b) точки x_0^0 , чтобы $|a - b| < \varepsilon/2$ и $|f_0^{(i)}(x) - f_0^{(i)}(x_0^0)| < \varepsilon/2$ для всех $i = 0..4$ и для всех $x \in [a, b]$. Без ограничения общности можно считать $f_0(a) = f_0(b)$.

4) Пусть $\delta = \frac{f_0(x_0^0) - f_0(a)}{4}$ и $\|v\|_{C^4} < \delta < \varepsilon/2$.

5) Тогда для любого $t^2 \in [f_0(a) + \delta, f_0(x_0^0)]$ уравнение

$$f(x) = t^2$$

имеет оба корня на отрезке

$$[\alpha_1(f_0(a) + \delta), \alpha_2(f_0(a) + \delta)] \subset [a, b].$$

6) Следовательно, полагая $\tau_2 = 3\delta$, получим: для любого $t^2 \in [T - \tau_2, T]$

$$\begin{aligned} |x_j(t^2) - x_1^0(t^2)| &\leq |a - b| < \varepsilon, \\ |f^{(i)}(x_j(t^2)) - f_0^{(i)}(x_j^0(t^2))| &\leq |f^{(i)}(x_j(t^2)) - f_0^{(i)}(x_j(t^2))| \\ &\quad + |f_0^{(i)}(x_j(t^2)) - f_0^{(i)}(x_j^0(t^2))| \\ &\leq |v^{(i)}(x_j(t^2))| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \|v\|_{C^4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

Здесь $i = 0..4, j = 1, 2$.

7) Следовательно, подставляя $f^{(i)}(x_j(t^2)), \bar{x}_j, \bar{\mu}^j$ в выражение для $\varphi'(t^2)$, получим, что выполнен п. 2), т.е

$$\begin{aligned} |I_1(f; t) - I_1(f_0; t)| &< \frac{m}{2} \\ |I_2(f; t) - I_2(f_0; t)| &< \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Складывая теперь $I_1(f; t)$ и $I_2(f; t)$, убеждаемся, что эта сумма положительна:

$$\begin{aligned} &|(I_1(f; t) + I_2(f; t)) - (I_1(f_0; t) + I_2(f_0; t))| \\ &\leq |I_1(f; t) - I_1(f_0; t)| + |I_2(f; t) - I_2(f_0; t)| < \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m \\ \Rightarrow I_1(f; t) + I_2(f; t) &> I_1(f_0; t) + I_2(f_0; t) - m \\ &= \rho'_0(t) - m \geq \min_{[-T, T]} \rho'_0(t) - m = 0. \end{aligned}$$

Это гарантирует положительность производной функции вращения в фиксированной окрестности точки $t = T$: $[T - \tau_2, T]$.

(III) Осталось понять, что происходит при $t \in [\tau_1, T - \tau_2]$.

Итак, пусть $t \in [\tau_1, T - \tau_2]$, $\Delta = T^2 - (T - \tau_2)^2$, константы $y_1 < y_2$ выбраны так, что $f_0(y_1) = f_0(y_2) = T^2 - \frac{\Delta}{2} =: \beta^2$. Разложим $\rho_0(t)$ в сумму трех интегралов:

$$\begin{aligned}\rho_0(t) &= \frac{2t}{L} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \\ &= \frac{2t}{L} \left(\int_{x_1}^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + \int_{y_2}^{x_2} \right) \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}}.\end{aligned}$$

Тогда

$$d_1(f_0, t) := \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{L} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \right) = \frac{2}{L} \int_{y_1}^{y_2} \frac{f_0(x) dx}{\left(\sqrt{f_0(x) - t^2} \right)^3} \quad (5.4.9)$$

Поскольку подынтегральное выражение в (5.4.9) непрерывно зависит от $f_0(x)$, t а (5.4.9) при любых $t \in [\tau_1, T - \tau_2]$ является интегралом без особенностей с фиксированными пределами интегрирования, то существует такое $\varepsilon_4 > 0$, что при $\|v\|_{C^0} < \varepsilon_4$ и всех $t \in [\tau_1, T - \tau_2]$ выполнено ($m = \min_{[-T, T]} \rho'_0(t)$):

$$|d_1(f, t) - d_1(f_0, t)| < \frac{1}{2}m \quad (5.4.10)$$

Аналогично преобразованиям (5.3.1), (5.3.4), снова воспользовавшись формулой (5.3.3), получим ($\alpha_1(s), \alpha_2(s)$ — корни уравнения $f_0(x) = s$):

$$\begin{aligned}\frac{2t}{L} \int_{x_1}^{y_1} \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} &= \frac{2}{L} \int_{f_0(x_1)}^{f_0(y_1)} \frac{t\alpha'_1(s) ds}{\sqrt{s - t^2}} = \frac{2}{L} \int_{t^2}^{\beta^2} \frac{t\alpha'_1(s) ds}{\sqrt{s - t^2}} \\ \frac{2t}{L} \left(\int_{x_1}^{y_1} + \int_{y_2}^{x_2} \right) \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} &= \frac{2}{L} \int_{t^2}^{\beta^2} \frac{t(\alpha'_1(s) - \alpha'_2(s)) ds}{\sqrt{s - t^2}} \\ &= \frac{2}{L} \int_{t^2}^{\beta^2} \frac{t(\alpha'_1(s) - \alpha'_2(s)) \sqrt{\beta^2 - s}}{\sqrt{(\beta^2 - s)(s - t^2)}} ds \\ &= \frac{4t}{L} \int_0^{\pi/2} \psi(t^2 \sin^2 s + \beta^2 \cos^2(s)) ds,\end{aligned}$$

где $\psi : [t^2, \beta^2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(s) = (\alpha'_1(s) - \alpha'_2(s))\sqrt{\beta^2 - s}$. Тогда

$$\begin{aligned} d_2(f_0, t) &:= \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{L} \left(\int_{x_1}^{y_1} + \int_{y_2}^{x_2} \right) \frac{dx}{\sqrt{f_0(x) - t^2}} \right) = \\ &= \frac{4}{L} \left(\int_0^{\pi/2} \psi(t^2 \sin^2 s + \beta^2 \cos^2(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + 2t^2 \int_0^{\pi/2} \psi'(t^2 \sin^2 s + \beta^2 \cos^2(s)) \sin^2 s ds \right) \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Обозначим $u := t^2 \sin^2 s + \beta^2 \cos^2(s) \in [t^2, \beta^2] \subset [\tau_1^2, \beta^2]$. Тогда $\sqrt{\beta^2 - u} = \sqrt{\beta^2 - t^2 \sin^2 s - \beta^2 \cos^2 s} = \sqrt{\beta^2 - t^2} \sin s$ и поэтому подынтегральное выражение в первом слагаемом выражения (5.4.11) примет вид:

$$\psi(u) = \left(\frac{1}{f'_0(\alpha_1(u))} - \frac{1}{f'_0(\alpha_2(u))} \right) \sqrt{\beta^2 - t^2} \sin s$$

Подынтегральное выражение во втором слагаемом выражения (5.4.11) примет вид:

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= (\alpha''_1(u) - \alpha''_2(u))\sqrt{\beta^2 - u} \sin^2 s - \frac{\alpha'_1(u) - \alpha'_2(u)}{2\sqrt{\beta^2 - u}} \sin^2 s \\ &= \left(-\frac{f''(\alpha_1(u))}{(f'(\alpha_1(u)))^3} + \frac{f''(\alpha_2(u))}{(f'(\alpha_2(u)))^3} \right) \sqrt{\beta^2 - t^2} \sin^3 s \\ &\quad - \left(\frac{1}{f'(\alpha_1(u))} - \frac{1}{f'(\alpha_2(u))} \right) \frac{\sin s}{2\sqrt{\beta^2 - t^2}} \end{aligned}$$

Учитывая, что

- на множестве $M := [x_1, y'_1] \cup [y'_2, x_2]$ производная функции f_0 отделена от нуля (y'_1, y'_2 найдены из условия $f(y'_1) = f(y'_2) = T^2 - \frac{\Delta}{4}$);
- $\alpha_1(u), \alpha_2(u) \in M$, если $\alpha_1^0(u), \alpha_2^0(u) \in [x_1, y_1] \cup [y_2, x_2]$ и $\|v\|_{C^0} < \frac{\Delta}{4}$;
- подынтегральные функции в выражении для $d_2(f_0, t)$ непрерывно зависят от $f'_0(\alpha_i(u)), f''_0(\alpha_i(u))$;
- $t^2 \leq (T - \tau_2)^2 < T^2 - \frac{\Delta}{2} = \beta^2$, т.е. $\beta^2 - t^2 > 0$.

Итого получим: существует $\varepsilon_5 > 0$ ($\varepsilon_5 < \frac{\Delta}{4}$) такое, что при $\|v\|_{C^2} < \varepsilon_5$ и для любого $t \in [\tau_1, T - \tau_2]$

$$|d_2(f, t) - d_2(f_0, t)| < \frac{1}{2}m. \quad (5.4.12)$$

Учитывая (5.4.10), (5.4.12), получим:

$$\begin{aligned}
 |\rho'(t) - \rho'_0(t)| &= |d_1(f, t) + d_2(f, t) - (d_1(f_0, t) + d_2(f_0, t))| \\
 &\leq |d_1(f, t) - d_1(f_0, t)| + |d_2(f, t) - d_2(f_0, t)| \\
 &< \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m \\
 \Rightarrow \rho'(t) &> \rho'_0(t) - m \geq 0.
 \end{aligned}$$

Итак, ε_0 нужно выбирать меньшим $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \delta$. □

Из теоремы 5.4.1 и следствия 5.3.3 немедленно вытекает

Следствие 5.4.4. В условиях теоремы 5.4.1 функции $\rho_0(t)$ и $\rho(\tau)$ сопряжены \Leftrightarrow

$$\frac{f''_0(x_{\max}^0)}{f(x_{\max}^0)} = \frac{f''(x_{\max})}{f(x_{\max})}.$$

5.5. Окончательные результаты

Теорема 5.5.1. Пусть постоянная площадей $g = 0$.

1. Пусть имеется система Лагранжа с параметром β и потенциалом $V(x)$. Пусть $V(x)$ — функция класса C^4 . Тогда при достаточно большом h на уровне $Q^3 = \{H_L = h\}$ она траекторно эквивалентна системе Эйлера с некоторым подходящим параметром $\gamma = \gamma(h)$.
2. Пусть имеется система Эйлера с параметром γ . Тогда для любого $\beta > 0$ и любого достаточно большого h (более конкретные ограничения указаны ниже) существуют такие потенциалы $V(x)$, что система Лагранжа с параметрами $\beta, V(x)$ на изоэнергетическом уровне $Q^3 = \{H_L = h\}$ траекторно эквивалентна системе Эйлера с параметром γ .

Доказательство см. ниже.

Лемма 5.5.2. Пусть потенциал V системы Лагранжа (5.1.3) тождественно равен нулю (в этом случае мы имеем классическую систему Эйлера с двумя совпадающими главными моментами инерции). Тогда функция вращения $\rho_0(t)$ этой системы для любого изоэнергетического уровня строго монотонна, причем при $\beta > 1$ она возрастает, а при $\beta < 1$ — убывает.

Доказательство. Эта лемма доказывается прямым вычислением:

$$\rho(t) \pm 1 = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\beta + \operatorname{tg}^2 x)t}{\sqrt{h - (\beta + \operatorname{tg}^2 x)t^2}} dx,$$

где \pm соответствует знаку t , см. (5.2.2), (5.2.3), стр.105,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta t + (1 - \beta)ty^2}{(1 - y^2)\sqrt{(h - \beta t^2) - (h - \beta t^2 + t^2)y^2}} dy \\
&\text{(замена } \sin(x) = y, a = \beta t, b = (1 - \beta)t, c = h - \beta t^2, d = h - \beta t^2 + t^2) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{a + by^2}{(1 - y^2)\sqrt{c - dy^2}} dy = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\frac{c}{d}}}^{\sqrt{\frac{c}{d}}} \frac{b}{\sqrt{c - dy^2}} dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\frac{c}{d}}}^{\sqrt{\frac{c}{d}}} \frac{a + b}{(1 - y^2)\sqrt{c - dy^2}} dy = \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{d}} \left(-b \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{c}{d}}} \right) + \frac{(a + b) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{c}{d}}{\frac{c}{d} - y^2}} y \right)}{\sqrt{1 - \frac{c}{d}}} \right) \Bigg|_{-\sqrt{\frac{c}{d}}}^{\sqrt{\frac{c}{d}}} = \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{d}} \left(-b\pi + \frac{(a + b)\pi}{\sqrt{1 - \frac{c}{d}}} \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{h - (\beta - 1)t^2}} (1 - \beta)t \pm 1,
\end{aligned}$$

где \pm снова соответствует знаку t .

Отсюда следует

$$\rho(t) = \frac{(\beta - 1)t}{\sqrt{h - (\beta - 1)t^2}}.$$

Теперь можно вычислить производную:

$$\rho'(t) = \frac{h(\beta - 1)}{\sqrt{(h - (\beta - 1)t^2)^3}}.$$

Легко видеть, что она сохраняет знак на всем отрезке изменения t . □

Произведя замены $\frac{du}{dx} = \sqrt{\beta + \operatorname{tg}^2 x}$, $\tau = \frac{t}{\sqrt{h}}$, можно привести функцию вращения системы (5.1.3) к тому общему виду, который рассматривался выше; где

$$f(u) = \frac{1}{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad v(u) = \frac{1}{h} \frac{V(\sin x)}{\beta + \operatorname{tg}^2 x} \quad (5.5.1)$$

Лемма 5.5.3. Пусть потенциал V системы (5.1.3) и изоэнергетический уровень $Q_h^3 = \{(S, R) = h\}$ таковы, что $\|v\|_{C^4} \leq \varepsilon_0$ для достаточно малого ε_0 , где $v(u)$ определяется из (5.5.1). Тогда функция вращения системы $\rho(\tau)$ монотонна при допустимых значениях параметра τ . Другими словами, если функция V ограничена по норме $\|\cdot\|_{C^4}$, то при достаточно больших значениях h функция вращения системы (5.1.3) монотонна.

Доказательство. По лемме 5.5.2 функция вращения $\rho_0(t)$ невозмущенной (с $V \equiv 0$) системы строго монотонна на всем отрезке изменения параметра t .

При этом возмущение функции вращения, соответствующее $v(u)$, удовлетворяет условиям теоремы 5.4.1. Следовательно, если $V \in C^4([-1, 1])$, то воспользовавшись этой теоремой, h можно выбрать так, чтобы функция вращения системы (5.1.3) стала монотонной. \square

Замечание 5.5.4. V — функция на компактном множестве, так что если $V \in C^4([-1, 1])$, то условия леммы 5.5.3 выполнены. Мы можем рассматривать именно такие потенциалы.

Замечание 5.5.5. Если $V \in C^3([-1, 1]) \setminus C^4([-1, 1])$, то утверждение леммы 5.5.3 может не выполняться. Можно рассмотреть равномерно сходящуюся последовательность возмущений $v_n(x)$, $n \rightarrow \infty$, ограниченных по C^3 -норме, так что $v_n(x_0) = v'_n(x_0) = v''_n(x_0) = v'''_n(x_0) = 0$, но $v^{(4)}(x_0) \rightarrow \pm\infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда предельная функция будет иметь бесконечную четвертую производную в x_0 , а из (5.3.8) леммы 5.3.4 будет следовать, что монотонность функции вращения нарушится.

Доказательство теоремы 5.5.1. 1. По лемме 5.5.3 существует h_0 такое, что для любого $h > h_0$ функция вращения системы (5.1.3) для молекулы, соответствующей изоэнергетическому уровню $H_L = h$, строго монотонна. Значение отношения $\frac{f''}{f}$ в точке максимума функции f (после приведения функции вращения к “каноническому” виду) определяет γ .

2. Потенциал V надо выбрать так, чтобы $\frac{V}{h}$ удовлетворяла лемме 5.5.3: т.е. функция вращения для системы Лагранжа с параметрами β , V для молекулы, соответствующей изоэнергетическому уровню $H_L = h$, была монотонной. Нужно удовлетворить еще одному требованию: предел на конце ребра должен совпасть с пределом для задачи Эйлера с параметром γ . Ясно, что всем этим требованиям легко удовлетворить, выбирая V например так, чтобы максимумы f_0 и $f = f_0 + v$ совпадали, было задано значение $\frac{f''}{f}$ в этих точках максимума, а во всех остальных — v произвольно, но таково, чтобы была монотонность функции вращения. \square

Остается добавить, что данные результаты подтверждают сформулированную в [15] гипотезу о том, что системы Лагранжа, соответствующие одинаковым параметрам β , V , но ограниченные на разные изоэнергетические уровни, траекторно не эквивалентны. Мы же доказали, что на каждом изоэнергетическом уровне имеется траекторная

эквивалентность задаче Эйлера, но соответствующая система Эйлера на каждом уровне определяется своим параметром γ , зависящим от h . В работе [15] система Лагранжа для различных потенциалов исследовалась при помощи компьютерного анализа. Было отмечено, однако, что аналитический анализ этого случая затруднен из-за сложности формул.

Список литературы

- [1] Бобенко А.И. Уравнения Эйлера на $so(4)$ и $e(4)$. Изоморфизм интегрируемых случаев. // Функциональный анализ и его приложения, 1986, т.20, вып.1, с.64-66.
- [2] Болсинов А.В., Многомерные случаи Эйлера и Клебша и лиевы пучки. // В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М.: МГУ, 1991, вып.24, с.8-12.
- [3] Болсинов А.В., Дуллин Х. О случае Эйлера в динамике твердого тела и задаче Якоби. // Регулярная и хаотическая динамика. 1997, т.2, No 1, с.13-25.
- [4] Болсинов А.В., Козлов В.В., Фоменко А.Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела. // УМН, 1995, т.50, вып.3, с.3-32.
- [5] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН 1990, т.45, вып.2, с.49-77.
- [6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск, Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.
- [7] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твердого тела. // Известия РАН, сер. матем. 1995, 59, вып.1, 65-102.
- [8] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I. // Матем. сборник, 1994, т.185, вып.4, с. 27-80. II. // Матем. сборник, 1994, т.185, вып.5, с. 27-78.
- [9] Коровина Н.В. Траекторная эквивалентность двух классических задач в динамике твердого тела. // Доклады Академии Наук. 2000, т. 375, No.2, с.163-165.
- [10] Козлов В.В. Две интегрируемые задачи классической динамики. // Вестник МГУ, 1981, No 4, с.80-83.
- [11] Кудрявцева Е.А. Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях. // Топологические методы в теории гамильтоновых систем (сб. статей под ред. А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко, А.И.Шафаревича), 1998, с.147-202.
- [12] Новиков С.П. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II // Функциональный анализ и его приложения, 1981, т.15, No 4, с.37-52.
- [13] Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. // УМН,

1982, т.37, вып.5, с.3-49.

- [14] Орёл О.Е. Критерий траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит. Траекторный инвариант задачи Лагранжа. // Матем. сборник, 1997, т.188, вып.7, с.139-160.
- [15] Орел О.Е., Такахашаи Ш. Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа. // Матем. сборник, 1996, т.187, вып. 1, с. 95-112.
- [16] Ошемков А.А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1993, вып.25, часть 2, М.: МГУ, с.23-109.
- [17] Топалов П. Переменная действия и гамильтониан Пуанкаре в окрестности критической окружности. // УМН, т. 50, вып. 1, 1995, с. 213-214.
- [18] Селиванова Е.Н. Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности. // Матем. сборник, 1992, т. 183, вып.4, с.69-86.
- [19] Селиванова Е.Н. Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе. // Матем. сборник, 1995, вып.10, с.141-160.
- [20] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. // Известия АН СССР, сер. матем., 1986, т.50, No 6, с.1276-1307.
- [21] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР, сер. матем., 1990, т.54, No 3, с.546-575.
- [22] A.V.Bolsinov. A smooth trajectory classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. // Sbornik: Mathematics, **186** (1995), No 1, pp.1-27.
- [23] A.V.Bolsinov. Methods of calculations of the Fomenko-Zieschang invariant. // Adv. Soviet Math., **6** (1991), pp. 147-183.
- [24] Colin de Verdiere Y., Vey J. Le lemme de Morse isochore. // Topology, v.18 (1979), pp. 283-293.
- [25] Dufour J.-P., Molino P., and Toulet A. Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko. // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 318: 942-952, 1994.
- [26] Eliasson L.H. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case. // Comm. Math. Helv., 65 (1990), pp. 4-35.
- [27] Knörer H. Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C.Neumann // J.Reine

Angew.Math. 1982, v.334, pp.69-78.

- [28] McDuff D., Salamon D., Introduction to symplectic topology. // Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [29] Marsden, J.E., Weinstein, A. Reduction of symplectic manifolds with symmetries. // Rep.Math.Phys. 5, 121-130 (1974)
- [30] Miranda E. On symplectic linearization of singular Lagrangian foliation. // PhD thesis, Universitat de Barcelona, 2003.
- [31] Nguen Tien Zung. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities. // Compositio Math., 101: 179-215, 1996.
- [32] Rüssmann H. Über das Verhalten analytischer Hamiltonischer Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslösung. // Math. Ann. 1964, v. 154, pp. 284-300.
- [33] Toulet A. Classification des systèmes intégrables en dimesion 2. // PhD thesis, Université de Montpellier II, 1996.
- [34] Veselov A.P. Two remarks about the connection of Jacobi and Neumann integrable systems. // Math.Zeitschrift, 1994, v.216 pp.337-345.
- [35] Vey J. Sur certaines systèmes dynamiques séparables. // Amer. J. Math., 1978, v.100, pp. 591-614.
- [36] San Vu Ngoc. On semi-global invariants for focus-focus singularities. // Preprint: Institut Fourier, 2001.