Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 517.938.5+514.762

Коняев Андрей Юрьевич

Алгебраические и геометрические свойства систем, получаемых методом сдвига аргумента

01.01.04 — геометрия и топология
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
Академик А.Т. Фоменко,
профессор А.В. Болсинов

Москва — 2010

Содержание

1 Введение

Первоначально метод сдвига аргумента (в русскоязычной литературе встречается также термин "метод сдвига инвариантов", а в англоязычной употребляется сразу два перевода — argument shift method и argument translation method) возник в работе С.В. Манакова [16] для интегрирования уравнения Эйлера, описывающего многомерный аналог твердого тела на алгебре Ли $so(n)$. Позже в работах А.С. Мищенко и А.Т.Фоменко [18], [19] этот метод был обобщен на случай комплексных редуктивных алгебр Ли и их вещественных форм. В.В.Трофимов и А.Т.Фоменко [23] показали, что этот метод может использоваться для интегрирования геодезических потоков определенного класса на симметрических пространствах.

Суть классического метода сдвига аргумента состоит в следующем. Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$(комплексную или вещественную). Отождествим алгебру с коалгеброй, то есть с пространством линейных функционалов на алгебре $\mathfrak{g}^*$, при помощи формы Киллинга, которая в данном случае невырождена. В результате этого на полиномиальных функциях из $C^\infty(\mathfrak{g})$ можно рассмотреть структуру алгебры Пуассона, задаваемую скобкой $\{f, g\} = -(x, [\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g])$, где круглые скобки обозначают скалярное умножение в смысле формы Киллинга, а градиенты берутся также в смысле этой формы. Центром этой алгебры является кольцо инвариантов присоединенного представления, которое в случае простой алгебры представляет собой свободно порожденное кольцо, степень трансцендентности которого совпадает с рангом и, следовательно, индексом $\mathfrak{g}$.

Пусть $I_1, ..., I_n$ — полиномиальные порождающие этого кольца, степени которых равны $d_1, ..., d_n$ соответственно. Рассмотрим следующее разложение

$$I_i(x + \lambda a) = \sum_{j=0}^{d_i} f_{ij}\lambda^j.$$

В работе [18] показано, что f_{ij} коммутируют между собой. Рассмотрим алгебру, положенную этими полиномами (в данном случае, как и в дальнейшем, термин "алгебра"мы будем применять для коммутативной структуры на кольце полиномов от элементов $\mathfrak{g}$), которую мы обозначим через $\mathcal{F}_a^c$. Эта алгебра может рассматриваться как алгебра полиномиальных интегралов некоторой гамильтоновой относительно фиксированной выше скобки Пуассона системы, где в качестве гамильтониана H взята функция из этой алгебры.

В дальнейшем при изучении алгебраических свойств полученных функций мы вообще не будем упоминать интегрируемые системы, а сразу рассматривать коммутативные алгебры полиномов. Заметим, что определение данной алгебры канонично, то есть не зависит от выбора порождающих в кольце инвариантов, а зависит только от элемента a. В работе [12] этим подалгебрам было дано название подалгебры Мищенко-Фоменко.

Данные подалгебры представляют значительный интерес как для геометров, так и для алгебраистов. Например, Э.Б.Винбергу удалось показать [12], что для случая регулярного полупростого $a \in \mathfrak{g}$ квадратичные функции из этой алгебры можно поднять в универсальную обертывающую алгебру. В свою очередь Л.Г.Рыбникову[21] удалось сделать это уже для всей алгебры. Кроме этого Тарасову А.А. [39] удалось показать, что в случае регулярных полупростых a получаемая подалгебра является максимальной по включению. Позже этот результат был обобщен в работе [40].

Помимо изучения полученных наборов велась интенсивная деятельность по обобщению метода сдвига аргумента. Первым это сделал А.В.Браилов, предложивший следующую схему, которую мы в дальнейшем будем называть локальным методом сдвига аргумента (существует еще одно обобщение, которое позволяет получать так называемые предельные подалгебры Мищенко-Фоменко, [37], однако в данной работе оно обсуждаться не будет). Рассмотрим a — регулярный элемент коалгебры. В окрестности a определены функции Казимира, совместные поверхности уровня которых - пересечения симплектических слоев слоения на $\mathfrak{g}^*$ с окрестностью (из линейности тензора Пуассона получаем, что слои задаются рациональными формами, а, значит, в вещественном случае полученные функции всегда можно выбрать в виде суммы рациональной и логарифма от рациональной).

Обозначим эти функции через $I_1, ..., I_n$. Если применять к ним обычный метод сдвига аргумента, то, во-первых, получаются не полиномы, а во-вторых, данные функции определены локально. Оказывается, ситуацию можно исправить, в некотором смысле поменяв a и x местами. Рассмотрим следующее разложение

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j f_{ij} \lambda^j.$$

В отличие от классического метода сдвига аргумента, данный ряд может быть бесконечен. При этом, однако, как и в случае с классическим методом, функции f_{ij} коммутируют. Главный недостаток этого метода — существенная зависимость получаемой подалгебры, которую мы будем обозначать $\mathcal{F}_a^{loc}$ от выбора локальных функций Казимира.

Развитие этого направления деятельности привело к возникновению формального метода сдвига аргумента, предложенного К.М.Зуевым и А.В.Болсиновым [10], в основе которого одно замечательное свойство функций, полученных методом сдвига аргумента, которое было обнаружено А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко в работе [18]. Речь идет о том факте, что функции f_{ij} образуют бигамильтоновы цепочки (также встречаются термины цепочка Ленарда и бигамильтонова иерархия), открытые Магри и Ленардом для уравнения уравнения Кортвега-де Фриза (подробнее, см., например, [30]). Рассмотрим пару согласованных тензоров Пуассона на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ - соответствующий линейной скобке линейный тензор $\mathcal{A}$ и тензор $\mathcal{A}_a$, получаемый из первого замораживанием аргумента. В этом случае, функции, полученные локальным методом сдвига аргумента удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$\mathcal{A}_a \mathrm{d} f_{i1} = 0,$$
$$\mathcal{A} \mathrm{d} f_{ij} = \mathcal{A}_a \mathrm{d} f_{ij+1}, j \geq 1$$

В рамках формального метода сдвига аргумента для регулярного a предлагается действовать следующим образом. На первом этапе берутся линейные функции, то есть элементы $f_{i1} \in \operatorname{Ann} a$. На втором этапе из уравнения $\mathcal{A} \mathrm{d} f_{i1} = \mathcal{A}_a \mathrm{d} f_{i2}$ находятся f_{i2} (разрешимость этой системы в замкнутых формах следует из общей теории). На каждом следующем этапе будут получаться функции, степень которых на единицу больше степеней функций, полученных на предыдущем этапе. К преимуществам данной схемы относится тот факт, что для построения коммутативной подалгебры нам не нужно знать локальные инварианты.

В рамках данной работы развивается подход, заложенный в [10], и метод сдвига аргумента рассматривается как метод построения бигамильтоновых цепочек. То есть, фактически, изучается строение таких цепочек в случае, когда мы имеем дело с простейшим бигамильтоновым многообразием, а именно - у нас имеется действительное линейное пространство, на котором задана пара согласованных скобок, одна из которых линейна, а другая — постоянна (более простым будет только случая пары постоянных скобок на линейном пространстве, однако не о какой геометрии речь в этом случае не идет).

Данный подход обладает несколькими существенными плюсами. Во-первых, он позволяет сформулировать единообразный подход к разнообразным результатам, касающимся различных вариантов метода сдвига аргумента. Во-вторых, он позволяет четко определить природу тех или иных свойств получаемых наборов. И, в-третьих, он позволяет при необходимости обобщать те или иные результаты, например, на случай алгебр Ли над полем характеристики ноль. Именно развитию данного подхода посвящена первая часть работы.

В первой части работы доказан важный технический результат - теорема существования бигамильтоновых цепочек, - причем в самом общем случае: речь идет о произвольном многообразии M и паре согласованных скобок $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Определим кораспределение B как пересечение кораспределений, задаваемых ядрами регулярных скобок пучка $\lambda\mathcal{A}_1 + \mu\mathcal{A}_2$ и ядра $\mathcal{A}_1$.

Теорема 1.1 *Пусть $P \in M$ — регулярная точка для $\mathcal{A}_1$ и в окрестности этой точки определены функции Казимира, дифференциалы которых независимы и порождают кораспределение* $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$. *Кроме этого считаем, что в окрестности P структура $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ в смысле теоремы Жордана-Кронеккера 2.1 одинакова. Тогда найдется для точки P найдется такая окрестность, что:*

1) В ней существует такая функциональная подалгебра $\mathcal{G}_1$, что $\mathrm{D}\mathcal{G}_1 = \mathrm{B}$ *(то есть кораспределение интегрируемо).*

2) Для всякой бесконечной бигамильтоновой цепочки f_i, определенной в этой окрестности, функция $f_0 \in \mathcal{G}_1$

3) Для всякой $f \in \mathcal{G}_1$ найдется бесконечная бигамильтонова цепочка f_i, для которой $f_0 = 0$ и все функции определены на той же окрестности P, что и f.

4) Дифференциалы функций, входящих во всевозможные бигамильтоновы цепочки, начинающиеся в $\mathcal{G}_1$, порождают в данной окрестности кораспределение R

Рассмотрим теперь вещественное линейное пространство. По аналогии с формальным методом сдвига аргумента будем называть *обобщенной подалгеброй Мищенко-Фоменко* подалгебру, порожденную всеми полиномами, входящими в полиномиальные бигамильтоновы цепочки на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$, которые задаются парой скобок $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$. Обозначать эту алгебру будем $\mathcal{F}_c$. Метод получения такой коммутативной подалгебры будем называть *обобщеным методом сдвига аргумента.*

К несчастью, в случае сингулярной скобки $\mathcal{A}_c$ естественный класс функций для бигамильтоновых цепочек - это не полиномы, которых может вообще не существовать (в регулярном случае $\mathcal{G}_1$ порождалась $\mathrm{Ann}\, a$, поэтому все было хорошо). В рамках данной работы удалось описать естественный класс функций, связанных с с бигамильтоновыми цепочками.Будем говорить, что f - *локальный псевдомногочлен* на окрестности некоторой точки $P \in \mathfrak{g}^*$, если ограничение функции на листы скобки $\mathcal{A}_c$ в этой окрестности дает полиномиальные функции.

Теорема 1.2 *Пусть f — псевдомногочлен степени d и известно, что система*

$$\mathcal{A}\mathrm{d}f = \mathcal{A}_c \mathrm{d}g$$

разрешима. В этом случае

1) Всякое решение g данной системы является псевдомногочленом степени не выше $d+2$

2) Если свободный член g равен нулю в целой окрестности, то такой псевдомногочлен единственный.

3) При $l > 0$ всякая функция f_l, входящая в бигамильтонову цепочку (конечную и бесконечную), является является псевдомногочленом степени не выше $2i$.

Псевдомногочлены оказываются полезны для решения другой геометрической задачи. Пучок скобок называем плоским, если локально пара скобок $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$ приводятся к постоянному виду.

Теорема 1.3 *Если кронеккеров пучок пуассоновых структур на линейном вещественном пространстве V, задаваемый парой согласованных скобок Пуассона $\mathcal{A}$ (линейной) и $\mathcal{A}_c$ (постоянной) плоский, то в окрестности точки общего положения локальные функции Казимира $\mathcal{A}$ можно выбрать в виде псевдомногочленов степеней не выше $2i_1, ...2i_k$, где $2i_1+1, ..., 2i_k+1$ — размеры кронеккеровых блоков.*

Данное необходимое условие оказывается полезным на практике - его применение к случаю алгебры $A_{5,36}$ в обозначениях, принятых в [28], позволяет доказать неплоскость этого пучка.

Второй раздел работы посвящен квадратичным функциям из $\mathcal{F}_a$. Они представляют интерес, поскольку по идущей из классической механики традиции именно квадратичные гамильтонианы представляют наибольший интерес (поскольку могут рассматриваться в качестве потенциалов). Эти квадратичные функции оказываются тесно связаны с так называемыми секционными "операторами".

Данный был предложен В.В.Трофимовым и А.Т.Фоменко в работе [23]. Впервые, однако, такие операторы появились в работе С.В.Манакова [16], где было показано, что отображение $\phi : so(n) \to so(n)$, заданное формулой $(\phi X)_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j} X_{ij}$, т.е. удовлетворяющее тождеству

$$[\phi X, A] = [X, B], \quad X = (X_{ij}) \in so(n)$$

где A и B — диагональные матрицы, обладает замечательным свойством: уравнения Эйлера $\dot{X} = [\phi X, X]$, обобщающие классические уравнения динамики твердого тела на n-мерный случай, допускают представление Лакса со спектральным параметром и потому интегрируются в θ-функциях.

В работах [18], [19], которые уже упоминались ранее, метод сдвига рассматривался именно как метод интегрирования систем с квадратичными гамильтонианами $H(x) = \frac{1}{2}\langle \phi x, x\rangle$, которые задавались несколькими сериями самосопряженными операторов $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, основным алгебраическим свойством которых было по-прежнему тождество вида:

$$[\phi x, a] = [x, b], \quad a, b \in \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, и $a \in \mathfrak{h}$ — регулярный элемент.

В последующих работах А.Т.Фоменко и В.В.Трофимов (см. [23, 22, 24]) построили аналоги операторов $\phi_{a,b,D}$ на произвольном симметрическом пространстве, которые оказались тесно связаны с тензором кривизны этих пространств. М.В Мещеряковым [17] было показано, что описанное выше тождество является характеристическим свойством операторов $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, для которых соответствующие уравнения Эйлера $\dot{x} = [\phi x, x]$ являются гамильтоновыми относительно всех скобок вида $\lambda \mathcal{A}_a + \mu \mathcal{A}$.

Наконец, совсем недавно выяснилось, что тождество классическое тождество для секционных операторов на $so(n)$ неожиданным образом возникает совсем в других областях геометрии. В работе [9] было показано, что этому тождеству удовлетворяют тензоры кривизны на римановых многообразиях, допускающих нетривиальные проективно эквивалентные метрики, причем именно оно приводит к некоторым замечательным геометрическим свойствам таких многообразий Термин "секционный", разумеется, не был никак связан с тензором кривизны, однако, интересно отметить, что в описанной ситуации секционный оператор ϕ, ассоциированный с тензором кривизны, описывает в точности секционную кривизну многообразия..

Итак в общем случае удалось доказать теорему существования секционного оператора, а также предъявить его явную формулу, аналогичную классической, приведенной в работе [18]. Считаем, что $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_a$, то есть постоянная скобка задается элементом коалгебры. Образ $\mathcal{A}_a :\to \mathfrak{g}^*$ обозначим через T_a, а через N будем обозначать трансверсальное к образу пространство. Кроме этого определим две подалгебры:

1) содержащую аннулятор подалгебру вида

$$\mathfrak{b}_a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \mathrm{ad}^*_\xi a, \eta \rangle = 0 \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

2) $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathrm{Ann}\, a] = 0\}$ — централизатор аннулятора $\mathrm{Ann}\, a$,

и каждому элементу $a \in \mathfrak{g}^*$ поставим в соответствие подалгебру $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{b}_a \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$.

Теорема 1.4 *Необходимым и достаточным условием существования секционного оператора ϕ с заданными параметрами $a \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in \mathfrak{g}$, является включение $\beta \in \mathfrak{g}_a$.*

Теорема 1.5 *Пусть $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}^*$ — разложение произвольного элемента x, такое что $x_1 \in T_a$, $x_2 \in N$. Тогда*

$$\phi(x) = -\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1} x_1 + \mathcal{A}_a^{-1} \mathrm{ad}^*_\beta x_2 + Dx$$

где D — произвольный самосопряженный оператор, образ которого содержится в $\mathrm{Ann}\,(a)$. При этом данная формула переписывается в виде:

(a) $\phi = B\pi + C(\mathrm{id} - \pi) + D$,
(b) $\phi = C + (\mathrm{id} - \pi^*)B\pi + D$,
(c) $\phi = B\pi + (B\pi)^* - \pi^* B\pi + D$,
(d) $\phi = C + C^* - \pi^* C + D$.

Используя эти теоремы изучается вопрос об интегрировании секционных операторов при помощи двух методов - метода сдвига аргумента и построения бигамильтоновой цепочки при помощи оператора рекурсии.

Теорема 1.6 *Пусть для параметров секционного оператора ϕ выполнено соотношение $ad^*_\beta a = 0$. Тогда функции из $\mathcal{F}_a$ коммутируют с f на своей области определения.*

Теорема 1.7 *Пусть $\mathfrak{g}$ — фробениусова алгебра Ли, и ϕ — секционный оператор с параметрами a и $\beta \in \mathfrak{g}_a$, причем $a \in \mathfrak{g}^*$ — элемент общего положения. Тогда система уравнений Эйлера*

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{\phi x} x$$

является гамильтоновой относительно двух скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$ и имеет коммутирующие интегралы вида $g_k(x) = \operatorname{tr} R^m(x)$ и $f_k(x)$, где $f_k(x)$ — однородный полином степени $k{+}1$, который однозначно определяется равенством $\mathrm{d} f_k(x) = R^{*k}\beta$. Сам оператор ϕ определяется равенством $\phi x = R^*\beta$.

Отдельно решен вопрос о выяснении, является ли конкретный оператор секционным (такая задача естественным образом возникает в случае теории проективно эквивалентных метрик). В частности, построен алгоритм для проверки этого свойства. Кроме этого получено обобщение теоремы Мещерякова на общий случай.

В теории проективно эквивалентных метрик оказывается важен вопрос однозначности определения параметров секционного оператора. В рамках работы для простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (а, следовательно, и для всех ее вещественных форм) доказывается следующая теорема.

Теорема 1.8 *Пусть ϕ — секционный оператор с параметрами a, b, причем a — регулярный полупростой элемент картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ и $b \neq \lambda a$. Тогда всякая другая пара параметров p, q для оператора ϕ получается из данной одновременным умножением элементов a, b на некоторый ненулевой скаляр, то есть $p = \mu a, q = \mu b$ для некоторого $\mu \neq 0$.*

Как следствие из этой теоремы получается результат, касающийся однозначности определения алгебр $\mathcal{F}_a^c$

Теорема 1.9 *Пусть $\mathcal{F}_a^c = \mathcal{F}_p^c$ для некоторого регулярного полупростого a. Тогда $p = \mu a$ для некоторой константы μ.*

Доказательство основного факта при этом опирается на замечательное свойство корней простой комплексной алгебры Ли, заслуживающее отдельного упоминания. Рассмотрим набор чисел $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, в котором элементы занумерованы корнями из Δ. Для этого набора на картановской подалгебре $\mathfrak{h}$ можно записать систему линейных уравнений:

$$\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a) = 0 \qquad (1)$$

решением которой будет пара элементов $a, b \in \mathfrak{h}$. Легко видеть, что система избыточна - количество уравнений превосходит количество неизвестных (которых, в данном случае, $2n$ штук).

Теорема 1.10 *Пусть не все числа из набора Λ равны между собой и система 20 совместна, причем в решении $\{a, b\}$ элемент a — регулярен. Тогда всякое другое решение p, q данной системы получается из a, b умножением на скаляр, то есть $p = \mu a, q = \mu b$, где $\mu \in \mathbb{C}$.*

Третий и последний раздел посвящен геометрии систем, получаемых методом сдвига аргумента в случае простых алгебр Ли, причем для изучения данной геометрии сдвигов оказывается естественным (и необходимым) перейти к полю $\mathbb{C}$.

Одним из объектов изучения является бифуркационная диаграмма Σ , которая представляет собой сингулярные значения отображения момента. В терминах последнего исследовано большое количество как классических интегрируемых случаев - Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, геодезический поток на $n-$мерном эллипсоиде, - так и современных (подробнее смотри книгу [6]). Кроме этого бифуркационная диаграмма оказывается полезна при вычислении так называемых меченных молекул и атомов - инвариантов интегрируемых по Лиувиллю систем.

Известно, [1] что в случае некоторых действительных систем малой размерности, биффуркационная диаграмма совпадает со спектральной кривой лаксова представления системы, то есть точки диаграммы - это в точности такие значения интегралов, при которых соответствующая кривая $R(\lambda, \mu) = 0$ имеет особенность. Кроме этого Ю.А. Браилову [2] удалось доказать следующий замечательный факт: для представления минимальной размерности $sl(n+1)$ бифуркационная диаграмма совпадает со спектральной кривой соответствующего лаксова представления системы. В работе Ю.А.Браилова и А.Т.Фоменко [4] была высказана гипотеза о том, что данный результат остается верным для представлений минимальной размерности других простых алгебр Ли. При этом параметр a, на который совершается сдвиг, во всех случаях считался регулярным полупростым.

Бифуркационная диаграмма, как образ некоторого алгебраического множества при полиномиальном отображении из одного линейного пространство в другое, не обязана быть замкнутой, поэтому вместо нее естественно рассматривать $\bar{\Sigma}$.

Теорема 1.11 *$\mathfrak{g}$ обозначает одну из четырех изучаемых алгебр: $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2. Пусть ρ — представление $\mathfrak{g}$ минимальной размерности, элемент $a \in \mathfrak{g}$ — регулярный (необязательно полупростой), в кольце инвариантов $\mathfrak{g}$ фиксированы порождающие $I_1, ..., I_n$ - некоторые* *непостоянные коэффициенты характеристического многочлена представления минимальной размерности, функция порядка $k(i,j)$ произвольна. Пусть D_z — дискриминант спектральной кривой $R_z(\lambda,\mu)=0$, определенной по этим параметрам. Тогда для замыкания бифуркационной диаграммы $\bar{\Sigma}$ отображения момента F_a, также построенного по эти параметрам, выполнено:*

$$D_z = \bar{\Sigma}$$

Теорема 1.12 *Пусть теперь $\mathfrak{g} = so(2n)$ и a — регулярный элемент такой, что инвариант $I_1(a) \neq 0$ на нем не обращается в ноль. Тогда дискриминант D_z спектрально кривой $R_z(\lambda,\mu) = 0$ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^N$.*

В рамках доказательства этой теоремы использовалась методика, изначально применявшаяся В.В.Тарасовым для доказательства максимальности $\mathcal{F}^c_a$.
В частости, как следствие, удалось доказать следующие интересные алгебраические факты.

Теорема 1.13 *Пусть a — субрегулярный полупростой элемент простой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$.*

1) $\mathcal{F}^c_a$ свободно порождена и алгебраически замкнута как подкольцо в кольце от элементов $\mathfrak{g}$.

2) Подалгебра $\mathcal{F}_a$, построенная обобщенным методом сдвига аргумента, совпадает с $\mathcal{F}^c_a$

Теорема 1.14 *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{h}$ — полупростой элемент, а $I_1, ..., I_n$ —- порождающие кольца инвариантов присоединенного представления данной алгебры. Тогда $\mathrm{d}I_1(a), ..., \mathrm{d}I_n(a)$ порождают центр централизатора $\mathfrak{g}^a$.*

Как оказалось, последний факт не верен, если отказаться от условия полупростоты - удалось показать, что подобное свойство не выполнено для субрегулярного нильпотентного элемента. В связи с данным результатом, естественно возникает вопрос - когда дифференциалы порождают все ядро.

2 Предварительные сведения и обозначения

2.1 Принятые обозначения и определения

Бигамильтонова геометрия и кораспределения. Всюду в работе термин точка общего положения обозначает точку, принадлежащую некоторому открытому всюду плотному множеству. Все топологические термины применяются исключительно в смысле обычной топологии $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Через $\mathcal{A}$ будем обозначать тензор Пуассона скобки Пуассона $\{\,,\,\}$. Допуская вольность языка зачастую скобку будем отождествлять с ее тензором Пуассона и говорить "на многообразии задана скобка $\mathcal{A}$". Когда на многообразии имеется пара *согласованных скобок* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ (то есть таких скобок, что любая их линейная комбинация - снова скобка Пуассона) множество всевозможных линейных комбинаций $\lambda\mathcal{A}_1+\mu\mathcal{A}_2$, для которых λ, μ одновременно не ноль, будем называть *пучком скобок*.

Главным объектом исследования, как уже говорилось выше, будет выступать линейное пространство, на котором задана пара согласованных скобок - линейная и постоянная. Эти скобки мы будем обозначать через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$, соответственно. Линейная скобка $\mathcal{A}$ по определению обладает тем свойством, что скобка двух линейных функций снова линейная функция, поэтому ее наличие позволяет отождествить векторное пространство с коалгеброй $\mathfrak{g}^*$ некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тензор $\mathcal{A}$ через структурные константы c_{ij}^k соответствующей алгебры записывается как $c_{ij}^k x_k$. Обозначение $\mathcal{A}_a$ соответствует постоянной скобке, которая получается из стандартной линейной замораживанием аргумента: ее тензор имеет вид $c_{ij}^k a_k$ для некоторого $a \in \mathfrak{g}^*$.

Треугольные скобки будут обозначать: $< \xi, x >$, где ξ — вектор, а x — ковектор обозначает скаляр $x_i\xi^i$, а $< \mathcal{A}, \mathrm{d}f, \mathrm{d}g >= \mathcal{A}^{ij}\mathrm{d}f_i\mathrm{d}g_j$. В работе будут фигурировать кораспределения R - отображения, которые каждой точке x многообразия M ставят в соответствие подпространство в $T*_x M$. Соответственно двойственным к кораспределению будем называть такое распределение, что в каждой точке многообразия x ставится в соответствие подпространство $R^\perp \subset T{-}xM$, состоящее из всех векторов, зануляющих R_x.

В работе будет встречаться термин функциональная алгебра, порожденная некоторым множеством функций. Этим термином мы условимся обозначать все функции, получающиеся из данного набора суперпозицией с некоторой гладкой функцией от нескольких переменных. Все функциональные подалгебры будем обозначать прописными буквами, например $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и т.д. С каждой такой подалгеброй связано естественное кораспределение, которые мы будем обозначать как $\mathrm{D}\mathcal{F}$, сопоставляющее каждой точке многообразия пространство, порожденное дифференциалами функций этой подалгебры. Кораспределение будем называть *интегрируемым*, если (вообще говоря, в окрестности точки) оно представимо в виде $\mathrm{D}\mathcal{F}$ для некоторой функциональной подалгебры $\mathcal{F}$.

Алгебры Ли. Алгебры Ли, фигурирующие в работе, условимся обозначать готическими буквами: например, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ и так далее. Под коалгеброй мы условимся понимать пространство, двойственное к алгебре Ли, и будем обозначать ее через $\mathfrak{g}^*$. Элементы коалгебры будем обозначать латинскими, а алгебры - греческими буквами. Если, как в случае простой алгебры, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ отождествляется при помощи формы Киллинга, то элементы алгебры будут также обозначаться латинскими буквами. Индекс алгебры, то есть ядра $\mathcal{A}$ в точке общего положения, считаем равным n. Через N обозначим число $\frac{1}{2}\Big(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}\mathfrak{g}\Big)$

Напомним, что *регулярным элементом* алгебры называется элемент, централизатор которого относительно присоединенного действия имеет минимальную возможную размерность. Централизатор элемента ξ в алгебре $\mathfrak{g}$, то есть множество таких $\eta \in \mathfrak{g}$, что $[\eta, \xi] = 0$, будем обозначать через $\mathfrak{g}^{\xi}$. Регулярным элементом коалгебры будем называть элемент, в котором тензор $\mathcal{A}$ имеет максимальный возможный ранг. Таких элементов в коалгебре, очевидно, открытое всюду плотное множество. Ядро $\mathcal{A}$ в точке a, то есть такие $\xi \in \mathfrak{g}$, что $< a, [\xi, \zeta] >= 0$ для любого ζ, или эквивалентным образом $ad^*_{\xi} a = 0$, будем обозначать через $\mathrm{Ann}\, a$.

Элемент (не важно алгебры или коалгебры), не являющийся регулярным, будем называть *сингулярным*.

В случае, когда речь будет идти о простых алгебрах через Δ будем обозначать систему корней, а строчными греческими буквами (если не оговорено противное - при описании некоторых конкретных систем корни удобно будет обозначать латинскими буквами с индексами) - сами корни, то есть $\alpha, \beta, ...$. Подмножество корней M будем называть *линейным*, если для него выполнены свойства:

1) Если корень α лежит в M, то и $-\alpha$ лежит в M,

2) Если $\alpha, \beta \in M$ и $\alpha + \beta$ корень, то $\alpha + \beta$ лежит в M. Если M не является линейным подмножеством, то $L(M)$ — минимальное линейное подмножество Δ, содержащее M.

Считаем, что в простой алгебре $\mathfrak{g}$ зафиксирован базис Вейля. Картановскую подалгебру будем обозначать через $\mathfrak{h}$, а соответствующие корням корневые вектора через $e_\alpha, e_\beta, \ldots$. *Субрегулярным элементом* простой алгебры называется элемент, размерность аннулятора которого равна $\mathrm{ind}\mathfrak{g}+2$, то есть минимально возможная из сингулярных элементов.

Кроме этого, в дальнейшем нам будут встречаться некоторые фиксированные представления простых комплексных алгебр Ли. Условимся обозначать заглавной латинской буквой матрицу, соответствующую элементу, обозначаемому строчной: то есть элементу x соответствует матрица X, элементу a - матрица A и так далее. Через X_{ij} будем обозначать элемент матрицы X, стоящий на пересечении $i-$й строки и $j-$го столбца.

2.2 Теорема Жордана-Кронеккера и некоторые ее следствия

Все приведенные здесь факты касаются линейной алгебры. Данная теорема известна как теорема Жордана-Кронеккера (подробнее об этом утверждении см., например, [10]).

Теорема 2.1 *Пара кососимметричных билинейных форм A_1 и A_2 на линейном над $\mathbb{C}$ пространстве V подходящей заменой координат одновременно приводится к блочно-диагональному виду, где соответствующие пары блоков имеют один из следующих трех возможных видов:*

$$1)\quad H_1^{k,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix},\quad H_2^{k,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & J_k(\mu) \\ -J_k^T(\mu) & 0 \end{pmatrix},$$

где $J_k(\mu)$ — жордановы блоки размера $k \times k$ с собственным значением μ, а E_k — единичная матрица соответствующего размера;

$$2)\quad H_1^{k,\infty} = \begin{pmatrix} 0 & J_k(0) \\ -J_k^T(0) & 0 \end{pmatrix},\quad H_2^{k,\infty} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix},$$

где $J_k(0)$ — жордановы блоки размера $k \times k$ с собственным значением 0;

$$3)\quad K_1^k = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ -D_1^t & 0 \end{pmatrix},\quad K_2^k = \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ -D_2^T & 0 \end{pmatrix},$$

где D_1 — матрица размера $k \times k+1$, у которой на месте i, j стоит δ_{ij}, а D_2 — матрица размера $k \times k+1$, у которой на месте i, j стоит $\delta_{i\,j-1}$.

Такой вид и соответствующий базис будем называть каноническими.

Рассмотрим всевозможные линейные комбинации форм $\lambda A_1 + \eta A_2$, где $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$ и одновременно не обращаются в ноль (по аналогии с терминологией предыдущего раздела эти комбинации будем называть пучком билинейных форм). *Регулярными* будем называть формы из пучка, имеющие минимальный возможный коранг. Формы, не являющиеся регулярными, будем называть *сингулярными*.

Будем говорить, что вектора p и q косоортогональны относительно билинейной кососимметрической формы A, если $< A, p, q >= 0$. Определим пространство $W \subset V$ - как пространство, натянутое на ядра регулярных форм пучка. Канонический базис в смысле теоремы Жордана-Кронеккера 2.1 индуцирует разложение V в прямую сумму

$$V_1 \oplus ... \oplus V_l \oplus U_1 \oplus ...U_m, \tag{2}$$

где ограничение форм A_1, A_2 на V_i дает кронеккеров блок K_i, а на U_i — жорданов $H_i^{k,\mu}$. По построению для регулярных скобок пучка ограничение на U_i невырожденно, поэтому W имеет ненулевое пересечение только с V_i.

Ключевым для дальнейших построений будет следующее свойство пространства W.

Теорема 2.2 *Пусть на комплексном векторном пространстве V задана бесконечная последовательность векторов $v_i, i \geq 0$ (не обязательно ненулевых), для которых выполнена следующая система соотношений*

$$\begin{aligned} &A_1 v_0 = 0, \\ &A_2 v_i = A_1 v_{i+1}, i \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где A_1, $\mathcal{A}_2$ — кососимметричные билинейные формы. Тогда все вектора v_i лежат в W.

Доказательство. Считаем, что A_1 и A_2 приведены к каноническому виду. По построению система (3) разбивается в прямую сумм систем на пространствах V_j, U_j из разложения (2). Пусть проекция v_{ij} вектора v_i на пространство U_j из разложения не равна нулю для некоторых i, j.

Предположим сначала, что для соответствующего блока $H_i^{k,\mu}$ параметр $\mu \neq 0, \infty$. Тогда определен оператор $R : U_j \to U_j$ действующий по правилу $(H_2^{k,\mu})^{-1} H_1^{k,\mu}$ при этом $Rv_{ij} = v_{i-1j}$, где v_{i-1j} — проекция v_{i-1}

на U_j. Так как оператор R — невырожден, то $v_{0j} \neq 0$ и $H_1^{k,\mu} v_{0j} \neq 0$, что противоречит условию $A_1 v_0 H_1 = 0$.

Пусть теперь $\mu = \infty$. Обозначим базис в U_j, соответствующий каноническому виду , через $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k$. Заметим, что

$$H_1^{k,\infty} p_k = 0,$$
$$H_2^{k,\infty} p_i = -H_1^{k,\infty} p_{i-1}, 1 < i \leq k$$

при этом для ковектора $H_2^{k,\infty} p_1$ подходящего вектора p_0 такого, чтобы $-H_1^{k,\infty} p_0 = H_2^{k,\infty} p_1$ не существует, так как $H_2^{k,} p_1$ не лежит в образе $H_1^{k,0}$. Аналогичная система выполнена для q_i:

$$H_1^{k,\infty} q_1 = 0,$$
$$H_2^{k,\infty} q_i = -H_1^{k,\infty} q_{i+1}, 1 \geq i < k,$$

причем $H_2^{k,\infty} q_k = H_1^{k,\infty} q_{k+1}$ снова не имеет решений.

Кроме этого, легко видеть, что в силу невырожденности $H_2^{k,\infty}$ выполняется условие - если $v_{ij} \neq 0$, то $v_{i+1\,j}$, определяемый из системы (3), - не ноль. При этом $v_{i+1,j}$ — проекция v_{i+1} на U_j. Из этого факта и соотношений на $p_1, ..., p_k$ и $q_1, ..., q_k$ вытекает, что для некоторого l уравнение $H_2^{k,\infty} v_{lj} = H_1^{k,\infty} v_{l+1j}$ не разрешимо, то есть цепочка векторов v_i обрывается.

Аналогичным образом теорема доказывается для $\mu = 0$. $\square$

В дальнейшем, однако, нам придется работать преимущественно с вещественными пространствами, поэтому нам потребуется аналог этого утверждения над $\mathbb{R}$. Пусть $V_{\mathbb{R}}$ — вещественное линейное пространство, на котором задана пара билинейных форм, задаваемых действительными матрицами A_1 и $\mathcal{A}_2$. Обозначим через $W_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ — линейное пространство, натянутое на ядра регулярных (то есть имеющих минимальный возможный коранг) скобок пучка $\lambda\mathcal{A}_1 + \mu\mathcal{A}_2$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и одновременно не обращаются в ноль.

Теорема 2.3 *Пусть на действительном векторном пространстве $V_{\mathbb{R}}$ задана бесконечная последовательность векторов $v_i, i \geq 0$ (не обязательно ненулевых), для которых выполнена следующая система соотношений*

$$\begin{aligned} &A_1 v_0 = 0, \\ &A_2 v_i = A_1 v_{i+1}, i \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где A_1, $\mathcal{A}_2$ — кососимметричные билинейные действительные формы. Тогда все вектора v_i лежат в $W_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Положим V – комплексификация пространства $V_{\mathbb{R}}$. из теоремы 2.1 вытекает, что коранг регулярной скобки комплексифицированного пучка $\lambda A_1 + \mu A_2$ (то есть, где λ, μ — комплексные) совпадает с корангом регулярной скобки действительного пучка. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что A_1 и A_2 заданы действительными матрицами и регулярны в смысле комплексифицированного пучка.

Лемма 2.1 *В V выполнено следующее соотношение $W \cap V_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Рассмотрим вместо прежнего пучка $A_1 + \lambda A_2$. Если эта скобка регулярна, $\lambda \notin \mathbb{R}$ и $v \in V_{\mathbb{R}}$ — лежит в ядре этой скобки, то v лежит в ядре A_2, которая по предположению регулярна, то есть $v \in W_{\mathbb{R}}$ Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то v по построению лежит в $W_{\mathbb{R}}$. К этому еще необходимо добавить ядро A_2, однако и тут $v \in W_{\mathbb{R}}$. Лемма доказана. ■

Теперь рассмотрим V и применим теорему 2.2. Из нее вытекает, что $v_i \in W$. Отсюда и из доказанной леммы получаем утверждение теоремы. □

В заключение данного раздела мы докажем еще одно свойство пары билинейных форм, которое нам потребуется в дальнейшем.

Утверждение 2.1 *Пусть на комплексном векторном пространстве V задана пара билинейных кососимметричных форм A_1, A_2 и предположим, что коранг регулярной скобки задаваемого этими формами пучка равен n. Предположим, что в пучке только A_2 сингулярна, и ограничение A_1 на ядро этой скобки, которое мы обозначим через K, имеет коранг n. Тогда в каноническом виде A_1 и A_2 в смысле теоремы Жордана-Кронеккера все жордановы имеют тип $H_i^{1,0}$.*

Доказательство. Из условия вытекает, что A_1 — регулярная форма, поэтому ранги A_1 и $A_1 + \lambda A_2$ равны для всех λ. Из этого немедленно вытекает, что в каноническом виде нет блоков $H_i^{k,\infty}$ и, что для всех блоков $H_0^{k,\mu}$ параметр $\mu = 0$.

Рассмотрим теперь ядро ограничения A_1 на K. Легко видеть, что $K \cap V_i$ лежит в ядре ограничения (это пересечение одномерно и вектора из разных блоков косоортогональны относительно A_1). При этом количество жордановых блоков равно корангу регулярной скобки, то есть в данном случае n.

Предположим, что среди $H_0^{k,\mu}$ есть блок, для которого $k > 1$. Обозначим пространство, соответствующие данному блоку, через V, а базис в нем, соответствующий каноническому виду, через $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k$. Заметим, что пересечение K и V натянуто на p_k, q_1.

Если $k = 1$, то $< A_1, p_k, q_1 > \neq 0$. В противном случае p_k и q_1 кососортогональны относительно данной формы, а также кососортогональны всем векторам из других блоков. В частности, это означает, что они кососортогональны всем остальным векторам из ядра A_2 и, следовательно, лежат в ядре ограничения A_1 на K. Отсюда получаем, что размерность ядра ограничения как минимум $n+2$, что противоречит условию. Таким образом предложение доказано. $\square$

2.3 Полные коммутативные наборы и критерий Болсинова

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная или вещественная алгебра Ли. Наличие скобки Пуассона на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ позволяет свести изучение интегрируемых систем к изучению алгебр коммутирующих функций на данном пространстве [25]. В качестве объекта изучения можно выбирать самые разные классы функций - рациональные, аналитические, полиномиальные. В рамках данной работы нас будут интересовать преимущественно полиномы.

В дальнейшем, если не оговорено противное, термин подалгебра в случае, когда речь идёт о функциях, мы будем употреблять применительно к коммутативной структуре на множестве полиномов. В свою очередь термин коммутативная будет означать, что элементы подалгебры коммутируют относительно скобки $\mathcal{A}$. Коммутативную подалгебру будем называть *полной в регулярной точке* x, если размерность пространства дифференциалов всех функций из этой алгебры в данной точке равна $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}\mathfrak{g})$.

Напомним, что с парой произвольных согласованных скобок Пуассона $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ ассоциирована естественная коммутативная подалгебра [22]. Рассмотрим соответствующий пучок скобок. Среди этого множества имеются регулярные, то есть те скобки, у которых минимальный возможный коранг n. Оказывается, что функции Казимира различных регулярных скобок коммутируют между собой [5], [22].

Рассмотрим множество локальных инвариантов регулярных скобок пучка в окрестности точки общего положения. Их совместная область определения вполне может состоять из одной точки, поэтому из всего множества выберем конечное число функций, дифференциалы которых порождают в каждой точке пространство W (или $W_{\mathbb{R}}$ в зависимости от поля). Полученную ими коммутативную подалгебру и будем обозначать через $\mathcal{G}$ (зависимость от выбора конечного числа функций, о которых идет речь, будем опускать).

Для подобной подалгебры существует удобный критерий полноты в конкретной точке, называемый критерием Болсинова (см, [5], [22]). Мы сформулируем этот критерий в нашем частном случае, когда речь идет о паре скобок $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ с дополнительным условием регулярности a.

Теорема 2.4 *Пусть a — регулярный элемент коалгебры $\mathfrak{g}^*$ комплексной (вещественной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда полнота подалгебры $\mathcal{G}$ в точке x равносильна тому, что прямая $x + \lambda a$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ (λ комплексный и для вещественных алгебр) не пересекает множество сингудярных элементов $\mathfrak{g}^*$ (для вещественных алгебр - множество сингулярных элементов комплексификации $\mathfrak{g}^*$).*

2.4 Представления минимальной размерности и системы корней некоторых простых алгебр Ли

Опишем системы корней, а также представления минимальной размерности алгебр, которые нам потребуются в дальнейшем. Вся информация о них взята из [15], [25] и [26]. Напомним, что через X_{ij} мы условились обозначать элемент матрицы X, стоящий на пересечении $i-$й строки и $j-$го столбца. В свою очередь E_{ij} обозначает матричную единицу, то есть матрицу, у которой все элементы нули, кроме стоящей на пересечении $i-$й строки и $j-$го столбца единицы.

Серия A_n. Простые корни обозначим через $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Остальные положительные корни в этом случае имеют вид

$$a_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha_j, \text{ где индексы } 1 \le i < j \le n.$$

Данной системе корней соответствует алгебра $sl(n+1)$, а представление минимальной размерности — это в точности матрицы с нулевым следом. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц. Простые корни представляют собой просто разность $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1,i+1}$, где $H \in \mathfrak{h}$. Положительные корни, таким образом, имеют вид $a_{ij}(H) = H_{ii} - H_{jj}$. Корневые вектора представляют собой просто матричные единицы $a_{ij} = E_{ij}$, то есть такие матрицы, что у них на пересечении $i-$той строки и $j-$го столбца стоит единица, а все остальные матричные элементы равны нулю.

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ в представлении минимальной размерности.

Серия B_n. Простые корни обозначаем через $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Положительные корни делятся на три группы:

$$
\begin{aligned}
&a_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha_j, \text{ где } 1 \leq i < j < n,\\
&b_{ij} = \alpha_i + ...\alpha_{j-1} + 2\alpha_j + ... + 2\alpha_b, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n,\\
&c_i = \alpha_i + ... + \alpha_n, \text{ где } 1 \leq i < n.
\end{aligned}
$$

Данной системе корней соответствует алгебра $so(2n{+}1)$. Ее представление минимальной размерности имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix} 0 & v^T & w^T \\ -w & A & B \\ -v & C & -A^T \end{pmatrix},
$$

где v, w — вектор столбцы размерности n, A — произвольная матрица $n \times n$, а B, C — кососимметрические матрицы, то есть $B^T = -B$ и $C^T = -C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц следующего вида

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D^T \end{pmatrix},
$$

где D является диагональной матрицей $n \times n$, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Простые корни на данной подалгебре имеют следующий вид $\alpha_i(H) = H_{i+1,i+1} - H_{i+2,i+2}$, где $1 \leq i < n+1$, и $\alpha_n(H) = H_{n+1,n+1}$, причем $H \in \mathfrak{h}$. Три группы положительных корней в этом случае представляются как

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}(H) = H_{i+1,i+1} - H_{j+1,j+1},\\
&b_{ij}(H) = H_{i+1,i+1} + H_{j+1,j+1},\\
&c_i(H) = H_{i+1,i+1}.
\end{aligned}
$$

Соответствующие корневые вектора имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
&E_{i+1,j+1} - E_{j+n+1,i+n+1},\\
&E_{i+1,j+n+1} - E_{j+1,i+n+1},\\
&E_{i+1,1} - E_{1,i+n+1}.
\end{aligned}
$$

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ (коэффициенты при ничетных степенях μ) в представлении минимальной размерности.

Серия C_n. Простые корни как и в предыдущих сериях обозначаем через $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Положительные корни в этом случае также разбиваются на три группы a_{ij}, b_{ij} и c_i, которые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&a_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha_j, \text{ где } 1 \leq i < j < n,\\
&b_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n, \text{ где } 1 \leq i < j < n,\\
&b_{in} = \alpha_i + ... + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \text{ где } 1 \leq i < n,\\
&c_i = 2\alpha_i + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n, \text{ где } 1 \leq i < n.
\end{aligned}$$

Данной системе корней соответствует алгебра $sp(2n)$. В представлении минимальной размерности, это матрицы $2n \times 2n$ вида:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix},$$

где A — произвольная матрица размера $n \times n$, а B, C — симметрические, то есть $B^T = B$ и $C^T = C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ представляет собой диагональные матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D^T \end{pmatrix},$$

где матрица D — диагональная и размера $n \times n$, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Простые корни в этом случае имеют вид $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1,i+1}$ при $1 \leq i < n$ и $\alpha_n(H) = 2H_{nn}$. В этом случае три группы положительных корней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&a_{ij}(H) = H_{ii} - H_{jj}, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n,\\
&b_{ij}(H) = H_{ii} + H_{jj}, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n,\\
&c_i(H) = 2H_{ii}, \text{ где } 1 \leq i < n.
\end{aligned}$$

Соответствующие корневые вектора имеют следующий вид:

$$E_{ij} - E_{j+n\, i+n}, E_{i\, j+n} + E_{j\, i+n}, E_{i\, i+n}.$$

В качестве порождающих кольца инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$

(коэффициенты при четных степенях μ) в представлении минимальной размерности.

Серия D_n. Простые корни, как и в предыдущих сериях, обозначаем через $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Положительные корни в этом случае разбиваются на две группы a_{ij} и b_{ij}, которые задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
&a_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha_j, \text{ где } 1 \leq i < j < n \\
&b_{ij} = \alpha_i + ... + \alpha j - 1 + 2\alpha_i + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \text{ где } 1 \leq i < j < n-1, \\
&b_{i\,n-1} = \alpha_i + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \quad 1 \leq i < n-1, \\
&b_{in} = \alpha_i + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_n, \quad 1 \leq i < n-1.
\end{aligned}
$$

Данной системе корней соответствует алгебра $so(2n)$. В представлении минимальной размерности, это матрицы $2n \times 2n$ вида:

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix},
$$

где A — произвольная матрица размера $n \times n$, а B, C — кососимметрические, то есть $B^T = -B$ и $C^T = -C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц вида:

$$
\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D^T \end{pmatrix},
$$

где матрица D — диагональная и размера $n \times n$, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Простые корни в этом случае имеют вид $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1,i+1}$ при $1 \leq i < n$ и $\alpha_n(H) = H_{n-1\,n-1} + H_{nn}$. В этом случае две группы положительных корней имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
a_{ij}(H) &= H_{ii} - H_{jj}, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n, \\
b_{ij}(H) &= H_{ii} + H_{jj}, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}
$$

Соответствующие им корневые вектора задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
&E_{ij} - E_{j+n\,i+n}, \\
&E_{i\,j+n} - E_{j\,i+n}.
\end{aligned}
$$

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ (коэффициенты при ничетных степенях μ) за исключением $\det X$ в представлении минимальной размерности. Вместо определителя необходимо взять пфаффиан $Pf(X) = \sqrt{\det X}$.

Особая система G_2. Простые корни обозначим через α_1, α_2. Положительные корни имеют вид:

$$\alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Этой системе корней соответствует особая алгебра g_2. Ее представление минимальной размерности — это матрицы 7×7 следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}y_1 & \sqrt{2}y_2 & \sqrt{2}y_6 & \sqrt{2}y_4 & \sqrt{2}y_5 & \sqrt{2}y_3 \\ -\sqrt{2}y_4 & a+2b & x_1 & x_5 & 0 & -y_6 & -y_2 \\ -\sqrt{2}y_5 & x_4 & -b-a & x_6 & y_6 & 0 & -y_1 \\ -\sqrt{2}y_3 & x_2 & x_3 & -b & y_2 & y_1 & 0 \\ -\sqrt{2}y_1 & 0 & -y_3 & -y_5 & -a-2b & -x_4 & -x_2 \\ -\sqrt{2}y_2 & y_3 & 0 & -y_4 & -x_1 & b+a & -x_3 \\ -\sqrt{2}y_6 & y_5 & y_4 & 0 & -x_5 & -x_6 & b \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где a, b, x_1, ..., x_6, y_1, ..., y_6 — соответственно координаты на алгебре g_2. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц следующего вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D^T \end{pmatrix},$$

где D - диагональная 3×3 матрица со следом ноль, а все остальные элементы равны нулю. Для $H \in \mathfrak{h}$ простые корни имеют вид $\alpha_1(H) = -H_{22}$ и $\alpha_2(H) = H_{22} - H_{33}$. Учитывая равенство $H_{22} + H_{33} + H_{44} = 0$, получаем, что $\alpha_1(H) = H_{33} + H_{44}$. Остальные положительные корни имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2\,(H) = -H_{33} = H_{22} + H_{44}, \\ &2\alpha_1 + \alpha_2\,(H) = -H_{22} - H_{33}, \\ &3\alpha_1 + \alpha_2\,(H) = -2H_{22} - H_{33} = -H_{22} + H_{44}, \\ &3\alpha_1 + 2\alpha_2\,(H) = -H_{22} - 2H_{33} = -H_{33} + H_{44}. \end{aligned}$$

Соответствующие простым корням α_1 и α_2 корневые вектора задаются формулами:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\big(E_{12} - E_{51}\big) - \big(E_{37} - E_{46}\big), \\ &E_{23} - E_{65}. \end{aligned}$$

Соответствующие остальным положительным корням корневые вектора в этом случае имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\big(E_{13} - E_{61}\big) - \big(E_{27} - E_{45}\big),\\
-&\sqrt{2}\big(E_{41} - E_{17}\big) + \big(E_{62} - E_{53}\big),\\
&E_{42} - E_{57},\\
&E_{43} - E_{67}.
\end{aligned}
$$

Замечание 2.1 *В представлении (5) координаты выбраны таким образом, что корневые вектора корней α_2, $3\alpha_1 + \alpha_2$ и $3\alpha_1 + 2\alpha_2$ это в точности вектора, соответствующие координатам x_1, x_2, x_3, а корневые вектора корней α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$ и $2\alpha_1 + \alpha_2$ - вектора, соответствующие y_1, y_2, y_3.*

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ в представлении минимальной размерности при μ и μ^5.

3 Бигамильтоновы цепочки и обобщенный метод сдвига аргумента

3.1 Бигамильтоновы векторные поля

Для дальнейшей работы нам потребуются некоторые технические результаты из пуассоновой геометрии. Всюду в разделе считаем, что у нас задано действительное многообразие M, на котором рассматривается пространство гладких функций $C^\infty(M)$. Все утверждения формулируются в некоторой окрестности фиксированной точки $P \in M$.

Напомним, что векторное поле v называется *гамильтоновым*, если оно может быть представлено в виде

$$v = \mathcal{A}\mathrm{d}f,$$

для некоторой функции f. В случае, когда $\mathcal{A}$ - невырожденный тензор, поле гамильтоново [6] тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_v\mathcal{A} = 0$, где $\mathcal{L}_v$ — производная Ли вдоль векторного поля. В случае, когда ранг $\mathcal{A}$ в изучаемой окрестности постоянен (именно этот случай нас в дальнейшем и будет интересовать), ответ дает следующая хорошо известная лемма (см., например, [14], где она сформулирована в терминах когомологий Лихнеровича-Пуассона).

Лемма 3.1 *Векторное поле v является локально гамильтоновым в окрестности точки x тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*
1) Поле касается симплектических слоев скобки
2) Производная Ли $\mathcal{L}_v\mathcal{A} = 0$

Фактически данная лемма утверждает, что векторное поле гамильтоново в окрестности, где ранг скобки постоянный, тогда и только тогда, когда векторное поле гамильтоново на каждом симплектическом слое в данной окрестности.

Пусть теперь на изучаемой окрестности задана пара согласованных скобок $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Мы будем называть векторное поле v *бигамильтоновым*, если оно гамильтоново относительно $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ одновременно.

Теорема 3.1 *Пусть в изучаемой окрестности ранг скобки $\mathcal{A}_1$ постоянен и определены функции f и g такие, что $\mathcal{A}_2 df = \mathcal{A}_1 dg$. Тогда существование функции h, удовлетворяющей условию $\mathcal{A}_2 dg = \mathcal{A}_1 dh$, равносильно тому, что векторное поле $v = \mathcal{A}_2 dg$ касается симплектических слоев $\mathcal{A}_1$.*

Доказательство. По лемме 3.1 векторное поле v гамильтоново, если и только если $\mathcal{L}_v\mathcal{A}_1 = 0$ и v касается слоев $\mathcal{A}_1$. Покажем, что равенство нулю производной Ли вытекает из наличия тождества $\mathcal{A}_2 df = \mathcal{A}_1 dg$.

По определению, согласованность скобок означает, что любая их линейная комбинация является снова скобкой Пуассона. Тождество Якоби для суммы скобок эквивалентно следующему тождеству [22]

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}_2\}_1 + \{h,\{f,g\}_2\}_1 + \{g,\{h,f\}_2\}_1 + \{f,\{g,h\}_1\}_2 +\\ + \{h,\{f,g\}_1\}_2 + \{g,\{h,f\}_1\}_2 = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

которое выполняется для любых f, g и h. Для произвольных функций p и q в окрестности x выполняется следующее тождество

$$< \mathcal{L}_v\mathcal{A}_1, \mathrm{d}p, \mathrm{d}q >= \mathcal{L}_v\{p,q\}_1 - \{\mathcal{L}_v p, q\}_1 - \{p, \mathcal{L}_v q\}_1$$

По определению векторного поля v правая часть равна

$$\{g,\{p,q\}_1\}_2 - \{\{g,p\}_2\, q\}_1 - \{p,\{g,q\}_2\}_1.$$

По тождеству 6 данное выражение равно

$$\begin{gathered}\{g,\{p,q\}_1\}_2 + \{q,\{g,p\}_2\}_1 + \{p,\{q,g\}_2\}_1 =\\ - \{g,\{p,q\}_2\}_1 - \{q,\{g,p\}_1\}_2 - \{p,\{q,g\}_1\}_2\end{gathered}$$

Учитывая, что $\mathcal{A}_2 df = \mathcal{A}_1 dg$, получаем, что это равно

$$-\{f,\{p,q\}_2\}_2 - \{q,\{f,p\}_2\}_2 - \{p,\{q,f\}_2\}_2 = 0.$$

Равенство нулю этого выражения — в точности тождество Якоби для первой скобки. Таким образом, теорема доказана. □

3.2 Бигамильтоновы цепочки. Их свойства и теорема существования

Как и в предыдущем разделе M — действительное многообразие с парой согласованных пуассоновых структур $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Пусть задана бесконечная последовательность гладких функций $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}^+}$ (возможно определенных локально, то есть в окрестности точки $P \in M$). Она называется *бесконечной бигамильтоновой цепочкой*, если выполнена следующая система соотношений:

$$\begin{aligned} &0 = \mathcal{A}_1 \mathrm{d} f_0, \\ &\mathcal{A}_2 \mathrm{d} f_i = \mathcal{A}_1 \mathrm{d} f_{i+1},\ i \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть задана конечная последовательность гладких функций $f_0, ..., f_k$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} &0 = \mathcal{A}_1 \mathrm{d} f_0, \\ &\mathcal{A}_2 \mathrm{d} f_i = \mathcal{A}_1 \mathrm{d} f_{i+1},\ 0 \leq i \leq k-1. \end{aligned}$$

Если для f_k векторное поле $\mathcal{A}_1 \mathrm{d} f_k$ не касается симплектических слоев $\mathcal{A}_2$, то подобную цепочку мы будем называть *конечной бигамильтоновой цепочкой.* Из теоремы 3.1 вытекает, что конечная цепочка не может быть началом бесконечной.

Интерес к бигамильтоновым цепочкам обусловлен тем, что они дают коммутирующие функции. Следующая теорема дает достаточные условия коммутативности.

Теорема 3.2 *Пусть пара функций f_i и g_j удовлетворяет одному из трех условий:*

1) Они входят в некоторые бесконечные бигамильтоновы цепочки (возможно, совпадающие)

2) f_i входит в бесконечную бигамильтонову цепочку, а g_j — в конечную.

3) Они входят в одну конечную цепочку, то есть, фактически $g_j = f_j$

Тогда

$$\{f_i, g_j\}_1 = \{f_i, g_j\}_2 = 0.$$

Доказательство. Сначала разберем первые два случая. Из условий вытекает, что f_i — принадлежит бесконечной цепочке.

$$\{f_i, g_j\}_1 =< \mathcal{A}_1, df_i, dg_j >=< \mathcal{A}_2, df_i, dg_{j-1} >= \\ =< \mathcal{A}_1, df_{i+1}, dg_{j-1} >= \{f_{i+1}, g_{j-1}\}_1.$$

Применяем этот переход j раз. Тогда

$$\{f_i, g_j\}_1 = \{f_{i+j}, g_0\}_1 = 0.$$

Аналогичным образом, проводя рассуждения для второй скобки, получаем

$$\{f_i, g_j\}_2 = \{f_{i+j+1}, g_0\}_1 = 0/$$

Пусть теперь на f_i, g_j наложено третье условие, то есть $g_j = f_j$. Без ограничения общности считаем, что $j > i$. Тогда возможно два случая. Первый, когда $j - i = 2l$. Тогда рассуждая аналогично предыдущему случаю получим

$$\{f_i, f_{i+2l}\}_1 = \{f_{i+l}, f_{i+l}\}_1 = 0,$$

и то же самое для $\mathcal{A}_2$. Второй случай - когда $j-i = 2l+1$, тогда получаем

$$\{f_i, f_{i+2l+1}\}_1 = \{f_{i+l}, f_{i+l+1}\}_1 \{f_{i+l}, f_{i+l}\}_2 = 0,$$

и аналогично для второй скобки. Таким образом, теорема доказана. □
Легко видеть, что это свойство функций никак не зависит от области определения.

Пара согласованных скобок $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ порождает естественное кораспределение, которое мы будем обозначать через R: каждой точке x многообразия M ставится в соответствие $W_{\mathbb{R}}$, то есть объединение ядер регулярных скобок пучка билинейных форм на кокасательном пространстве, задаваемого $A_1 = \mathcal{A}_1|_x$ и $A_2 = \mathcal{A}_2|_x$. Кроме этого в каждой точке определено кораспределение $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1 \subseteq T * M$, которое каждой точке x ставит в соответствие ядро кососимметрической билинейной формы $A_1 = \mathcal{A}_1|_x$. При помощи этих двух кораспределений мы можем определить *базовое кораспределение*, которое будем обозначать через B, по формуле $\mathrm{B} = \mathrm{R} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$.

Теорема 3.3 *Пусть $P \in M$ — регулярная точка для $\mathcal{A}_1$ и в окрестности этой точки определены функции Казимира, дифференциалы которых независимы и порождают кораспределение* $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$*. Кроме этого считаем, что в окрестности P структура $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ в смысле теоремы Жордана-Кронеккера 2.1 одинакова. Тогда найдется для точки P найдется такая окрестность, что:*

1) В ней существует такая функциональная подалгебра $\mathcal{G}_1$, что $\mathrm{D}\mathcal{G}_1 = \mathrm{B}$ *(то есть кораспределение интегрируемо).*

2) Для всякой бесконечной бигамильтоновой цепочки f_i, определенной в этой окрестности, функция $f_0 \in \mathcal{G}_1$

3) Для всякой $f \in \mathcal{G}_1$ найдется бесконечная бигамильтонова цепочка f_i, для которой $f_0 = 0$ и все функции определены на той же окрестности P, что и f.

4) Дифференциалы функций, входящих во всевозможные бигамильтоновы цепочки, начинающиеся в $\mathcal{G}_1$, порождают в данной окрестности кораспределение R

Доказательство. Заметим, что $(\mathrm{R} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_1)^* = \mathrm{R}^* + (\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1)^*$ — гладкое распределение, так как оба распределения в сумме гладкие. Кроме этого, все выкладки будем производить в окрестности точки P, в которой одновременно выполняются оба условие теоремы. В дальнейшем, однако, эту окрестность придется уменьшить.

Лемма 3.2 *Пусть вектор v из распределения* $(\mathrm{R}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1)^*$*. Тогда найдутся: окрестность P и гладкое векторное поле v_λ, гладко зависящее от действительного параметра λ, что при $0 < |\lambda| < \epsilon$ в целой окрестности v_λ касается слоев $\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2$ и $v_0 = v$.*

Доказательство. Рассмотрим пару форм A_1 и A_2 (канонический вид $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$) на комплексном линейном пространстве V^*. Возьмем отдельно один из кронеккеровых блоков K_l. Обозначим координаты в соответствующем в линейном пространстве V_l через $y_1, ..., y_{2k+1}$. В двойственной системе координат $\mathrm{d}y_1, ..., \mathrm{d}y_{2k+1}$ на V_l^* из разложения (2), которая будет канонической для данного вида, формы заданы следующими соотношениями:

$$< \mathcal{A}_1, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}y_j >= \delta_{j,i+k}, < \mathcal{A}_2, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}y_j >= \delta_{j,i+k+1},$$

а все остальные спаривания равны нулю. Пересечение ядра $\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2$ с пространством V_l^* одномерно и натянуто на ковектор:

$$\mathrm{d}y_\lambda = \mathrm{d}y_{2k+1} + \lambda \mathrm{d}y_{2k} + ... + \lambda^k \mathrm{d}y_{k+1}.$$

Далее x мы будем рассматривать исключительно в качестве параметра. Рассмотрим систему уравнений

$$J^T \mathcal{A}_1 J = A_1,$$
$$J^T \mathcal{A}_2 J = A_2,$$

Решением данной системы является матричная, вообще говоря комплекснозначная функция $J(x)$. В каждой точки окрестности данная система квадратичных уравнений с непостоянными коэффициентами на компоненты матрицы $J(x)$, разрешима и (в, быть может, чуть меньшей окрестности) гладко зависит от этих самых коэффициентов - суть компонент матриц $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Так как данные компоненты гладко зависят от параметра x, то полученное поле операторов $J(x)$ также гладко зависит от параметра из этой окрестности, которую мы и возьмем в качестве окрестности P, фигурирующей в условии леммы.

Рассмотрим вектор $\tilde{v} = J^T(x)v(x) \in V$, где v — просто параметризованное точками изучаемой окрестности множество векторов. По определению векторного поля $v < \mathrm{d}y_{2k+1,\tilde{v}} = 0 >$. Обозначим через $\tilde{v}_l$ проекцию v на V_l.

Для данного блока K_l положим

$$\tilde{v}_{\lambda,2k+1} = -\lambda v_{2k} - ... - \lambda^k v_{k+1}.$$

Легко видеть, что $< \mathrm{d}y_\lambda, \tilde{v}_\lambda >= 0$. Рассмотрим сумму таких векторов для каждого кронеккерова блока и обозначим полученный вектор $\hat{v}_\lambda(x)$. Легко видеть, что $\hat{v}_0 = J^T(x)v(x)$. Заметим теперь, что множество векторов $(J^{-1})^T(x)\hat{v}_\lambda(x)$ гладко зависит от параметров λ, x. Возьмем вещественную часть полученного векторного поля, то есть векторное поле, у которого каждая компонента - вещественная часть соответствующей координаты. Так как матрицы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — вещественные, то полученное множество векторов можно рассмотреть как векторное поле в некоторой окрестности точки $P \in M$. При этом оно касается слоев $\mathcal{A}_1 + \lambda A_2$ и совпадает с v при $\lambda = 0$. Лемма доказана. ■

Пусть $v^1, ..., v^r$ - вектора, порождающие распределение $(\mathrm{R} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_1)^*$. Применим к ним доказанную лемму. Так как эти векторные поля были линейно независимы, то v^i_λ также линейно независимы при достаточно малых λ (снова уменьшаем изучаемую окрестность P). Отсюда следует, что из соображений размерности данные вектора порождают касательное пространство к слоям $\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2$, и, следовательно, коммутатор любых двух выражается через остальные. Устремляя λ к нулю получаем, что $[v^i, v^j]$ выражается через векторные поля $v^1, ..., v^r$ и, следовательно, по теореме Фробениуса распределение интегрируемо. В качестве образующих $\mathcal{G}_1$ берутся интегралы данного распределения, определенные на некоторой окрестности точки P, то есть изучаемая окрестность снова уменьшается.

Пусть теперь задана бигамильтонова цепочка $f_0, ...$ Рассмотрим в точке x ковектора $\mathrm{d}f_i$. Они удовлетворяют условию теоремы 2.3, а значит все $\mathrm{d}f_i$ лежат в R. Из первого уравнения на бигамильтонову цепочку вытекает, что f_0 — функция Казимира $\mathcal{A}_1$, поэтому $\mathrm{d}f_0 \in \mathrm{R} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$, то есть функция f_0 лежит в $\mathcal{G}_1$, то есть доказан второй пункт теоремы.

Рассмотрим теперь векторные поля v^i_λ, как поля на окрестности точки $(P, 0)$, многообразия $M \times \mathbb{R}$. На этой окрестности задана скобка $\tilde{\mathcal{A}}_1$ для которой координатные функции $x_1, ..., x_n$ коммутируют как

$$< \tilde{\mathcal{A}}_1, \mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_j >=< \mathcal{A}_1, \mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_j >,$$

а λ — функция Казимира $\tilde{\mathcal{A}}_1$, то есть в локальных координатах матрица $\tilde{\mathcal{A}}_1$ — это просто матрица $\mathcal{A}_1$ с добавленными строкой и столбцом нулей. Так, как поля v^i_λ на этой расширенной окрестности задают интегрируемое распределение, то координатную функцию λ можно дополнить набором интегралов $f^1_\lambda, ..., f^n_\lambda$.

По построению, $\mathrm{d}f^1_\lambda, ..., \mathrm{d}f^n_\lambda$ независимы и для каждого λ эти функции - в точности функции Казимира скобки $\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2$, то есть

$$(\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2)\mathrm{d}f^i_\lambda = 0.$$

Разлагая в этом выражении f^i_λ в ряд по λ, получаем, что коэффициенты этого ряда в точности задают бесконечную бигамильтонову цепочку. При этом, так как дифференциалы $\mathrm{d}f^i_\lambda$ независимы, то легко видеть, что дифференциалы коэффициентов разложения порождают R, то есть последний пункт теоремы доказан.

Теперь рассмотрим произвольную $f \in \mathcal{G}$ и представим ее как $F(f^1_0, ..., f^n_0)$. Определим функцию $F_\lambda = F(f^1_\lambda, ..., f^n_\lambda)$. Легко видеть, что $(\mathcal{A}_1+\lambda\mathcal{A}_2)\mathrm{d}F_\lambda = 0$ по построению и $F_0 = f$. Разлагая полученную функцию по λ, получаем третье утверждение теоремы. Теорема полностью доказана. $\square$

Данная теорема говорит о локальной интегрируемости кораспределения B. Разумеется, в общем случае это кораспределение интегрируемым быть вовсе не обязано. Простейший пример - когда неинтегрируемо кораспределение $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$.

3.3 Обобщенный метод сдвига аргумента. Псевдомногочлены

Пусть на вещественном линейном пространстве V (которое, по сути, является простейшим многообразием M) размерности $2k+n$ задана пара согласованных скобок - $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$ - линейная и постоянная соответственно (напомним, что линейная скобка - это скобка Пуассона на линейном пространстве, которая из двух линейных функций снова делает линейную). Коранг последней считаем равным n. Задание линейной скобки превращает V^* в некоторую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, а исходное пространство позволяет отождествить с коалгеброй $\mathfrak{g}^*$. Постоянную скобку $\mathcal{A}_c$ можно рассматривать как линейное отображение из $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$. Ядро этого отображения - подпространство в $\mathfrak{g}$ - будем обозначать через Ann_c.

Лемма 3.3 Ann_c — *подалгебра в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $f, g \in \operatorname{Ann}_c$ — то есть линейные функции Казимира $\mathcal{A}_c$. По определению согласованности скобок получаем

$$\{f,\{g,h\}_c\} + \{h,\{f,g\}_c\} + \{g,\{h,f\}_c\} + \\ + \{f,\{g,h\}\}_c + \{h,\{f,g\}\}_c + \{g,\{h,f\}\}_c = 0.$$

Так как $f, g \in \operatorname{Ann}_c$, то все слагаемые, за исключением второго, обращаются в ноль. Таким образом, выполнено тождество $\{h,\{f,g\}\}_c = 0$ для произвольного h. Отсюда $\{f,g\}$ — функция Казимира скобки $\mathcal{A}_c$, а из линейности $\mathcal{A}$ - это линейная функция. Лемма доказана. $\square$

В работе [10] предлагается так называемый формальный метод сдвига аргумента, который позволяет строить коммутативные наборы, используя бигамильтоновы цепочки, для случае, когда $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_a$ и элемент a — регулярный элемент коалгебры. Когда $\mathcal{A}_c$ не удовлетворяет этому условию, естественным классом функций, связанным с бигамильтоновыми цепочками, оказываются псевдомногочлены.

Будем говорить, что f - *локальный псевдомногочлен* на окрестности некоторой точки $P \in \mathfrak{g}^*$, если ограничение функции на листы скобки $\mathcal{A}_c$ в этой окрестности дает полиномиальные функции. Данное определение корректно, так как слои представляют собой аффинные пространства. В дальнейшем для удобства выкладок полагаем, что на $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$ зафиксированы двойственные друг к другу системы координат $u_1, ..., u_n, p_1, ..., p_{2k}$, в которых постоянная скобка $\mathcal{A}_c$ коранга n приведена к каноническому виду. При этом в изучаемой окрестности точки P фиксирована система координат, совпадающая с глобальной, сдвинутой в нее.

Степенью псевдомногочлена будем называть максимальную степень полиномов, получающихся ограничением на симплектические слои в данной окрестности. Легко видеть,что функция f является псевдомногочленом степени d, если все производные

$$\frac{\partial^{d+1} f}{\partial p_1^{i_1} ... p_{2k} \partial^{i_{2k}}} = 0, i_1 + ... + i_{2k} = d + 1,$$

на всей окрестности, в то время как хотя бы одна производная меньшей степени не является тождественным нулем.

Из определения непосредственно вытекает, что пседвомногочлен представляет собой многочлен от переменных p_i, коэффициенты которого гладко зависят от u_j. Из такого представления немедленно вытекают следующие свойства степени псевдомногочленов:

$$\begin{array}{rl} 1. & \deg f(u_1, ..., u_k) = 0, \\ 2a. & \deg (f+g) = max(\deg f, \deg g), \deg f \neq \deg g \\ 2b. & \deg (f+g) \leq \deg f, \deg f = \deg g \\ 3. & \deg (fg) \leq \deg f + \deg g \end{array} \qquad (8)$$

Последнее свойство отличается от аналогичного для обычных степеней ровно потому, что произведение двух ненулевых гладких функций с не пересекающимися носителями дает ноль.

Замечание 3.1 Легко видеть, что обычная степень полинома от переменных p_i и u_j не меньше степени этой функции, как псевдомногочлена. Это связано с тем, что при подсчете степени монома учитываются только степени p_i.

Следующая теорема как раз показывает, что псевдомногочлены - это естественный класс функций для изучения бигамильтоновый цепочек в случае, когда мы имеем дело с парой скобок $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$ на линейном пространстве.

Теорема 3.4 *Пусть f — псевдомногочлен степени d и известно, что система*

$$\mathcal{A} \mathrm{d} f = \mathcal{A}_c \mathrm{d} g$$

разрешима. В этом случае

1) Всякое решение g данной системы является псевдомногочленом степени не выше $d+2$

2) Если свободный член g равен нулю в целой окрестности, то такой псевдомногочлен единственный.

3) При $l > 0$ всякая функция f_l, входящая в бигамильтонову цепочку (конечную и бесконечную), является является псевдомногочленом степени не выше $2i$.

Доказательство. Напомним, что мы полагаем, что в алгебре и коалгебре зафиксированы двойственные базисы, в которых, скобка $\mathcal{A}_c$ приведена к каноническому виду. Определим $2k$ функции F_i по правилу:

$$F_i = -\big(\mathcal{A}\mathrm{d}f\big)^{i+k}, \text{ при } 1 \le i \le k, F_i = \big(\mathcal{A}\mathrm{d}f\big)^{i-k}, \text{ при } k < i \le 2k,$$

где $\big(\mathcal{A}\mathrm{d}f\big)^j$ означает j-ю координату соответствующего вектора. В силу канонического вида $\mathcal{A}_c$ $F_i = \frac{\partial g}{\partial p_i}$ для любого g — решения системы. Зададим функцию $F(p_i, u_j)$ следующей формулой:

$$\begin{aligned} F(p_i, u_j) = \int_0^{p_1} F_1(t, 0, ..., 0, u_j)\mathrm{d}t + \int_0^{p_2} F_2(p_1, t, 0, ..., 0, u_j)\mathrm{d}t + ... \\ + \int_0^{p_{2k}} F_{2k}(p_1, ..., p_{2k-1}, t, u_j)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим $\frac{\partial F}{\partial p_i}$. Из существования g немедленно вытекает, что $\frac{\partial F_i}{\partial p_l} = \frac{\partial F_l}{\partial p_i}$, поэтому для $j > i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} \int_0^{p_j} F_j(p_1, , ..., p_{j-1}, t0, u_j)\mathrm{d}t = \int_0^{p_j} \frac{\partial}{\partial p_j} F_i(p_1, , ..., p_{j-1}, t0, u_j)\mathrm{d}t = \\ = F_i(p_1, ..., p_{j-1}, p_j, 0..., u_j) - F_i(p_1, ..., p_{j-1}, 0, 0, ..., u_j). \end{aligned}$$

Отсюда $\frac{\partial}{\partial p_i} F = F_i = \frac{\partial g}{\partial p_i}$, то есть разность $F - g$ представляет собой некоторую функцию от u_j. Так как координаты вектора $\mathcal{A}\mathrm{d}f$ — псевдомногочлены, и все фигурирующие в формулах интегралы дают квазиполиномы, то g — псевдомногочленом. Теперь заметим, что в F_i могут с постоянными слагаемыми входить выражения вида $p_i \frac{\partial f}{\partial u_j}$, которые по свойствам степени 8 представляют собой псевдомногочленом степени $d + 1$. Интегралы от этого слагаемого, фигурирующие в формуле (9), дают псевдомногочлен степени $d + 2$. Таким образом, первый пункт теоремы доказан.

Теперь пусть g и g' удовлетворят системе $\mathcal{A}df = \mathcal{A}_c dg$. Тогда $\mathcal{A}_c d(g - g') = 0$, то есть $g - g'$ является функцией только от переменных $u_1, ...u_n$.

Учитывая, что ограничение $g - g'$ на окрестность равно нулю по предположению, получаем, что $g - g' = 0$ и функции совпадают. Таким образом доказан пункт 2.

Третий пункт вытекает из первого с учетом того факта, что степень функции от u_j как квазиполинома равна нулю. Теорема доказана $\Box$

Замечание 3.2 Если в бесконечной бигамильтоновой цепочке f_i — все функции полиномы, то из формулы (9) в доказательстве теоремы 3.4 можно получить оценку на степень f_i, как полинома. Действительно, если f_i имеет степень d, то каждая компонента вектора $\mathcal{A}\mathrm{d}f_i$ имеет также степень d. Применяя интегральную формулу (9) из доказательства, получаем, что f_{i+1} имеет степень как минимум $i + 1$. Разумеется, степень может оказаться больше, так как полином определяется с точностью до добавления к нему некоторого многочлена от u_j, например f_0 в произвольной степени. Отсюда получаем оценку: степень f_i как многочлена равна как минимум $\deg f_0 + i$.

Легко видеть, что, если в окрестности точки P имеется бигамильтонова цепочка, состоящая из полиномов, то, в силу алгебраичности всех входящих в формулы функций, данная цепочка уже будет бигамильтоновой на всей коалгебре g^*.

Обобщенной подалгеброй Мищенко-Фоменко будем называть подалгебру, порожденную всеми полиномами, входящими в полиномиальные бигамильтоновы цепочки на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$, которые задаются парой скобок $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$. Обозначать эту алгебру будем $\mathcal{F}_c$. Метод получения такой коммутативной подалгебры будем называть *обобщеным методом сдвига аргумента.*

Замечание 3.3 Для дальнейшей работы нам потребуется следующий факт - пусть дифференциалы полиномов $\mathrm{d}I_1, ..., \mathrm{d}I_n$ независимы почти всюду на линейном пространстве над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и в некоторой окрестности фиксированной точки дифференциал полинома $\mathrm{d}F$ зависим с данными. Тогда, из алгебраичности функций дифференциалы зависимы на всем пространстве. Из этого факта, в свою очередь, следует [11], что полиномы $F, I_1, ..., I_n$ алгебраически зависимы.

Вообще полученная алгебра может быть устроена очень плохо, например, не быть конечно порожденной. Рассмотрим два примера $\mathcal{F}_c$, которые показывают, что термин обощенный метод сдвига аргумента имеет в данном случае смысл.

Случай $A_{3,2}$.

Классический метод сдвига аргумента. Пусть на коалгебре g^* вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определены полиномиальные инварианты $I_1, ..., I_n$, дифференциалы которых в точке общего положения порождают ядро $\mathcal{A}$. Тогда рассмотрим разложение

$$I_i(x + \lambda a) = \sum_j \lambda^j f_{ij}.$$

Определим подалгебру $\mathcal{F}_a^c$ в $P(\mathfrak{g})$, как подалгебру, порожденную f_{ij}. Эти функции образуют бигамильтоновы цепочки $\mathcal{A}_a \mathrm{d} f_{ij-1} = \mathcal{A} \mathrm{d} f_{ij}$. Легко видеть, что определение этой подалгебры зависит от фиксированного набора полиномиальных инвариантов. При этом, однако, для любого набора по построению $\mathcal{F}_a^c \subseteq \mathcal{F}_a$.

Замечание 3.4 В работе [40] доказывается, что, если для комплексной алгебры g коразмерность множества сингулярных элементов как минимум три и в кольце инвариантов можно выбрать набор порождающих $I_1, ..., I_n$ так, что сумма их степеней равна N, то подалгебра $\mathcal{F}_a^c$ максимальна для регулярного a. В частности, из максимальности получается алгебраическая замкнутость.

Теперь рассмотрим произвольный полином f, входящий в полиномиальную бигамильтонову цепочку. По построению, $\mathrm{d}f \in \mathbb{R}$, откуда получаем, что f функционально зависим с многочленами из $\mathcal{F}_a^c$ всюду на $\mathfrak{g}^*$. По замечанию 3.3 данный полином зависим также и алгебраически, поэтому $f \in \mathcal{F}_a^c$. Таким образом, в данном случае $\mathcal{F}_a^c = \mathcal{F}_a$.

Локальный метод сдвига аргумента. Напомним, что в случае, когда $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_a$ для некоторого регулярного a, определен локальный метод сдвига аргумента, авторство которого принадлежит А.В.Браилову. В окрестности точки a рассмотрим локальные функции Казимира (так как кораспределение $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ задается рациональными формами, то эти инварианты есть рациональный функции с участием полиномов и логарифмов) линейной скобки, которые обозначим через $I_1, ..., I_n$. По построению их дифференциалы в целой окрестности порождают ядро $\mathcal{A}$. Тогда рассмотрим разложение

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij},$$

и рассмотрим $\mathcal{F}_a^{loc} \subseteq P(\mathfrak{g})$, порожденную функциями f_{ij}. Легко видеть, что определение данной подалгебры зависит, вообще говоря, от фиксированного набора порождающих, а также точки.

Замечание 3.5 Функции f_{ij} образуют бигамильтоновы цепочки $\mathcal{A}_a \mathrm{d} f_{ij} = \mathcal{A} \mathrm{d} f_{ij-1}$. В силу алгебраичности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$ получаем, что эти тождества выполняются на всей коалгебре, а, значит, $\mathcal{F}_a^{loc} \subseteq \mathcal{F}_a$.

Теперь рассмотрим произвольную $f \in \mathcal{G}_a$ (где $\mathcal{G}_a$ — это $\mathcal{G}_1$ для $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_a$). Легко видеть, сто $f = F(I_1, ..., I_n)$. Разлагая $f(a + \lambda x)$ получаем, что коэффициенты разложения - суть полиномы от f_{ij}. Отсюда это легко получается для любой бесконечной цепочки, стартующей в f и $\mathcal{F}_a^{loc} = \mathcal{F}_a$

Таким образом, новый метод действительно обобщает уже существующие.

3.4 Обобщенный метод сдвига аргумента и плоские пучки на коалгебрах Ли

В случае, когда имеется некоторая математическая структура, естественным образом возникает вопрос о приведении ее к некоторой нормальной форме, а также о классификации таких нормальных норм. В самом общем случае, подобная классификация для пучков согласованных пуассоновых структур проводится при помощи так называемых сетей Веронезе (Veronese webs, [30]), однако вычисление этого инварианта представляется довольно сложной задачей, поэтому имеет смысл поиск более простых условий для различного рода частных случаев классификации.

Одним из естественных частных случаев является выяснение плоскости пучка. Пучок скобок называется *плоским*, если в некоторой локальной системе координат он приводится к постоянному виду. В настоящее время имеется несколько результатов в данном направлении. Так, для случая, когда регулярная скобка пучка невырождена (в терминах теоремы Жордана-Кронеккер 2.1 это означает отсутствие кронеккеровых блоков) этот вопрос был решен Туриэлем [32], который показал, что плоскость подобного пучка равносильна постоянству собственных значений некоторого оператора, называемого оператором рекурсии. В случае, когда речь идет о паре $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_c$ на линейном пространстве и $\mathcal{A}$ задает полупростую алгебру, плоскость соответствующего пучка была показана Захаревичем [31].

При этом, однако, неплоских пучков подобного рода до последнего времени известно не было. Оказывается, результаты предыдущего параграфа, касающиеся псевдомногочленов, позволяют сформулировать достаточно простое в применении необходимое условие плоскости, а также построить пример неплоского пучка на пятимерном пространстве.

Теорема 3.5 *Если кронеккеров пучок пуассоновых структур на линейном вещественном пространстве V, задаваемый парой согласованных скобок Пуассона $\mathcal{A}$ (линейной) и $\mathcal{A}_c$ (постоянной) плоский, то в окрестности точки общего положения локальные функции Казимира $\mathcal{A}$ можно выбрать в виде псевдомногочленов степеней не выше $2i_1, ...2i_k$, где $2i_1+1, ..., 2i_k+1$ — размеры кронеккеровых блоков.*

Доказательство. Если пучок плоский, то комплексификация пары скобок приводится к виду, описанному в теореме 2.1, в целой окрестности. Из кронеккеровости вытекает, что в разложении присутствуют только кронеккеровы блоки. Рассмотрим произвольный блок такого типа размера $2l-1$. В нем имеется две группы переменных $x_1, ..., x_l$ и $y_1, ..., y_{l-1}$ (эти координаты, вообще говоря, комплекснозначные), причем коммутационные соотношения имеют вид:

$$\{x_i, y_j\}_1 = \delta_{ij}, \{x_i, y_j\}_2 = \delta_{i-1j},$$

а все остальные компоненты равны нулю. Легко видеть, что переменные x_i образуют бесконечную бигамильтонову цепочку, которая, правда, с некоторого момента зануляется. При этом вещественная часть x_1 лежит в ядре $\mathcal{A}_2$, а вещественная частьx_l — в ядре $\mathcal{A}_1$. Взяв $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_c$, и, применяя теорему 3.4 для исходной системы координат, получаем требуемое. $\square$

Теперь применим данное необходимое условие для доказательства неплоскости пучка. Рассмотрим пятимерную алгебру $A_{5,36}$ в обозначениях, принятых в [28]. Коммутационные соотношения в этой алгебре следующие:

$$[e_1, e_4] = e_1, [e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_2, e_5] = -e_2, [e_3, e_5] = e_3,$$

а остальные коммутаторы равны нулю. Рассмотрим $a = (1, 0, 0, 0, 0)$. Пара скобок на коалгебре в этом случае принимает вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & x_3 \\ -x_1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_c = \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Легко видеть, что $\mathrm{ind}\mathfrak{g} = 1$ и $\mathrm{Ann}\, a = \mathrm{span}\{e_5\}$. В свою очередь миноры $M_{55} = \pm x_1^4, M_{11} = \pm x_2^2 x_3^2$. Из этого вытекает, что $\mathrm{codimSing}(\mathfrak{g}^*) \geq 2$. Учитывая, что a — регулярный элемент, получаем, что по критерию Болсинова 2.4 в точке общего положения алгебра $\mathcal{G}$ полна, а, значит, по теореме Жордана-Кронеккера 2.1 пучок содержит только кронеккеровы блоки.

Инвариант алгебры можно представить в виде $\frac{x_2x_3+x_1x_5}{x_1}$ [28]. Легко видеть, что он рационален по x_1, поэтому вероятно ожидать, что он не может быть представлен в виде псевдомногочлена, а, следовательно, пучок неплоский. Докажем это.

Пусть верно противное и пучок плоский. Тогда из теоремы 3.5 вытекает, что локальный инвариант P в окрестности точки в фиксированных нами координатах - это псевдомногочлен степени не выше 4.

Рассмотрим $\mathcal{A}\mathrm{d}P = 0$. Заметим, что первая компонента этого вектора в локальных координатах имеет вид $x_1\frac{\partial P}{\partial x_4} = 0$. Отсюда получаем, что локальный инвариант не зависит от x_4.

Теперь рассмотрим четвертую компоненту вектора $\mathcal{A}\mathrm{d}P$. Она имеет вид $x_1\frac{\partial P}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$. Легко видеть, что слева стоит многочлен каждый моном которого имеет вид $(p+q)A_{pqr}x_1^p x_2^q x_3^r$, причем $p+q+r \leq 4$. Из этого немедленно вытекает, что $A_{pqr} = 0$, если хотя бы p или q отличен от нуля. Таким образом P — квазимногочлен всего от одной переменной - x_3. Однако пятая компонента вектора $\mathcal{A}\mathrm{d}P$ дает нам уравнение $x_2\frac{\partial P}{\partial x_2} = x_3\frac{\partial P}{\partial x_3}$. Отсюда получаем, что единственный подходящий P — это константа. А значит предположение неверно и пучок неплоский.

Замечание 3.6 Легко видеть, что в данном случае аналогичным образом можно показать, что функция Казимира $\mathcal{A}$ не представляется в виде квазиполинома какой-либо степени.

4 Секционные операторы

4.1 Определение, теорема существования и явная формула для секционных операторов. Примеры

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли. Тогда самосопряженный относительно формы Киллинга оператор $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется секционным, если для некоторых фиксированных $a, b \in \mathfrak{h}$ и произвольного x выполняется следующее тождество

$$[\phi x, a] = [x, b]. \tag{10}$$

При этом в классическом определении элемент a предполагается регулярным.

Позже, определение было перенесено на неполупростой случай уже было проведено в [24], [5] при некоторых дополнительных ограничениях на параметры a, b. При этом естественная переформулировка тождества 10 связана, разумеется, с присоединенным, а не с коприсоединенным представлением. В самом общем случае, секционный оператор - это билинейная форма на коалгебре (то есть оператор из $\mathfrak{g}^*$ в $\mathfrak{g}$), удовлетворяющая тождеству:

$$\mathrm{ad}^*_{\phi x} a = \mathrm{ad}^*_{\beta} x, \quad x \in \mathfrak{g}^* \tag{11}$$

для некоторых фиксированных $\beta \in \mathfrak{g}$, $a \neq 0 \in \mathfrak{g}^*$. При этом требуется, чтобы форма была симметричной — именно это условие является обобщением требования самосопряженности относительно формы Киллинга в полупростом случае. При этом пара a, β называется *параметрами секционного оператора.*

В рамках данного раздела, как и в предыдущем случае, полагаем, что на линейном пространстве задана пара согласованных скобок, одна из которых линейна, а другая - постоянна. При этом всюду далее полагаем, что постоянная скобка задана некоторым элементом коалгебры. Легко видеть, что тождество (11) может быть переписано одним из следующих эквивалентных способов:

$$\langle a, [\phi x, \nu] \rangle = \langle x, [\beta, \nu] \rangle \qquad \text{для любых } \nu \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}^*, \tag{12}$$

или

$$\phi\left(\mathrm{ad}^*_{\nu} a\right) = -[\beta, \nu] \qquad \text{для любых } \nu \in \mathfrak{g}. \tag{13}$$

В классическом случае вопрос существования секционного оператора не возникает, поскольку вид оператора предъявляется явно. Так как в данном определении никаких априорных ограничений на a и β мы не накладываем, то данный вопрос возникает естественным образом. Определим две подалгебры:

1) содержащую аннулятор подалгебру вида

$$\mathfrak{b}_a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \mathrm{ad}^*_{\xi} a, \eta \rangle = 0 \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

2) $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathrm{Ann}\, a] = 0\}$ — централизатор аннулятора $\mathrm{Ann}\, a$.

Лемма 4.1 $\mathfrak{b}_a$ *действительно подалгебра.*

Доказательство. Рассмотрим $\xi, \zeta \in \mathfrak{b}_a$, а $\eta \in \mathfrak{g}'$. Из тождества Якоби для коммутатора вытекает следующее равенство:

$$< a, [[\xi, \zeta], \eta] >=< a, [\xi, [\zeta, \eta]] > - < a, [\zeta, [\xi, \eta]] > .$$

Так как $\mathfrak{g}'$ является идеалом, то в правой часть оба слагаемых равны нулю. Лемма доказана. □

Теперь каждому элементу $a \in \mathfrak{g}^*$ подалгебру $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{b}_a \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$.

Теорема 4.1 *Необходимым и достаточным условием существования секционного оператора ϕ с заданными параметрами $a \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in \mathfrak{g}$, является включение $\beta \in \mathfrak{g}_a$.*

Доказательство. Доказательство данного факта для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ можно получить непосредственно из леммы 3.1 - принадлежность β алгебре $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$ является условием касания симплектических слоев скобки $\mathcal{A}_a$ для векторного поля $v = \mathcal{A}\beta$, а $\beta \in \mathfrak{b}_a$ — в точности требование $\mathcal{L}_v \mathcal{A}_a = 0$. После этого необходимо заметить, что все функции, участвующие в определении объектов алгебраические, поэтому полученные тождества выполняются глобально. Однако в данном случае мы предлагаем алгебраическое доказательство, которое может быть обобщено на случай алгебры Ли над полем характеристики ноль.

Воспользуемся тождеством (13), эквивалентным определению секционного оператора. Этим тождеством оператор ϕ сразу задается на множестве ковекторов вида $y = \mathrm{ad}^*_\nu a$, которое мы будем обозначать через T_a (в случае, когда мы работаем над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ это пространство совпадает с касательным пространством орбиты присоединенного действия группы). Для произвольного $y \in T_a$ согласно (13) мы просто полагаем $\phi(y) = -[\beta, \nu]$, где ν — вектор, удовлетворяющий условию $y = \mathrm{ad}^*_\nu a$. Поскольку вектор ν определен по модулю $\mathrm{Ann}\, a$, то корректность такого определения в точности эквивалентно условию $[\beta, \mathrm{Ann}\, a] = 0$, т.е. $\beta \in \mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$.

Итак, у нас имеется подпространство $T_a \subset \mathfrak{g}^*$, на котором оператор уже задан. Вопрос заключается в том, можно ли этот оператор распространить на все пространство так, чтобы полученный оператор оказался симметричным относительно спаривания.

Ясно, что это можно сделать тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $y, z \in T_a$ мы имеем

$$\langle \phi(y), z \rangle = \langle y, \phi(z) \rangle. \tag{14}$$

На языке матриц данная ситуация описывается следующим образом. Нам дана матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & * \\ A_2 & * \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где A_1 обозначает диагональный блок, а звездочки — неопределенные компоненты. Спрашивается, можно ли вместо звездочек поставить числа так, чтобы матрица стала симметричной? Ответ очевиден: это можно сделать тогда и только тогда, когда диагональный блок A_1 симметричен, что в точности эквивалентно (14).

Полагая $y = \mathrm{ad}^*_\eta a$, $z = \mathrm{ad}^*_\zeta a$, мы можем переписать (14) в виде

$$\langle \phi(\mathrm{ad}^*_\eta a), \mathrm{ad}^*_\zeta a\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_\eta a, \phi(\mathrm{ad}^*_\zeta a)\rangle$$

или, снова используя (13),

$$\langle [\eta,\beta], \mathrm{ad}^*_\zeta a\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_\eta a, [\zeta,\beta]\rangle$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} 0 = \langle [\eta,\beta], \mathrm{ad}^*_\zeta a\rangle - \langle \mathrm{ad}^*_\eta a, [\zeta,\beta]\rangle = \langle a, [[\eta,\beta],\zeta] - [[\zeta,\beta],\eta]\rangle = \\ = \langle a, [[\zeta,\eta],\beta]\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_\beta a, [\zeta,\eta]\rangle, \end{aligned}$$

которое в точности означает включение $\beta \in \mathfrak{b}_a$.

Итак, необходимым и достаточным для существования секционного оператора является одновременное выполнение двух условий $\beta \in \mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$ и $\beta \in \mathfrak{b}_a$, что и требовалось доказать. □

Следующие несколько примеров помогут прояснить устройство алгебр $\mathfrak{g}_a$ и $\mathfrak{b}_a$.

Пример 1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает невырожденной инвариантной билинейной формой (например, если $\mathfrak{g}$ полупроста). С помощью данной формы мы можем отождествить алгебру и коалгебру. Тогда $\mathrm{Ann}\, a$ совпадает с централизатором элемента $a \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$. Отсюда сразу следует, что $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a} = \mathfrak{z}(\mathrm{Ann}\, a)$, т.е. центр централизатора. Учитывая, что $\mathfrak{b}_a$ содержит $\mathrm{Ann}\, a$, получаем, что в данном случае $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{z}(\mathrm{Ann}\, a)$. ■

Пример 2. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что ее коммутант совпадает со всей алгеброй. К таким, например, относятся полупрямые суммы $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} +_\rho V$, где $\rho : \mathfrak{k} \to gl(V)$ — линейное представление полупростой алгебры Ли $\mathfrak{k}$ (не содержащее тривиальных компонент). Из того, что коммутант совпадает со всей алгеброй, сразу вытекает, что $\mathfrak{b}_a = \mathrm{Ann}\, a$

и, следовательно, $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{z}(\operatorname{Ann} a)$, т. е. как и в предыдущем примере, совпадает с центром аннулятора. ■

Пример 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — четырехмерная алгебра Ли $A_{4,7}$ (обозначение взято из [28], см. также [29]), задаваемая в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2e_1,$$
$$[e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3.$$

Остальные коммутаторы считаются равными нулю.

Рассмотрим элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, задаваемый в двойственном базисе $\{e^i\}$ координатами $a = (0, 0, 1, 0)$, т.е. $a = e^3$. Легко видеть, что коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ натянут на e_1, e_2, e_3 и является максимальным изотропным подпространством относительно 2-формы $\mathcal{A}_a = \left(c_{ij}^k a_k\right)$, т.е. $\mathfrak{b}_a = \mathfrak{g}'$. В свою очередь $\operatorname{Ann} a$ — это коммутативная подалгебра, натянутая на e_1, e_2 и являющаяся максимальной. Поэтому $\mathfrak{g}^{\operatorname{Ann} a} = \operatorname{Ann} a = \mathfrak{g}_a$. ■

Пример 4. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — четырехмерная алгебра Ли $A_{4,9}$ (обозначение из [28], [29]), задаваемая в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = e_1,$$
$$[e_2, e_4] = e_2.$$

Остальные коммутаторы равными нулю.

Положим $a = (1, 0, 0, 0)$ в двойственном базисе, т.е. $a = e^1$. Коммутант в данном случае натянут на e_1, e_2 и снова является максимальным изотропным подпространством для формы $\mathcal{A}_a = \left(c_{ij}^k a_k\right)$. Поэтому $\mathfrak{b}_a = \mathfrak{g}'$. Поскольку $\operatorname{Ann} a$ состоит в данном случае только из нуля, то $\mathfrak{g}^{\operatorname{Ann} a} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_a$ совпадает с $\mathfrak{b}_a$. ■

В работе А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [18] для классического секционного оператора с параметрами a, b, задаваемого тождеством 10 на простой комплексной алгебре $\mathfrak{g}$, была получена удобная явная формула в терминах естественного ортогонального разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств:

$$\phi(x) = \phi_{a,b,D} x = \operatorname{ad}_a^{-1} \operatorname{ad}_b x_1 + D x_2, \tag{16}$$

где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{h}$, $x_2 \in \mathfrak{h}^\perp$, $\operatorname{ad}_a^{-1} : \mathfrak{h}^\perp \to \mathfrak{h}^\perp$,и $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ — произвольный самосопряженный оператор. Пространство $\mathfrak{h}^\perp$ в данном случае состоит из всех корневых векторов. Аналогичную теорему можно получить и для общего случая.

Зафиксируем дополнительное к T_a пространство и обозначим его через N. Выбор пространства, разумеется, не является однозначным (в классическом случае $N = \mathfrak{h}$ и совпадает с ортогональным дополнением к T_a, которое натянуто на корневые вектора всех корней). Получаем разложение $\mathfrak{g}^* = T_a \oplus N$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ автоматически возникает двойственное разложение $\mathfrak{g} = N^\perp \oplus \mathrm{Ann}\, a$. В данном случае обозначение $V^\perp$ означает подпространство линейных функционалов, обнуляющихся на V. Легко видеть, что в конечномерном случае $N^{\perp\perp} = N$.

Теорема 4.2 *Пусть $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}^*$ — разложение произвольного элемента x, такое что $x_1 \in T_a$, $x_2 \in N$. Тогда*

$$\phi(x) = -\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1} x_1 + \mathcal{A}_a^{-1} \mathrm{ad}_\beta^* x_2 + Dx$$

где D — произвольный самосопряженный оператор, образ которого содержится в $\mathrm{Ann}\,(a)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала матричную интерпретацию из доказательства предыдущей теоремы. Так, симметричная матрица, полученная из (15) восстановлением недостающих компонент, выглядит так:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2^\top \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_2^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

где A_3 — произвольная симметричная матрица.

Форма $\mathcal{A}_a$ может рассматриваться как линейный оператор из $\mathfrak{g} \to T_a$, действующая по формуле $\mathcal{A}_a(\xi) = \mathrm{ad}_\xi^* a$. Поскольку его ядро оператора в точности совпадает с $\mathrm{Ann}\,(a)$, то корректно определено обратное отображение $\mathcal{A}_a^{-1} : T_a\mathcal{O}(a) \to N^\perp$.

В этих обозначения та часть секционного оператора, которая жестко определена тождеством (13), записывается в виде $-\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi$, где $\pi : \mathfrak{g}^* \to T_a$ — естественная проекция на T_a вдоль N. При этом, однако, полученный оператор не является симметричным.

Лемма 4.2 *Оператор, сопряженный к $-\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi$, имеет вид $\mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}_\beta^*$.*

Доказательство. Условие $\beta \in \mathrm{Ann}\, a$ гарантирует, что $\mathrm{ad}^*_\beta y \in T_a$ для любого $y \in \mathfrak{g}^*$, поэтому выражение $\mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta$ имеет смысл.

Если мы теперь положим $\mathcal{A}_a^{-1}(\pi x) = \xi$ и $\mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta y = \eta$, то получим

$$\langle -\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi x, y\rangle = \langle -\mathrm{ad}_\beta \xi, y\rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}^*_\beta y\rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}^*_\eta a\rangle = \\ -\langle \eta, \mathrm{ad}^*_\xi a\rangle = \langle \pi x, A_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta y\rangle = \langle x, A_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta y\rangle$$

т.е. $(-\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}\pi)^* = \mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta$. ■

Вторая матрица в правой части (17) тем самым означает оператор $\mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta$, который применяется лишь к элементам из N, а на T_a обращается в нуль. Теорема доказана. □

Отметим, что ядро D автоматически совпадает с T_a, так что $Dx = Dx_2$. В частности, D можно записать как $D = \tilde{D} \circ \mathsf{pr}$, где $\tilde{D} : (\mathrm{Ann}\, a)^* \to \mathrm{Ann}\, a$ — произвольный самосопряженный оператор, а $\mathsf{pr} : \mathfrak{g}^* \to \mathrm{Ann}^*a$ — естественная проекция. Другими словами, секционный оператор ϕ с заданными параметрами a и β определен с точностью до произвольного самосопряженного оператора $\tilde{D} : (\mathrm{Ann}\, a)^* \to \mathrm{Ann}\, a$. Этот факт, впрочем, сразу следует из определения.

Замечание 4.1 Если ввести обозначения $B = -\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1} : T_a \to \mathfrak{g}$ и $C = \mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta : \mathfrak{g}^* \to N^\perp$ и учесть, что $(B\pi)^* = C$, то формулу для ϕ можно переписать еще и так:

(a) $\phi = B\pi + C(\mathrm{id} - \pi) + D$,

(b) $\phi = C + (\mathrm{id} - \pi^*)B\pi + D$,

(c) $\phi = B\pi + (B\pi)^* - \pi^* B\pi + D$,

(d) $\phi = C + C^* - \pi^* C + D$.

С формулой Мищенко-Фоменко (16) наиболее близка формула (b): члены C и D — совпадают по виду с двумя членами из формулы Мищенко-Фоменко, но возникает дополнительный член, который необходим для того, чтобы оператор стал симметричным.

Приведем несколько примеров применения полученных формул для секционного оператора.

Пример 5. Рассмотрим простую комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (считаем, как обычно, что алгебра и коалгебра отождествлены при помощи формы Киллинга). Опишем действие секционного оператора в базисе Вейля, когда параметр $a \in \mathfrak{h}$.

По теореме 4.1 параметр b в этом случае принадлежит центру $\mathfrak{g}^a$, то есть $\mathfrak{g}^a \cap \mathfrak{h}$. По построению пространство T_a из теоремы 4.2 совпадает с $[\mathfrak{g}, a]$ и натянуто на корневые вектора e_α, для которых $\alpha(a) \neq 0$. В качестве трансверсального пространства N мы выберем $\mathfrak{g}^a$.

Таким образом по 4.2 $\phi e_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} e_\alpha$ для $\alpha(a) \neq 0$ и $D : \mathfrak{g}^a \to \mathfrak{g}^a$. В частности секционный оператор полупростой по модулю D.

Пример 6. Рассмотрим алгебру Ли $gl(n)$ (не важно над $\mathbb{C}$ или над $\mathbb{R}$). Считаем, что алгебра и коалгебра отождествлены при помощи скалярного произведения $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Рассмотрим произвольный полином p с нулевым свободным членом. Определим оператор $\phi : gl(n) \to gl(n)$ следующей формулой:

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} P(A + tX) = \phi X$$

Дифференцируя тождество $[A+tX, P(A+tX)] = 0$ по t, получаем, что ϕ — секционный оператор с параметрами $A, P(A)$. А.В. Болсинов показал, что данные операторы полезны при изучении метрик с совпадающими связностями Γ^k_{ij}.

4.2 Алгоритм определения секционности оператора

В практических задачах возникает естественный вопрос: является ли конкретный оператор ϕ секционным? Например, именно такой вопрос возникает, если мы хотим выяснить, существует ли для заданной римановой метрики g проективно эквивалентная ей метрика g', то есть метрика с теми же самыми геодезическими как непараметризованными кривыми. Необходимое условие состоит в том, что тензор кривизны метрики g является секционным оператором в смысле исходного тождества (10) для алгебры $so(n)$ (см. [9]). Важным также бывает знать, сколько различных секционных представлений имеет данный оператор ϕ, т. е. сколько существует пар a, β, удовлетворяющих тождеству (13)? Все эти вопросы сводятся к несложной задаче из линейной алгебры.

Пусть задан некоторый оператор $\phi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$, про который нужно выяснить, секционный он или нет. Что касается β, то ясно, что он всегда определен по модулю центра алгебры и мы не будем им далее интересоваться. Выделим два основных случая: случай тривиального представления и случай нетривиального представления.

Случай тривиального секционного представления. Будем говорить, что оператор ϕ имеет *тривиальное секционное представление с параметрами* a, β, если он удовлетворяет тождеству (13), т. е. $\phi \mathcal{A}_a = -\operatorname{ad}_\beta$, обе части которого тривиальны, т.е. $\phi\mathcal{A}_a = 0$ и $-\mathrm{ad}_\beta = 0$. В обозначениях Теоремы 4.2 это означает, что оператор ϕ состоит лишь из тривиальной части D.

Понять, может ли заданный оператор иметь тривиальное секционное представление, довольно просто. Нужно рассмотреть отображение $a \mapsto \phi\mathcal{A}_a$ как линейный оператор $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$. Оператор ϕ допускает тривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда ядро этого отображения нетривиально, причем размерность ядра указывает на число независимых тривиализующих параметров $a \in \mathfrak{g}^*$.

Нетривиальность ядра означает, что образ ϕ как подпространство в $\mathfrak{g}$ содержится в аннуляторе какого-то элемента a (здесь удобнее использовать тождество (11)). Это заведомо так вообще для любого ϕ, если коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ строго меньше самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае достаточно взять $a \in (\mathfrak{g}')^\perp$, поскольку: $\mathrm{Ann}\, a = \mathfrak{g}$, или что то же самое $\mathcal{A}_a = 0$.

Случай нетривиального секционного представления. Чтобы выяснить вопрос о нетривиальных секционных представлениях, рассмотрим образ отображения $a \mapsto \phi\mathcal{A}_a$ как подпространство $P_1 \subset \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$. Аналогичным образом, если β пробегает алгебру Ли $\mathfrak{g}$, то все операторы вида $-\mathrm{ad}_\beta$ в совокупности образуют подпространство $P_2 \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. Заметим. что P_2 — это в точности присоединенная алгебра Ли.

Таким образом, для выяснения, является ли оператор секционным, можно использовать следующее предложение.

Утверждение 4.1 1) *Оператор ϕ допускает тривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда* $\dim P_1 \leq \dim \mathfrak{g}$. *Размерность пространства тривиализующих параметров $a \in \mathfrak{g}$ равна* $\dim \mathfrak{g} - \dim P_1$.

2) *Оператор ϕ допускает нетривиальное секционное представление тогда и только тогда, когда $P_1 \cap P_2 \neq \{0\}$. Размерность этого пересечения указывает на число независимых нетривиальных секционных представления для ϕ (по модулю тривиальных).*

Замечание 4.2 Отметим, что практическая реализация данного алгоритма, например для ЭВМ, не представляет существенных трудностей, так как все шаги сводятся к вычислению рангов матриц. Отметим, правда, что размерности при этом могут быть достаточно большими - приходится оперировать подпространствами пространства размерности $(\dim \mathfrak{g})^2$.

4.3 Секционные операторы и метод сдвига аргумента. Теорема Мещерякова в общем случае

С каждым секционным оператором можно связать квадратичный гамильтониан, задаваемый формулой $f(x) = \frac{1}{2}\langle \phi x, x\rangle$. Соответствующая гамильтонова система на $\mathfrak{g}^*$ принимает вид:

$$\dot{x} = \mathcal{A}\mathrm{d}f = \mathrm{ad}^*_{\phi x} x \tag{18}$$

Отметим, что у данной системы есть как минимум один линейный интеграл.

Утверждение 4.2 *Пусть ϕ — секционный оператор с параметрами a, β. Тогда линейная функция $\beta(x) = \langle \beta, x\rangle$ является интегралом гамильтоновой системы* (18).

Доказательство. Так как ϕ — секционный, то, используя (12), получаем следующую систему равенств:

$$\{\beta(x), f(x)\} = \langle x, [\beta, \phi x]\rangle = \langle a, [\phi x, \phi x]\rangle = 0.$$

Таким образом, предложение доказано. □

В классическом случае уравнение Эйлера на коалгебре, задаваемое квадратичным гамильтонианом f интегрировалось при помощи метода сдвига аргумента. В общем случае соотношения между функциями, полученными обобщенным методом сдвига аргумента и соответствующими уравнениями несколько сложнее.

Теорема 4.3 *Произвольный однородный квадратичный полином f из $\mathcal{F}_a$ (разумеется, если таковой имеется) задается секционным оператором, то есть представляется в виде $f = \frac{1}{2} < x, \phi x >$, где ϕ — секционный оператор с некоторыми параметрами a, β.*

Доказательство. Отметим сначала, что всякая однородная квадратичная функция представляется в виде $< x, \phi x >$ для некоторой симметричной билинейной формы ϕ.

Предположим сначала, что f является одной из порождающих алгебры. Из замечания 3.2 вытекает, что однородная квадратичная функция может быть только первым или вторым членом. В первом случае подобная функция коммутирует со всем $\mathrm{Ann}\, a$, поэтому является квадратичным инвариантом, поэтому ϕ имеет тривиальное секционное представление (см. раздел 4.2). Во втором случае, по построению получаем, что $\mathcal{A}_a \mathrm{d}f = \mathcal{A}\mathrm{d}g$, где g — линейная функция, то есть ϕ — секционный оператор с параметрами a, g.

Пусть теперь f — произвольная однородная квадратичная функция. Тогда она представляется как сумма линейной комбинации порождающих квадратичных функций с постоянными коэффициентами и квадратичного многочлена от линейных функций. Последние по теореме 2.1 лежат в центре $\mathrm{Ann}\, a$. Отсюда дифференциал этого слагаемого, примененный к $\mathcal{A}_a$ дает ноль и на тождество типа (12) не влияет. Таким образом, $\mathcal{A}_a \mathrm{d}f = \mathcal{A}(\sum_i \mu_i \mathrm{d}g_i)$, где g_i — вторые секционные параметры квадратичных секционных порождающих. Теорема доказана. $\square$

Если $f \in \mathcal{F}_a$ то в силу коммутативности последней, функции, получаемые методом сдвига аргумента являются первыми интегралами соответствующего уравнения Эйлера (18). В случае, когда секционный оператор не попадает в $\mathcal{F}_a$ или базисное распределение интегрируется не в полиномах, соотношение между f и $\mathcal{F}_a$ несколько сложнее. Дело в том, что условие коммутирования $\mathcal{F}_a$ и f формулируется следующим образом. В точке общего положения приведем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ к каноническому виду. Тогда $\mathrm{d}f$ обязана лежать в W. В противном случае некоторые функции из $\mathcal{F}_a$ с таким оператором коммутировать не будут.

Таким образом, естественно наложить некоторое дополнительное условие на параметры секционного оператора, чтобы обеспечить коммутативность. Мы потребуем, чтобы $ad^*_\beta a = 0$. Это условие позволяет включить f в короткую бигамильтонову цепочку, состоящую всего из двух функций $< \beta, x >$ и f.

Утверждение 4.3 *Пусть для параметров секционного оператора ϕ выполнено соотношение $ad^*_\beta a = 0$. Тогда функции из $\mathcal{F}_a$ коммутируют с f на своей области определения.*

Доказательство. Доказательство этого факта немедленно вытекает из предыдущего замечания и второго пункта теоремы 3.2. $\square$

Замечание 4.3 Условие $\beta \in \mathrm{Ann}\, a$ довольно естественно и заведомо выполняется в следующих случаях:

1) $\mathfrak{g}$ допускает невырожденную инвариантную билинейную форму (см. пример 1);

2) коммутант $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{g}$ (см. пример 2);

3) $\mathrm{Ann}\, a$ содержит свой централизатор $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a}$ (например, если $\mathrm{Ann}\, a$ является максимальной коммутативной подалгеброй).

В классическом случае уравнения (18) оказывалось бигамильтоновым относительно всех скобок пучка, задаваемого $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$. В общем случае, однако, это не так.

Утверждение 4.4 *Пусть для параметров a и β секционного оператора ϕ выполнено $\mathrm{ad}^*_\beta a = 0$, т.е. $\beta \in \mathrm{Ann}\,(a)$. Тогда уравнение* (18) *может быть записано в виде*

$$\frac{d}{dt}(x + \lambda a) = \mathrm{ad}^*_{\phi x - \lambda\beta}(x + \lambda a),$$

т.е. является гамильтоновым относительно скобки вида $\{\ ,\ \} + \lambda\{\ ,\ \}_a$ с гамильтонианом $f_\lambda(x) = \frac{1}{2}\langle \phi x, x\rangle - \lambda\,\beta(x)$, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Первое утверждение (аналог представления Лакса) сразу следует из определения секционного оператора и предположения $\beta \in \mathrm{Ann}\,(a)$. $\square$

Отметим, что условие $\mathrm{ad}^*_\beta a = 0$ гарантирует гамильтоновость (18) относительно любой линейной комбинации вида $\{\ ,\ \} + \lambda\{\ ,\ \}_a$, однако ничего не говорит относительно гамильтоновости в смысле скобки $\{\ ,\ \}_a$. Последнее равносильно тому, что конечную бигамильтонову цепочку с началом в $\mathrm{Ann}\, a$ длинны 2 можно достроить до цепочке длинны 3. Естественным способом гарантировать это является требование того, что f включена в бесконечную бигамильтонову цепочку, то есть $< \beta, x >$ попадает в $\mathcal{G}_a$. Это заведомо выполнено, например, когда к условию $\mathrm{ad}^*_\beta a = 0$ добавляется требование регулярности a 2.1. Таким образом имеет место теорема

Утверждение 4.5 *Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент и $\beta \in \mathrm{Ann}\, a$. Тогда система* (18) *гамильтонова относительно $\{\ ,\ \}_a$.*

Пример 7. Отказ от регулярности a приводит к тому, что предложение 4.5 становится неверным. Рассмотрим четырехмерную фробениусову алгебру из примера 3 и элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, задаваемый в двойственном базисе координатами $a = (0, 0, 1, 0)$. Тензоры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ имеют вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 & -x_1 & -x_2 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_2 - x_3 \\ -2x_1 & x_2 & x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Мы показали, что $\mathfrak{g}_a = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$.
Положим $\beta = e_1$. Легко видеть, что оператор ϕ, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

является секционным, т. е. $\mathcal{A}\beta = -2x_1e^4 = \mathcal{A}_a\phi x$. С другой стороны, $\mathrm{ad}^*_{\phi x}x = \mathcal{A}\phi x = (0, -2x_1^2, 0, -2x_1x_3 + 2x_1x_2)$. Так как вторая координата не равна нулю, то поле не касается симплектических слоев $\mathcal{A}_a$, а значит не является гамильтоновым относительно $\{\ ,\ \}_a$.

В заключение этого раздела обсудим естественное обобщение теоремы Мещерякова.

Пусть имеется квадратичный гамильтониан $g(x) = \frac{1}{2}\langle\psi x, x\rangle$ такой, что соответствующие Эйлера уравнения

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{\psi x}x \tag{19}$$

гамильтоновы не только относительно стандартной скобки Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}$, но и относительно постоянной скобки $\{\ ,\ \}_a$. Является ли оператор ψ секционным?

М.В. Мещеряковым было показано, что в случае полупростой алгебры Ли ответ положительный. На самом деле его результат переносится на случай произвольной алгебры Ли, а именно имеет место следующая

Теорема 4.4 *Пусть для некоторого самосопряженного оператора ψ уравнения $\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{\psi x}x$ гамильтоновы относительно $\{\ ,\ \}_a$, т.е. существует функция H такая, что $\mathrm{ad}^*_{\psi x}x = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}H}a$. Тогда отображение $\psi\mathcal{A}_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, если все дифференцирования алгебры Ли внутренние, то ψ — секционный оператор.*

Доказательство.

Из согласованности $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{A}$ вытекает, что для $g(x) = \frac{1}{2}\langle\psi x, x\rangle$ и координатных функций $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ выполнено тождество

$$\{g, \{\xi, \eta\}\}_a + \{\eta, \{g, \xi\}\}_a + \{\xi, \{\eta, g\}\}_a + \{g, \{\xi, \eta\}_a\} + \\ + \{\eta, \{g, \xi\}_a\} + \{\xi, \{\eta, g\}_a\} = 0.$$

Нам известно, что $\mathcal{A}\mathrm{d}g = \mathcal{A}_a\mathrm{d}H$, т. е. $\{g,\cdot\} = \{H,\cdot\}_a$. Делая соответствующую замену во втором, третьем и четвертом слагаемых, получаем, что их сумма равна нулю в силу тождества Якоби для H,ξ,η в смысле скобки $\{\ ,\ \}_a$. Заметим теперь, что первое слагаемое можно переписать в виде $\langle a,[\psi x,[\xi,\eta]]\rangle = -\langle \psi \mathrm{ad}^*_{[\xi,\eta]}a, x\rangle = \langle \psi\mathcal{A}_a[\xi,\eta],x\rangle$. Аналогично переписывая пятое и шестое слагаемые и учитывая произвольность x, получаем $\psi\mathcal{A}_a[\xi,\eta] = [\psi\mathcal{A}_a\xi,\eta]+[\xi,\psi\mathcal{A}_a\eta]$.

Таким образом, $\psi\mathcal{A}_a : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ является дифференцированием. Если все дифференцирования — внутренние, то $\psi\mathcal{A}_a = -\mathrm{ad}_\beta$ для некоторого $\beta\in\mathfrak{g}$, что совпадает с определением секционного оператора (13). Теорема доказана. $\Box$

4.4 Секционные операторы на коалгебрах фробениусовых алгебр Ли

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется фробениусовой (см. [33]), если ее индекс равен нулю. Эквивалентным образом можно сказать, что аннулятор $\mathrm{Ann}\, a$ регулярного элемента $a\in\mathfrak{g}^*$ тривиален и соответствующая форма $\mathcal{A}_a$ невырождена и задает (постоянную) симплектическую структуру на $\mathfrak{g}^*$.

Метод сдвига аргумента в этом случае не работает, поскольку алгебра поскольку базисное распределение тривиально. Однако секционные операторы в данном случае существуют и иногда задают системы (18) с большим количеством интегралов. Всюду до конца раздела считаем, что $a\in\mathfrak{g}^*$ - регулярный, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — фробениусова.

Лемма 4.3 *При сделанных предположениях подалгебра $\mathfrak{g}_a$ нетривиальна, и ее размерность равна коразмерности коммутанта $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Ann}\, a = \{0\}$, то $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ann}\, a} = \mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{g}_a$ совпадает с подалгеброй $\mathfrak{b}_a$, которая по определению является "косоортогональным дополнением" к коммутанту $\mathfrak{g}'$ относительно формы $\mathcal{A}_a$. Поскольку эта форма невырождена, то $\dim\mathfrak{g}_a = \mathrm{codim}\,\mathfrak{g}'$.

Известно, что в случае $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ алгебра унимодальна (то есть $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_\xi = 0$ для любого ξ), поэтому степень трансцендентности кольца инвариантов ее коприсоединенного представления как минимум единица ([35]). Из этого немедленно вытекает, что для фробениусовых алгебр Ли $\mathrm{codim}\,\mathfrak{g}' \geq 1$. $\Box$

Таким образом, мы можем построить нетривиальные секционные операторы ϕ определенные явной формулой: $\phi x = \mathcal{A}_a^{-1}\mathrm{ad}^*_\beta x$ или, что то же самое, $\phi x = -\mathrm{ad}_\beta \mathcal{A}_a^{-1}(x)$.

Напомним хорошо известную общую бигамильтонову конструкцию, взяв в качестве примера двойственное пространство фробениусовой алгебры Ли. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ согласованные скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$, отвечающие пуассоновым тензорам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$. В силу невырожденности $\mathcal{A}_a$ мы можем корректно определить оператор рекурсии $R = \mathcal{A}\mathcal{A}_a^{-1} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$. Отметим, что в рассматриваемом случае R зависит линейно от $x \in \mathfrak{g}^*$ и является невырожденным почти всюду.

Пусть имеется векторное поле v_0, являющееся гамильтоновым относительно обеих скобок Пуассона, т.е.

$$v_0 = \mathcal{A}\mathrm{d}f_0 = \mathcal{A}_a\mathrm{d}f_1$$

Тогда все векторные поля вида $v_k = R^k v_0$ тоже бигамильтоновы, т. е.

$$v_k = \mathcal{A}\mathrm{d}f_k = \mathcal{A}_a\mathrm{d}f_{k-1}$$

причем все функции f_k коммутируют между собой в смысле обеих пуассоновых структур. Отметим, что $\mathrm{d}f_k = (R^*)^k\mathrm{d}f_0$, где $R^* = \mathcal{A}_a^{-1}\mathcal{A} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — оператор, сопряженный к R. Более того, все эти функции f_i коммутируют с функциями вида $g_m(x) = \mathrm{tr}\, R^m(x)$ (которые в свою очередь тоже попарно коммутируют относительно обеих скобок).

Заметим теперь, что соотношение (11), определяющее секционный оператор ϕ можно записать в виде

$$\mathcal{A}\beta = \mathcal{A}_a\phi x, \quad \text{или} \quad \mathcal{A}\mathrm{d}f_0 = \mathcal{A}_a\mathrm{d}f_1,$$

где $f_0(x) = \langle\beta, x\rangle$ — линейная функция, задаваемая элементом $\beta \in \mathfrak{g}_a$, а $f_1(x) = \frac{1}{2}\langle\phi x, x\rangle$ — квадратичная функция, задаваемая секционным оператором. Таким образом, мы находимся в точности в ситуации, описанной выше и тем самым получаем следующий результат.

Теорема 4.5 *Пусть $\mathfrak{g}$ — фробениусова алгебра Ли, и ϕ — секционный оператор с параметрами a и $\beta \in \mathfrak{g}_a$, причем $a \in \mathfrak{g}^*$ — элемент общего положения. Тогда система уравнений Эйлера*

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{\phi x}x$$

является гамильтоновой относительно двух скобок $\{\ ,\ \}$ *и* $\{\ ,\ \}_a$ *и имеет коммутирующие интегралы вида* $g_k(x) = \operatorname{tr} R^m(x)$ *и* $f_k(x)$*, где* $f_k(x)$ *— однородный полином степени* $k+1$*, который однозначно определяется равенством* $\mathrm{d}f_k(x) = R^{*k}\beta$*. Сам оператор* ϕ *определяется равенством* $\phi x = R^*\beta$*.*

Пример 8. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ из примера 4. Пара пуассоновых структур на $\mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Оператор рекурсии $R^* = \mathcal{A}_a^{-1}\mathcal{A}$ задается матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

Возьмем теперь в качестве β элемент $e_1 + e_2$. Вычисляя $\mathrm{d}f_1(x) = \phi x = R^*\beta$, получаем $f_1 = \frac{1}{2}\langle \phi x, x\rangle = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_2$. Соответствующая гамильтонова система имеем имеет два независимых коммутирующих интеграла.

Отметим, что оператор рекурсии имеет лишь одно нетривиальное собственное значение, поэтому функции вида $g_m(x) = \operatorname{tr} R^m(x)$ полного набора коммутирующих функций не дают, их приходится дополнять функциями вида f_k.

4.5 Параметры секционного оператора. Однозначность их восстановления в простом случае

Алгоритм из раздела 4.2 позволяет для каждого конкретного оператора ϕ описывать все возможные секционные представления. Рассмотрим в $\mathfrak{g}^*$ подмножество V_ϕ, состоящее из всех таких a, для которых найдется $\beta \in \mathfrak{g}$ такое, что ϕ является секционным оператором с параметрами a, β. Из линейности тождества (11) получаем, что V_ϕ — линейное пространство. Оказывается, в некоторых случаях это пространство несет дополнительную алгебраическую структуру.

Утверждение 4.6 *Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется невырожденное инвариантное скалярное произведение, позволяющее отождествить алгебру и коалгебру. Тогда V_ϕ обладает следующими свойствами:*

1) V_ϕ - подалгебра

2) Для любых $a_1, a_2 \in V_\phi$, входящих в пары параметров a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно, $[a_1, b_2] - [b_1, a_2]$ лежит в центре $\mathfrak{g}$. В частности, если центр алгебры тривиален, то $[a_1, b_2] = [b_1, a_2]$.

Доказательство. После отождествления алгебры и коалгебры тождество для секционного оператора ϕ принимает вид, аналогичный классическому определению:

$$[\phi x, a] = [x, b].$$

Из эквивалентности тождеств (11) и (13) немедленно получаем, что ϕ коммутирует с ad_a. Пусть теперь $a_1, a_2 \in V_\phi$. Из тождества Якоби получаем следующую систему равенств:

$$[\phi x, [a_1, a_2]] = \phi[x, [a_1, a_2]] = \phi[[x, a_1], a_2] - \phi[[x, a_2], a_1].$$

Из того, что a_1, b_1 — параметры секционного оператора ϕ получаем:

$$\phi[[x, a_1], a_2] - \phi[[x, a_2], a_1] = [[x, b_1], a_2] - [[x, a_2], b_1] = [x, [b_1, a_2]].$$

Таким образом оператор ϕ является секционным с параметрами $[a_1, a_2], [b_1, a_2]$. Таким образом, первая часть предложения доказана.

Выполним в последней цепочке равенств преобразования для пары a_2, b_2. Получаем, что ϕ - секционный с параметрами $[a_1, a_2], [a_1, b_2]$. Рассмотрев разность двух представлений, получаем, что

$$[x, [a_1, b_2] - [b_1, a_2]] = 0,$$

для любого x. Таким образом, вторая часть утверждения доказана. □

Из тождества (11) видно, что параметры секционного оператора определены, вообще говоря неоднозначно - они допускают одновременное умножение на некоторый скаляр λ. Оказывается, вопрос о количестве секционных представлений у оператора является достаточно важным: так в работе [9] из того факта, что для некоторого класса секционных операторов параметры восстанавливаются с точностью до одновременного умножения на скаляр, получаются нетривиальный свойства многообразий, допускающих проективно эквивалентные метрики (на практике вопрос об однозначности определения параметров того или иного оператора определяется при помощи алгоритма в разделе 4.2). Оставшаяся часть раздела будет посвящена доказательству однозначности восстановления параметров секционного оператора в случае простой алгебры $\mathfrak{g}$ и полупростого регулярного a.

Часть рассуждений в дальнейшем будет проводиться на языке корней. Все необходимые обозначения приведены в разделе 2.1. Для начала нам потребуется следующее утверждение из книги Дж. Хамфриса [26].

Лемма 4.4 *Пусть α, β — два непропорциональных корня. Если $(\alpha, \beta) < 0$, то есть угол между корнями тупой, то $\alpha+\beta$ является корнем. Если $(\alpha, \beta) > 0$, то $\alpha - \beta$ является корнем.*

Через P_γ будем обозначать плоскость в евклидовом пространстве E^n (напомним, что $n = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ind}\mathfrak{g}$) множество корней, ортогональных вектору γ. В свою очередь через $\Delta \setminus \Pi_\gamma$ обозначим подмножество корней, оставшееся после выбрасывания из системы Δ всех векторов, попавших в Π_γ.

Лемма 4.5 *Для любого ненулевого вектора $\gamma \in E^n$ система $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\gamma)$ совпадает с Δ.*

Доказательство. Разумеется, если в плоскость Π_γ не попал ни один корень из Δ, то $\Delta \setminus \Pi_\gamma = \Delta$ и утверждение леммы очевидно, поэтому считаем, что $\Pi_\gamma \cap \Delta$ — непусто.

Определим подмножество Q в Π_γ как множество корней $\xi \in \Pi_\gamma$, ортогональных всем векторам из $\Delta \setminus \Pi_\gamma$.

Так как система Δ неприводима, то в плоскости Π_γ найдется корень $\beta \notin Q$. Другими словами, для него можно найти $\alpha \in \Delta \setminus \Pi_\alpha$, такой что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $(\alpha, \beta) < 0$, откуда по 4.4 вытекает, что $\alpha + \beta$ — корень, причем лежащий в $\Delta \setminus \Pi_\alpha$ так как$(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) \neq 0$. Так как $-\alpha \in \Delta\setminus\Pi_\alpha$, то корень $(\alpha+\beta)+(-\alpha) = \beta$ лежит в $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\alpha)$.

Из этого, в частности, следует, что β ортогонален Q. Легко видеть, что, если множество корней M ортогонально некоторому вектору, то ему ортогональна и линейная система $\mathcal{L}(M)$. Таким образом, мы разбили нашу систему корней на два ортогональных друг другу множества - $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\alpha)$ и Q. Нам известно, что система корней неприводима, и $\Delta \setminus \Pi_\alpha$ непусто, так как, по определению, система корней порождает все евклидово пространство E^n. Таким образом, Q обязано быть пустым и $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\alpha) = \Delta$. $\square$

Доказательство главной теоремы раздела мы разобьем на два утверждения. Первое из них - интересное геометрическое свойство неприводимой системы корней. Рассмотрим набор чисел $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, в котором элементы занумерованы корнями из Δ. Для этого набора на картановской подалгебре $\mathfrak{h}$ можно записать систему линейных уравнений:

$$\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a) = 0 \tag{20}$$

решением которой будет пара элементов $a, b \in \mathfrak{h}$. Легко видеть, что система избыточна - количество уравнений превосходит количество неизвестных (которых, в данном случае, $2n$ штук).

Теорема 4.6 *Пусть не все числа из набора Λ равны между собой и система 20 совместна, причем в решении $\{a, b\}$ элемент a — регулярен. Тогда всякое другое решение p, q данной системы получается из a, b умножением на скаляр, то есть $p = \mu a, q = \mu b$, где $\mu \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуются следующие леммы

Лемма 4.6 *Пусть $(\alpha, \beta) \neq 0$ и $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, тогда $\beta(a)$ однозначно определяется из системы 20 по $\alpha(a)$ и числам из набора Λ.*

Доказательство леммы. Без ограничения общности считаем, что $(\alpha, \beta) < 0$, поэтому по утверждению 4.4 $\alpha + \beta$ — корень. Из системы 20 получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a) = 0, \\
&\beta(b) - \lambda_\beta \beta(a) = 0, \\
&(\alpha + \beta)(b) - \lambda_{\alpha+\beta}(\alpha + \beta)(a) = 0,
\end{aligned}$$

Вычитаем из третьего уравнения первые два и получаем:

$$(\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\alpha)\alpha(a) + (\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta)\beta(a) = 0 \tag{21}$$

Так как $\alpha(a) \neq 0$, то $(\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta) \neq 0$ (в противном случае получается равенство чисел $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ и $\lambda_{\alpha+\beta}$, что противоречит условию леммы). Таким образом, $\beta(a)$ однозначно определяется из полученного уравнения. Лемма доказана. $\blacksquare$.

Заметим, что корень β из данной леммы всегда существует. Действительно, предположим противное. Тогда для любого корня $\beta \in \Delta \setminus \Pi_\alpha$ верно, что $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$. Из регулярности a вытекает, что коэффициенты в уравнении 21 могут обращаться в ноль только одновременно. Кроме этого из системы 20 получаем, что $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, поэтому множество корней β, для которых $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ линейно. Таким образом, из леммы 4.5 получаем, что все числа из Λ равны между собой, что противоречит условию теоремы.

Лемма 4.7 *Пусть $(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $\lambda_\alpha = \lambda_\gamma$, тогда $\gamma(a)$ однозначно определяется по $\alpha(a)$ и числам из набора Λ.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что корень β, удовлетворяющий условию леммы 4.6 существует. Если $(\beta, \gamma) \neq 0$, то доказываемое утверждение получается, если лемму 4.6 применить сначала к α, β, а потом к β, γ.

Если $(\gamma, \beta) = 0$, то вместо корня γ необходимо рассмотреть $\gamma \pm \alpha$ и применить предыдущие рассуждения. ■

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольное решение p, q системы 20. Возьмем вместо пары p, q пару p', q', где $p' = a + \epsilon p, q' = b + \epsilon q$. Легко видеть что в силу линейности о однородности системы она также будет решением, причем для достаточно малого ϵ p' будет регулярным. Выберем некоторый корень α_0, для которого $\alpha_0(p) \neq 0$. Домножим p', q' на скаляр μ так, чтобы $\alpha_0(a) = \alpha_0(\mu p')$. Применяя доказанные выше леммы, получаем, что значения всех корней на $\mu p'$ и a определяются однозначно по набору Λ и значению α_0. Таким образом, значения корней на $\mu p'$ и a совпадают, то есть совпадают сами элементы. В свою очередь $\alpha(\mu q') = \lambda_\alpha \alpha(\mu p') = \lambda_\alpha \alpha(a) = \lambda(b)$. Отсюда $p = (\mu - \epsilon)a, q = (\mu - \epsilon)b$. Теорема доказана. $\square$.

Второе утверждение связано непосредственно с секционными операторами.

Теорема 4.7 *Пусть задан секционный оператор ϕ с параметрами a, b, где a — регулярный элемент из картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, и $b \neq \lambda a$. Тогда множество таких $r \in \mathfrak{g}$, что оператор ad_r коммутирует с ϕ, совпадает с $\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Заметим сразу, что по теореме 4.1 элемент b лежит в картановской подалгебре. Кроме этого из общего вида оператора ϕ, описанного в той же теореме, получаем, что ad_r коммутирует с ϕ для любого $r \in \mathfrak{h}$.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Напомним, что V в случае регулярного a обозначает линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, натянутое на все корневые вектора. Из теоремы 4.2 нам известно, что V и $\mathfrak{h}$ — инвариантные пространства для ϕ. Кроме того нам известно, что V распадается в прямую сумму собственных пространств, причем так как $a \neq \lambda b$, то не все собственные значения ϕ на V одинаковы. Будем обозначать через V_i подпространство соответствующее собственному значению λ_i, а через Δ_i обозначим множество корней, корневые вектора которых попали в V_i. Из регулярности a и примера 5 немедленно вытекает, что Δ_i — линейные подмножества системы корней.

V_i — собственные пространства оператора ϕ на V, однако, из-за наличия в определении оператора свободного параметра D, собственное пространство, соответствующее собственному значению λ_i, может оказаться строго больше V_i. При этом, однако, очевидно, что данное пространство целиком лежит в $V_i \oplus \mathfrak{h}$, совпадающим с централизатором $b - \lambda_i a$. Рассмотрим $x \in V_i$. Если пара операторов коммутирует (в данном случае это ϕ и ad_r), то собственные подпространства одного инвариантны относительно другого, то есть $\mathrm{ad}_r x$ заведомо лежит в $V_i \oplus \mathfrak{h}$, то есть $[b - \lambda_i a, \mathrm{ad}_r x] = 0$. Благодаря этому равенству из тождества Якоби получаем

$$0 = \mathrm{ad}_r[b - \lambda_i a, x] = [\mathrm{ad}_r(b - \lambda_i a), x].$$

Теперь запишем r в базисе Вейля: $r = h_r + \sum_{\alpha \in \Delta} r_\alpha e_\alpha$, $h_r \in \mathfrak{h}$. Предыдущее равенство перепишется тогда в виде:

$$[\mathrm{ad}_r(b - \lambda_i a), x] = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_i} r_\alpha(\alpha(b) - \lambda_i \alpha(a))[e_\alpha, x] = 0.$$

Пусть без ограничения общности r_α отличен от нуля для некоторого $\alpha \in \Delta_1$. Учитывая, что $\alpha(b) - \lambda_i \alpha(a) \neq 0$ при $i > 1$ получаем, что для всех $\beta \in \Delta_i$, при $i > 1$ выполнено $[e_\beta, e_\alpha] = 0$. Из этого вытекает, что $\alpha + \beta$ не является корнем, то есть по утверждению 4.4 $(\alpha, \beta) = 0$. Отсюда немедленно получаем, что Δ_1 содержит $S \setminus \Pi_\alpha$, а по лемме 4.5 в силу линейности и всю S. Оператор ϕ на V в этом случае есть умножение на скаляр, то есть $b = \lambda a$, что противоречит условию теоремы. $\square$

Теперь все готово, чтобы доказать главную теорему данного раздела.

Теорема 4.8 *Пусть ϕ — секционный оператор с параметрами a, b, причем a — регулярный полупростой элемент $\mathfrak{h}$ и $b \neq \lambda a$. Тогда всякая другая* *пара параметров p, q для оператора ϕ получается из данной одновременным умножением элементов a, b на некоторый ненулевой скаляр, то есть $p = \mu a, q = \mu b$ для некоторого $\mu \neq 0$.*

Доказательство. Обратимся к системе 20. Из теоремы 4.1 следует, что $b \in \mathfrak{h}$ и в качестве набора Λ, фигурирующего в определении данной системы, можно взять собственные значения оператора ϕ, так как соответствующее корневому вектору e_α значение имеет вид:

$$\lambda_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)},$$

что можно переписать в виде $\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a)$ — в точности система 20. Таким образом пара a, b — решение системы, причем так как $b \neq \lambda a$, то не все числа набора Λ равны между собой.

Из эквивалентности тождеств (11) и (13) вытекает, что ad_p коммутирует с ϕ, откуда по теореме 4.7 немедленно получаем, что $p \in \mathfrak{h}$. В свою очередь из теоремы 4.1 вытекает, что q также лежит в $\mathfrak{h}$. При этом алгебра распадается в прямую сумму $\mathfrak{g}^p$ и $V = \mathfrak{g}^{p\perp}$. Из теоремы 4.2 получаем, что на пространстве V выполнено равенство $ad_a^{-1} ad_b = ad_p^{-1} ad_q$. Отсюда получаем, что для корней α, для которых $\alpha(p) \neq 0$ верно

$$\lambda_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} = \frac{\alpha(q)}{\alpha(p)},$$

то есть $\alpha(q) - \lambda_\alpha \alpha(p) = 0$. С другой стороны, если $\alpha(p) = 0$, то из теоремы 4.1 следует, что $\alpha(p) = \alpha(q) = 0$ и $\alpha(q) - \lambda_\alpha \alpha(p) = 0$ заведомо выполняется.

Отсюда получается, что p, q является решением той же системы 20, что и a, b, и из теоремы 4.6 немедленно вытекает доказываемое утверждение. □

Замечание 4.4 Отметим, что для полупростых алгебр данная теорема уже не является верной. Действительно, рассмотрим прямую сумму простых алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ и пару $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ из картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, где a_i, b_i лежат в картановских подалгебрах соответствующих слагаемых прямого разложения. Считаем теперь, что a_1, a_2 — регулярные (откуда немедленно вытекает, что a также регулярен), $b_2 \neq 0$, а $b_1 = 0$. Из теоремы 4.1 вытекает, что на $\mathfrak{g}$ определен секционный оператор ϕ с данными параметрами a, b. При этом легко видеть, что добавление к a элемента картановской подалгебры $c = c_1 + c_2$, для которого $c_2 = 0$, не меняет тождество 11 для секционного оператора и $a{+}c$ непропорционален a.

В заключение получим из данной теоремы одно интересное следствие, касающиеся подалгебр $\mathcal{F}_a^c$.

Теорема 4.9 *Пусть $\mathcal{F}_a^c = \mathcal{F}_p^c$ для некоторого регулярного полупростого a. Тогда $p = \mu a$ для некоторой константы μ.*

Доказательство. По теореме 4.3 всякая однородная функция f из $\mathcal{F}_a^c = \mathcal{F}_a$ представляется из-за наличия невырожденного скалярного умножения в виде $(x, \phi x)$, где ϕ — секционный оператор.

Среди квадратичных функций в $\mathcal{F}_a^c$ для регулярного есть как минимум n функционально независимых, а значит среди них есть задаваемые секционным оператором с непропорциональными параметрами. С другой стороны, по той же теореме 4.3 у данного оператора есть представление второе представление с парой параметров p, q. Применяя предыдущую теорему 4.8, получаем требуемое утверждение. $\square$

5 Бифуркационная диаграмма и отображение момента для некоторых простых комплексных алгебр Ли

5.1 Функции, полученные методом сдвига аргумента, как функции на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная простая алгебра Ли. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ и для порождающих кольца инвариантов $I_1, ..., I_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следующее разложение:

$$I_i(x + \lambda y) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x, y),$$

где $(x, y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ и $d_i = \deg I_i$. Всего мы получили таким образом $N + n$ функций. Легко видеть, что при подстановке, скажем $y = a$ получаем классический метод сдвига аргумента, а при $x = a$ — локальный метод сдвига аргумента.

Отождествив алгебру Ли $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ с коалгеброй, получим, что на пространстве функций из $P(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$ возникает естественная структура скобки Пуассона. Легко проверяется, что полученные функции $f_{ij}(x,y)$ коммутируют относительно нее.

В дальнейшем, когда речь будет идти про обычный метод сдвига аргумента, нам потребуется в некотором смысле менять местами x и a — вектор, на который производится сдвиг. Для этого нам потребуются следующее две леммы.

Лемма 5.1 *Пусть g — элемент группы G, соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда для построенных функций f_{ij} выполняется следующее свойство $f_{ij}(x,y) = f_{ij}(\mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g y)$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно заметить, что $I_i\big(\mathrm{Ad}_g(x+\lambda y)\big) = I_i(x+\lambda y)$ для всех λ. $\square$

Лемма 5.2 *Для произвольной пары $(x,y) \in \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ выполнено равенство*

$$f_{ij}(x,y) = f_{id_i-j}(y,x)$$

Доказательство. В силу однородности порождающих I_i получаем следующую цепочку равенств:

$$I_i(y+\lambda x) = \lambda^{d_i} I_i(\frac{1}{\lambda}y + x) = \lambda^{d_i}\sum_{j=0}^{d_i}\frac{1}{\lambda^j}f_{ij}(x,y) = \sum_{j=0}^{d_i}\lambda^{d_i-j}f_{ij}(x,y).$$

Учитывая, что

$$I_i(y+\lambda x) = \sum_{j=0}^{d_i}\lambda^j f_{ij}(y,x),$$

и равенства выполняются для всех ненулевых λ, получаем равенство коэффициентов в разложении при одинаковых степенях λ, то есть $f_{ij}(x,y) = f_{id_i-j}(y,x)$. Лемма доказана. $\square$.

Следующая лемма характеризует своего рода двойной сдвиг

Лемма 5.3 *Для любого $j \geq d_i$ функция $f_{ij}(x+\lambda_0 a, a)$ представляется как линейная комбинация с постоянными коэффициентами (зависящими только от λ_0) $f_{il}(x,a)$, где $l \geq j$.*

Доказательство. Легко видеть, что для любого λ выполняется следующее тождество:

$$\sum_j (\lambda+\lambda_0)^j f_{ij}(x,a) = I_i(x+(\lambda+\lambda_0)a) = \sum_j \lambda^j f_{ij}(x+\lambda_0 a, a).$$

При $l<j$ выражение $(\lambda+\lambda_0)^l$ не содержит степеней λ^j. Отсюда в правой части тройного равенства коэффициент при λ^j представляет собой линейную комбинацию $f_{il}(x,a)$ для $l \geq j$, взятых с постоянными коэффициентами, зависящими от λ_0. Лемма доказана. $\square$

5.2 Некоторые свойства сингулярных элементов простых комплексных алгебр Ли

Для дальнейшей работы нам потребуются результаты, касающиеся сингулярных элементов простых алгебр Ли. Будем называть собственное значение λ оператора X *критическим*, если $\operatorname{codim}(X-\lambda E) \geq 2$, то есть у оператора есть как минимум две жордановы клетки с собственным значением λ.

Лемма 5.4 *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная комплексная простая алгебра Ли и пусть $\rho : \mathfrak{g} \to gl(V)$ — произвольное представление этой алгебры. Если x — сингулярный элемент, то у оператора $X=\rho(x)$ есть критическое собственное значение.*

Доказательство. Предположим, что это не так и у оператора X нет критических собственных значений, то есть всякому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Тогда легко проверяется, что gl^X (централизатор элемента в смысле алгебры $gl(V)$) — коммутативен. Отсюда вытекает, что $\rho(\mathfrak{g}^x)=\rho(\mathfrak{g})\cap gl^X$ также коммутативен, а, следовательно, коммутативен и $\mathfrak{g}^x$ в силу точности представления. Осталось воспользоваться тем фактом, что централизатор элемента простой комплексной алгебры Ли коммутативен тогда и только тогда, когда элемент регулярный [27]. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Пусть теперь x — элемент произвольной простой комплексной алгебры Ли, а $x = x_{sem}+x_{nil}$ - его абстрактное разложение Жордана [26], где x_{sem} — полупростой элемент, x_{nil} — нильпотентный и $[x_{sem}, x_{nil}]=0$. Кроме того, если фиксировано представление простой алгебры Ли, то абстрактное разложение Жордана совпадает с обычным и $X_{sem}=p(X), X_{nil}=q(X)$, где p,q — некоторые многочлены без свободного члена [26].

Лемма 5.5 *Для произвольного элемента x простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ его централизатор совпадает с пересечением централизаторов нильпотентной и полупростой частей элемента, то есть $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^{x_{sem}} \cap \mathfrak{g}^{x_{nil}}$.*

Доказательство. Зафиксируем представление простой алгебры. Так как $X_{sem} = p(X), X_{nil} = q(X)$, то любой элемент Y, коммутирующий с X, коммутирует с X_{sem} и X_{nil}. С другой стороны, всякий элемент, коммутирующий одновременно с X_{sem} и X_{nil}, коммутирует с их суммой, то есть с X. Лемма доказана. □

Известно, что $\mathfrak{g}^{x_{sem}}$ — редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}$. Рассмотрим разложение $\mathfrak{g}^{x_{sem}} = \mathfrak{l}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{l}_k \oplus \mathbb{C}^r$, где $\mathfrak{l}_i$ — простые алгебры, а $\mathbb{C}^r$ — r-мерный центр, состоящий исключительно из полупростых элементов. Так как нильпотентный элемент x_{nil} лежит в $\mathfrak{g}^x$, то для него можно записать разложение $x_{nil} = x^1_{nil} + ... + x^k_{nil}$, где $x^i_{nil} \in \mathfrak{l}_i$.

Лемма 5.6 *Элемент x - регулярный элемент простой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда x^i_{nil} — главный нильпотентный элемент в соответствующей простой алгебре $\mathfrak{l}_i$.*

Доказательство Из леммы 5.5 получаем, что $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{l}_1^{x^1_{nil}} \oplus ... \oplus l_k^{x^k_{nil}} \oplus \mathbb{C}^r$. Так как сумма рангов $\mathfrak{l}_i$ в точности равна $n - r$, элемент x регулярен тогда и только тогда, когда x^i_{nil} — регулярен в соответствующей простой алгебре, то есть является главным нильпотентным элементом. □

Применим полученные результаты для описания сингулярных элементов алгебр $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2 (системы корней соответствующих алгебр и их представления минимальной размерности были описаны в разделе 2.4).

Теорема 5.1 *В представлении минимальной размерности алгебр Ли $sl(n+1)$, $so(2n+1)$, $sp(2n)$ и g_2 сингулярные элементы в точности задаются матрицами у которых есть критические собственные значения.*

Доказательство. Из леммы 5.4 вытекает, что для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что матрицы, соответствующие регулярным элементам алгебр Ли $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2 в представлении минимальной размерности, не имеют критических собственных значений. Считаем, что во всех матрицах, которые встречаются ниже, на неотмеченных местах стоят нули.

Пусть x — регулярный элемент одной из перечисленных в условии алгебр Ли. Без ограничения общности считаем, что $x_{sem} \in \mathfrak{h}$ и системы корней $\mathfrak{g}^{x_{sem}}$ и $\mathfrak{g}$ согласованы (то есть базис системы корней $\mathfrak{g}^{x_{sem}}$ является подмножеством базиса системы $\mathfrak{g}$). Действуя элементами из подгруппы $\mathrm{Exp}(\mathfrak{g}^x)$, приведем элементы x^i_{nil} к стандартному виду, то есть к сумме корневых векторов соответствующей алгебры $\mathfrak{l}_i$. Такой вид элемента x будем называть приведенным.

Случай $sl(n+1)$. Из описания корней в разделе 2.4 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{sem} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & \\ & D_2 & & & \\ & & D_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_k \end{pmatrix},$$

где D_i — диагональные блоки с λ_i на диагонали, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Из того же описания получаем, что $\mathfrak{l}_i$ — это алгебры $sl(n_i+1)$, причем $\rho(\mathfrak{l}_i)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & sl(n_i+1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $n_i + 1$ — размерность блока D_i. Таким образом x^i_{nil} в приведенном виде представляют собой жорданову клетку размерности $n_i + 1$ (то есть для $sl(n+1)$ приведенный вид x совпадает с нормальной жордановой формой). Теорема для $sl(n+1)$ доказана.

Случай $sp(2n)$. Из описания корней в разделе 2.4 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{sem} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & D_k & & & \\ & & & -D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -D_k \end{pmatrix},$$

где D_i — диагональные блоки с λ_i на диагонали.

Лемма 5.7 *Пусть X_s имеет описанный выше вид. Тогда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть $a_{pq}(x_{sem}) = 0$. Так как базисы систем корней $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{X_{sem}}$ согласованы, то немедленно получаем, что все простые корни $\alpha_p, \alpha_{p+1}, ..., \alpha_q$, входящие в разложение a_{pq} обращаются в ноль на x_{sem}. Таким образом в матрице X_{sem} равны элементы с $p-$го по $q+1$, то есть они лежат в некотором блоке D_i Следовательно, $a_{pq}(x_{sem}) \neq 0$ для индексов p, q из разных блоков D_i и D_j, то есть $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Пусть теперь $b_{pq}(x_{sem})$ равно нулю. В разложение такого корня входят все простые, поэтому из согласованности систем корней немедленно вытекает, что $x_{sem} = 0$, то есть тождество $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ выполняется тривиальным образом. $\square$

Рассмотрим теперь два варианта.

Первый - длинный корень не обращается в ноль, то есть $\alpha_n(x_{sem}) \neq 0$. Таким образом, все $\mathfrak{l}_i$, как и в случае $sl(n+1)$, изоморфны $sl(n_i+1)$, где $n_i + 1$ — размерность блока D_i. При этом, однако, в отличие от $sl(n+1)$ образ $\rho(\mathfrak{l}_i)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & Y & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -Y^T & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $Y \in sl(n_i + 1)$. При этом для x^i_{nil} матрица $Y = J_{n_i+1}(0)$ - то есть жорданова клетка с нулевым собственным значением. Таким образом для данного случая теорема выполнена.

Второй случай — если длинный корень на x_{sem} обращается в ноль. В этом случае $\lambda_k = 0$. $\mathfrak{l}_i$ при $i < k$ снова изоморфны $sl(n_i + 1)$, причем $\rho(sl(n_i + 1))$ такое же как описывалось выше, а вот $\mathfrak{l}_k$ уже изоморфно $sp(2n_k)$, где уже n_k — размерность соответствующего блока D_k. $\rho(\mathfrak{l}_k)$ принимает в этом случае вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & A & \dots & & B \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & C & \dots & & -A^T \end{pmatrix},$$

где A — произвольная $n_k \times n_k$ матрица, а B, C — симметричные $n_k \times n_k$ матрицы. Рассуждая аналогично первому случаю, получаем, что все x^i_{nil} при $i < k$ задают по две жордановы клетки с собственными значениями λ_i и $-\lambda_i$ соответственно. Рассмотрим далее x^k_{nil}. В приведенном виде матрица этого элемента имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n_k}(0) & \dots & & E_{n_k n_k} \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & \dots & & -J_{n_k}(0)^T \end{pmatrix},$$

где $J_{n_k}(0)$ — жорданова клетка $n_k \times n_k$, а $E_{n_k n_k}$ — матричная единица. По строкам легко видеть, что ранг этом матрицы равен $2n_k - 1$, то есть нулевому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что каждому $\lambda_i \neq$, $-\lambda_i$, а также нулевому собственному значению в приведенном виде соответствует ровно по одной жордановой клетке. Теорема доказана.

Случай $so(2n+1)$ Из описания корней в разделе 2.4 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{sem} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & D_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & D_k & & & \\ & & & & -D_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -D_k \end{pmatrix},$$

где D_i — диагональные блоки с λ_i на диагонали, причем $\lambda_i \neq \pm\lambda_j$ (этот факт доказывается аналогично лемме 5.7). Как и в предыдущем случае возможны два варианта.

Первый, если на x_{sem} короткий базисный корень α_n не обращается в нуль. Тогда $\lambda_i \neq 0$ и все рассуждения аналогичны первому случаю для $sp(2n)$ - то есть все $\pm\lambda_i$ различны между собой и отличны от нуля, и каждому из них соответствует по одной жордановой клетке. Кроме этого у оператора X есть одно нулевое собственное значение, которому соответствует нульмерная жорданова клетка.

Если короткий базисный корень обращается в ноль, то $\lambda_k = 0$. $\mathfrak{l}_i, i < k$ в этом случае изоморфны $sl(n_i+1)$, а $\mathfrak{l}_k$ представляет собой $so(2n_k+1)$, где n_k — размерность блока D_k. $\rho(\mathfrak{l}_i)$ при $i < k$ устроено также, как и в случае $sp(2n)$. В свою очередь $\rho(\mathfrak{l}_k)$ принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & v^T & \dots & w^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -w & \dots & A & \dots & B \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v & \dots & C & \dots & -A^T \end{pmatrix},$$

где A — произвольная $n_k \times n_k$ матрица, B, C — кососимметричные $n_k \times n_k$ матрицы, а v, w — вектор-столбцы высоты n_k. Рассуждая аналогично случаю $sp(2n)$, получаем, что все x^i_{nil} при $i < k$ задают по две жордановы клетки с собственными значениями λ_i и $-\lambda_i$ соответственно. Для D_k

другая ситуация:

$$X^k_{nil} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & e^T_{n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -e_{n_k} & \dots & J_{n_k}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -J_{n_k}(0)^T \end{pmatrix},$$

где $J_{n_k}(0)$ — жорданова клетка с нулевым собственным значением размера $n_k \times n_k$, e_{n_k} — вектор-столбец высоты n_k, у которого на последнем месте стоит единица. Легко видеть, что ранг этой матрицы равен $2n_k - 1$, то есть нулевому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Таким образом теорема доказана.

Случай g_2. Здесь рассмотрим три случая. Первый, когда $\alpha_1(x_{sem}) = \alpha_2(x_{sem}) = 0$. В этом случае $x = x_{nil}$ — главный нильпотентный элемент g_2.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Легко видеть, что ранг полученной матрицы равен шести, то есть это в точности одна жорданова клетка.

Пусть теперь $\alpha_1(x_{sem}) = 0$ и $\alpha_2 x_{sem} \neq 0$. Из этого получаем, что в описании g_2 в разделе 2.4 $a = -2b$, причем $b \neq 0$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Легко видеть, что $\mathrm{corank} X = 1$ и $\mathrm{corank}(X \pm bE) = 1$, то есть $b, -b$ и 0 соответствует по одной клетке размера два, два и три соответственно.

Наконец, третий случай, когда $\alpha_2(x_{sem}) = 0$ и $\alpha_1 x_{sem} \neq 0$. Обозначим $a + 2b = -a - b$ через $-c$. Из $\alpha_1 x_{sem} \neq 0$ вытекает, что $c \neq 0$. Учитывая, что по определению $b = -2c$ получаем, что $b \neq \pm c$ и $b \neq 0$. Таким образом соответствующий элемент X имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

то есть попарно различным собственным значениям $0, c, -c, b, -b$ соответствуют жордановы клетки размеров один, два, два, один и один. Теорема полностью доказана. □

5.3 Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой на простой алгебре $\mathfrak{g}$

Бифуркационная диаграмма. Пусть задана некоторая система ОДУ $\dot{x} = v(x)$ на фазовом пространстве P и некоторый набор комплекснозначных интегралов $f_1, ..., f_k$. Тогда возникает отображение $F : P \to \mathbb{C}^k$, задаваемое формулой $x \to f_1(x), ..., f_k(x)$, которое мы будем называть *отображением момента.* В свою очередь *бифуркационной диаграммой* Σ отображения момента мы будем называть множество особых значений этого отображения, то есть множество таких точек $z \in \mathbb{C}^N$, что среди всех x из прообраза $F^{-1}(z)$ найдется x_0 для которого $\operatorname{rk} \mathrm{d}F|_{x_0} < k$.

Замечание 5.1 Традиционно в литературе по интегрируемым системам отображение момента изучается только для вполне интегрируемых систем. Наше определение, однако, никакой полноты не предполагает.

Применим данную конструкцию в нашем случае. Фазовое пространство P — простая комплексная алгебра $\mathfrak{g}$, отождествленная со своей коалгеброй $\mathfrak{g}^*$ при помощи формы Киллинга. Запишем уравнения Эйлера 18 для случая, когда гамильтониан - квадратичная однородная функция, задаваемая секционным оператором ϕ с параметрами a, b:

$$\dot{x} = [x, \phi x].$$

Функции, полученные методом сдвига аргумента, являются интегралами данной системы:

$$I_i(x+\lambda a) = \sum_j^{d_i} \lambda^j f_{ij},$$

где $I_1, ..., I_n$ — порождающие кольца инвариантов и $d_i = \deg I_i$. Нас интересуют, разумеется непостоянные функции f_{ij}, то есть $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq d_i - 1$. Их в нашем случае ровно $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind} \mathfrak{g})$ штук, так как в кольце инвариантов простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для любого набора порождающих $I_1, ..., I_n$ выполнено равенство $\sum_i d_i = N$ (см., например, [40]).

В отличие от предыдущих глав, на протяжение всего данного раздела нас будут интересовать не коммутативные подалгебры $\mathcal{F}_a$, а *коммутативные наборы* Φ_a — множество функций f_{ij} (то есть, фактически, нас интересует определенный класс порождающих алгебры $\mathcal{F}_a$). Будем обозначать порядковый номер пары i, j как $k(i,j)$, а соответственно пару с номером k через $i_k j_k$. При этом $k(i,j)$ будем называть *функцией порядка*. Отображение момента $F_a : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^N$ в этом случае действует по формуле $z_k = f_{i_k j_k}(x)$.

Замечание 5.2 Конструкция Σ не инвариантна. В качестве параметров в ее определение входят, набор порождающих I_i, элемент $a \in \mathfrak{g}$ и функция порядка $k(i,j)$. Эти же параметры определяют набор Φ_a и F_a.

Из критерия Болсинова 2.4 особые точки отображения момента F_a, то есть такие $x \in \mathfrak{g}$, что ранг $\mathrm{d}F_a$ падает, - это в точности цилиндр над множеством сингулярных элементов $\mathfrak{g}$ с образующей a (см, например, [8]), то есть является алгебраическим множеством. Таким образом, Σ — это образ алгебраического множества при полиномиальном отображении из одного линейного пространства в другое, и, вообще говоря, не обязано быть замкнутым. То есть вместо бифуркационной диаграммы Σ естественно рассматривать ее замыкание $\bar{\Sigma}$.

Пример 9. Пусть $\mathfrak{g} = sl(2)$, в представлении минимальной размерности:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Через e_1, e_2, e_3 обозначим соответствующий базис. Коммутационные соотношения в нем имеют вид:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1.$$

$\mathrm{ind}\mathfrak{g} = 1$ и $N = 2$. В качестве a возьмем элемент e_1. В этом случае подалгебра $\mathfrak{g}_a$ из теоремы 4.1 одномерна, поэтому параметры секционных операторов пропорциональны.

Возьмем ϕ с параметрами a, a, а на $\mathfrak{g}^a$ положим D из теоремы 4.2 равным умножению на двойку. Получаем, что в данном базисе оператор ϕ действует следующим образом:

$$\phi e_1 = 2e_1, \phi e_2 = e_2, \phi e_3 = e_3.$$

В этом случае система 18 принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 \end{aligned}$$

В кольце инвариантов $sl(2)$ ровно один многочлен — это $I = x_1^2 + x_2x_3$. Применяя метод сдвига аргумента, получаем следующее разложение

$$I(x + \lambda a) = (x_1^2 + x_2x_3) + 2\lambda x_1 + \lambda^2.$$

Упорядочим полученные f_{ij} по степеням. Тогда коммутативный набор F_a имеет вид $(x_1, x_1^2+x_2x_3)$. Особые точки отображения момента соответствующего отображения F_a — это цилиндр над множеством сингулярных элементов $\mathfrak{g}$. В нашем случае это множество состоит ровно из одной точки - нуля, - поэтому цилиндр представляет собой прямую $(\lambda, 0, 0)$. Образ этой прямой - кривая на $\mathbb{C}^N$, задаваемая уравнением (λ, λ^2), то есть парабола. ■

В данном случае бифуркационная диаграмма получается замкнутой. Более того, диаграмма замкнута и в остальных разобранных в этом разделе случаях. Естественно высказать следующую гипотезу: *Для простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, произвольного набора порождающих в кольце инвариантов I_i, произвольной функции порядка $k(i, j)$ и регулярного элемента a бифуркационная диаграмма Σ отображения момента F_a является замкнутой.*

Спектральная кривая. Дадим сначала классическое определение спектральной кривой. Рассмотрим лаксово представление некоторой системы со спектральным параметром λ:

$$\dot{L}_\lambda(x) = [L_\lambda(x), A_\lambda(x)].$$

Каждой точке x фазового пространства можно поставить в соответствие кривую в $\mathbb{C}^2$ с координатами λ, μ, задаваемую уравнением

$$\det(L_\lambda(x) - \mu E) = 0.$$

Эта кривая и называется *спектральной кривой лаксова представления со спектральным параметром* (в дальнейшем это название мы будем сокращать просто до "спектральной кривой"). В свою очередь *дискриминантом D спектральной кривой* будем называть множество точек фазового пространства, в которых спектральная кривая имеет особую точку, то есть разрешима следующая система уравнений:

$$\begin{array}{l} R\lambda, \mu = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} R\lambda, \mu = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} R\lambda, \mu = 0. \end{array} \tag{25}$$

Применим эту конструкцию в нашем случае. Рассмотрим ту же систему ОДУ на $\mathfrak{g}$, что и при определении бифуркационной диаграммы Σ:

$$\dot{x} = [x, \phi x],$$

где ϕ — секционный оператор с параметрами a, b. Зафиксируем некоторое представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и введем спектральный параметр λ: $L_\lambda(X) = X + \lambda A$, $A_\lambda(X) = \phi X + \lambda B$. Замечаем, что исходное уравнение преобразуется к виду

$$\dot{X} = [X, \phi X] + \lambda([A, \phi X] + [X, B]) + \lambda^2 [A, B]$$

Коэффициент при λ обращается в ноль, так как это просто переформулировка определения секционного оператора, а $[A, B] = 0$ по теореме 4.1. Таким образом, система приобрела вид:

$$\dot{L}_\lambda(X) = [L_\lambda(X), A_\lambda(X)],$$

то есть мы действительно получили ее лаксово представление со спектральным параметром λ. Спектральная кривая в нашем случае имеет вид:

$$R(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda A - \mu E) = 0.$$

Замечание 5.3 Из всего вышесказанного видно, что определение спектральной кривой неинварианто. В качестве параметров в это определение входит представление ρ и элемент a.

Работать с подобной спектральной кривой, однако, в нашем случае не очень удобно. В частности, например, дискриминант D лежит в $\mathfrak{g}$, а Σ — в $\mathbb{C}^N$, поэтому нам потребуется другое определение спектральной кривой уже на $\mathbb{C}^N$, индуцированное данным. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.8 *Пусть в кольце инвариантов простой комплексной алгебре Ли зафиксирован набор порождающих $I_1, ..., I_n$. Тогда для произвольного представления ρ и элемента $a \in \mathfrak{g}$ коэффициенты многочлена $R(\lambda, \mu)$ — естественным образом представляются в качестве полиномов от функций f_{ij}, полученных из I_i при помощи сдвига на a.*

Доказательство. Произвольный коэффициент I характеристического многочлена — инвариант, поэтому, в силу конечной порожденности кольца инвариантов простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, он выражаются полиномиальным образом через $I_1, ..., I_n$. В свою очередь, коэффициенты разложения $I(x+\lambda a)$ по по λ оказываются полиномами от коэффициентов $I_i(x + \lambda a)$, то есть от f_{ij}. Лемма доказана. $\square$

Зафиксируем теперь набор порождающих инвариантов $I_1, ..., I_n$ и рассмотрим функцию порядка $k(i, j)$ для $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq d_i - 1$ (она, по сути, задает порядок на непостоянных f_{ij}). Рассмотрим многочлен $R_z(\lambda, \mu)$ от λ, μ и $z \in \mathbb{C}^N$, который получается из $R(\lambda, \mu)$ подстановкой вместо f_{ij} в естественное представлении коэффициентов данного многочлена как полиномов от f_{ij} из леммы 5.8 переменных $z_{k(i,j)}$

Таким образом в каждой точке пространства $\mathbb{C}^N$ определена *спектральная кривая* $R_z(\lambda, \mu) = 0$. *Дискриминантом спектральной кривой* будем называть множество $D_z \subseteq \mathbb{C}^N$ таких точек, для которых соответствующая кривая имеет особенность. Система уравнений, задающих D_z имеет вид, аналогичный системе для D:

$$\begin{array}{l} R_z\lambda, \mu = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} R_z\lambda, \mu = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} R_z\lambda, \mu = 0. \end{array} \qquad (26)$$

Из доказанной леммы 5.8 вытекает $F_a(D) \subseteq D_z$.

Замечание 5.4 В некотором смысле новое определение спектральной кривой еще "неинвариантнее"старого. В качестве параметров в определение этой кривой входят представление ρ, набор порождающих $I_1, ..., I_n$, элемент алгебры a и функция порядка $k(i, j)$. Однако в данном случае дискриминант D_z лежит в $\mathbb{C}^N$.

Прежде чем перейти к свойствам дискриминанта спектральной кривой, отметим, что, вообще говоря, он может совпадать со всем $\mathbb{C}^N$. Например, рассмотрим спектральную кривую для произвольной $\mathfrak{g}$ с параметрами:$\rho = \mathrm{ad}$, а остальные — произвольные. Легко видеть, что у $R_z(\lambda, \mu)$ корень ноль имеет кратность как минимум n, то есть представляется в виде $\mu^n Q(\lambda, \mu)$, где Q — некоторый многочлен от λ, μ. Отсюда немедленно вытекает, что $\lambda, 0$ удовлетворяет системе (26). Ниже будет показано, что D_z совпадает с $\mathbb{C}^N$ для $so(2n)$ в представлении минимальной размерности и для почти всех a.

Утверждение 5.1 *Рассмотрим произвольное представление ρ простой алгебры $\mathfrak{g}$, регулярный (не обязательно полупростой) элемент $a \in \mathfrak{g}$, и произвольный набор порождающих $I_1, ..., I_n$ и произвольную функцию порядка $k(i,j)$ на парах $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq d_i$. По данным параметрам определим спектральную кривую $R_z(\lambda, \mu) = 0$ и рассмотрим ее дискриминант D_z. По элементу a, набору порождающих инвариантов и функции порядка построим Σ. Тогда выполнено включение*

$$\Sigma \subseteq D_z.$$

.

Доказательство. Докажем более сильный результат, а именно, что $\Sigma \subseteq F_a(D)$.

Пусть $z \in \Sigma$, то есть в прообразе $F_a^{-1}(z)$ есть такая точка x, что в ней падает ранг $\mathrm{d}F_a$. По критерию Болсинова 2.4 для регулярного a матрица Якоби $\mathrm{d}F_a$ (при любых прочих параметрах) имеет в точке x ранг меньше максимального тогда и только тогда, когда $x + \lambda a$ содержит сингулярный элемент. Пусть это элемент $x + \lambda_0 a$.

Зафиксируем представление ρ. По лемме 5.4 у оператора $X + \lambda_0 A$ есть критическое собственное значение. Обозначим это значение через μ_0. Заметим, что первые два уравнения в систем 25 выполняются в точке λ_0, μ_0, так как μ_0 имеет кратность как минимум два. С другой стороны третье уравнение системы по определению представляет собой линейную комбинацию миноров коразмерности один матрицы $X_0 - \mu_0 E$ с постоянными коэффициентами. Так как μ_0 — критическое собственное значение, то все эти миноры обращаются в ноль. Таким образом, в точке X у спектральной кривой есть особая точка λ_0, μ_0. Из этого вытекает, что $X \in D$ и, следовательно, т.к. $F_a(D) \subseteq D_z$, предложение доказано. $\square$.

Разберем примеры спектральных кривых $R_z(\lambda,\mu)$, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пример 10. Для алгебр $sl(n+1), so(2n+1)$ и $sp(2n)$ спектральные кривые в представлении минимальной размерности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
sl(n+1) \quad &: \quad R_z(\lambda,\mu) = \mu^{n+1} + \sum_{1\le i\le n} I_i(a)\lambda^{d_i}\mu^{i-1} + \sum_{\substack{1\le i\le n,\\ 0\le j\le d_i-1}} z_{k(i,j)}\lambda^j\mu^{i-1},\\
so(2n+1) \quad &: \quad R_z(\lambda,\mu) = \mu^{2n+1} + \sum_{1\le i\le n} I_i(a)\lambda^{d_i}\mu^{2i-1} + \sum_{\substack{1\le i\le n,\\ 0\le j\le d_i-1}} z_{k(i,j)}\lambda^j\mu^{2i-1},\\
sp(2n) \quad &: \quad R_z(\lambda,\mu) = \mu^{2n} + \sum_{1\le i\le n} I_i(a)\lambda^{d_i}\mu^{2i-2} + \sum_{\substack{1\le i\le n,\\ 0\le j\le d_i-1}} z_{k(i,j)}\lambda^j\mu^{2i-2},
\end{aligned}$$

■

Пример 11. Рассмотрим алгебру $so(2n)$ в представлении минимальной размерности. Определитель $\det X$ не входит в фиксированные нами порождающие кольца инвариантов и представляется в виде $\mathrm{Pf}^2(X)$. Спектральная кривая в этом случае имеет вид:

$$R(\lambda,\mu) = \mu^{2n} + \sum_{2\le i\le n} I_i(a)\lambda^{d_i}\mu^{2i-2} + \sum_{\substack{2\le i\le n,\\ 0\le j\le d_i-1}} \lambda^j\mu^{2i-2} + \\ + \Big(\sum_{0\le j\le d_1-1} z_{k(i,j)}\lambda^j\mu^{2i-2} + I_1(a)\lambda^n\Big)^2.$$

■

Пример 12. Спектральная кривая для алгебры g_2 имеет следующий вид:

$$R(\lambda,\mu) = \mu^7 + I_2(X+\lambda A)\mu^5 + F(X+\lambda A)\mu^3 + I_1(X+\lambda A)\mu,$$

где I_1, I_2 — порождающие кольца инвариантов, а F выражается через них некоторым полиномиальным образом. Легко проверяется (данный факт достаточно проверить только для диагональных матриц), что $F = \frac{1}{4}I_2^2$. Для инвариантов имеются разложения

$$I_2(X+\lambda A) = f_{20} + \lambda f_{21} + \lambda^2 f_{22},$$

$$I_1(X+\lambda A) = f_{10} + \lambda f_{11} + ... + \lambda^6 f_{16},$$

где $f_{22} = I_2(A), f_{16} = I_1(A)$. Таким образом, формула для спектральной кривой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}R(\lambda,\mu) &= \\ &= \mu^7 + z_{k(2,0)}\mu^5 + z_{k(2,1)}\lambda\mu^5 + I_2(a)\lambda^2\mu^5 + z^2_{k(2,0)}\mu^3 + \left(z^2_{k(2,1)} + 2z_{k(2,0)}z_{k(2,1)}\right)\lambda\mu^3 + \\ &+ 2I_2(a)z_{k(2,0)}\lambda^2\mu^3 + 2I_2(a)z_{k(2,1)}\lambda^3\mu^3 + I_2(a)^2\lambda^4\mu^3 + z_{k(1,0)}\mu + z_{k(1,1)}\lambda\mu + z_{k(1,2)}\lambda^2\mu + \\ &+ z_{k(1,3)}\lambda^3\mu + z_{k(1,4)}\lambda^4\mu + z_{k(1,5)}\lambda^5\mu + I_1(a)\lambda^6\mu.\end{aligned}$$

■

В заключение данного раздела докажем теорему, которая утверждает, что D_z в изучаемых случаях в некотором смысле хорошее множество.

Теорема 5.2 *Пусть $\mathfrak{g}$ - одна из следующих алгебр: $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2. Для произвольного элемента a дискриминант D_z спектральной кривой $R_z(\lambda,\mu) = 0$ на $\mathbb{C}^N$ является алгебраическим (в частности, замкнутым) множеством.*

Доказательство. Докажем сначала это утверждение для $sl(n+1)$. Для этой алгебры по построению все входящие в систему (26) многочлены имеют ненулевую степень по μ. Определим следующие многочлены:

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \mathrm{Res}_\mu(R_z(\lambda,\mu), \tfrac{\partial}{\partial\mu}R_z(\lambda,\mu)),\\ q(\lambda) &= \mathrm{Res}_\mu(R_z(\lambda,\mu), \tfrac{\partial}{\partial\lambda}R_z(\lambda,\mu)),\end{aligned}$$

где Res_μ — означает результант двух многочленов, как многочленов от μ (см. например, [20]).

Лемма 5.9 *Многочлены p, q как многочлены от λ имеют ненулевую степень.*

Доказательство. Докажем это утверждение сначала для многочлена $p(\lambda)$. Заметим, что это в точности дискриминант [20] многочлена $R(\lambda,\mu)$ как многочлена от μ.

Выберем точку $z' \in \mathbb{C}^N$, у которой $z_{k(1,0)} = 0, z_{k(2,0)} = 0$. В свою очередь координаты $z_{k(n,0)}, ..., z_{k(3,0)}$ и $z_{k(1,1)}, z_{k(2,1)}$ подберем таким образом, чтобы многочлен

$$\mu^{n+1} + \sum_{3\le i\le n}(z_{k(i,0)} + I_i(a))\mu^{i-1} + (z_{k(2,1)} + I_2(a))\mu + (z_{k(1,1)} + I_1(a)) \quad (27)$$

имел попарно различные корни (это можно сделать, так как на них всего одно условие - их сумма должна равняться нулю). Все остальные координаты z' положим равными нулю.

Нулевая степень p, то есть независимость от λ, означает в точности, что для разных λ множество таких точек $z \in \mathbb{C}^N$, для которых $R(\lambda, \mu)$ имеет кратный корень, одинаково. В нашем случае, однако, при $\lambda = 0$, в точке z' у многочлена $R(0, \mu)$ корень 0 имеет кратность два, а при $\lambda = 1$ в этой же многочлен $R(1, \mu)$ совпадает с многочленом (27), поэтому все его корни различны. Таким образом, для p утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь многочлен q. Доказывать будем аналогичным образом. Сначала подберем $z_{k(i,0)}$ и $z_{k(i,1)}$ так, чтобы многочлены

$$R(0, \mu) = \mu^{n+1} + \sum_{1 \le i \le n} z_{k(i,0)} \mu^{i-1}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R(0, \mu) = \sum_{1 \le i \le n} z_{k(i,1)} \mu^{i-1}$$

имели различные корни. Это можно сделать, так как коэффициенты многочленов суть различные группы переменных, второй многочлен имеет самый общий вид, а в первом на корни, как уже говорилось выше, ровно одно условие - их сумма должна равняться нулю. $z_{k(i,2)}$ выберем таким образом, чтобы $z_{k(i,1)} + z_{k(i,2)} + I_i(a) = 0$, а остальные координаты положим равными нулю. Осталось заметить, что по построению при $\lambda = 0$ в точке z' первое и третье уравнение системы (26) не имеют одинаковых корней. В свою очередь при $\lambda = 1$ получаем, что этой же точке у $\frac{\partial}{\partial \lambda} R_z(\lambda, \mu)$ все коэффициенты равны нулю, поэтому все корни $R_z(1, \mu)$ автоматически корнями данного многочлена. Лемма доказана. ■

Для доказательства теоремы для случая $sl(n+1)$ осталось заметить, что D_z задается равенством $r(z) = 0$, где $r(z) = \mathrm{Res}_\lambda(p, q)$.

Чтобы доказать утверждение для остальных алгебр, мы представим дискриминант их спектральных кривых как пересечение D_z для алгебры $sl(n+1)$ с некоторым алгебраическим множеством. Нам также понадобится следующее свойство инвариантов алгебры $sl(n+1)$: для любого набора чисел $c_1, ..., c_n$ найдется такой полупростой элемент a, что $I_i(a) = c_i$ (это выполнено, так как в представлении минимальной размерности значения инвариантов определяют корни характеристического многочлена и наоборот).

Случай $sp(2n)$. Рассмотрим функцию порядка $k'(i, j)$ для случая спектральной кривой на алгебре $sp(2n)$. Ее параметры лежат в пределах

$1 \le i \le n, 0 \le j \le d'_i - 1$, где d'_i — степени инвариантов для данной алгебры (напомним, что набор порождающих инвариантов фиксирован и описан в разделе 2.4). Определим функцию порядка $k(i,j)$ для параметров $1 \le i \le 2n-1, 0 \le j \le d_i - 1$, где d_i — степени инвариантов алгебры $sl(2n)$, следующим образом:

$$k(2i-1, j) = k'(i,j),$$

а на оставшихся парах - произвольно. Легко видеть, что это определение корректно, так как по построению $d'_i = d_{2i-1}$. Рассмотрим элемент $a' \in sl(2n)$ для которого $I_{2i-1}(a') = I_i(a)$ и $I_{2i}(a') = 0$, где $a \in sp(2n)$ — один из параметров, задающих спектральную кривую. Легко видеть, что в этом случае спектральная кривая $R_z(\lambda,\mu)$ для $sp(2n)$ получается из спектральной кривой для $sl(2n-1)$ подстановкой $z_{k(2i,j)} = 0$. Таким образом дискриминант спектральной кривой для алгебры $sp(2n)$ по определению представляется как пересечение дискриминанта спектральной кривой sl с плоскостью, задаваемой в $\mathbb{C}^N$ уравнениями $z_{k(2i,j)} = 0$. Для данной алгебры теорема доказана.

Случай $so(2n+1)$**.** Доказательство в данном случае абсолютно аналогично случаю $sp(2n)$.

Случай g_2**.** Рассмотрим функцию порядка $k'(i,j)$ для случая спектральной кривой на алгебре g_2, где $i = 1, 2$ и $0 \le j \le d'_i - 1$, а $d'_1 = 2, d'_2 = 6$. Определим функцию порядка $k(i,j)$ для параметров $1 \le i \le 6, 0 \le j \le d_i - 1$, где d_i — степени инвариантов алгебры $sl(7)$ следующим образом:

$$k(6,0) = k'(2,0), k(6,1) = k'(2,1),$$
$$k(2,j) = k'(1,j), 0 \le j \le d'_1 - 1$$

Определение корректно, так как $d'_1 = d_2$ и $d'_2 = d_6$. Рассмотрим спектральную кривую R_z на g_2, задаваемую для функции порядка k', представления ρ и элемента $a \in g_2$. Выберем такой $a' \in sl(7)$, что $I_6(a') = I_2(a)$, $I_2(a') = I_1(a)$ и $I_4(a') = I_2^2(a)$, а остальные равны нулю. Тогда дискриминант спектральной кривой R_z для g_2 представляется как пересечение дискриминанта спектральной кривой для sl и алгебраического множества, задаваемого системой из уравнений $z_{k(2i-1,j)} = 0$ и возникающих из явного описания спектральной кривой для g_2:

$$z_{k(4,0)} = z^2_{k(6,0)}, \;\; z_{k(4,1)} = z^2_{k(6,1)} + 2z_{k(6,0)}z_{k(6,1)},$$
$$z_{k(4,2)} = 2I_2(a)z_{k(6,0)}, \;\; z_{k(4,3)} = 2I_2(a)z_{k(6,1)}.$$

Таким образом для g_2 теорема так же доказана. $\square$

5.4 Метод сдвига аргумента для субрегулярных полупростых элементов простой алгебры Ли. Центры централизаторов элементов такой алгебры.

Для изучения свойств функциональных наборов, получаемых методом сдвига аргумента для субрегулярных полупростых элементов a простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, нам потребуется информация о строении центра централизатора произвольного элемента такой алгебры. Сначала сформулируем лемму, которая выполняется в случае произвольной алгебры Ли.

Лемма 5.10 *Пусть в некоторой окрестности произвольной точки $a \in g^*$ произвольной алгебры $\mathfrak{g}$ определена некоторая функция Казимира I скобки $\mathcal{A}$. Тогда $\mathrm{d}I(a)$ лежит в центре $\mathrm{Ann}\, a$.*

Доказательство. Разложим I в ряд $I(a + \lambda x) = \sum_j f_j$. По теореме 4.3 $f_2 = (x, \phi x)$, где ϕ — секционный оператор с параметрами $a, \mathrm{d}I(a)$. В свою очередь по теореме 4.1 получаем, что так как $\mathrm{d}I(a)$ лежит в $\mathrm{Ann}\, a$, то $\mathrm{d}I(a) \in \mathfrak{z}(\mathrm{Ann}\, a)$ (для случая глобальных функций Казимира этот результат хорошо известен [38]). $\square$

Прежде чем перейти к формулировке одного из основных утверждений данного раздела, необходимо ввести некоторые дополнительные обозначения. Через $\mathrm{Im}\, \mathrm{ad}_a$ обозначим образ оператора ad_a в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что $\mathfrak{g} = \mathrm{Im}\, \mathrm{ad}_a \oplus \mathfrak{g}^a$. Напомним, что на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует естественная градуировка, связанная с высотой корней. Пусть $\beta \in \Delta$ — некоторый корень. Пусть его разложение по базисным корням имеет вид $\beta = \sum_i n_i \alpha_i$. Тогда высотой корня β будем называть сумму $\sum_i n_i$. Рассмотрим теперь пространства $\mathfrak{g}_l, l \neq 0$, состоящие из корневых векторов, соответствующих корням высоты l, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Легко проверяется, что данное разложение $\mathfrak{g} = \bigoplus_l \mathfrak{g}_l$ действительно задает градуировку.

Эта градуировка обладает замечательным свойством. Рассмотрим $e \in \mathfrak{g}_1$ — главный нильпотентный элемент в стандартном виде. Тогда (см., например, [34]) выполнено следующее свойство:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ad}_e : \mathfrak{g}_l \to \mathfrak{g}_{l+1}, l < 0 \quad \text{— инъекция,} \\ &\mathrm{ad}_e : \mathfrak{g}_l \to \mathfrak{g}_{l+1}, l \geq 0 \quad \text{— сюръекция.} \end{aligned} \tag{28}$$

В частности, из-за равенства размерностей, $\mathrm{ad}_e : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_0$ и $\mathrm{ad}_e : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_1$ — изоморфизмы векторных пространств.

Наконец, рассмотрим моном $e_{\beta_1}^{n_1}...e_{\beta_k}^{n_k}m_{\mathfrak{h}}$, где $m_{\mathfrak{h}}$ — моном от элементов $\mathfrak{h}$, а $\beta_1, ..., \beta_k$ — некоторый набор корней. *Высотой монома* будем называть суммарную высоту корней β_i. Легко видеть, что моном коммутирует с $\mathfrak{h}$,тогда и только тогда, когда его высота равна нулю. Теперь перейдем непосредственно к формулировке и доказательству теоремы.

Теорема 5.3 *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{h}$ — полупростой элемент, а $I_1, ..., I_n$ —- порождающие кольца инвариантов присоединенного представления данной алгебры. Тогда $\mathrm{d}I_1(a), ..., \mathrm{d}I_n(a)$ порождают центр централизатора $\mathfrak{g}^a$.*

Доказательство. Доказательство разобьем на несколько лемм.

Лемма 5.11 *Для любого $\tau \in \mathbb{C}$ элемент $e_\tau = \tau a + e \in \mathfrak{g}$ регулярен.*

Доказательство. Легко видеть, что в силу произвольности полупростого a утверждение леммы достаточно доказать для $\tau = 1$, то есть для e_1.

Рассмотрим произвольный корневой вектор $e_{-\alpha}$ из $\mathfrak{g}_k$ для $k < 0$ такой, что $ad_e e_{-alpha} = 0$. Так как системы корней централизатора элемента a и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ согласованы, то $-\alpha$ раскладывается по простым корням, зануляющимся на a, с отрицательными коэффициентами. Легко видеть, что в этом случае $\alpha_i + (-\alpha)$ для $\alpha_i(a) \neq 0$ представляет собой линейную комбинацию простых корней как с положительными, так и отрицательными коэффициентами, поэтому, по определению простых корней, корнем не является. Отсюда $\mathrm{ad}_e e_\alpha = \mathrm{ad}_{\tilde{e}} e_\alpha$, где $\tilde{e}$ — естественная проекция e на $\mathfrak{g}^a$. В частности, $\mathrm{ad}_e e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^a$.

Пусть теперь x — произвольный элемент из $\mathfrak{g}^{e_1}$. Запишем его разложение по градуировке $\mathfrak{g}_l$:

$$x_k + x_{k+1} + ...$$

Предположим, что $k < 0$ и $x_k \neq 0$. Из того, что $[x, e_1] = 0$, получаем следующую систему соотношений на x_j:

$$\begin{aligned}
&[x_k, a] = 0, \\
&[x_{j+1}, a] + [x_j, e] = 0, j \geq k.
\end{aligned}$$

Из первого равенства вытекает, что $x_k \in \mathfrak{g}^a$ По приведенным выше рассуждениям $\mathrm{ad}_e x_k \in \mathfrak{g}^a$. С другой стороны $[x_{k+1}, a] \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_a$. Из равенства нулю их суммы немедленно получаем, что $\mathrm{ad}_e x_k = 0$. В свою очередь из свойства заданной градуировки (28) получаем, что $x_k = 0$. Отсюда получаем, что $x \in \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{h}$, то есть в разложении x по градуировке $\mathfrak{g}_l$ нет слагаемых отрицательной высоты.

Легко видеть, что ad_e переводит $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+ \to \mathfrak{g}^+$. Покажем, что это отображение сюръективно. Рассмотрим произвольный $x \in \mathfrak{g}_k$, где $k > 0$. Построим для него прообраз явно. По свойству градуировки (28) найдется такой y_{k-1}, что $\mathrm{ad}_e y_{k-1} = x$. Теперь рассмотрим $\mathrm{ad}_a y_{k-1}$. Если это ноль, то $[y_{k-1}, e+a] = x$ и прообраз x найден. Если, однако, это не ноль, то по тому же свойству градуировки найдется такой y_{k-2}, что $\mathrm{ad}_e y_{k-2} = -\mathrm{ad}_a y_{k-1}$. Если $\mathrm{ad}_a y_{k-2} = 0$, то $[y_{k-1} + y_{k-2}, e + a] = x$ и прообраз снова найден. В противном случае продолжаем процесс построения. Он заведомо остановится, так как, если мы добрались до $\mathfrak{g}_0$, то по построению выражение $\mathrm{ad}_a y_0$ заведомо равно нулю и для $y = y_{k-1} + y_{k-2} + ...$ выполнено $[y, e + a] = x$. Таким образом, $ad_e : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+ \to \mathfrak{g}^+$ — сюръективно.

Из сюръективности ad_a и ранее доказанного факта, что $\mathfrak{g}^{e+a} \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$, получаем, что $\dim \mathfrak{g}^{e+a} = \dim \mathfrak{h} = n$. Утверждение леммы доказано. ■

Лемма 5.12 *Пусть $a \in \mathfrak{h}$ — произвольный полупростой элемент и $I_1, ..., I_n$ — произвольный набор базисных инвариантов. Определим функции f_{ij} как*

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij}.$$

Дифференциалы $\mathrm{d}f_{ij}$ для $j > 1$, взятые в точке e, лежат в $\mathfrak{g}^+$

Доказательство. Нам известно, что f_{ij} коммутирует с $\mathfrak{g}^a$, в частности, с $\mathfrak{h}$, то есть он состоит из мономов высоты ноль.

Заметим теперь, что $\frac{\partial}{\partial e_\alpha}$ от монома высоты ноль, где высота α больше нуля, либо ноль, либо содержит корень отрицательной высоты и, следовательно, в точке e обращается в ноль.

Теперь рассмотрим $\frac{\partial}{\partial h_{\alpha_i}}$ от монома. Если он содержит корневые вектора, то в силу нулевой высоты среди них есть как положительные, так и отрицательные, и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial h_{\alpha_i}}$ от данного монома в точке e равно нулю. Если моном состоит только из элементов h_{α_i}, то он равен нулю в точке e так как его степень как минимум два.■.

Элемент $\tilde{e}$ — проекция e на $\mathfrak{g}^a$ — главный нильпотентный (а, следовательно, регулярный) элемент в централизаторе $\mathfrak{g}^a$. Из леммы 5.11, равенства $\mathrm{ind}\mathfrak{g}^a = \mathrm{ind}\mathfrak{g}$ и предложения 2.1 получаем, что в точке e в каноническом виде $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ имеются только кронеккеровы блоки и жордановы размера 2×2 с нулевым собственным значением. Из этого вытекает, что $\operatorname{sgrad} f_{ij}$ порождают пространство размерности $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{O}_a$, где O_a — орбита, проходящей через точку a.

Из леммы 5.10 получаем, что $\operatorname{sgrad} f_{i1}$ лежат в $\mathfrak{g}_1 \cap \operatorname{Im} \operatorname{ad}_a^+$. Из леммы 5.12 получаем, что $\operatorname{sgrad} f_{ij} \in \bigoplus\limits_{l\geq 2} \mathfrak{g}_l$. Так как $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{O}_a = \dim\ \in \operatorname{ad}_a^+$, то косые градиенты f_{ij} порождают все это пространство. Отсюда следует, что $\operatorname{sgrad} f_{i1} = [\mathrm{d}I_i(a), e]$ порождают пространство $\mathfrak{g}_1 \cap \operatorname{Im} \operatorname{ad}_a^+$, размерность которого в точности равна $\dim \mathfrak{z}(g^a)$. Получаем, что размерность пространства, порожденного косыми градиентами линейных функций не меньше размерности центра централизатора. Таким образом, теорема доказана $\square$.

Замечание 5.5 Для неполупростого элемента утверждение теоремы 5.3 вообще говоря уже не является верным. Рассмотрим алгебру g_2 и определим следующий элемент $e' = e_{\alpha_2} + e_{3\alpha_1+\alpha_2}$. В представлении минимальной размерности он имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Централизатор в g_2 этого элемента будет имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v\sqrt{2} & -w\sqrt{2} & 0 & 0 \\ w\sqrt{2} & 0 & \beta & \gamma & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & -\beta & 0 & 0 \\ -v\sqrt{2} & 0 & -w & 0 & -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

Отсюда порождающие централизатора e' можно указать явно:

$$e', e_{3\alpha_1+2\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}.$$

Из правил коммутирования видно, что центр централизатора двумерен и порождается элементами e' и $e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$. При этом нам известно, что дифференциалы инвариантов зависимы в x тогда и только тогда, когда он сингулярен [38]. Таким образом, они порождают пространство размерности не выше единицы, а значит центр централизатора строго больше пространства, порожденного дифференциалами.

В работе А.А. Тарасова [39] доказывается интересный факт - для полупростого регулярного a найдется аффинное пространство размерности N, ограничения на которое функций из набора $\mathcal{F}_a$ задают на нем глобальные координаты. В частности, дифференциалы этих функций всюду независимы на данном аффинном пространстве.

Замечание 5.6 Из этого вытекает, в частности, что образ отображения момента для $\mathcal{F}_a$ совпадает с $\mathbb{C}^N$.

Оказывается аналогичный результат верен и для субрегулярного полупростого элемента. Пусть a — такой элемент и всюду далее считаем, что в кольце инвариантов у нас фиксирован некоторый произвольный набор порождающих I_i. Рассмотрим разложение

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij}.$$

Из равенства $\mathrm{ind}\mathfrak{g}^a = \mathrm{ind}\mathfrak{g}$ и предложения 2.1 вытекает, что в точке общего положения канонический вид $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_a$ в смысле теоремы Жордана-Кронеккера 2.1 содержит только кронеккеровы блоки и жордановы блоки с нулевым собственным значением размера 2×2. Таким образом, дифференциалы функций f_{ij} в точке общего положения порождают пространство размерности $N - 1$.

Так как всего функций N, то из этого следует, что некоторые функции из нашего набора зависимы между собой, причем какие именно - выяснить достаточно легко. Из теоремы 5.3 следует, что линейные функции f_{i1} порождают центр $\mathfrak{g}^a$, который в нашем случае имеет размерность $n - 1$. Отсюда получаем, что среди линейных функций можно выбрать $n - 1$ независимых между собой, причем оставшаяся выражается через них с постоянными коэффициентами. Пусть без ограничения общности это функция f_{11}. Для оставшихся функций выполнена следующая теорема.

Теорема 5.4 *Для $(i,j) \neq (1,1)$ любого заданного наперед набора чисел c_{ij} система*
$$f_{ij} = z_(ij)$$
разрешима.

Доказательство. Функции из f_{ij}, как уже говорилось выше, имеют высоту ноль. Определим аффинное пространство $T = e + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^a) + \mathfrak{g}^-$. Легко видеть, что пространство регулярных функций на этом пространстве благодаря форме Киллинга естественным образом отождествляется с $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^a) + \mathfrak{g}^+$. Напомним также, что на $\mathfrak{g}$ фиксирована градуировка, индуцируемая высотой корней.

Лемма 5.13 *Пусть f — однородный многочлен степени $d \geq 2$ высоты ноль. Тогда ограничение $\tilde{f}$ полинома f на T имеет вид $L(\mathfrak{g}_{-d+1}) + F(\mathfrak{g}_{-d+2}, ..., \mathfrak{g}_0)$, где L_{-d+1} — линейная функция на векторном пространстве $\mathfrak{g}_{-d+1}$, то есть линейный полином от элементов $\mathfrak{g}_{d-1}$, а F — некоторая полиномиальная функция на $\bigoplus_{-d+2 \leq l \leq 0} g_l$.*

Доказательство. Известно, что f — однородный полином степени d. Для удобства считаем, что в него входят все возможные мономы степени d высоты ноль (то есть коммутирующие с $\mathfrak{h}$), некоторые, быть может, просто с нулевыми коэффициентами.

Теперь рассмотрим произвольный моном степени d нулевой высоты: $e_{\beta_1}^{n_1} ... e_{\beta_k}^{n_k} m_{\mathfrak{h}}$, где
$$\deg m_{\mathfrak{h}} + \sum_{j=1}^{k} n_j = d.$$
Равенство нулю высоты дает уравнение
$$\sum_{j=1}^{k} n_j \mathrm{ht}(\beta_j) = 0$$

Заметим, что, если ограничение этого монома на T не равно нулю, то $\mathrm{ht}(\beta_j) \geq -1$. Считаем, что без ограничения общности, максимальную высоту имеет β_1. Из первого равенства получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} n_j \leq d$. Добавим к неравенству второе равенство и получаем следующую цепочку:
$$d \geq \sum_{j=1}^{k} n_j (\mathrm{ht}\beta_j + 1) \geq n_1(\beta_1 + 1) \geq \beta_1 + 1.$$

Пусть теперь в моном степени d входит β высоты $d-1$. Из этого немедленно вытекает, что все неравенства в предыдущей цепочке превращаются в равенства, то есть $m_{\mathfrak{h}}$ у такого монома отсутствует и помимо e_β в него входят только корневые вектора, соответствующие корням высоты -1. Из этого, в частности, получаем, что ограничение такого монома на T дает линейную функцию. Лемма доказана $\Box$.

Рассмотрим теперь $\mathrm{d}\tilde{f}_{ij}$ — дифференциалы ограничений f_{ij} на T. Они, по построению, лежат в $g^+ \oplus \mathfrak{h}$ и получаются из $\mathrm{d}f_{ij}$ проекцией на данное пространство вдоль g^-. Рассмотрим $e \in T$. В этой точке $\mathrm{d}f_{ij} = \mathrm{d}\tilde{f}_{ij}$ и равны соответствующим линейным частям L из леммы 5.13. При этом, из лемм 5.10 и 5.12 в доказательстве теоремы 5.3 немедленно вытекает, что эти линейные функции независимы между собой и порождают весь $g^+ \oplus \mathfrak{h}$.

Теперь рассмотрим произвольную точку z в $\mathbb{C}^{N-1}$. Сначала решаем линейную системы $f_{i1} = z_{k(i,1)}$. Затем рассмотрим квадратичную систему, то есть $f_{i2} = z_{k(i,2)}$. Подставив сюда уже найденные h_r и перенося F из леммы 5.13 в правую часть снова получаем линейную систему. Все полученные таким образом системы разрешимы ровно потому, что соответствующие L оказываются линейно независимыми. Таким образом, теорема доказана $\Box$.

В завершение этого раздела сделаем несколько алгебраических замечаний, касающихся свойств полученных функций. Рассмотрим алгебру, порожденную f_{ij}. В силу 5.2 она совпадает с $\mathcal{F}_a^c$. Во-первых, легко видеть, что при выборе другого базиса в кольце инвариантов алгебра, порожденная новым набором, будет совпадать с данной. Этот факт вытекает из свободной порожденности кольца инвариантов $\mathfrak{g}$. Оказывается данная алгебра обладает некоторыми замечательными свойствами.

Теорема 5.5 *Пусть a — субрегулярный полупростой элемент простой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathcal{F}_a^c$ — алгебра порожденная f_{ij}.*

1) $\mathcal{F}_a^c$ свободно порождена и алгебраически замкнута как подкольцо в кольце от элементов $\mathfrak{g}$.

2) Подалгебра $\mathcal{F}_a$, построенная обобщенным методом сдвига аргумента, совпадает с $\mathcal{F}_a^c$

Доказательство. Из рассуждений перед теоремой 5.4 получаем, что одна из линейных функций выражается через остальные с постоянными коэффициентами. Так как в точке общего положения размерность пространства дифференциалов этой алгебры равна $N-1$, то получаем, что эта алгебра свободно порождена и в качестве свободных порождающих можно взять набор f_{ij} без f_{11}.

В работе Тарасова А.А.[39] использовалась следующая лемма, которой мы сейчас воспользуемся

Лемма 5.14 *Пусть A — целостное кольцо, допускающее разложение вида $A = B \oplus I$, где B — подкольцо, а I — идеал. Тогда B алгебраически замкнуто в A.*

Заметим, что при доказательстве теоремы 5.4 мы показали, что ограничение $\mathcal{F}_a^c$ на T дает все функции на этом пространстве. Таким образом кольцо полиномов $P(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}_a^c \oplus I(T)$, где $I(T)$ — идеал, задающий T. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Теперь рассмотрим функцию f из $\mathcal{F}_a$, входящую в некоторую бесконечную бигамильтонову цепочку. В окрестности точки общего положения $\mathrm{d}f$ выражается через $\mathrm{d}f_{ij}$. Отсюда,в этой окрестности

$$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f_{10} \wedge \ldots \wedge f_{nd_n} = 0.$$

Так как коэффициенты этой формы полиномы, то получаем, что равенство нулю выполняется на всей алгебре $\mathfrak{g}$. Отсюда получаем 3.3, что f и $\tilde{\Phi}_a$ алгебраически зависимы. В силу доказанной замкнутости $\mathcal{F}_a^c$ получаем, что $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_a^c$. Обратное включение очевидно. $\square$

5.5 Бифуркационная диаграмма Σ и дискриминант спектральной кривой D для представления минимальной размерности алгебр $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2

Всюду в рамках данного раздела считаем, что в кольце инвариантов алгебр $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2 зафиксированы порождающие $I_1, \ldots, I_n$ описанный в разделе 2.4, причем этом $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. Из этого вытекает, что I_1 — инвариант максимальной степени, то есть в случае $sl(n+1), sp(2n), g_2$ — определитель $\det X$ в представлении минимальной размерности и коэффициент при μ для $so(2n+1)$. При записи функций, полученных методом сдвига аргумента, будем пользоваться обозначениями из раздела 5.1.

Пусть a — регулярный (не обязательно полупростой) элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим разложение I_i в ряд (в данном случае речь идет о классическом методе сдвига аргумента, то есть о порождающих $\mathcal{F}_a^c$)

$$I_i(x+\lambda a) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x,a).$$

Теорема 5.6 *$\mathfrak{g}$ обозначает одну из четырех изучаемых алгебр: $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2. Пусть ρ — представление $\mathfrak{g}$ минимальной размерности, элемент $a \in \mathfrak{g}$ — регулярный (необязательно полупростой), в кольце инвариантов $\mathfrak{g}$ фиксированы порождающие $I_1, ..., I_n$ - некоторые непостоянные коэффициенты характеристического многочлена представления минимальной размерности, функция порядка $k(i,j)$ произвольна. Пусть D_z — дискриминант спектральной кривой $R_z(\lambda,\mu) = 0$, определенной по этим параметрам. Тогда для замыкания бифуркационной диаграммы $\bar{\Sigma}$ отображения момента F_a, также построенного по эти параметрам, выполнено включение:*

$$D_z \subseteq \bar{\Sigma}$$

Доказательство. Пусть $z \in D_z$ такой, что кривая $R_z(\lambda,\mu) = 0$ имеет особенность в точке λ_0, μ_0.

Лемма 5.15 *Для любого действительного $\epsilon > 0$ найдется такой $x_0 \in \mathfrak{g}$ — субрегулярный полупростой элемент , что для него выполнены свойства:*

1) $\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=0}^{d_i-1} \lambda_0^j z_{k(i,j)} + I_i(a)\lambda_0^{d_i} - I_i(x_0)| < \epsilon$

2) μ_0 для матрицы X_0 является собственным значением кратности как минимум два.

Доказательство. Доказывать это утверждение будем для каждой алгебры отдельно.

Алгебра $sl(n+1)$. Рассмотрим $R_z(\lambda,\mu) = 0$. Определим

$$X_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & -\mu_0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

где на неотмеченных местах стоят попарно различные числа, отличные от μ_0, и достаточно близкие к корням $R_z(\lambda_0,\mu) = 0$.

Легко видеть, что $\alpha_1(x_0) = 0$, а остальные корни данном элементе в ноль не обращаются (то есть это действительно субрегулярный элемент).

Алгебра $sp(2n)$**.** Здесь возможны два случая. Первый, когда μ_0 отлично от нуля. Тогда

$$X_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & & & & & \\ & \mu_0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\mu_0 & & \\ & & & & -\mu_0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где на неотмеченных местах снова стоят различные собственные значения, близкие к корням $R_z(\lambda_0, \mu)$. Для данного элемента только только $\alpha_1(x_0) = 0$.

Теперь, если $\mu_0 = 0$, то, рассуждая аналогично предыдущему случаю, в качестве X_0 можно взять

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такого элемента $\alpha_n(x_0) = 0$ и $\mathrm{corank} X_0 = 2$

Алгебра $so(2n+1)$**.** Если $\mu_0 \neq 0$, рассуждаем аналогично первому случаю для $sp(2n)$. Если μ_0, то в качестве X_0 можно взять

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

На соответствующем x_0 в ноль обращается α_n.

Алгебра g_2. Если не все корни $R_z(\lambda_0, \mu) = 0$ равны нулю, то в качестве X_0 можно взять матрицу, у которой на диагонали стоят корни данного многочлена. Если все корни $R_z(\lambda_0, \mu) = 0$ равны нулю, то в качестве X_0 можно взять:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

где $c \neq 0, b = -2c$ и оба числа достаточно малы по модулю, чтобы обеспечить выполнение первого условия теоремы. Для данного элемента $\alpha_2(x_0) = 0$. ■

Рассмотрим теперь описанный в разделе 5.4 коммутативный набор Φ_{x_0}, получающийся сдвигом на x_0, то есть

$$I_i(x_0 + \lambda y) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x_0, y)$$

Лемма 5.16 *В полученном наборе Φ_{x_0} функция $f_{11}(x_0, y)$ линейно выражается через $f_{i1}(x_0, y), i > 1$ с постоянными коэффициентами, зависящими только от x_0.*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{(0,\mu_0)}\det(X_0 + \lambda Y - \mu E).$$

Из леммы 5.15 $\mathrm{corank}(X - \mu_0 E) \geq 2$, а записанное выше выражение представляет собой линейную комбинацию миноров коразмерности 1. Поэтому в независимости от Y данное выражение обращается в ноль.

Для алгебр $sl(n+1), sp(2n), g_2$ в левой части этого неравенства $f_{11}(x_0, y) =< \mathrm{d}I_1(x_0), y >$ входит с постоянным коэффициентом, так как $I_1 = \det X$. Поэтому данная функция выражается явно. Например, для $sl(n+1)$ это выражение имеет вид:

$$-f_{n1}(x_0, y)\mu_0^{n-1} - ... - f_{21}(x_0, y)\mu_0 = f_{11}(x_0, y)$$

Для алгебры $so(2n+1)$ в левую часть $f_{11}(x_0, y)$ входит с коэффициентом μ_0. Когда $\mu_0 \neq 0$, то выражение можно поделить на μ_0 и выразить

$f_{11}(x_0, y)$ аналогично предыдущему случаю. Полученная формула остается верна и в случае $\mu_0 = 0$ — в этом случае 0 имеет кратность три и $f_{11}(x_0, y) = 0$, что и получится, если ноль подставить в формулу. ■

Благодаря доказанной лемме, мы теперь можем применять разработанный в разделе 5.4 аппарат.

Лемма 5.17 *Найдется такой субрегулярный $x_1 \in \mathfrak{g}$, что для него выполняются следующие свойства:*

1) Для $i \geq 1, j \geq 1$ и $(i,j) \neq (1,1)$ выполнены равенства

$$f_{ij}(x_1, a) = z_{k(i,j)}$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\sum\limits_{j=0}^{d_i-1} \lambda_0^j z_{k(i,j)} + I_i(a)\lambda_0^{d_i} - I_i(x_0)| < \epsilon$

3) μ_0 является для X_1 собственным значением кратности как минимум два

Доказательство. Из леммы 5.16 получаем, что из набора Φ_{x_0} можно выкинуть f_{11}, а для полученного набора определить F_{x_0} из раздела 5.4. Рассмотрим следующую систему из $N-1$ уравнения относительно y:

$$f_{ij}(x_0, y) = z_{k(i,j)}, \text{при } i \geq 1, j \geq 1 \text{ и } (i,j) \neq (1,1)$$
$$f_{id_i}(x_0, y) = I_i(a).$$

Теорема 5.4 утверждает, что подобная система разрешима для любых констант, стоящих справа. Следовательно, такой y существует.

Заметим, что, $f_{id_i}(x_0, y) = I_i(y)$. Из регулярности a и выполнения равенств $I_i(y) = I_i(a)$ получаем, что найдется такой $g \in G$, что $\mathrm{Ad}_g y = a$. Из леммы 5.1 получаем, что $f_{ij}(x_0, y) = f_{ij}(\mathrm{Ad}_g x_0, a)$. Положим $\mathrm{Ad}_g x_0 = x_1$.

Субрегулярность x_1 и выполнение первого условия леммы в этом случае следуют из построения данного элемента. Второе и третье свойства вытекают из свойств x_0 в лемме 5.15. ■

Лемма 5.18 *Для x_1 выполняется равенство $f_{11}(x_1, a) = z_{k(1,1)}$.*

Доказательство. Рассмотрим третье уравнение системы 26

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}|_{(\lambda_0,\mu_0)} R_z(\lambda, \mu) = 0.$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 5.16, из данного уравнения получаем, что $z_{k(1,1)}$ выражается как линейная комбинация $z_{k(i,j)}, j > 0$, $I_i(a)$ и их степеней (случай g_2), взятых с коэффициентами, зависящими от λ_0, μ_0. Легко видеть, что аналогичным образом из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{(\lambda_0,\mu_0)}R(\lambda,\mu) = 0$$

в точке x_1 выражается f_{11}. Так как по построению $f_{ij} = z_{k(i,j)}$ и формулы совпадают, получаем требуемое. ■

Положим теперь $x_2 = x_1 - \lambda_0 a$. Мы показали, что в любой окрестности любой точки $z \in D_z$ найдется такой $z' = F_a(x_2)$, что прямая $x_2 + \lambda a$ содержит сингулярный элемент (в данном случае это $x_1 = x_2 + \lambda_0 a$). Отсюда по критерию Болсинова 2.4 получаем, что $\mathrm{d}F_a$ в точке x_2 имеет ранг меньший N и $z' \in \Sigma$. Таким образом $\bar{\Sigma}$ содержит D_z и теорема доказана. □

Следующая теорема - основной результат данного раздела.

Теорема 5.7 $\mathfrak{g}$ *обозначает одну из четырех изучаемых алгебр:* $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ *и* g_2. *Пусть* ρ *— представление* $\mathfrak{g}$ *минимальной размерности, элемент* $a \in \mathfrak{g}$ *— регулярный (необязательно полупростой), в кольце инвариантов* $\mathfrak{g}$ *фиксированы порождающие* $I_1, ..., I_n$ *- некоторые непостоянные коэффициенты характеристического многочлена представления минимальной размерности, функция порядка* $k(i,j)$ *произвольна. Пусть* D_z *— дискриминант спектральной кривой* $R_z(\lambda,\mu) = 0$*, определенной по этим параметрам. Тогда для замыкания бифуркационной диаграммы* $\bar{\Sigma}$ *отображения момента* F_a*, также построенного по эти параметрам, выполнено:*

$$D_z = \bar{\Sigma}$$

Доказательство. Из теоремы 5.6 вытекает включение $D_z \subseteq \bar{\Sigma}$. По теореме 5.1 получаем включение $\Sigma \subseteq D_z$. По теореме 5.2 множество D_z — алгебраическое и замкнутое, то есть $\bar{\Sigma} \subseteq D_z$. Теорема доказана. □

Замечание 5.7 Легко видеть, что в случае алгебр $sl(n+1), so(2n+1), sp(2n)$ и g_2 дискриминант D_z обладает замечательным свойством - он является минимальным алгебраическим множеством, содержащим бифуркационную диаграмму отображения момента.

5.6 Спектральная кривая $so(2n)$ в представлении минимальной размерности

Рассмотрим алгебру $so(2n)$ в представлении минимальной размерности. Зафиксируем инварианты $I_1, ..., I_n$, описанные в разделе 2.4 и регулярный a. Построим с его помощью коммутативный набор Φ_a и зададим отображение момента.

В случае, когда речь идет об алгебре $so(2n)$ рассуждения в доказательстве теоремы 5.6 не проходят. Дело в том, что уже на первом этапе (то есть в лемме 5.15) можно получить диагональную матрицу X_0, у которой нулевое собственное значение имеет кратность два (то есть у спектральной кривой особенность в точке $0, 0$), а остальные - один. Данная матрица в представлении минимальной размерности задает регулярный элемент, поэтому никакого вырождения отображения момента в этой точке может и не быть. Оказывается, для почти всех регулярных a включение из условия теоремы 5.6 неверно.

Теорема 5.8 *Пусть a — регулярный элемент и $I_1(a) \neq 0$. Тогда дискриминант D_z спектрально кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^N$.*

Доказательство. Отметим сначала, что множество таких элементов непусто. Действительно, возьмем диагональную матрицу A из представления минимальной размерности $so(2n)$ (см. раздел 2.4), элементы на диагонали которой различны и отличны от нуля. Для такого элемента пфаффиан $Pf(A) = I_1(a)$ не равен нулю.

Теперь рассмотрим спектральную кривую $R_z(\lambda, \mu) = 0$ в точке z (радел 5.3):

$$\mu^{2n} + \big(I_n(a)\lambda^2 + z_{k(1,1)\lambda + z_{k(1,0)}}\big)\mu^{2n-2} + ... + \big(I_1(a)\lambda^n + ... + z_{k(n,0)}\big)^2.$$

Пусть λ_0 — корень уравнения $I_1(a)\lambda^n + ... + z_{k(n,0)} = 0$ в точке z. Заметим, что $R_z(\lambda_0, 0) = 0$. Кроме этого ноль имеет в этом уравнении кратность два, поэтому $\frac{\partial}{\partial \mu} R_z(\lambda, \mu) = 0$ в точке $0, \lambda_0$.

Рассмотрим $\frac{\partial}{\partial \lambda} R_z(\lambda, \mu) = 0$. Легко видеть, что свободный член этого многочлена имеет вид

$$2\big(nI_1(a)\lambda^{n-1} + ... + z_{k(n,1)}\big)\big(I_1(a)\lambda^n + ... + z_{k(n,0)}\big),$$

то есть при $\lambda = \lambda_0$ он также обращается в ноль. Отсюда получаем, что кривая $R_z(\lambda, \mu) = 0$ имеет в точке λ_0, μ — особенность. $\square$

В диссертации Ю.А. Браилова предлагалось модифицировать уравнение спектральной кривой для $so(2n)$. В частности предлагалось рассмотреть:

$$R'_z(\lambda, \mu) = R_z(\lambda, \sqrt{\mu}) = 0$$

В правой части стоит полином, так как μ входит в выражение для спектральной кривой только в четных степенях. Для подобной исправленной кривой приведенное выше доказательство теоремы уже не работает, так как $\mu = 0$ — корень уравнения $R'_z(\lambda, \mu) = 0$ может не быть корнем $\frac{\partial}{\partial \mu} R'_z(\lambda, \mu) = 0$. Более того, чуть ниже, в примере для $so(4)$ будет показано, что D'_z — множество точек $\mathbb{C}^N$, для которых кривая $R'_z(\lambda, \mu) = 0$ имеет особенность, — не совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^N$, то есть предыдущая теорема, вообще говоря, не верна для D'_z. При этом, однако, все равно выполнено строгое включение.

Теорема 5.9 *Пусть D'_z — дискриминант спектральной кривой $R'_z(\lambda, \mu) = 0$, получающейся из спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$ подстановкой вместо μ корня $\sqrt{\mu}$. Тогда для бифуркационной диаграммы Σ отображения момента F_a для почти всех регулярных a выполнено строгое включение:*

$$\Sigma \subset D'_z \cap \operatorname{Im} F_a.$$

Доказательство. Рассмотрим главный нильпотентный элемент e в $so(2n)$. Нам известно, что для простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $\operatorname{codimSing}\mathfrak{g} = 3$, откуда для почти всех регулярных a плоскость $e + \lambda a$ не содержит сингулярных элементов. Считаем далее далее, что a — именно такой.

Рассмотрим множество $M_0 \subset \mathfrak{g}$, задаваемое уравнениями $I_i(y) = 0$. Известно, что это объединение всех нильпотентных орбит (в простой комплексной алгебре Ли таких орбит конечное число, см., например, [41]), среди которые имеется ровно одна регулярная - O_e. Легко видеть, что образ M_0 лежит в плоскости P, задаваемой в $\mathbb{C}^N$ уравнениями $z_{k(i,0)} = 0, 1 \geq i \geq n$. Доказательство теоремы вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 5.19 *В плоскости P есть регулярные значения отображения момента, то есть не принадлежащие Σ.*

Доказательство. Заметим сначала, что на нильпотентных орбитах за исключением O_e дифференциалы $\mathrm{d}f_{ij}$ всюду зависимы. По лемме Сарда [13] их образы будут иметь в плоскости P меру нуль. Теперь рассмотрим образ O_e. Элемент a выбран таким образом, что для почти всех точек на этой орбите дифференциалы $\mathrm{d}f_{ij}$ независимы и порождают изотропное пространство размерности N.

Пусть y — такая точка. Косые градиенты $\mathrm{sgrad}\, f_{ij}$ в точке y образуют максимальное изотропное пространство относительно симплектической структуры на O_e. Из этого получаем, что проекции дифференциалов $\mathrm{d}f_{ij}$ на $T_y^*O_e$ вдоль пространства, порожденного $\mathrm{d}I_i$ в точке y (образ $\mathrm{d}f_{ij}$ при такой проекции - совпадает с дифференциалом ограничения), порождают пространство размерности $N-n$, что совпадает с $\dim P$.

В окрестности y, таким образом, ограничение $F_a|_{M_0}$ задает отображение на целую окрестность в P, то есть образ O_e имеет в P меру, отличную от нуля. По лемме Сарда почти все точки в образе — регулярные значения. Выберем такое значение $z \in P$, чтобы оно было регулярным для $F_a|_{M_0}$ и не попадало в образы других нильпотентных орбит (которые, как уже говорилось выше, имеют меру ноль). Прообраз этой точки лежит целиком в O_e и совпадает с прообразом $F_a^{-1}(z)$. При этом ограничения дифференциалов (а следовательно и косые градиенты) $f_{ij}, j \geq 1$ независимы. Учитывая, что $\mathrm{d}I_i$ в точке e также независимы [38], получаем, что $\mathrm{rk}\, \mathrm{d}F_a$ во всех точках прообраза $F_a^{-1}(z)$ максимален, то есть z — регулярное значение для отображения момент и, следовательно, не принадлежит Σ. ■

Лемма 5.20 *Плоскость P лежит в D'_z.*

Доказательство. Покажем, что для любого $z \in P$ кривая $R_z(\lambda, \mu) = 0$ имеет особую точку вида $(0,0)$. При $\lambda = 0$ первые два уравнения системы 26 имеют вид $\mu^{2n} = 0$ и $2n\mu^{2n-1} = 0$ соответственно. Кроме этого, свободный член в третьем уравнении имеет вид $2z_{k(1,0)}z_{k(1,1)}$ поэтому на P он равен нулю,а значит $\mu = 0$ является корнем сразу всех трех уравнений, то есть $0, 0$ — особая точка. ■.

Теорема доказана. □

Замечание 5.8 Легко видеть, что данное включение вовсе не гарантирует, что $\bar{\Sigma} \subset D'_z$. При этом, однако, данная теорема позволяет утверждать, что гипотеза, сформулированная в работе [3], которая говорит, что $\Sigma = D'_z$, для подправленного спектральной кривой на $so(2n)$, неверна.

В заключение этого раздела разберем строение бифуркационной диаграммы Σ и дискриминанта D'_z "подправленной"спектральной кривой для $so(4)$. Считаем, что для нее фиксировано представление минимальной размерности, в котором матрицы соответствующих операторов имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & b \\ a_3 & a_4 & -b & 0 \\ 0 & c & -a_1 & -a_3 \\ -c & 0 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix}.$$

Инварианты в этом случае имеют вид:

$$\begin{array}{l} I_1 = a_1^2 + a_4^2 + 2a_2a_3 - 2bc, \\ I_2 = a_2a_3 + bc - a_1a_4. \end{array}$$

Рассмотрим $a \in \mathfrak{h}$ — регулярный элемент, для которого $a_1 = p_1$ и $a_4 = p_4$. Тогда коммутативный набор Φ_a, полученный методом сдвига аргумента на этот элемент имеет вид:

$$\begin{array}{l} f_{10} = a_1^2 + a_4^2 + 2a_2a_3 - 2bc, \\ f_{11} = 2p_1a_1 + 2p_4a_4, \\ f_{20} = a_2a_3 + bc - a_1a_4, \\ f_{21} = -p_4a_1 - p_1a_4. \end{array}$$

Упорядочим набор следующим образом $k(1,0) = 2$, $k(1,1) = 1$, $k(2,0) = 3$ и $k(2,1) = 4$.

Лемма 5.21 *Определим $a_1(z_1, z_4), a_2(z_1, z_4)$ по следующим формулам:*

$$\begin{array}{l} a_1(z_1, z_4) = -\frac{p_1}{2p_4^2 - 2p_1^2} z_1 + \frac{p_4}{2p_4^2 - 2p_1^2} z_2, \\ a_1(z_1, z_4) = -\frac{p_4}{p_4^2 - p_1^2} z_1 - \frac{p_1}{p_4^2 - p_1^2} z_2. \end{array}$$

Тогда бифуркационная диаграмма задается Σ задается уравнением:

$$\big(z_2 + 2z_3 - (a_1 - a_4)^2\big)\big(z_2 - 2z_3 - (a_1 + a_4)^2\big) = 0. \tag{32}$$

В частности, она замкнута.

Доказательство. Опишем сначала множество сингулярных элементов $so(4)$. Так как $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ и множество сингулярных элементов в $so(3) = sl(2)$ состоит из одной точки, то $\mathrm{Sing}\, so(4)$ — это элементы вида $(0, x)$ и $(y, 0)$ - то есть две трехмерные плоскости. Из описания системы корней для $so(2n)$ в разделе 2.4 получаем что в представлении минимальной размерности они имеют вид: $b = c = 0, a_1 + a_4 = 0$ и $a_3 = a_2 = 0, a_1 - a_4 = 0$ и соответствуют $so(3) = sl(2)$, натянутым на $e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}, h_{\alpha_1}$ и $e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}, h_{\alpha_2}$ соответственно.

Из критерия Болсинова 2.4 получаем, что множество точек, где вырождается отображение момента - это цилиндр над множеством сингулярных элементов с образующей a. Заметим $\alpha_1(a) \neq 0$ и $\alpha_2(a) \neq 0$. Отсюда получаем, что h_{α_i}, a — порождают всю картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ и этот цилиндр задается уравнениями:

$$P_1 : b = c = 0$$
$$P_2 : a_3 = a_2 = 0$$

В силу того, что p_1, p_4 одновременно не равны нулю, легко видеть, что a_1, a_4 выражаются через z_1, z_4 из уравнений $z_1 = f_{11}, z_4 = f_{21}$. Заметим, что определенные в условии леммы $a_1(z_1, z_4), a_4(z_1, z_4)$ — это в точности решения этой системы системы. Подставляя в описанное уравнение формулы для $z_2 = f_{10}, z_3 = f_{20}$ при $b = c = 0$ и $a_3 = a_2 = 0$ получим, что Σ лежит в множестве M, задаваемом системой уравнений (32), то есть $\Sigma \subseteq M$.

Покажем, что выполнено обратное включение. Подставив $z_2 = f_{10}, z_3 = f_{20}$ в уравнение $z_2 + 2z_3 - (a_1 - a_4)^2 = 0$, получаем, что оно выполняется тогда и только тогда, когда $a_2 a_3 = 0$. Без ограничения общности пусть $x \in so(2n)$ удовлетворяет этому условию. Легко видеть, что в точке x' у которой $a_2 = a_3 = 0$, а все остальные координаты совпадают с координатами x, значения интегралов f_{ij} совпадают со значениями интегралов в точке x. При этом x' — точка падения ранга отображения момента, так как лежит в P_2. Аналогичным образом рассуждения проводятся для второго уравнения. Лемма доказана. $\square$

Учитывая теорему 5.9, а также данную лемму, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.10 *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента F_a, задаваемого коммутативным набором Φ_a для регулярного полупростого a на $so(4)$ является алгебраическим множеством, в частности $\bar{Sigma} = \Sigma$. При этом для дискриминанта D'_z выполнено строгое включение $\Sigma \subset D'_z$.*

В завершение раздела получим явную формулу для дискриминанта D'_z. Обозначим $I_1(a) = c_1, I_2(a) = c_2$. Спектральная кривая на $\mathbb{C}^4$ имеет

вид:
$$\mu^2 + (z_3 + \lambda z_4 + c_2\lambda^2)\mu + (z_2 + \lambda z_1 + c_1\lambda^2)^2 = 0.$$
Обозначим коэффициент при μ через $p(\lambda)$, а выражение под знаком возведения в квадрат в свободном члене - через $q(\lambda)$. Теперь рассмотрим $\mathrm{Res}_\mu(R_z(\lambda,\mu), \frac{\partial}{\partial\mu}R_z(\lambda,\mu)) = p^2 - 4q^2$ — хорошо известная формула для дискриминанта квадратичного многочлена от одной переменной. В свою очередь в качестве второго уравнения возьмем $\mathrm{Res}_\mu(\frac{\partial}{\partial\lambda}R_z(\lambda,\mu), \frac{\partial}{\partial\mu}R_z(\lambda,\mu)) = 4q'q - p'p$, где производная берется по λ. Заметим, что это в точности $-\frac{1}{2}(p^2-4q^2)'$. Таким образом D'_z задается одним уравнением - равенством нулю дискриминанта $p^2 - 4q^2 = (p-2q)(p+2q)$.

Заметим, что наличие кратного корня равносильно тому, что либо $p\pm 2q$ имеют кратные корни, либо у них есть общий корень, что равносильно тому, что общий корень есть у p, q, то есть равен нулю их результант. Без ограничения общности считаем, что $c_1 \neq 0$. Тогда уравнение спектральной кривой с точностью до умножения на ненулевую константу имеет вид:
$$\begin{aligned}0 = &\big((z_4 - 2z_1)^2 - 4(c_2 - 2c_1)(z_3 - 2z_2)\big)\times\\ &\times\big((z_4 + 2z_1)^2 - 4(c_2 + 2c_1)(z_3 + 2z_2)\big)\times\\ &\times\big(c_1(c_2z_2 - c_1z_3)^2 + z_1(c_2z_2 - c_1z_3)(c_1z_4 - c_2z_1) + z_2(c_1z_4 - c_2z_1)^2\big)\end{aligned} \tag{33}$$

Список литературы

[1] M. Audin Spinning Tops: A Course Of Integrable Systems. // Cambridge University Press, 150 стр. (1999)

[2] Браилов Ю. А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли.// Математический сборник РАН, т 194, №11, стр. 2-16 (2003)

[3] Brailov A.V., Complete integrability with noncommuting integrals of certain euler equations // Lecture Notes in Mathematics, Volume 1214, 1986

[4] Yu. A. Brailov, A. T. Fomenko. Lie groups and integrable Hamiltonian systems. // Recent Advances in Lie Theory, pp.45-76. Edited by Ignacio Bajo and Esperanza Sanmartin. Series: Research and Exposition in Mathematics. №25. Edited by Karl H.Hofmann and Rudolf Wille (2002)

[5] Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Изв. АН СССР. Сер. матем., 55 (1991), вып. 1, 68–92.

[6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы // Ижевск, 2 тома, 1999.

[7] Болсинов А. В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко - Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 2005, вып. 26, М.: МГУ стр. 87-109

[8] Bolsinov A.V., Oshemkov A. A., Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems // Regular and Chaotic Dynamics, Volume 14, Numbers 4-5, 2009

[9] Bolsinov A.V., Kiosak V., Matveev V.S., A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics // Journal of the London Mathematical Society, vol 80. 2009, pp. 341-356

[10] Болсинов А. В., Зуев К. М. Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента // Матем. заметки 2009,т. 86 номер 1, стр. 3–13

[11] Винберг Э.Б., Онищик А.Л., Семинар по группам Ли и алгебраическим группам // Москва, 1988, 344 стр.

[12] Винберг Э. Б. , О некоторых подалгебрах универсальной обёртывающей алгебры. // Изв. АН СССР Сер. Мат., 54. №1 М. 1990, стр. 3-25

[13] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения // 2-е изд. М.: Наука, 1986.

[14] Dubrovin B., Bihamiltonian structures and Frobenius manifolds, Lecture Course Notes, Summer School and Conference on Poisson Geometry, ICTP, Trieste, 04-22 July 2005

[15] Джекобсон Н. Алгебры Ли // Москва: Издательство "Мир", 355 стр. (1964)

[16] Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анализ и его приложения, 10(1976), вып. 4, 93–94.

[17] Мещеряков М.В., О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела // УМН, 38(1983), вып. 5 (233), 201–202.

[18] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Известия АН СССР, 42(1978), вып. 2, 396–415.

[19] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.; изд-во МГУ, 1979, вып.19, с. 3–94.

[20] Прасолов В. В., Многочлены // 2-е изд. М.: МЦНМО, 336 стр. (2001).

[21] Рыбников Л. Г., Метод сдвига инвариантов и модель Годена // Функц. анализ и его прил., 2006, т.40, номер 3б стр. 30–43

[22] Трофимов В. В. Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений // М.: Факториал, 1995

[23] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах// Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.; изд-во МГУ, 1983, вып. 21, 23–83.

[24] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. // М.: Издательство МГУ, 1988, 414 с.

[25] Фоменко А. Т., Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы // Ижевск: Ижевская республиканская типография, 252 стр.(1999)

[26] Хамфрис Дж., Введение в теорию алгебр Ли и их представлений //Москва: МЦНМО, (2003)

[27] Kurtzke Jr. J. F., Centralizers Of Irregular Elements In Reductive Algebraic Groups // Pacific Journal Of Mathematics, vol. 104, №1 (1983) стр. 133-154

[28] Patera J., Sharp, R. T., Winternitz, P., Zassenhaus, H. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Mathematical Phys. 17 (1976), no. 6, 986–994.

[29] Короткевич А. А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Мат. сборник, 200:12 (2009), 3–40.

[30] Gelfand I.M., Zakharevich I., Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures // Selecta Mathematica, New Series, Vol. 6, №2, 2000.

[31] Zakharevich I., Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation // Transformation Groups, Volume 6, Number 3, 2001, pp. 267-300

[32] Turiel F.J., Classification Locale Simultane de Deux Formes Symplectiques Compatibles // manuscripta math. 82, 349 - 362 (1994)

[33] Элашвили А.Г., Фробениусовы алгебры Ли // Функц. анализ и его приложения, 16 (1982), вып. 4, 94–95

[34] Elashvili A. G. , Kac V. G., Classification of Good Gradings on Simple Lie Algebras. Vinberg, Ernest (ed.), // Lie groups and invariant theory. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Translations. Series 2. American Mathematical Society 213. Advances in the Mathematical Sciences 56, 85-104 (2005)

[35] Диксмье Ж.// Универсальные обертывающие алгебры, М. 1978, 409 стр.

[36] Зотов А.В., Классические интегрируемые системы и из теоретико-полевые обобщения // Физика элементарных частиц и атомного ядра, т.37 вып.3, 2006 г.

[37] Шувалов В. В., О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли // Функциональный анализ и его приложения 2002, т. 36, вып. 4, с. 55–64

[38] B. Kostant Lie Group Representations On Polynomial Rings // American Journal of Mathematics, Vol. 85, №3 (1963), pp. 327-404, http://www.jstor.org/pss/2373130.

[39] Тарасов А. А. Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли. // Успехи Мат. Наук, том 57, выпуск 5, стр. 165 - 166 (2002)

[40] Panyushev D., Premet A., Yakimova O., On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras // Journal of Algebra, 313 (2007), 343-391 (math.RT/0610049).

[41] Panyushev D., The index of a Lie algebra, the centraliser of a nilpotent element, and the normaliser of the centraliser // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 134 (2003), 41-59