МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Коняев Андрей Юрьевич

Геометрия Нийенхейса и её приложения

1.1.3. Геометрия и топология

УДК 517.938.5 + 514.763

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2025

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Общая характеристика работы

1.1.1 Объект и предмет исследования

Диссертационная работа относится к области математики на пересечении дифференциальной геометрии, теории интегрируемых систем и математической физики. Полученные результаты закладывают основы нового направления дифференциальной геометрии — геометрии Нийенхейса и её приложений. В диссертационной работе изучаются многообразия с заданными на них операторными полями с нулевым кручением Нийенхейса, их нормальные формы в регулярных и особых точках, симметрии, законы сохранения, функции от таких операторных полей и пучки нийенхейсовых структур. Изучается связь с естественными комплексными структурами. Приведённые объекты рассматриваются как в гладком, так и в вещественно-аналитическом и комплексно-аналитическом случаях.

Также рассматриваются алгебраические структуры, связанные с операторами Нийенхейса и их приложениями — коммутативные ассоциативные алгебры и пучки таких алгебр, левосимметрические алгебры, бесконечномерные коммутативные подалгебры в алгебре операторных полей и алгебры Ли со специальными базисами. Полученные в диссертации теоретические результаты применяются к задачам о существовании операторов Нийенхейса на компактных многообразиях, задачам о нормальных формах оператора Нийенхейса и задачам классификации пучков гамильтоновых операторов, задачам из теории проективно-эквивалентных метрик и задачам теории разделения переменных. Строятся новые классы конечномерных и бесконечномерных систем, а также бесконечномерных скобок Пуассона. Для конечномерных систем доказывается полнота. Часть упомянутых объектов классифицируется в малых размерностях.

1.1.2 Методы исследования

В работе используются как традиционные методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии, тензорного анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, так и новые (в том числе возникшие в работах автора) методы.

1.1.3 Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в таких теоретических разделах математики, как дифференциальная геометрия, интегрируемые системы и уравнения в частных производных. Также результаты могут найти применение в теоретической физике и математическом моделировании.

1.1.4 Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованными с помощью строгих математических доказательств и опубликованными как в международных, так и в российских рецензируемых журналах.

Результаты диссертации многократно докладывались на семинаре "Современные геометрические методы кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова; на семинарах «Динамические системы» математического факультета Высшей школы экономики, семинаре факультета компьютерных наук Высшей школы экономики, математическом семинаре факультета математического образования Университета Лафборо, семинаре «Интегрируемые системы» Университета Лидса, российско-китайском коллоквиуме в МГУ 24 февраля 2022 года.

Результаты диссертации были доложены на международных и всероссийских научных конференциях, среди которых:

- Конференция Finite-dimensional integrable systems, июль 2017 года, Барселона, Испания;
- Workshop on integrable systems in Observatoire de Paris, июль 2018 года, Париж, Франция;
- Workshop on Nijenhuis Geometry, февраль 2020 года, Лафборо, Великобритания;
- Конференция международных математических центров мирового уровня, 9 -13 августа 2021 года, образовательный центр "Сириус Сочи, Россия;
- MATRIX-SMRI Symposium: Nijenhuis Geometry and Integrable Systems, февраль 2022 года, Австралия, математический центр Matrix;
- Современные геометрические методы и их приложения - 2023, октябрь-ноябрь 2023 года, МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия, миникурс (3 лекции);
- Pre-workshop on Nijenhuis Geometry, февраль 2024 года, Мельбурн, Австралия;
- Nijenhuis Geometry and Integrable Systems II, февраль 2024 года, математический центр Matrix, Австралия;

- Конференция Finite-dimensional integrable systems, август 2025 года, CIMAT, Гуанахуато, Мексика.

Результаты, представленные в диссертации, легли в основу нескольких авторских курсов соискателя:

- "Введение в геометрию Нийенхейса и приложения читается на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова (курс отмечен премией фонда "Базис");
- Nijenhuis Geometry, читался (совместно с А.В.Болсиновым) в 2020 году в математической школе Пекинского университета;
- Nijenhuis Geometry, онлайн-курс (совместно с А.В.Болсиновым) университета Сиднея;
- Geometry and topology of integrable Hamiltonian systems, который читался в 2023 году в математической школе Пекинского университета.

1.1.5 Цели и задачи диссертации

Основными целями диссертации являются создание теории многообразий Нийенхейса и применение этой теории к задачам интегрируемых систем, алгебры и математической физики. В частности, возникают следующие конкретные задачи:

1. Описание нормальных форм оператора Нийенхейса в регулярных точках. Введение классов сингулярных точек, пригодных для изучения. Описание нормальных или полунормальных форм. Описание групп, действующих на полунормальных формах;
2. Описание естественных классов многообразий Нийенхейса. Сюда включаются компактные многообразия, допускающие операторы Нийенхейса. Изучение ограничений, накладываемых топологией многообразия на свойства оператора Нийенхейса;
3. Описание нийенхейсовых пучков, геометрическая (инвариантная) классификация подобных объектов;
4. Построение общей теории симметрий и законов сохранения для определенных операторов Нийенхейса. В частности, речь идет о gl-регулярных операторах и овеществлении комплексных операторов;
5. Приложение геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик, теории пуассоново согласованных метрик (что то же самое, к теории согласованных пучков гидродинамического типа);
6. Приложение геометрии Нийенхейса к теории операторов Дарбу-Гамильтона. Классификация пучков общего положения для таких пучков;
7. Приложение теории алгебраических операторов Нийенхейса к задаче построения полных коммутативных наборов на двойственных пространствах к алгебрам Ли.

1.1.6 Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. В частности, решены следующие задачи:

1. Описаны нормальные формы оператора Нийенхейса в регулярных точках — для жорданова блока и операторов сложной структуры. Введены классы сингулярных точек, пригодных для изучения: скалярные точки и gl-регулярные точки. Описаны нормальные и полунормальные формы: первая и вторая сопровождающие формы, полиномиальные нормальные формы в размерности два, линейные нормальные формы. Описаны группы, действующие на полунормальных формах — они параметризуются n функциями одной переменной;

2. Описаны естественные классы многообразий Нийенхейса — в частности, сферы, левосимметрические алгебры. Показано, что на сфере размерности четыре у оператора Нийенхейса всегда только вещественные собственные значения;

3. Описаны два класса нийенхейсовых пучков, дана их геометрическая (инвариантная) классификация;

4. Построена теория симметрий и законов сохранения для операторов Нийенхейса, явно построены такие законы для жордановых клеток в гладком и произвольных операторов в аналитическом случае. Овеществления симметрий и законов сохранения описаны в терминах комплексных симметрий, законов сохранения и соответствующих объектов комплексной структуры;

5. Получены приложения геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик, теории пуассоново согласованных метрик;

6. Получено приложение геометрии Нийенхейса к теории операторов Дарбу-Гамильтона. Построена классификация пучков общего положения для таких пучков;

7. Получено приложение теории алгебраических операторов Нийенхейса к задаче построения полных коммутативных наборов на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Для конкретных операторов Соколова-Одесского доказана полнота возникающих коммутативных наборов.

1.1.7 Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1. В регулярных точках:

   (a) существует эффективный критерий приведения операторного поля к постоянному виду;

   (b) сопряжённый жордановой клетке максимальной размерности оператор Нийенхейса L с невырожденным дифференциалом приводится к теплицевой форме;

2. На сфере произвольной размерности существует оператор Нийенхейса с вещественными непостоянными собственными значениями;

3. У любого оператора Нийенхейса на 4-мерной сфере собственные значения вещественны;

4. В размерности два существует 12 неизоморфных классов вещественных левосимметрических алгебр;

5. В особых точках скалярного типа:

   (a) на касательном пространстве существует каноническая структура левосимметрической алгебры;

   (b) задача линеаризации полностью разрешима в размерности два в гладком и аналитическом случаях;

   (c) обнуление больших когомологий Нийенхейса дает достаточное условие линеаризации в формальной категории;

6. Для gl-регулярных операторов Нийенхейса:

   (a) оператор приводится к первой сопровождающей форме в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и регулярной точки в гладком случае;

   (b) оператор приводится ко второй сопровождающей форме в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и регулярной точки в гладком случае;

   (c) все симметрии являются сильными симметриями, а законы сохранения — общими законами сохранения для всех симметрий;

   (d) уравнения, задающие симметрии и законы сохранения, решаются явно в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и в регулярной точке в гладком случае;

   (e) недиагональный аналог слабо нелинейных квазилинейных систем, построенных по операторам Нийенхейса, интегрируется в квадратурах;

   (f) в окрестности особых точек жорданова типа существует 2 особые нормальные формы и 8 классов, параметризованных как непрерывными, так и дискретными параметрами;

7. Регулярные законы сохранения для алгебры симметрий $\operatorname{Sym} L$ находятся во взаимно однозначном соответствии с новым классом конечномерных интегрируемых систем;

8. Для метрик, геодезически согласованных с данным gl-регулярным оператором Нийенхейса, существует явная алгебраическая процедура построения;

9. В плоских координатах метрики произвольной сигнатуры геодезически согласованные с ней операторы Нийенхейса задаются явной формулой;

10. Для нийенхейсовых пучков:

   (a) существует единственный максимальный пучок, содержащий данный n^2-мерный плоский пучок.

   (b) существует ровно два максимальных пучка, содержащих в качестве подпучка плоский симметрический пучок;

11. Для невырожденного пуассонова пучка дифференциально невырожденный оператор рекурсии приводится к нормальной форме в окрестности произвольной точки;

12. Для операторов Дарбу-Гамильтона:

    (a) операторы Дарбу-Гамильтона находятся во взаимно однозначном соответствии с фробениусовыми парами;

    (b) для пары операторов Дарбу-Гамильтона в общем положении плоские координаты первых членов их фробениусовых пар совпадают;

    (c) в размерности два существует 11 неизоморфных классов операторов Дарбу-Гамильтона;

    (d) в каждой размерности существует единственный дисперсионный AFF-пучок;

    (e) для пары операторов Дарбу-Гамильтона с фробениусовыми парами общего положения существует вложение такой пары в канонический дисперсионный AFF-пучок;

13. Построенные с помощью операторов Соколова-Одесского коммутативные наборы на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$ являются полными.

1.1.8 Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 20 работах автора: [158], [159], [160], [161], [162], [163], [164], [165], [166], [167], [168], [170], [171], [172], [173], [174], [175], [176], [169], [177].

Все указанные работы были представлены в рецензируемые научные издания, рекомендованные для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. 11 из них опубликованы в журналах Q1, 9 статей - в журналах Q2.

1.1.9 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав, списка литературы и трех приложений. Диссертация изложена на 352 страницах. Список литературы содержит 177 наименований.

1.2 Научные проблемы диссертации и степень их разработанности

В этом разделе мы опишем, как и какие операторы Нийенхейса возникали в дифференциальной геометрии, теории интегрируемых систем, математической физике и алгебре. Начнём с дифференциальной геометрии.

В 1951 году Я. Схоутен опубликовал статью [98], в которой решил следующую задачу: пусть на многообразии задано операторное поле L и его собственные значения вещественны и различны в каждой точке. Когда найдётся система координат, в которой оператор приводится к диагональному виду? Решение Схоутена в значительной мере опиралось на результаты итальянского математика А. Тоноло, который решил аналогичную задачу в размерности три двумя годами ранее (если быть точным, то задачу он решил еще в 1941 году, однако война задержала публикацию результатов почти на 8 лет).

Решение Схоутена выглядело следующим образом: оператору, диагонализуемому в каждой, можно построить метрику g с условием $g(L\xi,\eta) = g(\xi, L\eta) = h(\xi,\eta)$. Обозначим собственные вектора операторного поля как $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда критерий существования системы координат (критерий Схоутена-Тоноло) записывался

$$\nabla_p h_{qs} \xi_i^p \xi_j^q \xi_k^s = 0, \quad i \neq j, j \neq k, i \neq k.$$

Здесь ∇ — связность Леви-Чивиты, соответствующая метрике g. Несмотря на то, что метод в целом сводит задачу к вычислению некоторого тензорного критерия, он требует введения некоторой метрики g в качестве дополнительного объекта.

А. Нийенхейс предложил совершенно иное решение. Он ввёл тензор

$$\mathcal{N}_L(\xi,\eta) = L^2[\xi,\eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi,\eta] - L[\xi, L\eta] \tag{1.1}$$

Здесь ξ, η — произвольные векторные поля, а скобки $[\,,\,]$ обозначают стандартный коммутатор векторных полей. С его помощью он сформулировал условие на L, которое не требовало привлечения дополнительной структуры, то есть метрики [79]. Сам тензор получил название кручения Нийенхейса. Окончательно критерий Схоутена-Тоноло был записан в виде обнуления некоторого тензорного поля Й. Хаантьесом в работе [47]. Ещё раз подчеркнём, что все упомянутые результаты касались полупростых операторов с вещественным спектром.

Тот факт, что правая часть определяет тензор, оказался следствием существования естественной операции на векторозначных дифференциальных формах. Сам Нийенхейс называл ее просто дифференциальным конкомитантом, а позже она получила название скобки Фролихера-Нийенхейса. Теория этой скобки была разработа в серии работ [80, 81, 41, 42] совместно с А.Фролихером. Среди прочего, удалось доказать градуированное тождество Якоби для этой скобки, что дало толчок для развития теории градуированных супералгебр Ли.

Пожалуй, самым известным приложением кручения Нийенхейса является почти комплексная структура. Говорят, что на многообразии M^n задана почти комплексная структура, если на нём задано операторное поле J с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Любое комплексное многообразие, очевидно, является почти комплексным - в качестве оператора J на касательном пространстве к овеществлению достаточно взять оператор умножения на мнимую единицу i. При этом в системе координат, полученной овеществлением комплексной, компоненты оператора постоянны. То есть $\mathcal{N}_L = 0$. Верно и обратное: почти комплексная структура J с условием $\mathcal{N}_L = 0$ задает комплексную структуру. Это теорема Ньюландера-Ниренберга [78].

В 60-х годах операторы Нийенхейса начали активно применяться в изучении G-структур. Как следствие, это привело к пристальному изучению операторов с постоянными собственными значениями и нильпотентных операторов Нийенхейса в частности (см. работу Е. Кобаяши [59]). Вопрос о приведении нильпотентного операторного поля к постоянному виду был решён в аналитическом случае при некоторых дополнительных предположениях Х. Осборна [90], а позже — М. Грифоном и Дж. Мехди [45] для аналитических операторов Нийенхейса в общем случае. Для гладких операторов результат был получен Дж. Томпсоном в [108]. Доказательство Томпсона содержало определенные лакуны.

В конце 60-х - начале 70-х операторы Нийенхейса возникли в бесконечномерных интегрируемых системах в связи с операторами рекурсии. Известно, что уравнение Кортвега-де Фриза $u_t = u_{xxx} + 3uu_x$ может быть записано в виде

$$u_t = D(Ru),$$

где D — дифференцирование по x, а R — интегро-дифференциальный оператор

$$R = D^2 + 2u + 2D^{-1}uD.$$

При этом высшие симметрии уравнения записываются с помощью этого оператора как $u_{t_k} = D(R^k u)$. Впервые этот оператор был предложен Э. Ленардом (см. изложение вопроса у К. Гарднера и В. Е. Захарова [43, 119]). Позже такие же операторы были найдены в других интегрируемых системах, таких как уравнение синуса-Гордона, модифицированное уравнение КдФ, уравнение Бургерса [89]. Ф. Магри в [70] связал наличие оператора рекурсии с существованием пары согласованных скобок Пуассона. В случае КдФ пара скобок Пуассона задается гамильтоновыми операторами $\pi_1 = D$ и $\pi_2 = D^3 + 2uD + u_x$.

Чуть позже в работах И. М. Гельфанда, И. Я. Дорфман и Дж. Олвера [132, 29, 88] было установлено, что оператор рекурсии, связывающий пару гамильтоновых операторов, — оператор Нийенхейса. Для него также определено кручение с той лишь разницей, что коммутаторы в правой части формулы (1.1) — это коммутаторы эволюционных векторных полей на бесконечномерном расслоении джетов $J^\infty \mathrm{M}^n$. Таким образом, возникла бесконечномерная теория операторов Нийенхейса как интегро-дифференциальных операторов. Ключевым элементом многокомпонентного оператора рекурсии в работах М. Антановича и А. Форди [2, 3, 4] является дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса.

В 80-х Б. А. Дубровин и С. П. Новиков предложили гамильтонов формализм для многокомпонентных систем гидродинамического типа [133]. Оказалось, что гамильтонов оператор такой скобки Пуассона записывается в виде

$$\pi^{ij} = g^{ij}D - \Gamma^{ij}_k u^k_x, \tag{1.2}$$

где g — плоская метрика, а Γ^{ij}_s — её контрвариантные символы Кристоффеля. Для гамильтониана вида $h = \int f(u)$, где плотность функционала зависит только от координат (и не зависит от производных координат), гамильтоново векторное поле принимает вид

$$u^i_t = \nabla^i \nabla_j f u^j_x,$$

то есть является квазилинейным уравнением с операторным полем $L^i_j = \nabla^i \nabla_j f$. Скобки такого вида возникают в физике, например, при квантовании движения гелия-2 вблизи абсолютного нуля в работах Л. Д. Ландау [136, 137].

В работах [32, 33] Б. А. Дубровина было предложено рассматривать согласованные скобки типа (1.2). Такие пучки, например, возникали в теории фробениусовых многообразий [31]. В этом случае метрики, задающие такие скобки, образуют естественный объект

— так называемый плоский пучок метрик. Оказывается, что если метрики образуют плоский пучок, то оператор $L = \bar{g}g^{-1}$ — оператор Нийенхейса [37]. Более того, если спектр оператора вещественный и простой, то верно и обратное: плоская метрика g и метрика $\bar{g} = Lg$ образуют плоский пучок. Позже эти результаты были значительно обобщены О. И. Моховым [74, 75, 145], в частности, на метрики постоянной кривизны.

В предыдущем примере оператор L — это не весь оператор рекурсии, а лишь его "часть часто содержащая довольно много информации. Стоит отметить, что теория классификации согласованных пучков гидродинамического типа (она же теория центральных инвариантов) развита, вообще говоря, только для операторов Нийенхейса с простым вещественным спектром (см. [121]). Что происходит в случае жорданова блока — вопрос открытый.

В конечномерном случае оператор рекурсии для системы записывается для пары согласованных скобок π_1, π_2 как $\pi_1\pi_2^{-1}$ (π_2 предполагается невырожденной) [69]. Тут важно сделать вот такое замечание: операторы рекурсии для конечномерных интегрируемых систем в механике и физике, в отличие от бесконечномерного случая, были найдены уже после того, как системы были проинтегрированы.

Отметим, что мы говорим не только о классической механике. Например, в серии работ Мармо, Виласи и других [71, 26, 27, 65] было предложено искать операторы рекурсии для уравнений общей теории относительности. В 2010-х годах эта программа была в значительной мере выполнена — операторы были найдены для черных дыр Керра-Ньюмана (вращающаяся заряженная черная дыра), космологической модели Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера [106] и даже для таких экзотических решений, как двигатель Алькубьерре [53].

Важно упомянуть, что в теории интегрируемых систем операторы Нийенхейса возникают не только как операторы рекурсии. Напомним, что уравнение Гамильтона-Якоби — один из эквивалентных способов формулирования классической механики [56, 48, 49]. За ним стоит длительная и интересная история переписки У. Р. Гамильтона и К.Г. Якоби, которую мы опустим (см. [77, 153]). Решение уравнения Гамильтона-Якоби — это функция $W(u, c)$, называемая иногда полным интегралом, которая зависит от координат u, n параметров и удовлетворяет условию невырожденности.

В своих лекциях по механике К. Г. Якоби [57] проинтегрировал задачу Кеплера, показав, что в подходящей системе координат — эллиптической — полный интеграл имеет вид $W(u, c) = W_1(u^1, c) + \dots + W(u^n, c)$. Полученные системы получили название систем, допускающих разделение переменных, и стали предметом изучения таких математиков, как П. Штекель, Л. П. Эйзенхарт, Е. Калнинс, Дж. Кресс, У. Миллер, С. Бененти [102, 103, 34, 35, 6]. Подробный обзор истории вопроса доступен в книге [58].

Современный подход связывает существование переменных разделения с существованием так называемого конциркулярного конформного тензора Киллинга (см. обзор литературы у М. Крампина [24]). Этот тензор — оператор Нийенхейса. Подробности можно посмотреть, например, в работе К. Раджаратмана, Р. Г. Макленагана и С. Валеро [95], а также в работах М. Блажека и К. Марчинека [8, 9]. Разделяющиеся координаты u в этом случае определяются как $L^* \mathrm{d}u^i = u^i \mathrm{d}u^i$, то есть собственные значения соответствующего оператора. В частности, во всех таких конструкциях оператор является полупростым, а его собственные значения — функционально независимыми.

В работе Б. Л. Рождественского и А. Д. Сидоренко [96] было доказано, что при предположении о слабой нелинейности в квазилинейных системах градиентная катастрофа не возникает. Слабонелинейные интегрируемые системы такого типа в диагональном случае рассматривались Е. В. Ферапонтовым [40]. Эти системы оказались связаны с тензорами Киллинга для метрик, допускающих разделение переменных. Также они возникали при построении решений универсальной солитонной иерархии А. Б. Шабата [157, 100].

С задачей разделения переменных тесно связана задача описания геодезически эквивалентных метрик: метрики g и $\tilde{g}$ называются геодезически эквивалентными, если их геодезические совпадают как непараметризованные кривые. Свое начало изучение этих замечательных объектов берет в работах У. Дини, Э. Бельтрами, Т. Леви-Чивита [28, 7, 66] и других. Серьезные достижения в последние 20 лет в этой науке связаны с использованием операторов Нийенхейса, которые нетривиальным образом сокрыты в формулировке задачи [12, 13, 17, 14, 15, 16]. Примечательно, что здесь возникают операторы самых разных видов, не обязательно полупростые.

И. Косманн-Шварцбах и Ф. Магри в работе [62] предложили общее понятие структуры Пуассона-Нийенхейса на произвольной алгебре Ли. Эта структура связана как с деформацией алгебры в бесконечномерном случае, так и с интегрируемыми системами в конечномерном. Например, система Манакова [140] возникает как частный случай такой структуры. Вопрос существования такой структуры Пуассона-Нийенхейса для конкретных алгебр оказался сложной и интересной задачей. Интересные результаты в этом направлении были получены Е. Жихаревой [122], а также автором [101, 177, 176, 175].

Естественный класс операторов Нийенхейса, который стоит за упомянутыми структурами в конечномерном случае, — это левоинвариантные операторы Нийенхейса на группах. Для таких операторов все точки группы должны быть регулярными, и их собственные значения постоянны.

Левосимметрические алгебры возникли в работах Винберга [111], посвященных однородным конусам. Частный случай таких алгебр — с дополнительным условием, что правое умножение на алгебре коммутативно, — можно найти в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [132]. Этот объект связан с гамильтоновым оператором первого порядка, который линейно зависит от координат. Позже такая же алгебраическая структура возникла в работе С. П. Новикова и А. А. Балинского [126] и с подачи Дж. Осборна [86, 87] получила название алгебры Новикова. Приложения алгебр Новикова и левосимметрических алгебр в математической физике крайне многочисленны; см. обзор Д. Бурде [21].

В неопубликованном препринте А. Винтерхалдер [114] показал, что конечномерные левосимметрические алгебры находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Нийенхейса, которые линейно (в смысле некоторой аффинной структуры) зависят от координат. До работы автора [174] примеров соответствующих операторов почти не было известно.

В целом, алгебраических структур, связанных с операторами Нийенхейса, крайне много. Например, связанных с группоидами и алгеброидами [94]. Мы ограничимся только уже упомянутыми.

1.3 Масштаб и актуальность рассматриваемых проблем

Как мы видим, в середине 2010-х годов накопилось большое количество результатов, связанных с операторами Нийенхейса, а сами операторы прочно заняли свое место в самых разных приложениях.

Несмотря на это, хорошо видно, что общей теории операторов Нийенхейса не существовало. Более того, большинство примеров операторов Нийенхейса были либо диагональными, либо имели постоянные собственные значения (теоремы Томпсона и Ньюландера-Ниренберга). Случай комплексных значений рассматривался лишь спорадически.

Во многом это всё напоминало ситуацию с пуассоновой геометрией. Скобка Пуассона была открыта Гамильтоном в начале XIX века. Скобка на двойственном пространстве к алгебре Ли изучалась ещё Софусом Ли. Квантовые скобки Пуассона возникли в квантовании с самого начала квантовой механики.

При этом полноценная геометрическая теория скобок Пуассона появилась только в работах второй половины XX века. Основные объекты — пуассоново многообразие, симплектическое слоение, функции Казимира — возникли в работах А. Вайнштейна (см. обзор литературы в книге А. Вайнштейна, А. Де Сильвы [97]). Ключевым объектом теории стала теорема о расщеплении [113], которая описывала структуру пуассонова многообразия в окрестности произвольной точки. Важную роль в развитии теории также сыграла идея уравнений Эйлера на двойственном пространстве к алгебре Ли [124] — именно слоение на орбиты коприсоединенного представления группы Ли является в некотором смысле простейшим нетривиальным слоением на симплектические листы аффинного пространства.

С целью создания последовательной теории операторов Нийенхейса в 2017 году возник проект «геометрия Нийенхейса», основные идеи которого были заложены в статье А. В. Болсинова, А. Ю. Коняева, В. С. Матвеева [166]. Основная идея имеет не совсем формальный и, скорее, философский характер. Геометрией в современном понимании принято называть многообразие, снабженное тензорным полем. Обычно к полю прилагается некоторое «условие интегрируемости» тензорной природы. Приведем несколько примеров.

1. Риманова геометрия. Здесь многообразие снабжено невырожденным симметричным тензором с нижними индексами g_{ij}. Условия интегрируемости, возникающие в этом случае, носят характер условий на тензор кривизны. Например,

$$R^{ij}_{kl} = K(\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k),$$

   где K — некоторая константа (метрика постоянной секционной кривизны). В общей теории относительности метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij},$$

   где R_{ij} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна, Λ — космологический член, c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная Ньютона, а T_{ij} — тензор энергии-импульса материи

2. Пуассонова геометрия. Скобка Пуассона на многообразии задается бивектором Пуассона π^{ij}, то есть кососимметрическим тензором с двумя верхними индексами. Условие интегрируемости в этом случае имеет вид

$$\pi^{is}\frac{\partial\pi^{jk}}{\partial u^s}+\pi^{js}\frac{\partial\pi^{ki}}{\partial u^s}+\pi^{ks}\frac{\partial\pi^{ij}}{\partial u^s}=0,\quad 1\leq i,j,k\leq n.$$

Это условие — это тождество Якоби для скобки Пуассона, и оно же — обращение в ноль скобки Схоутена π с собой.

3. Симплектическая геометрия. В этом случае на многообразии задан невырожденный кососимметрический тензор с двумя нижними индексами ω_{ij}. Условие интегрируемости в данном случае $\mathrm{d}\omega=0$.

Аналогично определяется субриманова геометрия, b-симплектическая геометрия и многие другие.

Будем называть многообразием Нийенхейса многообразие M^n, снабженное операторным полем L с нулевым кручением Нийенхейса. Отметим, что все примеры выше касаются тензорных полей ранга два. То есть геометрия Нийенхейса закрывает естественный пробел.

Здесь, впрочем, необходимо прокомментировать естественность условия $\mathcal{N}_L=0$. В книге И. Колара, Я. Словака и П. Микора [60] (см. также работу Е. Пунинского [149]) вводится понятие естественной тензорной операции. Коротко изложим идею. Рассмотрим многообразие M^n и тензорное расслоение на многообразии. Например, в случае операторов речь идет о расслоении $T\mathrm{M}^n\otimes T^*\mathrm{M}^n$. Дальше рассмотрим расслоение джетов на этом многообразии и будем искать отображения в само тензорное расслоение.

Оказывается, что любое естественное отображение из тензорных полей $\Psi^1(\mathrm{M}^n)$ типа $(1,1)$ в тензорные поля типа $(1,2)$, которое линейно по компонентам L^i_j и производным $\frac{\partial L^i_j}{\partial u^k}$, представляется как линейная комбинация выражений вида

$$\begin{gathered}\mathcal{N}_L,\quad L\otimes\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L,\quad \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes L,\quad \mathrm{Id}\otimes L^*\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L,\quad L^*\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes\mathrm{Id},\\ \mathrm{Id}\otimes\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L^2,\quad \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L^2\otimes\mathrm{Id},\quad \mathrm{tr}\,L\cdot\mathrm{Id}\otimes\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\quad \mathrm{tr}\,L\cdot\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes\mathrm{Id}\end{gathered}$$

с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что кручение Нийенхейса — единственное из представленных нетривиальное тензорное соотношение. В этом смысле условие $\mathcal{N}_L=0$ является простейшим естественным условием.

Соответственно, геометрией Нийенхейса называется раздел математики, занимающийся изучением многообразий Нийенхейса. Круг возникающих в первом приближении вопросов выглядит следующим образом:

1. Локальные вопросы. Описание нормальных или полунормальных форм операторов Нийенхейса в окрестности точки общего положения. При этом, вообще говоря, требуется определить, что означает понятие точки общего положения. Учитывая, что уже на линейном уровне задача классификации операторов значительно сложнее, чем, скажем, задача классификации билинейных форм (множество орбит $GL(n)$ против конечного набора для данного n в теореме об индексе билинейной формы), естественно ожидать, что некоторые регулярные точки окажутся сложнее сингулярных;

2. Полулокальные вопросы или особые точки. Теорема о расщеплении в [166] сводит эту задачу описания нормальной формы оператора Нийенхейса к описанию нормальных форм в окрестностях точек, где все собственные значения оператора совпадают. Среди прочего здесь подразумевается выделение классов особых точек для изучения. В частности, определение таких особых точек, в окрестностях которых можно найти подходящие нормальные формы. Отметим, что особые точки операторов Нийенхейса в классических работах не рассматривались вовсе;

3. Глобальные вопросы. Здесь речь идет о результатах, связывающих топологические свойства многообразий с наличием на них операторов с определенными характеристиками. Скажем, об утверждениях в духе теоремы Стинрода, запрещающей почти-комплексные структуры на сферах всех размерностей, кроме двух и шести. Либо теория когомологий, связанная с операторами Нийенхейса. Кроме того, поиск естественных классов многообразий Нийенхейса (желательно, топологически нетривиальных), которые интересны в приложениях к смежным областям — интегрируемым системам и математической физике, в частности;

4. Алгебраические вопросы. Как мы видим, операторы Нийенхейса связаны с различными (вообще говоря) бесконечномерными алгебрами, возникающими в интегрируемых системах.

Помимо внутренних вопросов, теория должна быть полезна для приложений.

Эмпирически было установлено [168, 167, 165, 164, 162, 159], что приложения чаще всего связаны с наличием у оператора Нийенхейса некоторого родственного объекта-компаньона, который выражается через него определенным образом. Чаще всего это дополнительное тензорное поле — форма, векторное поле, метрика и так далее — которое задается либо явной формулой, либо алгебраическими уравнениями, либо уравнениями, интегрируемыми в квадратурах.

Соответственно, польза от новой теории ожидается тогда, когда партнерский объект в задаче идентифицирован, и к нему можно применить эту самую теорию. В свою очередь возникает целый класс новых — в некотором смысле внешних в контексте теории — задач, которые автор настоящей диссертационной работы решает:

1. Идентифицировать в приложениях, где возникает оператор Нийенхейса, партнерский объект. Решение возникающих уравнений — например, когда они интегрируются в квадратурах — само по себе может представлять значительный интерес;

2. Локальная, полулокальная и глобальная теория. Все те же вопросы, что возникали в случае одного оператора L, уместно задать в случае наличия партнерских объектов. Скажем, если партнерский объект — векторное поле, то возникает вопрос, к какому виду приводится пара оператор-векторное поле, какие возникают особенности и так далее;

3. Специфические вопросы, связанные с конкретными приложениями. Здесь все зависит от конкретных примеров, и вопросы могут быть самыми разнообразными.

Таким образом, круг задач геометрии Нийенхейса достаточно объемен и разнообразен.

1.4 Краткое введение в тематику диссертации

Векторозначной дифференциальной $k-$формой мы называем тензор типа $(1, k)$, кососимметрический по нижним индексам. Все формы одного типа образуют модуль над $C^\infty(\mathrm{M}^n)$, который мы будем обозначать $\Psi^k(\mathrm{M}^n)$ или просто Ψ^k. Заметим, что Ψ^0 — это в точности модуль векторных полей на многообразии. Модуль дифференциальных $k-$форм на многообразии мы обозначаем как $\Omega^k(\mathrm{M}^n)$ или просто Ω^k.

Основным объектом изучения диссертации является тензорное поле L типа $(1,1)$ на многообразии M^n. То есть, в частности, $L \in \Psi^1(\mathrm{M}^n)$. Речь будет идти о гладких, вещественно-аналитических и комплексно-аналитических многообразиях. В локальных координатах операторное поле L задается своими компонентами L^i_j.

Для кручения Нийенхейса существует несколько эквивалентных определений. *Кручением Нийенхейса* этого операторного поля называется тензорное поле $\mathcal{N}_L$ типа $(1,2)$, определяемое на произвольной паре векторных полей ξ, η формулой

$$\mathcal{N}_L(\xi,\eta) = L^2[\xi,\eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi,\eta] - L[\xi, L\eta]. \tag{1.3}$$

Приведем несколько эквивалентных переформулировок кручения Нийенхейса.

Во-первых, его — то есть кручение — можно рассматривать как отображение $\mathcal{N}_L : \Psi^0 \to \Psi^1$, заданное по формуле

$$\mathcal{N}_L : \ \xi \mapsto \mathcal{L}_{L\xi} L - L\mathcal{L}_\xi L. \tag{1.4}$$

$\mathcal{L}_\xi$ означает производную Ли вдоль векторного поля. Как и в предыдущем определении, здесь априори не очевидно, что заданное отображение является отображением модулей. Другими словами, не видно, что отображение переводит $f\xi$ в $f\mathcal{N}_L(\xi)$ (здесь f — произвольная функция).

Также кручение Нийенхейса можно рассматривать как отображение $\mathcal{N}_L : \Omega^1 \to \Omega^2$, заданное по формуле: пусть $\alpha \in \Omega^1, \beta \in \Omega^2$, тогда

$$\beta(\cdot\,,\cdot) = \mathrm{d}(L^*\alpha)(L\cdot\,,\cdot) + \mathrm{d}(L^*\alpha)(\cdot\,, L\cdot) - \mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\cdot\,,\cdot) - \mathrm{d}\alpha(L\cdot\,, L\cdot). \tag{1.5}$$

Здесь d обозначает внешнее дифференцирование дифференциальных форм.

В-третьих, кручение Нийенхейса можно определить в локальных координатах. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ на многообразии M^n. Пусть в этих координатах операторное поле L задается матрицей с компонентами L^i_j. Тогда компоненты тензорного поля $\mathcal{N}_L$ задаются формулой

$$(\mathcal{N}_L)^i_{jk} = L^s_j \frac{\partial L^i_k}{\partial u^s} - L^s_k \frac{\partial L^i_j}{\partial u^s} - L^i_s \frac{\partial L^s_k}{\partial u^j} + L^i_s \frac{\partial L^s_j}{\partial u^k}. \tag{1.6}$$

Мы говорим, что L — это оператор Нийенхейса, если его кручение тождественно обращается в ноль. Многообразие, снабжённое оператором Нийенхейса, называется многообразием Нийенхейса.

Простейшим многообразием, разумеется, является аффинное пространство. Соответственно, простейшим оператором Нийенхейса является оператор, который в плоских координатах аффинной структуры задается постоянной матрицей. Разумеется, любой такой оператор — оператор Нийенхейса.

Следующий по сложности оператор — это оператор, у которого компоненты в той же системе координат зависят от координат линейно, то есть $L^i_j = a^i_{jk} u^k$ для некоторого набора констант a^i_{jk}. Условие нийенхейсовости в локальных координатах может быть записано как

$$a^s_{jr} a^i_{ks} - a^s_{kr} a^i_{js} - a^i_{sr} a^s_{kj} + a^i_{sr} a^s_{jk} = 0.$$

Оказывается, это условие имеет инвариантный смысл. Определим на векторных полях операцию по формуле

$$\partial_j \star \partial_k = a^i_{jk} \partial_i.$$

Для этой алгебры определён ассоциатор: для произвольной тройки векторных полей ξ, η, ζ обозначим

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \xi \star (\eta \star \zeta) - (\xi \star \eta) \star \zeta.$$

Условие нийенхейсовости оказывается эквивалентным тождеству $\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{A}(\eta, \xi, \zeta)$. То есть ассоциатор является симметричным по первым двум компонентам. Такие алгебры называются *левосимметрическими*. Верно и обратное: если есть конечномерная левосимметрическая алгебра над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то на ней можно определить структуру аффинного пространства, и соответствующий оператор $L^i_j = a^i_{jk} u^k$ будет оператором Нийенхейса. Легко видеть, что левосимметрические алгебры играют для геометрии Нийенхейса ту же роль, что и алгебры Ли для геометрии Пуассона.

Далее нам потребуется немного линейной алгебры. Линейный оператор L над алгебраически замкнутым полем (в нашем случае над $\mathbb{C}$) приводится к нормальной жордановой форме. Будем считать, что собственные значения оператора упорядочены, и упорядочим соответствующие жордановы блоки. Блоки, соответствующие одному и тому же собственному значению, считаем упорядоченными по размеру.

Размерности жордановых блоков запишем в виде строки чисел. Блоки, соответствующие одному и тому же собственному значению, возьмем в скобки. Полученная строка называется *характеристикой Сегре* оператора L. Например, характеристика Сегре

$$(22)32$$

означает, что мы имеем дело с линейным оператором в размерности

$$2 + 2 + 3 + 2 = 9.$$

При этом у него три собственных значения: первому соответствует два жордановых блока размерности два, второму — один блок размерности три и третьему — блок размерности два. Если ввести другой порядок на собственных значениях, то новая строка получится из первоначальной перестановкой элементов при условии, что числа в скобках переставляются целиком как подстрока.

Будем говорить, что точка p на многообразии Нийенхейса — *точка общего положения в алгебраическом смысле* (точка общего положения или регулярная точка, если ясен контекст), если характеристика Сегре в этой точке и её окрестности совпадает. Если, дополнительно, коэффициенты характеристического многочлена функционально независимы, то полученная точка будет называться *дифференциально невырожденной*.

Если точка не регулярная, то она *особая*. В случае с левосимметрическими алгебрами начало координат — вообще говоря, особая точка.

Теорема о расщеплении сводит описание особых точек к описанию точек, в которых все собственные значения оператора Нийенхейса совпадают. Если характеристика Сегре в этой точке $11\dots1$ (то есть L пропорционален скалярному оператору), то будем называть такую точку *точкой скалярного типа*. Касательное пространство к точке скалярного типа оказывается наделено естественной структурой левосимметрической алгебры. При этом алгебра является характеристикой оператора.

В окрестности точки скалярного типа естественной нормальной формой является $L^i_j = \lambda_0 \mathrm{Id} + a^i_{jk}u^k$. Мы называем алгебру *невырожденной*, если оператор Нийенхейса всегда линеаризуется в окрестности точки, на касательном пространстве к которой эта алгебра возникает. В противном случае мы говорим, что алгебра *вырождена*. Это определение полностью аналогично определению вырожденной/невырожденной алгебры Ли в случае пуассоновой геометрии, которое было дано Вайнштейном.

Напомним, что элемент ξ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется регулярным, если его централизатор $\mathfrak{z}_\xi$ имеет минимальную возможную размерность. В нашем случае L является элементом алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Мы будем называть оператор L *gl-регулярным*, если он является регулярным элементом алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Ниже мы приводим список эквивалентных определений gl-регулярного оператора:

1. Централизатор L имеет размерность n;
2. Централизатор L порождается $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$. То есть всякий M такой, что $ML - LM = 0$ записывается в виде $M = c_1 L^{n-1} + \dots + c_n \,\mathrm{Id}$ для некоторого набора констант $c_i, i = 1, \dots, n$;
3. $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$ линейно независимы как элементы векторного пространства операторов;
4. Найдется вектор ξ такой, что вектора $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ линейно независимы. Такой вектор называется циклическим вектором оператора L;
5. Найдется такой ковектор a, что ковектора $a, L^*a, \dots, (L^*)^{n-1}a$ линейно независимы. Такой ковектор называется циклическим ковектором оператора L;
6. В нормальной жордановой форме оператора L каждому вещественному собственному значению соответствует ровно один жорданов блок, а каждой паре комплексно-сопряжённых собственных значений — комплексная версия жорданова блока.

Мы будем говорить, что оператор Нийенхейса L — gl-регулярный, если он gl-регулярный в каждой точке.

Соответственно, нас интересуют регулярные точки и особые точки, в которых оператор является gl-регулярным.

Оператор Нийенхейса L называется *дифференциально-невырожденным*, если коэффициенты характеристического многочлена такого оператора функционально независимы. То есть их можно взять в виде координат. Полученная система координат называется *канонической*. В канонической системе координат $u^1, \dots, u^n$ оператор Нийенхейса L имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ u^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ u^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, легко видеть, что дифференциально-невырожденный оператор автоматически gl-регулярный.

Для произвольной пары операторных полей L, M и пары векторных полей ξ, η определим

$$\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = LM[\xi, \eta] + [L\xi, M\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi, \eta]. \tag{1.7}$$

Эта операция была введена Нийенхейсом в [79] (формула 3.9). В терминах векторных полей это выражение приобретает вид

$$\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = \Big(\mathcal{L}_{L\xi} M - L\mathcal{L}_{\xi} M\Big)\eta = -\Big(\mathcal{L}_{M\eta} L - M\mathcal{L}_{\eta} L\Big)\xi \tag{1.8}$$

В локальных координатах это выражение имеет вид:

$$\langle L, M\rangle^i_{jk} = \frac{\partial M^i_k}{\partial u^q} L^q_j - \frac{\partial L^i_j}{\partial u^q} M^q_k + M^i_q \frac{\partial L^q_j}{\partial u^k} - L^i_q \frac{\partial M^q_k}{\partial u^j}. \tag{1.9}$$

Мы говорим, что L, M — *симметрии* друг друга, если симметрическая по нижним индексам часть тензора $\langle L, M\rangle$ обращается в ноль. Это эквивалентно условию

$$[L\xi, M\xi] - L[\xi, M\xi] - M[L\xi, \xi] = 0$$

для всех векторных полей ξ.

Если в ноль обращается весь тензор, то мы говорим, что речь L, M — *сильные симметрии* друг друга.

Сильные симметрии обладают важным свойством: если M, R — сильные симметрии L, то MR и RM являются сильными симметриями L. В частности, сильные симметрии оператора образуют ассоциативную алгебру, которую мы обозначаем $\mathrm{Sym}\, L$. Для gl-регулярных операторов L эта алгебра еще и коммутативна.

Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{M}^n)$ называется *законом сохранения* для оператора L, если

$$\mathrm{d}\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{d}(L^*\alpha) = 0$$

В случае, когда форма точна, то есть $\alpha = \mathrm{d}f$ функция f называется плотностью закона сохранения.

Отметим, что определение, данное выше, восходит к Э. Нетер. Вместе с тем в уравнениях в частных производных законом сохранения называют так же функционал, который остается постоянным на решениях системы. В нашем случае он имеет вид $\int f \mathrm{d}x$, то есть f — плотность функционала. Плотность, однако, в нашем определении существует не всегда.

Закон сохранения для оператора Нийенхейса называется *регулярным*, если формы

$$\alpha, L^*\alpha, \dots, (L^*)^{n-1}\alpha$$

линейно независимы. По определению, регулярным законом сохранения может обладать только gl-регулярный оператор Нийенхейса. Симметрия M называется для gl-регулярного оператора *регулярной симметрией*, если в разложении

$$M = g_1 L^{n-1} + \cdots + g_n \mathrm{Id}$$

коэффициенты g_i функционально независимы, то есть их можно взять за координаты.

Пусть на многообразии задана пара операторов Нийенхейса L и M. Говорят, что они образуют *пучок нийенхейсовых структур* или нийенхейсов пучок, если $L + M$ — оператор Нийенхейса. Это эквивалентно тому, что $[[L, M]]_{FN} = 0$, то есть скобка Фролихера-Нийенхейса этих двух операторных полей обращается в ноль.

1.5 Содержание работы

Далее представим краткий обзор структуры и основных результатов диссертации. Введение в диссертацию изложено в главе 1 является вводной.

Глава 2 содержит базовые результаты по геометрии Нийенхейса. В разделе 2.1 даны необходимые определения. Там же собраны базовые факты об операторах Нийенхейса и приведены ключевые примеры. В разделе 2.2 приводятся классические результаты Хаантьеса и Нийенхейса. Все утверждения в этих разделах снабжены доказательствами, так как не являются общеизвестными.

Раздел 2.3 носит преимущественно технический характер и посвящён элементам теории матричнозначных функций от операторов Нийенхейса.

В разделе 2.4 доказывается, что по оператору Нийенхейса с комплексным спектром строится естественная комплексная структура. Относительно этой структуры оператор Нийенхейса голоморфен и является оператором Нийенхейса уже в смысле комплексного кручения Нийенхейса. Наконец, в разделе 2.5 приводится теорема о расщеплении для операторов Нийенхейса с доказательством.

В главе 3 рассматривается вопрос нормальных форм оператора Нийенхейса в окрестности регулярной точки, а так же приводятся примеры компактных многообразий Нийенхейса. В разделе 3.1 решается вопрос о нормальной форме оператора Нийенхейса с интегрируемыми распределениями ядер в вещественном и комплексном случаях. Эта теорема обобщает теорему Томпсона и, как следствие, закрывает пробелы оригинальной работы.

В разделе 3.2 разбирается безнадежная задача классификации оператора Нийенхейса с условием $L^2 = 0$. В разделе 3.3 описаны нормальные формы операторов Нийенхейса, сопряжённых с жордановой клеткой, имеющей непостоянное собственное значение. Наконец, в разделе 3.4 получены результаты по глобальной геометрии Нийенхейса: показано, что сферы — нийенхейсовы многообразия, и любой оператор Нийенхейса на сфере S^4 обязан иметь только вещественный спектр.

В главе 4 устанавливается связь геометрии Нийенхейса и левосимметрических алгебр. В разделе 4.1 доказано, что любая конечномерная левосимметрическая алгебра — естественное многообразие Нийенхейса.

В разделе 4.2 все такие многообразия (или, что то же самое, вещественные левосимметрические алгебры) классифицированы в размерности два. Их оказывается десять классов, два из которых содержат непрерывный вещественный параметр. Левосимметрические алгебры из разных классов и из одного класса с различными значениями параметров попарно не изоморфны.

В разделе 4.3 доказано, что касательное пространство к точке скалярного типа имеет естественную структуру левосимметрической алгебры. Там же формулируется задача линеаризации для оператора Нийенхейса в окрестности точки скалярного типа.

Разделы 4.4 и 4.5 носят вспомогательный характер: в одном решается задача линеаризации треугольного векторного поля на плоскости, а в другом — вопрос существования первого интеграла в окрестности особой точки на плоскости в гладком и аналитическом случаях. Используя результаты этих двух разделов в 4.6, полностью решена задача линеаризации в размерности два как в гладком, так и в аналитическом случаях.

В главе 5 рассматриваются нормальные формы gl-регулярного оператора Нийенхейса в вещественно-аналитическом случае. В разделах 5.1 и 5.2 доказаны теоремы о приведении к первой и второй сопровождающим формам. Раздел 5.3 посвящен интегрированию спаренного уравнения Хопфа и применению этого уравнения к геометрии Нийенхейса. В разделе 5.4 построены полиномиальные нормальные формы gl-регулярных операторов Нийенхейса в размерности два как в точках общего положения, так и в особых точках. В особых точках таких форм оказывается 8 бесконечных серий, параметризованных как дискретными, так и непрерывными параметрами, и два специальных класса.

Глава 6 посвящена симметриям и законам сохранения оператора Нийенхейса. В разделе 6.1 доказывается теорема о расщеплении для симметрий и законов сохранения. В разделе 6.2 приведены базовые свойства симметрий и законов сохранения для gl-регулярных операторов Нийенхейса. Там же устанавливается связь между регулярными симметриями и законами сохранения, а также координатами, в которых оператор L принимает первую или вторую сопровождающую форму.

Раздел 6.3 посвящен связи симметрий и законов сохранения голоморфного оператора Нийенхейса и его овеществления. В разделе 6.4 описаны симметрии для операторов Нийенхейса, сопряженных с вещественными и комплексными жордановыми блоками. В разделе 6.5 решается вопрос о существовании регулярных симметрий и законов сохранения в аналитической категории в окрестности произвольной точки и в гладкой в окрестности точки общего положения.

В разделе 6.6 обобщаются слабонелинейные квазилинейные системы на случай нетривиальной жордановой структуры. В качестве приложения геометрии Нийенхейса для таких систем описаны симметрии и законы сохранения, а также представлена процедура интегрирования такой системы в квадратурах.

Глава 7 посвящена приложениям разработанных инструментов геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных и геодезически эквивалентным метрикам.

Раздел 7.1 технический, в нем доказывается фундаментальная теорема о свойствах поднятия операторных полей на кокасательное расслоение. В разделе 7.2 описан алгоритм построения вполне интегрируемых систем на кокасательном расслоении по базису в $\operatorname{Sym} L$, регулярному закону сохранения и n функциям двух переменных. Там же приведен конкретный пример новой интегрируемой системы в размерности четыре, который описывается в конце раздела.

В разделе 7.3 рассматривается случай геодезических потоков с потенциалами. Показано, что в размерности два алгоритм из раздела 7.2 даёт все потоки с квадратичными интегралами. В разделе 7.5 доказывается, что тензор Киллинга такой системы задает интегрируемую квазилинейную систему.

В разделе 7.4 показано, что выбор стандартного базиса в $\operatorname{Sym} L$ позволяет получать метрики, геодезически согласованные с L. Более того, для данного gl-регулярного оператора все геодезически согласованные с ним метрики получаются таким образом. Тем самым, результаты этого раздела дают решение важной проблемы в теории геодезически эквивалентных метрик.

Глава 8 посвящена применению геометрии Нийенхейса к теории пуассоново согласованных метрик и пучкам Нийенхейса. В разделе 8.1 классифицируются все операторы Нийенхейса, геодезически согласованные с данной плоской метрикой. Они образуют нийенхейсов пучок.

Разделы 8.2 и 8.3 носят технический характер и посвящены теории пуассоново согласованных метрик и теории пучков Нийенхейса соответственно. В разделе 8.4 дана геометрическая характеристика двух специальных нийенхейсовых пучков, один из которых — пучок из раздела 8.1. В разделе 8.5 дана геометрическая характеристика AFF-пучка метрик.

В главе 9 рассматриваются приложения геометрии Нийенхейса к бигамильтоновым структурам как в конечномерном, так и в бесконечномерном случаях.

В разделе 9.1 показано, что кокасательное расслоение к многообразию Нийенхейса — всегда многообразие Пуассона-Нийенхейса, а также доказана теорема о нормальной форме структуры Пуассона-Нийенхейса для дифференциально-невырожденного случая.

В разделе 9.2 устанавливается связь между фробениусовыми парами и алгебрами Фробениуса и доказывается, что между фробениусовыми парами и операторами Дарбу-Гамильтона типа $1+3$ существует взаимно однозначное соответствие. В разделе 9.3 классифицируются скобки Дарбу-Гамильтона в размерности два. В разделе 9.4 доказана теорема о нормальной форме пучков гамильтоновых операторов общего положения, состоящих исключительно из операторов Дарбу-Гамильтона.

В разделе 9.5 рассматривается специальный случай многомерного пучка операторов Дарбу-Гамильтона. Он представляет собой "дисперсионное возмущение"AFF-пучка. Основным результатом раздела является следующий факт: в некоторых естественных предположениях двумерный пучок, им удовлетворяющий, может быть реализован как подпучок в дисперсионном AFF-пучке. Этот результат является решением гипотезы Ферапонтова-Павлова из работы [38] в классе операторов Дарбу-Гамильтона.

Глава 10 посвящена изучению алгебраических операторов Нийенхейса. В разделе 10.1 доказываются основные свойства алгебраических операторов. Раздел 10.2 посвящен вопросу существования алгебраических операторов Нийенхейса с простым спектром на конечномерных алгебрах Ли. В разделе 10.3 устанавливается связь алгебраических операторов Нийенхейса с лиевыми пучками.

Раздел 10.4 посвящен операторам Соколова-Одесского на алгебре $\mathfrak{gl}(n)$ и возникающим бигамильтоновым цепочкам. Описаны регулярные в смысле множества параметров операторы и их структуры. Доказано, что для операторов общего положения возникающие коммутативные наборы действительно полны. В разделе 10.5 установлена связь между алгебраическими операторами Нийенхейса и методом сдвига аргумента.

Глава 11 посвящена теории когомологий Нийенхейса: с оператором Нийенхейса связано сразу две когомологические теории — большая и малая. Разделы 11.1 и 11.2 носят технический характер: в них излагаются теория градуированных дифференцирований и теория векторозначных дифференциальных форм соответственно.

В разделе 11.3 большие когомологии связываются с задачей линеаризации. В 11.4 доказывается теорема об изоморфизме для малых когомологий, которая связывает малые когомологии Нийенхейса и когомологии де Рама. Там же доказана лемма Пуанкаре для малых когомологий.

Раздел 11.5 посвящён теореме о расщеплении когомологий и её приложениям. В разделе 11.6 речь идет об операторе Нийенхейса L, определенном в окрестности точки вырождения, то есть такой точки p, что $\det L = 0$. Среди прочего там вычисляются когомологии для примера Кобаяши (они оказываются крайне нетривиальными).

В приложении 12 излагаются элементы теории квазилинейных интегрируемых систем, вводятся понятия симметрий и законов сохранения. Кроме этого, рассматриваются несколько важных примеров таких систем. В приложении 12 изложены основные результаты, связанные с гамильтоновым формализмом как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае. В приложении 12 приводятся три варианта теоремы Фробениуса в гладком и комплексно-аналитическом случаях.

Благодарности

Автор благодарит академика А. Т. Фоменко, профессора А. В. Болсинова и профессора В. С. Матвеева за помощь, веру и плодотворное сотрудничество. Он так же благодарен родителям, супруге и детям. Без их поддержки эта работа была бы невозможна.

Глава 2

Основы геометрии Нийенхейса

2.1 Основные определения и свойства

Пусть L — произвольное операторное поле на гладком, формальном или аналитическом многообразии M^n. Кручением Нийенхейса этого операторного поля называется тензорное поле $\mathcal{N}_L$ типа $(1,2)$, определяемое на произвольной паре векторных полей ξ, η формулой

$$\mathcal{N}_L(\xi,\eta) = L^2[\xi,\eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi,\eta] - L[\xi, L\eta]. \tag{2.1}$$

Кручение Нийенхейса можно рассматривать как отображение $\mathcal{N}_L : \Psi^0 \to \Psi^1$, заданное по формуле

$$\mathcal{N}_L :\ \xi \mapsto \mathcal{L}_{L\xi} L - L\mathcal{L}_\xi L. \tag{2.2}$$

Его также можно рассматривать как отображение $\mathcal{N}_L : \Omega^1 \to \Omega^2$, заданное по формуле: пусть $\alpha \in \Omega^1, \beta \in \Omega^2$, тогда

$$\beta(\cdot\,,\cdot) = \mathrm{d}(L^*\alpha)(L\cdot\,,\cdot) + \mathrm{d}(L^*\alpha)(\cdot\,, L\cdot) - \mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\cdot\,,\cdot) - \mathrm{d}\alpha(L\cdot\,, L\cdot). \tag{2.3}$$

Наконец, кручение Нийенхейса можно определить в локальных координатах $u^1,\dots,u^n$:

$$(\mathcal{N}_L)^i_{jk} = L^s_j \frac{\partial L^i_k}{\partial u^s} - L^s_k \frac{\partial L^i_j}{\partial u^s} - L^i_s \frac{\partial L^s_k}{\partial u^j} + L^i_s \frac{\partial L^s_j}{\partial u^k}. \tag{2.4}$$

Следующая теорема устанавливает эквивалентность всех этих определений.

Теорема 2.1.1. *Каждое из определений* (2.1) - (2.4) *действительно задает тензор типа* $(1,2)$*, кососимметрический по нижним индексам, и все определения эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Мы возьмем первое определение за базовое. Сначала убедимся, что правая часть (2.1) действительно определяет тензорное поле. Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(f\xi,\eta) = L^2[f\xi,\eta] + [fL\xi, L\eta] - L[fL\xi,\eta] - L[f\xi, L\eta] = fL^2[\xi,\eta] - \mathcal{L}_\eta f L^2\xi + f[L\xi, L\eta] - \\ - \mathcal{L}_{L\eta} f L\xi - fL[fL\xi,\eta] + \mathcal{L}_\eta f L^2\xi - fL[\xi, L\eta] + \mathcal{L}_{L\eta} f L\xi = f\mathcal{N}_L(\xi,\eta).\end{aligned}$$

В силу косой симметрии это же условие верно и для второго аргумента. Таким образом, отображение, задаваемое формулой в правой части, линейно при умножении аргумента на функцию. Значит, оно задает тензор.

Теперь перейдем к определению (2.2). Напомним, что

$$[\xi, \eta] = \mathcal{L}_\xi \eta.$$

Значит, первое определение можно переписать так:

$$L^2[\xi, \eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta] = L^2\mathcal{L}_\xi \eta + \mathcal{L}_{L\xi}(L\eta) - L\mathcal{L}_{L\xi}\eta - L\mathcal{L}_\xi(L\eta) =$$
$$= L^2\mathcal{L}_\xi\eta + \mathcal{L}_{L\xi}L\eta + L\mathcal{L}_{L\xi}\eta - L\mathcal{L}_{L\xi}\eta - L\mathcal{L}_\xi L\eta - L^2\mathcal{L}_\xi\eta = \Big(\mathcal{L}_{L\xi}L - L\mathcal{L}_\xi L\Big)\eta.$$

В скобке стоит в точности формула (2.2). Для доказательства третьей формулы нам потребуется формула Картана. А именно, для произвольной $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{M}^n)$ верно, что

$$\mathrm{d}\alpha(\xi, \eta) = \mathcal{L}_\xi(\alpha(\eta)) - \mathcal{L}_\eta(\alpha(\xi)) - \alpha([\xi, \eta]).$$

Для каждого слагаемого в правой части (2.3) получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\xi, \eta) &= \mathcal{L}_\xi(L^{*2}\alpha(\eta)) - \mathcal{L}_\eta(L^{*2}\alpha(\xi)) - L^{*2}\alpha([\xi, \eta]) = \\
&= \mathcal{L}_\xi(\alpha(L^2\eta)) - \mathcal{L}_\eta(\alpha(L^2\xi)) - \alpha(L^2[\xi, \eta]), \\
\mathrm{d}(L^*\alpha)(L\xi, \eta) &= \mathcal{L}_{L\xi}(L^*\alpha(\eta)) - \mathcal{L}_\eta(L^*\alpha(L\xi)) - L^*\alpha([L\xi, \eta]) = \\
&= \mathcal{L}_{L\xi}(\alpha(L\eta)) - \mathcal{L}_\eta(\alpha(L^2\xi)) - \alpha(L[L\xi, \eta]), \\
\mathrm{d}(L^*\alpha)(\xi, L\eta) &= \mathcal{L}_\xi(L^*\alpha(L\eta)) - \mathcal{L}_{L\eta}(L^*\alpha(L\xi)) - L^*\alpha([\xi, L\eta]) = \\
&= \mathcal{L}_\xi(\alpha(L^2\eta)) - \mathcal{L}_{L\eta}(\alpha(L\xi)) - \alpha(L[\xi, L\eta]), \\
\mathrm{d}\alpha(L\xi, L\eta) &= \mathcal{L}_{L\xi}\alpha(L\eta) - \mathcal{L}_{L\eta}\alpha(L\xi) - \alpha([L\xi, L\eta]).
\end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$\mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\xi, \eta) + \mathrm{d}\alpha(L\xi, L\eta) - \mathrm{d}(L^*\alpha)(L\xi, \eta) - \mathrm{d}(L^*\alpha)(\xi, L\eta) =$$
$$-\alpha(L^2[\xi, \eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta]) - \alpha(\mathcal{N}_L(\xi, \eta)).$$

Третье определение доказано. Для доказательства последнего определения зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ и обозначим базисные координатные поля как $\xi^1, \dots, \xi^n$. В этом случае для пары координатных полей ξ_j, ξ_k получаем

$$L^2[\xi_j, \xi_k] + [L\xi_j, L\xi_k] - L[L\xi_j, \xi_k] - L[\xi_j, L\xi_k] = [L^q_j\xi_q, L^s_k\xi_s] - L[L^q_j\xi_q, \xi_k] - L[\xi_j, L^s_k\xi_s] =$$
$$= \left(L^q_j\frac{\partial L^i_k}{\partial u^q} - L^q_k\frac{\partial L^i_j}{\partial u^q} - L^i_q\frac{\partial L^q_k}{\partial u^j} + L^i_q\frac{\partial L^q_j}{\partial u^k}\right)\xi_i.$$

Таким образом, формула (2.4) доказана. □

Пример 2.1.1. Пусть задано операторное поле L и его кручение Нийенхейса $\mathcal{N}_L$. Для тензора типа $(1,2)$ можно определить свертку одного верхнего и одного нижнего индексов. В нашем случае, в силу косой симметрии по нижним индексам две свертки будут отличаться знаком. Будем считать, что мы сворачиваем с первым индексом. Тогда из формулы (2.4) немедленно получаем

$$(\mathcal{N}_L)^q_{qk} = L^s_q\frac{\partial L^q_k}{\partial u^s} - L^s_k\frac{\partial L^q_q}{\partial u^s} - L^q_s\frac{\partial L^s_k}{\partial u^q} + L^q_s\frac{\partial L^s_q}{\partial u^k} = -L^s_k\frac{\partial L^q_q}{\partial u^s} + L^q_s\frac{\partial L^s_q}{\partial u^k} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^k}\Big(L^q_sL^s_q\Big) - L^s_k\frac{\partial}{\partial u^s}\Big(L^q_q\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\operatorname{tr}L^2 - L^*\mathrm{d}\operatorname{tr}L.$$

Здесь tr в последнем уравнении обозначает след оператора, а $L^2 = L \circ L$, то есть композицию оператора с собой (его квадрат). ■

Оператором Нийенхейса называется операторное поле с нулевым кручением Нийенхейса. Многообразием Нийенхейса (нийенхейсовым многообразием) называется многообразие M^n, снабженное оператором Нийенхейса L. Обозначать такое многообразие мы будем парой (M^n, L).

Рассмотрим многочлен $p(t) = c_1 t^{k-1} + \dots + c_k$ от одной переменной с постоянными коэффициентами. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $p(L)$. Оно подразумевает следующее соглашение: свободный член следует понимать как $c_k = c_k t^0$. Таким образом, после подстановки последнее слагаемое многочлена имеет вид $c_k L^0 = c_k \operatorname{Id}$. То есть, $p(L)$ — корректно определённое операторное поле.

В следующей теореме собраны хорошо известные (почти фольклорные) свойства операторов Нийенхейса.

Теорема 2.1.2. *Пусть L — оператор Нийенхейса, тогда:*

1. *Для любой пары многочленов $p(t), q(t)$ с постоянными коэффициентами и любого векторного поля ξ верно*
$$p(L)\mathcal{L}_\xi q(L) - \mathcal{L}_{p(L)\xi} q(L) = 0. \tag{2.5}$$
В частности, если $p(t) = q(t)$ мы получаем, что многочлен от оператора Нийенхейса с постоянными коэффициентами — снова оператор Нийенхейса;

2. *Если α — замкнутая 1-форма и $L^*\alpha$ замкнута, то замкнуты будут $L^k\alpha$ для $k \in \mathbb{Z}$. Отрицательные степени определены, разумеется, только для операторных полей с условием $\det L \neq 0$;*

3. *В частном случае $\alpha = \mathrm{d}\operatorname{tr} L$ получаем формулу*
$$(L^*)^k \mathrm{d}\operatorname{tr} L = \frac{1}{k+1} \mathrm{d}\operatorname{tr} L^k \tag{2.6}$$
для $k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$. Как и раньше, отрицательные степени определены только для операторных полей с условием $\det L \neq 0$;

4. *Верна формула*
$$L^* \mathrm{d}\det L = \det L \mathrm{d}\operatorname{tr} L. \tag{2.7}$$
Для невырожденного L она записывается как
$$L^{-1}\mathrm{d}\operatorname{tr} L = \frac{1}{\det L}\mathrm{d}\det L.$$
То есть, она является вариантом формулы из предыдущего пункта для $k \neq -1$;

5. *Пусть существует λ — гладкая функция, которая в каждой точке окрестности* p *совпадает с собственным значением L. Тогда*
$$L^*\mathrm{d}\lambda = \lambda \mathrm{d}\lambda. \tag{2.8}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения воспользуемся условием $\mathcal{N}_L = 0$ в форме (2.2). В этом случае оно записывается как
$$\mathcal{L}_{L\xi} L = L\mathcal{L}_\xi L.$$

Из этого следует, что

$$\mathcal{L}_{L^n\xi}L = \mathcal{L}_{L(L^{n-1}\xi)}L = L\mathcal{L}_{L^{n-1}\xi}L = \dots = L^n\mathcal{L}_\xi L \tag{2.9}$$

и, стало быть, по линейности $\mathcal{L}_{p(L)\xi}L = p(L)\mathcal{L}_\xi L$. Таким образом, мы получаем

$$(\mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi)L = 0.$$

Напомним, что производная Ли удовлетворяет правилу Лейбница для тензорного произведения и коммутирует со сверткой. Из этого немедленно следует, что формула $\mathcal{D} = \mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{D}(L^n) = \mathcal{D}(L^{n-1})\,L + L^{n-1}\mathcal{D}(L)$. Таким образом, из условия $\mathcal{D}(L) = 0$ получается $\mathcal{D}(p(L)) = 0$. Значит

$$\big(\mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi\big)q(L) = 0.$$

Взяв $p(t) = q(t)$, получаем, что $\mathcal{N}_{p(L)} = 0$, то есть $p(L)$ — оператор Нийенхейса.

Перейдем ко второму утверждению теоремы 2.1.2. Для начала рассмотрим $k > 0$. В этом случае для доказательства утверждения достаточно показать, что если a, L^*a замкнуты, то и $(L^*)^2\alpha$ замкнута. Условие $\mathcal{N}_L = 0$ в формулировке (2.3) можно переписать так: для произвольных векторных полей ξ, η выполнено

$$\mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\xi,\eta) = \mathrm{d}(L^*\alpha)(L\xi,\eta) + \mathrm{d}(L^*\alpha)(\xi,L\eta) - \mathrm{d}\alpha(L\xi,L\eta).$$

Правая часть равна нулю в силу предположения, поэтому $(L^*)^2\alpha$ замкнута. Пусть теперь L — обратимый оператор. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1.1. *Если L — оператор Нийенхейса и обратим, то L^{-1} — тоже оператор Нийенхейса.*

Доказательство. Тогда для произвольной пары векторных полей ξ, η имеем

$$\begin{aligned} L^{-2}\mathcal{N}_L(L^{-1}\xi, L^{-1}\eta) &= L^{-2}\Big([\xi,\eta] + L^2[L^{-1}\xi, L^{-1}\eta] - L[L^{-1}\xi,\eta] - L[\xi, L^{-1}\eta]\Big) = \\ &= L^{-2}[\xi,\eta] + [L^{-1}\xi, L^{-1}\eta] - L^{-1}[L^{-1}\xi,\eta] - L^{-1}[\xi,L^{-1}\eta] = \mathcal{N}_{L^{-1}}(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Вынесем полученную замечательную формулу отдельно:

$$L^{-2}\mathcal{N}_L(L^{-1}\xi, L^{-1}\eta) = \mathcal{N}_{L^{-1}}(\xi,\eta). \tag{2.10}$$

Из данного утверждения немедленно вытекает лемма. □

Обозначив $L^*\alpha = \beta$, мы получаем, что $\beta, (L^{-1})^*\beta = \alpha$ — замкнуты. Значит, в силу леммы 2.1.1 и по доказанному ранее, будут замкнуты и все $(L^*)^{-k}\beta = (L^*)^{1-k}\alpha$. Второе утверждение теоремы также доказано.

Перейдём к третьему утверждению. Легко видеть, что при $k = 0$ оно тривиально. Предположим сначала, что $k > 0$. В этом случае применяем уже доказанное выше первое утверждение теоремы 2.1.2, а именно: для $p(L) = L^k, q(L) = L$ и векторного поля ξ выполнено

$$\mathcal{L}_{L^k\xi}\operatorname{tr}L = \operatorname{tr}L^k\mathcal{L}_\xi L = \frac{1}{k+1}\mathcal{L}_\xi\operatorname{tr}L^{k+1}.$$

Здесь мы снова пользовались тем, что взятие производной Ли коммутирует со сверткой, то есть, в частности, со взятием следа от операторного поля. В силу произвольности ξ эта формула эквивалентна утверждению теоремы.

Пусть теперь $m > 1$. Снова пользуемся первым утверждением теоремы для $p(L) = L^{-m}, q(L) = L^{-1}$. Для произвольной пары векторных полей $\xi, L\eta$ получаем тождество

$$0 = L\Big(\mathcal{L}_{L^{-m}\xi}L^{-1} - L^{-m}\mathcal{L}_\xi L^{-1}\Big)L\eta = L[L^{-m}\xi,\eta] + L^{-m}[\xi, L\eta] - L^{-m+1}[\xi,\eta] - [L^{-m}, L\eta] =$$
$$-\Big(\mathcal{L}_{L^{-m}\xi}L - L^{-m}\mathcal{L}_\xi L\Big)\eta.$$

Таким образом, мы получаем

$$\mathcal{L}_{L^{-m}\xi}L = L^{-m}\mathcal{L}_\xi L.$$

Применяя эту формулу к $\operatorname{tr} L$, получаем

$$\mathcal{L}_{L^{-m}\xi}\operatorname{tr} L = \operatorname{tr} L^{-m}\mathcal{L}_\xi L = \frac{1}{-m+1}\mathcal{L}_\xi \operatorname{tr} L^{-m+1}.$$

Подставляя $-m = k$, получаем формулу (2.6) для отрицательных k, отличных от -1.

Перейдем к четвертому пункту теоремы. Прежде чем его доказать, докажем следующее полезное утверждение.

Лемма 2.1.2. *Пусть имеется семейство матриц L, зависящее от параметра t. Тогда верна формула*

$$\partial_t \det L = \operatorname{tr}\Big(L^c \partial_t L\Big),$$

где L^c означает присоединённую к L матрицу, то есть матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы L.

Доказательство. Для начала заметим, что без ограничения общности можно считать, что мы рассматриваем утверждение леммы над $\mathbb{C}$.

Кривую $L(t)$ в пространстве матриц можно пошевелить так, что почти все значения $L(t)$ станут полупростыми матрицами, то есть матрицами, собственные значения которых попарно различны. Соответственно, если формула верна для такой кривой, то для исходной она будет верна по непрерывности.

Дальше заметим, что формула инвариантна относительно умножения L на постоянную (то есть не зависящую от t) матрицу. Таким образом, можно считать, что в упомянутой точке t_0 матрица $L(t_0)$ диагональна. Рассмотрим теперь формулу

$$\partial_t \det L = \partial_t\Big(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma L^1_{\sigma(1)}\Big) =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\Big(\partial_t L^1_{\sigma(1)}L^2_{\sigma(2)}\dots L^n_{\sigma(n)} + \dots + L^1_{\sigma(1)}\dots L^{n-1}_{\sigma(n-1)}\partial_t L^n_{\sigma(n)}\Big).$$

Заметим, что если перестановка $\sigma \in S_n$ не тождественна, то среди $L^i_{\sigma(i)}$ есть как минимум два недиагональных элемента. Так как в точке t_0 эти элементы нули, то в этой точке в правой части формулы остается только n членов, а именно

$$\partial_t L^1_1 L^2_2 \dots L^n_n + \dots + L^1_1 \dots L^{n-1}_{n-1}\partial_t L^n_n$$

Это в точности $\operatorname{tr} L^c\partial_t L$. Таким образом, лемма доказана. □

Фиксируем координаты и рассмотрим матрицу оператора L в этих координатах. Используя лемму (2.1.2) и определение кручения Нийенхейса в форме 2.2, для произвольного векторного поля ξ мы получаем:

$$\mathcal{L}_{L\xi} \det L = \operatorname{tr} L^c \mathcal{L}_{L\xi} L = \operatorname{tr} L^c L \mathcal{L}_\xi L = \det L \operatorname{tr} L_\xi L = \det L \mathcal{L}_\xi (\operatorname{tr} L).$$

Здесь в качестве параметров выступали координаты на многообразии. Так как для произвольного векторного поля ξ

$$L_\xi (\operatorname{tr} L) = \langle \xi, \mathrm{d} \operatorname{tr} L \rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{L\xi} \det L = \langle L\xi, \mathrm{d} \det L \rangle = \langle \xi, L^* \mathrm{d} \det L \rangle,$$

мы получаем в точности формулу (2.7)

Перейдем к последнему, пятому, утверждению теоремы 2.1.2. Заметим, что если в некоторой точке $\mathrm{d}\lambda = 0$, то равенство выполнено. Поэтому мы рассматриваем точки, где $\mathrm{d}\lambda \neq 0$. Почти всюду кратность λ — постоянна (в следующих разделах мы увидим, что кратность — полунепрерывная сверху функция).

Наконец, легко видеть, что замена $L \to L + c\mathrm{Id}$ для произвольной константы c соответствует замене $\lambda \to \lambda + c$. При этом $\mathrm{d}\lambda$ не меняется, а сам оператор $L \to L + c\mathrm{Id}$ в силу первого утверждения теоремы 2.1.2 для $p(t) = q(t) = t + c$ — оператор Нийенхейса. Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение: пусть в окрестности точки p существует функция λ, такая что:

1. Значение λ в каждой точке окрестности является собственным значением для L;
2. $\lambda(\mathrm{p}) = 0$;
3. $\mathrm{d}\lambda \neq 0$ в целой окрестности;
4. Кратность m собственного значения λ в окрестности p постоянна.

Тогда в точке p верно, что

$$L^* \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Выберем систему координат $u^1, \dots, u^n$ в окрестности p, так что $u^n = \lambda$. Получаем, что в этой системе координат

$$\det L = (u^n)^{\mathsf{m}} f,$$

где функция f не обращается в ноль в целой окрестности p. Подставляем это выражение в (2.7). Получаем

$$L^* \mathrm{d} \det L = L^* \Big(\mathsf{m} (u^n)^{\mathsf{m}-1} f \mathrm{d} u^n + (u^n)^{\mathsf{m}} \mathrm{d} f \Big) = (u^n)^{\mathsf{m}} f \mathrm{d} \operatorname{tr} L.$$

Почти всюду в окрестности p выражение $(u^n)^{\mathsf{m}-1}$ не обращается в ноль. Поделив на него, получаем, что почти всюду выполнено равенство

$$L^* \Big(\mathsf{m} f \mathrm{d} u^n + u^n \mathrm{d} f \Big) = u^n f \mathrm{d} \operatorname{tr} L.$$

По непрерывности оно выполнено всюду. Подставляя $u^n = 0$, получаем $L^* \mathrm{d} u^n = 0$. То есть последнее утверждение и, следовательно, вся теорема доказаны. $\square$

Из этой теоремы мы извлечем замечательное следствие. Для этого нам потребуется понятие характеристического многочлена. Для линейного оператора $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, действующего на конечномерном пространстве V, характеристическим многочленом будем называть выражение

$$\chi_L(t) = \det(t \operatorname{Id} - L) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} - \dots - \sigma_n. \tag{2.11}$$

В нашем случае старший коэффициент характеристического многочлена всегда равен единице. В случае, когда L — оператор Нийенхейса, коэффициенты σ_i характеристического многочлена принадлежат той же категории, что и L (гладкие, аналитические и так далее).

Следствие 2.1.1. *Пусть L — оператор Нийенхейса и σ_i — коэффициенты его характеристического многочлена. Тогда они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} L^* \mathrm{d}\sigma_i &= \sigma_i \mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ L^* \mathrm{d}\sigma_n &= \sigma_n \mathrm{d}\sigma_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Доказательство. Заметим, что оператор $t\mathrm{Id} - L$ — оператор Нийенхейса для любого параметра t. Подставляя это в формулу (2.7), получаем

$$(t\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}\det(t\mathrm{Id} - L) = \det(t\mathrm{Id} - L)\mathrm{d}\operatorname{tr}(t\mathrm{Id} - L).$$

Подставляя выражение для характеристического многочлена, получаем

$$(t\mathrm{Id} - L^*)(-t^{n-1}\mathrm{d}\sigma_1 - \dots - \mathrm{d}\sigma_n) = (t^n - \sigma_1 t^{n-1} - \dots - \sigma_n)\mathrm{d}(-\sigma_1).$$

Раскрывая скобки в обеих частях равенства, получаем

$$t^{n-1}(L^*\mathrm{d}\sigma_1 - \mathrm{d}\sigma_2) + \dots + (L^*\mathrm{d}\sigma_n) = t^{n-1}\sigma_1\mathrm{d}\sigma_1 + \dots + \sigma_n\mathrm{d}\sigma_1.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t, получаем требуемое равенство. Следствие доказано. □

Далее мы приведем несколько важных примеров операторов Нийенхейса.

Пример 2.1.2. Пусть L — оператор Нийенхейса и коэффициенты его характеристического многочлена σ^i — функционально независимы. Возьмем их в качестве координат $u^i = \sigma_i, i = 1, \dots, n$. Формулы из следствия 2.1.1 позволяют полностью восстановить оператор, а именно

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ u^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ u^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (2.1) для кручения Нийенхейса. Обозначим через $\xi_i, i = 1, \dots, n$ базисные векторные поля. Легко видеть, что

$$\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad 2 \leq i, j \geq n.$$

Остается проверить равенство нулю кручения Нийенхейса, когда один из векторов это ξ_1. В этом случае для $j = 2, \dots, n$ имеем

$$\mathcal{N}_L(\xi_1, \xi_i) = [L\xi_1, L\xi_j] - L[L\xi_1, \xi_j] - L[\xi_1, L\xi_j] = [u^i\xi_i, \xi_{j-1}] - L[u^i\xi_i, \xi_j] = -\xi_{j-1} + L\xi_j = 0.$$

Таким образом, это действительно оператор Нийенхейса.

Такие операторы мы будем называть дифференциально невырожденными, а систему координат, построенную выше, канонической. Очевидно, что это оператор в окрестности нуля не приводится к диагональному виду — имеется чисто алгебраическое препятствие, в нуле этот оператор представляет собой жорданову клетку максимальной размерности с нулевым собственным значением. ■

Пример 2.1.3. Пусть в окрестности точки р заданы n функций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ с условием, что почти всюду в этой окрестности они функционально независимы. Рассмотрим операторное поле, определенное почти всюду по формуле

$$L = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \sigma_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right), \quad \text{где} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^n} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u^1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u^n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial u^1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial u^n} \end{pmatrix}.$$

Взяв в окрестности почти любой точки σ_i за координаты, мы получим, что оператор в окрестности этой точки приводится к виду 2.1.2. В частности, это оператор Нийенхейса и σ_i — его коэффициенты характеристического многочлена.

Значит, L — оператор Нийенхейса почти всюду. Если формула продолжается в точки, где σ_i становятся функционально зависимыми, то там операторное поле по непрерывности тоже будет оператором Нийенхейса.

В размерности два вводя обозначения $v = \sigma_1, u = \sigma_2$ мы получаем

$$L = \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix}, \qquad v = \operatorname{tr} L, \ u = -\det L. \tag{2.13}$$

Полностью формула имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \frac{vv_x u_y - uv_x v_y + u_x u_y}{v_x u_y - v_y u_x} & \frac{vu_y v_y - uv_y^2 + u_y^2}{v_x u_y - v_y u_x} \\ \frac{-vv_x u_x + uv_x^2 - u_x^2}{v_x u_y - v_y u_x} & \frac{-vv_y u_x + uv_x v_y - u_x u_y}{v_x u_y - v_y u_x} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Эта формула будет полезна в дальнейшем. ■

Пример 2.1.4. Пусть L — операторное поле, заданное в подходящей системе координат как

$$L = \begin{pmatrix} u^n & u^{n-1} & u^{n-2} & \dots & u^1 \\ 0 & u^n & u^{n-1} & \dots & u^2 \\ 0 & 0 & u^n & \dots & u^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u^n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что это оператор Нийенхейса. Обозначим через $\xi_i, i = 1, \dots, n$ базисные векторные поля и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть ξ — радиальное векторное поле, то есть $\xi = u^1\xi_1 + \dots + u^n\xi_n$ (мы уже встречались с ним в предыдущем примере). Для начала заметим, что

$$\mathcal{L}_\xi J = 0, \quad \mathcal{L}_{\xi_i} J = 0, \quad [\xi_i, \xi] = \xi_i.$$

Из этих соотношений вытекает, что для любых целых положительных чисел k и m

$$[J^k\xi, J^m\xi] = 0, \quad [\xi_i, J^k\xi] = J^k\xi_i = \xi_{i-k}.$$

В формуле выше действует соглашение $\xi_i = 0, i < 0$. Заметим, теперь, что выполнено следующее тождество $L\xi_i = J^{n-i}\xi$. Кручение Нийенхейса в этом случае приобретает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_i) = [L\xi_i, L\xi_j] - L[L\xi_i, \xi_j] - L[\xi_i, L\xi_j] = [J^{n-i}\xi, J^{n-j}\xi] - L[J^{n-i}\xi, \xi_j] - L[\xi_i, J^{n-j}\xi] = \\ = L\xi_{i+j-n} - L\xi_{i+j-n} = 0.\end{aligned}$$

Спектр оператора вещественный и состоит в каждой точке из одного числа. ■

Пример 2.1.5. Пусть L — операторное поле, заданное в подходящей системе координат как

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u^n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что это оператор Нийенхейса. Обозначим через $\xi_i, i = 1, \dots, n$ базисные векторные поля. Равенство нулю кручения Нийенхейса достаточно проверить для пар $\xi_i, \xi_n, i < n$:

$$\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_n) = -L[\xi_i, L\xi_n] = -L\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u^i}\xi_1 + \dots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u^i}\xi_{n-1}\Big) = 0.$$

В тензорной форме этот оператор записывается как $\xi \otimes \mathrm{d}u^n$ для некоторого векторного поля ξ.

В координатах $\bar{u}^i = h^i(u), i = 1, \dots, n-1, \bar{u}^n = u^n$ оператор L принимает вид $\bar{\xi} \otimes \mathrm{d}u^n = \bar{\xi} \otimes \mathrm{d}\bar{u}^n$ (здесь $\bar{\xi}$ означает, что вектор ξ уже пересчитан в новых компонентах). То есть форма оператора не поменялась, а последний столбец при такой замене ведет себя как векторное поле.

Таким образом, поиск нормальных форм такого оператора — это поиск нормальных форм векторного поля относительно подобных замен. ■

2.2 Классические теоремы Нийенхейса и Хаантьеса

Ключевым вопросом при изучении любой математической структуры является поиск нормальных форм, к которым эту структуру можно привести. В этом разделе мы приведем классические результаты Нийенхейса и Хаантьеса с доказательствами.

Теорема 2.2.1 (Нийенхейс, Хаантьес [79, 47])**.** *Пусть в окрестности точки* p *задан гладкий (аналитический) оператор Нийенхейса* L *с простым вещественным спектром.*

Тогда в подходящей системе координат $u^1, \dots, u^n$ оператор L приводится к виду

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(u^n) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_i, i = 1, \dots n$ — функции одной переменной.

Доказательство. Доказательство этой теоремы можно получить как следствие теоремы о расщеплении 2.5.2, которую мы докажем чуть позже. Однако, приведем классическое доказательство этой теоремы, основанное на теореме Фробениуса 12.0.15.

Сначала покажем достаточность. Если спектр оператора L вещественен и прост, то у уравнения

$$\chi_L(\lambda) = 0$$

в окрестности p есть n решений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые представляют собой гладкие (аналитические), попарно различные функции. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$. Из линейной алгебры имеем, что локально в окрестности p определены гладкие векторные поля $\eta_i, i = 1, \dots, n$, которые

1. линейно независимы всюду на окрестности;

2. $L\eta_i = \lambda_i \eta_i$.

Вычислим кручение Нийенхейса на этих векторных полях. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) &= [L\eta_i, L\eta_j] + L^2[\eta_i, \eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] = [\lambda_i\eta_i, \lambda_j\eta_j] + L^2[\eta_i, \eta_j] - \\ &- L[\lambda_i\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, \lambda_j\eta_j] = \lambda_i \mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \lambda_j\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i\eta_i + \lambda_i\lambda_j[\eta_i, \eta_j] + L^2[\eta_i, \eta_j] - \\ &- \lambda_j\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \lambda_j L[\eta_i, \eta_j] + \lambda_i\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i\eta_i - \lambda_i L[\eta_i, \eta_j] = (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \\ &- (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i\eta_i + (L - \lambda_i \mathrm{Id})(L - \lambda_j \mathrm{Id})[\eta_i, \eta_j]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Так как векторные поля η_i линейно независимы, то локально найдутся функции c_{ij}^k, такие, что

$$[\eta_i, \eta_j] = c_{ij}^k \eta_k.$$

Так как $(L - \lambda_i \mathrm{Id})\eta_i = 0$ и $(L - \lambda_j \mathrm{Id})\eta_j = 0$, то в выражении

$$(L - \lambda_i \mathrm{Id})(L - \lambda_j \mathrm{Id})[\eta_i, \eta_j]$$

нет слагаемых, содержащих η_i, η_j. Это означает, что из равенства нулю кручения Нийенхейса автоматически вытекает

$$(L - \lambda_i \mathrm{Id})(L - \lambda_j \mathrm{Id})[\eta_i, \eta_j] = 0, \quad \mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j = 0, \quad i \neq j. \tag{2.16}$$

Первое условие означает, что найдутся такие функции f_{ij}, g_{ij}, что $[\eta_i, \eta_j] = f_{ij}\eta_i + g_{ij}\eta_j, 1 \leq i < j \leq n$. В свою очередь, по теореме Фробениуса 12.0.15 это означает, что найдется система координат $u^1, \dots, u^n$, в которой $\frac{\partial}{\partial u^i} = h_i \xi_i, i = 1, \dots, n$ для некоторых ненулевых функций h_i. Легко видеть, что в этой системе координат

$$L\frac{\partial}{\partial u^i} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Второе условие из (2.16) имеет вид $\mathcal{L}_{\xi_i}\lambda_j = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\lambda_j}{\partial u^i} = 0$ для $i \neq j$. Таким образом, L имеет точно такой вид, как описано в теореме.

Подставляя в (2.15) координатные векторные поля, мы легко убеждаемся в том, что данное условие является необходимым. Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 2.2.1. На множестве диагональных матриц, представленных в утверждении теоремы 2.2.1, действует группоид замен вида $u^i = h_i(v^i)$, где $h_i'(0) \neq 0$. Таким образом, это множество разбито на классы эквивалентности относительно таких замен.

Будем рассматривать замены, оставляющие начало координат на месте. Тогда оператор L в утверждении теоремы при такой замене остается диагональным, а элементы на диагонали меняются так

$$\lambda_i(u^i) \to \lambda_i(h_i(v^i)).$$

В вещественно-аналитическом случае для каждого класса эквивалентности можно написать уникального представителя (то есть предъявить нормальную форму оператора Нийенхейса):

$$L_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} c_1 + \epsilon_1(u^1)^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 + \epsilon_2(u^2)^{k_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & c_n + \epsilon_n(u^n)^{k_n} \end{pmatrix}.$$

Здесь k_i — натуральные числа ≥ 0, c_i — набор вещественных постоянных. Числа $\epsilon_i = 1$ для нечетного k_i и $\epsilon_i = \pm 1$ для четного k_i. Легко убедиться, что все перечисленные параметры — это инварианты, то есть различные нормальные формы не переводятся друг в друга диагональными заменами координат.

Формы, на которых действуют группы замен определенного вида, мы будем называть полунормальными формами. ■

Следующий пример показывает, что без предположения о том, что собственные значения оператора Нийенхейса различны, теорема 2.2.1 не верна.

Пример 2.2.1. Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y и операторное поле

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix}.$$

Проверим, что это действительно оператор Нийенхейса. В размерности два достаточно вычислить кручение Нийенхейса для базисных векторных полей, которые мы обозначим через ξ, η. Имеем

$$\mathcal{N}_L(\xi, \eta) = [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta] = [-x\eta, -x\xi - 2y\eta] - L[-x\eta, \eta] - L[\xi, -x\xi - 2y\eta] =$$
$$= -x\eta + 2x\eta + L\xi = -x\eta + 2x\eta - x\eta = 0.$$

Характеристический многочлен этого оператора имеет вид

$$\chi_L(t) = t^2 + 2yt - x^2.$$

Собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Они различны везде, кроме нуля. При этом в окрестности нуля собственные значения перестают быть гладкими функциями, поэтому в окрестности нуля оператор не может быть гладкой заменой координат приведен к диагональному виду (хотя в окрестности любой другой точки диагональные координаты есть).

В смысле формулы (2.14), мы получаем, что для $v = -2y, u = x^2$ имеется

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 0 & -2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix}$$

Мы видим, что на прямой $x = 0$ формула (2.14) не определена. Однако, она продолжается на это множество по непрерывности и в результате дает оператор Нийенхейса, корректно заданный на всей плоскости. ■

Кручением Хаантьеса называется тензор

$$\mathcal{H}_L(\xi, \eta) = L^2 \mathcal{N}_L(\xi, \eta) + \mathcal{N}_L(L\xi, L\eta) - L\mathcal{N}_L(L\xi, \eta) - L\mathcal{N}_L(\xi, L\eta). \tag{2.17}$$

В этой формуле $\mathcal{N}_L$ понимается как отображение $\Psi^0 \times \Psi^0 \to \Psi^0$, а записи $L^2\mathcal{N}_L, L\mathcal{N}_L$ означают композиции отображений $L \circ L \circ \mathcal{N}_L$ и $L \circ \mathcal{N}_L$ соответственно. В локальных координатах кручение Хаантьеса записывается

$$(\mathcal{H}_L)^i_{jk} = L^i_q L^q_s (\mathcal{N}_L)^s_{jk} + (\mathcal{N}_L)^i_{sq} L^s_j L^q_k - L^i_s (\mathcal{N}_L)^s_{qk} L^q_j - L^i_s (\mathcal{N}_L)^s_{jq} L^q_k. \tag{2.18}$$

Легко увидеть, что если кручение Нийенхейса равно нулю, то кручение Хаантьеса также обращается в ноль. Обратное, разумеется, неверно.

Теорема 2.2.2 (Хаантьес [47]). *Пусть в окрестности точки* p *задано операторное поле* L *с простым вещественным спектром.* L *приводится к диагональному виду*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(u) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(u) \end{pmatrix},$$

в подходящей системе координат тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_L = 0$*. Здесь* $\lambda_i, i = 1, \dots n$ *— функции* n *переменных.*

Доказательство. Покажем сначала, что теорема 2.2.2 дает достаточное условие диагонализации. Действуем сначала так же, как при доказательстве теоремы Нийенхейса 2.2.1. Имеем гладкие собственные значения λ_i линейно независимые векторные поля ξ_i с условием $L\xi_i = \lambda_i \xi_i, i = 1, \dots, n$, для которых кручение Нийенхейса (из формулы 2.15) имеет вид

$$\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_j) = (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j \eta_j - (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i \eta_i + (L - \lambda_i \mathrm{Id})(L - \lambda_j \mathrm{Id})[\eta_i, \eta_j].$$

Вычислим компоненты кручения Хаантьеса. Имеем

$$\begin{aligned}
L^2\mathcal{N}_L(\eta_i,\eta_j) &= \lambda_j^2(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \lambda_i^2(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i\eta_i + L^2(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\eta_i,\eta_j],\\
\mathcal{N}_L(L\eta_i,L\eta_j) &= (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{L\eta_i}\lambda_j L\eta_j - (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{L\eta_j}\lambda_i L\eta_i + (L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[L\eta_i,L\eta_j] =\\
&= (L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\lambda_i\eta_i,\lambda_j\eta_j] = \lambda_i\lambda_j(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\xi_i,\xi_j],\\
L\mathcal{N}_L(L\xi_i,\xi_j) &= (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{L\eta_i}\lambda_j L\eta_j - (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i L^2\eta_i + L(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[L\eta_i,\eta_j] =\\
&= \lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \lambda_i^2(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_j}\lambda_i\eta_i + \lambda_i L(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\eta_i,\eta_j],\\
L\mathcal{N}_L(\xi_i,L\xi_j) &= (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j L^2\eta_j - (\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{L\eta_j}\lambda_i L\eta_i + L(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\eta_i,L\eta_j] =\\
&= \lambda_j^2(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j - \lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j)\mathcal{L}_{\eta_i}\lambda_j\eta_j + \lambda_j L(L-\lambda_i\mathrm{Id})(L-\lambda_j\mathrm{Id})[\eta_i,\eta_j].
\end{aligned}$$

Складывая, мы получаем

$$\mathcal{H}_L(\eta_i,\eta_j) = (L-\lambda_i\mathrm{Id})^2(L-\lambda_j\mathrm{Id})^2[\eta_i,\eta_j]. \tag{2.19}$$

Так как векторные поля η_i линейно независимы, то локально найдутся функции c_{ij}^k, такие, что

$$[\eta_i,\eta_j] = c_{ij}^k\eta_k.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.2.1 получаем, что в выражении

$$(L-\lambda_i\mathrm{Id})^2(L-\lambda_j\mathrm{Id})^2[\eta_i,\eta_j]$$

отсутствуют слагаемые $c_{ij}^i\eta_i$ и $c_{ij}^j\eta_j$ (по повторяющимся индексам суммирования нет). То есть из равенства $\mathcal{H}_L = 0$ мы получаем, что $c_{ij}^k = 0, k \neq i, k \neq j$. В частности, найдутся такие функции f_{ij}, g_{ij}, что

$$[\eta_i,\eta_j] = f_{ij}\eta_i + g_{ij}\eta_j.$$

В свою очередь, по теореме Фробениуса 12.0.15 это означает, что найдется система координат $u^1,\dots,u^n$, в которой $\frac{\partial}{\partial u^i} = h_i\xi_i, i = 1,\dots,n$ для некоторых ненулевых функций h_i. Легко видеть, что в этой системе координат

$$L\frac{\partial}{\partial u^i} = \lambda_i\frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i = 1,\dots,n.$$

То есть в данной системе координат оператор является диагональным. Необходимость проверяется подстановкой в (2.19) вместо η_i,η_j базисных векторных полей. Теорема доказана. $\square$

2.3 Функции от операторов Нийенхейса

Этот раздел мы начнем с напоминания некоторых фактов из линейной алгебры (гл. 5 в [131]). Пусть дана вещественная матрица

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Возьмем произвольную гладкую функцию $f(t)$. Тогда матричнозначная функция $f(J)$ определяется как

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Пусть теперь задан произвольный линейный оператор L с вещественными собственными значениями в произвольной системе координат. Тогда его можно привести к нормальной жордановой форме, то есть найдется невырожденная матрица C, такая что

$$L = C \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Здесь $J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданов блок размерности $n_i \times n_i$ с вещественным собственным значением λ_i (мы не предполагаем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$). Тогда функцию f от оператора L можно определить как

$$f(L) = C \begin{pmatrix} f\big(J_{n_1}(\lambda_1)\big) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f\big(J_{n_2}(\lambda_2)\big) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & f\big(J_{n_k}(\lambda_k)\big) \end{pmatrix} C^{-1}. \tag{2.22}$$

Легко проверить, что это определение корректно, то есть результат не зависит от выбора жорданова базиса. Более того, если p_k — последовательность многочленов, равномерно сходящихся к f на отрезке (теорема Вейерштрасса), содержащем λ в виде внутренней точки, то $p_k(L)$ равномерно сходится к $f(L)$ в подходящей матричной норме.

Будем говорить, что точка p на многообразии Нийенхейса — точка общего положения в алгебраическом смысле (точка общего положения или регулярная точка, если ясен контекст), если характеристика Сегре в этой точке и её окрестности совпадает. В противном случае мы будем называть точку особой. В этом разделе мы будем иметь дело с точками общего положения.

Теорема 2.3.1. *Пусть операторное поле L задано в окрестности точки общего положения* p, *и спектр L всегда вещественный. Пусть f — функция, принимающая значения в $\mathbb{R}$, гладкая на некотором отрезке $[a, b]$, содержащем* $\mathrm{Spectrum} L$. *p_k — произвольная последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к f на $[a, b]$. Тогда:*

1. *Определение $f(L)$ как предела $p_k(L)$ не зависит от выбора последовательности p_k (то есть определение корректно);*

2. *$f(L)$ гладко зависит от точки;*

3. $\mathrm{Spectrum} f(L) = f(\mathrm{Spectrum\,L})$*;*

4. Если L — оператор Нийенхейса, то и $f(L)$ — оператор Нийенхейса.

Доказательство. Операторное поле L в точке можно привести к нормальной жордановой форме. Тогда применима формула 2.22. Кроме того, как уже говорилось, определение не зависит от выбора жорданова базиса (гл. 5 §1-2 в [131]) и не зависит от выбора последовательности p_k. То есть первый пункт доказан.

Второй пункт вытекает из того, что компоненты $f(L)$ по построению гладко зависят от компонентов L и, следовательно, мы получаем гладкое операторное поле. Условие $\mathrm{Spectrum} f(L) = f(\mathrm{Spectrum} L)$ следует из уже упоминавшейся формулы 2.22.

Наконец, вместе с функциями в силу равномерной сходимости равномерно сходятся и производные. То есть $\mathcal{N}_{p_k(L)}$ равномерно сходится к $\mathcal{N}_{f(L)}$. Так как $p_k(L)$ — операторы Нийенхейса, то есть кручение Нийенхейса у них равно нулю, то оно равно нулю и у предела. Теорема доказана. □

Помимо явного определения, данного выше, мы также будем пользоваться версией, связанной с аналитическими функциями. Это, в частности, позволит включить случай комплексных собственных значений L и случай особых точек. Основным инструментом здесь является следующая теорема (в этом разделе $\bar{z}$ обозначает комплексное число, сопряженное с z).

Теорема 2.3.2. *Рассмотрим функцию $f(z)$, принимающую значения в $\mathbb{C}$, определённую на $K \subseteq \mathbb{C}$. Пусть она пара f, K удовлетворяет следующим соотношениям:*

1. *Множество $\mathbb{C} \setminus K$ связно (само K связным быть не обязано);*
2. *Множество K симметрично относительно оси Ox: то есть для любого $z \in K$ его сопряженное также лежит в K;*
3. *Функция f непрерывна на K, и её ограничение на внутренность $\mathrm{int}(K)$ аналитично;*
4. *Функция f уважает сопряжение, то есть $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ для любого $z \in K$.*

Пусть, кроме этого, в окрестности точки $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ задано операторное поле L, собственные значения которого принадлежат $\mathrm{int}(K)$. Тогда

1. *Определено операторное поле $f(L)$, гладко зависящее от точки*
2. $\mathrm{Spectrum} f(L) = f(\mathrm{Spectrum} L)$*;*
3. *Если L — оператор Нийенхейса, то и $f(L)$ — оператор Нийенхейса.*

Доказательство. В основе доказательства лежит следующий известный результат из комплексного анализа

Теорема 2.3.3 (Мергелян [141], [142])**.** *Пусть на комплексной плоскости задан компакт K, дополнение к которому связно. Тогда любая функция, непрерывная на границе K и аналитичная внутри компакта K, равномерно приближается на этом множестве многочленами.*

Тогда определим $f(L)$ как $f(L) = \lim_{k\to\infty} p_k(L)$, где $p_k(z)$ — последовательность многочленов, сходящихся равномерно к $f(z)$. Так как мы рассматриваем вещественнозначные функции, то, взяв вещественные части многочленов, можно считать, что коэффициенты p_k — вещественные.

Предел гладко зависит от точки (более того, аналитически зависит от компонент L) и при замене координат меняется как тензор типа $(1,1)$ и не зависит от последовательности многочленов (§1.2.2 – 1.2.4 в [54]).

Наконец, легко видеть, что $\mathrm{Spectrum} f(L) = f(\mathrm{Spectrum} L)$. Так как равномерная сходимость означает сходимость в том числе производных, то выполнено

$$\mathcal{L}_\xi\big(f(L)\big) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_\xi\big(p_k(L)\big)$$

Так как $p_k(L)$ — оператор Нийенхейса для любого номера k, то и предел $f(L)$ — оператор Нийенхейса. □

Следствие 2.3.1. *Пусть L — оператор Нийенхейса на многообразии M^n и $f(t), g(t)$ пара произвольных функций, для которых $f(L), g(L)$ определены в силу теорем 2.3.1, 2.3.2. Тогда*

$$f(L)\mathcal{L}_\xi g(L) - \mathcal{L}_{f(L)\xi} g(L) = 0$$

для любого векторного поля ξ.

Доказательство. Пусть функции f, g равномерно приближаются многочленами p_k, q_k соответственно. Из теоремы 2.1.2 вытекает, что

$$\mathcal{L}_{p_k(L)\xi} q_k(L) - p_k(L)\mathcal{L}_\xi q_k(L) = 0.$$

Равномерная сходимость означает сходимость вместе со всеми производными. Таким образом, переходя к пределу, мы получаем утверждение следствия. □

В дальнейшем, когда мы будем писать функцию от оператора, мы будем подразумевать, что она удовлетворяет условиям теорем 2.3.2 и 2.3.1.

2.4 Естественная комплексная структура

В начале этого раздела мы обсудим вопрос введения комплексной структуры. Начнем с линейной алгебры.

Рассмотрим вещественное линейное пространство четной размерности $\mathbb{R}^{2n}$. Зафиксируем на нем линейный оператор $\mathsf{J} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Тогда на $\mathbb{R}^{2n}$ можно ввести структуру комплексного линейного пространства, а именно определить умножение вектора $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ на комплексное число $z = a + \mathrm{i}\, b$ как

$$z\xi = a\xi + b\mathsf{J}\xi.$$

Легко проверить, что набор векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$ задает базис в смысле комплексной структуры тогда и только тогда, когда $\xi_1, \dots, \xi_n, \mathsf{J}\xi_1, \dots, \mathsf{J}\xi_n$ задают базис в смысле исходной вещественной структуры. В таком базисе

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -\mathrm{Id}_{n\times n} \\ \mathrm{Id}_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Такой базис будем называть каноническим. Здесь и далее мы используем обозначения $\mathrm{Id}_{n\times n}$ для единичной матрицы размера $n \times n$, $0_{n\times n}$ — нулевой матрицы такого же размера.

Пусть теперь задан линейный оператор $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. Этот оператор — овеществление некоторого комплексного оператора $L^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда $L\mathsf{J} - \mathsf{J}L = 0$. В каноническом базисе для J матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Здесь матрицы A, B также имеют размеры $n \times n$.

Теперь рассмотрим тот же вопрос — введения комплексной структуры — но уже на многообразии. Следующий пример показывает, что овеществление комплексного многообразия — это всегда многообразие Нийенхейса.

Пример 2.4.1. Пусть теперь нам дано комплексное многообразие размерности n, заданное своим атласом. Тогда на каждой карте с комплексными координатами $z^1, \dots, z^n$ можно ввести естественные вещественные координаты $u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n$

$$u^i = \mathrm{Re} z^i, \quad u^i = \mathrm{Im} z^i.$$

Взяв вещественные и мнимые части функций перехода, мы получаем овеществление комплексного многообразия — вещественное многообразие размерности $2n$. Мы обозначим его M^{2n}.

Напомним, что через $C^\infty(\mathrm{M}^n, \mathbb{C})$ мы обозначим пространство гладких комплекснозначных функций. В свою очередь комплекснозначные векторные поля — это элементы кольца дифференцирований таких функций, то есть $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathrm{M}^n, \mathbb{C})$.

Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ в окрестности точки p. В локальных координатах комплекснозначные векторные поля записываются как

$$\eta = \eta^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \eta^n \frac{\partial}{\partial u^n},$$

где η^i — комплекснозначные гладкие функции. Коммутатор таких полей определен стандартной формулой

$$[\xi, \eta]^i = \xi^q \frac{\partial \eta^i}{\partial u^q} - \frac{\partial \xi^i}{\partial u^q} \eta^q.$$

Здесь по u^i дифференцируются отдельно комплексная и мнимая часть, то есть

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^i} \mathrm{Re} \xi^i + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial u^i} \mathrm{Im} \xi^i.$$

Всюду верхняя черта в этом примере означает комплексное сопряжение.

В каждой карте есть выделенный класс локальных полей — локальные координатные поля, пришедшие с комплексных координат z^i. Они однозначно определяются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial z^i} z^j = \delta^j_i, \quad \frac{\partial}{\partial \bar z^i} \bar z^j = \delta^j_i, \quad \frac{\partial}{\partial z^i} \bar z^j = \frac{\partial}{\partial \bar z^i} z^j = 0, \quad 1 \le i, j \le n.$$

В локальных координатах u, v они записываются как

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial v^i}\Big) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \bar z^i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial v^i}\Big).$$

Легко видеть, что эти поля образуют локальный базис, то есть любое комплекснозначное векторное поле в карте раскладывается по ним.

Для произвольной комплекснозначной гладкой функции $h(u, v) = f(u, v) + \mathrm{i}\, g(u, v)$, где f, g — гладкие функции, принимающие значения в $\mathbb{R}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^i} h = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^i} - \frac{\partial g}{\partial v^i}\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{\partial g}{\partial u^i} - \frac{\partial f}{\partial v^i}\Big).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \bar h = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^i} - \frac{\partial g}{\partial v^i}\Big) - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{\partial g}{\partial u^i} - \frac{\partial f}{\partial v^i}\Big).$$

Таким образом, комплекснозначная гладкая функция h является комплексно-аналитической (то есть удовлетворяет условиям Коши-Римана по каждой паре переменных) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial h}{\partial \bar z^i} = \frac{\partial \bar h}{\partial z^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.24}$$

В $\mathfrak{Der}\, C^\infty(\mathrm{M}^{2n}, \mathbb{C})$ имеется подмножество $\mathfrak{Der}\, C^\infty(\mathrm{M}^{2n})$ обычных вещественных векторных полей. Базисные вещественные векторные поля в данной карте выражаются через введенные комплекснозначные следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial z^i} + \frac{\partial}{\partial \bar z^i}, \quad \frac{\partial}{\partial v^i} = \mathrm{i}\,\Big(\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial \bar z^i}\Big)$$

Определим операторное поле J как

$$\mathsf{J}\frac{\partial}{\partial z^i} = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \mathsf{J}\frac{\partial}{\partial \bar z^i} = -i\frac{\partial}{\partial \bar z^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Легко видеть, что $\mathsf{J}\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial v^i}, \mathsf{J}\frac{\partial}{\partial v^i} - \frac{\partial}{\partial u^i}$. То есть J — вещественное операторное поле с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Так как в каждой карте J приводится к постоянному виду, мы получаем, что $\mathcal{N}_L = 0$. То есть овеществление комплексного многообразия — многообразие Нийенхейса. ■

Говорят, что на многообразии M^n задана почти комплексная структура, если на нём задано операторное поле J с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Верна следующая фундаментальная теорема.

Теорема 2.4.1 (Ньюландер, Ниренберг [78])**.** *Почти комплексная структура* J *задаёт комплексную структуру тогда и только тогда, когда* $\mathcal{N}_L = 0$.

Прежде чем перейти к основной теореме раздела, нам потребуется ввести функцию на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ в следующем виде:

$$i(z) = \begin{cases} \ \ \mathrm{i}\ , & \text{если} \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ -\mathrm{i}\ , & \text{если} \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Заметим, что сама эта функция не удовлетворяет требованиям теоремы 2.3.2 — на границе $\mathbb{R}$ функция разрывна. Однако, если вместо комплексной плоскости без прямой рассмотреть произвольный компакт K, симметричный относительно $\mathbb{R}$, со связным дополнением, то на нём полученная функция уже будет удовлетворять всем условиям теоремы 2.3.2.

Пусть теперь задано многообразие Нийенхейса M^n и у L нет вещественных собственных значений. Мы хотим придать смысл выражению $i(L)$ на всем многообразии. Для этого мы действуем так:

1. Рассмотрим произвольную точку $p \in \mathrm{M}^n$ и выберем произвольный компакт $S \subseteq \mathrm{M}^n$, содержащий p;
2. Вещественные и мнимые части собственных значений — непрерывные функции на S, поэтому множество
$$\tilde{K} = \cup_{\mathrm{p} \in S} \operatorname{Spectrum} L$$
компактно;
3. Взяв, возможно, больший компакт K, мы получаем симметрическое относительно $\mathbb{R}$ компактное множество;
4. Определяем $i(L)$. Получаем, что в точке p такое операторное поле однозначно определено;
5. Легко видеть, что если мы определили операторы в компактных окрестностях разных точек, и эти компактные окрестности пересекаются, то процедуру можно проделать для их объединения. Получим, что определение не зависит от выбора компакта.

Таким образом, мы построили $\mathsf{J} = i(L)$ на всем многообразии. Всюду далее мы не будем обсуждать детали построения, а просто писать $\mathsf{J} = i(L)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть L — операторное поле на многообразии M^{2n} без вещественных собственных значений и $\mathsf{J} = i(L)$, где $i(z)$ задана формулой* (2.25)*. Тогда выполнено следующее:*

1. J *гладкий;*
2. $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$*, то есть J задает почти комплексную структуру на M^n;*
3. $\mathsf{J}L = L\mathsf{J}$*, то есть L комплексный линейный оператор J;*
4. *Если L — оператор Нийенхейса, то J задает комплексную структуру на M^{2n} и $L^{\mathbb{C}}$ голоморфен в смысле этой структуры;*
5. *Если L — оператор Нийенхейса, то оператор $L^{\mathbb{C}}$ имеет нулевое комплексное кручение Нийенхейса. То есть в произвольных комплексных (в смысле J) координатах $z^1, \dots, z^n$ верно*
$$(\mathcal{N}_{L^{\mathbb{C}}})^i_{jk} = (L^{\mathbb{C}})^s_j \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^i_k}{\partial z^s} - (L^{\mathbb{C}})^s_k \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^i_j}{\partial z^s} - (L^{\mathbb{C}})^i_s \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^s_k}{\partial z^j} + (L^{\mathbb{C}})^i_s \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^s_j}{\partial z^k} = 0. \tag{2.26}$$

Доказательство. Первое и второе утверждение теоремы 2.4.2 следуют из теоремы 2.3.2.

Так же из этой теоремы вытекает, что J — оператор Нийенхейса. Теорема Ньюландера-Ниренберга говорит, что в этом случае J задает комплексную структуру. В частности, найдутся координаты $u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n$, в которых J имеет канонический вид. Обозначим соответствующие базисные векторные поля как $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$, тогда

$$\mathsf{J}\xi_i = \eta_i, \mathsf{J}\eta_i = -\xi_i.$$

В свою очередь, из условия коммутирования $L\mathsf{J} - \mathsf{J}L = 0$ получаем формулу (2.23)

$$L = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

где A, B — матрицы размера $n \times n$. В комплексных координатах $z^i = u^i + \mathrm{i}\, v^i$ компоненты операторного поля $L^{\mathbb{C}}$ имеют вид

$$(L^{\mathbb{C}})^i_j = A^i_j + \mathrm{i}\, B^i_j. \tag{2.27}$$

Напомним следствие 2.3.1: для оператора Нийенхейса и произвольных функций $f(L), g(L)$ (удовлетворяющих всем необходимым условиям) и произвольного ξ верно, что

$$\mathcal{L}_{p(L)\xi} q(L) = p(L)\mathcal{L}_{\xi} q(L).$$

Для $f(L) = \mathsf{J}, q(L) = L$ в канонической системе координат имеем

$$0 = \mathsf{J}\mathcal{L}_{\xi_i} L - \mathcal{L}_{\eta_i} L = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial u^i} & -\frac{\partial B}{\partial u^i} \\ \frac{\partial B}{\partial u^i} & \frac{\partial A}{\partial u^i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial v^i} & -\frac{\partial B}{\partial v^i} \\ \frac{\partial B}{\partial v^i} & \frac{\partial A}{\partial v^i} \end{pmatrix}$$

Здесь частные производные матрицы означают матрицу, состоящую из частных производных по соответствующей координате компонент. Мы получаем

$$\frac{\partial A}{\partial v^i} = -\frac{\partial B}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial A}{\partial u^i} = \frac{\partial B}{\partial v^i}. \tag{2.28}$$

Это в точности условия Коши-Римана для компонентов $(L^{\mathbb{C}})^i_j$. Получаем, что компоненты матрицы $L^{\mathbb{C}}$ голоморфные в комплексных координатах и, стало быть, операторное поле $L^{\mathbb{C}}$ голоморфное. Третье утверждение теоремы доказано.

Для доказательства четвертого утверждения нам потребуется запись дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial z^i}$ в виде $\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i} - \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial v^i}\Big)$. Распишем слагаемые в формуле (2.26) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(L^{\mathbb{C}})^s_j \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^i_k}{\partial z^s} = \frac{1}{2}\Big(A^s_j + \mathrm{i}\, B^s_j\Big)\Big(\frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + \frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} - \mathrm{i}\, \frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} + \mathrm{i}\, \frac{\partial B^i_k}{\partial u^s}\Big) = \\
=&\frac{1}{2}\Big(A^s_j \frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + A^s_j \frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} + B^s_j \frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - B^s_j \frac{\partial B^i_k}{\partial u^s}\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(B^s_j \frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + B^s_j \frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} + A^s_j \frac{\partial B^i_k}{\partial u^s} - A^s_j \frac{\partial A^i_k}{\partial v^s}\Big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(L^{\mathbb{C}})^s_k \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^i_j}{\partial z^s} = \frac{1}{2}\Big(A^s_k + \mathrm{i}\, B^s_k\Big)\Big(\frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} + \frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} - \mathrm{i}\, \frac{\partial A^i_j}{\partial v^s} + \mathrm{i}\, \frac{\partial B^i_j}{\partial u^s}\Big) = \\
=&\frac{1}{2}\Big(A^s_k \frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} + A^s_k \frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} + B^s_k \frac{\partial A^i_j}{\partial v^s} - B^s_k \frac{\partial B^i_j}{\partial u^s}\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(B^s_k \frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} + B^s_k \frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} + A^s_k \frac{\partial B^i_j}{\partial u^s} - A^s_k \frac{\partial A^i_j}{\partial v^s}\Big); \\
&(L^{\mathbb{C}})^i_s \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^s_k}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\Big(A^i_s + \mathrm{i}\, B^i_s\Big)\Big(\frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} + \frac{\partial B^s_k}{\partial v^j} - \mathrm{i}\, \frac{\partial A^s_k}{\partial v^j} + \mathrm{i}\, \frac{\partial B^s_k}{\partial u^j}\Big) = \\
=&\frac{1}{2}\Big(A^i_s \frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} + A^i_s \frac{\partial B^s_k}{\partial v^j} + B^i_s \frac{\partial A^s_k}{\partial v^j} - B^i_s \frac{\partial B^s_k}{\partial u^j}\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(B^i_s \frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} + B^i_s \frac{\partial B^s_k}{\partial v^j} + A^i_s \frac{\partial B^s_k}{\partial u^j} - A^i_s \frac{\partial A^s_k}{\partial v^j}\Big);
\end{aligned}$$

$$(L^{\mathbb{C}})^i_s \frac{\partial (L^{\mathbb{C}})^s_j}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\Big(A^i_s + \mathrm{i}\, B^i_s\Big)\Big(\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + \frac{\partial B^s_j}{\partial v^k} - \mathrm{i}\,\frac{\partial A^s_j}{\partial v^k} + \mathrm{i}\,\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(A^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial v^k} + B^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial v^k} - B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k}\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(B^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial v^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k} - A^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial v^k}\Big).$$

Определим выражения M^i_{jk} и N^i_{jk} условием $\mathcal{N}_{L^{\mathbb{C}}} = \frac{1}{2}(M + \mathrm{i}\, N)$. В локальных координатах получаем

$$M^i_{jk} = A^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + A^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} + B^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - B^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial u^s} - A^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} - A^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial v^s} + B^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial u^s} -$$
$$- A^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} - A^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial v^j} - B^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial v^j} + B^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j} + A^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial v^k} + B^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial v^k} - B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k};$$

$$N^i_{jk} = B^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + B^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} + A^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial u^s} - A^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} - B^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} - A^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial u^s} + A^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial v^s} -$$
$$- B^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} - B^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial v^j} - A^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j} + A^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial v^j} + B^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial v^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k} - A^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial v^k}.$$

Таким образом, $\mathcal{N}_{L^{\mathbb{C}}} = 0$ тогда и только тогда, когда $M = N = 0$. Вспомним, что компоненты A, B удовлетворяют условиям Коши-Римана в виде (2.28), поэтому некоторые слагаемые в этих выражениях совпадают. А именно, выполнены следующие равенства

$$\frac{1}{2}M^i_{jk} = A^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial u^s} + B^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - A^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial u^s} - B^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial v^s} - A^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} + B^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j} + A^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} - B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k},$$
$$\frac{1}{2}N^i_{jk} = B^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} + A^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial u^s} - B^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial v^s} - A^s_k\frac{\partial B^i_j}{\partial u^s} - B^i_s\frac{\partial A^s_k}{\partial u^j} - A^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j} + B^i_s\frac{\partial A^s_j}{\partial u^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k}.$$

Теперь вычислим $\mathcal{N}_L$ в канонических для J координатах (помним, что в этих координатах L имеет вид (2.23)). Имеем

$$0 = \mathcal{N}_L(\xi_j, \xi_k) = [L\xi_j, L\xi_k] - L[L\xi_j, \xi_k] - L[\xi_j, L\xi_k] =$$
$$= [A^q_j\xi_q + B^s_j\eta_s, A^q_k\xi_q + B^s_k\eta_s] - L[A^q_j\xi_q + B^s_j\eta_s, \xi_k] - L[\xi_j, A^q_k\xi_q + B^s_k\eta_s] =$$
$$= \Big(A^q_j\frac{\partial A^i_k}{\partial u^q} - A^q_k\frac{\partial A^i_j}{\partial u^q} + B^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial v^s}\Big)\xi_i + \Big(-A^q_k\frac{\partial B^i_j}{\partial u^q} + A^q_j\frac{\partial B^i_k}{\partial u^q} + B^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial B^s_j}{\partial v^s}\Big)\eta_i +$$
$$+ L\Big(\frac{\partial A^q_j}{\partial u^k}\xi_q + \frac{\partial B^s_j}{\partial u^k}\eta_s\Big) - L\Big(\frac{\partial A^q_k}{\partial u^j}\xi_q + \frac{\partial B^s_k}{\partial u^j}\eta_s\Big) =$$
$$= \Big(A^q_j\frac{\partial A^i_k}{\partial u^q} - A^q_k\frac{\partial A^i_j}{\partial u^q} + B^s_j\frac{\partial A^i_k}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial A^i_j}{\partial v^s}\Big)\xi_i + \Big(-A^q_k\frac{\partial B^i_j}{\partial u^q} + A^q_j\frac{\partial B^i_k}{\partial u^q} + B^s_j\frac{\partial B^i_k}{\partial v^s} - B^s_k\frac{\partial B^s_j}{\partial v^s}\Big)\eta_i +$$
$$+ \Big(A^i_q\frac{\partial A^q_j}{\partial u^k} - B^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k} - A^i_q\frac{\partial A^q_k}{\partial u^j} + B^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j}\Big)\xi_i + \Big(B^i_q\frac{\partial A^q_j}{\partial u^k} + A^i_s\frac{\partial B^s_j}{\partial u^k} - B^i_q\frac{\partial A^q_k}{\partial u^j} - A^i_s\frac{\partial B^s_k}{\partial u^j}\Big)\eta_i.$$

Группируя коэффициенты при ξ_i и η_j, мы получаем, что $N = M = 0$. Значит, последнее утверждение теоремы доказано. $\square$

Ключевым вопросом в геометрии Нийенхейса является приведение объектов к нормальной форме. К этому классу утверждений можно отнести, например, теорему Нийенхейса, сформулированную ранее. Традиционно в литературе рассматривается случай вещественных собственных значений. Теорема 2.4.2 позволяет переносить полученные результаты на комплексный случай почти дословно. Как пример, сформулируем комплексный вариант теоремы Нийенхейса.

Теорема 2.4.3 (Общая теорема Хаантьеса)**.** *Пусть в окрестности точки* p *задан оператор Нийенхейса L с простым (не обязательно вещественным) спектром. Тогда в подходящей системе координат $u^1,\dots,u^k,v^1,w^1,\dots,v^s,w^s, k+2s=n$ оператор L приводится к виду*

$$L=\begin{pmatrix} L_1 & 0\\ 0 & L_2\end{pmatrix},$$

где матрицы L_1 и L_2 размеров $k\times k$ и $2s\times 2s$ соответственно имеют вид:

$$L_1=\begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2(u^2) & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k(u^k)\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix} \Lambda_1(v^1,w^1) & 0_{2\times2} & \dots & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & \Lambda_2(v^2,w^2) & \dots & 0_{2\times2}\\ & & \ddots & \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times2} & \dots & \Lambda_s(v^s,w^s)\end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_i, i=1,\dots k$ — функции одной переменной, а

$$\Lambda_i(v^i,w^i)=\begin{pmatrix} a_i(v^i,w^i) & -b_i(v^i,w^i)\\ b_i(v^i,w^i) & a_i(v^i,w^i)\end{pmatrix},\quad \text{причем}\quad \begin{cases} \frac{\partial a_i}{\partial v^i}=\frac{\partial b_i}{\partial w^i},\\ \frac{\partial a_i}{\partial w^i}=-\frac{\partial b_i}{\partial v^i}\end{cases}$$

То есть функции a_i,b_i — функции двух переменных, удовлетворяющие условиям Коши-Римана.

Доказательство теоремы 2.4.3 мы получим чуть позже как следствие теоремы о расщеплении.

2.5 Теорема о расщеплении

Для начала нам потребуется понятие взаимно простых многочленов и результанта. Мы руководствуемся в своем изложении книгой [147] (гл. 1 §3). Рассмотрим пару многочленов с постоянными коэффициентами

$$p(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\dots+b_m \quad \text{и} \quad q(t)=a_0t^k+a_1t^{k-1}+\dots+a_k.$$

Результантом двух многочленов назовем определитель матрицы, составленной из коэффициентов многочлена

$$\begin{pmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 & 0 & \dots & 0\\ b_1 & b_0 & \dots & 0 & -a_1 & -a_0 & \dots & 0\\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 & -a_2 & -a_1 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & b_0 & \vdots & \vdots & \ddots & -a_0\\ b_m & b_{m-1} & \dots & \vdots & -a_k & -a_{k-1} & \dots & \vdots\\ 0 & b_m & \ddots & \vdots & 0 & -a_k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{m-1} & \vdots & \vdots & \ddots & -a_{k-1}\\ 0 & 0 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & -a_k\end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Результант обозначается как $\mathrm{Res}(p,q)$. Матрица называется матрицей Сильвестра. Верна теорема:

Теорема 2.5.1 (Теорема 3.1 в [147]). *Пусть x_i, y_j — корни многочлена $p(t), q(t)$ с учетом кратности, включая комплексные. Тогда*

$$\mathrm{Res}(p, q) = b_0^m a_0^k \prod_{1 \le i \le m, 1 \le j \le k} (x_i - y_j).$$

Легко видеть, что результант равен нулю тогда и только тогда, когда у многочленов есть общие корни. Если результант не равен нулю, то такие многочлены мы будем называть взаимно простыми. В случае полей $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ это определение эквивалентно следующему: в разложении p, q на неприводимые нет общих множителей.

Теорема 2.5.2 (Теорема о расщеплении). *Пусть в окрестности точки* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *задан гладкий (аналитический) оператор Нийенхейса L. Пусть в точке* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *характеристический многочлен оператора L разлагается в произведение $\chi_L(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$, где $\chi_1(t)$ и χ_2 взаимно просты и имеют степени k, m соответственно. Тогда*

1. *В окрестности точки* p *существует гладкая (аналитическая) система координат $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$, в которой L имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u) & 0_{k \times m} \\ 0_{m \times k} & L_2(v) \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица L_1 имеет размеры $k \times k$, а ее компоненты зависят только от координат u; матрица L_2 имеет размеры $m \times m$, и ее компоненты зависят только от координат v;

2. *Оба оператора L_1, L_2 — операторы Нийенхейса, и их характеристические многочлены совпадают с $\chi_1(t), \chi_2(t)$ соответственно.*

Доказательство. Распределение $\mathcal{D}$ называется инвариантным относительно операторного поля L, если $L\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ в каждой точке. Начнем доказательство со следующей технической леммы, связанной со свойствами инвариантных распределений.

Лемма 2.5.1. *Пусть дано операторное поле L и инвариантное распределение $\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{D}$ инвариантно относительно любой $f(L)$, где f удовлетворяет условиям теорем 2.3.1, 2.3.2.*

Доказательство. Напомним, что в предположениях леммы $f(L)$ равномерно приближаются операторными полями $p_k(L), k \to \infty$, где $p_k(t)$ — последовательность многочленов с вещественными коэффициентами.

При этом для любого векторного поля $\xi \in \mathcal{D}$ верно, что $p_k(L) \in \mathcal{D}$. Переходя к пределу, получаем утверждение леммы. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Начнем с анализа разложения характеристического многочлена на множители.

Лемма 2.5.2. *В условиях теоремы 2.5.2 верно следующее: в некоторой окрестности точки* p *существуют единственные многочлены $\chi_1(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k$ и $\chi_2(t) = t^m + b_m t^{k-1} + \dots + b_m$ с гладкими коэффициентами a_i, b_j, такие что:*

1. Они взаимно простые во всей окрестности;

2. Во всей окрестности выполнено разложение $\chi_L(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$.

Доказательство. В точке р рассмотрим корни $\chi_L(t)$. Некоторые из них вполне могут быть комплексными. Обозначим корни с учетом кратности как $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (то есть среди λ_i могут встречаться совпадающие). Без ограничения общности считаем, что корни занумерованы так, что $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ — это корни с учетом кратности $\chi_1(t)$, а $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+m}\}$ — корни с учетом кратности $\chi_2(t)$. В силу взаимной простоты $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ корень из одного набора не встречается в другом.

Хорошо известно (см. [50]), что корни многочлена над $\mathbb{C}$ — непрерывные функции от его коэффициентов. Таким образом, считаем, что корни определены в окрестности $U(\mathrm{p})$ и у нас есть два не пересекающихся набора непрерывных (вообще говоря, комплексно-значных) функций λ_i. Это означает, что разложение $\chi_L(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$ продолжается на целую окрестность $U(\mathrm{p})$. При этом, вообще говоря, коэффициенты многочленов $\chi_i(t)$ — непрерывные функции.

Покажем теперь, что коэффициенты $\chi_i(t)$ на самом деле гладкие (аналитические) функции. Без ограничения общности предполагаем, что $k \geq m$. Разложение задает нам следующую систему уравнений на коэффициенты

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= a_1 + b_1, \\
\sigma_2 &= a_2 + a_1 b_1 + b_2, \\
&\dots \\
\sigma_m &= a_m + a_{m-1} b_1 + \dots + b_m \\
\sigma_{m+1} &= a_{m+1} + a_m b_1 + \dots + a_1 b_m, \\
&\dots \\
\sigma_k &= a_k + a_{k-1} b_1 + \dots + a_{k-m} b_m, \\
\sigma_{k+1} &= a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \dots + a_{k-m+1} b_m, \\
&\dots \\
\sigma_n &= a_k b_m.
\end{aligned}$$

Эту систему можно рассматривать как систему из n функциональных уравнений

$$\Phi_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

от $2n$ переменных σ, a, b. Рассмотрим матрицу $n \times n$, состоящую из производных Φ_i

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_k} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial b_m} \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_k} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial b_m} \\
 & & \ddots & & & \vdots & \\
\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial a_1} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial a_k} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial b_m} \\
\frac{\partial \Phi_n}{\partial a_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_k} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial b_m}
\end{pmatrix}.$$

Вычисляя ее явно для нашей системы, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
b_1 & 1 & \dots & 0 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\
b_2 & b_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\
b_m & b_{m-1} & \dots & \vdots & a_k & a_{k-1} & \dots & \vdots \\
0 & b_m & \ddots & \vdots & 0 & a_k & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & b_{m-1} & \vdots & \vdots & \ddots & a_{k-1} \\
0 & 0 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & a_k
\end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы с точностью до знака — результант $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ (а сама матрица — почти матрица Сильвестра в смысле определения из книги [147]). Так как многочлены взаимно просты, то результант не равен нулю. Таким образом, по теореме о неявной функции a, b выражаются как гладкие (аналитические) функции от переменных σ, которые являются гладкими (аналитическими) функциями от координат. Таким образом, a_i, b_j так же являются гладкими (аналитическими) функциями от координат.

Единственность таких многочленов следует из определения: коэффициенты однозначно определяются набором корней, и наборы не пересекаются. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.5.1. Еще раз подчеркнем, что сами функции λ_i внутри наборов могут "сталкиваться"и не быть даже класса $\mathrm{C}^1(\mathrm{M}^n)$, однако построенные по ним многочлены Виета - то есть коэффициенты соответствующих многочленов - гладкими (аналитическими) будут. $\blacksquare$

Пусть теперь $\chi_i(t)$ обозначает многочлены из леммы 2.5.2. Тогда определим пару распределений

$$\mathcal{D}_1 = \mathrm{Ker}\ \chi_1(L) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_2 = \mathrm{Ker}\ \chi_2(L).$$

Здесь уместно сделать небольшое напоминание из линейной алгебры. Пусть векторное пространство V разложено в прямую сумму $V = W_1 \otimes W_2$ подпространств W_1, W_2. Тогда определены проекторы P_1, P_2, которые действуют следующим образом

$$P_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \xi \in W_1, \\ 0, & \xi \in W_2 \end{cases}, \quad P_2(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in W_1, \\ \xi, & \xi \in W_2. \end{cases}$$

Легко видеть, что проекторы однозначно определяются по разложению и наоборот: пара проекторов с не пересекающимися ядрами с условием $P_1P_2 = 0$ однозначно определяет разложение пространства в прямую сумму двух подпространств. Теперь перейдем к следующей лемме.

Лемма 2.5.3. *Построенные выше распределения $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ обладают следующими свойствами:*

1. *Это гладкие (аналитические) регулярные распределения размерностей k и m соответственно. В частности, $T\mathrm{M}^n = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$;*

2. *Они инвариантны относительно L;*

3. *Существуют такие аналитические функции f_1, f_2, что проекторы для $\mathcal{D}_i$ определяются как $P_i = f_i(L)$;*

4. *Распределения $\mathcal{D}_i$ — интегрируемы.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни (с учетом кратности) многочлена $\chi_L(t)$ в точке p, причем $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ — корни $\chi_1(t)$, а $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+m}\}$ — корни $\chi_2(t)$. При этом, как мы помним из доказательства леммы 2.5.2, корни можно продолжить как непрерывные функции на целую окрестность. Проведем рассуждения для $\chi_1(L)$. В этом случае получаем

$$\chi_1(L) = \Big(L - \lambda_1 \operatorname{Id}\Big) \dots \Big(L - \lambda_k \operatorname{Id}\Big).$$

Из того, что наборы корней не пересекаются, следует, что если какой-то корень λ_i встречается в таком произведении, то он встречается там k_i раз, где k_i — его алгебраическая кратность. Из этого следует, что

1. Ядром этого оператора является прямая сумма корневых пространств, соответствующих всем $\lambda_1, \dots, \lambda_k$;

2. Размерность ядра постоянна и равна k.

Проводя аналогичные рассуждения для операторного поля $\chi_2(L)$, получаем, что размерность его ядра m. При этом ядра $\chi_1(L)$ и $\chi_2(L)$ не пересекаются.

Наконец, заметим, что эти ядра как линейные пространства в каждой точке задаются системой линейных уравнений $\chi_i(L)\xi = 0$, коэффициенты которой гладко зависят от точки. Взяв подходящий минор, который не обращается в ноль в p (и, следовательно, в окрестности), мы можем построить систему решений ξ_i, которая гладко (аналитически) зависит от точки. Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение вытекает из инвариантности корневых подпространств относительно L. Перейдем к доказательству третьего утверждения. Рассмотрим множества $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$, определенные как

$$K_1 := \bigcup_{i=1}^{k} B(\lambda_i(\mathrm{p}), \varepsilon) \ , \quad K_2 := \bigcup_{j=k+1}^{k+m} B(\lambda_j(\mathrm{p}), \varepsilon) \ , \quad K := K_1 \cup K_2,$$

где $B(z, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ обозначает замкнутый диск радиуса ε с центром в точке $z \in \mathbb{C}$, а $\lambda_i(\mathrm{p})$ означает значение соответствующего корня из разбиения в точке p. Положим ε достаточно малым, чтобы, во-первых, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, а во-вторых, дополнение к K было связным. Симметричность множества относительно оси Ox очевидна. Рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in K_1, \\ 0, & z \in K_2 \end{cases}.$$

Эта функция непрерывна на K и аналитична внутри него (поскольку локально постоянна). В достаточно малой окрестности точки p спектр L лежит внутри K. Таким образом, по теореме 2.3.2 определено операторное поле $h_1(L)$. Так как L — оператор Нийенхейса, то это операторное поле — тоже оператор Нийенхейса. По лемме 2.5.1 распределения $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ оба инвариантны относительно $h_1(L)$.

При этом (по построению) собственные значения ограничения на $\mathcal{D}_1$ все равны единице, а собственные значения ограничения на $\mathcal{D}_2$ — нулю. Обозначим $M = h_1(L)$ и определим новую функцию

$$P_1 = f_1(L) = \mathrm{Id} + (M^n - \mathrm{Id})^{2n+1},$$

где M^n означает $n-$ю степень оператора M. Легко видеть, что правая часть этого определения — многочлен от M. Стало быть, это тоже оператор Нийенхейса. При этом, по построению ограничение P_1 на $\mathcal{D}_2$ уже равно нулю, а на $\mathcal{D}_1$ — единичному оператору.

Таким образом, мы построили проектор P_1, который является оператором Нийенхейса. Аналогичным образом строится проектор P_2. По построению имеем, что $\mathcal{D}_i = \mathrm{Image}(P_i), i = 1, 2$. Равенство нулю кручения Нийенхейса для P_i можно переписать как

$$[P_\xi, P_i\eta] = P_i[P_i\xi, \eta] + P_i[\xi, P_i\eta] - P_i^2[\xi, \eta] = P_i\Big([P_i\xi, \eta] + [\xi, P_i\eta] - P_i[\xi, \eta]\Big).$$

Так как образ порождается векторными полями $P_i\xi$, то он замкнут относительно коммутирования. По теореме Фробениуса 12.0.15 это распределение интегрируемо. Лемма полностью доказана. □

Из леммы 2.5.3 вытекает, что существует система координат, для которой $\xi_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, i = 1, \dots, k$ порождают $\mathcal{D}_1$, а $\eta_j = \frac{\partial}{\partial v^j}, j = 1, \dots, m$ порождают $\mathcal{D}_2$. По построению в этой системе координат L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u,v) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & L_2(u,v) \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{k\times k} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & \mathrm{Id}_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности будем считать, что L_1 — невырожденный (в противном случае можно сделать сдвиг $L_1 + c\mathrm{Id}$ для постоянного c). Так как LP_1 — оператор Нийенхейса, то получаем, что

$$LP_1 = L = \begin{pmatrix} L_1(u,v) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}$$

тоже оператор Нийенхейса. Кручение Нийенхейса для него имеет вид

$$0 = \mathcal{N}_L(\xi_j, \eta_r) = -L[L\xi_j, \eta_r] = (L_1)^i_s \frac{\partial (L_1)^s_j}{\partial v^r}\eta_i.$$

Так как L_1 невырожденный, получаем, что $\frac{\partial (L_1)^s_j}{\partial v^k} = 0$ для любых $1 \le s, j \le k$ и $1 \le r \le m$. Стало быть L_1 не зависит от v. Аналогичным образом показывается, что и L_2 не зависит от u. Наконец, совпадение характеристических многочленов L_1 и L_2 с множителями $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ очевидно. Теорема доказана. □

Подчеркнем еще раз, что теорема о расщеплении работает в окрестности произвольной точки, где есть подходящее разложение характеристического многочлена. Имеет место следующее замечательное следствие (которое иногда тоже называют теоремой о расщеплении).

Следствие 2.5.1. *Пусть в точке* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *спектр оператора Нийенхейса* L *состоит из* k *вещественных попарно различных собственных значений* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *с кратностями* $\mathsf{m}_1, \dots, \mathsf{m}_k$ *соответственно и* s *пар комплексно сопряженных пар* $\mu_1, \bar\mu_1, \dots, \mu_s, \bar\mu_s$ *собственных значений с кратностями* $\mathsf{l}_1, \dots, \mathsf{l}_s$*. Тогда, в окрестности точки* p *существует система координат*

$$u_1 = (u_1^1 \dots u_1^{\mathsf{m}_1}), \dots, u_k = (u_k^1 \dots u_k^{\mathsf{m}_k}), \quad v_1 = (v_1^1 \dots v_1^{2\mathsf{l}_1}), \dots, v_s = (v_s^1 \dots v_s^{2\mathsf{l}_s}),$$

в которой

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & L_k(u_k) & & & \\ & & & L_1^{\mathbb{C}}(v_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L_s^{\mathbb{C}}(v_s) \end{pmatrix},$$

где каждый блок зависит только от своей группы переменных u_i *или* v_j*. Другими словами, в окрестности точки* p *оператор Нийенхейса* L *представляется в виде прямой суммы таких операторов Нийенхейса* $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$*, что в точке* p *у них либо одно вещественное, либо пара сопряженных комплексных собственных значений.*

Легко видеть, что если все собственные значения оператора Нийенхейса L в точке p имеют кратность один, то мы получаем в точности общую теорему Хаантьеса 2.4.3.

Глава 3

Регулярные точки, компактные многообразия Нийенхейса

3.1 Случай постоянного собственного значения

Пусть в окрестности точки р задан оператор Нийенхейса L и его ранг отличен от n и постоянен. Тогда определено два естественных распределения $\mathrm{Image}(L)$ и $\mathrm{Ker}\, L$.

Распределение $\mathrm{Image}(L)$ локально порождается векторными полями $L\xi$. Переписав равенство нулю кручения Нийенхейса как

$$[L\xi, L\eta] = L([L\xi, \eta] + [\xi, L\eta] - L[\xi, \eta])$$

мы получаем, что $[L\xi, L\eta] \in \mathrm{Image}(L)$. Стало быть, по теореме 12.0.15 это распределение интегрируемо.

Мы получаем, что распределение образов интегрируемо. При этом, как показывает следующий пример, распределение ядер для оператора Нийенхейса интегрируемым быть не обязано.

Пример 3.1.1. Этот пример приводится в [59]. Рассмотрим $\mathbb{R}^4$ с координатами u^i, $i = 1 \dots 4$ и зададим векторные поля

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad \xi_3 = \frac{\partial}{\partial u^3}, \quad \xi_4 = \frac{\partial}{\partial u^4} + (1 + u^3)\frac{\partial}{\partial u^1}.$$

Определим операторное поле L как $L\xi_1 = \xi_2$, $L\xi_i = 0$, $i = 2 \dots 4$. В координатах u матрица этого оператора имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 - u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Легко видеть, что вектора ξ_i порождают все касательное пространство. При $\mathrm{Image}(L)$ натянут на $\frac{\partial}{\partial u^2}$.

Последний факт означает, что $[L\xi_i, \xi_j]$ лежит в ядре и, стало быть последние два слагаемых в формуле (2.1) обращаются в ноль. Условие $L^2 = 0$ означает, что в ноль обращается и первое слагаемое. Наконец, тот факт, что $L\frac{\partial}{\partial u^i} = f_i(u^3)\frac{\partial}{\partial u^2}$, гарантирует, что и второе слагаемое в (2.1) равно нулю. Стало быть это оператор Нийенхейса.

Ядро этого оператора порождается векторными полями ξ_2, ξ_3, ξ_4 и $[\xi_3, \xi_4] = \xi_1$, то есть распределение $\operatorname{Ker} L$ для построенного оператора Нийенхейса не интегрируемо (теорема 12.0.15). ■

Высотой нильпотентного элемента $\operatorname{ht} L$ называется такое минимальное целое число k, что $L^k \neq 0$, а $L^{k+1} = 0$. Для произвольного нильпотентного оператора L верно, что $\operatorname{ht} L \leq n - 1$.

Теорема 3.1.1. *Пусть в окрестности точки* p *общего положения задан оператор Нийенхейса L, у которого одно вещественное собственное значение λ_0. Следующие два условия эквивалентны:*

1. *В подходящей системе координат L имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{a_2}(\lambda_0) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_{a_l}(\lambda_0) \end{pmatrix},$$

   где $J_{a_i}(\lambda_0)$ — жорданов блок размера $a_i \times a_i$ с собственным значением λ_0, то есть

$$J_{a_i}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

2. *Все распределения*

$$\operatorname{Ker}(L - \lambda_0 \mathrm{Id})^k, \quad k = 1, \dots, \operatorname{ht}(L - \lambda_0 \mathrm{Id})$$

   интегрируемы.

Доказательство. Если $\lambda_0 \neq 0$, то рассмотрим $L - \lambda_0 \mathrm{Id}$. Очевидно, что L приводится к постоянному виду тогда и только тогда, когда $L - \lambda_0 \mathrm{Id}$ приводится к постоянному виду. Таким образом, без ограничения общности считаем, что L нильпотентный.

Отметим, что необходимость условия очевидна - если оператор L в виде, описанном в утверждении теоремы, то все перечисленные распределения порождаются некоторыми подмножествами базисных векторных полей. Таким образом, необходимо только доказать достаточность второго условия. Начнем доказательство с леммы.

Лемма 3.1.1. *Пусть L имеет высоту один. Тогда утверждение теоремы верно.*

Доказательство. По условию мы имеем, что $L^2 = 0$. В силу того, что p общего положения, мы получаем, в частности, что ранг и коранг постоянны. Обозначим их через m и k соответственно.

Нормальная жорданова форма L состоит из жордановых блоков размеров один и два, причем количество блоков размера два равно m. При этом k равно суммарному количеству жордановых блоков - то есть $k \geq m$. Так как ядро L по предположению теоремы интегрируемо, существует система координат

$$u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m,$$

в которой оператор имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & M \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

где матрица M имеет размер $k \times m$ и её ранг равен m. Обозначим соответствующие координатам базисные векторные поля как $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$. Имеем

$$0 = \mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) = -L[M^q_i \xi_q, \eta_j] - L[\eta_i, M^s_j \xi_q] + [M^q \xi_q, M^s_j \xi_s] = [M^q \xi_q, M^s_j \xi_s].$$

Последний переход следует из того, что $L\xi_i = 0, i = 1, \dots, k$. Таким образом, мы получаем, что векторные поля $\zeta_j = L\eta_j, j = 1, \dots, m$ попарно коммутируют и линейно независимы.

Рассмотрим распределение, порождаемое этими векторными полями. По теореме Фробениуса найдутся такие функции f_i, что $\mathcal{L}_{\zeta^i} f^j = \delta^j_i, j = 1, \dots, m$. Учитывая, что $\mathcal{L}_{\zeta^i} v^s = 0$, получаем, что дифференциалы $\mathrm{d}f^j$ удовлетворяют условию

$$L^* \mathrm{d}f^j = \mathrm{d}v^j.$$

Тогда мы можем выбрать систему координат $\bar{u}^i = f^i, \bar{v}^i = v^i, i = 1, \dots, m$ и $\bar{u}^j = g_{j-m}, j = m+1, \dots, k$. Здесь g_j — произвольные интегралы $\mathrm{Image}(L)$, независимые с $\mathrm{d}v^i$. В новых координатах матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0_{m\times k} & \mathrm{Id}_{m\times m} \\ 0_{k\times k} & 0_{k\times m} \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.1.1. Доказывать будем индукцией по высоте L. Лемма 3.1.1 задает базу индукции.

Теперь пусть утверждение доказано для высоты s. Рассмотрим оператор L высоты $s+1$. Снова выберем координаты $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$, согласованные с распределением $\operatorname{Ker} L$. Обозначим соответствующие координатам базисные векторные поля как $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$. Оператор L в выбранных координатах принимает вид

$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & M \\ 0_{m\times k} & L_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь L_2 — квадратная матрица $m \times m$. Матрица M, вообще говоря, прямоугольная, имеет размер $k \times m$. Отметим, что m равна рангу, однако, неравенства $k \geq m$, которое возникало в доказательстве леммы 3.1.1, здесь отсутствует. Имеем

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{N}_L(\xi_i, \eta_j) &= -L[L\xi_i, \eta_j] - L[\xi_i, L\eta_j] + [L\xi_i, L\eta_j] = \\ &= -L[\xi_i, L\eta_j] = -L[\xi_i, (L_2)^s_j \eta_s + M^q_j \xi_q = \\ &= -L\left(\frac{\partial (L_2)^s_j}{\partial u^i} \eta^s\right) \end{aligned}$$

Из линейной алгебры мы получаем, что условие $L\zeta = 0$ для векторного поля, которое выражается через η_j, равносильно $\zeta = 0$. Таким образом, в последнем равенстве выше нулю равны все коэффициенты вида $\frac{\partial (L_2)^s_j}{\partial u^i}$. То есть L_2 зависит только от переменных v.

Рассмотрим оператор L_2 как оператор на $\mathbb{R}^n$ с координатами $v^1, \dots, v^m$. Покажем, что его кручение Нийенхейса ноль. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
&0 = L^2[\eta_i, \eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] + [L\eta_i, L\eta_j] = \\
&= -L[M^q_i(u,v)\xi_q + (L_2)^s_i(u)\eta_s, \eta_j] - L[\eta_i, M^q_j(u,v)\xi_q + (L_2)^r_j(v)\eta_r] + \\
&+ [M^q_i(u,v)\xi_q + (L_2)^s_i(v)\eta_s, M^p_j(u,v)\xi_p + (L_2)^r_j(y)\eta_r] = \\
&= \Big((L_2)^q_j \frac{\partial (L_2)^r_i}{\partial y^q} - (L_2)^q_i \frac{\partial (L_2)^r_j}{\partial y^q} + (L_2)^q_i \frac{\partial (L_2)^r_j}{\partial y^q} - (L_2)^q_j \frac{\partial (L_2)^r_i}{\partial y^q} \Big) \eta_r + \dots .
\end{aligned}$$

В последней формуле мы переименовали индексы суммирования. Многоточие обозначает векторное поле, которое лежит в $\operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Обращение в ноль всех компонент кручения Нийенхейса означает, что коэффициенты перед η_r так же обращаются в ноль. Это в точности означает, что L_2 — оператор Нийенхейса.

Вспомним следующий факт из линейной алгебры. Пусть задан нильпотентный линейный оператор L высоты $s+1$ на линейном пространстве V. Имеем, что $\operatorname{Image}(L^{s+1}) \subseteq \operatorname{Ker} L$. Из этого немедленно вытекает, что высота фактор-оператора на пространстве $V/\operatorname{Ker} L$ равна s. Таким образом, высота L_2 равна s.

По индукционному предположению для L_2 теорема верна. Без ограничения общности считаем, что L_2 в нормальной жордановой форме

$$L_2 = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_{r_\nu} \end{pmatrix},$$

где размер J_{r_i} равен r_i. Мы разбиваем координаты v на ν групп по r_i в каждой следующим образом:

$$v_1 = (v^1_1, \dots, v^{r_1}_1), \quad \dots, \quad v_\nu = (v^1_\nu, \dots, v^{r_\nu}_\nu).$$

Разумеется, $r_1 + \dots + r_\nu = m$. Базисные векторные поля η мы будем также нумеровать двумя индексами, то есть $\frac{\partial}{\partial v^j_i} = \eta_{i,j}$. Для удобства считаем, что матрица M аналогичным образом разбита ν подматриц размеров $k \times r_i$. Имеем

$$M\eta_{i,j} = M^q_{i,j}\xi_q,$$

где i — номер подматрицы, а q, j — номера элементов в соответствующей подматрице. Для дифференциалов координатных функций из группы с номером i мы имеем

$$\begin{aligned}
&L^* \mathrm{d}v^i_j = \mathrm{d}y^{i+1}_j, \quad 1 \le i < r_j, \\
&L^* \mathrm{d}y^{r_j}_i = 0.
\end{aligned}$$

Для базисных векторных полей из соответствующей группы

$$\begin{aligned}
&L\eta_{i,j} = \eta_{i,j-1} + M^q_{i,j}\xi_q, \quad 1 < i \le r_i, \\
&L\eta_{i,1} = M^q_{i,1}\xi_q.
\end{aligned}$$

Из этого немедленно вытекает, что для всех допустимых индексов a, b, i, j:

$$[L\eta_{a,i}, \eta_{b,j}] \in \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} = \operatorname{Ker} L.$$

В свою очередь для кручения Нийенхейса имеем

$$0 = \mathcal{N}_L(\eta_{a,i}, \eta_{b,j}) = [L\eta_{a,i}, L\eta_{b,j}] = 0.$$

Определяем векторные поля $\zeta_{i,j} = L\eta_{i,j}$. Мы снова хотим применить теорему Фробениуса (теорема 12.0.15) и выбрать новые координаты так же, как мы делали это в доказательстве леммы 3.1.1. Для этого мы следуем алгоритму:

1. Для каждого векторного поля $\zeta_{a,1}$ мы выбираем функцию f_a^1 такую, что $\mathcal{L}_{\zeta_{i,j}}(f_a^1) = \delta_1^j \delta_i^a$. Это можно сделать по теореме Фробениуса (теорема 12.0.15). Этот набор условий эквивалентен (для ξ_i он выполняется тривиально, а для η — по построению)

   $$L^* \mathrm{d} f_a^1 = \mathrm{d} v_a^1;$$

2. Для индексов $1 \leq l \leq r_a - 1$ мы выбираем функции f_a^l просто как v_a^{l-1}. Для них получаем

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta_{i,j}} f_a^l = \mathcal{L}_{\zeta_{i,j}}(v_a^{l-1}) = \langle L\eta_{i,j}, \mathrm{d}v_a^{l-1} \rangle = \langle \eta_{i,j}, L^* \mathrm{d} v_a^{l-1} \rangle = \\ = \langle \eta_{i,j}, \mathrm{d} v_a^l \rangle = \delta_j^l \delta_i^a. \end{aligned}$$

   Из этого соотношения мы получаем

   $$L^* \mathrm{d} f_a^l = \mathrm{d} f_a^{l+1}.$$

   В каждом блоке мы получаем по $r_a - 1$ функций. Вместе с предыдущим пунктом, мы получаем m функций, дифференциалы которых независимы по построению;

3. Мы берем ν функций $h^j = v_j^{r_j}$. Они представляют собой интегралы распределения, задаваемого векторными полями $\zeta_{i,j}$ (то есть $\operatorname{Image}(L)$). Действительно

   $$\mathcal{L}_{\zeta_{a,i}} v_j^{r_j} = \langle L\eta_{a,i}, \mathrm{d} v_j^{r_j} \rangle = \langle \eta_{a,i}, L^* \mathrm{d} v_j^{r_j} \rangle = 0.$$

   Из условия того, что они интегралы, немедленно вытекает, что они независимы с предыдущими. То есть мы получили $m + \nu$ функций, дифференциалы которых независимы;

4. Наконец, мы берем $k - \nu$ интегралов распределения $\operatorname{Image}(L)$, которые функционально независимы с h^i. Мы обозначим эти функции как g^i. Легко проверяется, что для этих функций выполнено

   $$L^* \mathrm{d} g^i = 0.$$

   Действительно, это соотношение очевидно для ξ_q, а для $\eta_{a,i}$ оно выполняется по построению. Это же условие выполнено и для h^i.

Собирая все f, h, g, мы получаем систему координат, в которой матрица L^* состоит из нулей и единиц. С помощью линейной замены такая матрица приводится к жордановой нормальной форме. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Следующая теорема рассматривает случай пары постоянных комплексно сопряжённых значений.

Теорема 3.1.2. *Пусть в окрестности точки* p *общего положения задан оператор Нийенхейса L, у которого два комплексно сопряжённых постоянных собственных значения $\mu_0, \bar{\mu}_0$. Следующие два условия эквивалентны:*

1. *В подходящей системе координат L имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} J^{\mathbb{C}}_{a_1}(\mu_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^{\mathbb{C}}_{a_2}(\mu_0) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J^{\mathbb{C}}_{a_l}(\mu_0) \end{pmatrix},$$

   где $J_{a_i}(\mu_0)$ — комплексный жорданов блок размера $2a_i \times 2a_i$ с собственными значениями $\mu_0, \bar{\mu}_0$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}_{a_i}(\mu_0) = \begin{pmatrix} \Lambda & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \ddots & & \\ & \Lambda & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \\ & & & \Lambda & \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\mu_0 & -\operatorname{Im}\mu_0 \\ \operatorname{Im}\mu_0 & \operatorname{Re}\mu_0 \end{pmatrix};$$

2. *Все комплексно-аналитичекие (комплексная структура задается $\mathsf{J} = i(L)$ из теоремы 2.4.2) распределения*

$$\operatorname{Ker}(L - \mu_0 \mathrm{Id})^k, \quad k = 1, \dots, \operatorname{ht}(L - \mu_0 \mathrm{Id})$$

   интегрируемы в комплексно-аналитическом смысле.

Доказательство. Рассматриваем комплексную структуру $J = i(L)$ и вводим локальные голоморфные координаты $z^1, \dots, z^n$. По теореме 2.4.2 оператор L оказывается овеществлением оператора Нийенхейса с постоянным собственным значением μ_0.

Для него доказательство повторяется дословно с заменой теоремы Фробениуса 12.0.15 на голоморфную теорему Фробениуса 12.0.17. Приводим оператор к нормальной жордановой форме с комплексным собственным значением μ_0.

После этого мы переходим к каноническим вещественным координатам. Их построение подробно описано в примере 2.4.1. Теорема доказана. □

Из теорем 3.1.1 и 3.1.2 мы получим два замечательных следствия.

Следствие 3.1.1. *Пусть в окрестности точки* p *задан нильпотентный оператор Нийенхейса L, который всюду сопряжен прямой сумме k жордановых блоков одинаковой размерности m. Тогда в подходящей системе координат оператор приводится к виду*

$$L = \begin{pmatrix} J_m(0) & 0_{m\times m} & \dots & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & J_m(0) & \dots & 0_{m\times m} \\ & & \ddots & \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} & \dots & J_m(0) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. По предложению 12.0.1 образы $\mathrm{Image}(L^k)$ интегрируемы. С другой стороны, так как оператор в каждой точке сопряжен прямой сумме одинаковых жордановых клеток размера m, то $\mathrm{Image}(L^k) = \mathrm{Ker}(L^{m-k})$. Таким образом, все распределения ядер интегрируемы и применима теорема 3.1.1. □

Следствие 3.1.2 (Критерий приведения операторного поля к постоянному виду)**.** *Пусть в окрестности точки* p *задано операторное поле* L *и в точке* p *спектр* L *состоит из* k *вещественных попарно различных собственных значений* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *с кратностями* $\mathsf{m}_1, \dots, \mathsf{m}_k$ *соответственно и* s *пар комплексно сопряженных пар* $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ *собственных значений с кратностями* $\mathsf{l}_1, \dots, \mathsf{l}_s$. L *в окрестности точки* p *приводится в некоторой системе координат к постоянному виду тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *Точка* p *— точка общего положения;*
2. *Все собственные значения* λ_i, μ_j *операторного поля* L *постоянны в целой окрестности;*
3. *Кручение Нийенхейса* $\mathcal{N}_L$ *равно нулю;*
4. *Все распределения вида* $\mathrm{Ker}(L - \lambda_i)^s, s = 1, \dots, \mathsf{m}_i, i = 1, \dots, k$ *интегрируемы;*
5. *Все комплексные (в смысле комплексной структуры* $\mathsf{J} = i(L)$ *из теоремы 2.4.2) распределения вида* $\mathrm{Ker}(L - \mu_i)^s, s = 1, \dots, \mathsf{l}_i, i = 1, \dots, s$ *интегрируемые.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности сначала применяем теорему о расщеплении. Из условий получаем, что каждый блок удовлетворяет либо условиям теоремы 3.1.1, либо условиям теоремы 3.1.2. □

3.2 Безнадежная задача в нильпотентном случае

Следующая теорема показывает, что, когда распределения ядер не являются интегрируемыми, даже в простейшем случае поиск нормальных форм сводится к поиску нормальных форм (вообще говоря) неинтегрируемых распределений.

Теорема 3.2.1. *Пусть* L *— операторное поле. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1. L *— нийенхейсов, его ранг равен* k *и* $L^2 = 0$*;*
2. *В подходящей системе координат* $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$ *оператор принимает вид;*
$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & M(v) \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$
Здесь $k + m = n, k \leq m$ *и матрица* M *имеет размер* $k \times m$.

Классы эквивалентности полунормальных форм (3.2) совпадают с классами эквивалентности $m - k$*-мерных распределений в* m*-мерном пространстве.*

Доказательство. Как мы выяснили в начале раздела 3.1, распределение $\mathrm{Image}(L)$ интегрируемо. Выберем систему координат

$$u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m,$$

в которой $\xi_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, i = 1, \dots, k$ порождают $\mathrm{Image}(L)$. Обозначим через $\eta_j = \frac{\partial}{\partial v^j}, j = 1, \dots, m$. В этой системе координат оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & N(u, v) \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Здесь $m + k = n$. Отметим, что эта форма очень похожа на ту, что возникает в доказательстве леммы 3.1.1. Разница тут состоит в том, что $k \leq m$ и, вообще говоря, в матрице N количество столбцов больше, чем количество строк.

Введем векторные поля $\zeta_i = L\eta_i$. Заметим, что $[\eta_i, \zeta_j] \in \mathrm{Image}(L)$. Так как $L^2 = 0$, то получаем, что $L[\eta_i, \zeta_j] = L[\eta_i, L\eta_j] = 0$. Обращение в ноль кручения Нийенхейса в этом случае дает

$$0 = [L\eta_i, L\eta_j] + L^2[\eta_i, \eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] = [L\eta_i, L\eta_j] = [\zeta_i, \zeta_j],$$

то есть векторные поля ζ_i попарно коммутируют. При этом ранг матрицы равен k. Без ограничения общности считаем, что первый минор $k \times k$ невырожденный. Тогда найдутся k таких функций $f_1, \dots, f_k$, что

1. $\mathrm{d}f_i$ линейно независимы;

2. $\mathcal{L}_{\zeta_i} f_j = \delta^i_j, 1 \leq i, j \leq k$.

Выполнив замену координат $\bar{u}^i = u^i, i = 1, \dots, k$, $\bar{v}^j = f_j, j = 1, \dots, k$ и $\bar{v}^s = v^s, s = m - k + 1, \dots, n$ (из линейной алгебры получаем, что якобиан не ноль), получаем

$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & \mathrm{Id}_{k\times k} & \bar{N}(\bar{u}, \bar{v}) \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times k} & 0_{m\times m-k} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица N имеет размер $k \times m - k$. Забудем дальше про черточки и оставим для системы координат прежние обозначения. Из того, что ζ_i и ζ_j коммутируют, а $\zeta_i = \xi_i, i = 1, \dots, k$, мы получаем, что компоненты ζ_j не зависят от $u^1, \dots, u^k$. То есть угловая матрица N не зависит от u и

$$L = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & \mathrm{Id}_{k\times k} & N(v) \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times k} & 0_{m\times m-k} \end{pmatrix}.$$

Переобозначив компоненты этой матрицы еще раз, мы получаем в точности форму 3.2. Таким образом, в одну сторону первое утверждение теоремы 3.2.1 доказано. Рассмотрим следующую лемму.

Лемма 3.2.1. *Пусть операторное поле L в системе координат $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$, где $k \leq m$ имеет вид* (3.2) *для произвольной матрицы M ранга k. Тогда*

1. L — оператор Нийенхейса;

2. Замены координат, сохраняющие вид (3.2) *имеют вид*

$$\bar{u}^i = h^i_q(v)u^q + h^i_0(v), \quad \bar{v}^j = g^j(v^1, \dots, v^m).$$

Здесь $\det(\frac{\partial g}{\partial v}) \neq 0$ *и* $\det H \neq 0$*, где* H *— матрица с компонентами* h^i_q*;*

3. При заменах из предыдущего пункта матрица M *преобразуется как*

$$\bar{M}(v) = H^{-1}(v)M(v)\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big).$$

Доказательство. Напомним, что базисные векторные поля мы обозначаем как ξ_i, η_j. При этом мы помним, что $L\xi_i = 0$ и обозначаем $\zeta_i = L\eta_i$. Вычислим на них кручение Нийенхейса для L

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_j) = [L\xi_i, L\xi_j] + L^2[\xi_i, \xi_j] - L[L\xi_i, \xi_j] - L[\xi_i, L\xi_j] = 0,\\
&\mathcal{N}_L(\xi_i, \eta_j) = [L\xi_i, L\eta_j] + L^2[\xi_i, \eta_j] - L[L\xi_i, \eta_j] - L[\xi_i, L\eta_j] = -L[\xi_i, \zeta^q_j(v)\xi_q] = 0,\\
&\mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) = [L\eta_i, L\eta_j] + L^2[\eta_i, \eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] =\\
&\qquad = [\zeta^q_i(v)\xi_q, \zeta^s_j(v)\xi_s] - L[\zeta^q_i(v)\xi_q, \eta_j] - L[\eta_i, \zeta^q_j\xi_q] = L\Big(\frac{\partial \zeta^q_i}{\partial v^j}\xi_q - \frac{\partial \zeta^q_j}{\partial v^i}\xi_q\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Прежде чем доказывать его, переформулируем условие на форму (3.2) в виде условий на ковекторы. Имеем

$$\begin{aligned}
L^*\mathrm{d}v^j = 0, \quad i = j, \dots, m,\\
\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}u^i) \in \Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m), \quad i = 1, \dots, k.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m)$ означает идеал (в смысле внешнего произведения), порожденный точными формами $\mathrm{d}v^j$.

Пусть дан набор новых координатных функций $\bar{u}^i, \bar{v}^j$, как функций от u, v. Они должны удовлетворять аналогичным условиям, то есть $L^*\mathrm{d}v^i = 0$. Из того, что ранг M равен k, получаем, что $\mathrm{d}\bar{v}^i \in \Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m)$. В частности

$$\Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m) = \Omega(\mathrm{d}\bar{v}^1, \dots, \mathrm{d}\bar{v}^m).$$

Таким образом, второе условие в (3.3) дает $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}\bar{u}^i) \in \Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m)$. В свою очередь

$$\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}\bar{u}^i) = \mathrm{d}\Big(M^q_s(v)\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^q}\mathrm{d}v^s\Big) = M^q_s(v)\frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^q \partial u^r}\mathrm{d}u^r \wedge \mathrm{d}v^s + \dots,$$

где $\dots$ означают слагаемые, которые лежат в $\Omega(\mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^m)$. Получаем следующую систему уравнений

$$M^q_s(v)\frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^q \partial u^r} = 0, \quad 1 \leq i, r \leq k, \quad 1 \leq s \leq m.$$

Легко видеть, что для каждого фиксированного r это (вообще говоря, переопределенная) система из m линейных уравнений на k неизвестных. Так как ранг M равен k, то получаем, что все производные $\frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^q \partial u^r} = 0$. Из этого следует, что $\bar{u}^i$ линейно зависит от u^i. То есть

$$\bar{u}^i = h^i_q(v)u^q + h^i_0(v), \quad \bar{v}^j = g^j(v^1, \dots, v^m).$$

Условия на H и g вытекают из условия невырожденности замены. Второе утверждение леммы 3.2.1 доказано. Перейдем к третьему утверждению. Используя условия (3.3) получаем, что

$$L^*\mathrm{d}\bar{u}^i = M_s^q h_q^i \mathrm{d}v^s = h_q^i M_s^q \frac{\partial v^s}{\partial \bar{v}^r}\mathrm{d}\bar{v}^r.$$

Имеем, что $\frac{\partial v^s}{\partial \bar{v}^r} = (\frac{\partial g}{\partial u})^{-1}$, то есть лемма доказана. □

Первое утверждение леммы 3.2.1 даёт вторую половину первого утверждения теоремы 3.2.1. То есть эквивалентность двух условий доказана. Теперь перейдём к классам эквивалентности.

Строки матрицы M преобразуются как элементы $\Omega^1(\mathrm{M}^n)$, после чего от них мы переходим к их линейной комбинации. Легко видеть, что идеал $\Omega(L^*\mathrm{d}u^1, \ldots, L^*\mathrm{d}u^k)$ не меняется. Этот идеал задает распределение размерности $m-k$ на m-мерном пространстве.

Таким образом, эквивалентность систем координат соответствует эквивалентности распределений и наоборот. Теорема доказана. □

Отметим, что при некоторых значениях параметров — например, когда $m = k+1$ — речь идет о поиске нормальной формы одномерного и, следовательно, интегрируемого распределения. Однако в общем случае описание нормальной формы неинтегрируемого распределения — даже в малой размерности — совершенно безнадежная задача (см., например, [1]).

3.3 Случай непостоянного собственного значения

Переход от постоянных собственных значений к непостоянным, разумеется, ситуацию не упрощает. Однако в случае непостоянных собственных значений возникает трудность иного характера. Поясним ее на примере.

Пример 3.3.1. Пусть в некоторых координатах $u^1, \ldots, u^n$ операторное поле L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix},$$

где λ — некоторая непостоянная функция. Запишем операторное поле в виде $J + \lambda\mathrm{Id}$, где J — жорданова клетка.

Прежде, чем вычислить кручение Нийенхейса этого оператора, получим полезную формулу для скобки Фролихера-Нийенхейса двух операторных полей (Приложение I). А именно, рассмотрим для произвольных операторных полей R, M и произвольной функции

f следующее выражение

$$\begin{aligned}[][R, gM]]_{FN}(\xi,\eta) &= [R\xi, gM\eta] + [gM\xi, R\eta] + gRM[\xi,\eta] + gMR[\xi,\eta] - R[gM\xi,\eta] - \\ &- R[\xi, gM\eta] - gM[R\xi,\eta] - gM[\xi, R\eta] = g[[R,M]]_{FN}(\xi,\eta) + \mathcal{L}_{R\xi} gM\eta - \\ &- \mathcal{L}_{R\eta} gM\xi - \mathcal{L}_{\xi} gRM\eta + \mathcal{L}_{\eta} gRM\xi = \\ &= [[R,M]]_{FN}(\xi,\eta) + (R^*\mathrm{d}g \otimes M - M \otimes R^*\mathrm{d}g - \mathrm{d}g \otimes RM + RM \otimes \mathrm{d}g)(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Помня, что $[[R,M]]_{FN} = [[M,R]]_{FN}$, мы получаем

$$\begin{aligned}[][fR, M]]_{FN}(\xi,\eta) &= f[[R,M]](\xi,\eta) + \\ &+ (M^*\mathrm{d}f \otimes R - R \otimes M^*\mathrm{d}f - \mathrm{d}f \otimes MR - MR \otimes \mathrm{d}f)(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Применяя эти формулы получаем

$$\begin{aligned}[][J+\lambda\mathrm{Id}, J+\lambda\mathrm{Id}]]_{FN} &= [[J,J]]_{FN} + 2[[J,\lambda\mathrm{Id}]]_{FN} + [[\lambda\mathrm{Id},\lambda\mathrm{Id}]]_{FN} = \\ &= 2J^*\mathrm{d}\lambda \otimes \mathrm{Id} - 2\mathrm{Id} \otimes J^*\mathrm{d}\lambda - 2\mathrm{d}\lambda \otimes J - 2J \otimes \mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

В последнем вычислении мы пользовались тем, что J и $\lambda\mathrm{Id}$ — операторы Нийенхейса. Нас интересует следующий вопрос: когда L — оператор Нийенхейса? Имеется два варианта:

1. В случае $n = 2$ подставляем базисные векторные поля ξ_1, ξ_2 и получаем

   $$\mathcal{N}_L(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2}[[L,L]]_{FN}(\xi_1,\xi_2) = -2\frac{\partial\lambda}{\partial u^1}\xi_1 = 0.$$

   Таким образом, λ не зависит от u^2. Имеем

   $$L = \begin{pmatrix} \lambda(u^1) & 1 \\ 0 & \lambda(u^1) \end{pmatrix};$$

2. В случае $n > 2$ сначала рассмотрим η_1, η_3. Имеем

   $$\mathcal{N}_L(\xi_1,\xi_3) = -\frac{\partial\lambda}{\partial u^2}\xi_1 - \frac{\partial\lambda}{\partial u^1}\xi_2 = 0.$$

   Из этого немедленно получаем, что λ не зависит от u^1, u^2. Теперь возьмем $j = 2, \dots, n-1$. Имеем

   $$\mathcal{N}_L(\xi_1,\xi_j) = -\frac{\partial\lambda}{\partial u^{j-1}}\xi_1 - \frac{\partial\lambda}{\partial u^1}\xi_{j-1} = -\frac{\partial\lambda}{\partial u^{j-1}}\xi_1 = 0.$$

   Отсюда λ не зависит от $u^2, \dots, u^{n-1}$. Наконец, рассмотрим ξ_2, ξ_n и вычислим соответствующую компоненту тензора Нийенхейса

   $$\mathcal{N}_L(\xi_2,\xi_n) = \frac{\partial\lambda}{\partial u^{n-1}}\xi_n - \frac{\partial\lambda}{\partial u^{n-1}}\xi_2 - \frac{\partial\lambda}{\partial u^2}\xi_{n-1} - \frac{\partial\lambda}{\partial u^n}\xi_1 = -\frac{\partial\lambda}{\partial u^n}\xi_1 = 0.$$

   Таким образом, операторное поле L — оператор Нийенхейса в размерности, начиная с трех, тогда и только тогда, когда собственное значение постоянно. ■

Мы получаем, что в случае жорданова блока с непостоянным собственным значением нормальные формы операторов Нийенхейса отличаются от нормальной жордановой формы. В этом разделе мы получим сразу несколько других форм.

Теорема 3.3.1. *Пусть L — оператор Нийенхейса и в окрестности точки* p *его нормальная жорданова форма состоит из одной жордановой клетки максимального размера. Тогда существует система координат $u^1, \dots, u^n$, в которой матрица оператора принимает вид*

$$\begin{pmatrix} \lambda(u^n) & 1 & 0 & \dots & 0 & g^1 \\ 0 & \lambda(u^n) & 1 & \dots & 0 & g^2 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(u^n) & g^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(u^n) \end{pmatrix},$$

где $g^{n-1} = 1$ и $g^i = -\lambda'(n-i-1)u^i$. Здесь λ' означает производную λ по u^n как функции одной переменной.

Доказательство. Пусть в окрестности точки p задан оператор Нийенхейса, у которого одно непостоянное собственное значение (мы пока не предполагаем, что он сопряжен жорданову блоку максимальной размерности). Обозначим это собственное значение как λ и рассмотрим операторное поле $L_\lambda = L - \lambda\mathrm{Id}$. Определим следующую башню распределений

$$\mathrm{Image}(L_\lambda) \subseteq \mathrm{Image}(L_\lambda^2) \subset \dots \subset \mathrm{Image}(L_\lambda^{s-1}) \subset \mathrm{Image}(L_\lambda^{\mathrm{ht}\,L}).$$

Выполнена лемма.

Лемма 3.3.1. *Все распределения*

$$\mathrm{Image}(L_\lambda^k), \quad k = 1, \dots, \mathrm{ht}L$$

интегрируемы.

Доказательство. Зафиксируем систему координат $u^1, \dots, u^n$ и обозначим соответствующие базисные векторные поля как $\xi_1, \dots, \xi_n$. Прямые вычисления дают нам

$$\begin{aligned} [L_\lambda\xi_i, L_\lambda\xi_j] &= [L\xi_i, L\xi_j] - [L\xi_i, \lambda\xi_j] - [\lambda\xi_i, L\xi_j] + [\lambda\xi_i, \lambda\xi_j] = \\ &= L[L\xi_i, \xi_j] + L[\xi_i, L\xi_j] - L^2[\xi_i, \xi_j] - (L^*\mathrm{d}\lambda)_i\xi_j - \lambda[L\xi_i, \xi_j] + \\ &+ (L^*\mathrm{d}\lambda)_j\xi_i - \lambda[\xi_i, L\xi_j] + \lambda\mathrm{d}\lambda_i\xi_j - \lambda\mathrm{d}\lambda_j\xi_i = \\ &= L_\lambda[L\xi_i, \xi_j] + L_\lambda[\xi_i, L\xi_j] + (L^*\mathrm{d}\lambda - \lambda\mathrm{d}\lambda)_j\xi_i - (L^*\mathrm{d}\lambda - \lambda\mathrm{d}\lambda)_i\xi_j. \end{aligned}$$

Используя свойство $L_\lambda^*\mathrm{d}\lambda = 0$, мы получаем формулу

$$[L_\lambda\xi_i, L_\lambda\xi_j] = L_\lambda[L\xi_i, \xi_j] + L_\lambda[\xi_i, L\xi_j]. \tag{3.4}$$

Векторные поля $L_\lambda\xi_i$ порождают распределение $\mathrm{Image}(L_\lambda)$ и, стало быть, по теореме Фробениуса (теорема 12.0.15) это распределение интегрируемо. То есть, найдутся такие функции $f_1, \dots, f_l$, что

$$\mathrm{Image}(L_\lambda) = \bigcap_{j=1}^{l} \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f_j.$$

Совместные поверхности уровня $f_i = c_i$ в окрестности точки p мы будем называть интегральным слоем распределения.

Заметим, что распределение является инвариантным относительно L. Так как имеется вложение $\mathrm{Image}(L_\lambda^2) \subseteq \mathrm{Image}(L_\lambda)$, то интегрируемость распределения $\mathrm{Image}(L_\lambda^2)$ достаточно проверить на каждом интегральном слое $\mathrm{Image}(L_\lambda)$.

Выберем некоторый такой слой и обозначим ограничение оператора L_λ на него как L_1. Ограничение λ на этот же слой будем обозначать той же буквой, то есть λ. При этом распределение $\mathrm{Image}(L_\lambda^2)$ на этом слое совпадает с $\mathrm{Image}(L_1 - \lambda \mathrm{Id})$. Выше мы уже доказали его интегрируемость. Действуя аналогично, мы получим, что все распределения интегрируемы. $\square$

Нам потребуется ещё две леммы.

Лемма 3.3.2. *Пусть $n = 2$, L — оператор Нийенхейса и в окрестности точки* p *его нормальная жорданова форма состоит из одной жордановой клетки размера два. Тогда существует система координат u, v, в которой оператор приводится к виду*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda(v) & 1 \\ 0 & \lambda(v) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Выберем систему координат x, y, которая согласована с распределением $\mathrm{Image}(L_\lambda)$. В этой системе координат

$$L = \begin{pmatrix} \lambda(x,y) & g(x,y) \\ 0 & \lambda(x,y) \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление кручения Нийенхейса дает

$$\mathcal{N}_L(\partial_x, \partial_y) = [\lambda\partial_x, g\partial_x + \lambda\partial_y] - L[\lambda\partial_x, \partial_y] - L[\partial_x, g\partial_x + \lambda\partial_y] = g_x\lambda\partial_x +$$
$$+ \lambda\lambda_x\partial_y - g\lambda_x\partial_x - \lambda\lambda_y\partial_x + \lambda\lambda_y\partial_x - \lambda g_x\partial_y - g\lambda_x\partial_y - \lambda_x\lambda\partial_y = 2g\lambda_x\partial_x.$$

По построению функция $g(x, y) \neq 0$ в целой окрестности, поэтому $\lambda_x \equiv 0$. То есть λ не зависит от x. Обозначим через $f(x, y)$ — произвольную первообразную $g(x, y)$ по x, то есть решение $g = f'_x$. Матрица Якоби для $u = f(x, y), v = y$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & f'_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $g \neq 0$ в окрестности точки p, то определитель этой матрицы - то есть якобиан - не равен нулю. Стало быть u, v задают новую систему координат. Пересчитаем операторное поле в этой новой системе координат:

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{f'_x} & -\frac{f'_y}{f'_x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & f'_x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & g \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

То есть, в координатах u, v (после подстановки $x(u, v)$ и $y(u, v)$) матрица L имеет нужный вид. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.3.3. *Пусть даны интегрируемые распределения $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \ldots \mathcal{D}_k$ размерностей $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ соответственно. Тогда существует система координат $u^1, \ldots, u^n$ такая, что $\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^{m_s}}$ порождают распределение $\mathcal{D}_s$ для всех $1 \leq s \leq k$.*

Доказательство. Так как каждое распределение интегрируемо, то для каждого $1 \leq s \leq k$ найдутся функции $\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_{m_s}$, что распределение $\mathcal{D}_s$ устроено как

$$\mathcal{D}_s = \bigcap_{j=1}^{m_s - k} \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_j.$$

при дополнительном условии, что все дифференциалы $\mathrm{d}f_j$ линейно независимы.

Теперь сделаем следующее замечание. Пусть у нас есть набор функций $f_1, \ldots, f_s$, дифференциалы которых линейно независимы в окрестности точки p и набор функций $g_1, \ldots, g_l$ с тем же свойством, причем $l < s$. Предположим, что

$$\mathrm{span}\{\mathrm{d}g_1, \ldots, \mathrm{d}g_l\} \subset \mathrm{span}\{\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_s\}.$$

Тогда из линейной алгебры следует, что можно выбрать такой набор функций

$$f_{i_1}, \ldots, f_{i_{s-l}}, g_1, \ldots, g_l,$$

что дифференциалы этого набора будут линейно независимы, возможно, правда, уже в меньшей окрестности точки p.

Взяв теперь набор функций для каждого распределения и применяя это рассуждение, мы можем выбрать согласованный набор функций. Дополнив его до системы координат, получим, что в этой новой системе координат выполнено условие леммы. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Мы будем проводить его по индукции. Для $n = 2$ базу индукции дает лемма 3.3.2.

Считаем теперь, что теорема доказана для размерности n и покажем, что она выполняется для размерности $n+1$. Из лемм 3.3.1 и 3.3.3 вытекает, что существует система координат, которую мы обозначим как $u, v^1, \ldots, v^n$, согласованная с распределением $\mathrm{Ker}\, L_\lambda = \mathrm{Image}(L_\lambda^{n-1})$.

Соответствующие базисные векторные поля, как и раньше, обозначаем $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$. Операторное поле L записывается в ней в виде

$$L = \begin{pmatrix} \lambda(u,v) & M(u,v) \\ 0_{n\times 1} & N(u,v) \end{pmatrix},$$

где M — матрица размера $1 \times n$, а N — матрица размера $n \times n$. При этом, по построению, ранг матрицы N равен n. Воспользуемся формулой (3.4) (на самом деле доказательство всей леммы нам было не нужно, нам нужна была только эта формула, но лемма 3.3.1 полезна сама по себе)

$$\begin{aligned} 0 = [L_\lambda\xi, L_\lambda\eta_j] = L_\lambda[L\xi, \eta_j] + L_\lambda[\xi, L\eta_j] = \\ = L_\lambda[\lambda\xi, \eta_j] + L_\lambda[\xi, N_j^s\eta_s + M_j\xi] = L_\lambda\left(\frac{\partial N_j^s}{\partial u}\eta_s\right) = \frac{\partial N_j^s}{\partial u} L_\lambda\eta_s. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Рассмотрим вектора $L_\lambda\eta_s$ в правой части. Следующие рассуждения имеют отношение только к линейной алгебре, поэтому мы оформим их в виде отдельной леммы.

Лемма 3.3.4. *Пусть L — линейный оператор на $n+1$-мерном пространстве, сопряженный жордановой клетке максимального размера с вещественным собственным значением λ. Обозначим $L_\lambda = L - \lambda\mathrm{Id}$. Пусть задан базис $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ такой, что $L_\lambda\xi = 0$. Тогда $L_\lambda\eta_1, \ldots, L_\lambda\eta_n$ — линейно независимы.*

Доказательство. Приведем L к нормальной жордановой форме и обозначим соответствующий базис как $\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n$. По построению $\bar{\xi} = \xi$. Матрица перехода для двух систем векторов имеет вид

$$\xi = \bar{\xi}, \quad \eta_i = r_i \xi + c_i^s \eta_s, \quad i = 1, \dots, n.$$

В матричной форме она приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n} \\ r & C \end{pmatrix},$$

где r — столбец высоты n, а компоненты матрицы C — это в точности c_i^j. Легко видеть, что эта матрица невырожденная. Получаем, что

$$L_\lambda \eta_1 = c_i^1 \xi + \sum_{s=2}^{n} c_i^s \eta_{s-1}.$$

Значит вектора $L_\lambda \eta_s$ линейно независимы, так как выражаются с помощью невырожденной матрицы перехода через линейно независимые (базисные) вектора. $\square$

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 3.3.4 вытекает, что формула (3.5) влечет равенство

$$\frac{\partial N_j^s}{\partial u} = 0$$

для всех индексов j, s. То есть матрица N не зависит от u. Рассмотрим теперь условие обращения в ноль кручения Нийенхейса на η_i, η_j. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) &= [N_i^s \eta_s + M_i \xi, N_j^q \eta_q + M_j \xi] - L[N_i^s \eta_s + M_i \xi, \eta_j] - L[\eta_i, N_j^q \eta_q + M_j \xi] = \\
&= \frac{\partial N_j^q}{\partial v^s} N_i^s \eta_q + \left(\frac{\partial M_j}{\partial v^s} N_i^s + \frac{\partial M_j}{\partial u} M_i \right) \xi - \frac{\partial N_i^q}{\partial v^s} N_j^s \eta_q - \left(\frac{\partial M_i}{\partial v^s} N_j^s + \frac{\partial M_i}{\partial u} M_j \right) \xi + \\
&+ \frac{\partial N_i^s}{\partial v^j} N_s^q \eta_q + \frac{\partial N_i^s}{\partial v^j} M_s \xi - \frac{\partial N_j^s}{\partial v^i} N_s^q \eta_q - \frac{\partial N_j^s}{\partial v^i} M_s \xi = \left(\quad \dots \quad \right) \xi + \\
&+ \left(\frac{\partial N_j^q}{\partial v^s} N_i^s - \frac{\partial N_i^q}{\partial v^s} N_j^s + \frac{\partial N_i^s}{\partial v^j} N_s^q - \frac{\partial N_j^s}{\partial v^i} N_s^q \right) \eta_q.
\end{aligned}$$

Так как мы имеем дело с оператором Нийенхейса, условия в скобках обращаются в ноль. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с координатами $v^1, \dots, v^n$ и операторным полем $N_j^i(v)$ в этих координатах. Из вычислений выше следует, что N — оператор Нийенхейса.

С точки зрения линейной алгебры смысл L — это фактор-оператор на фактор-пространстве по собственному подпространству L. Таким образом, мы получаем, что перед нами оператор Нийенхейса, сопряжённый жорданову блоку максимальной размерности с непостоянным собственным значением. Применяя индукционное предположение, мы получаем

$$L = \begin{pmatrix}
\lambda(v^n) & M_1 & M_2 & \dots & M_{n-1} & M_n \\
0 & \lambda(v^n) & 1 & \dots & 0 & g^2 \\
0 & 0 & \lambda(v^n) & \ddots & 0 & g^3 \\
 & & & \ddots & 1 & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(v^n) & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(v^n)
\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Здесь функции стоят в последней строке и последнем столбце.

Таким образом, нам осталось избавиться от функций в первой строке (за исключением функции в правом верхнем углу матрицы) и убедиться, что функции в последнем столбце имеют нужный вид.

Рассмотрим векторные поля $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ и вычислим на них кручение Нийенхейса. Сначала рассмотрим η_1, η_j:

$$0 = \mathcal{N}_L(\eta_1, \eta_j) = [L\eta_i, L\eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] = [\lambda\eta_1 + M_1\xi, \lambda\eta_j + \eta_{j-1} + M_j\xi] -$$
$$- L[\lambda\eta_1 + M_1\xi, \eta_j] - L[\eta_i, \lambda\eta_j + \eta_{j-1} + M_j\xi] = \left(\lambda\frac{\partial M_j}{\partial v^i} + M_i\frac{\partial M_j}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M_i}{\partial v^j} - \frac{\partial M_i}{\partial v^{j-1}} -\right.$$
$$\left.- M_j\frac{\partial M_i}{\partial u} + \lambda\frac{\partial M_i}{\partial v^j} - \lambda\frac{\partial M_j}{\partial v^i}\right)\xi = \left(M_i\frac{\partial M_j}{\partial u} - M_j\frac{\partial M_i}{\partial u} - \frac{\partial M_i}{\partial v^{j-1}}\right)\xi = [L_\lambda\eta_1, L_\lambda\eta_j].$$

Для случая $\eta_i, \eta_j, 1 < i, j \leq n$ мы получаем

$$0 = \mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) = [L\eta_i, L\eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] = [\lambda\eta_i + \eta_{i-1} + M_i\xi, \lambda\eta_j + \eta_{j-1} + M_j\xi] -$$
$$- L[\lambda\eta_i + \eta_{i-1} + M_i\xi, \eta_j] - L[\eta_i, \lambda\eta_j + \eta_{j-1} + M_j\xi] = \left(\lambda\frac{\partial M_j}{\partial v^i} + \frac{\partial M_j}{\partial v^{i-1}} + M_i\frac{\partial M_j}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M_i}{\partial v^j} -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial M_i}{\partial v^{j-1}} - M_j\frac{\partial M_i}{\partial u} + \lambda\frac{\partial M_i}{\partial v^j} - \lambda\frac{\partial M_j}{\partial v^i}\right)\xi = \left(M_i\frac{\partial M_j}{\partial u} - M_j\frac{\partial M_i}{\partial u} + \frac{\partial M_j}{\partial v^{i-1}} - \frac{\partial M_i}{\partial v^{j-1}}\right)\xi =$$
$$= [L_\lambda\eta_1, L_\lambda\eta_j].$$

То есть векторные поля $L_\lambda\eta_i, i = 1, \dots, n-1$ попарно коммутируют. Обозначим их через ζ_i. По теореме Фробениуса (теорема 12.0.15) найдутся такие функции $f_1, \dots, f_{n-1}$, что

$$\mathcal{L}_{\xi_i} f_j = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим функции $f_1, v_1, \dots, v_n$ и перепишем условие на векторные поля в терминах дифференциалов (для удобства обозначим $f_1 = v^0$):

$$\langle L_\lambda^* \mathrm{d}v^i - \mathrm{d}v^{i+1}, \eta_j\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \text{и} \langle L_\lambda^* \mathrm{d}v^i - \mathrm{d}v^{i+1}, \xi\rangle = 0.$$

Здесь $i = 0, \dots, n-1$. Дифференциалы в скобках "почти"равны нулю, точнее, верно следующее:

$$\begin{aligned} &L_\lambda^* \mathrm{d}f = \mathrm{d}v^1 + (\dots)\mathrm{d}v^n, \\ &L_\lambda^* \mathrm{d}v^i = \mathrm{d}v^{i+1} + (\dots)\mathrm{d}v^n, i = 1 \dots, n-1, \\ &L_\lambda^* \mathrm{d}v^n = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $\dots$ означает некоторые функциональные выражения, точный вид которых нам не важен.

В (3.7) мы добавили очевидное равенство $L_\lambda^* \mathrm{d}v^n = 0$. Мы видим, что $\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^{n-1}$ линейно независимы, так как их образы при действии оператора L_λ^* линейно независимы. В свою очередь они независимы с $\mathrm{d}v^n$, так как эта форма лежит в ядре L_λ^*.

Таким образом, полученные соотношения позволяют нам сразу понять две важные вещи: во-первых, дифференциалы $\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}v^1, \dots, \mathrm{d}v^n$ в окрестности точки $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ (напоминаем, что действие происходит в окрестности точки!) линейно независимы и, значит, мы можем взять эти функции за новые координаты.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v^1} & \frac{\partial f}{\partial v^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial v^n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}} & -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v^1} & -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v^2} & \dots & -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v^n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя JLJ^{-1}, мы получаем, что функции в последнем столбце $g^2, \dots, g^{n-1} = 1, \lambda(v^n)$ не меняются. Учитывая, что они зависят только от v^n, v^i (а эти функции не менялись), то в новых координатах они не испортились — то есть все еще в той форме, которая нужна нам в утверждении теоремы 3.3.1.

Во-вторых, зная соотношения (3.7), мы можем легко переписать оператор в новых координатах — он принимает вид:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda(v^n) & 1 & 0 & \dots & 0 & g^0 \\ 0 & \lambda(v^n) & 1 & \dots & 0 & g^1 \\ 0 & 0 & \lambda(v^n) & \dots & 0 & g^2 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(v^n) & g^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(v^n) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Здесь, как обычно, мы не меняем названия переменных. Новые координаты — это почти нужные нам координаты из утверждения теоремы 3.3.1: единственное отличие тут может быть в g^0.

Выясним, какие условия на g_0 дают нам условие обращения в ноль кручения Нийенхейса для оператора Нийенхейса в форме 3.8(помним, что $g^i, i > 0$ в канонической форме). Для начала заметим, что для $i, j < n$ (в формуле действует соглашение $\eta_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_j) &= [L\eta_i, L\eta_j] - L[L\eta_i, \eta_j] - L[\eta_i, L\eta_j] = \\ &= [\lambda\eta_i + \eta_{i-1}, \lambda\eta_j + \eta_{j-1}] - L[\lambda\eta_i + \eta_{i-1}, \eta_j] - L[\eta_i, \lambda\eta_j + \eta_{j-1}] = 0, \end{aligned}$$

так как λ зависит только от v^n. Всюду далее у нас $j = n$. Для $i = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L(\eta_0, \eta_n) &= [L\eta_0, L\eta_n] - L[L\eta_0, \eta_n] - L[\eta_0, L\eta_n] = [\lambda\eta_0, g^s\eta_s] - L[\lambda\eta_0, \eta_n] - L[\eta_0, g^s\eta_s] = \\ &= \lambda\frac{\partial g^s}{\partial v^0}\eta_s - \lambda'\lambda\eta_0 + \lambda'\lambda\eta_0 - \frac{\partial g^s}{\partial v^0}L\eta_s = \lambda\frac{\partial g^s}{\partial v^0}\eta_s - \lambda\frac{\partial g^s}{\partial v^0}\eta_0 = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали условие, что функция g^i зависит только от $v^i, i > 0$. Мы видим, что эти компоненты тождественно равны нулю и никаких дифференциальных условий не дают. Пусть теперь $i = 1, j = n$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L(\eta_1, \eta_n) &= [L\eta_1, L\eta_n] - L[L\partial_{y^1}\eta_1, \eta_n] - L[\eta_1, L\eta_n] = [\lambda\eta_1 + \eta_0, g^s\eta_s] - L[\lambda\eta_1 + \eta_0, \eta_n] - \\ &- L[\eta_1, g^s\eta_s] = \frac{\partial g^0}{\partial v^0}\eta_0 + \lambda\frac{\partial g^0}{\partial v^1}\eta_0 + \lambda\frac{\partial g^1}{\partial v^1}\eta_1 - \lambda\lambda'\eta_1 + \lambda'\lambda\eta_1 + \lambda'\eta_0 - \lambda\frac{\partial g^0}{\partial v^1}\eta_0 - \\ &- \lambda\frac{\partial g^1}{\partial v^1}\eta_1 - \frac{\partial g^1}{\partial v^1}\eta_0 = \left(\frac{\partial g^0}{\partial v^0} + \lambda' - \frac{\partial g^1}{\partial v^1}\right)\eta_0. \end{aligned}$$

Равенство нулю этой компоненты дает нам уравнение

$$\frac{\partial g^0}{\partial v^0} = -(n-1)\lambda'. \tag{3.9}$$

В следующей формуле $i = 2, \dots, n-1$, а $j = n$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(\eta_i, \eta_n) = [L\eta_i, L\eta_n] - L[L\eta_i, \eta_n] - L[\eta_i, L\eta_n] = [\lambda\eta_i + \eta_{i-1}, g^s\eta_s] - L[\lambda\eta_i + \eta_{i-1}, \eta_n] - \\ - L[\eta_i, g^s\eta_s] = \frac{\partial g^0}{\partial v^{i-1}}\eta_0 + \frac{\partial g^{i-1}}{\partial v^{i-1}}\eta_{i-1} + \lambda\frac{\partial g^0}{\partial v^i}\eta_0 + \lambda\frac{\partial g^i}{\partial v^i}\eta_i - \lambda\lambda'\eta_i + \lambda\lambda'\eta_i + \\ + \lambda'\eta_{i-1} - \lambda\frac{\partial g^0}{\partial v^i}\eta_0 - \lambda\frac{\partial g^i}{\partial v^i}\eta_i - \frac{\partial g^i}{\partial v^i}\eta_{i-1} = \left(\frac{\partial g^{i-1}}{\partial v^{i-1}} + \lambda' - \frac{\partial g^i}{\partial v^i}\right)\eta_{i-1} + \frac{\partial g^0}{\partial v^{i-1}}\eta_0.\end{aligned}$$

Равенство нулю этих компонентов дает нам

$$\frac{\partial g^0}{\partial v^{i-1}} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad \text{и} \quad \frac{\partial g^{i-1}}{\partial v^{i-1}} + \lambda' - \frac{\partial g^i}{\partial v^i} = 0. \tag{3.10}$$

Собирая вместе условия (3.9) и (3.10), мы получаем, что функция g^0 имеет вид

$$g^0 = -(n-1)\lambda'(v^n)v^0 + h(v^{n-1}, v^n),$$

где h — вообще говоря произвольная функция от двух переменных. Последний шаг доказательства - это найти такую замену переменных, которая бы приводила g^0 к нужному нам виду. Эту замену мы будем искать в виде

$$u^0 = v^0 + r(v^{n-1}, v^n), \quad u^i = v^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как это частный случай замены, которую мы уже делали ранее, мы знаем, что $g^1, \dots, g^{n-1} = 1, \lambda(v^n)$ при такой замене не меняются. Условие того, что вся матрица L имеет в новых координатах канонический вид — это условие

$$L^*\mathrm{d}u^0 = \lambda\mathrm{d}u^0 + \mathrm{d}u^1 - (n-1)\lambda' u^0\mathrm{d}u^n.$$

Подставляя выражения u через v и расписывая это в координатах, мы получаем

$$\begin{aligned}\lambda\mathrm{d}v^0 + \mathrm{d}v^1 + \Big(-\lambda'(n-1)v^0 + h\Big)\mathrm{d}v^n + \lambda\frac{\partial r}{\partial v^{n-1}}\mathrm{d}v^{n-1} + \frac{\partial r}{\partial v^{n-1}}\mathrm{d}v^n + \lambda\frac{\partial r}{\partial v^n}\mathrm{d}v^n = \\ = \lambda\Big(\mathrm{d}v^0 + \frac{\partial r}{\partial v^{n-1}}\mathrm{d}v^{n-1} + \frac{\partial r}{\partial v^n}\mathrm{d}v^n\Big) + \mathrm{d}v^1 - (n-1)\lambda'\Big(v^0 + r\Big)\mathrm{d}v^n.\end{aligned}$$

Это дает нам уравнение на функцию r

$$\frac{\partial r}{\partial v^{n-1}} + (n-1)\lambda' r + h = 0.$$

Это ОДУ с параметром (v^n выступает параметром) первого порядка, решение которого существует по теореме о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. А, значит, существует и подходящая замена координат, приводящая нашу матрицу к нужному виду. Теорема доказана. □

У теоремы 3.3.1, разумеется, имеется комплексный аналог.

Теорема 3.3.2. *Пусть L — оператор Нийенхейса и в окрестности точки* p *его нормальная жорданова форма состоит из двух жордановых клеток с комплексно-сопряженными собственными значениями. Тогда существует система координат $u^1, v^1, u^2, v^2, \ldots, u^n, v^n$, в которой матрица оператора принимает вид*

$$\begin{pmatrix} \Lambda(u^n,v^n) & \mathrm{Id}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & G^1 \\ 0_{2\times 2} & \Lambda(u^n,v^n) & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & G^2 \\ & & & \ddots & & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & \Lambda(u^n,v^n) & G^{n-1} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & \Lambda(u^n,v^n) \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a(u^n,v^n) & -b(u^n,v^n) \\ b(u^n,v^n) & a(u^n,v^n) \end{pmatrix}, \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u^n}(u^n,v^n) & -\frac{\partial b}{\partial u^n}(u^n,v^n) \\ \frac{\partial b}{\partial u^n}(u^n,v^n) & \frac{\partial a}{\partial u^n}(u^n,v^n) \end{pmatrix}$$

и функции a, b удовлетворяют условиям Коши-Римана. Так же

$$G^{n-1} = \mathrm{Id}_{2\times 2}, \quad G^i = -(n-i-1)\Lambda' \begin{pmatrix} u^i & -v^i \\ v^i & u^i \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как у L в окрестности точки p нет вещественных собственных значений, применима теорема 2.4.2. То есть в заданной окрестности имеется комплексная структура $\mathsf{J} = i(L)$.

Далее доказательство дословно повторяет вещественный случай с заменой теоремы Фробениуса на голоморфную теорему Фробениуса (теорема 12.0.17) вплоть до последнего шага, где нам нужно привести g_0 к каноническому виду.

Здесь нам нужен аналог теоремы существования и единственности для решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в комплексном случае (Теорема 1.1 в [135]).

Возвращаясь к вещественным координатам — каноническим координатам комплексной структуры J, мы получаем утверждение теоремы. $\square$

Следующие следствия нам понадобятся в дальнейшем.

Следствие 3.3.1. *Пусть в каждой точке окрестности $U(\mathrm{p})$ оператор Нийенхейса L сопряжен жорданову блоку максимальной размерности и дополнительно выполнено, что $\lambda(p) = 0, \mathrm{d}\lambda(p) \neq 0$. Тогда в окрестности точки* p *найдется система координат $u^1, \ldots, u^n$, в которой L имеет вид:*

$$L = \begin{pmatrix} u^n & u^{n-1}+1 & u^{n-2} & \ldots & u^1 \\ 0 & u^n & u^{n-1}+1 & \ldots & u^2 \\ 0 & 0 & u^n & \ldots & u^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & u^n & u^{n-1}+1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u^n \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Доказательство. По теореме 3.3.1 оператор Нийенхейса в окрестности точки p в некоторой системе координат $u^1, \dots, u^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda(u^n) & 1 & 0 & \dots & 0 & g^1 \\ 0 & \lambda(u^n) & 1 & \dots & 0 & g^2 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(u^n) & g^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(u^n) \end{pmatrix},$$

где $g^{n-1} = 1$ и $g^i = -\lambda'(n-i-1)u^i$. Здесь λ' означает производную λ по u^n как функции одной переменной, причем нам известно, что $\mathrm{d}\lambda = \lambda' \mathrm{d}u^n \neq 0$. Выполним замену координат

$$\bar{u}^i = u^i, i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{u}^n = \lambda(u^n).$$

Вычисляя JLJ^{-1}, получаем, что в новых координатах оператор L имеет вид

$$\begin{pmatrix} u^n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & (n-2)u^1 \\ 0 & u^n & 1 & \dots & 0 & 0 & (n-3)u^2 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u^n & 1 & u^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u^n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & u^n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

То есть оператор в предположениях следствия 3.3.1 приводится к виду (3.12).

С другой стороны, в примере 2.1.4 мы показали, что матрица L в виде (3.11) — оператор Нийенхейса. Легко видеть, что она сопряжена с жордановым блоком максимальной размерности, ее собственное значение u^n и $\mathrm{d}u^n \neq 0$. Значит, эта матрица заменой координат тоже приводится к (3.12) подходящей заменой координат.

Таким образом, взяв оператор Нийенхейса в условиях следствия 3.3.1, мы сначала приводим его к виду (3.12), а затем, подходящей заменой, к (3.11). Следствие доказано. □

Эту нормальную форму мы будем называть теплицевой. Иногда мы не будем писать единицы, подразумевая, что точка p соответствует координатам $u^n = u^{n-2} = \dots = u^1 = 0, u^{n-1} = 1$. Для этого следствия, разумеется, есть комплексный аналог.

Следствие 3.3.2. *Пусть в каждой точке окрестности $U(\mathrm{p}) \in \mathrm{M}^{2n}$ оператор Нийенхейса L сопряжен паре жордановых блоков с комплексно сопряженными собственными значениями. Положим, что для собственного значения μ его комплексный (в смысле естественной комплексной структуры $i(L)$) дифференциал $\mathrm{d}\mu \neq 0$. Тогда в окрестности точки* p *найдется система координат $u^1, v^1, \dots, u^n, v^n$, в которой:*

$$L = \begin{pmatrix} U^n + U^n_0 & U^{n-1} + \mathrm{Id}_{2\times 2} & U^{n-2} & \dots & U^1 \\ 0_{2\times 2} & U^n + U^n_0 & U^{n-1} + \mathrm{Id}_{2\times 2} & \dots & U^2 \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & U^n + U^n_0 & \dots & U^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & U^n & U^{n-1} + \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} & U^n + U^n_0 \end{pmatrix},$$

где

$$U^i = \begin{pmatrix} u^i & -v^i \\ v^i & u^i \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U_0^n = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$$

Здесь a_i, b_i *константы и* $b_i \neq 0$. *Кроме этого*

$$\mathsf{J} = i(L) = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathsf{J}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Вводим комплексную структуру $\mathsf{J} = i(L)$ из теоремы 2.4.2 и повторяем рассуждения из вещественной нормальной формы. Затем возвращаемся к вещественным координатам — каноническим координатам J. □

3.4 Компактные нийенхейсовы многообразия

Следующий пример (см. [138]) устанавливает связь между таким известным объектом классической механики, как эллиптическая система координат, и геометрией Нийенхейса. Этот пример также связан с операторами Нийенхейса, геодезически согласованными с плоской метрикой.

Пример 3.4.1. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с координатами $u_1, \dots, u_n$ (здесь мы используем нижние индексы). Для произвольного набора n попарно различных вещественных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ формула

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{a_i - \lambda} = 1,$$

определяет $n-$параметрическое семейство софокусных квадрик. Эллиптические координаты — это в точности параметры квадрик. Чтобы получить на них функциональные уравнения введем многочлен $a(\lambda) = (\lambda - a_1)\dots(\lambda - a_n)$ и рассмотрим тождество

$$a(\lambda)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{\lambda - a_i}\right) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n). \tag{3.13}$$

Многочлен справа мы обозначим как $b(\lambda)$. Здесь λ — произвольный параметр и это равенство, разумеется, нужно понимать как тождество, которое выполнено для всех значений параметра. Без ограничения общности считаем $\lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \dots < \lambda_n < a_n$.

Теперь рассмотрим оператор L, который действует как $L^*\mathrm{d}\lambda_i = \lambda_i \mathrm{d}\lambda_i, i = 1, \dots, n$. По построению это оператор Нийенхейса, определенный в эллиптических координатах. Перепишем его в исходных координатах. Для начала заметим, что подстановка $\lambda = a_i$ в обе части (3.13) дает

$$u_i^2 \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (a_i - a_j) = (a_i - \lambda_1)\dots(a_n - \lambda_n) = b(a_i). \tag{3.14}$$

Теперь продифференцируем (3.13). Имеем

$$a(\lambda)\sum_{i=1}^{n}\frac{2u_i\mathrm{d}u^i}{\lambda-a_i}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{d}\lambda_i\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\lambda-\lambda_i)\right)=-b(\lambda)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\lambda-\lambda_i}.$$

Подставим в обе части выражения $\lambda=a_i$ и воспользуемся тождеством (3.14) для $b(a_i)$. Имеем

$$2u_i\mathrm{d}u_i\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(a_i-a_k)=-u_i^2\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(a_i-a_k)\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\lambda_j}{a_i-\lambda_j}.$$

Так как a_i попарно различны, то $\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(a_i-a_k)\neq 0$. Кроме этого тождество верно для почти всех u_i, поэтому мы получаем связывающее $\mathrm{d}u_i$ и $\mathrm{d}\lambda_j$ выражение:

$$\mathrm{d}u_i=-\frac{1}{2}u_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\lambda_j}{a_i-\lambda_j}.$$

Применяя к обеим частям L^* и вычитая $a_i\mathrm{d}u_i$, мы получаем

$$L^*\mathrm{d}u^i-a_i\mathrm{d}u_i=\frac{1}{2}u_i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}\lambda_j. \tag{3.15}$$

По теореме Виета, коэффициент при λ^{n-1} в правой части (3.13) равен сумме корней λ_i, взятых со знаком минус. Вычислив этот же коэффициент справа, мы получаем, что $\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Взяв дифференциал от обеих частей и подставляя в (3.15) мы получаем, что $L^*\mathrm{d}u_i=a_i\mathrm{d}u_i-\frac{1}{2}u_i\sum_{j=1}^{n}u^j\mathrm{d}u_j$. Матрица оператора L в координатах $u^1,\dots,u^n$ имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u^2 & \dots & u_1u_n\\ u_1u_2 & u_2^2 & \dots & u_2u_n\\ & & \ddots & \\ u_1u_n & u_2u_n & \dots & u_n^2\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Мы видим, что этот оператор не имеет особенностей, то есть, в отличие от эллиптической системы координат, определен всюду на $\mathbb{R}^n$. Кроме этого для операторов такого вида мы доказали замечательную формулу:

$$\det(\lambda\mathrm{Id}-L)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)+\sum_{j=1}^{n}u_j^2\prod_{i=1,i\neq j}^{n}(\lambda-a_j). \tag{3.17}$$

Из нее немедленно вытекает, что эллиптические координаты — это просто диагональные координаты для оператора Нийенхейса в форме (3.16). ■

Из примера мы извлечем следующее важное следствие, которое дает нам естественную серию многообразий Нийенхейса.

Теорема 3.4.1. *На сфере любой размерности существует оператор Нийенхейса, который*

1. Имеет всюду вещественный спектр;

2. Почти всюду дифференциально невырожденный.

В частности, сферы S^n — компактные нийенхейсовы многообразия для всех n.

Доказательство. Начнём доказательство с полезной леммы.

Лемма 3.4.1. *Для $k \geq m$ рассмотрим пару многочленов*

$$p(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m \quad \text{и} \quad q(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k,$$

коэффициенты которых b_i, a_j — функции на M^n, заданные в окрестности некоторой точки p. Пусть в каждой точке окрестности многочлены взаимно просты, и произведение многочленов

$$p(t)q(t) = c_0 t^{m+k} + c_1 t^{k+m-1} + \cdots + c_{m+k-1} t + c_{m+k}$$

обладает следующим свойством: дифференциалы $\mathrm{d}c_i$ в окрестности точки p линейно независимы. Тогда линейно независимы и дифференциалы $\mathrm{d}a_i, \mathrm{d}b_j$.

Доказательство. Запишем выражение для коэффициентов c_i (мы уже встречали их в доказательстве теоремы 2.5.2)

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0,\\
c_1 &= a_1 b_0 + b_1 a_0,\\
&\dots\\
c_m &= a_m b_0 + a_{m-1} b_1 + \cdots + a_0 b_m\\
c_{m+1} &= a_{m+1} b_0 + a_m b_1 + \cdots + a_1 b_m,\\
&\dots\\
c_k &= a_{m-k} b_0 + a_{m-k-1} b_1 + \cdots + a_k b_0,\\
c_{k+1} &= a_{m-k+1} b_0 + a_{m-k-1} b_1 + \cdots + a_k b_1,\\
&\dots\\
c_{m+k} &= a_k b_m.
\end{aligned}$$

Из этих формул вытекает, что всякий дифференциал $\mathrm{d}c_i$ выражается как

$$\mathrm{d}c_i = A_i^s \mathrm{d}a_s + B_i^r \mathrm{d}b_r, \quad 1 \leq s \leq k, 1 \leq r \leq m.$$

При этом матрица перехода (то есть матрица, составленная из последовательно записанных столбцов матриц $B, -A$) — это матрица Сильвестра (формула (2.29)).

То есть определитель матрицы перехода с точностью до знака равен результанту многочленов $p(t), q(t)$. Так как они взаимно просты, то он не равен нулю в целой окрестности p. Стало быть, если дифференциалы $\mathrm{d}c_i$ линейно независимы, то и $\mathrm{d}a_i, \mathrm{d}b_i$ — линейно независимы. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Зафиксировав $\lambda = c < a_1$, мы получаем, что уравнение

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{c - a_i} = 0$$

задает эллипсоид. В эллиптических координатах λ_i функции $\lambda_i, i = 2, \ldots, n$ задают на нем систему координат, определенную почти всюду. Это значит, что почти везде касательное пространство к эллипсоиду порождено векторами $\frac{\partial}{\partial \lambda_i}$, которые являются собственными для оператора L.

Таким образом, касательное пространство к эллипсоиду является инвариантным относительно L почти всюду и, следовательно, всюду по непрерывности. Это означает, что операторное поле можно ограничить на эллипсоид. По построению это, разумеется, оператор Нийенхейса, и, кроме того, почти всюду его собственные значения $\lambda_i, i = 2, \ldots, n$, то есть вещественны, почти всюду различны и почти всюду задают на эллипсе координаты.

В частности, они функционально независимы почти всюду. Тогда по лемме 3.4.1 почти всюду функционально независимы коэффициенты характеристического многочлена. Так как эллипсоид диффеоморфен сфере, мы получаем требуемое утверждение. $\square$

Следующая теорема имеет важное значение

Теорема 3.4.2. *Пусть* (M^n, L) *— компактное связное многообразие Нийенхейса. Пусть в некоторой точке* p *у* L *есть собственные значения* $\mu_i, i = 1, \ldots, k$ *кратности* l_i *с ненулевой мнимой частью. Тогда числа* μ_i *— собственные значения для* L *во всех точках* M^n *с кратностями* l_i. *Другими словами, собственное значение оператора Нийенхейса с ненулевой комплексной частью на компактном многообразии всюду постоянно и имеет постоянную кратность.*

Доказательство. Определим функцию $r : \mathrm{M}^n \to \mathbb{R}$

$$r(\mathrm{p}) = \max_{\lambda \in \operatorname{Spectrum} L} \operatorname{Im}\lambda(\mathrm{p}).$$

То есть в каждой точке p функция возвращает максимум по мнимым частям собственных значений L. Функция равна нулю тогда и только тогда, когда все собственные значения вещественны.

Так как корни многочлена — непрерывные функции его коэффициентов (см. [50]), то и мнимые части корней — непрерывные функции. В свою очередь, максимум из набора непрерывных функций — непрерывная функция. Значит, $r(\mathrm{p})$ принимает на многообразии максимум и минимум. Обозначим через r_0 максимальное значение, а через $M_0 \subseteq \mathrm{M}^n$ множество точек, в которых это значение достигается. M_0 — замкнутое подмножество компакта и, стало быть, само является компактом.

На множестве M_0 введем функцию $m : \mathrm{M} \to \mathbb{N}$ как

$$m(\mathrm{p}) = \max_{\substack{\lambda \in \operatorname{Spectrum} L \\ \operatorname{Im}\lambda = \mu_0}} \operatorname{mult} \lambda,$$

где mult означает кратность λ. Максимум этой функции на M_0 (она, вообще говоря, не обязана быть непрерывной) обозначим как m_0, а множество точек, где достигается максимум, — как $\tilde{M}_0$. Заметим, что если кратность не максимальна в точке, то, в силу непрерывности корней и их мнимых частей, она не максимальна в некоторой окрестности этой точки. Значит, дополнение к $\tilde{M}_0$ открыто и, следовательно, $\tilde{M}_0$ — замкнутое подмножество компакта.

Выберем точку $\mathrm{p} \in \tilde{M}_0$ и обозначим через μ комплексное собственное значение кратности m_0 в этой точке. Характеристический многочлен в этой точке имеет вид $\chi_L(t) = (t^2 + ft + g)^{m_0} q(t)$, где $q(t)$ взаимно прост с $(t^2 + ft + g)^{m_0}$. По теореме о расщеплении (теорема 2.5.2) в окрестности p можно ввести координаты $u^1, v^1, \dots, u^{m_0}, v^{m_0}, w^1, \dots, w^{2m_0}$, в которых

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u,v) & 0_{2m_0 \times n-2m_0} \\ 0_{n-2m_0 \times 2m_0} & L_2(w) \end{pmatrix}.$$

По теореме о комплексной структуре (теорема 2.4.2) для L_1 такая структура существует, поэтому можно считать, что u, v — канонические координаты для нее, то есть $z^i = u^i + \mathrm{i}\, v^i$. В комплексных координатах характеристический многочлен L_1 имеет вид

$$\chi_{L_1}(t) = t^{m_0} - c_1 t^{m_0 - 1} - \dots - c_{m_0}.$$

Функции c_i — голоморфные, причем их мнимые и вещественные части удовлетворяют условиям Коши-Римана. Обозначим $\mathrm{Re} c_1 = a$ и $\mathrm{Im} c_1 = b$. Тогда эти условия имеют вид

$$\frac{\partial a}{\partial u^i} = \frac{\partial b}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial a}{\partial v^i} = -\frac{\partial b}{\partial u^i}, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

и, как следствие

$$\sum_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^i} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^i \partial v^i} \right) = \Delta b = 0.$$

То есть b — гармоническая функция, принимающая в зависимости от знака максимум или минимум в точке p. По принципу максимума такая функция постоянна в целой окрестности.

Теперь заметим, что в b совпадает с суммой мнимых частей собственных значений L_1. Все они не превосходят r_0, а так как функции в окрестности равна $m_0 r_0$, то они в точности равны m_0. Почти всюду корни — голоморфные функции. Значит, по условиям Коши-Римана их вещественные части тоже постоянны. То есть почти всюду коэффициенты c_i постоянны и, стало быть, они постоянны всюду по непрерывности. Таким образом, мы показали, что

$$\chi_{L_1}(t) = (t - \mu)^{m_0},$$

где μ — постоянно. В частности, из этого следует, что $\tilde{M}_0$ содержит p вместе с некоторой окрестностью и, стало быть, является открытым. Так как оно открыто и замкнуто, то оно совпадает с M^n.

Таким образом, мы доказали, что если у оператора Нийенхейса есть комплексные собственные значения, то собственное значение с максимальной мнимой частью постоянно и имеет везде одинаковую кратность. Это почти то, что нам нужно. Рассмотрим новый оператор Нийенхейса

$$\tilde{L} = (L - \mu\, \mathrm{Id})^{m_0} (L - \bar{\mu}\, \mathrm{Id})^{m_0}.$$

У него вещественные коэффициенты и комплексных собственных значений на единицу меньше. Повторяя рассуждения и переходя каждый раз к новому оператору, мы получим, что все собственные значения с ненулевыми мнимыми частями постоянны и имеют одну и ту же кратность везде. Из этого вытекает утверждение теоремы. □

Следующее следствие показывает, что дифференциальная невырожденность оператора Нийенхейса является важнейшим запрещающим свойством.

Следствие 3.4.1. *Пусть на компактном многообразии* M^n *в окрестности точки* p *имеется дифференциально-невырожденный оператор. Тогда его собственные значения вещественны. В частности, дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса в окрестности начала канонических координат не может быть реализован на компактном многообразии.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть у дифференциально невырожденного оператора есть комплексные значения в окрестности точки p. При этом почти всюду у дифференциально невырожденного оператора собственные значения попарно различны (совпадение собственных значений задается нулём дискриминанта характеристического многочлена). Поэтому можно считать, что они различны в p и, следовательно, в целой окрестности.

По общей теореме Хаантьеса 2.1.2 в этой окрестности найдется система координат $u^1, \dots, u^k, v^1, w^1, \dots, v^s, w^s, k + 2s = n$, в которой оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix},$$

где матрицы L_1 и L_2 размером $k \times k$ и $2s \times 2s$ соответственно имеют вид:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k(u^k) \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_1(v^1, w^1) & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Lambda_2(v^2, w^2) & \dots & 0_{2\times 2} \\ & & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & \Lambda_s(v^s, w^s) \end{pmatrix}.$$

Возьмем $p(t) = \chi_{L_1}(t), q(t) = \chi_{L_2}(t)$. По построению эти многочлены удовлетворяют условиям леммы 3.4.1 (в частности, они взаимно просты). При этом, по теореме 3.4.2, все собственные значения L_2 — постоянными, и их дифференциалы равны нулю. С другой стороны, они должны быть линейно независимы с дифференциалами коэффициентов $p(t)$. Это противоречие доказывает следствие. □

Теорема 3.4.1 показывает, что на сфере S^4 существуют операторы Нийенхейса с вещественным спектром. Следующая теорема утверждает, что других теорем нет.

Теорема 3.4.3. *На сфере* S^4 *все операторы Нийенхейса имеют вещественный спектр.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный оператор Нийенхейса на многообразии S^4. Напомним классический результат: среди всех сфер только S^2 и S^6 допускают почти комплексную структуру ([19], 41.20 в [104]). В частности, это означает, что на S^4 нет ни комплексной, ни почти комплексной структуры. Теперь перейдем к доказательству утверждения о вещественности спектра.

Пусть в некоторой точке $\mathrm{p} \in S^4$ все собственные значения L — комплексные. Тогда по теореме 3.4.2 они постоянны и имеют постоянную кратность. Взяв $\mathsf{J} = i(L)$ (функция $i(z)$ определялась в разделе 2.4), мы получаем, что на S^4 существует комплексная структура. Это противоречие показывает, что такой случай невозможен.

Пусть теперь в некоторой точке $\mathrm{p} \in S^4$ у оператора два вещественных и два комплексных собственных значения. По теореме 3.4.2 оба комплексных значения постоянны и имеют кратность один. Взяв подходящую функцию от оператора L, мы можем считать, что они равны $\pm\mathrm{i}$. На S^4 возникает двумерное распределение $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(L^2 + \mathrm{Id}).$$

Возьмем на сфере произвольную риманову метрику g и определим ортогональное распределение $\mathcal{D}^\perp$. Пусть теперь ω — форма объема для соответствующей метрики g. Для любого векторного поля ξ рассмотрим ортогональное разложение $\xi = \eta + \eta^\perp$ и определим операцию

$$J\xi = L\eta + R\eta^\perp,$$

где операция R однозначно определяется условиями:

- $R\eta^\perp \in \mathcal{D}^\perp$;
- $g(R\eta^\perp, \eta^\perp) = 0$;
- $g(R\eta^\perp, R\eta^\perp) = g(\eta^\perp, \eta^\perp)$;
- $\omega(\eta, L\eta, \eta^\perp, R\eta^\perp) \geq 0$.

Легко видеть, что первые три условия определяют $R\eta^\perp$ с точностью до знака, а последнее позволяет однозначно выбрать этот знак. Заметим, что распределение $\mathcal{D}$ инвариантно относительно L и, стало быть, относительно J. Кроме этого $\mathcal{D}^\perp$ по построению инвариантен относительно J. Получаем, что ортогональное разложение для $J\xi$ имеет вид в точности $L\eta + R\eta^\perp$. При этом

$$J^2\xi = J(L\eta + R\eta^\perp) = L^2\eta + R^2\eta^\perp = -\eta + R^2\eta^\perp.$$

Здесь мы использовали, что на $\mathcal{D}$ оператор L удовлетворяет условию $L^2 + \mathrm{Id} = 0$. Подставляя в форму объема полученные вектора

$$\omega(L\eta, -\eta, R\eta^\perp, R^2(\eta^\perp)) = -\omega(\eta, L\eta, R^2\eta^\perp, R\eta^\perp).$$

По построению $R^2\eta^\perp = \pm\eta$ и выбор определяется знаком значения формы объема. В данном случае, чтобы справа стояло положительное число, нужно, чтобы $R^2\eta^\perp = -\eta$. Таким образом, $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}$, то есть мы построили на S^4 почти комплексную структуру. Это противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Глава 4

Левосимметрические алгебры как многообразия Нийенхейса

4.1 Операторы Нийенхейса, линейно зависящие от координат

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{a}$ с операцией $\star$. Напомним, что ассоциатором алгебры называется трилинейная операция, действующая на тройке ξ, η, ζ следующим образом:

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \xi \star (\eta \star \zeta) - (\xi \star \eta) \star \zeta.$$

Алгебра называется левосимметрической, если ассоциатор симметричен по первым двум аргументам, то есть

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{A}(\eta, \xi, \zeta).$$

Частным случаем левосимметрической алгебры является ассоциативная алгебра — для неё ассоциатор обращается в ноль. Замечательным свойством левосимметрической алгебры является то, что коммутатор

$$[\xi, \eta] = \xi \star \eta - \eta \star \xi$$

удовлетворяет тождеству Якоби. То есть задает алгебру Ли, которую мы будем называть ассоциативной алгеброй Ли. Приведём несколько примеров.

Пример 4.1.1. Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ с координатой x и введем на функциях на прямой операцию $\star$ следующим образом:

$$f \star g = f g_x$$

Ассоциатор для этой операции имеет вид

$$\mathcal{A}(f, g, h) = f(g h_x)_x - f g_x h_x = f g h_{xx}.$$

В силу коммутативности умножения ассоциатор — левосимметрический, то есть на множестве функций возникла структура левосимметрической алгебры. Ассоциированная алгебра Ли для этой левосимметрической алгебры задается коммутатором

$$[f, g] = f g_x - f_x g$$

и изоморфна алгебре векторных полей на прямой. Изоморфизм задается отображением $f \to f\frac{\partial}{\partial x}$. ■

Пример 4.1.2. Рассмотрим векторное пространство V и обозначим через ψ^i линейное пространство полилинейных отображений

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{i \text{ раз}} \to V.$$

Для простоты считаем, что $\Psi^0 = V$. В случае, если векторное пространство имеет конечную размерность, то мы имеем дело просто с линейным пространством тензоров типа $(1, i)$. Рассмотрим градуированное векторное пространство

$$\Psi = \Psi^0 \oplus \Psi^1 \oplus \Psi^2 \oplus \dots .$$

Элементы этого пространства — конечные формальные суммы элементов из Ψ^i. Введем на пространстве операцию $\star$ следующим образом: для $A \in \Psi^k, B \in \Psi^m$ результат операции $A \star B \in \Psi^{k+m-1}$ и определяется по формуле

$$A \star B(\xi_1, \dots, \xi_{k+m-1}) = \sum_{i=1}^{m} B(\dots, \xi_{i-1}, A(\xi_i, \dots, \xi_{i+k-1}), \xi_{i+k}, \dots,)$$

По сути мы по очереди подставляем A в разные аргументы B и берем сумму (эта конструкция близка к тому, как строится скобка Герштанхабера). Легко видеть, что ассоциатор для построенной операции имеет вид

$$A \star (B \star C) - (A \star B) \star C = \sum_{i \neq j} C(\dots, \underbrace{B(\dots)}_{\text{место с номером } i}, \dots, \underbrace{A(\dots)}_{\text{место с номером } j}, \dots).$$

Эта сумма симметрична по A и B. Таким образом, мы имеем дело с (вообще говоря, бесконечномерной) левосимметрической алгеброй (см. [101]). ■

Пример 4.1.3. Рассмотрим линейное (не обязательно конечномерное!) пространство $\mathfrak{a}$, снабженное произвольной билинейной симметричной формой g. Зафиксируем вектор $\nu \in \mathfrak{a}$ и определим произведение векторов по формуле

$$\xi \star \eta = g(\xi, \nu)\eta + g(\xi, \eta)\nu.$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \xi \star (\eta \star \zeta) = \xi \star \big(g(\eta, \nu)\zeta + g(\eta, \zeta)\nu\big) &= g(\eta, \nu)\big(g(\xi, \nu)\zeta + g(\xi, \zeta)\nu\big) + 2g(\eta, \zeta)g(\xi, \nu)\nu = \\ &= g(\eta, \nu)g(\xi, \nu)\zeta + g(\eta, \nu)g(\xi, \zeta)\nu + 2g(\eta, \zeta)g(\xi, \nu)\nu \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (\xi \star \eta) \star \zeta = \big(g(\xi, \nu)\eta + g(\xi, \eta)\nu\big) \star \zeta = g(\xi, \nu)\big(g(\eta, \nu)\zeta + g(\eta, \zeta)\nu\big) + g(\xi, \eta)\big(g(\nu, \nu)\zeta + \\ + g(\nu, \zeta)\nu\big) = g(\xi, \nu)g(\eta, \nu)\zeta + g(\xi, \nu)g(\eta, \zeta)\nu + g(\xi, \eta)g(\nu, \nu)\zeta + g(\xi, \eta)g(\nu, \zeta)\nu. \end{aligned}$$

Ассоциатор принимает вид

$$\begin{aligned} \xi \star (\eta \star \zeta) - (\xi \star \eta) \star \zeta = g(\eta, \nu)g(\xi, \zeta)\nu + g(\eta, \zeta)g(\xi, \nu)\nu - \\ - g(\xi, \eta)g(\nu, \nu)\zeta - g(\xi, \eta)g(\nu, \zeta)\nu. \end{aligned}$$

В силу симметричности формы он симметричен по ξ, η, то есть мы имеем дело с левосимметрической алгеброй. ■

Следующая теорема связывает левосимметрические алгебры с геометрией Нийенхейса.

Теорема 4.1.1 (Винтерхалдер, [114]). *Пусть дано операторное поле L с компонентами L^i_j, линейно зависящими от координат $u^1, \dots, u^n$, то есть $L^i_j = a^i_{jk} u^k$. L — оператор Нийенхейса тогда и только тогда, когда a^i_{jk} — структурные константы конечномерной левосимметрической алгебры.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{a}$ и зафиксируем в ней базис $\eta_i, i = 1, \dots, n$. Выпишем кручение Нийенхейса в локальных координатах:

$$L^s_j \frac{\partial L^i_k}{\partial u^s} - L^s_k \frac{\partial L^i_j}{\partial u^s} - L^i_s \frac{\partial L^s_k}{\partial u^j} + L^i_s \frac{\partial L^s_j}{\partial u^k} = L^s_j a^i_{ks} - L^s_k a^i_{js} - L^i_s a^s_{kj} + L^i_s a^s_{jk} = \\ = \Big(a^s_{jr} a^i_{ks} - a^s_{kr} a^i_{js} - a^i_{sr} a^s_{kj} + a^i_{sr} a^s_{jk} \Big) u^r.$$

То есть равенство нулю тензора Нийенхейса эквивалентно квадратичному условию на структурные константы

$$a^s_{jr} a^i_{ks} - a^s_{kr} a^i_{js} - a^i_{sr} a^s_{kj} + a^i_{sr} a^s_{jk}.$$

Условие левой симметричности для базиса имеет вид

$$\mathcal{A}(\eta_k, \eta_j, \eta_r) - \mathcal{A}(\eta_j, \eta_k, \eta_r) = \eta_k \star (\eta_j \star \eta_r) - (\eta_k \star \eta_j) \star \eta_r - \eta_j \star (\eta_k \star \eta_r) + (\eta_j \star \eta_j) \star \eta_k = \\ = \Big(a^i_{ks} a^s_{jr} - a^s_{kj} a^i_{sr} - a^i_{js} a^s_{kr} + a^s_{jk} a^i_{sr} \Big) \eta_i = 0.$$

Сравнивая равенство в скобках с квадратичным соотношением выше, видим, что они совпадают. Теорема доказана. □

Замечание 4.1.1. Всякая конечномерная алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ обладает естественной структурой аффинного многообразия, то есть многообразия с плоской аффинной связностью. Касательное пространство в каждой точке аффинного многообразия в этом случае отождествляется с левосимметрической алгеброй.

Оператор L^i_j в этом случае оказывается операторным полем, удовлетворяющим условию

$$\nabla_i \nabla_j L^s_k = 0.$$

Здесь ковариантная производная берется в смысле введенной аффинной связности.

Таким образом, левосимметрические алгебры находятся во взаимно однозначном соответствии с естественным классом нийенхейсовых многообразий — аффинными пространствами с операторами, которые линейно зависят от координат. То есть левосимметрические алгебры играют для геометрии Нийенхейса ту же роль, что и алгебры Ли для пуассоновой геометрии. ■

4.2 Классификация левосимметрических алгебр в размерности два

Выполнена следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *В размерности два с точностью до изоморфизма существует два непрерывных семейства и 10 исключительных левосимметрических алгебр. Их нормальные формы приведены в таблицах один и два ниже. При этом:*

1. *Канонический базис мы обозначаем η_1, η_2, а соответствующие координаты — x, y;*
2. *Для каждой алгебры выписаны её ненулевые структурные соотношения;*
3. *Для каждой алгебры выписан соответствующий оператор Нийенхейса L, зависящий линейно от x, y;*
4. *В размерности два с точностью до изоморфизма существует ровно две алгебры Ли: коммутативная и некоммутативная. $\mathfrak{c}$ в названии левосимметрической алгебры означает, что ассоциированная двумерная алгебра Ли коммутативная, $\mathfrak{b}$ — что ассоциированная двумерная алгебра Ли некоммутативная;*
5. *Одинаковые номера означают, что комплексные версии соответствующих алгебр совпадают.*

Название	*Соотношения*	L
$\mathfrak{b}_{1,\alpha}$	$\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1$, $\eta_2 \star \eta_2 = \alpha\eta_2$	$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_{2,\beta}$, $\beta \neq 0$	$\eta_1 \star \eta_2 = \eta_1$, $\eta_2 \star \eta_1 = \beta\eta_1$ $\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2$	$\begin{pmatrix} y & (1 - \frac{1}{\beta})x \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_3$	$\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1$, $\eta_2 \star \eta_2 = \eta_1 + \eta_2$	$\begin{pmatrix} 0 & x + y \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_4^+$	$\eta_1 \star \eta_1 = \eta_2$, $\eta_2 \star \eta_1 = -\eta_1$ $\eta_2 \star \eta_2 = -2\eta_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & -2y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_4^-$	$\eta_1 \star \eta_1 = -\eta_2$, $\eta_2 \star \eta_1 = -\eta_1$ $\eta_2 \star \eta_2 = -2\eta_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_5$	$\eta_1 \star \eta_2 = \eta_1$, $\eta_2 \star \eta_2 = \eta_1 + \eta_2$	$\begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Название	*Соотношения*	L
$\mathfrak{c}_1$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_2$	$\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_3$	$\eta_2 \star \eta_2 = \eta_1$	$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_4$	$\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2$ $\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1$ $\eta_1 \star \eta_2 = \eta_1$	$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_5^+$	$\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2$ $\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1$ $\eta_1 \star \eta_2 = \eta_1$ $\eta_1 \star \eta_1 = \eta_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_5^-$	$\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2$ $\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1$ $\eta_1 \star \eta_2 = \eta_1$ $\eta_1 \star \eta_1 = -\eta_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix}$

Доказательство. Начнём доказательство с леммы.

Лемма 4.2.1. *Алгебры в таблицах теоремы 4.2.1 — левосимметрические алгебры. Более того, алгебры с разными названиями (включая значение параметра в непрерывных сериях) попарно не изоморфны.*

Доказательство. По теореме Винтерхалдера нам достаточно убедиться, что все линейные операторы в таблицах 1 и 2 — операторы Нийенхейса. Это очевидно (мы ранее встречались уже с такими операторами) для всех алгебр из таблиц, за исключением, возможно, $\mathfrak{c}_5^+$. Для этого оператора достаточно заметить, что

$$L^*(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) = (x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y), \quad L^*(\mathrm{d}y - \mathrm{d}x) = (y - x)(\mathrm{d}y - \mathrm{d}x).$$

Выполнив замену $x + y = \bar{x}, y - x = \bar{y}$, мы получаем диагональный оператор

$$L = \begin{pmatrix} \bar{x} & 0 \\ 0 & \bar{y} \end{pmatrix},$$

который, очевидно, нийенхейсов. Таким образом, в таблицах действительно представлены левосимметрические алгебры.

Теперь перейдем ко второму утверждению леммы. Во-первых, заметим, что алгебры из разных таблиц не могут быть изоморфны, так как не изоморфны ассоциированные с ними алгебры Ли: в первом случае алгебра не коммутативна, во втором — коммутативна.

Рассмотрим теперь таблицу для $\mathfrak{c}$. Легко видеть, что:

1. В случае $\mathfrak{c}_1$ оператор нулевой;
2. В случае $\mathfrak{c}_2$ у оператора два вещественных различных собственных значения: одно постоянно, другое - нет;
3. В случае $\mathfrak{c}_3$ у оператора одно постоянное собственное значение, но оно ненулевое;
4. В случае $\mathfrak{c}_4$ у оператора одно непостоянное собственное значение;
5. В случае $\mathfrak{c}_5^+$ у оператора два вещественных различных собственных значения, оба непостоянные;
6. В случае $\mathfrak{c}_5^-$ у оператора два сопряженных комплексных значения.

Легко видеть, что ни один оператор из списка не переводится в другой при замене координат. Аналогично для серии $\mathfrak{b}$ получаем разбиение:

1. В случае $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ и $\mathfrak{b}_3$ у оператора два вещественных собственных значения: одно постоянно, другое — нет;
2. В случаях $\mathfrak{b}_{2,\beta}, \beta \neq 1$ и $\mathfrak{b}_5$ у оператора одно непостоянное собственное значение и есть жорданова клетка;
3. В случае $\mathfrak{b}_{2,1}$ у оператора два совпадающих вещественных непостоянных собственных значения и нет жордановой клетки;
4. В случае $\mathfrak{b}_4^+$ два непостоянных собственных значения, которые находятся в окрестности нуля, могут быть как вещественными, так и мнимыми;
5. В случае $\mathfrak{b}_4^-$ два непостоянных различных вещественных собственных значения.

Легко видеть, что операторы Нийенхейса, попавшие в разные пункты списка, дают не изоморфные левосимметрические алгебры.

Внутри пары $\mathfrak{b}_{1,\alpha}, \beta \neq 1$ и $\mathfrak{b}_3$ рассмотрим множества точек, в которых оператор обращается в ноль. Для первой алгебры это множество — точка $x = y = 0$, для второй — прямая ($y = 0$). Таким образом, алгебры не изоморфны.

В случае пары $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ и $\mathfrak{b}_3$ рассмотрим операторы $M^i_j = a^i_{sj}u^s$. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

соответственно. При замене координат эти объекты преобразуются как операторные поля. Легко видеть, что в первом случае мы имеем два различных (или совпадающих) вещественных собственных значения и отсутствие жордановой клетки, в то время как во втором случае жорданова клетка присутствует почти всюду. Значит, и в этой паре алгебр попарно не изоморфны.

Осталось разобраться с параметрическими семействами, то есть показать, что для разных значений параметров получаются не изоморфные левосимметрические алгебры. Для алгебры $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ рассмотрим уравнение

$$\lambda \det M - (\operatorname{tr} L)^2 = 0.$$

Легко видеть, что его решение единственное, $\lambda = \alpha$ и является инвариантом. Таким образом, для разных значений параметра будут получаться не изоморфные операторные поля. Аналогично определим $\det M - \lambda \det L$ для $\mathfrak{b}_{2,\beta}$ и получим решение $\lambda = 1 - \frac{1}{\beta}$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2.2. *Пусть даны операторы $R, Q \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и для ненулевого λ выполнено*

$$[R, Q] = \lambda Q.$$

Тогда Q — нильпотентный оператор.

Доказательство. Определим оператор

$$\mathrm{ad}_R : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

по формуле $\mathrm{ad}_R Q = [R, Q] = \lambda Q$ (такой оператор называется присоединённым). Из свойств матричного коммутатора немедленно вытекает

$$\mathrm{ad}_R Q^n = [R, Q]Q^{n-1} + Q[R, Q]Q^{n-2} + \dots + Q^{n-1}[R, Q] = n\lambda Q^n.$$

Хорошо известно, что собственные векторы оператора, соответствующие различным собственным значениям — линейно независимы. Учитывая, что $\mathrm{Id}, \dots, Q^{n-1}, Q^n$ по теореме Гамильтона-Кэли заведомо зависимы, получаем, что $Q^n = 0$. $\square$

Лемма 4.2.3. *Всякая двумерная коммутативная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ содержит центр, то есть пространство, натянутое на* Id.

Доказательство. Пусть это не так, тогда добавим к $\mathfrak{h}$ пространство Id. Получаем, что в $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ существует трехмерное коммутативное пространство.

С другой стороны, по теореме Шура [73], которая утверждает, что коммутативное пространство в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ имеет размерность не выше $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$. Для $n = 2$ это два. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Зафиксируем базис η_1, η_2 в $\mathfrak{a}$. Рассмотрим отображение из $\mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, устроенное следующим образом: $\xi \in \mathfrak{a}$ отправляется в M_ξ, определённое по формуле $M_\xi \eta = \xi \star \eta$. Это отображение — отображение линейных пространств и морфизм для ассоциированной алгебры Ли. При этом, разумеется, $M_{\xi \star \eta} \neq M_\xi M_\eta$. Обозначим размерность образа через N.

Случай $N = 0$. Мы получаем, что $M_\xi = 0$ для всех ξ, то есть мы имеем дело с $\mathfrak{c}_1$.

Без ограничения общности будем считать, что $N = 1$ и в базисе ξ_1, ξ_2 элемент ξ_1 порождает ядро отображения M, то есть $M_{\xi_1} = 0$. При этом по построению

$$M_{[\xi_1, \xi_2]} = [M_{\xi_1}, M_{\xi_2}] = 0.$$

$$[\xi_1, \xi_2] = \gamma \xi_1.$$

Рассмотрим следующие случаи.

Случай $N = 1$**,** $\gamma = 0$. Имеем, что $[\xi_1, \xi_2] = 0$. То есть в выбранном базисе структурные соотношения алгебры $\mathfrak{a}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\xi_1 \star \xi_1 = \xi_1 \star \xi_2 = \xi_2 \star \xi_1 = 0, \\ &\xi_2 \star \xi_2 = b\xi_1 + a\xi_2, \end{aligned}$$

где a, b — некоторые постоянные. При этом они не могут одновременно обращаться в ноль, так как иначе мы получим $N = 0$.

Подслучай $a \neq 0$**.** Выполним замену базиса

$$\eta_1 = \xi_1 \quad \text{и} \quad \eta_2 = \frac{b}{a^2}\xi_1 + \frac{1}{a}\xi_2.$$

Структурные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} &\eta_1 \star \eta_1 = \eta_1 \star \eta_2 = \eta_2 \star \eta_1 = 0, \\ &\eta_2 \star \eta_2 = \frac{1}{a^2}\xi_2 \star \xi_2 = \left(\frac{b}{a^2}\xi_1 + \frac{1}{a}\xi_2\right) = \eta_2. \end{aligned}$$

Получаем алгебру $\mathfrak{c}_2$.

Подслучай $a = 0, b \neq 0$**.** Выполним замену базиса

$$\eta_1 = b\xi_1, \quad \eta_2 = \xi_2.$$

Структурные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} &\eta_1 \star \eta_1 = \eta_1 \star \eta_2 = \eta_2 \star \eta_1 = 0, \\ &\eta_2 \star \eta_2 = b\xi_1 = \eta_1. \end{aligned}$$

Получаем алгебру $\mathfrak{c}_3$.

Случай $N = 1$**,** $\gamma \neq 0$. Выполняя замену

$$\xi_1' = \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_2' = -\frac{1}{\gamma}\xi_2$$

получаем $[\xi_1', \xi_2'] = -\xi_1'$. То есть без ограничения общности можем считать $\gamma = -1$. Получаем следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 \star \xi_1 = \xi_1 \star \xi_2 = 0,\\
&\xi_2 \star \xi_1 = \xi_1,\\
&\xi_2 \star \xi_2 = b\xi_1 + a\xi_2
\end{aligned}$$

для некоторых констант a, b.

Подслучай $a \neq 1$. Выполним замену базиса

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = -\frac{b}{1-a}\xi_1 + \xi_2.$$

Структурные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned}
&\eta_1 \star \eta_1 = \eta_1 \star \eta_2 = 0,\\
&\eta_2 \star \eta_1 = \Big(-\frac{b}{1-a}\xi_1 + \xi_2\Big) \star \xi_1 = \xi_1 = \eta_1,\\
&\eta_2 \star \eta_2 = \Big(-\frac{b}{1-a}\xi_1 + \xi_2\Big) \star \Big(-\frac{b}{1-a}\xi_1 + \xi_2\Big) = -\frac{b}{1-a}\xi_1 + b\xi_1 + a\xi_2 =\\
&= a\Big(-\frac{b}{1-a}\xi_1 + \xi_2\Big) = a\eta_2.
\end{aligned}$$

Переименовывая a в α, получаем алгебру $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$.

Подслучай $a = 1, b = 0$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}
&\xi_1 \star \xi_1 = \xi_1 \star \xi_2 = 0,\\
&\xi_2 \star \xi_1 = \xi_1,\\
&\xi_2 \star \xi_2 = \xi_2.
\end{aligned}$$

Мы получаем алгебру $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ для $\alpha = 1$.

Подслучай $a = 1, b \neq 0$. Выполнив замену базиса

$$\eta_1 = b\xi_1, \quad \eta_2 = \xi_2,$$

мы получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\eta_1 \star \eta_1 = \eta_1 \star \eta_2 = 0,\\
&\eta_2 \star \eta_1 = b\xi_2 \star \xi_1 = b\xi_1 = \eta_1,\\
&\eta_2 \star \eta_2 = \xi_2 \star \xi_2 = b\xi_1 + \xi_2 = \eta_1 + \eta_2.
\end{aligned}$$

Это алгебра $\mathfrak{b}_5$.

Случай $N = 2$, ассоциированная алгебра Ли коммутативна. Образ отображения M — двумерная коммутативная алгебра. По лемме 4.2.3 она содержит Id. Без ограничения общности считаем, что в заданном базисе ξ_1, ξ_2 выполнено, что $M_{\xi_2} = \mathrm{Id}$. Это дает нам отношения

$$\xi_1 \star \xi_1 = \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_1 \star \xi_2 = \xi_2.$$

Кроме этого, по условию коммутативности $[\xi_1, \xi_2] = 0$. Таким образом, структурные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned}
&\xi_2 \star \xi_1 = \xi_1 \star \xi_2 = \xi_1, \\
&\xi_2 \star \xi_2 = \xi_2, \\
&\xi_1 \star \xi_1 = a\xi_1 + b\xi_2,
\end{aligned}$$

для некоторых констант a, b.

Подслучай $\frac{a^2}{4} + b = 0$. Выполняя замену базиса

$$\eta_1 = \xi_1 - \frac{a}{2}\xi_2, \quad \eta_2 = \xi_2,$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
&\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_1 \star \eta_2 = \Big(\xi_1 - \frac{a}{2}\xi_2\Big) \star \xi_2 = \xi_1 - \frac{a}{2}\xi_2 = \eta_1, \\
&\eta_2 \star \eta_2 = \eta_2, \quad \Big(\xi_1 - \frac{a}{2}\xi_2\Big) \star \Big(\xi_1 - \frac{a}{2}\xi_2\Big) = a\xi_1 + b\xi_2 - a\xi_1 + \frac{a^2}{4}\xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Это алгебра $\mathfrak{c}_4$.

Подслучай $\frac{a^2}{4} + b \neq 0$. Выполним замену базиса

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_1 - \frac{a}{2\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_2, \quad \eta_2 = \xi_2.$$

Структурные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned}
&\eta_2 \star \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_1 \star \eta_2 = \eta_1, \quad \eta_2 \star \eta_2 = \eta_2, \\
&\eta_1 \star \eta_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_1 - \frac{a}{2\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_2\Big) \star \Big(\frac{1}{\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_1 - \frac{a}{2\sqrt{|\frac{a^2}{4} + b|}}\xi_2\Big) = \frac{\frac{a^2}{4} + b}{|\frac{a^2}{4} + b|}\eta_2.
\end{aligned}$$

В зависимости от знака $\frac{a^2}{4} + b$ мы получаем либо c_5^+, либо c_5^-.

Пусть теперь $N = 2$ и ассоциированная алгебра Ли некоммутативная. Без ограничения общности, считаем, что $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1$. Кроме этого $[M_{\xi_1}, M_{\xi_2}] = M_{\xi_1}$, откуда по лемме 4.2.3 вытекает, что M_{ξ_1} — нильпотентный элемент высоты один. Причем образ и ядро оператора совпадают.

Случай $N = 2$, ассоциированная алгебра Ли является некоммутативной $\xi_1 \star \xi_1 = 0$. Последнее условие означает, что образ и ядро M_{ξ_1} натянуты на ξ_1. Получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\xi_1 \star \xi_1 = 0, \\
&\xi_1 \star \xi_2 = \gamma\xi_1, \\
&\xi_2 \star \xi_1 = (\gamma - 1)\xi_1, \\
&\xi_2 \star \xi_2 = a\xi_1 + b\xi_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma \neq 0$ и a, b — некоторые константы. Условие того, что алгебра левосимметрическая, в этом случае дает

$$\begin{aligned}
0 =& \mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_2) - \mathcal{A}(\xi_2, \xi_1, \xi_2) = \\
=& (\xi_1 \star \xi_2) \star \xi_2 - \xi_1 \star (\xi_2 \star \xi_2) - (\xi_2 \star \xi_1) \star \xi_2 + \xi_2 \star (\xi_1 \star \xi_2) = \\
=& \gamma^2\xi_1 - b\gamma\xi_1 - \gamma(\gamma - 1)\xi_1 + \gamma(\gamma - 1)\xi_1 = \\
=& \gamma(b - \gamma)\xi_1.
\end{aligned}$$

То есть $b = \gamma$ и структурные соотношения принимают вид

$$\xi_1 \star \xi_1 = 0, \quad \xi_1 \star \xi_2 = \gamma \xi_1,$$
$$\xi_2 \star \xi_1 = (\gamma - 1)\xi_1, \quad \xi_2 \star \xi_2 = a\xi_1 + \gamma\xi_2.$$

Здесь a уже произвольная константа.

Подслучай $\gamma = 1, a \neq 0$. Выполним замену базиса

$$\eta_1 = a\xi_1, \eta_2 = \xi_2.$$

Структурные соотношения принимают вид

$$\eta_1 \star \eta_1 = 0, \quad \eta_1 \star \eta_2 = \eta_1,$$
$$\eta_2 \star \eta_1 = 0, \quad \eta_2 \star \eta_2 = \eta_1 + \eta_2.$$

Это алгебра $\mathfrak{b}_5$.

Подслучай $\gamma = 1, a = 0$. Переименуем базис $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_2$ и получим

$$\eta_1 \star \eta_1 = 0, \quad \eta_1 \star \eta_2 = \eta_1,$$
$$\eta_2 \star \eta_1 = 0, \quad \eta_2 \star \eta_2 = \eta_2.$$

Это алгебра $\mathfrak{b}_{2,\beta}$ для $\beta = 1$.

Подслучай $\gamma \neq 1$. Выполним замену базиса

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{1}{\gamma}\xi_2 + \frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1.$$

Получаем соотношения

$$\eta_1 \star \eta_1 = 0, \quad \eta_1 \star \eta_2 = \xi_1 \star \Big(\frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1 + \frac{1}{\gamma}\xi_2\Big) = \xi_1 = \eta_1,$$
$$\eta_2 \star \eta_1 = \Big(\frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1 + \frac{1}{\gamma}\xi_2\Big) \star \eta_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\xi_1 = \Big(1 - \frac{1}{\gamma}\Big)\eta_1,$$
$$\eta_2 \star \eta_2 = \Big(\frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1 + \frac{1}{\gamma}\xi_2\Big) \star \Big(\frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1 + \frac{1}{\gamma}\xi_2\Big) =$$
$$= -\frac{a}{\gamma^2}\xi_1 + \frac{a}{\gamma(1-\gamma)}\xi_1 + \frac{a}{\gamma^2}\xi_1 + \frac{1}{\gamma}\xi_2 = \eta_2.$$

Переименовывая γ в β, мы получаем структурные соотношения для алгебры $\mathfrak{b}_{2,\beta}$.

Случай $N = 2$**, ассоциированная алгебра Ли некоммутативная, образ** M_{ξ_1} **натянут на** $a\xi_1 + \xi_2$**.** Как уже говорилось, ядро и образ для нильпотентного оператора L_{ξ_1} совпадают, то есть

$$L_{\xi_1}\xi_1 = \xi_1 \star \xi_1 = b(a\xi_1 + \xi_2)$$

для некоторого ненулевого b. Выполним замену базиса

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\xi_1, \quad \eta_2 = \xi_2 + a\xi_1.$$

По построению получаем

$$L_{\eta_1}\eta_1 = \eta_1 \star \eta_1 = \frac{b}{|b|}(a\xi_1 + \xi_2) = \operatorname{sgn}(b)\, \eta_2.$$

В то же время $L_{\eta_1}\eta_2 = \eta_1 \star \eta_2 = 0$ и, стало быть

$$[\eta_1, \eta_2] = \frac{1}{\sqrt{|b|}}[\xi_1, \xi_2] = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\xi_1 = \eta_1.$$

Левая симметричность ассоциатора для тройки η_1, η_2, η_2 даёт:

$$\begin{aligned}0 =&\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_2) - \mathcal{A}(\eta_2, \eta_1, \eta_2) = \\ =&(\eta_1 \star \eta_2) \star \eta_2 - \eta_1 \star (\eta_2 \star \eta_2) - (\eta_2 \star \eta_1) \star \eta_2 + \eta_2 \star (\eta_1 \star \eta_2) = \\ =& - \eta_1 \star (\eta_2 \star \eta_2).\end{aligned}$$

То есть, получаем, что $\eta_2 \star \eta_2 = \gamma\eta_2$ для некоторой константы γ. Левая симметричность для тройки η_1, η_2, η_1 дает:

$$\begin{aligned}0 =&\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_1) - \mathcal{A}(\eta_2, \eta_1, \eta_1) = \\ =&(\eta_1 \star \eta_2) \star \eta_1 - \eta_1 \star (\eta_2 \star \eta_1) - (\eta_2 \star \eta_1) \star \eta_1 + \eta_2 \star (\eta_1 \star \eta_1) = \\ =&2\eta_1 \star \eta_1 + \operatorname{sgn}(b)\eta_2 \star \eta_2 = \operatorname{sgn}(b)(2 + \gamma)\eta_2.\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{sgn}(b) \neq 0$, то $\gamma = -2$. Мы получаем следующие структурные соотношения:

$$\begin{aligned}&\eta_1 \star \eta_1 = \operatorname{sgn}(b)\, \eta_2, \quad \eta_1 \star \eta_2 = 0, \\ &\eta_2 \star \eta_1 = -\eta_1, \quad \eta_2 \star \eta_2 = -2\eta_2.\end{aligned}$$

В зависимости от знака b это либо $\mathfrak{b}_4^+$, либо $\mathfrak{b}_4^-$. Теорема доказана. □

Замечание 4.2.1. В размерности два выбирая в примере 4.1.3 метрику g в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и вектор ν в виде $(1, 0, \ldots, 0)^T$, мы получаем алгебры b_4^- и b_4^+. ■

4.3 Особые точки скалярного типа. Задача линеаризации

Особая точка p называется точкой скалярного типа, если в этой точке L пропорционален скалярному оператору.

Теорема 4.3.1. *Пусть* p *— точка скалярного типа для оператора Нийенхейса L. Тогда производные $a^i_{jk} = \frac{\partial L^i_j}{\partial u^k}$ задают на касательном пространстве $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ каноническую структуру левосимметрической алгебры.*

Доказательство. Напомним, что тензор называется инвариантным, если его компоненты записываются одинаково в любой системе координат. Выполнена следующая лемма.

Лемма 4.3.1. *Рассмотрим тензорное поле T типа (p,q) в окрестности точки* p. *Пусть в некоторой системе координат компоненты тензора имеют вид $T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}$, причем в точке* p *тензор T инвариантен. Тогда производные*

$$\frac{\partial T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}}{\partial u^k}$$

образуют на касательном пространстве $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ тензор типа $(p,q+1)$.

Доказательство. Зафиксируем координаты $u^1,\dots,u^n$ и рассмотрим замену координат $v(u)$, сохраняющую точку p на месте. Выпишем правила преобразования тензора при такой замене (черта обозначает компоненты тензора в новой системе координат)

$$\bar{T}^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q} = T^{\alpha_1,\dots\alpha_p}_{\beta_1,\dots,\beta_q}\frac{\partial v^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\dots\frac{\partial v^{i_p}}{\partial u^{\alpha_p}}\frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial v^{j_1}}\dots\frac{\partial u^{\beta_q}}{\partial v^{j_q}}.$$

Обозначим через $S^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ — тензор с постоянными компонентами в системе координат $u^1,\dots,u^n$, такой что

$$S^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q} = T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}(\mathrm{p}).$$

Рассмотрим тензор $T-S$. Все его компоненты одновременно обращаются в ноль в p, и при этом

$$\frac{\partial}{\partial u^k}(T-S)^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \frac{\partial}{\partial u^k}T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}.$$

При этом, в силу инвариантности S при замене координат $v(u)$, мы имеем

$$\bar{T}-\bar{S} = \bar{T}-S.$$

и, стало быть, $\frac{\partial}{\partial v^k}(\bar{T}-\bar{S}) = \frac{\partial}{\partial v^k}\bar{T}$. Таким образом, утверждение леммы можно доказать для нулевого тензора. Продифференцируем обе части по v^k и подставим точку p в обе части. Получаем

$$\frac{\partial \bar{T}^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}}{\partial v^k}(\mathrm{p}) = \frac{\partial T^{\alpha_1,\dots\alpha_p}_{\beta_1,\dots,\beta_q}}{\partial u^\gamma}\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}(\mathrm{p})\frac{\partial v^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\dots\frac{\partial v^{i_p}}{\partial u^{\alpha_p}}\frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial v^{j_1}}\dots\frac{\partial u^{\beta_q}}{\partial v^{j_q}}.$$

Все члены справа, содержащие вторые производные, обратились в ноль, так как они умножаются на компоненты тензора $T^{\alpha_1,\dots\alpha_p}_{\beta_1,\dots,\beta_q}$, а в точке p они равны нулю. Таким образом, лемма доказана. □

Из леммы 4.3.1 и того факта, что скалярный оператор — это инвариантный тензор, немедленно вытекает, что

$$a^i_{jk} = \frac{\partial L^i_j}{\partial u^k}$$

задают на касательном пространстве компоненты тензора $(1,2)$, то есть структурные константы алгебры. Заметим, что замена L на $L+\lambda\mathrm{Id}$ не меняет производные в точке, поэтому без ограничения общности можно считать, что L в p обращается в ноль. Продифференцируем кручение Нийенхейса, подставляя сразу точку p:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^r}\left(L^s_j\frac{\partial L^i_k}{\partial u^s} - L^s_k\frac{\partial L^i_j}{\partial u^s} - L^i_s\frac{\partial L^s_k}{\partial u^j} + L^i_s\frac{\partial L^s_j}{\partial u^k}\right) = a^s_{jr}a^i_{ks} - a^s_{kr}a^i_{js} - a^i_{sr}a^s_{kj} + a^i_{sr}a^s_{jk}.$$

При этом

$$\mathcal{A}(\eta_k,\eta_j,\eta_r)-\mathcal{A}(\eta_j,\eta_k,\eta_r)=\eta_k\star(\eta_j\star\eta_r)-(\eta_k\star\eta_j)\star\eta_r-\eta_j\star(\eta_k\star\eta_r)+(\eta_j\star\eta_j)\star\eta_k=$$
$$=\Big(a^i_{ks}a^s_{jr}-a^s_{kj}a^i_{sr}-a^i_{js}a^s_{kr}+a^s_{jk}a^i_{sr}\Big)\eta_i.$$

В скобках стоит то же выражение, что мы получили выше, поэтому $\mathcal{A}(\eta_k,\eta_j,\eta_r)=\mathcal{A}(\eta_j,\eta_k,\eta_r)$ и доказательство теоремы завершено. □

Полученную в теореме 4.3.1 алгебру, равно как и соответствующий ей линейно зависящий от координат оператор Нийенхейса, мы будем называть линеаризацией L в точке скалярного типа p.

Замечание 4.3.1. Лемма 4.3.1 является почти фольклорной и играет важную роль в разных областях математики:

1. Для дифференциальной формы T_j, обращающейся в ноль в точке p, на касательном пространстве $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ возникает билинейная форма $\frac{\partial T_j}{\partial u^k}$. Если T — дифференциал функции, то точка p называется критической, а полученная форма — гессианом;
2. Для векторного поля ξ^i, которое обращается в ноль в точке p, на касательном пространстве $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ возникает линейный оператор $\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}$. Этот оператор называется оператором линеаризации (или матрицей линеаризации);
3. Для бивектора, обращающегося в ноль в точке p на кокасательном пространстве $T^*_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ возникает структура алгебры $c^{ij}_k=\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial u^k}$. Если бивектор — бивектор Пуассона, то полученные алгебра — алгебра Ли. Она называется линеаризацией скобки Пуассона.

■

Замечание 4.3.2. Операцию на $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ в условии теоремы 4.3.1 можно определить инвариантно. Рассмотрим $\xi_0,\eta_0\in T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$ и продолжим их произвольным образом на окрестность как векторные поля ξ,η. Определим операцию как

$$\eta_0\star\xi_0=\mathcal{L}_\xi L\eta|_{\mathrm{p}}.$$

По построению

$$(\mathcal{L}_\xi L)^i_j=\frac{\partial L^i_j}{\partial u^s}\xi^s+L^i_q\frac{\partial \xi^q}{\partial u^j}-\frac{\partial \xi^i}{\partial u^q}L^q_j.$$

Таким образом, подставляя точку p в выражение $\mathcal{L}_\xi L\eta$, мы получаем (в силу того, что $L(\mathrm{p})=\lambda_0\mathrm{Id}$)

$$(\mathcal{L}_\xi L\eta)^i=\frac{\partial L^i_j}{\partial u^s}\eta^j_0\xi^s_0=a^i_{js}\eta^j_0\xi^s_0.$$

Результат операции не зависит от продолжения векторов ξ_0,η_0 и справа стоит в точности выражение для произведения в смысле алгебры на $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$. ■

Пример 4.3.1. Пусть M^n — аффинное пространство и на нем задано операторное поле L, которое линейно зависит от координат $u^1,\dots,u^k$, то есть

$$L^i_j=a^i_{jk}u^k.$$

Легко видеть, что оно обращается в ноль в нуле. Тогда структура алгебра на $T_0\mathrm{M}^n$, возникающая по лемме 4.3.1, совпадает с a^i_{jk}. То есть линеаризация левосимметрической алгебры в нуле совпадает с ней самой. ■

Зафиксируем систему координат $u^1, \dots, u^n$ в окрестности точки скалярного типа и рассмотрим разложение операторного поля в ряд Тейлора

$$L = \lambda_0 \mathrm{Id} + L_1 + L_2 + \dots .$$

Здесь компоненты матрицы L_i либо нули, либо однородные полиномы степени i. Оператор L_1 — линеаризация L в точке p. Мы можем сформулировать следующую задачу.

Задача линеаризации: когда в окрестности точки скалярного типа p существует замена координат, приводящая L к виду

$$L = \lambda_0 \mathrm{Id} + L_1\,?$$

Или, другими словами, нормальная форма оператора Нийенхейса линейна по координатам.

Мы будем рассматривать задачу линеаризации в трех разных категориях: формальной, аналитической и гладкой. Ответ будем давать в терминах линейной части L_1, то есть левосимметрической алгебры на $T_{\mathrm{p}}\mathrm{M}^n$. Левосимметрическую алгебру $\mathfrak{a}$ называем невырожденной, если для соответствующего ей оператора Нийенхейса L_1 линеаризующая замена существует всегда. В противном случае алгебру называем вырожденной.

Теорема 4.3.2. *Пусть $\mathfrak{a}$ — левосимметрическая алгебра, представляющая собой прямую сумму n одномерных алгебр. Она невырожденная в формальной и вещественно-аналитической категориях.*

Доказательство. Пусть дан оператор Нийенхейса L в окрестности точки $\mathfrak{a}$ скалярного типа. Положим для удобства $L = 0$ в точке p и рассмотрим разложение в ряд

$$L = L_1 + L_2 + \dots .$$

Рассмотрим также замену координат вида $v^i = u^i + f_i(u)$, где f_i — однородные многочлены степени k. Обозначим через J_f матрицу Якоби для системы функций f_i. Легко видеть, что компоненты этой матрицы — однородные многочлены степени $k-1$.

Мы будем использовать обозначения $J_f(u)$ и $J_f(v)$ — вторая матрица получается из первой путем подстановки вместо u^i координат v^i. Соответственно, аналогичные обозначения будут использоваться для операторных полей, то есть $L(v)$ получается из $L(u)$ той же самой подстановкой.

Следующая лемма является ключевым инструментом для линеаризации в целом.

Лемма 4.3.2. *Пусть нам задан оператор Нийенхейса L в окрестности точки* p *и пусть* $L(\mathrm{p}) = 0$. *Разложение оператора L в ряд Тейлора в* p *в этом случае имеет вид*

$$L = L_1(u) + L_k(u) + L_{k+1}(u) + \dots ,$$

где $k \geq 2$. Рассмотрим замену координат $v(u)$. В аналогичном разложении в новых координатах мы имеем

$$\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_k + \bar{L}_{k+1} + \dots ,$$

где

$$\bar{L}_1 = L_1(v), \quad \bar{L}_k = L_k(v) - L_1(f(v)) + J_f(v)L_1(v) - J_f(v)L_1(v).$$

Доказательство. Нам дана замена $v^i = u^i + f_i(u)$. Легко видеть, что обратная замена в этом случае приобретает вид

$$u^i = v^i + f_i(v) + \dots,$$

где $\dots$ означают члены более высоких порядков по v. Как следствие, получаем, что якобиан замены и обратный к нему имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \mathrm{Id} + J_f(u), \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \mathrm{Id} - J_f(v) + \dots,$$

где $\dots$ означает члены более высокого порядка. Получаем следующее

$$\begin{aligned}\bar{L}^i_j =& \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} L^\alpha(v) \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} = \Big(\mathrm{Id} + J_f(v) + \dots\Big)\Big(L_1(v) + L_k(v) - L_k(f(v)) + \dots\Big)\Big(\mathrm{Id} - J_f(v) + \dots\Big) = \\ =& \underbrace{L_1(v)}_{\text{линейные члены}} + \underbrace{L_k(v) - L_1(f(v)) + J_f(v)L_1(v) - L_1(v)J_f(v)}_{\text{члены порядка } k} + \underbrace{\dots}_{\text{члены порядка } > k}.\end{aligned}$$

Приравнивая к разложению Тейлора в координатах v, мы получаем требуемое утверждение. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Начнем с формальной категории. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ и рассмотрим разложение оператора L в ряд Тейлора в точке p:

$$L = L_1 + L_k + \dots,$$

где $k \geq 1$. Обозначаем базисные векторные поля через ξ_i. Верна следующая лемма.

Лемма 4.3.3. *Для произвольных ξ_i, ξ_j и членом L_1, L_k разложения Тейлора выполнено*

$$\begin{aligned}0 = [L_1\xi, L_k\eta] + [L_k\xi, L_1\eta] - L_k[L_1\xi, \eta] - L_k[\xi, L_1\eta] -\\ - L_1[L_k\xi, \eta] - L_1[\xi, L_k\eta] + L_kL_1[\xi, \eta] + L_1L_k[\xi, \eta].\end{aligned}$$

Доказательство. Формула в утверждении леммы совпадает с формулой для скобки Фролихера-Нийенхейса операторных полей. Допуская вольность языка, мы будем обозначать это выражение как $[[L_1, L_k]]_F N$. Однако следует помнить, что ни L_1, ни L_k не являются операторными полями — это члены разложения ряда Тейлора, поэтому говорить о скобке Фролихера-Нийенхейса для них не имеет смысла.

Пусть дана пара операторных полей K, L, компоненты которых в данной системе координат записываются однородными многочленами степеней k, m соответственно. Тогда компоненты $[[K, L]]_{FN}$, определённые по формуле

$$\begin{aligned}[[K, L]]_{FN}(\xi, \eta) = [K\xi, L\eta] + [L\xi, K\eta] - L[K\xi, \eta] - L[\xi, K\eta] -\\ - K[L\xi, \eta] - K[\xi, L\eta] + LK[\xi, \eta] + KL[\xi, \eta].\end{aligned}$$

представляют собой однородные многочлены степени $k + m - 1$. Получаем, что

$$\mathcal{N}_L = \underbrace{[[L_1, L_1]]_{FN}}_{\text{линейные члены}} + 2\underbrace{[[L_1, L_k]]_{FN}}_{\text{члены порядка } k} + \underbrace{\dots}_{\text{члены порядка } > k}.$$

Таким образом, равенство нулю кручения Нийенхейса влечет равенство нулю $[[L_1, L_k]]_{FN}$, и лемма доказана. □

Линеаризация L в точке совпадает с прямой суммой одномерных алгебр, то есть, без ограничения общности, можно считать, что в выбранной в окрестности p системе координат мы имеем

$$L_1 = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Как обычно, ξ_i обозначают базисные векторные поля (по повторяющимся греческим индексам суммирование имеется, по латинским его нет):

$$\begin{aligned}
[[L,M]]_{FN}(\xi_i,\xi_j) &= [L\xi_i, M\xi_j] + [M\xi_i, L\xi_j] - L[\xi_i, M\xi_j] - M[L\xi_i,\xi_j] - M[\xi_i, L\xi_j] - L[M\xi_i,\xi_j] = \\
&= [u^i\xi_i, M_j^\alpha\xi_\alpha] + [M_i^\alpha\xi_\alpha, u^j\xi_j] - L[\xi_i, M_j^\alpha\xi_\alpha] - L[M_i^\alpha\xi_\alpha,\xi_j] = \\
&= u^i\frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i}\xi_\alpha - M_j^i\xi_i + M_i^j\xi_j - u^j\frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j}\xi_\alpha - u^\alpha\frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i}\xi_\alpha + u^\alpha\frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j}\xi_\alpha = \\
&= \sum_{\alpha\neq i,j}\left((u^i-u^\alpha)\frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i} - (u^j-u^\alpha)\frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j}\right)\xi_\alpha + \left((u^i-u^j)\frac{\partial M_j^j}{\partial u^i} + M_i^j\right)\xi_j - \\
&- \left((u^j-u^i)\frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} + M_j^i\right)\xi_i.
\end{aligned}$$

На элементы, находящиеся вне главной диагонали, мы получаем условие

$$(u^j-u^i)\frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} + M_j^i = 0, \quad i\neq j.$$

Обозначим через $f_k = M_k^k$. Тогда равенство можно записать как

$$L_k(u) - L_k(f) = L_1(u)J_f(u) - J_f(u)L_1(u). \tag{4.1}$$

Теперь выполним замену координат вида $v^i = u^i + f_i(u)$. По лемме 4.3.2 получаем

$$\bar{L}_k = L_k(v) - L_k(f) + J_f(v)L_1(v) - L_1(u)J_f(v).$$

Из условия 4.1 получаем, что $\bar{L}_k = 0$.

Мы показали, что, последовательно делая замены вида $v^i = u^i + f_i(u)$, мы можем привести оператор L к виду L_1. Разумеется, композиция всех замен (а их было, вообще говоря, бесконечное число) дает нам только формальную замену. Это значит, что мы доказали утверждение теоремы 4.3.2 в формальной категории.

Рассмотрим теперь $\chi_L(\lambda) = 0$. По построению новые формальные координаты — это в точности формальные решения данного уравнения. По теореме Артина [5] мы получаем, что для каждого формального решения найдется аналитическое, совпадающее с формальным в любом конечном числе первых членов. Нам достаточно совпадения в первых двух членах — это обеспечит нам то, что полученные аналитические функции для каждого формального решения будут иметь независимые дифференциалы.

Взяв их за координаты и пользуясь свойством оператора Нийенхейса $L^*\mathrm{d}\lambda = \lambda\mathrm{d}\lambda$, мы получаем линеаризующую систему координат. Теорема доказана. $\square$

Верна ли теорема 4.3.2 в гладкой категории, неизвестно.

4.4 Линеаризация треугольного векторного поля

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y и векторное поле ξ на плоскости. Точка p называется критической, если в ней векторное поле обращается в ноль. Мы считаем, что начало координат — критическая точка для ξ, то есть ряд Тейлора для векторного поля в этой точке начинается как минимум с линейного члена

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots.$$

Задача линеаризации для векторного поля формулируется так: когда существует такая замена координат, оставляющая ноль неподвижным, что векторное поле становится линейным, то есть $\xi = \xi_1$.

Ответ, разумеется, отличается в гладком, аналитическом и формальном случаях. Под формальным случаем мы понимаем поиск замены координат в категории формальных рядов. Задача эта считается классической (см. обзоры в [20], [135]).

Мы будем рассматривать случай, когда собственные значения оператора линеаризации вещественны и отличны от нуля. Обозначим их через λ_1, λ_2. Пара называется резонансной, если существуют такие целые положительные числа m, n, что $m\lambda_1 + n\lambda_2 = \lambda_1$ при условии $m + n \geq 2$. В противном случае пара называется нерезонансной.

Мы разобьем резонансные пары на две категории:

- **Седла:** $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{p}{q}$ для натуральных взаимно простых p, q;
- **Узлы:** $\lambda_1 = r\lambda_2$ или $r\lambda_1 = \lambda_2$ для натурального $r \geq 2$.

Для примера случай совпадающих собственных значений — это не резонансная пара.

Следующая теорема описывает нормальные формы векторных полей в окрестности критической точки при сформулированных выше предположениях.

Теорема 4.4.1. *[Предложение 4.29, таблица 4.1 в [135]] Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y дано векторное поле, для которого начало координат является критической точкой. Пусть у оператора линеаризации два вещественных различных собственных числа λ_1, λ_2. Тогда в окрестности начала координат существует формальная замена координат, которая приводит векторное поле к одной из следующих нормальных форм:*

Table 5 : *Полиномиальные нормальные формы в размерности два*

Тип	*Условия*	*Полиномиальная нормальная форма*
Нерезонансная пара	λ_1, λ_2 *нерезонансны*	*линейная*
Резонансный узел I	$\lambda_1 = r\lambda_2$ *и* $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$	$\dot{x} = \lambda_1 x + a\lambda_2 y^r$ $\dot{y} = \lambda_2 y,$ $a = \{\pm 1, 0\}$
Резонансный узел II	$r\lambda_1 = \lambda_2$ *и* $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$	$\dot{x} = \lambda_1 x$ $\dot{y} = \lambda_2 y + a\lambda_1 x^r,$ $a = \{\pm 1, 0\}$
Резонансное седло	$\lambda_1 = -\frac{p}{q}\lambda_2, p, q \in \mathbb{N}$	$\dot{x} = \lambda_1 x$ $\dot{y} = \lambda_2 y(1 \pm x^{qm} y^{pm} + b x^{2qm} y^{2pm}),$ $b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$

Параметры a, r резонансных узлов и b, m резонансных седел — формальные инварианты нормальных форм.

Теперь перейдем к гладкому случаю. Критическая точка называется элементарной, если у каждого собственного значения вещественная часть ненулевая. Рассматриваемые нами особенности, разумеется, элементарны. Следующая теорема является фундаментальным результатом в теории векторных полей на плоскости.

Теорема 4.4.2 (К.Т.Чен [23]). *Рассмотрим пару векторных полей ξ, η в окрестности общей для них элементарной критической точки* р. *Следующие два условия эквивалентны*

1. *Найдется диффеоморфизм, оставляющий точку* р *на месте, и переводящий ξ в η;*
2. *Найдется формальный диффеоморфизм, переводящий разложение Тейлора ξ в точке* р *в разложение Тейлора η в точке* р.

Следствие 4.4.1. *Пусть в окрестности начала координат на плоскости дано гладкое векторное поле ξ, причем начало координат является критической точкой для этого векторного поля. Пусть оператор, соответствующий линеаризации векторного поля, имеет два вещественных ненулевых собственных значения λ_1, λ_2. Тогда в окрестности начала координат существует гладкая замена координат, приводящая векторное поле к (вообще говоря, полиномиальной) нормальной форме из таблицы теоремы 4.4.1.*

Вопрос линеаризации в аналитическом случае сложнее. Обозначим через $[q_0, q_1, q_2, \dots]$ разложение в цепную дробь иррационального числа α. Если ряд

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log q_{i+1}}{q_i}$$

сходится, то такие α называются числами Брюно. Обозначим через Ω множество отрицательных чисел Брюно. Следующие теоремы отвечают на вопрос о линеаризации векторного поля.

Теорема 4.4.3. *(следует из Теоремы 5.5 в [135]) Пусть в окрестности начала координат на плоскости дано аналитическое векторное поле ξ, причем начало координат — критическая точка для этого векторного поля. Пусть оператор линеаризации имеет два вещественных ненулевых собственных значения λ_1, λ_2 одного знака. Тогда в окрестности начала координат существует аналитическая замена координат, приводящая векторное поле к (вообще говоря, полиномиальной) нормальной форме из таблицы теоремы 4.4.1.*

Теорема 4.4.4. *([20], вытекает из Теоремы II, см. также [135], Теорема 5.22) Пусть в окрестности начала координат на плоскости дано аналитическое векторное поле ξ, причем начало координат — критическая точка для векторного поля. Пусть оператор линеаризации имеет два вещественных ненулевых собственных значения λ_1, λ_2 разных знаков и*

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \Omega.$$

Тогда в окрестности начала координат существует аналитическая замена координат, приводящая векторное поле к нормальной форме (линейной!) из таблицы теоремы 4.4.1.

В отличие от гладкого случая, теоремы 4.4.3 и 4.4.4 не покрывают все случаи: в частности, открытыми остаются вопросы:

1. Случай резонансных седел;
2. Случай нерезонансной пары различных знаков с условием, что $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — не число Брюно.

В первом случае область активно изучается (см. [107]), во втором имеются результаты Йоккоза [117, 118]. Нам, однако, всё это не потребуется. Мы будем иметь дело не с произвольными векторными полями, а с полями вида

$$\begin{aligned} \xi^1 &= f(x,y), \\ \xi^2 &= y, \end{aligned}$$

причём $f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \alpha \neq 0$. То есть собственные значения линеаризации в данном случае — это 1 и α. Такие векторные поля мы будем называть треугольными. Соответственно, нас будут интересовать замены координат вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= g(x,y) \\ \bar{y} &= y. \end{aligned}$$

Такие замены координат мы будем называть треугольными. Таким образом, мы имеем дело с более специальной линеаризацией: когда треугольное векторное поле линеаризуется с помощью треугольной замены? В оставшейся части раздела мы воспользуемся сформулированными выше результатами, чтобы ответить на эти вопросы во всех интересующих нас категориях. Мы сформулируем эти ответы в виде предложений.

Предложение 4.4.1. *Рассмотрим треугольное векторное поле в окрестности критической точки, расположенной в начале координат. Пусть*

$$\alpha > 0, \quad \alpha \neq r, \frac{1}{r} \quad \text{для} \quad 2 \leq r \in \mathbb{N}.$$

Тогда векторное поле линеаризуется треугольной заменой как в гладкой, так и в формальной категории.

Доказательство. Для представленного α нормальная форма векторного поля из таблицы в теореме 4.4.1 является линейной. Стало быть, векторное поле формально линеаризуется. По следствию 4.4.1 векторное поле линеаризуется в гладкой категории.

Пусть теперь линеаризующая замена имеет вид

$$\bar{x} = g(x,y), \quad \bar{y} = h(x,y),$$

причём считаем, что якобиан замены в начале координат совпадает с Id. Получаем

$$\frac{\partial g}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y} y = \alpha g(x,y), \quad \frac{\partial h}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial h}{\partial y} y = h(x,y)$$

Рассмотрим теперь

$$\bar{x} = g(x,y), \quad \bar{y} = y.$$

По построению $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$, из чего следует, что это замена координат. Кроме того, в силу приведенных ранее выкладок получаем, что это тоже линеаризующая замена, и она треугольная. Предложение доказано. □

Для аналитической категории предложение принимает вид:

Предложение 4.4.2. *Рассмотрим треугольное аналитическое векторное поле в окрестности критической точки, расположенной в начале координат. Пусть либо*

$$\alpha > 0, \quad \alpha \neq r, \frac{1}{r} \quad \textit{для} \quad 2 \leq r \in \mathbb{N}.$$

либо

$$\alpha < 0, \quad \alpha \in \Omega.$$

Тогда векторное поле линеаризуется аналитической треугольной заменой.

Доказательство. В первом случае оба собственных значения оператора линеаризации положительны. По теореме 4.4.3 существует аналитическая замена координат, приводящая их к нормальной форме из теоремы 4.4.1. Для выбранных значений параметра эти нормальные формы линейны, значит, эта замена координат и будет линеаризующей.

Во втором случае, то есть когда $\alpha \in \Omega$, по теореме 4.4.4 существует аналитическая линеаризующая замена координат. Рассуждая аналогично доказательству предложения 4.4.1, мы можем показать, что подобная замена может быть выбрана треугольной. Предложение доказано. □

В завершении раздела мы докажем еще одно важное "запрещающее"предложение в аналитической категории. Обозначим через Σ_u — множество отрицательных иррациональных чисел, не являющихся числами Брюно.

Предложение 4.4.3. *Рассмотрим аналитическое треугольное векторное поле в окрестности критической точки, расположенной в начале координат. Пусть*

$$\alpha \in \Sigma_u.$$

Тогда векторное поле, вообще говоря, не линеаризуется треугольной заменой координат.

Доказательство. Основная теорема из [117] утверждает, что для α в условиях предложения 4.4.3 существует аналитическое преобразование комплексной прямой $\mathbb{C}$ с координатой z вида

$$q(z) = \exp(2\pi\alpha)z + \{\text{члены более высокого порядка}\},$$

которое не линеаризуется аналитической заменой координат. Выберем это преобразование. По основной теореме в работе [118] мы получаем, что отображение $q(z)$ может быть реализовано как преобразование монодромии для системы (в оригинальной работе перед u стоит другой знак)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(1 + \dots), \\ \dot{v} &= \alpha v(1 + \dots). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Обозначим через $r(u, v), h(u, v)$ функции, стоящие в скобках в первом и втором. Обозначим $f(u, v) = r(u, v)/h(u, v)$. Легко видеть, что это аналитическая функция в окрестности нуля. Рассмотрим теперь треугольную систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v), \\ \dot{v} &= v. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Мы видим, что два векторных поля связаны умножением на $h(u, v)$.

Говорят, что два векторных поля ξ_1, ξ_2 орбитально эквивалентны, если в подходящей системе координат $\xi_1 = h\xi_2$ для некоторой аналитической функции h. Таким образом, если (4.3) линеаризуема, то (4.2) орбитально эквивалентна линейной системе.

Теорема 1 из [134] утверждает, что если система (4.2) орбитально эквивалентна линейной, то и отображение монодромии должно быть сопряжено с отображением монодромии линейной системы. То есть, другими словами, найдется преобразование комплексной прямой, которое переводит $q(z)$ в линейное. Мы же, однако, выбрали $q(z)$, для которого это невозможно.

Таким образом, векторное поле (4.3) не линеаризуется и, следовательно, предложение доказано. $\square$

4.5 Существование первых интегралов в окрестности критической точки

В этом разделе мы рассмотрим вопрос существования первых интегралов в окрестности особой точки. Начнем с примера.

Пример 4.5.1. Пусть дано линейное векторное поле $\xi = (\alpha x, y)^T$ (то есть мы имеем дело со столбцом) и $\alpha < 0$. Покажем, что у векторного поля ξ всегда есть гладкий первый интеграл.

Определим константу $s = -\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ и рассмотрим функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^{2s}y^2}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Определим частные производные всех порядком равными нулю на координатном кресте $xy = 0$. Легко проверяется, что полученная функция — гладкая на всей плоскости. При этом частные производные f удовлетворяют тождествам

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2s}{x^{2s+1}y^2} f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{x^{2s}y^3} f(x, y).$$

В частности

$$\alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

То есть f — первый интеграл векторного поля ξ. $\blacksquare$

Пример 4.5.2. Пусть дано линейное векторное поле $\xi = (\alpha x, y)^T$ (то есть мы имеем дело со столбцом) и $\alpha < 0$. Покажем, что у векторного поля ξ всегда аналитический первый интеграл тогда и только тогда, когда α — отрицательное рациональное число.

Рассмотрим действие векторного поля на мономах типа $x^p y^q$. По определению

$$\mathcal{L}_\xi(x^p y^q) = (\alpha p + q) x^p y^q.$$

Пусть f — аналитическая функция и ее разложение в ряд в нуле имеет вид

$$f = \sum_{p,q} f_{pq} x^p y^q.$$

Условие $\mathcal{L}_\xi f = 0$ приобретает вид

$$\mathcal{L}_\xi f = \sum_{p,q} (\alpha p + q) f_{pq} x^p x^q = 0.$$

Если $\alpha p + q \neq 0$ (α — не рационально), то равенство выше возможно если и только если $f_{pq} = 0$. В свою очередь, если α — отрицательное рациональное число, то рассмотрим такие взаимно простые p, q, что $\alpha = -\frac{q}{p}$. В этом случае первый интеграл принимает вид $f(x^p y^q)$, где f — произвольная аналитическая функция одной переменной.

Главный результат этого раздела связывает существование интегралов и собственные значения линеаризации векторного поля в точке.

Предложение 4.5.1. *Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y задано векторное поле ξ, и начало координат является критической точкой для векторного поля. Пусть собственные значения линеаризации — вещественные и ненулевые λ_1, λ_2.*

1. *Если в окрестности начала координат существует непостоянный гладкий интеграл, то $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$;*
2. *Если в окрестности начала координат существует непостоянный аналитический интеграл, то $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{q}{p}$ для взаимно простых $p, q \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Начнем с аналитического случая. Рассмотрим разложение векторного поля в ряд Тейлора в окрестности нуля $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots$. Пусть $f = f_0 + f_k + f_{k+1} + \dots$ — аналогичное тейлоровское разложение для первого интеграла f, где номер $k \geq 1$ соответствует первому ненулевому члену в этом разложении после f_0. Получаем, что

$$0 = \mathcal{L}_\xi f = \underbrace{\mathcal{L}_{\xi_1} f_k}_{\text{члены степени } k} + \underbrace{\dots}_{\text{члены степени } > k}.$$

То есть, если у ξ есть непостоянный первый интеграл, то и у ξ_1 есть непостоянный первый интеграл. Покажем теперь, что аналитический (а на самом деле,полиномиальный!) первый интеграл у ξ_1 может быть только при $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{q}{p}$ для взаимно простых $p, q \in \mathbb{N}$. Для этого рассмотрим несколько случаев

Случай $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \leq 0$. В этом случае собственные значения различны, и оператор линеаризации диагонализуется, то есть

$$\xi_1 = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)^T.$$

Переходя к векторному полю $\frac{1}{\lambda_2}\xi$ (это преобразование не влияет на существование первого интеграла), мы получаем векторное поле $(\alpha x, y)^T, \alpha < 0$. Для него мы проводили вычисления в примере (4.5.2). Таким образом, интеграл существует только если $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{q}{p}$.

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ и жорданов блок. Пусть нормальная жорданова форма оператора линеаризации состоит из жорданова блока с собственным значением $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Это означает, что без ограничения общности можно считать, что она приведена к виду $(\lambda x + y, \lambda y)$.

Для соответствующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \lambda x + y, \quad \dot{y} = \lambda y$$

решение можно выписать явно. Оно имеет вид

$$x = c_1 \exp \lambda t + c_2 t \exp \lambda t, \quad y = c_2 \exp \lambda t.$$

Легко видеть, что в этом случае при $t \to -\infty$ интегральные траектории стремятся к началу координат.

Так как первый интеграл должен быть постоянным вдоль интегральных траекторий, мы получаем, что его значение на каждой траектории совпадает с его значением в нуле. Интегральные траектории заметают целую окрестность нуля, поэтому первый интеграл должен быть постоянным во всей окрестности.

То есть у линейной части ξ_1 непостоянный аналитический интеграл отсутствует, значит, его нет и у ξ.

Случай $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ и нет жордановых блоков. Пусть теперь нормальная жорданова форма оператора линеаризации будет диагональна с собственными значениями λ_1, λ_2 на диагонали. Заменяя, если необходимо, ξ_1 на $-\xi_1$, можно добиться того, что оба собственных значения будут положительными. Также без ограничения общности можно считать, что линейная часть ξ_1 приведена к виду $(\lambda_1 x, \lambda_2 y)$.

Для соответствующей системы уравнений

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y$$

решение можно выписать явно. Оно имеет вид

$$x = c_1 \exp \lambda_1 t, \quad y = c_2 \exp \lambda_2 t.$$

Снова мы видим, что в этом случае $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что непостоянных интегралов нет.

Теперь перейдем к гладкому случаю. Если $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$, то первый интеграл существует (пример 4.5.1). Поэтому пусть $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$. Разберем два случая.

Нерезонансный случай. По теореме 4.4.1 нормальная формальная форма векторного поля ξ линейна. По следствию 4.4.1 мы получаем, что найдётся гладкая линеаризующая замена координат. Система дифференциальных уравнений, соответствующая векторному полю в новой системе координат, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + y \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned}.$$

В обоих случаях мы дословно повторяем рассуждения, проведённые выше, и получаем, что в окрестности особой точки первый интеграл — это только константа.

Резонансный случай. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. В этом случае мы имеем дело с резонансным узлом. Рассмотрим узел первого типа, то есть $\lambda_1 = r\lambda_2$. По теореме 4.4.1 векторное поле формальной заменой приводится к своей полиномиальной нормальной форме, где a, r — формальные инварианты. По следствию 4.4.1 векторное поле приводится к этому же виду гладкой заменой.

Система дифференциальных уравнений, соответствующая векторному полю в новой системе координат, имеет вид (мы пользуемся тем, что $\lambda_1 = r\lambda_2$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r\lambda_2 x + a\lambda_2 y^r, \\ \dot{y} &= \lambda_2 y. \end{aligned}$$

Решения для такой системы выписываются явно

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \exp r\lambda_2 t + a\lambda_2 t\, c_2^r \exp r\lambda_2 t, \\ y(t) &= c_2 \exp \lambda_2 t \end{aligned}$$

Мы получаем $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$. Таким образом, снова повторяя рассуждения выше, мы получаем, что у такого векторного поля в окрестности особой точки первых интегралов нет. Аналогично разбирается случай резонансного узла второго типа. Предложение доказано. $\square$

4.6 Решение задачи линеаризации в размерности два

В размерности два задачу линеаризации удается решить полностью, то есть для каждой левосимметрической алгебры из списка в теореме 4.2.1 дать ответ на вопрос, является ли она невырожденной. Введем следующие множества

$$\Sigma_0 = \{0\}, \quad \Sigma_1 = \{r |\, r \in \mathbb{N}, r \geq 3\}, \quad \Sigma_2 = \{\alpha |\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0\}, \quad \Sigma_3 = \{\frac{1}{m} |\, m \in \mathbb{N}, r \geq 2\}$$

и обозначим $\Sigma_{\mathrm{sm}} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. Тогда выполнена следующая теорема

Теорема 4.6.1. *Классификация двумерных вещественных левосимметрических алгебр в смысле вырожденности/невырожденности в гладкой категории представлена в следующей таблице*

Вырожденные	*Невырожденные*
$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_4, \mathfrak{b}_5, \mathfrak{b}_{2,\beta}$ $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ *для* $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{sm}}$	$\mathfrak{b}_4^+, \mathfrak{b}_4^-, \mathfrak{c}_5^+, \mathfrak{c}_5^-, \mathfrak{b}_3,$ $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ *для* $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{sm}}$

(4.4)

Доказательство теоремы для гладкого и аналитического случая удобно проводить одновременно, поэтому мы сначала сформулируем теорему в аналитической категории.

Напомним, что множество отрицательных иррациональных чисел, которые не являются числами Брюно, в предыдущем параграфе мы обозначили как Σ_u. Мера этого множества равна нулю. Обозначим

$$\widehat{\Sigma}_2 = \{-\frac{p}{q} \;|\, p, q \in \mathbb{N}\}$$

и определим $\Sigma_{\mathrm{an}} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \widehat{\Sigma}_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_u$. Выполнена следующая теорема

Теорема 4.6.2. *Классификация двумерных вещественных левосимметрических алгебр в смысле вырожденности/невырожденности в аналитической категории приведена в следующей таблице*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \textit{Вырожденные} & \textit{Невырожденные} \\ \hline \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_4, \mathfrak{b}_5, \mathfrak{b}_{2,\beta} & \mathfrak{b}_4^+, \mathfrak{b}_4^-, \mathfrak{c}_5^+, \mathfrak{c}_5^-, \mathfrak{b}_3, \\ \mathfrak{b}_{1,\alpha} \quad \textit{для} \quad \alpha \in \Sigma_{\mathrm{an}} & \mathfrak{b}_{1,\alpha} \quad \textit{для} \quad \alpha \notin \Sigma_{\mathrm{an}} \\ \hline \end{array} \tag{4.5}$$

Доказательство. Начнем с параметрической леммы Морса. Вообще говоря, она довольно известна (см. [52], стр. 502), но ради сохранения самодостаточности работы приведем её с доказательством.

Лемма 4.6.1. *[Параметрическая лемма Морса] Рассмотрим на плоскости с координатами x, y аналитическую (гладкую) функцию $f(x, y)$ в окрестности начала координат. Пусть в начале координат $f = 0, \mathrm{d}f = 0$. Предположим, при этом, что вторые производные устроены следующим образом*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \gamma \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Тогда существует аналитическая (гладкая) замена координат в треугольной форме

$$\bar{x} = g(x, y),$$
$$\bar{y} = y,$$

оставляющая начало координат на месте и приводящая функцию к виду

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{sgn}(\gamma)\, \bar{x}^2 + k(\bar{y}), \quad \textit{где} \quad k(0) = k'(0) = 0, \quad k''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0). \tag{4.6}$$

Доказательство. Так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции (гладкой или аналитической, в зависимости от категории) найдется такая кривая $r(y)$, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r(y), y) \equiv 0, \quad r(0) = 0.$$

Запишем функцию f в следующей интегральной форме

$$f(x,y) = f(r(y), y) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(tx + (1-t)r(y), y\big)\mathrm{d}t =$$
$$= f(r(y), y) + \big(x - r(y)\big) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(tx + (1-t)r(y), y\big)\mathrm{d}t.$$

Обозначим через

$$\Phi(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(tx + (1-t)r(y), y\big)\mathrm{d}t.$$

По определению $r(y)$ имеем

$$\Phi(r(y), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(y), y) \equiv 0.$$

В свою очередь для Φ можно записать следующую интегральную формулу

$$\Phi(x,y)=\Phi(r(y),y)+\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\big(tx+(1-t)r(y),y\big)=\big(x-r(y)\big)\int\limits_0^1\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big(tx+(1-t)r(y),y\big).$$

Обозначая через $F(x,y)=\int\limits_0^1\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big(tx+(1-t)r(y),y\big)$ и подставляя в исходное интегральное выражение для f, мы получаем

$$f(x,y)=f(r(y),y)+\big(x-r(y)\big)^2F(x,y).$$

В этой формуле $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2F(0,0)=\gamma\neq 0$. Определим функции

$$\bar{x}=(x-r(y))\sqrt{|F(x,y)|}=g(x,y),\quad \bar{y}=y.$$

В окрестности нуля это аналитические (гладкие) функции, $g(0,0)=0$ (то есть начало координат не меняется), и якобиан полученного отображения в нуле равен $\sqrt{\frac{|\gamma|}{2}}\neq 0$. То есть формула действительно определяет замену координат.

В новых координатах, переименовывая $f(r(\bar{y}),\bar{y})=k(\bar{y})$, мы получаем, что функция f в точности принимает вид (4.6). Осталось убедиться, что функция k удовлетворяет необходимым условиям. Действительно, имеем

$$k'(y)=\frac{\partial f}{\partial x}(r(y),y)r'(y)+\frac{\partial f}{\partial y}(r(y),y)=\frac{\partial f}{\partial y}(r(y),y),\quad k''(y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r'(y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Это влечет $k(0)=k'(0)=0$ и $k''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$. Лемма доказана. □

Помимо самой параметрической леммы Морса, нам потребуется следующее следствие из неё.

Следствие 4.6.1. *Рассмотрим на плоскости с координатами x,y аналитическую (гладкую) функцию $f(x,y)$ в окрестности начала координат. Пусть в начале координат $f=0,\mathrm{d}f=0$ и*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0.$$

Тогда для произвольной $\alpha\neq 0$ найдутся такие аналитические (гладкие) функции $g(x,y)$ и $k(y)$, что

$$g(0,0)=0,\quad \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big)^2=\frac{\alpha^2}{4}\neq 0,\quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0,\quad k(0)=k'(0)=k''(0)=0$$

и при этом

$$f(x,y)=\frac{\alpha^2}{4}y^2-g^2(x,y)+k(x). \tag{4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{f}=f-\frac{\alpha^2}{4}y^2$. Легко видеть, что она (с точностью до перестановки x и y местами) удовлетворяет условиям леммы 4.6.1. Тогда найдется такая замена координат

$$\bar{x}=x,$$
$$\bar{y}=g(x,y),$$

что

$$\bar f = -\bar y^2 + k(\bar x).$$

Подставляя сюда формулы для старых координат, мы получаем, что

$$f - \frac{\alpha^2}{4}y^2 = -g^2(x,y) + k(x).$$

Так как начало координат остается на месте, то $g(0,0) = 0$. Осталось убедиться, что выполнены остальные свойства, заявленные в утверждении следствия. Дифференцируя полученное выше выражение, мы получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} = -2g\frac{\partial g}{\partial x} + k'(x),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 - 2g\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + k''(x),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - 2g\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\alpha^2}{2} = -2\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 - 2g\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя $x = y = 0$, мы немедленно получаем из четвертого равенства

$$\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big)^2 = \frac{\alpha^2}{4} \neq 0.$$

После этого третье равенство немедленно дает $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$. В свою очередь $k'(0) = k''(0) = 0$ из леммы 4.6.1. $\square$

Теперь мы готовы непосредственно перейти к доказательству теоремы. Доказывать мы будем отдельно для каждой левосимметрической алгебры. Считаем, что все операторы записаны в системе координат x, y в окрестности начала координат.

Мы начнем с доказательства вырожденности. Для каждой алгебры мы будем приводить возмущение — то есть оператор Нийенхейса, линейная часть которого совпадает с оператором, соответствующим данной алгебре, — и показывать, что это возмущение не линеаризуется.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_1$. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

У него тривиальная линейная часть; однако, разумеется, заменой координат к нулевому виду в окрестности начала координат его привести нельзя. То есть не существует ни гладкой, ни аналитической линеаризующей замены координат.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_2$. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Его линейная часть совпадает с линейным оператором Нийенхейса, соответствующим алгебре $\mathfrak{c}_2$.

Легко видеть, что $\operatorname{tr} L$ в окрестности нуля, вообще говоря, почти всюду не равен нулю. В свою очередь, для линейной части он везде ноль. Значит, ни гладкой, ни аналитической линеаризующей замены координат для такого оператора Нийенхейса не существует.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_3$. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} y^2 & y \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Его линейная часть совпадает с линейным оператором Нийенхейса, соответствующим алгебре $\mathfrak{c}_3$.

Легко видеть, что $\operatorname{tr} L$ в окрестности нуля, вообще говоря, почти всюду не равен нулю. В свою очередь, для линейной части он везде ноль. Значит, ни гладкой, ни аналитической линеаризующей замены координат для такого оператора Нийенхейса не существует.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_4$ Рассмотрим операторное поле

$$L = \begin{pmatrix} y + x^2 y & x + x^3 \\ -xy^2 & y - x^2 y \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что это оператор Нийенхейса. Вычислим по отдельности слагаемые кручения Нийенхейса. Получаем

$$\begin{aligned}
&[L\partial_x, L\partial_y] = [(y + x^2 y)\partial_x - xy^2\partial_y, (x + x^3)\partial_x + (y - x^2 y)\partial_y] = \\
&= (y + x^2 y)(1 + 3x^2)\partial_x - 2(y + x^2 y)xy\partial_y - xy^2(1 - x^2)\partial_y - 2(x + x^3)xy\partial_x + y^2(x + x^3)\partial_y - \\
&- (1 + x^2)(y - x^2 y)\partial_x + 2xy(y - x^2 y)\partial_y = (2x^2 y + 2x^4 y)\partial_x + (-2x^3 y^2)\partial_y;
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
L[L\partial_x, \partial_y] &= L[(y + x^2 y)\partial_x - xy^2\partial_y, \partial_y] = \\
&= L\Big(- (1 + x^2)\partial_x + 2xy\partial_y\Big) = (-y + x^4 y)\partial_x + (3xy^2 - x^3 y^2)\partial_y; \\
L[\partial_x, L\partial_y] &= L[\partial_x, (x + x^3)\partial_x + (y - x^2 y)\partial_y] = \\
&= L\Big((1 + 3x^2)\partial_x - 2xy\partial_y\Big) = (y + 2x^2 y + x^4 y)\partial_x + (-3xy^2 - x^3 y^2)\partial_y.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$[L\partial_x, L\partial_y] - L[L\partial_x, \partial_y] - L[\partial_x, L\partial_y] = 0.$$

То есть операторное поле — действительно оператор Нийенхейса. Его линейная часть совпадает с операторным полем, соответствующим $\mathfrak{c}_4$. При этом

$$\operatorname{tr} L = 2y, \quad \det L = y^2 + x^2 y^2.$$

Дискриминант характеристического многочлена имеет вид $D = 4y^2 - 4y^2 - 4x^2 y^2 < 0$. Это означает, что почти всюду в окрестности начала координат у оператора L пара различных комплексно сопряжённых собственных значений. При этом у линейной части — пара совпадающих вещественных собственных значений. Таким образом, оператор не линеаризуется.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_5$. Рассмотрим операторное поле

$$L = \begin{pmatrix} y & y - x^2 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Это оператор Нийенхейса. Его линейная часть совпадает с оператором, соответствующим алгебре $\mathfrak{b}_5$.

В окрестности начала координат уравнение $y = x^2$ задает кривую, на которой почти всюду операторы Нийенхейса — скалярные с ненулевыми элементами на диагонали. При этом для линейной части множество скалярных операторов так же состоит из прямой, но на ней все операторы нулевые. Таким образом, линеаризующей замены координат не существует.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_{2,\beta}, \beta = 1$. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} y & x^2 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Линейная часть этого оператора совпадает с оператором Нийенхейса, соответствующим $\mathfrak{b}_{2,1}$. В окрестности нуля L почти всюду сопряжен жордановой клетке, в то время как линейная часть всюду диагональна. Таким образом, линеаризующей замены координат не существует.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_{2,\beta}, \beta \neq 1$. Рассмотрим операторное поле вида

$$L = \begin{pmatrix} y & \Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)x + h(x, y) \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

где $h(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$\Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)x + h(x, y) = 0.$$

По теореме о неявной функции в окрестности начала координат существует единственная гладкая кривая $(r(y), y)$, такая что

$$\Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)r(y) + h(r(y), y) = 0.$$

Эта кривая совпадает с множеством точек, задаваемых условием $(L - \frac{1}{2}\operatorname{tr} L\mathrm{Id})^2 = 0$. Будем называть её характеристической кривой. Нам потребуется следующая лемма

Лемма 4.6.2. *Пусть L в форме, описанной выше, и пусть дополнительно L линеаризуется. Тогда $\frac{\partial h}{\partial x}$ на характеристической кривой $r(y), y$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. Пусть линеаризующая замена координат имеет вид

$$\bar{x} = g(x, y), \quad \bar{y} = r(x, y).$$

По построению $\operatorname{tr} L = 2y$ в старых координатах и $2\bar{y}$ в новых, то есть $\bar{y} = y$. Таким образом, мы имеем дело с треугольной заменой координат. Операторное поле L в этом случае преобразуется как

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)g \\ & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y & \Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)\frac{g}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)x + h(x, y) \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

В новых координатах характеристическая кривая $(y, r(y))$ соответствует решению неявного уравнения

$$g(r(y), y) = 0.$$

Приравняем компоненты матриц в правом верхнем углу и продифференцируем их по x. Мы получим равенство

$$\Big(1-\frac{1}{\beta}\Big)\left(1-g\frac{1}{(\frac{\partial g}{\partial x})^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)=\Big(1-\frac{1}{\beta}\Big)+h_x(x,y).$$

Подставляя в обе части кривую, мы получаем $\frac{\partial h}{\partial x}(r(y), y) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.6.2 дает необходимое условие для линеаризации. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L=\begin{pmatrix} y & \Big(1-\frac{1}{\beta}\Big)x+x^2+xy \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Здесь $h(x, y) = x^2 + xy$, то есть удовлетворяет всем условиям, указанным выше. Характеристическая кривая, проходящая через начало координат, имеет вид $(0, y)$. При этом

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,y)=y\neq 0.$$

Таким образом, приведенный выше оператор Нийенхейса не линеаризуется ни в гладких, ни в аналитической категориях.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (гладкий, аналитический), $\alpha \in \Sigma_0$. Напомним, что Σ_0 состоит из нуля. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L=\begin{pmatrix} y^2 & x \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Линейная часть этого оператора совпадает с оператором Нийенхейса, соответствующим $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ для $\alpha = 0$. След L не равен нулю почти всюду в окрестности начала координат. Для линейной части он равен нулю почти всюду, значит, не существует линеаризующей замены координат ни в гладком, ни в аналитическом случае.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (гладкий, аналитический), $\alpha \in \Sigma_1$. Напомним, что

$$\Sigma_1 = \{r|\, r \in \mathbb{N}, r \geq 3\}.$$

Рассмотрим операторное поле

$$L=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^{\alpha-1} & \alpha y \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что это оператор Нийенхейса:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(\partial_x,\partial_y)&=[x^{\alpha-1}\partial_y, x\partial_x+\alpha y\partial_y]-L[x^{\alpha-1}\partial_y,\partial_y]-L[\partial_x, x\partial_x+\alpha y\partial_y]=\\&=\alpha x^{\alpha-1}\partial_y-(\alpha-1)x^{\alpha-1}\partial_y-x^{\alpha-1}\partial_y=0.\end{aligned}$$

Линейная часть этого оператора совпадает с оператором Нийенхейса, соответствующим $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$. Определитель оператора равен x^α и почти всюду не равен нулю. При этом определитель линейной части равен тождественному нулю. Значит, не существует линеаризующей замены координат ни в гладком, ни в аналитическом случае.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (гладкий, аналитический), $\alpha \in \Sigma_3$. Напомним, что

$$\Sigma_3 = \{1/m|\, m \in \mathbb{N}, m \geq 2\}.$$

Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} 0 & x + \alpha y^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

Линейная часть этого оператора совпадает с оператором Нийенхейса, соответствующим $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$. Предположим, что этот оператор линеаризуем и пусть

$$\bar{x} = g(x, y), \quad \bar{y} = r(x, y)$$

линеаризующая замена координат. По построению $\operatorname{tr} L = \alpha y$ в старых координатах и $\operatorname{tr} L = \alpha \bar{y}$ в новых. То есть $y = \bar{y}$ и мы имеем дело с треугольной заменой. При такой замене оператор преобразуется как

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x + \alpha y^{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x + \alpha y^{\frac{1}{\alpha}}) + \alpha y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что последний столбец преобразуется как векторное поле. Таким образом, замена $\bar{x} = g(x, y), \bar{y} = y$ задает линеаризующую замену для векторного поля $\xi = (x + \alpha y^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha y)^T$. После умножения на m система дифференциальных уравнений, соответствующая векторному полю $m\xi$ (мы помним, что $\alpha = 1/m$), приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y^m, \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

Легко увидеть, что это резонансный узел первого типа с формальными инвариантами $r = m, a = 1$. По теореме 4.4.1 для такого векторного поля не существует формальной линеаризации. Значит, не существует и аналитической, а по теореме 4.4.2 — не существует и гладкой.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (гладкий), $\alpha \in \Sigma_2$. Напомним, что

$$\Sigma_2 = \{\alpha|\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0\}.$$

Рассмотрим векторное поле $\xi = (\alpha x, y)^T$ и его гладкий первый интеграл f (пример 4.5.1):

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\big(-x^{\frac{2}{\alpha}} y^{-2}\big), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Определим функцию $g(x, y)$ следующим образом

$$g(x, y) = \begin{cases} -\alpha \frac{x}{y} f(x, y) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

На координатном кресте $xy = 0$ положим все частные производные равными нулю. Полученная таким образом функция — гладкая (в построенном первом интеграле, как мы помним, числитель убывает экспоненциально, то есть быстрее любого полиномиального знаменателя). Получаем следующие соотношения

$$\alpha x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad g\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Рассмотрим операторное поле

$$L=\left(\begin{array}{cc} f(x,y) & \alpha x+g(x,y)\\ 0 & y\end{array}\right).$$

и покажем, что это оператор Нийенхейса. Прямыми вычислениями получаем

$$\mathcal{N}_L(\partial_x,\partial_y)=[f\partial_x,(\alpha x+g)\partial_x+y\partial_y]-L[f\partial_x,\partial_y]-L[\partial_x,(\alpha x+g)\partial_x+y\partial_y]=\alpha f\partial_x+f\frac{\partial g}{\partial x}\partial_x-$$
$$-(\alpha x+g)\frac{\partial f}{\partial y}\partial_x-y\frac{\partial f}{\partial y}\partial_x+\frac{\partial f}{\partial x}f\partial_x-(\alpha+\frac{\partial g}{\partial x})f\partial_x=-\Big(\alpha x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}-f\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\partial_x=0$$

в силу тождеств на f,g, полученных выше. Линеаризация операторного поля при этом имеет вид

$$\frac{\partial L^1_1}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial L^1_1}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0, \quad \frac{\partial L^1_2}{\partial x}(0,0)=\alpha+\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\alpha,$$
$$\frac{\partial L^1_2}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0, \quad ,\frac{\partial L^2_2}{\partial y}(0,0)=1, \quad \frac{\partial L^2_2}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial L^2_1}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial L^2_1}{\partial y}(0,0)=0.$$

То есть алгебра, возникающая на касательном пространстве к нулю, совпадает с $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$. При этом, согласно построению $\det L=yf$, то есть он не равен нулю почти всюду в окрестности нуля. Для линейной части определитель тождественно равен нулю. Значит, в этом случае линеаризующей замены координат нет.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (аналитический), $\alpha\in\widehat{\Sigma}_2$. Напомним, что

$$\widehat{\Sigma}_2=\{-\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{N}\}.$$

Рассмотрим операторное поле

$$L=\left(\begin{array}{cc} x^py^q & x+\frac{p}{q}x^{p+1}y^{q-1}\\ 0 & -\frac{p}{q}y\end{array}\right).$$

Убедимся, что это оператор Нийенхейса. Обозначим для удобства $x^py^q=f(x,y)$, $\frac{p}{q}x^{p+1}y^{q-1}=g(x,y)$. Похожие вычисления мы проводили для Σ_2 в гладком случае. Получаем

$$\mathcal{N}_L(\partial_x,\partial_y)=[f\partial_x,(x+g)\partial_x-\frac{p}{q}y\partial_y]-L[f\partial_x,\partial_y]-L[\partial_x,(x+g)\partial_x-\frac{p}{q}y\partial_y]=f\partial_x+f\frac{\partial g}{\partial x}\partial_x-$$
$$-(x+g)\frac{\partial f}{\partial y}\partial_x+\frac{p}{q}y\frac{\partial f}{\partial y}\partial_x+\frac{\partial f}{\partial x}f\partial_x-(1+\frac{\partial g}{\partial x})f\partial_x=-\Big(x\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{p}{q}y\frac{\partial f}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}-f\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\partial_x=$$
$$=-\Big(px^py^q-\frac{p}{q}qx^py^q+\frac{p}{q}x^{p-1}y^{p+1}qx^py^{q-1}-px^py^qx^{p-1}y^q\Big)\partial_x=0.$$

Линейная часть построенного операторного поля совпадает с оператором Нийенхейса, соответствующим алгебре $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$. При этом

$$\det L=-\frac{p}{q}x^py^{q+1},$$

то есть определитель почти всюду в окрестности начала координат не равен нулю. В свою очередь, у линейной части определитель равен нулю повсюду. Таким образом, не существует линеаризующей замены координат.

Случай алгебры $b_{1,\alpha}$ (аналитический), $\alpha \in \widehat{\Sigma}_u$. Напомним, что Σ_u — это отрицательные иррациональные числа, которые не являются числами Брюно. По предложению 4.5.1 найдется такое векторное поле

$$\xi = (x(1 + f(x, y)), \alpha y)^T, \quad \alpha \in \Sigma_u, f(0, 0) = 0,$$

что оно не линеаризуется треугольной заменой координат. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} 0 & f(x, y) \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

Предположим, что линеаризующая замена существует, и пусть она имеет вид

$$\bar{x} = g(x, y), \bar{y} = r(x, y).$$

В старых координатах мы имеем $\operatorname{tr} L = \alpha y$, в новых $\operatorname{tr} L = \alpha \bar{y}$. Таким образом, $\bar{y} = y$ и мы имеем дело с треугольной заменой координат. При такой замене

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f(x, y) \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} f(x, y) + \alpha y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что столбец преобразуется как векторное поле. То есть линеаризующая замена для оператора Нийенхейса является треугольной линеаризующей заменой для векторного поля ξ. Поле было выбрано так, что такой замены не существует. Стало быть, и для построенного оператора Нийенхейса нет аналитической линеаризующей замены.

Теперь перейдём к доказательству невырожденности.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_5^+$. Пусть на плоскости с координатами x, y задан оператор Нийенхейса L, который обращается в ноль в начале координат. Предположим, что линейная часть разложения Тейлора в начале координат — это в точности оператор Нийенхейса, соответствующий левосимметрической алгебре $\mathfrak{c}_5^+$ в канонической форме, то есть

$$L = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$

Из этого мы немедленно получаем

$$\operatorname{tr} L = 2y + \{\text{члены порядка} \geq 2\}, \quad \det L = y^2 - x^2 + \{\text{члены порядка} \geq 3\}.$$

Без ограничения общности, считаем, что система координат выбрана так, что $\operatorname{tr} L = 2y$. Тогда по лемме 4.6.1 найдется треугольная замена (то есть такая замена, что $y = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L$), которая приводит $\det L$ к виду (черточки опускаем, чтобы не загромождать формулы)

$$\det L = -x^2 + k(y).$$

При этом $k(0) = k'(0) = 0, k''(0) = 2$. По формуле (2.14) мы можем записать оператор L как

$$L = \begin{pmatrix} \frac{k'(y)}{2} & x - \frac{(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y)}{4x} \\ x & 2y - \frac{k'(y)}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что полученная формула определяет гладкий оператор в точках $x = 0$ тогда и только тогда, когда
$$(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y) = 0.$$
Продифференцируем по y и получим
$$2k''(y)(k'(y) - 2y) = 0.$$
Заметим, что $k''(0) = 2 \neq 0$, значит, не обращается в ноль в целой окрестности. Таким образом, с учетом того, что $k(0) = 0$, мы получаем $k(y) = y^2$. Подставляя в формулу (2.14), мы получаем
$$L = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}.$$
То есть замена координат (аналитическая, гладкая), построенная по параметрической лемме Морса, является автоматически линеаризующей.

Случай алгебры $\mathfrak{c}_5^-$. Пусть на плоскости с координатами x, y задан оператор Нийенхейса L, обращающийся в ноль в начале координат. Предположим, что линейная часть разложения Тейлора в начале координат — это в точности оператор Нийенхейса, соответствующий левосимметрической алгебре $\mathfrak{c}_5^-$ в канонической форме, то есть
$$L = \begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$
Из этого мы немедленно получаем
$$\operatorname{tr} L = 2y + \{\text{члены порядка} \geq 2\}, \quad \det L = y^2 + x^2 + \{\text{члены порядка} \geq 3\}.$$
Без ограничения общности считаем, что система координат выбрана так, что $\operatorname{tr} L = 2y$. Тогда по лемме 4.6.1 найдется треугольная замена (то есть такая замена, что $y = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L$), которая приводит $\det L$ к виду (черточки опускаем, чтобы не загромождать формулы)
$$\det L = x^2 + k(y).$$
При этом $k(0) = k'(0) = 0, k''(0) = 2$. По формуле (2.14) мы можем записать оператор L как
$$L = \begin{pmatrix} \frac{k'(y)}{2} & x + \frac{(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y)}{4x} \\ -x & 2y - \frac{k'(y)}{2} \end{pmatrix}.$$
Снова мы видим, что полученная формула задает гладкий оператор в точках $x = 0$ тогда и только тогда, когда
$$(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y) = 0.$$
Продифференцируем по y и получим
$$2k''(y)(k'(y) - 2y) = 0.$$
Заметим, что $k''(0) = 2 \neq 0$, значит, не обращается в ноль в целой окрестности. Таким образом, с учетом того, что $k(0) = 0$, мы получаем $k(y) = y^2$. Подставляя в формулу (2.14), мы получаем
$$L = \begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix}.$$

То есть замена координат (аналитическая, гладкая), построенная по параметрической лемме Морса, является автоматически линеаризующей.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_4^+$. Пусть на плоскости с координатами x, y задан оператор Нийенхейса L, который обращается в ноль в начале координат. Предположим, что линейная часть разложения Тейлора в начале координат — это в точности оператор Нийенхейса, соответствующий левосимметрической алгебре $\mathfrak{b}_4^+$ в канонической форме, то есть

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & -2y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$

Из этого немедленно получаем

$$\operatorname{tr} L = -2y + \{\text{члены порядка} \geq 2\}, \quad \det L = x^2 + \{\text{члены порядка} \geq 3\}.$$

Без ограничения общности считаем, что система координат выбрана так, что $\operatorname{tr} L = -2y$. Тогда по лемме 4.6.1 найдется треугольная замена (то есть такая замена, что $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} L$), которая приводит $\det L$ к виду (черточки опускаем, чтобы не загромождать формулы)

$$\det L = x^2 + k(y).$$

При этом $k(0) = k'(0) = 0, k''(0) = 0$. По формуле (2.14) мы можем записать оператор L как

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{k'(y)}{2} & -x - \frac{(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y)}{4x} \\ x & -2y + \frac{k'(y)}{2} \end{pmatrix}.$$

Снова мы видим, что полученная формула задает гладкий в точках $x = 0$ оператор тогда и только тогда, когда

$$(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y) = 0.$$

Продифференцируем по y и получим

$$2k''(y)(k'(y) - 2y) = 0.$$

Рассмотрим функцию $q(y) = k' - 2y$. По построению $q'(0) = 2 > 0$, то есть в достаточно малой проколотой окрестности $y = 0$ (в нуле она, конечно, равна нулю) эта функция отлична от нуля. Таким образом, в этой окрестности $k'' \equiv 0$, то есть $\det L = x^2$. Подставляя в формулу (2.14), мы получаем

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & -2y \end{pmatrix}.$$

То есть замена координат (аналитическая, гладкая), построенная по параметрической лемме Морса, является автоматически линеаризующей.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_4^-$. Пусть на плоскости с координатами x, y задан оператор Нийенхейса L, который обращается в ноль в начале координат. Предположим, что линейная часть разложения Тейлора в начале координат — это в точности оператор Нийенхейса, соответствующий левосимметрической алгебре $\mathfrak{b}_4^-$ в канонической форме, то есть

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$

Из этого немедленно получаем

$$\operatorname{tr} L = -2y + \{\text{члены порядка} \geq 2\}, \quad \det L = -x^2 + \{\text{члены порядка} \geq 3\}.$$

Без ограничения общности считаем, что система координат выбрана так, что $\operatorname{tr} L = -2y$. Тогда по лемме 4.6.1 найдется треугольная замена (то есть такая замена, что $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} L$), которая приводит $\det L$ к виду (черточки опускаем, чтобы не загромождать формулы)

$$\det L = -x^2 + k(y).$$

При этом $k(0) = k'(0) = 0, k''(0) = 0$. По формуле (2.14) мы можем записать оператор L как

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{k'(y)}{2} & -x + \frac{(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y)}{4x} \\ -x & -2y + \frac{k'(y)}{2} \end{pmatrix}.$$

Снова мы видим, что полученная формула задает гладкий в точках $x = 0$ оператор тогда и только тогда, когда

$$(k'(y))^2 - 4yk'(y) + 4k(y) = 0.$$

Продифференцируем по y и получим

$$2k''(y)(k'(y) - 2y) = 0.$$

Рассмотрим функцию $q(y) = k' - 2y$. По построению $q'(0) = 2 > 0$, то есть в достаточно малой проколотой окрестности $y = 0$ (в нуле она, конечно, равна нулю) эта функция отлична от нуля. Таким образом, в этой окрестности $k'' \equiv 0$, то есть $\det L = -x^2$. Подставляя в формулу (2.14), мы получаем

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix}.$$

То есть замена координат (аналитическая, гладкая), построенная по параметрической лемме Морса, является автоматически линеаризующей.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_3$. Доказательство для этой алгебры мы начнем с нескольких важных лемм.

Лемма 4.6.3. *Рассмотрим неявное обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$r(x) \cdot k'(x) - k(x) = 0 \tag{4.8}$$

в окрестности $x = 0$. Положим, что $r(x)$ — гладкая (аналитическая) функция с условием $r(0) = 0$ и $r'(0) = \beta \neq 0$. Тогда:

1. *Если $\frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}$, то единственное гладкое (аналитическое) в окрестности нуля решение (4.8) является решением $k(x) \equiv 0$;*

2. *Если $\frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}$, существует такая гладкая (аналитическая) функция $F(x), F(0) \neq 0$, определяемая по $r(x)$, что все гладкие (аналитические) решения уравнения (4.8) в достаточно малой окрестности нуля имеют вид*

$$k(x) = cx^{\frac{1}{\beta}} F(x),$$

где c — произвольная константа.

Доказательство. Докажем лемму для гладкого случая — для аналитического рассуждения будут аналогичными. Так как $r'(0) \neq 0$, то в достаточно малой проколотой окрестности $x = 0$ функция $r(x) \neq 0$. Выберем внутри этой окрестности отрезок $[-\epsilon, \epsilon]$ для некоторого $\epsilon > 0$. Имеем, что $r(x) \neq 0$ для всех точек $x \in [-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon]$.

Так как $r'(0) \neq 0$, то по лемме Морса существует гладкая функция $\bar{r}(x)$ такая, что

$$r(x) = \beta x + x^2 \bar{r}(x).$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{1}{\beta x + x^2 \bar{r}(x)} = \frac{1}{\beta x} - \frac{1}{\beta} \frac{\bar{r}}{\beta + x\bar{r}}.$$

Возьмем второе слагаемое в этом разложении дроби и определим функцию

$$Q(x) = \frac{1}{\beta} \int_0^x \frac{\bar{r}(t)}{\beta + t\bar{r}(t)} \mathrm{d}t.$$

Легко видеть, что в нуле подынтегральная функция не обращается в ноль. Таким образом (если надо, уменьшая ϵ), мы можем считать, что функция Q определена на всем отрезке $[-\epsilon, \epsilon]$, причем по построению $Q(0) = 0$. Рассмотрим теперь

$$k(x) = cx^{\frac{1}{\beta}} e^{-Q(x)}.$$

Легко видеть, что вне нуля это гладкая функция. Убедимся, что она является решением (4.8) на всем отрезке $x \in [-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon]$. Действительно

$$r(x)k'(x) - k = r(x)\Big(\frac{1}{x\beta} - Q'\Big) cx^{\frac{1}{\beta}} e^{-Q(x)} - cx^{\frac{1}{\beta}} e^{-Q(x)} = cx^{\frac{1}{\beta}} e^{-Q(x)} - cx^{\frac{1}{\beta}} e^{-Q(x)} = 0.$$

Пусть теперь у нас есть произвольное решение $\bar{k}(x)$ уравнения (4.8), определенное в окрестности нуля. Если необходимо, мы можем снова уменьшить ϵ, поэтому считаем, что, в частности, $\bar{k}(x)$ определено на $(0, \epsilon]$.

Рассмотрим точку $x_0 \in (0, \epsilon)$ и решение уравнения (4.8) в окрестности этой точки. Для подходящего выбора начальных условий это решение совпадает в окрестности с $\bar{k}(x)$. С другой стороны, оно совпадает с $k(x)$ для подходящего выбора константы c. По теореме о продолжении решения получаем, что $\bar{k}(x)$ совпадает с $k(x)$ для подходящего выбора константы c на всем полуинтервале. Аналогично проводится рассуждение для $[-\epsilon, 0)$.

Теперь предположим, что $\bar{k}(x)$ — гладкое решение. Определим $F(x) = e^{-Q(x)}$. Легко видеть, что $F(x)$ — гладкая функция, причем $F(0) = 1$. При этом

$$\bar{k}(x) = cx^{\frac{1}{\beta}} F(x)$$

для некоторого c. Так как у функции $\bar{k}(x)$ должны существовать производные всех порядков в нуле, получаем, что для $\frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}$ это возможно только для $c = 0$. В свою очередь, если $\frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}$, то мы показали, что любое гладкое решение в окрестности нуля записывается таким способом. Лемма доказана. $\square$

Далее нам потребуется несколько иная версия формул (2.13) и (2.13), чем те, которые мы использовали в доказательстве невырожденности алгебр $\mathfrak{c}_5^+, \mathfrak{c}_5^-, \mathfrak{b}_4^+$ и $\mathfrak{b}_4^-$.

Лемма 4.6.4. *На плоскости с координатами x, y рассмотрим оператор Нийенхейса L с матрицей*
$$L = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ L^2_1 & L^2_2 \end{pmatrix}.$$
Положим $\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L \neq 0$. *Без ограничения общности, считаем, что* $\mathrm{tr}\, L = \alpha y$ *для некоторого* $\alpha \neq 0$. *Обозначим* $u = -\det L$. *В описанных условиях оператор* L *принимает вид*

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} u_y & \frac{\alpha u - u_y\left(\alpha y + \frac{1}{\alpha} u_y\right)}{u_x} \\ \frac{1}{\alpha} u_x & \alpha y + \frac{1}{\alpha} u_y \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Кручение Нийенхейса в размерности два имеет всего две независимые компоненты: $(\mathcal{N}_L)^1_{12}$ и $(\mathcal{N}_L)^2_{12}$. В координатах x, y первая компонента принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial R^1_1}{\partial y} R^1_1 + \frac{\partial R^2_1}{\partial y} R^1_2 - \underline{\frac{\partial R^1_2}{\partial x} R^1_1} - \frac{\partial R^2_2}{\partial x} R^1_2 - \\ - \frac{\partial R^1_1}{\partial x} R^1_2 - \frac{\partial R^1_1}{\partial y} R^2_2 + \underline{\frac{\partial R^1_2}{\partial x} R^1_1} + \frac{\partial R^1_2}{\partial y} R^2_1. \end{aligned}$$

Подчеркнутые члены сокращаются. Добавляя и вычитая $\frac{\partial R^2_2}{\partial y} R^1_1$ в правой части, мы получаем

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big(- R^1_1 R^2_2 + R^2_1 R^1_2\Big) - R^1_2\Big(\frac{\partial R^1_1}{\partial x} + \frac{\partial R^2_2}{\partial x}\Big) + R^1_1\Big(\frac{\partial R^1_1}{\partial y} + \frac{\partial R^2_2}{\partial y}\Big).$$

Аналогичным образом компонента $(\mathcal{N}_L)^2_{12}$ даёт нам

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(- R^1_1 R^2_2 + R^2_1 R^1_2\Big) + R^2_2\Big(\frac{\partial R^1_1}{\partial x} + \frac{\partial R^2_2}{\partial x}\Big) - R^2_1\Big(\frac{\partial R^1_1}{\partial y} + \frac{\partial R^2_2}{\partial y}\Big).$$

Эти условия записываются в виде

$$\mathrm{d}\det R = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, R \begin{pmatrix} R^2_2 & -R^1_2 \\ -R^2_1 & R^1_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь справа стоит матрица, присоединённая к матрице L. Так как $R^1_1 R^2_2 - R^2_1 R^1_2 = -u$ и $R^1_1 + R^2_2 = \alpha y$, мы получаем
$$R^2_1 = \frac{1}{\alpha} u_x, \quad R^1_1 = -\frac{1}{\alpha} u_y.$$
Из условия $R^1_1 + R^2_2 = \alpha y$ получаем, что $R^2_2 = \alpha y + \frac{1}{\alpha} u_y$. Наконец, подставляя все это в выражение для $-u$, мы получаем окончательную формулу из утверждения леммы. □

Лемма 4.6.5. *Пусть на плоскости с координатами (x, y) задан оператор Нийенхейса L, который в нуле разлагается в ряд как*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & x + y \\ 0 & y \end{pmatrix} + \{\textit{члены порядка} \geq 2\}.$$

Тогда в окрестности нуля существует гладкая (аналитическая) функция λ, которая

1. *В каждой точке совпадает с собственным значением L.*

2. $\lambda(0,0)=0$

3. $\mathrm{d}\lambda(0,0)=(0,1)$.

Доказательство. Докажем для гладкого случая (для аналитического случая доказательство будет аналогичным). Без ограничения общности, считаем, что $\operatorname{tr} L = y$. Из условия леммы получаем, что определитель удовлетворяет условиям следствия 4.6.1. Таким образом, найдутся такие гладкие функции $g(x,y), k(x)$, что (мы выбрали $\alpha = 1$)

$$g(0,0)=0, \quad \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big)^2 = \frac{1}{4} \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0, \quad k(0)=k'(0)=k''(0)=0$$

и

$$\det L = \frac{y^2}{4} - g^2(x,y) + k(x).$$

В силу условий на функцию $g(x,y)$ неявное уравнение $g(x,y)=0$ разрешимо в окрестности точки $x=y=0$ относительно y. Решением будет кривая $x, s(x)$ с условием $s(0)=0$. Дифференцируя тождество для кривой по x и подставляя $x=0$, мы получаем

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)s'(0) = 0,$$

то есть, в силу свойств функции g имеем $s(0)=s'(0)=0$. Теперь перепишем условие из леммы 4.6.4 для компоненты L^1_2 матрицы оператора Нийенхейса как (сразу подставляем $u = -\frac{y^2}{4} + g^2(x,y) - k(x)$)

$$L^1_2\Big(2g\frac{\partial g}{\partial x} - k'\Big) + \Big(\frac{y^2}{4} - g^2(x,y) + k(x)\Big) + \Big(-\frac{y}{2} + g\frac{\partial g}{\partial y}\Big)\Big(\frac{y}{2} + g\frac{\partial g}{\partial y}\Big) = 0.$$

Подставляя в это выражение кривую $y=s(x)$ и обозначив $L^1_2(x,s(x)) = r(x)$, мы получаем уравнение на функцию k в виде

$$-r(x)k'(x) + k(x) = 0.$$

По построению $r(0)=0$ и $r'(0) = \frac{\partial L^1_2}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial L^1_2}{\partial y}(0,0)s'(0) = 1$. По лемме 4.6.3 мы получаем, что гладкое решение имеет вид $k(x) = cxF(x)$, где $F(0)\neq 0$ и c — некоторая константа. По построению имеем

$$k'(0) = cF(0) = 0.$$

То есть $c=0$ и $k(x)=0$. Дискриминант характеристического многочлена имеет вид

$$D = \sqrt{(\operatorname{tr} L)^2 - 4\det L} = \sqrt{4g^2(x,y)} = \pm 2g(x,y).$$

Таким образом, в окрестности начала координат определены функции $\frac{y}{2} + g(x,y)$ и $\frac{y}{2} - g(x,y)$, которые в каждой точке дают собственные значения L (вообще говоря, не обязательно разные). Нам известно, что $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \pm\frac{1}{2}$, то есть независимо от выбора знака, дифференциал одной из функций имеет вид $(0,1)$. Лемма доказана. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству невырожденности алгебры $\mathfrak{b}_3$. Пусть на плоскости с координатами x,y задан оператор Нийенхейса, и его разложение в окрестности начала координат имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка } \geq 2\}.$$

По лемме 4.6.5 найдется гладкая (аналитическая) функция λ, в каждой точке окрестности возвращающая собственное значение L и $\mathrm{d}\lambda(0,0)=(0,1)$. Без ограничений общности, считаем, что $y=\lambda(x,y)$.

Хорошо известно, что $L^*\mathrm{d}\lambda=\lambda\mathrm{d}\lambda$. Это означает, что L в выбранной системе координат имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

причем линейная часть имеет тот же вид, что и раньше. Условие равенства нулю кручения Нийенхейса для такого оператора принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(\partial_x,\partial_y) &= [L_1^1\partial_x, L_2^1\partial_x+y\partial_y]-L[L_1^1\partial_x,\partial_y]-L[\partial_x,L_2^1\partial_x+y\partial_y]=\\ &= L_1^1\frac{\partial L_2^1}{\partial x}\partial_x - L_2^1\frac{\partial L_1^1}{\partial x}\partial_x - y\frac{\partial L_1^1}{\partial y}\partial_x + L_1^1\frac{\partial L_1^1}{\partial y}\partial_x - L_1^1\frac{\partial L_2^1}{\partial x}\partial_x=\\ &= -\left(\frac{\partial L_1^1}{\partial x}L_2^1+\frac{\partial L_1^1}{\partial y}\Big(y-L_1^1\Big)\right)\partial_x.\end{aligned}$$

Рассмотрим в выбранной системе координат x,y систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=L_2^1(x,y),\\ \dot{y}&=y-L_1^1(x,y).\end{aligned}\tag{4.9}$$

По построению линеаризация системы имеет вид $(x+y,y)$. Для этой системы функция $f(x,y)=L_1^1(x,y)$ является первым интегралом. Однако необходимое условие существования первого интеграла (предложение 4.5.1) утверждает, что L_1^1 может быть только константой (как в гладком, так и в аналитическом случаях). Учитывая, что $L_1^1(0,0)=0$, мы получаем, что эта компонента операторного поля тождественно равна нулю. Таким образом, на самом деле в нашей системе координат оператор Нийенхейса имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} 0 & L_2^1(x,y) \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

По предложению 4.4.1 найдется такая треугольная замена координат (гладкая или аналитическая, в зависимости от категории) $\bar{x}=g(x,y),\bar{y}=y$, что система (4.9) линеаризуется. Вычисляя в новых координатах оператор L, мы получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & L_2^1 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}L_2^1+y\frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{x}+\bar{y} \\ 0 & \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, алгебра $\mathfrak{b}_3$ невырожденная как в гладкой, так и в аналитической категориях.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ (гладкий) для $\alpha\notin\Sigma_{\mathrm{sm}}$. Начнём с леммы.

Лемма 4.6.6. *Пусть на плоскости с координатами (x,y) задан оператор Нийенхейса L, который в нуле разлагается в ряд как*

$$L=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}+\{\textit{члены порядка}\geq 2\}.$$

Пусть $\alpha\notin\Sigma_0\cup\Sigma_1$. Тогда в окрестности нуля существует гладкая (аналитическая) функция λ, которая

1. *В каждой точке совпадает с собственным значением* L*;*

2. $\lambda(0,0) = 0$*;*

3. $\mathrm{d}\lambda(0,0) = (0,\alpha)$.

Доказательство. Докажем для гладкого случая (для аналитического случая доказательство будет аналогичным). Так как $\alpha \notin \Sigma_0$, то без ограничения общности считаем, что $\operatorname{tr} L = \alpha y$. Из условия леммы получаем, что определитель удовлетворяет условиям следствия 4.6.1. Значит, найдутся такие гладкие функции $g(x,y), k(x)$, что

$$g(0,0) = 0, \quad \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Big)^2 = \frac{\alpha^2}{4} \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0, \quad k(0) = k'(0) = k''(0) = 0$$

и

$$\det L = \frac{\alpha^2}{4}y^2 - g^2(x,y) + k(x).$$

В силу условий на функцию $g(x,y)$ неявное уравнение $g(x,y) = 0$ разрешимо в окрестности точки $x = y = 0$ относительно y. Решением будет кривая $x, s(x)$ с условием $s(0) = 0$. Дифференцируя тождество для кривой по x и подставляя $x = 0$, мы получаем

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)s'(0) = 0,$$

то есть, в силу свойств функции g имеем $s(0) = s'(0) = 0$. Теперь перепишем условие из леммы 4.6.4 для компоненты L^1_2 матрицы оператора Нийенхейса как (сразу подставляем $u = -\frac{\alpha^2}{4}y^2 + g^2(x,y) - k(x)$)

$$L^1_2\Big(2g\frac{\partial g}{\partial x} - k'\Big) + \alpha\Big(\frac{\alpha^2}{4}y^2 - g^2(x,y) + k(x)\Big) + \Big(-\alpha^2\frac{y}{2} + g\frac{\partial g}{\partial y}\Big)\Big(\alpha\frac{y}{2} + \alpha g\frac{\partial g}{\partial y}\Big) = 0.$$

Подставляя в это выражение кривую $y = s(x)$ и обозначив $\frac{1}{\alpha}L^1_2(x, s(x)) = r(x)$, мы получаем уравнение на функцию k в виде

$$-r(x)k'(x) + k(x) = 0.$$

По построению $r(0) = 0$ и $r'(0) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial L^1_2}{\partial x}(0,0) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial L^1_2}{\partial y}(0,0)s'(0) = \frac{1}{\alpha}$. Так как $\alpha \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, мы получаем, что для всех $\alpha \neq 1, 2$ единственное гладкое решение этого уравнения (лемма 4.6.3) — тождественно нулевое, то есть $k(x) = 0$.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Тогда по лемме 4.6.3 гладкое решение имеет вид $k(x) = cxF(x)$, где $F(0) \neq 0$ и c — некоторая константа. По построению имеем

$$k'(0) = cF(0) = 0.$$

То есть $c = 0$ и $k(x) = 0$.

Пусть теперь $\alpha = 2$. По той же лемме получаем, что гладкое решение имеет вид $k(x) = cx^2F(x)$, где $F(0) \neq 0$ и c — некоторая константа. По построению имеем

$$k''(0) = 2cF(0) = 0.$$

То есть $c = 0$ и $k(x) = 0$. Таким образом, если $\alpha \notin \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, то $k(x) = 0$. Дискриминант характеристического многочлена имеет вид

$$D = \sqrt{(\operatorname{tr} L)^2 - 4 \det L} = \sqrt{4g^2(x,y)} = \pm 2g(x,y).$$

Таким образом, в окрестности начала координат определены функции $\frac{\alpha y}{2} + g(x,y)$ и $\frac{\alpha y}{2} - g(x,y)$, которые в каждой точке дают собственные значения L (вообще говоря, не обязательно разные). Нам известно, что $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \pm\frac{\alpha}{2}$, то есть независимо от выбора знака, дифференциал одной из функций имеет вид $(0, \alpha)$. Лемма доказана. $\square$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству невырожденности алгебры $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ в гладкой категории для $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{sm}}$. Пусть на плоскости с координатами x, y задан оператор Нийенхейса, и его разложение в окрестности начала координат имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$

По лемме 4.6.5 найдется гладкая (аналитическая) функция λ, в каждой точке окрестности возвращающая собственное значение L и $\mathrm{d}\lambda(0,0) = (0, \alpha)$. Без ограничения общности, считаем, что $y = \frac{1}{\alpha}\lambda(x,y)$.

Хорошо известно, что $L^* \mathrm{d}\lambda = \lambda \mathrm{d}\lambda$. Это означает, что L в выбранной системе координат имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix},$$

причём линейная часть имеет тот же вид, что и раньше. Условие равенства нулю кручения Нийенхейса для такого оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L(\partial_x, \partial_y) &= [L^1_1 \partial_x, L^1_2 \partial_x + \alpha y \partial_y] - L[L^1_1 \partial_x, \partial_y] - L[\partial_x, L^1_2 \partial_x + \alpha y \partial_y] = \\ &= L^1_1 \frac{\partial L^1_2}{\partial x} \partial_x - L^1_2 \frac{\partial L^1_1}{\partial x} \partial_x - \alpha y \frac{\partial L^1_1}{\partial y} \partial_x + L^1_1 \frac{\partial L^1_1}{\partial y} \partial_x - L^1_1 \frac{\partial L^1_2}{\partial x} \partial_x = \\ &= -\left(\frac{\partial L^1_1}{\partial x} L^1_2 + \frac{\partial L^1_1}{\partial y} \Big(\alpha y - L^1_1 \Big) \right) \partial_x. \end{aligned}$$

Рассмотрим в выбранной системе координат x, y систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= L^1_2(x,y), \\ \dot{y} &= \alpha y - L^1_1(x,y). \end{aligned} \tag{4.10}$$

По построению линеаризация системы имеет вид $(x, \alpha y)$. Для этой системы функция $f(x,y) = L^1_1(x,y)$ является первым интегралом. При этом по предложению 4.5.1 в гладком случае первый интеграл у такого векторного поля существует только при $\alpha < 0$, то есть $\alpha \in \Sigma_2$. По условию $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{sm}}$, то есть L^1_1 — константа, нулевая в данном случае. Получаем, что в координатах x, y операторное поле имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

По предложению 4.4.1 для всех $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{sm}}$, кроме $\alpha = 2$, существует треугольная линеаризующая замена координат $\bar{x} = g(x,y), \bar{y} = y$. Пересчитывая L в новых координатах, мы получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} L^1_2 + \alpha y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x} \\ 0 & \alpha \bar{y} \end{pmatrix}.$$

То есть L линеаризуется.

Теперь осталось разобраться со случаем $\alpha = 2$. В этом случае система 4.10 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= L^1_2(x, y), \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned} \tag{4.11}$$

С точки зрения теоремы 4.4.1 перед нами резонансный узел, и нормальная полиномиальная форма такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= 2y + ax^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

По следствию 4.4.1 существует гладкая замена координат, переводящая (4.11) в (4.12).

В частности, это означает, что для векторного поля ξ, соответствующего системе (4.11), найдется функция $g(x, y)$ с условием $\mathcal{L}_\xi g = g$ (это первая строка системы (4.12)). Возьмем эту функцию и рассмотрим треугольную замену координат

$$\bar{x} = g(x, y), \quad \bar{y} = y.$$

Для начала убедимся, что это действительно замена координат.

Из условия $\mathcal{L}_\xi g = g$ следует, что $\mathrm{d}g$ в нуле — собственным ковектором оператора линеаризации с собственным значением 1. В свою очередь $\mathrm{d}y$ в нуле — собственный ковектор оператора линеаризации с собственным значением 2. Из линейной алгебры известно, что собственные ковекторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы. Значит, $\mathrm{d}g$ и $\mathrm{d}y$ линейно независимы в нуле и, следовательно, в целой окрестности.

Пересчитаем L в новых координатах

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} L^1_2 + \alpha y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x} \\ 0 & \alpha \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство верно в силу того, что в правом верхнем углу стоит в точности $\mathcal{L}_\xi g$. Таким образом, L линеаризуется и для $\alpha = 2$.

Случай алгебры $\mathfrak{b}_{1,\alpha}$ (аналитический) для $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{an}}$. Пусть на плоскости с координатами (x, y) задан оператор Нийенхейса L, который в нуле разлагается в ряд как

$$L = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} + \{\text{члены порядка} \geq 2\}.$$

По лемме 4.6.6 в окрестности нуля существует аналитическая функция λ, такая что $\mathrm{d}\lambda = (0, \alpha)$. Считаем, что $y = \frac{1}{\alpha}\lambda$. Хорошо известно, что $L^* \mathrm{d}\lambda = \lambda \mathrm{d}\lambda$. Это означает, что L в выбранной системе координат имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix},$$

причем линейная часть имеет тот же вид, что и ранее. Условие обращения в ноль кручения Нийенхейса для такого оператора дает

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L(\partial_x, \partial_y) &= [L^1_1\partial_x, L^1_2\partial_x + \alpha y\partial_y] - L[L^1_1\partial_x, \partial_y] - L[\partial_x, L^1_2\partial_x + \alpha y\partial_y] = \\ &= L^1_1\frac{\partial L^1_2}{\partial x}\partial_x - L^1_2\frac{\partial L^1_1}{\partial x}\partial_x - \alpha y\frac{\partial L^1_1}{\partial y}\partial_x + L^1_1\frac{\partial L^1_1}{\partial y}\partial_x - L^1_1\frac{\partial L^1_2}{\partial x}\partial_x = \\ &= -\left(\frac{\partial L^1_1}{\partial x}L^1_2 + \frac{\partial L^1_1}{\partial y}\Big(\alpha y - L^1_1\Big)\right)\partial_x.\end{aligned}$$

Рассмотрим в выбранной системе координат x, y систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= L^1_2(x, y), \\ \dot{y} &= \alpha y - L^1_1(x, y).\end{aligned} \tag{4.13}$$

По построению линеаризация системы имеет вид $(x, \alpha y)$. Для этой системы функция $f(x, y) = L^1_1(x, y)$ является первым интегралом. При этом по предложению 4.5.1 в аналитическом случае первый интеграл у такого векторного поля существует только при $\alpha = -\frac{q}{p}$ для взаимно простых $p, q \in \mathbb{N}$, то есть $\alpha \in \widehat{\Sigma}_2$. По условию $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{an}}$, то есть L^1_1 — константа, нулевая в данном случае.

Получаем, что в координатах x, y операторное поле имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}.$$

По предложению 4.4.2 для всех $\alpha \notin \Sigma_{\mathrm{an}}$, кроме $\alpha = 2$, существует треугольная линеаризующая замена координат $\bar{x} = g(x, y), \bar{y} = y$. Пересчитывая L в новых координатах, мы получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}L^1_2 + \alpha y\frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x} \\ 0 & \alpha\bar{y} \end{pmatrix}.$$

То есть L линеаризуется.

Осталось разобраться со случаем $\alpha = 2$. Система 4.13 имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= L^1_2(x, y), \\ \dot{y} &= 2y\end{aligned} \tag{4.14}$$

С точки зрения теоремы 4.4.1 перед нами резонансный узел, и нормальная полиномиальная форма такой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= 2y + ax^2.\end{aligned} \tag{4.15}$$

По теореме 4.4.3 существует аналитическая замена координат, которая переводит (4.14) в (4.15). В частности, это означает, что для векторного поля ξ, соответствующего системе (4.11), найдется аналитическая функция $g(x, y)$ с условием $\mathcal{L}_\xi g = g$ (это в точности первая строка системы (4.12)). Возьмем эту функцию и рассмотрим треугольную замену координат

$$\bar{x} = g(x, y), \quad \bar{y} = y.$$

Для начала убедимся, что это действительно замена координат.

Из условия $\mathcal{L}_\xi g = g$ следует, что $\mathrm{d}g$ в нуле — собственный ковектор оператора линеаризации с собственным значением 1. В свою очередь $\mathrm{d}y$ в нуле — собственный ковектор оператора линеаризации с собственным значением 2. Из линейной алгебры известно, что собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы. Значит, $\mathrm{d}g$ и $\mathrm{d}y$ линейно независимы в нуле и, следовательно, в целой окрестности.

Пересчитаем L в новых координатах

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L^1_2 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} & -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} L^1_2 + \alpha y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x} \\ 0 & \alpha \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство верно в силу того, что в правом верхнем углу стоит в точности $\mathcal{L}_\xi g$. Таким образом, L линеаризуется и для $\alpha = 2$.

Теорема доказана. $\square$

Глава 5

gl-регулярные операторы Нийенхейса

5.1 Регулярность в $\mathfrak{gl}(n)$. Первая сопровождающая форма

Напомним, что элемент ξ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется регулярным, если его централизатор $\mathfrak{z}_\xi$ имеет минимально возможную размерность. В нашем случае L является элементом алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Мы будем называть оператор L gl-регулярным, если он является регулярным элементом алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ниже мы приводим список эквивалентных определений gl-регулярного оператора, которые будем использовать в дальнейшем:

1. Централизатор L имеет размерность n;
2. Централизатор L порождается $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$. То есть всякий M такой, что $ML - LM = 0$ записывается в виде $M = c_1 L^{n-1} + \dots + c_n \,\mathrm{Id}$ для некоторого набора констант $c_i, i = 1, \dots, n$;
3. $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$ линейно независимы как элементы векторного пространства операторов;
4. Найдется вектор ξ такой, что вектора $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ линейно независимы. Такой вектор называется циклическим вектором оператора L;
5. Найдется ковектор a такой, что ковекторы $a, L^*a, \dots, (L^*)^{n-1}a$ линейно независимы. Такой ковектор называется циклическим ковектором оператора L;
6. В нормальной жордановой форме оператора L каждому вещественному собственному значению соответствует ровно один жорданов блок, а каждой паре комплексно-сопряжённых собственных значений — комплексная версия жорданова блока.

Мы будем говорить, что оператор Нийенхейса L — gl-регулярный, если он gl-регулярный в каждой точке.

Замечание 5.1.1. Если L — gl-регулярный оператор, то есть регулярный элемент $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ с комплексными собственными значениями и для некоторой комплексной структуры J выполнено, что $L\mathsf{J} - \mathsf{J}L = 0$. Тогда $L^{\mathbb{C}}$ является gl-регулярным уже в смысле $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Действительно, жордановы блоки L в этом случае разбиваются на пары, соответствующие комплексно сопряженным собственным значениям $\mu_i, \bar{\mu}_i$. Каждой такой паре в $L^{\mathbb{C}}$ соответствует единственный блок с собственным значением μ_i или $\bar{\mu}_i$ (выбор конкретного собственного значения из пары зависит от комплексной структуры).

Обратное, вообще говоря, не верно: если у $L^{\mathbb{C}}$ из $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ есть вещественное собственное значение, то ему соответствует два жордановых блока с одинаковым вещественным собственным значением у L и такой элемент не будет gl-регулярным в смысле $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. ■

Первой сопровождающей формой оператора L (гл. VI, §6 в [131]) мы будем называть форму вида

$$L_{\mathrm{comp1}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \sigma_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Подобные формы хорошо известны в линейной алгебре. Они обладают замечательным свойством: характеристический многочлен оператора в такой форме совпадает с (2.11). Следующая теорема показывает, что первая сопровождающая форма является естественной полунормальной формой для gl-регулярного оператора Нийенхейса.

Теорема 5.1.1. *Все объекты предполагаются вещественно-аналитическими. Пусть* p *точка на многообразии* M^n*, в окрестности которой задан* gl*-регулярный оператор Нийенхейса* L*. Тогда в окрестности этой точки существует система координат* $u^1, \dots, u^n$*, в которой* L *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \sigma_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Функции σ_i *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^j} &= \sigma_i \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^{j+1}} + \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial u^{j+1}}, \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial u^j} &= \sigma_n \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^{j+1}}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Более того, для любого набора функций, удовлетворяющего системе (5.3)*, оператор вида* (5.2) *— оператор Нийенхейса.*

Доказательство. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ и рассмотрим систему квазилинейных уравнений:

$$u_{t_1} = L u_x, \quad \dots, \quad u_{t_{n-1}} = L^{n-1} u_x.$$

Нам известно (следствие 2.3.1), что $\langle L^i, L^j \rangle = 0$. В частности, это означает, что система является совместной и, в силу аналитичности, для любого начального условия существует решение.

Выберем начальную кривую $v^i(x), i = 1, \dots, n$ так, чтобы ее вектор скорости был циклическим. Это означает, что для достаточно малых t_i столбцы $u_{t_{n-1}}, \dots, u_{t_1}, u_x$ линейно независимы. Для удобства считаем, что $x = t_0$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
Lu_{t_i} &= u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-2,\\
Lu_{t_{n-1}} &= L^n u_x = (\sigma_1 L^{n-1} + \dots + \sigma_n \mathrm{Id}) u_x = \sigma_1 u_{t_{n-1}} + \dots + \sigma_n u_{t_0}.
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве мы использовали теорему Гамильтона-Кэли. Рассмотрим матрицу $\frac{\partial u}{\partial t}$, составленную из столбцов u_{t_i}. Из приведённых выше вычислений мы получаем, что для неё верно следующее соотношение

$$
L(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} L_{\mathrm{comp1}}.
$$

Матрица $\frac{\partial u}{\partial t}$ в свою очередь совпадает с матрицей Якоби замены координат $(t_{n-1}, \dots, t_0) \to (u^1, \dots, u^n)$. Получаем

$$
\frac{\partial u}{\partial t}^{-1} L(u) \frac{\partial u}{\partial t} = L_{\mathrm{comp1}},
$$

то есть в новой системе координат t_i оператор L будет находиться точно в первой сопровождающей форме.

Теперь осталось убедиться, что оператор вида (5.2) — оператор Нийенхейса тогда и только тогда, когда выполнена система (5.3). Считаем, что наш оператор изначально дан в первой сопровождающей форме. Тогда легко видеть, что автоматически

$$
\mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad 2 \le i, j \le n.
$$

Здесь ξ_i обозначает базисные векторные поля. Таким образом, надо проверить для $i = 1, \dots, n-1$ условия

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_L(\xi_1, \xi_{j+1}) &= [\sum_{i=1}^n \sigma_i \xi_i, \xi_j] - L[\sum_{i=1}^n \sigma_i \xi_i, \xi_{j+1}] = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^j}\xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial u^{j+1}}\xi_i + \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^{j+1}} \sum_{i=1}^n \sigma_i \xi_i =\\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial u^{j+1}} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial u^{j+1}}\sigma_i - \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^j} \Big)\xi_j + \Big(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u^{j+1}}\sigma_n - \frac{\partial \sigma_n}{\partial u^j} \Big)\xi_n = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, равенство выражений в скобках эквивалентно обращению кручения Нийенхейса в ноль. При этом в скобках стоят в точности уравнения (5.3). Теорема доказана. □

Замечание 5.1.2. Напомним, что на коэффициенты характеристического многочлена выполняются следующие соотношения (следствие 2.1.1):

$$
\begin{aligned}
L^* \mathrm{d}\sigma_i &= \sigma_i \mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
L^* \mathrm{d}\sigma_n &= \sigma_n \mathrm{d}\sigma_1.
\end{aligned}
$$

Оказывается, уравнения (5.3) — это в точности данная система, в которой L взят в первой сопровождающей форме и выражения $L^*\mathrm{d}\sigma_i$ расписаны в терминах σ и $\mathrm{d}\sigma$. ■

Замечание 5.1.3. Изучение gl-регулярных операторов Нийенхейса автоматически включает в себя изучение особых точек специального вида: характеристика Сегре в такой точке может меняться, однако, свойство gl-регулярности сохраняется. Типичный пример такой точки — окрестность начала координат для дифференциально невырожденного оператора Нийенхейса.

С точки зрения теоремы о расщеплении такие точки, в некотором смысле, противоположны точкам скалярного типа. Если собственные значения совпадают, то в точке скалярного типа оператор пропорционален скалярному, то есть является максимально сингулярным элементом $\mathfrak{gl}(n)$. В то время как в gl-регулярном случае он оказывается сопряжен жордановой клетке (вещественной или комплексной). ■

5.2 Вторая сопровождающая форма

Второй сопровождающей формой оператора L мы будем называть форму вида

$$L_{\mathrm{comp2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Вторая форма известна в литературе так же как циклическая [22]. Подобные формы так же возникали в контексте трансверсальных деформаций семейств матриц, зависящих от параметра, в замечательной работе Арнольда [123].

Теорема 5.2.1. *Все объекты предполагаются вещественно-аналитическими. Пусть* p *точка на многообразии* M^n*, в окрестности которой задан* gl*-регулярный оператор Нийенхейса* L*. Тогда в окрестности этой точки существует система координат* $u^1, \dots, u^n$*, в которой* L *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Определим 1*-форму* $\omega = \sigma_n \mathrm{d}u^1 + \dots + \sigma_1 \mathrm{d}u^n$*. Функции* σ_i *удовлетворяют следующим уравнениям*

$$\mathrm{d}\omega = 0, \quad \mathrm{d}(L^* \mathrm{d}\omega) = 0. \tag{5.6}$$

Другими словами, ω *— закон сохранения для* L*. Верно и обратное: для любого набора функций, удовлетворяющего системе* (5.6)*, оператор вида* (5.5) *является оператором Нийенхейса.*

Доказательство. Рассмотрим $\sigma(\lambda) = \det(\mathrm{Id} - \lambda L)$ и $\mathrm{d}f = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L$. Эти функции связаны соотношением

$$(\mathrm{Id} - \lambda L^*) \mathrm{d}\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda) \mathrm{d}f.$$

То есть мы имеем дело с конструкцией Магри-Лоренцони. Рассмотрим операторное поле (здесь определитель умножается на резольвенту L)

$$A_\lambda = \det(\mathrm{Id} - \lambda L) \Big(\mathrm{Id} - \lambda L\Big)^{-1} = \mathrm{Id} + \lambda A_1 + \dots + \lambda^{n-1} A_{n-1}.$$

Справа стоит многочлен степени $n-1$, поскольку A_λ — это просто присоединённая матрица к $(\mathrm{Id}-\lambda L)$, и её компоненты зависят от λ как многочлены степени $n-1$. Для построенных операторов верна следующая рекуррентная формула (следствие 12.0.4 из Приложения II):

$$A_0 = \mathrm{Id}, \quad A_i = LA_{i-1} - \sigma_i \mathrm{Id}, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{5.7}$$

В частности, $A_1 = L - \operatorname{tr} L \mathrm{Id}$. Из теоремы следствия 12.0.4 нам известно, что полученные операторы являются симметриями друг друга. Нам потребуется следующая лемма из линейной алгебры.

Лемма 5.2.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор на линейном пространстве, σ_i — коэффициенты его характеристического многочлена, и A_i — операторы, определенные рекуррентной формулой* (5.7). *Тогда вектор ξ является циклическим тогда и только тогда, когда $\xi, A_1\xi, \dots, A_{n-1}\xi$ линейно независимы.*

Доказательство. По одному из эквивалентных определений gl-регулярности $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$ образуют базис в централизаторе L. Это означает, что A_i так же образует базис; при этом матрица перехода от базиса $L^i, i = 0, \dots, n-1$ к базису $A_i, i = 0, \dots, n-1$ в силу формулы (5.7) треугольная, с единицами на диагонали.

По определению ξ — циклический, если $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ линейно независимы. Мы получаем, что система этих векторов и $A_i\xi$ связана невырожденной матрицей перехода. Это означает, что они линейно независимы или зависимы одновременно. Лемма доказана. $\square$

Теперь рассмотрим переопределённую квазилинейную систему

$$u_{t_i} = A_i u_x, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Она совместная. В силу аналитичности у нее существует решение для любой начальной кривой. Выберем кривую так, чтобы вектор её скорости был циклическим. Как и в случае первой сопровождающей формы, получаем, что столбцы u_{t_i} линейно независимы в некоторой окрестности точки p. В силу формулы (5.7) получаем

$$Lu_{t_i} = LM_i u_x = M_{i+1}u_x + \sigma_{i+1}u_x, i = 0, \dots, n-1.$$

В формуле действует соглашение $M_0 = \mathrm{Id}, M_n = 0$. Тогда рассмотрим $t_{n-1}, \dots, t_1, t_0 = x$ как новые координаты. Из приведенных вычислений получаем, что для матрицы Якоби верно

$$L\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} L_{\mathrm{comp2}}.$$

То есть $\frac{\partial u}{\partial t}^{-1} L \frac{\partial u}{\partial t} = L_{\mathrm{comp2}}$ и в новых координатах матрица оператора L имеет вторую сопровождающую форму.

Теперь пусть матрица будет сразу задана в форме (5.5). Для неё мы имеем, что $L^*\mathrm{d}u^1 = \mathrm{d}u^2, \dots, L^*\mathrm{d}u^{n-1}, L^*\mathrm{d}u^n = \omega$. По построению получаем, что для $\alpha = \mathrm{d}u^i, i = 1, \dots, n-1$

$$\mathrm{d}(L^{*2}\alpha)(\xi, \eta) + \mathrm{d}\alpha(L\xi\,, L\eta) - \mathrm{d}(L^*\alpha)(L\xi\,, \eta) - \mathrm{d}(L^*\alpha)(\xi\,, L\eta) = 0$$

для всех ξ, η в силу того, что $\mathrm{d}u^i, L^*\mathrm{d}u^i$ и $(L^*)^2\mathrm{d}u^i$ замкнуты. Подставим теперь $\mathrm{d}u^{n-1}$. Получаем

$$0 = \mathrm{d}(\omega)(\xi, \eta) + \mathrm{d}^2 u^{n-1}(L\xi\,, L\eta) - \mathrm{d}^2 u^n(L\xi\,, \eta) - \mathrm{d}^2 u^n(\xi\,, L\eta) = \mathrm{d}(\omega)(\xi, \eta).$$

Таким образом, ω замкнута. Подставляя $\mathrm{d}u^n$, мы получаем

$$0 = \mathrm{d}(L^*\omega)(\xi, \eta) + \mathrm{d}^2 u^n(L\xi\,, L\eta) - \mathrm{d}\omega(L\xi\,, \eta) - \mathrm{d}\omega(\xi\,, L\eta) = \mathrm{d}(\omega)(\xi, \eta) = \mathrm{d}(L^*\omega)(\xi, \eta),$$

то есть $L^*\omega$ — замкнута. Таким образом, обращение в ноль кручения Нийенхейса для оператора в виде $L_{\mathrm{comp}2}$ эквивалентно тому, что ω — законом сохранения. Это в точности условия (5.6). Теорема доказана. □

Рассмотрим вторую сопровождающую форму для дифференциально невырожденного оператора Нийенхейса.

Пример 5.2.1. Пусть L — дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса. Как мы видели раньше, для него существует каноническая (то есть выделенная) система координат, в которой он приводится к первой сопровождающей форме — координатами здесь выступают коэффициенты характеристического многочлена $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Аналогичная система координат есть и для второй сопровождающей формы. Она выделяется условием $\mathrm{d}u^1 = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L$. В этом случае координатами $u_1, \dots, u_n$ (здесь удобно брать нижние индексы) будут законы сохранения

$$u_i = \frac{1}{i}\,\mathrm{tr}\, L^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти координаты связаны с σ_i с помощью многочленов Ньютона-Жирара [63]. По сути это хорошо известные формулы, связывающие разные базисы в пространстве характеристических многочленов. Один базис — это суммы степеней, второй — симметрические произведения попарно различных переменных. Приведем первые три такие формулы

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= u_1,\\
\sigma_2 &= u_2 - \frac{1}{2}u_1^2,\\
\sigma_3 &= u^3 - u_1 u_2 + \frac{1}{6}u_1^3.
\end{aligned}$$

В этих координатах для $\mathbb{R}^3$ мы получаем

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ u^3 - u_1u_2 + \frac{1}{6}u_1^3 & u_2 - \frac{1}{2}u_1^2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим в конце, что естественное желание рассматривать оператор L в виде

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ & & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1\\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

ложно, поскольку этот оператор не является оператором Нийенхейса: для него форма $L^*\mathrm{d}u^n$ замкнута, но $(L^*)^2\mathrm{d}u^n$ — нет. ■

Пример выше показывает, что для дифференциально невырожденного оператора Нийенхейса существуют канонические первая и вторая сопровождающие формы. В общем случае, однако, они являются полунормальными, а не нормальными формами. На них действует достаточно большая группа замен координат. Для первой сопровождающей формы мы опишем эту группу в разделе 5.3.

5.3 Спаренное уравнение Хопфа и его интегрирование

Начнём с замечательного примера.

Пример 5.3.1. Уравнением Хопфа называется уравнение

$$u_t = f(u)u_x$$

на одну функцию $u(t,x)$ от двух переменным. Рассмотрим неявное уравнение

$$u - v(x + tf(u)) = 0.$$

как уравнение на t, x, u в окрестности точки $t = x = 0, u = v(0)$. Легко видеть что производная от левой части уравнения в этой точке равна единице, стало быть, применима теорема о неявной функции и решение можно найти в виде $u(t,x)$. При этом оказывается

$$u_x - v'(1 + tf'u_x) = 0, \quad u_t - v'(f + tf'u_t) = 0.$$

Умножая первое уравнение на $f(u)$ и вычитая из второго, получаем

$$(u_t - f(u)u_x)(1 - tf') = 0$$

То есть в окрестности точки $t = x = 0, u = v(0)$ вторая скобка в ноль не обращается и, значит, $u(t,x)$ — решение уравнения Хопфа. Осталось заметить, что по построению $u(0,x) = v(x)$. То есть мы решили задачу Коши для уравнения в частных производных чисто алгебраическими методами. ∎

Пусть теперь L — дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса в канонических координатах в окрестности нуля. Рассмотрим квазилинейную систему $u_t = Lu_x$. В координатах она записывается как

$$\begin{aligned} u^1_t &= u^1 u^1_x + u^2_x, \\ u^2_t &= u^2 u^1_x + u^3_x, \\ &\dots \\ u^{n-1}_t &= u^n u^1_x + u^n_x, \\ u^n_t &= u^n u^1_x. \end{aligned}$$

Мы видим, что среди решений этого уравнения есть решения вида $u^i \equiv 0, i = 2, \dots, n$ и u^1 — решение уравнения Хопфа $u^1_t = u^1 u^1_x$. То есть полученная система является многокомпонентным аналогом уравнения Хопфа. Мы будем называть эту систему спаренным уравнением Хопфа. Следующая теорема показывает, как эту систему можно проинтегрировать алгебраическими методами.

Теорема 5.3.1. *Пусть L — дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса. Рассмотрим в некоторой системе координат $u^1, \dots, u^n$ переопределённую систему квазилинейных уравнений*

$$u_{t_i} = L^i u_x, \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{5.8}$$

Пусть даны n функций $v_1(x), \dots, v_n(x)$. Проделаем следующую процедуру:

1. *Определим операторное поле $U = t_{n-1}L^{k-1} + \dots + t_1 L + x\mathrm{Id}$, где t, x рассматриваются как параметры;*
2. *Построим операторное поле $M = v_1(U)L^{n-1} + \dots + v^n(U)\mathrm{Id}$. Она зависит от параметров t, x;*
3. *Так как L — gl-регулярный оператор, то найдутся такие функции $g_i(u, t, x)$, что*

$$M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}.$$

Результатом процедуры является набор из n функций $g_i(u, t, x)$. Рассмотрим неявную систему

$$\sigma_i(u) = g_i(u, t, x), i = 1, \dots, n \tag{5.9}$$

в окрестности $t = x = 0, u^i(0) = v_i(0)$, $i = 1, \dots, n$ относительно функций u^i. Тогда

1. *Система 5.9 разрешима относительно u^i. Её решением будет n функций $u^i(t, x)$;*
2. *Функции $u(t, x)$ дают решение системы (5.8) с начальными условиями $u^i(0, x) = v_i(x)$.*

В частности, полученные функции являются решением спаренного уравнения Хопфа, которое входит в эту систему под номером $i = 1$.

Доказательство. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.3.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса, а M — операторное поле, коммутирующее с L, то есть*

$$M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}$$

для некоторых функций $g_1, \dots, g_n$. M — симметрия оператора Нийенхейса L тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &L^* \mathrm{d}g_i = \sigma_i \mathrm{d}g_1 + \mathrm{d}g_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ &L^* \mathrm{d}g_n = \sigma_n \mathrm{d}g_1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Доказательство. Применяя формулы из теоремы 12.0.8, получаем

$$\begin{aligned} \langle L, M \rangle = \sum_{i=1}^n g_i \langle L, L^{n-i} \rangle + \sum_{i=1}^n \Big(L^* \mathrm{d}g_i \otimes L^{n-i} - \mathrm{d}g_i \otimes L^{n-i+1} \Big) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(L^* \mathrm{d}g_i - \mathrm{d}g_{i+1} - \sigma_i \mathrm{d}g_1 \Big) \otimes L^{n-i} + \Big(L^* \mathrm{d}g_n - \sigma_n \mathrm{d}g_1 \Big) \otimes \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что $\langle L, L^{n-i}\rangle = 0$ и $L^n = \sigma_1 L^{n-1} + \dots + \sigma_n \mathrm{Id}$. Из этого сразу вытекает, что условия леммы достаточны для того, чтобы M была симметрией.

Для циклического векторного поля ξ поля $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ линейно независимы. То есть из условия $\langle L, M\rangle(\xi, \xi) = 0$ вытекает

$$\begin{aligned}
&\langle L^* \mathrm{d}g_i - \sigma_i \mathrm{d}g_1 - \mathrm{d}g_{i+1}, \xi\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
&\langle L^* \mathrm{d}g_n - \sigma_n \mathrm{d}g_1, \xi\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Так как циклические вектора ξ — это вектора общего положения, то по непрерывности формулы выше верны для всех векторов. Стало быть, условия леммы являются необходимыми. Лемма доказана. $\square$

Напомним, что L — сильная симметрия самого себя. По теореме 12.0.1 получаем, что L^i — сильные симметрии L для любого i. Это значит, что сильными симметриями будут и U, и, следовательно, $v^i(U)$. Произведение сильных симметрий — сильная симметрия, стало быть M — сильная симметрия оператора L.

Далее заметим, что при $t = 0$ матрица $U = x\mathrm{Id}$ и $v_i(U) = v_i(x)\mathrm{Id}$. Из этого вытекает, что

$$g_i(u, 0, x) = v_i(x). \tag{5.11}$$

Среди прочего, $\frac{\partial g_i}{\partial u^j}(u, 0, x) = 0$, так как формулы не зависят от u.

Легко видеть, что утверждение теоремы инвариантно. То есть утверждение теоремы достаточно доказать в произвольных удобных для нас координатах. В качестве таких мы выберем канонические координаты L. В них (5.9) принимает вид

$$u^i - g_i(u, t, x) = \Phi_i = 0,$$

причем

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial u^j} = \delta^i_j - \frac{\partial g_i}{\partial u^j}.$$

Для $t = 0$ мы получаем $\frac{\partial g_i}{\partial u^j} = 0$, то есть $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u^j} = \delta^i_j$. Таким образом, выполняются требования теоремы о неявной функции, и система 5.9 разрешима.

В канонических координатах $L = L_{\mathrm{comp1}}$ утверждение леммы 5.3.1 переписывается как

$$\frac{\partial g}{\partial u} L = L_{\mathrm{comp1}} \frac{\partial g}{\partial u} = L \frac{\partial g}{\partial u}. \tag{5.12}$$

Здесь $\frac{\partial g}{\partial u}$ — матрица Якоби системы функций $u^1, \dots, u^n$. В это же время

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} M &= v_1'(U) L^{n-1} + \dots + v_n'(U)\mathrm{Id} = \frac{\partial g_1}{\partial x} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x}\mathrm{Id},\\
\frac{\partial}{\partial t_i} M &= L^i\big(v_1'(U) L^{n-1} + \dots + v_n'(U)\mathrm{Id}\big) = L^i\big(\frac{\partial g_1}{\partial x} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x}\mathrm{Id}\big) =\\
&= \frac{\partial g_1}{\partial t_i} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial t_i}\mathrm{Id}.
\end{aligned}$$

Для $i = 1$ получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial t_1} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial t_1}\mathrm{Id} &= \frac{\partial}{\partial t_1} M = L\big(\frac{\partial g_1}{\partial x} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x}\mathrm{Id}\big) =\\
&= \Big(\frac{\partial g_2}{\partial x} + u^1 \frac{\partial g_1}{\partial x}\Big) L^{n-1} + \dots + \Big(\frac{\partial g_n}{\partial x} + u^1 \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x}\Big) L + u^n \frac{\partial g}{\partial u^1}\mathrm{Id}
\end{aligned}$$

Определив вектор-столбец $g = (g_1, \ldots, g_n)^T$, легко видеть, что последнее равенство записывается как

$$\partial_{t_1} g = L \partial_x g.$$

В свою очередь, применяя эту процедуру для t_i и t_{i-1}, мы получаем $\partial_{t_i} g = L\partial_{i-1} g$. Из этого вытекает

$$\partial_{t_i} g = L^i \partial_x g. \tag{5.13}$$

Теперь продифференцируем систему 5.9 по x и по t_i:

$$u_x = \frac{\partial g}{\partial u} u_x + \partial_x g, \quad u_{t_i} = \frac{\partial g}{\partial u} u_{t_i} + \partial_{t_i} g = \frac{\partial g}{\partial u} u_{t_i} + L^i \partial_x g.$$

Здесь мы воспользовались (5.13). Теперь рассмотрим выражение

$$u_{t_i} - L^i u_x = \frac{\partial g}{\partial u} u_{t_i} - L^i \frac{\partial g}{\partial u} u_x = \frac{\partial g}{\partial u}(u_{t_i} - L^i u_x).$$

Мы использовали (5.12). Перенося в правую часть, мы получаем соотношение

$$(\mathrm{Id} - \frac{\partial g}{\partial u})(u_{t_i} - L^i u_x) = 0.$$

В окрестности точки $t = 0$ выражение в первой скобке невырождено. Значит $u_{t_i} - L^i u_x$, то есть удовлетворяет системе 5.8. В свою очередь (5.11) гарантирует, что начальные условия — это в точности $v_i(x)$. Теорема доказана. $\square$

Из данной теоремы мы извлечём два замечательных следствия.

Замечание 5.3.1 (Описание операторов Нийенхейса в первой сопровождающей форме)**.** Пусть дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса L задан в канонических координатах. Выполним процедуру, описанную в теореме 5.3.1, для некоторых начальных условий, чтобы получить функции $u^i(t_{n-1}, \ldots, t_2, x)$. Переименуем функции и переменные по правилу

$$u^i \to \sigma_i, \quad t_j \to u^{n-j}, j = 1, \ldots, n-1, \quad x \to u^n.$$

Полученные функции $\sigma_i(u)$ удовлетворяют системе 5.3 из условия теоремы 5.1.1 о приведении оператора Нийенхейса к первой сопровождающей форме.

То есть теорема 5.3.1 позволяет строить функции, которые стоят в первом столбце первой присоединенной формы. Так как начальные условия в системе 5.3 имеют вид

$$v_i = \sigma_i(0, \ldots, 0, u^n),$$

то в аналитической категории такая процедура дает все возможные решения. М получаем описание всех операторов Нийенхейса, которые в данной системе координат приведены к первой сопровождающей форме. Решения соответствующей системы параметризуются n функциями одной переменной. $\blacksquare$

Замечание 5.3.2. Пусть дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса L задан в канонических координатах. Выберем начальные условия $v_i(x), i = 1, \ldots, n$ такими, что касательный вектор

$$\gamma'(x) = (v_1', \ldots, v_n')^T,$$

является циклическим для L. Выполнив процедуру, описанную в теореме 5.3.1 для таких начальных условий мы получим функции $u^i(t_{n-1}, \ldots, t_2, x)$. Переименуем функции и переменные по правилу

$$t_j \to w^{n-j}, j = 1, \ldots, n-1, \quad x \to w^n.$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 5.3.1, систему (5.8) можно переписать как (уравнение с номером n является следствием предыдущих уравнений в силу формулы Гамильтона-Кэли)

$$L(u)\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial w}L(w).$$

Это можно переписать как

$$\frac{\partial u}{\partial w}^{-1} L(u)\frac{\partial u}{\partial w} = L(w),$$

где оба оператора в первой сопровождающей форме. То есть функции $u(w)$ задают замену координат, сохраняющую первую сопровождающую форму. Легко проверяется, что все такие замены получаются указанным образом для разных начальных условий. В частности, мы получаем описание группы симметрий, действующей на первой сопровождающей форме. ■

В завершении раздела мы построим пример решения системы (5.8) в размерности три.

Пример 5.3.2. В этом примере мы отойдем от обозначений теоремы 5.3.1. Пусть $n = 3$ и зафиксируем начальные условия v_1, v_2, v_3 в виде

$$v_1(x) = 4x, \quad v_2(x) = -5x^2, \quad v_3(x) = x^3$$

Определим

$$M = x_1 L^2 + x_2 L + x_3 \mathrm{Id}$$

и рассмотрим уравнение

$$v_1(M)L^2 + v_2(M)L + v_2(M)\mathrm{Id} = (4M)L^2 - (5M^2)L + 2M^3 = L^3$$

Начальные условия подобраны таким образом, что многочлен $p(\lambda) = \lambda^3 - v_1(x)\lambda^2 - v_2(x)\lambda - v_3(x) = (\lambda - x)^2(\lambda - 2x)$. Таким образом, уравнение выше разлагается в

$$(L - M)^2(L - 2M) = 0.$$

Так как характеристический многочлен для gl-регулярного оператора совпадает с моническим минимальным аннулирующим многочленом, мы получаем следующие уравнения на собственные значения оператора L:

$$\lambda - x_1\lambda^2 - x_2\lambda - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2x_3}{(1 - x_2) + \sqrt{(1 - x_2)^2 - 4x_1 x_3}}, \tag{5.14}$$

$$\lambda - 2x_1\lambda^2 - 2x_2\lambda - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4x_3}{(1 - 2x_2) + \sqrt{(1 - 2x_2)^2 - 16x_1 x_3}}. \tag{5.15}$$

Мы получаем, что

$$L_{\mathrm{comp1}} = \begin{pmatrix} f_1(x) & 1 & 0 \\ f_2(x) & 0 & 1 \\ f_3(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ f_2 &= -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1, \\ f_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{aligned}$$

и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ из (5.14), $\lambda_3 = \lambda$ из (5.15). В окрестности начала координат в точке общего положения оператор имеет две жордановы клетки размеров два и один с непостоянными собственными значениями.

5.4 Полиномиальные нормальные формы в размерности два

В этом разделе мы рассматриваем полиномиальные нормальные формы gl-регулярных операторов. Из комментария 2.2.1 вытекает, что в окрестности регулярной точки в аналитической категории gl-регулярный оператор Нийенхейса приводится к одному из следующих видов

$$\begin{pmatrix} a+\epsilon_1 x^k & 0 \\ 0 & b+\epsilon_2 y^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b+\epsilon y^m & 1 \\ 0 & b+\epsilon y^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^m,$$

где a, b — вещественные константы, m, k — целые числа, а $\epsilon_i = 1$ если m нечетный или ± 1, если степень четная.

Напомним, что в случае если след и определитель оператора Нийенхейса функционально независимы почти всюду, то пример 2.1.3 дает формулу для выражения матрицы оператора через след, определитель и их производные, записанные в этой системе координат. В частности, в размерности два верна замечательная формула (2.14), которой мы будем пользоваться ниже.

Следующая теорема показывает, что полиномиальные нормальные формы существуют и в окрестности особой gl-регулярной точки.

Теорема 5.4.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса в окрестности точки* p, *в которой он имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в подходящей системе координат, центрированной в p, *оператор L приводится к одной из следующих форм:*

1. *Серии $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (для $k \geq 1, \epsilon = \pm 1$):*

$$L_{\mathrm{nil}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{\mathrm{nd}} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & y^{2k-1} \end{pmatrix},$$
$$M_{2k}^{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \epsilon y^{2k} \end{pmatrix}, \quad N_{2k-1} = \begin{pmatrix} y^{2k-1} & 1 \\ 0 & y^{2k-1} \end{pmatrix}, \quad N_{2k}^{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon y^{2k} & 1 \\ 0 & \epsilon y^{2k} \end{pmatrix}; \tag{5.16}$$

2. *Серия $\mathcal{O}^{d,\epsilon}_{k,\mathrm{c}}$, $k \geq 1$, $d \geq 2k+1$, $\epsilon = \pm 1$, $\mathrm{c} = (c_0, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ и мы считаем $\epsilon = 1$, если параметр $d = 2m+1$ нечетный.*

   Оператор L определяется по формуле (2.14) *для $v = \operatorname{tr} L$ и $u = -\det L$, заданных*

$$v = \alpha x y^{2k-1} + y^k \big(c_{k-1} y^{k-1} + \dots + c_1 y + c_0\big), \quad u = \epsilon\, y^d, \quad \alpha = k c_0^2 \left(1 - \frac{k}{d}\right) \neq 0;$$

3. *Серия $\mathcal{P}^{k,\epsilon}_{s,\mathrm{c}}$, $k \geq 1$, $s \geq 2k$, $\epsilon = \pm 1$, $\mathrm{c} = (c_0, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$.*

   Оператор L определяется по формуле (2.14) *для $v = \operatorname{tr} L$ и $u = -\det L$, заданных*

$$v = \alpha x y^s + y^{s-k+1}\big(c_{k-1} y^{k-1} + \dots + c_1 y + c_0\big) + 2\epsilon\, y^k, \quad u = -y^{2k}, \quad \alpha = 2\epsilon\, k c_0 \neq 0;$$

4. Серии $\mathcal{S}^{2k,\epsilon}_{\mathrm{c}}$ *и* $\mathcal{S}^{2k+1}_{\mathrm{c}}$, $k \geq 1$, $\mathrm{c} = (c_0, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$.

Оператор L *определяется по формуле* (2.14) *для* $v = \operatorname{tr} L$ *и* $u = -\det L$, *заданных*

$$v = \alpha x y^{2k-1} + y^k \big(c_{k-1} y^{k-1} + \dots + c_1 y + c_0\big), \quad u = \epsilon\, y^{2k}, \quad \alpha = \frac{k}{2}\left(c_0^2 + 4\epsilon\right) \neq 0,$$
$$v = \alpha x y^{2k} + y^{k+1} \big(c_{k-1} y^{k-1} + \dots + c_1 y + c_0\big), \quad u = y^{2k+1}, \quad \alpha = 2k+1.$$

Доказательство. Мы начнем с двух технических лемм.

Лемма 5.4.1. *В предположениях теоремы 5.4.1 найдется такая система координат* x, y, *что для функции* $u = -\det L$ *выполнено либо*

$$\text{(i) } u \equiv 0, \quad \textit{либо} \quad \text{(ii) } u = \pm\, y^{2k}, \quad \textit{либо} \quad \text{(iii) } u = y^{2k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор L в первой сопровождающей форме. Условие на σ_n принимает вид

$$L^* \mathrm{d}\sigma_n = \sigma_n \mathrm{d}\sigma_1.$$

Рассматривая последнее уравнение, мы получаем, что

$$u_x = g(x,y) u. \tag{5.17}$$

Здесь $g(x,y) = \partial_y \operatorname{tr} L$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = f(y) \exp\left(\int_0^x g(t,y) dt\right)$$

для произвольной функции $f(y)$. Если $f(y) \equiv 0$, то мы получаем первый случай. Если $f(y)$ не константа, то можно записать $f(y) = \epsilon y^m h(y)$, где $\epsilon = \pm 1$, $h(0) > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и для $m = 2k$ и $m = 2k-1$ соответственно:

$$u = \pm \left(y \sqrt[2k]{h(y) \exp\left(\int_0^x g(t,y) dt\right)} \right)^{2k} \quad \text{или} \quad u = \left(y \sqrt[2k-1]{\pm h(y) \exp\left(\int_0^x g(t,y) dt\right)} \right)^{2k-1}.$$

Взяв за новую координату y_{new} выражения в скобках, мы получаем $u = \pm\, y^{2k}_{\mathrm{new}}$ или $u = y^{2k-1}_{\mathrm{new}}$. □

Лемма 5.4.1 приводит определитель оператора к простейшему виду. Всюду далее мы считаем, что координата y заморожена и будем упрощать $v = \operatorname{tr} L$, рассматривая "треугольные"замены вида $\bar{y} = y, \bar{x} = h(x,y)$. Следующая лемма работает для произвольного gl-регулярного оператора в размерности два.

Лемма 5.4.2. *Пусть* L *—* gl*-регулярный оператор Нийенхейса в размерности два. Тогда с помощью треугольной замены можно добиться, чтобы компонента* L^1_2 *была тождественной единицей.*

Доказательство. Рассмотрим замену $\bar{y} = y, \bar{x} = h(x,y)$. Обозначим $\bar{L}^1_2$ в новой системе координат. Прямыми вычислениями получаем

$$\bar{L}^1_2 = \frac{L^1_2(h(x,y),y) + h_y L^1_1(h(x,y),y) - h_y L^2_2(h(x,y),y) - h_y^2 L^2_1(h,y)}{h_x}$$

Приравнивая левую часть к единице и умножая на h_x, получаем уравнение на функцию h вида:

$$h_x = F(h, h_y, y).$$

По теореме Коши-Ковалевской у этой системы есть решение. Так как L — это gl-регулярный, то мы можем выбрать начальные условия $h(0, y)$ так, чтобы $h_x(0, 0) \neq 0$. В этом случае решение задает замену координат. Выполнив такую замену, мы получаем, что $\bar{L}^1_2 = 1$. □

Теперь займёмся перебором случаев.

Случай 1: $u \equiv 0$ **и** $v \equiv 0$ Оператор Нийенхейса L сопряжен жорданову блоку с постоянным собственным значением и приводится к постоянному виду, то есть мы имеем дело со случаем L_{nil}.

Случай 2: $u \equiv 0$ **и** $v \not\equiv 0$ В первой сопровождающей форме мы получаем, что v удовлетворяет уравнению Хопфа

$$vv_y - v_x = 0.$$

Для анализа мы применим следующий трюк: пусть дано решение уравнения Хопфа. Тогда возьмем его, обозначим v_x через $g(x, y)$ и рассмотрим уже линейное уравнение

$$v_x = g(x, y)v.$$

Выбранное нами частное решение уравнения Хопфа, разумеется, удовлетворяет этому линейному уравнению. Однако для такого уравнения мы знаем (лемма 5.4.1), что любое его решение подходящей заменой приводится к виду $v = y^{2k-1}$ или $v = \epsilon y^{2k}$ для $k \geq 1, \epsilon = \pm 1$. В силу леммы 5.4.2 мы можем считать, что в наших координатах $L^1_2 = 1$.

Свойство $L^* \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L = \frac{1}{2} \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L^2$ в силу условия $u \equiv 0$ переписывается как

$$L^* \mathrm{d}v = v \mathrm{d}v.$$

Таким образом, оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Это в точности серии M_{2k-1} и M^{ϵ}_{2k}.

Случай 3: $u \not\equiv 0$ **и** $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \equiv 0$. Используя леммы 5.4.1 и 5.4.2, мы получаем, что $u = y^{2m-1}$ или $u = \pm\, y^{2m}$ для $m \geq 1$ и $l^1_2 = 1$. Так как $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \equiv 0$, то мы получаем $v_x \equiv 0$. При этом

$$L^* \mathrm{d}u = u \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L.$$

Получаем, что последняя строка оператора имеет вид $(0, g(y))$. Так как след и определитель зависимы, то $L^1_1 = f(y)$. То есть мы имеем дело с оператором вида

$$L = \begin{pmatrix} f(y) & 1 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix} \quad \text{где } v = f + g \text{ и } u = -fg.$$

Вычислим кручение Нийенхейса:

$$\mathcal{N}_L(\partial_x, \partial_y) = [f\partial_x, g\partial_y + \partial_x] - L[f\partial_x, \partial_y] = f'(f - g)\partial_x = 0.$$

Пусть $f'_y \equiv 0$. Это означает, что f — константа, а с учетом условий на оператор в точке p это нулевая константа. Значит $u \equiv 0$, то есть в наших предложениях такое невозможно. Стало быть, $f \equiv g$. То есть L — жорданов блок в каждой точке. Из этого вытекает, что $\det L > 0$. Извлекая корень, получаем нормальные формы N_{2k-1} и N^{ϵ}_{2k}.

Случай 4: $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \neq 0$. Это условие означает, что L — дифференциально невырожденный, поэтому он приводится к виду L_{nd}. Заметим, что в смысле леммы 5.4.1 дифференциально невырожденный случай соответствует $u = y$. Ниже мы исключаем этот случай.

Случай 5: $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \not\equiv 0$ **почти всюду, но** $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u = 0$ **в точке** p. Как и раньше, мы полагаем, что $u = y^{2m+1}$ или $u = \epsilon y^{2m}$ для $m \geq 1, \epsilon = \pm 1$ и $L^1_2 = 1$. Из условия (2.14) мы можем независимо вычислить L^1_2. Умножая обе части на знаменатель и деля на u_y, мы получаем уравнение на v:

$$v_x = vv_y - \frac{1}{d} y (v_y)^2 + u_y, \tag{5.18}$$

здесь $d = 2m+1$ или $2m$ в зависимости от вида u. Выполнена следующая лемма.

Лемма 5.4.3. *Пусть $v(x, y)$ — решение уравнения* (5.18) *в предположениях* $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \not\equiv 0$ *почти всюду, $u \neq y$. Тогда оно записывается в виде $v = v_0(y) + y^s(\alpha x + F)$, где $\alpha \neq 0$, $s \geq 1$ и $F(x, y)$ — вещественно аналитическая функция, ряд которой начинается с квадратичных членов.*

Доказательство. Разложим решение из условия в ряд по x:

$$v(x, y) = v_0(y) + v_1(y)x + v_2(y)x^2 + \dots.$$

Продифференцируем уравнение (5.18) по x. Получаем

$$v_{xx} = v_x v_y + v v_{xy} - \frac{2}{d} y v_y v_{xy}.$$

Заметим, что $v = v_0(y)$ удовлетворяет этому уравнению с начальными условиями $v(0, y) = v_0(y), v_x(0, y) = v_1(y) \equiv 0$. По теореме Коши-Ковалевской, это решение единственно. Значит, если $v_1 \equiv 0$, то $\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \equiv 0$, что противоречит нашим предположениям. Таким образом, в нашем случае

$$v_1(y) = y^s r_1(y),$$

где $r_1(0) = \alpha \neq 0$.

Пусть $s = 0$. Это означает, что $\mathrm{d}v$ и $\mathrm{d}y$ линейно независимы. Возьмем за новые координаты $\bar{x} = v = \operatorname{tr} L, \bar{y} = y$. В новых координатах формула (2.13) дает следующее:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} & 1 \\ u(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & u_y \\ u u_y^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В нуле полученная матрица сопряжена жорданову блоку тогда и только тогда, когда $u_y = 1$, то есть $u = y$. Это противоречит нашему предположению.

Таким образом, $s \geq 1$. Теперь возьмем ряд для $v(x, y)$, подставим его в уравнение (5.18) и приравняем коэффициенты при x^i с обеих сторон. Получим

$$\begin{aligned}(i+1)v_{i+1}(y) = v_0(y)v_i'(y) + v_0'(y)v_i(y) - \frac{2}{d} y v_0'(y) v_i'(y) + \\ + \sum_{j=1}^{i-1} \big(v_j(y) v_{i-j}'(y) - \frac{1}{d} y v_j'(y) v_{i-j}'(y) \big).\end{aligned} \tag{5.19}$$

Действуем по индукции. Мы знаем, что $v_1(y)$ делится на y^s, значит $v_1'(y)$ делится на y^{s-1}. Так как $v(0,0)=0$, то v_0 делится y. Таким образом, из формулы (5.19) вытекает, что $v_2(y)$ делится на y^s.

Пусть теперь функции $v_1,\dots,v_i$ делятся на y^s. Имеем, что $v_1',\dots,v_i'$ делятся на y^{s-1}. Снова, применяя формулу (5.19), получаем, что функция v_{i+1} делится на y^s. Таким образом, мы показали, что все коэффициенты $v_i(y), i\geq 1$ делятся на y^s. Полагая $y^s r_i(y) = v_i(y)$ и $r_1(y)=\alpha + y\bar r_1(y)$, мы получаем

$$\begin{aligned} v &= v_0 + y^s\big(xr_1(y) + x^2r_2(y) + x^3r_3(y) + \dots\big) = \\ &= v_0 + y^s\big(\alpha x + xy\bar r_1(y) + x^2r_2(y) + x^3r_3(y) + \dots\big) = v_0 + y^s\big(\alpha x + F\big), \end{aligned}$$

где по построению ряд для функции F начинается как минимум с квадратичных членов. $\square$

Рассмотрим разложение $v = v_0(y) + y^s(\alpha x + F)$, существующее по лемме 5.4.3. Распишем $v_0(y) = p_0(y) + \tilde v_0$, где $p_0(y)$ — многочлен степени $\leq s$, а $\tilde v_0$ — кусок ряда для $v_0(y)$, содержащий члены степеней $\geq s+1$. Рассмотрим треугольную замену координат вида

$$\bar x = x + \frac{1}{\alpha}F + \tilde v_0, \quad \bar y = y.$$

В силу условий на F это действительно замена координат, так как $\frac{\partial \bar x}{\partial x}(0,0) = 1$. Более того, ее якобиан в начале координат совпадает с Id, то есть L в начале координат остается жордановой клеткой с нулевым собственным значением в стандартной форме.

При этом в этой новой системе координат (чтобы не загромождать формулы, мы проигнорируем черточки)

$$v = p_s(y) + \alpha x y^s, \quad u = y^{2m+1} \text{ или } u = \epsilon y^{2m}, \tag{5.20}$$

где $\alpha\neq 0$, $m,s\geq 1$ и p_s — многочлен степени не выше s без свободного члена. Эта система координат оптимальна в том смысле, что у нас не осталось свободы маневра: мы не можем делать больше никаких замен.

На последнем шаге доказательства нам надо из семейства (5.20) выбрать такие $v(x,y)$ и $u(x,y)$, что формула (2.14) даст нам аналитические возмущения жорданова блока. Подчеркнём, что формула (2.14) будет в любом случае давать оператор Нийенхейса, нам остаётся выбрать константы так, чтобы происходило сокращение со знаменателем.

Прямой подстановкой, мы получаем

$$L = \begin{pmatrix} v - \frac{yv_y}{d} & \frac{vv_y - \frac{1}{d}yv_y^2 + u'}{v_x} \\ \\ \frac{yv_x}{d} & \frac{yv_y}{d} \end{pmatrix},$$

где $d = 2m+1$ или $d=2m$ (показатель степени в u). Единственная компонента, которая содержит знаменатель — это L^1_2. Расписывая для нее формулу в деталях, мы получаем

$$L^1_2 = s\alpha x^2 y^{s-1}\left(1 - \frac{s}{d}\right) + x\left(\frac{1}{y}p_s + \left(1-\frac{2}{d}\right)p_s'\right) + \frac{p_sp_s' - \frac{1}{d}y(p_s')^2 + u'}{\alpha y^s}.$$

Мы помним, что $p_s(0)=0$, то есть $\frac{1}{y}p_s$ — аналитическая функция. Таким образом, нам надо проанализировать только дробь

$$\frac{p_s p_s' - \frac{1}{d}y(p_s')^2 + u'}{\alpha y^s}. \tag{5.21}$$

Легко видеть, что $L_2^1(0,0)$ совпадает со значением этой дроби в нуле и, как мы помним, равен единице. Перепишем (5.21) как

$$p_s p_s' - \frac{1}{d}y(p_s')^2 = -u' + \alpha y^s + \alpha_1 y^{s+1} + \cdots + \alpha_{s-1}y^{2s-1}, \tag{5.22}$$

где $\alpha \neq 0$ и α_i, вообще говоря, произвольные.

Пусть $p_s = y^k\big(c_0 + c_1 y + \cdots + c_{s-k}y^{s-k}\big)$ для $k \geq 1$. Член наименьшей степени в левой части (5.22) имеет вид $kc_0^2\left(1-\frac{k}{d}\right)y^{2k-1}$. С другой стороны, член наименьшей степени справа — это либо $u' = \pm dy^{d-1}$, либо αy^s (ну или оба). Разберём три подслучая.

Случай 5.1: $s < d-1$ Тогда $2k-1=s$, и, более того,

$$p_{2k-1} = c_0 y^k + \cdots + c_{k-1}y^{2k-1},$$

где $c_1,\dots,c_{k-1}$ произвольные постоянные и $c_0 \neq 0$. Мы также получаем

$$\alpha = kc_0^2\left(1-\frac{k}{d}\right).$$

Это дает нам серию $O_{k,c}^{d,\epsilon}$.

Случай 5.2: $s > d-1$ Тогда $d-1=2k-1$ и

$$u = \epsilon y^{2k}.$$

Приравнивая коэффициенты при y^{2k-1} в обеих частях равенства 5.22 мы получаем

$$\frac{k}{2}c_0^2 = -2k\epsilon \quad \text{и} \quad c_0 = \pm 2, \quad \epsilon = -1.$$

То есть $u=-y^{2k}$. Запишем теперь $p_s = \pm 2y^k + c_1 y^{k+1} + \cdots + c_{s-k}y^s$ и подставим в (5.22). Приравнивая коэффициенты при $y^{2k},\ dots, y^{s-1}$ в левой части формулы к нулю, мы последовательно получаем $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-2k} = 0$. Меняя обозначения как $c_{s-2k+j} \mapsto c_{j-1}$ для $j=1,\dots,k$, мы получаем:

$$p_s = y^{s-k+1}\big(c_{k-1}y^{k-1} + \cdots + c_1 y + c_0\big) \pm 2y^k.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях y^s в обеих частях (5.22), имеем

$$\alpha = \pm 2kc_0 \neq 0.$$

Это дает нам серию $P_{s,c}^{k,\epsilon}$.

Случай 5.3: $s = d-1$ В этом случае имеется два подслучая. Первый соответствует $d=2m$, то есть

$$u = \epsilon y^{2m}.$$

В этом случае $2k-1=2m-1$, $k=m$ и

$$v=\alpha xy^{2m-1}+c_0y^m+\dots+c_{m-1}y^{2m-1} \quad \text{с условием} \quad \alpha=\frac{m}{2}(c_0^2+4\epsilon)\neq 0.$$

Это дает нам случай $S_{\text{c}}^{2m,\epsilon}$ (в формулировке теоремы m заменяется на k).

Пусть теперь $d=2m+1$. Мы получаем

$$u=y^{2m+1} \quad \text{и} \quad v=\alpha xy^{2m}+c_0y^{m+1}+\dots+c_{m-1}y^{2m} \quad \text{с условием} \quad \alpha=2m+1.$$

Это дает случай S_{c}^{2m+1} (в формулировке теоремы m заменяется на k). Теорема доказана. □

Замечание 5.4.1. Для серий $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ каноническая система координат единственна за исключением, возможно, преобразований $x\to -x$ и $y\to -y$. Таким образом, операторы Нийенхейса, которые относятся к разным сериям, равно как к одной серии с разным параметром, попарно не эквивалентны за исключением упомянутого выше преобразования. ■

Глава 6

Симметрии и законы сохранения

6.1 Теорема о расщеплении для симметрий и законов сохранения

Важным свойством многих партнерских объектов для оператора Нийенхейса является "уважение"расщепления. В этом разделе мы докажем теорему, которая показывает, что симметрии, сильные симметрии и законы сохранения подчиняются этому принципу.

Теорема 6.1.1. *Пусть в точке* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *характеристический многочлен оператора* L *разлагается в произведение* $\chi_L(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$*, где* $\chi_1(t)$ *и* χ_2 *взаимно просты и имеют степени* k, m*. Тогда*

1. *В окрестности точки* p *существует система координат* $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$*, в которой* L *имеет вид*
$$L = \begin{pmatrix} L_1(u) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & L_2(v) \end{pmatrix}.$$
Здесь матрица L_1 *имеет размеры* $k \times k$*, а ее компоненты зависят только от координат* u*; матрица* L_2 *имеет размеры* $m \times m$ *и зависит только от координат* v*;*

2. *Оба оператора* L_1, L_2 *— операторы Нийенхейса и их характеристические многочлены совпадают с* $\chi_1(t), \chi_2(t)$ *соответственно;*

3. *Произвольный закон сохранения* $\mathrm{d}f$ *для* L *в окрестности точки* p *имеет вид* $\mathrm{d}f_1(u) + \mathrm{d}f_2(v)$*, где* $\mathrm{d}f_i$ *— законы сохранения* $L_i, i = 1, 2$ *соответственно;*

4. *Всякая симметрия* M *для оператора* L *в окрестности точки* p *в данной системе координат принимает вид*
$$M(u, v) = \begin{pmatrix} M_1(u) & 0 \\ 0 & M_2(v) \end{pmatrix},$$
где M_1 *зависит только от координат* u*, а* M_2 *зависит только от координат* v*. При этом* M_i *являются симметриями* $L_i, i = 1, 2$ *соответственно;*

5. *Всякая сильная симметрия M для оператора L в окрестности точки* p *в данной системе координат принимает вид*

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} M_1(u) & 0 \\ 0 & M_2(v) \end{pmatrix},$$

где M_1 зависит только от координат u, а M_2 зависит только от координат v. При этом M_i являются сильными симметриями $L_i, i = 1,2$ соответственно.

Доказательство. Первые два утверждения теоремы 6.1.1 представляют собой теорему о расщеплении (теорема 2.5.2). Будем считать, что мы уже выбрали расщепляющую систему координат $u^1,\dots,u^k,v^1,\dots,v^m$. Соответствующие базисные векторные поля, как всегда, обозначаем через ξ_i,η_j соответственно. Нам потребуется следующий алгебраический факт.

Лемма 6.1.1. *Рассмотрим три матрицы P,R и Q размеров $n\times n$, $n\times m$ и $m\times m$ соответственно, удовлетворяющие условию*

$$PR = RQ.$$

Если $\mathrm{Spectrum}\ P \cap \mathrm{Spectrum}\ Q = \varnothing$, *то* $R = 0$.

Доказательство. Для начала заметим, что одновременный сдвиг P и Q на $c\mathrm{Id}_{n\times n}$ и $c\mathrm{Id}_{m\times m}$ соответственно сохраняет соотношение в условии для произвольной константы c, то без ограничения общности будем считать, что Q — невырожденный. Условие $PR = RQ$ очевидно влечет $P^kR = RQ^k$ для произвольной степени k. В силу линейности получаем, что для любого многочлена p верно, что $p(P)R = R\,p(Q)$. Взяв в качестве многочлена характеристический многочлен P, мы получаем

$$0 = Rp(Q).$$

Так как спектры P и Q не пересекаются, оператор $p(Q)$ — невырожденный. Таким образом, $R = 0$, лемма доказана. □

Докажем третье утверждение теоремы. Условие того, что $\mathrm{d}f$ — закон сохранения, принимает вид

$$0 = \mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\Big((L_1)^s_i\frac{\partial f}{\partial u^s}\mathrm{d}u^i + (L_2)^s_j\frac{\partial f}{\partial v^s}\mathrm{d}v^j\Big) = \dots + \Big((L_1)^s_i\frac{\partial^2 f}{\partial u^s\partial v^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial v^s}(L_2)^s_j\Big).$$

Здесь многоточие означает слагаемые, которые содержат только $\mathrm{d}u^i\wedge\mathrm{d}u^j$ и $\mathrm{d}v^i\wedge\mathrm{d}v^j$. Таким образом, равенство нулю всей 2-формы означает, что

$$(L_1)^s_i\frac{\partial^2 f}{\partial u^s\partial v^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial v^s}(L_2)^s_j = 0.$$

Обозначив $L_1^T = P$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial v^j} = R$ и $L_2 = Q$, мы получаем, что эта формула дает соотношение $PR - RP = 0$. Спектры P,Q не пересекаются, поэтому, по лемме (6.1.1) получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial v^j} = 0.$$

Таким образом, плотность закона сохранения записывается как $f = f_1(u) + f_s(v)$. В этом случае условие на закон сохранения принимает вид

$$\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(L_1^*\mathrm{d}f_1) + \mathrm{d}(L_2^*\mathrm{d}f_2) = 0.$$

Оно выполняется только если $\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2$ — законы сохранения L_1, L_2 соответственно. Таким образом, третье утверждение теоремы доказано. Перейдем к четвертому утверждению. Запишем M в виде

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & R \\ S & M_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь M_1 — матрица размера $k \times k$, M_2 — матрица размера $m \times m$, R — матрица размера $k \times m$, S — матрица размера $m \times k$. Условие $ML - LM = 0$ дает следующие матричные соотношения:

$$M_1L_1 - L_1M_1 = 0, \quad M_2L_2 - L_2M_2 = 0, \quad RL_2 - L_1R = 0, \quad SL_1 - L_2S = 0$$

По лемме (6.1.1) два последних соотношения означают, что $R = S = 0$. Таким образом, матрица M имеет блочный вид. Запишем условие того, что M симметрия для векторов ξ_i, η_j:

$$\begin{aligned}
0 =& M[L\xi_i, \eta_j] + L[\xi_i, M\eta_j] - [L\xi_i, M\eta_j] + M[L\eta_j, \xi_i] + L[\eta_j, M\xi_i] - [L\eta_j, M\xi_i] = \\
=& L[\xi_i, (M_2)_j^s\eta_s] - [(L_1)_i^q\xi_q, (M_2)_j^s\eta_s] + L[\eta_j, (M_1)_i^q\eta_q] - [(L_2)_j^s\eta_s, (M_1)_i^q\xi_q] = \\
=& \Big(\frac{\partial(M_2)_j^s}{\partial u^i}(L_2)_s^q - \frac{\partial(M_2)_j^q}{\partial u^s}(L_1)_i^s\Big)\xi_q + \Big(\frac{\partial(M_1)_i^q}{\partial v^j}(L_2)_q^s - \frac{\partial(M_1)_i^s}{\partial v^q}(L_2)_j^q\Big)\eta_s.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первую скобку. В ней положим $P = L_2, Q = L_1$, а элементы $R_q^p = \frac{\partial(M_2)_j^p}{\partial u^q}$ и j фиксировано. Тогда получаем по лемме 6.1.1 $\frac{\partial(M_2)_j^p}{\partial u^q} = 0$ для любого j, то есть M_1 зависит только от u. Аналогично получаем, что M_2 зависит только от v. Возвращаясь к формуле симметрий, подставляем ξ_i, ξ_j. Получаем

$$\begin{aligned}
0 =& M[L\xi_i, \xi_j] + L[\xi_i, M\xi_j] - [L\xi_i, M\xi_j] + M[L\xi_j, \xi_i] + L[\xi_j, M\xi_i] - [L\xi_j, M\xi_i] = \\
=& M[L_1\xi_i, \xi_j] + L[\xi_i, M_1\xi_j] - [L_1\xi_i, M_1\xi_j] + M[L_1\xi_j, \xi_i] + L[\xi_j, M_1\xi_i] - [L_1\xi_j, M_1\xi_i].
\end{aligned}$$

Так как $[L_1\xi_i, \xi_j] \in \operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, то получаем что $L[L_1\xi_i, \xi_j] = L_1[L_1\xi_i, \xi_j]$. Аналогично получается для $M[L_1\xi_j, \xi_i]$. То есть M_1 — симметрия L_1. Аналогичные рассуждения проводятся для M_2 и L_2. Утверждение про сильные симметрии доказывается таким же образом. Теорема доказана. □

Известно, что произведение сильных симметрий — это сильная симметрия. Этот факт верен для любого операторного поля L, не только оператора Нийенхейса. Таким образом, сильные симметрии образуют ассоциативную алгебру, которую мы будем обозначать как $\operatorname{Sym} L$. Приведем примеры алгебр для уже известных операторов Нийенхейса.

Пример 6.1.1. Пусть в координатах $u^1, \dots, u^n$ операторное поле L имеет диагональный вид

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Если $LM - ML = 0$, то M — так же диагонален. Пусть на диагонали стоят функции $\mu_1, \dots, \mu_n$. Прменяя теорему 6.1.1, получаем, что симметрии и сильные симметрии распадаются в сумму одномерных блоков и имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1(u^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2(u^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n(u^n) \end{pmatrix}.$$

Соответствующая алгебра $\operatorname{Sym} L$ — прямая n комплектов алгебры функций от одной переменной. По той же теореме получаем, что произвольный закон сохранения имеет вид

$$\mathrm{d}f = f_1(u^1)\mathrm{d}u^1 + \dots + f_n(u^n)\mathrm{d}u^n.$$

■

Пример 6.1.2. Пусть у нас имеется теперь операторное поле в размерности два, которое сопряжено жордановой клетке максимальной размерности с нулевым собственным значением. В этом случае оно приводится к виду

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие $ML - LM = 0$ дает матрицу оператора M в виде

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Считаем, что координаты у нас x, y, а базисные векторные поля обозначим через ξ, η. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned}
&\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = [L\xi, M\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi, \eta] = -L(b'_x\xi + a'_x\eta) = -a'_x\xi, \\
&\langle L, M\rangle(\eta, \xi) = [L\eta, M\xi] - L[\eta, M\xi] - M[L\eta, \xi] = -a'_x\xi, \\
&\langle L, M\rangle(\xi, \xi) = [L\xi, M\xi] - L[\xi, M\xi] - M[L\xi, \xi] = 0, \\
&\langle L, M\rangle(\eta, \eta) = [L\eta, M\eta] - L[\eta, M\eta] - M[L\eta, \eta] = b'_x\xi + a'_x\eta - L(b'_y\xi + a'_y\eta) = (b'_x - a'_y)\xi.
\end{aligned}$$

Получаем, что условия того, что M — симметрия и сильная симметрия в этом случае совпадают. В частности M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a(y) & xa'(y) + c(y) \\ 0 & a(y) \end{pmatrix},$$

где a, c — произвольные гладкие функции одной переменной. Алгебра симметрий $\operatorname{Sym} L$ представляет собой полупрямую сумму двух алгебр функций от одной переменной. Закон сохранения имеет вид

$$\mathrm{d}f = f(y)\mathrm{d}x + (f'(y)x + g(y))\mathrm{d}y$$

для произвольных функций одной переменной f, g. ■

6.2 Симметрии и законы сохранения для gl-регулярных операторов Нийенхейса

Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса. Мы говорим, что M — его регулярная симметрия, если в разложении $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \,\mathrm{Id}$ дифференциалы $\mathrm{d}g_i$ всюду независимы в целой окрестности точки p. Другими словами, их можно взять за систему координат.

Мы будем употреблять термин система координат, центрированная в p. Это означает, что $g_i(\mathrm{p}) = 0$. Если функции g_i задают систему координат, центрированную в p, то симметрию мы также будем называть центрированной в p.

Теорема 6.2.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса в окрестности точки* p. *Тогда*

1. *Всякая симметрия M — сильная симметрия;*
2. *Любые две (сильные) симметрии M и R — одновременно сильные симметрии друг друга;*
3. *Коэффициенты разложения регулярной симметрии, центрированной в* p, *задают систему координат, в которой L имеет первую сопровождающую форму. Верно и обратное: по заданным координатам строится регулярная симметрия, центрированная в в* p.

Доказательство. Считаем, что $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}$. Лемма 5.3.1 утверждает, что если M — симметрия L, то $g_1, \dots, g_n$ удовлетворяют (5.10). В свою очередь в доказательстве леммы 5.3.1 мы получили, что

$$\langle L, M\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(L^* \mathrm{d}g_i - \mathrm{d}g_{i+1} - \sigma_i \mathrm{d}g_1\Big) \otimes L^{n-i} + \Big(L^* \mathrm{d}g_n - \sigma_n \mathrm{d}g_1\Big) \otimes \mathrm{Id}.$$

То есть из условий на g_i следует, что обращается в ноль весь тензор $\langle L, M\rangle$. Из этого немедленно вытекает, что любая симметрия L — сильная симметрия. Первое утверждение теоремы доказано.

Для симметрии $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}$ определим тензор типа $(1,2)$ как

$$T_M = \mathrm{d}g_1 \otimes L^{n-1} + \dots + \mathrm{d}g_n \otimes \mathrm{Id}\,. \tag{6.1}$$

В силу условий (5.10) имеем

$$T_M(L\xi, \eta) - T_M(\xi, L\eta) = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(L^* \mathrm{d}g_i - \mathrm{d}g_{i+1} - \sigma_i \mathrm{d}g_1\Big) \otimes L^{n-i} + \Big(L^* \mathrm{d}g_n - \sigma_n \mathrm{d}g_1\Big) \otimes \mathrm{Id} = 0.$$

Из этого немедленно вытекает, что

$$T_M(L^k \xi, \eta) = T_M(\xi, L^k \eta) \tag{6.2}$$

для любого k. Рассмотрим разложения для M, R

$$M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \operatorname{Id} \quad \text{и} \quad R = h_1 L^{n-1} + \dots + h_n \operatorname{Id}.$$

Из (6.2) немедленно получаем, что

$$T_M(R\xi, \eta) = T_M(\xi, R\eta), \quad \text{и} \quad T_R(L^k \xi, \eta) = T_R(\xi, L^k \eta). \tag{6.3}$$

Прямые вычисления для M, R дают

$$\begin{aligned}\langle R, M\rangle(\xi, \eta) &= \langle R, \sum_{i=1}^n g_i L^{n-i}\rangle(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n g_i \langle R, L^{n-i}\rangle(\xi, \eta) + T_M(\xi, R\eta) - T_M(R\xi, \eta) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i h_j \langle L^{n-j}, L^{n-i}\rangle + \sum_{i=1}^n g_i \Big(T_R(L^{n-i}\xi, \eta) - T_R(\xi, L^{n-i}\eta) \Big) = 0.\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались (6.2) и (6.3). Таким образом, второе утверждение доказано. Если $M = R$, то, в частности, получаем, что любая симметрия gl-регулярного оператора Нийенхейса — это оператор Нийенхейса.

Перейдем к последнему утверждению. Выберем для регулярной симметрии M координаты $u^i = g_i$. Тогда из формул (5.10) получаем

$$\begin{aligned} L^* \mathrm{d}u^i &= \sigma_i \mathrm{d}u^1 + \mathrm{d}u^{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ L^* \mathrm{d}u^n &= \sigma_n \mathrm{d}u^1. \end{aligned}$$

То есть L в первой сопровождающей форме.

Теперь рассмотрим L в первой сопровождающей форме и определим $M = u^1 L^{n-1} + \dots + u^n \mathrm{Id}$. Коэффициенты разложения удовлетворяют условиям (5.10), значит, перед нами симметрия. При этом она регулярная и центрирована в p. Теорема доказана. □

Замечание 6.2.1. Теорема 6.2.1 показывает, что определенная ранее алгебра сильных симметрий $\operatorname{Sym} L$ на самом деле содержит все симметрии gl-регулярного оператора. Набор (сильных) симметрий $M_0, \dots, M_n$ мы будем называть базисом, если в окрестности точки p любая симметрия разлагается как $M = g_1 M_n + \dots + g_n M_1$. Среди всех базисов мы выделяем $M_i = L^{i-1}$, который мы называем стандартным. ■

Пусть теперь $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для L. Рассмотрим набор законов сохранения $\mathrm{d}f, L^*\mathrm{d}f, \dots, (L^*)^{n-1}\mathrm{d}f$. Обозначим их через $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_n$ и будем называть иерархией законов сохранения. В свою очередь $\mathrm{d}f$ будем называть регулярным законом сохранения, если $\mathrm{d}f_i$ линейно независимы в каждой точке окрестности p.

Теорема 6.2.2. *Пусть L — это gl-регулярный оператор Нийенхейса в окрестности точки* p. *Тогда*

1. *Если $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для L, то он и закон сохранения для любой симметрии M;*

2. *Если $\mathrm{d}f$ — регулярный закон сохранения, то любой закон сохранения L записывается в виде $M^*\mathrm{d}f$ для подходящей симметрии M;*

3. *Пусть в окрестности точки* p *дана иерархия законов сохранения, задаваемых* $\mathrm{d}f$ *из предыдущего пункта. Тогда в координатах* u^i, *где* $\mathrm{d}u^i = (L^*)^{i-1}\mathrm{d}f$, *оператор* L *приведен ко второй сопровождающей форме. Верно и обратное: по второй сопровождающей форме строится иерархия законов сохранения.*

Доказательство. Запишем симметрию M в виде

$$M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}.$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\mathrm{d}(M^*\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(g_1 L^{*(n-1)}\mathrm{d}f + \dots + \mathrm{d}g_n \mathrm{d}f) = \mathrm{d}g_1 \wedge L^{*(n-1)}\mathrm{d}f + \dots + \mathrm{d}g_n \wedge \mathrm{d}f.$$

Здесь мы пользуемся тем, что из $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = 0$ вытекает $\mathrm{d}((L^*)^k\mathrm{d}f) = 0$ для любого k (см. теорему 2.1.2). Формулу выше можно переписать как

$$\mathrm{d}(M^*\mathrm{d}f)(\xi, \eta) = \langle \mathrm{d}f, T_M(\xi, \eta) - T_M(\eta, \xi)\rangle.$$

Здесь T_M — тензор, определенный в доказательстве теоремы 6.2.1. Выберем циклическое векторное поле ξ. Вектора $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ локально порождают касательное пространство. Подставляя в предыдущее выражение и используя формулу (6.2), мы немедленно получаем

$$\langle \mathrm{d}f, T_M(L^j\xi, L^i\xi) - T_M(L^i\xi, L^j\xi)\rangle = \langle \mathrm{d}f, T_M(\xi, L^{i+j}\xi) - T_M(\xi, L^{i+j}\xi)\rangle = 0.$$

Значит 2-форма $\mathrm{d}(M^*\mathrm{d}f)$ равна нулю. Таким образом, первое утверждение доказано.

Пусть теперь задан регулярный закон сохранения $\mathrm{d}f$. Рассмотрим координаты из третьего пункта теоремы. Имеем

$$L^*\mathrm{d}u^i = \mathrm{d}u^{i+1}, \quad L^*\mathrm{d}u^n = \sigma_1 \mathrm{d}u^n + \dots + \sigma_n \mathrm{d}u^1.$$

Последнее равенство выполнено по теореме Гамильтона-Кэли и оператор L приведен ко второй сопровождающей форме. Если же оператор L уже приведен ко второй сопровождающей форме в данных координатах, то $\mathrm{d}u^1$ — регулярный закон сохранения. То есть третий пункт теоремы доказан.

Теперь докажем второй пункт теоремы 6.2.2. Выберем систему координат из пункта три. В ней L — во второй сопровождающей форме. Пусть теперь дан произвольный закон сохранения $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^n}\mathrm{d}u^n$, записанный в этой системе координат. Из теоремы 5.2.1 мы имеем, что для элементов последней строки матрицы L выполнены следующие тождества

$$\frac{\partial \sigma_{n-i+1}}{\partial u^j} = \frac{\partial \sigma_{n-j+1}}{\partial u^i}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{6.4}$$

Прямыми вычислениями получаем, что

$$L^*\mathrm{d}f = \sigma_n \frac{\partial f}{\partial u^n}\mathrm{d}u^1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u^1} + \sigma_{n-1}\frac{\partial f}{\partial u^n}\Big)\mathrm{d}u^2 + \dots + \Big(\frac{\partial f}{\partial u^{n-1}} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial u^n}\Big)\mathrm{d}u^n. \tag{6.5}$$

Условия замкнутости формы в правой части записываются следующим образом (мы сразу пользуемся (6.4))

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^{i-1}\partial u^j} + \sigma_{n-i+}\frac{\partial^2 f}{\partial u^n \partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^{j-1}\partial u^i} + \sigma_{n-j+}\frac{\partial^2 f}{\partial u^n \partial u^i}. \tag{6.6}$$

В формуле выше действует соглашение $\frac{\partial f}{\partial u^0}=0$. Теперь рассмотрим операторное поле

$$M=\frac{\partial f}{\partial u^n}L^{n-1}+\dots+\frac{\partial f}{\partial u^1}\mathrm{Id}.$$

Условия на то, что это симметрия, записанные в виде (5.10), приобретают вид (здесь $g_i=\frac{\partial f}{\partial u^{n-i+1}}$):

$$\begin{aligned}
&L^*\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^j}\Big)=\sigma_{n-j+1}\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^n}\Big)+\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^{j-1}}\Big),\quad j=2,\dots,n,\\
&L^*\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^1}\Big)=\sigma_n\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^n}\Big).
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\mathrm{d}u^i$ (они вычисляются по формуле (6.5) после замены в ней f на подходящую производную) в первом равенстве для произвольного j, мы получаем в точности формулы (6.6). Последнее равенство так же соответствует системе (6.6) в смысле соглашения $\frac{\partial f}{\partial u^0}=0$.

Таким образом, мы получили, что M — симметрия. При этом $\mathrm{d}f=M^*\mathrm{d}u^1$. Второе утверждение теоремы доказано. $\square$

Замечание 6.2.2. Теоремы 6.2.1 и 6.2.2 устанавливают связь между хорошими системами координат для L и его партнерскими объектами:

1. Регулярные симметрии находятся во взаимооднозначном соответствии с первыми сопровождающими координатами;

2. Регулярные законы сохранения находятся во взаимооднозначном соответствии со вторыми сопровождающими координатами.

В этом смысле теоремы о первой и второй сопровождающей форме можно понимать как теоремы существования регулярной симметрии и регулярного закона сохранения в окрестности точки p в аналитической категории. ■

6.3 Симметрии и естественная комплексная структура

Начнем этот раздел с примера.

Пример 6.3.1. Пусть J — комплексная структура в канонических координатах x,y, то есть

$$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Условие $MJ-JM=0$ дает нам

$$M=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}.$$

Базисные векторные поля обозначим через ξ, η. Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned}
\langle L, M\rangle(\xi,\eta) &= [L\xi, M\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi,\eta] = \\
&= [\eta, -b\xi + a\eta] - L[\xi, -b\xi + a\eta] = (a'_x - b'_y)\xi + (a'_y + b'_x)\eta, \\
\langle L, M\rangle(\eta,\xi) &= [L\eta, M\xi] - L[\eta, M\xi] - M[L\eta,\xi] = \\
&= [-\xi, a\xi + b\eta] - L[\eta, a\xi + b\eta] = -(a'_x - b'_y)\xi - (a'_y + b'_x)\eta, \\
\langle L, M\rangle(\xi,\xi) &= [L\xi, M\xi] - L[\xi, M\xi] - M[L\xi,\xi] = \\
&= [\eta, a\xi + b\eta] - L[\xi, a\xi + b\eta] = (a'_y + b'_x)\xi - (a'_x - b'_y)\eta, \\
\langle L, M\rangle(\eta,\eta) &= [L\eta, M\eta] - L[\eta, M\eta] - M[L\eta,\eta] = \\
&= -[\xi, -b\xi + a\eta] - L[\eta, -b\xi + a\eta] = (a'_y + b'_x)\eta - (a'_x - b'_y)\eta.
\end{aligned}$$

Снова мы видим, что симметрии автоматически сильные симметрии. Кроме этого в обеих случаях условия на a, b — это условия Коши-Римана (ниже мы покажем, что для сильных симметрий комплексной структуры это, вообще говоря, общий факт, см. лемму 6.3.1). Алгебра симметрий $\operatorname{Sym} L$ при этом изоморфна алгебре комплексно аналитических функций от одной переменной. Закон сохранения, в свою очередь, имеет вид

$$\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}f + f_y \mathrm{d}y,$$

где $f_{xx} + f_{yy} = 0$, то есть гармоническая функция. В частности, он представляется как $\mathrm{Re} f^{\mathbb{C}}$ для некоторой комплексно-аналитической функции $f^{\mathbb{C}}$. ■

Пример показывает, что голоморфность некоторых объектов тесно связана со свойствами оператора J. Следующая теорема обобщает этот эффект на общий случай и устанавливает связь между законами сохранения и симметриями комплексного оператора Нийенхейса и симметриями и законами сохранения его овеществления.

Теорема 6.3.1. *Пусть в окрестности точки* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *задан оператор Нийенхейса* L *и комплексная структура* J*, относительно которой* L *голоморфен и* $L^{\mathbb{C}}$ *—* gl*-регулярный (в смысле* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*) оператор Нийенхейса. Тогда*

1. *Все симметрии* $L^{\mathbb{C}}$ *— сильные симметрии;*
2. *Если* $M^{\mathbb{C}}$ *— сильная симметрия* $L^{\mathbb{C}}$*, то ее овеществление* M *— сильная симметрия* L*;*
3. *Если* $\mathrm{d}f^{\mathbb{C}}$ *— закон сохранения* $L^{\mathbb{C}}$ *(здесь берется комплексный дифференциал), то* $\mathrm{d}f$ *для* $f = \mathrm{Re}\, f^{\mathbb{C}}$ *— закон сохранения для* L*;*
4. *Если* M *— сильная симметрия* L *и* J*, то* $M^{\mathbb{C}}$ *— сильная симметрия* $\mathrm{L}^{\mathbb{C}}$*;*
5. *Если* $\mathrm{d}f$ *— закон сохранения для* L *и* J*, то его плотность представляется как* $\mathrm{Re}\, f^{\mathbb{C}}$ *для некоторого голоморфного закона сохранения* $\mathrm{d}f^{\mathbb{C}}$ *(здесь берется комплексный дифференциал) оператора* $L^{\mathbb{C}}$*.*

Доказательство. Доказательство первого утверждения теоремы полностью аналогично доказательству в вещественном случае: рассматривается разложение симметрии по степеням $L^{\mathbb{C}}$, доказывается аналог леммы 5.3.1 и следствие из неё.

Для доказательства второго утверждения нам потребуется лемма.

Лемма 6.3.1. *Пусть дано операторное поле L с условием $L\mathsf{J} - \mathsf{J}L = 0$. Тогда выполнение условий Коши-Римана для компонентов L эквивалентно $\langle L, \mathsf{J}\rangle = 0$.*

Доказательство. Обозначим канонические координаты для J через u^i, v^j, а соответствующие базисные векторные поля через ξ_i, η_j. В этих координатах

$$\mathsf{J}\xi_i = \eta_i, \quad \mathsf{J}\eta_i = -\xi_i.$$

Из первого условия вытекает, что в выбранных координатах

$$L = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Условие $\langle L, \mathsf{J}\rangle = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle L, \mathsf{J}\rangle(\xi_i, \xi_j) &= [L\xi_i, \eta_j] - \mathsf{J}[L\xi_i, \xi_j] = [A_i^s\xi_s + B_i^m\eta_m, \eta_j] - \mathsf{J}[A_i^s\xi_s + B_i^m\eta_m, \xi_j] = \\
&= -\left(\frac{\partial A_i^s}{\partial v^j} + \frac{\partial B_i^s}{\partial u^j}\right)\xi_s - \left(\frac{\partial B_i^m}{\partial v^j} - \frac{\partial A_m^s}{\partial u^j}\right)\eta_m, \\
\langle L, \mathsf{J}\rangle(\xi_i, \eta_j) &= -[L\xi_i, \xi_j] - \mathsf{J}[L\xi_i, \eta_j] = -\mathsf{J}([L\xi_i, \eta_j] - \mathsf{J}[L\xi_i, \xi_j]) = -\mathsf{J}\langle L, \mathsf{J}\rangle(\xi_i, \xi_j), \\
\langle L, \mathsf{J}\rangle(\eta_i, \xi_j) &= [L\eta_i, \eta_j] - \mathsf{J}[L\eta_i, \xi_j] = [-B_i^s\xi_s + A_i^m\eta_m, \eta_j] - \mathsf{J}[-B_i^s\xi_s + A_i^m\eta_m, \xi_j] = \\
&= \left(\frac{\partial B_i^s}{\partial v^j} - \frac{\partial A_i^s}{\partial u^j}\right)\xi_s - \left(\frac{\partial A_i^m}{\partial v^j} + \frac{\partial B_i^s}{\partial u^j}\right)\eta_m, \\
\langle L, \mathsf{J}\rangle(\eta_i, \eta_j) &= -[L\eta_i, \xi_j] - \mathsf{J}[L\eta_i, \eta_j] = -\mathsf{J}\langle L, \mathsf{J}\rangle(\eta_i, \xi_j).
\end{aligned}$$

Мы видим, что в скобках стоят в точности условия Коши-Римана на компоненты матрицы L. Таким образом, условия Коши-Римана эквивалентны $\langle L, \mathsf{J}\rangle = 0$. □

Теперь овеществим многообразие и рассмотрим канонические координаты для J. Будем обозначать их через u^i, v^j, а соответствующие базисные векторные поля через ξ_i, η_j. Комплекснозначное векторное поле $\frac{\partial}{\partial z^i}$ в этом случае записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial v^i}\Big) = \zeta_i.$$

Обозначим овеществление симметрии как M и распишем в $\langle L^{\mathbb{C}}, M^{\mathbb{C}}\rangle$ через $\langle L, M\rangle$:

$$\begin{aligned}
&\langle L^{\mathbb{C}}, M^{\mathbb{C}}\rangle(\zeta_j, \zeta_k) = [L^{\mathbb{C}}\zeta_j, M^{\mathbb{C}}\zeta_k] - L^{\mathbb{C}}[\zeta_j, M^{\mathbb{C}}\zeta_k] - M^{\mathbb{C}}[L^{\mathbb{C}}\zeta_j, \zeta_k] = \\
&= [L\xi_j + \mathrm{i}\,L\eta_j, M\xi_k + \mathrm{i}\,M\eta_k] - L^{\mathbb{C}}[\xi_j + \mathrm{i}\,\eta_j, M\xi_k + \mathrm{i}\,M\eta_k] - M^{\mathbb{C}}[L\xi_j + \mathrm{i}\,L\eta_j, \zeta_k] = \\
&= [L\xi_j, M\xi_k] - [L\eta_j, M\eta_k] + \mathrm{i}\,[L\eta_j, M\xi_k] + \mathrm{i}\,[L\xi_j, M\eta_k] - L[\xi_j, M\xi_k] + L[\eta_j, M\eta_k] - \\
&- \mathrm{i}\,L[\xi_j, M\eta_k] - \mathrm{i}\,L[\eta_j, M\xi_k] - M[L\xi_j, \xi_k] + M[L\eta_j, \eta_k] - \mathrm{i}\,M[L\xi_j, \eta_k] - \mathrm{i}\,M[L\eta_j, \xi_k] = \\
&= \langle L, M\rangle(\xi_i, \xi_j) - \langle L, M\rangle(\eta_i, \eta_j) + \mathrm{i}\,\langle L, M\rangle(\xi_i, \eta_j) + \mathrm{i}\,\langle L, M\rangle(\eta_i, \xi_j).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Условие $\langle L^{\mathbb{C}}, M^{\mathbb{C}}\rangle = 0$ дает нам соотношения

$$\langle L, M\rangle(\xi_i, \xi_j) = \langle L, M\rangle(\eta_i, \eta_j), \quad \langle L, M\rangle(\xi_i, \eta_j) = -\langle L, M\rangle(\eta_i, \xi_j). \tag{6.9}$$

Лемма 6.3.1 утверждает, что J — сильная симметрия для L и M, то есть (формула 12.3)

$$\mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi}L = \mathsf{J}\mathcal{L}_\xi L \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi}M = \mathsf{J}\mathcal{L}_\xi M$$

для любых векторных полей ξ. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}\langle L, M\rangle(\eta_i, \eta_j) &= \langle L, M\rangle(\mathsf{J}\xi_i, \mathsf{J}\xi_j) = [L\mathsf{J}\xi_i, M\mathsf{J}\xi_j] - L[\mathsf{J}\xi_i, M\mathsf{J}\xi_j] - M[L\mathsf{J}\xi_i, \mathsf{J}\xi_j] = \\ &= \mathcal{L}_{L\mathsf{J}\xi} M \cdot \mathsf{J}\xi_j - L\mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi_i} M \cdot \mathsf{J}\xi_j = \mathsf{J}(\mathcal{L}_{L\xi_i} M - L\mathcal{L}_{\xi_i} M)\mathsf{J}\xi_j = \mathsf{J}\langle L, M\rangle(\xi_i, \eta_j) = \\ &= \mathsf{J}(-\mathcal{L}_{M\mathsf{J}\xi_j} L\xi_i + M\mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi_j} L\xi_i) = \mathsf{J}^2(-\mathcal{L}_{M\xi_j} L\xi_i + M\mathcal{L}_{\xi_j}\xi_i) = -\langle L, M\rangle(\xi_i, \xi_j).\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что $\mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi_i}\mathsf{J} = 0, \mathcal{L}_{\mathsf{J}\xi_i}\xi_j = 0$. Вместе с условием (6.9) мы получаем, что $\langle L, M\rangle(\xi_i, \xi_j) = \langle L, M\rangle(\eta_i, \eta_j) = \langle L, M\rangle(\xi_i, \eta_j) = -\langle L, M\rangle(\eta_i, \xi_j) = 0$. Таким образом, M — сильная симметрия овеществления. То есть второе утверждение Теоремы доказано.

Перейдем к третьему утверждению теоремы. Начнем мы с общей леммы.

Лемма 6.3.2. *Пусть дана голоморфная* 1*-форма* $\omega = \omega_1 \mathrm{d}z^1 + \dots + \omega_n \mathrm{d}z^n$ *на комплексном многообразии* $\mathrm{M}^n_{\mathbb{C}}$ *и пусть* $a + \mathrm{i}\, b$ *— овеществление этой формы в координатах* u, v *(то есть* a, b *— вещественные дифференциальные формы на многообразии* $\mathbb{M}^{2n}$*). Замкнутость* ω *в смысле комплексного дифференцирования эквивалентна замкнутости* a, b *в смысле вещественного дифференцирования.*

Доказательство. Пусть $\omega_i = \alpha_+ \mathrm{i}\,\beta_i$. Дифференциалы $\mathrm{d}z^i$ связаны с вещественными дифференциалами по формуле $\mathrm{d}z^k = \mathrm{d}u^k + \mathrm{i}\,\mathrm{d}v^k$. Подставляя и раскрывая скобки, мы получаем

$$a = \alpha_i \mathrm{d}u^i - \beta_j \mathrm{d}v^j, \quad b = \beta_i \mathrm{d}u^i + \alpha_j \mathrm{d}v^j.$$

Условия замкнутости 1-форм выписываются как

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial v^j} = -\frac{\partial \beta_j}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial v^j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial v^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial v^i}. \quad (6.10)$$

Легко видеть, что второе и шестое условие — это в точности условия Коши-Римана для α_i, β_i, в то время как третье можно рассматривать как следствие первого в смысле этих самых условий. Напомним, что $\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u^i} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial v^i})$. Тогда условие комплексной замкнутости имеет вид

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \beta_i}{\partial v^j}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial v^j}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_j}{\partial v^i}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial \beta_j}{\partial u^i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial v^i}\right)\right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial z^i}.$$

Приравнивая коэффициенты и добавляя условия Коши-Римана, мы получаем

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \beta_i}{\partial v^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_j}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial v^j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial u^i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial v^j} = -\frac{\partial \beta_j}{\partial u^i}. \quad (6.11)$$

Используя условия Коши-Римана из первых двух условий, мы получаем четыре условия на производные α, β по u и v. Окончательный набор уравнений в (6.11) совпадает с набором в (6.10). Лемма доказана. □

Для комплекснозначной функции $f^{\mathbb{C}} = f(u, v) + \mathrm{i}\, g(u, v)$ ее вещественный дифференциал записывается как $\mathrm{d}f + \mathrm{i}\,\mathrm{d}g$. Легко проверяется, что

$$(L^{\mathbb{C}})^* \mathrm{d}f^{\mathbb{C}} = L^* \mathrm{d}f + L^* \mathrm{d}g. \quad (6.12)$$

По лемме 6.3.2 получаем, что замкнутость правой части влечёт замкнутость каждой из вещественных форм, в частности $L^* \mathrm{d}f$. Третье утверждение теоремы доказано.

Докажем теперь четвертое утверждение. Если J — сильная симметрия M, то $M\mathsf{J} - \mathsf{J}M = 0$ и $\langle M, \mathsf{J}\rangle = 0$. То есть по лемме 6.3.1 операторное поле M голоморфное относительно J. Из (6.8) получаем, что если $\langle L, M\rangle = 0$, то $M^{\mathbb{C}}$ — сильная симметрия $L^{\mathbb{C}}$.

Для доказательства пятого утверждения теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 6.3.3. *Пусть L, M — сильные симметрии друг друга и $\mathrm{d}f$ — их общий закон сохранения. Тогда он является законом сохранения для LM.*

Доказательство. В локальных координатах условие того, что M, L — сильные симметрии друг друга можно записать так (см. (12.4)):

$$\frac{\partial M_k^i}{\partial u^q} L_j^q + M_q^i \frac{\partial L_j^q}{\partial u^k} = \frac{\partial L_j^i}{\partial u^q} M_k^q + L_q^i \frac{\partial M_k^q}{\partial u^j}.$$

Условия $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(M^*\mathrm{d}f) = 0$, в свою очередь, записываются как

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_k^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i} + L_k^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial L_j^i}{\partial u^k}\frac{\partial f}{\partial u^i} + L_j^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k},\\
\frac{\partial M_k^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i} + M_k^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial M_j^i}{\partial u^k}\frac{\partial f}{\partial u^i} + M_j^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k}.
\end{aligned}$$

Применяя последовательно полученные равенства, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^j}\Big(M_k^q L_q^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\Big) &= \frac{\partial M_k^q}{\partial u^j} L_q^i \frac{\partial f}{\partial u^i} + M_k^q \Big(\frac{\partial L_q^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i} + L_q^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\Big) = \frac{\partial M_k^q}{\partial u^j} L_q^i \frac{\partial f}{\partial u^i} + \\
&+ M_k^q \Big(\frac{\partial L_j^i}{\partial u^q}\frac{\partial f}{\partial u^i} + L_j^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^q}\Big) = \Big(\frac{\partial M_k^q}{\partial u^j} L_q^i + M_k^q \frac{\partial L_j^i}{\partial u^q}\Big)\frac{\partial f}{\partial u^q} + \\
&+ M_k^q L_j^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^q} = M_q^i \frac{\partial L_j^q}{\partial u^k}\frac{\partial f}{\partial u^i} + L_j^i \Big(\frac{\partial M_q^i}{\partial u^k}\frac{\partial f}{\partial u^i} + M_q^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k}\Big) = \\
&= \frac{\partial}{\partial u^k}\Big(L_j^q M_q^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial u^k}\Big(M_j^q L_q^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\Big).
\end{aligned}$$

То есть $\mathrm{d}(L^* M^* \mathrm{d}f) = 0$. Лемма доказана. □

Пусть теперь $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для J, то есть $\mathrm{d}(\mathsf{J}^*\mathrm{d}f) = 0$. По лемме Пуанкаре найдется такая функция g, что $\mathrm{d}g = \mathsf{J}^*\mathrm{d}f$. Для функций f, g выполнены условия Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial g}{\partial v^i}, \quad -\frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial g}{\partial u^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, функция $f^{\mathbb{C}} = f + \mathrm{i}\, g$ голоморфная. По условию $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = 0$. Заметим, что L — сильная симметрия самого себя в силу $\mathcal{N}_L = 0$. По лемме 6.3.1 J — сильная симметрия L. По лемме 6.3.3 получаем

$$0 = \mathrm{d}(L^*\mathsf{J}^*\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(L^*\mathrm{d}g).$$

То есть $\mathrm{d}g$ — закон сохранения для L^*. Из формулы (6.12) и леммы 6.3.2 получаем, что $\mathrm{d}f^{\mathbb{C}}$ — закон сохранения для $L^{\mathbb{C}}$. Теорема доказана. □

6.4 Случай вещественного и комплексного жорданова блока

Пусть в окрестности точки p задан оператор Нийенхейса L, который сопряжен жорданову блоку максимальной размерности и его собственное значение λ удовлетворяет условию $\mathrm{d}\lambda \neq 0$. Тогда L приводится (следствие 3.3.1) к виду $L = J + U$, где:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u^n & u^{n-1} & u^{n-2} & \dots & u^1 \\ 0 & u^n & u^{n-1} & \dots & u^2 \\ 0 & 0 & u^n & \dots & u^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u^n \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Напомним, что произвольная гладкая функция $h(t)$ от операторного поля в теплицевой форме считается следующим образом: из разложения

$$h\big(u^n + \lambda u^{n-1} + \dots + \lambda^{n-1}u^1\big) \simeq h_n + \lambda h_{n-1} + \dots + \lambda^{n-1}h_1 + \{\text{члены с } \lambda^i, i \geq n\}$$

определим функции h_i, $i = 1, \dots, n$. Каждая h_i представляет собой многочлен от $u^{n-1}, \dots, u^1$, коэффициенты которого гладкие функции, зависящие от u^n. Функция $h(L)$ определяется следующим образом

$$h(U) = \begin{pmatrix} h_n(u^n) & h_{n-1}(u^n, u^{n-1}) & h_{n-2}(u^n, u^{n-1}, u^{n-2}) & \dots & h_1(u^n, \dots, u^1) \\ 0 & h_n(u^n) & h_{n-1}(u^n, u^{n-1}) & \dots & h_2(u^n, \dots u^2) \\ 0 & 0 & h_n(u^n) & \dots & h_3(u^n, \dots u^3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_n(u^n) \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Выполнена следующая теорема.

Теорема 6.4.1. *Для операторов Нийенхейса J и L, записанных в виде 6.13, выполнено следующее:*

1. *Симметрии J параметризуются n функциями одного переменного $f_1, f_2, \dots, f_n$ и в окрестности точки* p *выписываются в виде*

$$M = f_1(U)J^{n-1} + f_2(U)J^{n-2} + \dots + f_n(U);$$

2. *Пусть $f = M_n^1$ — правый верхний элемент в матрице симметрий $M = g_1 J^{n-1} + \dots + g_n$. Тогда $\mathrm{d}f$ — закон сохранения и всякий закон сохранения может быть получен таким образом;*

3. *Всякая симметрия L одновременно и симметрия J и наоборот. То есть формула выше дает описание всех симметрий L;*

4. *Произвольный закон сохранения L одновременно закон сохранения для J и наоборот.*

Доказательство. Мы начнем со следующей леммы.

Лемма 6.4.1. *Пусть в локальной системе координат $u^1, \ldots, u^n$ задана система линейных дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \alpha_i(u^1, \ldots, u^n), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{6.15}$$

и пусть выполнены условия совместности, то есть

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-1.$$

Тогда интегральная формула

$$\begin{aligned} \bar{f}(u^1, \ldots, u^n) = \int_0^{u^1} \alpha_1(t, u^2, \ldots) \mathrm{d}t + \\ + \int_0^{u^2} \alpha_2(0, t, u^3, \ldots) \mathrm{d}t + \cdots + \int_0^{u^{n-1}} \alpha_n(0, \ldots, 0, t, u^n) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

определяет частное решение (6.15)*. Общее же решение этого уравнения имеет вид*

$$f = \bar{f} + h(u^n), \tag{6.16}$$

где $h(u^n)$ — произвольная функция одной переменной. В частности, любое решение (6.15) *однозначно определяется своим ограничением на n—ю координатную линию, то есть $v(u^n) = f(0, \ldots, 0, u^n$.*

Доказательство. Дифференцируя $\bar{f}$ по u^k при $1 \leq k \leq n-1$ мы получаем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u^k} = \int_0^{u^1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u^k}(t, u^2, \ldots) \mathrm{d}t + \cdots + \int_0^{u^{k-1}} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial u^k}(0, \ldots, 0, t, u^k, \ldots) \mathrm{d}t + a_k(0, \ldots, 0, u^k, \ldots).$$

Подставляя условия совместности в виде $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^i}$, по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u^k} = \alpha_k(u^1, \ldots, u^n) - \alpha_k(0, u^2, \ldots) + \alpha_k(0, u^2, \ldots) - \alpha_k(0, 0, u^3, \ldots) + \cdots + \\ + a_k(0, \ldots, 0, u^k, \ldots) = \alpha_k(u^1, \ldots, u^n). \end{aligned}$$

Пусть f — общее решение. Тогда $f - \bar{f}$ не зависит от $u^1, \ldots, u^{n-1}$ и представляет собой функцию $h(u^n)$. Лемма доказана. $\square$

Теперь перейдём к доказательству теоремы. Начнём с первого утверждения.

Пусть M — симметрия J и разложим $M = g_1 J^{n-1} + \cdots + g_n \mathrm{Id}$. Условия (5.10) на g_i принимают вид

$$\begin{aligned} & J^* \mathrm{d}g_i = \mathrm{d}g_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ & J^* \mathrm{d}g_n = 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Лемма 6.4.2. *Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — решение системы* (6.17) *и $f_i(u^n) = g_i(0, \ldots, 0, u^n)$. Тогда решение однозначно определяется начальными условиями f_i.*

Доказательство. Мы имеем дело с линейными уравнениями в частных производных, поэтому достаточно показать, что решение (6.17), удовлетворяющее нулевому "начальному условию то есть $f_i(u^n) = 0$, само является нулем.

Начнем с последнего уравнения $J^*\mathrm{d}g_n = 0$, которое имеет вид

$$\frac{\partial g_n}{\partial u^1} = \cdots = \frac{\partial g_n}{\partial u^{n-1}} = 0.$$

Это означает, что g_n — функция только переменной u^n. Из условия $g_n(u^1, \ldots, u^n) = g_n(0, \ldots, 0, u^n) = f_n(u^n) = 0$ вытекает, что $g_n \equiv 0$.

Рассмотрим теперь уравнение $J^*\mathrm{d}g_{n-1} = \mathrm{d}g_n$. Так как g_n — нулевое, то оно принимает вид $J^*\mathrm{d}g_{n-1} = 0$. Применяя те же рассуждения, получаем, что $g_{n-2} = 0$. Продолжая процедуру для $g_{n-2}, g_{n-3}, \ldots$, мы получим, что все функции нулевые. Как было сказано выше, этот факт эквивалентен утверждению леммы и, стало быть, она доказана. $\square$

Лемма 6.4.2 показывает, что симметрия однозначно определяется своим начальным условием. Покажем теперь, что для любого начального условия такая симметрия есть. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.4.3. *В обозначениях теоремы* $\langle U, J\rangle = 0$.

Доказательство. По построению

$$U = u^1 J^{n-1} + \cdots + u^n \mathrm{Id}.$$

При этом

$$\begin{aligned} &J^*\mathrm{d}u^i = \mathrm{d}u^{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ &J^*u^n = 0. \end{aligned}$$

Это в точности условия (6.17), записанные для $g_i = u^i$. То есть U — сильная симметрия J. Лемма доказана. $\square$

Теперь рассмотрим гладкие функции $f_i(t), i = 1, \ldots, n$ и сильную симметрию M, определенную как

$$M = f_1(U)J^{n-1} + \cdots + f_n(U)\mathrm{Id} = g_1 J^{n-1} + \cdots + g_n \mathrm{Id}.$$

Напомним, что гладкие функции от U определяются по формуле (6.14), а тот факт, что M — сильная симметрия, следует из леммы 6.4.3. По построению g_i удовлетворяют системе (6.17). При этом при $u^1 = \cdots = u^{n-1} = 0$ матрица $U = u^n\mathrm{Id}$ и, следовательно:

$$\begin{aligned} f_1(u^n\mathrm{Id})J^{n-1} + \cdots + f_n(u^n\mathrm{Id})\mathrm{Id} &= f_1(u^n)J^{n-1} + \cdots + f_n(u^n)\mathrm{Id} = \\ &= g_1(0, \ldots, 0, u^n)J^{n-1} + \cdots + g_n(0, \ldots, 0, u^n)\mathrm{Id}. \end{aligned}$$

То есть мы получили решение для произвольных начальных условий $f_i(t), i = 1, \ldots, n$.

Теперь перейдем ко второму утверждению. Для начала заметим, что из условий (6.17) вытекает, что все $\mathrm{d}g_i$ законы сохранения для J. В частности, $\mathrm{d}g_1$.

Рассмотрим теперь произвольный закон сохранения J и обозначим его через g_1. Все $(J^*)^k\mathrm{d}g_1$ так же законы сохранения. Обозначим $\mathrm{d}g_{k+1} = (J^*)^k\mathrm{d}g_1$. Так как $J^n = 0$, то

$J^*\mathrm{d}g_n = 0$. Значит $g_1, \ldots, g_n$ удовлетворяет условию (6.17). То есть $M = g_1 J^{n-1} + \cdots + g_n \mathrm{Id}$ симметрия и g_1 — верхний левый угол. Утверждение теоремы доказано для J.

Третье утверждение теоремы вытекает из теоремы 6.2.1. Действительно, любые две симметрии gl-регулярного оператора J — это сильные симметрии J и они сильные симметрии друг друга. Взяв в виде одной такой симметрии $L = U + J$, мы получаем, что все симметрии J являются симметриями L. Далее, применяя рассуждения для $L = U + J$ (это тоже gl-регулярный оператор Нийенхейса), мы получаем обратное. То есть симметрии совпадают. Аналогичным образом совпадение законов сохранения выводится из теоремы 6.2.2. Теорема доказана. $\square$

Пусть теперь в окрестности точки $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^{2n}$ оператор Нийенхейса L сопряжен паре жордановых блоков с комплексно сопряженными собственными значениями. Определим естественную комплексную структуру $\mathsf{J} = i(L)$. Мы считаем, что $\mathrm{d}\mu \neq 0$ в смысле этой комплексной структуры. Тогда в подходящей системе координат $u^1, v^1, \ldots, u^n, v^n$ (следствие 3.3.2) мы имеем

$$\mathsf{J} = i(L) = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathsf{J}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

и

$$N = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & \mathrm{Id}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix},$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} U_0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & U_0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & U_0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \ldots & 0_{2\times 2} & U_0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad U_0 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0 \tag{6.19}$$

$$U = u^1 N^{n-1} + \ldots, + u^{n-1} N + u^n \mathrm{Id}, \qquad V = v^1 N^{n-1} + \ldots, + v^{n-1} N + v^n \mathrm{Id},$$

и оператор Нийенхейса записывается в виде

$$L = L_0 + N + U + \mathsf{J}V.$$

Выполнена следующая теорема.

Теорема 6.4.2. *Для операторов Нийенхейса $N, L = L_0 + N + U + \mathsf{J}V$ и комплексной структуры $\mathsf{J} = i(L)$, записанных в виде 6.19, 6.18, выполнено следующее:*

1. *Все совместные для J и N симметрии параметризуются $2n$ аналитическими функциями одной вещественной переменной $f_i, g_i, \quad i = 1, \ldots, n$ и в окрестности*

точки р *выписываются в виде*

$$M = \big(f_1(Z) + \mathsf{J}g_1(Z)\big)N^{n-1} + \big(f_2(Z) + \mathsf{J}g_2(Z)\big)N^{n-2} + \dots + \big(f_n(Z) + \mathsf{J}g_n(Z)\big), \quad (6.20)$$

где $Z = U + \mathsf{J}V$;

2. *Пусть* $f^{\mathbb{C}} = (M^{\mathbb{C}})^1_n$ *— элемент в правом верхнем углу комплексного операторного поля* $M^{\mathbb{C}}$, *овеществление которого совпадает с* M. *Тогда* $\mathrm{d}f = \mathrm{Re}\, f^{\mathbb{C}}$ *— закон сохранения одновременно для* N *и* J *и всякий совместный закон сохранения для* N *и* J *может быть получен таким образом;*

3. *Всякая симметрия* L *одновременно сильная симметрия* N *и* J. *Всякая совместная для* N *и* J *сильная симметрия* N *— сильная симметрия* L. *То есть формула* (6.20) *дает описание всех симметрий* L;

4. *Произвольный закон сохранения* L *одновременно совместный закон сохранения для* N *и* J *и наоборот, всякий совместный закон сохранения для* N *и* J, *является законом сохранения для* L.

Доказательство. Начнем с общего рассуждения. Рассмотрим $\mathbb{C}$ с координатой z в виде $z = u + \mathrm{i}\, v$. Пусть $h(z)$ — голоморфная функция и рассмотрим $h = q + \mathrm{i}\, r$, где q, r — вещественно аналитические функции двух переменных u и v. Они являются решением уравнений Коши-Римана

$$q_u = r_v, \quad -q_v = r_u.$$

Эти уравнения можно записать как квазилинейную систему. Действительно, рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами q, r, положим v — независимая переменная, а u — "время"этой системы. Тогда уравнения приобретают вид

$$\begin{pmatrix} q_u \\ r_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_v \\ r_v \end{pmatrix}.$$

Эта система записана в эволюционной форме, таким образом, по теореме Коши-Ковалевской для любого начального условия в виде $f(v) = q(0, v), g(v) = r(0, v)$ решение такой системы существует и единственно.

Теперь перейдем к доказательству первого утверждения теоремы. Введем комплексные координаты $z^1, \dots, z^n$. В этих координатах

$$N^{\mathbb{C}} = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad Z^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^1 \\ 0 & z^n & z^{n-1} & \dots & z^2 \\ 0 & 0 & z^n & \dots & z^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z^n \end{pmatrix},$$

где $z^i = u^i + \mathrm{i}\, v^i$. Кроме этого

$$L_0^{\mathbb{C}} = z_0 \mathrm{Id}, \quad z_0 = a + \mathrm{i}\, b.$$

В этих координатах $L^{\mathbb{C}} = L_0^{\mathbb{C}} + J + Z^{\mathbb{C}}$. В частности, $L^{\mathbb{C}}$ — gl-регулярный (в смысле $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$) элемент.

Имеем, что $J = N^{\mathbb{C}}$. По теореме 6.3.1 все симметрии J — сильные симметрии и их овеществления совпадают с совместными симметриями для N и J (симметрий у N сильно больше, см. пример 6.5.1). Кроме этого, легко видеть, что в комплексных координатах симметрии J и $z_0\mathrm{Id} + J$ совпадают.

Легко видеть, что утверждения лемм 6.4.1, 6.4.2 и 6.4.3 дословно переносятся на комплексный случай: первые две имеют дело с линейными дифференциальными уравнениями, решения которых записываются в виде интегралов, а третья — факт из тензорной алгебры. Таким образом, в комплексных координатах все симметрии J — сильные симметрии и записываются в виде:

$$M^{\mathbb{C}} = h_1(Z^{\mathbb{C}})J^{n-1} + \dots + h_n(Z^{\mathbb{C}}), \tag{6.21}$$

где h_i — голоморфные функции одного комплексного переменного. Обозначим через M овеществление этой симметрии.

Для функции $h_i(z)$ определим $f_i(v) = \operatorname{Re} h_i(0, v), g_i(v) = \operatorname{Im} h_i(0, v)$. Так как $Z^{\mathbb{C}}$ — сильная симметрия $J = N^{\mathbb{C}}$, то по теореме 6.3.1 Z — сильная симметрия для N. Кроме этого она же является сильной симметрией для J. Из того, что сильные симметрии образуют алгебру, мы получаем, что

$$\tilde{M} = (f_1(Z) + \mathsf{J}g_1(Z))N^{n-1} + (f_2(Z) + \mathsf{J}g_2(Z))N^{n-2} + \dots + (f_n(Z) + \mathsf{J}g_n(Z))$$

совместная сильная симметрия для N и J. Таким образом, операторное поле $\tilde{M}^{\mathbb{C}}$ является сильной симметрией для $N^{\mathbb{C}} = J$. То есть найдутся такие голоморфные функции $\tilde{h}_i$, что

$$\tilde{M}^{\mathbb{C}} = \tilde{h}_1(Z^{\mathbb{C}})J^{n-1} + \dots + \tilde{h}_n(Z^{\mathbb{C}}).$$

Мы хотим показать, что $\tilde{M} = M$. Для этого рассмотрим $z^1 = \dots = z^{n-1} = 0$. Ограничение симметрии $\tilde{M}^{\mathbb{C}}$ на комплексную прямую дает операторное поле

$$\tilde{h}_1(z^n)J^{n-1} + \dots + \tilde{h}_n(z^n)\mathrm{Id}.$$

Ограничение $\tilde{M}$ уже на вещественную прямую, задаваемую уравнением $u^n = 0$, имеет вид

$$(f_1(v^n)\mathrm{Id} + g_1(v^n)\mathsf{J})N^{n-1} + \dots + (f_n(v^n)\mathrm{Id} + g_n(v^n)\mathsf{J}).$$

Из этого, в частности, следует $\operatorname{Re} h_i(0, v) = \operatorname{Re} \tilde{h}_i(0, v)$ и $\operatorname{Im} h_i(0, v) = \operatorname{Im} \tilde{h}_i(0, v)$. Рассуждения, приведенные в начале доказательства, дают, что $h_i = \tilde{h}_i$ и, стало быть, симметрии $\tilde{M}^{\mathbb{C}} = M^{\mathbb{C}}$ совпадают. Из этого следует, что совпадают их овеществления. Первое утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим второе утверждение теоремы. Снова, повторяя рассуждения теоремы 6.4.1 в комплексных координатах, мы приходим к тому, что угловой элемент $f^{\mathbb{C}} = (M^{\mathbb{C}})^1_n$ для произвольной симметрии $M^{\mathbb{C}}$ задает плотность закона сохранения для $J = N^{\mathbb{C}}$. Более того, любой закон сохранения J таким образом реализуется.

Теперь рассмотрим $\mathrm{d}f = \mathrm{dRe}\, f^{\mathbb{C}}$. По теореме 6.4.1 это совместный закон сохранения для N и J. Более того, любой совместный закон сохранения для этих двух операторных полей является вещественной частью закона сохранения для J. И, стало быть, представляется в указанном виде. Второе утверждение теоремы доказано.

Теперь перейдем к третьему утверждению. Рассмотрим gl-регулярный оператор Нийенхейса $L = a\mathrm{Id} + b\mathsf{J} + N + Z$ и $L^{\mathbb{C}} = z_0\mathrm{Id} + J + Z^{\mathbb{C}}$. Мы показали, что $J = N^{\mathbb{C}}$ —

сильная симметрия $Z^{\mathbb{C}}$ и, следовательно, сильная симметрия $L^{\mathbb{C}}$. Таким образом, по теореме 6.3.1 мы получаем, что N — сильная совместная симметрия для L и $\mathsf{J} = i(L)$, то есть, просто сильная симметрия L.

По теореме 6.2.1 всякая симметрия M операторного поля L одновременно и сильная симметрия N. Кроме этого, все эти симметрии — сильные симметрии для $\mathsf{J} = i(L)$. Таким образом, $M^{\mathbb{C}}$ по теореме 6.3.1 — сильные симметрии $J = N^{\mathbb{C}}$. С другой стороны, в силу формулы (6.21) любая симметрия J является симметрией $L^{\mathbb{C}}$ по построению. Таким образом, эти два класса операторных полей совпадают. В частности, все симметрии L записываются формулой (6.20).

Наконец, рассмотрим четвертое утверждение. Мы доказали, что N — сильная симметрия L, то есть любой закон сохранения $\mathrm{d}f$ для L — одновременно закон сохранения для N (теорема 6.2.2). Кроме этого, он является законом сохранения для $\mathsf{J} = i(L)$ и, стало быть, он является совместным законом сохранения N и J и записывается как дифференциал вещественной части углового элемента матрицы подходящей симметрии $M^{\mathbb{C}}$. То есть все законы сохранения L являются совместными законами сохранения для N и J.

Возьмем теперь произвольный совместный для J и N закон сохранения $\mathrm{d}f$. Так как N, J — симметрии L, то по теореме 6.2.1 они сильные симметрии друг друга. По лемме 6.3.3 $\mathrm{d}f$ закон сохранения для $Q = a\mathrm{Id} + b\mathsf{J} + N + \mathsf{J}N$. При этом Q по построению — gl-регулярный оператор Нийенхейса. Все симметрии L при этом являются симметриями Q, в частности, сам L. По теореме 6.2.1 $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для L. Таким образом, множество совместных законов сохранения для N и J совпадает с множеством законов сохранения L. $\square$

Закончим этот раздел примером.

Пример 6.4.1. В отличие от вещественного случая в комплексном N не является gl-регулярным (хотя $N^{\mathbb{C}} = J$ gl-регулярным является). В частности, пространство симметрий у такого оператора Нийенхейса больше, чем gl-регулярном случае. Действительно, рассмотрим в координатах u^1, v^1, u^2, v^2

$$J^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениям получается, что сильная симметрия M для $J^{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R_i = \begin{pmatrix} a_{i,2}(u^2, v^2) & \frac{\partial a_{i,2}}{\partial u^2} u^1 + \frac{\partial a_{i,2}}{\partial v^2} v^1 + a_{i,1}(u^2, v^2) \\ 0 & a_{i,2}(u^2, v^2) \end{pmatrix}$$

и $a_{i,j}$ — произвольные (вообще говоря, гладкие) функции двух переменных. То есть множество сильных симметрий параметризуются восемью функциями двух переменных. При этом, если потребовать голоморфность относительно J, то мы получим, что из

$$\mathsf{J}M - M\mathsf{J} = 0$$

вытекает $R_4 = R_1, R_3 = -R_2$, а из $\langle M, \mathsf{J} \rangle = 0$

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial u^2} = \frac{\partial a_{2,2}}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial a_{1,2}}{\partial v^2} = -\frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^2} = \frac{\partial a_{2,1}}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial a_{1,1}}{\partial v^2} = -\frac{\partial a_{2,1}}{\partial u^2}.$$

То есть голоморфные симметрии параметризуются четырьмя аналитическими функциями одной переменной, которые представляют собой вещественные и мнимые части двух комплексно-аналитических функций. ■

6.5 Существование регулярных симметрий и законов сохранения

Вопрос существования регулярных симметрий и законов сохранения мы будем рассматривать в аналитической и гладкой категории. Начнем с аналитической.

Теоремы 5.1.1 и 5.2.1 утверждают, что gl-регулярный оператор Нийенхейса в окрестности произвольной точки — неважно, регулярной или нет — приводится к первой и второй сопровождающей форме. Из теорем 6.2.1 и 6.2.2 мы получаем, что в аналитической категории регулярные симметрии и законы сохранения существуют в окрестности произвольной точки.

Из этого простого наблюдения можно получить полезное следствие.

Следствие 6.5.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса и U — регулярная симметрия в окрестности точки* p. *Тогда для произвольного набора функций одной переменной $v_i, i = 1, \dots, n$ формула*

$$M = v_1(U)L^{n-1} + \dots + v_{n-1}(U)L + v_n(U) \tag{6.22}$$

определяет (сильную) симметрию L. Более того, все симметрии получаются таким образом.

Доказательство. Выберем систему координат, задаваемую U. В ней L в первой сопровождающей форме.

Так как U, L — сильные симметрии L, то формула для M действительно определяет симметрию. По лемме 5.3.1 коэффициенты g_i в разложении $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}$ удовлетворяют системе (5.10).

Так как L в первой сопровождающей форме, эту систему можно переписать как $\frac{\partial g}{\partial u} L = L \frac{\partial g}{\partial u}$. Это дает систему линейных уравнений в частных производных.

$$\begin{gathered} \frac{\partial g}{\partial u^{i-1}} = L \frac{\partial g}{\partial u^i}, \quad i = 2, \dots, n, \\ \sigma_1 \frac{\partial g}{\partial u^1} + \dots + \sigma_n \frac{\partial g}{\partial u^n} = L \frac{\partial g}{\partial u^1}. \end{gathered}$$

Здесь $g = (g_1, \dots, g_n)^T$ и $\frac{\partial g}{\partial u^i}$ — это столбец матрицы Якоби набора функций g_i с номером i. Как и раньше, последнее уравнение вытекает из первых по теореме Гамильтона-Кэли. Таким образом, мы получаем, что эту линейную систему можно записать как

$$\frac{\partial g}{\partial u^{n-i}} = L^i \frac{\partial g}{\partial u^n}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Начальные условия системы — это функции $v_i(u^n) = g_i(0,\dots,0,u^n)$. Рассмотрим симметрию

$$\tilde{M} = v_1(U)L^{n-1} + \dots + v_n(U) = \tilde{g}_1 L^{n-1} + \dots + \tilde{g}_n \,\mathrm{Id}$$

и сравним ее с M. Для $u^1 = \dots = u^{n-1} = 0$ получаем $U = u^n \,\mathrm{Id}$ и $v_i(U) = v_i(u^n)\,\mathrm{Id}$. Таким образом, из равенства

$$g_1(0,\dots,0,u^n)L^{n-1} + \dots + g_n(0,\dots,0,u^n)\mathrm{Id} = v_1(u^n)L^{n-1} + \dots + v_n(u^n)\mathrm{Id}$$

в силу gl-регулярности L получаем $\tilde{g}_i(0,\dots,0,u^n) = v_i(u^n)$. Таким образом, по теореме Коши-Ковалевской $M = \tilde{M}$ и теорема доказана. □

Пример 6.5.1. Зафиксируем канонические координаты $u^1,\dots,u^n$ для дифференциально невырожденного оператора L. В окрестности начала координат выберем в качестве U оператор

$$U = L^n = u^1 L + \dots + u^n \mathrm{Id}.$$

В этом случае любая симметрия записывается как

$$\begin{aligned} M = v_1(U)L^{n-1} + \ldots + v_{n-1}(U)L + v_n(U) = \\ = v_1(L^n)L^{n-1} + \dots + v_{n-1}(L^n)L + v_n(L^n) = f(L). \end{aligned}$$

Здесь функция $f(t)$ получена из функций $v_i(t)$ по формуле

$$v_i(t^n)t^{n-1} + \dots + v_n(t^n) = f(t).$$

В качестве регулярного закона сохранения для L можно взять $\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L$. В этом случае мы имеем, что все законы сохранения записываются как

$$\mathrm{d}g = f(L^*)\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, h(L),$$

для $h(t) = \int f(t)$, то есть первообразной. ■

Перейдем теперь к гладкой категории. Имеется следующая теорема.

Теорема 6.5.1. *Пусть L — gl-регулярный гладкий оператор Нийенхейса в окрестности точки $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ общего положения. Пусть любое собственное значение λ в окрестности* p

1. *либо константа,*
2. *либо $\mathrm{d}\lambda(\mathrm{p}) \neq 0$ (для комплексных собственных значений берется комплексный дифференциал в смысле естественной комплексной структуры).*

Тогда в окрестности такой точки у оператора L есть регулярная симметрия и регулярный закон сохранения. В частности, оператор L в окрестности p *приводится как к первой, так и ко второй сопровождающим формам.*

Доказательство. Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 6.5.1. *Пусть в окрестности точки* p *введены расщепляющие координаты* $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$, *то есть в этих координатах*

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & L_2(v) \end{pmatrix},$$

как и все симметрии (теорема 6.1.1). Тогда центрированная в p *симметрия*

$$M = \begin{pmatrix} M_1(u) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & M_2(v) \end{pmatrix}$$

регулярна тогда и только тогда, когда M_1, M_2 *— регулярные симметрии, центрированные в* p.

Доказательство. Пусть дана произвольная (пока) система координат $u^1, \dots, u^n$. Рассмотрим разложение

$$M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id} \tag{6.23}$$

как систему линейных уравнений на функции $g_1, \dots, g_n$. В этой системе n^2 уравнений на n неизвестных, причем, в силу gl-регулярности L, эта система совместная. Это значит, что можно выбрать подсистему, состоящую из n уравнений, ранг которой будет n и решение которой будет решением исходной системы.

Соберем элементы матрицы M, соответствующие выбранной подсистеме, в столбец $q = (q_1, \dots, q_n)^T$. В этом случае она (подсистема) принимает вид

$$q = A_L g,$$

где столбцы матрицы A_L совпадают с $L^k \frac{\partial}{\partial u^i}$ и $g = (g_1, \dots, g_n)^T$. Причем, как уже говорилось, $\det A_L \neq 0$.

Теперь зафиксируем индекс j и продифференцируем разложение (6.23) в точке p. В силу того, что $g_i(\mathrm{p}) = 0$, получим

$$\frac{\partial M}{\partial u^j}(\mathrm{p}) = \frac{\partial g_1}{\partial u^j}(\mathrm{p}) L^{n-1}(\mathrm{p}) + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial u^j}(\mathrm{p}) \mathrm{Id}$$

или в терминах матрицы A_L

$$A_L^{-1} \frac{\partial q}{\partial u^j} = \frac{\partial g}{\partial u^j}.$$

Из этого вытекает, что ранг матрицы $\frac{\partial g}{\partial u}$ в точке p максимальный, то есть $\det(\frac{\partial g}{\partial u}(\mathrm{p})) \neq 0$, тогда и только тогда $\det(A_L^{-1} \frac{\partial q}{\partial u}) = \det^{-1} A_L \det(\frac{\partial q}{\partial u}) \neq 0$ в этой же точке. По построению это верно тогда и только тогда, когда $\det(\frac{\partial q}{\partial u}) \neq 0$.

Теперь рассмотрим расщепляющую систему координат $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$. Если M_1, M_2 — регулярные симметрии, то, применяя к ним рассуждения выше, мы получаем, что в каждой из них найдутся столбцы q^1, q^2 такие, что ранги матриц $\frac{\partial q^1}{\partial u}$ и $\frac{\partial q^2}{\partial v}$ равны k и m соответственно. Взяв в качестве q простое объединение столбцов, то есть

$$q = (q_1^1, \dots, q_k^1, q_1^2, \dots, q_m^2),$$

мы получаем, что соответствующая матрица $\frac{\partial q}{\partial(u,v)}$ (то есть производных по всем переменным) имеет вид (в силу того, что компоненты M_1 не зависят от v, а компоненты M_2 не зависят от u)

$$\frac{\partial q}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial u} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & \frac{\partial q^2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

При этом в точке p определитель этой матрицы равен произведению определителей $\frac{\partial q^1}{\partial u}$ и $\frac{\partial q^2}{\partial v}$ и, следовательно, не ноль. Это означает, что если M_1, M_2 — регулярные симметрии, то и M — регулярная симметрия.

Пусть теперь верно обратное, то есть M — регулярная симметрия. Рассмотрим выбранный столбец q. По построению, часть элементов столбца лежит в M_1, часть — в M_2. Обозначим эти количества через $\bar{k}$ и $\bar{m}$ соответственно. Без ограничения общности отсортируем их так, чтобы сначала шли элементы из M_1, а потом из M_2. Полученные подстолбцы, как и раньше, назовем q^1, q^2. Матрица $\frac{\partial q}{\partial(u,v)}$ в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial u} & 0_{k\times \bar{m}} \\ 0_{m\times \bar{k}} & \frac{\partial q^2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{m} \neq m$ и без ограничения общности $\bar{m} > m$. Из этого следует, что $\operatorname{rk} \frac{\partial q^2}{\partial v} = m < \bar{m}$. При этом $\operatorname{rk} \frac{\partial q^1}{\partial u} \leq \bar{k}$ и $\operatorname{rk} \frac{\partial q}{\partial(u,v)} \leq \bar{k} + m < n$. Таким образом, матрица вырождена и M не может быть регулярной симметрией. Стало быть, $\bar{m} = m$ и $\bar{k} = k$. Повторяя рассуждения выше, мы получаем, что ранги матриц $\frac{\partial q^1}{\partial u}, \frac{\partial q^2}{\partial u}$ должны быть максимальны и, следовательно, M_1, M_2 — регулярные симметрии. □

Лемма 6.5.2. *Пусть в координатах $u^1, \ldots, u^n$ оператор L имеет вид $L = J + U$, где J, N заданы формулой* (6.13). *Тогда симметрия M для L, записанная в виде (теорема 6.4.1)*

$$M = f_1(U)J^{n-1} + f_2(U)J^{n-2} + \cdots + f_n(U)$$

для гладких функций f_i, является регулярной, если и только если $f_n'(0) \neq 0$.

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial u^j} L^k = \frac{\partial}{\partial u^j}(U+J)^k = kJ^{n-j}L^{k-1}.$$

В этом случае прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^j} M &= \frac{\partial}{\partial u^j}\Big(f_1(U)J^{n-1} + f_2(U)J^{n-2} + \cdots + f_n(U)\Big) = \\
&= J^{n-j}\Big(f_1'(U)J^{n-1} + f_2'(U)J^{n-2} + \cdots + f_n'(U)\Big); \\
\frac{\partial}{\partial u^j} M &= \frac{\partial}{\partial u^j}\Big(g_1(U+J)^{n-1} + \cdots + g_n \mathrm{Id}\Big) = \\
&= \frac{\partial g_1}{\partial u^j}(U+J)^{n-1} + \frac{\partial g_n}{\partial u^j}\mathrm{Id} + (n-1)g_1 J^{n-j}L^{n-2} + \cdots + g_{n-1}J^{n-j}.
\end{aligned}$$

Подставляя начало координат и приравнивая коэффициенты, мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial u^n}(\mathrm{p}) = f_1'(0), \dots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial u^n}(\mathrm{p}) = f_{n-1}'(0), \frac{\partial g_n}{\partial u^n}(\mathrm{p}) = f_n'(0);\\
&\frac{\partial g_1}{\partial u^{n-1}} = f_2'(0), \dots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial u^{n-1}}(\mathrm{p}) = f_n'(0), \frac{\partial g_n}{\partial u^{n-1}}(\mathrm{p}) = 0;\\
&\dots\\
&\frac{\partial g_1}{\partial u^1}(\mathrm{p}) = f_n'(0), \dots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial u^1}(\mathrm{p}) = 0, \frac{\partial g_n}{\partial u^1}(\mathrm{p}) = 0.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что матрица $\frac{\partial g}{\partial u}$ треугольная и невырожденная тогда и только тогда, когда $f_n'(0) \neq 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.5.3. *Пусть L_0, N, U, V, J в координатах u^i, v^i имеют вид, заданный формулами* (6.19), (6.18). *Тогда всякая центрированная в начале координат симметрия M для $L = L_0 + N + U + \mathsf{J}V$ записывается в виде (теорема 6.4.2)*

$$M = \big(f_1(Z) + \mathsf{J}g_1(Z)\big)N^{n-1} + \big(f_2(Z) + \mathsf{J}g_2(Z)\big)N^{n-2} + \dots + \big(f_n(Z) + \mathsf{J}g_n(Z)\big)$$

для $Z = U + \mathsf{J}V$ и аналитических функций f_i, g_i с условием $f_i(0) = g_i(0) = 0$. Такая симметрия является регулярной, если и только если $f_n'(0), g_n'(0)$ не равны нулю одновременно.

Доказательство. По построению имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial u^i} &= N^{n-i}\Big(\big(f_1'(Z) + \mathsf{J}g_1'(Z)\big)N^{n-1} + \dots + \big(f_n'(Z) + \mathsf{J}g_n'(Z)\big)\Big),\\
\frac{\partial M}{\partial v^i} &= N^{n-i}\Big(\big(\mathsf{J}f_1'(Z) - g_1'(Z)\big)N^{n-1} + \dots + \big(\mathsf{J}f_n'(Z) - g_n'(Z)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Подставляя $u^i = v^i = 0, i = 1, \dots, n$, мы получаем

$$\frac{\partial M}{\partial u^i}(0) = N^{n-i}\Big(\big(f_1'(0)\mathrm{Id} + g_1'(0)\mathsf{J}\big)N^{n-1} + \dots + \big(f_n'(0)\mathrm{Id} + g_n'(0)\mathsf{J}\big)\Big).$$

В этом случае матрица A_L, которая фигурировала в доказательстве леммы 6.5.1, имеет размер $2n \times 2n$. Выбирая в качестве элементов этой матрицы последние два столбца M, мы получаем, что

$$A_L = \begin{pmatrix} K_n & \star & \star & \dots & \star\\ 0_{2\times 2} & K_n & \star & \dots & \star\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & K_n & \star\\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} & K_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad K_n = \begin{pmatrix} f_n'(0) & -g_n'(0)\\ g_n'(0) & f_n'(0) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\det A_L \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(f_n'(0))^2 + (g_n'(0))^2 \neq 0$. Лемма доказана. $\square$

Теперь рассмотрим вопрос о первой сопровождающей форме. Из теоремы 6.2.1 следует, что существование такой формы в окрестности точки p эквивалентно существованию регулярной симметрии в окрестности этой точки.

Теорема о расщеплении и лемма 6.5.1 сводят этот вопрос к операторам Нийенхейса:

1. Имеющим одно вещественное собственное значение и сопряженных жорданову блоку максимальной размерности;

2. Имеющим два комплексно сопряженных собственных значения и сопряженных комплексной версии жорданова блока максимальной размерности.

Рассмотрим первый случай.

Если вещественное собственное значение λ постоянно, то U — регулярная симметрия. Пусть собственное значение λ непостоянно и по условию теоремы $\mathrm{d}\lambda \neq 0$. Тогда L в окрестности точки приводится к теплицевой нормальной форме (следствие 3.3.1). То есть $L = J + U$, где J, U заданы формулами (6.13). По лемме 6.5.2 выбирая симметрию с условием $f_n'(0) \neq 0$, мы получаем регулярную симметрию.

Пусть теперь у L два комплексно сопряженных собственных значения. Введем комплексную структуру $\mathsf{J} = i(L)$. Если собственные значения L постоянны, то рассмотрим $L_0 + Z$ в обозначениях леммы (6.5.3). Это регулярная симметрия.

Если теперь $\mathrm{d}\mu \neq 0$, где μ — комплексное собственное значение $L^{\mathbb{C}}$, то по следствию 3.3.2 оператор приводится к комплексной теплицевой форме $L = L_0 + N + Z$ в обозначениях леммы (6.5.3). Выбирая симметрию M, заданную по формуле 6.20, для $(f_n'(0))^2 + (g_n'(0))^2 \neq 0$, мы получим регулярную симметрию. Таким образом, существование регулярной симметрии доказано и доказан первый пункт теоремы.

Перейдем теперь к доказательству существования второй сопровождающей формы. Из теоремы 6.2.1 следует, что существование такой формы в окрестности точки p эквивалентно существованию регулярного закона сохранения.

Лемма 6.5.4. *Пусть в окрестности точки* p *введены расщепляющие координаты* $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$ *для gl-регулярного оператора L, то есть в этих координатах*

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u) & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & L_2(v) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathrm{d}f_1(u)$ *и* $\mathrm{d}f_2(v)$ *— законы сохранения для L_1, L_2 соответственно.* $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_1(u) + \mathrm{d}f_2(v)$ *— регулярный закон сохранения для L тогда и только тогда, когда каждый из* $\mathrm{d}f_i$ *— регулярный закон сохранения.*

Доказательство. На самом деле это утверждение из линейной алгебры. Рассмотрим линейный оператор $L : V^n \to V^n$ (без ограничения общности считаем, что пространство над $\mathbb{C}$). Пространство V^n распадается в прямую сумму корневых подпространств

$$V^n = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}.$$

В каждом корневом подпространстве V_{λ_i} имеется башня инвариантных подпространств $V_{\lambda_i}^k = \mathrm{Image}(L - \lambda_i \mathrm{Id})^k, k = 0, 1, \dots$:

$$V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}^0 \supset V_{\lambda_i}^1 \supset \cdots \supset V_{\lambda_i}^{n_i - 1} \supset \{0\} = V_{\lambda_i}^{n_i},$$

где n_i — кратность корня λ_i. Пусть W — инвариантное подпространство оператора L. Обозначим ограничение оператора на него как L_1. Рассмотрим ограничение L на это подпространство и рассмотрим аналогичное корневое разложение

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} W_{\lambda_i}.$$

Для каждого пространства так же определена башня

$$W_{\lambda_i} = W^0_{\lambda_i} \supset W^1_{\lambda_i} \supset \dots \supset W^{n_i-1}_{\lambda_i} \supset \{0\} = W^{m_i}_{\lambda_i}, \tag{6.24}$$

где n_i — кратность корня λ_i для L_1. При этом, разумеется, $m_i \le n_i$ и, по определению корневых подпространств:

$$W_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}.$$

W строго меньше V тогда и только тогда, когда хотя бы для одного собственного значения λ_i выполнено строгое включение

$$W_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}. \tag{6.25}$$

Так как L — gl-регулярный, то каждому собственному значению соответствует ровно один жорданов блок. Это означает, что

$$\dim V^k_{\lambda_i} - \dim V^{k+1}_{\lambda_i} = 1.$$

Из строгости включения 6.25 следует, что W_{λ_i} не содержит векторов высоты n_i, то есть таких векторов ξ, что $(L-\lambda_i\mathrm{Id})^{n_i}\xi \ne 0$, просто в силу того, что вектора $\xi, (L-\lambda_i\mathrm{Id})\xi, \dots, (L-\lambda_i\mathrm{Id})^{n_i-1}\xi$ порождают V_{λ_i}. В частности, из этих же соображений, мы получаем, что $W_{\lambda_i} = V^k_{\lambda_i}$ для $k > 0$.

Пусть теперь задан вектор ξ и рассмотрим подпространство W, порожденное $\xi, L\xi, L^2\xi, \dots, L^{n-1}\xi$. Рассмотрим разложение $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_s$, соответствующее корневому разложению W (формула (6.24)). Легко видеть, что высота $L^r\xi_i$ не превосходит высоту ξ_i, поэтому, по построению, каждая ξ_i имеет в W_{λ_i} максимальную высоту и $\xi_i, (L-\lambda_i)\xi_i, \dots$ порождают все корневое подпространство.

Таким образом, строгое включение (6.25) выполняется тогда и только тогда, когда проекция ξ на V_{λ_i} не является вектором максимальной высоты. То есть ξ является циклическим тогда и только тогда, когда циклическим является его проекция на V_{λ_i} или на любую прямую сумму таких подпространств.

Применяя рассуждения выше для L^* и ковекторов, получаем утверждение леммы. $\square$

Таким образом, теорема о расщеплении и лемма 6.5.4 сводят вопрос существования регулярного закона сохранения к вопросу существования такого закона в случае либо одного вещественного собственного значения, либо пары сопряжённых собственных значений.

Если собственное значение вещественно и постоянно, то L приводится к жордановой нормальной форме. Подходящий закон сохранения в этом случае — это $\mathrm{d}u^1$. Если собственное значение вещественное, непостоянно и его дифференциал не ноль, то L приводится к теплицевой форме, то есть $L = J + U$, где J, U заданы формулами (6.13). Регулярный закон сохранения в этом случае снова $\mathrm{d}u^1$.

Пусть теперь у L пара комплексно сопряжённых собственных значений, и они постоянны. Заменяя L на $bL - a\mathrm{Id}$ при $b \neq 0$ можно считать, что собственные значения L — чисто мнимые единицы. Это означает, что в подходящей системе координат $u^1, v^1, u^2, v^2, \dots$ операторы $L, \mathsf{J} = i(L)$ принимают вид (теорема 3.1.2)

$$i(L) = \mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & \mathsf{J}_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & \dots & 0_{2\times 2} & \mathsf{J}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathsf{J}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \mathsf{J} + N.$$

Мы также получаем, что $f(L) = L - i(L) = N$. В свою очередь для $i(L)$ и $f(L)$ существуют вещественные постоянные $a_i, b_i, i = 0, \dots, 2n$ (интерполяционная формула Лагранжа-Сильвестра, гл. 5 §2 в [131]) такие, что

$$\begin{aligned} i(L) &= a_0 L^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} L + a_{2n}\mathrm{Id}, \\ f(L) &= b_0 L^{2n-1} + \dots + b_{2n-1} L + b_{2n}\mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $\mathrm{d}u^1$. Имеем

$$\mathrm{d}u^k = f^k(L^*)\mathrm{d}u^1, \quad \mathrm{d}v^k = f^k(L^*)\mathsf{J}^*\mathrm{d}u^1, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

При этом в силу интерполяционных формул Лагранжа-Сильвестра выполнено, что $f^k(L^*)\mathrm{d}u^1, f^k(L^*)\mathsf{J}^*\mathrm{d}u^1$ представляет собой линейные комбинации

$$\mathrm{d}u^1, L^*\mathrm{d}u^1, \dots, (L^*)^{2n-1}\mathrm{d}u^1 \tag{6.26}$$

с постоянными коэффициентами. Так как мы выразили все базисные 1-формы, то есть ранг полученной системы ковекторов $2n$, то ранг системы ковекторов (6.26) совпадает. То есть $\mathrm{d}u^1$ — циклический ковектор для L^*.

Пусть теперь $\mathrm{d}\mu \neq 0$ в смысле комплексной структуры. В этом случае в окрестности начала координат оператор L приводится к виду $L = L_0 + N + Z$, где $Z = U + \mathsf{J}V$ для U, V, J, L_0 заданных в подходящей системе координат формулами (6.19), (6.18). Легко видеть, что в нуле пространство, порожденное дифференциалами $\mathrm{d}u^1, \dots, (L^*)^{2n-1}\mathrm{d}u^1$ совпадает с пространством, которое мы рассматривали выше и, в частности, имеет максимальную размерность.

Осталось убедиться, что $\mathrm{d}u^1$ — закон сохранения для Z. Легко видеть, что

$$L^*\mathrm{d}u^1 = \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{Re}\Big(z^n z^1 + z^{n-1}z^2 + \dots + z^2 z^{n-1} + z^1 z^n\Big),$$

где $z^i = u^i + \mathrm{i}\, v^i$. Таким образом, мы доказали существование регулярного закона сохранения, и теорема доказана. $\square$

6.6 Специальные слабонелинейные системы. Интегрирование в квадратурах

Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса. Построим операторы A_i по формуле (здесь определитель умножается на обратную матрицу, то есть формула слева — это просто формула присоединенной матрицы для $\mathrm{Id} - \lambda L$)

$$\det(\mathrm{Id} - \lambda L)\Big(\mathrm{Id} - \lambda L\Big)^{-1} = \mathrm{Id} + \lambda A_1 + \dots + \lambda^{n-1} A_{n-1}.$$

Как мы помним, эти операторы возникали в разделе 5.2 в доказательстве существования второй сопровождающей формы у gl-регулярного оператора Нийенхейса.

Пример 6.6.1. Пусть L задан в виде

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_1 = \begin{pmatrix} u^1 - \sum_{i=1}^n u^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 - \sum_{i=1}^n u^i & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n - \sum_{i=1}^n u^i \end{pmatrix}.$$

В частности, собственное значение оператора A_1 с номером k не зависит от u^k. Такие системы называются слабо-нелинейными. Легко показать, что аналогичное свойство выполнено и для остальных A_s. ■

Следующая теорема описывает законы сохранения и симметрии для операторов A_i без каких-либо дополнительных предположений.

Теорема 6.6.1. *Рассмотрим в окрестности точки* p *gl-регулярный оператор Нийенхейса. Если мы рассматриваем аналитическую категорию, то никаких дополнительных условий на точку не предполагается. Если гладкую - мы считаем, что* p *— точка общего положения. Тогда для операторов A_i в окрестности точки* p *верно следующее:*

1. *Для произвольной иерархии законов сохранения $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_n$ оператора L, операторное поле*
$$B = f_1 A_{n-1} + \dots + f_n A_0$$
симметрия для всех A_i. Кроме этого, любая общая симметрия в окрестности точки p *получается выбором подходящей иерархии;*

2. *Для любой симметрии оператора $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \,\mathrm{Id}$ дифференциал $\mathrm{d}g_1$ первого коэффициента разложения M по стандартному базису — общий закон сохранения для всех A_i. В частности,*
$$A_i \mathrm{d}g_1 = \mathrm{d}g_{i+1}.$$
Кроме того, любой общий закон сохранения может быть получен выбором подходящей симметрии M.

Доказательство. Операторы A_i образуют базис в централизаторе L, то есть любой оператор, коммутирующий с L, может быть записан в виде

$$B = f_1 A_{n-1} + \cdots + f_n A_0.$$

Прямыми вычислениями, используя свойства операции $\langle L, M\rangle$, получаем

$$\begin{aligned}
\langle A_1, B\rangle &= \sum_{i=1}^{n} f_i \langle A_{n-i}, A_1\rangle + \sum_{j=1}^{n} \Big(A_1^* \mathrm{d}f_j \otimes A_{n-j} - \mathrm{d}f_j \otimes A_1 A_{n-j}\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \langle A_{n-i}, A_1\rangle + \sum_{j=1}^{n} \Big((A_1^* \mathrm{d}f_j + \sigma_1 \mathrm{d}f_j) \otimes A_{n-j} - \mathrm{d}f_j \otimes L A_{n-j}\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \langle A_{n-i}, A_1\rangle + \sum_{j=1}^{n-1} (L^* \mathrm{d}f_j - \mathrm{d}f_{j+1}) \otimes A_{n-j} + \Big(L^* \mathrm{d}f_n - \sigma_1 \mathrm{d}f_n - \cdots - \sigma_n \mathrm{d}f_1\Big) \otimes A_0.
\end{aligned}$$

Это дает условие

$$\langle A_1, B\rangle(\xi,\xi) = \Big\langle L^* \mathrm{d}f_n - \sigma_1 \mathrm{d}f_n - \cdots - \sigma_n \mathrm{d}f_1, \xi\Big\rangle A_0 \xi + \sum_{j=1}^{n-1} \Big\langle L^* \mathrm{d}f_j - \mathrm{d}f_{j+1}, \xi\Big\rangle A_{n-j}\xi.$$

Треугольные скобки в правой части означают спаривание векторов и ковекторов. Здесь мы так же пользовались тем, что A_i — симметрии друг друга.

Взяв ξ циклическим, мы получаем, что $A_i\xi$ линейно независимы (лемма 5.2.1). То есть для почти всех векторов (и, следовательно, всех по непрерывности)

$$\begin{aligned}
&L^* \mathrm{d}f_j = \mathrm{d}f_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\
&L^* \mathrm{d}f_n = \sigma_1 \mathrm{d}f_n + \cdots + \sigma_n \mathrm{d}f_1.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Это в точности означает, что $\mathrm{d}f_i$ — иерархия законов сохранения L. То есть мы показали, что условие в первом утверждении теоремы является необходимым. Покажем теперь достаточность. Введем $T = \mathrm{d}f_1 \otimes A_{n-1} + \cdots + \mathrm{d}f_n \otimes A_0$. Условие (6.27) в этом случае записывается

$$\begin{aligned}
T(L\xi, \xi) &= \mathrm{d}f_1(L\xi) A_{n-1}\xi + \cdots + \mathrm{d}f_n(L\xi) A_0 \xi = L^* \mathrm{d}f_1(\xi) A_{n-1}\xi + \cdots + L^* \mathrm{d}f_n(\xi) A_0 \xi \\
&= \mathrm{d}f_2(\xi) A_{n-1}\xi + \cdots + \mathrm{d}f_n(\xi) A_1 \xi + \big(\sigma_1 \mathrm{d}f_n(\xi) + \cdots + \sigma_n \mathrm{d}f_1(\xi)\big) A_0 \xi = \\
&= \mathrm{d}f_n(\xi)\big(A_1\xi + \sigma_1 A_0 \xi\big) + \cdots + \mathrm{d}f_2(\xi)\big(A_{n-1}\xi + \sigma_{n-1} A_0\xi\big) + \sigma^n \mathrm{d}f_1(\xi) A_0 \xi = \\
&= \mathrm{d}f_n(\xi) L\xi + \cdots + \mathrm{d}f_2(\xi) L A_{n-2}\xi + \mathrm{d}f_1(\xi) L A_{n-1}\xi = T(\xi, L\xi).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали рекуррентные формулы (формулы 5.7) для A_i, в частности $LA_{n-1} - \sigma_n \operatorname{Id} = 0$. Как следствие $T(L^k\xi, \xi) = T(\xi, L^k\xi)$ для всех k и, значит, $T(A_k\xi, \xi) = T(\xi, A_k\xi)$ для $k = 2, \ldots, n-1$. Прямыми вычислениями получаем

$$\langle A_k, B\rangle(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f_i \langle A_k, A_i\rangle(\xi,\xi) + T(A_k\xi, \xi) - T(\xi, A_k\xi) = 0.$$

То есть первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем ко второму. Пусть $\mathrm{d}g_1$ — общий закон сохранения для A_k, $k = 1, \ldots, k-1$. По лемме Пуанкаре локально существуют такие $\mathrm{d}g_2, \ldots, \mathrm{d}g_n$, что

$$A_k^* \mathrm{d}g_1 = \mathrm{d}g_{k+1}.$$

Это может быть переписано как

$$\mathrm{d}g_{k+1} = A_k^*\mathrm{d}g_1 = (L^*A_{k-1}^* - \sigma_k\mathrm{Id})\mathrm{d}g_1 = L^*\mathrm{d}g_k - \sigma_k\mathrm{d}g_1, \quad k = 0, \ldots, n-2,$$
$$0 = A_n\mathrm{d}g_1 = (L^*A_{n-1}^* - \sigma_n\mathrm{Id})\mathrm{d}g_1 = L^*\mathrm{d}g_n - \sigma_n\mathrm{d}g_1.$$

Легко видеть, что это в точности условия (5.10). Стало быть $M = g_1L^{n-1} + \cdots + g_n\mathrm{Id}$ — симметрия. Более того, легко видеть, что из этих равенств следует и обратное — то есть функция g_1 в разложении любой симметрии M является общим законом сохранения для A_i. Теорема доказана. $\square$

Следуя Арнольду [124], мы будем говорить, что система (обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных) интегрируема в квадратурах, если достаточно большое семейство её решений можно найти, решая алгебраические системы и интегрируя точные 1-формы. Значение словосочетания "достаточно большое"определяется в зависимости от системы.

Рассмотрим теперь переопределённую квазилинейную систему

$$u_{t_i} = A_iu_x, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{6.28}$$

Следующая теорема, среди прочего, утверждает, что переопределенная система (6.28) квазилинейных уравнений интегрируема в квадратурах.

Теорема 6.6.2. *Пусть в окрестности точки* p *задан gl-регулярный оператор Нийенхейса. Выберем n функций одной переменной $v_i(x)$ и рассмотрим кривую $\gamma(x) = \{v_1(x), \ldots, v_n(x)\}$. Предполагаем, что вектор скорости этой кривой γ_x — циклический для оператора L. Тогда, во-первых, по следующему алгоритму можно построить единственную симметрию M оператора L:*

1. *Выбираем произвольную регулярную иерархию $\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_n$ законов сохранения L;*
2. *Строим на кривой γ векторное поле $\xi(x)$, удовлетворяющее условию*

$$\big\langle \mathrm{d}f_i\big(\gamma(x)\big), \xi(x)\big\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & \text{если } i = n. \end{cases} \tag{6.29}$$

   Оно единственно;

3. *Строим на кривой операторное поле $\widehat{M}(x)$, которое коммутирую с $L(\gamma(x))$ и удовлетворяет соотношению*

$$\widehat{M}(\gamma(x))\gamma'(x) = \xi(x); \tag{6.30}$$

4. *Находим такую симметрию $M \in \operatorname{Sym} L$, что ее ограничение на γ совпадает с $\widehat{M}(x)$;*
5. *Находим функции h_i, интегрируя замкнутые 1-формы $M^*\mathrm{d}f_i$.*

Во-вторых, решая систему алгебраических уравнений

$$h_n = x, \quad h_i = t_{n-i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

относительно и мы получаем функции $u^i(t, x)$, которые являются решениями системы 6.28 с начальными условиями $u^i(0, x) = v_i(x), i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Нам потребуется лемма.

Лемма 6.6.1. *Пусть в координатах $u^1, \dots, u^n$ оператор L имеет вторую сопровождающую форму. Обозначим соответствующие базисные векторные поля через ξ_i. Тогда*

$$A_i \xi_n = \xi_{n-i}.$$

Доказательство. Эта формула верна для A_0. Рассмотрим теперь

$$A_{i+1}\xi_n = LA_i\xi_n - \sigma_i\xi_n = L\xi_{n-i+1} - \sigma_i\xi_n = \xi_{n-i}.$$

Лемма доказана. □

Выберем систему координат $u^i = f_i$, где $\mathrm{d}f_i$ — иерархия законов сохранения из условия. Обозначим базисные векторные поля через $\xi_i, i = 1, \dots, n$. В системе координат u^i операторное поле L имеет вторую сопровождающую форму. Векторное поле ξ на кривой $\gamma(x)$ — это в точности ξ_n.

Ограничение L на $\gamma(x)$ все еще gl-регулярный оператор. В этом случае $\widehat{M}(x) = s_1(x)L^{n-1}(x) + \dots + s_n(x)\mathrm{Id}$. Определим на кривой $\gamma(x)$ векторные поля $\eta_i(x)$ по формуле $\eta_i(x) = L^{i-1}\gamma'(x)$. По условию теоремы в каждой точке кривой η_i образуют базис. В свою очередь условие на $\widehat{M}$ принимает вид

$$s_1(x)\eta_n + \dots + s_n(x)\eta_1 = \xi_n.$$

Легко видеть, что эта система на $s_i(x)$ однозначно разрешима, значит, $\widehat{M}$ существует и единственный. Кроме этого $\widehat{M}\mathrm{d}f_i$ — линейно независимы в p, то есть и формы $\mathrm{d}h_i = M^*\mathrm{d}f_i$ линейно независимы в целой окрестности и, разумеется, замкнуты.

Взяв $h_i = u^i$ с условием $h_i(\mathrm{p}) = 0$ за координаты (базисные векторные поля снова обозначаем через ξ_i), получаем, что в этой системе координат уравнения приобретают вид

$$u^i = t_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{и} \quad u^n = x.$$

По построению $u_{t_i} = \xi_{n-i}$, $u_x = \xi_n$. В силу леммы 6.6.1, мы получаем $u_{t_{i+1}} = A_i u_x$. Таким образом, мы построили решение. При этом

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_i\big(\gamma(x)\big) = \big\langle \mathrm{d}h_i, \gamma'(x)\big\rangle = \big\langle M^*\mathrm{d}f_i, \gamma'(x)\big\rangle = \big\langle \mathrm{d}f_i, M\gamma'(x)\big\rangle = \big\langle \mathrm{d}f_i, \xi(x)\big\rangle = \delta_{in}.$$

Это означает, что кривая $\gamma(x)$ в построенной системе координат имеет вектор скорости $(0, \dots, 0, 1)^T = \xi_n = u_x$. Так как кривая проходит через начало координат, она однозначно восстанавливается, то есть имеет вид $u^n = x$. То есть мы построили решение с нужным начальным условием. □

В конце приведем пример интегрирования такой системы в размерности четыре.

Пример 6.6.2. Рассмотрим $\mathbb{R}^4$ с координатами u^1, u^2, u^3, u^4. В окрестности начала координат рассмотрим оператор Нийенхейса L в виде

$$L = \begin{pmatrix} u^2 & u^1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^4 + 1 & u^3 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & u^4 + 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что достаточно малой окрестности начала координат этот оператор gl-регулярный. Определим U как

$$U = \begin{pmatrix} u^2 & u^1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^4 & u^3 \\ 0 & 0 & 0 & u^4 \end{pmatrix}.$$

Произвольная симметрия оператора L в окрестности начала координат имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} F_1(u^2) & F_1'(u^2)u^1 + F_3(u^2) & 0 & 0 \\ 0 & F_1(u^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_2(u^4) & F_2'(u^4)u^3 + F_4(u^4) \\ 0 & 0 & 0 & F^2(u^4) \end{pmatrix},$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — произвольные функции одной переменной. Легко проверяется, что $\mathrm{d}f = \mathrm{d}u^1 + \mathrm{d}u^3$ — регулярный закон сохранения. В этом случае возникает иерархия законов сохранения, которые представляют собой дифференциалы следующих функций (функции записываются компактнее их дифференциалов)

$$\begin{aligned} f_1 &= u^1 + u^3, \\ f_2 &= u^2u^1 + u^4u^3, \\ f_3 &= (u^2)^2u^1 + (u^4)^2u^3, \\ f_4 &= (u^2)^3u^1 + (u^4)^3u^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь кривую $\gamma(x) = (\gamma_1(x), ..., \gamma_4(x))$ с условием, что для всех x вектор $\gamma' = (\gamma_1', ..., \gamma_4')$ — цикличный. Для оператора L это условие означает, что $\gamma_2' \neq 0$ и $\gamma_4' \neq 0$. Векторное поле $\xi(x)$ из формулы (6.29) на кривой задается как

$$\xi = \left(\frac{2}{(\gamma_4 - \gamma_2)^3}, \frac{1}{\gamma_1 (\gamma_4 - \gamma_2)^2}, \frac{2}{(\gamma_2 - \gamma_4)^3}, \frac{1}{\gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_4)^2} \right),$$

В свою очередь условие $\widehat{M}(\gamma(x))\gamma'(x) = \xi(x)$ принимает вид

$$\begin{array}{ll} F_1(\gamma_2)\gamma_2' = \frac{1}{\gamma_1(\gamma_2-\gamma_4)^2}, & F_1(\gamma_2)\gamma_1' + (F_1'(\gamma_2)\gamma_1 + F_3(\gamma_2))\gamma_2' = \frac{2}{(\gamma_4-\gamma_2)^3}, \\ F_2(\gamma_4)\gamma_4' = \frac{1}{\gamma_3(\gamma_4-\gamma_2)^2}, & F_2(\gamma_4)\gamma_3' + (F_2'(\gamma_4)\gamma_3 + F_4(\gamma_4))\gamma_4' = \frac{2}{(\gamma_2-\gamma_4)^3}. \end{array} \tag{6.31}$$

Первое и третье выражение (6.31) дают формулы для $F_1(u^2)$ и $F_2(u^4)$:

$$F_1\left(u^2\right) = \frac{1}{\gamma_1(\gamma_2^{-1}(u^2))\left(u^2-\gamma_4(\gamma_2^{-1}(u^2))\right)^2\gamma_2'(\gamma_2^{-1}(u^2))}, \tag{6.32}$$

$$F_2\left(u^4\right) = \frac{1}{\gamma_3(\gamma_4^{-1}(u^4))\left(u^4-\gamma_2(\gamma_4^{-1}(u^4))\right)^2\gamma_4'(\gamma_4^{-1}(u^4))}, \tag{6.33}$$

где γ_2^{-1} и γ_4^{-1} обозначают функции, обратные к γ_2 и γ_4 соответственно. Они существует, как уже говорилось, в силу цикличности вектора скорости.

Второе и четвертое уравнение (6.31) после подстановки γ_2^{-1} и γ_4^{-1} принимает форму

$$\begin{aligned} F_1\left(u^2\right)\gamma_1'(\gamma_2^{-1}(u^2)) + \left(F_1'\left(u^2\right)\gamma_1(\gamma_2^{-1}(u^2)) + F_3\left(u^2\right)\right)\gamma_2'(\gamma_2^{-1}(u^2)) &= \frac{2}{\left(\gamma_4(\gamma_2^{-1}(u^2))-u^2\right)^3} \\ F_2\left(u^4\right)\gamma_3'(\gamma_4^{-1}(u^4)) + \left(F_2'\left(u^4\right)\gamma_3(\gamma_4^{-1}(u^4)) + F_4\left(u^4\right)\right)\gamma_4'(\gamma_4^{-1}(u^4)) &= \frac{2}{\left(\gamma_2(\gamma_4^{-1}(u^4))-u^4\right)^3}. \end{aligned}$$

Вместе с (6.32) и (6.33) это дает нам выражения для $F_3(u^2)$ $F_4(u^4)$. Подставляя полученные F_1, F_2, F_3, F_4 в формулу для симметрии M, мы получаем набор замкнутых форм $\mathrm{d}g_i$; их интегрирование дает g_i (константу интегрирования мы выбираем так, что $g_1(\gamma(0)) = g_2(\gamma(0)) = g_3(\gamma(0)) = g_4(\gamma(0)) = 0$). Наконец, чтобы получить решение специальной слабо нелинейной системы, построенное по оператору L для начального условия $u(x, 0, 0, 0) = \gamma(x)$ нам надо решить систему

$$\begin{aligned} g_1(u) &= t_3, \\ g_2(u) &= t_2, \\ g_3(u) &= t_1, \\ g_4(u) &= x \end{aligned}$$

для $u = (u^1, u^2, u^3, u^4)$. ■

Глава 7

Обобщенное разделение переменных

7.1 Поднятие операторных полей на кокасательное расслоение

Обозначим через θ — форму Лиувилля на кокасательном расслоении $T^*\mathrm{M}^n$ к многообразию M^n. В канонических координатах $p_1, \dots, p_n, u^1, \dots, u^n$ она записывается как $\theta = p_q \mathrm{d}u^q$. Для произвольного операторного поля L на многообразии M^n можно определить "деформированную"каноническую 1-форму θ_L как

$$\theta_L = p_q L^q_s \mathrm{d}u^s.$$

Здесь очевидно, что $\theta_{\mathrm{Id}} = \theta$. Определим пару точных 2-форм как $\Omega = \mathrm{d}\theta$ и $\Omega_L = \theta_L$. В канонических координатах p, u они записываются как

$$\Omega = \mathrm{d}p_q \wedge \mathrm{d}u^q, \quad \Omega_L = p_q \frac{\partial L^q_s}{\partial u^r} \mathrm{d}u^r \wedge \mathrm{d}u^s + L^q_s \mathrm{d}p_q \wedge \mathrm{d}u^s.$$

Поднятием операторного поля L (полным поднятием или поднятием Яно-Патерсона) на кокасательное расслоение мы будем называть операторное поле $\widehat{L}$, которое однозначно определяется соотношением

$$\Omega(\cdot, \widehat{L}\cdot) = \Omega_L(\cdot, \cdot). \tag{7.1}$$

В канонических координатах (p, u) операторное поле принимает вид

$$\widehat{L} = \Omega^{-1}\Omega_L = \begin{pmatrix} L^T & R \\ 0_{n\times n} & L \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R^i_j = \Big(\frac{\partial L^q_i}{\partial u^j} - \frac{\partial L^q_j}{\partial u^i}\Big) p_q.$$

Из формул поднятия вытекает, что, если $\det L \neq 0$, то полученная 2-форма невырожденная (и замкнута просто в силу точности) и определяет скобку Пуассона с тензором Пуассона $\pi = \Omega_L^{-1}$.

Данное поднятие обладает рядом замечательных свойств, которые мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7.1.1. *Пусть на многообразии* M^n *задана пара операторных полей* L, M. *Тогда:*

1. *Если скобка Фролихера-Нийенхейса L и M равна нулю, то равна нулю скобка Фролихера-Нийенхейса поднятий $\widehat{L}$ и $\widehat{M}$;*

2. *Если M — симметрия L, то $\widehat{M}$ – симметрия $\widehat{L}$;*

3. *Если M — сильная симметрия L, то $\widehat{M}$ — сильная симметрия $\widehat{L}$ и, к тому же, $\widehat{LM} = \widehat{L}\widehat{M}$.*

Доказательство. Зафиксируем канонические координаты $p_1, \ldots, p_n, u^1, \ldots, u^n$ на кокасательном расслоении. Введем два необходимых нам понятия из [116]: вертикального поднятия операторного поля и полного поднятия векторного поля.

Начнем со второго. Для любого векторного поля на M^n определена функция $h_\xi = p_q \xi^q$. Полным поднятием $\widehat{\xi}$ векторного поля ξ называется

$$\widehat{\xi} = \Omega^{-1} \mathrm{d}h_\xi,$$

где дифференциал $\mathrm{d}h_\xi$ понимается как дифференциал в кокасательном расслоении $T^*\mathrm{M}^n$. В фиксированных координатах компоненты векторного поля имеют вид (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

$$\widehat{\xi} = -p_q \frac{\partial \xi^q}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \xi^s \frac{\partial}{\partial u^s}.$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 7.1.1. *Полное поднятие векторного поля на кокасательное расслоение обладает следующими свойствами:*

1. *Поднятия векторных полей порождают все $TT^*\mathrm{M}^n$ почти всюду на $T^*\mathrm{M}^n$;*

2. *Для произвольных векторных полей ξ, η на M^n для их полных поднятий выполнено*

$$[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] = \widehat{[\xi, \eta]}.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из того, что

$$\widehat{\partial_{u^i}} = \partial_{u^i} \quad \text{и} \quad \widehat{u^i \partial_{u^i}} = -p_i \partial_{p_i} + u^i \partial_{u^i}.$$

Легко видеть, что эти поля порождают касательное пространство к кокасательному расслоению, если $p_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$. Особое множество — это объединение n гиперповерхностей, поэтому утверждение верно.

Рассмотрим пару векторных полей ξ, η и вычислим скобку Пуассона функций h_ξ, h_η. Имеем

$$\{h_\xi, h_\eta\} = p_q \frac{\partial \xi^q}{\partial u^s} \eta^s - p_q \frac{\partial \eta^q}{\partial u^s} \xi^s = h_{[\eta,\xi]} = -h_{[\xi,\eta]}.$$

С другой стороны, в силу тождества Якоби имеем

$$[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] = -\widehat{\{h_\xi, h_\eta\}} = \widehat{[\xi, \eta]}.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Вертикальным поднятием $\widetilde{L}$ операторного поля L на кокасательное расслоение $T^*\mathrm{M}^n$ называется векторное поле, определенное как $\Omega^{-1}\theta_L$. В локальных координатах это дает нам формулу

$$\widetilde{L}^i = (\Omega^{-1})^{iq}(\theta_L)_q.$$

Выполнена следующая лемма.

Лемма 7.1.2. *Для вертикального поднятия операторного поля $\widetilde{L}$ выполнены следующие свойства:*

1. *В канонических координатах $p_1, \dots, p_n, u^1, \dots, u^n$ компоненты векторного поля имеют вид*
$$\widetilde{L} = p_q L_1^q \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + p_q L_n^q \frac{\partial}{\partial p_n}.$$
Здесь L_j^i — компоненты матрицы оператора L в координатах $u^1, \dots, u^n$;

2. *$\widetilde{L} = 0$ тогда и только тогда, когда $L = 0$;*

3. *Для произвольных операторных полей L, M выполнена формула*
$$\widehat{L}\widetilde{M} = \widetilde{ML}; \tag{7.2}$$

4. *Для произвольного операторного поля L и векторного поля ξ выполнена формула*
$$[\widehat{\xi}, \widetilde{L}] = \widetilde{\mathcal{L}_\xi L}; \tag{7.3}$$

5. *Для произвольного операторного поля L и векторного поля ξ выполнена формула*
$$\widehat{L}\widehat{\xi} = \widehat{L\xi} + \widetilde{\mathcal{L}_\xi L}; \tag{7.4}$$

6. *Для произвольных операторных полей L, M выполнена формула*
$$[\widetilde{L}, \widetilde{M}] = \widetilde{LM - ML}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Первое утверждение представляет собой координатную запись в канонической системе координат. Второе немедленно вытекает из первого. Перейдем к доказательству остальных утверждений. Для начала заметим, что из формул для $\widehat{L}, \theta, \theta_M$ немедленно вытекает

$$\widehat{L}^*\theta = \theta_L \quad \text{и} \quad \widehat{L}^*\theta_M = \theta_{LM}.$$

Из этого получаем

$$\widehat{L}\widetilde{M} = \widehat{L}\Omega^{-1}\theta_M = \Omega^{-1}\widehat{L}\theta_M = \Omega^{-1}\theta_{LM} = \widetilde{LM}.$$

Здесь мы пользовались самосопряженностью $\widehat{L}$ относительно Ω. Формула (7.2) доказана.

У нас есть формулы для $\widehat{\xi}$ и $\widetilde{L}$. Подставим их в правую часть формулы (7.3). Имеем

$$[-p_q \frac{\partial \xi^q}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, p_s L_j^s \frac{\partial}{\partial p_j}] = p_q\Big(\frac{\partial L_j^p}{\partial u^s}\xi^s - \frac{\partial \xi^q}{\partial u^s}L_j^s + L_s^q \frac{\partial \xi^s}{\partial u^j}\Big)\frac{\partial}{\partial p_j} = p_q(\mathcal{L}_\xi L)_j^q \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Легко видеть, что в правой части стоит в точности $\widetilde{\mathcal{L}_\xi}$. Таким образом, формула (7.3) доказана.

Для доказательства формулы (7.4) выполним следующие вычисления

$$
\begin{aligned}
\widehat{L}\widehat{\xi} = \widehat{L}\Big(-p_q\frac{\partial\xi^q}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\Big) = -L_i^s\frac{\partial\xi^q}{\partial u^s}p_q\frac{\partial}{\partial p_i} + p_q\frac{\partial L_i^q}{\partial u^s}\xi^s\frac{\partial}{\partial p_i} - p_q\frac{\partial L_s^q}{\partial u^i}\xi^s\frac{\partial}{\partial p_i} + L_s^i\xi^s\frac{\partial}{\partial u^i} = \\
= \underbrace{p_q\Big(\frac{\partial L_i^q}{\partial u^s}\xi^s + L_s^q\frac{\partial\xi^s}{\partial u^i} - L_i^s\frac{\partial\xi^q}{\partial u^s}p_q\Big)\frac{\partial}{\partial p_i]}}_{\text{это } = \widetilde{\mathcal{L}_\xi L}} + \underbrace{\Big(-p_q\frac{\partial L_s^q}{\partial u^i}\xi^s - p_q L_s^q\frac{\partial\xi^s}{\partial u^i}\Big)\frac{\partial}{\partial p_i} + L_s^i\xi^s\frac{\partial}{\partial u^i}}_{\text{это } -p_q\frac{\partial L_s^q\xi^s}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + L_s^i\xi^s\frac{\partial}{\partial u^i} = \widehat{L\xi}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, формула (7.4) доказана.

Наконец, рассмотрим

$$
[\widetilde{L}, \widetilde{M}] = [p_s L_j^s\frac{\partial}{\partial p_j}, p_q M_i^q\frac{\partial}{\partial p_i}] = p_s(L_q^s M_i^q - M_q^s L_i^q)\frac{\partial}{\partial p_i} = \widetilde{ML - LM}.
$$

То есть формула (7.5) так же доказана и доказательство леммы завершено. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Первое утверждение доказано в [116]. Теперь заметим, что $\langle L, M\rangle(\xi,\cdot)$ — это операторное поле, и его можно записать как

$$
\begin{aligned}
\langle L, M\rangle(\xi,\cdot) = \mathcal{L}_{L\xi}M - L\mathcal{L}_\xi M, \\
\langle L, M\rangle(\cdot,\xi) = M\mathcal{L}_\xi L - \mathcal{L}_{M\xi}L.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Пусть теперь M — симметрия L. Напомним, что это означает следующее:

1. $LM - ML = 0$;
2. Для любого ξ

$$
\langle L, M\rangle(\xi,\xi) = [L\xi, M\xi] - L[\xi, M\xi] - M[L\xi,\xi] = 0.
$$

   Или, что эквивалентно, для любых ξ, η

$$
\langle L, M\rangle(\xi,\eta) + \langle L, M\rangle(\eta,\xi) = 0.
$$

Покажем для начала, что из этих условий вытекает коммутативность $\widehat{L}$ и $\widehat{M}$. Пусть ξ — произвольное векторное поле на M^n. Тогда

$$
\begin{aligned}
(\widehat{L}\widehat{M} - \widehat{M}\widehat{L})\widehat{\xi} = \widehat{L}\widehat{M\xi} - \widehat{M}\widehat{L\xi} + \widehat{L}\widetilde{\mathcal{L}_\xi M} - \widehat{M}\widetilde{\mathcal{L}_\xi L} = \\
= \widehat{LM\xi} - \widehat{ML\xi} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}L} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}M} + \widetilde{\mathcal{L}_\xi ML} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi LM} = \\
= \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}L} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}M} + \widetilde{L\mathcal{L}_\xi M} - \widetilde{M\mathcal{L}_\xi L}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы пользовались леммой 7.1.1 и формулами (7.2), (7.4) из леммы 7.1.2. Заметим теперь, что в силу (7.6) правая часть — это вертикальное поднятие операторного поля

$$
-\langle L, M\rangle(\xi,\cdot) - \langle L, M\rangle(\cdot,\xi).
$$

Действие этого поля на произвольном векторе η

$$
-\langle L, M\rangle(\xi,\eta) - \langle L, M\rangle(\eta,\xi) = 0.
$$

Оно равно нулю, так как M и L — симметрии друг друга. В силу второго утверждения леммы 7.1.2 мы получаем, что вертикальное поднятие равно. Так как $\widehat{\xi}$ почти всюду порождают касательное пространство, то и $\widehat{L}, \widehat{M}$ коммутируют почти всюду, а, значит, по непрерывности всюду.

Покажем теперь, что симметрическая по нижним частям часть тензора $\langle\widehat{L}, \widehat{M}\rangle$ обращается в ноль, то есть мы имеем дело с симметриями. Снова для произвольного векторного поля ξ рассмотрим

$$\widehat{L}[\widehat{\xi}, \widehat{M}\widehat{\xi}] + \widehat{M}[\widehat{L}\widehat{\xi}, \widehat{\xi}] - [\widehat{L}\widehat{\xi}, \widehat{M}\widehat{\xi}] = \widehat{L}[\widehat{\xi}, \widehat{M\xi}] + \widehat{L}[\widehat{\xi}, \widetilde{\mathcal{L}_\xi M}] + \widehat{M}[\widehat{L\xi}, \widehat{\xi}] + \widehat{M}[\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widehat{\xi}] - [\widehat{L\xi}, \widehat{M\xi}] -$$
$$-[\widehat{L\xi}, \widetilde{\mathcal{L}_\xi M}] - [\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widehat{M\xi}] - [\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widetilde{\mathcal{L}_\xi M}] = \widehat{L}\widehat{[\xi, M\xi]} + \widehat{M}\widehat{[L\xi, \xi]} - \widehat{[L\xi, M\xi]} + \widehat{L}\widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi M} -$$
$$-\widehat{M}\widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi L} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}\mathcal{L}_\xi M} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}\mathcal{L}_\xi L} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi L\mathcal{L}_\xi M} + \widetilde{\mathcal{L}_\xi M\mathcal{L}_\xi L} = \widetilde{\mathcal{L}_{[\xi,M\xi]}L} + \widetilde{\mathcal{L}_{[L\xi,\xi]}M} + \widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi ML} -$$
$$-\mathcal{L}_\xi\widetilde{\mathcal{L}_\xi LM} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}\mathcal{L}_\xi M} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}\mathcal{L}_\xi L} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi L\mathcal{L}_\xi M} + \widetilde{\mathcal{L}_\xi M\mathcal{L}_\xi L}.$$

Правая часть формулы — вертикальное поднятие некоторого операторного поля. Его формула

$$\mathcal{L}_{[\xi,M\xi]}L + \mathcal{L}_{[L\xi,\xi]}M + \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi ML - \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi LM - \mathcal{L}_{L\xi}\mathcal{L}_\xi M + \mathcal{L}_{M\xi}\mathcal{L}_\xi L - \mathcal{L}_\xi L\mathcal{L}_\xi M + \mathcal{L}_\xi M\mathcal{L}_\xi L =$$
$$=\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_{M\xi}L - \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_{L\xi}M + \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi(ML) - \mathcal{L}_\xi(M\mathcal{L}_\xi L) - \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\xi(LM) + \mathcal{L}_\xi(L\mathcal{L}_\xi M) =$$
$$= - \mathcal{L}_\xi(\langle L, M\rangle(\xi, \cdot) + \langle L, M\rangle(\cdot, \xi)).$$

Здесь мы снова использовали (7.6), лемму 7.1.1 и формулы (7.2) - (7.4) из леммы 7.1.2. Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что выражение в скобках обращается в ноль в силу того, что L, M симметрии друг друга.

Значит, производная Ли от этого выражения обращается в ноль. Кроме этого, мы снова доказали для почти всех точек и, значит, по непрерывности для всех. Таким образом, $\widehat{L}, \widehat{M}$ — симметрии друг друга, и первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем ко третьему утверждению. Пусть L, M — сильные симметрии друг друга, то есть теперь $LM - ML = 0$ и $\langle L, M\rangle = 0$. Выберем произвольное векторное поле ξ. Получаем

$$\widehat{L}\widehat{M}\widehat{\xi} - \widehat{LM}\widehat{\xi} = \widehat{LM\xi} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}L} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi ML} - \widehat{LM\xi} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi(LM)} = \widetilde{\mathcal{L}_{M\xi}L} - \widetilde{M\mathcal{L}_\xi L}.$$

Правая часть в точности вертикальное поднятие оператора $-\langle L, M\rangle(\cdot, \xi)$. Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что $\widehat{LM} = \widehat{L}\widehat{M}$. Теперь покажем, что операторные поля $\widehat{L}, \widehat{M}$ — сильные симметрии друг друга. Рассмотрим для произвольной пары векторных полей ξ, η выражение

$$-\langle\widehat{L}, \widehat{M}\rangle(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = \widehat{L}[\widehat{\xi}, \widehat{M}\widehat{\eta}] + \widehat{M}[\widehat{L}\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] - \widehat{L}\widehat{M}[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] - [\widehat{L}\widehat{\xi}, \widehat{M}\widehat{\eta}] =$$
$$=\widehat{L}[\widehat{\xi}, \widehat{M\eta}] + \widehat{L}[\widehat{\xi}, \widetilde{\mathcal{L}_\eta M}] + \widehat{M}[\widehat{L\xi}, \widehat{\eta}] + \widehat{M}[\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widehat{\eta}] - \widehat{LM}\widehat{[\xi, \eta]} - [\widehat{L\xi}, \widehat{M\eta}] -$$
$$-[\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widehat{M\eta}] - [\widehat{L\xi}, \widetilde{\mathcal{L}_\eta M}] - [\widetilde{\mathcal{L}_\xi L}, \widetilde{\mathcal{L}_\eta M}] = \widehat{L}\widehat{[\xi, M\eta]} + \widehat{M}\widehat{[L\xi, \eta]} + \widehat{LM[\xi, \eta]} - \widehat{[L\xi, M\eta]} +$$
$$+\widehat{L}\widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\eta M} - \widehat{M}\widetilde{\mathcal{L}_\eta\mathcal{L}_\xi L} - \widetilde{\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(LM)} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}\mathcal{L}_\eta M} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\eta}\mathcal{L}_\xi L} - \widetilde{\mathcal{L}_\xi L\mathcal{L}_\eta M} + \widetilde{\mathcal{L}_\eta M\mathcal{L}_\xi L} =$$
$$=\big(\widetilde{\mathcal{L}_{[\xi,M\eta]}L} + \widetilde{\mathcal{L}_{M\eta}\mathcal{L}_\xi L}\big) + \big(\widetilde{\mathcal{L}_{[L\xi,\eta]}M} - \widetilde{\mathcal{L}_{L\xi}\mathcal{L}_\eta M}\big) + \big(\widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\eta ML} + \widetilde{\mathcal{L}_\eta M\mathcal{L}_\xi L} - \mathcal{L}_\xi\widetilde{\mathcal{L}_\eta(ML)}\big) +$$
$$+\big(\mathcal{L}_\eta\widetilde{\mathcal{L}_\xi(LM)} - \mathcal{L}_\eta\widetilde{\mathcal{L}_\xi LM} - \mathcal{L}_\xi\widetilde{L\mathcal{L}_\eta M}\big) = \widetilde{\mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_{M\eta}L} - \widetilde{\mathcal{L}_\eta\mathcal{L}_{L\xi}M} - \mathcal{L}_\xi\widetilde{(M\mathcal{L}_\eta L)} + \mathcal{L}_\eta\widetilde{(L\mathcal{L}_\xi M)}.$$

Отметим, что в этих вычислениях помимо формул из лемм 7.1.1 и (7.1.2) мы использовали уже доказанное свойство $\widehat{L}\widehat{M} = \widehat{LM}$. Правая часть выражения — это вертикальное поднятие оператора

$$\mathcal{L}_\xi\big(\mathcal{L}_{M\eta}L - M\mathcal{L}_\eta L\big) - \mathcal{L}_\eta(\mathcal{L}_{L\xi}M - L\mathcal{L}_\xi M),$$

который равен нулю в силу того, что $\langle L, M\rangle = 0$ и формулы (7.6). Рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получаем, что по непрерывности тензор обращается в ноль всюду, то есть $\widehat{L}$ и $\widehat{M}$ — сильные симметрии друг друга. Теорема доказана. □

Разберем несколько важных примеров.

Пример 7.1.1. Пусть L — операторное поле в окрестности точки p и пусть существует такая система координат $u^1, \dots, u^n$, что $L^*\mathrm{d}u^i$ — замкнутые формы. Другими словами, плотности законов сохранения можно взять в качестве координат. В этом случае локально существуют такие функции g^i, что $\mathrm{d}g^i = L^*\mathrm{d}u^i$ и, значит

$$\theta_L = p_q L^q_s \mathrm{d}u^s = p_q \mathrm{d}g^s.$$

Таким образом, формула для поднятия в таких координатах приобретает вид

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} L^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & L \end{pmatrix}.$$

Более того, из формулы для поднятия легко вытекает, что, если $R^i_j = 0$, то

$$\frac{\partial L^q_i}{\partial u^j} - \frac{\partial L^q_j}{\partial u^i} = 0.$$

То есть в такой системе координат в строках матрицы L стоят замкнутые формы. Или, что то же самое, $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}u^i) = 0$. Таким образом, обращение в ноль угловых элементов в матрице поднятия является характеристическим свойством системы координат, состоящей из законов сохранения.

В частности, если L — gl-регулярный оператор Нийенхейса во второй сопровождающей форме, то его поднятие выглядит именно так. Равно как если L имеет простой вещественный спектр и u^i — диагональные координаты. ■

Замечание 7.1.1. В силу формулы для поднятия верно, что

$$\chi_{\widehat{L}}(t) = \chi^2_L(t).$$

То есть кратность всех собственных значений оператора L при поднятии удваивается.

Кроме этого, если L — gl-регулярный оператор Нийенхейса, то возьмем в окрестности точки общего положения координаты, в которых L имеет вторую сопровождающую форму (теорема 6.5.1). В силу примера (7.1.1) мы получаем, что каждому собственному значению соответствует два жордановых блока. То есть поднятие gl-регулярного оператора уже не является gl-регулярным. ■

7.2 Коммутативные наборы и базисы в $\operatorname{Sym} L$

Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса и $\mathrm{d}f$ — его регулярный закон сохранения. Обозначим через $M_1, \dots, M_n$ — базис в $\mathrm{Sym}L$. Нам известно (теорема 6.2.2), что дифференциальные формы $M_i^*\mathrm{d}f$ замкнуты и линейно независимы (лемма 7.2.1).

Таким образом, локально определены функции f_i по формуле $\mathrm{d}f_i = M_i^*\mathrm{d}f$. Полученный набор дифференциальных форм мы будем называть обобщенной иерархией законов сохранения.

Теорема 7.2.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса, $\mathrm{d}f$ — его регулярный закон сохранения, а $M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$ — базис в $\operatorname{Sym} L$. Обозначим через $\mathrm{d}f_i$ — обобщенную иерархию законов сохранения, построенную по этим данным, а через q_i — однородные по импульсам функции на $T^*\mathrm{M}^n$, удовлетворяющие условиям*

$$\Omega^{-1}(\mathrm{d}f_i, \mathrm{d}q_j) = \delta_{ij}.$$

Тогда

1. *Операторное поле на кокасательном расслоении*
$$P = q_n\widehat{M}_n + q_{n-1}\widehat{M}_{n-1} + \dots + q_1\widehat{M}_1$$
является сильной симметрией $\widehat{L}$;
2. *Для любой (возможно бесконечной) последовательности симметрий $N_i, i = 0, 1, 2, \dots,$ для которой ряд в правой части $Q = \widehat{N}_0 + \widehat{N}_1 P + \widehat{N}_2 P^2 + \dots$ сходится, Q — сильная симметрия $\widehat{L}$. Она допускает разложение*
$$Q = h_1\widehat{M}_n + \dots + h_n\widehat{M}_1;$$
3. *Полученные в предыдущем пункте функции h_i образуют коммутативный набор относительно произвольной скобки Пуассона с тензором Пуассона Ω_M^{-1}, где M — симметрия L с условием $\det M \neq 0$.*

Доказательство. Следующая лемма обобщает лемму 5.2.1 на случай произвольного базиса в централизаторе.

Лемма 7.2.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор, $M_1, \dots, M_n$ — базис в централизаторе L и ξ произвольный вектор. Тогда ξ — циклический тогда и только тогда, когда $M_1\xi, \dots, M_n\xi$ — линейно независимы.*

Доказательство. В централизаторе L есть стандартный базис $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$. M_i выражается через этот базис как

$$M_i = g_1^i L^{n-1} + \dots + g_n^i \mathrm{Id}.$$

По построению матрица $G = \{g_i^j\}$ невырожденная. Определим $\xi_i = L^{i-1}\xi$. Получаем

$$M_i\xi = g_1^i\xi_n + \dots + g_n^i\xi_1.$$

Мы видим, что система векторов $M_i\xi$ выражается через ξ_i с помощью невырожденной матрицы. Это значит, что обе системы линейно зависимы/независимы одновременно. Линейная независимость ξ_i по определению и есть цикличность. То есть лемма доказана. □

Перед началом доказательства прокомментируем корректность утверждения теоремы.

Замечание 7.2.1. По лемме 7.2.1 дифференциалы $\mathrm{d}f_i$ — линейно независимы в окрестности точки p. Возьмем координаты в окрестности этой точки в виде $u^i = f_i$, считая $f_i(\mathrm{p})$. В этом случае q_i — это "вторая половина"канонических координат на $T^*\mathrm{M}^n$.

При этом такой набор единственный. Действительно, взяв любое другое решение $\bar{q}_i$ мы получаем

$$\Omega^{-1}(\mathrm{d}u^i, \mathrm{d}q_j - \mathrm{d}\bar{q}_j) = 0.$$

Из этого немедленно вытекает, что $q_j - \bar{q}_j$ — функция от u. В силу однородности она может быть только нулем. ■

По определению LM_i лежит в централизаторе L. Тогда — в силу того, что M_i образуют базис в централизаторе, — можно определить следующий набор функциональных коэффициентов c^i_j

$$LM_i = c^i_1 M_1 + \dots + c^i_n M_n.$$

Верна следующая лемма.

Лемма 7.2.2. *Для поднятий Яно-Патерсона выполнена формула*

$$\widehat{L}\widehat{M_i} = c^i_1 \widehat{M}_1 + \dots + c^i_n \widehat{M}_n. \tag{7.7}$$

Доказательство. Формулу (7.7) достаточно доказать в произвольной системе координат. Зафиксируем координаты $u^i = f_i$ с дополнительным условием $f_i(\mathrm{p}) = 0$. В этих координатах формы $L^*\mathrm{d}u^i, M^*_j\mathrm{d}u^i$ замкнуты, поэтому (см. пример 7.1.1) в каноническом базисе p, u на $T^*\mathrm{M}^n$ поднятия Яно-Патерсона выглядят так

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} L^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & L \end{pmatrix}, \quad \widehat{M}_i = \begin{pmatrix} M^T_i & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & M_i \end{pmatrix}.$$

Здесь L, M_i — матрицы соответствующих операторов в координатах u^i. Формула (7.7) немедленно вытекает из вида матриц и тривиального наблюдения

$$(LM_i)^T = M^T_i L^T = L^T M^T_i = c^i_1 M^T_1 + \dots + c^i_n M^T_n.$$

□

Следующая лемма дает формулы, аналогичные (5.10), характеризующие сильные симметрии.

Лемма 7.2.3. *Операторное поле* $P = h_n\widehat{M}_1 + \dots + h_1\widehat{M}_n$ *является сильной симметрией* $\widehat{L}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{L}^*\mathrm{d}h_i - c^1_i\mathrm{d}h_n - \dots - c^n_i\mathrm{d}h_1 = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7.8}$$

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{L}, P\rangle &= \langle \widehat{L}, h_n\widehat{M}_1 + \dots + h_1 \mathrm{Id}\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(h_{n-i+1}\langle \widehat{L}, \widehat{M}_i\rangle + \widehat{L}^*\mathrm{d}h_{n-i+1}\otimes \widehat{M}_i - \mathrm{d}h_{n-i+1}\otimes \widehat{L}\widehat{M}_i \Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{L}^*\mathrm{d}h_{n-i+1} - c_i^1 \mathrm{d}h_n - \dots - c_i^n \mathrm{d}h_1 \Big)\otimes \widehat{M}_i.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Здесь мы использовали, что $\langle L, M\rangle = 0$ влечет $\langle \widehat{L}, \widehat{M}\rangle = 0$ (теорема 7.1.1).

Теперь зафиксируем координаты $u^i = f_i, f_i(\mathrm{p}) = 0$. В них, как уже говорилось выше, матрицы имеют блочный вид. Рассмотрим в этих координатах векторные поля на $T^*\mathrm{M}^n$ вида

$$\zeta = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial p_n} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \xi^n \frac{\partial}{\partial u^n},$$

где ξ^i — компоненты циклического векторного поля, α_i — компоненты циклической 1-формы. В касательном пространстве к каждой точке такие векторы образуют открытое, всюду плотное множество. Подставляя их в формулу (7.9), мы получаем, что $\widehat{M}_i\zeta$ линейно независимы и для почти всех векторов верно

$$\langle \widehat{L}^*\mathrm{d}h_i - c_i^n \mathrm{d}h_1 - \dots - c_i^1 \mathrm{d}h_n,\, \zeta\rangle = 0.$$

По непрерывности это верно для всех векторов, и утверждение леммы доказано. □

Нам потребуется еще одна лемма, которая, в некотором смысле, обобщает вторую сопровождающую форму.

Лемма 7.2.4. *Зафиксируем координаты $u^i = f_i$ с дополнительным условием $f_i(\mathrm{p}) = 0$. В этих координатах матрица L имеет вид*

$$L^i_j = c^i_j.$$

Доказательство. В координатах u^i выполнено следующее соотношение

$$L^*\mathrm{d}u^i = L^i_s \mathrm{d}u^s.$$

Обозначим $\mathrm{d}f = \alpha_k \mathrm{d}u^k$. Тогда получаем

$$L^*\mathrm{d}u^i = L^* M_i^* \mathrm{d}f = c_1^i M_1^* \mathrm{d}f + \dots + c_n^i M_n^* \mathrm{d}f = c_s^i \mathrm{d}u^s.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем требуемое. □

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Для проверки первого утверждения нам достаточно убедиться, что для импульсов q_i выполнены соотношения (7.8). Будем снова это делать в системе координат $u^i = f_i, f_i(\mathrm{p})$. В ней

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} L^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & L \end{pmatrix},$$

где L имеет вид из леммы 7.2.4. В фиксированной системе координат q_i — это просто импульсы, поэтому

$$\widehat{L}^* \mathrm{d}q_i = c_i^1 \mathrm{d}q_1 + \cdots + c_i^n \mathrm{d}q_n.$$

Это в точности (7.8) для $h_i = p_{n-i+1}$. Таким образом, P — сильная симметрия $\widehat{L}$.

Всякая симметрия L — это сильная симметрия (теорема 6.2.1), поэтому поднятие — тоже сильная симметрия (теорема 7.1.1). Наконец, произведение сильных симметрий — снова сильная симметрия (следствие 12.0.1), поэтому в правой части выражения для Q стоит сильная симметрия. Разложение по $\widehat{M_i}$, нужное для получения функций h_i, вытекает из того, что

$$M_i = \begin{pmatrix} M_i^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & M_i \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Начнем со стандартного базиса, то есть $M_i = L^{n-i}$. В этом случае мы имеем дело с обычной иерархией законов сохранения. В координатах $u^i = f_i$ с дополнительным условием $f_i(\mathrm{p}) = 0$ оператор L во второй сопровождающей форме

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 7.2.4 в этой системе координат компоненты матрицы совпадают с компонентами c_j^i. В частности, условие 7.8 превращается в

$$\begin{aligned} &\widehat{L}^* \mathrm{d}h_n = \sigma_n \mathrm{d}h_1, \\ &\widehat{L}^* \mathrm{d}h_i = \sigma_i \mathrm{d}h_1 + \mathrm{d}h_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Используя рекуррентные соотношения, определим операторы

$$K_0 = \mathrm{Id}, \quad K_i = \widehat{L} K_{i-1} - \sigma_i \mathrm{Id}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Для этих операторов выполнено

$$K_i^* \mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}h_{i+1}, i = 0, \dots, n-1. \tag{7.12}$$

Замечание 7.2.2. Отметим, что, несмотря на сходство формул, эти операторные поля не поднятия Яно-Патерсона операторных полей A_i, определенных формулой 5.7. Это легко заметить, поскольку в выбранных координатах

$$K_i = \begin{pmatrix} A_i^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & A_i \end{pmatrix},$$

то есть $\mathrm{d}u^i$ должны быть законами сохранения (пример 7.1.1) для A_i. Это, как мы знаем, разумеется не так (теорема 6.6.1). ■

Нам потребуется две леммы из линейной алгебры.

Лемма 7.2.5. *Пусть на линейном пространстве V задана кососимметрическая форма Ω и линейный оператор L, самосопряжённый относительно формы, то есть*

$$\Omega(L\xi, \eta) = \Omega(\xi, L\eta)$$

для любых $\xi, \eta \in V$. Тогда для любого вектора ξ и любых степеней $k, s \geq 0$ верно, что

$$\Omega(L^k\xi, L^s\eta) = 0.$$

Если дополнительно L невырожденный, то в качестве степеней в утверждении можно брать $k, s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Обозначим $\Omega_L(\xi, \eta) = \Omega(\xi, L\eta)$. Имеем

$$\Omega_L(\xi, \eta) = \Omega(\xi, L\eta) = -\Omega(L\eta, \xi) = -\Omega(\eta, L\xi) = -\Omega_L(\eta, \xi).$$

То есть в силу самосопряженности L форма Ω_L — кососимметрическая. Утверждение леммы очевидно, если $s = k$, поэтому положим без ограничения общности $s > k$. Имеем два случая.

Первый случай $s + k = 2p$. Тогда, применяя самосопряженность L, получаем

$$\Omega(L^s\xi, L^k\xi) = \Omega(L^{s-1}\xi, L^{k+1}\xi) = \cdots = \Omega(L^p\xi, L^p\xi) = 0.$$

Второй случай $s + k = 2p + 1$. Тогда, действуя аналогично, получаем

$$\Omega(L^s\xi, L^k\xi) = \Omega(L^{s-1}\xi, L^{k+1}\xi) = \cdots = \Omega(L^p\xi, L^p + 1\xi) = \Omega_L(L^p\xi, L^p\xi) = 0.$$

Первая половина леммы доказана. Теперь рассмотрим L^{-1}. На векторах $L\xi, L\eta$ имеем

$$\Omega(L^{-1}L\xi, L\eta) = \Omega(\xi, L\eta) = \Omega(L\xi, L^{-1}L\eta).$$

Так как $L\xi, L\eta$ порождают все V, то L^{-1} самосопряжен относительно Ω. Кроме этого

$$\Omega_L(\xi, L^{-1}\eta) = \Omega(\xi, \eta) = \Omega(LL^{-1}\xi, \eta) = \Omega_L(L^{-1}\xi, \eta).$$

Далее доказательство повторяется дословно, с той лишь разницей, что p может быть как больше, так и меньше нуля. □

Лемма 7.2.6. *Операторное поле $\widehat{L}^*$ самосопряжено относительно билинейной формы Ω_M^{-1} для произвольной невырожденной симметрии M.*

Доказательство. По построению мы имеем

$$\begin{aligned}\Omega_M(\xi, \widehat{L}\eta) = \Omega(\xi, \widehat{M}\widehat{L}\eta) =& \Omega(\xi, \widehat{ML}\eta) = \Omega(\widehat{ML}\xi, \eta) = \\ &= -\Omega(\eta, \widehat{M}\widehat{L}\xi) = -\Omega(\eta, \widehat{L}\xi) = \Omega(\widehat{L}\xi, \eta).\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались теоремой 7.1.1. Это можно записать в матричном виде как

$$\widehat{L}^T\Omega_M = \Omega_M\widehat{L}.$$

Умножая слева и справа на Ω_M^{-1}, получаем

$$\Omega_M^{-1}\widehat{L}^T = \widehat{L}\Omega_M^{-1}.$$

Лемма доказана. □

Наборы операторов $\widehat{L}^k$ и K_i выражаются друг через друга с помощью невырожденной треугольной матрицы замены. Из формул 7.12 следует, что пространство, порожденное дифференциалами $\mathrm{d}h_i$, совпадает с пространством, порожденным $\widehat{L}^k\mathrm{d}h_1$. В силу леммы 7.2.6 оператор $\widehat{L}$ самосопряжен относительно Ω_M^{-1}. Таким образом, из леммы 7.2.5 мы получаем, что $\Omega^{-1}(\mathrm{d}h_i, \mathrm{d}h_j) = 0$, то есть функции h_i попарно коммутируют относительно скобки Пуассона, задаваемой Ω_M^{-1}. То есть мы доказали утверждение теоремы для стандартного базиса.

Теперь рассмотрим произвольный базис M_i в $\operatorname{Sym} L$. Этот базис связан со стандартным базисом заменой

$$M_i = g_1^i L^{n-1} + \dots + g_n^i \mathrm{Id}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где матрица замены g_j^i невырожденная. Нам также потребуется обратная матрица замены, то есть

$$L^{n-i} = r_1^i M_1 + \dots + r_n^i M_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

В силу формулы (7.10), мы получаем

$$\widehat{M_i} = g_1^i \widehat{L}^{n-1} + \dots + g_n^i \mathrm{Id}, \quad \widehat{L}^{n-i} = r_1^i \widehat{M}_1 + \dots + r_n^i \widehat{M}_n, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7.13}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{L}\widehat{M_i} &= (g_2^i + \sigma_1 g_1^i)\widehat{L}^{n-1} + \dots + \sigma_n g_1^i \mathrm{Id} = (g_2^i + \sigma_1 g_1^i)(r_1^1 \widehat{M}_1 + \dots + r_n^1 \widehat{M}_n) + \dots + \\
&+ \sigma_n g_1^i (r_1^n \widehat{M}_1 + \dots + r_n^n \widehat{M}_n) = \\
&= \Big((g_2^i + \sigma_1 g_1^i) r_1^1 + (g_3^i + \sigma_2 g_1^i) r_1^2 + \dots + \sigma_n g_1^i r_1^n\Big)\widehat{M}_1 + \dots + \\
&+ \Big((g_2^i + \sigma_1 g_1^i) r_n^1 + (g_3^i + \sigma_2 g_1^i) r_n^2 + \dots + \sigma_n g_1^i r_n^n\Big)\widehat{M}_n = \\
&= c_1^i \widehat{M}_1 + \dots + c_n^i \widehat{M}_n.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства, мы получаем следующее матричное равенство

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ & & \ddots & \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ r_2^1 & r_2^2 & \dots & r_2^n \\ & & \ddots & \\ r_n^1 & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \sigma^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \dots & g_1^n \\ g_2^1 & g_2^2 & \dots & g_2^n \\ & & \ddots & \\ g_n^1 & g_n^2 & \dots & g_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Теперь действуем следующим образом:

1. Выберем произвольную точку q из окрестности $U(\mathrm{p})$. Найдется такая невырожденная постоянная матрица s_j^i, что

$$s_1^i M_1(\mathrm{q}) + \dots + s_1^i M_n(\mathrm{q}) = L^{n-i}(\mathrm{q});$$

2. Рассмотрим новый базис S_i в $\operatorname{Sym} L$, который имеет вид $S_i = s_1^i \widehat{M_1} + \dots + s_1^i \widehat{M_n}$. Этот базис обладает свойством: в точке q мы имеем $S_i(\mathrm{q}) = L^{n-i}$. Обозначим функции, построенные по теореме 7.2.1 для этого базиса, с тем же регулярным законом сохранения $\mathrm{d}f$ и той же правой частью Q, как $\bar{h}_i$, то есть

$$\bar{h}_1 \widehat{S}_n + \dots + \bar{h}_n \widehat{S}_1 = Q;$$

3. Обозначим обратную матрицу к s_j^i как m_j^i. Для нее мы имеем, что $M_i = m_1^i S_1 + \dots + m_n^i S_n$ и $\widehat{M_i} = m_1^i \widehat{S}_1 + \dots + m_n^i \widehat{S}_n$. Имеем

$$Q = h_n \widehat{M_1} + \dots + h_1 \widehat{M_n} = (m_1^1 h_n + \dots + m_1^n h_1)\widehat{S}_1 + \dots + (m_n^1 h_n + \dots + m_n^n h_1)\widehat{S}_n$$

Отсюда получаем формулу

$$\bar{h}_i = m_i^1 h_n + \dots + m_i^n h_1.$$

Из нее вытекает, что $\mathrm{d}\bar{h}_i = m_i^q \mathrm{d}h_i$ и подпространства в $T^*T^*\mathrm{M}^n$, порожденные дифференциалами $\mathrm{d}h_i$ и $\mathrm{d}\bar{h}_i$, совпадают в каждой точке окрестности $U(\mathrm{p})$;

4. Равенство (7.14) для базиса S_i в точке q дает, что

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}(\mathrm{q})^* \mathrm{d}\bar{h}_i(\mathrm{q}) = \sigma_i(\mathrm{q}) \mathrm{d}\bar{h}_1(\mathrm{q}) + \mathrm{d}\bar{h}_{i+1}(\mathrm{q}), \quad i = 2, \dots, n, \\
&\widehat{L}(\mathrm{q})^* \mathrm{d}\bar{h}_n(\mathrm{q}) = \sigma_n(\mathrm{q}) \mathrm{d}\bar{h}_1(\mathrm{q}).
\end{aligned}$$

То есть конкретно в точке q пространство, порожденное $\mathrm{d}\bar{h}_i$, совпадает с пространством, порожденным $\widehat{L}^k \mathrm{d}h_i$. В силу леммы 7.2.6 оператор $\widehat{L}$ самосопряжён относительно Ω_M^{-1}. Значит, из леммы 7.2.5 мы получаем, что $\Omega^{-1}(\mathrm{d}\bar{h}_i, \mathrm{d}\bar{h}_j) = 0$;

5. Однако, так как пространства дифференциалов для $\mathrm{d}\bar{h}_i$ и $\mathrm{d}h_i$ совпадали, мы получаем, что в точке q верно, что $\Omega^{-1}(\mathrm{d}h_i, \mathrm{d}h_j) = 0$. Так как точка q выбиралась произвольно, получаем, что $\Omega^{-1}(\mathrm{d}h_i, \mathrm{d}h_j) = 0$ в целой окрестности $U(\mathrm{p})$.

Эти рассуждения завершают доказательство третьего утверждения теоремы. □

Замечание 7.2.3. Из того, что симметрии gl-регулярного оператора параметризуются n функциями одной переменной, мы получаем, что выбор базиса M_i в $\operatorname{Sym} L$ определяется n^2 функциями одной переменной.

Теперь для каждой симметрии N_i в правой части второго утверждения теоремы 7.2.1 рассмотрим разложение $N_i = r_1^i M_n + \dots + r_n^i M_1$. Тогда правую часть можно переписать как

$$Q = \Big(r_1^0 \mathrm{Id} + r_1^1 P + \dots\Big)\widehat{M_n} + \dots + \Big(r_n^0 \mathrm{Id} + r_n^1 P + \dots\Big)\widehat{M_1}.$$

Таким образом, начальные условия каждого коэффициенты — ряды по P с коэффициентами-функциями одной переменной. То есть n функций двух переменных. ■

Разберем два примера применения этой теоремы.

Пример 7.2.1. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ и рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Базис M_i в $\operatorname{Sym} L$ имеет вид

$$M_i = \begin{pmatrix} s_{1i}(u^1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{2i}(u^2) & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{ni}(u^n) \end{pmatrix},$$

где

$$\det \begin{pmatrix} s_{11}(u^1) & s_{12}(u^1) & \dots & s_{1n}(u^1) \\ s_{21}(u^2) & s_{22}(u^2) & \dots & s_{2n}(u^2) \\ & & \ddots & \\ s_{n1}(u^n) & s_{n2}(u^n) & \dots & s_{nn}(u^n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Здесь s_{ij} — n^2 функций от одной переменной. Условие неравенства нулю определителя матрицы — это в точности условие того, что M_i образуют базис. Обозначим матрицу с компонентами s_{ij} как S. Регулярный закон сохранения выберем в виде $\mathrm{d}f = \mathrm{d}u^1 + \dots + \mathrm{d}u^n$.

Теперь перейдем непосредственно к построению q_i. Для начала заметим, что $M_i^* \mathrm{d}f = s_{1i}\mathrm{d}u^1 + \dots + s_{ni}\mathrm{d}u^n$. То есть $\frac{\partial f_i}{\partial u^j} = s_{ji}$. Определим $\tilde{S} = S^{-T}$. Из условия на импульсы q_i, получаем

$$q_i = \tilde{s}_{i1}p_1 + \dots + \tilde{s}_{in}p_n.$$

Теперь переходим к конструкции из теоремы. Из вышесказанного получаем

$$P = q_n\widehat{M}_n + \dots + q_1\widehat{M}_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Симметрия Q из теоремы 7.2.1 приобретает вид

$$Q = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R = \begin{pmatrix} g_1(u^1, p_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2(u^2, p_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & g_n(u^n, p_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь g_i — произвольные функции двух переменных, аналитичные по второй переменной и гладкие по первой. Матричное уравнение из теоремы 7.2.1 эквивалентно

$$\begin{pmatrix} s_{11}(u^1) & s_{12}(u^1) & \dots & s_{1n}(u^1) \\ s_{21}(u^2) & s_{22}(u^2) & \dots & s_{2n}(u^2) \\ & & \ddots & \\ s_{n1}(u^n) & s_{n2}(u^n) & \dots & s_{nn}(u^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \dots \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u^1, p_1) \\ g_2(u^2, p_2) \\ \dots \\ g_n(u^n, p_n) \end{pmatrix}.$$

Как мы увидим ниже, эта система тесно связана с разделением переменных. Условие полноты для такого набора имеет вид $g_i \neq 0$ в точке p. ■

Пример 7.2.2. Зафиксируем координаты u_1, u_2, u_3 (здесь будем использовать нижние индексы, чтобы формулы были не слишком громоздкими) и рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Симметрии M_i для L имеют вид

$$M_i = \begin{pmatrix} s_{3i} & u_2 s'_{3i} + s_{2i} & u_1 s'_{3i} + \frac{1}{2}u_2^2 s''_{3i} + u_2 s'_{2i} + s_{1i} \\ 0 & s_{i3} & u_2 s'_{3i} + s_{2i} \\ 0 & 0 & s_{3i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Функции s_{ij}, как и раньше, произвольные функции одной переменной, однако в отличие от предыдущего раза они все зависят от u_3. В качестве регулярного закона сохранения возьмем $\mathrm{d}f = \mathrm{d}u_1$. Получаем

$$\mathrm{d}f_i = s_{3i}\mathrm{d}u_1 + (u_2 s'_{3i} + s_{2i})\mathrm{d}u_2 + (u_1 s'_{3i} + u_2 s'_{2i} + \frac{1}{2}u_2^2 s''_{3i} + s_{1i})\mathrm{d}u_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем матрицу

$$S = \begin{pmatrix} u_1 s'_{31} + u_2 s'_{21} + \frac{1}{2}u_2^2 s''_{31} + s_{11} & u_1 s'_{32} + u_2 s'_{22} + \frac{1}{2}u_2^2 s''_{32} + s_{12} & u_1 s'_{33} + u_2 s'_{23} + \frac{1}{2}u_2^2 s''_{33} + s_{13} \\ u_2 s'_{31} + s_{21} & u_2 s'_{32} + s_{22} & u_2 s'_{33} + s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Аналогично предыдущему примеру получаем, что

$$q_1 M_1 + q_2 M_2 + q_3 M_3 = P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу

$$R = \begin{pmatrix} g_3 & \frac{\partial g_3}{\partial u_3}u_2 + \frac{\partial g_3}{\partial p_1}p_2 + g_2 & \frac{\partial^2 g_3}{\partial u_3 \partial p_1}u_2 p_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_3}{\partial p_1^2}p_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_3}{\partial u_3^2} + \frac{\partial g_3}{\partial p_1}p_3 + \frac{\partial g_3}{\partial u_3}u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial p_1}p_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_3}u_2 + g_1 \\ 0 & g_3 & \frac{\partial g_3}{\partial u_3}u_2 + \frac{\partial g_3}{\partial p_1}p_2 + g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь функции g_1, g_2, g_3 зависят от u_3 и p_1. В терминах матрицы R симметрия Q из теоремы 7.2.1 принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функции h_3, h_2, h_1 находятся из линейной системы

$$S \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_3}{\partial u_3 \partial p_1}u_2 p_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_3}{\partial p_1^2}p_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_3}{\partial u_3^2} + \frac{\partial g_3}{\partial p_1}p_3 + \frac{\partial g_3}{\partial u_3}u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial p_1}p_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_3}u_2 + g_1 \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_3}u_2 + \frac{\partial g_3}{\partial p_1}p_2 + g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь S — матрица определенная выше. Полученный набор будет полным если $g_3 \neq 0$. ■

7.3 Ортогональное разделение переменных

В этом разделе мы будем рассматривать специальный класс гамильтонианов

$$h(p,u)=\frac{1}{2}h^{qs}p_q p_s+h_0.$$

Если матрица h^{qs} невырожденная, то это контравариантная метрика, и мы имеем дело с геодезическим потоком с потенциалом.

Прежде чем перейти к основной теореме раздела, необходимо напомнить некоторые факты из линейной алгебры (гл.8, §6 в [131]). Квадратным корнем $R=\sqrt{L}$ называется линейный оператор, для которого $R^2=L$. В зависимости от нормальной жордановой формы L и размерности пространства n таких корней может быть много (в том числе и бесконечно много) или их может не быть вообще.

Верно, однако, что если все собственные значения L строго больше нуля, то найдется такой многочлен с вещественными коэффициентами $p(t)$ (многочлен Сильвестра-Лагранжа [131]), что для $R=p(L)$ выполнено $R^2=L$. Всюду далее, когда мы будем писать корень квадратный из матрицы, мы будем иметь в виду, что выполнены все перечисленные предположения.

Теорема 7.3.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса, $\mathrm{d}f$ — его регулярный закон сохранения, а $M_1,\dots,M_n$ — базис в $\mathrm{Sym}L$. Выберем в теореме 7.2.1 $Q=\widehat{M}P^2+\widehat{N}$, где M,N — симметрии L. Тогда:*

1. *Построенные по теореме 7.2.1 функции $h_1,\dots,h_n$ имеют вид*

$$h_i(p,u)=\frac{1}{2}h_i^{sq}p_s p_q+h_{i,0}.$$

   При этом L — самосопряжен относительно всех h_i, то есть $L^j_p h_i^{pk}=h_i^{jp}L^k_p$;

2. *Дифференциал полного интеграла $W(u,c)$ системы имеет вид*

$$\mathrm{d}W=\sqrt{(M^*)^{-1}(c_1M_1^*+\dots+c_nM_n^*-M^*)}\mathrm{d}f \tag{7.16}$$

   Здесь мы предполагаем, что матрица M невырожденная.

Доказательство. Общий вид функций тривиально следует из формулы для построения h_i в теореме 7.2.1. Выберем теперь в окрестности точки p систему координат $u^i=f_i$, $f_i(\mathrm{p})=0$, где $\mathrm{d}f_i=M_i^*\mathrm{d}f$. Тогда в канонической системе координат p,u на $T^*\mathrm{M}^n$ оператор $\widehat{L}$ имеет вид

$$\widehat{L}=\begin{pmatrix} L^T & 0_{n\times n}\\ 0_{n\times n} & L\end{pmatrix}.$$

Дифференциалы функций $\mathrm{d}h_i$ имеют в нашем случае вид

$$\mathrm{d}h_i=h_i^{1q}p_q\mathrm{d}p_1+\dots+h_i^{nq}p_q\mathrm{d}p_n+\Big(\frac{\partial h_i^{sq}}{\partial u^1}p_sp_q+\frac{\partial h_{i,0}}{\partial u^1}\Big)\mathrm{d}u^1+\dots+\Big(\frac{\partial h_i^{sq}}{\partial u^n}p_sp_q+\frac{\partial h_{i,0}}{\partial u^n}\Big)\mathrm{d}u^n.$$

При этом они удовлетворяют условию (7.8). Подставляя все выше в эти условия и приравнивая коэффициенты при $\mathrm{d}p_j$, мы получаем

$$L^s_q h_i^{qm}p_m=c_i^1h_n^{sm}p_m+\dots+c_i^nh_1^{sm}p_m.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при p_m, мы получаем

$$L_q^s h_i^{qm} = c_i^1 h_n^{sm} + \cdots + c_i^n h_1^{sm}. \tag{7.17}$$

Для любого i справа стоит симметрическая билинейная форма, значит L — самосопряжен относительно всех h_i^{qm}. Первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем теперь ко второму утверждению. Положим в матричном уравнении в теореме 7.3.1 значение $h_i = c_i$. Тогда можно записать следующее равенство

$$c_n\widehat{M_1} + \cdots + c_1\widehat{M_n} = \widehat{M}P^2 + \widehat{N}.$$

и выразить

$$P = \sqrt{\widehat{M}^{-1}(c_n\widehat{M_1} + \cdots + c_1\widehat{M_n} - \widehat{N})}.$$

Так как мы взяли "хороший"корень из матрицы, то для него многочлен Сильвестра-Лагранжа, по построению, имеет вид

$$\sqrt{\widehat{M}^{-1}(c_n\widehat{M_1} + \cdots + c_1\widehat{M_n} - \widehat{N})} = s_1(u,c)\widehat{M_1} + \cdots + s_n(u,c)\widehat{M_n}.$$

То есть равенство превращается в $s_i(u,c) = p_i$. То есть перед нами семейство сильных симметрий $\widehat{L}$, зависящих от констант. Напомним, что в выбранной системе координат

$$\widehat{M_i} = \begin{pmatrix} M_i^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & M_i \end{pmatrix}, \quad \widehat{N} = \begin{pmatrix} N^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & N \end{pmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} M^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & M. \end{pmatrix},$$

поэтому мы можем переписать уравнения на самом многообразии, а не на кокасательном слоении. А именно

$$S = \sqrt{M^{-1}(c_nM_1 + \cdots + c_1M_n - N)} = s_1M_1 + \cdots + s_nM_n,$$

причем по построению (теорема 6.2.2)

$$S^*\mathrm{d}f = s_1\mathrm{d}u^1 + \cdots + s_n\mathrm{d}u^n,$$

где $s_i = p_i = \frac{\partial W}{\partial u^i}$. То есть слева стоит $\mathrm{d}W$ и теорема доказана. □

Замечание 7.3.1 (Связь с классическим разделением переменных)**.** В общей теории разделения переменных хорошо известна следующая конструкция: зафиксируем координаты $u^1, \ldots, u^n$ и

1. Выберем n^2 функций s_{ij} от одной переменной;
2. С помощью функций s_{ij} составим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(u^1) & s_{12}(u^1) & \ldots & s_{1n}(u^1) \\ s_{21}(u^2) & s_{22}(u^2) & \ldots & s_{2n}(u^2) \\ & & \ddots & \\ s_{n1}(u^n) & s_{n2}(u^n) & \ldots & s_{nn}(u^n) \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей Штеккеля. Мы предполагаем, что $\det S \neq 0$;

3. Выберем $2n$ функций f_i, h_i от одной переменной и составим столбец f как
$$f = \big(f_1(u^1) + h_1(u^1), \ldots, f_n(u^n) + h_n(u^n)\big)^T;$$
4. Решим систему линейных уравнений
$$Sh = f,$$
где столбец $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$ — столбец неизвестных функций.

Для функций выполнена теорема Штеккеля [6, 102, 103], которая утверждает, что система координат $u^1, \ldots, u^n$ — разделяющая. Более того, подходящим выбором S, f на месте h_1 можно получить все гамильтонианы такого сорта, для которых $u^1, \ldots, u^n$ — координаты разделения.

Сравнивая этот классический результат с вычислениями в примере 7.2.1 мы получаем, что предложенная в предыдущем разделе конструкция позволяет получить все системы, допускающие ортогональное разделение переменных: достаточно взять в качестве L оператор с простым вещественным спектром.

Из условия (7.16) хорошо видно, что полный интеграл в этом случае имеет вид $W(u,c) = W_1(u^1,c) + \cdots + W_n(u^n,c)$. ■

Разберем три замечательных примера в размерности два.

Пример 7.3.1 (Лиувиллев случай)**.** В этом случае речь идет, по сути, об ортогональном разделении переменных в классическом смысле. Выберем L, M_1 и M_2 в форме
$$L = M_2 = \begin{pmatrix} -a(u^1) & 0 \\ 0 & -b(u^2) \end{pmatrix}, \quad M_1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Выберем регулярный закон сохранения $\mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}u^1 + \mathrm{d}u^2$. В этом случае $\mathrm{d}f_2 = M_2^* \mathrm{d}f_1 = -a(u^1)\mathrm{d}u^1 - b(u^2)\mathrm{d}u^2$. Проводя те же вычисления, что и в примере 7.2.1, мы получаем что функции f, g в координатах u^1, u^2 удовлетворяют системе Штеккеля
$$\begin{pmatrix} 1 & -a(u^1) \\ 1 & -b(u^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 + v_1(u^1) \\ p_2^2 + v_2(u^2) \end{pmatrix}.$$
Решая эту систему получаем
$$\begin{aligned} h &= \frac{p_1^2 - p_2^2}{a(u^1) - b(u^2)} + \frac{v_1(u^1) - v_2(u^2)}{a(u^1) - b(u^2)}, \\ f &= \frac{a(u^1)p_2^2 - b(u^2)p_1^2}{a(u^1) - b(u^2)} + \frac{a(u^1)v_2(u^2) - b(u^2)v_1(u^1)}{a(u^1) - b(u^2)}, \end{aligned}$$
где a, b, v_1, v_2 функции одной переменной. ■

Пример 7.3.2 (Комплексный лиувиллев случай)**.** Зафиксируем координаты u^1, u^2 и рассмотрим L, M_1, M_2 в виде
$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -b(u^1,u^2) & -a(u^1,u^2) \\ a(u^1,u^2) & -b(u^1,u^2) \end{pmatrix}.$$

Локально на M^2 можно ввести комплексную структуру $J = L$ и комплексную переменную $z = u^1 + \mathrm{i}u^2$.

Операторное поле M_2 становится в этом случае умножением на комплексно аналитическую функцию $s(z) = -b(z) + \mathrm{i}a(z)$. Взяв $v(z) = -v_1(z) + \mathrm{i}v_2(z)$ в качестве комплексно-аналитического потенциала и $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$ в качестве комплексного импульса.

Вычисления, аналогичные примеру 7.2.1 показывают, что уравнение на вещественные f и h принимает в этом случае комплексный одномерный вид

$$f + s(z)h = p^2 + v(z).$$

Решая эту систему получаем в точности

$$\begin{aligned} h &= \frac{2p_1p_2}{a(u^1,u^2)} + \frac{v_2(u^1,u^2)}{a(u^1,u^2)}, \\ f &= p_1^2 - p_2^2 + 2\frac{b(u^1,u^2)p_1p_2}{a(u^1,u^2)} + b(u^1,u^2)\frac{v_2(u^1,u^2)}{a(u^1,u^2)} - v_1(u^1,u^2), \end{aligned}$$

где $a(u^1,u^2) + \mathrm{i}b(u^1,u^2)$ и $v_1(u^1,u^2) + \mathrm{i}v_2(u^1,u^2)$ голоморфные функции от $z = u^1 + \mathrm{i}u^2$. ■

Пример 7.3.3 (Жорданов случай)**.** Зафиксируем координаты u^1, u^2 и рассмотрим операторы L, M_1, M_2 в

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} b(u^2) & b'(u^2)u^1 + 1 \\ 0 & b(u^2) \end{pmatrix}.$$

Выберем регулярный закон сохранения $\mathrm{d}f = \mathrm{d}u^1$. Полученная иерархия законов сохранения имеет вид $\mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}u^1, \mathrm{d}f_2 = b(u^2)\mathrm{d}u^1 + (b'(u^2)u^1 + 1)\mathrm{d}\,u^2$. Повторяя вычисления из примера 7.2.2 получаем следующую систему на f, h:

$$\begin{aligned} (b'(u^2)u^1 + 1)h &= 2p_1p_2 + v_1'(u^2)u^1 + v_2(u^2), \\ f + b(u^2)h &= p_1^2 + v_1(u^2). \end{aligned}$$

Решая эту систему получаем в точности

$$\begin{aligned} h &= \frac{2p_1p_2}{1 + u^1b'(u^2)} + \frac{u^1v_1'(u^2) + v_2(u^2)}{1 + u^1b'(u^2)}, \\ f &= p_1^2 - \frac{2b(u^2)p_1p_2}{1 + u^1b'(u^2)} - b(u^2)\frac{u^1v_1'(u^2) + v_2(u^2)}{1 + u^1b'(u^2)} + v_1(u^2), \end{aligned}$$

где a, b, v_1, v_2 функции одной переменной. ■

Эти три примера дают замечательное следствие.

Следствие 7.3.1. *Пусть $h = g^{ij}(u)p_ip_j + V(u)$ — функция на $T^*\mathrm{M}^2$, и $f = f^{ij}p_ip_j + U(u)$ — её интеграл. Предположим, что g — метрика. Тогда для почти всех точек многообразия M^2 существует локальная система координат u^1, u^2, в которой пара h, f приводится либо к стандартному лиувиллеву виду, либо к одному из видов, представленных в примерах 7.3.1, 7.3.2 и 7.3.3.*

Доказательство. В силу проведенных в примерах вычислений, утверждение вытекает из результата работы [12] и классического результата Дини. □

7.4 Разделение переменных и тензоры Киллинга

Говорят, что тензор K_{ij} ранга $(0,2)$ — тензор Киллинга для метрики h, если $K_{ij} = K_{ji}$ и выполнено

$$\nabla_i K_{jk} + \nabla_k K_{ij} + \nabla_j K_{ki} = 0.$$

Помимо тензора Киллинга с нижними индексами мы будем рассматривать тензоры Киллинга типа $(1,1)$, то есть операторные поля.

$$K^i_j = g^{iq} K_{qj}.$$

До этого момента ортогональные системы координат разделения "кодировались"с помощью оператора Нийенхейса L. В этом разделе мы рассмотрим иной подход, распространенный в литературе.

Пусть K — операторное поле. Будем говорить, что оно индуцирует для g ортогональное разделение переменных в окрестности точки p, если [34, 35, 6]

1. Спектр K в окрестности этой точки вещественный и простой;
2. Операторное поле K в некоторой системе координат приводится к диагональному виду;
3. K — тензор Киллинга типа $(1,1)$ для метрики g.

Третье условие, в частности, означает, что K самосопряжен относительно g. Следующая классическая теорема показывает, откуда в названии "разделение переменных":

Теорема 7.4.1 (Бененти, Предложение 2.2 в [6])**.** *Пусть K — операторное поле, индуцирующее разделение переменных для контравариантной метрики g. Тогда существует n таких невырожденных операторных полей*

$$K_0 = \mathrm{Id}, K_1 = K, K_2, \dots, K_{n-1},$$

что гамильтонианы, построенные по контравариантным метрикам

$$g_i = K_{i-1} g, \quad i = 1, \dots, n$$

в диагональных координатах K имеют вид, описанный в теореме Штеккеля.

Используя теорему Хаантьеса, два первых условия на K можно переписать как

1. Спектр K в окрестности этой точки вещественный и простой;
2. $\mathcal{H}_K = 0$.

Следующая теорема показывает, что операторному полю K соответствует интегрируемая квазилинейная система. Необходимые определения — полугамильтоновости, условий Царева и слабой нелинейности — даны в приложении 12.

Теорема 7.4.2. *Пусть в окрестности точки* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *задано операторное поле* K *с вещественным и простым спектром и нулевым кручением Хаантьеса. Следующие условия эквивалентны:*

1. K *— полугамильтоновый и слабо нелинейный;*

2. *В окрестности точки* p *найдется метрика* g*, для которой* K *индуцирует разделение переменных.*

Более того, подходящая для K *метрика ищется в квадратурах.*

Доказательство. Зафиксируем диагональные координаты $u^1, \ldots, u^n$ для операторного поля K. В этих координатах

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть дана метрика g и K индуцирует разделение переменных для g. В силу самосопряженности K контравариантная метрика g имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} g^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & g^n \end{pmatrix}.$$

В этом случае в канонических координатах (p, u) на $T^*\mathrm{M}^n$ гамильтониан h_1, построенный по g, имеет вид

$$h_1 = \frac{1}{2}\left(g^1 p_1^2 + \cdots + g^n p_n^2\right).$$

Первый интеграл, построенный по K, в свою очередь, принимает вид

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 g^1 p_1^2 + \cdots + \lambda_n g^n p_n^2\right).$$

Вычисляя скобку Пуассона этих двух функций, мы получаем

$$\begin{aligned} \{h_1, h_2\} = {} & \sum_{i=1}^{n} (g^i)^2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^i} p_i^3 + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} g^i g^j \left((\lambda_i - \lambda_j)\frac{\partial g^i}{\partial u^j} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\right) p_i^2 p_j. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Равенство нулю правой части означает равенство нулю всех коэффициентов. Взяв коэффициенты при $p_i^2 p_j$, мы получаем

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j} = -\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}, \quad i \neq j. \tag{7.19}$$

Приравнивая вторые производные $\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial g^i}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial g}{\partial u^k}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^k}\right), \quad i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i.$$

Это в точности условие Царева. Вместе с равенством нулю кручения Хаантьеса и простотой и вещественностью спектра они дают нам условие полугамильтоновости. Приравнивая к нулю коэффициенты при p_i^3 в (7.18), мы получаем, что

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^i} = 0.$$

То есть система полугамильтонова. В одну сторону теорема доказана.

Пусть теперь выполнены условия полугамильтоновости и слабой нелинейности. Из формулы 7.18 вытекает, что, для восстановления по K метрики, нам необходимо решить систему (7.19) как систему на g_i с известными λ_i.

Заметим, что система распадается на n подсистем для каждого фиксированного i. Рассмотрим такую систему для $i = 1$. Имеем

$$\frac{\partial g^1}{\partial u^j} = -\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

В этой системе u^1 играет роль параметра. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_n}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^n}\mathrm{d}u^n$$

как форму на $\mathbb{R}^{n-1}$ с координатами $u^1, \dots, u^n$. Условие полугамильтоновости означает, что $\mathrm{d}\alpha = 0$ и, стало быть, g_i находятся интегрированием замкнутых форм, зависящих от параметра. Таким образом, метрика существует и находится в квадратурах. □

Замечание 7.4.1. Вычисления, проведенные в доказательстве теоремы, возникали в классических работах, связанных с разделением переменных, множество раз. В качестве примера можно упомянуть доказательство Леммы 1.2 в лекциях Бененти [6]. ■

7.5 Геодезически эквивалентные метрики

Напомним классическое определение: метрика g и $\tilde{g}$ называются геодезически эквивалентными, если их геодезические совпадают как непараметризованные кривые. Определим для метрик оператор

$$L^i_j := \left|\frac{\det(\bar{g})}{\det(g)}\right|^{\frac{1}{n+1}} \tilde{g}^{ik} g_{kj}.$$

Условия геодезической эквивалентности для L приобретают вид (первое уравнение Синюкова)

$$\nabla_\xi L = \frac{1}{2}\big(\xi \otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L + (\xi \otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L)^g\big). \tag{7.20}$$

Здесь K^g для операторного поля K означает операторное поле, сопряжённое относительно метрики g. Пусть теперь нам дана пара g, L, где оператор L самосопряжён относительно g и невырожденный. Определим метрику $\bar{g}$ как

$$\tilde{g} = \frac{1}{|\det L|} g L^{-1}.$$

Важно помнить, что в этой формуле речь идёт про метрики с нижними индексами.

Будем говорить, что g и L геодезически согласованы, если метрики $g, \tilde{g}$ геодезически эквивалентны. Формулы выше устанавливают взаимооднозначное соответствие между парами $(g, \tilde{g})$ и (g, L). Следующая теорема полностью описывает геодезически согласованные метрики в окрестности точки p для gl-регулярного оператора Нийенхейса.

Теорема 7.5.1. *Пусть L — gl-регулярный оператор Нийенхейса, $\mathrm{d}f$ — регулярный закон сохранения, и в $\operatorname{Sym} L$ зафиксирован стандартный базис $\mathrm{Id}, L, \dots, L^{n-1}$. Возьмем произвольную симметрию $M \in \operatorname{Sym} L$ и пусть h_i — функции, построенные по теореме 7.2.1 для*

$$Q = \widehat{M} P^2.$$

Тогда

1. *Если матрица M невырожденная, то матрица h_1^{qs} гамильтониана h_1 также невырожденная. При этом $g_{qs} = (h_1)^{-1}_{qs}$ задает метрику, геодезически согласованную с оператором L;*

2. *Всякая геодезически согласованная с L метрика получается выбором подходящей симметрии M.*

Доказательство. Зафиксируем систему координат $u^i = f_i, f_i(\mathrm{p})$, где $\mathrm{d}f_i = (L^*)^{i-1}$. В этой системе координат L во второй сопровождающей форме. Обозначим через $p_1, \dots, p_n, u^1, \dots, u^n$ канонические координаты на кокасательном расслоении. Обозначим через $P = p_n \widehat{L}^{n-1} + \dots + p_1 \mathrm{Id}$.

Лемма 7.5.1. *Пусть функции h_i находятся из тождества*

$$h_1 \widehat{L}^{n-1} + \dots + h_n \mathrm{Id} = P^2. \tag{7.21}$$

Тогда контравариантная квадратичная форма h_1 невырожденная, то есть $\det\Big(h_1^{\alpha\beta}(u)\Big) \neq 0$.

Доказательство. Правая часть равенства (7.21) принимает вид

$$\Big(p_n L^{n-1} + \dots + p_1 \mathrm{Id}\Big)^2 = \sum_{i=0}^{2n-1} \left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k p_{i-k+2} \right) L^i.$$

Таким образом, из (7.21) мы получаем

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial p_i \partial p_j} L^{n-1} + \dots + \frac{\partial^2 h_n}{\partial p_i \partial p_j} \mathrm{Id} = L^{i+j-2}.$$

Таким образом, ненулевые члены $\left(h_1^{\alpha\beta}\right)$ — это в точности те, для которых на индексы выполнено условие $\alpha + \beta \geq n + 1$. Более того, мы имеем, что

$$h_1^{\alpha\beta} = 1$$

для $\alpha + \beta = n + 1$. Другими словами, матрица h_1 в фиксированных координатах принимает вид

$$\left(h_1^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & \dots & 1 & * & * \\ & \iddots & & & \\ 1 & \dots & * & * & * \end{pmatrix},$$

и, стало быть, лемма доказана. □

Лемма 7.5.2. *Пусть функции h_i находятся из тождества*

$$h_1 \widehat{L}^{n-1} + \dots + h_n \operatorname{Id} = P^2,$$

а функции $\bar{h}_i$ — из тождества

$$h_1 \widehat{L}^{n-1} + \dots + h_n \operatorname{Id} = \widehat{R}^2 P^2,$$

для некоторой симметрии R. Тогда $\bar{h}_i^{ij} = h_i^{sq} R_s^i R_q^j$.

Доказательство. Заметим, что

$$LP = L(p_n L^{n-1} + \dots + p_1 \operatorname{Id}) = (p_{n-1} + \sigma_1 p_n) L^{n-1} + \dots + \sigma_n p_n \operatorname{Id}.$$

Введем строку $p = (p_1, \dots, p_n)$. Вспоминая, что в выбранной системе координат L во второй присоединенной форме, мы получаем, что

$$pL = (\sigma_n p_n, \dots, p_{n-1} + \sigma_1 p_n).$$

Из совпадения формул мы немедленно получаем, что для произвольной симметрии $R = r_1 L^{n-1} + \dots + r_n$ коэффициенты a_i разложения

$$RP = a_n L^{n-1} + \dots + a_1 \operatorname{Id}$$

находятся как $pR = a$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, или, в координатной форме, $a_i = R_i^s p_s$. Таким образом, уравнение на $\bar{h}_i$ можно переписать как

$$h_1 \widehat{L}^{n-1} + \dots + h_n \operatorname{Id} = (a_n L^{n-1} + \dots + a_1 \operatorname{Id})^2.$$

Получаем, что $\bar{h}_i^{jk} p_j p_k = h_i^{qs} a_q a_s = h_i^{sq} R_s^j R_q^k p_j p_k$. Таким образом, лемма доказана. □

В частности, легко видеть, что если M — невырожденная симметрия, то, взяв в качестве $R = \sqrt{M}$ (напомним, что мы берем всегда "хороший"корень), мы получаем, что $\bar{h}_1$ — невырожденная. Теперь убедимся, что полученные таким образом контравариантные метрики геодезически согласованы с L.

Из теоремы 7.3.1 следует, что L — самосопряжённый относительно метрики. Проверять в нашем случае условие Синюкова напрямую довольно непросто. Вместо этого мы воспользуемся эквивалентной записью этого условия из [13](теорема 1): h_1 и L геодезически согласованы, если квадратичные функции на кокасательном расслоении

$$H = \frac{1}{2}h_1(p,u) = \frac{1}{2}h_1^{ij}(u)p_ip_j \quad \text{и} \quad F = h_1^{ks}L_s^jp_kp_j \tag{7.22}$$

удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\{H,F\} = 2H\cdot\left(\tfrac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^q}h_1^{\alpha q}p_\alpha\right).$$

Из формул (7.11) мы имеем соотношение

$$\widehat{L}^*\mathrm{d}h_1 = \sigma_1\mathrm{d}h_1 + \mathrm{d}h_2.$$

Из этих соотношений в данных координатах $u^1,\dots,u^n$ получаем

$$h_2^{jk} = h_1^{jq}L_q^k - \sigma_1h_1^{jk}, \quad L_i^s\frac{\partial h_1^{jk}}{\partial u^s} - \sigma_1\frac{\partial h_1^{jk}}{\partial u^i} = \frac{\partial h_2^{jk}}{\partial u^i}.$$

Из первого условия немедленно вытекает, что $F = h_2 + \sigma_1h_1$. В свою очередь $\{h_1,h_2\} = 0$, поэтому

$$\{H,F\} = \{\tfrac{1}{2}h_1, h_2+\sigma_1h_1\} = \tfrac{1}{2}h_1\cdot\{h_1,\sigma_1\} = H\cdot\{h_1,\operatorname{tr} L\} = 2H\cdot\left(\frac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^q}h_1^{\alpha q}p_\alpha\right).$$

Это в точности условие выше, то есть h_1 геодезически согласована с L

Теперь покажем, что таким образом мы можем построить все метрики, геодезически согласованные с gl-регулярным оператором L. Прежде чем перейти к доказательству, нам потребуется еще одна переформулировка условия Синюкова.

Лемма 7.5.3. *Оператор L и метрика g геодезически согласованы тогда и только тогда, когда*

1. *L самосопряжен относительно g;*
2. *Для произвольных векторных полей ξ,η выполнено*
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{L\xi}\big(g(\eta,\xi)\big) - \mathcal{L}_\xi\big(g(\eta,L\xi)\big) - g\big(\eta,[L\xi,\xi]\big)+\\ + g\big([\eta,L\xi],\xi\big) - g\big([\eta,\xi],L\xi\big) = g(\eta,\xi)\,\mathcal{L}_\xi\operatorname{tr} L;\end{aligned} \tag{7.23}$$
3. *В локальных координатах*
$$\begin{aligned}g_{k\alpha}\frac{\partial L_j^\alpha}{\partial u^i} + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^k}\right)L_j^\alpha + g_{j\alpha}\frac{\partial L_k^\alpha}{\partial u^i} + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j}\right)L_k^\alpha =\\ = g_{ik}\,\frac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^j} + g_{ij}\,\frac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^k}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Доказательство. Условие Синюкова имеет вид

$$\nabla_\xi L = \frac{1}{2}(\xi\otimes \mathrm{d}\operatorname{tr} L + (\xi\otimes\mathrm{d}\operatorname{tr} L)^g).$$

Это условие можно эквивалентно переписать как

$$g(\nabla_\eta L\xi,\xi) = g(\eta,\xi)\mathcal{L}_\xi\operatorname{tr} L$$

для произвольных векторных полей ξ, η. Мы получаем

$$g\big((\nabla_\eta L)\xi, \xi\big) = g\big(\nabla_\eta(L\xi) - L\nabla_\eta\xi, \xi\big) = g\big([\eta, L\xi] + \nabla_{L\xi}\eta - L([\eta,\xi] + \nabla_\xi\eta), \xi\big) =$$
$$g\big(\nabla_{L\xi}\eta, \xi\big) - g\big(\nabla_\xi\eta, L\xi\big) + g\big([\eta, L\xi], \xi\big) - g\big([\eta,\xi], L\xi\big) =$$
$$\nabla_{L\xi}\big(g(\eta,\xi)\big) - g\big(\eta, \nabla_{L\xi}\xi\big) - \nabla_\xi\big(g(\eta, L\xi)\big) + g\big(\eta, \nabla_\xi L\xi\big) + g\big([\eta, L\xi], \xi\big) - g\big([\eta,\xi], L\xi\big) =$$
$$\nabla_{L\xi}\big(g(\eta,\xi)\big) - \nabla_\xi\big(g(\eta, L\xi)\big) - g\big(\eta, \nabla_{L\xi}\xi - \nabla_\xi L\xi\big) + g\big([\eta, L\xi], \xi\big) - g\big([\eta,\xi], L\xi\big) =$$
$$\mathcal{L}_{L\xi}\big(g(\eta,\xi)\big) - \mathcal{L}_\xi\big(g(\eta, L\xi)\big) - g\big(\eta, [L\xi, \xi]\big) + g\big([\eta, L\xi], \xi\big) - g\big([\eta,\xi], L\xi\big),$$

что в точности дает (7.23). Запишем теперь его в локальных координатах:

$$\frac{\partial L^m_j}{\partial u^i} + \Gamma^m_{i\alpha} L^\alpha_j - \Gamma^\alpha_{ij} L^m_\alpha = \frac{1}{2}(l_j \delta^m_i + g^{\alpha m} l_\alpha g_{ij}), \quad \text{где } l_j = \frac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^j}.$$

Умножая обе части на g_{km} (и суммируя по m), мы получаем

$$g_{km}\frac{\partial L^m_j}{\partial u^i} + \Gamma_{i\alpha,k} L^\alpha_j - g_{km}\Gamma^\alpha_{ij} L^m_\alpha = \frac{1}{2}(l_j g_{ik} + l_k g_{ij}).$$

Используя тот факт, что L самосопряжен, мы получаем (индексы переименованы)

$$g_{k\alpha}\frac{\partial L^\alpha_j}{\partial u^i} + \Gamma_{i\alpha,k} L^\alpha_j - \Gamma_{ij,\alpha} L^\alpha_k = \frac{1}{2}(l_j g_{ik} + l_k g_{ij}).$$

Подставляя выражения для символов Кристоффеля первого рода

$$g_{k\alpha}\frac{\partial L^\alpha_j}{\partial u^i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^k}\right) L^\alpha_j - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right) L^\alpha_k = \frac{1}{2}(l_j g_{ik} + l_k g_{ij}).$$

Снова пользуясь самосопряженностью L, мы получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g_{k\alpha}\frac{\partial L^\alpha_j}{\partial u^i} + \frac{1}{2}g_{\alpha j}\frac{\partial L^\alpha_k}{\partial u^i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^k}\right) L^\alpha_j + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j}\right) L^\alpha_k = \frac{1}{2}(l_j g_{ik} + l_k g_{ij}).\end{aligned} \tag{7.25}$$

После умножения обеих частей равенства на два, мы получаем формулу (7.24). Лемма доказана. □

Также нам потребуется ещё одна лемма.

Лемма 7.5.4. *Пусть g и L геодезически согласованы. Тогда метрика $\tilde g = gM$ геодезически согласована с L если и только если*

$$g\big(\langle M, L\rangle(\eta,\xi), \xi\big) = 0$$

для всех векторных полей η, ξ.

Доказательство. Воспользуемся условием согласованности в форме 7.23. Мы получаем

$$\mathcal{L}_{L\xi}\big(\tilde g(\eta,\xi)\big) - \mathcal{L}_\xi\big(\tilde g(\eta, L\xi)\big) + \tilde g\big(\eta, [\xi, L\xi]\big) + \tilde g\big([\eta, L\xi], \xi\big) - \tilde g\big(L[\eta,\xi], \xi\big) =$$
$$\mathcal{L}_{L\xi}\big(g(M\eta,\xi)\big) - \mathcal{L}_\xi\big(g(M\eta, L\xi)\big) + g\big(M\eta, [\xi, L\xi]\big) + g\big(M[\eta, L\xi] - ML[\eta,\xi], \xi\big) =$$
$$\mathcal{L}_{L\xi}\big(g(M\eta,\xi)\big) - \mathcal{L}_\xi\big(g(M\eta, L\xi)\big) + g\big(M\eta, [\xi, L\xi]\big) + g\big([M\eta, L\xi] - L[M\eta,\xi], \xi\big) +$$
$$g\big(M[\eta, L\xi] - ML[\eta,\xi] - [M\eta, L\xi] + L[M\eta,\xi], \xi\big) = g\big(\langle M, L\rangle(\eta,\xi), \xi\big).$$

Лемма доказана. □

Нам также потребуется следующий алгебраический факт

Лемма 7.5.5. *Пусть L — самосопряжённый относительно метрики g. Тогда L самосопряжённый относительно метрики $\tilde{g} = gM$ если и только если $ML - LM = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\tilde{g}(L\xi, \eta) - \tilde{g}(\xi, L\eta) = g(ML\xi, \eta) - g(M\xi, L\eta) = g\big((ML - LM)\xi, \eta\big).$$

Так как g невырождено, то обращение в ноль правой части равенства эквивалентно тому, что $ML - LM = 0$. Лемма доказана. $\square$

Пусть теперь дан gl-регулярный оператор Нийенхейса. Как мы установили выше, для него найдется геодезически согласованная метрика g. Пусть $\tilde{g}$ — некоторая другая метрика, согласованная с L. По построению L самосопряжен относительно $\tilde{g}$. Обозначим через M оператор, связывающий две метрики, то есть $\tilde{g} = gM$. Значит M самосопряжен относительно обеих метрик и по лемме 7.5.5 коммутирует с L.

Так как L — gl-регулярный, то M записывается в виде $M = g_1 L^{n-1} + \dots + g_n \mathrm{Id}$ для некоторых гладких функций g_i. Введем тензор

$$T_M = \mathrm{d}g_1 \otimes L^{n-1} + \dots + \mathrm{d}g_n \otimes \mathrm{Id}\,.$$

По определению

$$LT_M(\xi, \eta) = T_M(\xi, L\eta).$$

Так как L самосопряжен относительно g, то получаем

$$g\big(T_M(\xi, \eta), \zeta\big) = g\big(\eta, T_M(\xi, \zeta)\big) \tag{7.26}$$

для всех векторных полей ξ, η, ζ. Из формул 5.10 получаем, что $\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = T_M(L\xi, L\eta) - T_M(\xi, L\eta)$. Значит, из (7.5), (7.26) получается

$$\begin{aligned}
& g\big(\langle M, L\rangle(\eta, \xi), \xi\big) = \\
&= g\big(T_M(\xi, L\eta), \xi\big) - g\big(T_M(L\xi, \eta), \xi\big) = g\big(L\eta, T_M(\xi, \xi)\big) - g\big(\eta, T_M(L\xi, \xi)\big) = \\
&= g\big(\eta, LT_M(\xi, \xi)\big) - g\big(\eta, T_M(L\xi, \xi)\big) = g\big(\eta, T_M(\xi, L\xi) - T_M(L\xi, \xi)\big) = \\
&= -\,g\big(\eta, \langle M, L\rangle(\xi, \xi)\big).
\end{aligned}$$

По лемме 7.5.4 из этой формулы вытекает, что $\langle M, L\rangle(\xi, \xi) = 0$ для всех ξ. То есть M — симметрия L и, стало быть, сильная симметрия в силу теоремы 6.2.1. Утверждение теоремы доказано. $\square$

Глава 8

Нийенхейсовы пучки и их приложения

8.1 Плоские метрики с геодезически эквивалентным партнером

Для приложений в математической физике важную роль играют плоские метрики, геодезически согласованные с данным оператором Нийенхейса. Если раньше мы описывали метрики, согласованные с данным оператором Нийенхейса, то следующая теорема решает обратную задачу: она описывает все операторы Нийенхейса, согласованные с данной метрикой. В данном случае — плоской.

Теорема 8.1.1. *Пусть L и g — геодезически согласованы и (ковариантная) метрика g — плоская. Тогда в плоских координатах $u^1, \dots, u^n$ компоненты контравариантного тензора $\bar{g} = Lg^{-1}$ имеют вид*

$$\bar{g}^{ij} = a^{ij} + c^i u^j + c^j u^i - K u^i u^j,$$

где a^{ij} — симметрическая постоянная матрица, c^j, K — набор из $n+1$ констант. Если $\bar{g}$ невырожденная, то есть задает контравариантную метрику, то она имеет постоянную секционную кривизну K.

Доказательство. Начнем доказательство с пары лемм.

Лемма 8.1.1. *Пусть дана контравариантная метрика g и геодезически согласованный с ней оператор L. Определим $\bar{g}^{ij} = L^i_q g^{qj}$. Тогда символы Кристоффеля $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ связности Леви-Чивиты метрики $\bar{g}^{ij}$ и символы Кристоффеля Γ^k_{ij} связности Леви-Чивиты метрики g^{ij} связаны формулой:*

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \lambda^k \bar{g}_{ij}, \tag{8.1}$$

где $\lambda^i = \frac{1}{2} g^{iq} \frac{\partial \operatorname{tr} L}{\partial u^q}$.

Доказательство. Поднимая второй индекс в условии Синюкова (7.20) с помощью метрики g, мы получаем

$$\nabla_k \bar{g}^{ij} = \lambda^i \delta^j_k + \lambda^j \delta^i_k. \tag{8.2}$$

Расписывая правую часть по формуле ковариантной производной для тензора с двумя верхними индексами и перенося левую часть в правую, получаем

$$0 = \frac{\partial \bar g^{ij}}{\partial u^k} + \bar g^{is}\Gamma^j_{ks} - \lambda^j\delta^i_k + \bar g^{js}\Gamma^i_{ks} - \lambda^i\delta^j_k = \frac{\partial \bar g^{ij}}{\partial u^k} + \bar g^{is}\Big(\Gamma^j_{ks} - \lambda^j \bar g_{ks}\Big) + \bar g^{js}\Big(\Gamma^i_{ks} - \lambda^i \bar g_{ks}\Big).$$

В правой части стоит ковариантная производная от $\bar g^{ij}$ вдоль симметрической связности $\bar\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \lambda^k \bar g_{ij}$. То есть $\bar g^{ij}$ параллельна вдоль этой связности, и эта связность Леви-Чивиты для этой метрики. Лемма доказана. □

Лемма 8.1.2. *Пусть метрика g плоская и геодезически согласована с оператором L. Тогда метрика $\bar g = gL^{-1}$ имеет постоянную (возможно, нулевую) секционную кривизну.*

Доказательство. Запишем для метрики $\bar g$ следующую систему уравнений в частных производных на функцию h (индексы p, q произвольные, но фиксированы):

$$\bar\nabla_j \bar\nabla^i h - \frac{1}{n}\bar\nabla_q \bar\nabla^q h\, \delta^i_j = 0, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{8.3}$$

Для $n > 2$ известно, что если размерность пространства решений для некоторого набора индексов p, q уравнения (8.3) как минимум $n+1$, то метрика g имеет постоянную секционную кривизну ([112], стр.343). Для размерности $n = 2$ идея изложена в [12] (Лемма 3.2).

Пусть теперь $u^1, \dots, u^n$ плоские координаты для g. В силу леммы 8.1.1 мы получаем

$$\begin{aligned}\bar\nabla_j \bar\nabla^i h - \tfrac{1}{n}\bar\nabla_q \bar\nabla^q h\, \delta^i_j &= \bar g^{iq}\frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^q} + \lambda^q \frac{\partial h}{\partial u^q}\delta^i_j - \frac{1}{n}\bar g^{pq}\frac{\partial^2 h}{\partial u^p \partial u^q} - \lambda^q\frac{\partial h}{\partial u^q}\delta^i_j = \\ &= \bar g^{iq}\frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^q} - \frac{1}{n}\bar g^{pq}\frac{\partial^2 h}{\partial u^p \partial u^q} = 0.\end{aligned}$$

Очевидно, что функции $h = a_q u^q + c$ является решением для произвольных $a_1, \dots, a_n, c$. То есть размерность пространства решений не меньше $n+1$ и, стало быть, $\bar g$ — постоянной секционной кривизны. □

Далее нам потребуется следующее замечательное тождество (формула 13, Теорема 7 в [17]), связывающее тензор кривизны Римана метрики g и оператор, геодезически согласованный с ним:

$$[R(\xi,\eta), L] = [\eta\otimes g(\xi) - \xi\otimes g(\eta), M], \quad \text{где} \quad M^i_j = \nabla_j \lambda^i. \tag{8.4}$$

Здесь ξ, η — произвольные векторные поля, [,] означает матричный коммутатор, то есть $[A, B] = AB - BA$. Мы приводим его без доказательства. Верна следующая лемма

Лемма 8.1.3. *Пусть плоская метрика g геодезически согласована с невырожденным оператором L. Обозначим через $\lambda = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L$, $\lambda^i = g^{iq}\frac{\partial\lambda}{\partial u^q}$. Тогда выполнена следующая формула*

$$\nabla_j \lambda^i + K\delta^i_j = 0, \tag{8.5}$$

где K — секционная кривизна метрики $\bar g = gL^{-1}$ (она постоянна по лемме 8.1.2).

Доказательство. Пусть сначала $L = f\mathrm{Id}$. В этом случае уравнение Синюкова (8.2) в плоских координатах g (матрица g^{ij} постоянна) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial u^k} g^{ij} = \frac{n}{2} g^{iq} \frac{\partial f}{\partial u^q} \delta^j_k + \frac{n}{2} g^{jq} \frac{\partial f}{\partial u^q} \delta^i_k.$$

Без ограничения общности можем считать, что g^{ij} — диагональна. Тогда при $k \neq i = j = 1$ справа в этом выражении стоит ноль. Слева стоит множитель $g^{11} \neq 0$, то есть $\frac{\partial f}{\partial u^k} = 0, k \neq 1$. Проделывая то же самое для $i = j = 2$, получаем, что все производные нули, $f = \mathrm{const}$. В этом случае утверждение леммы выполняется тривиальным образом.

Всюду далее считаем, что L не пропорционален Id. Так как g — плоская метрика, то $R(\xi, \eta) = 0$. Из тождества (8.4) мы получаем, что M коммутирует со всеми матрицами вида $\xi \otimes g(\eta) - \eta \otimes g(\xi)$. Легко видеть, что в точке матрицу g можно считать диагональной. Подставляя базисные векторные поля с подходящими знаками, мы будем получать либо симметрические матрицы, либо кососимметрические. В любом случае $M^i_j = \rho\, \delta^i_j$.

Так как L — сильная симметрия самого себя, то по лемме 7.5.4 метрика $\bar g$ геодезически согласована с L. Имеем

$$\begin{aligned}\bar M^i_j = \bar g^{iq} \bar\nabla_j \lambda_q = \bar g^{iq} \big(\nabla_j \lambda_q + \lambda^p \lambda_p \bar g_{qj}\big) = \\ = L^i_p M^p_j + \lambda^q \lambda_q \delta^j_i = \rho L^i_j + \lambda^q \lambda_q \delta^i_j.\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались леммой 8.1.1. По лемме 8.1.2 у метрики $\bar g$ постоянная секционная кривизна. Из этого вытекает, что тензор кривизны Римана для этой метрики действует на векторах как

$$\bar R(\xi, \eta) = K(\xi \otimes \bar g(\eta) - \eta \otimes \bar g(\xi)).$$

Тождество (8.4) для $\bar g$ дает

$$0 = [\bar R(\eta, \xi), L] - [\eta \otimes \bar g(\xi) - \xi \otimes \bar g(\eta), \bar M] = [\eta \otimes \bar g(\xi) - \xi \otimes \bar g(\eta)), (K - \rho) L].$$

Так как ξ, η — произвольные, получаем $\rho = K$. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы. В плоских координатах $u^1, \dots, u^n$ метрики g мы имеем

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial u^j} = -K \delta^i_j. \tag{8.6}$$

Из этого вытекает, что $\lambda^i = c^i - K u^i$, для некоторого набора констант c^i. В свою очередь формула (8.2) дает

$$\frac{\partial \bar g^{ij}}{\partial u^k} = (c^i - K u^i) \delta^j_k + (c^j - K u^j) \delta^i_k. \tag{8.7}$$

Интегрируя, получаем первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы — это в точности утверждение леммы 8.1.3. Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 8.1.1. Напомним, что плоская система координат — то есть система координат, в которой метрика приведена к постоянному виду — определена с точностью до линейной замены координат, то есть замены вида

$$v^i = r^i_s u^s + s^i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.8}$$

Здесь r^i_j — компоненты постоянной матрицы R с условием $\det R \neq 0$, s^i — компоненты вектора сдвига начала координат. Легко проверяется, что при сдвигах, то есть при заменах вида (8.8) с условием $R = \mathrm{Id}$, параметры преобразуются следующим образом

$$K \to K, \quad c^i \to c^i + Ks^i, \quad b^{ij} \to b^{ij} - c^i s^j - s^i c^j - K s^i s^j.$$

При заменах вида (8.8), где начало координат остается на месте (вектор сдвига отсутствует, то есть $s^i = 0$), параметры преобразуются следующим образом:

1. b^{ij} меняется как билинейная симметрическая форма на V^*;
2. c^i меняется как вектор;
3. K не меняется.

Таким образом, возникает вещественная задача описания нормальных форм для пар $g^{ij}, \bar{g}^{ij}$. Из скаженного выше она сводится к задаче о нормальных формах некоторых объектов из линейной алгебры. ■

8.2 Пуассоново согласованные пучки метрик

Начнем этот раздел с напоминания базовых формул римановой геометрии. Пусть дана метрика g и g_{ij} — ее компоненты в фиксированной системе координат $u^1, \dots, u^n$. Символы Кристоффеля Γ^i_{jk} и контравариантные символы Кристоффеля Γ^{ij}_k для этой метрики определяются как

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{iq} \Big(\frac{\partial g_{jq}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^q} \Big), \quad g^{iq} \Gamma^j_{qk} = \Gamma^{ij}_k.$$

Нам потребуется две версии тензора Римана для соответствующей метрики R^i_{jkl} и R^{ij}_{kl}, определяемые по формулам:

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} + \Gamma^i_{ql} \Gamma^q_{jk} - \Gamma^i_{qk} \Gamma^k_{jl}, \quad R^{ij}_{kl} = g^{iq} R^j_{qkl}.$$

Будем говорить, что метрики g и $\bar{g}$ пуассоново согласованы, если:

1. контравариантные символы Кристоффеля для линейной комбинации $\lambda g_{ij} + \mu \bar{g}_{ij}$ равны $\lambda \Gamma^{ij}_k + \mu \bar{\Gamma}^{ij}_k$ для всех допустимых λ, μ;
2. Тензор кривизны для для линейной комбинации $\lambda g_{ij} + \mu \bar{g}_{ij}$ равен $\lambda R^{ij}_{kl} + \mu \bar{R}^{ij}_{kl}$ для всех допустимых λ, μ.

Легко видеть, что в случае, когда метрики $g, \bar{g}$ имеют постоянную секционную кривизну, условия выше эквивалентны просто согласованности соответствующих слабо нелокальных гамильтоновых операторов ([37, 75]).

Пример 8.2.1. Пусть оператор Нийенхейса L геодезически согласован с плоской метрикой g^{ij}. Обозначим $\bar{g} = Lg$ и соответствующие контравариантные символы Кристоффеля через $\bar{\Gamma}^{ik}_j$. Из формул 8.1 и 8.6 мы получаем, что

$$\bar{\Gamma}^{ik}_j = (c^i - Ku^i)\delta^j_k. \tag{8.9}$$

Пусть теперь оператор Нийенхейса M также согласован с g^{ij}. Обозначим $\hat{g} = Mg$ и пусть

$$\hat{g}^{ij} = \hat{a}^{ij} + \hat{c}^i u^j + \hat{c}^j u^i - \hat{K} u^i u^j.$$

Соответствующие символы Кристоффеля обозначим через $\hat{\Gamma}^{ik}_j$. Из формулы 8.9 вытекает, что контравариантные символы Кристоффеля для линейной комбинации — линейная комбинация символов Кристоффеля к с теми же коэффициентами.

По теореме 8.1.1 мы получаем, что такая метрика имеет постоянную кривизну, равную линейной комбинации K и $\hat{K}$. Значит, и тензоры кривизны складываются линейно. То есть метрики $\bar{g}$ и $\hat{g}$ пуассоново согласованы. В частности, теорема 8.1.1 дает естественный пример пуассонова пучка. ■

Если в определении пуассоновой согласованности выполнено только первое свойство, то есть условие на контравариантные символы Кристоффеля, то такие метрики называются почти пуассоново согласованными. По теореме Мохова [145] пара контравариантных метрик g^{ij} и $\bar{g}^{ij}$ почти согласованы тогда и только тогда, когда $L^i_j = \bar{g}^{iq} g_{qj}$ — оператор Нийенхейса.

Замечание 8.2.1. Вторая половина теоремы Мохова [145] говорит, что если у L простой вещественный спектр, то g^{ij} и $\bar{g}^{ij}$ пуассоново согласованы. В случае, когда у оператора Нийенхейса L имеются жордановы блоки, это утверждение неверно. На плоскости с координатами x, y рассмотрим пару метрик

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} \exp xy & 0 \\ 0 & \exp xy \end{pmatrix}.$$

По построению L — оператор Нийенхейса и, следовательно, они почти согласованы. Можно показать, однако они не являются согласованными. ■

Из теоремы Мохова также вытекает замечательное следствие.

Следствие 8.2.1. *Пусть задан пучок согласованных контравариантных метрик (не обязательно конечномерный!). Выберем фиксированную метрику g_0 и сопоставим каждой метрике пучка $L = gg_0^{-1}$. Полученное пространство линейных операторов состоит из операторов Нийенхейса. Выбор в качестве g_0 метрики $L_0 g_0$ соответствует преобразованию линейного пространства $L \to LL_0^{-1}$ для некоторого невырожденного L_0 из пучка*

Замечание 8.2.2. Пусть g — метрика, геодезически согласованная с gl-регулярным оператором L. Эта метрика участвует сразу в нескольких конструкциях:

1. По метрике g с помощью оператора $|\det L|^{-1} L^{-1}$ строится геодезически согласованная с ней метрика;
2. По метрике g с помощью произвольных сильных симметрий M оператора L строятся геодезически согласованные с ней метрики;

3. По контравариантной метрике g^{-1} и семейству операторов $\det(\mathrm{Id}-\lambda L)\big(\mathrm{Id}-\lambda L\big)^{-1}$ строится семейство коммутирующих квадратичных по импульсам функций на кокасательном расслоении.

■

8.3 Основные определения и характеристическое свойство пучков Нийенхейса

Подпространство $\mathcal{P}$ (конечномерное или бесконечномерное!) в $\Psi^1(\mathrm{M}^n)$ называется нийенхейсовым пучком, если выполнены следующие эквивалентные определения:

1. Для любых $L, M \in \mathcal{P}$ верно, что $[[L, M]]_{FN} = 0$;
2. Любой $L \in \mathcal{P}$ — оператор Нийенхейса.

Эквивалентность двух формул вытекает из замечательной формулы для скобки Фролихера-Нийенхейса

$$[[L, M]]_{FN} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{N}_{L+M} - \mathcal{N}_L - \mathcal{N}_M\Big)$$

и условия линейности для $\mathcal{P}$. Следующая несложная теорема является, как мы увидим дальше, важным характеристическим свойством нийенхейсовых пучков.

Теорема 8.3.1. *Пусть L и M — операторы Нийенхейса и пусть M невырожденный. Тогда $[[L, M]]_{FN} = 0$ тогда и только тогда, когда LM^{-1} — оператор Нийенхейса.*

Доказательство. Напомним, что скобка Фролихера-Нийенхейса для двух операторов записывается как:

$$\begin{aligned}[[L, M]]_{FN}(\xi, \eta) = L[M\xi, \eta] + L[\xi, M\eta] + M[L\xi, \eta] + M[\xi, L\eta]- \\ - LM[\xi, \eta] - ML[\xi, \eta] - [L\xi, M\eta] - [M\xi, L\eta] = 0.\end{aligned}$$

Здесь ξ, η — произвольные векторные поля. Мы докажем следующее тождество, из которого утверждением теоремы вытекает очевидным образом:

$$\mathcal{N}_L(\xi, \eta) + LM^{-1}LM^{-1}\mathcal{N}_M(\xi, \eta) - \mathcal{N}_{LM^{-1}}(M\xi, M\eta) = LM^{-1}[[L, M]](\xi, \eta).$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_L(\xi, \eta) + LM^{-1}LM^{-1}\mathcal{N}_M(\xi, \eta) - \mathcal{N}_{LM^{-1}}(M\xi, M\eta) = \\ =&LM^{-1}M[L\xi, \eta] + LM^{-1}M[\xi, L\eta] - LM^{-1}ML[\xi, \eta] - [L\xi, L\eta]+ \\ +&LM^{-1}L[M\xi, \eta] + LM^{-1}L[\xi, M\eta] - LM^{-1}LM[\xi, \eta] - LM^{-1}LM^{-1}[M\xi, M\eta]- \\ -&LM^{-1}[L\xi, M\eta] - LM^{-1}[M\xi, L\eta] + LM^{-1}LM^{-1}[M\xi, M\eta] + [L\xi, L\eta] = \\ =&LM^{-1}[[L, M]](\xi, \eta),\end{aligned}$$

как и утверждалось. Таким образом, теорема доказана. □

Пример 8.3.1. Рассмотрим евклидову плоскую метрику g^{ij} и все геодезически согласованные с ней операторы Нийенхейса L. Они образуют линейное пространство, стало быть, задают пучок Нийенхейса. Мы будем обозначать его как $\mathcal{P}_1$.

Выберем представителя общего положения, то есть такой L, что для метрики $\bar g = Lg$ в плоских координатах $u^1, \dots, u^n$ имеем

$$\bar g^{ij} = a^{ij} + c^i u^j + c^j u^i - K u^i u^j,$$

где $K \neq 0$. Выполним сдвиг на вектор s с координатами $s^i = -\frac{1}{K} c^i$. В результате получаем

$$\bar g^{ij} = b^{ij} - K u^i u^j.$$

В свою очередь оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u^2 & \dots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & u_2^2 & \dots & u_2 u_n \\ & & \ddots & \\ u_1 u_n & u_2 u_n & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Вычисления в примере 3.4.1 показывают, что:

$$\det(\lambda \mathrm{Id} - L) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_i) + \sum_{j=1}^n u_j^2 \prod_{i=1, i\neq j}^n (\lambda - a_j),$$

то есть собственные значения такого оператора задают эллиптическую систему координат. ■

Мы будем называть пучок максимальным, если он максимален по включению как линейное пространство.

Пример 8.3.2. Пусть спектр оператора Нийенхейса L вещественный и простой. В подходящей системе координат он имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_i' \neq 0$. Рассмотрим M с условием $[[L, M]]_{FN} = [[L^2, M]]_{FN} = 0$. Вычислим первую скобку в диагональных координатах L. Как обычно, ξ_i обозначают базисные векторные поля (по повторяющимся греческим индексам суммирование есть, по латинским его нет):

$$\begin{aligned} [[L, M]]_{FN}(\xi_i, \xi_j) &= [L\xi_i, M\xi_j] + [M\xi_i, L\xi_j] - L[\xi_i, M\xi_j] - M[L\xi_i, \xi_j] - M[\xi_i, L\xi_j] - L[M\xi_i, \xi_j] = \\ &= [\lambda_i \xi_i, M_j^\alpha \xi_\alpha] + [M_i^\alpha \xi_\alpha, \lambda_j \xi_j] - L[\xi_i, M_j^\alpha \xi_\alpha] - L[M_i^\alpha \xi_\alpha, \xi_j] = \\ &= \lambda_i \frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i} \xi_\alpha - \lambda_i' M_j^i \xi_i + \lambda_j' M_i^j \xi_j - \lambda_j \frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j} \xi_\alpha - \lambda_\alpha \frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i} \xi_\alpha + \lambda_\alpha \frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j} \xi_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha \neq i,j} \left((\lambda_i - \lambda_\alpha) \frac{\partial M_j^\alpha}{\partial u^i} - (\lambda_j - \lambda_\alpha) \frac{\partial M_i^\alpha}{\partial u^j} \right) \xi_\alpha + \left((\lambda_i - \lambda_j) \frac{\partial M_j^j}{\partial u^i} + \lambda_j' M_i^j \right) \xi_j - \\ &- \left((\lambda_j - \lambda_i) \frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} + \lambda_i' M_j^i \right) \xi_i. \end{aligned}$$

На внедиагональные элементы мы получаем условие

$$(\lambda_j - \lambda_i)\frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} + \lambda_i' M_j^i = 0, \quad i \neq j.$$

Проводя вычисления для L^2 мы получаем условие

$$(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)\frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} + 2\lambda_i\lambda_i' M_j^i = 0, \quad i \neq j. \tag{8.10}$$

Умножая первое равенство на $2\lambda_i$ и вычитая из второго, мы получаем

$$-(\lambda_j - \lambda_i)^2\frac{\partial M_i^i}{\partial u^j} = 0, \quad i \neq j.$$

Из этого вытекает, что M_i^i зависит только от u^i. Подставляя это в равенство (8.10), получаем, что $M_j^i = 0, i \neq j$ (здесь мы воспользовались $\lambda_i' \neq 0$). Из этого получается, что M — диагонален в координатах $u^1, \dots, u^n$ и является оператором Нийенхейса

Теперь рассмотрим L с вещественным простым спектром и возьмем $\operatorname{Sym} L$. Там содержится оператор Нийенхейса с условием $\lambda_i' \neq 0$ вместе со своим квадратом. Применяя рассуждения выше, получаем что централизатор такого пучка в смысле скобки Фролихера-Нийенхейса совпадает с ним самим, а, значит, пучок максимальный. ■

8.4 Два исключительных конечномерных пучка

Обозначим через $\mathcal{M}$ — нийенхейсов пучок размерности n^2, операторы которого в подходящей системе координат постоянны. То есть, в соответствующей системе координат (которую мы будем называть плоской для пучка) пучок состоит из всех постоянных матриц $n \times n$. Обозначим через $\mathcal{S}$ — нийенхейсов пучок размерности $n(n+1)/2$, операторы которого в подходящей системе координат постоянны и состоят из всех симметричных матриц.

Наконец, через $\mathcal{P}_2$ обозначим линейное пространство операторных полей, которые в подходящей системе координат приводятся к виду

$$L_j^i = b_j^i + u^i c^j, \tag{8.11}$$

где b_j^i, c^j — произвольные наборы констант. То есть размерность этого пространства равна $n^2 + n$ и в качестве подпространства оно содержит и пучок $\mathcal{S}$ и пучок $\mathcal{M}$.

Теорема 8.4.1. *Выполнены следующие свойства:*

1. $\mathcal{P}_2$ *— максимальный пучок Нийенхейса;*
2. *Любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий* M *в плоских координатах совпадает с* $\mathcal{P}_2$*;*
3. *В случае* $n \geq 3$ *любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий* $\mathcal{S}$ *в плоских координатах совпадает либо с* $\mathcal{P}_1$*, либо с* $\mathcal{P}_2$*.*

Доказательство. Начнем с доказательства первого утверждения теоремы. Введем операторное поле B с компонентами $b^i_j = u^i c^j$. Имеем, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[[B,B]](\partial_{u^i},\partial_{u^j}) = B[B\partial_{u^i},\partial_{u^j}] + B[\partial_{u^i},B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i},B\partial_{u^j}] = \\
&= B[c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha},\partial_{u^j}] + B[\partial_{u^i},c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] = \\
&= -c^i c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^i c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

То есть B — оператор Нийенхейса. Возьмем операторное поле A, матрица которого a^i_j постоянна в данной системе координат. При $i \neq j$ получаем

$$\begin{aligned}
&[[A,B]](\partial_{u^i},\partial_{u^j}) = \\
&= A[B\partial_{u^i},\partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i},B\partial_{u^j}] - [A\partial_{u^i},B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i},A\partial_{u^j}] = \\
&= A[c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha},\partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i},c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [a^\alpha_i \partial_{u^\alpha}, c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, a^\beta_j \partial_{u^\beta}] = \\
&= -c^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} + c^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} - c^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + c^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $[[A,A]] = 0$, условие Нийенхейса для $A+B$ имеет вид

$$[[A+B,A+B]] = 2[[A,B]] + [[B,B]] = 0.$$

Таким образом, линейное пространство $\mathcal{P}_2$ действительно состоит из операторов Нийенхейса. Применяя это же равенство для $L, M \in \mathcal{P}_2$, получаем $[[L,M]] = 0$, то есть $\mathcal{P}_2$ — пучок Нийенхейса.

Опишем централизатор $\mathcal{M}$. Обозначим его как $C(\mathcal{M})$. Зафиксируем i, j и рассмотрим $A = \partial_{u^i} \otimes \mathrm{d}u^j$. По определению

$$A\partial_{u^k} = \partial_{u^i}\delta^k_j.$$

Для произвольного операторного поля R с компонентами матрицы r^i_j мы имеем

$$\begin{aligned}
&[[A,R]](\partial_{u^k},\partial_{u^s}) = \\
=&A[r^\alpha_k \partial_{u^\alpha},\partial_{u^s}] + A[\partial_{u^k}, r^\alpha_s \partial_{u^\alpha}] - \delta^k_j[\partial_{u^i}, r^\alpha_s \partial_{u^\alpha}] - \delta^s_j [r^\alpha_k \partial_{u^\alpha},\partial_{u^i}] = \\
=&\frac{\partial r^j_s}{\partial u^k}\partial_{u^i} - \frac{\partial r^j_k}{\partial u^s}\partial_{u^i} - \delta^k_j \frac{\partial r^\alpha_s}{\partial u^i}\partial_{u^\alpha} + \delta^s_j \frac{\partial r^\alpha_k}{\partial u^i}\partial_{u^\alpha}.
\end{aligned}$$

Подставим $j = k$ и положим, что $R \in C(\mathcal{M})$. В этом случае

$$0 = \Big(\frac{\partial r^j_s}{\partial u^j} - \frac{\partial r^j_j}{\partial u^s} - \frac{\partial r^i_s}{\partial u^i}\Big)\partial_{u^i} + \sum_{\alpha \neq i} \frac{\partial r^\alpha_s}{\partial u^i}\partial_{u^\alpha}. \tag{8.12}$$

В частности, для любого s компонента r^α_s не зависит от u^i при $\alpha \neq i$. Другими словами, строка матрицы R с номером α зависит только от u^α. Так как $k \neq s$, выражение в скобках в (8.12) принимает вид

$$\frac{\partial r^j_s}{\partial u^j} - \frac{\partial r^i_s}{\partial u^i} = 0.$$

Так как r^j_s зависит только от u^j, а r^i_s — только от u^i, то это равенство означает, что обе производные — константы. Причем для разных элементов одного и того же столбца константы одинаковые.

Обозначив их через c^i, получаем в точности формулу (8.11). Таким образом, мы показали, что $\mathcal{P}_2 = C(\mathcal{M})$. Учитывая, что это нийенхейсов пучок, мы получаем свойство максимальности. То есть первое утверждение теоремы доказано.

Теперь рассмотрим произвольный максимальный пучок, содержащий M. По построению он лежит в $C(\mathcal{M})$. Так как централизатор сам является нийенхейсовым пучком, то он совпадает с $C(\mathcal{M})$. То есть он совпадает с $\mathcal{P}_2$. Второе утверждение теоремы доказано.

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Для начала докажем несколько лемм.

Лемма 8.4.1. *Для операторных полей B, C с матрицами $b^i_j = b^i u^j + u^i b^j$ и $C^i_j = u^i u^j$ выполнены следующие соотношения*

$$[[B, B]] = 0, \quad [[B, C]] = 0, \quad [[C, C]] = 0. \tag{8.13}$$

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{P}_1$. Это все операторы Нийенхейса, поэтому получаем

$$\begin{aligned} 0 &= [[A + B + C, A + B + C]] = \\ &= 2\underbrace{[[A, B]]}_{\text{степень } 0} + 2\underbrace{[[A, C]]}_{\text{степень } 1} + 2\underbrace{[[B, C]]}_{\text{степень } 2} + \underbrace{[[B, B]]}_{\text{степень } 1} + \underbrace{[[C, C]]}_{\text{степень } 3} \end{aligned}$$

Компоненты тензорного поля для каждого слагаемого — однородные полиномы степени, написанной под ним. Из равенства нулю немедленно получаем, что $[[C, C]] = [[B, C]] = 0$. Взяв в качестве A нулевую матрицу, получаем $[[B, B]] = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 8.4.2. *Рассмотрим операторные поля A, B с матрицами $a^i_j = b^i u^j + c^j u^i$ и $b^i_j = u^i u^j$. Тогда $[[A, B]] = 0$ если и только если $b^i = c^i$ для всех i.*

Доказательство. Сначала перепишем $A^i_j = (b^i - c^i) u^j + c^j u^i + c^i u^j$ и обозначим $C^i_j = p^i u^j$, где $p^i = b^i - c^i$. По лемме 8.4.1 $[[A, B]] = [[C, B]]$. Для индексов $i \neq j$ это дает следующее (суммирование в формулах только по α!):

$$\begin{aligned} &[[C, B]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = C[B\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + C[\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] + B[C\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + B[\partial_{u^i}, C\partial_{u^j}] - \\ &- [C\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i}, C\partial_{u^j}] = C[u^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + C[\partial_{u^i}, u^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] + \\ &+ B[u^i p^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + B[\partial_{u^i}, u^j p^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [u^i p^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^j u^\beta \partial_{u^\beta}] - [u^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^j p^\beta \partial_{u^\beta}] = \\ &= C(u^i \partial_{u^j} - u^j \partial_{u^i}) - \delta^i_\beta u^j u^\beta p^\alpha \partial_{u^\alpha} + u^i p^\alpha \delta^j_\alpha u^\beta \partial_{u^\beta} + u^i p^\alpha u^j \delta^\beta_\alpha \partial_{u^\beta} - \\ &- u^j p^\beta \delta^i_\beta u^\alpha \partial_{u^\alpha} - u^i u^j p^\beta \delta^\alpha_\beta \partial_{u^\alpha} + u^i u^\alpha \delta^j_\alpha p^\beta \partial_{u^\beta} = \\ &= -u^j u^i p^\alpha \partial_{u^\alpha} + u^i p^j u^\alpha \partial_{u^\alpha} + u^i u^j p^\alpha \partial_{u^\alpha} - u^j p^i u^\alpha \partial_{u^\alpha} - u^i u^j p^\alpha \partial_{u^\alpha} + u^i u^j p^\alpha \partial_{u^\alpha} = \\ &= (u^i p^j - u^j p^i) u^\alpha \partial_{u^\alpha}. \end{aligned}$$

Равенство нулю скобки Фролихера-Нийенхейса означает равенство нулю всех коэффициентов, в частности $p^i = p^j = 0$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 8.4.3. *Рассмотрим операторное поле A с матрицей $a^i_j = b^i u^j + u^i c^j$. Условие $[[A, A]] = 0$ (то есть A — оператор Нийенхейса) выполняется, если и только если хотя бы выполнено как минимум одно из следующих условий*

1. $b^i = c^i$;

2. $b^i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Для $i \neq j$ получаем

$$
\begin{aligned}
0 &= [[A, A]] = A[A\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, A\partial_{u^j}] - [A\partial_{u^i}, A\partial_{u^j}] = \\
&= A[u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - \\
&- [u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^j b^\beta \partial_{u^\beta} + c^j u^\beta \partial_{u^\beta}] = \\
&= c^i (u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}) - c^j (u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}) - \\
&- [u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^j b^\beta \partial_{u^\beta}] - [c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^j b^\beta \partial_{u^\beta}] - [u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha}, c^j u^\beta \partial_{u^\beta}] - \\
&- [c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, c^j u^\beta \partial_{u^\beta}] = c^i u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} - c^j u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} - b^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + b^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} - \\
&- c^i u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^i u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} - c^j u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + c^j u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} - c^i c^j [u^\alpha \partial_{u^\alpha}, u^\beta \partial_{u^\beta}] = \\
&= \big((c^i - b^i) u^j - (c^j - b^j) u^i\big) b^\alpha \partial_{u^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Если $b^i = 0$ для $i = 1, \ldots, n$, то последняя формула, очевидно, дает ноль. Если не все $b^i = 0$, то выберем $\alpha = k$, для которого $b^k \neq 0$. Тогда нулю равен линейный однородный многочлен в скобках, для которого $b^i - c^i = 0$ и $b^j - c^j = 0$. В силу произвольности выбора i, j лемма доказана. □

Лемма 8.4.4. *Рассмотрим операторное поле B с матрицей $b^i_j = u^i u^j$ и постоянное операторное поле A с матрицей a^i_j. Они коммутируют относительно скобки Фролихера-Нийенхейса тогда и только тогда, когда $a^i_j = a^j_i$.*

Доказательство. Для $i \neq j$ получаем

$$
\begin{aligned}
&[[A, B]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = A[B\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [A\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i}, A\partial_{u^j}] = \\
&= A[u^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, u^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [A^\alpha_i \partial_{u^\alpha}, u^j u^\beta \partial_{u^\beta}] - [u^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, A^\beta_j \partial_{u^\beta}] = \\
&= u^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} - u^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + a^j_i u^\alpha \partial_{u^\alpha} + u^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} - a^i_j u^\alpha \partial_{u^\alpha} - u^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} = \\
&= \big(a^j_i - a^i_j\big) u^\alpha \partial_{u^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, скобка Фролихера-Нийенхейса обращается в ноль, если и только если $a^i_j = a^j_i$. Лемма доказана. □

Лемма 8.4.5. *Рассмотрим ненулевое операторное поле B с матрицей $b^i_j = b^i u^j + u^i b^j$ и постоянное операторное поле A с матрицей a^i_j. Они коммутируют относительно скобки Фролихера-Нийенхейса тогда и только тогда, когда $a^i_j = a^j_i$.*

Доказательство. Для $i \neq j$ получаем

$$
\begin{aligned}
&[[A, B]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = A[B\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [A\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i}, A\partial_{u^j}] = \\
&= A[u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + b^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, u^j b^\alpha \partial_{u^\alpha} + b^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - \\
&- [a^\alpha_i \partial_{u^\alpha}, u^j b^\beta \partial_{u^\beta} + b^j u^\beta \partial_{u^\beta}] - [u^i b^\alpha \partial_{u^\alpha} + b^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, a^\beta_j \partial_{u^\beta}] = \\
&= b^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} - b^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + a^j_i b^\beta \partial_{u^\beta} + b^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} - a^i_j b^\alpha \partial_{u^\alpha} - b^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} = \\
&= \big(a^j_i - a^i_j\big) b^\alpha \partial_{u^\alpha}.
\end{aligned}
$$

По условию леммы найдется такой α, что $b^\alpha \neq 0$. Из этого вытекает, что в этом случае $a^i_j = a^j_i$. Так как i, j были выбраны произвольно, лемма доказана. □

Лемма 8.4.6. *Рассмотрим ненулевое операторное поле B с матрицей $b^i_j = u^i c^j$ и постоянное операторное поле A с матрицей a^i_j. В этом случае $[[A,B]] = 0$.*

Доказательство. Для $i \neq j$ получаем

$$\begin{aligned}
[[A,B]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) &= A[B\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [A\partial_{u^i}, B\partial_{u^j}] - [B\partial_{u^i}, A\partial_{u^j}] = \\
&= A[c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, \partial_{u^j}] + A[\partial_{u^i}, c^j u^\alpha \partial_{u^\alpha}] - [a^\alpha_i \partial_{u^\alpha}, c^j u^\beta \partial_{u^\beta}] - [c^i u^\alpha \partial_{u^\alpha}, a^\beta_j \partial_{u^\beta}] = \\
&= c^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} - c^j a^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + c^j a^\beta_i \partial_{u^\beta} - c^i a^\alpha_j \partial_{u^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана. □

Лемма 8.4.7. *В случае размерности $n \geq 3$ централизатор $C(\mathcal{S})$ состоит в точности из операторов, матрицы которых имеют вид*

$$r^i_j = a^i_j + b^i u^j + c^j u^i - K u^i u^j, \tag{8.14}$$

где a^i_j, b^i, c^i, K — константы.

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{S}$ — оператор, матрица которого диагональна с попарно различными числами $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ на диагонали. Для фиксированной пары $i \neq j$ получаем

$$\begin{aligned}
[[R,L]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) &= L[R\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + L[\partial_{u^i}, R\partial_{u^j}] - [R\partial_{u^i}, L\partial_{u^j}] - [L\partial_{u^i}, R\partial_{u^j}] = \\
&= \Big(\lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_i}{\partial u^j} - \lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_j}{\partial u^i} - \lambda_j \frac{\partial r^\alpha_i}{\partial u^j} + \lambda_i \frac{\partial r^\alpha_j}{\partial u^i}\Big)\partial_{u^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

После переименования это даёт следующую систему:

$$\big(\lambda_k - \lambda_j\big)\frac{\partial r^k_i}{\partial u^j} - \big(\lambda_k - \lambda_i\big)\frac{\partial r^k_j}{\partial u^i} = 0. \tag{8.15}$$

Взяв в качестве $k = i$ получаем, что r^i_i не зависит от u^j. В силу произвольности выбора $j \neq i$ получаем, что r^i_i зависит только от u^i. Возьмём другой набор констант $\bar{\lambda}_i$ и для $k \neq i, j$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\big(\lambda_k - \lambda_j\big)\frac{\partial r^k_i}{\partial u^j} - \big(\lambda_k - \lambda_i\big)\frac{\partial r^k_j}{\partial u^i} &= 0, \\
\big(\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_j\big)\frac{\partial r^k_i}{\partial u^j} - \big(\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_i\big)\frac{\partial r^k_j}{\partial u^i} &= 0.
\end{aligned}$$

Для каждой тройки k, i, j можно подобрать константы $\lambda, \bar{\lambda}$ так, что соответствующая матрица этой системы будет невырожденной. Значит, $\frac{\partial r^k_j}{\partial u^i} = 0$ при $i \neq j, k$. Другими словами r^i_j при $i \neq j$ зависит не более чем от двух переменных — u^i, u^j.

Теперь зафиксируем i, j и рассмотрим $L \in \mathcal{S}$ такой, что

$$L\partial_{u^i} = \partial_{u^j}, \quad L\partial_{u^j} = \partial_{u^i}, \quad L\partial_{u^k} = 0, k \neq i, j.$$

Если $n > 3$, то рассмотрим четвёрку попарно различных i, j, p, q и получим

$$\begin{aligned}
[[R,L]](\partial_{u^p}, \partial_{u^q}) &= L[R\partial_{u^p}, \partial_{u^q}] + L[\partial_{u^p}, R\partial_{u^q}] = \\
&= \frac{\partial r^i_p}{\partial u^q}\partial_{u^j} + \frac{\partial r^j_p}{\partial u^q}\partial_{u^i} - \frac{\partial r^i_q}{\partial u^p}\partial_{u^j} - \frac{\partial r^j_q}{\partial u^p}\partial_{u^i} = 0.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Мы видим, что равенство нулю вытекает из уже полученного выше результата — компоненты r^i_j зависят не более чем от двух переменных u^i, u^j. То есть условие (8.16) для четвёрок не даёт нам ничего нового.

Пусть теперь снова $n \geq 3$. Тогда для попарно различных i, j, k имеем (суммирование в формуле только по α, по i, j, k суммирования нет!):

$$\begin{aligned}[][R, L]](\partial_{u^j}, \partial_{u^k}) &= L[R\partial_{u^j}, \partial_{u^k}] + L[\partial_{u^j}, R\partial_{u^k}] - [L\partial_{u^j}, R\partial_{u^k}] = \\ &= \frac{\partial r^i_j}{\partial u^k}\partial_{u^j} + \frac{\partial r^j_j}{\partial u^k}\partial_{u^i} - \frac{\partial r^i_k}{\partial u^j}\partial_{u^j} - \frac{\partial r^j_k}{\partial u^j}\partial_{u^i} + \frac{\partial r^\alpha_k}{\partial u^i}\partial_{u^\alpha} = \\ &= \Big(\frac{\partial r^i_k}{\partial u^i} - \frac{\partial r^j_k}{\partial u^j}\Big)\partial_{u^i} = 0.\end{aligned} \tag{8.17}$$

Здесь мы использовали, что r^α_i зависит только от u^i, u^j. Дифференцируя по u^i получаем

$$\frac{\partial^2 r^i_k}{\partial u^i \partial u^i} = 0, \quad i \neq k. \tag{8.18}$$

Рассмотрим теперь (снова суммирование только по α, но не по i, j!):

$$\begin{aligned}[][R, L]](\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) &= L[R\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + L[\partial_{u^i}, R\partial_{u^j}] - [R\partial_{u^i}, L\partial_{u^j}] - [L\partial_{u^i}, R\partial_{u^j}] = \\ &= L[R\partial_{u^i}, \partial_{u^j}] + L[\partial_{u^i}, R\partial_{u^j}] - [R\partial_{u^i}, \partial_{u^i}] - [\partial_{u^j}, R\partial_{u^j}] = \\ &= \frac{\partial r^i_i}{\partial u^j}\partial_{u^j} + \frac{\partial r^j_i}{\partial u^j}\partial_{u^i} - \frac{\partial r^i_j}{\partial u^i}\partial_{u^j} - \frac{\partial r^j_j}{\partial u^i}\partial_{u^i} - \frac{\partial r^\alpha_i}{\partial u^i}\partial_{u^\alpha} + \frac{\partial r^\alpha_j}{\partial u^j}\partial_{u^\alpha} = \\ &= \Big(\frac{\partial r^j_i}{\partial u^j} + \frac{\partial r^i_j}{\partial u^j} - \frac{\partial r^i_i}{\partial u^i}\Big)\partial_{u^i} - \Big(\frac{\partial r^i_j}{\partial u^i} + \frac{\partial r^j_i}{\partial u^i} - \frac{\partial r^j_j}{\partial u^j}\Big)\partial_{u^j} + \\ &+ \sum_{k \neq i,j}\Big(\frac{\partial r^k_j}{\partial u^j} - \frac{\partial r^k_i}{\partial u^i}\Big)\partial_{u^k} = 0.\end{aligned}$$

Для фиксированной тройки попарно различных i, j, k получаем систему

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r^j_i}{\partial u^j} + \frac{\partial r^i_j}{\partial u^j} - \frac{\partial r^i_i}{\partial u^i} = 0, \quad i \neq j \\ &\frac{\partial r^k_j}{\partial u^j} - \frac{\partial r^k_i}{\partial u^i} = 0, \quad k \neq i, j.\end{aligned} \tag{8.19}$$

Так как r^i_k зависит только от u^i и u^k, то дифференцируя второе уравнение в (8.19) по u^j и переименовывая $k \to i, j \to k$, получаем

$$\frac{\partial^2 r^i_k}{\partial u^k \partial u^k} = 0, \quad i \neq k. \tag{8.20}$$

Из уравнений (8.18) и (8.20) получаем, что r^i_k при $i \neq j$ зависит квадратичным образом от координат u^i, u^j. Дифференцируя первое уравнение в (8.19) по u^j получаем, что

$$\frac{\partial^2 r^i_i}{\partial u^i \partial u^j} = 0, \quad i \neq j.$$

Из этого следует, что r^i_i зависит только от u^i, а из самого уравнения (8.19) следует, что эта зависимость так же квадратичная. В общем виде компоненты оператора можно записать как (по повторяющимся индексам нет суммирования)

$$r^i_j = a^i_j + b^i_j u^i + c^i_j u^j - K^i_j u^i u^j,$$

где $a^i_j, b^i_j, c^i_j, K^i_j$ — константы. Для попарно различных i, j, k уравнения (8.19) и (8.17) дают следующие отношения на коэффициенты:

$$b^i_j = b^k_j, c^i_j = c^k_j, K^i_j = K^k_j = K^i_k.$$

Обозначая b^i_j, c^i_j как b^i, c^i, мы получаем, что R имеет вид (8.14). Выражения (8.15), (8.16), (8.17) и (8.19) с другой стороны показывают, что любой оператор, матрица которого в данных координатах имеет вид (8.14) коммутирует с $\mathcal{S}$ в смысле скобки Фролихера-Нийенхейса. Таким образом, лемма 8.4.7 доказана. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольный $R \in C(\mathcal{S})$. По лемме 8.4.7 матрица оператора R записывается в виде $A + B + C$, где A — постоянная матрица, $b^i_j = b^i u^j + u^i c^j$ и $c^i_j = -K u^i u^j$. Рассмотрим условие

$$0 = [[R, R]] = \underbrace{2[[A, B]]}_{\text{степень } 0} + \underbrace{2[[A, C]] + [[B, B]]}_{\text{степень } 1} + \underbrace{2[[B, C]]}_{\text{степень } 2} + \underbrace{[[C, C]]}_{\text{степень } 3}. \tag{8.21}$$

Аналогично доказательству леммы 8.4.1 здесь степень под скобкой означает степень компонентов соответствующего слагаемого. Получаем три случая.

Случай $B \neq 0, C \neq 0$. Выражение (8.21) дает $[[B, C]] = 0$. По лемме 8.4.2 мы получаем, что $b^i_j = b^i u^j + u^i b^j$. По лемме 8.4.5 $a^i_j = a^j_i$. Таким образом, R лежит в пучке $\mathcal{P}_1$.

Случай $B = 0, C \neq 0$. Выражение (8.21) дает, что $[[A, C]] = 0$. По лемме 8.4.4 мы получаем, что $a^i_j = a^j_i$ и, значит, R снова лежит в пучке $\mathcal{P}_1$.

Случай $B \neq 0, C = 0$. Выражение (8.21) в этом случае дает $[[B, B]] = 0$. По лемме 8.4.3 получаем два варианта. Если $b^i_j = b^i u^j + u^i b^j$, то по лемме 8.4.5 $a^i_j = a^j_i$ и R лежит в пучке $\mathcal{P}_1$. Если $b^i_j = u^i c_j$, тогда по лемме 8.4.6 оператор лежит в пучке $\mathcal{P}_2$.

Заметим теперь, что по построению $C(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{S}$. При этом множество операторов Нийенхейса в централизаторе совпадает с $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Любой максимальный нийенхейсов пучок $\mathcal{P}$ по построению содержится в $C(\mathcal{S})$ и, значит, так как это линейное пространство, целиком лежит либо в $\mathcal{P}_1$, либо в $\mathcal{P}_2$. Так как эти пучки максимальны, то $\mathcal{P}$ совпадает с одним из них. Теорема доказана. □

Замечание 8.4.1. Максимальный пучок метрик, в свою очередь, порождает максимальный пучок пуассоновских структур Мохова-Ферапонтова. Чтобы записать его, вспомним , что (см. вычисления в примере 8.2.1)

$$\bar{\Gamma}^{jk}_q = \delta^j_q (c^k - K u^k)$$

контравариантные символы Кристоффеля для $\bar{g}^{ij}$. Тогда пучок структур Мохова-Ферапонтова имеет вид

$$\pi^{ij} = (a^{ij} + c^i u^j + u^i c^j - K u^i u^j) D + u^i_x (c^j - K u^j) + K u^i_x \cdot D^{-1} \cdot u^j_x$$

для произвольных констант $a^{ij} = a^{ji}, c^i, K$. ■

8.5 AFF-пучок и его характеристическое свойство

Пусть L — дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса. Зафиксируем канонические координаты L. Определим матрицы

$$A_{n-i} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -u^1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & -u^2 \\ 0 & 1 & -u^1 & \iddots & \vdots \\ 1 & -u^1 & -u^2 & \cdots & -u^{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} u^{n-i+1} & \cdots & u^{n-2} & u^{n-1} & u^n \\ & \cdots & u^{n-1} & u^n & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ u^{n-1} & u^n & 0 & \iddots & \vdots \\ u^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $0 \leq i < n+1$ контравариантная метрика g_i имеет вид

$$g_i = \begin{pmatrix} A_{n-i} & 0_{n-i\times i} \\ 0_{i\times n-i} & B_i \end{pmatrix}.$$

При этом $g_i = L^i g_0$. Полученное семейство образует пучок пуассоново согласованных метрик, причем первые $g_0, \dots, g_n$ — плоские, а g_{n+1} имеет ненулевую постоянную секционную кривизну (см. [152]). Следующая теорема говорит, что пучок метрик с таким набором условий уникален.

Теорема 8.5.1. *Пусть L — дифференциально невырожденный почти всюду оператор Нийенхейса, самосопряжённый относительно контравариантной метрики g. Пусть, дополнительно,* $\det L \neq 0$ *почти всюду. Предположим, что метрики $g, Lg, \dots, L^n g$ плоские, а у $L^{n+1}g$ постоянная секционная кривизна, отличная от нуля. Тогда*

1. *L и g геодезически согласованы*
2. *В окрестности почти любой точки* p *в канонических координатах $u^1, \dots, u^n$ для оператора L (не обязательно центрированных в* p*) метрика g имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -u^1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & -u^2 \\ 0 & 1 & -u^1 & \iddots & \vdots \\ 1 & -u^1 & -u^2 & \cdots & -u^{n-1} \end{pmatrix}$$

с точностью до умножения на константу.

Полученный пучок мы будем называть AFF-пучком.

Доказательство. У дифференциально невырожденного оператора Нийенхейса L почти всюду n попарно различных собственных значений. Если среди них есть комплексные, то можно ввести комплексную структуру и рассматривать смешанные формулы, где часть координат вещественные, а часть — комплексные. Это никак не будет влиять на доказательство, поэтому мы ограничимся вещественными собственными значениями.

Рассмотрим оператор Нийенхейса L в окрестности точки p. Оператор имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & u^2 & \dots 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Так как L самосопряжён, метрика принимает диагональный вид

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & g_2 & \dots 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & g_n \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется несколько технических лемм.

Лемма 8.5.1. *Пусть метрика g — диагональная и оператор L имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} h_1(u^1) & 0 & \dots 0 & \\ 0 & h_2(u^2) & \dots 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & h_n(u^n) \end{pmatrix},$$

где функции h_i — функции одной переменной. Тогда символы Кристоффеля Γ^i_{jk} метрики g имеют вид:

- $\Gamma^k_{ij} = 0$ *для попарно различных i, j и k;*
- $\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_k}\frac{\partial g_k}{\partial u^j}$ *для произвольных k, j;*
- $\Gamma^k_{jj} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_k}\frac{\partial g_j}{\partial u^k}$ *для произвольных $k \neq j$.*

Символы Кристоффеля $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ ковариантной метрики $\bar{g} = gL^{-1}$ имеют вид:

- $\bar{\Gamma}^k_{ij} = 0$ *для попарно различных i, j и k;*
- $\bar{\Gamma}^k_{kj} = \Gamma^k_{kj}$ *для произвольных $k \neq j$;*
- $\bar{\Gamma}^k_{jj} = \frac{h_k}{h_j}\Gamma^k_{jj}$ *для произвольных $k \neq j$;*
- $\bar{\Gamma}^k_{kk} = \Gamma^k_{kk} - \frac{1}{2}\frac{1}{h_k}h'_k$ *для произвольных k.*

Здесь h'_i означает производную.

Доказательство. Формула для символов Кристоффеля имеет вид

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{g^{k\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right) = \frac{1}{2g_k}\left(\frac{\partial g_i}{\partial u^j}\delta_{ik} + \frac{\partial g_j}{\partial u^i}\delta_{jk} - \frac{\partial g_i}{\partial u^k}\delta_{ij}\right).$$

Для попарно различных i, j, k немедленно получаем ноль. Пусть теперь $k = i$. Формула принимает вид

$$\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2g_k}\left(\frac{\partial g_k}{\partial u^j} + \frac{\partial g_j}{\partial u^k}\delta_{jk} - \frac{\partial g_k}{\partial u^k}\delta_{kj}\right).$$

Если $j \neq k$, то два из трех слагаемых в скобках равны нулю. Если $j = k$, то слагаемые с разными знаками совпадают по модулю и сокращаются. Таким образом, вторая формула доказана. Наконец, рассмотрим

$$\Gamma^k_{jj} = \frac{1}{2g_k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial u^j}\delta_{jk} + \frac{\partial g_j}{\partial u^j}\delta_{jk} - \frac{\partial g_j}{\partial u^k}\right) = -\frac{1}{2g_k}\frac{\partial g_j}{\partial u^k}.$$

Здесь мы пользовались тем, что $j \neq k$. Второе утверждение получается подстановкой $\bar g_k = h_k g_k$. Лемма доказана. □

Лемма 8.5.2. *Компоненты тензоров кривизны $R^i{}_{jk\ell}$ и $\bar R^i{}_{jk\ell}$ связностей Γ и $\bar\Gamma$ из леммы 8.5.1 имеют вид (суммирования по повторяющимся индексам нет!):*

- $R^s{}_{ijk} = 0$ *для попарно различных i, j, k и s;*
- $R^i{}_{ijk} = 0$ *для произвольных i, j, k;*
- $R^j{}_{ijk} = -\frac{\partial \Gamma^j_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^j_{ji}\Gamma^i_{ik} + \Gamma^j_{jk}\Gamma^k_{ik} - \Gamma^j_{kj}\Gamma^j_{ij}$ *для произвольных $j \neq i$ и $i \neq k$;*
- $R^j{}_{iji} = \frac{\partial \Gamma^j_{ii}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^j_{ij}}{\partial u^i} + \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \Gamma^j_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ii} - \Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{ij} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^i_{ij}$ *для произвольных i и j;*
- $R^k{}_{iji} = -R^k{}_{iij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ii}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{jj}\Gamma^j_{ii} + \Gamma^k_{jk}\Gamma^k_{ii} - \Gamma^k_{ii}\Gamma^i_{ij}$ *для произвольных $k \neq i$ и $k \neq j$.*

и

- $\bar R^s{}_{ijk} = 0$ *для попарно различных i, j, k и s;*
- $\bar R^i{}_{ijk} = 0$ *для произвольных i, j, k;*
- $\bar R^j{}_{ijk} = R^j{}_{ijk}$ *для произвольных $j \neq i$ и $i \neq k$;*
- *Для произвольных $i \neq j$,*

$$\bar R^j{}_{iji} = \frac{h_j}{h_i}\frac{\partial \Gamma^j_{ii}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^j_{ij}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{h_\alpha}{h_i}\Gamma^j_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ii} - \frac{h_j}{h_i}\Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{ij} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^j_{ij} - \frac{1}{2}\frac{h_i'}{h_i}\Gamma^j_{ij} + \frac{1}{2h_i}h_j'\Gamma^j_{ii}\ ; \quad (8.22)$$

- $\bar R^k{}_{iji} = \frac{h_k}{h_i} R^k{}_{iji}$.

Доказательство. Формула для тензора кривизны имеет вид

$$R^\ell{}_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^\ell_{ik} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^\ell_{ij} + \Gamma^\ell_{js}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^\ell_{ks}\Gamma^s_{ij}.$$

Заметим, что символы Кристоффеля в смысле леммы 8.5.1 могут быть записаны как

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{kj}\delta^k_i + \Gamma^k_{jj}\delta_{ij} - \Gamma^k_{kk}\delta^k_i\delta_{ij}.$$

Подставляя это выражение в формулу для тензора кривизны, мы получаем требуемое. □

Напомним, что метрика называется метрикой постоянной секционной кривизны, если

$$R^{ij}{}_{km} = K\left(\delta^i_k\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_k\right).$$

Отметим, что в силу алгебраических симметрий тензора кривизны Римана мы получаем, что компоненты, перечисленные в лемме 8.5.2 — это по сути все компоненты. Кроме этого, в силу наших предположений, мы получаем, что компоненты $\bar{R}^k{}_{iji}$ и $\bar{R}^j{}_{ijk}$ — нули. Таким образом, всюду далее мы рассматриваем компоненты (8.22). Для них мы имеем

$$\bar{R}^{ij}{}_{ij} = \frac{h_j}{g_i}\frac{\partial\Gamma^j_{ii}}{\partial u^j} - \frac{h_i}{g_i}\frac{\partial\Gamma^j_{ij}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{h_\alpha}{g_i}\Gamma^i_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ii} - \frac{h_j}{g_i}\Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{ij} - \frac{h_i}{g_i}\Gamma^j_{ij}\Gamma^j_{ij} - \frac{h'_i}{2g_i}\Gamma^j_{ij} + \frac{h'_j}{2g_i}\Gamma^j_{ii}. \tag{8.23}$$

Далее воспользуемся тем, что gL^{-k} плоские для $k = 0, \ldots, n$ и у gL^{-n-1} постоянная секционная кривизна K.

Так как формулы линейны по h, мы получаем, что в качестве такого h можно взять многочлен $p(L)$. В этом случае интересующие нас компоненты тензора метрики $gp(L)^{-1}$ заданы (8.23) с условием, где в качестве h_i берется $p(u^i)$.

$$\begin{aligned} &\frac{p(u^j)}{g_i}\frac{\partial\Gamma^j_{ii}}{\partial u^j} - \frac{p(u^i)}{g_i}\frac{\partial\Gamma^j_{ij}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{p(u^\alpha)}{g_i}\Gamma^j_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ii} - \frac{p(u^j)}{g_i}\Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{ij} \\ &\qquad - \frac{p(u^i)}{g_i}\Gamma^j_{ij}\Gamma^j_{ij} - \frac{p'(u^i)}{2g_i}\Gamma^j_{ij} + \frac{p'(u^j)}{2g_i}\Gamma^j_{ii} = a_{n+1}K. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Рассмотрим уравнение (8.24) как уравнение на функцию Γ^i_{jk}. В точке $\mathrm{p} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$ мы берем

$$p_0(t) = (t-\hat{u}_1)(t-\hat{u}_2)\ldots(t-\hat{u}_n) \;\text{ и }\; p_1(t) = t(t-\hat{u}_1)(t-\hat{u}_2)\ldots(t-\hat{u}_n).$$

Для обоих многочленов $p(\hat{u}_i) = 0$ для любого i; для многочлена p_0 имеем

$$p'_0(\hat{u}_j) = \prod_{s\neq j}(\hat{u}_j - \hat{u}_s) \;\text{ и }\; p'_0(\hat{u}_i) = \prod_{s\neq i}(\hat{u}_i - \hat{u}_s),$$

а для p_1 у нас получается

$$p'_1(\hat{u}_j) = \hat{u}_j\prod_{s\neq j}(\hat{u}_j - \hat{u}_s) \;\text{ и }\; p'_1(\hat{u}_i) = \hat{u}_i\prod_{s\neq i}(\hat{u}_i - \hat{u}_s).$$

Подставляя p_0 в уравнение (8.24) и вычисляя в точке $\mathrm{p} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$ мы получаем

$$-\Gamma^j_{ij}\prod_{s\neq i}(\hat{u}_i - \hat{u}_s) + \Gamma^j_{ii}\prod_{s\neq j}(\hat{u}_j - \hat{u}_s) = 0. \tag{8.25}$$

Аналогичным образом для p_1 мы получаем

$$-\hat{u}_i\Gamma^j_{ij}\prod_{s\neq i}(\hat{u}_i - \hat{u}_s) + \hat{u}_j\Gamma^j_{ii}\prod_{s\neq j}(\hat{u}_j - \hat{u}_s) = 2g_iK. \tag{8.26}$$

Уравнения (8.25) и (8.26) — два линейных уравнения на неизвестные Γ^j_{ij} и Γ^j_{ii}. Решая в точке $\mathrm{p} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$ и, учитывая, что p точка общего положения, мы получаем:

$$\Gamma^j_{ij} = \frac{2g_iK}{(u^j - u^i)\prod_{s\neq i}(u^i - u^s)}\,, \quad \Gamma^j_{ii} = \frac{2g_iK}{(u^j - u^i)\prod_{s\neq j}(u^j - u^s)}. \tag{8.27}$$

Подставляя это в формулы из леммы 8.5.1 мы получаем для каждой точки $(x^1, \dots, x^n)$):

$$\frac{2g_i K}{(x^j - x^i)\prod_{s\neq i}(x^i - x^s)} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_j}\frac{\partial g_j}{\partial x^i} \tag{8.28}$$

$$\frac{2g_i K}{(x^j - x^i)\prod_{s\neq j}(x^j - x^s)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_j}\frac{\partial g_i}{\partial x^j}. \tag{8.29}$$

Далее предположим, что размерность $n \geq 3$. Для размерности два теорема была доказана в [36] (Теорема 10) и в [74] (Теорема 6.2). Пусть $k \notin \{i, j\}$ и рассмотрим многочлен $p = \prod_{s\neq k}(t - \hat{x}_s)$ степени $n-1$. Для него формула (8.24), вычисленная в точке $\mathrm{p} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, принимает вид:

$$p(\hat{x}_k)\Gamma^j_{jk}\Gamma^k_{ii} - \tfrac{1}{2}p'(\hat{x}_i)\Gamma^j_{ij} + \tfrac{1}{2}p'(\hat{x}_j)\Gamma^j_{ii} = 0. \tag{8.30}$$

Для нашего многочлена p мы получаем

$$p'(\hat{x}_i) = \prod_{s\notin\{i,k\}}(\hat{x}_i - \hat{x}_s) \;\text{ и }\; p'(\hat{x}_j) = \prod_{s\notin\{j,k\}}(\hat{x}_j - \hat{x}_s).$$

Подставляя (8.27) в (8.30), мы получаем:

$$\frac{4g_i g_k K^2}{(\hat{x}_j - \hat{x}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_i)\prod_{s\neq k}(\hat{x}_k - \hat{x}_s)} - \tfrac{1}{2}\frac{2g_i K}{(\hat{x}_i - \hat{x}_k)(\hat{x}_j - \hat{x}_i)} + \tfrac{1}{2}\frac{2g_i K}{(\hat{x}_j - \hat{x}_k)(\hat{x}_j - \hat{x}_i)} = 0.$$

В этом уравнении множитель $g_i K$ сокращается, и мы получаем явную формулу для $g_k K$:

$$K g_k(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = -\tfrac{1}{4}\prod_{s\neq k}(\hat{x}_k - \hat{x}_s).$$

Так как формула выполняется для всех точек $\mathrm{p} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, она верна, если заменить $\hat{x}_i$ на x^i. Таким образом, мы видим, что, с точностью до постоянного множителя, это в точности метрика g_0. Теорема доказана. □

Пример 8.5.1. В размерности $n = 2$ базис AFF-пучка, записанный в канонических координатах u, v оператора Нийенхейса L, имеет вид

$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -u \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} u^2 + v & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}.$$

Кривизна метрики g_3 постоянна. ■

Глава 9

Бигамильтонов и мультигамильтонов формализм

9.1 Нормальные формы структур Пуассона-Нийенхейса

Следующая теорема связывает нийенхейсовы пучки с пучком согласованных скобок на кокасательном расслоении.

Теорема 9.1.1. *Пусть на многообразии* M^n *задан нийенхейсов пучок* $\mathcal{P}$*. Тогда для любых двух невырожденных* $L, M \in \mathcal{P}$ *скобки Пуассона, задаваемые* $\Omega^{-1}_{L^{-1}}$ *и* $\Omega^{-1}_{M^{-1}}$ *согласованы.*

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\Omega_{L^{-1}}(\xi, \widehat{L}\widehat{M}^{-1}\eta) = \Omega(\xi, \widehat{L^{-1}}\widehat{L}\widehat{M}^{-1}\eta) = \Omega(\xi, \widehat{L}^{-1}\widehat{L}\widehat{M}^{-1}\eta) = \Omega(\xi, \widehat{M}^{-1}\eta) = \Omega_{M^{-1}}(\xi, \eta).$$

Здесь мы пользовались свойством $\widehat{L^{-1}} = \widehat{L}^{-1}$, которое вытекает из третьего пункта теоремы 7.1.1.

Дифференциальные формы Ω_L и Ω_M связаны оператором $\widehat{L}\widehat{M}^{-1}$. По построению, этот оператор самосопряжённый относительно обеих форм. В свою очередь, из условия $[[L, M]]_{FN} = 0$ по той же теореме 7.1.1 вытекает, что

$$[[\widehat{L}, \widehat{M}]] = 0.$$

По теореме 8.3.1 это условие эквивалентно тому, что $\widehat{L}\widehat{M}^{-1}$ — оператор Нийенхейса. Наконец, заметим, что

$$\mathrm{d}_{\widehat{L}\widehat{M}^{-1}}\Omega_{L^{-1}} = \mathrm{d}i_{\widehat{L}\widehat{M}^{-1}}\Omega_{L^{-1}} = \mathrm{d}\Omega_{M^{-1}} = 0.$$

Напомним, что в работе [138] доказано, что, если две невырожденные скобки Пуассона связаны оператором Нийенхейса, то они согласованы. То есть $\Omega^{-1}_{L^{-1}}, \Omega^{-1}_{M^{-1}}$ — согласованные скобки Пуассона. Теорема доказана. □

Рассмотрим многообразие M^n с симплектической формой ω и невырожденным операторным полем L на нем. Говорят, что на M^n задана структура Пуассона-Нийенхейса, если

1. Если для любых $\xi, \eta \in \Psi^1(\mathrm{M}^n)$ выполнено свойство $\omega(L\xi, \eta) = \omega(\xi, L\eta)$;

2. L — оператор Нийенхейса;

3. Форма ω замкнута относительно d_L, то есть $\mathrm{d}_L\omega = 0$.

Структуры Пауссона-Нийенхейса и геометрия Нийенхейса связаны естественным образом.

Замечание 9.1.1. Так как Id вместе с невырожденным оператором Нийенхейса L всегда образуют нийенхейсов пучок, мы получаем, что $\Omega^{-1}_{\mathrm{Id}} = \Omega^{-1}$ и $\Omega^{-1}_{L^{-1}}$ согласованы. То есть кокасательное расслоение к многообразию Нийенхейса снабжено естественной структурой Пуассона-Нийенхейса. ■

Нам известно, что $\chi_L(t) = q_L^2(t)$, где коэффициенты многочлена q_L представляют собой многочлены от компонент матрицы. Будем говорить, что структура Пуассона-Нийенхейса дифференциально в окрестности точки p невырожденная, если дифференциалы коэффициентов $q_L(t)$ в окрестности этой точки линейно независимы.

Теорема 9.1.2. *Пусть на аналитическом многообразии M^{2n} задана дифференциально невырожденная структура Пуассона-Нийенхейса (ω, L). Тогда на кокасательном расслоении $T^*\mathrm{M}^n$ существует система координат $p_1, \dots, p_n$, $u^1, \dots, u^n$ такая, что:*

1. *Координаты u^i — коэффициенты многочлена $q_L(t)$;*

2. *Бивектор π имеет канонический вид, то есть $\omega^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i}$;*

3. *Оператор L имеет вид*
$$L = \begin{pmatrix} N^T & R \\ 0_{n\times n} & N \end{pmatrix},$$
где
$$N = \begin{pmatrix} u^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ u^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ u^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_n \\ p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ p_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Начнем доказательство с нескольких лемм.

Лемма 9.1.1. *Рассмотрим пространство симметрических матриц $\mathcal{S}$ и пространство кососимметрических матриц $\mathcal{K}$. Для произвольной матрицы L определим отображение $\phi_L : \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ по формуле*
$$\phi_L(S) = SL - L^TS, \quad \text{где} \quad S \in \mathcal{S}.$$
Если L — gl-регулярная матрица, то ядро отображения n мерно. В частности, ϕ_L — сюръективно.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что мы работаем над полем $\mathbb{C}$. Для начала проверим, что $\phi_L(S)$ действительно лежит в $\mathcal{K}$. Имеем
$$(SL - L^TS)^T = L^TS^T - S^TL = -(SL - L^TS).$$

Пусть S теперь лежит я ядре отображения ϕ_L. Это записывается как

$$SL = L^T S. \tag{9.1}$$

Как следствие, для любой степени k имеем $SL^k = (L^k)^T S$. Стало быть, если S лежит в ядре ϕ_L, то оно лежит в ядре $\phi_{p(L)}$ для произвольного многочлена $p(t)$. Возьмем $p(t)$ таким, что $p(L)$ — полупростая часть L и обозначим попарно различные собственные значения L как $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Их кратности, в свою очередь, обозначим как $m_1, \dots, m_k$. В подходящей системе координат

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{Id}_{m_1 \times m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \mathrm{Id}_{m_k \times m_k} \end{pmatrix}.$$

В этой системе координат по условию (9.1) матрица S имеет блочный вид

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_k \end{pmatrix},$$

где S_i — симметрические матрицы размеров $m_i \times m_i$. Теперь рассмотрим один такой блок. Для него (9.1) принимает вид

$$SJ = J^T S,$$

где J — это жорданов блок в стандартном виде. Прямыми вычислениями получаем, что ядро имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} & & & & s_m \\ & & & s_m & s_{m-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ & s_m & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & s_2 \\ s_m & s_{m-1} & \dots & s_2 & s_1 \end{pmatrix}.$$

В частности, его размерность m. Таким образом, размерность ядра в общем случае равна $m_1 + \dots + m_k = n$. Стало быть, размерность образа отображения ϕ_L равна $n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2$. Как следствие, оно сюръективно и лемма доказана. □

Лемма 9.1.2. *Пусть L — аналитический gl-регулярный оператор Нийенхейса. Тогда 2-форма ω представляется в виде*

$$\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}_L f \tag{9.2}$$

для некоторой аналитической функции f тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{d}\omega = 0, \quad \mathrm{d}_L \omega = 0.$$

Доказательство. Необходимость этих условий следует из $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}_L^2 = 0$ и $\mathrm{d}\mathrm{d}_L = -\mathrm{d}_L\mathrm{d}$. Покажем достаточность.

Для начала докажем утверждение леммы для оператора Нийенхейса в регулярной точке. Без ограничения общности дополнительно считаем, что в этой точке собственные значения либо постоянны, либо их дифференциалы невырождены. Начнем со случая вещественного простого спектра:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(u^n) \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\mathrm{d}\mathrm{d}_L f$. Имеем (см. формулу 12.10)

$$(\mathrm{d}\mathrm{d}_L f)_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Таким образом, условие $\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}_L f$ для данной 2-формы можно переписать как уравнение на вторые производные функции f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\omega_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j.$$

Условия совместности этой системы имеет вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}\right) - \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\omega_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}\right) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j}, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (9.3)$$

Легко видеть, что условие $\mathrm{d}\omega = 0$ можно записать как

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} = -\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i}.$$

В силу предыдущего условие $\mathrm{d}_L\omega = 0$ принимает вид $\mathrm{d}_L\omega = i_L \mathrm{d} - \mathrm{d} i_L = -\mathrm{d} i_L \omega = 0$. В координатах это записывается как

$$(\lambda_i + \lambda_j)\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - (\lambda_i + \lambda_k)\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} = -(\lambda_j + \lambda_k)\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i}.$$

Поделив обе части на $(\lambda_j + \lambda_k)$, мы приравниваем левые части из двух уравнений и получаем

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_j + \lambda_k}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_j + \lambda_k}\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j}.$$

Перенося все в правую часть, мы получаем

$$\frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_k}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_k}\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} = 0.$$

Умножая обе части на $\frac{\lambda_j + \lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)}$, мы получаем условие (9.3). То есть для этого случая доказано. Для случая жордановых блоков размерности больше одного вычисления аналогичны, поэтому мы их опустим.

Теперь рассмотрим задачу в общем случае. Зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$, в которых L во второй сопровождающей форме. Нам известно, что, в частности, в этих координатах $\mathrm{d}(L^* \mathrm{d}u^i) = 0$. Обозначим $\mathrm{d}v^i = L^* \mathrm{d}u^i$. Тогда левая часть уравнения (9.2) принимает вид

$$\mathrm{d}(L^* \mathrm{d}f) = \mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial u^j}\mathrm{d}v^j\Big) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^q} L^q_j - L^q_i \frac{\partial^2 f}{\partial u^q \partial u^j}\Big)\mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}u^j.$$

Рассмотрим следующее линейное отображение из пространства симметричных матриц в пространство кососимметрических матриц, задаваемое формулой

$$AL - L^T A = B.$$

Здесь A — симметричная, B — кососимметрическая, а L — произвольная. Из леммы 9.1.1 нам известно, что отображение сюръективно. Таким образом, левая часть (9.2) дает уравнение вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = \Phi_{ij}\left(\omega_{ij}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^n}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

где функции Φ_{ij} — линейные по аргументам. Эта система переопределена, однако условия совместности выполнены в точках общего положения. Значит, они выполнены всюду, и по теореме Коши-Ковалевской эта система имеет решение. То есть лемма доказана. $\square$

Лемма 9.1.3. *Пусть характеристический многочлен оператора Нийенхейса L является полным квадратом, то есть*

$$\chi_L(t) = (t^n - q^1 t^{n-1} - \cdots - q^n)^2,$$

где q^i — гладкие функции. Тогда эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &L^* \mathrm{d} q^i = q^i \mathrm{d} q^1 + \mathrm{d} q^{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ &L^* \mathrm{d} q^n = q^n \mathrm{d} q^1. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Доказательство. Формула (2.7) из теоремы 2.1.2 для $t\mathrm{Id} - L$ принимает вид

$$(t\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}\det(t\mathrm{Id} - L) = -\det(t\mathrm{Id} - L)\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L.$$

Подставляя $\mathrm{tr}\, L = 2q^1$ и $\det(t\mathrm{Id} - L) = q_L^2(t)$, мы получаем

$$(t\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}q_L(t) = (t\mathrm{Id} - L^*)(-\mathrm{d}q^1 t^{n-1} - \cdots - \mathrm{d}q^n) = -(t^n - q^1 t^{n-1} - \cdots - q^n)\mathrm{d}q^1.$$

Раскрывая и приравнивая коэффициенты при степенях t, получаем нужные соотношения. $\square$

Из формул (9.4), в частности, вытекает, что в каждой точке M^{2n} пространство, порожденное дифференциалами $\mathrm{d}q^i, i = 1, \ldots, n$, совпадает с пространством, порожденным $L^{*i}\mathrm{d}q^1, i = 1, \ldots, n$.

В силу самосопряженности L относительно ω из леммы 7.2.5 следует, что соответствующее пространство изотропно. В частности, $\{q^i, q^j\} = 0$ для скобки Пуассона с тензором Пуассона ω^{-1}. По теореме Дарбу найдется вторая половина координат $p_1, \ldots, p_n$ такая, что $\{q_i, p^j\} = \delta_i^j$. В этих координатах оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} N^T & R \\ 0_{n\times n} & N \end{pmatrix}, \tag{9.5}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} q^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ q^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \\ q^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ q^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом про R нам пока известно только лишь, что $R^T = -R$. Это следует из самосопряженности L относительно стандартной симплектической структуры. Индексы у матрицы R нам будет удобно записывать как нижние. Определим в данных координатах следующую 2-форму

$$\alpha = \Big(R_{ij} + \frac{\partial N_i^s}{\partial q^j} p_s - \frac{\partial N_j^s}{\partial q^i} p_s\Big) \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j.$$

Заметим также, что линейное пространство, натянутое на $\mathrm{d}q^i$, инвариантно относительно L^*. Ограничение совпадает с N^*, который по построению зависит только от q. Таким образом, на $n-$мерном диске U^n с координатами $q^1, \dots, q^n$ возникает операторное поле N. В силу определения (2.3) это ограничение будет оператором Нийенхейса.

Лемма 9.1.4. *Для построенной формы α верно:*

1. *Коэффициенты формы не зависят от p_i, то есть ее можно рассматривать как 2-форму на $n-$мерном диске U^n с координатами $q^1, \dots, q^n$;*
2. *Форма α замкнута, то есть $\mathrm{d}\alpha = 0$. В частности, она замкнута как форма на U^n;*
3. *Форма α замкнута в смысле d_N, то есть $\mathrm{d}_N\alpha = 0$, на диске U^n.*

Доказательство. Для начала выпишем форму ω_L. Она имеет вид

$$\omega_L = N_j^s \mathrm{d}p_s \wedge \mathrm{d}q^j + R_{ij} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j.$$

Заметим, что

$$0 = \mathrm{d}_L\omega = \mathrm{d}i_L\omega = \mathrm{d}\omega_L.$$

То есть форма ω_L замкнута относительно d. Получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_L = \Big(\frac{\partial N_i^s}{\partial q^j} - \frac{\partial N_j^s}{\partial q^i}\Big)\mathrm{d}p_s \wedge \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j + \frac{\partial R_{ij}}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s \wedge \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j + \\ + \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial R_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial R_{ki}}{\partial q^j}\right)\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j \mathrm{d}q^k = 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Группируя слагаемые в (9.6) при $\mathrm{d}p_s \wedge \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j$ получаем

$$0 = \frac{\partial N_i^s}{\partial q^j} - \frac{\partial N_j^s}{\partial q^i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial p_s} = \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial p_s}.$$

Значит, компоненты α_{ij} не зависят от p_s и первое утверждение леммы доказано. Кроме этого мы выяснили, что R_{ij} представляет собой многочлен первого порядка по p_s. Группируя теперь в (9.6) слагаемые при $\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}q^k$, мы получаем соотношение

$$0 = \frac{\partial R_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial R_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial R_{ki}}{\partial q^j} = \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q^j}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в наших координатах $\frac{\partial^2 N_j^s}{\partial q^i \partial q^k} = 0$, поэтому в правой части отсутствуют члены, линейные по p_s. Полученное выражение — это в точности условие $\mathrm{d}\alpha = 0$. То есть форма замкнута на всем пространстве и, в силу первого пункта теоремы, замкнута как 2-форма на диске U^n с координатами $q^1, \dots, q^n$.

Для доказательства последнего утверждения введем операторное поле A, которое имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & \alpha \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Тогда $L = \widehat{N} + A$, где $\widehat{N}$ — поднятие Яна-Патерсона (см. раздел 7.1) для оператора N с диска U^n на целую окрестность в многообразии M^n, локально отождествленном с кокасательным расслоением к этому диску. По теореме 7.1.1 $\mathcal{N}_{\widehat{N}} = 0$. Обозначим $\xi_i = \frac{\partial}{\partial q^i}, \eta_j = \frac{\partial}{\partial p_j}$ и заметим, что

$$A^2 = 0, \quad A[A\xi_i, \xi_j] = 0, \quad [A\xi_i, A\xi_j] = 0.$$

Мы получаем

$$0 = \mathcal{N}_L(\xi_i, \xi_j) = [A\xi_i, \widehat{N}\xi_j] + [\widehat{N}\xi_i, A\xi_j] - A[\widehat{N}\xi_i, \xi_j] - \widehat{N}[A\xi_i, \xi_j] - A[\xi_i, \widehat{N}\xi_j] - \widehat{N}[\xi_i, A\xi_j].$$

Правая часть этого выражения не зависит от p. Приводя подобные и пользуясь замкнутостью α, мы получим в точности $\mathrm{d}_N\alpha = 0$. $\square$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. По леммам 9.1.4 и 9.1.2 найдется такая функция f, что $\alpha = \mathrm{d}\mathrm{d}_L f$. Выполним каноническое преобразование вида

$$u^i = q^i, \quad r_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

Легко проверяется, что при этом преобразовании L переходит в $\widehat{N}$ и теорема доказана. $\square$

Помимо первой сопровождающей формы у gl-регулярного оператора Нийенхейса есть вторая сопровождающая форма. Для нее верно аналогичное утверждение.

Следствие 9.1.1. *Пусть на многообразии M^{2n} дана дифференциально невырожденная структура Пуассона-Нийенхейса (π, L). Тогда на кокасательном расслоении $T^*\mathrm{M}^n$ существует система координат $p_1, \dots, p_n, u^1, \dots, u^n$ такая, что:*

1. *Координаты $u^k = \frac{1}{k}\operatorname{tr} L^k, k = 1, \dots, n$;*
2. *Бивектор π имеет канонический вид, то есть $\pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$;*
3. *Оператор L имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} L^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & L \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma^n & \sigma^{n-1} & \sigma^{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ_i — полиномы Ньютона-Жирара от u^i.

Доказательство. На первом шаге применяем теорему 9.1.2. Вводим на окрестности структуру кокасательного расслоения к диску U^n. После этого замечаем, что $L = \widehat{N}$.

Далее выполняем замену, которая переводит N во вторую сопровождающую форму на базе. Продолжаем эту замену на всю окрестность до канонического преобразования. При этом симплектическая форма остается в каноническом виде.

Так как операция поднятия Яно-Патерсона инвариантна относительно замен, сохраняющих структуру слоения, мы получаем, что условие $L = \widehat{N}$ выполнено и в новой системе координат. При этом, по построению $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}u^i) = 0$. Стало быть, поднятие имеет в точности вид, указанный в следствии. $\square$

9.2 Фробениусовы пары

Пусть задана пара — плоская метрика h и невырожденное операторное поле L со следующими свойствами:

1. L самосопряжен относительно h, то есть
$$L^i_q h^{qj} = L^j_q h^{qi}; \tag{9.7}$$
2. Выполнены тождества первого порядка
$$\nabla^i L^j_k = \nabla^j L^i_k, \quad L^i_s \nabla^s L^j_k = L^j_s \nabla^s L^i_k \quad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{9.8}$$
3. Выполнены тождества второго порядка
$$\nabla^s \nabla^i L^j_k = 0, \quad 1 \leq i, j, k, s \leq n. \tag{9.9}$$

Здесь ∇ означает связность Леви-Чивиты метрики h. Пару метрика g и операторное поле L мы будем называть фробениусово согласованной парой (или просто фробениусовой парой). Следующая теорема описывает ключевые свойства таких пар.

Теорема 9.2.1. *Пусть плоская контравариантная метрика h и операторное поле L фробениусово согласованы. Тогда*

1. *Контравариантная метрика $g = Lh$ плоская;*
2. *Метрика g и оператор L пуассоново согласованы;*
3. *L — оператор Нийенхейса.*

Доказательство. Определим тензор $a^{ij}_k = \nabla^i L^j_k$ и зафиксируем координаты $u^1, \dots, u^n$ — плоские для метрики h.

Лемма 9.2.1. *В выбранных координатах*

1. *Компоненты тензора a^{ij}_k постоянны, а сам тензор задает коммутативное ассоциативное умножение на $T^*\mathrm{M}^n$ по формуле $\mathrm{d}u^i \star \mathrm{d}u^j = a^{ij}_s \mathrm{d}u^s$;*

2. *Компоненты тензора g имеют вид $g^{ij} = b^{ij} + a^{ij}_s u^s$, где b^{ij} задает инвариантное скалярное произведение, то есть $b(\mathrm{d}u^i \star \mathrm{d}u^j, \mathrm{d}u^k) = b(\mathrm{d}u^i, \mathrm{d}u^j \star \mathrm{d}u^k)$;*

3. *контравариантные символы Кристоффеля для g совпадают с $-\frac{1}{2}a^{ij}_k$.*

Доказательство. Тождества (9.9) принимают вид

$$h^{sq}\frac{\partial}{\partial u^q}a^{ij}_k = 0.$$

В силу невырожденности h получаем, что тензор a^{ij}_k постоянен. Кроме этого, первое условие из (9.8) дает $a^{ij}_k = a^{ji}_k$, то есть операция $\star$ из условия леммы коммутативна. Определим тензор $\nabla_i L^j_k = h_{iq}a^{qj}_k = c^j_{ik}$. Операторное поле L в этом случае имеет вид

$$L^j_k = r^j_k + c^j_{sk}u^s.$$

По условию L самосопряжен относительно h, то есть

$$0 = h^{iq}L^j_q - h^{jq}L^i_q = (h^{iq}r^j_q - h^{jq}r^i_q) + (h^{iq}c^j_{sq} - h^{jq}c^i_{sq})u^s.$$

Поднимая во втором коэффициенте индекс s, мы получаем

$$h^{iq}r^j_q = h^{jq}r^i_q \quad \text{и} \quad h^{iq}a^{sj}_q = h^{jq}a^{si}_q. \tag{9.10}$$

Второе условие из (9.8) имеет вид

$$0 = L^i_q a^{qj}_k - L^j_q a^{qi}_k = (r^i_q a^{qj}_k - r^j_q a^{qi}_k) + (c^i_{sq}a^{qj}_k - c^j_{sq}a^{qi}_k)u^s.$$

Поднимая во втором коэффициенте индекс s, мы получаем

$$r^i_q a^{qj}_k = r^j_q a^{qi}_k \quad \text{и} \quad a^{si}_q a^{qj}_k - a^{sj}_q a^{qi}_k. \tag{9.11}$$

Из условий (9.11) и симметричности тензора a^{ij}_s мы получаем первое утверждение леммы, то есть этот тензор — суть структурные константы коммутативной ассоциативной алгебры на кокасательном пространстве. Кроме этого, второе условие в (9.10) показывает, что h — инвариантное скалярное умножение относительно $\star$. Из этого получаем

$$(c^k_{mi} - c^k_{im})h^{jm} = h^{jm}h_{mq}a^{qk}_i - h_{iq}a^{qk}_m h^{jm} = a^{jk}_i - h_{iq}a^{jk}_m h^{qm} = a^{jk}_i - a^{jk}_i = 0.$$

В силу невырожденности h получаем, что c^k_{ij} задает коммутативную операцию уже на касательном пространстве. Опуская индексы у ассоциативности получим, что эта операция также ассоциативная. По построению $g^{ij} = h^{iq}r^j_q + a^{ij}_s u^s$ и L самосопряжен относительно g. Мы получаем

$$\begin{aligned}0 = g^{iq}L^j_q - L^i_q g^{qj} &= (b^{iq} + a^{iq}_s u^s)(r^j_q + c^j_{qs}u^s) - (b^{jq} + a^{jq}_s u^s)(r^i_q + c^i_{qs}u^s) = \\ &= (b^{iq}r^j_q - b^{jq}r^i_q) + (a^{iq}_s r^j_q + b^{iq}c^j_{qs} - a^{jq}_s r^i_q - b^{jq}c^i_{qs})u^s + \dots.\end{aligned}$$

Используя (9.11), коэффициент при u^s дает нам

$$0 = b^{iq}c^j_{qs} - b^{jq}c^i_{qs} = \big(b^{iq}a^{mj}_q - b^{jq}a^{mi}_q\big)h_{ms}.$$

В силу невырожденности h_{ms} получаем $b^{iq}a_q^{mj} - b^{jq}a_q^{mi} = 0$, то есть b — инвариантная относительно $\star$ форма. Два первых утверждения леммы доказаны. Перейдем к третьему. В фиксированных координатах определим

$$\Gamma_{rs}^{\beta} = -\frac{1}{2} g_{rq} a_s^{q\beta}.$$

Здесь g с нижними индексами — матрица, обратная к g^{ij}. Рассмотрим следующее выражение

$$g^{ri}g^{sj}\big(\Gamma_{rs}^k - \Gamma_{sr}^k\big) = g^{sj}a_s^{ik} - g^{ri}a_r^{jk} = (b^{sj} + a_m^{sj}u^m)a_s^{ik} - (b^{ri} + a_m^{ri}u^m)a_r^{jk} = 0.$$

Здесь мы пользовались первыми двумя утверждениями леммы 9.2.1 относительно инвариантности формы b^{ij} и ассоциативности a_s^{ij}. Из невырожденности g мы получаем, что $\Gamma_{rs}^k = \Gamma_{sr}^k$. Определим симметрическую связность, задаваемую в координатах $u^1, \dots, u^n$ символами Кристоффеля, совпадающими с Γ_{rs}^k. В силу леммы 9.2.1 и определения Γ имеем

$$\nabla_s g^{\alpha\beta} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u^s} + g^{\alpha q}\Gamma_{qs}^{\beta} + g^{\beta q}\Gamma_{qs}^{\alpha} = a_s^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}a_s^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}a_s^{\beta\alpha} = 0.$$

Таким образом, построенная связность совпадает со связностью Леви-Чивиты метрики g. В частности, контравариантные символы Кристоффеля совпадают с $-\frac{1}{2}a_s^{\alpha\beta}$, они постоянны и симметричны по верхним индексам. Лемма доказана. $\square$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Вычислим тензор кривизны метрики g через контравариантные символы Кристоффеля (формула 0.9 в [31]):

$$\begin{aligned} R_s^{\beta\gamma\alpha} &= -\frac{\partial \Gamma_p^{\gamma\alpha}}{\partial u^s} g^{p\beta} + \frac{\partial \Gamma_s^{\gamma\alpha}}{\partial u^p} g^{p\beta} + \Gamma_q^{\beta\gamma}\Gamma_s^{q\alpha} - \Gamma_q^{\beta\alpha}\Gamma_s^{q\gamma} = \\ &= a_q^{\beta\gamma}a_s^{q\alpha} - a_q^{\beta\alpha}a_s^{q\gamma} = a_q^{\gamma\beta}a_s^{q\alpha} - a_q^{\alpha\beta}a_s^{q\gamma} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, метрика g плоская. Заметим теперь, что замена g на $g + \lambda h$ эквивалентна замене L на $L + \lambda \mathrm{Id}$.

Проводя аналогичные вычисления, получаем, что, во-первых, такая метрика плоская для любого λ и, во-вторых, что контравариантные символы Кристоффеля для разных λ совпадают с $a_s^{\alpha\beta}$. Так как для h они нулевые, то тривиальным образом получаем, что контравариантные символы Кристоффеля суммы — это сумма контравариантных символов Кристоффеля. То есть метрики h и g пуассоново согласованы.

Из теоремы Мохова [145] вытекает, что L — оператор Нийенхейса. То есть теорема доказана. $\square$

Пример 9.2.1. $F-$многообразием называется многообразие M^n, снабженное тройкой тензоров: векторное поле e, векторное поле E и тензор c_{ij}^k, которые удовлетворяют следующим условиям (см. [51, 159]):

1. Тензор c задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры (мы обозначим операцию через $\circ$);

2. e — единица алгебры;

3. Для произвольного набора ξ, η, ζ, θ выполнено соотношение (правая часть задает тензор, см. [115])
$$0 = [\xi \circ \eta, \zeta \circ \theta] - [\zeta, \xi \circ \eta] \circ \theta - \zeta \circ [\xi \circ \eta, \theta] - \xi \circ [\eta, \zeta \circ \theta] + \xi \circ [\eta, \zeta] \circ \theta + \\ + \xi \circ \zeta \circ [\eta, \theta] - \eta \circ [\xi, \zeta \circ \theta] + \eta \circ [\xi, \zeta] \circ \theta + \eta \circ \zeta \circ [\xi, \theta].$$

4. Для любой пары векторных полей ξ, η
$$[E, \xi \circ \eta] - [E, \xi] \circ \eta - \xi \circ [E, \eta] = \xi \circ \eta.$$

Если $e, E, E \circ E, \dots, E^{\circ n-1}$ линейно независимы, то структура $F-$многообразия называется регулярной. Для регулярных структур известно, что в подходящей системе координат они приводятся к постоянному виду c^k_{ij} ([25], Теорема 3).

Из линейной алгебры известно, что найдется такой набор констант, $a_k, k = 1, \dots, n$, что $h_{ij} = c^k_{ij} a_k$ — невырожденная форма. В инвариантной форме это скалярное произведение задается как $h(\xi, \eta) = a(\xi \circ \eta)$, где a — линейный функционал. Аналогично доказательству леммы 9.2.1 проверяется, что $a^{ij}_k = h^{iq} c^j_{qk}$ задает на кокасательном пространстве структуру коммутативной ассоциативной алгебры. Определим оператор
$$L = \delta^i_j + c^i_{jk} u^k.$$
Он самосопряжен относительно h и условие (9.9) выполнено тривиально. Условия (9.8) вытекают из замечания выше. Таким образом, со структурой регулярного $F-$многообразия естественным образом связана некоторая фробениусова пара (g, L). Кроме этого, легко видеть, что $\mathcal{L}_e L = \mathrm{Id}$, то есть перед нами структура многообразия Нийенхейса с единицей. ■

Мы выяснили, что если h и L фробениусово согласованы, то они и пуассоново согласованы. Следующий пример сравнивает понятие фробениусовой согласованности с понятием геодезической согласованности, введённым в разделе 7.4.

Пример 9.2.2. Пусть (h, L) — фробениусово согласованы. В плоских координатах метрики h мы имеем, что
$$g^{ij} = b^{ij} + a^{ij}_s u^s.$$
Пусть h, L так же геодезически согласованы. Тогда по теореме 8.1.1 имеем, что
$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = (c^i - K u^i)\delta^i_k + (c^j - K u^j)\delta^i_k.$$
Подставляя первую формулу в левую часть, мы получаем $K = 0$ и
$$a^{ij}_k = c^i \delta^j_k + c^j \delta^i_k.$$
Коммутативность очевидным образом выполнена. Проверим условие ассоциативности
$$\begin{aligned} a^{ij}_s a^{sk}_m - a^{kj}_s a^{si}_m &= (c^i \delta^j_s + c^j \delta^i_s)(c^s \delta^k_m + c^k \delta^s_m) - (c^k \delta^j_s + c^j \delta^k_s)(c^s \delta^i_m + c^i \delta^s_m) = \\ &= c^i c^j \delta^k_m + c^j c^i \delta^k_m + c^i c^k \delta^j_m + c^j c^k \delta^i_m - c^k c^j \delta^i_m - c^k c^i \delta^j_m - c^j c^k \delta^i_m - c^i c^j \delta^k_m = \\ &= c^i c^j \delta^k_m - c^k c^j \delta^i_m. \end{aligned}$$

Равенство нулю правой части выполняется только если $c^i = 0$. То есть операторное поле L плоское относительно связности Леви-Чивиты для метрики h. ■

Скобка Дубровина-Новикова степени k называется скобкой Дарбу-Пуассона, если существует такая система координат, что гамильтонов оператор имеет вид

$$\pi^{ij} = h^{ij} D^k,$$

где компоненты тензора h^{ij} — постоянны. Соответствующие им операторы Гамильтона, в свою очередь, будем называть операторами Дарбу-Гамильтона. Нас будет интересовать случай $k = 3$. Элементарными вычислениями мы получаем, что в произвольных координатах этот же гамильтонов оператор записывается в виде

$$\begin{aligned}\pi_h^{ij} = {} & h^{ij} D^3 - 3h^{iq}\bar{\Gamma}^j_{qs} u^s_x D^2 + \\ & + 3\left(h^{iq}\left(\bar{\Gamma}^p_{qs}\bar{\Gamma}^j_{pr} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^j_{qs}}{\partial u^r}\right) u^s_x u^r_x - h^{iq}\bar{\Gamma}^j_{qs} u^s_{x^2}\right) D + \\ & + \left(h^{iq}\left(2\bar{\Gamma}^a_{qs}\frac{\partial \bar{\Gamma}^j_{ar}}{\partial u^p} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^a_{qs}}{\partial u^r}\bar{\Gamma}^j_{ap} - \bar{\Gamma}^a_{qs}\bar{\Gamma}^b_{ar}\bar{\Gamma}^j_{bp} - \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}^j_{qs}}{\partial u^r \partial u^p}\right) u^s_x u^r_x u^p_x + \right. \\ & \left. + h^{iq}\left(2\bar{\Gamma}^a_{qs}\bar{\Gamma}^j_{ar} + \bar{\Gamma}^a_{qr}\bar{\Gamma}^j_{as} - 2\frac{\partial \bar{\Gamma}^j_{qr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^j_{qs}}{\partial u^r}\right) u^s_x u^r_{x^2} - h^{iq}\bar{\Gamma}^j_{qs} u^s_{x^3}\right).\end{aligned} \tag{9.12}$$

Здесь h^{ij} — плоская контравариантная метрика, $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ — символы Кристоффеля её связности Леви-Чивиты. Нас будут интересовать неоднородные гамильтоновы операторы вида

$$\pi^{ij} = \pi_g^{ij} + \pi_h^{ij}, \tag{9.13}$$

где π_h^{ij} — гамильтонов оператор скобки Пуассона-Дарбу третьего порядка, π_g^{ij} — гамильтонов оператор скобки первого порядка, вообще говоря, не обязательно вырожденный.

Замечание 9.2.1. Условие того, что в формуле (9.13) каждое слагаемое является гамильтоновым оператором некоторой скобки, является необходимым. Этот факт следует из того, что тождество Якоби "уважает"градуировку по дифференциальным степеням [30]. ■

Выполнена следующая теорема.

Теорема 9.2.2. *Пусть задана пара контравариантных невырожденных симметрических тензоров g, h (то есть пара метрик). Определим оператор $L = hg^{-1}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Пара h, L фробениусово согласованы;*
2. *Вариационные бивектор $\pi^{ij} = \pi_g^{ij} + \pi_h^{ij}$ — гамильтонов оператор скобки Дарбу-Пуассона типа $1 + 3$.*

Доказательство. Покажем, что из второго условия вытекает первое. Выберем плоские координаты $u^1, \ldots, u^n$ для h. контравариантные символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты для g удовлетворяют условиям (см. [31])

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u^q} + \Gamma^{\alpha\beta}_q + \Gamma^{\beta\alpha}_q = 0. \tag{9.14}$$

и
$$\Gamma^{\alpha\beta}_q g^{q\gamma} = \Gamma^{\gamma\beta}_q g^{q\alpha}. \tag{9.15}$$
Рассмотрим функционалы
$$H_1 = \int a_\alpha u^\alpha \mathrm{d}x, \quad H_2 = \int b_\beta u^\beta \mathrm{d}x, \quad H_3 = \int c_\gamma u^\gamma \mathrm{d}x,$$
где $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$ для $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$ произвольные $3n$ функции от x. Мы введем обозначение $a^{(i)}_\alpha = D^i(a_\alpha)$, то есть это $i-$я производная по x. Аналогичные обозначения действуют для b_β, c_γ. В этих обозначениях условие согласованности скобок принимает вид
$$\begin{gathered}
0 = \{\{H_1, H_2\}_g, H_3\}_h + \{\{H_2, H_3\}_g, H_1\}_h + \{\{H_3, H_1\}_g, H_2\}_h + \{\{H_1, H_2\}_h, H_3\}_g + \\
+\{\{H_2, H_3\}_h, H_1\}_g + \{\{H_3, H_1\}_h, H_2\}_g = \\
= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u^q} h^{q\gamma} a_\alpha b^{(1)}_\beta c^{(k)}_\gamma - \frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}_s}{\partial u^q} h^{q\gamma} u^s_x a_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma - \Gamma^{\alpha\beta}_q h^{q\gamma} a_\alpha b_\beta c^{(k+1)}_\gamma \right) \mathrm{d}x + \text{цикл. пер.} = \\
= \int\limits_0^{2\pi} \left(\Gamma^{\alpha\beta}_q h^{q\gamma} a^{(1)}_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma - \Gamma^{\beta\alpha}_q h^{q\gamma} a_\alpha b^{(1)}_\beta c^{(k)}_\gamma + \Big(\frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}_q}{\partial u^s} h^{q\gamma} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}_s}{\partial u^q} h^{q\gamma} \Big) u^s_x a_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma \right) \mathrm{d}x + \text{цикл. пер.}
\end{gathered} \tag{9.16}$$
Здесь "цикл. пер."означает циклические перестановки $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$. Кроме этого, в формуле мы использовали тождество (9.14). Обозначим
$$A^{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha\beta}_q h^{q\gamma} \quad \text{и} \quad T^{\alpha\beta\gamma} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}_q}{\partial u^s} h^{q\gamma} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}_s}{\partial u^q} h^{q\gamma} \right) u^s_x.$$
Условие согласованности переписывается как
$$\begin{aligned}
0 = &\int A^{\alpha\beta\gamma} a^{(1)}_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x - \int A^{\beta\alpha\gamma} a_\alpha b^{(1)}_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x + \int A^{\beta\gamma\alpha} a^{(k)}_\alpha b^{(1)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x - \\
&- \int A^{\gamma\beta\alpha} a^{(k)}_\gamma b_\beta c^{(1)}_\gamma \mathrm{d}x + \int A^{\gamma\alpha\beta} a_\alpha b^{(k)}_\beta c^{(1)}_\gamma \mathrm{d}x - \int A^{\alpha\gamma\beta} a^{(1)}_\alpha b^{(k)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x + \\
&+ \int T^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x + \int T^{\beta\gamma\alpha} a^{(k)}_\alpha b_\beta c_\gamma \mathrm{d}x + \int T^{\gamma\alpha\beta} a_\alpha b^{(k)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{9.17}$$
Для произвольных функционалов h_1, h_2 верно, что
$$0 = \int\limits_0^{2\pi} D(h_1 h_2) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} D(h_1) h_2 \mathrm{d}x + \int\limits_0^{2\pi} h_1 D(h_2) \mathrm{d}x.$$
Это равенство обычно называют интегрированием по частям. Применяя его к предыдущей формуле, получаем
$$\begin{aligned}
\int A^{\alpha\beta\gamma} a^{(1)}_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x &= - \sum_{i+j+r=k} \binom{k}{i, j, r} \int\limits_0^{2\pi} D^i\big(A^{\alpha\beta\gamma}\big) a^{(1+j)}_\alpha b^{(r)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x, \\
\int A^{\beta\alpha\gamma} a_\alpha b^{(1)}_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x &= - \sum_{i+j+r=k} \binom{k}{i, j, r} \int D^i\big(A^{\beta\alpha\gamma}\big) a^{(j)}_\alpha b^{(r+1)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x, \\
\int T^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c^{(k)}_\gamma \mathrm{d}x &= - \int \sum_{i+j+r=k} \binom{k}{i, j, r} D^i\big(T^{\alpha\beta\gamma}\big) a^{(j)}_\alpha b^{(r)}_\beta c_\gamma \mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

$$\int A^{\gamma\beta\alpha}a_\gamma^{(k)}b_\beta c_\gamma^{(1)}\mathrm{d}x = -\int D(A^{\gamma\beta\alpha})a_\gamma^{(k)}b_\beta c_\gamma \mathrm{d}x - \int A^{\gamma\beta\alpha}a_\gamma^{(k+1)}b_\beta c_\gamma^{(1)}\mathrm{d}x - \int A^{\gamma\beta\alpha}a_\gamma^{(k)}b_\beta^{(1)}c_\gamma^{(1)}\mathrm{d}x,$$
$$\int A^{\gamma\alpha\beta}a_\alpha b_\beta^{(k)}c_\gamma^{(1)}\mathrm{d}x = -\int D(A^{\gamma\alpha\beta})a_\alpha b_\beta^{(k)}c_\gamma \mathrm{d}x - \int A^{\gamma\alpha\beta}a_\alpha^{(1)}b_\beta^{(k)}c_\gamma \mathrm{d}x - \int A^{\gamma\alpha\beta}a_\alpha b_\beta^{(k+1)}c_\gamma \mathrm{d}x.$$

Здесь $\binom{n}{p,q,r} = \frac{n!}{p!q!r!}$ — триномиальные коэффициенты. Мы подставляем эти выражения в (9.17). Обозначим коэффициенты перед $a_\alpha^{(i)}b_\beta^{(j)}c_\gamma$ как $M_{ij}^{\alpha\beta\gamma}$. Теперь условие (9.17) переписывается в виде

$$0 = \int_0^{2\pi} \sum_{i,j} M_{ij}^{\alpha\beta\gamma}a_\alpha^{(i)}b_\beta^{(j)}c_\gamma \mathrm{d}x. \tag{9.18}$$

Теперь вспомним, что $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$ — произвольные функции от x.

Мы применим стандартный аналитический трюк: фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \le n$ и i, j с условием $i + j \le k + 1$. Мы получаем $a_q = 0$ для $q \ne \alpha$ и $b_r = 0$ для $r \ne \beta$. На a_α и b_β мы дополнительно накладываем условия $a_\alpha^{(p)}(x_0) = \delta_i^p$ и $b_\alpha^{(q)}(x_0) = \delta_j^q$.

Возьмем $c_q = 0$ для $q \ne \gamma$ и рассмотрим последовательность гладких функций $c_\gamma^n(x)$ с компактным носителем, которая сходится к дельта-функции $\delta(x - x_0)$ для $n \to \infty$. В этом случае (9.18) сходится к $M_{ij}^{\alpha\beta\gamma}(x_0) = 0$. По построению это верно для всех функций u^α. Так как x_0 был выбран произвольно, мы получаем, что (9.15) эквивалентно условиям

$$M_{ij}^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad 1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n, \quad 0 \le i + j \le k + 1. \tag{9.19}$$

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 9.2.2. *Условие* (9.17) *влечёт:*

1. $T^{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$;
2. $A^{\alpha\beta\gamma}$ *постоянны и симметричны по индексам* α, β, γ.

Доказательство. Зафиксируем α, β, γ. Из (9.19) и (9.17) получаем

$$M_{00}^{\alpha\beta\gamma} = -D^k\big(T^{\alpha\beta\gamma}\big) = 0.$$

Напомним, что $T^{\alpha\beta\gamma}$ — однородный многочлен степени один, с коэффициентами, которые явно не зависят от x. Обращение в ноль полной производной для дифференциального многочлена степени > 0 означает, что сам многочлен нулевой. Дальше рассмотрим

$$\begin{aligned} 0 &= M_{k+1\,0}^{\alpha\beta\gamma} = A^{\gamma\beta\alpha} - A^{\alpha\beta\gamma}, \\ 0 &= M_{k\,1}^{\alpha\beta\gamma} = -kA^{\alpha\beta\gamma} + A^{\beta\alpha\gamma} + A^{\gamma\beta\alpha} + A^{\beta\gamma\alpha}, \\ 0 &= M_{1\,k}^{\alpha\beta\gamma} = -A^{\alpha\beta\gamma} + kA^{\beta\alpha\gamma} - A^{\gamma\alpha\beta} - A^{\alpha\gamma\beta}, \\ 0 &= M_{k\,0}^{\alpha\beta\gamma} = -kD\big[A^{\alpha\beta\gamma}\big] + D\big[A^{\gamma\beta\alpha}\big] + T^{\beta\gamma\alpha} - T^{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Первое уравнение из (9.20) дает $A^{\gamma\beta\alpha} = A^{\alpha\beta\gamma}$, причем для всех α, β, γ. Второе и третье уравнение дают

$$\begin{aligned} 0 &= M_{k\,1}^{\alpha\beta\gamma} + M_{1\,k}^{\alpha\beta\gamma} = \\ &= -kA^{\alpha\beta\gamma} + A^{\beta\alpha\gamma} + A^{\gamma\beta\alpha} + A^{\beta\gamma\alpha} - A^{\alpha\beta\gamma} + kA^{\beta\alpha\gamma} - A^{\gamma\alpha\beta} - A^{\alpha\gamma\beta} = \\ &= (k+1)\big(A^{\beta\alpha\gamma} - A^{\alpha\beta\gamma}\big). \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что $A^{\beta\gamma\alpha} = A^{\alpha\gamma\beta}$ (в силу того, что α, β, γ — произвольные). То есть мы показали, что $A^{\alpha\beta\gamma} = A^{\beta\alpha\gamma}$ и $A^{\alpha\beta\gamma} = A^{\gamma\beta\alpha}$. Группа всех перестановок из трех элементов порождается любыми двумя различными перестановками двух элементов. То есть из этих двух условий вытекает, что $A^{\alpha\beta\gamma}$ симметрично по всем трем индексам. Наконец, последнее уравнение из (9.20) принимает вид

$$(1-k)D\big(A^{\alpha\beta\gamma}\big) = 0.$$

Так как $A^{\alpha\beta\gamma}$ — функция, то из равенства нулю производной по x вытекает, что $A^{\alpha\beta\gamma}$ — константы. $\square$

Покажем теперь, что при $k = 3$ утверждение леммы 9.2.2 эквивалентно согласованности. Условие (9.17) записывается как

$$\begin{aligned}
0 =& A^{\alpha\beta\gamma}\Bigg(\int a_\alpha^{(1)} b_\beta c_\gamma^{(3)} \mathrm{d}x - \int a_\alpha b_\beta^{(1)} c_\gamma^{(3)} \mathrm{d}x + \int a_\alpha^{(3)} b_\beta^{(1)} c_\gamma \mathrm{d}x - \\
&- \int a_\gamma^{(3)} b_\beta c_\gamma^{(1)} \mathrm{d}x + \int a_\alpha b_\beta^{(3)} c_\gamma^{(1)} \mathrm{d}x - \int a_\alpha^{(1)} b_\beta^{(3)} c_\gamma \mathrm{d}x\Bigg) = \\
&= A^{\alpha\beta\gamma}\Bigg(- \int a_\alpha^{(4)} b_\beta c_\gamma \mathrm{d}x - 3\int a_\alpha^{(3)} b_\beta^{(1)} c_\gamma \mathrm{d}x - 3\int a_\alpha^{(2)} b_\beta^{(2)} c_\gamma \mathrm{d}x - \int a_\alpha^{(1)} b_\beta^{(3)} c_\gamma \mathrm{d}x + \\
&\quad + \int a_\alpha^{(3)} b_\beta^{(1)} c_\gamma \mathrm{d}x + 3\int a_\alpha^{(2)} b_\beta^{(2)} c_\gamma \mathrm{d}x + 3\int a_\alpha^{(1)} b_\beta^{(3)} c_\gamma \mathrm{d}x + \int a_\alpha b_\beta^{(4)} c_\gamma \mathrm{d}x + \\
&\quad + \int a_\alpha^{(4)} b_\beta c_\gamma \mathrm{d}x + \int a_\alpha^{(3)} b_\beta^{(1)} c_\gamma \mathrm{d}x - \int a_\alpha^{(1)} b_\beta^{(3)} c_\gamma \mathrm{d}x - \int a_\alpha b_\beta^{(4)} c_\gamma \mathrm{d}x + \\
&\quad + \int a_\alpha^{(3)} b_\beta^{(1)} c_\gamma \mathrm{d}x - \int a_\alpha^{(1)} b_\beta^{(3)} c_\gamma \mathrm{d}x\Bigg) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что условия леммы являются необходимыми и достаточными условиями согласованности. Убедимся теперь, что эти же условия влекут фробениусову согласованность для h, L. Для этого проанализируем внешний вид метрики g.

Напомним, что

$$A^{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_s^{\alpha\beta} h^{s\gamma}.$$

Из постоянства $A^{\alpha\beta\gamma}$ и $h^{s\gamma}$ в координатах $u^1, \dots, u^n$ вытекает, что $\Gamma_s^{\alpha\beta}$. Так как $A^{\alpha\beta\gamma} = A^{\beta\alpha\gamma}$, мы получаем, что $\Gamma_s^{\alpha\beta}$ симметричны по верхним индексам. Введем обозначение

$$\Gamma_s^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} a_s^{\alpha\beta}.$$

Условие (9.14) на контравариантные символы Кристоффеля принимает вид

$$g^{\alpha\beta} = 2(b^{\alpha\beta} + a_s^{\alpha\beta} u^s).$$

Здесь мы обозначили постоянное слагаемое как $2b^{\alpha\beta}$. Оно по определению совпадает с $g^{\alpha\beta}$, взятой в начале координат. В частности, мы получаем, что эта матрица невырожденная. Второе условие (9.15) на контравариантные символы Кристоффеля дает

$$a_q^{\alpha\beta}(b^{q\gamma} + a_s^{q\gamma} u^s) = a_q^{\gamma\beta}(b^{q\alpha} + a_s^{q\alpha} u^s).$$

Приравнивая постоянные и линейные коэффициенты в левой и правой частях, мы получаем

$$a_q^{\alpha\beta} b^{q\gamma} = a_q^{\gamma\beta} b^{q\alpha}, \quad a_q^{\alpha\beta} a_s^{q\gamma} = a_q^{\gamma\beta} a_s^{q\alpha}. \tag{9.21}$$

Наконец, симметрия $A^{\alpha\beta\gamma} = A^{\gamma\beta\alpha}$ дает нам условие

$$a_q^{\alpha\beta} h^{q\gamma} = a_q^{\gamma\beta} h^{q\alpha}.$$

Таким образом, мы получили, что a_k^{ij} задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры на $T^*\mathrm{M}^n$, а формы b, h — инварианты относительно соответствующего умножения. Определим оператор $L_j^i = r_j^i + c_{qj}^i u^q$, где $r_j^i = b^{iq} h_{qj}$ и $c_{qj}^i = h_{qm} a_j^{mi}$. Легко видеть, что условие (9.9) выполняется тривиальным образом. Свойства (9.8), в свою очередь, выполняются в силу свойств умножения a_k^{ij} и пары форм h, b (рассуждения полностью аналогичны тем, которые приводятся в конце доказательства теоремы 9.2.1).

Покажем теперь, что из первого условия вытекает второе. Снова зафиксируем плоские координаты для h. По лемме 9.2.1 получаем, что

$$g^{ij} = b^{ij} + a_s^{ij} u^s,$$

где a_s^{ij} задает коммутативную ассоциативную алгебру, h, b — инвариантные формы, а $-\frac{1}{2} a_k^{ij}$ задают контравариантные символы Кристоффеля для g. Легко проверяется, что в этом случае выполнены все условия леммы 9.2.2. То есть $\pi^{ij} = \pi_g^{ij} + \pi_h^{ij}$ — гамильтонов оператор скобки Дарбу-Пуассона. □

Замечание 9.2.2. В ходе доказательства мы показали, что второе уравнение из (9.20) принимает вид

$$0 = (3 - k) A^{\alpha\beta\gamma}.$$

Для нечетных $k \geq 5$ мы получаем, что все $A^{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю. В силу невырожденности h и g это означает, что обе эти метрики одновременно приводятся к постоянному виду. ■

Замечание 9.2.3. В плоских координата h условия на гамильтонов оператор скобки Дарбу-Пуассона можно записать явно:

$$\pi^{ij} = \underbrace{h^{ij} D^3}_{\pi_h^{ij}} + \underbrace{(b^{ij} + a_s^{ij} u^s) D + \frac{1}{2} a_s^{ij} u_x^s}_{\pi_g^{ij}}. \tag{9.22}$$

Здесь b^{ij}, h^{ij}, a_s^{ij} постоянны и симметричны по верхним. На них выполнены условия $\det b \neq 0, \det h \neq 0$ и

$$a_k^{ij} = a_k^{ji}, \quad a_q^{ij} a_s^{qk} = a_q^{kj} a_s^{qi}, \quad a_q^{ij} h^{qk} = a_q^{kj} h^{qi}, \quad a_q^{ij} b^{qk} = a_q^{kj} b^{qi}. \tag{9.23}$$

Первые два условия это в точности условия, что a_k^{ij} задает коммутативную ассоциативную алгебру, а b, h — инвариантные формы. При этом верно и обратное: если даны b^{ij}, h^{ij}, a_s^{ij} с такими условиями, то

1. Контравариантная метрика

   $$g^{ij} = b^{ij} + a_s^{ij} u^s$$

   плоская и ее контравариантные символы Кристоффеля совпадают с $-\frac{1}{2} a_s^{ij}$;

2. Формула
$$\pi^{ij} = h^{ij}D^3 + (b^{ij} + a^{ij}_s u^s)D + \frac{1}{2}a^{ij}_s u^s_x$$
задает оператор Дарбу-Гамильтона.

Этот факт был хорошо известен, см. [126, 105]. ■

9.3 Классификация операторов Дарбу-Гамильтона в размерности два

Далее мы хотим классифицировать такие пары и их нормальные формы в окрестности фиксированной точки p в размерности два.

Для этого мы сначала сведем задачу к алгебраической. Рассмотрим $\mathfrak{a}$ — коммутативную и ассоциативную алгебру над полем вещественных или комплексных чисел с умножением $\star$. Билинейная форма h называется инвариантной, если для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{a}$ выполнено тождество
$$h(\xi \star \eta, \zeta) = h(\eta, \xi \star \zeta).$$
Если форма невырожденная, то она называется фробениусовой. Для произвольного ковектора $a \in \mathfrak{a}^*$ верно, что $h_a(\xi, \eta) = a(\xi \star \eta)$ — инвариантная форма. Более того, если $\mathfrak{a}$ — алгебра с единицей, то любая инвариантная форма получается таким образом.

Мы будем говорить, что задана фробениусова тройка, если на коммутативной ассоциативной алгебре $\mathfrak{a}$ заданы две фробениусовы формы, которые мы обозначим b, h. Обозначать фробениусову тройку мы будем как $(\mathfrak{a}, b, h)$. Зафиксируем в $\mathfrak{a}$ базис η^i (базис нумеруется верхними индексами для последующего удобства сравнения формул). Структура алгебры задается структурными константами a^{ij}_k, определяемыми из условий $\eta^i \star \eta^j = a^{ij}_k \eta^k$.

Условия коммутативности, ассоциативности и инвариантности для h, b принимают вид
$$a^{ij}_q b^{qk} = a^{kj}_q b^{qi}, \quad a^{ij}_q a^{qk}_s = a^{kj}_q a^{qi}_s, \quad a^{ij}_q h^{qk} = a^{kj}_q h^{qi}, \quad a^{ij}_q b^{qk} = a^{kj}_q b^{qi}.$$
Это в точности условия (9.23). Таким образом, между фробениусовыми тройками и фробениусовыми парами (g, L) в плоских координатах установлено соответствие.

Оно, вообще говоря, не является взаимно однозначным: при линейной замене координат, сохраняющей p на месте, константы в теореме 9.2.2 действительно преобразуются как тензоры нужных типов. Однако, сдвиг координат на постоянный вектор $a^1, \ldots, a^n$ трансформирует полученную фробениусову тройку следующим образом:
$$\bar{a}^{ij}_k = a^{ij}_k, \quad \bar{h}^{ij} = h^{ij}, \quad \bar{b}^{ij} = b^{ij} - a^{ij}_s a^s.$$
То есть инвариантная форма b меняется на форму, сдвинутую на построенную по некоторому ковектору. Чтобы этого не происходило, мы будем рассматривать классификацию с точностью до замены координат, оставляющей на месте p. Выполнена следующая теорема.

Теорема 9.3.1. *В размерности два всякая фробениусова тройка приводится к одному из следующих видов (мы выписываем только ненулевые структурные константы $\mathfrak{a}$):*

$$(01)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(02)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(03)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$(04)\colon\ h=\begin{pmatrix} 0 & h_1\\ h_1 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(05)\colon\ h=\begin{pmatrix} -h_2 & h_1\\ h_1 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(11)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\quad a_2^{22}=1;$$

$$(12)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\qquad a_2^{22}=1;$$

$$(21)\colon\ h=\begin{pmatrix} 0 & h_1\\ h_1 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad a_1^{22}=1;$$

$$(31):\ h=\begin{pmatrix} 0 & h_1\\ h_1 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & b_2\end{pmatrix},\quad a_1^{12}=a_1^{21}=1,\quad a_2^{22}=1;$$

$$(41)\colon\ h=\begin{pmatrix} h_1 & 0\\ 0 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\quad a_1^{11}=1,\quad a_2^{22}=1;$$

$$(51)\colon\ h=\begin{pmatrix} -h_2 & h_1\\ h_1 & h_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -b_2 & b_1\\ b_1 & b_2\end{pmatrix},\quad a_1^{12}=a_1^{21}=1,\quad a_2^{11}=-1,\quad a_2^{22}=1.$$

Различные значения параметров h_1, h_2, b_1, b_2 в списке дают неэквивалентные формы, то есть являются инвариантами нормальных форм.

Доказательство. Начнем мы с классификации коммутативных ассоциативных алгебр. В общем случае классификации коммутативных ассоциативных алгебр нет, однако они классифицированы для некоторых малых размерностей. Так, полный список коммутативных ассоциативных алгебр в размерности два (мы выписываем только ненулевые структурные соотношения)

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_1: & \eta^2\star\eta^2=\eta^2;\\ \mathfrak{a}_2: & \eta^2\star\eta^2=\eta^1;\\ \mathfrak{a}_3: & \eta^2\star\eta^2=\eta^2,\quad \eta^1\star\eta^2=\eta^1;\\ \mathfrak{a}_4: & \eta^1\star\eta^1=\eta^1,\quad \eta^2\star\eta^2=\eta^2;\\ \mathfrak{a}_5: & \eta^2\star\eta^2=\eta^2,\quad \eta^1\star\eta^1=-\eta^2,\quad \eta^1\star\eta^2=\eta^1. \end{array} \tag{9.24}$$

Мы также считаем, что $\mathfrak{a}_0$ — это алгебра, у которой все структурные соотношения нулевые.

Мы начнем доказательство с тривиального случая $\mathfrak{a}_0$. В этом случае задача сводится к классификации пар билинейных форм на линейном пространстве. Эта задача, разумеется, является классической и решена в общем случае (см. теорему 9.2 в [64], так же [131]). Далее мы приводим полный список для пары билинейных форм в размерности два:

$$\left\{\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} -h_2 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Внутри каждого семейства разные значения констант (то есть h_1, h_2) соответствуют разным нормальным формам. Из этой классификации вытекает список семейств с (01) по (05) в утверждении теоремы 9.3.1.

Для ассоциативной алгебры $\mathfrak{a}$ определим действие на себе как $R_\xi \eta = \xi \star \eta$. Зафиксируем в алгебре базис η_1, η_2. Тогда инвариантность формы h эквивалентна инвариантности относительно действия базисных векторов или, что то же самое, одновременной самосопряженности операторов:

$$R_1\eta = \eta \star \eta_1, \quad R_1^h = R_1 \quad \text{и} \quad R_2\eta = \eta \star \eta_2, \quad R_2^h = R_2.$$

Далее мы действуем следующим образом: для каждой алгебры мы выписываем операторы R_1 и R_2 и решаем линейную систему уравнений, которая описывает все билинейные формы, относительно которых оба оператора самосопряжены.

Наконец, надо отметить, что на множестве канонических базисов, вообще говоря, действует группа замены. Поэтому при вычислении нормальных форм это действие необходимо учитывать.

Случай $\mathfrak{a}_1$: В базисе η^1, η^2 единственное ненулевое соотношение имеет вид

$$\eta^2 \star \eta^2 = \eta^2.$$

Операторы R_1, R_2 и соответствующая инвариантная форма $b^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Замена координат, сохраняющая структурные соотношения, имеет вид

$$\bar{\eta}^1 = \alpha\eta^1, \quad \bar{\eta}^2 = \eta^2.$$

В силу невырожденности b действием замены b_1 можно превратить в 1 или -1. Соответствующий базис не единственен, помимо тривиальной замены есть еще

$$\bar{\eta}^1 = -\eta^1, \quad \bar{\eta}^2 = \eta^2.$$

В то же время, такая замена не меняет нормальные формы (11) и (12). То есть они не переводятся одна в другую.

Случай $\mathfrak{a}_2$: В базисе η^1, η^2 единственное ненулевое структурное соотношение имеет вид

$$\eta^2 \star \eta^2 = \eta^1.$$

Операторы R_1, R_2 и инвариантная форма $b^{\alpha\beta}$ записываются как

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Замена базиса, сохраняющая структурные соотношения алгебры $\mathfrak{a}_2$ в каноническом базисе, имеет вид

$$\bar{\eta}^1 = \alpha^2\eta^1, \quad \bar{\eta}^2 = \beta\eta^1 + \alpha\eta^2.$$

Рассматривая замену базиса

$$\bar{\eta}^1 = \frac{1}{(h_1)^{2/3}}\eta^1, \quad \bar{\eta}^2 = -\frac{h_2}{2(h_1)^{4/3}}\eta^1 + \frac{1}{(h_1)^{1/3}}\eta^2$$

мы приводим $b^{\alpha\beta}$ к виду $b_1 = 1, b_2 = 0$. Теперь считаем, что без ограничения общности мы уже привели b к каноническому виду. Рассмотрим новый базис $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$, в котором вид билинейной формы сохраняется. Для этого нового базиса выполнены условия

$$b(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2) = \alpha^3 = 1 \quad \text{и} \quad b(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^2) = 2\alpha\beta = 0.$$

Из этого следует, что $\bar{\eta}_1 = \eta_1, \bar{\eta}_2 = \eta_2$. То есть действие группы замен на такой форме тривиально, и мы получаем нормальную форму (21).

Случай $\mathfrak{a}_3$: В базисе η^1, η^2 ненулевые структурные соотношения этой алгебры имеют вид

$$\eta^2 \star \eta^2 = \eta^2, \quad \eta^1 \star \eta^2 = \eta^1.$$

Операторы R_1, R_2 и инвариантная форма $b^{\alpha\beta}$ записываются как

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Замена базиса, сохраняющая структурные соотношения алгебры $\mathfrak{a}_3$ в каноническом базисе, имеет вид

$$\bar{\eta}^1 = \alpha\eta^1, \quad \bar{\eta}^2 = \eta^2.$$

Рассматривая замену базиса вида

$$\bar{\eta}^1 = \frac{1}{b_1}\eta_1 \quad \bar{\eta}^2 = \eta^2.$$

Мы получаем $b_1 = 1$ и b_2 — произвольная. Теперь считаем, что без ограничения общности мы уже привели b к каноническому виду. Рассмотрим новый базис $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$, в котором вид билинейной формы сохраняется. Для этого нового базиса выполнены условия

$$b(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2) = \alpha = 1.$$

Из этого следует, что $\bar{\eta}_1 = \eta_1, \bar{\eta}_2 = \eta_2$. То есть действие группы замен на такой форме тривиально, и мы получаем нормальную форму (31).

Случай $\mathfrak{a}_4$: В базисе η^1, η^2 ненулевые структурные соотношения этой алгебры имеют вид

$$\eta^1 \star \eta^1 = \eta^1, \quad \eta^2 \star \eta^2 = \eta^2.$$

Операторы R_1, R_2 и инвариантная форма $b^{\alpha\beta}$ записываются как

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Замены базиса, сохраняющие структурные константы алгебры $\mathfrak{a}_4$, тривиальны. Таким образом, мы получили нормальную форму (41).

Случай $\mathfrak{a}_5$: В базисе η^1, η^2 ненулевые структурные соотношения этой алгебры имеют вид

$$\eta^2 \star \eta^2 = \eta^2, \quad \eta^1 \star \eta^1 = -\eta^2, \quad \eta^1 \star \eta^2 = \eta^1..$$

Операторы R_1, R_2 и инвариантная форма $b^{\alpha\beta}$ записываются как

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -b_2 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Замены базиса, сохраняющие структурные константы алгебры $\mathfrak{a}_5$, тривиальны. Мы получаем нормальную форму (51). Теорема доказана. □

Выписывать получающиеся пары (g, L) мы не будем, это делается довольно просто. Вместо этого мы получим следствие, где выписаны все двумерные операторы Дарбу-Гамильтона, построенные по этим парам.

Следствие 9.3.1. *В окрестности точки* p *гамильтонов оператор скобки Пуассона-Дарбу заменами координат, оставляющей* p *на месте, приводится к одному из следующих видов*

(01): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D;$

(02): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D;$

(03): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D;$

(04): $\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_1 & 1 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D;$

(05): $\begin{pmatrix} -h_2 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D;$

(11): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_2 + u^2 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^2_x \end{pmatrix};$

(12): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & b_2 + u^2 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^2_x \end{pmatrix};$

(21): $\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u^1 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^1_x \end{pmatrix};$

(31) : $\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 + u^1 \\ 1 + u^1 & b_2 + u^2 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & u^1_x \\ u^1_x & u^2_x \end{pmatrix};$

(41): $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} b_1 + u^1 & 0 \\ 0 & b_2 + u^2 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} u^1_x & 0 \\ 0 & u^2_x \end{pmatrix};$

(51): $\begin{pmatrix} -h_2 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} D^3 + 2\begin{pmatrix} -b_2 - u^2 & b_1 + u^1 \\ b_1 + u^1 & b_2 + u^2 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} -u^2_x & u^1_x \\ u^1_x & u^2_x \end{pmatrix}.$

Различные значения параметров h_1, h_2, b_1, b_2 в списке дают неэквивалентные формы, то есть являются инвариантами нормальных форм.

Доказательство. Следствие вытекает непосредственно из вида фробениусовых троек. □

Замечание 9.3.1. Семейства скобок Дарбу-Пуассона в следствии 9.3.1 содержат множество скобок для известных интегрируемых систем с дисперсией: уравнения Хироты-Сацумы (семейство 41), уравнения волн Антоновича-Форди (семейство 31), системы Ито (семейство 41) и многих других. ■

9.4 Семейства фробениусовых пар, ассоциированные с пучками операторов Дарбу-Гамильтона $1+3$

Начнём с теоремы.

Теорема 9.4.1. *Пусть даны операторы Дарбу-Гамильтона типа $1+3$*

$$\pi^{ij} = \pi_h^{ij} + \pi_g^{ij} \quad \text{и} \quad \bar{\pi}^{ij}\pi_{\bar{h}}^{ij} + \pi_{\bar{g}}^{ij},$$

где $h, \bar{h}, g, \bar{g}$ невырожденные контравариантные метрики. Пусть выполнены условия:

1. *Операторы π^{ij} и $\bar{\pi}^{ij}$ согласованы;*
2. *Любая комбинация $\lambda\pi^{ij} + \mu\bar{\pi}^{ij}$ — оператор Дарбу-Гамильтона;*
3. *Метрики $h, \bar{h}$ находятся "в общем положении то есть спектр операторного поля $\bar{h}h^{-1}$ простой.*

Тогда найдется система координат, в которой пара метрик $h, \bar{h}$ приводится одновременно к постоянному виду.

Доказательство. Пользуясь формулой (9.12), мы можем записать соответствующие операторы через связности Леви-Чивиты метрик $h, \bar{h}$.

Без ограничения общности считаем, что $\hat{h} = h + \bar{h}$ невырожденная. Тогда по условию $\hat{\pi}^{ij} = \pi^{ij} + \bar{\pi}^{ij}$ — оператор Дарбу-Гамильтона. По теореме 7.1 из [30] получаем, что из согласованности $\bar{\pi}^{ij}$ и π^{ij} вытекает согласованность $\pi_{\bar{h}}^{ij}$ и π_h^{ij}.

Рассмотрим коэффициенты этих операторов при D^2. Для них (по той же формуле (9.12)) получаем

$$\Gamma_s^{ij} + \bar{\Gamma}_s^{ij} = \hat{\Gamma}_s^{ij},$$

где $\hat{\Gamma}_s^{ij}$ — контравариантные символы Кристоффеля для $\hat{h}$. Умножая на $\hat{h}^{ks}$ обе части и, пользуясь симметричностью по i, k в выражении справа и в выражениях для $h^{ks}\Gamma_s^{ij}$ и $\bar{h}^{ks}\bar{\Gamma}_s^{ij}$, мы получаем

$$\bar{h}^{ks}\Gamma_s^{ij} + h^{ks}\bar{\Gamma}_s^{ij} = \bar{h}^{is}\Gamma_s^{kj} + h^{is}\bar{\Gamma}_s^{kj}. \tag{9.25}$$

Получаем первое условие на связности метрик $h, \bar{h}$.

Это в точности условие почти согласованности из раздела 8.2. Из условия того, что все операторы в пучке должны быть операторами Дарбу-Гамильтона, мы получаем, что линейная комбинация метрик должна быть плоской. То есть они пуассоново согласованы.

Рассмотрим теперь коэффициенты при D. Сначала проанализируем выражение

$$h^{iq}\Big(\Gamma^p_{qs}\Gamma^j_{pr} - \frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}\Big) = \Gamma^{ip}_s\Gamma^j_{pr} - h^{iq}\frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}. \tag{9.26}$$

Вспомним, что

$$\frac{\partial h^{iq}}{\partial u^r} + \Gamma^{iq}_r + \Gamma^{qi}_r = 0.$$

Из этого получаем

$$\frac{\partial \Gamma^{ij}_s}{\partial u^r} = h^{iq}\frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r} - \Gamma^{iq}_r\Gamma^j_{qs} - \Gamma^{qi}_r\Gamma^j_{qs}.$$

Подставляя последнее выражение в (9.26), мы получаем

$$\Gamma^{ip}_s\Gamma^j_{pr} - h^{iq}\frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r} = \Gamma^{iq}_s\Gamma^j_{qr} - \frac{\partial \Gamma^{ij}_s}{\partial u^r} - \Gamma^{iq}_r\Gamma^j_{qs} - \Gamma^{qi}_r\Gamma^j_{qs} = -\frac{\partial \Gamma^{ij}_s}{\partial u^r} - \Gamma^{qi}_r\Gamma^j_{qs}. \tag{9.27}$$

Рассмотрим теперь условие на коэффициенты при D для $h, \bar h, \hat h$. Мы получаем, что

$$\begin{aligned}3\left(h^{iq}\Big(\Gamma^p_{qs}\Gamma^j_{pr} - \frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}\Big)u^s_x u^r_x - h^{iq}\Gamma^j_{qs}u^s_{x^2}\right) + 3\left(\bar h^{iq}\Big(\bar\Gamma^p_{qs}\bar\Gamma^j_{pr} - \frac{\partial \bar\Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}\Big)u^s_x u^r_x - \bar h^{iq}\bar\Gamma^j_{qs}u^s_{x^2}\right) = \\ = 3\left(\hat h^{iq}\Big(\hat\Gamma^p_{qs}\hat\Gamma^j_{pr} - \frac{\partial \hat\Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}\Big)u^s_x u^r_x - \hat h^{iq}\hat\Gamma^j_{qs}u^s_{x^2}\right).\end{aligned}$$

Учитывая полученные ранее условия, игнорируя коэффициенты и переписывая в терминах контравариантных символов Кристоффеля, мы получаем тождество

$$\Gamma^{ip}_s\Gamma^j_{pr} - h^{iq}\frac{\partial \Gamma^j_{qs}}{\partial u^r} + \bar\Gamma^{ip}_s\bar\Gamma^j_{pr} - \bar h^{iq}\frac{\partial \bar\Gamma^j_{qs}}{\partial u^r} = \hat\Gamma^{ip}_s\hat\Gamma^j_{pr} - \hat h^{iq}\frac{\partial \hat\Gamma^j_{qs}}{\partial u^r}.$$

Используя выражение (9.27) и полученные ранее условия, мы имеем

$$\Gamma^{qi}_r\Gamma^j_{qs} + \bar\Gamma^{qi}_r\bar\Gamma^j_{qs} = \hat\Gamma^{qi}_r\hat\Gamma^j_{qs}.$$

Умножая обе части на $\hat h^{s\gamma}$, мы получаем

$$\Gamma^{qi}_r\Gamma^j_{qs}\bar h^{s\gamma} + \bar\Gamma^{qi}_r\bar\Gamma^j_{qs}h^{s\gamma} = \bar\Gamma^{qi}_r\Gamma^{\gamma j}_q + \Gamma^{qi}_r\bar\Gamma^{\gamma j}_q. \tag{9.28}$$

Введем тензор

$$S^\beta_{rq} = \Gamma^\beta_{rq} - \bar\Gamma^\beta_{rq}.$$

Для плоских метрик обращения в ноль этого тензора эквивалентно тому, что они приводятся к постоянному виду одновременно. Этот тензор симметричен по нижним индексам. В терминах S^β_{rq} условие 9.25 записывается как

$$h^{\alpha p}S^\beta_{pq}\bar h^{\gamma q} = \bar h^{\alpha p}S^\beta_{pq}h^{\gamma q}. \tag{9.29}$$

В свою очередь условие 9.28 принимает вид

$$\begin{aligned}&\Gamma^i_{rm}h^{mq}\Gamma^j_{qr}\bar h^{r\gamma} + \bar\Gamma^i_{rm}\bar h^{mq}\bar\Gamma^j_{qr}h^{r\gamma} - \bar\Gamma^i_{rm}\bar h^{mq}\Gamma^j_{qr}h^{r\gamma} - \Gamma^i_{rm}h^{mq}\bar\Gamma^j_{qr}\bar h^{r\gamma} = \\ =&\Gamma^i_{rm}h^{mq}S^j_{qr}\bar h^{r\gamma} - \bar\Gamma^i_{rm}\bar h^{mq}S^j_{qr}h^{r\gamma} = S^i_{rm}h^{mq}S^j_{qr}\bar h^{rj}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

В последнем переходе мы пользовались (9.29).

Пусть теперь оператор $R = \bar{h}h^{-1}$ имеет простой спектр. Мы рассмотрим вещественный случай, комплексный случай решается так же после ввода комплексных координат. Так как метрики $h, \bar{h}$ согласованы, то R — оператор Нийенхейса.

Выберем систему координат, в которой он диагонален, причем на диагонали стоят различные числа. В силу того, что он самосопряженный относительно $h, \bar{h}$, получаем, что обе метрики диагональны. Теперь заметим, что, опуская индексы α, γ с помощью метрики h в уравнении 9.29, мы получаем

$$R^q_s S^\beta_{qm} = R^q_m S^\beta_{qs}.$$

То есть для каждого фиксированного β оператор R самосопряженный относительно "билинейной формы"S^β_{qs}. Таким образом, в этих координатах в тензоре S отличны от нуля только компоненты S^β_{qq}. В этом случае условие (9.30) принимает вид (по повторяющимся индексам нет суммирования!)

$$S^i_{qq} h^{qq} S^j_{qq} \bar{h}^{qq} = 0$$

для всех i, j, q. В силу невырожденности $h, \bar{h}$ получаем

$$S^i_{pq} = 0.$$

То есть метрики $h, \bar{h}$ одновременно приводятся к постоянному виду. Теорема доказана. □

Замечание 9.4.1. В условиях теоремы 9.4.1 выберем общую для $h, \bar{h}$ плоскую систему координат. Операторы Дарбу-Гамильтона в этом случае имеют вид

$$\pi^{ij} = h^{ij}D^3 + (b^{ij} + a^{ij}_s u^s)D + \frac{1}{2}a^{ij}_s u^s_x, \quad \bar{\pi}^{ij} = \bar{h}^{ij}D^3 + (\bar{b}^{ij} + \bar{a}^{ij}_s u^s)D + \frac{1}{2}\bar{a}^{ij}_s u^s_x.$$

Условие согласованности

$$\begin{aligned}
a^{ij}_s \bar{a}^{sk}_m + \bar{a}^{ij}_s a^{sk}_m &= a^{kj}_s \bar{a}^{si}_m + \bar{a}^{kj}_s a^{si}_m,\\
\bar{h}^{iq} a^{jk}_q + h^{iq} \bar{a}^{jk}_q &= \bar{h}^{kq} a^{ji}_q + h^{kq} \bar{a}^{ji}_q,\\
\bar{b}^{iq} a^{jk}_q + b^{iq} \bar{a}^{jk}_q &= \bar{b}^{kq} a^{ji}_q + b^{kq} \bar{a}^{ji}_q.
\end{aligned}$$

Другими словами, эти условия эквивалентны тому, что тензоры a^{ij}_s и $\bar{a}^{ij}_s$ задают пучок коммутативных ассоциативных алгебр, причем инвариантные формы для операции $\lambda a^{ij}_s + \mu \bar{a}^{ij}_s$ имеют вид $\lambda h + \mu \bar{h}$ и $\lambda b + \mu \bar{b}$. ■

Замечание 9.4.2. Рассмотрим в некотором смысле случай, противоположный условию теоремы 9.4.1, а именно $\bar{h} = h$. То есть метрики находятся максимально не в общем положении, а спектр оператора $\bar{h}h^{-1}$ состоит из одной точки. В этом случае операторы Дарбу-Гамильтона в плоских координатах h имеют вид

$$\pi^{ij} = h^{ij}D^3 + (b^{ij} + a^{ij}_s u^s)D + \frac{1}{2}a^{ij}_s u^s_x, \quad \bar{\pi}^{ij} = h^{ij}D^3 + (\bar{b}^{ij} + \bar{a}^{ij}_s u^s)D + \frac{1}{2}\bar{a}^{ij}_s u^s_x.$$

В этом случае мы имеем пучок фробениусовых пар вида (h, L) и $h, \bar{L}$. Операторы $L, \bar{L}$ образуют замечательный Нийенхейсов пучок: он конечномерный, а в некоторой системе координат полученные операторы — линейны по координатам. С ними так же связан пучок согласованных коммутативных ассоциативных алгебр. ■

9.5 Дисперсионный AFF-пучок

Начнём этот раздел с примера.

Пример 9.5.1. Зафиксируем $n-$мерное пространство и выберем в нем базис $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Для каждого $0 \leq i \leq n$ определим алгебру следующим образом:

1. Если $j, k \leq n-i$, то

$$\eta_j \star \eta_k = \begin{cases} \eta_{j+k}, & \text{если } j+k \leq n-i, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

2. Если $j, k > n-i$, то

$$\eta_j \star \eta_k = \begin{cases} -\eta_{j+k-n}, & \text{если } j+k-n \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

3. Если j, k лежат по разные стороны от $n-i$, то

$$\eta_j \star \eta_k = 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{n}_n = \mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{t}_n = \mathfrak{a}_n$. Легко видеть, что $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{n}_{n-i} \oplus \mathfrak{t}_i$.

Алгебры $\mathfrak{a}_i$ образуют пучок согласованных коммутативных ассоциативных алгебр. Этот факт вытекает из того, что AFF-пучок, определенный в 8.5, состоит из плоских метрик (см. [152]) и леммы 9.2.1. Полученный пучок алгебр мы будем называть алгебраическим AFF-пучком. ■

Следующая теорема показывает, что этот пучок обладает замечательными свойствами и в классе пучков коммутативных ассоциативных алгебр.

Теорема 9.5.1. *Зафиксируем координаты $u^1, \ldots, u^n$ и рассмотрим плоские метрики (см. комментарий 9.2.3)*

$$g^{ij} = b^{ij} + a^{ij}_s u^s \quad \text{и} \quad \bar{g}^{ij} = \bar{b}^{ij} + \bar{a}^{ij}_s u^s.$$

Предположим, что

1. *Метрики пуассоново согласованы;*
2. *Оператор $L^i_j = \bar{g}^{iq} g_{qj}$ имеет простой вещественный спектр;*
3. *В диагональных координатах L компоненты метрики g зависят от всех координат.*

Тогда метрики $g^{ij}, \bar{g}^{ij}$ образуют двумерное подпространство в AFF-пучке, а структурные константы $a^{ij}_s, \bar{a}^{ij}_s$ образуют двумерное пространство в алгебраическом AFF-пучке.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma, \bar\Gamma$ символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты метрик g и $\bar g$ и через $\hat\Gamma$ — символы Кристоффеля плоской связности, которые обращаются в ноль в системе координат $u^1, \dots, u^n$. Рассмотрим тензоры

$$\begin{aligned} S^{ij}_k &:= g^{si}\left(\Gamma^j_{sk} - \hat\Gamma^j_{sk}\right); \\ \bar S^{ij}_k &:= \bar g^{si}\left(\bar\Gamma^j_{sk} - \hat\Gamma^j_{sk}\right). \end{aligned}$$

В терминах этих тензоров условия из 9.2.3 принимают вид

$$0 = \hat R^i{}_{jk\ell} = R^i{}_{jk\ell} = \bar R^i{}_{jk\ell}; \tag{9.31}$$

$$S^{ij}_k = S^{ji}_k; \tag{9.32}$$

$$\bar S^{ij}_k = \bar S^{ji}_k; \tag{9.33}$$

$$0 = \hat\nabla_m S^{ij}_k = \hat\nabla_m \bar S^{ij}_k. \tag{9.34}$$

Из пуассоновой согласованности $g, \bar g$ по теореме Мохова [145] мы получаем, что L — оператор Нийенхейса. Выберем диагональные координаты для этого оператора, которые, чтобы не загромождать рассуждения, тоже обозначим как $x^1, \dots, x^n$. В силу самосопряженности пара g, L в этих координатах имеет вид

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 e^{-g_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_n e^{-g_n} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \lambda_1(x^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(x^n) \end{pmatrix}.$$

Условия (9.32, 9.33) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-g_i}\hat\Gamma^j_{ik} - e^{-g_j}\hat\Gamma^i_{jk} &= e^{-g_i}\Gamma^j_{ik} - e^{-g_j}\Gamma^i_{jk}, \\ \ell_i e^{-g_i}\hat\Gamma^j_{ik} - \ell_j e^{-g_j}\hat\Gamma^i_{jk} &= \ell_i e^{-g_i}\bar\Gamma^j_{ik} - \ell_j e^{-g_j}\bar\Gamma^i_{jk}. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Легко видеть, что для $i = j = k$ эта система выполняется тривиальным образом. Однако, для $j \neq i$ ее можно рассматривать как систему линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{-g_i} & -e^{-g_j} \\ \lambda_i e^{-g_i} & -\lambda_j e^{-g_j} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденная, поэтому для системы имеется единственное решение. Учитывая, как в диагональных координатах выглядят символы Кристоффеля для g и Lg (лемма 8.5.1, мы получаем

1. Обозначаем через $\hat\Gamma^i_{ii} = u_i$ n функций;
2. $\hat\Gamma^i_{ij} = \hat\Gamma^i_{ji} = \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$ для $i \neq j$;
3. $\hat\Gamma^i_{jk} = 0$ для всех $i \neq j$ и $k \neq i$ (мы разрешаем вообще говоря $k = j$).

Для S^{ij}_k это нам даёт:

1. $S^{ii}_i = \varepsilon_i e^{-g_i}\left(u_i - \frac{1}{2}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\right)$ для всех i;

2. $S^{ii}_j = \frac{\varepsilon_i}{2} e^{-g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$, для всех $i \neq j$;

3. $S^{ii}_j = \frac{\varepsilon_i}{2} e^{-g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$, для всех $i \neq j$;

4. $S^{ii}{}_j = \frac{\varepsilon_i}{2} e^{-g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$, для всех $i \neq j$;

5. $S^{ij}_i = S^{ji}{}_i = \frac{\varepsilon_j}{2} e^{-g_j} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$ для всех $i \neq j$;

6. $S^{ij}_k = 0$ для всех $i \neq j \neq k \neq i$.

Вычисляя теперь $\hat{\nabla}_k S^{ij}_j$ мы получаем

$$\hat{\nabla}_k S^{ij}_j = \frac{\varepsilon_i}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^j \partial x^k} = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Далее рассмотрим $\hat{\nabla}_j S^{ii}_i$ и $\hat{\nabla}_i S^{ii}_j$ для $i \neq j$. Они дают

$$\hat{\nabla}_j S^{ii}_i = \varepsilon_i \frac{e^{-g_i}}{2} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} \frac{\partial g_j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0,$$

$$\hat{\nabla}_i S^{ii}_j = -\varepsilon_i \frac{e^{-g_i}}{2} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} \frac{\partial g_j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^i \partial x^j} - 2 \frac{\partial x_i}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Вычитая из второго первое, мы получаем условие

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = 0. \tag{9.36}$$

Это означает, что все функции u_i — это функции одной переменной, то есть x^i. Обозначим через $\tilde{u}_i$ — первообразную u_i, а через U_i первообразную

$$U_i = \int e^{\tilde{u}_i}.$$

По построению $U_i' \neq 0$. Верна лемма.

Лемма 9.5.1. *Найдутся такие постоянные C_{ij} и $E_{ij} = E_{ji}$, что функции*

$$g_i - \ln \left(|C_{ij} U_i - C_{ji} U_j + E_{ij}|^{\alpha_{ij}} \right)$$

не зависят от u^j. Здесь константы α_{ij} удовлетворяют следующим условиям

1. *$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$;*

2. *$\alpha_{ij} = 0$ кроме случае, когда $C_{ij} = C_{ji} = 0$. В этом случае $\alpha_{ij} = 1$.*

В формулировке леммы действует соглашение $0^0 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим тензор кривизны $\hat{R}^i{}_{jk\ell}$ связности $\hat{\Gamma}$. Вычисляя его из формул для $\hat{\Gamma}^k_{ij}$, мы получаем, что для $i \neq j$:

$$0 = \hat{R}^i{}_{iji} = -\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\frac{\partial g_j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^j \partial x^i}; \tag{9.37}$$

$$0 = \hat{R}^i{}_{jji} = -\frac{\partial g_i}{\partial x^j}u_j + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right)^2 + \frac{\partial^2 g_i}{\partial {x^j}^2}; \tag{9.38}$$

$$0 = \hat{R}^j{}_{jji} = \frac{\partial g_i}{\partial x^j}\frac{\partial g_j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^i \partial x^j}; \tag{9.39}$$

$$0 = \hat{R}^j{}_{iji} = -\left(\frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right)^2 + u_i\frac{\partial g_j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 g_j}{\partial {x^i}^2}. \tag{9.40}$$

Рассмотрим полученные соотношения как систему уравнений в частных производных

$$a = \frac{\partial g_i}{\partial x^j} \text{ и } b = \frac{\partial g_j}{\partial x^i}. \tag{9.41}$$

Условие (9.36) означает, что коэффициенты системы не зависят от x^i и x^j, и она имеет вид (мы считаем остальные переменные параметрами):

$$\frac{\partial a}{\partial x^i} = -ab \ , \ \frac{\partial a}{\partial x^j} = -a^2 + au_j \ , \ \frac{\partial b}{\partial x^i} = -b^2 + bu_i \ , \ \frac{\partial b}{\partial x^j} = -ab. \tag{9.42}$$

Легко проверяется, что система совместная. В этом случае решение определяется значением a, b в некоторой произвольной точке. При этом, если значение нулевое, то и решения получаются тождественно нулевыми.

Подставляя в уравнение, мы видим, что для любых постоянных C_i, C_j, E пара

$$a = \frac{C_j U_j'}{C_i U_i + C_i U_j + E}, b = \frac{C_i U_i'}{C_i U_i + C_j U_j + E}. \tag{9.43}$$

удовлетворяет решению. В случае $C_i = C_j = 0$ мы считаем, что a и b заданные (9.43) обращаются в ноль. Варьируя постоянные C_i, C_j мы можем получить произвольное наперед заданное значение функций a, b в выбранной точке. Таким образом, построенные функции являются общими решениями системы.

Пусть $C_i \neq 0$ или $C_j \neq 0$. Тогда, используя (9.41), мы получаем

$$g_i = \ln(|C_i U_i + C_j U_j + E|) + D_i \ \text{ и } \ g_j = \ln(|C_i U_i + C_j U_j + E|) + D_j, \tag{9.44}$$

где D_i не зависит от x^i. Если $C_i = 0 = C_j$, мы получаем, что g_i не зависит от x^j и g_j не зависит от x^i. Это невозможно по условию теоремы.

Отметим, что C_i, D_i, вообще говоря, зависит от x^k, $k \notin \{i, j\}$. Рассмотрим C_i и C_j и выберем переменную x^k с условием $k \notin \{i, j\}$. Пусть $C^i \neq 0$ и $C^j \neq 0$. Имеем

$$0 = \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{C_j U_j'}{C_i U_i + C_j U_j + E} = -\frac{U_j'\Big(U_i \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{C_i}{C_j} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{E}{C_j}\Big)}{(\frac{C_i}{C_j}U_i + U_j + \frac{E}{C_j})^2}$$

и отношения $C_i/C_j, E/C_j$ — постоянны. Здесь i, j, k попарно различны.

Без ограничения общности, мы можем считать, что C_i — постоянны (помним, что $U'_j \neq 0$), то есть не зависят от других переменных. В случае, когда $C_i = 0$ или $C_j = 0$ зависимость C_i и C_j от других переменных может быть спрятана в D_i и D_j соответственно. Заметим, что функции C_i, C_j строятся при фиксированных i, j, поэтому обозначаем их как C_{ij}, C_{ji} соответственно. Лемма доказана. $\square$

Из доказанной леммы немедленно вытекает, что выражение

$$g_i - \sum_{s \neq i} \ln\left(|C_{ij}U_i + C_{is}U_s + E_{ij}|^{\alpha_{is}}\right)$$

зависит только от x^i. В частности, диагональные компоненты ковариантной метрики g вычисляются как:

$$g_{ii} = \varepsilon_i e^{g_i} = h_i(x^i)\left(\prod_{s \neq i}\left(C_{is}U_i(x^i) + C_{si}U_s(x^s)\right)^{\alpha_{is}}\right) \tag{9.45}$$

для некоторых функций h_i от одной переменной. Покажем теперь, что C_{ij} можно сделать ± 1.

Для начала заметим, что в предположении теоремы диагональные компоненты метрик зависят от всех координат и, стало быть, все $\alpha_{ij} = 1$ и $C_{ij} \neq 0$ для $i \neq j$. Заметим, что если верно, что $C_{ij} = 1$ для $i < j$ и $C_{ij} = -1$ для $i > j$, то метрика имеет вид

$$g_{ii} = \left(\prod_{j \neq i}(U_i(x^i) - U_j(x^j))\right) h_i(x^i). \tag{9.46}$$

В этом случае, делая замену координат вида $x^i \to q^i(x^i)$, мы можем избавиться от функций U_i. При этом хорошо известно, что полученные метрики будут плоскими, если и только если в форме

$$g_{ii} = \left(\prod_{j \neq i}(x^i - x^j))\right) h_i(x^i).$$

функция h_i — это многочлен степени $\leq n$ ([152]). Теперь воспользуемся условием $\hat{\nabla}_i S^{ij}{}_k = 0$. Полагая $i \neq j \neq k \neq i$, мы получаем

$$-\frac{\varepsilon_j}{2} e^{-g_j}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\frac{\partial g_i}{\partial x^k} - \frac{\partial g_i}{\partial x^j}\frac{\partial g_j}{\partial x^k} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k}\frac{\partial g_k}{\partial x^j}\right) = 0. \tag{9.47}$$

Подставляя (9.45), мы получаем следующее условие

$$0 = C_{ik}C_{ji}C_{kj} - C_{ij}C_{jk}C_{ki} = \det\begin{pmatrix} 0 & C_{ij} & C_{ik} \\ -C_{ji} & 0 & C_{jk} \\ -C_{ki} & -C_{kj} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.48}$$

Определим следующие операции:

(a) Можно умножать $(C_{ij}U_i + C_{ji}U_j)$ в i-й и j-й диагональной компоненте g (она дается формулой (9.45)) на ненулевую константу c, соответственно, умножая h_i, h_j на константу $1/c$.

(b) Для всякой пар $i \neq j$ если $C_{ij} \neq 0$ мы переименовываем $C_{ij}U_i$ как U_i для $i < j$ и как $-U_i$ для $i > j$.

Лемма 9.5.2. *Преобразованиями (a) и (b) матрицу C_{ij} можно привести к виду, в котором $C_{ij} = 1$ для $i < j$ и $C_{ij} = -1$ для $i > j$.*

Доказательство. Применяя операцию (a), мы сделаем $C_{1i} = 1$ для всех $i \neq 1$. Далее, с помощью операции (b) мы сделаем так, чтобы $C_{i1} = -1$ для $i \neq 1$. Кроме этого, с помощью операции (a) можно сделать так, чтобы $C_{2i} = 1$ для $i > 2$.

Таким образом, первые две строки и первый столбец матрицы C_{ij} имеют вид, заявленный в лемме. Условие (9.48) для $i = 1, j = 2$ и произвольного $k > 2$ дает нам $C_{k2} = -1$. Стало быть, и второй столбец матрицы C_{ij} имеет нужный нам вид.

Далее, применяя операцию (a), мы сделаем все $C_{3k}, k > 3$ равными 1. Условие (9.48) для $i = 1, j = 3$ и произвольного $k > 3$ дает нам $C_{k3} = -1$. Мы получим, что третий столбец имеет нужный нам вид. Продолжая этот процесс, мы получим требуемый вид матрицы. Лемма доказана. □

Используя лемму 9.5.2, мы приводим метрики к виду (9.46). Взяв U_i за новые координаты (их производные не нули), мы получим, что метрика имеет вид

$$g_{ii} = \left(\prod_{j \neq i} (x^i - x^j + E_{ij})\right) h_i(x^i), \tag{9.49}$$

где E_{ij} — постоянная кососимметрическая матрица. Из условия (9.47) мы получаем условие

$$E_{jk} + E_{ki} + E_{ij} = 0.$$

Из линейной алгебры нам известно, что в этом случае элементы кососимметрической матрицы $E_{ij} = E_i - E_j$ для констант E_i, E_j. Более того, все эти константы определены с точностью до добавления некоторой общей константы ко всем E_i. Сдвигая x^i на E_i мы получаем, что форма (9.49) переходит в (9.46). Так как обе метрики должны быть плоскими, то по теореме мы получаем, что $h_i, \lambda_i h_i$ — многочлены степени не выше n.

В частности, эти метрики задаются как $p(L)g_0$ и $q(L)g_0$ для некоторых полиномов с постоянными коэффициентами $p(t), q(t)$ и стандартной метрики g_0 (известной как метрика Леви-Чивиты). Это, в свою очередь, первая метрика из AFF-пучка и, стало быть, теорема доказана. □

Следующие два следствия наглядно демонстрируют важность построенного объекта.

Следствие 9.5.1. *Зафиксируем координаты $u^1, \ldots, u^n$ и рассмотрим $2n+2$ постоянные контравариантные метрики: $h_i, i = 0, \ldots, n$ имеют вид*

$$\begin{pmatrix} A_i & \\ & B_{n-i} \end{pmatrix}, \text{ где } A_i = \begin{pmatrix} & & & m_0 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & -m_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ m_0 & -m_1 & & -m_i \end{pmatrix}, B_j = \begin{pmatrix} m_{j+1} & m_{j+2} & \ldots & m_n \\ m_{j+2} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ m_n & & & \end{pmatrix},$$

и $b_i, i = 0, \dots, n$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} P_i & \\ & Q_{n-i} \end{pmatrix}, \text{ где } P_i = \begin{pmatrix} & & & r_0 \\ & & \iddots & -r_1 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ r_0 & -r_1 & & -r_i \end{pmatrix}, Q_j = \begin{pmatrix} r_{j+1} & r_{j+2} & \dots & r_n \\ r_{j+2} & \iddots & \iddots & \\ \vdots & \iddots & & \\ r_n & & & \end{pmatrix}.$$

Здесь m_i, r_i — набор из $2n+2$ постоянных. Рассмотрим AFF-пучок коммутативных ассоциативных алгебр $(a_i)^{jk}_s$, заданных в этих координатах. Тогда формулы

$$\pi_i^{jk} = h_i^{jk} D^3 + (b_i^{jk} + (a_i)^{jk}_s u^s) D + \frac{1}{2} (a_i)^{jk}_s u^s_x$$

определяют согласованные операторы Дарбу-Гамильтона. Возникающий пучок мы называем дисперсионным AFF-пучком.

Доказательство. Доказательство вытекает из замечания 9.4.1. □

Следствие 9.5.2. *Пусть дана пара операторов Дарбу-Гамильтона π_1, π_2 с условиями:*

1. *Метрики h_1, h_2 имеют общую плоскую систему координат;*
2. *Метрики g_1, g_2 связаны оператором $L = g_1(g_2)^{-1}$ с простым вещественным спектром;*
3. *В диагональных координатах координатах L диагональные элементы $g, \bar{g}$ зависят от всех координат*

Тогда π_1, π_2 порождают двумерное подпространство в дисперсионном AFF-пучке.

Доказательство. Назовем фробениусову алгебру gl-регулярной, если для вектора общего положения η оператор правого умножения $R_\eta \xi = \xi \star \eta$ является gl-регулярным.

Лемма 9.5.3. *Всякая gl-регулярная фробениусова алгебра $\mathfrak{a}$ над $\mathbb{C}$ единственным образом (с точностью до перестановок слагаемых) раскладывается в прямую сумму алгебр $\mathfrak{t}_{n_i}$ и $\mathfrak{n}_{n_k}$, где $n_1 + \dots + n_k = n$, причем алгебр типа $\mathfrak{n}_{n_k}$ в разложении не более одной.*

Доказательство. Выберем ξ общего положения и рассмотрим корневое разложение для оператора R_η

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_k. \tag{9.50}$$

В силу общего положения ограничения любого R_ξ имеет единственное собственное значение (иначе можно было бы заменить R_η на R_ξ). Проверим, что это разложение — разложение в прямую сумму алгебр. Пусть $\xi_i \in \mathfrak{a}_i, \xi_j \in \mathfrak{a}_j$. Тогда имеем

$$(R_\eta - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i} (\xi_i \star \xi_j) = (R_\eta - \lambda_j \mathrm{Id})^{n_j} (\xi_i \star \xi_j) = 0.$$

То есть $\xi_i \star \xi_j$ лежит, с одной стороны, в $\mathfrak{a}_i$, а с другой — в $\mathfrak{a}_j$. Если $i \neq j$, то это означает, что $\xi_i \star \xi_j = 0$. Если $i = j$, то получаем, что $\mathfrak{a}_i$ — подалгебра.

Разберем два случая. Первый — найдется такой ξ, что R_ξ — gl-регулярный и его ограничение R_ξ на $\mathfrak{a}_i$ имеет ненулевое собственное значение, которое мы обозначим λ. Рассмотрим разложение $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_k$, соответствующее корневому разложению. По построению, ограничение R_ξ на $\mathfrak{a}_i$ совпадает с R_{ξ_i}.

Так как собственное значение R_{ξ_i} не ноль, то найдется такой полином $p(t)$ без свободного члена, что $p(R_{\xi_i}) = \mathrm{Id}$. Кроме этого $p(R_{\xi_i}) = R_{p(\xi_i)}$ и $p(\xi_i) = e_i \in \mathfrak{a}_i$. Здесь e_i — единица алгебры $\mathfrak{a}_i$. Выберем $e_i = \eta_1$, а $\eta_2 = \xi_i - \lambda e_i$. Тогда, положив $\eta_j = \eta_2 \star \dots \star \eta_2$, где справа стоит произведение $j-1$ элементов, получим, что в базисе $\eta_1, \dots, \eta_{n_i}$ структурные константы алгебры совпадают со структурными константами $\mathfrak{t}_{n_i}$.

Второй случай соответствует тому, что собственные значения ограничений R_η на $\mathfrak{a}_i$ для всех $\eta \in \mathfrak{a}$ равны нулю. Доказательство проводится аналогично. Осталось заметить, что, если в разложении больше одной алгебры типа $\mathfrak{n}$, то у оператора R_η два жордановых блока с нулевым собственным значением, то есть оператор не является gl-регулярным. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 9.5.4. *Пусть дана gl-регулярная коммутативная алгебра размерности n. Тогда линейное пространство инвариантных форм на ней имеет размерность n.*

Доказательство. Для начала заметим, что в силу самосопряженности R_η корневое разложение (9.50) ортогонально относительно любой инвариантной формы. То есть, всякая инвариантная форма — сумма инвариантных форм на слагаемых $\mathfrak{a}_i$ этого разложения.

Если $\mathfrak{a}_i$ имеет единицу, то всякая инвариантная форма имеет вид $h_{ij} = a^s_{ij} a_s$ для некоторого ковектора a. В частности, размерность пространства инвариантных форм совпадает с n_i.

Для случая $\mathfrak{n}_{n_k}$ прямыми вычислениями получается, что инвариантная форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} & & & r_1 \\ & & \iddots & -r_2 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ r_1 & -r_2 & & -r_{n_k} \end{pmatrix}$$

для произвольных констант r_i. То есть размерность пространства так же совпадает с размерностью алгебры. Применяя лемму (9.5.3), получаем, что утверждение леммы доказано. □

Лемма 9.5.5. *Все алгебры AFF-пучка — gl-регулярные.*

Доказательство. Этот факт вытекает из свойств пучков Гамильтона-Дарбу в [165] и [164]. □

Теперь перейдем к доказательству следствия. Для начала выберем совместные плоские координаты для h_i. Затем применим теорему 9.5.1. Получаем, что π_1 и π_2 имеют вид

$$\pi_i^{jk} = h_i^{jk} D^3 + (b_i^{jk} + (a_i)^{jk}_s u^s) D + \frac{1}{2} (a_i)^{jk}_s u^s_x,$$

где $(a_i)_s^{jk}$ — структурные константы алгебр из пучка. Осталось показать, что h_i имеет в точности вид, описанный для AFF-пучка. Это следует из лемм 9.5.4 и 9.5.5. Следствие доказано. $\square$

Глава 10

Алгебраические операторы Нийенхейса на алгебрах Ли

10.1 Основные свойства и примеры алгебраических операторов Нийенхейса

Пусть дана алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с коммутатором $[\,,\,]$. Линейный оператор $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется алгебраическим оператором Нийенхейса, если для произвольных элементов $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$$L^2[\xi, \eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta] = 0. \tag{10.1}$$

Такие операторы Нийенхейса мы будем называть алгебраическими.

Напомним, что две структуры алгебры Ли на одном и том же пространстве называются согласованными, если любая их линейная комбинация — это снова структура алгебры Ли. Ключевые для нас свойства алгебраических операторов Нийенхейса сформулированы в следующей теореме.

Теорема 10.1.1. *Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ задан алгебраический оператор Нийенхейса L. Тогда*

1. *Формула*
$$[\xi, \eta]_L = [L\xi, \eta] + [\xi, L\eta] - L[\xi, \eta]. \tag{10.2}$$
определяет на $\mathfrak{g}$ как на линейном пространстве структуру второй алгебры Ли, согласованной с исходной;

2. *Произвольный многочлен $p(L) = a_0 L^k + \cdots + a_k \mathrm{Id}$ с коэффициентами из поля снова является алгебраическим оператором Нийенхейса;*

3. *Если ξ, η лежат в центре $\mathfrak{g}$, то для любых $k, m \in \mathbb{N}$ верно, что*
$$[L^k \xi, L^m \eta] = 0.$$

Доказательство. Выпишем тождество Якоби для скобки $[\xi,\eta]_L$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
&[\xi,[\eta,\zeta]_L]_L+[\eta,[\zeta,\xi]_L]_L+[\zeta,[\xi,\eta]_L]_L=[L\xi,[\eta,\zeta]_L]+[\xi,L[\eta,\zeta]_L]-L[\xi,[\eta,\zeta]_L]+\\
&+[L\eta,[\zeta,\xi]_L]+[\eta,L[\zeta,\xi]_L]-L[\eta,[\zeta,\xi]_L]+[L\zeta,[\xi,\eta]_L]+[\zeta,L[\xi,\eta]_L]-L[\zeta,[\xi,\eta]_L]=\\
&=[L\xi,[L\eta,\zeta]]+[L\xi,[\eta,L\zeta]]-[L\xi,L[\eta,\zeta]]+[\xi,L[L\eta,\zeta]]+[\xi,L[\eta,L\zeta]]-[\xi,L^2[\eta,\zeta]]-\\
&-L[\xi,[L\eta,\zeta]]-L[\xi,[\eta,L\zeta]]+L[\xi,L[\eta,\zeta]]+[L\eta,[L\zeta,\xi]]+[L\eta,[\zeta,L\xi]]-[L\eta,L[\zeta,\xi]]+\\
&+[\eta,L[L\zeta,\xi]]+[\eta,L[\zeta,L\xi]]-[\eta,L^2[\zeta,\xi]]-L[\eta,[L\zeta,\xi]]-L[\eta,[\zeta,L\xi]]+L[\eta,L[\zeta,\xi]]+\\
&+[L\zeta,[L\xi,\eta]]+[L\zeta,[\xi,L\eta]]-[L\zeta,L[\xi,\eta]]+[\zeta,L[L\xi,\eta]]+[\zeta,L[\xi,L\eta]]-[\zeta,L^2[\xi,\eta]]-\\
&-L[\zeta,[L\xi,\eta]]-L[\zeta,[\xi,L\eta]]+L[\zeta,L[\xi,\eta]].
\end{aligned}\tag{10.3}$$

В силу тождества (10.1) получаем

$$\begin{aligned}
&[\xi,L[L\eta,\zeta]]+[\xi,L[\eta,L\zeta]]-[\xi,L^2[\eta,\zeta]]=[\xi,[L\eta,L\zeta]],\\
&[\eta,L[L\zeta,\xi]]+[\eta,L[\zeta,L\xi]]-[\eta,L^2[\zeta,\xi]]=[\eta,[L\zeta,L\xi]],\\
&[\zeta,L[L\xi,\eta]]+[\zeta,L[\xi,L\eta]]-[\zeta,L^2[\xi,\eta]]=[\zeta,[L\xi,L\eta]].
\end{aligned}$$

Подставляя правые части в (10.3) и пользуясь тождеством Якоби для исходного коммутатора в виде

$$\begin{aligned}
&[L\xi,[L\eta,\zeta]]+[L\eta,[\zeta,L\xi]]+[\zeta,[L\xi,L\eta]]=0,\\
&[L\xi,[\eta,L\zeta]]+[\eta,[L\zeta,L\xi]]+[L\zeta,[L\xi,\eta]]=0,\\
&[\xi,[L\eta,L\zeta]]+[L\eta,[L\zeta,\xi]]+[L\zeta,[\xi,L\eta]]=0
\end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
&L[\xi,L[\eta,\zeta]]-[L\xi,L[\eta,\zeta]]+L[\eta,L[\zeta,\xi]]-[L\eta,L[\zeta,\xi]]+L[\zeta,L[\xi,\eta]]-[L\zeta,L[\xi,\eta]]-\\
&-L[\xi,[L\eta,\zeta]]-L[\zeta,[\xi,L\eta]]-L[\eta,[L\zeta,\xi]]-L[\xi,[\eta,L\zeta]]-L[\eta,[\zeta,L\xi]]-L[\zeta,[L\xi,\eta]].
\end{aligned}$$

Снова используем тождество Якоби для исходного коммутатора, теперь в виде

$$\begin{aligned}
&-L[\xi,[L\eta,\zeta]]-L[\zeta,[\xi,L\eta]]=L[L\eta,[\zeta,\xi]]\\
&-L[\eta,[L\zeta,\xi]]-L[\xi,[\eta,L\zeta]]=L[L\zeta[\xi,\eta]],\\
&-L[\eta,[\zeta,L\xi]]-L[\zeta,[L\xi,\eta]]=L[L\xi,[\eta,\zeta]],
\end{aligned}$$

и получаем

$$\begin{aligned}
&L[\xi,L[\eta,\zeta]]-[L\xi,L[\eta,\zeta]]+L[\eta,L[\zeta,\xi]]-[L\eta,L[\zeta,\xi]]+L[\zeta,L[\xi,\eta]]-[L\zeta,L[\xi,\eta]]+\\
&+L[L\eta,[\zeta,\xi]]+L[L\zeta[\xi,\eta]]+L[L\xi,[\eta,\zeta]]=L^2[\xi,[\eta,\zeta]]+L^2[\eta,[\zeta,\xi]]+L^2[\zeta,[\xi,\eta]]=0.
\end{aligned}$$

Здесь мы снова воспользовались (10.1) для L. Таким образом, для $[\xi,\eta]_L$ выполнено тождество Якоби. Таким образом, формула (10.2) действительно задает структуру алгебры Ли. Условие совместности исходного коммутатора и $[\xi,\eta]_L$ выписывается как

$$\begin{aligned}
&[\xi,[\eta,\zeta]_L]+[\eta,[\zeta,\xi]_L]+[\zeta,[\xi,\eta]_L]+[\xi,[\eta,\zeta]]_L+[\eta,[\zeta,\xi]]_L+[\zeta,[\xi,\eta]]_L=\\
&=[\xi,[L\eta,\zeta]]+[\xi,[\eta,L\zeta]]-[\xi,L[\eta,\zeta]]+[\eta,[L\zeta,\xi]]+[\eta,[\zeta,L\xi]]-[\eta,L[\zeta,\xi]]+\\
&+[\zeta,[L\xi,\eta]]+[\zeta,[\xi,L\eta]]-[\zeta,L[\xi,\eta]]+[L\xi,[\eta,\zeta]]+[\xi,L[\eta,\zeta]]-L[\xi,[\eta,\zeta]]+\\
&+[L\eta,[\zeta,\xi]]+[\eta,L[\zeta,\xi]]-L[\eta,[\zeta,\xi]]+[L\zeta,[\xi,\eta]]+[\zeta,L[\xi,\eta]]-L[\zeta,[\xi,\eta]]=\\
&=\Big([\xi,[L\eta,\zeta]]+[\zeta,[\xi,L\eta]]+[L\eta,[\zeta,\xi]]\Big)+\Big([\xi,[\eta,L\zeta]]+[\eta,[L\zeta,\xi]]+[L\zeta,[\xi,\eta]]\Big)+\\
&+\Big([\eta,[\zeta,L\xi]]+[\zeta,[L\xi,\eta]]+[L\xi,[\eta,\zeta]]\Big)-L\Big([\xi,[\eta,\zeta]]+[\eta,[\zeta,\xi]][\zeta,[\xi,\eta]]\Big)
\end{aligned}$$

Так как выражение в каждой из четырех скобок равно нулю в силу тождества Якоби для коммутатора $\mathfrak{g}$, то и все выражение равно нулю. То есть скобки согласованы и первое утверждение теоремы доказано.

Теперь перейдем к доказательству второго утверждения. Сначала определим следующую операцию:

$$(\mathcal{L}_\xi)L\eta = [\xi, L\eta] - L[\xi, \eta]. \tag{10.4}$$

Эта операция по вектору и оператору строит линейный оператор, то есть $(\xi, L) \to \mathcal{L}_\xi L$.

Лемма 10.1.1. *Для произвольного оператора L выполнено*

$$\mathcal{L}_\xi L^k = \mathcal{L}_\xi L \cdot L^{k-1} + L \cdot \mathcal{L}_\xi L \cdot L^{k-2} + \dots + L^{k-1} \cdot \mathcal{L}_\xi L$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathcal{L}_\xi L^k\eta = [\xi, L^k\eta] - L^k[\xi, \eta] = [\xi, L^k\eta] - L[\xi, L^{k-1}\eta] + L[\xi, L^{k-1}\eta] - L^2[\xi, L^{k-1}\eta] + \dots + \\ + L^{k-1}[\xi, L\eta] - L^k[\xi, \eta] = \mathcal{L}_\xi L\, L^{k-1}\eta + L\mathcal{L}_\xi L\, L^{k-2}\eta + \dots + L^{k-1}\mathcal{L}_\xi L\eta.$$

Таким образом, лемма доказана. □

В терминах операции (10.4) условие (10.1) принимает вид

$$L^2[\xi, \eta] - L[\xi, L\eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] = \mathcal{L}_{L\xi}\eta - L\mathcal{L}_\xi L\eta = 0.$$

Так как это выполнено для всех векторов ξ, η, то получаем, что для всех векторов ξ верно, что оператор $\mathcal{L}_{L\xi} - L\mathcal{L}_\xi L = 0$ нулевой. Для алгебраического оператора Нийенхейса в силу леммы 10.1.1 получаем

$$\mathcal{L}_{L\xi} L^k = \mathcal{L}_{L\xi} L\, L^{k-1} + L\mathcal{L}_{L\xi} L\, L^{k-2} + \dots + L^{k-1}\mathcal{L}_{L\xi} L = L\mathcal{L}_\xi LL\, L^{k-1} + \dots \\ + L^k\mathcal{L}_\xi L = L\mathcal{L}_\xi L^k$$

и, одновременно, по определению

$$\mathcal{L}_{L^k\xi} L\eta = L\mathcal{L}_{L^{k-1}\xi} L\eta = \dots = L^k\mathcal{L}_\xi L\eta.$$

Из этого немедленно вытекает, что для произвольных многочленов $p(t), q(t)$ выполнено

$$\mathcal{L}_{p(L)\xi} q(L) = p(L)\mathcal{L}_\xi q(L). \tag{10.5}$$

Взяв $p = q$, получаем первое утверждение теоремы. Для первой половины третьего утверждения распишем (10.5) для ξ, η из центра $\mathfrak{g}$. Получаем

$$0 = \mathcal{L}_{p(L)\xi} q(L)\eta - p(L)\mathcal{L}_\xi q(L)\eta = [p(L)\xi, q(L)\eta] - q(L)[p(L)\xi, \eta] - \\ - p(L)[\xi, q(L)\eta] + q(L)p(L)[\xi, \eta] = [p(L)\xi, q(L)\eta].$$

Взяв в качестве $p(L) = L^k, q(L) = L^m$, мы получаем утверждение для $k, m \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

Из этой теоремы вытекает замечательное следствие.

Следствие 10.1.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и L — алгебраический оператор Нийенхейса. Тогда*

1. *Корневое подпространство $\mathfrak{g}_i$, соответствующее собственному значению λ_i, является подалгеброй;*

2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распалась в прямую сумму (как векторных пространств) корневых пространств*
$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i, \tag{10.6}$$
то для любой пары корневых подпространств $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{g}_j$ верно, что
$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j; \tag{10.7}$$

3. *Если дано разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в сумму* (10.6) *с условием* (10.7)*, то любой оператор, для которого $\mathfrak{g}_i$ — собственные подпространства, является алгебраическим оператором Нийенхейса на $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{g}_i$, то есть найдутся такие числа m, k, что
$$(L - \lambda_i \mathrm{Id})^k \xi = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \eta = 0.$$
Пусть без ограничения общности $k \le m$, то есть $(L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \xi = 0$. По доказанному ранее получаем, что оператор $(L - \lambda_i \mathrm{Id})^m$ — алгебраический оператор Нийенхейса, то есть
$$\begin{aligned} 0 = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^{2m}[\xi, \eta] + [(L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \xi, (L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \eta] - \\ -(L - \lambda_i \mathrm{Id})^m [(L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \xi, \eta] - (L - \lambda_i \mathrm{Id})^m [\xi, (L - \lambda_i \mathrm{Id})^m \eta] = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^{2m} [\xi, \eta]. \end{aligned}$$
Таким образом, $[\xi, \eta]$ так же лежит в корневом подпространстве $\mathfrak{g}_i$.

Пусть теперь $\xi \in \mathfrak{g}_i, \eta \in \mathfrak{g}_j$. То есть найдутся такие целые числа k, m, что
$$(L - \lambda_i \mathrm{Id})^k \xi = (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m \eta = 0.$$
Рассмотрим $p(L) = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^k$ и $q(L) = (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m$. Формула (10.5) принимает вид
$$\begin{aligned} 0 = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^k (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m [\xi, \eta] + [(L - \lambda_i \mathrm{Id})^k \xi, (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m \eta] - \\ - (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m [(L - \lambda_i \mathrm{Id})^k \xi, \eta] - (L - \lambda_i \mathrm{Id})^k [\xi, (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m \eta] = (L - \lambda_i \mathrm{Id})^k (L - \lambda_j \mathrm{Id})^m [\xi, \eta]. \end{aligned}$$
Из разложения всей алгебры в прямую сумму немедленно вытекает второе утверждение следствия.

Пусть теперь задано разложение (10.6). По условию выбираем произвольные $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и определяем оператор L как $L\xi = \lambda_i \xi$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}_i$. Положим $\xi \in \mathfrak{g}_i, \eta \in \mathfrak{g}_j$. Тождество (10.1) принимает вид
$$\begin{aligned} [L\xi, L\eta] + L^2[\xi, \eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta] = \lambda_i \lambda_j [\xi, \eta] + L^2[\xi, \eta] - \lambda_i L[\xi, \eta] - \lambda_j L[\xi, \eta] = \\ = (L - \lambda_i \mathrm{Id})(L - \lambda_j \mathrm{Id})[\xi, \eta] = 0. \end{aligned}$$
Последнее равенство вытекает из условия $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j$. Так как все пространство разложено в прямую сумму, то получаем, что условие (10.1) выполняется для всех векторов. Последнее утверждение теоремы доказано. $\square$

В завершении раздела приведем несколько примеров.

Пример 10.1.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра векторных полей на многообразии M^n. Рассмотрим операторные поля на многообразии, как операторы на этой алгебре. В этом случае определение алгебраического оператора Нийенхейса совпадает с определением оператора Нийенхейса, данным в разделе 2.1.

Из теоремы 10.1.1 утверждает, что для оператора Нийенхейса L деформированный коммутатор
$$[\xi, \eta]_L = [L\xi, \eta] + [\xi, L\eta] - L[\xi, \eta]$$
задает на векторных полях еще одну структуру алгебры Ли, согласованную с исходной. ■

Пример 10.1.2. Пусть дана алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее одномерное центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}}$, заданное с помощью коцикла γ и одномерного центра $\mathfrak{z}$. Ненулевые структурные отношения такой алгебры имеют вид
$$[[\xi, \eta]] = [\xi, \eta] + \gamma(\xi, \eta)z, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}, z \in \mathfrak{z},$$
где $[\,,\,]$ — коммутатор в $\mathfrak{g}$, а $[[\,,\,]]$ — коммутатор в $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Возьмем L — проектор на одномерный центр $\mathfrak{z}$. В этом случае разложение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}$ (как векторных пространств) — это разложение (10.6). Условие (10.7) выполняется тривиально в силу того, что в разложении всего два слагаемых. Таким образом, по следствию 10.1.1 L — оператор Нийенхейса.

Ненулевые структурные отношения для второго коммутатора в этом случае имеют вид
$$[\xi, \eta]_R = -\gamma(\xi, \eta)z \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}, z \in \mathfrak{z}.$$
Таким образом, исходная деформированная скобка представляется как $[\xi, \eta] + [\xi, \eta]_R$. ■

Пример 10.1.3. В условиях примера 10.1.2 возьмем в качестве алгебры Ли $\mathfrak{g}$ алгебру Ли n-компонентных функций на окружности S^1 относительно скобки
$$[f, g]_k = a_k^{ij}(f_i g_j' - f_i' g_j),$$
где f' означает производную по x, а константы a_k^{ij} образуют коммутативную ассоциативную алгебру. Следующая формула
$$\gamma(f, g) = \int h^{ij} f_i g_j''' + b^{ij} f_i g_j' \mathrm{d}x,$$
где a_k^{ij}, b^{ij}, h^{ij} образуют фробениусову тройку, задает на алгебре кососимметрический коцикл (коцикл Гельфанда-Фукса). Взяв центральное расширение с помощью такого коцикла, мы получаем многокомпонентный аналог алгебры Вирасоро, предложенный Балинским и Новиковым в [126]. ■

10.2 Полупростые алгебраические операторы Нийенхейса и трехмерные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и L — алгебраический оператор Нийенхейса. Предположим, что спектр L вещественен и прост в вещественном случае и прост в комплексном. Такие линейные операторы называются простыми.

Следствие 10.1.1 показывает, что существование такого оператора эквивалентно существованию базиса $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathfrak{g}$, что (суммирования по повторяющимся индексам нет)

$$[\eta_i, \eta_j] = c_{ij}^i \eta_i + c_{ij}^j \eta_j.$$

Мы будем называть такой базис собственным нийенхейсовым базисом.

Пример 10.2.1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна и в ней есть нийенхейсов базис. Тогда любая двумерная подалгебра, натянутая на пару векторов η_i, η_j так же будет нильпотентной. В размерности два нильпотентная алгебра коммутативна, а, значит, нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с нийенхейсовым базисом автоматически коммутативна. ■

Пример 10.2.2. Рассмотрим алгебру Ли $\mathbb{R} +_\rho \mathbb{R}^n$. В базисе $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$, согласованным со структурой полупрямой суммы, ненулевые структурные соотношения для этой алгебры имеют вид

$$[\xi, \eta_i] = R\eta_i,$$

где $R = \rho(\xi)$. Пусть R — имеет простой вещественный спектр и η_i — собственный базис. Тогда получаем

$$[\xi, \eta_i] = \lambda_i \eta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что это нийенхейсов базис в алгебре Ли $\mathbb{R} +_\rho \mathbb{R}^n$. Полупрямые суммы, о которых идет речь, представляют значительный интерес в приложениях [177, 127, 10]. ■

Теперь рассмотрим трехмерные алгебры Ли в классификации Бианки. Начнем с вещественного случая. Ниже мы приводим только ненулевые структурные соотношения в каноническом базисе η_1, η_2, η_3.

I	$\mathfrak{a}_{3,1}$	абелева;
II	$\mathfrak{a}_{3,2}$	$[\eta_2, \eta_3] = \eta_1;$
IX	$\mathfrak{a}_{3,3}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_3, \quad [\eta_2, \eta_3] = \eta_1, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2;$
$VIII$	$\mathfrak{a}_{3,4}$	$[\eta_1, \eta_2] = -\eta_3, \quad [\eta_2, \eta_3] = \eta_1, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2;$
V	$\mathfrak{a}_{3,5}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2, \quad [\eta_3, \eta_1] = -\eta_3;$
IV	$\mathfrak{a}_{3,6}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2 + \eta_3, \quad [\eta_3, \eta_1] = -\eta_3;$
VII	$\mathfrak{a}_{3,7}$	$[\eta_1, \eta_2] = \alpha\eta_2 + \eta_3, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2 - \alpha\eta_3;$
VI	$\mathfrak{a}_{3,8}$	$[\eta_1, \eta_2] = \beta\eta_2 - \eta_3, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2 - \beta\eta_3.$

Параметры α для $\mathfrak{a}_{3,7}$ и β для $\mathfrak{a}_{3,8}$ произвольные вещественные. Различные значения параметров соответствуют неизоморфным алгебрам Ли.

Теорема 10.2.1 (Жихарева [122]). *В размерности три вещественные алгебры Ли $\mathfrak{a}_{3,1}, \mathfrak{a}_{3,4}, \mathfrak{a}_{3,5}$ и $\mathfrak{a}_{3,8}$ допускают собственный нийенхейсов базис и только они. При этом*

- *В алгебре $\mathfrak{a}_{3,1}$ на роль собственного нийенхейсова базиса подходит любой базис;*
- *В алгебре $\mathfrak{a}_{3,5}$ на роль собственного нийенхейсова базиса подходит любой базис;*
- *Для $\mathfrak{a}_{3,4}$ вектора $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, заданные формулами*

$$\zeta_1 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_3, \quad \zeta_3 = 2\eta_1.$$

  дают пример собственного нийенхейсова базиса;

- *В $\mathfrak{a}_{3,8}$ вектора $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, заданные формулами*

$$\zeta_1 = \eta_1 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta_3 = \eta_2 + \eta_3,$$

  дают пример собственного нийенхейсова базиса

Вектора $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ выражены через элементы канонического базиса η_1, η_2, η_3 из классификации Бианки.

Доказательство. Зафиксируем произвольный базис η_1, η_2, η_3 в трехмерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Структурные константы в этом базисе определяются так

$$[\eta_i, \eta_j] = c_{ij}^k \eta_k.$$

Рассмотрим пару векторов $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2 + \xi^3\eta_3, \\ \zeta &= \zeta^1\eta_1 + \zeta^2\eta_2 + \zeta^3\eta_3. \end{aligned}$$

Они образуют подалгебру если и только если

$$\xi \wedge \eta \wedge [\xi, \eta] = 0. \tag{10.8}$$

Введем обозначения

$$M_1 = \xi^2 \cdot \zeta^3 - \xi^3 \cdot \zeta^2, \quad M_2 = \xi^3 \cdot \zeta^1 - \xi^1 \cdot \zeta^3, \quad M_3 = \xi^1 \cdot \zeta^2 - \xi^2 \cdot \zeta^1.$$

В этих обозначениях условие (10.8) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = M_1^2 \cdot c_{23}^1 + M_2^2 \cdot c_{31}^2 + M_3^2 \cdot c_{12}^3 + M_1M_2 \cdot (c_{31}^1 + c_{23}^2) + \\ + M_2M_3 \cdot (c_{12}^2 + c_{31}^3) + M_1M_3 \cdot (c_{12}^1 + c_{23}^3). \end{aligned} \tag{10.9}$$

Рассмотрим $\mathfrak{g}$ как векторное пространство, снабженное стандартной евклидовой метрикой, диагональной в базисе η_i. Тогда в этом выражении строка $M = (M_1, M_2, M_3)$ может рассматриваться как вектор, перпендикулярный двумерному пространству, натянутому на ξ, ζ. Кроме этого, компоненты вектора удовлетворяют однородному квадратичному уравнению (10.9).

В этих терминах существование нийенхейсова базиса эквивалентно существованию трех линейно независимых решений квадратичного уравнения (10.9). После подстановки констант из классификации Бианки мы получаем уравнения:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_{3,2} & M_1^2 = 0; \\ \mathfrak{a}_{3,3} & M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 0; \\ \mathfrak{a}_{3,4} & M_1^2 + M_2^2 - M_3^2 = 0; \\ \mathfrak{a}_{3,5} & \text{нет}; \\ \mathfrak{a}_{3,6} & M_3^2 = 0; \\ \mathfrak{a}_{3,7} & M_2^2 + M_3^2 = 0; \\ \mathfrak{a}_{3,8} & M_2^2 - M_3^2 = 0. \end{array}$$

Легко видеть, что три линейно независимых решения бывает только в случаях $\mathfrak{a}_{3,4}, \mathfrak{a}_{3,5}$ и $\mathfrak{a}_{3,8}$. Для каждой из этих алгебр, кроме $\mathfrak{a}_{3,5}$ (для нее выбранный в классификации Бианки базис — уже нийенхейсов). Мы имеем.

- Для алгебры $\mathfrak{a}_{3,4}$ рассмотрим базис

$$\zeta_1 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_3, \quad \zeta_3 = 2\eta_1.$$

  Структурные константы в этом случае принимают вид:

$$[\zeta_1, \zeta_2] = \zeta_1 - \zeta_2, \quad [\zeta_2, \zeta_3] = \zeta_3 - 2\zeta_2, \quad [\zeta_3, \zeta_1] = -2\zeta_1 - \zeta_3.$$

- Для алгебры $\mathfrak{a}_{3,8}$ рассмотрим базис

$$\zeta_1 = \eta_1 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta_3 = \eta_2 + \eta_3.$$

  Структурные константы принимают вид:

$$[\zeta_1, \zeta_2] = (1 + b)(\zeta_2 - \zeta_1), \quad [\zeta_2, \zeta_3] = (b - 1)\zeta_3, \quad [\zeta_3, \zeta_1] = (1 - b)\zeta_3.$$

Теорема доказана. □

Замечание 10.2.1. Два нийенхейсова базиса будут эквивалентными, если один из другого получается масштабированием векторов. Из доказательства теоремы 10.2.1 легко получить описание классов эквивалентности в геометрических терминах:

- Для алгебры Ли $\mathfrak{a}_{3,4}$ множество классов эквивалентности базисов находится во взаимооднозначном соответствии с неколлинеарными тройками точек из $\mathbb{R}P^2$ лежащими на выделенном овале;
- Для алгебры Ли $\mathfrak{a}_{3,5}$ множество классов эквивалентности базисов находится во взаимооднозначном соответствии с неколлинеарными тройками точек $\mathbb{R}P^2$;
- Для $\mathfrak{a}_{3,8}$ множество классов эквивалентности базисов находится во взаимооднозначном соответствии с неколлинеарными тройками точек $\mathbb{R}P^2$, лежащими на паре пересекающихся прямых.

■

Теперь рассмотрим трехмерные комплексные алгебры Ли. Классификация Бианки в комплексном случае имеет вид:

I	$\mathfrak{b}_{3,1}$	абелева;
II	$\mathfrak{b}_{3,2}$	$[\eta_2, \eta_3] = \eta_1$;
$IX \simeq VIII$	$\mathfrak{b}_{3,3}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_3, \quad [\eta_2, \eta_3] = \eta_1, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2$;
V	$\mathfrak{b}_{3,4}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2, \quad [\eta_3, \eta_1] = -\eta_3$;
IV	$\mathfrak{b}_{3,5}$	$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2 + \eta_3, \quad [\eta_3, \eta_1] = -\eta_3$;
VII, VI	$\mathfrak{b}_{3,6}$	$[\eta_1, \eta_2] = \alpha\eta_2 + \eta_3, \quad [\eta_3, \eta_1] = \eta_2 - \alpha\eta_3, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$.

Выполнена следующая теорема.

Теорема 10.2.2 (Жихарева [122]). *В размерности три комплексные алгебры Ли $\mathfrak{b}_{3,1}, \mathfrak{b}_{3,3}, \mathfrak{b}_{3,4}$ и $\mathfrak{a}_{3,6}$ допускают собственный нийенхейсов базис и только они. При этом*

- *В алгебре* $\mathfrak{a}_{3,1}$ *на роль собственного нийенхейсова базиса подходит любой базис;*
- *В алгебре* $\mathfrak{a}_{3,5}$ *на роль собственного нийенхейсова базиса подходит любой базис;*
- *Для* $\mathfrak{a}_{3,4}$ *вектора* $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$*, заданные формулами*

$$\zeta_1 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_3, \quad \zeta_3 = 2\eta_1$$

  дают пример собственного нийенхейсова базиса

- *В* $\mathfrak{a}_{3,8}$ *вектора* $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$*, заданные формулами*

$$\zeta_1 = \eta_1 + \eta_3, \quad \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta_3 = \eta_2 + \eta_3,$$

  дают пример собственного нийенхейсова базиса.

Вектора $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ *выражены через элементы канонического базиса* η_1, η_2, η_3 *из комплексной классификации Бианки*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично. □

Замечание 10.2.2. Операторное поле на группе Ли G называется левоинвариантным, если оно переводит левоинвариантные векторные поля в левоинвариантные векторные поля.

Так как всякое поле такого сорта определяется своим значением в единице E группы G, то и левоинвариантные операторные поля однозначно определяются своим действием на $T_E G$. Легко видеть, что алгебраические операторы Нийенхейса на алгебре индуцируют левоинвариантный оператор Нийенхейса на группе.

Таким образом, теоремы 10.2.1 и 10.2.2 дают список трехмерных групп Ли G, которые одновременно являются многообразиями Нийенхейса с левоинвариантными операторами Нийенхейса. Заметим, что собственные значения таких операторов постоянны, как и характеристика Сегре. ■

10.3 Лиевы пучки и полные коммутативные наборы

Если на алгебре Ли задана пара согласованных коммутаторов $[\,,\,]_1$ и $[\,,\,]_2$, то говорят, что имеется лиев пучок. Пара согласованных коммутаторов, построенных по алгебраическому оператору Нийенхейса, образует такой пучок (теорема 10.1.1).

Всюду далее мы рассматриваем случай, когда $\mathfrak{g}$ — конечномерная. Напомним, что индексом алгебры Ли называется коранг тензора Пуассона-Ли в точке общего положения. Следующая теорема описывает алгебраические свойства лиева пучка, построенного по алгебраическому оператору Нийенхейса.

Теорема 10.3.1. *Пусть* L *— невырожденный алгебраический оператор Нийенхейса на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$*. Определим*

$$[\xi, \eta]_\lambda = [\xi, \eta]_L - \lambda[\xi, \eta].$$

Тогда

1. *Для всех λ, не лежащих в спектре L, алгебра Ли, задаваемая скобкой $[\xi,\eta]_\lambda$ изоморфна алгебре Ли со скобкой $[\xi,\eta]$;*

2. *Для всех λ_i из спектра L индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ не превосходит индекса исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Если алгебра вещественна, комплексифицируем её. Всюду далее мы имеем дело с комплексными алгебрами. Обозначим через $L_\lambda = L - \lambda \mathrm{Id}$. Легко видеть, что

$$[L_\lambda\xi,\eta]+[\xi,L_\lambda\eta]-L_\lambda[\xi,\eta]=[L\xi,\eta]-\lambda[\xi,\eta]+[\xi,L\eta]-\lambda[\xi,\eta]-L[\xi,\eta]+\lambda[\xi,\eta]= \\ =[\xi,\eta]_L-\lambda[\xi,\eta]=[\xi,\eta]_\lambda.$$

Если L — алгебраический оператор Нийенхейса, то и L_λ —- алгебраический оператор Нийенхейса для любого λ. Тождество Нийенхейса для такого оператора переписывается как

$$[L_\lambda\xi,L_\lambda\eta]=L_\lambda\Big([L_\lambda\xi,\eta]+[\xi,L_\lambda\eta]-L_\lambda[\xi,\eta]\Big).$$

Умножая обе части на L_λ^{-1} (мы предполагаем, что λ не лежит в спектре L), мы получаем

$$L_\lambda^{-1}\Big([L_\lambda\xi,L_\lambda\eta]\Big)=[\xi,\eta]_\lambda.$$

Таким образом, мы получаем, что соответствующие алгебры изоморфны. Первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Для доказательства нам потребуется ввести некоторые дополнительные определения.

Операция сжатия [55] алгебры Ли определяется следующим образом. Зафиксируем в $\mathfrak{g}$ базис $\eta_1,...,\eta_n$ и обозначим через c_{ij}^k соответствующие структурные константы. Пусть для $0<t\le 1$ в пространстве структурных констант определена кривая $c_{ij}^k(t)$. Если у $c_{ij}^k(t)$ существует предел при $t\to 0$, то полученная алгебра называется сжатием исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Легко видеть, что так как допредельные структурные константы были кососимметрические и удовлетворяли тождеству Якоби, то, по определению предела, такими же будут и константы предельной алгебры. Таким образом, в результате сжатия алгебры Ли получается снова алгебра Ли.

Выберем пару комплекснозначных функций $f(t)$ и $g(t)$ с условиями:

1. $f(0)=g(1)=1$, $f(1)=g(0)=0$;

2. Кривая $\lambda_i-\frac{g(t)}{f(t)}$ не проходит ни через одну точку спектра R при $0<t\le 1$.

Определим оператор

$$L_t=g(t)\cdot\mathrm{Id}+f(t)\big(L-\lambda_i\cdot\mathrm{Id}\big).$$

Легко видеть, что это алгебраический оператор Нийенхейса. Из второго условия на функции f и g вытекает, что полученный оператор является невырожденным при $0<t\le 1$. Из первого условия получаем, что при $t=1$ оператор $L_1=\mathrm{Id}$.

Определим теперь сжатие как

$$[\eta_i, \eta_j]_{R_t} = c_{ij}^{\alpha}(t)\eta_{\alpha}.$$

Таким образом, предел при $t \to 0$ существует и в точности совпадает с алгеброй Ли, задаваемой коммутатором $[\eta_p, \eta_q]_{L-\lambda\cdot\mathrm{Id}}$, то есть спектральной алгеброй.

Индекс алгебры — это ранг тензора Пуассона в точке общего положения. Ранг можно определить как отличие от нуля некоторых миноров соответствующей матрицы. Если какие-то миноры для фиксированной точки предельной алгебры, полученной сжатием, отличны от нуля, то они отличны от нуля при достаточно малых значениях параметра t.

Это простое рассуждение показывает, что если алгебра получена сжатием, то её индекс не превосходит индекса $\mathfrak{g}$. Так как спектральная алгебра $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ получена сжатием, то её индекс не превосходит индекса $\mathfrak{g}$. $\square$

Замечание 10.3.1. Если λ лежит в спектре L, то алгебру Ли с коммутатором $[\,,\,]_\lambda$ мы называем спектральной. Случай вырожденного L формально соответствует тому, что $\lambda = \infty$ (то есть мы, как всегда, рассматриваем проективный параметр) лежит в спектре, то есть $[\xi, \eta]_\infty$ — спектральная алгебра. ■

По лиевым пучкам строится пучок согласованных скобок Пуассона на двойственном пространстве к $\mathfrak{g}$. Вводя на этом пространстве аффинную структуру, мы получаем, что тензоры Пуассона в локальных плоских координатах имеют вид

$$\pi_{jk}^1 = (c_1)_{jk}^i u_i, \quad \pi_{jk}^2 = (c_2)_{jk}^i u_i,$$

где $(c_1)_{jk}^i, (c_2)_{jk}^i$ — структурные константы соответствующих коммутаторов в данном базисе. Соответствующая бигамильтонова цепочка имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_j^0 &= \pi_{jq}^1 \frac{\partial f_0}{\partial u_q} = 0, \\ \xi_j^i &= \pi_{jq}^1 \frac{\partial f_i}{\partial u_q} = \pi_{jq}^2 \frac{\partial f_{i-1}}{\partial u_q}, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Здесь ξ^i — бигамильтоновы векторные поля. Легко видеть, что f_0 — то есть функции Казимира первой скобки Пуассона — это в точности инвариант коприсоединенного представления $\mathfrak{g}$.

Замечание 10.3.2. В отличие от бесконечномерного случая в конечномерном удобно не рассматривать отдельные бигамильтоновы цепочки, а изучать свойства подходящей алгебры (в смысле коммутативной структуры) функций $\mathcal{F}$. Она строится так:

1. Выберем набор инвариантов f_{0i}, которые порождают симплектическое слоение в точке общего положения;
2. Возьмем все функции, входящие в бигамильтоновы цепочки;
3. Возьмем все возможные функции от этих цепочек.

Вообще говоря, выбор начальных инвариантов позволяет строить разные алгебры, причем все они будут коммутативными. ■

Говорят, что алгебра полна, если в окрестности точки общего положения дифференциалы функций порождают пространство размерности

$$n(\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}\Big(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}\Big).$$

Эквивалентно, степень трансцендентности $\mathcal{F}$ совпадает с $n(\mathfrak{g})$. Вопрос полноты алгебры $\mathcal{F}$ решается сугубо алгебраически с помощью критерия Болсинова. Напомним, что точка $\mathfrak{g}^*$ называется регулярной, если коранг тензора Пуассона в этой точке совпадает с индексом.

Теорема 10.3.2 (Критерий Болсинова для лиева пучка (см.[128, 10, 153]))**.** *Алгебра $\mathcal{F}$ полна тогда и только тогда, когда индексы всех алгебр пучка совпадают и есть хотя бы одна точка, регулярная относительно всех скобок пучка.*

В завершении раздела приведем примеры применения критерия Болсинова.

Пример 10.3.1. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, реализованную как алгебру матриц размера $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Для произвольной фиксированной матрицы A зададим линейный оператор $L : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ как

$$L(X) = AX.$$

Покажем, что этот оператор — алгебраический оператор Нийенхейса. Действительно

$$\begin{aligned} &L^2[X,Y] + [L(X), L(Y)] - L[L(X), Y] - L[X, L(Y)] = \\ &= AAXY - AAYX + AXAY - AYAX - AAXY + AYAX - AXAY + AAYX = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} [L(X), Y] + [X, L(Y)] - L[X,Y] &= AXY - YAX + XAY - AYX - AXY + AYX = \\ &= XAY - YAX = [X,Y]_A. \end{aligned}$$

То есть $[X,Y]_A = [X,Y]_L$ для построенного оператора и, в частности, оператор L — алгебраический оператор Нийенхейса.

Предположим теперь, что A — диагональный с различными вещественными элементами на диагонали, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_i \neq a_j$. Спектр L состоит из a_i, каждый из которых имеет кратность n.

Рассмотрим спектральную алгебру. Без ограничения общности, считаем, что $a_n = 0$. Рассмотрим X, Y в виде

$$X = \begin{pmatrix} \bar{X} & \xi \\ x & x_0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \bar{Y} & \eta \\ y & y_0 \end{pmatrix},$$

где $\bar{X}, \bar{Y}$ — произвольные матрицы размера $n-1 \times n-1$, ξ, η — столбцы высоты $n-1$, x, y — строки длины $n-1$ и x_0, y_0 —константы, стоящие в углу. Для матрицы A аналогичное разбиение имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0_{n-1\times 1} \\ 0_{1\times n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутатор имеет вид

$$XAY - YAX = \begin{pmatrix} \bar{X}\bar{A} & 0_{n-1\times 1} \\ x\bar{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} & \eta \\ y & y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{Y}\bar{A} & 0_{n-1\times 1} \\ y\bar{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} & \xi \\ x & x_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \bar{X}\bar{A}\bar{Y} - \bar{Y}\bar{A}\bar{X} & \bar{X}\bar{A}\eta - \bar{Y}\bar{A}\xi \\ x\bar{A}\bar{Y} - y\bar{A}\bar{X} & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что на диагонали $\bar{A}$ стоят ненулевые числа, мы получаем, что построенная алгебра представляет собой прямую сумму одномерного центра, натянутого на матричную единицу E_{nn} и полупрямой суммы $\mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{K})$ с $\mathbb{R}^{n-1}\oplus\mathbb{R}^{n-1}$, где на первом слагаемом элементы $\mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{K})$ действуют стандартным представлением ρ, а на втором ρ^*.

Индекс такой полупрямой суммы (§45 в [153]) равен $n-1$. Учитывая, что у нас имеется одномерный центр, получаем, что индекс спектральной алгебры равен n. Легко проверяется, что главный нильпотентный элемент, то есть

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

будет регулярным для всех скобок пучка. По критерию Болсинова, построенный по выбранным скобкам коммутативный набор будет полным.

Пример был предложен изначально в работе [140], однако, полнота полученного коммутативного набора не обсуждалась — только коммутативность. ■

Пример 10.3.2. Пусть дана конечномерная полупростая комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{\oplus}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}.$$

Здесь $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, $\mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_+$ — нильпотентные алгебры, натянутые на вектора с отрицательными и положительными весами соответственно. Через $\mathfrak{b}$ мы обозначили борелевскую подалгебру. Определим оператор L как

$$L\xi = \lambda_1\xi, \quad L\eta = \lambda_2\eta, \quad \xi \in \mathfrak{n}_-, \eta \in \mathfrak{b}.$$

Спектральных алгебр в этом случае две:

$$\mathfrak{n}_- +_\rho \mathbb{C}^k, \quad \text{и} \quad \mathfrak{b} +_\rho \mathbb{C}^m,$$

где $k = \dim\mathfrak{b}, m = \dim\mathfrak{n}_-$.

Обозначим через g метрику Киллинга. Несложно показать, что для этих алгебр образы главного нильпотентного элемента e и регулярного полупростого элемента $h \in \mathfrak{h}$ при отождествлении, то есть ge, gh будут регулярными точками для соответствующих тензоров Пуассона. Из этого будет вытекать равенство индексов спектральных алгебр и исходной алгебры Ли. Наконец, в качестве регулярной точки для всех скобок можно взять $g(e+h)$.

Таким образом, полученная коммутативная алгебра максимальна. Этот пример был предложен в [92] в качестве приложения разработанного автором критерия кронеккеровости пуассонова пучка, построенного по лиеву пучку. ■

10.4 Полнота коммутативной алгебры, построенной по оператору Соколова-Одесского

Начнём этот раздел с примера.

Пример 10.4.1. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, реализованную как алгебру матриц размера $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Для пары матриц A, B с условием $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$ определим оператор L как

$$L(X) = AXB + BAX + BX - XB.$$

Убедимся, что это алгебраический оператор Нийенхейса. Для этого по отдельности вычислим все слагаемые (10.1) (помня, что $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$):

$$\begin{aligned}
&[L(X), L(Y)] = [AXB + BAX + BX - XB, AYB + BAY + BY - YB] = AXBAYB+\\
&+ BAXAYB + BXAYB - XBAYB + AXAY + BAXBAY + BXBAY - XAY+\\
&+ AXY + BAXBY + BXBY - XY - AXBYB - BAXYB - BXYB + XBYB-\\
&- AYBAXB - BAYAXB - BYAXB + YBAXB - AYAX - BAYBAX - BYBAX+\\
&+ YAX - AYX - BAYBX - BYBX + YX + AYBXB + BAYXB + BYXB - YBXB;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L^2[X,Y] = L(AXYB + BAXY + BXY - XYB - AYXB - BAYX - BYX + YXB) =\\
&= XY + ABAXYB + ABXYB - AXY - YX - ABAYXB - ABYXB + AYX+\\
&+ BXYB + BABAXY + BABXY - BAXYB - BYXB - BABAYX - BABYX+\\
&+ BAYXB + BAXYB + AXY + XY - BXYB - BAYXB - AYX - YX + BYXB-\\
&- AXY - BAXYB - BXYB + XY + AYX + BAYXB + BYXB - YX;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L[L(X),Y] = L(AXBY + BAXY + BXY - XBY - YAXB - YBAX - YBX+\\
&+ YXB) = XBYB + ABAXYB + ABXYB - AXBYB - AYAX - AYBAXB-\\
&- AYBXB + AYX + BXBY + BABAXY + BABXY - BAXBY - BAYAXB-\\
&- BAYBAX - BAYBX + BAYXB + BAXBY + AXY + XY - BXBY - BYAXB-\\
&- BYBAX - BYBX + BYXB - AXBYB - BAXYB - BXYB + XBYB + YAX+\\
&+ YBAXB + YBXB - YX;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L[X, L(Y)] = L(XAYB + XBAY + XBY - XYB - AYBX - BAYX - BYX+\\
&+ YBX) = AXAY + AXBAYB + AXBYB - AXY - YBXB - ABAYXB-\\
&- ABYXB + AYBXB + BAXAYB + BAXBAY + BAXBY - BAXYB - BYBX-\\
&- BABAYX - BABYX + BAYBX + BXAYB + BXBAY + BXBY - BXYB-\\
&- BAYBX - AYX - YX + BYBX - XAY - XBAYB - XBYB + XY + AYBXB+\\
&+ BAYXB + BYXB - YBXB.
\end{aligned}$$

Складывая их с правильными знаками, мы получаем, что

$$L^2[X,Y] + [L(X), L(Y)] - L[L(X), Y] - L[X, L(Y)] = 0.$$

Таким образом, мы имеем дело с алгебраическим оператором Нийенхейса. Второй коммутатор для этого оператора имеет вид

$$\begin{aligned}
&[X,Y]_L = [AXB + BAX + BX - XB, Y] + [X, AYB + BAY + BY - YB] - A[X,Y]B-\\
&- BA[X,Y] - B[X,Y] + [X,Y]B = AXBY + BAXY + BXY - XBY - YAXB-\\
&- YBAX - YBX + YXB + XAYB + XBAY + XBY - XYB - AYBX - BAYX-\\
&- BYX + YBX - AXYB + AYXB - BAXY + BAYX - BXY + BYX + XYB - YXB.
\end{aligned}$$

Окончательная формула для коммутатора принимает вид

$$[X, Y]_L = A[X, Y]_B + [X, Y]_A B - A[X, Y]B + [X, Y]_{BA},$$

где $[X, Y]_A = XAY - YAX$ (это обозначение было введено в предыдущем разделе).

Этот оператор был предложен Соколовым и Одесским в работах [84, 85] в том числе, в контексте изучения интегрируемых уравнений в частных производных. Мы будем называть его оператором Соколова-Одесского. ■

В качестве параметров у оператора L выступают сразу две матрицы A и B. Каждая такая матрица однозначно задается набором $(p, q), p + q = n$, где p — количество единичных собственных значений и q — количество собственных значений -1. Размерность такой орбиты равна $n^2 - p^2 - q^2$, а множество параметров оператора L — несвязное объединение конечного числа прямых произведений пар орбит. Нас же будут интересовать компоненты пространства параметров максимальной размерности:

1. Для $n = 2k$ это пары (A, B) таких матриц $A, B, A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$, что у каждой кратности собственных значений 1 и -1 равны k. Размерность этой компоненты равна $2k^2$;

2. Для $n = 2k + 1$ это пары (A, B) таких матриц $A, B, A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$, что кратности собственных значений 1 и -1 отличается на единицу. Это означает, что всего есть четыре связные компоненты: у обеих матриц 1 имеет кратность $k + 1$; у первой матрицы кратность 1 равна $k + 1$, а у второй — k; у второй матрицы кратность 1 равна $k + 1$, а у первой — k; у обеих матриц 1 имеет кратность k. Размерности каждой из компонент равны $2k(k + 1)$.

Обозначим полученное множество через Reg.

Теорема 10.4.1. *Пусть на алгебре Ли* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *(здесь* $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$*) задан алгебраический оператор Нийенхейса*

$$L_{A,B}(X) = AXB + BAX + BX - XB,$$

где $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$. *Тогда для почти всех пар* (A, B) *из* Reg *полученная коммутативная подалгебра* $\mathcal{F}$ *полна.*

Доказательство. Для начала заметим, что Reg — замкнутое по Зарисскому множество. Мы говорим, что некоторое утверждение выполняется для почти всех точек замкнутого по Зарисскому множества Reg, если оно выполнено для некоторого подмножества, дополнение к которому Reg$'$, в свою очередь, тоже замкнуто по Зарисскому.

Комплексифицируем алгебру и всюду далее будем работать с $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Критерий Болсинова (теорема 10.3.2) дает следующее достаточное условие полноты коммутативной алгебры, построенной по лиеву пучку:

1. Индексы всех спектральных алгебр совпадают с индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

2. Коразмерность множества сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$ больше или равна двум.

Упомянутая выше коразмерность множества сингулярных элементов для $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ равна трем. Поэтому достаточно проверить только, что индексы особых алгебр совпадают с индексом $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, то есть равны n.

Как и раньше считаем, что алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ и двойственное к ней пространство отождествлены с помощью невырожденного инвариантного скалярного произведения $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Выберем в каком-то смысле "максимально"сингулярную для $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — точку из центра. В ней тензор Пуассона-Ли обращается в ноль, а соответствующий лиев пучок вырождается в прямую.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)$ снабжена инвариантным невырожденным скалярным произведением $g(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Инвариантность в данном случае означает $g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$. С помощью этого произведения мы можем отождествить алгебру и двойственное к ней пространство. В этом случае скобка Пуассона уже на алгебре записывается как

$$\{f, h\} = \operatorname{tr}(X[\operatorname{grad}_X f, \operatorname{grad}_X h]),$$

где grad — это градиент функции на $\mathfrak{gl}(n)$, построенный при помощи инвариантного скалярного произведения g. Вторая скобка Пуассона, построенная по L в этом случае приобретает вид

$$\{f, h\}_L = \operatorname{tr}(X[\operatorname{grad}_X f, \operatorname{grad}_X h]_L.$$

Выпишем следующие соотношения на тензор Пуассона-Ли в точке Id для скобок из пучка:

$$\begin{aligned} g(\mathrm{Id}, [X, Y]_\lambda) = \operatorname{tr}[X, Y]_\lambda = \operatorname{tr} L[X, Y] = \operatorname{tr}(A[X, Y]B + BA[X, Y] \\ + [B, [X, Y]]) = 2\operatorname{tr} BA[X, Y] = 2(BA, [X, Y]). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Таким образом, тензор Пуассона в точке Id для скобки $[\ ,\ ]_L$ совпадает с тензором Пуассона исходной скобки $[\ ,\ ]$, вычисленным в точке $2BA$. В свою очередь, ранг этого тензора равен коразмерности централизатора BA.

Лемма 10.4.1. *Для почти всех пар A, B из множества M произведение BA является регулярным элементом $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Легко видеть, что множество таких пар $(A, B) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, что произведение AB является сингулярным, замкнуто по Зарисскому. А, значит, множество M' таких точек, что BA регулярно, открыто по Зарисскому.

Множество M, как мы помним, представляет собой, вообще говоря, несвязное объединение компонент максимальной размерности для пар (A, B), $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$. Покажем, что M' и M пересекаются (из этого будет вытекать утверждение леммы).

Доказывать будем отдельно для четной и нечетной размерностей.

$n = 2k$. Без ограничения общности считаем, что матрица B имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Omega \end{pmatrix}, \tag{10.11}$$

где Ω — матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем k чисел $s_1, ..., s_k$ и определим A как

$$\begin{pmatrix} R(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R(s_k) \end{pmatrix}, \tag{10.12}$$

где $R(s_i)$ — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \sin s_i & \cos s_i \\ \cos s_i & -\sin s_i \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $A^2 = \mathrm{Id}$. В этом случае матрица BA имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q(s_k) \end{pmatrix},$$

где $Q(s_i)$ — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \sin s_i & \cos s_i \\ -\cos s_i & \sin s_i \end{pmatrix}.$$

Подходящей (комплексной) заменой координат матрица приводится к виду, где на диагонали стоят числа $e^{\pm \mathrm{i} s_j}$. Если $s_i \in (0, \pi/4)$ и $s_i \neq s_j$ при $i \neq j$, то все эти числа различны. Значит, элемент регулярен.

$n = 2k + 1$. Без ограничения общности считаем, что матрица B имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega \end{pmatrix},$$

где Ω — матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A в этом случае берем в виде, похожем на предыдущий случай:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(s_k) \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему случаю получается, что независимо от знаков элементов, стоящих в левом верхнем углу матриц A и B, произведение BA оказывается регулярным. При этом различные знаки дают регулярный элемент для каждой из четырех компонент связности M. Таким образом, лемма доказана. □

Так как по лемме размерность централизатора равна n. По теореме 10.3.1 индекс спектральной алгебры не меньше n, то есть, в данном случае, в точности совпадает с n. В точке Id тензоры Пуассона всех спектральных алгебр пропорциональны, значит, индексы всех спектральных алгебр лиева пучка равны n. Теорема доказана. □

Пример 10.4.2. Выпишем квадратичные функции, входящие в алгебру $\mathcal{F}$. Для данного оператора $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ определим оператор $L^g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ следующим образом: для любых ξ, η верно, что $g(\xi, L\eta) = g(L^g\xi, \eta)$. В нашем случае

$$L^g(X) = BXA + XBA + XB - BX.$$

Перепишем

$$\begin{aligned} \{f,h\} - \lambda\{f,h\}_L = g(X, [\operatorname{grad}_X f, \operatorname{grad}_h g]_(\mathrm{Id} - \lambda L)) = \\ = g(X, (\mathrm{Id} - \lambda L)^{-1}[(\mathrm{Id} - \lambda L)\operatorname{grad}_X f, (\mathrm{Id} - \lambda L)\operatorname{grad}_X h]) = \\ = g((\mathrm{Id} - \lambda L^g)^{-1}X, [(\mathrm{Id} - \lambda L)\operatorname{grad}_X f, (\mathrm{Id} - \lambda L)\operatorname{grad}_X h]). \end{aligned}$$

Заметим, что для $\bar{f} = f((\mathrm{Id} - \lambda L^g)^{-1}X)$ мы получаем $\operatorname{grad}_X \bar{f} = (\mathrm{Id} - \lambda L)^{-1}\operatorname{grad}_{(\mathrm{Id}-\lambda L^g)^{-1}X} f$. Из этого немедленно вытекает, что функции (а так же любые функции от них)

$$f_\lambda = \operatorname{tr}((\mathrm{Id} - \lambda L^g)^{-1}X)^2.$$

Первые два слагаемых в разложении имеют вид $\operatorname{tr} X^2$ и $\operatorname{tr}(BXA + XBA + XB - BX)^2$. ■

В конце подробно разберем устройство оператора L в частном случае.

Пример 10.4.3. Пусть $n = 2k$ и рассмотрим A, B в виде (этот вид использовался при доказательстве теоремы 10.4.1)

$$B = \begin{pmatrix} \Omega & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Omega \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

и

$$A = \begin{pmatrix} R(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R(s_k) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R(s_i) = \begin{pmatrix} \sin s_i & \cos s_i \\ \cos s_i & -\sin s_i \end{pmatrix}.$$

Здесь $s_1, ..., s_k$ — некоторый набор чисел с условием $\cos s_j \neq 0$. Представим $\mathfrak{gl}(2k, \mathbb{R})$ в виде прямой суммы четырехмерных пространств:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1k} & \dots & X_{kk} \end{pmatrix}. \tag{10.13}$$

Каждое пространство X_{ij} натянуто на матричные единицы

$$E_{2i-1,2j-1}, E_{2i-1,2j}, E_{2i,2j-1}, E_{2i,2j}.$$

Это четырехмерное подпространство инвариантно относительно действия оператора L и ограничение оператора на него имеет вид:

$$LX_{ij} = R(s_j)X_{ij}\Omega + \Omega R(s_j)X_{ij} + \Omega X_{ij} - X_{ij}\Omega.$$

В упомянутом выше базисе из матричных единиц матрица ограничения оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2\sin s_j & 0 & 2\cos s_j & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2\cos s_j & 0 & 2\sin s_j \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что собственные значения такой матрицы — это $2\sin s_j, 2, -2$. При этом собственные для $2\sin s_j$ вектора — это $E_{2i-1,2j-1}$ и $E_{2i,2j}$. Собственные вектора для 2 и -2 — это в точности

$$Q_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin s_j - 1}{\cos s_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sin s_j + 1}{\cos s_j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем, что на всем пространстве $\mathfrak{gl}(2k, \mathbb{R})$ у L имеется $k+2$ собственных значения:

1. $\lambda_i = 2\sin s_i$, имеющие кратность $2k$;
2. $\lambda_{k+1} = 2$ и $\lambda_{k+2} = -2$, каждое из которых имеет кратность k^2.

В частности, оператор L приводится к диагональному виду, однако его спектр не является простым. ■

10.5 Связь лиевых пучков с методом сдвига аргумента

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}^*$ — двойственное пространство. Считаем, что на двойственном пространстве введена аффинная структура и система координат $u_1, \ldots, u_n$. Зафиксируем $a \in \mathfrak{g}^*$ с координатами $a_1, \ldots, a_n$ и рассмотрим скобки Пуассона:

$$\pi^1_{jk} = c^i_{jk} u_i \quad \text{и} \quad \pi^2_{jk} = c^i_{jk} a_i. \tag{10.14}$$

Вторая скобка Пуассона носит название скобки Ли-Кириллова (иногда добавляют Константа и множество других фамилий). Главное её отличие от случая, который рассматривался в разделе 10.3, в том, что в выбранных аффинных координатах она постоянна.

Легко проверяется, что скобки (10.14) согласованы. Таким образом, мы имеем аффинный пучок согласованных скобок. Пусть f — функция Казимира первой скобки Пуассона. Рассмотрим следующее разложение:

$$f(x + \lambda a) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \lambda^i. \tag{10.15}$$

При этом справа мы имеем $f_0 = f$ и, вообще говоря, бесконечное число слагаемых. Часто, однако, это разложение бывает конечным — например, когда в качестве инварианта берётся многочлен.

Теорема 10.5.1 (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко[143, 144])**.** *Выполнено следующее:*

1. *Пусть f, g — произвольные функции Казимира π^1. Тогда f_i, g_j, построенные по формуле* (10.15)*, коммутируют относительно всех скобок пучка, задаваемого скобками* (10.14)*;*
2. *Функции f_i, построенные по формуле* (10.15)*, образуют бигамильтонову цепочку*

$$\xi^0_j = \pi^1_{jq} \frac{\partial f_0}{\partial u_q} = 0,$$
$$\xi^i_j = \pi^1_{jq} \frac{\partial f_i}{\partial u_q} = -\pi^2_{jq} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial u_q}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Начнем со второго утверждения. В силу того, что f — функция Казимира, для произвольного значения параметра λ получаем

$$0 = c^k_{iq}(u_k + \lambda a_k)\frac{\partial f(u+\lambda a)}{\partial u_q}.$$

Раскладывая обе части в ряд по λ, получаем соотношения вида

$$\pi^1_{jq}\frac{\partial f_i}{\partial u_q} + \pi^2_{jq}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial u_q} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Вводя обозначения ξ^i, получаем в точности второе утверждение теоремы.

Первое утверждение теоремы (10.5.1) следует из второго в силу общих свойств бигамильтоновых цепочек. Мы, однако, докажем его для этого случая отдельно. Для этого рассмотрим разложения

$$0 = c^k_{jq}(u_k + \lambda a_k)\frac{\partial f(u+\lambda a)}{\partial u_q} \quad \text{и} \quad 0 = c^k_{jq}(u_k + \mu a_k)\frac{\partial g(u+\mu a)}{\partial u_q}$$

для параметров λ и μ соответственно. При этом заметим, что для $\lambda \neq \mu$ выполнено соотношение

$$u_k = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}(u_k + \mu a_k) - \frac{\mu}{\lambda-\mu}(u_k + \lambda a_k).$$

Тогда для $\lambda \neq \mu$ имеем

$$c^k_{pq}u_k\frac{\partial f(u+\lambda a)}{\partial u_p}\frac{\partial g(u+\mu a)}{\partial u_q} = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}c^k_{pq}(u_k+\mu a_k)\frac{\partial f(u+\lambda a)}{\partial u_p}\frac{\partial g(u+\mu a)}{\partial u_q} + \\ + \frac{\mu}{\lambda-\mu}c^k_{pq}(u_k+\lambda a_k)\frac{\partial f(u+\lambda a)}{\partial u_p}\frac{\partial g(u+\mu a)}{\partial u_q} = 0.$$

По непрерывности получаем, что левая часть равна нулю и для $\lambda = \mu$. Раскладывая в ряд уже по двум параметрам, мы получаем

$$0 = \{f(u+\lambda a), g(u+\mu a)\} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^i\mu^j\{f_i, g_j\}.$$

В силу произвольности значений параметров равенство нулю означает, что нулю равны все скобки $\{f_i, g_j\}$. Аналогично можно доказать для любой скобки вида $c^i_{jk}(u_i + sa) = \pi^1_{jk} + s\pi^2_{jk}$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. □

Напомним еще раз, что элемент a пространства $\mathfrak{g}^*$ называется регулярным, если для него форма $c^i_{jk}a_i$ имеет максимально возможный ранг. В противном случае элемент называется сингулярным. Множество сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$ мы обозначаем как $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$.

Будем обозначать алгебру (в смысле коммутативной структуры), построенную с помощью метода сдвига аргумента на элемент $\mathcal{F}_a$. Такие алгебры в литературе носят название алгебр Мищенко-Фоменко. Полнота, как и ранее, понимается так: в окрестности точки общего положения дифференциалы функций из $\mathcal{F}_a$ порождают пространство размерности $n(\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}\Big(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{ind}\mathfrak{g}\Big)$.

В частности, на орбитах общего положения в полупростых и редуктивных алгебрах Ли, как показали Мищенко и Фоменко, всегда есть эффективно описываемые полиномиальные гамильтоновы системы, вполне интегрируемые по Лиувиллю. Далее, в многочисленных работах разных специалистов были обнаружены полные коммутативные семейства полиномов на многих сериях конечномерных алгебр Ли.

Обобщая эти исследования, Мищенко и Фоменко выдвинули важную гипотезу: на произвольной конечномерной алгебре Ли (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$) всегда существуют полные коммутативные (используется также термин инволютивные) наборы полиномов, то есть вполне интегрируемые по Лиувиллю полиномиальные гамильтоновы системы. Это утверждение получило название гипотезы Мищенко-Фоменко. Она была доказана в 2004 году С. Т. Садэтовым [151]. Весьма нетривиальное и неожиданное доказательство было основано на идеях алгебраической геометрии. Чуть позже, в 2005 году, А.В.Болсиновым было получено доказательство этой же гипотезы с использованием методов симплектической геометрии [130].

Подробный обзор можно посмотреть в книге А.Т.Фоменко "Симплектическая геометрия: методы и приложения"[155]. Там же описана возникшая связь коммутативной и некоммутативной интегрируемости. Затем гипотеза Мищенко-Фоменко была обобщена на семейства скобок Пуассона [18].

Теорема 10.5.2 ([128, 129])**.** *Пусть a — регулярный элемент $\mathfrak{g}^*$. Тогда алгебра $\mathcal{F}_a$ полна тогда и только тогда, когда коразмерность множества* $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$ *как минимум два.*

Доказательство. Критерий полноты Болсинова в таком контексте принимает вид: для комплексных алгебр Ли в пространстве $\mathfrak{g}^*$ найдется плоскость, натянутая на элементы u и a, которая не пересекается с $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$. Для вещественных алгебр, в свою очередь, алгебру надо сначала комплексифицировать, а потом найти подходящую плоскость.

Пусть сдвиг на a не даёт полного набора. Рассмотрим все возможные плоскости, содержащие a. Они параметризованы вектором u и, значит, это множество имеет нулевую коразмерность. При этом каждая такая плоскость пересекается с $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$. В силу однородности формул, если пересечение есть, то оно как минимум состоит из целой сингулярной прямой. То есть коразмерность множества сингулярных элементов либо один, либо ноль.

Пусть теперь набор получился полным. То есть имеется плоскость, натянутая на u, a, которая не содержит сингулярный элемент. Рассмотрим $\mathbb{CP}^n$. Плоскость задаёт на этом пространстве замкнутую кривую. $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$ на этом же множестве задаётся набором полиномиальных уравнений (миноры в матрице тензора Пуассона). Так как это множество не пересекается с кривой, то оно имеет коразмерность как минимум один. Значит, всё множество $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}$ имеет коразмерность как минимум два. Теорема доказана. □

Замечание 10.5.1. Часто интерес представляет не вся $\mathcal{F}_a$, а только ее полиномиальная часть. В этом случае надо брать полиномиальные функции Казимира или рассматривать разложение функций Казимира в точке a в ряд Тейлора, то есть выражения вида

$$f(a+\lambda u) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \lambda^i.$$

В этом случае f_i будут полиномами. ■

Замечание 10.5.2. Условию теоремы 10.5.2 удовлетворяют простые алгебры Ли. Именно для них в оригинальных работах А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко были построены полные коммутативные наборы [143, 144]. ■

Пример 10.5.1. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, реализованную как алгебру матриц размера $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Эта алгебра снабжена невырожденным инвариантным скалярным умножением $g(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Инвариантность означает, что

$$g([X, Z], Y) = g(X, [Z, Y]).$$

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью g. При этом функции Казимира π^1 отождествляются с инвариантами присоединенного представления. В свою очередь алгебра полиномиальных инвариантов присоединенного действия представляет собой свободную алгебру с порождающими

$$\operatorname{tr} X, \ldots, \operatorname{tr} X^n.$$

В этом случае сдвиги первых четырех инвариантов имеют вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(X + \lambda A) = \operatorname{tr} X + \lambda \operatorname{tr} A,\\
&\operatorname{tr}(X + \lambda A)^2 = \operatorname{tr} X^2 + 2\lambda \operatorname{tr} XA + \lambda^2 \operatorname{tr} A^2,\\
&\operatorname{tr}(X + \lambda A)^3 = \operatorname{tr} X^3 + 3\lambda \operatorname{tr} X^2 A + 3\lambda^2 \operatorname{tr} XA^2 + \lambda^3 \operatorname{tr} A^3,\\
&\operatorname{tr}(X + \lambda A)^4 = \operatorname{tr} X^4 + 4\lambda \operatorname{tr} X^3 A + \lambda^2(4 \operatorname{tr} A^2 X^2 + 2 \operatorname{tr} AXAX) + 4\lambda^3 \operatorname{tr} XA^3 + \lambda^4 \operatorname{tr} A^4.
\end{aligned}$$

Множество сингулярных элементов в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ имеет коразмерность три [147]. Таким образом, для регулярного элемента A алгебра $\mathcal{F}_a$ полна.

Нетривиальным фактом, является то, что построенная таким образом алгебра $\mathcal{F}_a$ совпадает с алгеброй, построенной в примере 10.3.1 (см. [140]). Он вытекает из совпадения линейных и квадратичных частей алгебр (это видно из формул). Напомним, что в примере 10.3.1 алгебра строилась по паре линейных скобок Пуассона, в то время как здесь мы имеем дело с пучком, порожденным линейной и постоянной скобкой.

Как легко видеть, для второго случая полнота доказывается проще, чем в случае лиевых пучков. ■

Следующий пример является основным результатом этого раздела. Он устанавливает связь между алгебраическими операторами Нийенхейса и методом сдвига аргумента.

Пример 10.5.2. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ и определим коцикл γ как

$$\gamma(\xi, \eta) = a([\xi, \eta]), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Рассмотрим одномерное центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$, построенное по коциклу γ — аналогично тому, как это делалось в примере 10.1.2.

Для скобки Пуассона имеется линейная функция Казимира l, соответствующая координате для одномерного центра в координатах, согласованных с разложением $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}$. Если f — функция Казимира для $\mathfrak{g}$, то

$$f(x + la) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i l^i$$

функция Казимира для $\tilde{\mathfrak{g}}$. При этом функции f_i образуют бигамильтоновы цепочки. То есть коммутативная алгебра, построенная по паре линейных скобок, отличается от $\mathcal{F}_a$ добавлением еще одной порождающей l.

Легко видеть, что в этом случае алгебраический оператор Нийенхейса полупростой, однако имеет огромное ядро — всю алгебру $\mathfrak{g}$. ■

Глава 11

Большие и малые когомологии Нийенхейса

11.1 Градуированные дифференцирования $\Omega^k(\mathrm{M}^n)$ и их свойства

Изложение в этом разделе следует работам Микора, Нийенхейса и Фролихера [72, 79, 41, 42].

Пространство дифференциальных $k-$форм на многообразии M^n обозначается как $\Omega^k(\mathrm{M}^n)$ или для краткости просто Ω^k. Ω^0 естественным образом отождествляется с функциями на многообразии M^n. На дифференциальных формах задана операция внешнего умножения: для $\alpha \in \Omega^k, \beta \in \Omega^m$ результат этой операции лежит в Ω^{k+m} и определяется инвариантным образом на наборе векторных полей $\xi_1, \dots, \xi_{k+m}$ как

$$\alpha \wedge \beta\,(\xi_1, \dots, \xi_{k+m}) = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+m}} (-1)^\sigma \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+m)}).$$

Здесь S_{k+m} — группа перестановок из $k+m$ элементов. Операция внешнего дифференцирования обладает свойствами

1. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ (ассоциативность);

2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{km} \beta \wedge \alpha$ (градуированная антикоммутативность).

Рассмотрим прямую сумму $\Omega = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Omega^k$ как векторных пространств. Элементами Ω являются суммы вида $\alpha_0 + \dots + \alpha_n$ (это уже не тензоры!), где $\alpha_i \in \Omega^i$. Операция сложения, умножения на функцию и внешнего умножения переносятся на эти суммы по дистрибутивности. Полученный объект представляет собой ассоциативную градуированную алгебру.

Помимо внешнего умножения (которое бинарное) на Ω есть еще три важные унарные операции. Первая — так называемое внутреннее дифференцирование. Для произвольного векторного поля ξ определим $i_\xi : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$ инвариантной формулой как

$$\begin{aligned}
&i_\xi f = 0, \quad f \in \Omega^0,\\
&i_\xi \alpha(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = \alpha(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}).
\end{aligned}$$

Здесь η_i — произвольные векторные поля. Эта операция связана с внешним умножением следующим образом: для $\alpha \in \Omega^k, \beta \in \Omega^m$ выполнено

$$i_\xi(\alpha \wedge \beta) = i_\xi \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_\xi \beta.$$

Это градуированное тождество Лейбница, откуда и "дифференцирование"в названии. В свою очередь внешним дифференцированием d называется отображение $\Omega^k \to \Omega^{k+1}$, задаваемое следующей инвариантной формулой:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha(\eta_1, \dots, \eta_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \mathcal{L}_{\eta_i}\big(\alpha(\eta_1, \dots, \widehat{\eta}_i, \dots, \eta_{k+1})\big) + \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \alpha([\eta_i, \eta_j], \dots, \widehat{\eta}_i, \dots, \widehat{\eta}_j, \dots).
\end{aligned}$$

Здесь снова η_i — произвольный набор векторных полей, а квадратные скобочки означают стандартный коммутатор векторных полей. Эта операция связана с внешним умножением следующим образом: для $\alpha \in \Omega^k, \beta \in \Omega^m$ выполнено

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Наконец, третья операция — это хорошо известная производная Ли $\mathcal{L}_\xi : \Omega^k \to \Omega^k$, которую можно определить инвариантной формулой

$$\mathcal{L}_\xi \alpha(\eta_1, \dots, \eta_k) = \mathcal{L}_\xi\big(\alpha(\eta_1, \dots, \eta_k)\big) - \sum_{i=1}^{k} \alpha(\eta_1, \dots, [\xi, \eta_i], \dots, \eta_k).$$

Все три операции связаны формулой, известной как формула Картана

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \mathrm{d} + \mathrm{d} i_\xi.$$

Теперь все готово, чтобы перейти к градуированному дифференцированию. Линейное отображение $D : \Omega \to \Omega$ называется градуированным дифференцированием степени d, если $\alpha \in \Omega^k$ оно отправляет в Ω^{k+d} и удовлетворяет градуированному правилу Лейбница: для $\alpha \in \Omega^k, \beta \in \Omega^m$ верно

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{kd} \alpha \wedge D\beta.$$

Мы не запрещаем отрицательные степени d, поэтому в формулах выше действует соглашение $\Omega^k = 0$ для $k < 0$.

Пример 11.1.1. Мы имеем

1. i_ξ — градуированное дифференцирование степени -1;
2. $\mathcal{L}_\xi$ — градуированное дифференцирование степени 0;
3. d — градуированное дифференцирование степени 1. ■

Отметим, что если степень градуированного дифференцирования меньше -1 или больше n, то оно тривиально (то есть тождественно нулевое). Действительно, рассмотрим нашу конструкцию в координатах $u^1, \dots, u^n$. Тогда все элементы Ω^k порождаются с помощью внешнего умножения из Ω^0 и элементов $\mathrm{d}u^i \in \Omega^1$. Если степень $d < -1$, то $Df = 0$ и $D\mathrm{d}u^i = 0$ и, стало быть, $D\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \Omega^k$. Линейное пространство градуированных дифференцирований степени d мы обозначаем как $\mathfrak{Der}_d\Omega$. Как и в случае с Ω, можно определить градуированное линейное пространство

$$\mathfrak{Der}\,\Omega = \bigoplus_{d=-1}^{n} \mathfrak{Der}_d\Omega.$$

. Это пространство наделено естественной структурой градуированного коммутатора: для дифференцирований D_1, D_2 степеней d_1, d_2 он определяется как

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1.$$

. Верна следующая теорема:

Теорема 11.1.1 (Предложение в разделе 1.1 в [72])**.** *Для градуированного коммутатора градуированных дифференцирований кольца дифференциальных форм выполнены следующие свойства:*

1. *Для $D_i \in \mathfrak{Der}_{d_i}\,\Omega$ градуированный коммутатор $[D_1, D_2] \in \mathfrak{Der}_{d_1+d_2}\,\Omega$, то есть, в частности, является градуированным дифференцирование степени $d_1 + d_2$;*

2. *Операция градуированного коммутирования удовлетворяет свойству градуированной антикоммутативности*

$$[D_1, D_2] = -(-1)^{d_1 d_2}[D_2, D_1];$$

3. *Для операции градуированного коммутирования выполнено градуированное тождество Якоби*

$$(-1)^{d_1 d_3}[D_1, [D_2, D_3]] + (-1)^{d_2 d_1}[D_2, [D_3, D_1]] + (-1)^{d_3 d_2}[D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

В частности, градуированный коммутатор наделяет пространство $\mathfrak{Der}\,\Omega$ структурой градуированной супералгебры Ли.

11.2 Векторозначные $k-$формы. Малые и большие когомологии

Напомним, что векторозначные дифференциальные формы — это тензоры типа $(1, d)$, кососимметрические по нижним индексам. Линейное пространство таких тензоров мы обозначаем как Ψ^d. По аналогии с Ω мы определим векторное пространство Ψ как

$$\Psi = \bigoplus_{i=0}^{n} \Psi^i. \tag{11.1}$$

Для произвольного $K \in \Psi^d$ определим отображение $i_K : \Omega^k \to \Omega^{k+d-1}$ как

$$i_K : \Omega^0 \to 0,$$
$$i_K\alpha(\eta_1, \dots, \eta_{k+d-1}) = \frac{1}{(k-1)!(d)!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+d}} (-1)^\sigma \alpha\big(K(\eta_{\sigma(1)}, \dots, \eta_{\sigma(d)}), \eta_{\sigma(d+1)}, \dots, \eta_{\sigma(d+k-1)}\big).$$

Пусть D — градуированное дифференцирование степени d. Мы будем называть дифференцирование алгебраическим, если $D : \Omega^0 \to 0$. В частности, i_K — алгебраические дифференцирования для любой векторозначной дифференциальной формы K.

Формула Картана в смысле градуированного коммутатора имеет вид $\mathcal{L}_\xi = [i_\xi, \mathrm{d}]$. Используя аналогичную формулу, мы можем определить производную Ли вдоль произвольной векторозначной формы, а именно:

$$\mathcal{L}_K = [i_K, \mathrm{d}].$$

Для $K \in \Psi^d$ степень этого дифференцирования равна d. Заметим, что для $\mathcal{L}_K$ верно инвариантное определение, аналогичное определению производной Ли от векторных полей: для $K \in \Psi^k$ и произвольной формы $\alpha \in \Omega^l$ действие $\mathcal{L}_K\alpha$ на векторных полях $\xi_1, \dots, \xi_{k+l}$ определяется как

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+l}} (-1)^\sigma \mathcal{L}_{K(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)})} \alpha(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) -& \\ - \frac{1}{k!(l-1)!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+l}} (-1)^\sigma \alpha\big([K(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}), \xi_{\sigma(k+1)}], \xi_{\sigma(k+2)}, \dots\big) +& \\ + \frac{(-1)^k}{2(k-1)!(l-1)!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+l}} (-1)^\sigma \alpha\big(K([\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}], \xi_{\sigma(3)}, \dots), \xi_{\sigma(k+2)}, \dots\big).&\end{aligned} \tag{11.2}$$

Следующая теорема является ключевой теоремой этого раздела.

Теорема 11.2.1 (Предложение в разделе 1.3 в [72]). *Для произвольного $D \in \mathfrak{Der}_d\Omega$ существует единственная пара $K \in \Psi^{d+1}$ и $L \in \Psi^d$ таких, что*

$$D = i_K + \mathcal{L}_L.$$

При отображении из $\Psi^{d+1} \times \Psi^d$ в $\mathfrak{Der}_d$ не только сюръективно, но и инъективно. В формулировке теоремы действует соглашение $\Psi^{-1} = 0$.

Из этой теоремы мы извлечём два ключевых следствия.

Следствие 11.2.1. *Алгебраические дифференцирования замкнуты относительно операции градуированного коммутатора. Формула*

$$[i_K, i_M] = i_{[[K,M]]_{RN}} \tag{11.3}$$

однозначно определяет на векторозначных дифференциальных формах операцию $[[K, M]]_{RN} : \Psi^k \times \Psi^m \to \Psi^{k+m-1}$. Для $K \in \Psi^k, M \in \Psi^m, N \in \Psi^s$: выполнены соотношения

1. *Градуированная антикоммутативность*

$$[[K, M]]_{RN} = -(-1)^{(k-1)(m-1)}[[M, K]]_{RN};$$

2. Градуированное тождество Якоби

$$(-1)^{(k-1)(s-1)}[[K,[[M,N]]_{RN}]]_{RN}+(-1)^{(m-1)(k-1)}[[M,[[N,K]]_{RN}]]_{RN}+ \\ +(-1)^{(s-1)(m-1)}[[N,[[K,M]]_{RN}]]_{RN}=0.$$

Полученная операция называется скобкой Ричардсона-Нийенхейса (или Нийенхейса-Ричардсона) и наделяет пространство Ψ *(см. формулу* (11.1)*) структурой градуированной супералгебры Ли.*

Легко видеть, что для $K,M\in\Psi^1$ выполнено $[[K,M]]_{RN}=KM-MK$. В свою очередь для $C\in\Psi^2$ условие $[[C,C]]_{RN}=0$ означает, что тензор C типа $(1,2)$ определяет на касательном пространстве алгебру Ли. В частности, обращение в ноль скобки Ричардсона-Нийенхейса гарантирует выполнение тождества Якоби для этой операции.

Следствие 11.2.2. *Производные Ли вдоль векторозначных дифференциальных форм замкнуты относительно градуированного коммутатора. То есть формула*

$$[\mathcal{L}_L,\mathcal{L}_M]=\mathcal{L}_{[[K,M]]_{FN}} \tag{11.4}$$

однозначно определяет на векторозначных дифференциальных формах операцию $[[L,M]]_{FN}:\Psi^k\times\Psi^m\to\Psi^{k+m}$. *Для* $L\in\Psi^k, M\in\Psi^m, N\in\Psi^s$*: выполнены соотношения*

1. Градуированная антикоммутативность

$$[[L,M]]_{FN}=-(-1)^{km}[[M,K]]_{FN};$$

2. Градуированное тождество Якоби

$$(-1)^{ks}[[L,[[M,N]]_{FN}]]_{FN}+(-1)^{mk}[[M,[[N,L]]_{FN}]]_{FN}+ \\ +(-1)^{sm}[[N,[[L,M]]_{FN}]]_{FN}=0.$$

Полученная операция называется скобкой Фролихера-Нийенхейса и наделяет пространство Ψ *(см. формулу* (11.1)*) структурой градуированной супералгебры Ли.*

Из формулы (11.2) и следствия 11.2.2 вытекает, что в инвариантной форме формула для скобки Фролихера-Нийенхейса имеет вид (раздел 1.9 в [72]): для $L\in\Psi^k$ и $M\in\Psi^m$

$$\begin{aligned}
&[[L,M]]_{FN}(\xi_1,\dots,\xi_{k+m})=\\
&=\frac{1}{k!m!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{k+m}}(-1)^\sigma[L(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(k)}),M(\xi_{\sigma(k+1)},\dots,\xi_{\sigma(k+m)})]-\\
&-\frac{1}{k!(m-1)!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{k+m}}(-1)^\sigma M\big([L(\xi_{\sigma(1)},\dots),\xi_{\sigma(k+1)}],\xi_{\sigma(k+2)},\dots,\xi_{\sigma(k+1)}\big)+\\
&+\frac{(-1)^{km}}{(k-1)!m!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{k+m}}(-1)^\sigma L\big([M(\xi_{\sigma(1)},\dots),\xi_{\sigma(m+1)}],\xi_{\sigma(m+2)},\dots,\xi_{\sigma(k+m)}\big)+\\
&+\frac{(-1)^{k-1}}{2(k-1)!(m-1)!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{k+m}}(-1)^\sigma M\big(L([\xi_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)}],\dots,\xi_{\sigma(k+1)}),\xi_{\sigma(k+2)},\dots\big)+\\
&+\frac{(-1)^{(k-1)m}}{2(k-1)!(m-1)!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{k+m}}(-1)^\sigma L\big(M([\xi_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)}],\dots,\xi_{\sigma(m+1)}),\xi_{\sigma(m+2)},\dots\big).
\end{aligned}$$

Эта формула производит на неподготовленного читателя несомненно удручающее впечатление. Ситуацию можно несколько упростить, если рассматривать скобку Фролихера-Нийенхейса для специальных векторозначных дифференциальных форм.

Рассмотрим векторные поля ξ, η и дифференциальные формы $\alpha \in \Omega^k, \beta \in \Omega^m$. Тогда для $L = \xi \otimes \alpha \in \Psi^k$ и $M = \eta \otimes \beta \in \Psi^m$ скобка Фролихера-Нийенхейса принимает вид

$$[[M, L]]_{FN} = [\xi, \eta] \otimes (\alpha \wedge \beta) + \eta \otimes (\alpha \wedge \mathcal{L}_\xi \beta) - \xi \otimes (L_\eta \alpha \wedge \beta) + \\ + (-1)^k \eta \otimes (\mathrm{d}\alpha \wedge i_\xi \beta) + (-1)^k \xi \otimes (i_\eta \alpha \wedge \mathrm{d}\beta).$$

Таким образом, мы можем дать еще одно определение кручения Нийенхейса: кручением Нийенхейса для оператора L называется

$$\mathcal{N}_L = \frac{1}{2}[[L, L]]_{FN}. \tag{11.5}$$

В свою очередь L — оператор Нийенхейса, если $[[L, L]]_{FN} = 0$.

Пример 11.2.1. Пусть $L, M \in \Psi^0$, то есть это векторные поля. Тогда $[[L, M]]_{FN}$ — векторное поле и равно коммутатору L и M. ■

Пример 11.2.2. Пусть $\xi \in \Psi^0$ и $L \in \Psi^1$. Тогда

$$[[\xi, L]]_{FN}(\eta) = [\xi, L\eta] - L[\xi, \eta] = \mathcal{L}_\xi L\eta.$$

То есть $[[\xi, L]]_{FN} = \mathcal{L}_\xi L$.

Пример 11.2.3. Пусть $L, M \in \Psi^1$, то есть операторные поля. Тогда $[[L, M]]_{FN}$ — тензор типа $(1, 2)$, кососимметрический по нижним индексам. На произвольной паре векторных полей ξ, η он действует как

$$[[K, L]]_{FN}(\xi, \eta) = [K\xi, L\eta] + [L\xi, K\eta] - L[K\xi, \eta] - L[\xi, K\eta] - \\ - K[L\xi, \eta] - K[\xi, L\eta] + LK[\xi, \eta] + KL[\xi, \eta].$$

Заметим, что выполнена следующая замечательная формула

$$[[L, M]]_{FN} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{N}_{L+M} - \mathcal{N}_L - \mathcal{N}_M\Big).$$

■

Имеем следующую цепочку отображений

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^0(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^1(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^n(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} 0. \tag{11.6}$$

Легко видеть, что стандартный комплекс де Рама получается из (11.6) при $L = \mathrm{Id}$. По определению градуированного дифференцирования получаем

$$d_L^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_L\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_L\mathcal{L}_L) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_L] = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[[L,L]]_{FN}} = \mathcal{L}_{\mathcal{N}_L}. \tag{11.7}$$

Здесь $[[\,,\,]]_{FN}$ означает скобку Фролихера-Нийенхейса. Формула (11.7) неоднократно возникала в литературе (см., например, в разделе П1 в [139]). Из нее немедленно вытекает, что d_L задает структуру цепного комплекса тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\mathcal{N}_L} = 0$. В силу предложения в разделе 1.3 в [72] это, в свою очередь, эквивалентно условию $\mathcal{N}_L = 0$, то есть оператор L является оператором Нийенхейса. Когомологии соответствующего комплекса мы называем малыми когомологиями Нийенхейса и обозначаем через

$$H^k_{sN}(\mathrm{M}^n, L), k \in \mathbb{Z}.$$

Большая часть наших результатов посвящена малым когомологиям.

Помимо малых когомологий Нийенхейса имеются также и большие когомологии. Введем обозначение $D_L : \Psi^k \to \Psi^{k+1}$ действующее по формуле

$$D_L M = [[L, M]]_{FN}.$$

Для оператора L из градуированного тождества Якоби для скобки Фролихера-Нийенхейса получаем

$$D_L^2 M = [[L, [[L, M]]_{FN}]]_{FN} = \frac{1}{2}(-1)^k [[M, [[L, L]]_{FN}]]_{FN} = 0.$$

Таким образом, возникает цепной комплекс, отличный от (11.6)

$$0 \xrightarrow{D_L} \Psi^0(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{D_L} \Psi^1(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{D_L} \dots \xrightarrow{D_L} \Psi^n(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{D_L} 0. \qquad (11.8)$$

Из (11.8) и предложения в разделе 1.3 в [72] вытекает, что D_L задает структуру цепного комплекса тогда и только тогда, когда $[[L, L]]_{FN} = \mathcal{N}_L = 0$, то есть оператор L является оператором Нийенхейса. Когомологии соответствующего комплекса мы называем большими когомологиями Нийенхейса и обозначаются через

$$H^k_{bN}(\mathrm{M}^n, L), k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, с оператором Нийенхейса связана не одна, а сразу две когомологические теории.

11.3 Связь больших когомологий с задачей линеаризации

Про большие когомологии известно значительно меньше, чем про малые. Отчасти это связано с тем, что существование больших когомологий является сравнительно новым наблюдением.

Пример 11.3.1. Множество

$$H^0_{bN}(\mathrm{M}^n, L)$$

состоит из векторных полей Киллинга, то есть таких векторных полей ξ, что

$$\mathcal{L}_\xi L = 0.$$

Легко видеть, что для диагонального оператора Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}$$

в этом случае $H^0_{bN}(\mathrm{M}^n, L)$ тривиальны. ■

Пример 11.3.2. Множество

$$H^1_{bN}(\mathrm{M}^n, L)$$

состоит из операторных полей M с условием $[[L, M]]_{FN} = 0$ по модулю операторных полей, полученных $\mathcal{L}_\xi L = M$. То есть потенциальные деформации L по модулю инфинитезимальных деформаций. ■

Следующая теорема связывает большие когомологии и задачу линеаризации.

Теорема 11.3.1. *[Достаточное условие формальной невырожденности] Пусть L — оператор Нийенхейса, заданный в окрестности точки* p *скалярного типа и $L = L_1 + L_2 + \ldots$ — его разложение Тейлора в этой точке. Если $H^1_{bN}(\mathrm{M}^n, L_1) = 0$, то левосимметрическая алгебра, соответствующая L_1, невырожденная в формальной категории.*

Доказательство. Пусть большие когомологии для L_1 равны нулю, то есть из условия $[[M, L_1]]_{FN} = 0$ следует, что существует векторное поле ξ такое, что $[[\xi, L]]_{FN} = M$. То есть выполнено $\mathcal{L}_\xi L_1 = M$.

Лемма 11.3.1. *Пусть теперь M — операторное поле, компоненты которого зависят от координат как однородные многочлены степени k. В условиях выше векторное поле ξ можно выбрать таким, что ξ^i — однородные многочлены степени k.*

Доказательство. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора для векторного поля $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \ldots$. Имеем

$$\mathcal{L}_\xi L_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_{\xi_i} L_1,$$

где ненулевые компоненты матриц $L_{\xi_i} L_1$ представляют собой однородные полиномы степени i. Из условия $\mathcal{L}_\xi L_1 = M$ получаем, что $\mathcal{L}_{\xi_k} L_1 = M$. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь разложение

$$L = L_1 + L_k + \ldots,$$

где $k \geq 1$. Коэффициенты мы рассматриваем как операторные поля в фиксированной системе координат. Из леммы 4.3.3 вытекает, что условие Нийенхейсовости влечет $[[L_k, L_1]]_{FN} = 0$. Обращение в ноль когомологий и лемма 11.3.1 означает, что найдется векторное поле ξ, компоненты которого однородные полиномы степени k, для которого

$$\mathcal{L}_\xi L_1 = L_k.$$

Рассмотрим замену координат $v^i = u^i + f_i(u)$, где $\xi^i = f_i$. Предыдущая формула в этом случае записывается как

$$L_1(f(u)) - J_f(u) L_1(u) + L_1(u) J_f(u) = L_k(u).$$

При этом по лемме 4.3.2 мы получаем, что после замены $\bar{L}_k$ имеет вид

$$\bar{L}_k = L_k(v) - L_k(f) + J_f(v) L_1(v) - L_1(u) J_f(v).$$

То есть, получаем, что при такой замене $\bar{L}_k = 0$.

Мы показали, что последовательно делая замены вида $v^i = u^i + f_i(u)$, мы можем привести оператор L к виду L_1. Разумеется, композиция всех замен (а их было, вообще говоря, бесконечное число) дает нам только формальную замену, которая линеаризует оператор L. □

11.4 Теорема об изоморфизме

В этом разделе мы докажем теорему об изоморфизме. Это ключевой результат для дальнейшего построения теории малых когомологий.

Теорема 11.4.1 (Теорема об изоморфизме)**.** *Пусть L — оператор Нийенхейса и* $\det L \neq 0$ *всюду на многообразии* M^n*. Тогда комплекс*

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^0(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^1(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}_L} \Omega^n(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}_L} 0$$

изоморфен комплексу де Рама

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^0(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(\mathrm{M}^n) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0.$$

Доказательство. Для произвольного операторного поля L определим отображение $\psi_L \colon \Omega^k \to \Omega^k, k \in \mathbb{Z}$ следующими формулами:

$$\psi_L f = f, \quad f \in \Omega^0(\mathrm{M}^n),$$
$$(\psi_L \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(L\xi_1, \dots, L\xi_k), \quad \omega \in \Omega^k(\mathrm{M}^n), k \geq 1.$$

Для такого отображения выполнено следующее утверждение

Лемма 11.4.1. *Пусть L — произвольный оператор Нийенхейса, а ψ_L — отображение, определенное выше. Тогда верна формула*

$$\psi_L \mathrm{d} = \mathrm{d}_L \psi_L.$$

Доказательство леммы 11.4.1. Заметим, что

$$\mathrm{d}_L \psi_L f = \mathrm{d}_L f = L^* \mathrm{d} f = \psi_L \mathrm{d} f$$

и

$$\mathrm{d}_L \psi_L(\mathrm{d} f) = \mathrm{d}_L^2 f = 0 = \psi_L \mathrm{d}(\mathrm{d} f).$$

Локально формы вида f и $\mathrm{d}f$ порождают всю внешнюю алгебру. Покажем теперь, что если для форм ω и τ верно, что

$$\mathrm{d}_L \psi_L \omega = \psi_L \mathrm{d}\omega, \quad \mathrm{d}_L \psi_L \tau = \psi_L \mathrm{d}\tau,$$

то $\mathrm{d}_L \psi_L(\omega \wedge \tau) = \psi_L \mathrm{d}(\omega \wedge \tau)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_L \psi_L(\omega \wedge \tau) = \mathrm{d}_L(\psi_L \omega \wedge \psi_L \tau) = \mathrm{d}_L \psi_L \omega \wedge \psi_L \tau + (-1)^{\deg \omega} \psi_L \omega \wedge \mathrm{d}_L \psi_L \tau = \\ = \psi_L \mathrm{d}\omega \wedge \psi_L \tau + (-1)^{\deg \omega} \psi_L \omega \wedge \psi_L \mathrm{d}\tau = \psi_L \mathrm{d}(\omega \wedge \tau). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Заметим теперь, что если ψ_L невырожденный, то выполнено тождество

$$\psi_L^{-1} = \psi_{L^{-1}}.$$

Из этого и утверждения леммы 11.4.1 получаем

$$\mathrm{d}_L = \psi_L \mathrm{d} \psi_L^{-1}.$$

Таким образом, стандартный комплекс де Рама изоморфен комплексу (11.6) и утверждение теоремы выполнено. □

Следствие 11.4.1 (Изоморфизм когомологий де Рама и малых когомологий Нийенхейса)**.** *Пусть L — оператор Нийенхейса и* $\det L \neq 0$ *всюду на многообразии* M^n*. Малые когомологии Нийенхейса* $H^k_{sN}(\mathrm{M}^n, L)$ *изоморфны когомологиям де Рама* $H^k_{dR}(\mathrm{M}^n)$*.*

Доказательство. Из изоморфизма комплексов, построенного в теореме 11.4.1, вытекает изоморфизм когомологий. □

Следствие 11.4.2 (Лемма Пуанкаре для малых когомологий Нийенхейса)**.** *Пусть оператор Нийенхейса L не вырожден в точке* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$*. Тогда в окрестности такой точки все малые когомологии Нийенхейса тривиальны. В частности, всякая замкнутая $k-$форма точна.*

Доказательство. Выберем в качестве многообразия диск U^n с центром в точке p. Без ограничения общности можно считать, что L невырожденный на всем диске. Тогда на нём имеется изоморфизм

$$H^k_{sN}(U^n, L) \cong H^k_{dR}(U^n) = \{0\}.$$

Последнее равенство выполнено в силу леммы Пуанкаре для когомологий де Рама. Следствие доказано. □

Следующая теорема является важным техническим результатом, который потребуется в дальнейшем.

Теорема 11.4.2. *Пусть L, R — операторы Нийенхейса, R — невырожденный и LR^{-1} — тоже оператор Нийенхейса. Тогда малые когомологии L совпадают с малыми когомологиями LR^{-1}.*

Доказательство. Мы начнем с важной технической леммы.

Лемма 11.4.2. *Пусть L, R — операторные поля и R — оператор Нийенхейса. Тогда следующие тождества эквивалентны:*

- $[[LR, R]]_{FN} = 0$;
- $[\mathrm{d}_{LR}, \mathrm{d}_R] = 0$;
- $\mathcal{N}_{LR+R} = \mathcal{N}_{LR}$;
- $\mathrm{d}_{LR}\psi_R = \psi_R \mathrm{d}_L$.

Доказательство. Отображение ψ_L обозначает то же, что и в доказательстве теоремы 11.4.1. Имеем

$$\mathrm{d}_{LR}\psi_R f = R^* L^* \mathrm{d}f = \psi_R \mathrm{d}_L f$$

и

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{LR}\psi_R \mathrm{d}f = \mathrm{d}_{LR}\mathrm{d}_R f = (\mathrm{d}_R + \mathrm{d}_{LR})^2 f - \mathrm{d}^2_{LR} f - \mathrm{d}_R \mathrm{d}_{LR} f = \\ = -\mathcal{N}_{LR+R}\mathrm{d}f + \mathcal{N}_{LR}\mathrm{d}f - \mathrm{d}_R R^* L^* \mathrm{d}f = \\ = -\mathcal{N}_{LR+R}\mathrm{d}f + \mathcal{N}_{LR}\mathrm{d}f - \psi_R \mathrm{d}L^*\mathrm{d}f = -\mathcal{N}_{LR+R}\mathrm{d}f + \mathcal{N}_{LR}\mathrm{d}f + \psi_R \mathrm{d}_L \mathrm{d}f.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathrm{d}_{LR}\psi_R = \psi_R \mathrm{d}_L$ эквивалентно $\mathcal{N}_{LR+R} = \mathcal{N}_{LR}$. Заметим теперь, что

$$\mathcal{L}_{[[LR,R]_{FN}]} f = [\mathcal{L}_{LR}, \mathcal{L}_R] f = [\mathrm{d}_{LR}, \mathrm{d}_R] f = \mathrm{d}^2_{LR+R} f - \mathrm{d}^2_{LR} f = (\mathcal{N}_{LR} - \mathcal{N}_{LR+R})\, \mathrm{d}f.$$

Отсюда получаем, что $[[LR, R]]_{FN} = 0$ равносильно условиям $[\mathrm{d}_{LR}, \mathrm{d}_R] = 0$ и $\mathcal{N}_{LR+R} = \mathcal{N}_{LR}$. □

Условия теоремы влекут $[[L, R]]_{FN} = 0$ (нам потребуется для этого утверждение теоремы 8.3.1). Считая, что $L = LR^{-1}R$, мы получаем из леммы (11.4.2) соотношение

$$\mathrm{d}_L \psi_R = \psi_R \mathrm{d}_{LR^{-1}}.$$

Учитывая, что R обратим, то есть и ψ_R обратим, мы получаем, что дифференциалы d_L и $\mathrm{d}_{LR^{-1}}$ сопряжены. Значит, изоморфны комплексы и, как следствие, когомологии. □

Замечание 11.4.1. В доказательстве теоремы можно заменить требование нийенхейсовости R на требование невырожденности L почти всюду. То есть пусть L — почти всюду невырожденный оператор Нийенхейса, R — невырожденное в каждой точке операторное поле такое, что операторное поле LR^{-1} является оператором Нийенхейса. Тогда малые когомологии L совпадают с малыми когомологиями LR^{-1}. ■

11.5 Теорема о расщеплении для малых когомологий Нийенхейса

Следующий результат — вариант теоремы о расщеплении для малых когомологий.

Теорема 11.5.1 (Теорема о расщеплении для малых когомологий)**.** *Пусть в точке* $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ *характеристический многочлен* $\chi_L(t)$ *оператора Нийенхейса* L *разлагается в произведение взаимно-простых многочленов* $\chi_1(t)\chi_2(t)$ *степеней* m, l*. Тогда в некотором диске* $U^n(\mathrm{p})$ *существует система координат* $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^l$*, что*

1. *Операторное поле* L *принимает вид*

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix},$$

где L_1 *имеет размеры* $m \times m$ *и зависит только от* x*,* L_2 *имеет размеры* $l \times l$ *и зависит только от* y*;*

2. *Операторы* L_1, L_2 *— операторы Нийенхейса, причем*

$$\chi_{L_i}(t) = \chi_i(t), i = 1, 2.$$

3. *Как минимум один из операторов* L_1, L_2 *невырожденный;*

4. *Пусть без ограничения общности* $\det L_1 \neq 0$*. Тогда*

$$H^k_{sN}(U^n, L) \cong H^{k-m}_{sN}(U^l, L_2).$$

Доказательство. Заметим, что пункты 1 и 2 теоремы вытекают из теоремы 2.5.2. Так как многочлены $\chi_i(t)$ взаимно просты, мы получаем, что ноль может быть корнем только одного из них. Значит, как минимум у одного из операторов L_1 и L_2 собственные значения ненулевые. Таким образом, выполнен пункт три.

Теперь перейдем к доказательству пункта четыре. Для начала заметим, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

является оператором Нийенхейса, равно как и оператор

$$\overline{L} = LR^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

По теореме 11.4.2 для L и R имеет место изоморфизм $H^k_{sN}(U^n, L) \cong H^k_{sN}(U^k, \overline{L})$. Значит, чтобы доказать четвертый пункт, достаточно показать, что он верен для случая $L_1 = \mathrm{Id}$. Введем обозначения

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $M_1 + M_2 = L$. Заметим теперь, что доказывать утверждение теоремы в нашем случае достаточно для $m = 1$. Действительно, доказав для такого случая, мы можем последовательно отщеплять по одной размерности до тех пор, пока не получим L_2 нужного размера. Поэтому всюду далее считаем $m = 1$.

Для простоты обозначений положим $x = x^1$. Определим $\mathbb{R}$-линейное отображение $j\colon \Omega^k(\mathrm{M}^n) \to \Omega^{k-1}(\mathrm{M}^n)$ формулами

$$j(f\mathrm{d}y^I) = 0 \quad \text{и} \quad j(g\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J)(x, y^1, \ldots, y^{n-1}) := \left(\int_0^x g(t, y^1, \ldots, y^{n-1})\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y^J.$$

Здесь $\mathrm{d}y^J = \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{n-1}$. Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 11.5.1. *Выполнена формула*

$$(\mathrm{d}_{M_1} j + j\mathrm{d}_{M_1})\omega = \omega - \omega|_{x=0}.$$

Здесь $\omega|_{x=0}$ обозначает стандартное ограничение формы на $x = 0$.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{d}_{M_1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}_{M_1}\mathrm{d}y^I = 0$. Получаем

$$\mathrm{d}_{M_1}\left(f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^I\right) = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}_{M_1}\left(f\mathrm{d}y^I\right) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{d}_{M_1}\left(g\mathrm{d}y^J\right) = \mathrm{d}x \wedge g'_x\mathrm{d}y^J,$$

из чего следует, что

$$\mathrm{d}_{M_1} j\left(f\mathrm{d}y^I + g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J\right) = \mathrm{d}_{M_1}\left(\left(\int_0^x g(t, y^1, \ldots, y^l)\mathrm{d}t\right) \cdot \mathrm{d}y^J\right) = g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J$$

и

$$j\mathrm{d}_{M_1}\left(f\mathrm{d}y^I + g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J\right) = j\left(\mathrm{d}x \wedge f'_x\mathrm{d}y^I\right) = f\mathrm{d}y^I - f(0, y^1, \ldots, y^l)\mathrm{d}y^I.$$

Лемма доказана. □

Лемма 11.5.2. *Выполнена формула*

$$\mathrm{d}_{M_2} j = -j \mathrm{d}_{M_2}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\mathrm{d}_{M_2} j(f \mathrm{d}y^I) = 0 = -j \mathrm{d}_{M_2}(f \mathrm{d}y^I)$$

и

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{M_2} j(g \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J) &= \mathrm{d}_{M_2}\left(\mathrm{d}y^J \cdot \int_0^x g(t, y^1, \ldots, y^l)\mathrm{d}t\right) = \\ &= \mathrm{d}_{M_2}\left(\int_0^x g(t, y^1, \ldots, y^l)\mathrm{d}t\right) \wedge \mathrm{d}y^J + \left(\int_0^x g(t, y^1, \ldots, y^l)\mathrm{d}t\right) \cdot \mathrm{d}_{M_2}\left(\mathrm{d}y^J\right) = \\ &= j(\mathrm{d}_{M_2} g \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y^J) + j(g\mathrm{d}x)\mathrm{d}_{M_2}\left(\mathrm{d}y^J\right) = -j\mathrm{d}_{M_2}(\mathrm{d}x \wedge g\mathrm{d}y^J). \end{aligned}$$

□

Из лемм 11.5.1 и 11.5.2 следует, что

$$(\mathrm{d}_L j + j \mathrm{d}_L)\omega = \omega - \omega|_{x=0}. \tag{11.9}$$

Из равенства (11.9) следует, что комплексы (11.6) для операторов L и L_2 гомотопны посредством морфизмов ψ и φ, задаваемых условиями

$$\psi(\tau)(x, y^1, \ldots, y^l) := \tau(y^1, \ldots, y^l) \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) := \omega|_{x=0}.$$

Значит, они имеют изоморфные когомологии:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] & \Omega^{k-1}(U^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \Omega^k(U^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \Omega^{k+1}(U^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_{L_2}"] & \Omega^{k-1}(U^{n-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{L_2}"] \arrow[u, shift left, "\psi"] & \Omega^k(U^{n-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{L_2}"] \arrow[u, shift left, "\psi"] & \Omega^{k+1}(U^{n-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{L_2}"] \arrow[u, shift left, "\psi"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Теорема доказана. □

Следствие 11.5.1. *Пусть L — оператор Нийенхейса и в окрестности U^n точки* р. *Предположим, что*

1. *Ранг операторного поля локально постоянен и равен r;*
2. *Касательное пространство в каждой точке разлагается в прямую сумму $\Im L$ и* $\operatorname{Ker} L$. *Другими словами, все жордановы блоки с нулевым собственным значением (если таковые есть) имеют размерность один.*

Тогда

$$H^k_{sN}(U^n, L) \cong \Omega^k(U^{n-r}).$$

Доказательство. Рассмотрим $\chi_L(t)$ в точке p. Предположим, что спектр оператора Нийенхейса L состоит из k вещественных попарно различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ с кратностями $\mathsf{m}_1, \dots, \mathsf{m}_k$ соответственно и s пар комплексно сопряженных пар $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ собственных значений с кратностями $\mathsf{l}_1, \dots, \mathsf{l}_s$ (здесь черта сверху означает комплексное сопряжение). Если среди вещественных собственных значений нет нулевых, то применима теорема 11.4.1 об изоморфизме и в этом случае следствие доказано.

Пусть теперь среди вещественных значений есть нулевые. Будем последовательно брать в качестве $\chi_2(t)$ сначала многочлены вида $(t-\lambda_i)^{\mathsf{m}_i}$, а потом многочлены вида $(t-\mu_i)^{\mathsf{l}_i}(t-\bar{\mu}_i)^{\mathsf{l}_i}$ (это многочлены с вещественными коэффициентами). Применяя на каждом этапе теорему 11.5.1 о расщеплении, мы получаем, что в окрестности точки p существует система координат

$$u_1 = (u_1^1 \dots u_1^{\mathsf{m}_1}), \dots, u_k = (u_k^1 \dots u_k^{\mathsf{m}_k}), \quad v_1 = (v_1^1 \dots v_1^{2\mathsf{l}_1}), \dots, v_s = (v_s^1 \dots v_s^{2\mathsf{l}_s}),$$

в которой

$$L = \begin{pmatrix} L_1(u_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & L_k(u_k) & & & \\ & & & L_1^{\mathbb{C}}(v_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L_s^{\mathbb{C}}(v_s) \end{pmatrix},$$

где каждый блок зависит только от своей группы переменных u_i или v_j. Другими словами, в окрестности точки p оператор Нийенхейса L представляется в виде прямой суммы таких операторов Нийенхейса $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$, что в точке p у них либо одно вещественное, либо пара сопряженных комплексных собственных значений.

Условия следствия гарантируют, что один из блоков, соответствующий нулевому собственному значению, тождественно нулевой. Без ограничения общности считаем, что это L_1. Из теоремы 11.5.1 немедленно вытекает, что

$$H^k_{sN}(U^n, L) \cong H^k_{sN}(U^{\mathsf{m}_1}, L_1) \cong \Omega(U^{\mathsf{m}_1}).$$

Заметив, что $\mathsf{m}_1 = n - r$, мы завершаем доказательство следствия. □

11.6 Малые когомологии Нийенхейса в окрестности точек вырождения

Следующая теорема является основным результатом раздела

Теорема 11.6.1. *Пусть L — оператор Нийенхейса на многообразии M^n и множество Z, задаваемое уравнением $\det L = 0$, является $n-1$-мерным подмногообразием M^n. Предположим также, что дифференциал*

$$\mathrm{d}_p \det L$$

определителя L как функции на M^n ненулевой во всех точках $p \in Z$. Тогда Z — регулярное подмногообразие M^n и малые когомологии Нийенхейса M^n удовлетворяют соотношению

$$H^k_{sN}(\mathrm{M}^n, L) \cong H^k_{dR}(\mathrm{M}^n) \oplus H^{k-1}_{dR}(Z). \tag{11.10}$$

Доказательство. Для начала заметим, что подмножество Z — подмногообразие M^n по определению: оно задается нулями функции и дифференциал этой функции на Z по условию не обращается в ноль. Обозначим через $\Omega^k(\mathrm{M}, \log Z)$ множество логарифмических дифференциальных k-форм с возможными полюсами в дивизоре Z, [46, §A.4], то есть дифференциальных k-форм, которые определены на $\mathrm{M} \setminus Z$ и представимы в некоторой окрестности Z в виде

$$\omega/x^k, \quad \text{где} \omega \in \Omega(\mathrm{M}^n), \quad Z = \{x = 0\}, \forall p \in Z \colon \mathrm{d}_p x \neq 0.$$

Иными словами, логарифмическая дифференциальная k-форма — это дробь со знаменателем x^k, где в окрестности множества $x = 0$ можно взять x за координату. Рассмотрим отображение ψ_L, определенное в доказательстве теоремы 11.4.1:

$$\psi_L \colon \Omega^k(\mathrm{M}, \log Z) \to \Omega^k(\mathrm{M}),$$

по формуле

$$(\psi_L \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(L\xi_1, \dots, L\xi_k). \tag{11.11}$$

Обратное к нему имеет вид

$$\varphi_L := \psi_L^{-1} = \psi_{L^{-1}} = \psi_{\hat{L}/\det L}, \quad \text{то есть} \quad \forall \omega \in \Omega^k(\mathrm{M}) : \varphi_L \omega = \frac{\psi_{\hat{L}} \omega}{(\det L)^k} \in \Omega^k(\mathrm{M}, \log Z),$$

где $\hat{L}$ — присоединенная к L матрица. Таким образом, корректно определено как отображение из $\Omega^k(\mathrm{M}^n)$ в $\Omega^k(M^n, \log Z)$ с $\det L$ в качестве координаты x из определения, данного выше. Из этого вытекает, что ψ_L является изоморфизмом $\Omega^k(\mathrm{M}, \log Z)$ и $\Omega^k(\mathrm{M})$. В свою очередь, из леммы 11.4.1 следует, что цепной комплекс $(\Omega^\bullet(\mathrm{M}), \mathrm{d}_L)$ изоморфен цепному комплексу $(\Omega^\bullet(\mathrm{M}, \log Z), \mathrm{d})$:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] & \Omega^{k-1}(\mathrm{M}^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi_L"] & \Omega^k(\mathrm{M}^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi_L"] & \Omega^{k+1}(\mathrm{M}^n) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[d, shift left, "\varphi_L"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] & \Omega^{k-1}(\mathrm{M}^n, \log Z) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[u, shift left, "\psi_L"] & \Omega^k(\mathrm{M}^n, \log Z) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[u, shift left, "\psi_L"] & \Omega^{k+1}(\mathrm{M}^n, \log Z) \arrow[r, "\mathrm{d}_L"] \arrow[u, shift left, "\psi_L"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Хорошо известно, что когомологии такого комплекса изоморфны $H^k_{dR}(\mathrm{M}) \oplus H^{k-1}_{dR}(Z)$ (см. обсуждение в разделе A4 в [46] и формулу 50 там же). Значит

$$H^k_{sN}(\mathrm{M}, L) \cong H^k(\mathrm{M}, \log Z) \cong H^k_{dR}(\mathrm{M}) \oplus H^{k-1}_{dR}(Z).$$

Теорема доказана. □

Следствие 11.6.1 (Специальная лемма Пуанкаре)**.** *Пусть в окрестности U^n точки* p *задан оператор Нийенхейса L и его определитель* $\det L$ *можно взять за координату. Тогда $H^k_{sN}(U^n, L)$ тривиальны. В частности, малые когомологии дифференциально невырожденного оператора Нийенхейса в окрестности нуля тривиальны.*

Доказательство. В самом деле, U и $\{\det L = 0\}$ локально имеют нулевые когомологии де Рама, поэтому по теореме 11.6.1 малые когомологии Нийенхейса также тривиальны. □

Теорема 11.6.2. *[Когомологии оператора Нийенхейса из примера 3.1.1 [59]] Пусть* $\mathrm{M}^4 = \mathbb{R}^4$ *с координатами* x^1, x^2, x^3, x^4 *в окрестности нуля. Рассмотрим оператор Нийенхейса вида*

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $C_1 := C^\infty(\mathrm{M}^4 \cap \{x^1 = 0\}) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$H^k_{sN}(\mathrm{M}^4, L) \cong C_1^{\binom{3}{k}}.$$

Здесь $\binom{3}{k}$ *обозначает* $3!/k!(3-k)!$, *а* C_1^m *— свободный* m*−мерный модуль над кольцом* C_1.

Доказательство. Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 11.6.1. $\forall i\colon \mathcal{L}_L \mathrm{d}x^i = 0$.

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем $\mathcal{L}_L \mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}\mathcal{L}_L x^i = -\mathrm{d}L^i = 0$. □

Лемма 11.6.2. $\mathcal{L}_L f = f'_{x^1}(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4) = f'_{x^1} L^1$.

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем

$$\mathcal{L}_L f = \mathrm{i}_L \mathrm{d}f = L^* \mathrm{d}f = L^i \mathrm{d}[f]i = L^1 \cdot f'_{x^1} = f'_{x^1}(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4).$$

Лемма доказана. □

Через $\mathrm{d}x^{ij\ldots m}$ обозначим $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m$, а через $\mathrm{d}_L^{(m)}$ — ограничение отображения d_L на

$$\mathrm{d}_L\colon \Omega^m(\mathrm{M}^4) \to \Omega^{m+1}(\mathrm{M}^4).$$

Считаем также, что $C = C^\infty(\mathrm{M}^4)$. Будем вычислять $H^k_{sN}(\mathrm{M}^4, L)$ отдельно для $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

Случай $k = 0$**.** По лемме 11.6.2 имеем

$$0 = \mathcal{L}_L f = f'_{x^1}(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4) \iff f'_{x^1} \equiv 0 \iff f \in C_1.$$

То есть функция f не зависит от переменной x^4.

Случай $k = 1$**.** Прямыми вычислениями получаем, что точные формы имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_L \omega = \mathcal{L}_L(\omega_i \mathrm{d}x^i) = \mathcal{L}_L \omega_i \wedge \mathrm{d}x^i = (\omega_i)'_{x^1}(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4) \wedge \mathrm{d}x^i = \\ &= -(\omega_1)'_{x^1} \mathrm{d}x^1 \wedge (\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4) - (\omega_3)'_{x^1} \mathrm{d}x^3 \wedge (\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4) + ((\omega_4)'_{x^1} - x^4 (\omega_2)'_{x^1}) \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4. \end{aligned}$$

То есть $\mathcal{L}_L \omega = 0$ тогда и только тогда, когда $(\omega_1)'_{x^1} = (\omega_3)'_{x^1} = (\omega_4 - x^4 \omega_2)'_{x^1} = 0$, что эквивалентно условию $\omega_1, \omega_3, \omega_4 - x^4 \omega_2 \in C_1$. Для замкнутых форм получаем

$$\mathrm{d}_L \omega = 0 \iff \omega = f \mathrm{d}x^1 + g \mathrm{d}x^2 + h \mathrm{d}x^3 + (x^4 g + u) \mathrm{d}x^4$$

для каких-то $f, h, u \in C_1, g \in C$, так что

$$\ker \mathrm{d}_L^{(1)} = C_1 \mathrm{d}x^1 \oplus C_1 \mathrm{d}x^3 \oplus C_1 \mathrm{d}x^4 \oplus C(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4),$$

Это означает, что $\Im \mathrm{d}_L^{(0)} = C(\mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^4)$ и $H^1_{sN}(\mathrm{M}^4, L) = C_1 \mathrm{d}x^1 \oplus C_1 \mathrm{d}x^3 \oplus C_1 \mathrm{d}x^4 \cong C_1^3$.

Случай $k = 2$. Заметим, что

$$\Im \mathrm{d}_L^{(1)} = C(\mathrm{d}x^1 \wedge L^1) \oplus C(\mathrm{d}x^3 \wedge L^1) \oplus C \mathrm{d}x^{24}.$$

Посчитаем $\ker \mathrm{d}_L^{(2)}$. Имеем

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_L \omega = \mathcal{L}_L(\omega_{ij} \mathrm{d}x^{ij}) = \mathcal{L}_L \omega_{ij} \wedge \mathrm{d}x^{ij} = \\ &= (\omega_{12})'_{x^1} x^4 \mathrm{d}x^{124} - (\omega_{13})'_{x^1} \mathrm{d}x^{123} + (\omega_{13})'_{x^1} x^4 \mathrm{d}x^{134} - \\ &- (\omega_{14})'_{x^1} \mathrm{d}x^{124} + (\omega_{23})'_{x^1} x^4 \mathrm{d}x^{234} + (\omega_{34})'_{x^1} \mathrm{d}x^{234}, \end{aligned}$$

так что

$$\mathcal{L}_L \omega = 0 \iff (x^4 \omega_{12} - \omega_{14})'_{x^1} = (\omega_{13})'_{x^1} = (x^4 \omega_{23} + \omega_{34})'_{x^1} = 0,$$

из чего следует, что

$$\ker \mathrm{d}_L^{(2)} = C(\mathrm{d}x^1 \wedge L^1) \oplus C_1 \mathrm{d}x^{14} \oplus C_1 \mathrm{d}x^{13} \oplus C(\mathrm{d}x^3 \wedge L^1) \oplus C_1 \mathrm{d}x^{34} \oplus C \mathrm{d}x^{24}$$

и

$$H^2_{sN}(\mathrm{M}^4, L) = C_1 \mathrm{d}x^{14} \oplus C_1 \mathrm{d}x^{13} \oplus C_1 \mathrm{d}x^{34} = C_1^3.$$

Случай $k = 3$. Из вычислений $\mathcal{L}_L \omega$ для $\omega \in \Omega^2(\mathrm{M}^4)$ выше ясно, что

$$\Im \mathrm{d}_L^{(2)} = C \mathrm{d}x^{124} \oplus C \mathrm{d}x^{234} \oplus C(\mathrm{d}x^{13} \wedge L^1).$$

Посчитаем $\ker \mathrm{d}_L^{(2)}$:

$$\mathcal{L}_L(\omega_{ijk} \mathrm{d}x^{ijk}) = -(\omega_{134} + x^4 \omega_{123})'_{x^1} \mathrm{d}x^{1234}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_L \omega = 0 \iff \omega_{134} = -x^4 \omega_{123} + f, f \in C_1 \iff \\ &\iff \omega = -\omega_{123} \mathrm{d}x^{13} \wedge L^1 + f \mathrm{d}x^{134} + \omega_{124} \mathrm{d}x^{124} + \omega_{234} \mathrm{d}x^{234}. \end{aligned}$$

Таким образом, $H^3_{sN}(\mathrm{M}^4, L) = C_1$.

Случай $k = 4$. $H^4_{sN}(\mathrm{M}^4, L) = 0$, как видно из вычислений выше. Это замечание завершает доказательство всего предложения. $\square$

Глава 12

Заключение

В диссертационной работе А.Ю.Коняева заложены основы геометрии Нийенхейса - новой дисциплины, лежащей на стыке дифференциальной геометрии, алгебры, интегрируемых систем и математической физики. В частности, исследованы многообразия с заданными на них операторными полями с нулевым кручением Нийенхейса, их нормальные формы в регулярных и особых точках, симметрии, законы сохранения, функции от таких операторных полей и пучки нийенхейсовых структур. Установлена связь с естественными комплексными структурами. Приведённые объекты рассматриваются как в гладком, так и в вещественно-аналитическом и комплексно-аналитическом случаях. Также в работе рассмотрены алгебраические структуры, связанные с операторами Нийенхейса, и их приложения — коммутативные ассоциативные алгебры и пучки таких алгебр, левосимметрические алгебры, бесконечномерные коммутативные подалгебры в алгебре операторных полей, алгебры Ли со специальными базисами.

Полученные в диссертации теоретические результаты нашли применение в задачах о существовании операторов Нийенхейса на компактных многообразиях, задачах классификации пучков гамильтоновых операторов, задачах из теории проективно-эквивалентных метрик и задачах теории интегрируемых систем, допускающих разделение переменных. Построены новые классы конечномерных, а также бесконечномерных скобок Пуассона. Для построенных конечномерных систем доказана полнота и получена классификация в малых размерностях. Полученные результаты могут быть интересны специалистам по интегрируемым системам, математической физике, алгебре и теории дифференциальных уравнений. Часть результатов может служить для создания новых вычислительных алгоритмов для изучения точных решений конечномерных и бесконечномерных интегрируемых систем.

Литература

[1] An D., Nurowski P., Symmetric (2,3,5) distributions, an interesting ODE of 7th order and Plebanski metric // Journal of Geometry and Physics, **126**, pp. 93-100 (2018)

[2] Antonowicz M., Fordy A., Coupled Harry Dym equations with multi-Hamiltonian structures // Journal of Physics A: Mathematical and General, **21**(5), pp. 345–357 (1987)

[3] Antonowicz M., Fordy A., Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures // Physica D: Nonlinear Phenomena **28** (3), pp. 345-357 (1987)

[4] Antonowicz M., Fordy A., Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems // Communications in Mathematical Physics, **124**, pp. 465–486, (1989)

[5] Artin M., On the solutions of analytic equations // Inventiones mathematicae, **5**, pp. 277–291 (1968)

[6] Benenti S.,. Orthogonal separable dynamical systems // Differential geometry and its applications, **1**, pp. 163–184 (1993)

[7] Beltrami E., Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che lelinee geodetische vengano rappresentante da linee rette // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **1**(7) pp. 185–204 (1865)

[8] Blaszak M., Marciniak K., From Stäckel systems to integrable hierarchies of PDE's: Benenti class of separation relations // Journal of Mathematical Physics, **47**(3) (2006) DOI: https://doi.org/10.1063/1.2176908

[9] Blaszak M., Marciniak K., Stäckel systems generating coupled KdV hierarchies and their finite-gap and rational solutions // Journal of Physics A, **41**(48) (2008). DOI: https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/48/485202

[10] Bolsinov A.V., Bao J., A Note about Integrable Systems on Low-dimensional Lie Groups and Lie Algebras // Regular and Chaotic Dynamics, **24**(3), pp. 266–280 (2019)

[11] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Research problems on relations between Nijenhuis geometry and integrable systems* // arXiv:2410.04276 https://arxiv.org/abs/2410.04276

[12] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Pucacco G., Normal forms for pseudo-Riemannian 2-dimensional metrics whose geodesic flows admit integrals quadratic in momenta // Journal of Geometry and Physics, **59**(7), pp. 1048-1062 (2009)

[13] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Geometrical interpretation of Benenti systems // Journal of Geometry and Physics, **44**(4), pp. 489–506 (2003)

[14] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Splitting and gluing lemmas for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // Transactions of AMS, **363** (8) pp. 4081–4107 (2011)

[15] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // Transactions of AMS, **367** (9) pp. 6719–6749 (2015)

[16] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T., Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry // Sbornik Mathematics, **189**, pp. 1441–1466 (1998)

[17] Bolsinov A.V., Kiosak V., Matveev V.S., A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics // Journal of London Mathematical Society, **80**(2) pp. 341–356 (2009)

[18] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Miranda E., Tabachnikov S.L. // Open problems, questions and challenges in finite dimensional integrable system // Phylosophical Transactions of The Royal Society A, **376**(2131), e20170430 (2018)

[19] Borel A., Serre J.-P., Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod // American Journal of Mathematics, **75**(3), pp. 409–448 (1953)

[20] Brjuno A. D. , Analytic form of differential equations. I, II // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obschestva, **25** pp. 119–262 (1971)

[21] Burde D., Left-Symmetric Algebras, or Pre-Lie Algebras in Geometry and Physics // Central European Journal of Mathematics **4**(3), pp. 323-357 (2006)

[22] Cabau P., Grifone J., Mehdi M., Existence des lois de conservations dans le cas cyclique // Annales de l'Institut Henri Poincaré, **55**, pp. 789–803 (1991)

[23] Chen K.T., Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point // American Journal of Mathematics, **85**(4), pp. 693-722 (1963)

[24] Crampin M., Conformal Killing tensors with vanishing torsion and the separation of variables in the Hamilton–Jacobi equation // Differential Geometry and its Application, **18**, pp. 87–102 (2003)

[25] David.L., Hertling C., Regular F-manifolds: initial conditions and Frobenius metrics // Scuola Normale Superiore, Annali di Scienze, **XVII**, pp. 1121–1152 (2017)

[26] De Filippo S., Marmo G., Salerno M. and Vilasi G., A New Characterization of Completely Integrable Systems // Nuovo Cimento B, **83** pp. 97–112 (1984)

[27] De Filippo S., Marmo G. and Vilasi G., A Geometrical Setting for the Lax Representation // Physical Letters B, **117** pp. 418–422 (1982)

[28] Dini U., Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresetazioni geografice di una superficie su un'altra // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **3**, pp. 269–293 (1869)

[29] Dorfman I., Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations // Volume 18 van Nonlinear Science: Theory and Applications, Wiley, 188 p (1993)

[30] Doyle P.W., Differential geometric Poisson bivectors in one space variable // Journal of Mathematical Physics, **34**, pp. 1314–1338 (1993)

[31] Dubrovin B.A., Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds, integrable systems and algebraic geometry // Proceedings of the Taniguchi symposium 1997, Kobe, June 30 - July 4, 1997 and Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, July 7 - 11, 1997, (1997)

[32] Dubrovin B.A., Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group // Preprint SISSA, Trieste, 1993, hep-th/9303152.

[33] Dubrovin B.A., Geometry of 2D topological field theories // Lecture Notes in Mathematics,1620, Springer-Verlag pp.120-348 (1996)

[34] Eisenhart L.P., Separable systems of Stäckel // Annals of Mathematics, **35**(2), pp. 284-305 (1934)

[35] Eisenhart L.P., Stäckel Systems in Conformal Euclidean Space // Annals of Mathematics, **36**(2), pp. 57-70 (1935)

[36] Ferapontov E.V., Hamiltonian Systems of Hydrodynamic Type and their Realization on Hypersurfaces of a Pseudoeuclidean Space // Soviet Journal of Mathematics, **55**, pp. 1970–1995 (1991)

[37] Ferapontov E.V., Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type // Journal of Physics A: Mathematical and General, **34**, pp. 2377–2388 (2001)

[38] Ferapontov E.V., Pavlov M.V., Quasiclassical limit of coupled KdV equations. Riemann invariants and multi-Hamiltonian structure // Physica D: Nonlinear Phenomena, **52**(2-3), pp. 211-219 (1991) DOI: https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90123-Q

[39] Ferapontov E.V., Galvão C. A. P. , Mokhov O.I., Nutku Y., Bi-Hamiltonian Structure in 2-d Field Theory // Communications in Mathematical Physics, **186**, pp. 649–669, (1997)

[40] Ferapontov E. V., Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariants // Physical Letters A, **158**(3-4), pp. 112–118 (1991)

[41] Frölicher A., Nijenhuis A., Theory of vector-valued differential forms. Part I. Derivations in the Graded Ring of Differential Forms // Indagationes Mathematicae, **18** pp.338–359 (1956) DOI: https://doi.org/10.1016/S1385-7258(56)50046-7

[42] Frölicher A., Nijenhuis A., Theory of vector-valued differential forms. Part II. Almost complex structures // Indagationes Mathematicae, **18** pp.422–429 (1958)

[43] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Korteweg-devries equation and generalizations. VI. methods for exact solution, Communications in Pure and Applied Mathematics, **27**(1), pp.97-133 (1974)

[44] Goldschmidt H., Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations // Journal of Differential Geometry, **1**(3-4), pp. 269–307 (1967)

[45] Grifone J., Mehdi M., Existence of conservation laws and characterization of recursion operators for completely integrable systems // Transactions of American Mathematical Society, **349**(11), pp. 4609–4633 (1997)

[46] Gualtieri, M., Li, S., Pelayo, Á., Ratiu T.S., The tropical momentum map: a classification of toric log symplectic manifolds // Mathematische Annalen, **367**, pp. 1217–1258 (2017) DOI: https://doi.org/10.1007/s00208-016-1427-9

[47] Haantjes J., On X_m-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae, **17**, pp.158-162 (1955)

[48] Hamilton W.R., On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // Philosophical Transactions of the Royal Society, pp. 247–308 (1834)

[49] Hamilton W.R., Second essay on a general method in dynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society, pp. 95–144 (1835)

[50] Harris G., Martin C., The roots of a polynomial vary continously as a function of the coefficients // Proceedings of the American mathematical society, **100** (2), pp. 390-392 (1987)

[51] Hertling C., Manin Y., Weak Frobenius Manifolds // International Mathematics Research Notices, **6**, pp. 277-286 (1999)

[52] Hörmander L.V., The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudodifferential operators // Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, (1985) ISBN: 3-540-13828-5

[53] Hounkonnou M.N., Landalidji M.J., Mitrović M., Hamiltonian dynamics of a spaceship in Alcubierre and Gödel metrics: Recursion operators and underlying master symmetries // Theoretical and Mathematical Physics, **212**, pp. 1001–1018 (2022)

[54] Higham N. J., Functions of matrices. Theory and computation // Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, (2008)

[55] Inönü E., Wigner E.P., On the contraction of groups and their representations // Proceedings of the National Academy of Sciences, **39**, pp. 510-524 (1953)

[56] Jacobi, C. G. J., Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen Irgendeiner Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik, **17**, pp. 97–162 (1837) https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/crll.1837.17.97/html

[57] Jacobi C.G.J., Lectures on Dynamics: Delivered at the University of Konigsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt // Hindustan Book Agency, India (2009)

[58] E.G. Kalnins, J. M. Kress, Wi. Miller, Separation of Variables and Superintegrability: The symmetry of solvable systems // ISBN: 978-0-7503-1314-8 (2018)

[59] Kobayashi E. T., A remark on the Nijenhuis tensor // Pacific Journal of Mathematics, **12** (4), pp. 1467–1467 (1962)

[60] Kolář I., Slovák J., Michor P.W., Natural Operations in Differential Geometry // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, VI, 434 pages (1993) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02950-3

[61] Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Thoughts about potentials with finite-band spectrum and finite-dimensional reductions of integrable systems* // arXiv:2411.02290 https://arxiv.org/abs/2411.02290

[62] Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F., Poisson-Nijenhuis structures // Annales de l'Institut Henri Poincaré, **53**, pp. 35-81 (1990)

[63] Kschalm, Newton-Girard formula for symmetric polynomials // Planet Math, https://planetmath.org/newtongirardformulaforsymmetricpolynomials

[64] Lancaster P., Rodman L., Canonical forms for hermitian matrix pairs under strict equivalence and congruence // SIAM Review, **47**, pp. 407–443 (2005)

[65] Landi G., Marmo G. and Vilasi G., Recursion Operators: Meaning and Existence for Completely Integrable Systems // Journal of Mathematical Physics, **35** pp. 808–815 (1994)

[66] Levi-Civita T., Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per sepa razione di variabili // Mathematische Annalen, **59**, pp. 383-397 (1904)

[67] Lorenzoni P., Magri F., A cohomological construction of integrable hierarchies of hydrodynamic type // International Mathematics Research Notices, **2005**(34), pp. 2087–2100 (2005)

[68] Lichnerowicz A., Les varietes de Poisson et leurs algebres de Lie associees // Journal of Differential Geometry, **12**, 253-300 (1977)

[69] Magri F., A geometrical characterization of Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds // Quaderni di Matematica, Working paper del dipartimento (2008)

[70] Magri F., A simple model of the integrable Hamiltonian equation // Journal of Mathematical Physiscs, **19**(5), pp. 1156-1162 (1978)

[71] Marmo G., Vilasi G., When Do Recursion Operators Generate New Conservation Laws? // Physical Letters B, **277** pp. 137–140 (1992)

[72] Michor P.W., Remarks on the Frölicher-Nijenhuis bracket // Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications, Brno, pp. 198-220 (1986)

[73] Mirzakhani M., A simple proof of a theorem of Schur // The American Mathematical Monthly **105**, pp. 260–262 (1998)

[74] Mokhov O.I., Compatible flat metrics // Journal of Applied Mathematics,**2**(7), pp. 337–370 (2002)

[75] Mokhov O.I., Pencils of compatible metrics and integrable systems // Russian Mathematical Surveys, **72**(5), pp. 889–937 (2007)

[76] Мохов О.И., Ферапонтов Е. В., О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // Успехи математических наук, **45:3**(273), стр. 191–192 (1990)

[77] Nakane M., Fraser C.G., The Early History of Hamilton-Jacobi Dynamics 1834–1837 // Centaurus, **44**(3-4), pp. 161-227 (2002)

[78] Newlander A., Nirenberg L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds // Annals of Mathematics. Second Series, **65** (3), pp. 391–404 (1957)

[79] Nijenhuis A., X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae (Proceedings), **54**, pp. 200-212 (1951)

[80] Nijenhuis A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. I // Indagationes Mathematicae **58** pp. 390–397 (1955)

[81] Nijenhuis A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. II // Indagationes Mathematicae **58** pp. 398–403 (1955)

[82] Nirenberg L., A complex Frobenius theorem // New York University, Institute of Mathematical Sciences (1958)

[83] Noether E., Nachrichten von der gesellschaft der wissenschaften zu göttingen, mathematisch-physikalische klasse // Invariante Variationsprobleme, pp.235-257 (1918)

[84] Odesskii A.V., Sokolov V.V., Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras // Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**, 43734 (2006)

[85] Odesskii A.V., Sokolov V.V., Algebraic structures connected with pairs of compatible associative algebras // International Mathematics Research Notices, **2006**, pp. 12447-12456 (2006)

[86] Osborn J. M., Novikov algebras // Nova Journal of Algebra and Geometry, **1**, pp. 1-14 (1992)

[87] Osborn J. M., Simple Novikov algebras with an idempotent // Commutative Algebra, **20**(9), pp. 2729–2753 (1992).

[88] Olver P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations // Graduate Texts in Mathematics, Springer (1986)

[89] Olver P.J., Evolution equations possessing infinitely many symmetries // Journal of Mathematical Physics, **18**(6), pp. 1212–1215 (1977)

[90] Osborn H., The existence of conservation laws I // Annals of Mathematics, **69**, pp. 105–118 (1959)

[91] Pavlov M.V., Integrable hydrodynamic chains // Journal of Mathematical Physics, **44**(9), pp. 4134–4156 (2003)

[92] Panasyuk A., Algebraic Nijenhuis operators and Kronecker Poisson pencils // Differential Geometry and its Applications, **24** (5), pp. 482–491 (2006)

[93] Prasolov V.V., Maximal codimension of the sets of singular elements of representations of Lie algebras // Mathematics of the USSR-Sbornik, **52**(1), pp. 135–140 (1985)

[94] Pugliese F., Sparano G., Vitagliano L., Integrating Nijenhuis structures // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **220**, pp. 1907–1930 (2023)

[95] Rajaratnam K., McLenaghan R.G., Valero C., Orthogonal Separation of the Hamilton–Jacobi Equation on Spaces of Constant Curvature // SIGMA **12**, pp. 117-147 (2016)

[96] Rozhdestvenskii B. L., Sidorenko A. D., Impossibility of the gradient catastrophe for slightly non-linear systems // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **7**(5), pp. 1176–1179 (1967)

[97] da Silva A.C., Weinstein A., Geometric Models for Noncommutative Algebras // Berkeley Mathematics Lecture Notes, (1999) ISBN 978-0-8218-0952-5

[98] Schouten J. A., Sur les tenseurs de V^n aux directions principales V^{n-1}-normales // Colloque Géom. diff., Louvain, Centre Belge Rech. math, pp. 67–70. (1951)

[99] Senyue Lou, Bao-Feng Feng, Ruoxia Yao, Multi-soliton solution to the two-component Hunter–Saxton equation // Wave Motion, **65**, pp. 17–28 (2016)

[100] Shabat A., Universal Solitonic Hierarchy // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **12**, pp. 614–624 (2005)

[101] Konyaev A.Yu., Sharygin G.I., // Survey of the Deformation Quantization of Commutative Families // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (Recent Developments in Integrable Systems and Related Topics of Mathematical Physics). **273**, pp. 130-154 (2018)

[102] Stäckel P., Über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, // Mathematische Annalen, **42**, pp. 537-563 (1893)

[103] Stäckel P., Über quadatizche Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik, // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **25**, pp. 55-60 (1897)

[104] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles // Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, (1951).

[105] Strachan Ian A.B., Szablikowski Błażej M., Novikov Algebras and a Classification of Multicomponent Camassa–Holm Equations // Studies in Applied Mathematics, **133**(1), pp. 84-117 (2014)

[106] Takeuchi T. On the construction of recursion operators for the Kerr-Newman and FLWR metrics // Journal of Geometry and Symmetry in Physics, **37**, pp. 85-96 (2015)

[107] Teyssier L., Analytic normal forms for planar resonant saddle vector fields // hal-03887570 (2022)

[108] Thompson G., The integrability of a field of endomorphisms // Mathematica Bohemica, **127**(4), pp. 605-611 (2002)

[109] Turiel F.J., Classification of $(1,1)$-tensor fields and bihamiltonian structures // Banach Center Publications: Singularities and differential equations, **33**, pp. 449-458 (1996) DOI: https://doi.org/10.4064/-33-1-449-458

[110] Turiel F.J., Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles // Manuscripta Mathematica, **82** pp. 349-362 (1994) DOI: https://doi.org/10.1007/BF02567706

[111] Vinberg E.B., Convex homogeneous cones // Transactions of the Moscow Mathematical Society, **12**, pp. 340-403 (1963)

[112] de Vries H.L., Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformation gestatten // Mathematische Zeitschrift, **60**, pp. 328–347 (1954)

[113] Weinstein A., The local structure of Poisson manifolds // Journal of Differential Geometry, **18**(3), pp. 523-557 (1983)

[114] Winterhalder A., Linear Nijenhuis-Tensors and the Construction of Integrable Systems // arXiv.org:9709008, 1997

[115] Yano K., Ako M., On certain operators associated with tensor fields // Kodai Mathematical Seminar Reports, **20**(4), pp. 414–436 (1968)

[116] Yano K., Patterson E.M., Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundle // Journal of the Mathematical Society of Japan **19**(1), pp. 91-113 (1967)

[117] Yoccoz J.C., Théoreme de Siegel, nombres de Brjuno et polynomes quadratique // Astérisque **231**, pp. 3-88 (1995)

[118] Yoccoz J.C., Pérez-Marco R., Germes de feuilletages holomorphes holonomie prescrite // Astérisque, **222**, pp. 345-371 (1994)

[119] Zakharov V.E., Konopelchenko B.G., On the theory of recursion operator // Communications in Mathematical Physics, **94**, pp. 483–509, (1984)

[120] Zel'manov E.I., A class of local translation-invariant Lie algebras // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 292:6 (1987), 1294–1297

[121] Dubrovin B., Zhang Y., Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov - Witten invariants // arXiv:math/0108160, 189 pp. (2001)

[122] Zhihareva E., Three-dimensional Lie algebras admitting regular semisimple algebraic Nijenhuis operators // preprint, arXiv:2410.10536 (2024)

[123] Арнольд В. И., О матрицах, зависящих от параметров // Успехи математических наук, **26**(2), стр. 101–114 (1971)

[124] Арнольд В. И.,Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Электронное издание, Москва: МЦНМО, 2014, 379 с.

[125] Баландин А.В., Потемин Г.В., О невырожденных дифференциально-геометрических скобках Пуассона третьего порядка // Успехи математических наук, **56:5**(341), стр. 177–178 (2001)

[126] Балинский А.А., Новиков С.П., Скобки Пуассона гидродинамического типа, Фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Доклады АН СССР, **283**(5), стр. 1036–1039 (1985)

[127] Бизяев И.А., Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С., Топология и бифуркации в неголономной механике // Нелинейная динамика, **11**(4), стр. 735–762 (2015)

[128] Болсинов А.В., Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли // кандидатская диссертация (1987), http://dfgm.math.msu.su/files/0diss/diss-bolsinov.pdf

[129] Болсинов А.В., Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Известия Академии Наук СССР. Серия математика,**55**(1), стр. 68–92 (1991)

[130] Болсинов А.В., Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. **26**, стр.87-109., осква, МГУ (2005)

[131] Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, издание второе // Издательство Наука, Москва, 577 стр. (1966)

[132] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я., Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функциональный анализ и его приложения, **13**(4), стр. 13–30 (1979) DOI: https://doi.org/10.1007/BF01078363

[133] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Доклады Академии Наук СССР, **270**(4), стр. 781–785 (1983)

[134] Елизаров П.М., Ильяшенко Ю.С., Замечания об орбитальной аналитической классификации ростков векторных полей // Математический сборник, **121**(1), стр. 111–126 (1983)

[135] Ильяшенко Ю., Яковенко С., Аналитическая теория дифференциальных уравнений, том 1 // Издательство МЦНМО, Москва (2013)

[136] Ландау Л.Д., Теория сверхтекучести гелия-II // Успехи физических наук, **93**, стр. 495–520 (1967)

[137] Лифшиц Е.М., Теория сверхтекучести гелия II // Успехи физических наук, **34**(4), стр. 512–559 (1948)

[138] Магри Ф., Цепи Ленарда для классических интегрируемых систем // Теоретическая и математическая физика, **170**(3), стр. 424–432 (2003)

[139] Магри Ф., Многообразия Ханчеса с симметрией // Теоретическая и математическая физика, **196**(2), стр. 313–327 (2018) DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9499

[140] Манаков С.В., Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функциональный анализ и его приложения, **10** (4), стр. 93-94 (1976)

[141] Мергелян С.Н., Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи математических наук, **7:2**(48), стр. 31–122 (1952)

[142] Мергелян С.Н, О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов на замкнутых множествах // ДАН СССР, **78** (3), стр. 405—408 (1951)

[143] Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Известия Академии наук СССР. Серия математика, **42**(2), стр. 396–415 (1978)

[144] Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **19**, стр. 3-94 (1979)

[145] Мохов О.И., Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики // Функциональный анализ и его приложения, **35**(2), стр. 24–36 (2001)

[146] Павлов М.В., Свинолупов С.И., Шарипов Р.А., Инвариантный критерий гидродинамической интегрируемости // Функциональный анализ и его приложения, **30**(1) стр. 18–29 (1996)

[147] Прасолов В.В., Многочлены // МЦНМО, Москва (2003) ISBN 5-94057-077-1

[148] Потемин Г.В., О дифференциально-геометрических скобках Пуассона третьего порядка // Успехи математических наук, **52:3**(315), стр. 173–174 (1997)

[149] Пунинский Е. Г., Естественные операторы на тензорных полях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, **5**, стр. 58-62 (2014)

[150] Рыбников Л. Г., Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов // Успехи математических наук, **60**(2), стр. 173–174 (2005)

[151] Садетов С.Т., Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко // Доклады РАН, **397** (6), стр.751-754 (2004)

[152] Солодовников А.С., Геометрическое описание всевозможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивита // Доклады АН СССР, **141**(2), стр. 322—325 (1961)

[153] Трофимов В.В., Фоменко А.Т., Алгебра и геометрия интегрируеымых гамильтоновых дифференциальных уравнений // Издательство "Факториал Москва (1995)

[154] Ферапонтов Е. В., Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения, **25**(3), стр. 37–49 (1991)

[155] Фоменко А.Т., Симплектическая геометрия: методы и приложения // Москва, второе издание, изд-во ЛЕНАНД (УРСС), 2022

[156] Царев С. П., Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Известия Академии Наук СССР, Серия математика, **54**(5), стр. 1048–1068 (1990)

[157] Шабат А. Б., Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавказский матемематический журнал, **14**(4), стр. 83–94 (2012)

Список публикаций автора по теме диссертации

[158] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Finite-dimensional reductions and finite-gap type solutions of multicomponent integrable PDEs* // Studies in Applied Mathematics.

– 2025 – vol. 155, No. 2, – p. e70100.
DOI: 10.1111/sapm.70100
Импакт фактор 2.3 (JIF), объем 1.938 п.л.
Коняевым А.Ю. выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем
раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1,28 п.л.

[159] Antonov E.I., Konyaev A.Yu., *Nijenhuis operators with a unity and F-manifolds* // Journal of the London Mathematical Society. – 2024 – vol. 110, No. 3, – p. e12983.
EDN: LNBCXA
Импакт-фактор 1.2 (JIF), объем 1.313 п.л.
Коняевым А.Ю. доказаны теоремы 2.5, 3.1 и 3.2. Общая доля диссертанта составвляет 50%, объем 0.66 п.л.

[160] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Orthogonal separation of variables for spaces of constant curvature* // Forum Mathematicum. – 2024 – vol. 37, No. 1, – pp. 13-41.
EDN: EXJBXI
Импакт-фактор 0.9 (JIF), объем 1.750 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем
раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.58 п.л.

[161] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry IV: conservation laws, symmetries and integration of certain non-diagonalisable systems of hydrodynamic type in quadratures* // Nonlinearity. – 2024 – vol. 37, No. 10, – p. 105003.
EDN: OEOIZF
Импакт-фактор 1.6 (JIF), объем 1.688 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем
раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.114 п.л.

[162] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis Geometry V: Geodesic Equivalence and Finite-Dimensional Reductions of Integrable Quasilinear Systems* // Journal of Nonlinear Science. – 2024 – vol. 34, No. 2, – p. e33.
EDN: WDYCMJ
Импакт-фактор 2.6 (JIF), объем 1 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем
раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.33 п.л.

[163] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry III: gl-regular Nijenhuis operators* // Revista Matematica Iberoamericana. – 2023 – vol. 40, No. 1, – pp. 155–188.
EDN: IXDOLU
Импакт-фактор 1 (JIF), объем 2.25 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 1, 5, 6, 7. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.485 п.л.

[164] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry IV: Multicomponent KdV and Camassa–Holm equations* // Dynamics of Partial Differential Equations. – 2023 – vol. 20, No. 1, – pp. 73–98.
EDN: FFTOYH
Импакт-фактор 1 (JIF), объем 1.875 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.238 п.л.

[165] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis Geometry III: Frobenius Pencils and Compatible Non-homogeneous Poisson Structures* // Journal of Geometric Analysis. – 2023 – vol. 33, No. 6, – p. 193.
EDN: ZZVTUA
Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 3.188 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2, 3, 4. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 2.104 п.л.

[166] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry*// Advances in Mathematics. – 2022 – vol. 394, – p. 108001.
EDN: IEEKCH
Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 3.438 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 4, 5, 6. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 1.136 п.л.

[167] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type //* Nonlinearity. – 2021 – vol. 34, No. 8, – pp. 5136–5162.
EDN: UFNIRH
Импакт-фактор 1.6 (JIF), объем 2.563 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 2. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.691 п.л.

[168] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry: non-degenerate singular points of Poisson–Nijenhuis structures //* European Journal of Mathematics. – 2021 – vol. 8, – pp. 1355-1376.
EDN: BXASNZ
Импакт-фактор 0.5 (JIF), объем 1.188 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2, 3, 6. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 0.784 п.л.

[169] Fomenko A.T., Konyaev A.Yu., *Geometry, dynamics and different types of orbits //* Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2015 – vol. 15, No. 49, – pp. 49-66.
EDN: UFKSWT
Импакт-фактор 1.1 (JIF), объем 1.063 п.л.
А.Ю.Коняеву пренадлежат теоремы 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Общая доля диссертанта составляет 50%, объем 0.532 п.л.

[170] Konyaev A.Yu., *On the Linearization of Certain Singularities of Nijenhuis Operators //* Russian Journal of Mathematical Physics. – 2024 – vol. 31, No. 1, – pp. 106-111.
EDN: ZIOSCW
Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 0.375 п.л.

[171] Konyaev A.Yu., Kress J.M., Matveev V.S., *When a (1,1)-tensor generates separation of variables of a certain metric* // Journal of Geometry and Physics – 2024 – vol. 195, – p. 105031.
EDN: JJWYBW
Импакт-фактор 1.2 (JIF), объем 1 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.33 п.л.

[172] Коняев А.Ю., *Симметрические матрицы и максимальные нийенхейсовы пучки* // Математический сборник. – 2023. – Т. 214, вып. 8. – С. 53–62.
EDN: FWDDWZ
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.625 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Symmetric matrices and maximal Nijenhuis pencils* // Sbornik: Mathematics. – 2023 – vol. 214, No. 8, – pp. 1101–1110.
EDN: GKKUMH
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.625 п.л.

[173] Konyaev A.Yu., *Geometry of Inhomogeneous Poisson Brackets, Multicomponent Harry Dym Hierarchies, and Multicomponent Hunter–Saxton Equations* // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2022 – vol. 29, – pp. 518–541.
EDN: RNQNOX
Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 1.938 п.л.

[174] Konyaev A. Yu., *Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators* // Differential Geometry and its Applications. – 2021 – vol. 74, – p. 101706.
EDN: FRXEEV
Импакт-фактор 0.7 (JIF), объем 2.563 п.л.

[175] Коняев А.Ю., *Полнота коммутативных подалгебр Соколова–Одесского и операторы Нийенхейса на* $gl(n)$ // Математический сборник. – 2020 – Т. 211, вып. 4, – С. 583-593.
EDN: KIOOFD
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.688 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Completeness of commutative Sokolov-Odesskii subalgebras and Nijenhuis operators on* $gl(n)$ // Sbornik: Mathematics. – 2020 – vol. 211, No. 4, – pp. 583–593.
EDN: QGLLUZ
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.688 п.л.

[176] Коняев А.Ю., *Полнота некоторых коммутативных подалгебр, ассоциированных с операторами Нийенхейса на алгебрах Ли* // Доклады Академии наук. – 2018 – Т. 479, вып. 3 – С. 247-249.
EDN: YTFPNQ
Импакт-фактор 0.6 (JIF), объем 0.188 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Completeness of Some Commutative Subalgebras Associated with Nijenhuis Operators of Lie Algebras* // Doklady Mathematics. – 2018. – vol. 97, No. 2. – pp. 137-139.
EDN: XXDOUH
Импакт-фактор 0.6 (JIF), объем 0.188 п.л.

[177] Коняев А.Ю., *Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2* // Математический сборник. – 2014 – Т. 205, вып. 1, – С. 47–66.
EDN: RXPTJV
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 1.25 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Classification of Lie algebras with generic orbits of dimension 2 in the coadjoint representation* // Sbornik: Mathematics. – 2014 – vol. 205, No. 1, – pp. 45–62.

EDN: SKOQGF
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 1.125 п.л.

Приложение I: Интегрируемые квазилинейные системы

Симметрии. Сильные симметрии. Законы сохранения

Квазилинейной системой называется система дифференциальных уравнений в частных производных, которая в локальных координатах $u^1, ..., u^n$ записывается как

$$u_t^i = L_q^i(u) u_x^q. \tag{12.1}$$

где u_t^i, u_x^j означает частные производные по t и x соответственно. Элементы матрицы L_q^i зависят от u и не зависят явно от x, t. Всего в системе n уравнений на n функций, а ее решение $u(t, x)$ задается начальными условиями $u(0, x) = v(x)$. Таким образом,начальные условия — это n функций от одной переменной или просто кривая на поверхности.

Выполнив замену координат, легко убедиться, что компоненты матрицы L в формуле (12.1) преобразуются как компоненты тензорного поля $(1, 1)$. Таким образом, квазилинейные системы на многообразии можно отождествить с операторными полями на нем, то есть с элементами $\Psi^1(\mathrm{M}^n)$. Поэтому, когда мы будем говорить о симметриях и законах сохранения — объектах, которые в теории квазилинейных уравнений обычно связывают с некоторой системой, — мы будем говорить о симметриях и законах сохранения операторного поля.

Для произвольной пары операторных полей L, M и пары векторных полей ξ, η определим

$$\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = LM[\xi, \eta] + [L\xi, M\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi, \eta]. \tag{12.2}$$

Эта операция была введена Нийенхейсом в [79] (формула 3.9). В терминах векторных полей это выражение приобретает вид

$$\langle L, M\rangle(\xi, \eta) = \Big(\mathcal{L}_{L\xi} M - L\mathcal{L}_\xi M\Big)\eta = -\Big(\mathcal{L}_{M\eta} L - M\mathcal{L}_\eta L\Big)\xi. \tag{12.3}$$

В локальных координатах это выражение имеет вид:

$$\langle L, M\rangle_{jk}^i = \frac{\partial M_k^i}{\partial u^q} L_j^q - \frac{\partial L_j^i}{\partial u^q} M_k^q + M_q^i \frac{\partial L_j^q}{\partial u^k} - L_q^i \frac{\partial M_k^q}{\partial u^j}. \tag{12.4}$$

Следующее утверждение описывает свойства построенной операции

Теорема 12.0.1. *Выполнены следующие свойства:*

1. $\langle L, L\rangle = \mathcal{N}_L$;

2. *Правая часть формулы* (12.2) *определяет тензорное поле тогда и только тогда, когда* $ML - LM = 0$. *По нижним индексам полученный тензор не является ни симметрическим, ни кососимметрическим;*

3. *Кососимметрирование тензора* $\langle L, M\rangle$ *по нижним индексам совпадает со скобкой Фролихера-Нийенхейса операторных полей* L *и* M*;*

4. *Для произвольной функции* f *выполнены формулы*

$$\begin{aligned} \langle fL, M\rangle &= f\langle L, M\rangle + ML \otimes \mathrm{d}f - L \otimes M^*\mathrm{d}f, \\ \langle L, fM\rangle &= f\langle L, M\rangle + L^*\mathrm{d}f \otimes M - \mathrm{d}f \otimes ML. \end{aligned} \tag{12.5}$$

5. *Для тройки операторных полей* L, M, R, *где* M *и* R *оба коммутируют с* L *(но не обязательно друг с другом) выполнена формула*

$$\langle L, MR\rangle(\xi, \eta) = \langle L, M\rangle(\xi, R\eta) + M\langle L, R\rangle(\xi, \eta). \tag{12.6}$$

Доказательство. Первое и второе свойства очевидны. Для того, чтобы проверить, что формула (12.2) определяет тензорное поле, необходимо и достаточно проверить, что она линейна по ξ, η в смысле структуры модуля над кольцом гладких функций. Для произвольной функции f рассмотрим

$$\begin{aligned} &\langle L, M\rangle(f\xi, \eta) = LM[f\xi, \eta] + [fL\xi, M\eta] - L[f\xi, M\eta] - M[fL\xi, \eta] = \\ =&fLM[\xi, \eta] - \mathcal{L}_\eta f\, LM\xi + f[L\xi, M\eta] - \mathcal{L}_{M\eta} f\, L\xi - fL[f\xi, M\eta] + \mathcal{L}_{M\eta} f\, L\xi - fM[L\xi, \eta] + \\ +&\mathcal{L}_\eta f\, ML\xi = f\langle L, M\rangle(\xi, \eta) + \mathcal{L}_\eta f(ML - LM)\xi. \end{aligned}$$

Мы видим, что линейность выполнена тогда и только тогда, когда $ML - LM = 0$. Аналогичные вычисления верны и для второго аргумента. Второе свойство, таким образом, доказано. Для доказательства третьего свойства вычислим

$$\begin{aligned} &\langle L, M\rangle(\xi, \eta) - \langle L, M\rangle(\eta, \xi) = LM[\xi, \eta] + [L\xi, M\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi, \eta] - LM[\eta, \xi] - \\ &- [L\eta, M\xi] + L[\eta, M\xi] + M[L\eta, \xi] = LM[\xi, \eta] + ML[\xi, \eta] + [L\xi, M\eta] + [M\xi, L\eta] - L[\xi, M\eta] - \\ &- M[L\xi, \eta] - L[M\xi, \eta] - M[\xi, L\eta] = [[L, M]]_{FN}. \end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу примера 11.2.3. Перейдем теперь к доказательству четвертого свойства. Вычисления для него аналогичны тем, которые мы проводили для доказательства свойства один:

$$\begin{aligned} \langle fL, M\rangle(\xi, \eta) &= fLM[\xi, \eta] + [fL\xi, M\eta] - fL[\xi, M\eta] - M[fL\xi, \eta] = \\ &= f\langle fL, M\rangle(\xi, \eta) + \mathcal{L}_\eta f\, ML\xi - \mathcal{L}_{M\eta} L\xi = \\ &= (\langle L, M\rangle + ML \otimes \mathrm{d}f - L \otimes M^*\mathrm{d}f)(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Для умножения функции на M делается аналогично. Для доказательства свойства номер пять распишем формулы в обеих частях равенства:

$$\begin{aligned} \langle L, M\rangle(\xi, R\eta) &= LM[\xi, R\eta] + [L\xi, MR\eta] - L[\xi, MR\eta] - M[L\xi, R\eta], \\ M\langle L, R\rangle(\xi, \eta) &= MLR[\xi, \eta] + M[L\xi, R\eta] - ML[\xi, R\eta] - MR[L\xi, \eta], \\ \langle L, MR\rangle(\xi, \eta) &= LMR[\xi, \eta] + [L\xi, MR\eta] - L[\xi, MR\eta] - MR[L\xi, \eta]. \end{aligned}$$

Складывая и помня, что M коммутирует с L, мы получаем в точности равенство (12.6). □

Мы будем говорить, что M — симметрия для L (или, наоборот, что L — симметрия M) если

1. $ML - LM = 0$;
2. Симметрическая (по нижним индексам) часть тензора $\langle L, M\rangle$ обращается в ноль.

Если тензор $\langle L, M\rangle$ обращается в ноль полностью, то будем говорить, что M — сильная симметрия L. Так как кососимметрическая часть тензора $\langle L, M\rangle$ совпадает с $[[L, M]]_{FN}$, то сильная симметрия — это симметрия с дополнительным условием: обращение в ноль скобки Фролихера-Нийенхейса L и M. Из теоремы 12.0.1 вытекают следующие свойства для симметрий и сильных симметрий.

Следствие 12.0.1. *Выполнено следующее:*

1. *Любое операторное поле — симметрия самого себя;*
2. *Операторное поле* Id *— сильная симметрия любого операторного поля;*
3. *Операторное поле L — сильная симметрия самого себя тогда только тогда, когда L — оператор Нийенхейса;*
4. *Произведение сильных симметрий операторного поля L — сильная симметрия;*
5. *Если L — оператор Нийенхейса, то $f(L), g(L)$ — сильные симметрии друг друга.*

Доказательство. Первое свойство вытекает из того, что $\langle L, L\rangle = \mathcal{N}_L$ — кососимметрический по нижним индексам тензор. То есть его симметрическая часть заведомо равна нулю. Второе свойство получается прямым вычислением из (12.4):

$$\frac{\partial M^i_k}{\partial u^q}\delta^q_j - \frac{\partial \delta^i_j}{\partial u^q}M^q_k + M^i_q\frac{\partial \delta^q_j}{\partial u^k} - \delta^i_q\frac{\partial M^q_k}{\partial u^j} = \frac{\partial M^i_k}{\partial u^j} - \frac{\partial M^i_k}{\partial u^j} = 0.$$

Третье свойство очевидно. Для доказательства четвертого воспользуемся формулой (12.6):

$$\langle L, MR\rangle(\xi, \eta) = \langle L, M\rangle(\xi, R\eta) + M\langle L, R\rangle(\xi, \eta).$$

По условию в правой части $\langle L, M\rangle = \langle L, R\rangle = 0$ и, значит, MR — сильная симметрия. Для доказательства пятого вычислим (мы используем тождество Лейбница для производной Ли)

$$\begin{aligned}
&\langle f(L), g(L)\rangle(\xi, \eta) = f(L)g(L)[\xi, \eta] + [f(L)\xi, g(L)\eta] - f(L)[\xi, g(L)\eta] - g(L)[f(L)\xi, \eta] = \\
=&f(L)g(L)\mathcal{L}_\xi\eta + \mathcal{L}_{f(L)\xi}\Big(g(L)\eta\Big) - f(L)\mathcal{L}_\xi\Big(g(L)\eta\Big) - g(L)\mathcal{L}_{f(L)\xi}\eta = \\
&= \Big(\mathcal{L}_{f(L)\xi}g(L) - f(L)\mathcal{L}_\xi g(L)\Big)\eta.
\end{aligned}$$

Если L — оператор Нийенхейса, то по следствию 2.3.1

$$f(L)\mathcal{L}_\xi g(L) - \mathcal{L}_{f(L)\xi}g(L) = 0$$

для любого ξ. Таким образом, $f(L), g(L)$ — сильные симметрии друг друга. $\square$

Замечание 12.0.1. Как мы увидим в разделе 12 условие того, что M и L — симметрии, эквивалентно коммутированию эволюционных векторных полей $\xi^i = L^i_s u^s_x$ и $\eta^i = M^i_s u^s_x$. ■

Замечание 12.0.2. С точки зрения теории дифференциальных уравнений в частных производных, симметрии интерпретируются так: рассмотрим пару квазилинейных уравнений $u_t = Lu_x$ и $u_\tau = Mu_x$. Это переопределенная система из $2n$ уравнений на n функций. Условия совместности этой системы (см. пример 12.0.5 дальше) — это в точности условие того, что M и L симметрии друг друга. В литературе, связанной с дифференциальными уравнениями, это условие часто записывают в следующем "квадратичном"виде

$$[L\xi, M\xi] - L[\xi, M\xi] - M[L\xi, \xi] = 0$$

для любого вектора ξ. Если нам нужны совместные решения переопределенной системы, то в аналитическом случае теорема Картана-Кэллера [44] говорит, что выполнение условий совместности необходимо и достаточно для существования общих решений для произвольных начальных условий. Отметим, что в гладком случае вопрос существования решений таких систем в каждом отдельном случае должен рассматриваться индивидуально. ■

Законом сохранения операторного поля L называется такая замкнутая 1-форма α, что форма $L^*\alpha$ снова замкнута. Локально по лемме Пуанкаре любая замкнутая форма точна, поэтому можно считать $\alpha = \mathrm{d}f$. В этом случае f называется плотностью закона сохранения. Подчеркнем, что это определение имеет смысл только для квазилинейных систем и восходит к работам Нетер (см. [83] и Олвера [88]).

Замечание 12.0.3. При этом в других разделах мы будем встречать словосочетание "закон сохранения"в смысле функционалов. Связь между этими двумя определениями такова: пусть дана квазилинейная система $u_t = Lu_x$ и $\mathrm{d}f$ — ее закон сохранения. Тогда рассмотрим (здесь $\mathrm{d}g = L^*\mathrm{d}f$)

$$\partial_t \int f(u) = \int \langle \mathrm{d}f u_t\rangle = \int \langle L^*\mathrm{d}f, u_x\rangle = \int \partial_x g(u).$$

Если все интегралы в этом вычислении сходятся и на решение наложены некоторые дополнительные условия, то интеграл в правой части равен нулю. То есть функционал $\int f(u)$ остается постоянным на решении квазилинейной системы. При этом плотность функционала — это плотность закона сохранения. ■

Геометрический подход к интегрируемым квазилинейным системам

Начнем этот раздел с теоремы.

Теорема 12.0.2. *Пусть в координатах $u^1, \dots, u^n$ в окрестности точки* p *операторное поле имеет вид*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Тогда произвольная симметрия L в этой системе координат записывается как

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

где μ_i удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$\frac{1}{\mu_i - \mu_j}\frac{\partial \mu_i}{\partial u^j} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}, \quad i \neq j. \tag{12.7}$$

Доказательство. Для начала вычислим $\langle L, M\rangle$ на базисных векторных полях, которые мы обозначаем как η_i. Имеем (по повторяющимся латинским индексам суммирования нет!)

$$\begin{aligned}\langle L, M\rangle(\eta_i, \eta_j) &= [\lambda_i\eta_i, \mu_j\eta_j] - L[\eta_i, \mu_j\eta_j] - M[\lambda_i\eta_i, \eta_j] = \\ &= \lambda_i\frac{\partial \mu_j}{\partial u^i}\eta_j - \mu_j\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\eta_i - \lambda_j\frac{\partial \mu_j}{\partial u^i}\eta_j + \mu_i\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\eta_i = \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\frac{\partial \mu_j}{\partial u^i}\eta_i + (\mu_i - \mu_j)\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\eta_i.\end{aligned}$$

Симметрируя и приравнивая к нулю коэффициенты при базисных векторных полях, получаем

$$(\lambda_i - \lambda_j)\frac{\partial \mu_i}{\partial u^j} + (\mu_j - \mu_i)\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j} = 0.$$

Это в точности система (12.7). Теорема доказана. □

В системе (12.7) имеется $n^2 - n$ уравнений на n функций, то есть она переопределена. Для $n > 2$ эта система переопределена. Условия совместности системы дают следующую теорему.

Теорема 12.0.3 (Царев [156]). *Условия совместности системы* (12.7) *для* $n > 2$ *имеют вид*

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^k}\right), \quad i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i. \tag{12.8}$$

Если λ_i удовлетворяет условиям (12.8), то полученные системы называют полугамильтоновыми. Недостаток такого определения заключается в том, что условие полугамильтоновости записано в локальных координатах. Оказывается, его можно представить в виде тензорного условия. Мы построим его в несколько этапов. Для начала рассмотрим $K \in \Psi^3(\mathrm{M}^n)$, определенную по формуле

$$K = 3[[\,[[L, L]]_{FN}, L^2]]_{FN} = 3[[\mathcal{N}_L, L^2]]_{FN}.$$

Здесь $\mathcal{N}_L$ означает кручение Нийенхейса, а $[[L, L]]_{FN}$ — скобку Фролихера-Нийенхейса. Затем построим тензор M типа $(1, 3)$, определив его на произвольных тройках векторных полей ξ, η, ζ как

$$\begin{aligned}M(\xi, \eta, \zeta) = \; & \mathcal{N}_L\big(\xi, L\mathcal{N}_L(\eta, \zeta)\big) + \mathcal{N}_L\big(L\xi, \mathcal{N}_L(\eta, \zeta)\big) - \mathcal{N}_L\big(\mathcal{N}_L(\xi, \zeta), L\eta\big) \\ & + \mathcal{N}_L\big(\mathcal{N}_L(\xi, \eta), L\zeta\big) - \mathcal{N}_L\big(\xi, \mathcal{N}_L(L\eta, \zeta)\big) - \mathcal{N}_L\big(\xi, \mathcal{N}_L(\eta, L\zeta)\big).\end{aligned}$$

По тензорам M и K строится тензор Q:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta,\zeta) := \;& K(L\xi, L\eta,\zeta) - K(L^2\xi,\eta,\zeta) - K(\xi, L\eta, L\zeta) + K(L\xi,\eta,L\zeta) \\ & +4M(L\xi,\eta,\zeta) - 2M(\xi,L\eta,\zeta) - 2M(\xi,\eta,L\zeta). \end{aligned}$$

Наконец, мы строим тензор $\mathcal{P}_L$

$$\mathcal{P}_L(\xi,\eta,\zeta) = LQ(\xi,L\eta,\zeta) + LQ(\xi,\eta,L\zeta) - L^2Q(\xi,\eta,\zeta) - Q(\xi,L\eta,L\zeta). \tag{12.9}$$

Это и есть тензорный инвариант. А именно.

Теорема 12.0.4 (Павлов, Свинолупов, Шарипов [146])**.** *Пусть операторное поле L имеет почти всюду простой вещественный спектр и его кручение Хаантьеса равно нулю. Тогда L — полугамильтонов тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_L = 0$.*

Полугамильтоновым мы будем называть операторное поле L, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Спектр L почти всюду вещественный и простой;
2. $\mathcal{H}_L = 0$;
3. $\mathcal{P}_L = 0$.

Соответственно, интегрируемой квазилинейной системой называется система $u_t = Lu_x$, для которой L — полугамильтоново операторное поле.

Слово "интегрируемый"в названии связано вот с чем: выполнение условий совместности в аналитическом случае на уравнения для симметрий гарантирует, что эти уравнения разрешимы для любых начальных условий. Это означает, что локально у L "максимально"много симметрий, и они параметризуются n функциями одной переменной.

Если с симметриями все понятно, то что можно сказать про законы сохранения? В диагональных координатах тот факт, что $\mathrm{d}(L^*\mathrm{d}f) = 0$ записывается как:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}}{\lambda_i - \lambda_j}\frac{\partial f}{\partial u^i} - \frac{\frac{\partial \lambda_j}{\partial u^i}}{\lambda_j - \lambda_i}\frac{\partial f}{\partial u^j} = 0, \quad i \neq j. \tag{12.10}$$

Как мы видим, это переопределенная система из $n(n-1)/2$ уравнений на n функций. Выполнена следующая теорема.

Теорема 12.0.5. *Условия совместности системы* (12.10) *совпадают с условиями Царева из теоремы 12.0.3.*

Доказательство. Доказывается прямыми вычислениями. □

Выполнено следующее замечательное следствие.

Следствие 12.0.2. *Для симметрий и законов сохранения интегрируемых систем выполнены свойства:*

1. M и R — симметрии L, то они симметрии друг друга;

2. Если $\mathrm{d}f$ — закон сохранения L, то он является законом сохранения для любой симметрии M.

Доказательство. Немедленно вытекает из теоремы 12.0.2. □

Следующая теорема демонстрирует важность симметрий для решения квазилинейных систем.

Теорема 12.0.6 (Обобщенный метод годографа [156]). *Пусть дано операторное поле L с вещественным простым спектром и нулевым кручением Хаантьеса (обращение в ноль тензора $\mathcal{P}_L$ не предполагается). Пусть M — такая симметрия L, что алгебраическое уравнение*

$$x\mathrm{Id} + tL = M$$

разрешимо относительно u. Тогда полученные таким образом n функций $u^i(t, x)$ являются решением квазилинейной системы $u_t = Mu_x$.

Теорема Царева дает следующий подход для построения достаточно большого количества решений квазилинейной системы.

1. Оператор L с нулевым кручением Хаантьеса и простым вещественным спектром приводится к диагональному виду. Для этого ищутся собственные векторные поля, после чего поиск подходящей системы координат выполняется в квадратурах;

2. В диагональных координатах для известных λ_i записывается уравнение (12.7) как линейное дифференциальное уравнение в частных производных на μ_i. Находится конкретная симметрия;

3. Обобщенным методом годографа решается алгебраическое уравнение и находится частное решение.

В этом контексте, "интегрируемость"в названии означает возможность построения достаточно большого количества решений с помощью этого метода.

Замечание 12.0.4. Для работы обобщенного метода годографа подходят далеко не все симметрии: в диагональных координатах, где $M = \mathrm{diag}\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ должны выполняться условия

$$\det\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial u^j}\right) \neq 0, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial u^i} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12.11}$$

Первое условие обеспечивает разрешимость алгебраической системы, второе необходимо для доказательства того, что полученные решения удовлетворяют исходной системе. ■

Пусть L — полугамильтоново операторное поле. Мы говорим, что оно является слабонелинейным, если в диагональных координатах L выполняется дополнительное условие (сравните со вторым условием (12.11))

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12.12}$$

Соответственно, квазилинейная система с операторным полем L называется слабонелинейной. Как и в случае с условиями Царева, для этих условий имеется инвариантное описание.

Теорема 12.0.7 ([171]). *Пусть L — полугамильтоново операторное поле и σ_i — коэффициенты его характеристического многочлена. Тогда выполнение условий* (12.12) *в точке общего положения эквивалентно следующему инвариантному соотношению*

$$(L^*)^{n-1}\mathrm{d}\sigma_1 + (L^*)^{n-2}\mathrm{d}\sigma_2 + ... + (L^*)^0\mathrm{d}\sigma_n = 0. \tag{12.13}$$

Обобщенные системы Магри-Лоренцони

Пусть в окрестности точки $U(\mathrm{p}) \subset \mathrm{M}^n$ задан оператор Нийенхейса L и закон сохранения $\mathrm{d}f$. Через $U(0)$ обозначим окрестность нуля в $\mathbb{C}$ и считаем, что $\lambda \in U(0)$. Нас будут интересовать функции $\sigma(\lambda)$, определенные на $U(\mathrm{p}) \times U(0)$ (для каждого фиксированного λ такая функция может иметь конечное число особенностей, то есть допускается сингулярное множество), которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}(\lambda\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda)\mathrm{d}f,\\ (\mathrm{Id} - \lambda L^*)\mathrm{d}\bar{\sigma}(\lambda) = \lambda\bar{\sigma}(\lambda)\mathrm{d}f.\end{aligned} \tag{12.14}$$

В формулах выше λ рассматривается как параметр, то есть дифференциалы берутся только по координатам на $U(\mathrm{p})$.

Теорема 12.0.8. *Для произвольной пары $L, \mathrm{d}f$ верно, что*

1. *Функции $\sigma(\lambda), \bar{\sigma}(\lambda)$ из* (12.14) *находятся в квадратурах;*
2. *Тождества* (12.14) *определяют функции $\sigma(\lambda), \bar{\sigma}(\lambda)$ с точностью до умножения на произвольную константу.*

Доказательство. Начнем с доказательства для $\sigma(\lambda)$. Если $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для L, то он и закон сохранения для $\lambda\mathrm{Id} - L$. Из этого, в свою очередь, следует (см. теорему 2.1.2), что для $\lambda \notin \mathrm{Spectrum}\ L$ $\mathrm{d}f$ — закон сохранения для $(\lambda\mathrm{Id} - L)^{-1}$. То есть $(\lambda\mathrm{Id} - L)^{-1}\mathrm{d}f$ — замкнутая форма. Так как все объекты рассматриваются локально, то по лемме Пуанкаре найдется такая функция $g(\lambda)$, что

$$(\lambda\mathrm{Id} - L)^{-1}\mathrm{d}f = \mathrm{d}g(\lambda).$$

Чтобы найти эту функцию, нужно проинтегрировать замкнутую форму слева. Это делается с точностью до добавления произвольной константы, зависящей от λ. Определим

$$\sigma(\lambda) = \exp g(\lambda).$$

Прямой проверкой получаем

$$(\lambda\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}\sigma(\lambda) = \exp g(\lambda)(\lambda\mathrm{Id} - L^*)\mathrm{d}g(\lambda) = \exp g(\lambda)(\lambda\mathrm{Id} - L^*)(\lambda\mathrm{Id} - L)^{-1}\mathrm{d}f = \sigma(\lambda)\mathrm{d}f.$$

Построение $\sigma(\lambda)$ требует только интегрирования замкнутых форм и взятия экспоненты, то есть она находится в квадратурах. То есть первое утверждение теоремы 12.0.8 для $\sigma(\lambda)$ доказано.

Пусть теперь есть два решения $\sigma(\lambda), \rho(\lambda)$ для одного и того же $\mathrm{d}f$. Заметим, что если $\mathrm{d}\sigma(\lambda) \equiv 0$, то из (12.14) следует, что $\sigma(\lambda)$ — тождественный ноль. Поэтому считаем, что обе функции не константы, и, значит, почти всюду верно

$$(\lambda \mathrm{Id} - L^*)\frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} = \mathrm{d}f = (\lambda \mathrm{Id} - L^*)\frac{\mathrm{d}\rho(\lambda)}{\rho(\lambda)}.$$

Так как для почти всех λ оператор $(\lambda \mathrm{Id} - L^*)$ обратим, то, умножив обе части на обратный и переписав соотношение, мы получаем

$$\rho(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda) = 0$$

Поделив на $\sigma^2(\lambda)$ равенство, мы получаем, что почти всюду

$$\mathrm{d}\left(\frac{\rho(\lambda)}{\sigma(\lambda)}\right) = 0.$$

То есть функция в скобках не зависит от координат на $U(\mathrm{p})$, то есть представляет собой функцию от λ. Второе утверждение теоремы 12.0.8 для $\sigma(\lambda)$ доказано.

Для $\bar{\sigma}(\lambda)$ доказательство аналогично. Теорема доказана. $\square$

Пример 12.0.1. Пусть оператор Нийенхейса L имеет простой вещественный спектр. Тогда в подходящей системе координат $u^1, \dots, u^n$ он имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u^2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(u^n) \end{pmatrix},$$

а произвольный закон сохранения

$$\mathrm{d}f = f_1(u^1)\mathrm{d}u^1 + \dots + f_n(u^n)\mathrm{d}u^n.$$

В этом случае

$$(\lambda \mathrm{Id} - L^*)^{-1}\mathrm{d}f = \frac{f_1(u^1)}{\lambda - \lambda_1(u^1)}\mathrm{d}u^1 + \dots + \frac{f_n(u^n)}{\lambda - \lambda_n(u^1)}\mathrm{d}u^n.$$

Справа стоит $\mathrm{d}g(\lambda)$. Получаем, что

$$g(\lambda) = \int^{u^1} \frac{f_1(s_1)}{\lambda - \lambda_1(s_1)}\mathrm{d}s_1 + \dots + \int^{u^n} \frac{f_n(s_n)}{\lambda - \lambda_n(s_n)}\mathrm{d}s_n.$$

Окончательная формула для $\sigma(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma(\lambda) = c(\lambda)\exp\left(\int^{u^1} \frac{f_1(s_1)}{\lambda - \lambda_1(s_1)}\mathrm{d}s_1 + \dots + \int^{u^n} \frac{f_n(s_n)}{\lambda - \lambda_n(s_n)}\mathrm{d}s_n\right),$$

где $c(\lambda)$ — произвольная функция от λ. ■

Пример 12.0.2. Рассмотрим оператор Нийенхейса

$$L = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

на плоскости, определенный в окрестности начала координат. Закон сохранения имеет вид

$$\mathrm{d}f = f_1(y)\mathrm{d}x + (f_1'(y)x + f_2(y))\mathrm{d}y.$$

В этом случае

$$(\lambda \mathrm{Id} - L^*)^{-1}\mathrm{d}f = \left(\frac{f_1(y)}{\lambda - y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{f_1(y)x}{(\lambda - y)^2} + \frac{f_1'(y)x}{\lambda - y} + \frac{f_2(y)}{\lambda - y}\right)\mathrm{d}y.$$

В правой части стоит $\mathrm{d}g(\lambda)$. Интегрируя, получаем

$$g(\lambda, x, y) = \frac{f_1(y)x}{\lambda - y} + \int^y \frac{f_2(s)}{\lambda - s}\mathrm{d}s.$$

Окончательная формула для $\sigma(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma(\lambda) = c(\lambda)\exp\left(\frac{f_1(y)x}{\lambda - y} + \int^y \frac{f_2(s)}{\lambda - s}\mathrm{d}s\right),$$

где $c(\lambda)$ — произвольная функция от λ. ■

Далее считаем, что нам даны пары $L, \sigma(\lambda)$ и $L, \bar{\sigma}(\lambda)$. Определим семейства операторных полей:

$$A_\lambda = \sigma(\lambda)(\lambda \mathrm{Id} - L)^{-1} \quad \text{и} \quad \bar{A}_\lambda = \bar{\sigma}(\lambda)(\mathrm{Id} - \lambda L)^{-1} \tag{12.15}$$

Легко видеть, что эти операторные поля не являются операторами Нийенхейса. Несмотря на это, они обладают множеством замечательных свойств.

Теорема 12.0.9. *Для произвольных допустимых значений параметра λ, μ мы имеем, что*

1. *Операторные поля A_λ и A_μ — симметрии друг друга и $\mathrm{d}\sigma^{-1}(\mu)$ — закон сохранения для A_λ;*

2. *Операторные поля $\bar{A}_\lambda$ и $\bar{A}_\mu$ — симметрии друг друга и $\mathrm{d}\bar{\sigma}^{-1}(\mu)$ — закон сохранения для $\bar{A}_\lambda$.*

Доказательство. Обозначим

$$L_\lambda = \lambda \mathrm{Id} - L \quad \text{и} \quad \bar{L}_\lambda = (\mathrm{Id} - \lambda L).$$

Нам потребуется следующая лемма, которая на самом деле играет фундаментальную роль во многих конструкциях.

Лемма 12.0.1. *Зафиксируем значения параметра $\mu \neq \lambda$. Тогда*

1. Для $\mu, \lambda \notin \mathrm{Spectrum}\, L$ *выполнено соотношение*

$$(L_\lambda^*)^{-1}\mathrm{d}\sigma(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\mathrm{d}\sigma(\mu) - \frac{\sigma(\mu)}{\sigma(\lambda)}\mathrm{d}\sigma(\lambda)\right).$$

2. Для $1/\mu, 1/\lambda \notin \mathrm{Spectrum}\, L$ *выполнено соотношение*

$$(\bar{L}_\lambda^*)^{-1}\mathrm{d}\bar{\sigma}(\mu) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}\left(\mathrm{d}\bar{\sigma}(\mu) - \frac{\bar{\sigma}(\mu)}{\bar{\sigma}(\lambda)}\mathrm{d}\sigma(\bar{\lambda})\right).$$

Доказательство. Докажем сначала первую формулу. Из условия (12.14) выразим $\mathrm{d}f$ для значений параметра μ, λ и приравняем их. Получаем

$$L_\lambda^*\frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} = L_\mu^*\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma(\mu)} = L_\lambda^*\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma(\mu)} + (\mu - \lambda)\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma(\mu)}.$$

В последнем равенстве мы использовали очевидное соотношение $L_\lambda + (\mu - \lambda)\mathrm{Id} = L_\mu$. Далее умножаем обе части равенства на $(L_\lambda^*)^*$, переносим из правой части первое слагаемое в левую часть и делим на $(\mu - \lambda)$. В результате получаем

$$(L_\lambda^*)^{-1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma(\mu)} = \frac{1}{\mu - \lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} - \frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma(\mu)}\right).$$

Умножая обе части на $\sigma(\mu)$ и меняя знак, получаем первое утверждение леммы. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы. Начнем с первого утверждения. Используя свойства операции $\langle L, M\rangle$, мы получаем

$$\langle A_\mu, A_\lambda\rangle = \sigma(\mu)\langle L_\mu^{-1}, A_\lambda\rangle + L_\mu^{-1}A_\mu \otimes \mathrm{d}\sigma(\mu) - L_\mu^{-1} \otimes A_\lambda^*\mathrm{d}\sigma(\mu) = \sigma(\mu)\sigma(\lambda)\langle L_\mu^{-1}, L_\lambda^{-1}\rangle +$$
$$+\sigma(\mu)(L^*)_\mu^{-1}\mathrm{d}\sigma(\lambda) \otimes L_\lambda^{-1} - \sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda) \otimes L_\mu^{-1}L_\lambda^{-1} + L_\mu^{-1}A_\lambda \otimes \mathrm{d}\sigma(\mu) - L_\mu^{-1} \otimes A_\lambda^*\mathrm{d}\sigma(\mu).$$

Из следствия 12.0.1 следует, что $\langle L_\mu^{-1}, L_\lambda^{-1}\rangle = 0$. Теперь перейдем к симметрической части тензора $\langle A_\mu, A_\lambda\rangle$ и применим лемму 12.0.1 (операцию симметрического тензорного произведения мы обозначаем как $\bullet$):

$$\frac{1}{\mu - \lambda}\Big(\sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\mu)\Big) \bullet L_\lambda^{-1} - \sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda) \bullet L_\mu^{-1}L_\lambda^{-1} + \sigma(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\mu) \bullet L_\mu^{-1}L_\lambda^{-1} -$$
$$-\frac{1}{\lambda - \mu}\Big(\sigma(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\mu) - \sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda)\Big) \bullet L_\mu^{-1} = \Big(\sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\mu)\Big)\bullet$$
$$\bullet\Big(\frac{1}{\mu - \lambda}L_\lambda^{-1} - L_\mu^{-1}L_\lambda^{-1} - \frac{1}{\mu - \lambda}L_\mu^{-1}\Big).$$

Осталось убедиться, что операторное поле в скобках в последней строке равно тождественно нулю. Умножим его на невырожденный оператор $(\mu - \lambda)L_\mu L_\lambda$. Получаем

$$(\mu - \lambda)L_\mu L_\lambda\Big(\frac{1}{\mu - \lambda}L_\lambda^{-1} + L_\mu^{-1}L_\lambda^{-1} + \frac{1}{\mu - \lambda}L_\mu^{-1}\Big) = L_\mu - L_\lambda - (\mu - \lambda)\mathrm{Id} =$$
$$= \mu\mathrm{Id} - L - \lambda\mathrm{Id} + L - (\mu - \lambda)L = 0.$$

Так как операторное поле нулевое, то и весь тензор равен нулю. Таким образом, первая половина утверждения доказана. Перейдем ко второй половине. По лемме 12.0.1 имеем

$$A_\lambda^*\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sigma(\mu)}\right) = -\sigma(\lambda)\frac{1}{\sigma^2(\mu)}(L_\lambda^*)^{-1}\mathrm{d}\sigma(\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{\sigma(\mu)\mathrm{d}\sigma(\lambda)-\sigma(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\sigma^2(\mu)}\right) = \frac{1}{\lambda-\mu}\mathrm{d}\left(\frac{\sigma(\lambda)}{\sigma(\mu)}\right).$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично. □

Как мы увидим, в приложениях вместо параметрического семейства рассматривают его разложения в нуле. Это позволяет получить иерархию симметрий и законов сохранения. Мы сформулируем эти результаты отдельно в виде двух следствий.

Следствие 12.0.3. *Пусть L — невырожденный оператор Нийенхейса и $\mathrm{d}f$ — его закон сохранения. Тогда*

1. *Существует последовательность функций $\sigma_0, \sigma_1, \dots$, удовлетворяющая дифференциальным условиям*
$$L^*\mathrm{d}\sigma_0 = -\sigma_0\mathrm{d}f,$$
$$L^*\mathrm{d}\sigma_i = \mathrm{d}\sigma_{i-1} - \sigma_i\mathrm{d}f;$$
2. *Операторы A_i, определенные соотношениями*
$$A_0 = -\sigma_0 L^{-1}, \quad A_i = L^{-1}A_{i-1} - \sigma_i L^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$
попарно симметрии друг друга;
3. *Дифференциалы коэффициенты разложения*
$$(\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda\sigma_2 + \dots)^{-1} = h_0 + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots,$$
то есть $\mathrm{d}h_i$ дают для A_j общие законы сохранения.

Доказательство. Для пары $L, \mathrm{d}f$ построим функцию $\sigma(\lambda)$ по теореме 12.0.8. Рассмотрим разложение этой функции по λ в нуле

$$\sigma(\lambda) = -\sigma_0 - \lambda\sigma_1 - \lambda^2\sigma_2 - \dots.$$

Подставляя его в левую часть первого равенства (12.14), получаем

$$(\lambda\mathrm{Id} - L^*)(-\mathrm{d}\sigma_0 - \lambda\mathrm{d}\sigma_1 - \lambda^2\mathrm{d}\sigma_2 - \dots) = L^*\mathrm{d}\sigma_0 + \lambda(L^*\mathrm{d}\sigma_1 - \mathrm{d}\sigma_0) + \lambda^2(L^*\mathrm{d}\sigma_2 - \mathrm{d}\sigma_1) + \dots.$$

Правая часть той же формулы при этом имеет вид

$$\sigma(\lambda)\mathrm{d}f = -\sigma_0\mathrm{d}f - \lambda\sigma_1\mathrm{d}f - \lambda^2\sigma_2\mathrm{d}f - \dots.$$

Приравнивая, мы получаем в точности формулы из первого утверждения следствие. Таким образом, искомые функции — коэффициенты разложения $\sigma(\lambda)$ в ряд по λ в нуле, взятые со знаком минус. .

Легко видеть, что такая последовательность далеко не единственная — умножая $\sigma(\lambda)$ на $c(\lambda)$, мы будем получать новые последовательности функций. Однако, все они будут получаться из уже имеющейся последовательности с помощью линейных комбинаций с постоянными коэффициентами.

Для доказательства второго утверждения сначала рассмотрим разложение

$$A_\lambda = \sigma(\lambda) L_\lambda^{-1} = (-\sigma_0 - \lambda\sigma_1 - \lambda^2\sigma_2 - \dots)(L^{-1} + \lambda L^{-2} + \lambda^2 L^{-3} + \dots) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots,$$

где

$$A_i = -\sigma_0 L^{-i-1} - \sigma_1 L^{-i} - \dots - \sigma_i L^{-1}.$$

Легко видеть, что $A_i = L^{-1} A_{i-1} - \sigma_i L^{-1}$. Теперь рассмотрим разложение в нуле для параметров λ и μ выражения

$$\langle A_\lambda, A_\mu \rangle (\xi, \xi) = \sum_{i,j} \lambda^i \lambda^j \langle A_i, A_j \rangle (\xi, \xi)$$

Из теоремы 12.0.9 вытекает, что левая часть равна нулю для почти любых значений параметров и любых векторных полей ξ. Из этого немедленно вытекает, что $\lambda^j \langle A_i, A_j \rangle (\xi, \xi) = 0$ для любых i, j. Таким образом, второе утверждение доказано.

Для доказательства третьего утверждения рассмотрим разложение

$$A_\lambda^* \mathrm{d}\sigma(\mu)^{-1} = \sum_{i,j} \lambda^i \mu^j A_i^* \mathrm{d}h_i.$$

Правая часть замкнута для почти любых λ, μ по теореме 12.0.9. Стало быть, замкнута каждая форма $A_i^* \mathrm{d}h_i$. □

Следствие 12.0.4. *Пусть L — оператор Нийенхейса и $\mathrm{d}f$ — его закон сохранения. Тогда*

1. *Существует последовательность функций $\sigma_0, \sigma_1, \dots,$ удовлетворяющая дифференциальным условиям*
$$\sigma_0 = 1,$$
$$\mathrm{d}\sigma_1 = -\mathrm{d}f,$$
$$L^* \mathrm{d}\sigma_i = \sigma_i \mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_{i+1};$$

2. *Операторы A_i, определенные соотношениями*
$$A_0 = \mathrm{Id}, \quad A_i = L A_{i-1} + \sigma_i \mathrm{Id}, \quad i = 1, 2, \dots$$
попарно симметрии друг друга;

3. *Дифференциалы коэффициенты разложения*
$$(\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda\sigma_2 + \dots)^{-1} = h_0 + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots,$$
то есть $\mathrm{d}h_i$ дают для A_j общие законы сохранения.

Доказательство. Для пары $L, \mathrm{d}f$ построим функцию $\bar\sigma(\lambda)$ по теореме 12.0.8. Рассмотрим разложение этой функции по λ (в правой части мы игнорируем черточки сверху) в нуле

$$\bar\sigma(\lambda) = \sigma_0 - \lambda\sigma_1 - \lambda^2\sigma_2 - \dots.$$

Подставляя его в левую часть второго равенства в (12.14), получаем

$$(\mathrm{Id} - \lambda L^*)(\mathrm{d}\sigma_0 - \lambda \mathrm{d}\sigma_1 - \lambda^2 \mathrm{d}\sigma_2 - \dots) = \mathrm{d}\sigma_0 + \lambda(-\mathrm{d}\sigma_1 + L^*\mathrm{d}\sigma_0) + \lambda^2(-\mathrm{d}\sigma_2 + L^*\mathrm{d}\sigma_1) + \dots.$$

Левая часть в этом случае имеет вид

$$\lambda\bar{\sigma}(\lambda)\mathrm{d}f = \lambda\sigma_0\mathrm{d}f - \lambda^2\sigma_1\mathrm{d}f - \dots.$$

Приравнивая обе части, получаем равенства

$$\mathrm{d}\sigma_0 = 0,$$
$$L^*\mathrm{d}\sigma_i = \mathrm{d}\sigma_{i+1} - \sigma_i\mathrm{d}f, \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

Из первого равенства получаем, что σ_0 — константа. Если она не ноль, то заменим в начальных рассуждениях $\bar{\sigma}(\lambda)$ на $\frac{1}{\sigma_0}\bar{\sigma}(\lambda)$.

Если же $\sigma_0 = 0$, то второе уравнение даёт $\mathrm{d}\sigma_1 = 0$. Если она тоже ноль, то процесс повторяется и $\mathrm{d}\sigma_2 = 0$. И так далее. Таким образом, либо все σ_i — нулевые, либо найдется такой номер k, что σ_k — ненулевая константа. В этом случае сделаем замену $\bar{\sigma}(\lambda) \to \frac{1}{-\sigma_k\lambda^k}\bar{\sigma}(\lambda)$.

В результате получаем, что без ограничения общности можно считать, что $\sigma_0 = 1$. В этом случае второе уравнение даёт в точности $\mathrm{d}\sigma_1 = -\mathrm{d}f$. Подставляя это в остальные уравнения, получаем в точности формулы из первого утверждения 12.0.4. Рассмотрим теперь разложение

$$\bar{A}_\lambda = \bar{\sigma}(\lambda)\bar{L}_\lambda^{-1} = (1 - \lambda\sigma_1 - \lambda^2\sigma_2 - \dots)(\mathrm{Id} + \lambda L + \lambda^2 L^2 + \dots) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots,$$

где

$$A_i = L^i - \sigma_1 L^{i-1} - \dots - \sigma_i \mathrm{Id}.$$

Легко видеть, что $A_{i+1} = LA_i - \sigma_i\mathrm{Id}$. Доказательство того, что это симметрии, аналогично доказательству следствия 12.0.3. Это же касается и законов сохранения. □

В работе Магри и Лоренцони рассматривался именно случай из следствия 12.0.4. Это делалось с помощью теории когомологий Нийенхейса. Параметрический подход, однако, позволяет изложить все формулы в гораздо более компактной форме.

Заметим также, что операторы A_i приводятся к диагональному виду тогда и только тогда, когда к такому виду можно привести L. Для такого оператора Нийенхейса и закона сохранения $\mathrm{d}f = \epsilon\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L$ возникающие квазилинейные системы известны как эпсилон-системы и возникают в теории поля, газовой динамике и многих других областях физики.

Закончим мы этот раздел важным примером.

Пример 12.0.3. Пусть в координатах $u^1, \dots, u^n$ оператор Нийенхейса L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что его собственные значения удовлетворяют условиям Царева. Рассмотрим теперь возмущение исходного операторного поля вида $L + f\mathrm{Id}$, где f — некоторая функция. Имеем

$$L = \begin{pmatrix} u^1 + f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 + f & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^n + f \end{pmatrix}.$$

То есть $\lambda_i = u^i + f$. В частности, для $j \neq i$ мы получаем

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j} = \frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

Мы хотим, чтобы возмущение сохраняло интегрируемость. Легко видеть, что для этого достаточно проверить только условие Царева (остальные условия выполнены). Имеем:

1. Для $n = 2$ никаких условий на f нет;
2. Для $n > 2$ для попарно различных i, j, k условия имеем

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{1}{u^i - u^j}\frac{\partial f}{\partial u^j}\right) = \frac{1}{u^i - u^j}\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{u^i - u^k}\frac{\partial f}{\partial u^k}\right) = \frac{1}{u^i - u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k}.$$

   Условие Царева принимает вид

$$\frac{1}{u^i - u^j}\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{1}{u^i - u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k}.$$

   Из этого немедленно вытекает, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k} = 0.$$

   То есть $\mathrm{d}f$ — закон сохранения L.

Легко видеть, что в следствии 12.0.4 оператор $A_1 = L - \sigma_1 \mathrm{Id} = L + f\mathrm{Id}$ с точностью до константы. Таким образом, системы Магри-Лоренцони — это простейшие возмущения операторов Нийенхейса с сохранением интегрируемости и диагональной системы координат.

Приложение II: Гамильтонов формализм и элементы теории джетов

Базовые определения. Согласованные гамильтоновы операторы

Следуя работам [132, 29, 30], в данном разделе мы построим гамильтонов формализм, который применим как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае. Начнем наше построение со списка необходимых базовых объектов и соотношений между ними:

1. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли. Во всех наших примерах она будет бесконечномерной;

2. Через $\mathcal{M}$ обозначим модуль над $\mathfrak{h}$;

3. Через $\Omega^k(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$ обозначим пространство полилинейных кососимметрических $k-$форм на $\mathfrak{h}$ со значениями в модуле $\mathcal{M}$. В частности, $\Omega^0(\mathfrak{h}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$;

4. Операция $\mathrm{d} : \Omega^k(\mathfrak{h}, \mathcal{M}) \to \Omega^{k+1}(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$, определенная по формуле

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i \eta_i \cdot \big(\alpha(\eta_1, \ldots, \widehat{\eta}_i, \ldots, \eta_{k+1})\big) + \\ + \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \alpha([\eta_i, \eta_j], \ldots, \widehat{\eta}_i, \ldots, \widehat{\eta}_j, \ldots)\end{aligned}$$

   для $\alpha \in \Omega^k(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$. Здесь $\eta_i \in \mathfrak{h}$ и $\cdot$ означает действие $\mathfrak{h}$ на $\mathcal{M}$. Легко проверяется, что $\mathrm{d}^2 = 0$.

Этого достаточно для того, чтобы определить так называемый гамильтонов оператор. Чтобы формулы для определения не выглядели слишком громоздкими, мы введём дополнительную конструкцию.

Рассмотрим оператор $\pi : \Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M}) \to \mathfrak{h}$. Мы говорим, что оператор кососимметрический, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$ верно

$$\alpha(\pi(\beta)) = -\beta(\pi(\alpha)).$$

Свойство кососимметричности позволяет нам определить на $\mathrm{Image}(\pi)$ билинейную форму по следующему правилу:

$$\omega_\pi(\xi, \eta) = \xi(\pi^{-1}\eta).$$

Здесь π^{-1} подразумевает взятие произвольного элемента из прообраза η. Именно благодаря кососимметричности, значение этой формы не зависит от того, какой мы элемент взяли. Теперь все готово, чтобы дать определение гамильтонова оператора, а именно: оператор

$$\pi : \Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M}) \to \mathfrak{h}$$

называется гамильтоновым, если: 1) он кососимметрический и $\mathrm{Image}(\pi) \subseteq \mathfrak{h}$ замкнута относительно коммутирования; 2) построенная выше форма ω_π замкнута на образе, то есть для любых $\xi, \eta, \zeta \in \mathrm{Image}(\pi)$ верно, что

$$\xi \cdot (\omega_\pi(\eta, \zeta)) - \eta \cdot (\omega_\pi(\xi, \zeta)) + \zeta \cdot (\omega_\pi(\xi, \eta)) - \omega_\pi([\xi, \eta], \zeta) + \omega_\pi([\xi, \zeta], \eta) - \omega_\pi([\eta, \zeta], \xi) = 0. \tag{12.16}$$

Здесь, как и раньше, $\cdot$ означает действие $\mathfrak{h}$ на $\mathcal{M}$. Выполнена следующая теорема.

Теорема 12.0.10 (Теорема 1.3 в [132])**.** *Если π — гамильтонов оператор, то*

1. *Операция $\{f, g\}_\pi = \mathrm{d}g(\pi(\mathrm{d}f))$ задает на $\mathcal{M}$ структуру алгебры Ли;*
2. *Отображение $\pi \circ \mathrm{d} : \mathcal{M} \to \mathfrak{g}$ является морфизмом алгебр.*

Опять же, подчеркнём, что построение формы ω_π было нужно исключительно для косметических целей. То есть формулу (12.16) можно было записать — правда, в более громоздком виде — без привлечения 2-форм. То есть для определения гамильтонова оператора нам нужны только $\Omega^0(\mathfrak{h}, \mathcal{M}), \Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$ и операция d.

Формальный подход позволяет нам определить основные объекты гамильтонова формализма. Так, гамильтоновым вектором (или, в дальнейшем, векторным полем, поскольку будем иметь дело именно с полями) мы будем называть элемент из $\mathrm{Image}(\pi)$. Обозначать этот элемент мы будем как ξ_f, то есть

$$\xi_f = -\pi \mathrm{d} f.$$

Говорят, что два элемента $f, g \in \mathcal{M}$ коммутируют, если $\{f, g\} = 0$. Легко видеть, что в силу теоремы Гельфанда-Дорфман из коммутирования элементов вытекает коммутирование их гамильтоновых векторов. Если $[\xi, \eta] = 0$, то говорят, что η — симметрия ξ, а если $\xi(f) = 0$, то f — интеграл для ξ. В этом смысле рассуждения выше можно сформулировать в виде принципа: гамильтонов оператор переводит интегралы в симметрии.

Говорят, что два гамильтоновых оператора π и $\bar{\pi}$ согласованы, если для любых постоянных μ, λ линейная комбинация

$$\mu\pi + \lambda\bar{\pi}$$

снова является гамильтоновым оператором. Бигамильтоновой цепочкой называется последовательность элементов $f_i \in \mathcal{M}, i = 0, 1, 2, \dots$ (вообще говоря, бесконечная), если для согласованных гамильтоновых операторов выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\xi_0 = \pi \mathrm{d} f_0 = 0, \\ &\xi_i = \pi \mathrm{d} f_i = \bar{\pi} \mathrm{d} f_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Иногда термин бигамильтонова цепочка мы будем применять не только к последовательности f_i, но и к последовательности векторов ξ_i. Интерес к бигамильтоновым цепочкам объясняется следующей теоремой.

Теорема 12.0.11 (Фольклор)**.** *Пусть даны две бигамильтоновы цепочки f_i и g_i (вообще говоря, не обязательно разные). Обозначим соответствующие гамильтоновы вектора как ξ_i и η_i соответственно. Тогда*

1. *Для любых i, j вектора ξ_i и η_j коммутируют, то есть $[\xi_i, \xi_j] = 0$;*

2. *Для любых i, j элементы f_i, g_j коммутируют относительно обеих скобок, то есть $\{f_i, g_j\}_\pi = \{f_i, g_j\}_{\bar{\pi}} = 0$;*

3. *Для любых i, j верно, что $\xi_i(g_j) = 0$.*

Доказательство. Для начала заметим, что в силу бигамильтоновости выполнены соотношения

$$\{f_i, g_j\}_\pi = \{f_{i-1}, g_j\}_{\bar{\pi}} = -\{f_{i-1}, g_{i+1}\}_\pi.$$

Продолжая серию равенств, мы получим в какой-то момент f_0 в левом аргументе скобки и, как следствие, ноль. То есть второе утверждение верно. Первое утверждение вытекает из второго, в силу стандартного изоморфизма. Наконец, третье утверждение следует из второго в силу определения гамильтонова вектора ■. □

Замечание 12.0.5. Из определения видно, что первый элемент цепочки, то есть f_0 должен лежать в ядре π. При этом в приложениях - причем как конечномерных, так и бесконечномерных - можно сделать следующее: запишем возмущение $\pi_\lambda = \pi + \lambda\bar{\pi}$. Возмущение такого сорта приводит к деформации ядра скобки, которое можно записать в виде f_λ. Таким образом, мы получаем

$$0 = \pi_\lambda \mathrm{d} f_\lambda.$$

Раскладывая f_λ в ряд, мы получаем, что коэффициенты разложения (с точностью до знака) образуют бигамильтонову цепочку. ■

Конечномерный случай: пуассоново многообразие

В общем конечномерном случае $\mathcal{M} = C^\infty(\mathrm{M}^n), \mathfrak{g} = \Psi^0(\mathrm{M}^n)$ и $\Omega^k = \Omega^k(\mathrm{M}^n)$. Операция дифференцирования на формах — это операция внешнего дифференцирования, которую мы обсуждали выше. На пространстве функций есть умножение, и действие векторных полей уважает это умножение в смысле тождества Лейбница, то есть

$$\mathcal{L}_\xi(fg) = \mathcal{L}_\xi f g + f \mathcal{L}_\xi g.$$

Из этого мы получаем, что скобка Пуассона также удовлетворяет правилу Лейбница.

В свою очередь, из леммы Морса и тождества Лейбница вытекает хорошо известное утверждение: скобка Пуассона задается кососимметрическим тензором с верхними индексами π^{ij} по формуле

$$\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g).$$

Этот тензор мы называем тензором Пуассона (иногда говорят бивектор Пуассона). Условие гамильтоновости принимает вид:

$$\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial u^q}\pi^{qk} + \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial u^q}\pi^{qi} + \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial u^q}\pi^{qj} = 0, \quad 1 \le i, j, k \le n.$$

Следуя гамильтонову формализму, корректно определить гамильтоново векторное поле как $\xi_f(g) = \{f, g\}$. Мы, однако, отступим в этом месте от правил (чтобы сохранить преемственность классике) и определим в локальных координатах $u^1, \dots, u^n$ гамильтоново поле как

$$\xi_f^i = \pi^{iq}\frac{\partial f}{\partial u^q}.$$

При таком определении отображение $f \to \xi_f$ является антиизоморфизмом, то есть

$$[\xi_f, \xi_g] = -\xi_{\{f,g\}}.$$

Частный случай — когда размерность многообразия четна и матрица π невырожденная. Это эквивалентно тому, что ω_π определена для всех векторных полей, поскольку гамильтоновы векторные поля порождают, вообще говоря, касательное пространство. То есть мы имеем дело с симплектическим многообразием.

Многообразие называется бигамильтоновым, если на нем заданы две согласованные скобки Пуассона или, что эквивалентно, пара согласованных тензоров Пуассона π^{ij} и $\bar\pi^{ij}$. Бигамильтоновы цепочки в этом случае записываются как

$$\xi_0^j = \pi^{jq}\frac{\partial f_0}{\partial u^q} = 0,$$
$$\xi_i^j = \pi^{jq}\frac{\partial f_i}{\partial u^q} = \bar\pi^{jq}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial u^q}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Из линейной алгебры известно, что $\mathrm{d}f_i$ здесь порождают изотропное относительно вырожденной кососимметрической формы π^{ij} пространство. Таким образом, на размерность этого пространства легко получить ограничение — оно не превосходит числа $\operatorname{corank}\pi + \frac{1}{2}\operatorname{rk}\pi$.

Если у нас имеется набор функций (не обязательно бигамильтоновых), такой, что почти всюду размерность в точности равна этому числу, то мы говорим, что у нас есть вполне интегрируемая система. В конце раздела приведем пример гамильтоновой интегрируемой системы.

Пример 12.0.4. Рассмотрим потенциал

$$V(x, y) = (x^2 + y^2 - a - b)^2 + ax^2 + by^2 - ab,$$

где a, b — некоторые числовые параметры. По второму закону Ньютона уравнения движения точки имеют вид

$$\ddot x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4x(x^2 + y^2 - a - b) - 2ax,$$
$$\ddot y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4y(x^2 + y^2 - a - b) - 2by.$$

Энергия $E = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + V(x, y)$ сохраняется вдоль траектории. Введем две величины

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - a - b \quad \text{и} \quad v(x, y) = ax^2 + by^2 - ab.$$

Они связаны с потенциалом $V(x,y) = u^2(x,y) + v(x,y)$. Эволюция $u(x,y)$ вдоль решения системы

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y},\\ \ddot{u} &= 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 2E - 2u^2 - 2v - 8x^2u - 4ax^2 -\\ &- 8y^2u - 4by^2 = 2E - 10u^2 - 6v - (a+b)u - 4ab.\end{aligned}$$

Здесь E — энергия системы. Эти уравнения можно переписать как

$$\ddot{u} + 10u^2 + (a+b)u + 6v + 4ab - E = 0. \tag{12.17}$$

Введем импульсы p_x, p_y и перепишем уравнение движения в гамильтоновом виде относительно естественной скобки Пуассона на кокасательном расслоении

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y},\\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y},\end{aligned}$$

где гамильтониан H имеет вид $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)$. Полученная таким образом система обладает первым интегралом

$$\begin{aligned}F = \frac{1}{2}((y^2 - b)p_x^2 - 2xyp_xp_y + (x^2 - a)p_y^2) +\\ + (x^2 + y^2 - a - b)(ax^2 + by^2 - ab).\end{aligned}$$

Он состоит из квадратичной и потенциальной части. В терминах введенных ранее величин потенциальная часть имеет вид $(x^2 + y^2 - a - b)(ax^2 + by^2 - ab) = uv$. Введем эллиптические координаты q_1, q_2 по формуле

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{(a+q_1)(a+q_2)}{a-b},\\ y^2 &= \frac{(b+q_1)(b+q_2)}{b-a}.\end{aligned}$$

Зафиксируем значения интегралов $H = h, F = f$. Движение точки описывается системой

$$\begin{cases}\dot{q}_1 &= \pm\frac{\sqrt{W(q_1)}}{q_1 - q_2},\\ \dot{q}_2 &= \pm\frac{\sqrt{W(q_2)}}{q_2 - q_1},\end{cases}$$

где $W(z)$ — многочлен $W(z) = (-z^3 + hz + f)(z+a)(z+b)$. В эллиптических координатах гамильтонова система, соответствующая интегралу F, имеет вид

$$\begin{cases}q_1' = \pm q_2\dfrac{\sqrt{W(q_1)}}{q_1 - q_2},\\ q_2' = \pm q_1\dfrac{\sqrt{W(q_2)}}{q_2 - q_1}.\end{cases}$$

Она связана с исходной системой как

$$\begin{aligned}q_1' &= -q_2\dot{q}_1,\\ q_2' &= -q_1\dot{q}_2.\end{aligned} \tag{12.18}$$

Так как F — первый интеграл, то совместная (переопределенная) система

$$\dot{q}_1 = \pm\frac{\sqrt{W(q_1)}}{q_1 - q_2}, \dot{q}_2 = \pm\frac{\sqrt{W(q_2)}}{q_2 - q_1}, q_1' = \pm q_2\frac{\sqrt{W(q_1)}}{q_1 - q_2}, q_2' = \pm q_1\frac{\sqrt{W(q_2)}}{q_2 - q_1}.$$

Решением системы будет пара функций $q_1(t,\tau), q_2(t,\tau)$, где t — параметр на решениях первой системы и τ — параметр на решениях системы, полученных из второго интеграла. В эллиптических координатах параметры u, v переписываются как

$$u = q_1 + q_2 \quad \text{и} \quad v = q_1q_2 + a^2 + b^2 + (a+b)(q_1 + q_2).$$

Из (12.18) получаем соотношение $u' + \dot{v} - (a+b)\dot{u} = 0$. Эволюция u, v по t задается уравнением (12.17). Дифференцируя его по t, получаем

$$\begin{aligned}&\dot{(\ddot{u} + 10u^2 + (a+b)u + 6v + 4ab - E)} = \dddot{u} + 20u\dot{u} + (a+b)\dot{u} + 6\dot{v} = \\ =&\dddot{u} + 2u\dot{u} + 7(a+b)\dot{u} - 6u' = 0.\end{aligned}$$

Вводя функцию $w = u + \frac{7}{2}(a+b)$ и меняя штрихи на частные производные, мы получаем

$$w_\tau = \frac{1}{6}w_{ttt} + \frac{1}{3}ww_t.$$

Это уравнение Кортвега-де Фриза. То есть решение задачи о движении точки в потенциальном поле дает решение уравнения Кортвега-де Фриза. ■

Бесконечномерный гамильтонов формализм I: эволюционные системы, вариационный дифференциал

В бесконечномерном случае ситуация несколько сложнее. Прежде чем перейти к общей конструкции, мы сначала построим коммутативное ассоциативное кольцо дифференциальных многочленов $\mathcal{K}$, алгебру Ли её дифференцирований $\mathfrak{Der}\mathcal{K}$ и выделенное дифференцирование D. В этом разделе мы считаем, что M^n — это просто $n-$мерный диск. Построение на данном этапе сугубо алгебраическое.

1. Зафиксируем координаты $u^1, \ldots, u^n$ и рассмотрим бесконечный набор символов, который будем обозначать как $u^i_{x^j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots$. Мы придерживаемся соглашения $u^i_{x^0} = u^i$. Кольцо $\mathcal{K}$ — это кольцо многочленов от этих символов с коэффициентами в $C^\infty(\mathrm{M}^n)$. Общий вид многочлена в этом случае

$$f = \sum_{r_1,\ldots,r_k} f_{r_1\ldots r_k}(u)u^{r_1}_{x^{i_1}} \ldots u^{r_k}_{x^{i_k}}$$

Здесь сумма справа конечна и среди r_i могут встречаться повторяющиеся. Дифференциальной степенью одночлена мы назовем сумму $i_1 + \cdots + i_k$. Дифференциальная степень дифференциального многочлена — максимум из дифференциальных степеней одночленов, входящих в многочлен. Сложение и умножение для многочленов определено как обычно;

2. Кольцо дифференцирований $\mathcal{K}$ как $\mathfrak{Der}\,\mathcal{K}$. Так как $\mathcal{K}$ коммутативно и ассоциативно, то $\mathfrak{Der}\mathcal{K}$ — алгебра Ли. С помощью леммы Морса легко показать, что всякое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{Der}\,\mathcal{K}$ однозначно определяется своим действием на координатах u^i и символах $u^i_{x^j}$, то есть
$$\xi(u^i_{x^j}) = \xi^i_j,$$
где $\xi^i_j \in \mathcal{K}, i = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots$. Формула для коммутатора получается как и в конечномерном случае
$$[\xi, \eta](u^i_{x^j}) = \xi(\eta^i_j) - \eta(\xi^i_j) = \sum_{p,q} \frac{\partial \eta^i_j}{\partial u^p_{x^q}} \xi^p_q - \frac{\partial \xi^i_j}{\partial u^p_{x^q}} \eta^p_q \tag{12.19}$$
В формуле справа только конечное число слагаемых отлично от нуля;

3. Определим специальное дифференцирование $D \in \mathfrak{Der}\,\mathcal{K}$ условием $D(u^i_{x^j}) = u^i_{x^{j+1}}$. Это дифференцирование мы будем называть полной производной по x. Часто его записывают в виде формального ряда
$$D = \sum_{j=0}^{\infty} u^q_{x^{j+1}} \frac{\partial}{\partial u^q_{x^j}}.$$

Отметим, что далее иногда мы будем использовать $u^i_{xx} = u^i_{x^2}, u^i_{xxx} = u^i_{x^3}$ и так далее. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 12.0.2. *Пусть $\xi \in \mathfrak{Der}\,\mathcal{K}$ и коммутирует с D. Тогда*

1. *Такие дифференцирования образуют подалгебру Ли в $\mathfrak{Der}\,\mathcal{K}$. Элементы этой подалгебры мы будем называть эволюционными векторными полями;*
2. *Для ξ имеем $\xi^i_j = D^j \xi^i$, то есть ξ определяется набором из n дифференциальных многочленов, которые мы будем называть компонентами эволюционного векторного поля;*
3. *Компоненты коммутатора двух эволюционных векторных полей считаются как*
$$[\xi, \eta]^i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial \eta^i}{\partial u^q_{x^j}} D^j(\xi^q) - \frac{\partial \xi^i}{\partial u^q_{x^j}} D^j(\eta^q).$$

Доказательство. Первые пункт леммы вытекает из тождества Якоби для коммутатора дифференцирований. Второй пункт следует из равенства
$$\xi(u^i_{x^j}) = \xi(D^j u^i) = D^j(\xi(u^i)) = D^j(\xi^i).$$
Третье утверждение вытекает из формулы (12.19) после подстановки $\xi^i_j = D^j(\xi^i)$. □

Пример 12.0.5. Пусть даны два эволюционных уравнения, у которых правая часть линейно зависит от u_x. Мы можем их записать в виде
$$\xi^i = L^i_q u^q_x, \quad \eta^i = M^i_q u^q_x.$$

Коммутатор этих векторных полей выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta]^i &= \frac{\partial\eta^i}{\partial u^q}\xi^q - \frac{\partial\xi^i}{\partial u^q}\eta^q + \frac{\partial\eta^i}{\partial u^q_x}D(\xi^q) - \frac{\partial\xi^i}{\partial u^q_x}D(\eta^q) = \\
&= \frac{\partial M^i_k}{\partial u^q}L^q_j u^k_x u^j_x - \frac{\partial L^i_j}{\partial u^q}M^q_k u^j_x u^k_x + M^i_q\frac{\partial L^q_j}{\partial u^k}u^j_x u^k_x - L^i_q\frac{\partial M^q_k}{\partial u^j}u^k_x u^j_x + M^i_q L^q_s u^s_{x^2} - L^i_q M^q_s u^s_{x^2} = \\
&= \langle L,M\rangle(u_x,u_x) + (ML-LM)u_{x^2}.
\end{aligned}$$

Условия коммутирования в этом случае приобретают вид $ML-LM=0$ и обращение в ноль симметрической части тензора $\langle L,M\rangle$. ■

Замечание 12.0.6. В общем случае, вообще говоря, в бесконечномерном случае тоже можно построить комплекс форм $\Omega^k(\mathfrak{h},\mathcal{M})$ со значением в $\mathcal{M}$. Это, однако, заведомо выходит за рамки нашего изложения. Поэтому мы ограничимся $\Omega^0(\mathfrak{h},\mathcal{M}),\Omega^1(\mathfrak{h},\mathcal{M})$, чего, как уже говорилось выше, будет достаточно для полноценного построения. ■

Перейдём непосредственно к основной конструкции:

1. В качестве $\mathfrak{h}$ мы берем эволюционные векторные поля;

2. В качестве $\mathfrak{M}$ мы берем $\mathcal{K}/D(\mathcal{K})$. Проекцию $\mathcal{K}\to\mathfrak{M}$ мы обозначаем как $\int$. В силу правила Лейбница для D операция $\int$ удовлетворяет свойству

$$\int D(f)g = -\int fD(g).$$

   Мы будем называть его интегрирование по частям;

3. Пространство $\Omega^1(\mathfrak{h},\mathcal{M})$ состоит из α, которые действуют на $\mathfrak{h}$ как

$$\alpha(\xi) = \int \alpha_q\xi^q.$$

   При этом нулевому функционалу, то есть $\alpha\equiv 0$ соответствует $\alpha_q=0$ (см. доказательство леммы 12.0.3 ниже);

4. Операция дифференцирования задается как

$$f\Rightarrow \delta f = \Big(\frac{\delta f}{\delta u^1},\dots,\frac{\delta f}{\delta u^n}\Big),$$

   где

$$\frac{\delta f}{\delta u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j D^j\Big(\frac{\partial f}{\partial u^i_{x^j}}\Big). \tag{12.20}$$

   Операция $\frac{\delta}{\delta u^i}$ называется частной вариационной производной, а δf — вариационным дифференциалом (корректность определения обеспечивается леммой 12.0.3, доказанной ниже).

Замечание 12.0.7. Отметим, что производная не является дифференцированием кольца $\mathcal{K}$, поскольку не удовлетворяет правилу Лейбница, то есть

$$\frac{\delta}{\delta u^i}(fg) \neq \frac{\delta f}{\delta u^i}g + f\frac{\delta g}{\delta u^i}.$$

Правило Лейбница будет работать только в случае, когда f,g — дифференциальные полиномы степени ноль. ■

Лемма 12.0.3. *Для любого $f \in \mathcal{K}$ верно, что*

$$\frac{\delta}{\delta u^i} D(f) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Более того, верно и обратное, то есть если $\delta f = 0$, то $f = D(g)$.

Доказательство. Рассмотрим $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — вектор, состоящий из дифференциальных полиномов. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \int f(u + \epsilon\xi) = \int \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial u^s_{x^j}} D^j(\xi^s) = \int \frac{\delta f}{\delta u^s} \xi^s.$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям.

Теперь мы воспользуемся тем, что в нашем случае мы имеем дело с функциями на джетах. Для начала заметим, что f и $\frac{\delta f}{\delta u^i}$ имеют одну и ту же степень как дифференциальные полиномы. Значит, они корректно определены на пространстве джетов $J^k \mathrm{M}^n$ для достаточно большого k. Зафиксируем точку на многообразии и рассмотрим последовательность ξ, сходящуюся к дельта-функции в точке р. Из нашего условия вытекает, что $\frac{\delta f}{\delta u^s}$ обращается в ноль в этой точке, а, стало быть, и во всех точках.

То есть мы показали, что если функционал $\alpha(\xi) = \int \alpha^q_\xi$ нулевой, то α_s равны нулю. Из этого вытекает, что для $f = D(g)$ функционал $\int f$ тождественный ноль, поэтому и $\alpha_s = \frac{\delta f}{\delta u^s}$ так же равны нулю. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Рассмотрим теперь функционал, зависящий от параметра и сдвига $F(\epsilon) = \int f(u + \epsilon\xi)$. Мы знаем, что его производная по ϵ в нуле равна нулю. Выбирая разные векторы сдвига, мы получаем

$$F(\epsilon_0 + \epsilon) = \int f(u + \epsilon_0\xi + \epsilon\xi),$$

то есть $F(\epsilon)$ не зависит от ϵ, то есть является постоянным. Осталось убедиться, что он ноль: для этого посмотрим на функционал, как на настоящий функционал на отображениях $\gamma : S^1 \to \mathrm{M}^n$. Взяв отображения в точку, мы получаем требуемое. Лемма доказана. □

Рассмотрим кривую $\gamma(x)$ на M^n. Тогда символы $u^i_{x^j}$ действуют на кривую $\gamma : [a, b] \to \mathrm{M}^n$ как $\frac{\mathrm{d}^j u^i(x)}{\mathrm{d}x^j} = u^i_{x^j}[\gamma]$. То есть элементы $f \in \mathcal{K}$ при такой интерпретации обладают свойством

$$f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Требуя инвариантность этого действия, то есть, чтобы композиция $f \circ \gamma$ как функция на отрезке не зависела от координат на многообразии, мы получаем: при замене координат $v(u)$ символы преобразуются как

$$v^i_{x^j}(u) = D^j(v(u)).$$

Несколько первых координат представлены в примере.

Пример 12.0.6. Для $j = 1, 2, 3$ формулы имеют вид:

$$v^\alpha_x = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} u^\beta_x$$
$$v^\alpha_{x^2} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} u^\beta_{x^2} + \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} u^\beta_x u^\gamma_x$$
$$v^\alpha_{x^3} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} u^\beta_{x^3} + 3\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} u^\beta_{x^2} u^\gamma_x + \frac{\partial^3 v^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma \partial u^\delta} u^\beta_x u^\gamma_x u^\delta_x.$$

Легко видеть, что формулы для $v^i_{x^j}$ — это однородные дифференциальные многочлены степени j. ■

Лемма 12.0.4. *Выполнены следующие свойства:*

1. *При замене координат $v(u)$ дифференциальная степень дифференциального многочлена сохраняется;*

2. *При замене координат $v(u)$ формула для D не меняется, то есть в новых координатах*
$$D = \sum_{j=0}^{\infty} v^q_{x^{j+1}} \frac{\partial}{\partial v^q_{x^j}};$$

3. *При замене координат $v(u)$ эволюционные векторные поля меняются как вектора, то есть*
$$\bar{\xi}^i = \xi^q \frac{\partial v^i}{\partial u^q}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Здесь $\bar{\xi}^i$ — компоненты эволюционного векторного поля в новой системе координат;

4. *При замене координат $v(u)$ вариационный дифференциал δf преобразуется как дифференциал, то есть*
$$\frac{\delta f}{\delta v^i} = \frac{\delta f}{\delta u^q}\frac{\partial u^q}{\partial v^i}.$$

Доказательство. Первая часть леммы очевидна, в силу того, что $v^i_{x^j}$ выражаются как однородные дифференциальные многочлены степени j от u^i. Второе утверждение вытекает из определения дифференциальной замены. Третье утверждение следует из условия, что эволюционные векторные поля однозначно определяются своим действием на координатах, то есть для замены $v(u)$ верно

$$\bar{\xi}^i = \xi(v^i(u)) = \frac{\partial v^i}{\partial u^s}\xi^s.$$

Здесь $\bar{\xi}^i$ обозначает компоненты эволюционного векторного поля в новых координатах. Для замены координат $u(v)$ мы получаем

$$\int \frac{\delta f}{\delta v^q}\xi^q = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \int f(v + \epsilon\xi) = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \int f(u(v + \epsilon\xi)) = \int \frac{\delta f}{\delta u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^q}\xi^q.$$

Вспомним, что в доказательстве леммы 12.0.3 мы показали, что условие $\alpha \equiv 0$ влечет $\alpha_q = 0$. То есть
$$\frac{\delta f}{\delta v^q} = \frac{\delta f}{\delta u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^q}$$
и четвертое утверждение доказано. □

Замечание 12.0.8. Таким образом, мы построили гамильтонов формализм на расслоении бесконечных джетов на диском (которое, конечно же, тривиально). Наша конструкция естественным образом строится в каждой карте и, стало быть, продолжается уже на расслоение бесконечных джетов на любому многообразии $J^\infty \mathrm{M}^n$. ■

Рассмотрим формальную (бесконечную) сумму вида

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots,$$

где $v_i \in \mathcal{K}$ и v_i либо ноль, либо однородный дифференциальный многочлен дифференциальной степени i. Умножение и сложение дифференциальных рядов определяется как и для обычных рядов покомпонентное. Полученное таким образом коммутативное ассоциативное кольцо обозначим как $\bar{\mathcal{K}}$.

Действие D продолжим на члены ряда по линейности, то есть

$$D(v) = D(v_0) + D(v_1) + D(v_2) + \ldots$$

Формальные эволюционные векторные поля (или иногда мы будем называть их формальными дифференциальными уравнениями) — это дифференцирования кольца $\bar{\mathcal{K}}$, коммутирующие с D. Пространство $\bar{\mathcal{K}}/D(\bar{\mathcal{K}})$ мы назовем пространством формальных функционалов.

Продолжим частные вариационные производные как $\frac{\delta v}{\delta u^i} = \frac{\delta v_0}{\delta u^i} + \frac{\delta v_1}{\delta u^i} + \ldots$. Имеем

1. В качестве $\mathfrak{h}$ мы берем формальные эволюционные векторные поля;
2. В качестве $\mathfrak{M}$ мы берем $\bar{\mathcal{K}}/D(\bar{\mathcal{K}})$;
3. Пространство $\Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$ состоит из α, которые действуют на $\mathfrak{h}$ как

$$\alpha(\xi) = \int \alpha_q \xi^q.$$

   Здесь $\alpha_q \in \bar{\mathcal{K}}$;
4. В качестве d выбираем отображение $f \to \delta f$.

Таким образом, мы получаем гамильтонов формализм для дифференциальных рядов. Гамильтонов формализм дифференциальных многочленов в этом случае оказывается частным случаем этой конструкции. В приложениях, как мы увидим, дифференциальные ряды обычно задаются с помощью подходящего дифференциального соотношения.

Пример 12.0.7 (см. [164]). Мы полагаем, что M^n одномерно, то есть $n = 1$ и u — координата на прямой. Рассмотрим соотношение

$$av_x + \frac{1}{2}v^2 = u. \tag{12.21}$$

Здесь a — некоторая константа.

Если правая часть — некоторая функция, то перед нами уравнение Рикатти. Мы, однако, предполагаем, что справа стоит координата и ищем решение этого соотношения в виде дифференциального ряда. Для этого мы берем $v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ и подставляем в соотношение (12.21). Мы считаем, что $v_x = D(v)$. Приравнивая коэффициенты слева и справа одной дифференциальной степени (справа, как мы видим, все члены дифференциальной степени > 0 равны нулю), получаем следующую бесконечную систему соотношений.

$$
\begin{aligned}
v_0^2 &= 2u, \\
v_{i+1} &= -\frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} v_j v_{i-j+1} + a(v_i)_x\right), \quad i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Первый член ряда выбирается с точностью до знака, то есть $v_0 = \sqrt{2u}$ или $v_0 = -\sqrt{2u}$. После этого все остальные члены строятся однозначно. Для первого случая первые три члена имеют вид

$$
v_0 = \sqrt{2u}, \quad v_1 = -a\frac{u_x}{2u}, \quad v_2 = a^2\frac{2uu_{xx} - 3u_x^2}{4\sqrt{2}u^{\frac{5}{2}}}.
$$

Легко видеть, что v_1 — полная производная по x. ■

Пример 12.0.8 (см. [164])**.** Мы полагаем, что M^n одномерно, то есть $n=1$ и u — координата на прямой. Рассмотрим другое соотношение

$$
b\Big(w_{xx}w - \frac{1}{2}w_x^2\Big) + uw^2 = 1 \tag{12.22}
$$

Здесь a — снова некоторая константа. Подставляя ряд $w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
1 &= uw_0^2, \\
0 &= 2uw_0w_1, \\
w_i &= -\frac{1}{2uw_0}\left(u\sum_{j=1}^{i-1} w_j w_{i-j} + b\sum_{j=0}^{i-2}\Big(w_{j,xx}w_{i-j-2} - \frac{1}{2}w_{j,x}w_{i-j-2,x}\Big)\right)
\end{aligned}
$$

Первый член ряда выбирается с точностью до знака, то есть $w_0 = \frac{1}{\sqrt{2u}}$ или $w_0 = -\frac{1}{\sqrt{2u}}$. После выбора знака, все остальные члены строятся однозначно. Для первого случая первые три члена имеют вид

$$
w_0 = \frac{1}{\sqrt{2u}}, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = b\frac{2uu_{xx} - 5u_x^2}{8\sqrt{2}u^{\frac{7}{2}}}.
$$

■

Бесконечномерный гамильтонов формализм II: локальные и слабо нелокальные гамильтоновы операторы

В конечномерном случае существование тензора Пуассона вытекало из наличия на кольце гладких функций операции умножения. В бесконечномерном случае на дифференциальных многочленах тоже есть операция умножения, однако $\mathrm{Image}(D)$ не является идеалом относительно этого умножения, и фактор-пространство - то есть пространство функционалов - операцию умножения не наследует.

Таким образом, внешний вид гамильтоновых операторов необходимо дополнительно постулировать (обычно, исходя из нужд приложений). Дифференциально-геометрическим однородным гамильтоновым оператором порядка N мы будем называть следующее (формальное) выражение:

$$\pi^{ij} = \sum_{k=0}^{N} \pi_k^{ij} D^k. \tag{12.23}$$

Здесь π_k^{ij} — матрицы, компоненты которых либо нули, либо однородные дифференциальные многочлены степени $n-k$. В частности, компоненты π_N^{ij} зависят только от $u^1, \dots, u^n$. Действие гамильтонова оператора на $\alpha \in \Omega^1$ мы определим как

$$\pi(\alpha) = \sum_{k=0}^{N} \pi_k^{iq} D^k(\alpha_q).$$

Из этой формулы мы получаем, что компоненты π_k^{ij} при замене координат преобразуются как

$$\bar{\pi}_k^{ij} = \pi_k^{pq} \frac{\partial v^i}{\partial u^p} \frac{\partial v^j}{\partial u^q} + \sum_{s=k+1}^{N} \binom{s}{k} \pi_s^{pq} \frac{\partial v^i}{\partial u^p} D^s\Big(\frac{\partial v^j}{\partial u^q}\Big).$$

Из этой формулы сразу же вытекает, что старший коэффициент π_N^{ij} преобразуется как тензор с двумя верхними индексами. Скобка Пуассона на $\mathcal{M}$ в этом случае определяется так: для $F = \int f, G = \int g$ рассмотрим

$$\{F, G\} = \int \sum_{k=0}^{N} \frac{\delta f}{\delta u^i} \pi_k^{ij} D^k(\frac{\delta g}{\delta u^j}).$$

В силу того, что в формулу справа входят вариационные производные, значение скобки не зависит от выбора f, g для F, G соответственно. То есть это действительно операция на функционалах. Условие кососимметричности дает следующее соотношение на компоненты матриц π_k^{ij}:

$$\pi_k^{ij} = (-1)^{k+1} \pi_k^{ji} + (-1)^{k+2} \binom{k+1}{k} D\big(\pi_{k+1}^{ji}\big) + \dots + (-1)^{N+1} \binom{N}{k} D^{N-k}\big(\pi_N^{ji}\big), \tag{12.24}$$

где $\binom{s}{k} = s!/k!(s-k)!$ биномиальные коэффициенты. В частности, хорошо видно, что кососимметричность для нечетного N означает, что $\pi_N^{ij} = \pi_N^{ji}$, то есть является симметрическим тензором типа $(2,0)$.

Замкнутость образа и формы ω_π из общего определения в этом конкретном случае эквивалентно тождеству Якоби для соответствующей скобки. В общем виде мы не будем записывать его в силу громоздкости. Вместо этого мы рассмотрим классические результаты. Гамильтонов оператор называется невырожденным, если π_N^{ij} — невырожденный тензор.

Теорема 12.0.12 (Дубровин, Новиков [133]). *Гамильтонов оператор для дифференциально-геометрической скобки Пуассона первого порядка имеет вид*

$$\pi^{ij} = g^{ij} D - \Gamma_s^{ij} u_x^s,$$

где g — плоская метрика, а Γ_s^{ij} — её контравариантные символы Кристоффеля.

В частности, видно, что гамильтонов оператор первого порядка полностью определяется метрикой. Из теоремы Дубровина-Новикова также вытекает, что локально всякая скобка первого порядка приводится к постоянному виду. Такие локальные координаты, где матрица скобки постоянна, мы (по аналогии с конечномерным случаем) будем называть координатами Дарбу.

Пример 12.0.9. Пусть $F = \int f$ и плотность — это дифференциальный многочлен степени ноль, то есть функция. В этом случае $\frac{\delta f}{\delta u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ и гамильтоново векторное поле для гамильтонова оператора первого порядка будет иметь вид

$$\xi_f^i = g^{iq} D\big(\frac{\partial f}{\partial u^q}\big) - g^{is}\Gamma^q_{sr} u^r_x \frac{\partial f}{\partial u^q} = g^{iq}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial u^q \partial u^s} - \Gamma^s_{qs}\frac{\partial f}{\partial u^s}\Big) u^s_x = \nabla^i \nabla_s u^s_x.$$

Мы видим, что скобка первого порядка ставит в соответствие функции f операторное поле $\nabla^i \nabla_j f$. В свою очередь полученное гамильтоново векторное поле — это квазилинейная система уравнений в частных производных. ■

Рассмотрим теперь дифференциально-геометрическую скобку третьего порядка. Чтобы сократить количество индексов, мы введем обозначения, отличные от общего случая, а именно:

$$\pi_3^{ij} = g^{ij}, \quad \pi_2^{ij} = 3b^{ij}, \quad \pi_1^{ij} = 3c^{ij}, \quad \pi_0^{ij} = d^{ij}.$$

Гамильтоново оператор третьего порядка в этих обозначениях имеет вид

$$\pi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} D^3 + 3b^{\alpha\beta} D^2 + 3c^{\alpha\beta} D + d^{\alpha\beta}, \tag{12.25}$$

где

$$\begin{aligned}
b^{\alpha\beta} &= b^{\alpha\beta}_s u^s_x,\\
c^{\alpha\beta} &= c^{\alpha\beta}_{rs} u^r_x u^s_x + c^{\alpha\beta}_s u^s_{xx},\\
d^{\alpha\beta} &= d^{\alpha\beta}_{rsq} u^r_x u^s_x u^q_x + d^{\alpha\beta}_{rs} u^r_{xx} u^s_x + d^{\alpha\beta}_s u^s_{xxx}.
\end{aligned}$$

Основным результатом для операторов третьего порядка является следующая теорема:

Теорема 12.0.13 (Потемин [148, 125])**.** *Невырожденный однородный гамильтонов оператор третьего порядка в форме* (12.25) *обладает следующими свойствами:*

1. *Элементы $\Gamma^i_{jk} = g_{jq} d^{qi}_k$ при замене координат преобразуются как символы Кристоффеля симметрической связности. Из тождества Якоби вытекает, что эта связность плоская;*

2. *В плоских координатах из предыдущего пункта гамильтонов оператор записывается в виде*

$$\pi_3^{\alpha\beta} = \pi_3^{\alpha\beta} = D \circ \big(g^{\alpha\beta} D^2 + c^{\alpha\beta}_s u^s_x D\big). \tag{12.26}$$

Коэффициенты при этом удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u^q} = c^{\alpha\beta}_q + c^{\beta\alpha}_q, \quad c^{\alpha\beta}_q g^{q\gamma} = -c^{\gamma\beta}_q g^{q\alpha},\\
&c^{\alpha\beta}_q g^{q\gamma} + c^{\beta\gamma}_q g^{q\alpha} + c^{\gamma\alpha}_q g^{q\beta} = 0,\\
&\frac{\partial c^{\alpha\beta}_q}{\partial u^s} g^{q\gamma} = c^{\alpha\gamma}_q c^{q\beta}_s - c^{\gamma\alpha}_q c^{q\beta}_s - c^{\gamma\beta}_q \frac{\partial g^{q\alpha}}{\partial u^s}.
\end{aligned}$$

На самом деле соотношения, полученные в теореме Потемина, вообще говоря, позволяют свести описание гамильтонова оператора третьего порядка к некоторой системе алгебраических уравнений. Более того, есть более специальные классификационные результаты в размерностях $n = 1, 2, 3, 4$.

Нас однако, интересует не этот факт, а то, что, вообще говоря, у гамильтонова оператора третьего порядка в общем случае не обязательно имеются координаты Дарбу, то есть координаты, в которых $\pi^{ij} = g^{ij} D^3$ и компоненты g^{ij} — постоянны.

Пример 12.0.10 ([125])**.** Пусть $\mathrm{M}^n = \mathbb{R}^3$ с координатами u, v, w и в этих координатах задан гамильтонов оператор третьего порядка в форме Потемина

$$\pi = D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -u \\ 1 & -u & 2v + u^2 \end{pmatrix} D^2 + D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 0 & v_x + uu_x \end{pmatrix} D.$$

Этот оператор возник в работе Ферапонтова, Гальвао, Мохова и Нутку при изучении уравнений WDVV [39]. Потемин показал, что метрика этого оператора плоская, хотя сам оператор к постоянному виду не приводится, то есть у него нет координат Дарбу. ■

В завершение этого раздела опишем так называемые слабо нелокальные гамильтоновы операторы. Для этого нам потребуется ввести D^{-1}. Мы будем понимать этот оператор в наивном смысле, а именно:

1. Область определения оператора совпадает с $\mathrm{Image}(D)$;
2. $DD^{-1}(f) = f$ для любого дифференциального многочлена;
3. $D^{-1}D(f) = f$ для любого дифференциального многочлена степени > 0;
4. На функциях $D^{-1}D(f) = f - f(\mathrm{p})$, где p некоторая фиксированная точка.

Определим гамильтонов оператор как

$$\pi^{ij} = g^{ij} D - \gamma^{ij}_s u^s_x + K u^i_x \cdot D^{-1} \cdot u^j_x.$$

Его действие на $\alpha \in \Omega^1$ имеет вид

$$\pi(\alpha) = g^{iq} D(\alpha_q) - \gamma^{iq}_s u^s_x \alpha_q + K u^i_x D^{-1}(u^q_x \alpha_q).$$

То есть в последнем слагаемом вычисляется действие векторного поля u^q_x на α, после чего к полученному дифференциальному многочлену применяется D^{-1}. Разумеется, оператор определен только на таких 1-формах, что $u^q_x \alpha_q = D(g)$ для некоторого g. То есть, строго говоря, слабо нелокальные операторы должны рассматриваться в рамках иного гамильтонова формализма. Однако для δf верно

$$\int u^i_x \frac{\delta f}{\delta u^i} = \int \sum_{j=0}^{\infty} u^i_x (-1)^j D^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^i_{x^j}}\right) = \int D(f) = 0.$$

То есть, можно рассматривать вместо всего $\Omega^1(\mathfrak{h}, \mathcal{M})$ только образ $\mathrm{Image}(\delta)$. То есть этот формализм получается из построенного в предыдущем пункте сравнительно простой модификацией. Нам потребуется следующая теорема и пример после нее.

Теорема 12.0.14 (Мохов, Ферапонтов [76, 154]). *Выражение*

$$\pi^{ij} = g^{ij}D - \Gamma^{ij}_s u^s_x + K u^i_x \cdot D^{-1} \cdot u^j_x$$

задает на своей области определения гамильтонов оператор тогда и только тогда, когда g^{ij} — метрика постоянной секционной кривизны K, а Γ^{ij}_s — её контравариантные символы Кристоффеля.

Пример 12.0.11. Пусть $F = \int f$ и плотность — это дифференциальный многочлен степени ноль, то есть функция. Для удобства считаем, что $f(\mathrm{p}) = 0$. В этом случае $\frac{\delta f}{\delta u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ и гамильтоново векторное поле для гамильтонова оператора первого порядка будет иметь вид

$$\xi^i_f = g^{iq} D\big(\frac{\partial f}{\partial u^q}\big) - g^{is}\Gamma^q_{sr} u^r_x \frac{\partial f}{\partial u^q} + K u^i_x D^{-1}\big(\frac{\partial f}{\partial u^s} u^s_x\big) =$$
$$= g^{iq}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial u^q \partial u^s} - \Gamma^s_{qs}\frac{\partial f}{\partial u^s} + K f \delta^i_s\Big) u^s_x = \Big(\nabla^i \nabla_s + K f \delta^i_s\Big) u^s_x.$$

Мы видим, что слабо нелокальная скобка первого порядка ставит в соответствие функции f операторное поле $\nabla^i\nabla_j f + K f \mathrm{Id}$. Мы видим, что выбор $f(\mathrm{p}) \neq 0$ приводит к добавлению к этой матрице скалярной, то есть не влияет на свойства полученного операторного поля. ∎

Приложение III: Теоремы Фробениуса

Вещественный случай

Все объекты в этом разделе рассматриваются над $\mathbb{R}$. Распределением $\mathcal{D}$ называется подпространство в $T^*\mathrm{M}^n$, зависящее от точки. Распределение называется гладким распределением размерности k (мы будем рассматривать только такие), если в окрестности любой точки p найдутся k линейно независимых векторных полей $\eta_1, \ldots, \eta_k$, таких, что в любой точке окрестности q распределение в этой точке, то есть $\mathcal{D}_\mathrm{q}$, совпадает с линейной оболочкой $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Распределение называется интегрируемым в окрестности точки p, если в этой окрестности найдутся такие гладкие функции $f_1, \ldots, f_{n-k}$, что

1. $\mathrm{d}f_i$ линейно независимы;
2. $$\mathcal{D} = \bigcap_{j=1}^{n-k} \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_j.$$

Прежде чем перейти к основной теореме этого раздела, сделаем пару важных замечаний.

Во-первых, теорема, о которой идет речь, представляет собой компиляцию нескольких результатов, которые известны в литературе под разными именами. Непосредственно теоремой Фробениуса называют третье утверждение теоремы. Однако, так как они все идеологически близки, мы позволили себе вольность собрать их воедино и назвать полученную компиляцию теоремой Фробениуса.

Во-вторых, важным является метод доказательства, который использует два инструмента — интегральные формулы и теорему о выпрямлении. Грубо говоря, там, где можно написать формулу (вместо использования какой-либо известной теоремы), мы пишем формулу. Как мы увидим в следующем разделе, благодаря этому доказательство дословно переносится на комплексно-аналитический случай.

Теорема 12.0.15 (Фробениус)**.** *Пусть в окрестности точки* p *заданы линейно независимые векторные поля* $\eta_1, \ldots, \eta_k$. *Тогда*

1. *Если*
$$[\eta_i, \eta_j] = 0, \quad 1 \le i < j \le k,$$

то найдется такая система координат $u^1,\dots,u^n$, что

$$\eta_s = \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad i = s,\dots,k;$$

2. *Если (суммирования по повторяющимся индексам нет)*

$$[\eta_i,\eta_j] = f_{ij}\eta_i + g_{ij}\eta_j, \quad 1 \le i < j \le k \quad \text{функции } f_{ij}, g_{ij} \text{ — гладкие,}$$

то найдутся такие отличные от нуля в целой окрестности функции $h_s, s = 1,\dots,k$ и такая система координат $u^1,\dots,u^n$, что

$$\eta_s = h_s\frac{\partial}{\partial u^s}, \quad s = 1,\dots,k;$$

3. *Если (в формуле суммирование по k)*

$$[\eta_i,\eta_j] = c_{ij}^k\eta_k, \quad 1 \le i < j \le k \quad \text{функции } c_{ij}^k \text{ — гладкие,}$$

то найдутся такие функции $h_s^q, 1 \le q,s \le k$ и такая система координат $u^1,\dots,u^n$, что

$$h_s^q\eta_q = \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad s = 1,\dots,k.$$

В частности, векторные поля $\xi_s = h_s^q\eta_q$ линейно независимы и попарно коммутируют.

Доказательство. В доказательстве всех утверждений будет использоваться редукция. Начнем с первого. Для $k = 1$ — это теорема о выпрямлении.

Пусть теперь верно для k, рассмотрим для $k+1$. По индукционному предположению мы можем зафиксировать систему координат $u^1,\dots,u^n$, в которой векторные поля имеют вид (мы переименуем для удобства η_{k+1} в ξ)

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \dots, \quad \eta_k = \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \xi = \xi^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}.$$

Условие коммутирования принимает вид

$$[\frac{\partial}{\partial u^i},\xi] = \frac{\partial\xi^1}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \frac{\partial\xi^n}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^n} = 0, \quad i = 1,\dots,k.$$

Таким образом, ξ^i не зависят от $u^1,\dots,u^n$. Из линейной независимости вытекает, что вектор

$$\bar{\xi} = \xi - \xi^1\eta_1 - \dots - \xi^k\eta_k = \xi^{k+1}\frac{\partial}{\partial u^{k+1}} + \dots + \xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}$$

не нулевой. Заметим, что его можно рассматривать как векторное поле на пространстве $\mathbb{R}^{n-k}$ с координатами $u^{k+1},\dots,u^n$. По теореме о выпрямлении это поле выпрямляется. То есть существует замена координат $\bar{u}^{k+j}(u^{k+1},\dots,u^n), j = 1,\dots,n-k$, что в ней векторное поле имеет вид $\frac{\partial}{\partial\bar{u}^{k+1}}$. Продлим эту замену до замены на всем пространстве как $\bar{u}^i = u^i, i = 1,\dots,n$. По построению

$$\mathcal{L}_{\eta_i}\bar{u}^s = \delta_i^s, \quad i = 1,\dots,k, s = 1,\dots,n \quad \mathcal{L}_\xi\bar{u}_{k+1}^j, \quad j = 1,\dots,n-k.$$

Значит, в новых координатах (переобозначим их как старые, чтобы не таскать с собой черточки):

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \dots, \quad \eta_k = \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \xi^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \frac{\partial}{\partial u^{k+1}}.$$

Заметим сначала, что $u^{k+2}, \dots, u^n$ — совместные первые интегралы полученных векторных полей. То есть $\mathcal{L}_{\eta_i} u^s = \mathcal{L}_\xi u^s = 0, s = k+2, \dots, n$. Рассмотрим теперь векторные поля как поля на $\mathbb{R}^{k+1}$ с координатами $u^1, \dots, u^{k+1}$, считая что $u^{k+1}, \dots, u^n$ — параметры, от которых зависит ξ. Определим функции $\bar{u}^i, i = 1, \dots, k+1$ по формуле

$$\bar{u}^i = u^i - \int_0^{u^{k+1}} \xi^i(s, u^{k+2}, \dots, u^n) \mathrm{d}s, \quad i = 1, \dots, k,$$
$$\bar{u}^{k+1} = u^{k+1}.$$

Взяв за $\bar{u}^{k+2} = u^{k+2}, \dots, \bar{u}^n = u^n$ и считая, что $\xi = \eta_{k+1}$, мы получаем формулу

$$\mathcal{L}_{\eta_i} \bar{u}^s = \delta_i^s, \quad 1 \le i \le k+1, 1 \le s \le n.$$

Заметим, что матрица Якоби $\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}$ верхнетреугольная с единицами на диагонали, то есть $\det J = 1$. Значит, она задает систему координат. В этих новых координатах векторные поля имеют вид, описанный в теореме 12.0.15. Индукционный переход доказан, а, значит, доказано и первое утверждение теоремы.

Перейдем ко второму утверждению. В этом случае в качестве базы индукции возьмем $n = 2$. Имеется следующая лемма.

Лемма 12.0.5. *Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана пара линейно независимых векторных полей ξ и η. Тогда найдется пара таких отличных от нуля функций f, g, что $f\xi$ и $g\eta$ коммутируют.*

Доказательство. В силу того, что размерность многообразия равна двум, мы имеем

$$[\xi, \eta] = a\xi - b\eta,$$

где a, b — некоторые функции. Теперь рассмотрим $[f\xi, g\eta]$ для произвольных функций f, g:

$$[f\xi, g\eta] = f\mathcal{L}_\xi g\eta - g\mathcal{L}_\eta f\xi + fg[\xi, \eta] = f\big(\mathcal{L}_\xi g - bg\big)\eta - g\big(\mathcal{L}_\eta f - af\big)\xi.$$

Так как ξ, η — линейно независимы, то условие коммутирования эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_\xi g - bg = 0, \quad \mathcal{L}_\eta f - af = 0.$$

Мы видим, что уравнения разделились, то есть их можно решать по отдельности. Рассмотрим первое уравнение в координатах выпрямления для ξ. Получаем

$$\frac{\partial g}{\partial u^1} = bg.$$

Общее решение такого уравнения записывается в виде

$$g(u^1, \dots, u^n) = c(u^2, \dots, u^n) \exp \int^{u^1} b(s, u^2, \dots, u^n) \mathrm{d}s.$$

Здесь $c(u^2, \dots, u^n)$ — произвольная гладкая функция от $n-1$ переменных. Выбирая $c \ne 0$, получаем требуемое ненулевое решение. Функция f строится аналогично. Лемма доказана. □

Для доказательства второго утверждения теоремы 12.0.15 мы покажем, что в заданных условиях найдутся такие функции h_i, что векторные поля $h_i\eta_i$ — коммутируют. Тогда существование системы координат будет вытекать из первого утверждения той же теоремы.

Доказывать будем по индукции. Лемма 12.0.5 задает базу индукции. Пусть теперь утверждение верно для k, покажем для $k+1$. Для начала заметим, что условие

$$[\eta_i, \eta_j] = f_{ij}\eta_i + g_{ij}\eta_j, \quad 1 \le i < j \le k+1$$

инвариантно относительно преобразования $\eta_i \to h_i\eta_i$ для произвольных функций h. Таким образом, по индукционному предположению найдутся $h_1, \ldots, h_k$, что $h_i\eta_i$ коммутируют. То есть можно считать, что первые k векторных полей попарно коммутируют. По доказанному выше утверждению мы можем выбрать систему координат $u^1, \ldots, u^n$, в которой эти поля имеют вид (мы снова переименуем для удобства η_{k+1} в ξ)

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \eta_k = \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \xi = \xi^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + \xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}.$$

В этих координатах коммутатор имеет вид (мы выбросили вторые индексы у f, g)

$$[\eta_i, \xi] = f_i\frac{\partial}{\partial u^i} + g_i\xi = g_i\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + (f_i + g_i\xi^i)\frac{\partial}{\partial u^i} + \cdots + g_i\xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Вспомним, что коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби. Запишем его для η_i, η_j, ξ

$$\begin{aligned}
0 &= [\eta_i, [\eta_j, \xi]] + [\eta_j, [\xi, \eta_i]] + [\xi, [\eta_i, \eta_j]] = [\eta_i, [\eta_j, \xi]] - [\eta_j, [\eta_i, \xi]] = [\eta_i, f_j\eta_j + g_j\xi] - [\eta_j, f_i\eta_i + g_i\xi] = \\
&= \frac{\partial f_j}{\partial u^i}\eta_j + \frac{\partial g_j}{\partial u^i}\xi + g_j[\eta_i, \xi] - \frac{\partial f_i}{\partial u^j}\eta_i - \frac{\partial g_i}{\partial u^j}\xi - g_i[\eta_j, \xi] = \frac{\partial f_j}{\partial u^i}\eta_j + \frac{\partial g_j}{\partial u^i}\xi + g_jf_i\eta_i + g_jg_i\xi - \frac{\partial f_i}{\partial u^j}\eta_i - \\
&- \frac{\partial g_i}{\partial u^j}\xi - g_if_j\eta_j - g_ig_j\xi = \Big(\frac{\partial f_j}{\partial u^i} - g_if_j\Big)\eta_j - \Big(\frac{\partial f_i}{\partial u^j} - g_jf_i\Big)\eta_i + \Big(\frac{\partial g_j}{\partial u^i} - \frac{\partial g_i}{\partial u^j}\Big)\xi.
\end{aligned}$$

Так как векторные поля η_i, η_j, ξ линейно независимы, мы получаем, что функции f_i, f_j, g_i, g_j для $1 \le i \ne j \le k$ удовлетворяют следующей системе:

$$\frac{\partial f_j}{\partial u^i} - g_if_j = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial u^j} - g_jf_i = 0, \quad \frac{\partial g_j}{\partial u^i} - \frac{\partial g_i}{\partial u^j} = 0. \tag{12.27}$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 12.0.6. *Найдется такая ненулевая функция Φ, что для $\bar\xi = \Phi\xi$ верно*

$$[\eta_i, \bar\xi] = f_i\eta_i.$$

Доказательство. Для произвольной функции Φ рассмотрим коммутатор

$$[\eta_i, \Phi\xi] = \frac{\partial\Phi}{\partial u^i}\xi + \Phi[\eta_i, \xi] = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial u^i} + \Phi g_i\Big)\xi + f_i\eta_i.$$

Для того, чтобы утверждение леммы выполнялось, нужно, чтобы Φ удовлетворяло системе

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u^i} + g_i\Phi = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{12.28}$$

Определим функцию G следующей интегральной формулой

$$G(u^1,\dots,u^n)=\int_0^{u^1} g_1(s,u^2,\dots,u^n)\mathrm{d}s+\int_0^{u^2} g_2(0,s,u^3\dots,u^n)\mathrm{d}s+\dots$$
$$\dots+\int_0^{u^k} g_k(0,\dots,0,s,u^{k+1},\dots,u^n)\mathrm{d}s.$$

Проверим, что $\frac{\partial G}{\partial u^i}=g_i, i=1,\dots,k$. Действительно

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u^i}&=\int_0^{u^1}\frac{\partial g_1}{\partial u^i}(s,u^2,\dots,u^n)\mathrm{d}s+\dots+g_i(0,\dots,0,u^i,\dots u^n)=\\&=\int_0^{u^1}\frac{\partial g_i}{\partial u^1}(s,u^2,\dots,u^n)\mathrm{d}s+\dots+g_i(0,\dots,0,u^i,\dots u^n)=\\&=g_i(u^1,\dots,u^n)-g_i(0,u^2,\dots,u^n)+g_i(0,u^2,\dots,u^n)+\dots-g_i(0,\dots,0,u^i,\dots u^n)+\\&+g_i(0,\dots,0,u^i,\dots u^n)=g_i(u^1,\dots,u^n).\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались $\frac{\partial g_i}{\partial u^j}=\frac{\partial g_j}{\partial u^i}$. Легко видеть, что $\Phi=\exp(-G)$ решает систему (12.28) и ненулевая. Лемма доказана. □

Отметим, что формулы в доказательстве леммы являются частным случаем доказательства леммы Пуанкаре для 1-форм. Однако в нашем случае, как уже говорилось, их использование позволяет почти дословно перенести доказательство всей теоремы на комплексный случай.

Из леммы 12.0.6 вытекает, что индукционный переход достаточно доказывать для следующего специального случая:

$$\eta_i=\frac{\partial}{\partial u^i},\quad i=1,\dots,k,\quad \xi=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\dots+\xi^n\frac{\partial}{\partial u^n},\quad [\eta_i,\xi]=f_i\eta_i.$$

Условия (12.27) в этом случае (то есть когда $g_i=0$) дают $\frac{\partial f_i}{\partial u^j}=0$, то есть функции f_i не зависят от $u^1,\dots,u^{i-1},u^{i+1},\dots,u^n$. Заметим так же, что

$$[\eta_i,\xi]=f_i\eta_i=\frac{\partial\xi^1}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^i}+\dots+\frac{\partial\xi^n}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^n}=f_i\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Из этого немедленно вытекает, что

1. Компоненты $\xi^{k+1},\dots,\xi^n$ не зависят от $u^1,\dots,u^k$;
2. Для $i=1,\dots,k$ компонента ξ^i не зависит от $u^1,\dots,u^{i-1},u^{i+1},\dots,u^k$.

Снова рассмотрим хвост векторного поля, то есть

$$\bar\xi=\xi^{k+1}\frac{\partial}{\partial u^{k+1}}+\dots+\xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}$$

как векторное поле на $\mathbb{R}^{n-k}$ с координатами $u^{k+1},\dots,u^n$. Для него есть выражение $\bar\xi=\xi-\xi^1\eta_1-\dots-\xi^n\eta_n$. Так как η_i,ξ — линейно независимы, $\bar\xi\neq 0$.

К нему применима теорема о выпрямлении. Это означает, что найдется замена координат $\bar{u}^{k+1}(u^{k+1},\dots,u^n),\dots,\bar{u}^n(u^{k+1},\dots,u^n)$, которая выпрямляет поле. Продлим эту замену до замены на всей окрестности как $\bar{u}^1 = u^1,\dots,\bar{u}^k = u^k$. Получим (снова забываем про черточки, чтобы их не тащить с собой):

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i = 1,\dots,k, \quad \xi = \xi^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \xi^k\frac{\partial}{\partial u^k} + \frac{\partial}{\partial u^{k+1}}, \quad [\eta_i,\xi] = f_i\eta_i.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 12.0.7. *В предположениях выше для данных $f_i, i = 1,\dots,$ найдутся такие ненулевые функции h_i, что*

1. *Они удовлетворяют системе уравнений*

$$\mathcal{L}_\xi h_i - f_i h_i = 0, \quad i = 1,\dots,n;$$

2. *Функции h_i не зависят от $u^1,\dots,u^{i-1},u^{i+1},\dots,u^n$.*

Доказательство. Для начала заметим, что уравнения в утверждении леммы разделены. Поэтому достаточно доказать для одного уравнения, скажем, $i = 1$. Ищем решение в классе функций, которые не зависят от $u^2,\dots,u^k$. Для такого класса уравнение принимает вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial u^1}\xi^1 + \frac{\partial h_1}{\partial u^{k+1}} - f_1h_1 = 0.$$

Мы видим, что f_1, ξ^1 не зависят от $u^2,\dots,u^k$. Эту систему можно рассматривать как систему на $\mathbb{R}^{n-k+1}$ с координатами $u^1,u^{k+1},\dots,u^n$. Легко видеть, что ξ ненулевой. Применяя теорему о выпрямлении, получаем, что в новых координатах $v^1,\dots,v^n$ уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial h_1}{\partial v^1} = f_1h_1.$$

Его общее решение записывается как

$$h_1 = c(v^2,\dots,v^n)\exp\int_0^{v^1} f_1(s,v^2,\dots,v^n)\mathrm{d}s.$$

Здесь $c(v^2,\dots,v^n)$ — произвольная функция от $n-1$ переменной. Выбирая её ненулевой, получаем, что h_1 — ненулевая. Возвращаясь в исходные координаты, получаем функцию h_1, которая не зависит от $u^2,\dots,u^k$. Лемма доказана. □

Выберем функции h_i, описанные в лемме 12.0.7. Заметим, что

$$[h_i\eta_i, h_j\eta_j] = 0.$$

Кроме этого

$$[h_i\eta_i,\xi] = -\mathcal{L}_\xi h_i\eta_i + h_if_i\eta_i = -(L_\xi h_i\eta_i - h_if_i)\eta_i = 0.$$

Таким образом, мы показали индукционный переход и, стало быть, второе утверждение теоремы 12.0.15 доказано.

Перейдем к последнему, третьему утверждению. Векторные поля $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — линейно независимы. Это означает, что ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \eta_1^1 & \eta_1^2 & \eta_1^3 & \ldots & \eta_1^n \\ \eta_2^1 & \eta_2^2 & \eta_2^3 & \ldots & \eta_2^n \\ & & & & \\ \eta_k^1 & \eta_k^2 & \eta_k^3 & \ldots & \eta_k^n \end{pmatrix}$$

имеет ранг k. Без ограничения общности считаем, что определитель первого минора $k \times k$ отличен от нуля. Обозначим

$$H = \begin{pmatrix} \eta_1^1 & \eta_1^2 & \ldots & \eta_1^k \\ \eta_2^1 & \eta_2^2 & \ldots & \eta_2^k \\ & & \ddots & \\ \eta_k^1 & \eta_k^2 & \ldots & \eta_k^k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 & \ldots & h_1^k \\ h_2^1 & h_2^2 & \ldots & h_2^k \\ & & \ddots & \\ h_k^1 & h_k^2 & \ldots & h_k^k \end{pmatrix}.$$

Тогда рассмотрим

$$HM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi_1^{k+1} & \ldots & \xi_1^n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \xi_2^{k+1} & \ldots & \xi_2^n \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \xi_k^{k+1} & \ldots & \xi_k^n \end{pmatrix}.$$

Строки полученной матрицы обозначим ξ_i. Имеем, что $\xi_i = h_i^q \eta_q$. Кроме этого

$$[\xi_i, \xi_j] = [h_i^q \eta_q, h_j^s \eta_s] = h_i^q \mathcal{L}_{\eta_q} h_j^s \eta_s - h_j^q \mathcal{L}_{\eta_q} h_i^s \eta_s + h_i^q h_j^r c_{qr}^s \eta_s.$$

Матрица H обратима, поэтому, подставляя в правую часть выражения $\xi_i = \eta_i^q \eta_q, \quad i = 1, \ldots, k$, мы получаем

$$[\xi_i, \xi_j] = \bar{c}_{ij}^s \xi_s.$$

В это же время имеем

$$[\xi_i, \xi_j] = (\ldots)\frac{\partial}{\partial u^{k+1}} + \cdots + (\ldots)\frac{\partial}{\partial u^n},$$

то есть первые k компоненты коммутатора равны нулю. С другой стороны

$$\bar{c}_{ij}^s \xi_s = \bar{c}_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + \bar{c}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \ldots.$$

Приравнивая эти два выражения, получаем, что все $\bar{c}_{ij}^s, 1 \le i, j, s \le k$ равны нулю и векторные поля ξ_i коммутируют. Воспользовавшись первым утверждением теоремы, мы получаем, что и третье утверждение доказано. Таким образом, теорема Фробениуса доказана. $\square$

Замечание 12.0.9. Первое утверждение теоремы Фробениуса можно понимать следующим образом: рассмотрим векторные поля $\xi_1, \ldots, \xi_k$. В локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$ с ними связана переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений (несмотря на то, что слева стоят частные производные по временам, правые части уравнений зависят только от координат):

$$\partial_{t_1} u^i = \xi_1^i(u), \quad \partial_{t_2} u^i = \xi_2^i(u), \quad \ldots, \partial_{t_k} u^i = \xi_k^i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Условия совместности такой системы имеют вид

$$0 = \partial_{t_i}\partial_{t_j} u^s - \partial_{t_j}\partial_{t_i} u^s = \partial_{t_i}\xi_j^s - \partial_{t_j}\xi_i^s = \frac{\partial \xi_j^s}{\partial u^q}\xi_i^q - \frac{\partial \xi_i^s}{\partial u^q}\xi_j^q, \quad 1 \le i, j \le k, \quad 1 \le s \le n.$$

Это в точности условие коммутирования соответствующих векторных полей. Соответственно, теорема Фробениуса говорит, что это условие не только необходимое, но и достаточное для существования общего решения системы $u^s(t_1, \dots, t_k), s = 1, \dots, n$ как в гладкой, так и в вещественно-аналитической категории. А ниже мы увидим, что и в комплексно-аналитической категории это также верно. ■

Комплексный случай

Нам потребуется следующее утверждение, известное как голоморфная (она же комплексно-аналитическая) теорема о выпрямлении векторного поля.

Теорема 12.0.16 (Голоморфная теорема о выпрямлении, теорема 1.21 в [135])**.** *Голоморфное векторное поле ξ в достаточно малой окрестности любой точки* p*, где $\xi \neq 0$, голоморфно эквивалентно постоянному векторному полю $\xi^1 = 1, \xi^i = 0, i = 2, \dots, n$.*

Будем говорить, что на комплексно-аналитическом многообразии M^n задано комплексно-аналитическое распределение $\mathcal{D}$ размерности k, если:

1. В касательном пространстве $T\mathrm{M}^n$ к каждой точке $\mathrm{p} \in \mathrm{M}^n$ выделено подпространство;
2. В окрестности каждой точки p существует k линейно независимых голоморфных векторных полей $\xi_1, \dots, \xi_k$, линейная оболочка которых в каждой точке окрестности q совпадает с $\mathcal{D}_\mathrm{q}$, то есть с выделенным подпространством касательного пространства в этой точке.

Мы говорим, что голоморфное распределение интегрируемо, если в окрестности любой точки p найдутся $n-k$ таких голоморфных функций $f_1, \dots, f_n$, что

1. $\mathrm{d}f_i$ линейно независимы
2. $$\mathcal{D} = \bigcap_{j=1}^{n-k} \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_j.$$

Следующая теорема является комплексным аналогом вещественной теоремы Фробениуса.

Теорема 12.0.17 (Фробениус)**.** *Пусть в окрестности точки* p *заданы линейно независимые векторные голоморфные поля $\eta_1, \dots, \eta_k$. Тогда*

1. *Если*
$$[\eta_i, \eta_j] = 0, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$
то найдется такая голоморфная система координат $u^1, \dots, u^n$, что
$$\eta_s = \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad i = s, \dots, k;$$

2. *Если (суммирования по повторяющимся индексам нет)*

$$[\eta_i, \eta_j] = f_{ij}\eta_i + g_{ij}\eta_j, \quad 1 \leq i < j \leq k \quad \textit{функции } f_{ij}, g_{ij} \textit{ — голоморфные,}$$

то найдутся такие отличные от нуля в целой окрестности голоморфные функции $h_s, s = 1, \ldots, k$ *и такая система координат* $u^1, \ldots, u^n$, *что*

$$\eta_s = h_s \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad s = 1, \ldots, k;$$

3. *Если (в формуле суммирование по* k*)*

$$[\eta_i, \eta_j] = c_{ij}^k \eta_k, \quad 1 \leq i < j \leq k \quad \textit{функции } c_{ij}^k \textit{ — голоморфные,}$$

то найдутся такие голоморфные функции $h_s^q, 1 \leq q, s \leq k$ *и такая голоморфная система координат* $u^1, \ldots, u^n$, *что*

$$h_s^q \eta_q = \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad s = 1, \ldots, k.$$

В частности, голоморфные векторные поля $\xi_s = h_s^q \eta_q$ *линейно независимы и попарно коммутируют.*

Доказательство. Первое утверждение доказываем по индукции. Случай $k = 1$ — это в точности голоморфная теорема о выпрямлении. Затем доказательство идет аналогично вещественному случаю — все формулы, включая интегральные для замены координат, корректно определены в комплексном случае.

Второе утверждение так же доказываем, сводя к первому. Легко видеть, что, снова используя голоморфную теорему о выпрямлении, получаем, что для $\mathbb{C}^2$ верен аналог леммы 12.0.5

Лемма 12.0.8. *Пусть на плоскости* $\mathbb{C}^2$ *задана пара линейно независимых голоморфных векторных полей* ξ *и* η. *Тогда найдется пара таких отличных от нуля в окрестности нуля голоморфных функций* f, g, *что* $f\xi$ *и* $g\eta$ *коммутируют.*

Доказательство этой леммы использует голоморфную теорему о выпрямлении и явную интегральную формулу в выпрямляющих координатах, которая задает соответствующие голоморфные функции. Дальше мы действуем по индукции.

Существование функции Φ для векторного поля ξ задается интегральной формулой. Выпрямление хвоста ξ — это голоморфная теорема о выпрямлении. Наконец, поиск финальных h_i — это снова та же голоморфная теорема о выпрямлении.

По модулю первого утверждения, третье утверждение теоремы получается алгебраически. Таким образом, доказательство для комплексного случая полностью повторяет вещественный. □

Получим важное и полезное следствие для операторов Нийенхейса.

Предложение 12.0.1. *Пусть* L *— гладкий (голоморфный) оператор Нийенхейса постоянного ранга* $k \leq n$. *Рассмотрим регулярное гладкое (голоморфное) распределение* $\mathcal{D} = \mathrm{Image}(L)$. *Оно интегрируемо.*

Доказательство. Образ $\mathrm{Image}(L)$ порождается векторными полями вида $L\xi$, где ξ пробегает весь модуль Ψ^0. Перепишем кручение Нийенхейса как

$$\begin{aligned}[L\xi, L\eta] &= -L^2[\xi,\eta] + L[L\xi,\eta] + L[\xi, L\eta] \\ &= L\Big(-L[\xi,\eta] + [L\xi,\eta] + [\xi, L\eta]\Big) \in \mathrm{Image}(L).\end{aligned}$$

Мы видим, что коммутатор двух векторных полей вида $L\xi$ и $L\eta$ — это снова векторное поле вида $L\zeta$. Таким образом, по теореме Фробениуса в вещественном случае и голоморфной теореме Фробениуса в комплексно-аналитическом эти распределения интегрируемы. □