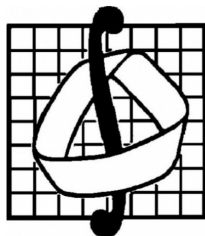


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Кивкало Владислав Александрович

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ СИСТЕМЫ
КОВАЛЕВСКОЙ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН Фоменко
Анатолий Тимофеевич

Москва–2021 г.

Оглавление

Введение	4
1 Необходимые определения, обозначения и история вопроса	38
1.1 Интегрируемые системы и топологическая классификация их слоений Лиувилля	38
1.1.1 Симплектические и пуассоновы многообразия	38
1.1.1.1 Симплектическое многообразие и гамильтоново поле на нем	38
1.1.1.2 Пуассоновы многообразия и их симплектические листы	39
1.1.1.3 Скобка Ли–Пуассона	41
1.1.1.4 Пучок алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$	41
1.1.2 Интегрируемые системы в симплектическом и пуассоновом случаях	43
1.1.2.1 Гамильтонова система и ее изоэнергетические поверхности	43
1.1.2.2 Вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система	44
1.1.2.3 Слоение Лиувилля ИГС и теорема Лиувилля	45
1.1.2.4 Интегрируемые системы на коалгебрах Ли и ИГС	46
1.1.3 Невырожденность критических точек ИГС	47
1.1.3.1 Случай одной степени свободы. Точки Морса. 2-атомы	47
1.1.3.2 Невырожденные критические точки ранга 1	49
1.1.3.3 Невырожденные критические точки ранга 0	51
1.1.3.4 Особые слои ИГС на M^4 и их окрестности в неособых Q_h^3 — 3-атомы	52
1.1.4 Эквивалентности ИГС на Q_h^3 и инварианты их слоений Лиувилля	55
1.1.4.1 Лиувиллева и грубая лиувиллева эквивалентности ИГС на Q^3	56
1.1.4.2 Инвариант Фоменко (молекула) и Фоменко–Цишанга (меченая молекула) ИГС на инвариантных 3-поверхностях	56
1.1.4.3 Влияние ориентаций на метки инварианта	58
1.1.5 Описание слоений Лиувилля на M^4	58
1.1.5.1 Невырожденные полулокальные особенности ранга 0	59
1.1.5.2 Вырожденные особенности ранга 1	61
1.1.5.3 Допустимые базисы и правила их выбора	63
1.2 Система Ковалевской в механике твердого тела	65

1.2.1	Описание системы Ковалевской и история вопроса	65
1.2.1.1	Волчок или тяжелое твердое тело с закрепленной точкой	66
1.2.1.2	Уравнения движения волчка и случай Ковалевской	67
1.2.1.3	Физическая реализация системы Ковалевской	68
1.2.1.4	Редукция системы по циклической переменной φ	69
1.2.2	Топология слоений Лиувилля классической системы Ковалевской	70
1.2.2.1	Исследования фазовой топологии системы Ковалевской	71
1.2.2.2	Лиувиллев анализ системы Ковалевской	73
1.3	Аналоги системы Ковалевской на пучке алгебр Ли	76
1.3.1	Бифуркационные кривые семейства систем Ковалевской	77
1.3.2	Критические точки и их невырожденность для аналогов системы Ковалевской на пучке $so(3, 1) - e(3) - so(4)$	78
1.3.2.1	Уравнения семейств критических точек	78
1.3.2.2	Образы на $\Sigma^{a,b}$ вышеназванных семейств критических точек	78
1.3.2.3	Вырожденность и невырожденность критических точек ранга 1	79
1.3.2.4	Критические точки ранга 0 и формулы их спектров в зависимости от $\varkappa \in \mathbb{R}$	81
1.3.3	Система Ковалевской на алгебре $so(4)$: результаты И.К. Козлова	82
1.3.3.1	Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской на алгебре $so(4)$	82
1.3.3.2	Предельный переход по параметру пучка	84
1.3.4	Система Ковалевской на $so(3, 1)$ и волчок Ковалевской–Соколова на $e(3)$	86
1.3.4.1	Пуассоновы отображения (морфизмы)	86
1.3.4.2	Параметрическая система Ковалевской–Соколова на алгебре $e(3)$ и ее предельные случаи	88
1.3.4.3	Интегрируемый случай Соколова	92
1.3.5	Псевдо-евклидовый аналог для семейства систем Ковалевской, заданного на $so(3, 1) - e(3) - so(4)$	99
2	Лиувиллев анализ аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$	101
2.1	Лиувиллев анализ компактного случая Ковалевской	101
2.1.1	Формулировки основных теорем	101
2.1.2	Выбор допустимых базисов	102
2.1.2.1	Утверждение об особенностях типа центр-центр	102
2.1.2.2	Допустимые базисы для дуг $\Sigma^{a,b}$ для случая $\varkappa > 0$	105
2.1.3	Классы слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$	106
2.1.4	Стратификация пространства параметров системы: двумерные и трехмерные страты	108
2.1.4.1	Трехмерные камеры неособых троек (a, b, h)	108

2.1.4.2	Граф соседства трехмерных камер и двумерные грани	110
2.1.5	Связь с классическим случаем Ковалевской	112
2.1.6	Устройство разделяющего множества	114
2.1.6.1	Поверхности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ и особые точки $\Sigma^{a,b}$	114
2.1.6.2	Равенство абсцисс особых точек первой серии	115
2.1.6.3	Равенство абсцисс особых точек из разных серий	116
2.1.6.4	Дуги кривых, входящие в разделяющее множество	117
2.1.6.5	Точки пересечения разделяющих кривых	118
2.1.7	Стратификация пространства параметров: одномерные ребра и вершины .	119
2.2	Доказательства	121
2.2.1	Доказательство лемм	121
2.2.1.1	Явные формулы для поверхностей первой серии	121
2.2.1.2	Доказательство леммы 2.3 о сингулярных орбитах	121
2.2.2	Доказательство утверждения 2.1.8	122
2.2.3	Уравнения кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m в координатах (q, s)	123
2.2.4	Доказательство утверждения 2.1.9	124
2.2.5	Доказательство утверждения 2.1.10	125
2.2.6	Доказательство утверждения 2.1.11	126
2.2.7	Доказательство утверждения 2.1.12	127
3	Лиувиллев анализ аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(3, 1)$	147
3.1	Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской на $so(3, 1)$	147
3.1.1	Случай нулевой постоянной площадей ($b = 0$)	147
3.1.2	Связи с системой Ковалевской–Соколова на $e(3)$	151
3.2	Лиувиллев анализ системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$	152
4	Псевдо-евклидовый аналог семейства систем Ковалевской.	156
4.1	Параметризация совместного уровня четырех первых интегралов	157
4.2	Достаточное условие компактности слоя слоения Лиувилля	158
4.3	Критерий некомпактности совместного уровня четырех первых интегралов. . . .	159
	Список литературы	167

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

В диссертации изучается топология слоения Лиувилля нескольких интегрируемых систем, являющихся аналогами знаменитого интегрируемого случая динамики твердого тела, открытого С.В. Ковалевской [1] (мы будем называть его *классическим случаем Ковалевской*). Для двух таких систем (в случае алгебр Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$) итоговый ответ получен в терминах инварианта Фоменко–Цишанга (см. [2], [3] и более подробно [4, гл. 4, т. 1]). Эти системы образуют однопараметрическое семейство интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, открытое И.В. Комаровым [5].

В последние годы и десятилетия для многих известных интегрируемых гамильтонианов были открыты их возмущения, остающиеся интегрируемыми. Несомненно, большую роль сыграл быстрый рост возможностей вычислительной техники и развитие программных сред символьных вычислений. Например, еще в 2001 году В.В. Соколову удалось таким образом открыть новую интегрируемую систему [6] и затем обобщить данный результат [7] (см. также [8]). Многие другие результаты, вместе с тем, были получены, опираясь на алгебраические методы и конструкции (например, с использованием свойств представлений в форме Лакса и спектральных кривых [9], [10], [11] и [12]).

Для системы Ковалевской был открыт целый ряд таких обобщений: аналоги на алгебрах $so(4)$ и $so(3, 1)$ (работа И.В. Комарова [5]), добавление гиростата (система Ковалевской–Яхьи, открытая Х.М. Яхьей в работе [13]), добавление сингулярных слагаемых (см., например, работу Х.М. Яхьи [14]), волчок Ковалевской–Соколова [8]. Отметим, что также был произведен переход к изучению обобщений системы Ковалевской, являющихся нередуцируемыми системами с тремя степенями свободы: волчок Ковалевской в двух полях (А.Г. Рейман, М.А. Семенов–Тянь-Шанский [15]), обобщенный двухполевой гиростат (А.В. Цыганов, В.В. Соколов [16]).

Все эти системы устроены сложнее, чем классический случай Ковалевской, и зависят от большего количества числовых параметров. Для их исследования оказываются полезны разнообразные развитые в последние годы методы: изучается их критическое множество и бифуркационные диаграммы (подход, заложенный С. Смейлом [17]), вычисляются топологические и динамические инварианты (построенные в работах А.Т. Фоменко, его соавторов и учеников,

см. [18], [19], [2], [3], [20], [21]; более подробно см. монографию А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [4]), выделяются и анализируются критические подсистемы (работы М.П. Харламова [22] и [23], П.Е. Рябова [24] и [25], С.В. Соколова [26]). В дальнейшем мы опишем результаты применения этих подходов к системе Ковалевской, ее аналогам и обобщениям более подробно.

Изучение многопараметрических систем с точки зрения топологии их слоений Лиувилля представляется достаточно перспективным: с одной стороны, особенности таких систем зачастую оказываются объединены в параметрические семейства, что дает надежду встретить интересные примеры их бифуркаций. Отметим, что изучение бифуркаций слоений Лиувилля, зависящих от параметра, и их связей с теорией особенностей в параметрических семействах гладких функций представляет значительный интерес и активно ведется в последние годы

Изучение многопараметрических систем с точки зрения топологии их слоений Лиувилля представляется достаточно перспективным: с одной стороны, особенности таких систем зачастую оказываются объединены в параметрические семейства, что дает надежду встретить интересные примеры их бифуркаций. Отметим, что изучение бифуркаций слоений Лиувилля, зависящих от параметра, и их связей с теорией особенностей в параметрических семействах гладких функций представляет значительный интерес и активно ведется в последние годы [27], [28], [29], [30], [31]

С другой стороны, изучение их топологии не потребует начинать “с нуля”: существенная часть информации о топологии слоений Лиувилля возмущенных систем-аналогов может быть извлечена из уже рассмотренных прежде представителей из этих семейств (зачастую, более простых). Так при изучении аналогов системы Ковалевской на алгебрах $so(4)$ и $so(3, 1)$ оказываются полезными результаты о фазовой топологии двух “более простых” систем: классического случая Ковалевской, полученные М.П. Харламовым [32, 33], А.А. Ошемковым [34] и А.В. Болсиновым, П. Рихтером, А.Т. Фоменко [35], и случая Соколова интегрируемости уравнений Кирхгофа [6], полученные П.Е. Рябовым [36] и П.В. Морозовым [37].

Другая, активно развивающаяся в наши дни тема, связана с описанием некомпактных слоев слоения Лиувилля и их особенностей. Системы с такими слоениями Лиувилля активно изучаются (перечислим, например, следующие недавние работы Е.А.Кудрявцевой, С.С.Николаенко и Т.А.Лепского [38], [39], [40], [41], [42]). Так, в работе [40] Е.А.Кудрявцевой был сформулирован и доказан аналог теоремы Лиувилля о слоении Лиувилля в инвариантной окрестности неособого некомпактного слоя с некоторыми условиями (а именно, построен набор топологических, геометрических и комбинаторных инвариантов таких слоений, классифицирующих такие слоения).

В обзорной работе [43] Д.А.Федосеев и А.Т.Фоменко привели широкий список особенностей с некомпактными слоями, обнаруженных в интегрируемых системах механики и геометрии. Одним из результатов работы [44] В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко была классификация слоений Лиувилля бильярдных систем с неограниченными бильярдными столами. Особенности та-

ких систем топологически эквивалентны некомпактным боттовским атомам–бифуркациям интегрируемых гамильтоновых систем. В работе [42] С.С.Николаенко предложил классификацию некомпактных особенностей гамильтоновых систем с одной степенью свободы в достаточно широкой общности.

В системах с некомпактными слоями Лиувилля возможен следующий важный класс особенностей: бифуркация компактного слоя Лиувилля (или компактного несвязного уровня первых интегралов) в некомпактный слой (уровень), происходящая без падения ранга отображения момента [43]. Отметим, что изучать такие особенности вычислительным путем весьма непросто: для их поиска невозможно применить хорошо известные подходы по поиску критических точек отображения момента.

Как оказалось, такой эффект возникает в аналоге рассмотренной выше серии систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Для этого вместо алгебры $e(3)$ требуется рассмотреть алгебру $e(2, 1)$ группы движений трехмерного псевдо-евклидова пространства. Далее будем называть такое соответствующее семейство систем *псевдо-евклидовым аналогом семейства систем Ковалевской*, или более кратко, *псевдо-евклидовыми системами Ковалевской*. Отметим, что иногда мы будем отдельно выделять случай нулевого значения параметра пучка, соответствующий алгебре Ли $e(2, 1)$ (а не аналогам алгебр Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$ в получаемом пучке).

Данная конструкция была предложена в работе А.В.Борисова и И.С.Мамаева [45]. Она позволяет построить новые вещественные интегрируемые системы не только по системам Ковалевской на алгебрах $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, но и по другим известным системам из механики: системам Эйлера, Лагранжа, Горячева–Чаплыгина. Разделение переменных для псевдо-евклидова аналога классического случая Ковалевской было построено в работе С.В.Соколова [46], следуя подходам С.В.Ковалевской [1] и Ф.Кёттера [47].

Как оказалось, для систем из нового аналога семейства систем Ковалевской теряют силу некоторые простые оценки (известные в классическом случае Ковалевской или, например, его аналоге на $so(4)$) на величины фазовых переменных на изоэнергетической поверхности. Ниже для каждого значения параметра пучка алгебр Ли нами изучен вопрос о компактности совместного уровня четырех первых интегралов соответствующей системы.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Вычислить инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на каждой неособой трехмерной изоэнергетической поверхности для аналога интегрируемой системы Ковалевской в случае алгебре Ли $so(4)$.

2. Стратифицировать трехмерное пространство значений энергии и двух функций Казимира той же системы, построить граф соседства ее трехмерных стратов, а также изучить разделяющее множество этой системы на плоскости значений двух функций Казимира.
3. Построить бифуркационные диаграммы отображения момента для аналога интегрируемой системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(3, 1)$ для нулевого значения интеграла площадей и различных значений геометрического интеграла.
4. Завершить вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля неособых изоэнергетических поверхностей той же системы на каждой неособой трехмерной изоэнергетической поверхности.
5. Определить, являются ли компактными или некомпактными совместные поверхности уровня четырех первых интегралов произвольной системы из псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ составлен полный список из 27 классов попарно лиувиллево не эквивалентных слоений Лиувилля на неособых трехмерных связных изоэнергетических поверхностях. В полученном списке содержатся все классы лиувиллевой эквивалентности слоений для классического случая Ковалевской, а также слоения систем Ковалевской–Яхьи, Клебша и Соколова в подходящих зонах энергии. Допустимые базисы, соответствующие тем дугам бифуркационной диаграммы отображения момента системы Ковалевской на алгебре $so(4)$, которые не имеют аналогов в классическом случае Ковалевской, были выражены в терминах однозначно определенных циклов, соответствующих дугам, имеющим такие аналоги.
2. Для системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ найдено разделяющее множество на плоскости значений двух функций Казимира системы. Оно симметрично при изменении знака интеграла площадей, а в области его неотрицательных значений является объединением дуг 21 кривой, заданных в найденных подходящих координатах как явные функции одной из координат. Было определено, как особые точки бифуркационной диаграммы отображения момента упорядочены по возрастанию значения энергии в них в зависимости от значений двух функций Казимира.
3. Для системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ выполнена стратификация трехмерного пространства параметров, точка которого соответствует изоэнергетической поверхности

и задается тройкой значений: гамильтониана и двух функций Казимира. Каждый страт является диском размерности от 0 до 3 и открыт в остове той же размерности. Получено 54 трехмерных страта и составлен граф их соседства (один из них соответствует классу пустых изоэнергетических поверхностей, а остальные 53 — неособым изоэнергетическим поверхностям с лиувиллево эквивалентными слоениями). Объединение их границ разбивается на 119 двумерных стратов (соответствующих особым точкам бифуркационной диаграммы или двумерным орбитам коприсоединенного представления), 83 ребра и 17 вершин. Для каждой 2-границы указан тип особой точки и граничащие по ней 3-страты.

4. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$ при нулевой постоянной площадей была описана бифуркационная диаграмма отображения момента в зависимости от принадлежности значения геометрического интеграла одному из шести открытых промежутков. При этом была проверена невырожденность критических точек ранга 1 и 0 и описаны круговые молекулы особых точек этих бифуркационных диаграмм.
5. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$ составлен полный список из 28 инвариантов Фоменко–Цишанга его слоений Лиувилля в ограничении на неособые трехмерные изоэнергетические поверхности. Все они попарно различны. Данный список содержит все классы лиувиллевой эквивалентности классического случая Ковалевской и случая Соколова интегрируемости уравнений Кирхгофа, а также два класса слоений Лиувилля системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ (в одном из них, с точностью до изменения знака дополнительного интеграла). При этом допустимые базисы для дуг бифуркационной диаграммы отображения момента системы Ковалевской на алгебре $so(3, 1)$, не имеющие аналогов в классическом случае Ковалевской, были выражены через однозначно определенные циклы соответствующих боттовских 3-атомов. Для каждого из 25 классов грубой лиувиллевой эквивалентности системы Ковалевской–Соколова на неособых изоэнергетических поверхностях были вычислены недостающие числовые метки.
6. В случае ненулевого значения постоянной площадей вопрос о компактности совместного уровня четырех первых интегралов системы полностью решен для произвольной системы из псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли. А именно, найдена парабола на плоскости значений гамильтониана и интеграла Ковалевской, по одну сторону от которой лежат образы компактных (или пустых) совместных поверхностей уровня, а на самой параболе и по другую сторону от нее лежат образы некомпактных совместных поверхностей уровня. Коэффициенты в уравнении этой параболы зависят от параметра пучка скобок Ли–Пуассона и не зависят от значений функций Казимира.

Объект и предмет исследования

Объектом исследований являются интегрируемые аналоги известного волчка Ковалевской в случае алгебр Ли, отличных от алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. Изучаются такие системы–аналоги в случае алгебр Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$, составляющие однопараметрическое семейство интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ вместе с классической системой Ковалевской. Также изучается псевдо–евклидов аналог указанного семейства. Вместо классической системы Ковалевской в такое семейство–аналог будет входить ее аналог в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ группы движений трехмерного псевдо–евклидова пространства.

Предметом исследования являются разнообразные топологические инварианты слоений Лиувилля данных интегрируемых систем.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно, и её новизна заключается в следующем:

1. Вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических поверхностях для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$, обнаружены эквивалентности этой системы другими интегрируемыми системами в подходящих зонах энергии.
2. Описано разделяющее множество на плоскости значений двух функций Казимира (геометрического интеграла и интеграла площадей) для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(4)$.
3. Произведена стратификация трехмерного пространства параметров (значений энергии и двух функций Казимира) для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(4)$. Построен граф соседства трехмерных стратов, которым соответствуют классы лиувиллевой эквивалентности данной системы в ограничении на неособые изоэнергетические поверхности.
4. Вычислена бифуркационная диаграмма в случае нулевой постоянной площадей для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(3, 1)$.
5. Завершено вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(3, 1)$ и для системы Ковалевской–Соколова в случае алгебры $e(3)$.

6. Доказан критерий компактности совместной поверхности уровня четырех первых интегралов каждой системы из псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли, если интеграл площадей отличен от нуля.

Методы исследования

В работе используются методы теории интегрируемых систем, маломерной топологии и теории алгебр Ли. Центральную роль играют подходы, развитые в работах А.Т. Фоменко, Х. Цишанга, С.В. Матвеева, А.В. Болсинова, А.А. Ошемкова, Е.А.Кудрявцевой и других, посвященных исследованию топологии слоений Лиувилля и их особенностей.

С помощью классических методов математического анализа задача о взаимном расположении нескольких плоских кривых (нахождение разделяющего множества для аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$) была сведена к вопросу о взаимном расположении графиков нескольких явных функций одной переменной. При визуализации ряда полученных результатов использовалась компьютерная среда Wolfram Mathematica 12.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Вычисленные инварианты интегрируемых аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$ могут использоваться при исследовании топологических свойств более сложных аналогов систем типа Ковалевской и изучении бифуркаций слоений Лиувилля, возникающих в таких многопараметрических семействах. Например, весьма интересно изучить четырех-параметрическое семейство систем, включающее как указанное семейство систем на пучке алгебр Ли, так и систему Ковалевской–Яхьи на алгебре Ли $e(3)$.

Другим направлением использования полученных результатов является построение механической интерпретации для изученных аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли и объяснение различных режимов движения, возникающих в них и не встречавшихся в классической системе Ковалевской. Кроме того, полученный ответ может использоваться при изучении лиувиллевой эквивалентности различных интегрируемых систем и реализации топологии их слоений Лиувилля интегрируемыми билиярдами на клеточных комплексах [48].

Результаты о компактности и некомпактности совместных уровней первых интегралов псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской могут быть применены для изучения общих свойств слоений Лиувилля и динамики систем, имеющих некомпактные слои и особенности. Например, важной задачей является построение теории топологической классификации таких систем при некоторых “разумных” ограничениях на них (например, для класса алгебраически интегрируемых систем).

Апробация работы

Результаты опубликованы в пяти статьях [115], [116], [117], [118], [119], из которых все пять опубликованы в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении учёных степеней в МГУ. Результаты диссертации были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- “Equadiff – 2019”, г. Лейден, Нидерланды, 8-12 июля 2019
- FDIS 2019 (International Conference on Finite Dimensional Integrable systems in Geometry and Mathematical Physics), г. Шанхай, Китай, 6-12 мая 2019
- “Workshop Applied Topology 2019”, г. Киото, Япония, 7-11 января 2019
- “Геометрические методы в теории управления и математической физике”, г. Рязань, Россия, 25-28 сентября 2018
- “2018 International Conference on Topology and its Applications”, г. Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018
- “Geometry, Dynamics and Integrable Systems” (GDIS-2018), г. Долгопрудный, Россия, 5-9 июня 2018
- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2018”, Москва, Россия, 9-13 апреля 2018
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018, г. Воронеж, Россия, 25-31 января 2018
- Finite Dimensional Integrable Systems FDIS-2017, г. Барселона, Испания, 3-7 июня 2017
- XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2017”, г. Москва, Россия, 10-14 апреля 2017
- Международная научно-методическая конференция “Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования”, г. Воронеж, Россия, 23-25 декабря 2016
- “XIX Geometrical Seminar”, г. Златибор, Сербия, 28 августа 2016 - 4 сентября 2016
- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, г. Казань, Россия, 26 июня - 2 июля 2016
- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2016”, г. Москва, Россия, 11-15 апреля 2016

- Международная конференция “Зимняя физико-математическая школа Крейна”, г. Воронеж, Россия, 25-31 января 2016
- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2015», г. Москва, Россия, 13-17 апреля 2015

Тезисы [120]–[130] ряда докладов В.А. Кибкало, сделанных на этих конференциях и содержащих результаты настоящей диссертационной работы, опубликованы в соответствующих сборниках тезисов и материалов.

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» (мехмат МГУ, рук. акад. А.Т. Фоменко), на семинаре «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (мех-мат МГУ, рук. проф. А.А. Давыдов, проф. А.М. Степин), неоднократно на семинаре «Современные геометрические методы» (мех-мат МГУ, рук. акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинов, проф. А.А. Ошемков, проф. Е.А. Кудрявцева, доц. И.М. Никонов, доц. А.Ю. Коняев, доц. В.В. Ведюшкина), на семинаре «Алгебра и топология интегрируемых систем» (мех-мат МГУ, рук. проф. Е.А. Кудрявцева, проф. А.В. Болсинов, проф. А.А. Ошемков, доц. А.Ю. Коняев), на семинаре Kyoto Saturday Topology Seminar (Kyoto University of Education, г. Киото, Япония), семинаре Лаборатории механики природных катастроф (Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, рук. проф. С.Ю.Доброхотов).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст работы изложен на 178 страницах. Список литературы содержит 130 наименований.

Содержание работы

Во введении формулируется цель настоящей работы, кратко излагаются ее основные результаты и содержание и освещается место данных исследований в теории интегрируемых систем и динамике твердого тела.

Содержание главы 1

В **первой главе** приведены основные определения, конструкции и ключевые теоремы теории конечномерных интегрируемых систем и сведения о проведенных ранее исследованиях волчка Ковалевской и его аналогов на других алгебрах Ли.

Выбрав в пространстве $\mathbb{R}^6$ базис $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$, введем семейство коммутаторов, зависящих от параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$:

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k,$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $\{123\} \rightarrow \{ijk\}$. Случаи $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$ и $\varkappa > 0$ соответствуют алгебрам Ли $so(3, 1)$, $e(3)$ и $so(4)$.

В базисе двойственного пространства $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$, соответствующем базису $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ получим однопараметрическое семейство скобок Ли–Пуассона, имеющих вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k.$$

Оно соответствует рассмотренному выше однопараметрическому семейству коммутаторов на исходном $\mathbb{R}^6$. Получим коалгебры $so(3, 1)^*$, $e(3)^*$ и $so(4)^*$, т.е. двойственные объекты для алгебр Ли $so(3, 1)$, $e(3)$ и $so(4)$. Они соответствуют знакам $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$, $\varkappa > 0$. Отметим, что иногда ниже мы будем для краткости опускать звездочки, и говорить об интегрируемых системах на алгебрах Ли.

Как известно, на коалгебре (пространстве R^n с координатами $y_1, \dots, y_n$) можно следующим образом задать векторное поле (т.е. задать динамическую систему) по гладкой функции H

$$\text{sgrad } H = \{y_i, H\}.$$

Ограничивая данную систему на симплектические листы скобки Ли–Пуассона, будем получать интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы (для регулярных и четырехмерных орбит). Напомним, что для рассматриваемого пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ такие орбиты являются совместными уровнями следующих функций Казимира

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2),$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3.$$

В динамике твердого тела (т.е. в случае $\varkappa = 0$) эти функции f_1 и f_2 называют геометрическим интегралом и интегралом площадей соответственно. Мы будем далее называть их также, опуская (для f_1) слово “аналог” в случае $\varkappa \neq 0$. Их значения обозначим a, b :

$$f_1 = a, \quad f_2 = b.$$

Определение. *Плоскостью орбит* будем называть называть 2-плоскость $\mathbb{R}^2(a, b)$ значений функций f_1 и f_2 . Также будем обозначать ее Oab или $\mathbb{R}^2(a, b)$.

Свойство интегрируемости некоторой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ (гладкая функция H называется гамильтонианом или энергией системы) на симплектическом или пуассоновом (например, с рассмотренными выше скобками Ли–Пуассона) многообразии требует наличия некоторой гладкой функции F , которая коммутирует с гамильтонианом H и не является функцией от H .

Определение. Гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций $F_1, \dots, F_n$ на M^{2n} таких, что:

1. функции $F_1, \dots, F_n$ являются первыми интегралами системы $v = \text{sgrad } H$, т.е.
 $\omega(\text{sgrad } H, \text{sgrad } F_i) = 0$ для $i = 1, \dots, n$,
2. функции $F_1, \dots, F_n$ функционально независимы на M^{2n} , т.е. их дифференциалы $dF_1, \dots, dF_n$ линейно независимы почти всюду на M^{2n} ,
3. $\omega(\text{sgrad } F_i, \text{sgrad } F_j) = 0$ для $1 \leq i, j \leq n$,
4. гамильтоновы векторные поля $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ полны, т.е. для каждого из них определен сдвиг вдоль его фазовых траекторий на любое вещественное число t .

Определение. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе $(M^{2n}, \omega, H, F_1, \dots, F_n)$, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня n первых интегралов $F_1, \dots, F_n$ — на *слои* данного слоения Лиувилля.

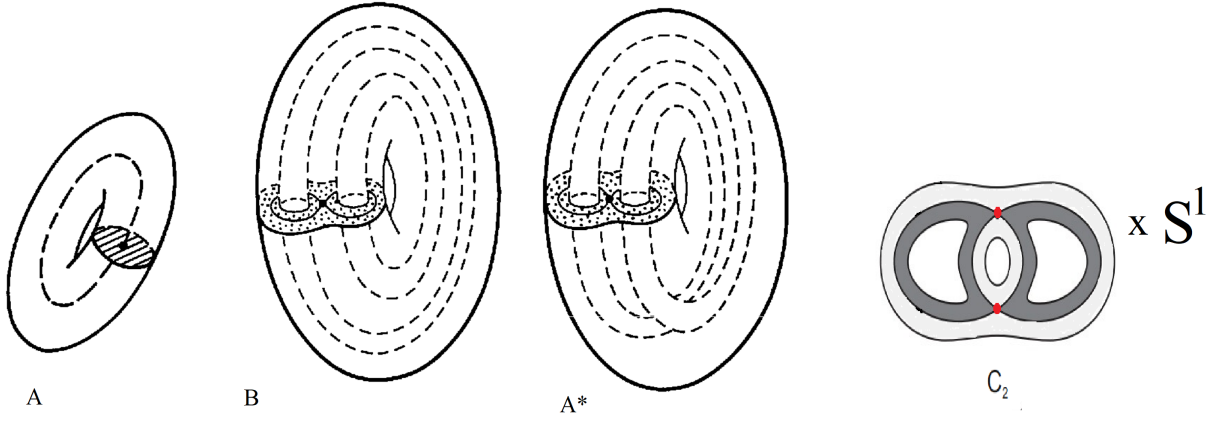
Нами рассматриваются динамические системы $v = \text{sgrad } H$ на пуассоновых многообразиях $\mathbb{R}^6$ с описанными выше скобками Ли–Пуассона, у которых имеется первый интеграл, независимый с гамильтонианом и функциями Казимира. Такая система, ограниченная на четырехмерную регулярную орбиту, даст вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему.

Определение. Динамическую систему $v = \text{sgrad } H$ на двойственном пространстве к некоторой алгебре Ли из пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ будем называть *интегрируемой системой* (или *ИС*), если в ограничении на каждую регулярную орбиту $M_{a,b}^4$ данная система является ИГС (вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с двумя степенями свободы).

Отметим, что *далее в нашей работе* термины “вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система”, “интегрируемая гамильтонова система” и сокращение “ИГС” применяются в отношении систем на симплектическом многообразии (а именно, на симплектическом листе соответствующей скобки Ли–Пуассона). Для самих редуцированных систем из динамики твердого тела или их аналогов, заданных на всём $\mathbb{R}^6$, чаще будет употребляться термин “интегрируемая система” (“ИС”).

Это оказывается достаточно удобным в силу того, что для рассматриваемых ниже интегрируемых систем из механики и их аналогов топологические свойства их ограничения на некоторый симплектический лист зависят от выбора этого листа, т.е. выбора пары значений a, b функций Казимира f_1, f_2 .

Слоения Лиувилля ИГС обыкновенно изучают в следующих подмножествах фазового пространства M^4 :



- в малой окрестности точки (или ее орбиты при действии $\mathbb{R}^2$ сдвигами вдоль $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$), т.е. *локально*;
- в инвариантной (насыщенной) окрестности слоя слоения Лиувилля, т.е. *полулокально*;
- на инвариантном подмногообразии в M^4 (например, на изоэнергетической поверхности Q_h^3) или на всем фазовом M^4 , т.е. *глобально*.

Точки и слои могут быть регулярными (ранг дифференциала отображения момента в ней или в каждой точке слоя) или особыми (этот ранг падает в точке или где-то на слое). Приведено описание топологии слоения Лиувилля в окрестности регулярной точки и содержащего ее слоя (теорема Лиувилля). Затем рассмотрены критические точки для систем с 1 и 2 степенями свободы, и изложены основные факты об окрестностях таких точек и содержащих их слоев (в M^4 или Q^3).

Затем приведены определения невырожденности таких точек (понятие морсовости и боттовости таких точек в системах с 1 и 2 степенями свободы). Показано, каким образом проверяется невырожденность, если рассматриваются интегрируемые системы на пуассоновом $\mathbb{R}^6$. Также описано понятие невырожденных особых точек ранга 0.

Приведены понятия 2-атомов и 3-атомов А.Т. Фоменко (см. работы А.Т. Фоменко [18], [19], [49] и монографию А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [4, гл. 2-3, т.1]) — классов эквивалентности невырожденных полулокальных особенностей коранга 1. На рисунке выше приведены все типы 3-атомов: A, B, A^*, C_2 , встречающихся в системе Ковалевской и ее аналогах на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$. В атоме A особая окружность является минимальной или максимальной, а в остальных атомах — седловой.

Определение. Ограничения двух интегрируемых систем $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$ на трехмерные неособые ($dH_i \neq 0$) инвариантные подмногообразия Q_1^3 и Q_2^3 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм Q_1^3 и Q_2^3 , сохраняющий ориентацию Q_i относительно (M_i^4, ω_i) и направление поля $\text{sgrad } H_i$ на критических окружностях интеграла F_i .

Рассмотрев базу слоения Лиувилля, т.е. фактор–пространство, каждой точке которого соответствует связная компонента уровня дополнительного интеграла в Q_h^3 , сформулируем определение более слабой эквивалентности:

Определение. Ограничения двух интегрируемых систем $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$ на трехмерные неособые ($dH_i \neq 0$) инвариантные подмногообразия Q_1^3 и Q_2^3 называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если базы их слоений Лиувилля гомеоморфны, а в полном прообразе окрестности каждой точки базы существует диффеоморфизм самих слоений Лиувилля.

Инвариантами грубой лиувиллевой и лиувиллевой эквивалентностей являются инвариант Фоменко (грубая молекула) и инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула) соответственно. Их вершины соответствуют 3-атомам, а их ребра — однопараметрическим семействам регулярных слоев слоения Лиувилля. Для нахождения числовых меток r, ε, n , которые необходимо добавить к грубой молекуле для получения инварианта Фоменко–Цишанга, требуется выбрать специальные базисы на граничных торах 3-атомов.

Опишем, как выглядит такой базис для 3-атома A , т.е. послойной окрестности минимальной или максимальной боттовской окружности в Q^3 . Отметим, что общее определение допустимых базисов (в том числе, для остальных типов атомов) имеются в [4, глава 4, т. 1].

Определение. Базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ — фундаментальной группе граничного тора 3-атома A — назовем *допустимым*, если

1. цикл λ стягиваем,
2. ориентация цикла μ задана векторным полем $\text{sgrad } H$ на особом слое,
3. базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ задает положительную ориентацию на граничном торе.

Базис (u, v) в касательном пространстве $T_x T^2$ к граничному тору положительно ориентирован, если четверка векторов $(\text{grad } H, N, u, v)$ положительно ориентирована относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь N — внешняя нормаль к граничному тору 3-атома в изоэнергетической поверхности (она ортогональна градиенту энергии).

Также в разделе 1.1 приводятся некоторые известные факты о невырожденных особенностях ранга 0 (в частности, об особенностях типа центр–центр) и некоторых вырожденных особенностях ранга 1.

В разделе 1.2 описан открытый С.В. Ковалевской в 1889 году в работе [1] случай интегрируемости уравнений динамики тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (который является эллипсоидом вращения: главные моменты инерции относятся как 2:2:1).

В том же разделе записаны уравнения Эйлера–Пуассона для данной системы, ее вид до выполнения редукции по S^1 -симметрии. После такой редукции возникает динамическая система на алгебре Ли $e(3)$ с гамильтонианом H и первым интегралом $K = K_0$

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1x_1, \quad (1)$$

$$K_0 = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2^2)^2. \quad (2)$$

Эту систему далее называем *классическим случаем Ковалевской*.

Дальнейшая часть раздела посвящена описанию результатов и подходов к изучению топологии слоения Лиувилля данной системы. Без ограничения общности примем, что геометрический интеграл данной системы $f_1 = a = 1$, и обозначим $f_2 = b, H = h, K = k$ значения первых интегралов системы. Отметим, что во многих работах, посвященных классическому случаю Ковалевской, используют иные интегралы: $f_2/2 = l$ или g , $H/2$ и $K/4$. Коротко описаны классические исследования данной системы (например, введение Г.Г.Аппельротом [50] четырех классов особых движений системы, названных простейшими).

Подход к исследованию топологии механических систем с точки зрения топологии совместных уровней их первых интегралов был предложен С.Смейлом [17] и существенно развит М.П.Харламовым (см., например, [33]) на случай нелинейных по импульсу первых интегралов. Для системы Ковалевской М.П.Харламовым было описано критическое множество системы и было проверено, что все критические точки отображения четырех первых интегралов системы соответствуют движениям системы, принадлежащих к четырем классам Аппельрота. Кроме того, им была найдена бифуркационная диаграмма Σ (образ множества критических точек) отображения момента (H, K) . При каждом значении интеграла площадей $f_2 = b$ (полагаем $a = 1$) она содержится в объединении дуг следующих бифуркационных кривых на плоскости Ohk .

1. Прямая $k = 0$;
2. Параметрическая кривая

$$h(z) = \frac{b^2c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = 4ac_1^2 - \frac{4b^2c_1^2}{z} + \frac{b^4c_1^4}{z^4},$$

где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. Парабола

$$k = \left(h - \frac{2b^2}{a} \right)^2.$$

В случае $a > 0, b = 0$ вместо параметрической кривой (1.10) требуется взять объединение параболы

$$k = h^2 + 4ac_1^2$$

и касательной к этой параболе в точке $h = 0$

$$k = 4ac_1^2.$$

Данное объединение является предельным множеством плоскости Ohk для параметрической кривой при $b \rightarrow 0$.

Кроме того, М.П.Харламовым было найдено количество торов в прообразе точки плоскости Ohk , не лежащей на бифуркационной диаграмме, и типы 3-атомов, соответствующих дугам бифуркационной диаграммы. Далее А.А.Ошемковым было проверено в [34], эти критические точки ранга 1 невырождены.

В работе [35] А.В.Болсиновым, П.Рихтером и А.Т.Фоменко был проведен лиувиллев анализ данной системы. А именно, для каждого класса неособых изоэнергетических поверхностей $Q_{1,b,h}^3$ был вычислен инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на ней. При этом было получено 10 классов таких слоений. Кроме того, при этом допустимые базисы, соответствующие разным семействам дуг бифуркационных диаграмм, были выражены в терминах однозначно определенных λ -циклов этих бифуркаций.

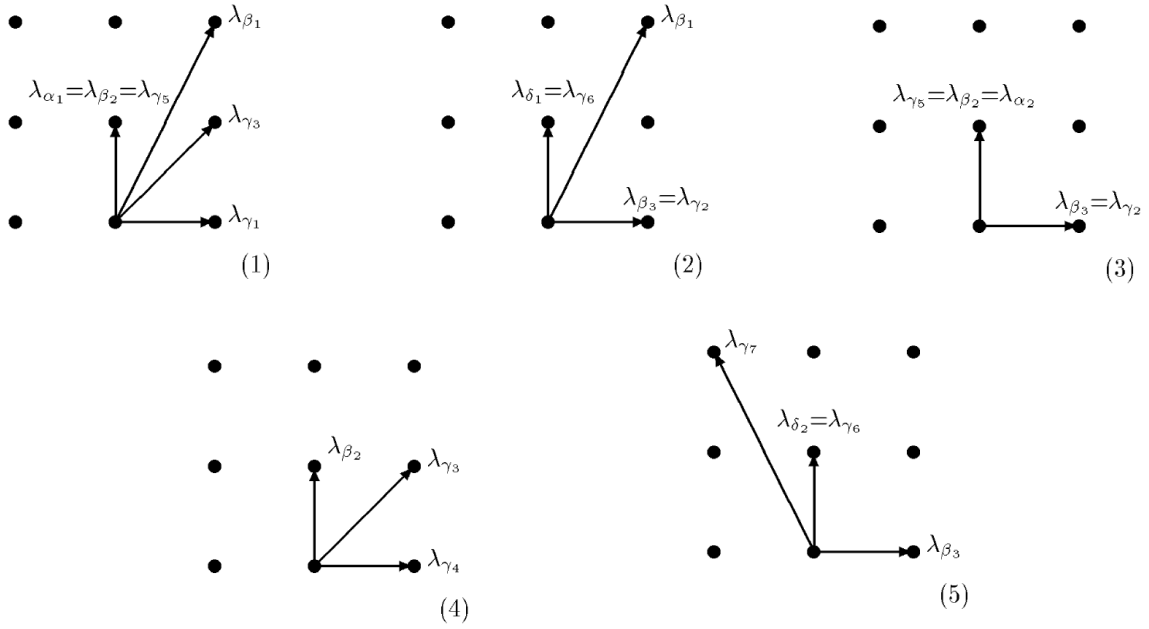
Типы дуг бифуркационных диаграмм были обозначены в работе [35] через $\alpha_1, \dots, \delta_2$. Буква в таком обозначении показывает на один из 4-х классов Апфельрота I-IV:

$$I - \delta, \quad II - \alpha, \quad III - \beta, \quad IV - \gamma.$$

Далее опишем допустимые базисы для каждого из семейств допустимых базисов (на каждом из семейств регулярных торов, близких к особым слоям в прообразе соответствующего ребра). Вслед за ним приведено выражение допустимых базисов через эти циклы. Однозначно определенных λ -циклы для каждого из типов дуг приведены на следующем рисунке.

Выпишем допустимые базисы на граничных торах 3-атомов для каждого семейства таких дуг. Здесь стрелки соответствуют векторам целочисленной решетки на плоскости. То есть, например, символом $\uparrow$ обозначен цикл λ_{α_1} для дуги α_1 , а символом $\rightarrow$ — цикл λ_{γ_1} для дуги γ_1 . Для каждого типа дуг указаны семейства торов Лиувилля выше (по оси k) и ниже данной дуги (на плоскости Ohk) и циклы допустимых базисов. Отметим, что символ $\oslash$ соответствует случаю, когда $Q_{a,b,h}^3$ является пустым множеством, а вектор λ_{β_1} соответствует сумме $2\uparrow + \rightarrow$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad & \frac{1}{-} \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{\oslash} A, \quad \alpha_2 : \quad \frac{3}{-} \frac{(\uparrow \quad \rightarrow)}{\oslash} 2A. \\ \beta_1 : \quad & \frac{1}{2} \frac{(\lambda_{\beta_1} \quad \downarrow)}{(\lambda_{\beta_1} \quad \uparrow)} B, \quad \beta_2 : \quad \frac{1,4}{3} \frac{(\uparrow \quad \nearrow)}{(\uparrow \quad \leftarrow)} C_2, \quad \beta_3 : \quad \frac{3}{2,5} \frac{(\rightarrow \quad \downarrow)}{(\rightarrow \quad \uparrow)} 2B. \\ \gamma_1, \quad & \frac{\oslash}{1} \frac{(\rightarrow \quad \nearrow)}{(\rightarrow \quad \nearrow)} A, \quad \gamma_2 : \quad \frac{3}{2} \frac{(\rightarrow \quad \downarrow)}{(\rightarrow \quad \nearrow)} 2A^*, \quad \gamma_3 : \quad \frac{3}{2} \frac{(\nearrow \quad \downarrow)}{(\nearrow \quad \lambda_{\beta_1})} B, \quad \gamma_4 : \quad \frac{\oslash}{4} \frac{(\rightarrow \quad \nearrow)}{(\rightarrow \quad \nearrow)} A, \end{aligned}$$



$$\gamma_5 : \quad \frac{1}{3} \quad \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \quad \leftarrow)} 2A^*, \quad \gamma_6 : \quad \frac{2}{2,5} \quad \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \quad \leftarrow)} B, \quad \gamma_7 : \quad \frac{5}{-} \quad \frac{(\lambda_{\gamma_7} \quad \uparrow)}{\oslash} 2A.$$

$$\delta_1 : \quad \frac{2}{-} \quad \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{\oslash} A, \quad \delta_2 : \quad \frac{5}{-} \quad \frac{(\uparrow \quad \rightarrow)}{\oslash} 2A.$$

В разделе 1.3 главы 1 диссертации приведены известные результаты о топологии интегрируемых аналогов системы Ковалевской. Такие аналоги на алгебрах $so(3,1)$ и $so(4)$ имеют тот же гамильтониан H , что и классический случай Ковалевской, а интеграл начинает зависеть от $\varkappa$ (число c_1 может быть линейной заменой сделано равным 1):

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2^2)^2.$$

Затем излагаются результаты И.К.Козлова [51] (также см. [52]) о критическом множестве систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3,1) - e(3) - so(4)$. Приведены формулы для семейств особых точек ранга 1 и 0, результаты об их невырожденности и образе под действием отображения момента. Отметим, перечисленные результаты остаются верны при $\varkappa < 0$ (т.е. в случае алгебры Ли $so(3,1)$).

В разделе 1.3.3 более подробно изложены результаты работы [51] для случая $\varkappa > 0$. Приведен результат о виде бифуркационной диаграммы $\Sigma^{a,b}$ в зависимости от выбора симплектического листа $M_{a,b}^4$. А именно, подробно изложено, что в квадранте $a > 0, b \geq 0$ имеется девять областей I–IX и три промежутка X–XII на луче $b = 0, a > 0$, которым соответствуют разные бифуркационные диаграммы. Также приведены формулы для кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m на плоскости орбит Oab , которые составляют границы указанных областей. Приведена известная информация о 3-

атомах, соответствующих семействам дуг $\Sigma^{a,b}$, и типов 4-особенностей, соответствующих особым точкам бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}$.

Также изложены известные результаты о связи топологических свойств классической системы Ковалевской ($\varkappa = 0$ и алгебры $e(3)$) и компактного аналога системы Ковалевской (т.е. случая $\varkappa > 0$ и алгебры $so(4)$). Указана взаимосвязь обозначений особых точек $\Sigma^{a,b}$ в работах [35] и [51].

$\varkappa = 0$	H	U_1	U_2	U_3	M_1	M_2	e_1	e_2	c_1	c_2	h_1	h_2
$\varkappa > 0$	y_1	y_3	y_7	y_{12}	y_{10}	y_{11}	y_2	y_{13}	y_6	y_9	y_5	y_8

В разделе 1.3.4 обсуждается взаимосвязь двух интегрируемых систем — аналога волчка Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$ и системы волчка Ковалевской–Соколова, открытого в работе [8]. Исследованию последнего посвящена работа [53], там и в настоящей работе гиростатическая добавка в гамильтониане из [8] полагается нулевой.

Такой интегрируемый гамильтониан имеет следующий вид

$$H_{KS} = \frac{1}{4}(J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2) + \varepsilon_1(x_3J_2 - x_2J_3) - \varepsilon_0x_1.$$

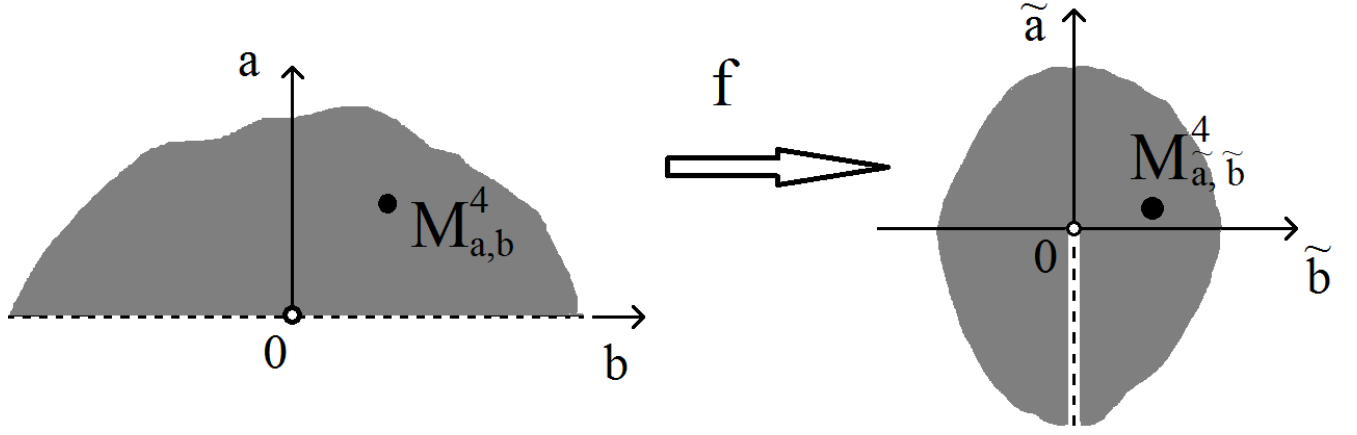
Числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ являются параметрами системы, число a есть значение геометрического интеграла f_1 . В работе [53] была подробно изучено критическое множество и топология слоений Лиувилля волчка Ковалевской–Соколова, в частности, при $a\varepsilon_0\varepsilon_1 \neq 0$ построены бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) и найдены все инварианты Фоменко слоения Лиувилля системы в ограничении на неособую изоэнергетическую поверхность (в системе имеется ровно 25 типов слоений, имеющих разные пары: класс гомеоморфности такой поверхности и инвариант Фоменко).

Как показано в [54], при некотором пуассоновом морфизме между алгебрами Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$ гамильтониан и первый интеграл системы Ковалевской–Соколова переходят в гамильтониан и интеграл системы Ковалевской. Напомним, что пуассоновым морфизмом в [54] названо отображение σ между двумя пуассоновыми многообразиями $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ и $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$, сохраняющее значения скобки Пуассона на любых двух гладких функциях:

$$\{\sigma(F), \sigma(G)\}_1 = \{F, G\}_2$$

Указанный морфизм переводит симплектический лист $M_{a,b}^4$ алгебры Ли $e(3)$ в некоторый симплектический лист $M_{a,b}^4$ алгебры Ли $so(3, 1)$, причем имеется биекция полуплоскости $a > 0$ и множества $\mathbb{R}^2$ без луча $b = 0, a \leq 0$ (см. рис. ниже).

В общем рассматриваемом случае произведение $a\varepsilon_1\varepsilon_0$ отлично от нуля. Два из трех параметров можно сделать равными единице путем изменения масштаба. В общем случае будем считать, что $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_0 > 0, a > 0$, причем значения a и ε_0 полагает фиксированными, а значение $\zeta = \varepsilon_1^2$



— существенным параметром системы. Предельные случаи $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ соответствуют двум известным системам на $e(3)^*$: системе Ковалевской с гамильтонианом (1.7) и случаю Соколова из работы [6] (его фазовая топология была изучена в работах П.Е.Рябова [36] и П.В.Морозова [37], [55], [56]).

Полученные 25 классов слоений соответствуют областям в пространстве $\mathbb{R}^3$ (значениям энергии, интеграла площадей и параметра ε_1). они были обозначены $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_8, \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_6, \mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_4, \mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2, \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2, \mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_2, \mathbb{G}$ в работе [53].

Введя параметры h_*, l_*, ζ_* , такие что (здесь a, l задают значения геометрического интеграла и интеграла площадей, $\zeta = \varepsilon_1^2$):

$$h = \varepsilon_0 a h_*, \quad 2l^2 = \varepsilon_0 a^3 l_*^3, \quad \zeta = \frac{\varepsilon_0 \zeta_*}{a}.$$

Теорема. Рассмотрим множество Θ_L , которое разбивает множество орбит $\zeta_* > 0, l_* > 0$ системы Ковалевской–Соколова на одиннадцать областей (обозначенных $1, \dots, 11$), точкам которых соответствуют комбинаторно эквивалентные бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) . Данное множество состоит из пяти кривых $\theta_1, \dots, \theta_5$ на плоскости (ζ_*, l_*) :

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad & 2\zeta_* = 2(l_*^2 - 1)^{3/2} + l_*(2l_*^2 - 3), \quad l_* \geq \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ \theta_2 : \quad & l_*^3 = 2(\zeta_* - 1), \quad \zeta_* \geq 0; \\ \theta_3 : \quad & l_*^3 = 2(\zeta_* - 1), \quad \zeta_* \geq 1; \\ \theta_4 : \quad & l_* = 1, \quad \zeta_* \geq 0; \\ \theta_5 : \quad & \zeta_* = \frac{1}{2}, \quad l_* \geq 0. \end{aligned}$$

Ось l_* соответствует классическому случаю Ковалевской.

Данные кривые будут соответствовать разделяющим кривым f_t, f_r, f_k, f_m , которые входят в разделяющее множество системы Ковалевской на $so(3, 1)$ и заданы одними и теми же формулами (по переменным $a, b, \varkappa$) для всего семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$.

Бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) для волчка Ковалевской–Соколова можно задать согласно следующему утверждению:

Утверждение (Харламов, Рябов, Савушкин, [53]). *Бифуркационная диаграмма отображения (L, H_{KS}, K_{KS}) из 5-уровня $f_1 = a$ в $\mathbb{R}^3(l, h, k)$ содержится в объединении четырех следующих поверхностей:*

$$\Pi_1 : \quad k = 0;$$

$$\Pi_2 : \quad k = \frac{1}{4\varepsilon_1^4} (2\varepsilon_1^2(h + a^2\varepsilon_1^2) + \varepsilon_0^2)^2;$$

$$\Pi_3 : \quad k = \frac{(a^2(h + a^2\varepsilon_1^2) - 2l^2)^2}{a^4};$$

$$\Pi_4 : \quad \begin{cases} l^2 = \frac{(h-s)s^2}{\varepsilon_0^2}, \\ k = \frac{4\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} s^3 + \left(3 - \frac{4\varepsilon_1^2 h}{\varepsilon_0^2}\right) s^2 - 4hs + a^2\varepsilon_0^2 + (h + \varepsilon_1^2 a^2)^2. \end{cases}$$

То, какие именно фрагменты сечений данных поверхностей входят в бифуркационную диаграмму при данных l_* и ζ_* , определяется принадлежностью пары (ζ_*, l_*) той или иной области 1–11.

В разделе 1.3.5 рассмотрен следующий пучок скобок Ли–Пуассона на пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$

$$\mathbb{P}_{new} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma J_3 & -J_2 & 0 & \sigma x_3 & -x_2 \\ -\sigma J_3 & 0 & J_1 & -\sigma x_3 & 0 & x_1 \\ J_2 & -J_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & \sigma x_3 & -x_2 & 0 & \varkappa \sigma J_3 & -\varkappa J_2 \\ -\sigma x_3 & 0 & x_1 & -\varkappa \sigma J_3 & 0 & \varkappa J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & \varkappa J_2 & -\varkappa J_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь число $\sigma > 0$. При произвольном значении $\varkappa$ скобка Ли–Пуассона из этого пучка имеет функции Казимира $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$:

$$\hat{f}_1 = x_1^2 + x_2^2 - \sigma x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 - \sigma J_3^2) = a,$$

$$\hat{f}_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - \sigma x_3 J_3 = b.$$

В работе [45] А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым рассмотрены интегрируемые аналоги известных систем динамики (системы Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Гесса, Горячева–Чаплыгина), когда движение происходит не в евклидовом, а в псевдо-евклидовом трехмерном пространстве с метрикой $\text{diag}(1, 1, -\sigma)$. Аналог системы Ковалевской задается следующим гамильтонианом:

$$H_{ps} = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 - 2\sigma J_3^2) + c_1 x_1.$$

Данный гамильтониан при каждом $\varkappa \in \mathbb{R}$ имеет первый интеграл — интеграл Ковалевской $K_\varkappa$. Далее обозначим $F_{ps} = K_\varkappa/4$. Случай $\varkappa = 0$ соответствует аналогу системы Ковалевской на алгебре Ли $e(2, 1)$.

Определение. Данное семейство систем с гамильтонианом H_{ps} на пучке алгебр Ли, заданном выше, будем называть *псевдо-евклидовым семейством систем Ковалевской*.

Содержание главы 2

Во **второй главе** для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ изучена топология слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях и проведена стратификация трехмерного пространства параметров (значения энергии и двух функций Казимира).

Сформулируем две основные теоремы о классах лиувиллевой эквивалентности системы Ковалевской на алгебре $so(4)$ в ограничении на неособые изоэнергетические поверхности.

Теорема. В системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ имеется ровно 27 классов $L_1, \dots, L_{27}$ лиувиллево неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей $Q_{a,b,h}^3$.

В таблицах 2.5 и 2.6 раздела 2.1.1 главы 2 перечислены инварианты Фоменко–Цишанга всех слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$ при фиксированной ориентации Q^3 и направлении роста интеграла K . Классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots, L_{27}$ для связных компонент этих слоений 1-32 указаны в таблице ниже.

Пунктирная линия в таблицах 2.5 и 2.6 раздела 2.1.1 главы 2 означает совпадение меток слева и справа от нее, т.е. симметрию слоения Лиувилля и его меченой молекулы на данных “ярусах”, т.е. особых уровнях дополнительного интеграла.

класс L_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
молекула	1, 7, 11	2, 9	3	4	5	6	8	10	12, 15	13, 31	14	16	17		
класс L_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
молекула	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	32

Теорема. Среди слоений $L_1, \dots, L_{27}$ компактного случая Ковалевской следующие слоения ливиллево эквивалентны слоениям Ливилля следующих интегрируемых систем в подходящих зонах энергии:

- 1) слоения $L_1, L_{12}, L_3, L_4, L_{15}, L_{27}, L_{24}, L_{20}, L_{24}, L_{18}$ эквивалентны слоениям $A, \dots, J$ классического случая Ковалевской (см. ([35])) соответственно,
- 2) слоения L_2 и L_{23} эквивалентны слоениям случая Ковалевской–Яхьи в зонах энергии h_2 и h_{10}, h_{23} (см. [57], [58]) соответственно,
- 3) слоения L_1, L_2, L_9, L_{10} эквивалентны слоениям 1, 2, 6, 7 случая Клебша (см. [59]) соответственно,
- 4) слоения L_1, L_2, L_4 эквивалентны слоениям A, B, F случая Соколова (см. [37]) соответственно,
- 5) интегрируемые билиарды в областях A'_0, A_2, A_1, A_0 , ограниченных дугами софокусных квадров (см. [60]), моделируют слоения Ливилля L_1, L_2, L_6, L_8 компактного случая Ковалевской.

Рассмотрим бифуркационные диаграммы $\Sigma_{a,b}$ отображения момента $\mathfrak{F} = (H, F)$ при $\varkappa > 0$ в ограничении на различные симплектические листы $M_{a,b}^4$. Для тех дуг, которые имеют аналоги в классическом случае Ковалевской (при $\varkappa = 0$), использованы те же обозначения $\alpha_1, \dots, \delta_2$ и те же допустимые базисы, что и в работе [35]. Для особых точек мы используем те же обозначения y_i, z_j , что и в [51] (для точек, имеющих или не имеющих аналога при $\varkappa = 0$ соответственно). Семейства новых дуг бифуркационных диаграмм обозначим $\xi_1, \dots, \xi_5$, пары точек (z_i, z_j) , которые могут быть их концами, перечислены в следующей таблице.

символ	дуга бифуркационной диаграммы	атом	семейство торов
ξ_1	$(z_4, z_3), (z_4, z_5), (z_4, z_{11}), (z_4, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(1)
ξ_2	$(z_3, z_2), (z_5, z_2)$	2 A	(3)
ξ_3	$(z_2, z_1), (z_{10}, z_1)$	2 A	(2)
ξ_4	$(z_6, z_5), (z_6, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(4)
ξ_5	$(z_8, z_9), (z_8, z_{10}), (z_{11}, z_{10}), (z_{11}, z_9)$	A	(1)

В разделе 1.1.5.3 главы 2 допустимые базисы для дуг $\xi_1, \dots, \xi_5$ были выражены через однозначно определенные λ -циклы для остальных дуг, известные из [35].

Утверждение. Следующие базисы $(\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i})$ являются допустимыми для дуг ξ_i , $i = 1..5$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_4} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Однозначно определенные циклы λ для максимальных 3-атомов A , соответствующих дугам $\xi_1, \dots, \xi_5$, изображены на рисунке 1.6 главы 1 как элементы целочисленной решетки на плоскости вместе с такими же циклами λ для остальных дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$. Семейства торов Лиувилля интегрируемой системы, на которых эти циклы расположены, были пронумерованы в аналогично [35].

Для получения данного результата используется следующее утверждение (см. работу В.А. Кибкало [118]) о допустимых базисах, соответствующих дугам бифуркационной диаграммы вблизи особенности центр–центр. Отметим, что в работе [61] А.И.Жила рассмотрела другой вопрос об этих особенностях — вопрос о знаке метки ε на ребре круговой молекулы.

Утверждение. Пусть точка является особой точкой типа центр-центр бифуркационной диаграммы отображения момента (H, F) . Обозначим знаки производных функции H в направлении пересекающихся дуг $\gamma_i, i = 1, 2$ как $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$ соответственно. Тогда допустимые базисы (λ_i, μ_i) для этих дуг могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

Далее в разделе 2.1.3 главы 2 рассматриваются вопросы перечисления слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических $Q_{a,b,h}^3$ системы Ковалевской на $so(4)$ и разбиения пространства орбит $\mathbb{R}^2(a, b)$ на связные компоненты, точкам (a, b) которых соответствуют одинаковые в описанном ниже смысле слоения Лиувилля на $M_{a,b}^4$.

Введено понятие графа Фоменко с именованными атомами: каждому атому инварианта Фоменко слоения Лиувилля неособой поверхности $Q_{a,b,h}^3$ ($\mathfrak{F}$ -образ которой $H = h$ не проходит через особые точки диаграммы $\Sigma_{a,b}$ для $a > |f_l(b)|$) сопоставим символ дуги бифуркационной диаграммы $\alpha_1, \dots, \xi_5$, в прообразе точки пересечения прямой $H = h$ с которой лежит этот атом.

Утверждение. В компактном случае Ковалевской встречается ровно 32 различных графа Фоменко с именованными атомами (таблицы 2.8-2.9 из главы 2 диссертации) слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$.

С учетом утверждения выше о допустимых базисах для дуг $\xi_1, \dots, \xi_5$ и результатов работы [35], данное утверждение дает полный список инвариантов Фоменко–Цишанга.

Утверждение выше следует из рассмотрения пространства орбит $\mathbb{R}^2(a, b)$, точкам которого при $\varkappa > 0$ соответствуют симплектические листы скобки Пуассона (возможно, пустые). Следующим образом определено понятие разделяющего множества $\Theta \subset \mathbb{R}^2(a, b)$.

Пусть на выбранном $M_{a,b}^4$ все особые точки $\Sigma^{a,b}$ принадлежат семействам $y_1, \dots, z_{11}$ и имеют попарно различные абсциссы h_i . Тогда слоение Лиувилля на $M_{a,b}^4$ кодируется последовательной (по возрастанию h) записью названий семейств особых точек и номеров графов Фоменко с именованными атомами, соответствующих интервалам (h_i, h_{i+1}) оси Oh . Например, любая точка

(a, b) из области VIII работы [51] имеет следующий код:

VIII: $y_1, 1, z_4, 13, z_{11}, 11, z_9$.

Определение. Назовем *разделяющим множеством* Θ множество пар (a, b) плоскости Oab , в окрестности которых есть пары (a_i, b_i) с различными кодами или пара (a', b') , которой не соответствует кода.

Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m , описанные И.К.Козловым в [51], содержатся в Θ . Их точкам соответствуют некоторые перестройки бифуркационных диаграмм (в однопараметрических семействах орбит $M_{a,b}^4$), при которых меняется комбинаторное устройство диаграммы.

Описан вид разделяющего множества для системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$, т.е. при $\varkappa > 0$.

Утверждение. В компактном случае Ковалевской (т.е. при $\varkappa > 0$)

1) разделяющее множество Θ является объединением конечного числа дуг гладких кривых. Эти кривые и выбор дуг на них описаны в утверждении ниже. Множество Θ изображено на двух приведенных ниже рисунках, причем второй из них — увеличенный фрагмент первого.

2) Θ разбивает области I-IX плоскости Oab на 61 подобласть, а промежутки X-XII оси Oa разбиваются на 4 интервала и луч. Точкам из одного подмножества соответствуют одинаковые коды, приведенные в таблицах 2.12-2.17 (расположенных в конце главы 2) для случая $b \neq 0$ и в таблице 2.11 (расположенной перед ними) для оси $b = 0$.

3) номер графа Фоменко с именованными атомами, соответствующего произвольному неособому уровню h для пары $(a, b) \in \Theta \setminus f_l$, входит в код каждой из подобластей, содержащих эту пару (a, b) в своей границе.

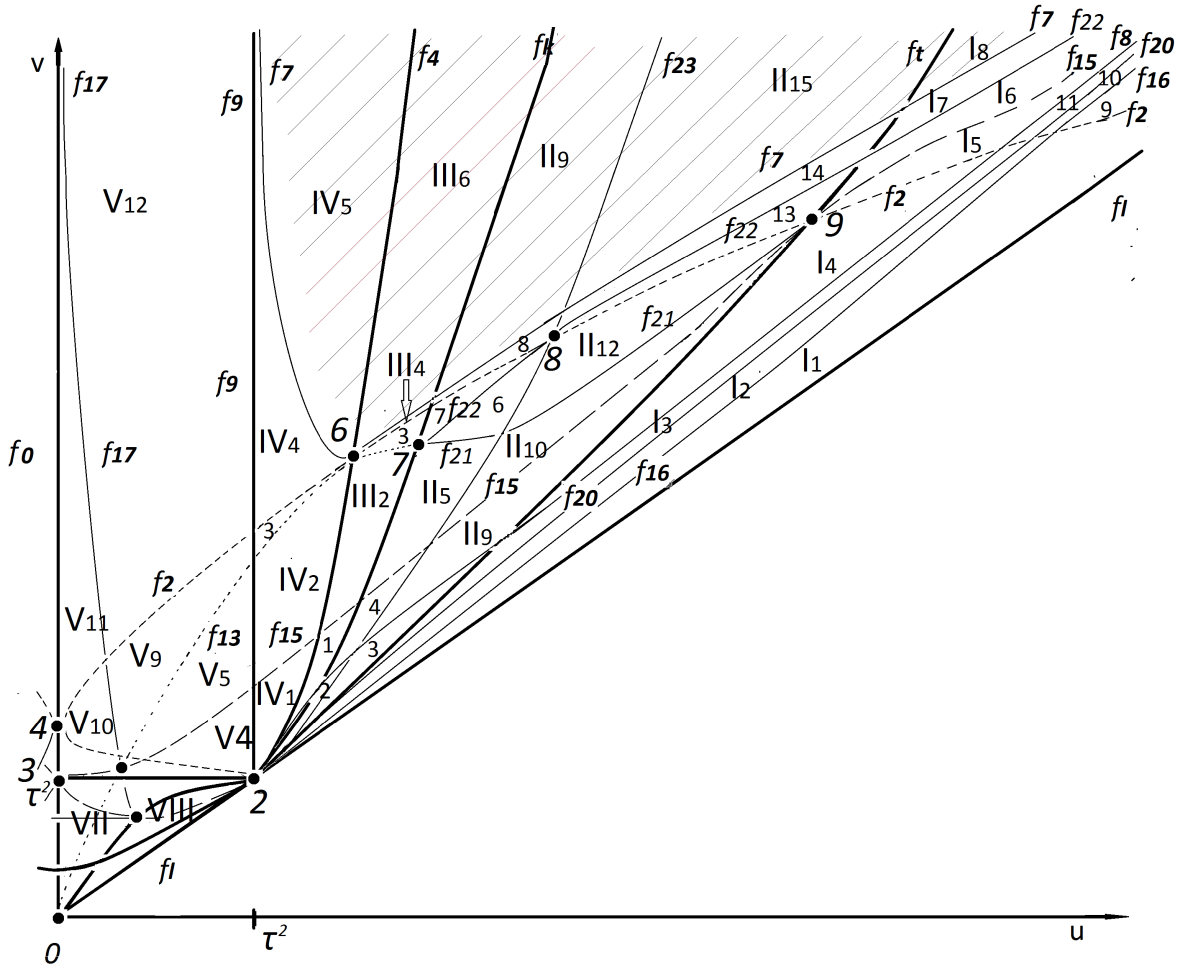
Замечание. Для краткости в таблице 2.16 (расположенной в конце главы 2) в кодах подобластей области II опущены одинаковые символы в конце кода: $\dots, 6, z_2, 7, z_1$.

На рисунках, изображающих разделяющее множество Θ , указаны номера всех подобластей и функций f_i , задающих ребра Θ . Вершины Θ , в которых пересекается более двух кривых, пронумерованы от 0 до 9.

Множество непустых орбит $D = \{(a, b) | a \geq f_l \geq 0\}$ перепараметризуется значениями (u, v) новых функций Казимира, которые выражаются через f_1, f_2 как решения уравнения $f^2 - 2f_1f + 4f_2^2 = 0$:

$$\begin{cases} u = a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} \\ v = a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} a = (u + v)/2 \\ b^2 = uv/(4\varkappa) \end{cases}$$

Замечание. Отметим, что разделяющее множество на двух рисунках изображено в этих координатах (u, v) .



Множество Θ на плоскости орбит содержится в объединении кривых, полученных приравниванием значений h в двух разных особых точках бифуркационной диаграммы $\Sigma^{a,b}$, и пары лучей $a = |f_l(b)|$. Вычисления для случая, когда обе особые точки не являются нулями параметрической кривой, проводятся в координатах (u, v) . В случае, если одна из особых точек — ноль этой параметрической кривой, оказывается удобным применить координаты (q, s) следующего вида:

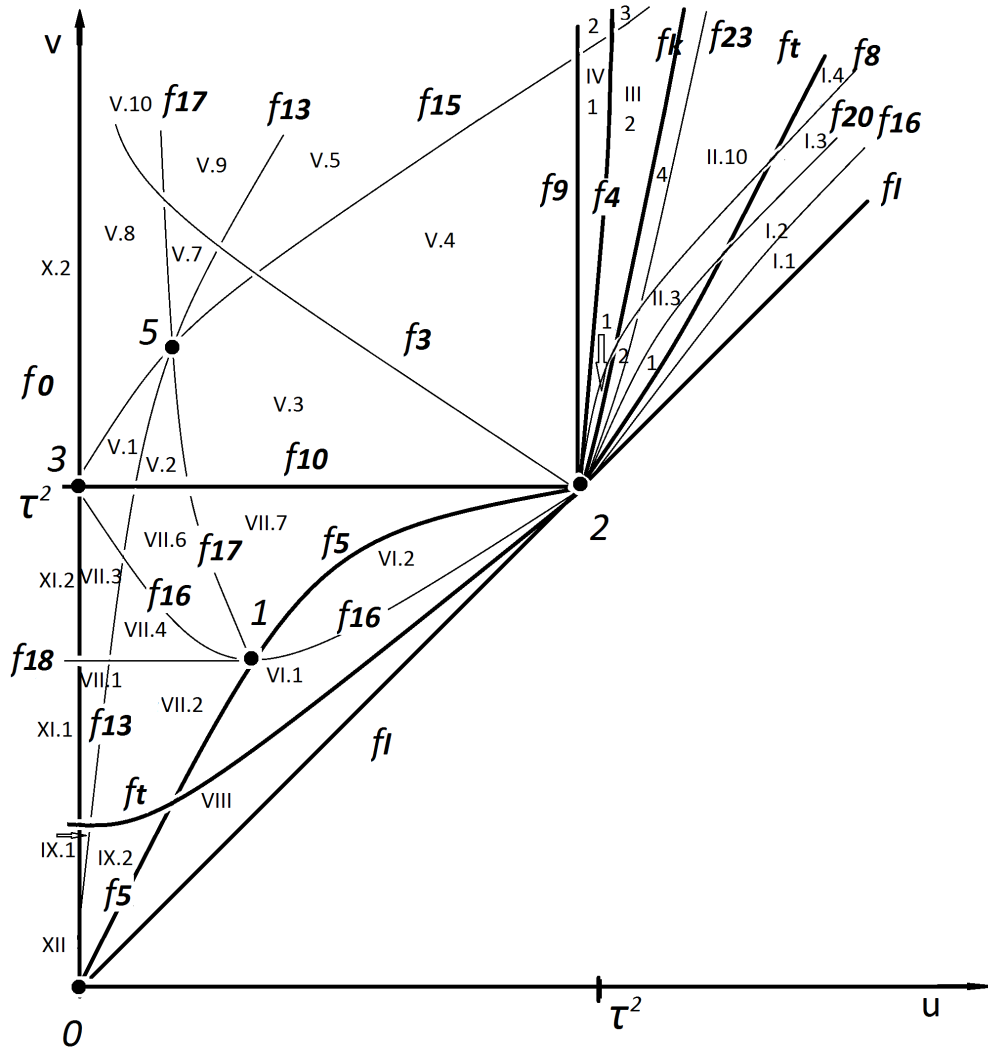
$$\begin{cases} q(u, v) = \frac{\sqrt{u}}{v} \\ s(v) = 1/v \end{cases}, \quad \begin{cases} u = \frac{q^2}{s^2} \\ v = 1/s \end{cases}$$

Утверждение. В компактном случае Ковалевской разделяющее множество Θ состоит из следующих дуг кривых f_i :

1. $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14}, f_{15}, f_{16}$, указанных вместе с требуемыми областями определения в таблице ниже в координатах (u, v) ,

2. $v = f_{18}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,

3. $v = f_{13}(u)$ — при $u \in (0, u_0)$. Здесь $u_0 = \frac{(5 + 3\sqrt{3})^2}{16}\tau^2$,



4. $v = f_{17}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,

5. $a = f_k(b)$ — при $b \geq 0$.

6. Описанные в следующем утверждении кривые f_{20}, f_{22}, f_{23} входят в Θ целиком, кривая f_{21} — до пересечения с f_t .

Уравнения разделяющих кривых $f_{20}, \dots, f_{23}$, на которых достигаются равенства значений гамильтониана в точках $\pm r$ или $\pm l$ (точки пересечения параметрической кривой $h = h(z), k = k(z)$ с правой или левой бифуркационной параболой соответственно) и $rootl, rootr$ (“левый” и “правый” нули параметрической кривой, исключая точку z_1 , т.е. точки y_{11} и y_{10} соответственно), получены в следующем утверждении.

Утверждение. Пусть $\kappa > 0$, тогда, обозначив $\tau = c_1\sqrt{2}$, имеем

1) равенства $h(rootr) = h(+r)$, $h(rootl) = h(-r)$ и $h(rootr) = h(-r)$ в координатах $(q, s) = (v^{-1}\sqrt{u}, v^{-1})$ достигаются на графиках следующих функций $s = f_i(q)$ в плоскости Oqs , где

№	формула	(x_1, x_2)	пары особых точек
0	$u(v) = 0$	$(0, \infty)$	
1	$v(u) = u$	$(0, \infty)$	$(-l, +l)_0, (-r, +r)_0, (l, lt, rt, z_1)_0$
2	$v(u) = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0, \infty)$	$(+l, -r)_1$
3	$v(u) = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0, \tau^2)$	$(+l, +r)_1$
4	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	(τ^2, ∞)	$(+l, lt)_0, (cusp, +l)_0, (cusp, lt)_0$
5	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	$(0, \tau^2)$	$(+r, rt)_0, (cusp, +r)_0, (cusp, rt)_0$
7	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$	(τ^2, ∞)	$(lt, -r)_1$
8	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}$	(τ^2, ∞)	$(+r, lt)_1$
9	$u(v) = \tau^2$	$\tau^2, \infty)$	$(lt, +r)_1, (+r, int)_0, (lt, int)_1$
10	$v(u) = \tau^2$	$(0, \tau^2)$	$(+l, rt)_1, (+l, int)_0, (int, rt)_1$
13	$v(u) = 8\tau\sqrt{u}$	$(0, 64\tau^2)$	$(cusp, -r)_1$
14	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$(0, \tau^2)$	$(l, +l)_1$
14	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	(τ^2, ∞)	$(l, +l)_1, (+l, rootl)_1, (l, rootl)_1$
15	$v(u) = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0, \infty)$	$(l, -r)_1$
16	$v(u) = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0, \infty)$	$(l, +r)_1$
17	$v(u) = \frac{(2u + \tau^2)^3}{27\tau^2 u}$	$(0, \infty)$	$(cusp, l)_1$
18	$v(u) = \frac{\tau^2}{2}$	$\left(0, \frac{\tau^2}{2}\right)$	$(l, rt)_1$

$i \in \{20, 21, 22\}$ соответственно:

$$f_i: \quad s(q) = \frac{-(1 + 2\sigma_i \tau q) + \sqrt{(1 + 2\sigma_i \tau q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_i(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_i^4(q)} \right)}}{\tau^2},$$

2) равенство $h(rootr) = h(+l)$ достигается на кривой, которая в координатах $(\tilde{q}, \tilde{s}) = (u^{-1}\sqrt{v}, u^{-1})$ $\tilde{s} = f_{23}(\tilde{q})$ является графиком функции $\tilde{s} = f_{20}(\tilde{q})$.

Здесь $\sigma_{20} = -1, \sigma_{21} = \sigma_{22} = +1$. В выражении w_i знаки “+” и “−” перед корнем определяются выбором правого или левого корня $rootr$ и $rootl$ соответственно, а знаки “+” и “−” под корнем

равны $-\sigma_i$ и зависят от выбора $+r$ или $-r$:

$$w_{20} = \left(1 + \sqrt{1 - 8\sigma_{20}\tau\sqrt{u}/v}\right), w_{21,22} = \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\sigma_{21}\tau\sqrt{u}/v}\right).$$

Замечание. При $1 - 8\tau q < 0$, выражения w_{21}, w_{22} не определены. Значение $q = 1/(8\tau)$ соответствует общей точке $(u_0, f_{13}(u_0))$ кривых f_{21}, f_{22}, f_{13} и f_k .

С учетом симметрии системы при изменении знака $f_2 = b$ получено следующее количественное описание разделяющего множества.

Следствие. Разделяющее множество Θ имеет структуру графа с 75 вершинами и 199 ребрами, симметричного относительно прямой $b = 0$. Все вершины и ребра Θ изображены на двух рисунках выше, стр. 26 и стр. 27.

Данные результаты изложены в разделах 2.1.3 и 2.1.6 главы 2 и доказаны в разделе 2.2 той же главы.

В разделе 2.1.4 главы 2 описано, каким тройкам (a, b, h) пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют одинаковые графы Фоменко с именованными атомами. *Камерой* названо связное множество троек (a, b, h) с неособой $Q_{a,b,h}$, а *особым множеством* $\mathbb{A}^2$ — множество троек (a, b, h) с особой $Q_{a,b,h}$.

Утверждение. Каждая камера в пространстве параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ является открытым диском D^3 , всем точкам (a, b, h) которого соответствует одинаковый граф Фоменко с именованными атомами слоения на $Q_{a,b,h}^3$.

Каждая камера либо симметрична самой себе относительно плоскости $b = 0$ и трансверсально пересекает ее, либо не имеет с ней общих точек, расположена строго по одну сторону от нее и симметрична другой камере.

Каждый граф Фоменко с именованными атомами реализуется в одной камере (графы 1-11) или паре камер (графы 12-32), симметричных относительно плоскости $b = 0$.

Множество троек (a, b, h) с пустыми $Q_{a,b,h}$ также гомеоморфно трехмерному диску.

Далее ведется описание особого множества $\mathbb{A}^2$ и его стратификация на грани, ребра и вершины. Так *соседними* названы две камеры, которые граничат друг с другом по двумерному подмножеству $\mathbb{A}^2$.

Гранью названо максимальное связное подмножество $\mathbb{A}^2$, каждой точке (a, b, h) которого соответствует ровно одна особая точка $\Sigma^{a,b}$ фиксированного семейства $y_1, \dots, z_{11}$ кроме y_4 и z_{11} . Проекция такой грани на плоскость Oab является инъекцией. Также гранями названы связные подмножества полуплоскостей $a = |f_1(b)|$, для которых $Q_{a,b,h}^1$ гомеоморфно одной или двум окружностям.

грань	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
точка	y_1	y_2	y_3	z_5	z_2	z_1	y_3	y_2	z_8	z_{10}	z_8	y_2	z_9	y_6
выше	1	3	5	6	7	$\bigcirc$	4	8	10	7	11	10	$\bigcirc$	2
ниже	$\bigcirc$	2	8	5	6	7	3	9	8	10	9	11	11	1

грань	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}
точка	z_4	z_6	z_4	y_6	z_{11}	y_2	z_6	y_2	y_6	z_{11}	y_3	z_6	y_2	z_4
выше	12	9	13	12	11	14	8	15	14	10	17	5	16	15
ниже	2	12	1	13	13	12	14	13	15	15	14	17	1	16

грань	p_{29}	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	p_{40}	p_{41}	p_{42}
точка	y_6	z_4	z_4	y_5	z_3	y_5	z_4	y_9	y_7	z_3	y_8	y_8	y_9	z_4
выше	3	17	14	18	6	19	18	20	21	22	6	18	23	20
ниже	16	4	3	17	18	4	19	15	20	21	22	21	16	23

грань	p_{43}	p_{44}	p_{45}	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	p_{50}	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}	p_{56}
точка	y_7	z_4	y_8	y_{11}	y_7	z_3	y_{10}	y_{10}	y_{10}	y_{11}	z_4	y_{10}	y_7	z_4
выше	24	21	19	25	26	27	22	21	20	28	25	23	29	26
ниже	23	24	24	15	25	26	27	26	25	16	28	28	28	29

грань	p_{57}	p_{58}	p_{59}	p_{60}	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}	p_{66}				
точка	y_{10}	y_{12}	z_3	y_{13}	y_{13}	y_{12}	z_4	y_{13}	S^1	S^2				
выше	24	30	31	27	26	32	30	29	$\bigcirc$	$\bigcirc$				
ниже	29	13	30	31	30	1	32	32	13	31				

Утверждение. Каждая грань является открытым двумерным диском. Пересечение грани двух соседних камер (за исключением пары камер 1 и 2), содержит ровно одну грань. В следующей таблице перечислены все пары соседних камер. Для каждой из них указано семейство особых точек, соответствующее точкам грани.

Замечание. Пара камер 1 и 2 граничит по двум граням, симметричным относительно плоскости $b = 0$. Их точкам соответствует семейство y_6 . В плоскости $b = 0$ точкам кривой, являющейся границей этих граней, соответствует особая точка из семейства y_4 . При этом типичная особенность типа седло-узел перестроилась в типичную особенность типа “эллиптическая вилка”, см. [35].

Семейство z_7 соответствует точкам кривой в плоскости $b = 0$, лежащей в границе нескольких граней. При $b \rightarrow 0$ не происходит перестроек прообразов особых точек типа z_4 и z_6 , имеющих тип центр-центр.

Замечание. Камеры в паре (в таблице) упорядочены по возрастанию h . Для граней p_{65}, p_{66} (и граней, симметричных им при $b < 0$) указано семейство особых точек $\Sigma^{a,b}$ или количество

окружностей, одна или две, составляющих $Q_{a,b,h}$. Знак $\odot$ обозначает множество всех троек (a, b, h) с пустыми $Q_{a,b,h}$.

Остальные дуги Θ состоят из точек (a, b) , для которых совпадают значения h гамильтониана H для двух и более особых точек $\Sigma^{a,b}$. Следующее утверждение описывает, как разделяющее множество делит плоскость Oab .

Содержание главы 3

В **третьей главе** изучается аналог системы Ковалевской на алгебре $so(3, 1)$, т.е. при отрицательных значениях $\varkappa < 0$ параметра пучка скобок Ли–Пуассона.

В случае нулевой постоянной площадей $f_2 = b = 0$ построены бифуркационные диаграммы отображения момента (H, F) , опираясь на результаты работы [51] и изложенные в ней методы (напомним, в ней рассматривался случай $so(4)$, т.е. $\varkappa > 0$).

Теорема. *Бифуркационная диаграмма отображения момента интегрируемого случая Ковалевской на $so(3, 1)$ (при $\varkappa < 0$) для нулевого значения интеграла площадей $f_2 = b = 0$ определяется значением a геометрического интеграла f_1 . При этом ось Oa разбивается на шесть интервалов XII–XVII. Диаграммы для каждой из них показаны на рис. 3.1. Здесь $4a_0 := \varkappa^2 c_1^2$.*

$$Oa : \quad -\infty, \text{ XII}, -4a_0, \text{ XIII}, -a_0, \text{ XIV}, 0, \text{ XV}, a_0, \text{ XVI}, 4a_0, \text{ XVII}, +\infty.$$

Дуги диаграмм Σ обозначены аналогично главам 1-2 диссертации и работам [35] и [118]. Буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответствуют дугам кривых, встречающихся при $\varkappa = 0$, а буква ξ — “новой” бифуркационной параболе (при $\varkappa = 0$ она отсутствует). Вся необходимая информация о “новых” дугах (т.е. дугах, не имеющих аналогов в случае Ковалевской на $e(3)$) содержится следующей таблице. В частности, в ней для каждой дуги в таблице указано количество связанных компонент в близких регулярных точках при больших ($k > k(\tau)$) и меньших ($k < k(\tau)$) значениях k интеграла Ковалевской $K = K_\varkappa$. Также указано, на каких орбитах $M_{a,b}^4$ (двумерные области и интервалы оси $b = 0$) соответствующая дуга содержится в $\Sigma_{a,b}$.

Прообраз множества особых точек $\Sigma^{a,b}$ содержит в себе все критические точки ранга 0 отображения $\mathfrak{F}$ и все вырожденные S^1 -орбиты, состоящие из точек ранга 1. Все критические точки ранга 1 кроме критических точек в прообразе точек w_1, w_4, w_8 невырождены.

Для особых точек $\Sigma^{a,b}$ в случае $\varkappa < 0$ используются обозначения y_i из [51] для “старых” точек (т.е. для точек, имеющих аналог при $\varkappa = 0$) и w_i для “новых” особых точек (точек, не имеющих такого аналога). Информация о “новых” особых точках x собрана в следующей таблице.

Утверждение. *Все критические точки ранга 0, лежащие в орбитах $M_{a,0}^4$ для $a \notin \{\pm \varkappa^2 c_1^2, \pm \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}, 0\}$, $\varkappa < 0$, невырождены. Особые точки $w_2, w_3, w_5, w_6, w_7, w_9, w_{10}$ являются их образами в $\Sigma_{a,0}$ при*

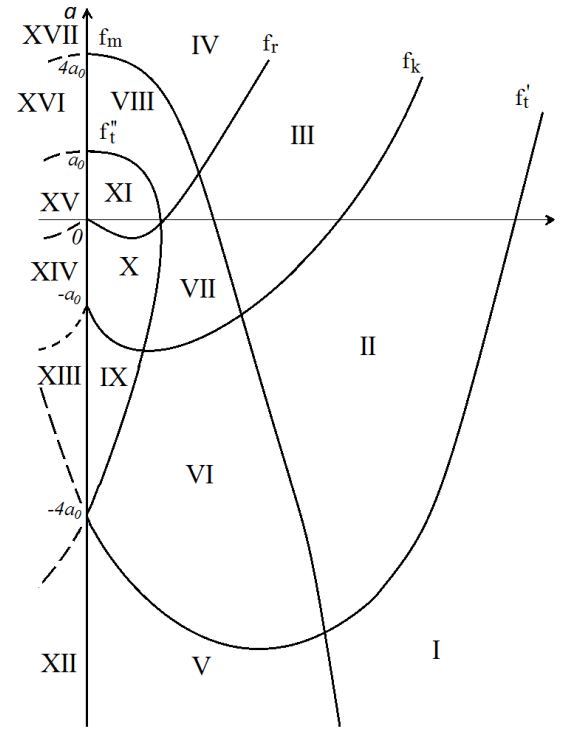
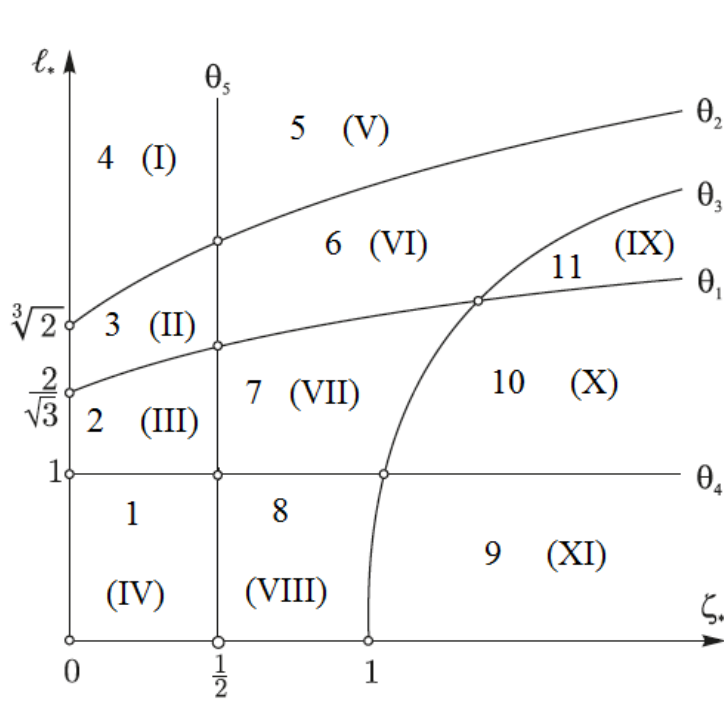
новая дуга τ	3-атом	$k > k(\tau)$	$k < k(\tau)$	концы дуги τ	2-области	$b = 0$
ξ_6	$2A$	$2T^2$	$\emptyset$	$w_2; \{w_1, \infty\}$	V-XI	XII-XVI
α_3	$2A$	$\emptyset$	$2T^2$	$w_2; \{w_3, w_4, w_{10}\}$	V-XI	XII-XVI
β_4	$2B$	$4T^2$	$2T^2$	$w_4; \{w_6, w_7\}$	IX-XI	XIII-XV
δ_3	$4A$	$\emptyset$	$4T^2$	$w_4; \{w_5, w_9\}$	IX-XI	XIII-XV
γ_8	B	T^2	$2T^2$	$w_1; \{w_3, w_6\}$	V-XI	XV-XVI
γ_9	$2B$	$4T$	$2T$	$w_5; \{w_6, w_8\}$	IX-XI	XIV-XV
γ_{10}	C_2	$2T$	$2T$	$\{w_{10}, w_7\}; \infty$	-	XIII-XIV
γ_{11}	$2C_2$	$4T$	$4T$	$w_8; w_7$	-	XIII-XIV

отображении момента $\mathfrak{F}$. Невырожденные особенности ранга 0 перечислены в следующей таблице вместе с их представлением в виде почти прямого произведения 2-атомов (см. [4]). Также указано, для точек (a, b) каких областей и интервалов оси Oa в пространстве орбит Oab данная особая точка w_i принадлежит $\Sigma_{a,0}$.

имя	[53]	[51]	rk	$\#$	круг. молекула	$b \neq 0$	Oa
w_1	γ_{ij}	rt	1	1	эллипт. вилка	V-XI	XV-XVI
w_2	δ_4	h_{int}	0	2	$2 A \times A$	V-XI	XI-XVI
w_3	δ_{12}	$+l$	0	1	$A \times B$	V-VIII	XVI
w_4	γ_{ij}	h_l	1	2	2 эллипт. вилка	IX-XI	XIII-XV
w_5	δ_{36}	r_3	0	2	$2 A \times B$	IX-XI	XIV-XV
w_6	δ_{13}	$+l$	0	1	$B \times B$	IX-XI	XV
w_7	-	$+l$	0	2	$B \times C_2$	-	XIII-XIV
w_8	-	z_{cusp}	1	2	2 гиперб. вилка	-	XIV
w_9	-	$r_{3,l}$	0	4	$2 A \times C_2$	-	XIII
w_{10}	-	$+l$	0	2	$A \times C_2$	-	XII

Круговые молекулы особых точек w_1, w_4, w_8 совпадают с круговыми молекулами известных вырожденных особенностей ранга 1: эллиптической вилки (w_1, w_4) и гиперболической вилки (w_8), см. [35].

Если $b \neq 0$, то случай Ковалевской на $so(3, 1)$ можно отождествить со случаем Ковалевской–Соколова, бифуркационные диаграммы которого построены в работе [53] М.П.Харламова, П.Е.Рябова и А.Ю.Савушкина. Соответствие двумерных областей с комбинаторно одинаковыми бифуркационными диаграммами для двух этих систем — областей I–XI на плоскости Oab в системе Ковалевской $so(3, 1)$ и областей 1–11 плоскости $Ol_*\zeta_*$ случая Ковалевской–Соколова, задается следующей парой рисунков. Тем самым, имеется полный ответ о бифуркационных диаграммах системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$, исключая таковые для разделяющих кривых f_m, f_r, f_k, f_t .



Далее решается вопрос о допустимых базисах для “новых” дуг бифуркационной диаграммы.

Теорема. Допустимые базисы для “новых” дуг $\alpha_3, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \beta_4, \delta_3, \xi_6$ выражаются через однозначно определенные λ -циклы атомов-бифуркаций следующим образом:

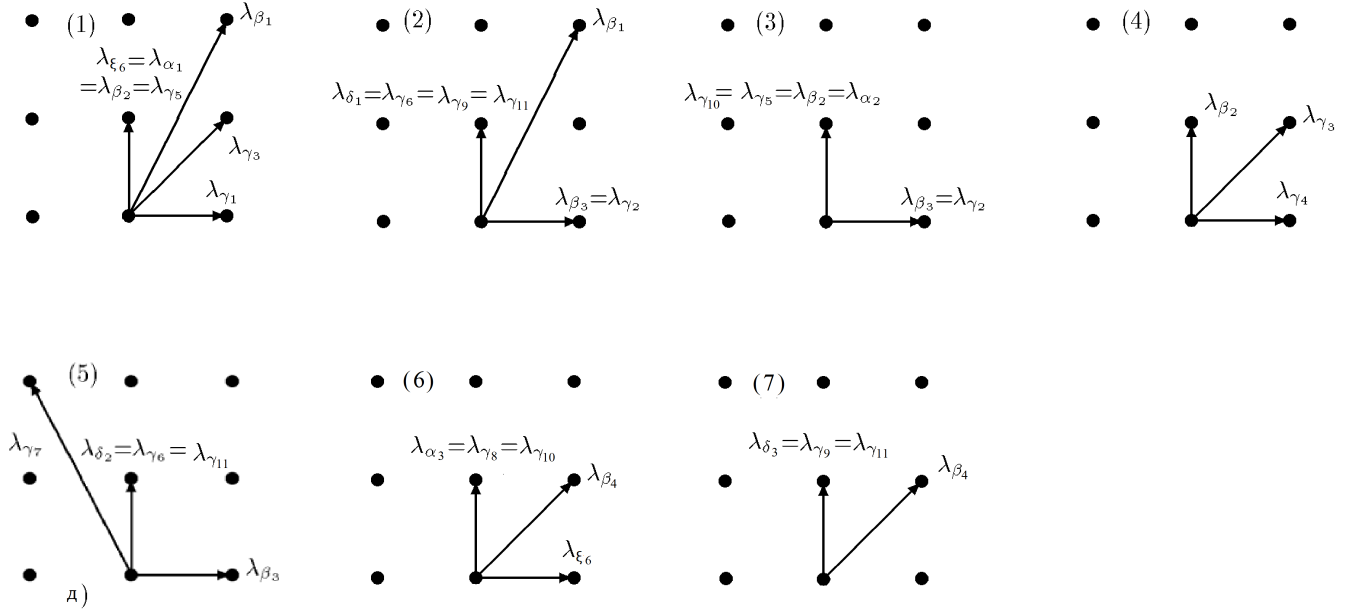
$$\alpha_3 : \frac{(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{\oslash}, \quad \beta_4 : \frac{(\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\gamma_8})_{(6)}}{(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_9})_{(7)}}, \quad \gamma_8 : \frac{(\lambda_{\gamma_8}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_8}, -\lambda_{\beta_1})_{(1)}}, \quad \gamma_9 : \frac{(\lambda_{\gamma_9}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_9}, -\lambda_{\beta_1})_{(2)}},$$

$$\gamma_{10} : \frac{(\lambda_{\gamma_{10}}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_{10}}, -\lambda_{\beta_3})_{(3)}}, \quad \gamma_{11} : \frac{(\lambda_{\gamma_{11}}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_{11}}, -\lambda_{\beta_3})_{(2,5)}}, \quad \delta_3 : \frac{(\lambda_{\delta_3}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{\oslash}, \quad \xi_6 : \frac{\oslash}{(\lambda_{\xi_6}, \lambda_{\gamma_5})_{(6)}}.$$

Представление этих λ -циклов как элементов целочисленной решетки (фундаментальной группе тора Лиувилля) показано на следующем рисунке. По сравнению с классической системой Ковалевской или ее $so(4)$ аналогом, в системе Ковалевской $so(3,1)$ возникает два новых семейства регулярных торов Лиувилля, обозначенных (6) и (7).

Данная теорема позволяет завершить вычисление меток r, ε, n для инвариантов Фоменко–Цишанга для классов слоений $\mathbb{A}_1, \dots, I$, начатое в работе [53]. Итоговый ответ о лиувиллевой классификации слоений на изоэнергетических поверхностях в случае $\varkappa < 0$ дает следующая теорема.

Теорема. 1. В системе Ковалевской на алгебре $so(3,1)$ все 25 классов слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 (существующих при $b \neq 0$) попарно лиувиллево не эквивалентны, т.е. имеют различные инварианты Фоменко–Цишанга:



- 10 классов $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{B}_3, \mathbb{D}_1, \mathbb{A}_4$ совпадают с классами $A-J$ соответственно для классической системы Ковалевской (на алгебре $e(3)$),
- 3 класса $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{F}_1$ совпадают с классами A, B, C системы Соколова (изученной в [36], [37]),
- 6 классов $\mathbb{B}_4, \mathbb{B}_5, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4, \mathbb{F}_2, \mathbb{G}$ могут быть получены из классов E, F, I, H, D, G системы Соколова путем возмущения $C_2 \longrightarrow B \frac{r=\infty}{\varepsilon=1} B$,
- инварианты Фоменко–Цишанга классов $\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_8, \mathbb{B}_6, \mathbb{D}_2$ показаны на следующем рисунке.

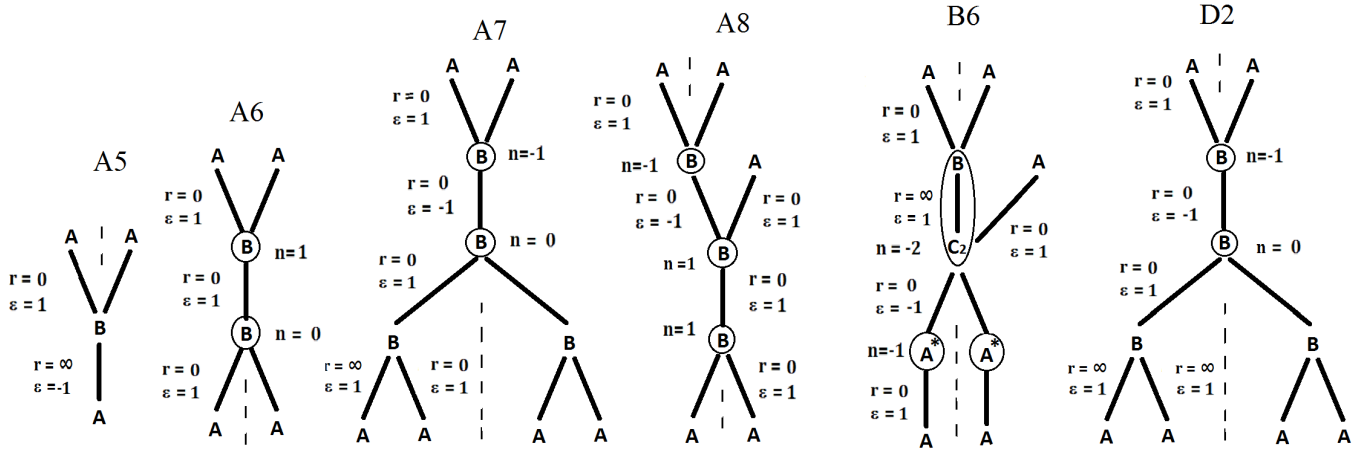
2. В случае $b = 0$ каждое слоение Лиувилля принадлежит к одному из следующих классов: классов $A-I$ системы Соколова, классов $A-D$ классической системы Ковалевской или классов $\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6$ системы Ковалевской–Соколова, существующих также при $b \neq 0$.

3. Слоения $\mathbb{A}_5$ и $\mathbb{A}_6$ принадлежат соответственно к классам L_{26} и L_7 системы Ковалевской на алгебре $so(4)$ (возможно, после изменения знака боттовского интеграла).

Содержание главы 4

В четвертой главе диссертации для произвольного значения параметра пучка $\varkappa$ изучен вопрос компактности совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ четырех первых интегралов псевдо-евклидовой системы Ковалевской с данным $\varkappa$

$$T_{a,b,h,f} = \{\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x}) | \hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b, H_{ps} = h, F_{ps} = f\}.$$



При произвольных значениях $\varkappa, a, b$ получено достаточное условие компактности уровня $T_{a,b,h,f}$, следовательно, и каждого слоя Лиувилля, входящего в него.

Теорема. Пусть для $H_{ps} = h, F_{ps} = f, \varkappa$ выполнено $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f = k$. Тогда для неевклидовой системы Ковалевской со значением $\varkappa$ параметра пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира $\hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b$ совместная поверхность уровня интегралов $T_{a,b,h,f}$ компактна.

Затем был получен следующий критерий компактности уровня $T_{a,b,h,f}$ в предположении $b \neq 0$.

Теорема. Пусть $b \neq 0$ и $-\sqrt{k} \leq \varkappa b_1^2 - 2h \leq \sqrt{k}$, где $f = F_{ps} = K_{\varkappa}/4 = k/4$. Тогда совместная поверхность уровня $T_{a,b,h,f}$ содержит как минимум одну неограниченную компоненту.

Тем самым, при $\hat{f}_2 = b \neq 0$ получена бифуркационная кривая — парабола на плоскости значений H_{ps} и F_{ps} . Вне данной параболы слои компактны или пусты, а внутри нее и на ней — некомпактны и непусты. Иными словами, получен пример “некомпактной перестройки” слоения Лиувилля.

Отметим, что исходную систему из четырех уравнений удалось свести к рассмотрению корней $P(r)$ четвертой степени, коэффициенты $g_i, 0 \leq i \leq 4$ при членах r^i которого зависят от двух угловых переменных $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$:

$$g_4 = 2h - \varkappa b_1^2 + \sqrt{k} \cos(\alpha - 4\beta), \quad g_3 = 8b_1 b \cos \beta.$$

Неограниченность совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ оказалась тесно связана с падением степени многочлена P (т.е. обращением в ноль функции $g_4(\alpha, \beta)$) на непустом подмножестве тора с угловыми координатами α, β .

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН проф. А.Т. Фоменко за постановку задачи, внимание и поддержку во время работы. Автор благодарен проф. Е.А.Кудрявцевой, проф. А.А.Ошемкову и доц. И.К.Козлову за ценные комментарии и обсуждения на разных этапах исследования, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за вдохновляющую атмосферу и поддержку.

Глава 1

Необходимые определения, обозначения и история вопроса

1.1 Интегрируемые системы и топологическая классификация их слоений Лиувилля

1.1.1 Симплектические и пуассоновы многообразия

В этом разделе напомним определения нескольких базовых объектов симплектической геометрии, лежащих в основе теории интегрируемых гамильтоновых систем. Более подробно с их свойствами можно ознакомиться, например, в книгах [62], [63] и [4].

1.1.1.1 Симплектическое многообразие и гамильтоново поле на нем

Определение 1.1.1. *Симплектической структурой* на гладком многообразии M называют внешнюю дифференциальную 2-форму ω , которая замкнута (т.е. $d\omega = 0$) и невырождена в каждой точке $x \in M$ (т.е. матрица формы имеет максимальный ранг n в любом базисе в касательного пространства $T_x M$ к многообразию M в точке x).

Многообразие M вместе с заданным на нем симплектической структурой называют *симплектическим многообразием*. Такое многообразие обязано быть четномерным (из свойства невырожденности формы). В главах 2-4 будут рассматриваться только симплектические многообразия размерности 4 или 2. Будем обозначать их (M^4, ω) и (M^2, ω) соответственно.

Локальное устройство такого многообразия описывается теоремой Дарбу (см. например, [4, Т.1, Гл. 1.3 Теорема 1.1]).

Теорема 1.1 (Дарбу). *У любой точки симплектического многообразия (M^{2n}, ω) существует такая открытая окрестность с регулярными локальными координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, в которой форма ω имеет вид $\sum_i dp_i \wedge dq_i$.*

Иными словами, локальных инвариантов симплектического многообразия не имеет.

По гладкой функции $H \in C^\infty(M)$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) можно построить векторное поле $\text{sgrad } H$ (часто также обозначаемое v_H), называемое *косым градиентом* функции H или *гамильтоновым векторным полем* с гамильтонианом H . Оно задается следующей формулой:

$$\omega(u, \text{sgrad } H) = u(H),$$

где $u(H)$ производная гамильтониана H вдоль произвольного вектора u , касательного к M . В локальных координатах $(x^1, \dots, x^{2n})$ векторное поле $\text{sgrad } H$ можно выразить так:

$$(\text{sgrad } H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Здесь ω^{ij} – элементы обратной матрицы к матрице $\Omega = (\omega_{ij})$ в базисе $(x^1, \dots, x^{2n})$.

1.1.1.2 Пуассоновы многообразия и их симплектические листы

Другим базовым объектом наших исследований является конечномерное *пуассоновое многообразие* $(M, \{\cdot, \cdot\})$, т.е. конечномерное гладкое многообразие, оснащенное *скобкой Пуассона*.

Определение 1.1.2. Пусть M – гладкое многообразие, и C^∞ – пространство гладких функций на нем. Тогда отображение $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ называется *скобкой Пуассона*, если относительно него множество гладких функций на M образует алгебру Ли и удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}.$$

Напомним, что линейное пространство V над некоторым полем называют *алгеброй Ли*, если на V определена операция $[\cdot, \cdot]$ коммутатор: $V \times V \rightarrow V$, являющаяся линейной, кососимметричной и удовлетворяющая тождеству Якоби:

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0.$$

Задание скобки Пуассона, как хорошо известно [4, Т.1, Гл. 1], эквивалентно заданию бивектора A , такого что

$$A^{j\alpha} \frac{\partial A^{ki}}{\partial x^\alpha} + A^{i\alpha} \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^\alpha} + A^{k\alpha} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Тем самым, скобка Пуассона выражается через бивектор так:

$$\{f, g\} = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Аналогом теоремы Дарбу для пуассоновых многообразий является теорема Дарбу–Вейнштейна (подробнее см. [64]).

Теорема 1.2 (Дарбу–Вейнштейн). У любой точки x пуассонова многообразия M^n имеется открытая окрестность с регулярными локальными координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_r$ (где $2n + r = n$), в которой скобка Пуассона задается следующими условиями:

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{s_i, s_j\} = \varphi_{ij}(s_1, \dots, s_k), \quad \{p_i, q_j\} = \delta_j^i, \quad \{p_i, s_j\} = \{q_i, s_j\} = 0,$$

и каждая из функций φ_{ij} равна нулю в точке x .

На локальной поверхности, задаваемой в указанных выше координатах уравнениями $s_i = 0, 1 \leq i \leq r$, скобка Пуассона определяет невырожденную замкнутую 2-форму, т.е. симплектическую структуру. Она имеет стандартный вид $\omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$.

Из теоремы Дарбу–Вейнштейна следует, что указанные локальные поверхности образуют погруженное подмногообразие, называемое *симплектическим листом* скобки Пуассона. При этом две точки принадлежат одному симплектическому листу в том и только том случае, когда одну из них можно получить из другой некоторыми сдвигами вдоль гамильтоновых векторных полей.

Отметим, что каждое симплектическое многообразие автоматически будет являться пуассоновым. Для этого бивектор Пуассона можно определить так: $A^{ij}\omega_{jk} = \delta_k^i$. Тогда из замкнутости формы ω следует тождество Якоби для бивектора Пуассона A . В инвариантном виде данное условие записывается так:

$$\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \operatorname{sgrad} f(g).$$

Имея бивектор Пуассона, можно по гладкой функции H определить векторное поле, являющееся аналогом косо́го градиента (гамильтонова поля) в симплектическом случае:

$$v^i = A^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Будем обозначать и называть его так же: *косым градиентом* $\operatorname{sgrad} H$. Тогда симплектическую структуру на произвольном симплектическом листе скобки Пуассона можно задать так:

$$\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \{f, g\}.$$

Пусть многообразие является пуассоновым или симплектическим, т.е. на нем задана скобка Пуассона (например, по симплектической структуре).

Определение 1.1.3. Скажем, что две гладкие функции f и g на многообразии со скобкой Пуассона *коммутируют*, если $\{f, g\} = 0$.

В случае пуассоновых многообразий имеется важный класс функций, называемых функциями Казимира:

Определение 1.1.4. Функция f на пуассоновом многообразии $(M, \{\cdot, \cdot\})$ называется *функцией Казимира*, если она коммутирует с любой гладкой функцией g на M , т.е. $\{f, g\} = 0$.

1.1.1.3 Скобка Ли–Пуассона

Теперь определим основной подкласс пуассоновых многообразий, который используется в настоящей работе.

Рассмотрим для начала конечномерную алгебру Ли G над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Двойственное пространство G^* к этой алгебре Ли будем для краткости называть ее *коалгеброй*. Отметим, что в конечномерном случае имеется каноническое отождествление $(G^*)^* = G$.

Определение 1.1.5. *Скобкой Ли–Пуассона* назовем линейную скобку Пуассона на G^* следующего вида:

$$\{f, g\} = \langle x, [df|_x, dg|_x] \rangle. \quad (1.1)$$

Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено значение ковектора из G^* на векторе из G через $\cdot$, а через $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в алгебре Ли G .

В настоящей работе рассматриваются динамические системы, заданные на шестимерном линейном пространстве $\mathbb{R}^6$ с подходящей скобкой Ли–Пуассона.

1.1.1.4 Пучок алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$

Выберем в пространстве $\mathbb{R}^6$ базис $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ и введем семейство коммутаторов, зависящих от параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$:

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k, \quad (1.2)$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $\{123\} \rightarrow \{ijk\}$. Как легко проверить, случаи $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$ и $\varkappa > 0$ соответствуют алгебрам Ли $so(3, 1)$, $e(3)$ и $so(4)$ соответственно.

Обозначим базис двойственного пространства, соответствующий базису $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$, как $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$. Тогда однопараметрическому семейству коммутаторов на исходном $\mathbb{R}^6$ будет соответствовать однопараметрическое семейство скобок Ли–Пуассона. Они имеют аналогичный вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k \quad (1.3)$$

и соответствуют коалгебрам $so(3, 1)^*$, $e(3)^*$ и $so(4)^*$ для алгебр Ли $so(3, 1)$, $e(3)$ и $so(4)$. Отметим, что нормировкой координат $x_i \rightarrow \lambda x_i$, $i = 1, 2, 3$, параметр $\varkappa$ можно сделать равным одному из трех чисел $-1, 0, 1$.

Замечание 1. *Изучаемые в настоящей работе динамические системы задаются на коалгебрах Ли из описанного выше пучка (в главе 2: случай $\varkappa > 0$, а в главе 3: случай $\varkappa < 0$) или из пучка, являющегося псевдо-евклидовым аналогом для данного (глава 4). В дальнейшем, тем не менее, будем также (менее строго) говорить о них как о динамических системах на соответствующих алгебрах Ли, опуская звёздочки.*

Функциями Казимира скобок Пуассона, соответствующих алгебрам Ли из пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, являются функции

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2), \quad (1.4)$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3. \quad (1.5)$$

В динамике твердого тела (т.е. в случае $\varkappa = 0$) эти функции f_1 и f_2 называют геометрическим интегралом и интегралом площадей соответственно. Мы будем далее называть их также, опуская (для f_1) слово “аналог” в случае $\varkappa \neq 0$. Значения данных функций будем обозначать как a, b :

$$f_1 = a, \quad f_2 = b.$$

Определение 1.1.6. Совместной поверхностью уровня набора функций (в данном случае — пары функций f_1 и f_2 на $\mathbb{R}^6$) назовем множество

$$M_{a,b} = \{y = (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) | f_1(y) = a, f_2(y) = b\}. \quad (1.6)$$

Исключая случай $a = b = 0$ при $\varkappa \leq 0$, каждое такое множество $M_{a,b}$ будет являться симплектическим листом скобки Ли–Пуассона (для произвольного $\varkappa \in \mathbb{R}$) и орбитой коприсоединенного представления.

Для алгебры Ли $so(4)$, т.е. в случае $\varkappa > 0$, орбита $M_{a,b} = M_{a,b}^4$ четырехмерна и диффеоморфна $S^2 \times S^2$ произведению двух 2-сфер при $a > 2\sqrt{\varkappa}|b|$. Если $a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$ и $b \neq 0$, то орбита $M_{a,b} = M_{a,b}^4$ двумерна и диффеоморфна 2-сфере S^2 . В случае $a = b = 0$ при $\varkappa > 0$ орбита нульмерна и состоит из одной точки $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. В остальных случаях множество $M_{a,b}$ пусто.

Для алгебры Ли $e(3)$, т.е. в случае $\varkappa = 0$, орбита $M_{a,b} = M_{a,b}^4$ четырехмерна и диффеоморфна T^*S^2 кокасательному расслоению к 2-сфере при $a > 0$. Условие $f_1 = 0$ равносильно тому, что $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В частности, в этом случае и $f_2 = 0$, т.е. $M_{0,0}$ есть $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3, 0, 0, 0)$. Отметим, что симплектическими листами в нем являются сферы $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = r^2$ для $r > 0$ и начало координат для $r = 0$. В остальных случаях (например, при $a < 0$ или при $b \neq 0$ и $a = 0$) множество $M_{a,b}$ пусто.

Для алгебры Ли $so(3, 1)$, т.е. в случае $\varkappa < 0$, орбита $M_{a,b} = M_{a,b}^4$ четырехмерна и диффеоморфна T^*S^2 — кокасательному расслоению к 2-сфере — при всех парах a, b , исключая $a = 0, b = 0$. Поверхность уровня $M_{0,0}$ также четырехмерна: ее точка соответствует паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{J}$, где $\mathbf{x} \perp \mathbf{J}$ как вектора в одном $\mathbb{R}^3$, а $|\mathbf{x}| = \sqrt{-\varkappa}|\mathbf{J}|$. Иными словами, множество $M_{a,b}$ не пусто для всех точек плоскости $\mathbb{R}^2(a, b)$.

Определение 1.1.7. Орбиту коприсоединенного представления для коалгебры со скобкой Пуассона из пучка 1.3 будем называть *регулярной*, если она является гладким четырехмерным многообразием и совпадает с содержащей ее совместной поверхностью уровня $M_{a,b}$ функций f_1, f_2 .

Определение 1.1.8. Здесь и далее *плоскостью орбит* будем называть называть 2-плоскость $\mathbb{R}^2(a, b)$ значений функций f_1 и f_2 . Также будем обозначать ее Oab .

Точку плоскости Oab , являющуюся образом регулярной орбиты, также будем также называть *регулярной*.

Замечание 2. Фактически, в настоящей работе не рассматриваются топологические свойства прообраза точки $(0, 0)$ в случаях, когда он состоит не из одной орбиты (симплектического листа), т.е. в случае $\kappa \leq 0$. Так, в случае алгебры Ли $so(3, 1)$ (т.е. $\kappa < 0$), мы опустим рассмотрение прообразов точек (a, b) , лежащих на одной из нескольких кривых на плоскости Oab (в частности, точки $(0, 0)$). В случае алгебры Ли $e(3)$ (т.е. $\kappa = 0$) случай $a = 0$ считается тривиальным.

Отметим следующее важное отличие случаев $\kappa \neq 0$ (алгебр Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$) от случая $\kappa = 0$ (т.е. алгебры Ли $e(3)$). В случае $\kappa = 0$ можно нормировкой координат сделать функцию $f_1 = 1$. Тем самым, рассмотрение динамических систем можно вести на пятимерном множестве $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$. В случае алгебр Ли $so(4)$ или $so(3, 1)$ линейная замена, приводящая κ к ± 1 , определит нам значения a, b функций f_1, f_2 .

Замечание 3. Иными словами, в случаях $so(4)$ или $so(3, 1)$ рассматриваемые ниже системы (аналоги случая Ковалевской, известного из динамики твердого тела) будут “многопараметрическими”: их топологические свойства начнут зависеть не только от значения b интеграла площадей, но и от значения a геометрического интеграла f_1 .

1.1.2 Интегрируемые системы в симплектическом и пуассоновом случаях

Хорошо известно (см., например, [4]), что многие динамические системы механики и математической физики, обладающие “большим количеством” законов сохранения, могут быть заданы как динамические системы на двойственном пространстве к алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства. В настоящем разделе мы напомним определения таких систем и их базовые свойства.

1.1.2.1 Гамильтонова система и ее изоэнергетические поверхности

Гамильтоново векторное поле $v = \text{sgrad } H$ задает на M^{2n} динамическую систему $\dot{x} = \text{sgrad } H$, которую будем называть *гамильтоновой системой* на многообразии (M^{2n}, ω) . Тогда многообразие M^{2n} называют *фазовым пространством* данной системы, а натуральное число n , т.е. половину размерности M , *числом степеней свободы* данной гамильтоновой системы. Здесь и далее все рассматриваемые гамильтонианы не зависят от времени.

Фазовой траекторией или, для краткости, траекторией гамильтоновой системы назовем решение $x = x(t)$ данной системы ОДУ.

Важным классом подмножеств фазового пространства M^{2n} гамильтоновой системы является изоэнергетическая поверхность Q :

Определение 1.1.9. Изоэнергетической поверхностью Q_h назовем поверхность уровня $H = h$ в M^{2n} .

Здесь и ниже изоэнергетические поверхности Q будут рассматриваться для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

1.1.2.2 Вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система

Определение 1.1.10. Первым интегралом гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ называют гладкую на M функцию, постоянную на всех фазовых траекториях этой системы.

Замечание 4. Данное условие задается формулами $\text{sgrad } H(f) = 0$ или $\{f, H\} = 0$ (для скобки Пуассона с бивектором $A^{ij} = \omega^{ij}$, задаваемым по симплектической структуре ω).

Определение 1.1.11. Гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций $F_1, \dots, F_n$ на M^{2n} таких, что:

1. функции $F_1, \dots, F_n$ являются первыми интегралами системы $v = \text{sgrad } H$, т.е. $\{H, F_i\} = 0$ для $i = 1, \dots, n$,
2. функции $F_1, \dots, F_n$ функционально независимы на M^{2n} , т.е. их дифференциалы $dF_1, \dots, dF_n$ линейно независимы почти всюду на M^{2n} ,
3. $\{F_i, F_j\} = 0$ для $1 \leq i, j \leq n$,
4. гамильтоновы векторные поля $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ полны, т.е. для каждого из них определен сдвиг вдоль его фазовых траекторий на любое вещественное число t .

Определение 1.1.12. Набор $F_1, \dots, F_n$ из определения выше будем называть отображением момента и обозначать $\mathfrak{F}$ как отображение из M^{2n} в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.13. В настоящей работе будем для краткости называть интегрируемыми гамильтоновыми системами или ИГС те вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы, которые имеют две степени свободы.

Замечание 5. В рассматриваемых ниже системах в качестве F_1 будет браться гамильтониан H системы (не зависящий от времени и потому являющийся первым интегралом системы). В таком случае ИГС полностью задается, например, набором (M^4, ω, H, F) , где $F_2 = F$ — первый интеграл, удовлетворяющий вместе с гамильтонианом H условиям определения выше.

1.1.2.3 Слоение Лиувилля ИГС и теорема Лиувилля

Определение 1.1.14. *Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе $(M^{2n}, \omega, H, F_1, \dots, F_n)$, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня n первых интегралов $F_1, \dots, F_n$ — на слои данного слоения Лиувилля.*

Замечание 6. *Поверхность уровня T_ξ отображения момента $\mathfrak{F} = (F_1, \dots, F_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi$ (как отображения из M^{2n} в $\mathbb{R}^n$, т.е. совместная поверхность уровня набора n первых интегралов $F_1, \dots, F_n$) может не быть связной. В указанном случае она является дизъюнктым объединением нескольких слоев слоения Лиувилля.*

Определение 1.1.15. *Слой слоения Лиувилля системы $(M^{2n}, H, F_2, \dots, F_n)$ называется регулярным, если в каждой его точке ранг набора векторов $\text{sgrad } H, \text{sgrad } F_2, \dots, \text{sgrad } F_n$ максимален и равен n .*

Напомним следующий классический факт, лежащий в основе теории топологической классификации слоений Лиувилля. Он описывает динамику и топологические свойства вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы вблизи регулярного слоя данного слоения.

Теорема 1.3 (Лиувиль). *Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ с отображением момента $\mathfrak{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Пусть также T_ξ — регулярная поверхность уровня $\mathfrak{F} = \xi$. Тогда*

1. *множество T_ξ является гладким вложенным подмногообразием размерности n , инвариантным относительно потоков $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ и $\text{sgrad } H$; ограничение $\omega|_{T_\xi}$ на него формы ω равно нулю, т.е. T_ξ — лагранжево подмногообразие;*
2. *каждая связная компонента T_ξ есть фактор $\mathbb{R}^n$ по решетке $\mathbb{Z}^k$; если эта связная компонента T_ξ компактна, то $n = k$ и она диффеоморфна n -мерному тору T^n (такой тор называют тором Лиувилля);*
3. *в некоторой инвариантной (относительно сдвигов вдоль полей $\text{sgrad } F_i$ и $\text{sgrad } H$) окрестности U тора Лиувилля T^n слоение Лиувилля послойно диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n ;*
4. *в такой окрестности $U = T^n \times D^n$ существует регулярная система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, (их называют переменными действие-угол), со свойствами:*
 - (a) *$s_1, \dots, s_n$ — координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*
 - (b) *$\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.*

- (с) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов $F_1, \dots, F_n$.
- (d) В переменных действие-угол векторное поле $\text{sgrad } H$ выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т.е. уравнения $\dot{x} = \text{sgrad } H$ принимают вид:

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тем самым на каждом торе T^n поток $\text{sgrad } H$ задает условно-периодическое движение, а фазовые траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Подробное доказательство теоремы Лиувилля изложено, например, в [4, Т.1, раздел 1.5]. В случае гамильтоновой системы с одной степенью свободы из теоремы Лиувилля следует, что регулярный слой диффеоморфен окружности, а его инвариантная (относительно сдвигов вдоль векторного поля $\text{sgrad } H$) окрестность послойно диффеоморфна произведению окружности на интервал, т.е. диффеоморфна кольцу без границы. В основном случае (двух степеней свободы) тор Лиувилля двумерен, т.е. гомеоморфен произведению двух окружностей.

1.1.2.4 Интегрируемые системы на коалгебрах Ли и ИГС

В разделе 1.1.1.2 было приведено определение косоградиента гладкой функции H на пуассоновом многообразии. Это векторное поле задает динамическую систему $\dot{y} = v = \text{sgrad } H$ на нем.

Первым интегралом такой динамической системы $v = \text{sgrad } H$ на пуассоновом многообразии (как и в симплектическом случае) называют гладкую функцию F , которая коммутирует с H :

$$\{H, F\} = 0.$$

Определение 1.1.16. Динамическую систему $v = \text{sgrad } H$ на двойственном пространстве к некоторой алгебре Ли из пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ будем называть *интегрируемой системой* (или *ИС*), если в ограничении на каждую регулярную орбиту $M_{a,b}^4$ данная система является ИГС (вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с двумя степенями свободы).

Замечание 7. Изучаемые в главе 4 диссертации динамические системы на коалгебрах Ли из псевдо-евклидова пучка (см. [45], [115]), вообще говоря, могут не удовлетворять такому определению. Устройство орбит коприсоединенного представления для алгебр Ли из этого пучка и вопрос полноты векторных полей гамильтониана и первого интеграла этих систем в настоящей работе не обсуждается. Нас будет интересовать только вопрос компактности совместной поверхности уровня четырех функций: двух функций Казимира (1.35) и (1.36), гамильтониана (1.34) и первого интеграла (он совпадает с интегралом Ковалевской (1.14)).

По аналогии с гамильтоновыми системами, определим изоэнергетические поверхности Q для динамических систем $v = \text{sgrad } H$ на пространстве со скобкой Ли–Пуассона из пучка 1.3 выше.

Определение 1.1.17. Изоэнергетической поверхностью $Q_{a,b,h}$ динамической системы $v = \text{sgrad } H$ назовем совместную поверхность уровня $\{f_1 = a, f_2 = b, H = h\}$ в $\mathbb{R}^6$.

По аналогии с плоскостью орбит, введем также пространство параметров такой системы:

Определение 1.1.18. Пространством параметров динамической системы $v = \text{sgrad } H$ назовем трехмерное пространство $R^3(a, b, h)$, каждой точке которого соответствует изоэнергетическая поверхность $Q_{a,b,h}$

Одной из задач данной работы является его стратификация для одного из рассматриваемых интегрируемых аналогов системы Ковалевской.

1.1.3 Невырожденность критических точек ИГС

Слоения Лиувилля ИГС обыкновенно изучают в следующих подмножествах фазового пространства M^4 :

- в малой окрестности точки (или ее орбиты при действии $\mathbb{R}^2$ сдвигами вдоль $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$), т.е. *локально*;
- в инвариантной (насыщенной) окрестности слоя слоения Лиувилля, т.е. *полулокально*;
- на инвариантном подмногообразии в M^4 (например, на изоэнергетической поверхности Q_h^3) или на всем фазовом M^4 , т.е. *глобально*.

В данном разделе мы напомним определения невырожденности критических точек интегрируемых гамильтоновых систем на симплектических M^4 и в пространстве $\mathbb{R}^6$ со скобкой Ли–Пуассона.

1.1.3.1 Случай одной степени свободы. Точки Морса. 2-атомы

При описании топологии гамильтоновых систем $v = \text{sgrad } H$ с одной степенью свободы на двумерном замкнутом многообразии важную роль играет случай, когда все критические точки функции H невырождены, т.е. являются, как говорят, точками Морса или морсовскими точками. Напомним, это означает что $\det d^2 H \neq 0$.

Как хорошо известно (из леммы Морса, см. [65]), регулярной заменой координат функцию можно привести в малой окрестности данной точки к одному из трех видов: $\tilde{H} = \alpha^2 + \beta^2$, $\tilde{H} = -\alpha^2 - \beta^2$, $\tilde{H} = \alpha^2 - \beta^2$. В двух первых случаях система гамильтоновых уравнений имеет особенность типа центр (минимум и максимум соответственно), а во втором — особенность типа седло. На рисунке 1.1 мы напомним локальный вид слоения Лиувилля для особенностей центр и седло.

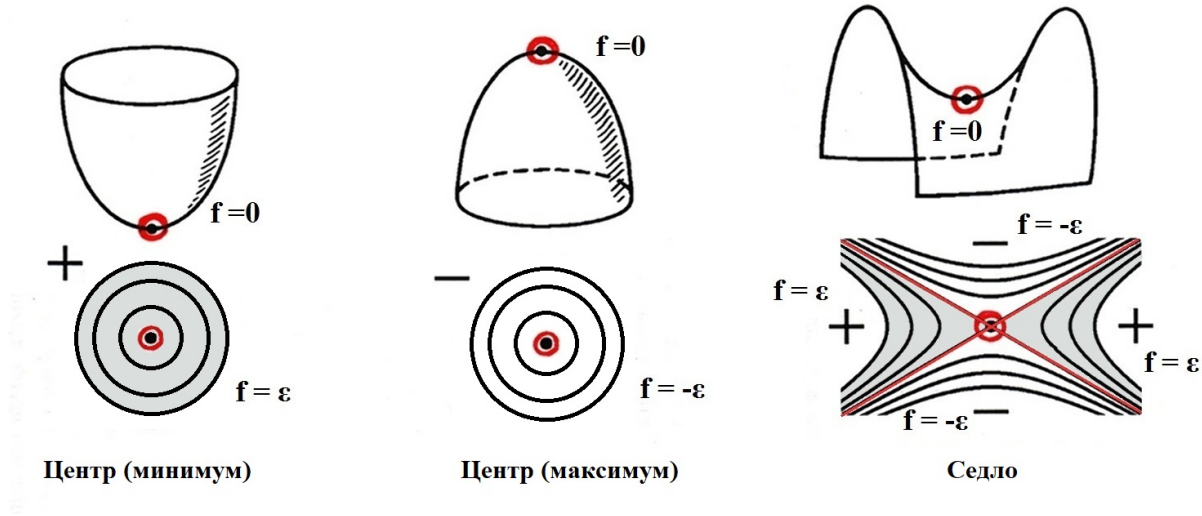


Рис. 1.1: Локальные невырожденные особенности слоения Лиувилля гамильтоновой системы с 1 степенью свободы и их изображение

Определение 1.1.19. Назовем *2-атомом* класс послойно гомеоморфных друг другу компактных полулокальных особенностей гамильтоновых систем с 1 степенью свободы, все критические точки которых являются точками Морса, т.е. невырождены.

Зададим класс 2-атомов более наглядно: рассмотрим пару (P^2, K) , состоящую из связной компактной двумерной поверхности с краем P^2 и связного графа K , и удовлетворяющую следующим свойствам.

- Граф K либо состоит из одной точки-вершины, или все его вершины имеют степень 4.
- Каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу
- множество таких колец разбивается на 2 класса, так что к каждому ребру графа K с разных сторон примыкают кольца из разных классов.

Часто последнее свойство изображается выбором цвета: кольца одного класса изображают белыми, а кольца из другого — черными.

Простейшие примеры 2-атомов приведем ниже на рис. 1.2

Если заклеить граничную окружность каждого кольца 2-атома гамильтоновой системы, получим некоторую замкнутую двумерную поверхность. Данная поверхность ориентируема, поскольку гамильтоновы системы задаются на симплектических многообразиях.

Имеется полная классификация седловых 2-атомов и f -атомов (если потребовать от послойного гомеоморфизма сохранять направление роста функции f). Ее можно выразить в терминах т.н. f -графов, введенных А.А.Ошемковым в [66] (также см. [4]) или в терминах пары перестановок, см. [67].

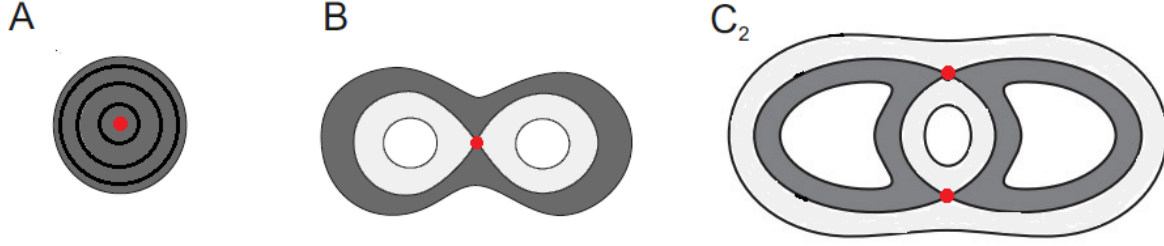


Рис. 1.2: Примеры 2-атомов, используемых при описании топологии слоения Лиувилля системы Ковалевской. Красным выделена критическая точка x_0 функции f , в точках x черных и белых колец $f(x) - f(x_0)$ имеет разный знак.

1.1.3.2 Невырожденные критические точки ранга 1

Для ИГС с 2 степенями свободы основным аналогом функций Морса на двумерном многообразии является понятие *боттовского интеграла* на неособом уровне энергии.

Пусть $dH \neq 0$ во всех точках уровня $H = h$ энергии (т.е. изоэнергетическая поверхность Q_h^3 является гладким трехмерным многообразием. Тогда во всех точках Q_h^3 имеем $\text{sgrad } H \neq \vec{0}$, т.е. все критические точки отображения момента $\mathfrak{F} = (H, F)$ в Q_h^3 имеют ранг 1 и образуют гладкие подмногообразия. Такое подмногообразие может быть гомеоморфно окружности, тору или бутылке Клейна (поле $\text{sgrad } H$ на нем не имеет особенностей). Здесь и далее критические торы и бутылки Клейна не встречаются и не обсуждаются, т.е. критическое множество в таком Q_h^3 гомеоморфно окружности или их несвязному объединению.

Определение 1.1.20. Первый интеграл системы $v = \text{sgrad } H$ называется *интегралом Ботта* на уровне Q_h^3 , где $dH \neq 0$, если в ограничении на малую двумерную трансверсаль к каждой критической окружности (окружности, составленной из критических точек) интеграл F является функцией Морса.

Понятие невырожденности критической точки x ранга 1 можно сформулировать и без ограничения на уровень энергии. В ней линейно зависимы дифференциалы dH и dF энергии и интеграла, т.е. для некоторых чисел λ и μ , определенных с точностью до пропорциональности, имеем

$$\lambda dH(x) + \mu dF(x) = 0.$$

Обозначим через $L \subset T_x M^4$ одномерное подпространство, натянутое на вектор $\text{sgrad } H|_x$ или $\text{sgrad } F|_x$ (они, напомним, линейно зависимы), а через $L' \subset T_x M^4$ — его трехмерное косоортгональное дополнение (в смысле формы ω). При этом $L \subset L'$ как изотропное подпространство. Как известно, тогда факторе L'/L можно естественным образом определить структуру линейного симплектического пространства $\{\mathbb{R}^2, \omega_0\}$.

Напомним, что линеаризацией косого градиента функции F в точке x называют оператор $A_F = \Omega^{-1}d^2F|_x$. Обозначив $\tilde{F} = \lambda H + \mu F$, имеем: оператор $A_{\tilde{F}}$ сохраняет пространства L и L' , т.е. определен фактор-оператор $\hat{A}_{\tilde{F}}$ на L'/L . Он является элементом алгебры $\text{sp}(2, \mathbb{R})$.

Определение 1.1.21. Пусть $x \in M^4$ — критическая точка ранга 1 для отображения момента (H, F) . Такая точка называется *невыврожденной*, если у оператора $\hat{A}_{\tilde{F}}$ есть ненулевые собственные значения. Здесь $\tilde{F} = \lambda H + \mu F$, и $\tilde{F}(x) = 0$.

Спектры операторов $\hat{A}_{\tilde{F}}$ и $A_{\tilde{F}}$ отличаются добавлением нулей, т.к. $L \subset \text{Ker } A_{\tilde{F}}$. Т.к. спектр симплектического оператора содержит 2 ровно ненулевых значения, то они противоположны по знаку и являются либо чисто мнимыми, либо действительными.

В первом случае критическую точку $x \in M^4$ ранга 1 (и ее S^1 -орбиту) называют *эллиптической* (минимальной или максимальной), а в другом — *гиперболической* или *седловой*. Топологию слоения Лиувилля в инвариантной окрестности $U \subset Q^3$ слоя, содержащего такие окружности, обсудим ниже в разделе 1.1.3.4.

Для проверки невырожденности точек ранга 1 ИГС можно использовать несложный критерий, см. [4].

Утверждение 1.1.1. Пусть (M^4, ω) — симплектическое многообразие и $y_0 \in (M, \omega)$ — критическая точка ранга 1 для ИГС с гамильтонианом H и интегралом K . Обозначим через $F = \alpha H + \beta K$ нетривиальную линейную комбинацию интегралов H и K , для которой точка y_0 будет критической, а через A_F — линеаризацию косого градиента $\text{sgrad } F$ функции F в этой точке y_0 . Точка y_0 является невырожденной критической точкой ранга 1 тогда и только тогда, когда спектр оператора A_F содержит хотя бы одно ненулевое число.

Поскольку система Ковалевской задается как ИС на пуассоновом многообразии $\mathbb{R}^6$, то можно использовать следующее соображение (сформулированное, например, в [51]).

Утверждение 1.1.2. Пусть в локальных координатах $(p^1, \dots, p^k, q^1, \dots, q^k, z^1, \dots, z^m)$ в окрестности точки x_0 скобка Пуассона имеет вид $\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial p^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}$. Пусть x_0 — критическая точка для косого градиента $\text{sgrad } F$ функции F . Тогда линеаризация A_F этого векторного поля имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial p^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial z^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dz^j \right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial p^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial z^j} \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dz^j \right)$$

Отсюда следует, что спектр линеаризации косого градиента $\text{sgrad } F$ функции F отличается от спектра линеаризации косого градиента $\text{sgrad } \hat{F}$ ограничения $\hat{F}$ функции F на симплектический лист добавлением нулей, количество которых совпадает с коразмерностью листа. Следовательно, невырожденность критической точки ранга 1 на пуассоновом многообразии будет следовать (как и в симплектическом случае) из наличия хоть одного ненулевого числа в спектре соответствующего оператора.

1.1.3.3 Невырожденные критические точки ранга 0

В настоящем разделе мы опишем важный класс точек в фазовом пространстве ИГС, которые являются положениями равновесия этой системы.

Рассмотрим критическую точку $x \in M^4$, в которой $dH = dF = 0$. Такие точки называют точками ранга 0 отображения момента ИГС. На $T_x M^4$ определены линейные операторы A_H и A_F , которые коммутируют (т.к. $\{H, F\} = 0$) и принадлежат $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Тем самым, имеем коммутативную подалгебру в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ (порожденную A_H и A_F).

Определение 1.1.22. Точка x ранга 0 называется невырожденной, если данная подалгебра является картановской (максимальной коммутативной) подалгеброй в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Над полем $\mathbb{R}$ существуют несопряженные друг другу картановские подалгебры алгебры $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$. Для произвольного n картановские подалгебры в $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ были классифицированы Вильямсоном (подробнее см. [4]).

В случае $n = 2$ существует ровно четыре картановских подалгебры в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Им соответствует четыре класса локальных невырожденных особенностей ранга 0. Данный факт следует из теоремы Х.Рюссмана [68]. Ее обобщение на произвольный случай было получено в работах Вэя [69], Ито [70] и [71] и работе Элиассона [72].

Теорема 1.4 (Рюссман). *В окрестности невырожденной критической точки x ранга 0 для вещественно-аналитической ИГС (M^4, ω, H, F) существуют канонические координаты (p_1, q_1, p_2, q_2) в которых симплектическая структура имеет вид $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, а пара функций H и F одновременно приводится к одному из следующих видов:*

1. *локальная особенность типа центр-центр: $H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$, $F = F(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$,*
2. *локальная особенность центр-седло: $H = H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$, $F = F(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$,*
3. *локальная особенность седло-седло: $H = H(p_1 q_1, p_2 q_2)$, $F = F(p_1 q_1, p_2 q_2)$,*
4. *локальная особенность фокус-фокус: $H = H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$, $F = F(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$.*

Для ИГС имеется несложный критерий невырожденности критической точки ранга 0 (подробнее см. [4]).

Утверждение 1.1.3. *Пусть (M^4, ω, H, K) — ИГС $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии. Пусть точка $x_0 \in M^4$ — ее критическая точка, имеющая ранг 0. Тогда точка x_0 невырождена, если и только если линейаризации A_H и A_K (в точке x_0) косых градиентов $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ обладают следующими свойствами:*

1. *операторы A_H и A_K линейно независимы,*

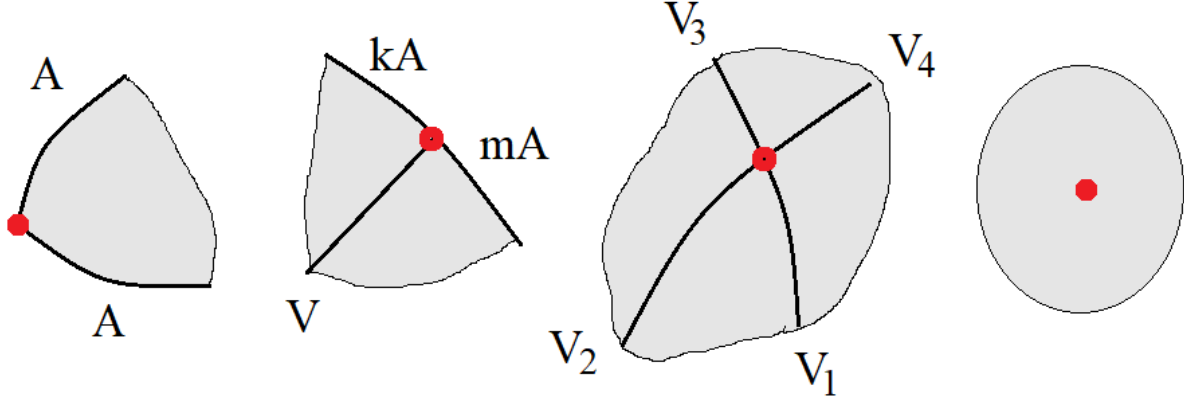


Рис. 1.3: Локальные бифуркационные диаграммы невырожденных критических точек ранга 0 при $n = 2$

2. существует линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_K$, у которой все собственные значения различны и не равны 0.

Тип невырожденной точки полностью определяется спектром произвольной линейной комбинации $\lambda A_H + \mu A_K$, не имеющим нулевых собственных значений. А именно, если спектр некоторой линейной комбинации $\lambda A_H + \mu A_K$ имеет вид

- $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, то точка x_0 — критическая точка типа седло-седло;
- $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, то точка x_0 — критическая точка типа центр-центр;
- $i\alpha, -i\alpha, \beta, -\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, то точка x_0 — критическая точка типа центр-седло;
- $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, то точка x_0 — критическая точка типа фокус-фокус.

Поскольку система Ковалевской и ее аналоги задаются как ИС на пуассоновом многообразии $\mathbb{R}^6$, то на практике вычисления проводятся с учетом утверждения 1.1.2.

Замечание 8. Невырожденные точки ранга 0 разных типов имеют различный вид своей локальной бифуркационной диаграммы, т.е. образа критического множества, попадающего в их окрестность. Он схематично изображен на рис. 1.3. Подробнее обсудим это в разделе 1.1.5.

1.1.3.4 Особые слои ИГС на M^4 и их окрестности в неособых Q_h^3 — 3-атомы

Определение 1.1.23. Особым слоем слоения Лиувилля системы $(M^4, \omega, \mathfrak{F} = (H, F))$ в M^4 или $Q_h^3 \subset M^4$ будем называть такой слой слоения Лиувилля, то выполнено хотя бы одно из двух следующих условий

1. в данном слое есть критические точки отображения $\mathfrak{F}$,
2. в малой инвариантной (при действии $\mathbb{R}^2$ сдвигами вдоль полей $\mathfrak{F}$) окрестности этого слоя в M^4 или Q^3 слоение не является тривиальным, т.е. не послойно гомеоморфно произведению тора T^2 на диск D^2 или D^1 соответственно.

При изучении слоений Лиувилля на регулярных M^4 для семейства систем Ковалевской на пучке $so(3,1) - e(3) - so(4)$ (рассматриваемых ниже в главах 2 и 3) каждый особый слой содержит критические точки $\mathfrak{F}$, т.е. из условия 2 следует условие 1. Это следует, в частности, из компактности каждого слоя и полноты потоков гамильтоновых векторных полей.

Замечание 9. В случае псевдо-евклидова аналога данных систем, рассматриваемых ниже в главе 4, это по-видимому не так. Следуя утверждению [51, Утв. 2, 3, 5] можно проверить, что образом на плоскости Ohk их критического множества из M^4 являются кривые, задаваемые теми же формулами, что и для семейства систем $so(3,1) - e(3) - so(4)$ (перечисленные выше в утверждении 1.3.1 из [51]). Эти кривые отличаются от бифуркационной параболы (возникающей в теореме 4.6 главы 4 диссертации, доказанной нами ранее в работе [115]), в окрестности прообраза которой есть некомпактная бифуркация.

Отметим также, что мы не рассматриваем слоения Лиувилля на тех Q_h^3 , где $\text{rk } d\mathfrak{F} = 0$. Иными словами, при описании слоений на отдельном Q^3 в терминах их инвариантов мы всегда предполагаем, что $dH \neq 0$ на данном Q_h^3 .

Рассмотрим точки ранга 1. Тогда если критическая точка имеет эллиптический тип, то слой совпадает с орбитой этой точки — критической окружностью (минимальной или максимальной). Если же точка имеет седловой тип, то содержащий ее слой будет одновременно с ней содержать также точки ранга 2 (регулярные точки).

В настоящем разделе напомним известные результаты о топологии особых слоев и их расслоенных окрестностей в $Q^3 \subset M^4$ с условием $dH \neq 0$ для отображения момента $\mathfrak{F} = (H, F)$. Теория классификации таких особенностей слоений Лиувилля была построена А.Т.Фоменко и его школой. Весьма подробно она изложена в книге А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [4, гл. 3 т. 1].

Определение 1.1.24. Пусть особый слой слоения Лиувилля на Q^3 не содержит точек, где $dH = 0$. Тогда класс лиувиллевой эквивалентности его малой послойной окрестности в Q^3 называют *3-атомом* (или просто *атомом*).

Замечание 10. В топологических инвариантах Фоменко и Фоменко–Цишанга (определения которых напомним ниже) слоения Лиувилля на неособой Q_h^3 такие атомы сопоставляются вершинам графа, и потому эти графы–инварианты также называют молекулами и мечеными молекулами (если также добавлены некоторые числовые метки) соответственно. Об этом подробнее расскажем ниже в разделе 1.1.4.2.

Согласно теореме А.Т.Фоменко, все такие атомы для ИГС с боттовским интегралом можно описать в терминах расслоений Зейферта (см., например, в [73]). А именно, 3-атом есть расслоение Зейферта над двумерной базой (возможно, с границей), все особые слои которого имеют тип (1:2), т.е. каждый близкий слой двулистно накрывает особую окружность. Подробное обоснование данного факта имеется в монографии А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [4, гл. 3 т. 1].

Атом может быть эллиптическим (критическая окружность является минимальной или максимальной) и седловым (все критические окружности являются седловыми). Примеры некоторых 3-атомов, встречающихся в системе Ковалевской, приведены ниже на рис. 1.4. Теперь кратко опишем, какие атомы встречаются в случае Ковалевской и ее аналогах.

Существует единственный с точностью до послыйного диффеоморфизма эллиптический атом, являющийся полноторием, расслоенным на торы и одну особую окружность. Он обозначается латинской буквой A .

Седловые (гиперболические) атомы в системе с боттовским интегралом бывают двух видов. В первом случае такой атом есть прямое произведение окружности S^1 на некоторый седловой 2-атом.

Иначе говоря, рассматривается функция Морса f на двумерной ориентированной компактной поверхности P с краем, причем данная функция имеет на ней единственное критическое значение. Тогда 3-атом есть прямое произведение двух многообразий $M^2 \times S^1$ со следующим слоением Лиувилля. Функцию f можно продолжить до функции Морса–Ботта на $M^2 \times S^1$ по правилу

$$f(x, \varphi) = f(x), \quad x \in P, \varphi \in S^1.$$

Примером таких атомов является 3-атом B , построенный из седлового 2-атома B (утолщенной “восьмерки”) при ее умножении на окружность. Он изображен на рисунке 1.4. Другим 3-атомом прямого произведения, встречающимся в системе Ковалевской, является прямое произведение окружности и 2-атома C_2 , изображенного на рис. 1.2. Такие атомы обозначают так же, как и их базы, 2-атомы.

Второй тип атомов строится на основе первого. Их называют (седловыми) *атомами со звездочками*. Пусть поверхность P обладает инволюцией $\tau : M^2 \rightarrow M^2$, сохраняющей функцию f (т.е. $f(\tau(x)) = f(x)$) и ориентацию P , а каждая ее неподвижная точка является критической точкой функции Морса. Тогда рассмотрим произведение $P \times [0, 2\pi]$ и склеим его по правилу $(x, 2\pi) \sim (\tau(x), 0)$. Получим многообразие U с краем, являющееся ориентируемым. Функция f продолжается на него, и имеет единственный особый слой в нем. Примером является атом A^* , построенный из 2-атома B .

Все слои Лиувилля в седловом 3-атоме являются двумерными и все они содержат регулярные точки $\mathfrak{F}$. Критическое множество есть произведение окружности на критические точки 2-атома. Каждый регулярный слой (тор T^2) в 3-атоме есть произведение окружности в базе (в 2-атоме) на окружность S^1 . Каждая фазовая траектория системы будет лежать на некотором 2-слое

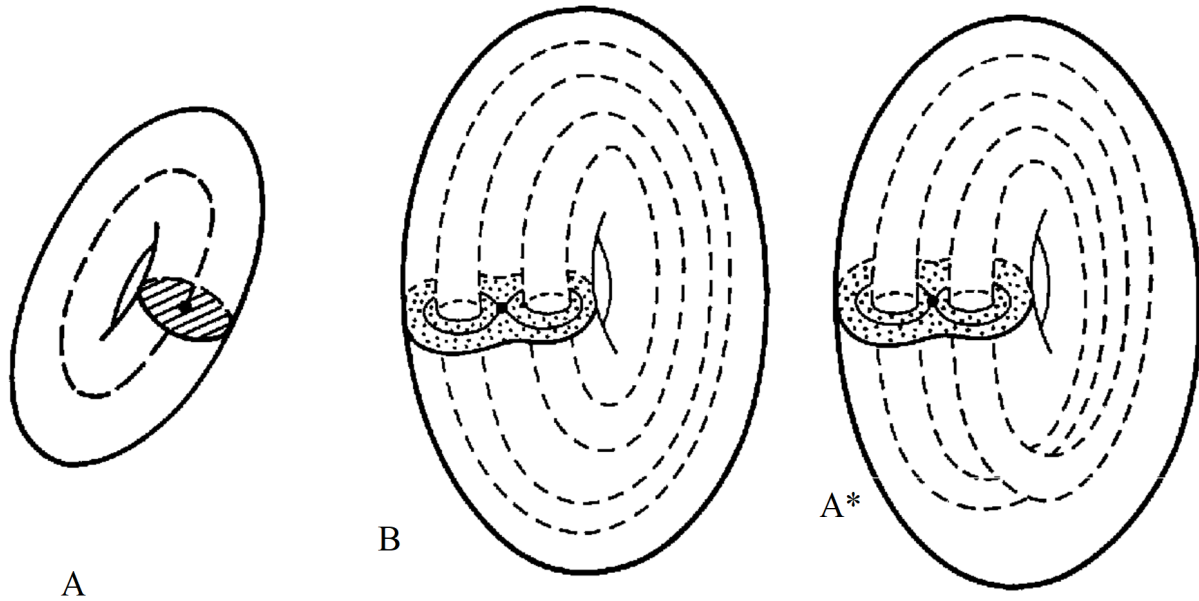


Рис. 1.4: Простейшие примеры 3-атомов: A , B , A^*

седлового 3-атома.

Имеется полная классификация 3-атомов в интегрируемых гамильтоновых системах с 2 степенями свободы. В терминах 2-атомов ее можно сформулировать так: каждому 3-атому (кроме атома A и атомов со звездочками A^* , A^{**} ...) соответствует единственный седловой 2-атом, возможно, с отмеченными точками звездочками — некоторыми регулярными точками, лежащими на его особом слое.

В случае 3-атома A его 2-атом является диском, расслоенным на concentric окружности и особую точку. В случае атомов со звездочками A^* , A^{**} ... берется инвариантная окрестность регулярной окружности в M^2 , т.е. окрестность регулярного слоя функции Морса на M^2 , и на ней отмечаются вершины-звездочки (в числе, равном количеству звездочек в обозначении).

1.1.4 Эквивалентности ИГС на Q_h^3 и инварианты их слоений Лиувилля

В настоящем разделе опишем имеющиеся эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, ограниченных на трехмерные инвариантные поверхности. Главным образом, нами рассматриваются изоэнергетические поверхности Q_h^3 (при определении инвариантов Фоменко и Фоменко–Цишанга), а также прообраз малой замкнутой кривой в плоскости Ohk (круговая молекула особенности, образ которой лежит внутри диска, ограниченного этой кривой).

1.1.4.1 Лиувиллева и грубая лиувиллева эквивалентности ИГС на Q^3

Следующее отношение эквивалентности позволяет классифицировать системы с двумя степенями свободы с точки зрения топологии пространства замыканий их решений:

Определение 1.1.25. Ограничения двух интегрируемых систем $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$ на трехмерные неособые ($dH_i \neq 0$) инвариантные подмногообразия Q_1^3 и Q_2^3 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм Q_1^3 и Q_2^3 , сохраняющий ориентацию Q_i относительно (M_i^4, ω_i) и направление поля $\text{sgrad } H_i$ на критических окружностях интеграла F_i .

Рассмотрев базу слоения Лиувилля, т.е. фактор-пространство, точке которого соответствует связная компонента уровня дополнительного интеграла в Q_h^3 , сформулируем более слабую эквивалентность:

Определение 1.1.26. Ограничения двух интегрируемых систем $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$ на трехмерные неособые ($dH_i \neq 0$) инвариантные подмногообразия Q_1^3 и Q_2^3 называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если базы их слоений Лиувилля гомеоморфны, а в полном прообразе окрестности каждой точки базы существует диффеоморфизм самих слоений Лиувилля.

Грубая лиувиллева эквивалентность является ослаблением лиувиллевой эквивалентности. Другим таким ослаблением является диффеоморфность изоэнергетических поверхностей Q_1^3 и Q_2^3 как гладких 3-многообразий (получаемое “забыванием” структуры слоения Лиувилля и направления векторных полей на окружностях). Класс неособых изоэнергетических 3-многообразий ИГС совпадает [74], согласно теореме Фоменко–Цишанга, с известным классом граф-многообразий Ф.Вальдхаузена [75, 76].

1.1.4.2 Инвариант Фоменко (молекула) и Фоменко–Цишанга (меченая молекула) ИГС на инвариантных 3-поверхностях

Сформулируем ряд требований на интегрируемые системы (M^4, ω, H, F) при рассмотрении их ограничения на Q_h^3 , где $H = h$:

- критическое множество отображения момента не содержит торов и бутылок Клейна, т.е. состоит из несвязного объединения окружностей (см. [4, Предложение 3.3., т. 1]);
- интеграл F является боттовским на Q_h^3 , т.е. $dH \neq 0$ нигде на Q_h^3 и ранг отображения момента H, F во всех критических точках равен 1;
- система *нерезонансна* на Q_h^3 (на почти всех торах Лиувилля поля частоты полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$, т.е. значения $\dot{\varphi}_1 = c_1$ и $\dot{\varphi}_2 = c_2$ в канонических координатах действие–угол, несоизмеримы);

- система *топологически устойчива* на данном Q_h^3 , т.е. система на уровне $h = h_0$ и $h = h_0 \pm \varepsilon$ для любого малого ε лиувиллево эквивалентны.

Для указанных выше систем верна теорема топологической классификации, доказанная А.Т. Фоменко и Х.Цишангом в работах [2] (также см. [3] и [4, гл. 4, т.1]). Она утверждает, что описанный ниже инвариант Фоменко–Цишанга (называемый также меченой молекулой), является полным классифицирующим инвариантом лиувиллевой эквивалентности:

Теорема 1.5 (А.Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Слоения Лиувилля двух ИГС в ограничении на неособые инвариантные 3-многообразия Q_h^3 (с дополнительными свойствами выше) лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда инварианты Фоменко–Цишанга их слоений Лиувилля на этих Q_h^3 совпадают.*

Полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности является граф Фоменко [4, гл. 3 и 4, т. 1]. Он является графом Кронрода–Риба функции F_i на Q_i^3 , вершины которого оснащены символами 3-атомов, т.е. перестроек торов Лиувилля. В основе этого подхода лежат работы А.Т.Фоменко [18], [19], [77] и [78], в которых изучались свойства боттовских особенностей интегрируемых систем, а также вопросы кодирования и классификации поверхностей постоянной энергии, содержащих их.

Полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности является инвариант Фоменко–Цишанга — граф Фоменко, оснащенный числовыми метками. Он был введен в работе [2]. Числовые метки в инварианте Фоменко–Цишанга имеют следующее значение. Разрежем Q^3 по регулярным торам на части, содержащие по одному особому слою (т.е. для каждого ребра удалим из семейства торов один тор). Запомним, какие пары граничных торов полученных частей были склеены между собой. Даже после этого обратная склейка частей в единое Q^3 не является однозначной, т.к. зависит от закона склейки на удаленных торах.

Для задания закона склейки надо указать некоторый диффеоморфизм тора. Он задается невырожденной матрицей 2×2 . Потребуем также, чтобы ее определитель был равен -1 . Такие матрицы называют матрицами склейки.

Как оказалось, на граничных торах 3-атома можно каноническим образом выбрать класс базисов в $\pi_1(T^2)$, называемых допустимыми. Подробнее их опишем в разделе 1.1.5.3. На каждом ребре молекулы матрица перехода между допустимыми базисами на границах 3-атомов задает диффеоморфизм, по которому две части были склеены до разреза. Этот диффеоморфизм задается квадратной 2×2 матрицей $C_i \in \text{Mat}(2, \mathbb{Z})$ с целочисленными элементами и определителем -1 .

По следующим формулам из матрицы склейки $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ можно вычислить числовые метки r, ε, n .

Числовые метки r и ε ставятся на ребрах графа Фоменко. Рациональная метка r равна $\alpha_i / \beta_i \bmod 1$ или $r = \infty$, если $\beta_i = 0$. Метка ε равна $\text{sgn } \beta_i$, если $\beta_i \neq 0$, и $\text{sgn } \alpha_i$, если $\beta_i = 0$.

Для определения метки n требуется выбрать направление на каждом ребре молекулы и разрезать ее по всем ребрам с $r \neq \infty$. В дальнейшем ребра инвариантов слоений на изоэнергетических поверхностях будем направлять по возрастанию дополнительного интеграла. Целочисленной меткой n для выбранной связной компоненты графа, не содержащей атомов A (такие подграфы называют *семьями*) назовем сумму чисел Θ_i по всем входящим, исходящим и внутренним ребрам данной семьи. Отметим, что скленные друг с другом седловые атомы семьи образуют единое расслоение Зейферта.

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right] & \text{для исходящего ребра,} \\ \left[\begin{array}{c} \delta_i \\ -\beta_i \end{array} \right] & \text{для входящего ребра,} \\ \left[\begin{array}{c} \gamma_i \\ -\alpha_i \end{array} \right] & \text{для внутреннего ребра.} \end{cases}$$

Напомним, что в формулах выше $[-1/2] = -1$.

1.1.4.3 Влияние ориентаций на метки инварианта

При замене ориентации на Q^3 меченая молекула может измениться. А именно,

- пусть ребро соединяет между собой два атома A или два седловых атома. Если $r \neq \infty$, то метки r, ε меняют свой знак. В противном случае их знаки сохраняются.
- пусть ребро соединяет атом A с седловым атомом. Если $r \neq \infty$, то ε сохраняется, а метка r меняет знак. Если $r = \infty$, то метка ε меняет знак, метка r сохраняется.
- $n' = -n - l - s$, где n' — метка n после замены ориентации, l — число внешних ребер с дробной меткой, а s — суммарное число звездочек в атомах данной компоненты.

При замене направления на ребре инварианта матрица склейки на нем меняется на обратную. В настоящей работе все направления на ребрах инвариантов для изоэнергетических поверхностей выбраны по возрастанию дополнительного интеграла системы.

1.1.5 Описание слоений Лиувилля на M^4

Вопросы описания и классификации слоений Лиувилля ИГС на всём M^4 являются более сложными. Свою эффективность показал ряд подходов и понятий, которые мы коротко напомним.

Для отображения момента $\mathfrak{F} = (H, F)$ ИГС рассматривают *бифуркационную диаграмму* Σ отображения момента, т.е. образ критического множества для отображения $\mathfrak{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Обычно (в частности, в системах Ковалевской) она содержится в объединении конечного числа кривых и, возможно, изолированных точек (последних в системах Ковалевской нет).

Особыми точками диаграммы Σ называют точки пересечения, касания и возврата бифуркационных кривых и изолированные точки Σ . Обычно (в частности, в системе Ковалевской) именно их прообразы содержат все критические точки ранга 0 и все вырожденные (неботтовские) критические точки ранга 1 (см. [4, Утверждение 1.17]). Образами невырожденных положений равновесия (точек ранга 0) являются точки трансверсального пересечения двух гладких дуг Σ , а вырожденные критические точки, как правило, лежат в прообразе точек касания или возврата.

Четырехмерные особенности ИГС, т.е. слоение Лиувилля в прообразе малой окрестности особой точки Σ , обладает важным инвариантом — *круговой молекулой* [4]. Рассмотрим прообраз малой замкнутой кривой в плоскости Ohf , обходящей особую точку и трансверсально пересекающей дуги Σ . Слоение Лиувилля на этом прообразе обладает инвариантом Фоменко, который и называют круговой молекулой данной особой точки и особенности в ее прообразе.

Вопрос оснащения ее метками (т.е. перехода к инварианту Фоменко–Цишанга) несколько подробнее обсудим в пункте 1.1.5.3, где определяются допустимые системы координат.

В пункте 1.1.5.1 мы коротко напомним, какие полулокальные особенности с невырожденными точками ранга 0 возникают в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы.

Затем в пункте 1.1.5.2 мы приведем примеры вырожденных полулокальных особенностей ранга 1. Они содержат одну или несколько критических неботтовских окружностей, состоящих из точек ранга 1. Особенности системы Ковалевской и ее аналогов, лежащие в прообразе точек возврата и касания дуг бифуркационной диаграммы, имеют круговые молекулы, которые совпадают с круговыми молекулами особенностей, перечисленных в данном пункте [79], [35] [51], [53].

Круговые молекулы классической системы Ковалевской были описаны в [79] вместе с метками r на их ребрах. В настоящей работе они приведены в таблице 2.3 .

1.1.5.1 Невырожденные полулокальные особенности ранга 0

Пусть особый слой слоения Лиувилля ИГС содержит хотя бы одну точку ранга 0 отображения момента, и *все эти точки невырождены*. Локальный тип такой особенности (слоение Лиувилля в малой окрестности точки ранга 0) был описан выше. Мы кратко напомним известные факты о таких особенностях (подробнее см. [4, гл. 1 и 9, т.1] и [80]).

Полулокальный тип особенности ранга 0 (класс послойной гомеоморфности слоения Лиувилля в малой инвариантной окрестности слоя, содержащего некоторую точку ранга 0) в случае

любого числа степеней свободы описывается теоремой Н.Т.Зунга (см. [81], а также [4, Гл. 9, т. 1]). Не вполне строго, каждая такая особенность есть произведение нужного числа эллиптических 2-атомов A , седловых 2-атомов $V_1, \dots, V_k$ и четырехмерных фокусных особенностей (в системе Ковалевской такие отсутствуют), факторизованное по действию конечной группы, которое обладает рядом дополнительных свойств:

- действие не имеет неподвижных точек, т.е. свободно,
- действие покомпонентно (на указанных 2-атомах и фокусных компонентах),
- на каждой компоненте (как гамильтоновой системы на 2-атоме или ИГС на фокусной особенности) действие сохраняет симплектическую структуру и отображение момента,
- действие на каждой компоненте-атоме A тривиально.

Отметим, что описанный выше факт верен для особенностей, удовлетворяющих условию нерасщепляемости (см. [4, Определение 9.7, т. 1]). Для систем с 2 степенями свободы будет достаточно диффеоморфности локальной бифуркационной диаграммы паре изображенным на рис. 1.3.

Все точки ранга 0 в таком особом слое обязаны иметь один и тот же тип, т.е. можно говорить о полулокальных особенностях ИГС, имеющих один из типов: центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус (по типу любой точки ранга 0, содержащейся в них).

Все особенности типа центр–центр послойно диффеоморфны (и даже симплектоморфны) произведению двух канонических 2-атомов типа A . Это следует, например, из теоремы Элиасона [72], поскольку особый слой совпадает с критической точкой ранга 0. В частности, метка r на единственном ребре круговой молекулы такой особенности (между двумя 3-атомами типа A) равна 0, а ее 3-поверхность гомеоморфна S^3 .

Каждая особенность типа центр–седло послойно диффеоморфна произведению $A \times V$ двух 2-атомов: эллиптического A и некоторого седлового V . Каждое ребро круговой молекулы соединяет атом V с некоторым из атомов A . Метки r на каждом ребре такой молекулы равны бесконечности (исчезающий цикл для 3-атома A и цикл, близкий к некоторой критической седловой окружности атома V , будут гомологичны).

Особенность седло–седло устроена сложнее: такая особенность может иметь как тип прямого произведения двух седловых 2-атомов V_1 и V_2 , так и почти прямого (т.е. произведение факторизуется по действию со свойствами, перечисленными выше). Круговая молекула полулокальной особенности седло–седло, имеющей 1 и 2 особые точки, является полным инвариантом ее послойной гомеоморфности (см. работы [82], [83] и [84] Л.М.Лермана и Я.Л.Уманского, работу [79] А.В.Болсинова, диссертацию В.С. Матвеева [85]). Для особенностей сложности 4 и выше имеются контр-примеры (А.Грабежной [86], М.А.Тужилин [87]). Инварианты послойной

гомеоморфности произвольной полулокальной особенности седло-седло ИГС были построены А.В.Болсиновым и В.С.Матвеевым [88] и Н.Т.Зунгом [89] и [81].

В системе Ковалевской и ее аналогах встречаются следующие невырожденные полулокальные особенности: $A \times A$, $A \times B$, $A \times C_2$, $B \times B$, $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, $B \times C_2$. Примеры седловых особенностей различного ранга, возникающих в интегрируемых системах с 2 и 3 степенями свободы перечислены в работе [90]. Все полулокальные седловые особенности с одной особой точкой ранга 0, возможные в интегрируемых гамильтоновых системах с 3 степенями свободы, были перечислены А.А.Ошемковым в работе [91].

1.1.5.2 Вырожденные особенности ранга 1

Во многих интегрируемых гамильтоновых системах имеются вырожденные критические точки ранга 1. Имея в своей окрестности как гиперболические, так и эллиптические критические точки, они обычно возникают в прообразах точек касания или возврата бифуркационных кривых отображения момента.

Вопрос классификации таких локальных и полулокальных особенностей в настоящий момент открыт. Имеется ряд важных результатов об типичности тех или иных вырожденных особенностей (например, результаты В.В.Калашникова [27]). В работе [28] А.В.Болсинова, L.Guglielmi и Е.А.Кудрявцевой были изучены классы простейших вырожденных локальных и полулокальных особенностей, названных параболическими (особые точки или их орбиты) и каспидальными (особые слои-торы). Был сформулирован критерий параболичности точки, удобный для практической проверки.

Также в работе [28] было показано, что в окрестности параболической точки P (положим в ней $dH(P) \neq 0$) имеется преобразование $\tilde{F} = \tilde{F}(H, F)$ с условиями $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial F} \neq 0$, $\tilde{H} = \pm H + \text{const}$ а также локальные регулярные координаты x, y, λ, φ , такие что $(x, y, \lambda, \varphi)|_P = (0, 0, 0, 0)$ и

$$\tilde{F} = \tilde{F}(H, F) = x^2 + y^3 + \lambda y, \quad \tilde{H} = \lambda.$$

Здесь λ соответствует циклической переменной.

Классы послыной диффеоморфности или симплектоморфности вырожденных особенностей для системы Ковалевской пока еще в полной мере не исследованы. Вместе с тем, хорошо известны их круговые молекулы (см. [79], а также [35]). Для классической системы Ковалевской они приведены в таблице 2.3.

Приведем теперь примеры вырожденных особенностей, чьи круговые молекулы совпадают с таковыми для систем Ковалевской. Для этого рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3(x, y, \lambda) \times S^1(\varphi)$ и следующие функции: $H = \lambda$,

$$F = x_1^2 + y_1^3 - \lambda_2 y_1, \quad F = p_1^2 + q_1^4 - \lambda y^2.$$

Задаваемые ими особенности имеют слоение Лиувилля, изображенное на рис. 1.5 слева и в

центре. Они имеют тип параболической особенности (см. выше), а также эллиптической вилки или эллиптического удвоения периода (при факторизации по группе $\mathbb{Z}_2$).

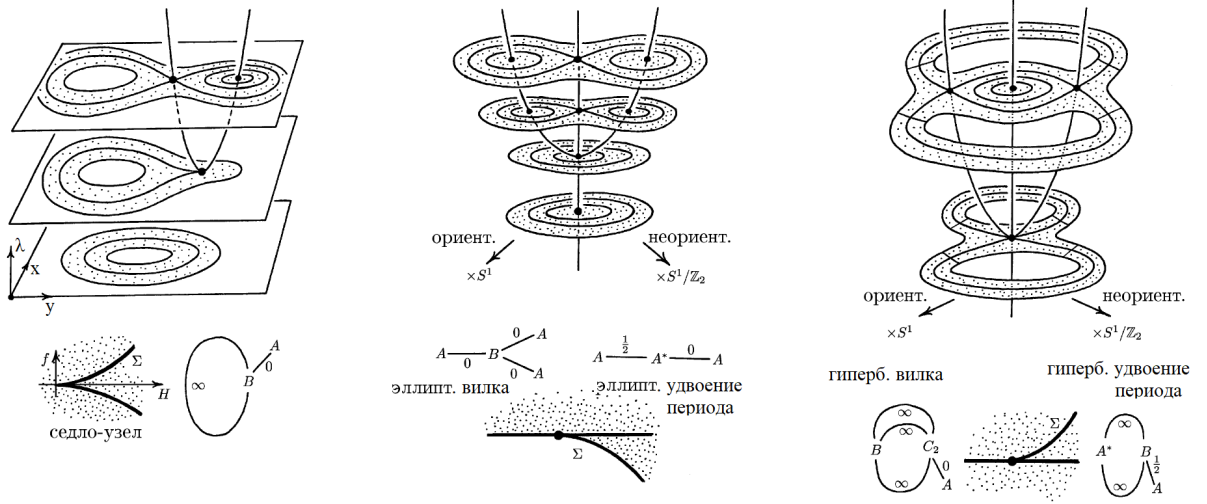


Рис. 1.5: Особенности системы Ковалевской и модельные вырожденные особенности имеют одинаковые круговые молекулы: седло-узел (параболическая особенность), эллиптические вилка и удвоение периода, гиперболические вилка и удвоение периода

Описание канонической особенности типа гиперболической вилки или гиперболического удвоения периода устроено сложнее. Например, пара функций $H = \lambda$, $F = x^2 - y^4 - \lambda y^2$ реализует другую полулокальную особенность, отличную от изображенной справа на рис. 1.5, но тоже называемую гиперболической вилкой.

Для вырожденных особенностей, не содержащих точек ранга 0, верна следующая теорема, доказанная Н.Т.Зунгом в [92]:

Теорема 1.6. Пусть для $\mathfrak{F} = (H, F)$ верно, что множество $\mathfrak{F}^{-1}(z)$ не содержит точек ранга 0 и либо имеет размерность 1, либо размерность 2 и содержит регулярную точку. Тогда в инвариантной окрестности слоя $\mathfrak{F}^{-1}(z)$ есть аналитическое симплектическое локально-свободное действие окружности, свободное на торах Лиувилля и сохраняющее $\mathfrak{F}$.

В частности, отсюда прообраз допустимой кривой образует единое расслоение Зейферта со слоем окружность. Тем самым, слои любых двух седловых 3-атомов в круговой молекуле будут гомологичны друг другу и циклу на граничном торе 3-атома, дополняющему исчезающий цикл атома A до базиса на этом торе. С учетом 1.1.5.3 имеем, что на ребрах между седловыми атомами метка $r = \infty$, а между эллиптическим и седловым атомами $r = 0$.

1.1.5.3 Допустимые базисы и правила их выбора

Как показано в [4], на граничных торах каждого 3-атома можно выбрать некоторые базисы, называемые допустимыми. Допустимый базис состоит из однозначно определенного цикла λ и дополняющего его до базиса цикла μ , который определяется с точностью до прибавления целого числа циклов λ .

По аналогии с работой [35] мы *одновременно* выберем допустимые базисы для всех перестроек и выразим их через однозначно определенные λ -циклы. Для этого для каждой дуги бифуркационной диаграммы мы рассмотрим маленький вертикальный интервал I , трансверсально пересекающий эту дугу. Отметим, что в компактном и классическом случаях Ковалевской у дуг бифуркационной диаграммы отсутствуют вертикальные касательные.

Прообразом интервала I является некоторый 3-атом. Общие правила выбора допустимых базисов на граничных торах 3-атомов изложены в [4]. Направление одного из циклов задается векторным полем $\text{sgrad } H$, а второго выбирается из согласованности ориентаций. В работе [55] П.В. Морозов переформулировал это правило для 3-атомов, лежащих в прообразе маленьких вертикальных отрезков. А именно, тройка $(\lambda, \mu, \text{grad } K)$ должна быть положительной относительно ориентации Q^3 на верхней границе атома (выше соответствующей дуги Σ) и отрицательной на нижней границе.

Мы переформулируем это условие в случае атома A . Совпадение меток ε для особенностей типа центр-центр, посчитанных работах [59], [37], [57] и найденных нами согласно утверждению 2.1.1, означает эквивалентность правил выбора допустимых базисов.

Напомним, что 3-атом A диффеоморфен полноторию $S^1 \times D^2$, расслоенному на торы Лиувилля и одну особую минимальную или максимальную окружность. Базой такого расслоения является 2-атом A (концентрические окружности и особая точка).

Определение 1.1.27. Базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ на граничном торе 3-атома A назовем *допустимым*, если

1. цикл λ стягиваем,
2. ориентация цикла μ задана векторным полем $\text{sgrad } H$ на особом слое,
3. базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ задает положительную ориентацию на граничном торе.

Базис (u, v) в касательном пространстве $T_x T^2$ к граничному тору положительно ориентирован, если четверка векторов $(\text{grad } H, N, u, v)$ положительно ориентирована относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь N — внешняя нормаль к 3-атому.

Для седловых атомов без звездочек (атомов B, C_2 в системе Ковалевской) цикл λ , наоборот гомологичен критической окружности, а циклы μ должны образовывать единое сечение 3-атома (и быть ориентированы внешней нормалью). Для атомов со звездочками правила выбора несколько сложнее. Поскольку в настоящей работе не потребуется непосредственно искать

такие допустимые базисы, то для более подробного ознакомления с данными определениями укажем монографию [4, гл. 4, т.1] и диссертацию П.В.Морозова [55].

Отметим, что мы выбираем допустимые базисы *сразу на всех* открытых дугах бифуркационной диаграммы системы Ковалевской. Иначе говоря, для каждой камеры бифуркационной диаграммы и семейства торов “над ней” мы можем сравнить указанные базисы, взятые с соответствующей стороны каждой граничной открытой дуги. Затем, переходя к эквивалентным областям (но при других значениях функций Казимира или параметров системы), можем добавит информацию о части других дуг.

Как оказалось, в случае Ковалевской для каждого семейства регулярных торов (в классическом случае Ковалевской их выделяют пять, см. [35]) допустимые базисы на торах, близких к каждой открытой дуги бифуркационной диаграммы, допускают выражение через однозначно определенные циклы λ .

На рисунке 1.6 для каждого из пяти семейств торов Лиувилля (подробнее см. пункт 1.2.2.2) эти однозначно определенные базисные циклы изображены как элементы целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Выражение некоторых подходящих циклов μ из допустимых базисов для каждого семейства торов и открытых дуг $\Sigma^{1,b}$ было получено в работе [35], исходя из информации о круговых молекулах системы.

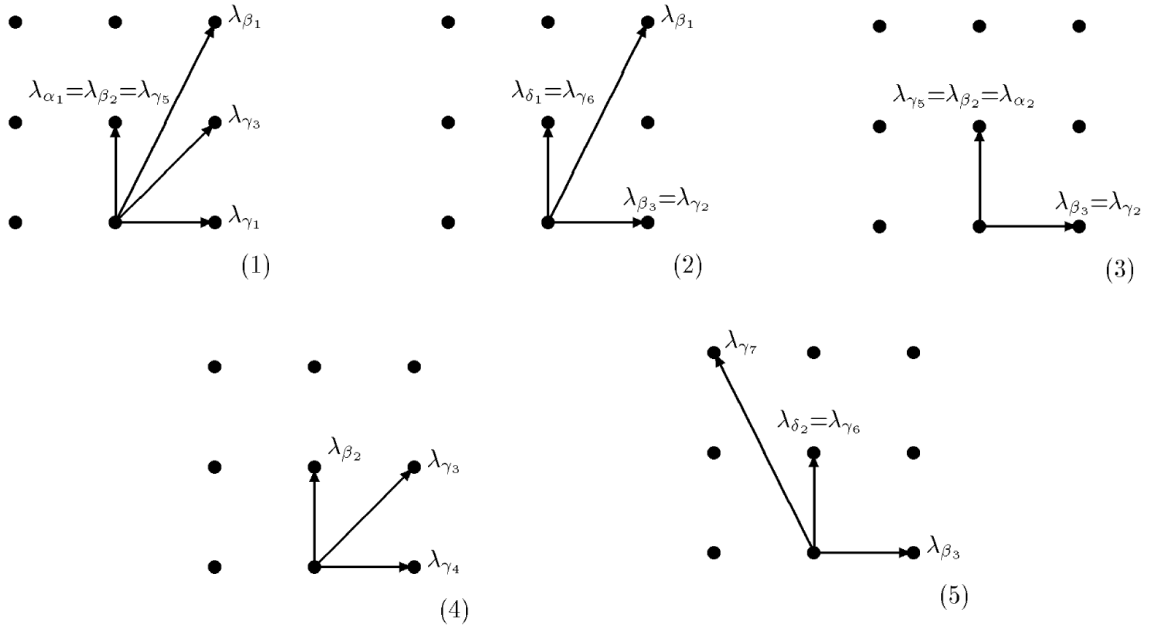


Рис. 1.6: Классический случай Ковалевской: представление однозначно определенных циклов λ допустимых базисов, соответствующих семействам дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$ бифуркационных диаграмм, на регулярном торе Лиувилля из семейств 1–5 как элементов целочисленной решетки $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Поясним, что мы подразумевается под меткой r на ребрах круговой молекулы, если эта метка равна $0, 1/2, \infty$. Выберем некоторым образом допустимые базисы на двух торах, принадлежа-

щих одному и тому же семейству торов и находящихся вблизи двух открытых дуг Σ . Выберем некоторую гладкую кривую, не пересекающую Σ и соединяющую образы двух этих торов.

Тогда при движении вдоль такой кривой можно сравнить допустимые базисы на двух торах. Если однозначно определенные базисные циклы атомов гомологичны (с точностью до направления), то метка $r = \infty$ как и в изоэнергетическом случае. Если выражение одного базиса через другой происходит со значением $\beta = \pm 1$, то независимо от возможных перемен знака мы получим сохранение этого свойства, т.е. $r = 0$. Если, аналогичным образом, $\beta = 2$, то метка r по-прежнему не зависит от направлений базисных векторов, поскольку при $k = 2$ имеем $-1 \equiv k - 1 \pmod{k} = 1$.

1.2 Система Ковалевской в механике твердого тела

1.2.1 Описание системы Ковалевской и история вопроса

В 1889 году С.В.Ковалевской [1] был открыт новый случай интегрируемости уравнений динамики тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (он является эллипсоидом вращения, и главные моменты инерции относятся как 2:2:1).

Как и известные случаи интегрируемости Эйлера и Лагранжа, волчок Ковалевской оказался интегрируемым при произвольных значениях постоянной площадей и энергии. А именно, в шестимерном пространстве переменных Эйлера С.В.Ковалевской был указан дополнительный интеграл, имеющий степень 4 по импульсам. Кроме того, в фазовом пространстве были найдены переменные разделения s_1, s_2 , в которых явное интегрирование уравнений движения сведено к задаче обращения Абеля-Якоби на гиперэллиптической кривой (т.е. римановой поверхности, имеющей род 2). Отметим также, что система обладает S^1 -симметрией — вращением вокруг вертикальной гравитационной оси — и не обладает разделением переменных на конфигурационном пространстве. Редукция ее фазового пространства по этой симметрии дает систему с двумя степенями свободы на сфере Пуассона.

Отметим, что в работах [1] и [104] С.В.Ковалевской был не только открыт новый интегрируемый случай динамики твердого тела. Кроме того, Ковалевской был поставлен вопрос, когда существуют однозначные решения задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, имеющие пять произвольных постоянных и не имеющие на плоскости комплексного времени иных особенностей кроме полюсов. Ею же (с некоторыми поправками и обобщениями Г.Г.Аппельрота [105] и А.М.Ляпунова [106]) был дан ответ на этот вопрос. Данный вопрос подробно обсуждается, например, П.Я. Полубариновой-Кочиной в [107].

Замечание 11. Хорошо известны системы, обладающие свойством интегрируемости лишь при некоторых значениях постоянной площадей. Например, параметрическое семейство [4]

систем, изучавшаяся Д.Н. Горячевым, С.А. Чаплыгиным и Л.Н. Сретенским, обладает свойством интегрируемости только при нулевом значении постоянной площадей.

Исследованию классической системы Ковалевской также посвящен целый ряд известных работ, например, работы Ф. Кёттера [47], Н.Е. Жуковского [93], Г.В. Колосова [94], М.П. Харламова [33], [32], [95]. Топологические инварианты слоений Лиувилля также была изучена в работах А.Т. Фоменко, его учеников и соавторов (например, [34], [79], [35]). В работах [96]–[98] Х. Дуллина, П. Рихтера и других были построены переменные действия системы Ковалевской и получено описание изоэнергетических поверхностей системы в этих терминах.

Гамильтониан и первый интеграл системы Ковалевской имеют вид

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1x_1, \quad (1.7)$$

$$K_0 = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2)^2. \quad (1.8)$$

Отметим, что во многих работах, посвященных классическому случаю Ковалевской (когда $\kappa = 0$), вместо функций $f_2 = b, H = h, K = k$ рассматривают функции $f_2/2 = l$ или $g, H/2$ и $K/4$.

Данная система обладает тремя инволюциями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Первая из них

$$\sigma_1 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3),$$

сохраняет интегралы f_1, H, K и меняет знак интеграла площадей $f_2 = b$ (т.е. σ_1 является симметрией на $M_{a,b}^4$ при $b = 0$).

Две другие инволюции, σ_2, σ_3 , сохраняют значения всех четырех первых интегралов системы и меняют знак скобки Пуассона (т.е. сами являются антиканоническими инволюциями, а их композиция будет канонической инволюцией)

$$\sigma_2 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (J_1, -J_2, J_3, x_1, -x_2, x_3),$$

$$\sigma_3 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (J_1, J_2, -J_3, x_1, x_2, -x_3).$$

1.2.1.1 Волчок или тяжелое твердое тело с закрепленной точкой

Напомним, что в теоретической механике [101, п. 1.2.1] *твердым телом* называют систему точек (в трехмерном пространстве), попарные расстояния между которыми постоянны. Дополнительно также потребуем, чтобы в системе имелось хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ выбрана декартова ортогональная система координат K : точка O — начало отсчета — и базисные векторы e_x, e_y, e_z , которые попарно ортогональны друг другу. Будем называть его *неподвижным репером*. *Движением твердого тела* называют изменение координат всех его точек с течением времени. Такое движение можно описать как некоторый *подвижный репер* $K' = K'(t)$ с точкой O' и векторами e_1, e_2, e_3 . Он задается

радиус-вектором своего начала отсчета (в координатах x, y, z) и матрицей перехода, выражающей векторы подвижного репера через векторы неподвижного.

Далее в качестве подвижной системы координат примем такой репер K' . Началом отсчета в нем является точка закрепления тела, т.е. $O' = O$, а координаты e_1, e_2, e_3 направлены вдоль главных осей инерции тела. Тогда в системе координат K' матрица A тензора инерции тела диагональна: $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$.

Конфигурационным пространством системы является группа Ли $SO(3)$. Параметризуем ее тремя углами Эйлера φ, ν, ψ — углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Здесь $\varphi, \psi \in S^1$, и $0 \leq \nu \leq \pi$. Особенности такой системы координат являются тройки углов, где $\nu = 0$ или $\nu = \pi$. Тогда тор T^2 , задаваемый углами φ, ψ , вырождается до окружности с угловой координатой $\varphi + \psi$ или $\psi - \varphi$ соответственно.

Нами рассматривается задача о *тяжелом* твердом теле, т.е. на систему действует постоянная сила тяжести, направленная вдоль оси Oz в отрицательном направлении. Далее обозначим ее $g = -ge_z$. Радиус-вектором $\vec{c}$ зададим центр масс системы.

Итак, говоря о волчке, мы будем иметь в виду тяжелое твердое тело с закрепленной точкой, вокруг которой оно может свободно вращаться.

1.2.1.2 Уравнения движения волчка и случай Ковалевской

Для задания системы нам остается записать дифференциальные уравнения Эйлера–Пуассона движения системы и выбрать главные моменты инерции системы A_1, A_2, A_3 и расположение центра масс, т.е. тройку чисел c_1, c_2, c_3 .

Движение волчка в трехмерном пространстве можно задать следующим образом. Рассмотрим вектор угловой скорости тела ω в подвижной системе K' $Oe_1e_2e_3$ (его компоненты в ней будем обозначать $\omega_1 = p, \omega_2 = q, \omega_3 = r$) главных осей инерции. Тогда имеем систему динамических уравнений Эйлера (где числа M_i — сумма моментов сил относительно оси $Oe_i, i = 1, 2, 3$)

$$\begin{cases} A_1\dot{p} + (A_3 - A_2)qr = M_1, \\ A_2\dot{q} + (A_1 - A_3)rp = M_2, \\ A_3\dot{r} + (A_2 - A_1)pq = M_3, \end{cases}$$

и систему уравнений, выражающую компоненты угловой скорости тела в терминах углов Эйлера и их производных по времени:

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \nu + \dot{\nu} \cos \varphi, \\ q = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \nu - \dot{\nu} \sin \varphi, \\ r = \dot{\varphi} \cos \nu + \dot{\psi}. \end{cases}$$

Вторую систему можно записать в матричном виде:

$$(p, q, r)^T = \Phi(\dot{\varphi}, \dot{\nu}, \dot{\psi})^T.$$

Напомним, что кинетическая энергия T вращения волчка равна

$$T = \frac{1}{2}(p, q, r) \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Тогда сопряженные импульсы $(\pi_\varphi, \pi_\nu, \pi_\psi)$, соответствующие тройке переменных $\vec{\varphi} = (\varphi, \nu, \psi)$, можно так выразить через $(\dot{\varphi}, \dot{\nu}, \dot{\psi})$:

$$\begin{pmatrix} \pi_\varphi \\ \pi_\nu \\ \pi_\psi \end{pmatrix} = \Phi^T A \Phi \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

В системе Ковалевской $A_1 = A_2 = 2A_3$, т.е. эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, и центр масс системы расположен в его экваториальной плоскости. Пусть центр масс находится на расстоянии s от начала координат вдоль оси Oe_1 , т.е. точке ce_1 . Обозначим также суммарную массу системы через M .

Потенциальная энергия системы Ковалевской имеет вид $V = -Mgc \sin \psi \sin \nu$, т.е. уравнения ее движения имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{\varphi}} \\ \dot{\vec{\pi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H_{SO(3)}/\partial \vec{\varphi} \\ \partial H_{SO(3)}/\partial \vec{\pi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \text{diag}(1, 1, 1).$$

Здесь $\vec{\varphi} = (\varphi, \nu, \psi)^T$ и $\vec{\pi} = (\pi_\varphi, \pi_\nu, \pi_\psi)^T$,

Тем самым, энергия нередуцированной системы Ковалевской в координатах $\vec{\varphi} = (\varphi, \nu, \psi)$, $\vec{\pi} = (\pi_\varphi, \pi_\nu, \pi_\psi)$ на $T^*SO(3)$ равна

$$H_{SO(3)} = \frac{(\pi_\varphi - \pi_\psi \cos \nu)^2}{4 \sin^2 \nu} + \frac{\pi_\nu^2 + 2\pi_\psi^2}{4} - \sin \psi \sin \nu, \quad (1.9)$$

и каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении к $SO(3)$ задает по этой функции динамическую систему.

1.2.1.3 Физическая реализация системы Ковалевской

В работе [102] также была описана следующая физическая реализация системы Ковалевской, см. рис. 1.7. Составим твердое тело из массивного кругового кольца радиуса r и массой $2m$ и трех грузов (расположение и характеристики которых опишем ниже).

Пусть центр этого кольца — неподвижная точка (шарнир) твердого тела, ось e_1 подвижной системы координат перпендикулярна плоскости кольца (в котором лежат оси Oe_2 и Oe_3), и моменты инерции кольца относительно осей Oe_1, Ae_2, Ae_3 равны $(2mr^2, mr^2, mr^2)$.

Расположим на оси Oe_3 два груза симметрично относительно точки O так, чтобы относительно осей Oe_1 и Oe_2 они имели момент инерции mr^2 . Третий груз расположим на оси Oe_1 с моментом инерции относительно осей Oe_2 и Oe_3 , равным mr^2 (см. рис. 1.7).

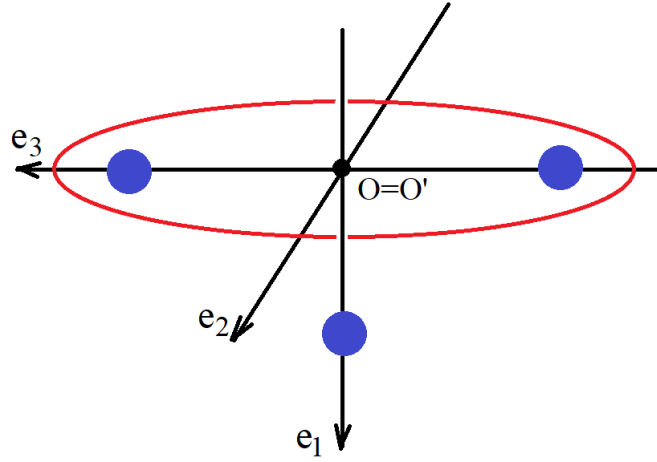


Рис. 1.7: Физическая реализация классической системы Ковалевской

Получим систему, для которой оси Oe_1, Oe_2, Oe_3 задается главными осями инерции (в точности как репер K' выше), и главные моменты инерции равны $4mr^2, 4mr^2, 2mr^2$ соответственно. Центр масс системы лежит на оси Oe_1 в точке с координатой s . Напомним обозначения: M для общей массы системы, g для величины силы тяжести, а s — расстояния от точки шарнира до центра масс.

Примем за единицу энергии Mgc , а $\sqrt{2mr^2/(Mgc)}$ за единицу времени. Получим, что угловой момент системы и моменты инерции изменяются в величинах $\sqrt{mr^2Mgc}$ и mr^2 соответственно. Тогда данная система описывается гамильтонианом (1.9) (для системы на $T^*SO(3)$).

1.2.1.4 Редукция системы по циклической переменной φ

На фазовом пространстве $T^*SO(3)$ имеется S^1 -симметрия — вращение вокруг оси Oz . Тем самым, циклическую переменную φ (угол собственного вращения) можно исключить, перейдя к параметрическому семейству систем на кокасательном расслоении к T^*S^2 с параметром $\pi_\varphi = l$ — значением углового момента.

Конфигурационное пространство таких редуцированных систем с двумя степенями свободы — двумерную сферу S^2 — можно рассматривать как подмногообразие трехмерного пространства $\mathbb{R}^3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Уравнения Эйлера–Пуассона в переменных $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, l_1, l_2, l_3)$ для редуцированной системы полностью задаются скобкой Пуассона для алгебры Ли $e(3)$, т.е. условиями вида (1.3) при $\varkappa = 0$ (при замене J_i на l_i , а x_i на γ_i).

Для учета вращения вокруг вертикальной оси (т.е. рассмотрения исходной, нередуцированной

ной системы), можно проинтегрировать следующее уравнение

$$\pi = \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left(\frac{\gamma_1 l_1}{A_1} + \frac{\gamma_2 l_1}{A_1} \right).$$

Отметим также, что в другом подходе к описанию систем с конфигурационным пространством $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ его рассматривают как базу двулистного накрытия трехмерной сферой S^3 , лежащей в пространстве R^4 . Этот подход развивался Ф.Клейном и А. Зоммерфельдом в работе [103], в том числе в применении к системе Ковалевской. Он имеет свои преимущества как по сравнению с рассмотрением редуцированной системы (продолжает учитываться вращение вокруг оси Oz), так и в сравнении с рассмотрением системы на $T^*SO(3)$ с координатами $\vec{\varphi}, \vec{\pi}$ (отсутствуют особенности системы координат). Как указано в работе [102] П. Рихтера, Х. Дуллина и А. Виттека, данный подход активно применялся ими для практических вычислений при компьютерной визуализации движения волчка Ковалевской в известном научном фильме “Kovalevskaya top” (“Kowalewskaja Kreisel”) 1997 года, посвященном топологии и динамике данной системы (информация о нем имеется в работе [102]).

1.2.2 Топология слоений Лиувилля классической системы Ковалевской

В настоящем разделе мы обсудим известные результаты по топологическому исследованию интегрируемой системы Ковалевской из динамики твердого тела (напомним, что эту систему также называют классическим случаем Ковалевской, [35]).

В указанной системе каждая особенность слоения Лиувилля оказалась тесно связанной с наличием кратного корня у многочлена из формул разделения переменных при соответствующих значениях первых интегралов системы.

Напомним, что переменные разделения s_1, s_2 как функции от фазовых переменных были построены С.В.Ковалевской (также см. работу Ф.Кёттера [47]). Связь между переменными Эйлера и переменными разделения, найденными С.В.Ковалевской, была подробно изучена Н.Е.Жуковским [93].

Многочлен $\Phi(s)$ с коэффициентами, зависящими от значений первых интегралов системы Ковалевской, задает динамику переменных s_1, s_2 Ковалевской:

$$(s_1 - s_2)^2 \dot{s}_1^2 = \Phi(s_1), \quad (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_2^2 = \Phi(s_2).$$

Многочлен $\Phi(s)$ имеет степень 5 по переменной s и является произведением двух разных одночленов и многочлена степени 3 от s (последний является резольвентой Эйлера для многочлена R из формулы для выражения переменных разделения s_i через фазовые переменные, см. [33]).

Появление кратных корней у многочлена Φ тесно связано с изменением режима движения волчка. Данный вопрос активно изучался, например, Г.Г.Аппельротом. Им в работе [50] были выделены 4 класса движений, названных им простейшими. Они соответствуют наличию

кратных корней у многочлена Φ при выбранных значениях первых интегралов системы и различаются (на 4 класса), в частности, тем, корни каких именно сомножителей Φ совпали. На некоторых из них, называемым особо замечательными движениями, хотя бы одна из переменных деления постоянна и равна указанному кратному корню. Отметим, что в рамках данных классов движений были также выделены многочисленные подклассы (об этом также [102]).

1.2.2.1 Исследования фазовой топологии системы Ковалевской

Обширная программа исследований систем механики была предложена С.Смейлом в работе [17]. Там же был предложен подход к ее реализации для натуральных систем с симметрией. Отметим, что бифуркационные диаграммы для отображения (f_2, H) определены не только для интегрируемых систем.

Тем не менее, ряд известных систем динамики твердого тела — случаи Ковалевской, Горячева–Чаплыгина, Жуковского и их обобщения — имеют дополнительный интеграл, *нелинейный* по компонентам угловой скорости в подвижном репере. Поэтому изучение их инвариантных многообразий в предложенную в работе [17] схему не укладывается, и потребовало развития новых подходов.

В работах М.П. Харламова (см. монографию [33]) был предложен новый метод изучения фазовой топологии широкого класса интегрируемых систем динамики твердого тела, в том числе с гироскопическими силами. Там же приведены примеры его применения для изучения интегрируемых случаев динамики, обладающих интегралами степеней 2, 3 и 4 — случаев Жуковского, Горячева–Чаплыгина–Сретенского и Ковалевской. Затем в той же технике М.П. Харламов и Т.И. Погосян изучили интегрируемый случай Клебша (работы [108], [109], [110], [111]).

Отметим, что в основе данного метода лежит поиск областей возможности движения (образов интегральных многообразий при проекции с некоторыми дополнительными свойствами) и обобщенных границ — бифуркационного множества для отображения интегрального многообразия в образ проекции. При этом также введено понятие эквивалентных областей (состоящих из регулярных точек отображения момента). При изменении параметра системы (например, значения функции Казимира f_2 в задаче Ковалевской) данные области будут образовывать трехмерные камеры, состоящие из регулярных значений отображения (f_2, H, K) . Для системы Ковалевской такие области возможности движения рассматривались в [33] на сфере Пуассона (примеры ее применения также см. [4, гл. 3 и 5, т. 2]).

Для системы Ковалевской М.П.Харламовым было описано критическое множество системы и было проверено, что все критические точки отображения четырех первых интегралов системы соответствуют движениям системы, принадлежащих к четырём классам Апфельрота.

Затем в пространстве $\mathbb{R}^3$ значений интеграла площадей, энергии и интеграла Ковалевской) было вычислено множество бифуркационных значений такого отображения. Его дополнение до всего образа данного отображения состоит из нескольких открытых трехмерных областей

(называемых в [97] и [35] областями Харламова).

Сечения такой области разными уровнями интеграла площадей образуют *эквивалентные области* на бифуркационных диаграммах $\Sigma^{1,b}$ отображения момента для разных симплектических листов $M_{1,b}^4$. Каждая точка из такой области имеет одинаковое количество регулярных торов Лиувилля в своем прообразе при отображении момента.

Бифуркационные диаграммы отображения момента $\Sigma^{1,b}$ (вид бифуркационной диаграммы для орбиты $M_{1,b}^4$ зависит от значения b интеграла площадей f_2) были изображены для тех орбит, на которых все критические точки ранга 0 в $M_{1,b}^4$ являются невырожденными (т.е. исключая орбиты, соответствующие значениям $a = 1$ и $b \in \{1, \sqrt{2}, (4/3)^{3/4}\}$ функций f_1 и f_2 соответственно). Мы приведем их вид ниже, на рис. 1.10.

Для гамильтониана (1.7) и интеграла (1.14) Ковалевской бифуркационная диаграмма отображения (H, K) из орбиты $M_{a,b}^4$ при $a > 0, b \neq 0$ содержится в объединении следующих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:

1. Прямая $k = 0$;
2. Параметрическая кривая,

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = 4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4}, \quad (1.10)$$

где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. Парабола

$$k = \left(h - \frac{2b^2}{a} \right)^2. \quad (1.11)$$

В случае $a > 0, b = 0$ вместо кривой (1.10) требуется взять объединение параболы

$$k = h^2 + 4ac_1^2 \quad (1.12)$$

и касательной к этой параболе в точке $h = 0$

$$k = 4ac_1^2. \quad (1.13)$$

Данное объединение является предельным множеством плоскости Ohk для параметрической кривой (1.10) при $b \rightarrow 0$.

В системе Ковалевской (как и во многих других изученных системах, об этом см. [4, гл. 1, т. 1]) при каждом значении b интеграла площадей бифуркационная диаграмма $\Sigma^{1,b}$ состоит из конечного числа гладких дуг (ограниченных и неограниченных), лежащих на одной из нескольких кривых.

Напомним, что особыми точками бифуркационной диаграммы называют точку пересечения, касания, возврата ее гладких дуг или изолированные точки. Разность диаграммы $\Sigma^{1,b}$

системы Ковалевской и множества ее особых точек состоит из конечного числа гладких дуг, гомеоморфных интервалу. Будем называть их *открытыми дугами* (они открыты в топологии, индуцированной с плоскости на бифуркационную диаграмму).

В системе Ковалевской прообраз малого отрезка на плоскости Ohk , трансверсально пересекающего открытую дугу (в любой из ее точек) бифуркационной диаграммы имеет одно и то же топологическое устройство (класс послойной гомеоморфности). М.П. Харламовым была описана топология особых слоев такого слоения для дуг бифуркационной диаграммы и описана происходящая перестройка торов Лиувилля.

Вопрос невырожденности критических точек ранга 1 и 0, находящихся в прообразах точек открытых дуг бифуркационной диаграммы и ее особых точек, в работах М.П.Харламова не изучался.

Замечание 12. В последующих работах, посвященных в том числе системам с тремя степенями свободы, М.П.Харламовым были предложены новые подходы к изучению топологии интегрируемых гамильтоновых систем — метод критических подсистем [23] и метод булевых функций [112]. Оба успешно применялись М.П.Харламовым, П.Е.Рябовым и С.В.Соколовым к изучению слоений Лиувилля непростых систем с двумя и тремя степенями свободы (например, в работах [112] и [113]).

1.2.2.2 Лиувиллев анализ системы Ковалевской

Следующие шаги в изучении фазовой топологии волчка Ковалевской были сделаны в рамках подхода, развиваемого в работах А.Т.Фоменко, его учеников и соавторов (краткое описание основных понятий и результатов было сделано нами в предыдущих разделах работы).

А.А.Ошемковым (см. [114] и [34]) были исследованы критические точки ранга 1 отображения момента с точки зрения их невырожденности. А именно, была показана боттовость интеграла K на каждой трехмерной изоэнергетической поверхности $Q_{1,b,h}^3$, образ которой при отображении (H, K) не содержит особых точек $\Sigma^{1,b}$. Тем самым было доказано, что найденные М.П.Харламовым перестройки торов Лиувилля действительно являются 3-атомами ИГС типов A, B, A^*, C_2 .

В тех же работах было показано, что в классической системе Ковалевской имеется ровно 10 классов $A, B, \dots, J$ неособых изоэнергетических поверхностей $Q_{1,b,h}^3$, для которых одновременно гомеоморфны сами 3-многообразия и грубо лиувиллево эквивалентны ограничения интегрируемой системы на них (т.е. совпадают инварианты Фоменко).

Как оказалось, каждый из классов $A - J$ является также классом лиувиллевой эквивалентности систем на неособых $Q_{1,b,h}^3$. Это было доказано в работе А.В.Болсинова, П.Рихтера и А.Т.Фоменко [35]. В основе результата лежит единообразный выбор допустимых базисов для семейств дуг бифуркационных диаграмм $\Sigma^{1,b}$ (при разных b) и описание круговых молекул особых точек этих диаграмм (исключая конечное число особых точек для конечного числа значений b).

Меченые молекулы данных классов неособых $Q_{a,b,h}^3$ были перечислены в таблице в работе [35], она также приведена нами, см. табл. 2.2.

Отметим, что круговые молекулы особых точек бифуркационной диаграммы $\Sigma^{1,b}$ были изучены в работе А.В.Болсинова [79]. А именно, круговая молекула с метками r на своих ребрах была построена для каждой особой точки каждой $\Sigma^{1,b}$, исключая одну особую точку для диаграмм $\Sigma^{1,b}$ при $b = \pm 1, \pm(4/3)^{3/4}, \pm\sqrt{2}$. Каждая такая особая точка является образом вырожденной критической точки ранга 0. Для особенностей с невырожденными критическими точками ранга 0 была определена их принадлежность классам послойной гомеоморфности полулокальных особенностей (в наиболее трудном случае — особенностей седло-седло — такие классы были перечислены Л.М. Лерманом и Я.Л. Уманским в работах [83, 84]).

Для построения такого описания оказалось удобно объединить в единые семейства некоторые дуги или особые точки $\Sigma^{1,b}$ (с разными b). Такие семейства особых точек диаграмм $\Sigma^{1,b}$ были в работе [35] обозначены $H, U_1, U_2, U_3, M_1, M_2$ и c_1, c_2, e_1, e_2 для образов невырожденных точек ранга 0 и вырожденных одномерных S^1 -орбит соответственно. Там же было кратко описано поведение волчка для невырожденных точек ранга 0 и принадлежность неботтовских одномерных S^1 -орбит вырождениям I-IV классов Аппельрота.

Отметим, что данные семейства особых точек и дуг бифуркационных диаграмм $\Sigma^{1,b}$ допускают следующее описание. Разобьем бифуркационную диаграмму $\Sigma \in \mathbb{R}^3(b, h, k)$ отображения (f_2, H, K) на связные компоненты, состоящие из точек, имеющих в сечении $f_2 = b$ (т.е. на диаграмме $\Sigma^{1,b}$) одинаковые круговые молекулы (с метками r). Каждое такое семейство точек является непрерывной кривой в $\mathbb{R}^3(b, h, k)$, гомеоморфной интервалу. Концами этих кривых (если в данном направлении кривая ограничена) является множество из семи точек (названных в [35] суперсингулярными). Одна из них, точка S_0 , входящая в $\Sigma^{1,b}$ при $b = 0$, имеет в прообразе вырожденную орбиту критических точек ранга 1 и круговую молекулу как у эллиптической вилки. Остальные три пары особых точек Σ являются образами вырожденных точек ранга 0.

Удаление множества троек (b, h, k) , соответствующих особым точкам $\Sigma^{1,b}$, разбивает бифуркационную диаграмму $\Sigma \in \mathbb{R}^3(b, h, k)$ отображения (f_2, H, K) на двумерные связные компоненты. Данные компоненты разделяют некоторые области Харламова, т.е. каждой такой точке соответствует один и тот же 3-атом, в котором перестраиваются друг в друга одни и те же семейства регулярных торов Лиувилля.

Полученные компоненты связности (и открытые дуги $\Sigma^{1,b}$, входящие в такую компоненту) в работе [35] были обозначены через $\alpha_1, \dots, \delta_2$. Буква в таком обозначении показывает на один из 4-х классов Аппельрота I-IV:

$$I - \delta, \quad II - \alpha, \quad III - \beta, \quad IV - \gamma.$$

На рисунке 1.10 для каждого такого класса дуг указан тип 3-атома и семейства регулярных торов Лиувилля (1)-(5), которые по данному атому перестраиваются. На рис. 1.6 были изображены однозначно определенные циклы λ для каждого семейства дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$ и соответствующих

семейств регулярных торов.

Выпишем допустимые базисы на граничных торах 3-атомов для каждого семейства таких дуг в обозначениях рисунка 1.6, найденные в работе [35]. Для каждого типа дуг указаны семейства торов Лиувилля выше (по оси k) и ниже данной дуги (на плоскости Ohk) и циклы допустимых базисов. Отметим, что символ $\oslash$ соответствует случаю, когда $Q_{a,b,h}^3$ является пустым множеством.

Прокомментируем используемые обозначения. Для каждого семейства дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$ взят малый вертикальный отрезок $H = \text{const}$, трансверсально пересекающий эту дугу. Ниже черты записана информация для прообраза его нижнего конца (с наименьшим $K = k$), а выше черты — для прообраза его верхнего конца:

- каким семействам регулярных торов 1–5 принадлежат торы в прообразе соответствующего конца,
- как выглядит однозначно определенный цикл λ (первый цикл в паре) для данной бифуркации как элемент целочисленной решетки (стрелки $\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow$ соответствуют стрелкам единичной длины на рис. 1.6, а цикл λ_{β_1} равен циклу $\rightarrow + 2\uparrow$),
- как выражаются одновременно выбранные циклы μ (второй цикл в паре) на торах Лиувилля в прообразах концов отрезка (их выбор неоднозначен, но циклы μ на всех граничных торах одного 3-атома связаны условием: они лежат на едином его сечении).

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \quad & \frac{1}{\oslash} \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{\oslash} A, \quad \alpha_2 : \quad \frac{3}{\oslash} \frac{(\uparrow \quad \rightarrow)}{\oslash} 2A. \\
\beta_1 : \quad & \frac{1}{2} \frac{(\lambda_{\beta_1} \quad \downarrow)}{(\lambda_{\beta_1} \quad \uparrow)} B, \quad \beta_2 : \quad \frac{1,4}{3} \frac{(\uparrow \quad \nearrow)}{(\uparrow \quad \leftarrow)} C_2, \quad \beta_3 : \quad \frac{3}{2,5} \frac{(\rightarrow \quad \downarrow)}{(\rightarrow \quad \uparrow)} 2B. \\
\gamma_1 : \quad & \frac{1}{1} \frac{\oslash}{(\rightarrow \quad \nearrow)} A, \quad \gamma_2 : \quad \frac{3}{2} \frac{(\rightarrow \quad \downarrow)}{(\rightarrow \quad \nearrow)} 2A^*, \quad \gamma_3 : \quad \frac{3}{2} \frac{(\nearrow \quad \downarrow)}{(\nearrow \quad \lambda_{\beta_1})} B, \quad \gamma_4 : \quad \frac{1}{4} \frac{\oslash}{(\rightarrow \quad \nearrow)} A, \\
\gamma_5 : \quad & \frac{1}{3} \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \quad \leftarrow)} 2A^*, \quad \gamma_6 : \quad \frac{2}{2,5} \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \quad \leftarrow)} B, \quad \gamma_7 : \quad \frac{5}{\oslash} \frac{(\lambda_{\gamma_7} \quad \uparrow)}{\oslash} 2A. \\
\delta_1 : \quad & \frac{2}{\oslash} \frac{(\uparrow \quad \lambda_{\beta_1})}{\oslash} A, \quad \delta_2 : \quad \frac{5}{\oslash} \frac{(\uparrow \quad \rightarrow)}{\oslash} 2A.
\end{aligned}$$

Также отметим важные работы Х.Дуллина, П.Рихтера, А.Виттека и др. [96, 97, 98], посвященные вычислению переменных действия системы Ковалевской и описанию неособых изоэнергетических Q^3 в их терминах.

1.3 Аналоги системы Ковалевской на пучке алгебр Ли

Важные результаты по изучению интегрируемых обобщений классического случая Ковалевской и свойств их топологии слоений Лиувилля были получены в работах Х.М.Яхьи, И.В.Комарова, М.П.Харламова, П.Е.Рябова, С.В.Соколова, А.В.Цыганова, В.В.Соколова. Перечислим некоторые из них ниже.

- Х.М.Яхьей в работе была открыта интегрируемость [13] системы Ковалевской после, например, добавления гиростата и ортогонального магнитного поля, а в работе [99] обсуждается включение системы Ковалевской и других известных интегрируемых систем динамики и математической физики в многопараметрические иерархии интегрируемых систем, см. также [100].
- И.В.Комаровым открыты [5] аналоги системы Ковалевской на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$
- В.В.Соколовым был открыт новый интегрируемый случай (называемый системой Соколова), гамильтониан которого имеет такую же квадратичную по импульсам форму, что и гамильтониан Ковалевской. Кроме того, совместно с И.В.Комаровым и А.В.Цыгановым было показано, что новая система на алгебре Ли $e(3)$ отображается в систему Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$ с помощью отображения, сохраняющего значение скобки Пуассона.
- М.П.Харламовым и П.Е.Рябовым был составлен топологический атлас системы Ковалевской–Яхьи Ковалевской–Соколова [53].
- Активно изучаются системы с тремя степенями свободы (их нельзя редуцировать к системе с 2 степенями свободы): волчок Ковалевской в двух полях [15], обобщенный двухполевой гиростат [16].

В работе [5] И.В.Комаров рассмотрел систему $v = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом (1.7) для каждой алгебры Ли пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ (скобки Ли-Пуассона заданы в (1.3)), т.е. при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, а не только при $\varkappa = 0$.

Как оказалось, все эти системы являются интегрируемыми, причем интеграл имеет вид

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2^2)^2. \quad (1.14)$$

и совпадает с интегралом (1.8) классического случая Ковалевской при $\varkappa = 0$.

Такие системы (в зависимости от знака $\varkappa$, т.е. типа алгебры Ли) будем называть *интегрируемыми аналогами системы Ковалевской для соответствующей алгебры Ли*, или, для краткости, *системой Ковалевской на $so(4)$ или $so(3, 1)$ соответственно*. Случай $\varkappa > 0$ будем также называть *компактным случаем Ковалевской*, поскольку симплектические листы такой скобки Ли-Пуассона компактны (онм гомеоморфны $S^2 \times S^2$).

1.3.1 Бифуркационные кривые семейства систем Ковалевской

В работе [51] И.К.Козловым были найдены уравнения *бифуркационных кривых* (на плоскости Ohk значений функций H и K) произвольной системы Ковалевской из семейства систем на пучке $so(3,1) - e(3) - so(4)$. Напомним, что в случае ИГС на M^4 так называют кривые, содержащие в своем объединении бифуркационную диаграмму Σ этой ИГС.

Для семейства систем Ковалевской эти кривые (как и бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$) зависят от параметров $a, b, \varkappa$. Тем не менее, при каждом $\varkappa \neq 0$ бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ (ИГС на регулярной орбите $M_{a,b}^4$) содержится в их объединении. Отметим, что в случае $\varkappa = 0$ вместо объединения парабол требуется взять параболу $k = (h - b^2/a)^2$. Случай $b = 0$ существенно проще и описан после леммы.

Лемма 1.7 (И.К.Козлов, [51]). *Пусть $b \neq 0$ и $\varkappa \neq 0$. Тогда для любой регулярной орбиты $M_{a,b}$ (такой, что $a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$) бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ интегрируемой системы с гамильтонианом (1.7) и интегралом (1.14) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:*

1. *Прямая* (1.15)
 $k = 0,$

2. *Параметрическая кривая*

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = \left(4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4} \right) - 2\varkappa c_1^2 h(z) + \varkappa^2 c_1^4, \quad (1.16)$$

где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. *Объединение двух парабол*

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} \right)^2 \quad (1.17)$$

и

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} \right)^2. \quad (1.18)$$

Замечание 13. В случае $b = 0$ вместо кривой 1.16 следует рассмотреть параболу (1.19) и касательную (1.20) к ней в точке оси Ok . В уравнения остальных кривых достаточно подставить $b = 0$. Этому случаю посвящена Лемма 3.3 из работы [51].

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2 + 4ac_1^2 \quad (1.19)$$

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4ac_1^2 + \varkappa^2 c_1^4). \quad (1.20)$$

1.3.2 Критические точки и их невырожденность для аналогов системы Ковалевской на пучке $so(3, 1) - e(3) - so(4)$

1.3.2.1 Уравнения семейств критических точек

В работе [51] И.К.Козловым получены формулы (для произвольного $\varkappa \in \mathbb{R}$) нескольких семейств критических точек, в объединении которых лежит всё критическое множество системы $v = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом (1.7) на коалгебре из пучка, отвечающей данному $\varkappa$.

Кроме того, в утверждении 2 параграфа 4 работы [51] критическое множество системы Ковалевской при произвольном фиксированном $\varkappa$ было представлено как объединение (не дизъюнктное, вообще говоря) семи семейств. Три из них — четырехпараметрические, а остальные четыре — трехпараметрические. Все эти точки, за исключением перечисленных в утверждении 1.3.4 критических точек ранга 0, имеют ранг 1. Подчеркнём, что в утверждении ниже не налагается ограничений на параметры $\varkappa$ и b (т.е. $\varkappa, b \in \mathbb{R}$, если не оговорено противное).

Утверждение 1.3.1 (И.К. Козлов, утверждение 2, [51]). *Множество точек, где гамильтоновы векторные поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$, соответствующие гамильтониану (1.7) и интегралу (1.14), линейно зависимы, является объединением следующих шести семейств. Первые три семейства четырехпараметрические, а последние три — трехпараметрические.*

Четырехпараметрические семейства:

1. $x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \quad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$
2. $J_2 = 0, \quad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}$
3. $x_1 = \varkappa c_1 + (J_1 - c_1 \frac{x_3}{J_3}) \frac{x_2}{J_2}, \quad x_2 = J_2 \frac{(J_1 x_3 - \varkappa c_1 J_3)(J_1 J_3 - c_1 x_3) + J_2^2 J_3 x_3}{(J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + J_2^2 J_3^2},$
где $J_2 J_3 \neq 0$.

Трехпараметрические семейства:

4. $J_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad J_1 x_3 - J_3 x_1 = 0$
5. $J_3 = 0, \quad x_3 = 0,$
 $((x_1 - \varkappa c_1) J_1 + J_2 x_2)(J_2(x_1 - \varkappa c_1) - J_1 x_2) + c_1 x_2(x_1(x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0$
6. $J_1 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0$

1.3.2.2 Образы на $\Sigma^{a,b}$ вышеназванных семейств критических точек

Образы (при отображении момента) точек каждого из перечисленных выше семейств лежат на кривых из леммы 1.7.

Утверждение 1.3.2 (И.К.Козлов, утв. 3 и утв. 5, [51]). *Пусть $\varkappa \neq 0$. Тогда образы семейств критических точек, перечисленных в утверждении 1.3.1, устроены следующим образом:*

1. Образы особых точек из семейства 1 лежат на прямой $k = 0$.
2. Образы особых точек из семейства 2 лежат на кривой (1.16) в случае $b \neq 0$ или на объединении параболы (1.19) и касательной (1.20).
3. Образы особых точек из семейств 3, 4, 5 и 6 лежат на объединении двух парабол (1.17) и (1.18).

1.3.2.3 Вырожденность и невырожденность критических точек ранга 1

Затем в работе [51] для каждого из шести семейств критических точек семейства систем Ковалевской на пучке $so(3,1) - e(3) - so(4)$ (из утверждения 1.3.1) были указаны (для всех $\varkappa \in \mathbb{R}$)

- коэффициент λ линейной комбинации $\text{sgrad } K + \lambda \text{sgrad } H = 0$ косых градиентов гамильтониана (1.7) и интеграла (1.14);
- число μ , входящее (вместе с $-\mu$) в спектр оператора линеаризации (в указанной точке) косого градиента этой линейной комбинации интегралов.

Утверждение 1.3.3. Для каждой критической точки ранга 1 из утверждения 1.3.1 укажем такое λ , что $\text{sgrad } K + \lambda \text{sgrad } H = 0$ в этой точке, и такое μ , что спектр оператора $A_{K+\lambda H}$ состоит из четырёх нулей и $\pm\mu$.

Четырёхпараметрические семейства:

1. Семейство 1. Коэффициент пропорциональности $\lambda = 0$, т.к. $\text{sgrad } K = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Нетривиальное собственное значение:

$$\mu = 8i |(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 - 2c_1 J_1 x_3|.$$

2. Семейство 2. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\varkappa c_1^2 - J_1^2),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = 64c_1 (J_1^2 - J_3^2 - c_1 x_1) ((J_1^2 - c_1 x_1) (x_1 - \varkappa c_1) - c_1 x_2^2).$$

3. Семейство 3. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2 \left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2 - 2c_1 J_1 \frac{x_3}{J_3} \right),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32\lambda \left((J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + \left((J_1^2 + J_2^2) - c_1 \frac{J_1 x_3}{J_3} \right)^2 + J_2^2 (\varkappa c_1^2 + J_3^2) \right).$$

Трехпараметрические семейства:

4. Семейство 4. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 + J_1^2 - 2c_1x_1),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32\lambda((J_1^2 - c_1x_1)^2 + (J_1J_3 - c_1x_3)^2)$$

5. Семейство 5. В этом пункте мы будем считать, что $x_2 \neq 0$, потому что все точки из семейства 5, удовлетворяющие условию $x_2 = 0$, либо имеют ранг 0, либо принадлежат семейству 6. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2) + \frac{4}{x_2}J_1J_2(x_1 - \kappa c_1),$$

Если при этом $x_1 \neq \frac{\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$, то квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = \frac{16\lambda^2 J_2 \gamma}{x_2(\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1)},$$

где

$$\gamma = (c_1J_1x_2^2 - J_1(x_1 - \kappa c_1)(J_1^2 - J_2^2 - c_1x_1) - J_2x_2(\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1)).$$

Если $x_1 = \frac{\kappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$, то либо $x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}$, либо $x_2 = \pm \frac{\kappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2}{2c_1}$. В первом случае $\mu = 0$, во втором

$$\mu^2 = -32J_2^2\lambda(\kappa c_1^2 + (J_1 \mp J_2)^2)$$

6. Семейство 6. Коэффициент пропорциональности:

$$\lambda = 2(\kappa c_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1),$$

квадрат собственного значения:

$$\mu^2 = -32\lambda c_1^2(\kappa J_2^2 + x_1^2 + x_3^2).$$

Тем самым, поиск вырожденных точек в семействах 1-6 из утверждения 1.3.1 и нахождение их образов “упрощается” благодаря дополнительному условию $\mu = 0$ в сравнении с общим случаем. Для многих семейств случай $b = 0$ дополнительно существенно упрощает задачу.

1.3.2.4 Критические точки ранга 0 и формулы их спектров в зависимости от $\varkappa \in \mathbb{R}$

Утверждение 1.3.4 (И.К.Козлов, утв. 15, [51]). *Множество всех точек, в которых равны нулю оба косых градиента $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ (гамильтониана (1.7) и интеграла (1.14) семейства систем Ковалевской), является объединением следующих двухпараметрических семейств точек в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(J, x)$:*

1. $(J_1, J_2, 0, \varkappa c_1, 0, 0),$
2. $(J_1, 0, 0, x_1, 0, 0),$
3. $(J_1, 0, J_3, \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2}{2c_1}, 0, \frac{J_1 J_3}{c_1}).$

Для регулярных орбит $M_{a,b}^4$ образы этих трех семейств содержатся соответственно в трех следующих объединениях точек и их конечных пределах (при варьировании регулярных значений a, b)

- точка пересечения парабол (1.17) и (1.18) (при $\varkappa \neq 0$),
- точки пересечения параметрической кривой (1.16) с параболой (1.17) и с параболой (1.18),
- множестве нулей $k = 0$ параметрической кривой (1.16) (т.е. ее пересечений с бифуркационной прямой (1.15) $k = 0$ плоскости Ohk).

Для проверки невырожденности особых точек ранга 0 достаточно вычислить спектр линеаризации поля $\text{sgrad } H$ в них, воспользовавшись утверждением 1.1.2.

Утверждение 1.3.5 (И.К.Козлов, утв. 17, [51]). *Для всех трёх серий критических точек ранга 0 из утверждения 1.3.4 спектр линеаризации A_H косого градиента $\text{sgrad } H$ гамильтониана (1.7) Ковалевской содержит нулевое собственное значение с кратностью 2. Кроме того, этот спектр содержит следующие элементы:*

1. Для 1 серии критических особых точек ранга 0 спектр также содержит значения $\pm \sqrt{2} \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\varkappa\beta^2}}$, где

$$\alpha = \varkappa c_1^2 - J_1^2 - J_2^2 = (2\varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa})$$

$$\beta = c_1 J_2 = c_1^2 a - \varkappa^2 c_1^4 - \frac{b^2}{\varkappa}$$

2. Для 2 серии спектр также содержит значения

$$\pm 2\sqrt{c_1(x_1 - \varkappa c_1)} \quad \text{и} \quad \pm 2\sqrt{-J_1^2 + 2c_1 x_1 - \varkappa c_1^2}$$

3. Для 3 серии спектр также содержит значения

$$\pm 4iJ_3 \quad \text{и} \quad \pm \sqrt{2}\sqrt{J_1^2 - 2J_3^2 - \varkappa c_1^2}$$

1.3.3 Система Ковалевской на алгебре $so(4)$: результаты И.К. Козлова

В работе [51] подробно изучался компактный случай Ковалевской (т.е. случай $\varkappa > 0$ и алгебры Ли $so(4)$) и его связи с классической системой Ковалевской из динамики твердого тела (т.е. со случаем $\varkappa = 0$ и алгебры Ли $e(3)$).

1.3.3.1 Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской на алгебре $so(4)$

В разделе 1.3.1 мы привели найденные И.К.Козловым в [51] уравнения бифуркационных кривых семейства систем Ковалевской. При этом их взаимное расположение, попадание их точек и гладких дуг в образ отображения момента, а также устройство прообразов их точек существенно зависит от значений (a, b) .

Следующая теорема содержит основной результат работы [51] — описание бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}$ компактного случая Ковалевской для регулярных орбит $M_{a,b}^4$. А именно, И.К. Козловым было установлено, что 5 кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m делят множество $a \geq 2\sqrt{\varkappa}b$, $b > 0$ на 9 областей с одинаковым устройством бифуркационных диаграмм.

Теорема 1.8 (И.К.Козлов, [51]). *Пусть $\varkappa > 0$ и $b > 0$. Функции f_k, f_r, f_m, f_t и f_l заданные формулами*

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3}c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}} \quad (1.21)$$

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3}c_1^{2/3} \quad (1.22)$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2 \quad (1.23)$$

$$f_t(b) = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right)^2 + \varkappa t^2, \quad \text{где } b = t \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right) \quad (1.24)$$

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b| \quad (1.25)$$

делят множество орбит $\{b > 0, a \geq 2\sqrt{\varkappa}b\} \subset \mathbb{R}^2(a, b)$ на 9 областей (см. рис. 1.8 и 1.9).

На рисунках 2.5 – 2.23 для каждой из этих областей I–IX указана бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ отображения момента ИГС с гамильтонианом (1.7) и интегралом (1.14) на орбите $M_{a,b}$ алгебры Ли $so(4)$. Точнее, в каждом из случаев указано, из каких частей прямой $k = 0$, кривой (1.16) и двух парабол (1.17) и (1.18) состоит бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$.

Кроме того, для каждой дуги бифуркационной диаграммы $\Sigma^{a,b}$ указан 3-атом (тип перестройки торов Лиувилля, происходящей в прообразе ее точек), а для каждой особой точки диаграммы $\Sigma^{a,b}$ указано семейство особых точек, которому она принадлежит.

Замечание 14. В случае $b = 0$ из теоремы 4 работы [51] следует, что луч $a > 0, b = 0$ делится двумя значениями $a = \varkappa^2 c_1^2$ и $a = \varkappa^2 c_1^2 / 4$ на три промежутка, точкам которых

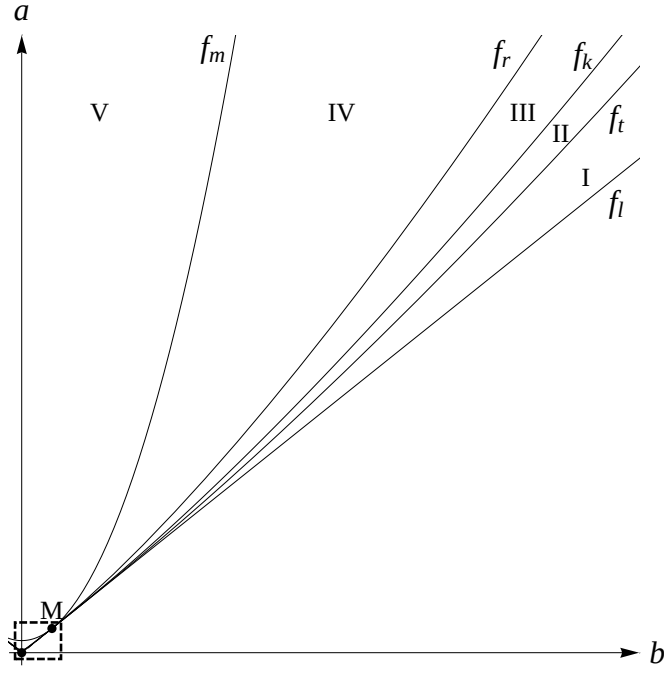


Рис. 1.8: Разбиение плоскости орбит Oab кривыми f_m, f_r, f_k, f_t, f_l

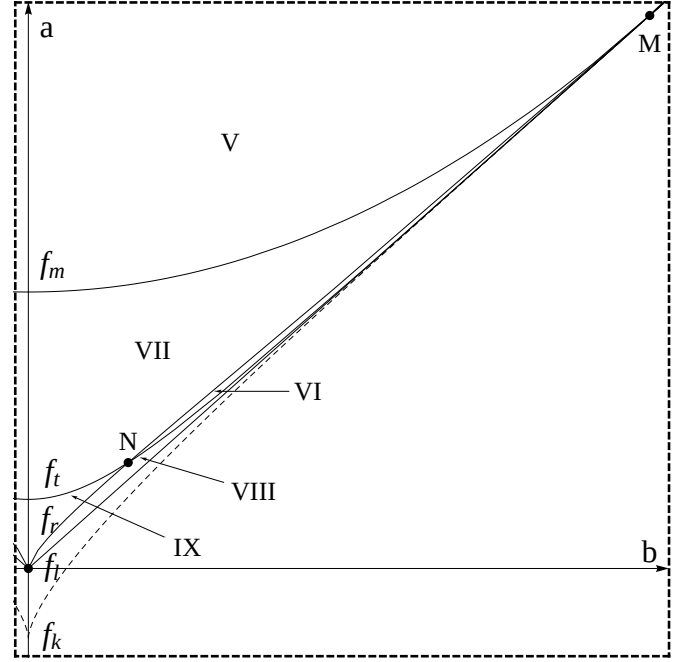


Рис. 1.9: Увеличенный фрагмент рис. 1.8.

соответствуют диаграммы $\Sigma^{a,0}$, изображенные на рисунках 2.24–2.27. Как и в случае $b \neq 0$, для каждой дуги бифуркационной диаграммы $\Sigma^{a,0}$ указана перестройка торов Лиувилля, происходящая в прообразе ее точек, а для каждой особой точки указано семейство, которому она принадлежит.

Также в работе [51] были описаны круговые молекулы особых точек $y_1, \dots, z_{11}$ бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}$ для точек (a, b) из областей I–IX и промежутков X–XII. Результаты изображены в таблицах 2.3 и 2.4. Соответствие между семействами особых точек классической системы Ковалевской $H, U_i, M_i, c_i, e_i, h_i$ и семействами $y_1, \dots, y_{11}$ из работы [51] указано в таблице 1.1 ниже.

Отметим, что особые точки $\Sigma^{a,b}$ для пар (a, b) , принадлежащих разделяющим кривым f_m, f_r, f_k, f_t плоскости Oab (за исключением их общих точек с лучами $a = |f_l(b)|$) либо относятся к тем же семействам, что и при близких (a, b) , либо соответствуют бифуркациям особенностей $M_{a,b}^4$, имеющих типы $y_1, \dots, \hat{y}_4, \dots, \hat{z}_7, \dots, z_{11}$.

Отметим, что как и в классическом случае Ковалевской, всё множество особых точек бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}$ системы Ковалевской на алгебре $so(4)$ можно разбить на семейства. Для $M_{a,b}^4$ таковые образуют двумерные семейства (соответствующие связным множествам в $\mathbb{R}_{a,b,h,k}^4$ с одинаковыми круговыми молекулами на $\Sigma^{a,b}$) и некоторое одномерное множество (его свойства мы обсудим ниже).

1.3.3.2 Пределный переход по параметру пучка

Также в работе [51] была установлена “непрерывность” предельного перехода бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}(\varkappa)$ при $\varkappa \rightarrow +0$.

Лемма 1.9. *Рассмотрим произвольные $a, b \in \mathbb{R}$, где $a > 0$. Тогда точка x принадлежит бифуркационной диаграмме $\Sigma(a, b, 0)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, \varkappa_n) = (a, b, 0)$.*

Как следствие, из областей I-IX случая $\varkappa > 0$ при предельном переходе “выживают” области I-IV, а из четырех кривых, содержащих $\Sigma^{a,b}(\varkappa)$ — все кроме правой параболы (1.18). При таком предельном переходе сохраняются круговая молекула и тип особой точки, если она не вырождается. В таблице 1.1 показано соответствие обозначений для семейств особых точек в работах [35] и [51]. Отметим, что точка типа y_4 , встречающаяся в $\Sigma^{a,b}$ при $b = 0$, соответствует суперсингулярной точке S_0 . Точка z_7 тоже присутствует только на орбитах с $b = 0$, т.е. тоже может быть названа суперсингулярной.

$\varkappa = 0$	H	U_1	U_2	U_3	M_1	M_2	e_1	e_2	c_1	c_2	h_1	h_2
$\varkappa > 0$	y_1	y_3	y_7	y_{12}	y_{10}	y_{11}	y_2	y_{13}	y_6	y_9	y_5	y_8

Таблица 1.1: Соответствие обозначений для семейств особых точек.

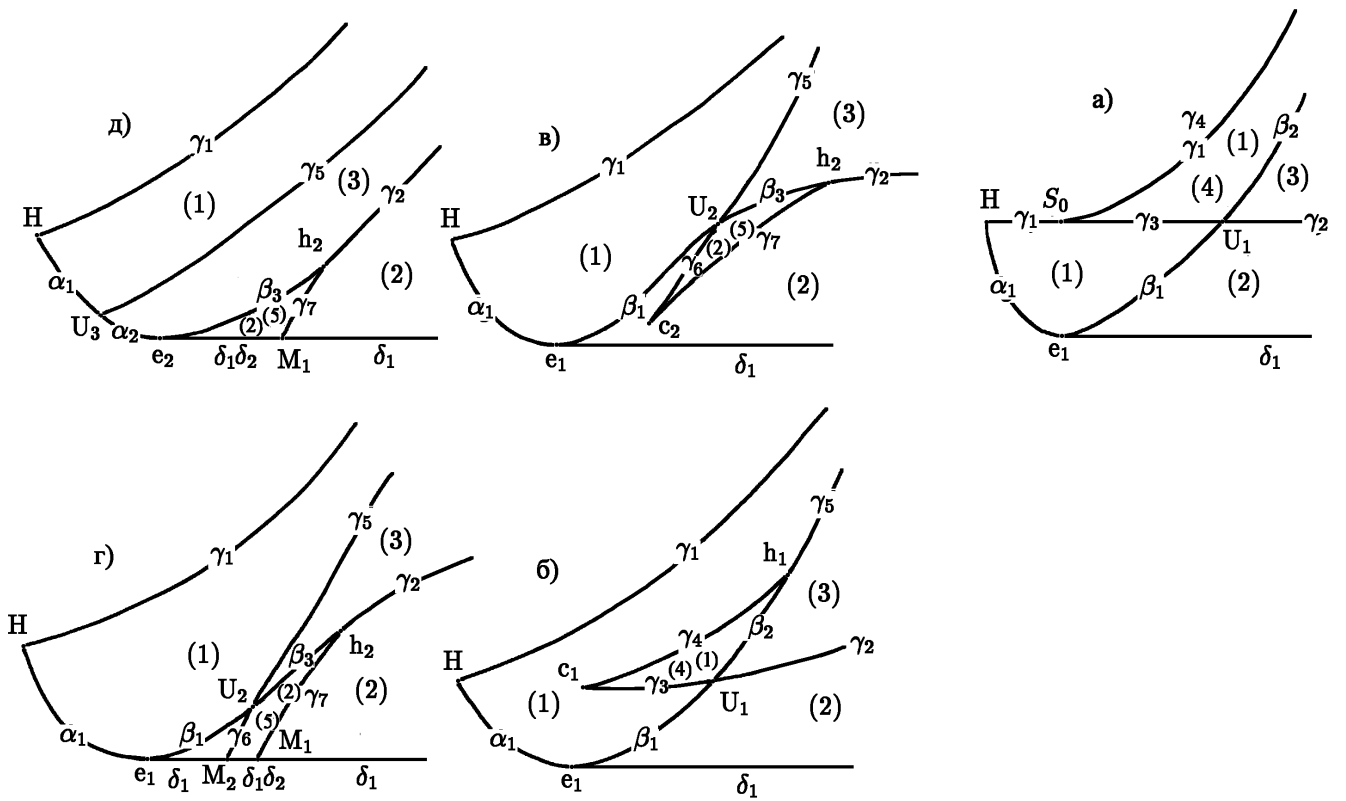


Рис. 1.10: Бифуркационные диаграммы классического случая Ковалевской в координатах Ohk

1.3.4 Система Ковалевской на $so(3, 1)$ и волчок Ковалевской–Соколова на $e(3)$

В этом разделе мы опишем несколько интегрируемых систем, которые, как оказалось, весьма тесно связаны. Первой является система Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$, второй — другая параметрическая система (называемая волчком Ковалевской–Соколова). Еще одной из обсуждаемых нами систем является случай Соколова интегрируемости уравнений Кирхгофа [6]. Связь двух первых систем в терминах пуассоновых отображений проистекает из работ [54] и [53]. Топология слоения Лиувилля волчка Ковалевской–Соколова была изучена в работе [53]. Для нее остается вычислить некоторые из числовых меток, и мы покажем возможность сделать это, не прибегая к достаточно сложной технике, а опираясь на топологические свойства интегрируемых систем и их особенностей и предыдущие результаты по системам Ковалевской и Соколова.

1.3.4.1 Пуассоновы отображения (морфизмы)

В данном пункте мы приведем определение пуассонова морфизма между двумя пуассоновыми многообразиями, рассмотренное в работе [54], для некоторого частного случая.

Пусть $(M_1, \{, \}_1)$ и $(M_2, \{, \}_2)$ — пуассоновы многообразия. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда M_i — линейные пространства, а скобки Пуассона являются линейными, т.е. рассматриваются коалгебры двух алгебр Ли с генераторами $x_1, \dots, x_n$ на M_1 и $X_1, \dots, X_m$ на M_2 соответственно.

Определение 1.3.1. Отображение $\sigma : X_i = \Psi_i(x_1, \dots, x_n)$ из M_1 в M_2 называется *пуассоновым отображением (морфизмом)*, если для всех гладких функций F, G на M_2 имеем

$$\{\sigma^*(F), \sigma^*(G)\}_1 = \{F, G\}_2.$$

В случае линейности скобок Пуассона рассматриваемый пуассонов морфизм соответствует гомоморфизму алгебр Ли. В случае, если $M_1 = M_2$, то пуассоновы отображения называют каноническими преобразованиями. В работе [54] исследуется ряд интересных подгрупп таких преобразований алгебры $e(3)$, называемых обобщенными сдвигами и обобщенными вращениями.

Главным образом, нас будет интересовать следующее нетривиальное отображение между открытыми подмножествами коалгебр $so(3, 1)^*$ и $e(3)^*$, введенное там же.

Теорема 1.10 (Комаров, Соколов, Цыганов [54]). *Рассмотрим $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{y})$ со скобкой Ли–Пуассона для $e(3)$:*

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, y_j\} = \varepsilon_{ijk} y_k, \quad \{y_i, y_j\} = 0. \quad (1.26)$$

Функции Казимира этой скобки $g_1 = (\mathbf{y}, \mathbf{y})$ и $g_2 = (\mathbf{J}, \mathbf{y})$. Зафиксируем $\kappa < 0$, $\alpha \neq 0$. Тогда в новых координатах $(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{y}) \setminus \{g_1 = 0\}$, где

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} + \sqrt{\frac{-\kappa}{\mathbf{y}^2}} \mathbf{y} \times \mathbf{J}, \quad (1.27)$$

скобка Пуассона (1.26) принимает вид (1.3) скобки Ли–Пуассона для $\mathfrak{so}(3,1)$. Тем самым

$$(\mathbf{J}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{J}, \mathbf{x}) \quad (1.28)$$

есть пуассонов морфизм между $\mathfrak{e}(3)^* \setminus \{g_1 = 0, g_2 = 0\}$ и $\mathfrak{so}(3,1)^* \setminus \{f_1 \leq 0, f_2 = 0\}$. Неособая орбита $M_{a,b}^4 = \{g_1 = a, g_2 = b\}$ коалгебры $\mathfrak{e}(3)^*$ отождествляется с орбитой $M_{\alpha^2 a + \varkappa \frac{b^2}{a}, \alpha b}^4$ коалгебры $\mathfrak{so}(3,1)^*$.

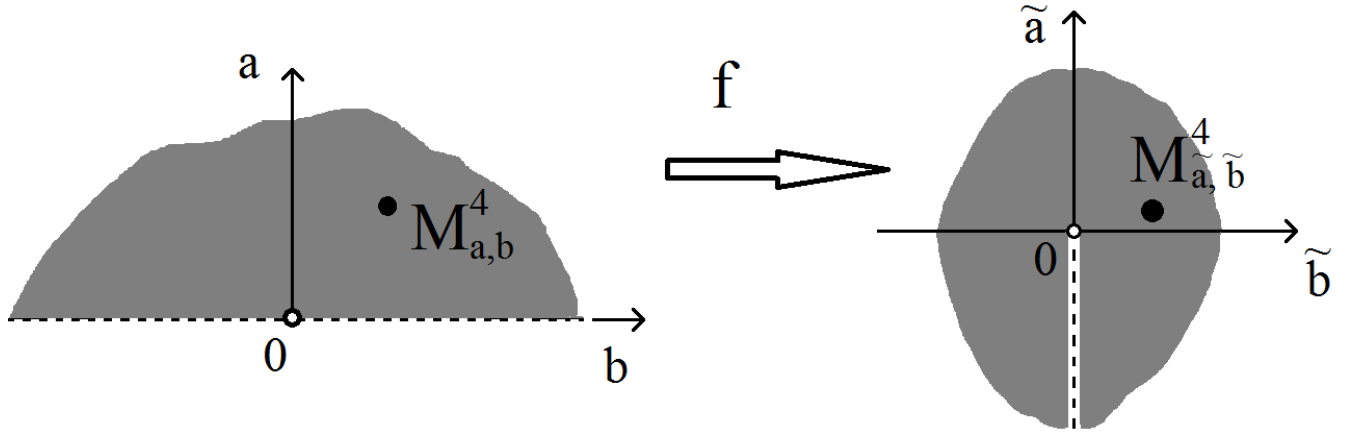


Рис. 1.11: Действие пуассонова морфизма на пространстве орбит коалгебр $\mathfrak{so}(3,1)^*$ и $\mathfrak{e}(3)^*$

После такого преобразования гамильтониан (1.7) совпадет с гамильтонианом (1.29) системы Ковалевской–Соколова из работы [53] в координатах $(\mathbf{J}, \mathbf{y})$, задаваемых (1.27)

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 y_1 + 2c_2 (y_2 J_3 - y_3 J_2) \quad (1.29)$$

для некоторых новых констант c_1, c_2 . Как было отмечено в [54], система Ковалевской–Соколова может быть включена в семейство интегрируемых систем с гамильтонианом (1.30)

$$H_\varkappa = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 y_1 - 2c_2 J_3 y_2 - c_2^2 y_3^2 + 2c_3 (J_3 + c_2 y_2) \quad (1.30)$$

после следующей замены координат

$$J_2 \rightarrow J_2 - c_2 y_3, \quad J_3 \rightarrow J_3 + c_2 y_2.$$

Семейство гамильтонианов (1.30) является интегрируемым для всех значений констант c_1, c_2, c_3 , для всех значений a, b функций Казимира f_1, f_2 и для всех значений параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$ скобок (1.3) (см. [54]). Данное семейство включает в себя известные гамильтонианы систем Ковалевской (для $c_2 = c_3 = 0$), Ковалевской–Яхьи (для $c_2 = 0$) и Соколова (для $c_1 = c_3 = 0$). Мы используем некоторую информацию об инвариантах Фоменко–Цишанга для системы Соколова из работы П.В.Морозова [37].

Замечание 15. Отметим, что первый интеграл $\tilde{K}_s$ для семейства систем (1.29) при $c_1 = 0$ из работы [53] отличается от первого интеграла системы Соколова K_s , записанного в работах В.В.Соколова [6] и П.Е.Рябова [36], но эти интегралы связаны следующим соотношением

$$K_s = -4\tilde{K}_s + \frac{(2H_s - c_2^2 f_1)^2}{4} - c_2^2 f_2^2. \quad (1.31)$$

Затем были изучены топологические свойства слоения Лиувилля этой системы: бифуркационные диаграммы отображения момента и структура их прообраза при разных значениях f_2 (П.Е.Рябовым в работе [36]) и вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга неособых изоэнергетических поверхностей (работа П.В.Морозова [37], см. также его диссертацию [55]).

1.3.4.2 Параметрическая система Ковалевской–Соколова на алгебре $e(3)$ и ее предельные случаи

Рассматривается следующая система на коалгебре Ли $e(3)^*$ (задаваемой скобкой Ли–Пуассона (1.3) при $\varkappa = 0$ в координатах $J_1, \dots, x_3$). Отметим, что в работе [53] координаты обозначены M_i, α_j вместо J_i, x_j .

В качестве функций Казимира были выбраны функции $L = f_2/2$ (т.е. значение l этой функции равно $L = l = b/2$) и $\Gamma = f_1$ (при $\varkappa = 0$). В работе изучается пятимерное множество $\Gamma = a = 1$, т.е. уровень $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

В работе [8] В.В.Соколовым был найден интегрируемый гамильтониан, одновременно обобщающий волчок Ковалевской с гиростатом (случай Ковалевской–Яхьи, см. [13]) и открытый ранее В.В.Соколовым [6] случай интегрируемости уравнений Кирхгофа. Данная система зависит от нескольких параметров.

Волчком Ковалевской–Соколова будем называть систему из работы [8] при условии отсутствия гиростатической добавки в гамильтониане (т.е. равенства нулю соответствующего параметра, называемого гиростатическим моментом). В работе [53] данная система характеризовалась следующим гамильтонианом:

$$H_{KS} = \frac{1}{4}(J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2) + \varepsilon_1(x_3 J_2 - x_2 J_3) - \varepsilon_0 x_1.$$

В общем рассматриваемом случае произведение $a\varepsilon_1\varepsilon_0$ отлично от нуля. Два из трех параметров можно сделать равными единице путем изменения масштаба. В общем случае будем считать, что $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_0 > 0, a > 0$, причем значения a и ε_0 полагаем фиксированными, а значение $\zeta = \varepsilon_1^2$ — существенным параметром системы.

Предельные случаи $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ соответствуют двум известным системам на $e(3)^*$: системе Ковалевской с гамильтонианом (1.7) и случаю Соколова из работы [6] (его фазовая топология была изучена в работах П.Е.Рябова [36] и П.В.Морозова [37], [55]).

Интеграл K_{KS} волчка Ковалевской–Соколова можно записать так:

$$K_{KS} = \left(\frac{J_1^2 - J_2^2}{4} + \varepsilon_1(x_2 J_3 - x_3 J_2) - \varepsilon_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \varepsilon_0 x_1 \right)^2 + \\ + \left(\frac{J_1 J_2}{2} + \varepsilon_1(x_3 J_1 - x_1 J_3) + \varepsilon x_2 \right)^2.$$

М.П.Харламовым, П.Е.Рябовым и А.Ю.Савушкиным в работе [53] были полностью изучены относительные положения равновесия данной системы, т.е. особенности, содержащие критические точки ранга 0 отображения момента. В частности, был изучен вопрос их невырожденности и определены топологические типы полулокальных особенностей.

Кроме того, в той же работе были рассмотрены изоэнергетические 3-поверхности $Q_{l,h}^3$ (на которых постоянны $f_2/2 = L = l$ и $H_{KS} = h$) и найдены кривые на плоскости Olh значений L и H_{KS} , при которых происходит изменение их топологического типа (т.е. построены диаграммы Смейла при разных значениях параметра $\varepsilon_1/\varepsilon_0$). Полученные диаграммы на плоскости Olh затем были дополнены кривыми, соответствующими перестройкам слоения Лиувилля, происходящим без падения ранга отображения (L, H_{KS}) . Как и в работе [35], эти кривые были изображены в работе [53] штриховыми линиями на плоскости Olh (эти диаграммы были названы в [53] диаграммами Смейла–Фоменко). На рисунках 1.12 и 1.13 мы воспроизведем данные диаграммы из работы [53].

Укажем, какие значения $\zeta^{(i)}$ разделяют интервалы полуоси $\zeta = \varepsilon_1^2 > 0$ с одинаковыми диаграммами Смейла–Фоменко:

$$\zeta^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{2a}, \quad \zeta^{(2)} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}a}, \quad \zeta^{(3)} = \frac{\varepsilon_0 x}{a}, \\ \zeta^{(4)} = \frac{\varepsilon_0}{2a} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2}}, \quad \zeta^{(5)} = \frac{\varepsilon_0}{a}, \quad \zeta^{(6)} = \frac{(5+3\sqrt{3})\varepsilon_0}{a}.$$

Здесь $x \sim 0.761838$ есть единственный действительный корень уравнения

$$8x^5 + 12x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 10x - 1 = 0.$$

Отметим, что значение $\zeta = 0$ соответствует классическому случаю Ковалевской.

После вычисления аналога диаграммы Смейла–Фоменко для трехмерного пространства параметров, в работе [53] было получено, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется в точности 25 типов областей, точкам которых соответствуют изоэнергетические поверхности данного класса гомеоморфности $(\mathbb{A} - \mathbb{G})$, пересекающие разные наборы дуг бифуркационных диаграмм отображения момента. В терминах настоящей работы (см. раздел 2.1.3), в данной системе имеется 25 классов *графов Фоменко с именованными атомами*, для каждого из которых известен класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности Q^3 . Поясним, что под именованным атомом мы понимаем

3-атом, которому дополнительно приписан класс дуги бифуркационной диаграммы, точка которой является образом особого слоя данного атома.

Грубые молекулы для 25 таких областей пространства $\mathbb{R}^3(l, h, \varepsilon_1)$ были собраны в таблице 1.2, такой же как в работе [53]. Они обозначены $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_8, \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_6, \mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_4, \mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2, \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2, \mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_2, \mathbb{G}$.

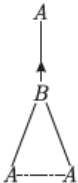
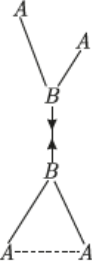
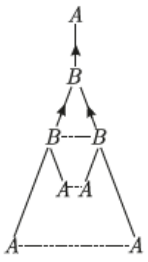
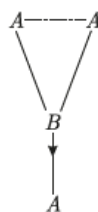
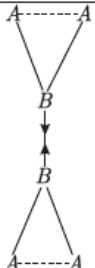
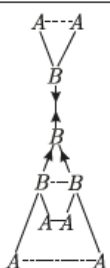
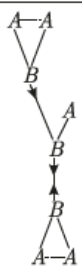
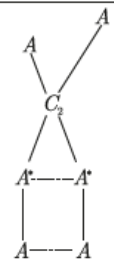
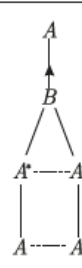
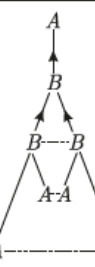
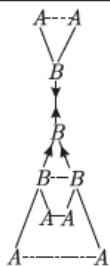
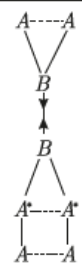
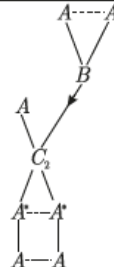
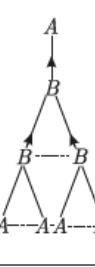
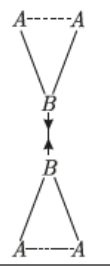
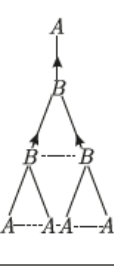
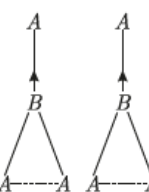
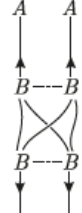
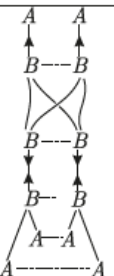
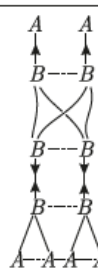
$\mathbb{A}_1$  S^3	$\mathbb{A}_2$  S^3	$\mathbb{A}_3$  S^3	$\mathbb{A}_4$  S^3	$\mathbb{A}_5$  S^3
$\mathbb{A}_6$  S^3	$\mathbb{A}_7$  S^3	$\mathbb{A}_8$  S^3	$\mathbb{B}_1$  $\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{B}_2$  $\mathbb{R}P^3$
$\mathbb{B}_3$  $\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{B}_4$  $\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{B}_5$  $\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{B}_6$  $\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{C}_1$  $S^2 \times S^1$
$\mathbb{C}_2$  $S^2 \times S^1$	$\mathbb{C}_3$  $S^2 \times S^1$	$\mathbb{C}_4$  $S^2 \times S^1$	$\mathbb{D}_1$  N_2^3	$\mathbb{D}_2$  N_2^3
$\mathbb{E}_1$  $2S^3$	$\mathbb{E}_2$  $2S^3$	$\mathbb{F}_1$  $S^2 \times S^1$	$\mathbb{F}_2$  $S^2 \times S^1$	$\mathbb{G}$  N_3^3

Таблица 1.2: Грубые молекулы волчка Ковалевской–Соколова на $e(3)$

Введем параметры h_*, l_*, ζ_* , такие что

$$h = \varepsilon_0 a h_*, \quad 2l^2 = \varepsilon_0 a^3 l_*^3, \quad \zeta = \frac{\varepsilon_0 \zeta_*}{a}.$$

Теорема 1.11. *Следующее множество Θ_L разбивает множество орбит $\zeta_* > 0, l_* > 0$ на одиннадцать областей, обозначенных $1, \dots, 11$, точкам которых соответствуют комбинаторно эквивалентные бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) .*

Данное множество состоит из пяти кривых $\theta_1, \dots, \theta_5$ на плоскости (ζ_, l_*) , изображенных на рис. 1.14 (там же подписаны области $1, \dots, 11$):*

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad & 2\zeta_* = 2(l_*^2 - 1)^{3/2} + l_*(2l_*^2 - 3), \quad l_* \geq \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ \theta_2 : \quad & l_*^3 = 2(\zeta_* - 1), \quad \zeta_* \geq 0; \\ \theta_3 : \quad & l_*^3 = 2(\zeta_* - 1), \quad \zeta_* \geq 1; \\ \theta_4 : \quad & l_* = 1, \quad \zeta_* \geq 0; \\ \theta_5 : \quad & \zeta_* = \frac{1}{2}, \quad l_* \geq 0. \end{aligned}$$

Ось l_ соответствует классическому случаю Ковалевской.*

Бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) для волчка Ковалевской–Соколова можно задать согласно следующему утверждению:

Утверждение 1.3.6 (Харламов, Рябов, Савушкин, [53]). *Бифуркационная диаграмма отображения (L, H_{KS}, K_{KS}) из 5-уровня $f_1 = a$ в $\mathbb{R}^3(l, h, k)$ содержится в объединении четырех следующих поверхностей:*

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \quad & k = 0; \\ \Pi_2 : \quad & k = \frac{1}{4\varepsilon_1^4} (2\varepsilon_1^2(h + a^2\varepsilon_1^2) + \varepsilon_0^2)^2; \\ \Pi_3 : \quad & k = \frac{(a^2(h + a^2\varepsilon_1^2) - 2l^2)^2}{a^4}; \\ \Pi_4 : \quad & \begin{cases} l^2 = \frac{(h-s)s^2}{\varepsilon_0^2}, \\ k = \frac{4\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} s^3 + \left(3 - \frac{4\varepsilon_1^2 h}{\varepsilon_0^2}\right) s^2 - 4hs + a^2\varepsilon_0^2 + (h + \varepsilon_1^2 a^2)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

То, какие именно фрагменты сечений данных поверхностей входят в бифуркационную диаграмму при данных l_* и ζ_* , определяется принадлежностью пары (ζ_*, l_*) той или иной области 1–11. Указанные бифуркационные диаграммы изображены на рис. 1.15, 1.16 и 1.17.

1.3.4.3 Интегрируемый случай Соколова

Открытый В.В.Соколовым [6] случай интегрируемости уравнений Кирхгофа допускает запись в виде уравнений Эйлера на $e(3)^*$ с гамильтонианом H_S , приведенным чуть ниже. Данная система изучалась с топологической точки зрения в работах П.Е.Рябова [36] и П.В.Морозова [37] (см. также [55]).

Система задается гамильтонианом (переменные s_i и r_j соответствуют переменным J_i и x_j соответственно)

$$H_S = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + r_2s_3 - \frac{1}{2}r_3^2$$

и имеет первый интеграл

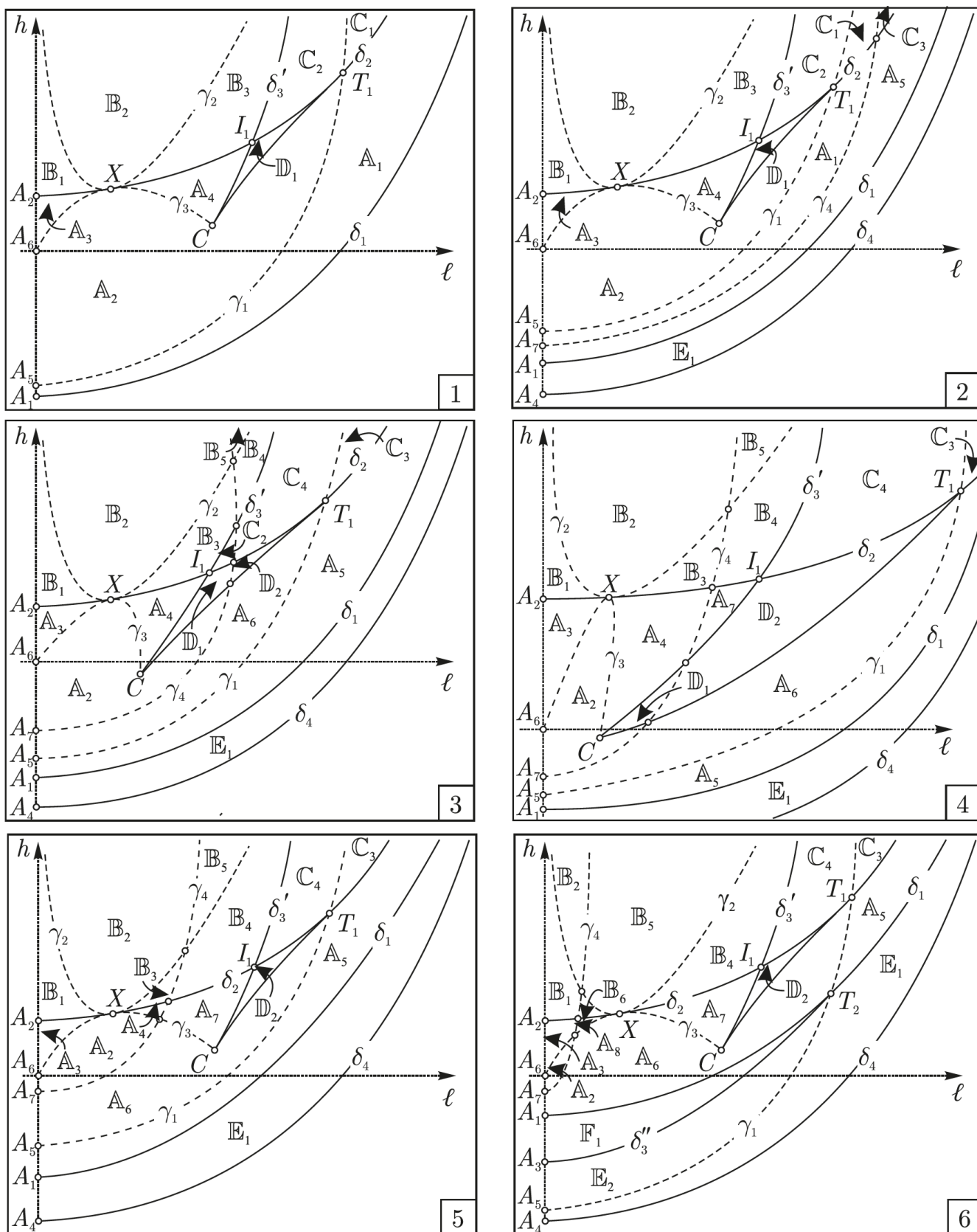
$$K_S := F = s_3^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(r_2s_3 - r_3s_2) + r_2^2 + r_3^2) + 2s_3(s_2 - r_3)(r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3).$$

В работе П.Е.Рябова были построены бифуркационные диаграммы отображения момента системы, изучен вопрос невырожденности точек ранга 1 и для каждой дуги бифуркационной диаграммы был указан топологический тип 3-атома, соответствующего ей.

В работе П.В.Морозова [37] на основе результатов П.Е.Рябова и подходов школы А.Т.Фоменко были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на произвольной неособой изоэнергетической поверхности. Для этого была проверена невырожденность особых точек ранга 0 и построены круговые молекулы особых точек бифуркационной диаграммы. Одним из результатов работы является нахождение допустимых базисов для каждого 3-атома системы (т.е. для каждого класса эквивалентных дуг бифуркационных диаграмм отображения момента на разных орбитах). Полученные базисы были, следуя работе [35], выражены через однозначно определенные циклы атомов-бифуркаций. Для сравнения таких циклов они были изображены как элементы целочисленной решетки.

Список меченых молекул для неособых изоэнергетических поверхностей Q^3 мы приведем в таблице 1.3. Далее укажем в нашей теореме 3.4 соответствие классов слоений Лиувилля для системы Соколова, найденных в [37] и перечисленных в таблице 1.3, и слоений Лиувилля $A_1 \dots, G$, нахождению недостающих числовых меток для которых посвящен раздел 3.2.

На рисунке 1.18 изображены бифуркационные диаграммы системы Соколова для четырех разных значений $f_2 = g$: а) $g = 0$, б) $0 < g < 1/2$, в) $1/2 < g < 1$, д) $g > 1$.



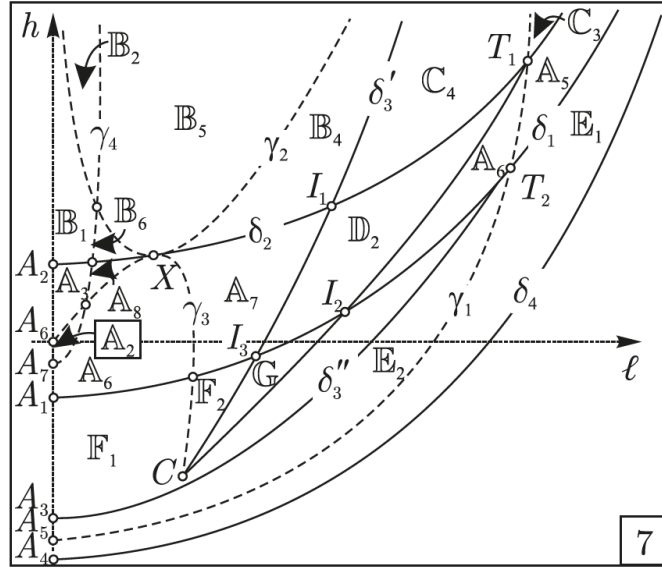


Рис. 1.13: Диаграммы Смейла–Фоменко волчка Ковалевской–Соколова при $\varepsilon_1^2 > \zeta^{(6)}$

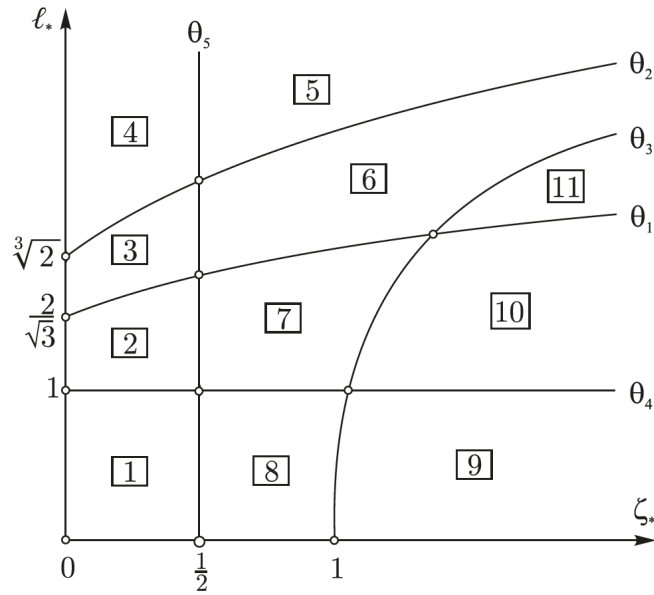


Рис. 1.14: Множество Θ_L , задающее разбиение множества орбит на области с неэквивалентными бифуркационными диаграммами отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) .

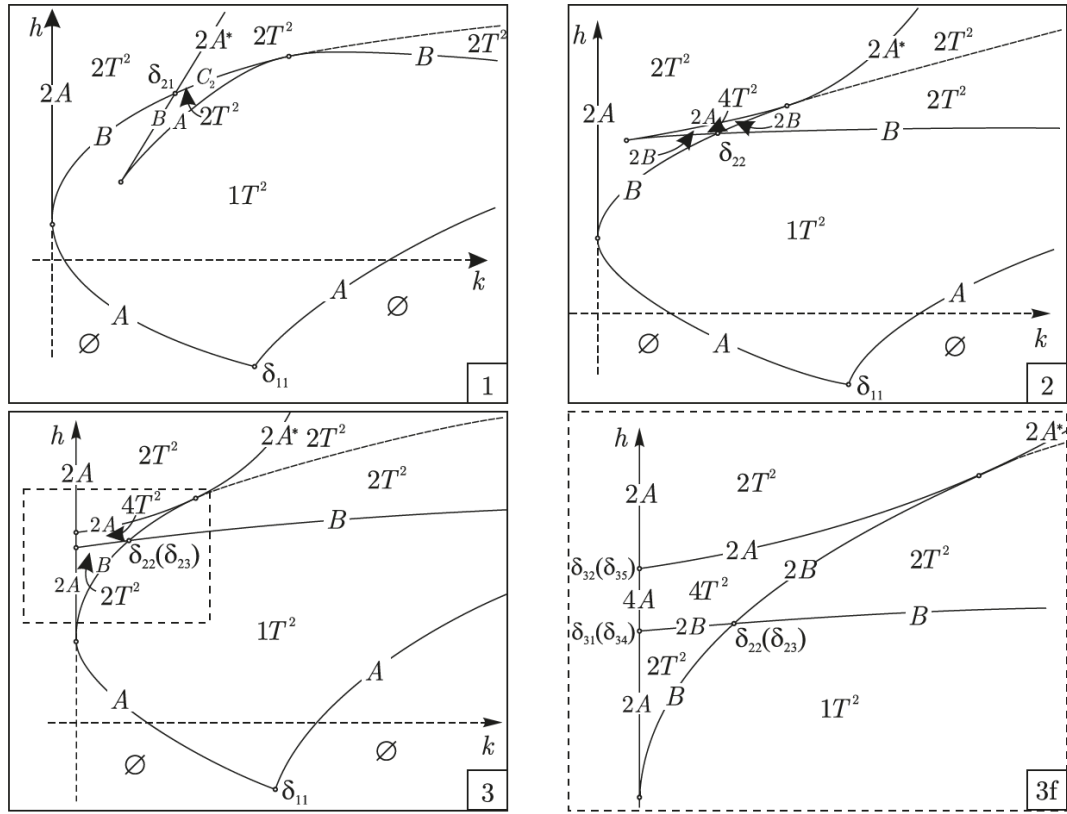


Рис. 1.15: Бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) волчка Ковалевской–Соколова для областей 1–3 плоскости $O\zeta_*l_*$.

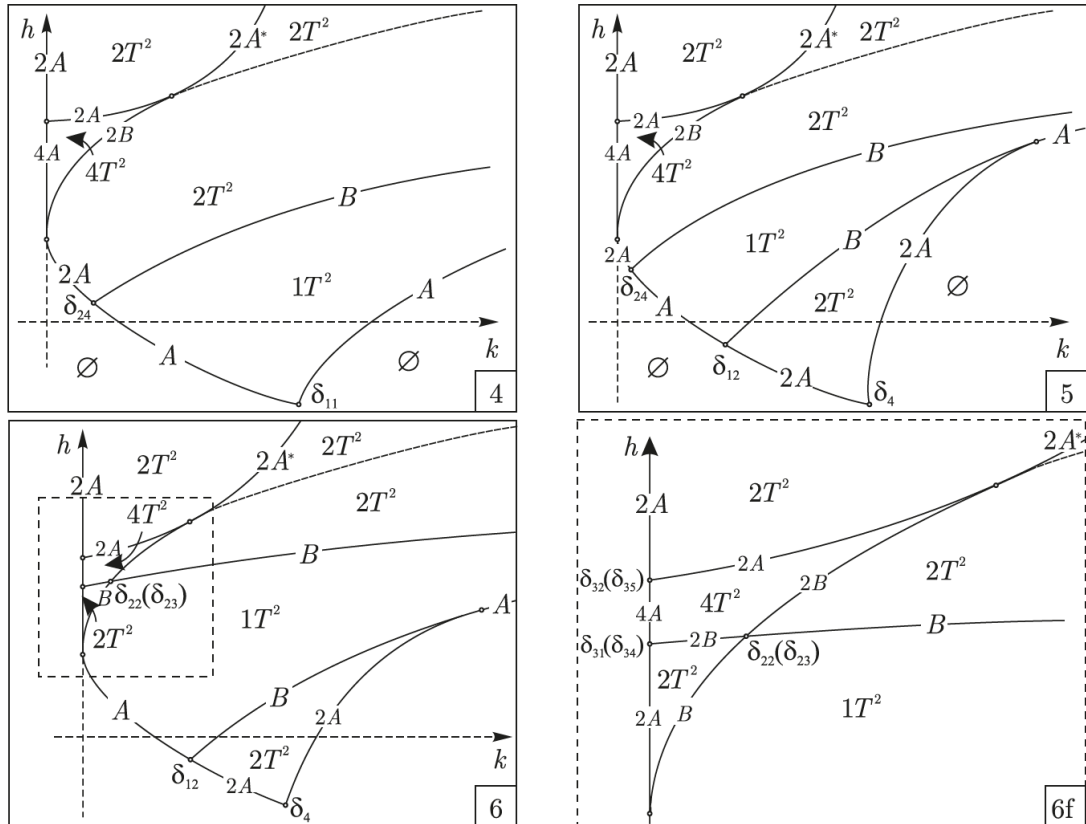


Рис. 1.16: Бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) волчка Ковалевской–Соколова для областей 4–6 плоскости $O\zeta_*l_*$.

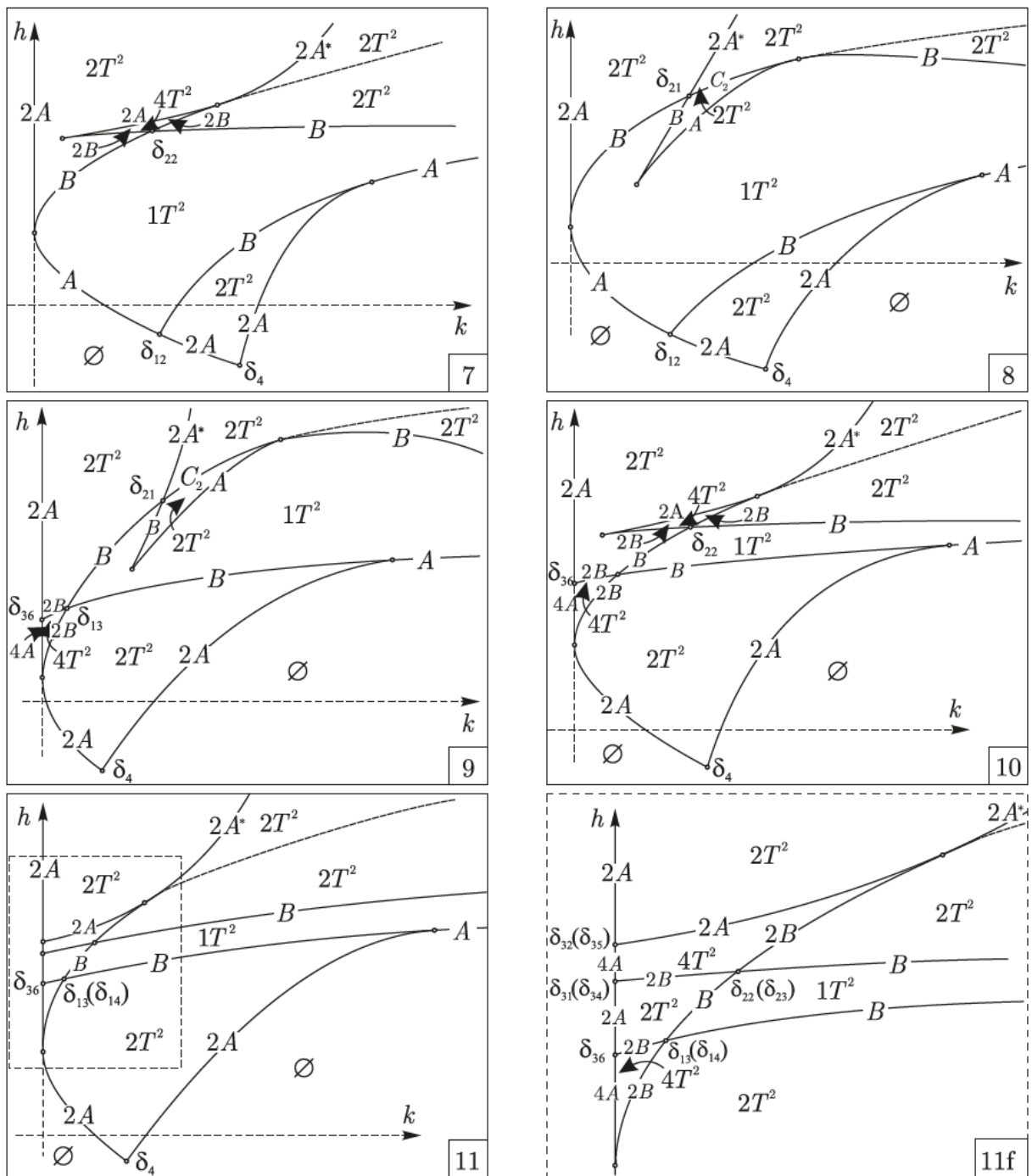


Рис. 1.17: Бифуркационные диаграммы отображения момента (H_{KS}, K_{KS}) волчка Ковалевской–Соколова для областей 7–11 плоскости $O\zeta_*l_*$.

A) $A \xrightarrow[r=0, \varepsilon=1]{} A \quad (\times 2)$	F) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \searrow & & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \nearrow A^* \\ & \text{\scriptsize } C_2 & n=-1 \\ \begin{array}{c} A \nearrow \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} & n=-2 & \begin{array}{c} \searrow A^* \\ r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \rightarrow A \end{array} $
B) $ \begin{array}{ccc} & & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} \nearrow A \\ A \xrightarrow[r=0, \varepsilon=1]{} \text{\scriptsize } B & & \\ & \text{\scriptsize } n=1 & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} \searrow A \end{array} \quad (\times 2) $	G) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow C_2 & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \nearrow A \\ & \text{\scriptsize } n=1 & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \searrow A \\ \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow C_2 & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \searrow A \end{array} $
C) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow B & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \rightarrow A \\ & \text{\scriptsize } n=1 & \\ \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow B & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \rightarrow A \end{array} $	H) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \searrow & & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \nearrow B \\ & \text{\scriptsize } C_2 & n=0 \\ \begin{array}{c} A \nearrow \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} & n=-2 & \begin{array}{c} \searrow B \\ r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \rightarrow A \end{array} $
D) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow C_2 & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \nearrow A \\ & \text{\scriptsize } n=1 & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} \searrow A \\ \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \rightarrow & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} B \rightarrow C_2 & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \searrow A \end{array} $	I) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \searrow & & \begin{array}{c} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \nearrow A \\ & \text{\scriptsize } C_2 & \\ \begin{array}{c} A \nearrow \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow A \\ r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{array} \end{array} $
E) $ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} A \searrow & & \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \nearrow B \\ & \text{\scriptsize } C_2 & n=-1 \\ \begin{array}{c} A \nearrow \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \end{array} & n=-2 & \begin{array}{c} \searrow B \\ r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \rightarrow A \end{array} $	

Таблица 1.3: Инварианты Фоменко–Цишанга для случая Соколова интегрируемости уравнений Кирхгофа (см. [37]).

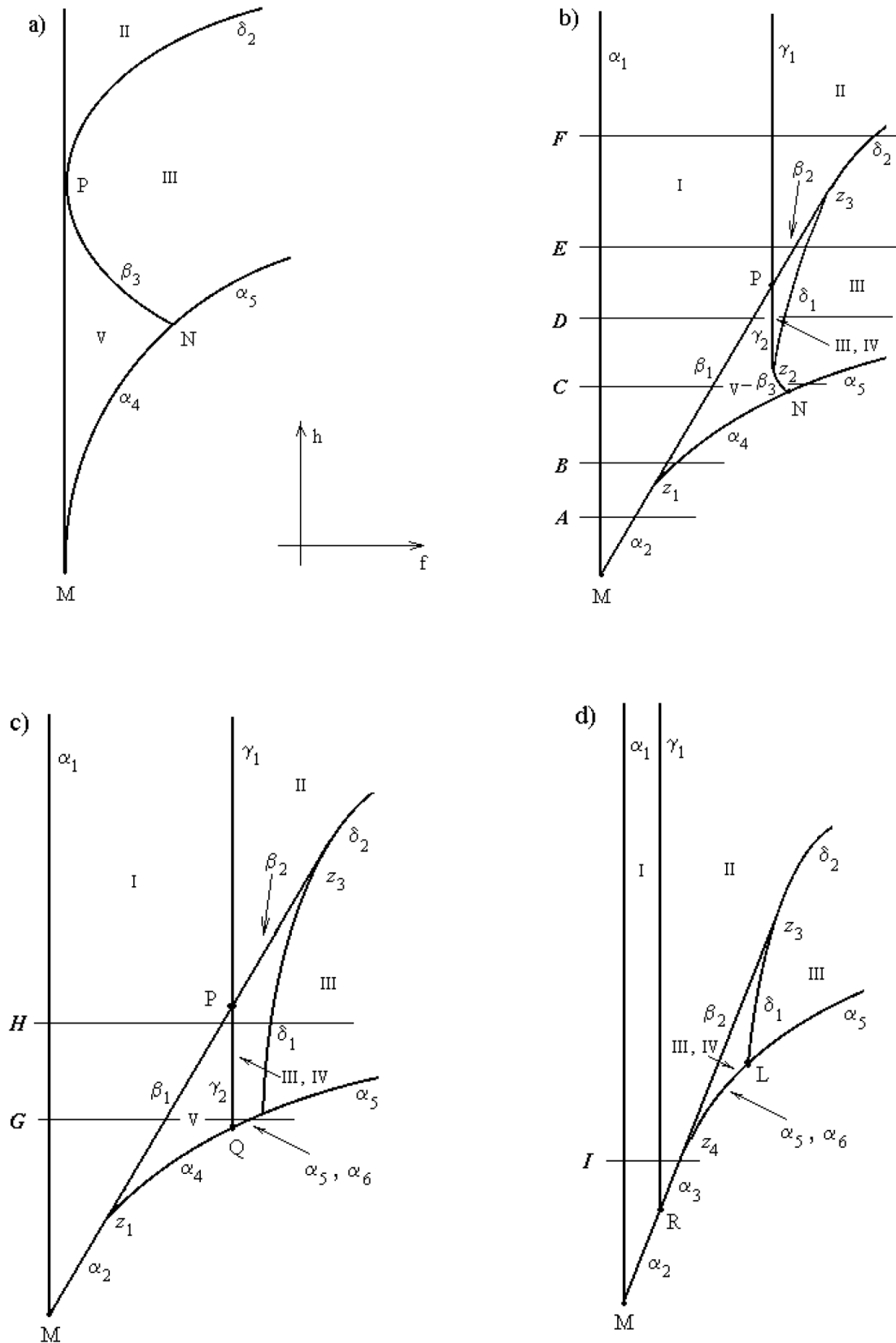


Рис. 1.18: Бифуркационные диаграммы отображения момента H_S, K_S системы Соколова на плоскости Ohf при разных значениях интеграла площадей

1.3.5 Псевдо-евклидовый аналог для семейства систем Ковалевской, заданного на $so(3, 1) - e(3) - so(4)$

В настоящем разделе опишем интегрируемый аналог системы Ковалевской, построенный в работе [45] А.В.Борисова и И.С.Мамаева. Отметим, что схожим образом строятся интегрируемые аналоги и других интегрируемых систем динамики (например, Эйлера, Лагранжа, Гесса, Горячева–Чаплыгина).

Рассмотрим следующее комплексное преобразование шестимерного пространства:

$$\hat{J}_1 = \frac{i}{\sqrt{\sigma}} J_1 \quad \hat{J}_2 = \frac{i}{\sqrt{\sigma}} J_2 \quad \hat{J}_3 = J_3 \quad \hat{x}_1 = \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \cdot x_1 \quad \hat{x}_2 = \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \cdot x_2 \quad \hat{x}_3 = x_3. \quad (1.32)$$

Здесь $\sigma > 0$ — некоторое положительное число.

Замечание 16. В работе [45] число σ записано в виде k^2 . Отметим, что оно не связано со значением интеграла Ковалевской K_κ , обозначаемым буквой k в настоящей работе.

При этом скобка Ли–Пуассона, в координатах $(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ имевшая вид (1.3), примет следующий вид в координатах $(\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{x}})$:

$$\mathbb{P}_{new} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \hat{J}_3 & -\hat{J}_2 & 0 & \sigma \hat{x}_3 & -\hat{x}_2 \\ -\sigma \hat{J}_3 & 0 & \hat{J}_1 & \sigma - \hat{x}_3 & 0 & \hat{x}_1 \\ \hat{J}_2 & -\hat{J}_1 & 0 & \hat{x}_2 & -\hat{x}_1 & 0 \\ 0 & \sigma \hat{x}_3 & -\hat{x}_2 & 0 & \kappa \sigma \hat{J}_3 & -\kappa \hat{J}_2 \\ -\sigma \hat{x}_3 & 0 & \hat{x}_1 & -\kappa \sigma \hat{J}_3 & 0 & \kappa \hat{J}_1 \\ \hat{x}_2 & -\hat{x}_1 & 0 & \kappa \hat{J}_2 & -\kappa \hat{J}_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Для каждой гладкой функции H полученная скобка определит некоторую динамическую систему. В случае $\kappa = 0$ это есть частный случай псевдо-сферических уравнений Эйлера, рассмотренных в работе [45]

$$\dot{\hat{\mathbf{J}}} = (G \cdot \hat{\mathbf{J}}) \times \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{J}}} + (G \cdot \hat{\mathbf{x}}) \times \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (G \cdot \hat{\mathbf{x}}) \times \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{x}}}.$$

Здесь G — матрица метрики на пространстве $\mathbb{R}^3$, а $\hat{\mathbf{J}}$ и $\hat{\mathbf{x}}$ есть вектора $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ и $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. В нашем случае $G = \text{diag}(1, 1, -\sigma)$. Отметим, что в обозначениях работ [45], [46] и [115] имеем $\sigma = k^2$.

Применив такое преобразование с заменой $\hat{c}_1 = ic_1/\sqrt{\sigma}$ к гамильтониану H системы Ковалевской (1.7), получим с точностью до множителя $-1/2$ следующий гамильтониан:

$$H_{ps} = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 - 2\sigma J_3^2) + c_1 x_1. \quad (1.34)$$

В его записи, как и далее, мы будем опускать значок “крышки” над символами координат и коэффициента c_1 .

Новый гамильтониан интегрируем при каждом значении $\varkappa$ параметра пучка скобок Пуассона (1.33). При этом первым интегралом является сам интеграл Ковалевской $K = K_\varkappa$ на алгебре Ли из пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, соответствующей значению $\varkappa$.

Замечание 17. В работе [115] в качестве энергии была взята функция H_{ps} , в качестве интеграла F_{ps} — функция $K_\varkappa/4$. В настоящем разделе, следуя работе [115], обозначим за (h, f) значения интегралов H_{ps} и $F_{ps} = K_\varkappa/4$. При этом коэффициент b_1 в той же работе равен $-c_1$ в обозначениях выше, а значение $\tilde{f} = 2\sqrt{f}$ равно $\sqrt{k}$ для значения интеграла Ковалевской $K_\varkappa = k$.

Построенная динамическая система на пучке алгебр Ли (заданным скобками 1.33) обладает энергией H_{ps} и соответствует (при $\varkappa = 0$) движению волчка Ковалевской в псевдо-евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с метрикой $g = \text{diag}(1, 1, -\sigma)$, см. [45], [46]. При $\varkappa = 0$ данный пучок задает алгебру Ли $e(2, 1)$ группы движений трехмерного псевдо-евклидова пространства.

При произвольном значении $\varkappa$ скобка Ли–Пуассона из такого псевдо-евклидова пучка имеет две следующие функции Казимира $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$:

$$\hat{f}_1 = x_1^2 + x_2^2 - \sigma x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 - \sigma J_3^2) = a, \quad (1.35)$$

$$\hat{f}_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - \sigma x_3 J_3 = b. \quad (1.36)$$

Разделение переменных, следуя Кёттеру, для аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ было построено С.В. Соколовым в работе [46].

Определение 1.3.2. Данное семейство систем с гамильтонианом (1.34) на пучке алгебр Ли, заданном семейством (1.33) скобок Ли–Пуассона, будем называть *псевдо-евклидовым семейством систем Ковалевской*.

Замечание 18. Поскольку рассуждения ниже не зависят от знака $\varkappa$, то будем также называть произвольную систему из данного пучка псевдо-евклидовой системой Ковалевской не только для случая алгебры Ли $e(2, 1)$, но и для других алгебр пучка (1.34).

Глава 2

Лиувиллев анализ аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$

2.1 Лиувиллев анализ компактного случая Ковалевской

2.1.1 Формулировки основных теорем

Сформулируем две основные теоремы, содержащие результаты лиувиллева анализа и найденные случаи эквивалентности слоений изучаемой системы и других систем.

Теорема 2.1. *В системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ имеется ровно 27 классов $L_1, \dots, L_{27}$ лиувиллево неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей.*

В таблицах 2.5 и 2.6 перечислены инварианты Фоменко–Цишанга всех слоений на неособых $Q^3_{a,b,h}$ при фиксированной ориентации Q^3 и направлении роста интеграла K . Классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots, L_{27}$ для связных компонент этих слоений 1-32 указаны в таблице 2.10.

Пунктирная линия в таблицах 2.5 и 2.6 означает совпадение меток слева и справа от нее, т.е. симметрию слоения Лиувилля и его меченой молекулы на данных “ярусах”, т.е. особых уровнях дополнительного интеграла.

Теорема 2.2. *Среди слоений $L_1, \dots, L_{27}$ компактного случая Ковалевской следующие слоения лиувиллево эквивалентны слоениям известных интегрируемых систем в некоторых зонах энергии:*

- 1) слоения $L_1, L_{12}, L_3, L_4, L_{15}, L_{27}, L_{24}, L_{20}, L_{24}, L_{18}$ эквивалентны слоениям $A, \dots, J$ классического случая Ковалевской (см. ([35])) соответственно,
- 2) слоения L_2 и L_{23} эквивалентны слоениям случая Ковалевской–Яхьи в зонах энергии h_2 и h_{10}, h_{23} (см. [57], [58]) соответственно,

3) слоения L_1, L_2, L_9, L_{10} эквивалентны слоениям 1, 2, 6, 7 случая Клебша (см. [59]) соответственно,

4) слоения L_1, L_2, L_4 эквивалентны слоениям A, B, F случая Соколова (см. [37]) соответственно,

5) интегрируемые билиарды в областях A'_0, A_2, A_1, A_0 , ограниченных дугами софокусных квадрик (см. [60]), моделируют слоения Лиувилля L_1, L_2, L_6, L_8 компактного случая Ковалевской.

При проведении лиувиллева анализа мы используем результаты из работ [35] и [51]. В [35] для классического случая Ковалевской были найдены допустимые базисы для дуг бифуркационных диаграмм и вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для слоений изоэнергетических поверхностей. В работе [51] для компактного случая Ковалевской были описаны все бифуркационные диаграммы отображения момента.

Таким образом, для нахождения всех меченых молекул компактного случая Ковалевской остается сделать следующее:

1. выразить через λ -циклы, известные из [35], допустимые базисы для дуг $\xi_1, \dots, \xi_5$ (см. таблицу 2.7) бифуркационных диаграмм, которые не возникали в классическом случае Ковалевской. Это сделано в утверждении 2.1.2. На рисунке 1.6 однозначно определенные λ -циклы для дуг $\alpha_1, \dots, \xi_5$ изображены как элементы целочисленной решетки на плоскости.
2. описать, в каком порядке вдоль оси H могут располагаться особые точки бифуркационных диаграмм в зависимости от параметров — значений функций Казимира. Имеется лишь конечное число вариантов, все они приведены в таблицах 2.12-2.17. Интервалу между соседними особыми точками сопоставлен номер молекулы. Отметим, что в таблице 2.16 для краткости не указано “тривиальное окончание” $6, z_2, 7, z_1$.

Для дуг, сохраняющихся в классическом случае Ковалевской, мы используем те же обозначения $\alpha_1, \dots, \delta_2$ и те же базисы, что и в [35]. Для особых точек мы используем те же обозначения y_i, z_j , что и в [51]. Полученное разбиение областей I-IX из [51] в плоскости значений функций Казимира на подобласти изображено на рисунках 2.1-2.2. Дуги, разделяющие подобласти, описаны в утверждении 2.1.10.

2.1.2 Выбор допустимых базисов

2.1.2.1 Утверждение об особенностях типа центр-центр

Докажем следующее общее утверждение о допустимых базисах на ребрах бифуркационной диаграммы для особенностей типа центр-центр.

Утверждение 2.1.1. Пусть точка является особой точкой типа центр-центр бифуркационной диаграммы отображения момента (H, F) . Обозначим знаки производных функции H в направлении пересекающихся дуг $\gamma_i, i = 1, 2$ как $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$ соответственно. Тогда допустимые базисы (λ_i, μ_i) для этих дуг могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

Доказательство. 1. Известно, что в окрестности критической точки типа центр-центр можно ввести канонические координаты p_1, p_2, q_1, q_2 , в которых форма имеет вид

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2,$$

во всей окрестности критической точки, а функции H и F одновременно приводятся к виду

$$\begin{cases} H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \\ f = f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2). \end{cases}$$

Обозначим $\alpha_1 = p_1^2 + q_1^2$ и $\alpha_2 = p_2^2 + q_2^2$. Т.к. особый слой атома A совпадает с критической окружностью, а слоение в окрестности точки типа центр-центр имеет тип прямого произведения, то $\alpha_1 = 0$ в прообразе точек γ_1 , лежащих близко к особой точке. Аналогично, $\alpha_2 = 0$ в прообразе точек γ_2 .

Две кривые на плоскости Ohf , содержащие дуги γ_1 и γ_2 бифуркационной диаграммы, пересекаются трансверсально, и дуги $\Sigma^{a,b}$ лежат по одну сторону от точки пересечения. Отсюда следует, что

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = \operatorname{sgn} \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = \varepsilon_1, \quad \operatorname{sgn} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = \operatorname{sgn} \frac{\partial H}{\partial \gamma_2} = \varepsilon_2,$$

где частные производные по переменным α_1, α_2 берутся в особой точке $\Sigma^{a,b}$.

2. Каждый тор Лиувилля, лежащий вблизи критической точки типа центр-центр, является прямым произведением двух окружностей φ_1, φ_2 с касательными векторами u_1, u_2 .

$$\varphi_1 : \quad \alpha_1 = r_1^2, \alpha_2 = 0 \quad \varphi_2 : \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = r_2^2,$$

$$u_1 = (-q_1, 0, p_1, 0), \quad u_2 = (0, -q_2, 0, p_2).$$

2. Докажем, что пары (λ_i, μ_i) для дуг γ_i имеют следующий вид:

$$(\lambda_1, \mu_1) = \left(\varphi_1, \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) \varphi_2 \right), \quad (\lambda_2, \mu_2) = \left(\varphi_2, \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) \varphi_1 \right).$$

Обозначим касательные векторы к циклам μ_1, μ_2 через v_1, v_2 :

$$v_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} u_2 \quad v_2 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} u_1.$$

Направление этих циклов задается гамильтоновым векторным полем $\text{sgrad } H$:

$$\text{sgrad } H = \omega^{-1} dH = \left(-2q_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, -2q_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, 2p_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, 2p_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right).$$

Чтобы найти правильное направление λ -циклов, проверим, что следующие четверки векторов $(\text{grad } H, N_i, u_i, v_i)$, $i = 1, 2$ являются положительными относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь вектор N_i — вектор внешней нормали к граничному тору $\mathcal{Z}$ -атома, лежащему в прообразе маленького вертикального отрезка, пересекающего дугу γ_i , $i = 1, 2$ соответственно.

Несложно проверить, что

$$N_1 = -\text{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) N, \quad N_2 = \text{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) N,$$

где вектор N ортогонален трем векторам $\text{grad } H, u_i, v_i$:

$$N = \left(-p_1 \alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, p_2 \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, -q_1 \alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, q_2 \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right).$$

□

Замечание 19. В работе [61] А.И. Жила вычислила метки ε на ребрах круговой молекулы для особенности типа центр–центр, т.е. знак метки ε для слоения Лиувилля на вообще говоря, не изоэнергетической трехмерной поверхности. В нашем случае решается задача единообразного выбора допустимых базисов для нескольких дуг бифуркационной диаграммы.

Следствие 1. Все элементы матрицы из утверждения 2.1.1 меняют свои знаки, если требовать противоположную ориентацию четверки $\text{grad } H, N_i, u_i, v_i$ в определении допустимой системы координат.

Следствие 2. Отметим, что такое определение допустимых базисов эквивалентно использованному в работах П.В. Морозова — выбор внешней нормали к $\mathcal{Z}$ -атому позволяет требовать положительности четверки векторов $(\text{grad } H, N, \lambda, \mu)$ на верхних границах $\mathcal{Z}$ -атомов и отрицательности на нижних.

2.1.2.2 Допустимые базисы для дуг $\Sigma^{a,b}$ для случая $\varkappa > 0$

По аналогии с работой [35] обозначим “новые” дуги бифуркационной диаграммы символами $\xi_1, \dots, \xi_5$. В таблице 2.7 эти дуги заданы своими концами $z_1, \dots, z_{11}$. Семейства торов были пронумерованы в [35].

Утверждение 2.1.2. *Следующие базисы $(\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i})$ являются допустимыми для дуг ξ_i , $i = 1..5$:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_4} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области V. Особая точка z_4 является точкой типа центр-центр. В обозначениях утверждения 2.1.1 знаки производных H в направлении дуг γ_1 и ξ_1 равны $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = 1$ соответственно. Согласно ему, $\lambda_{\xi_1} = p\lambda_{\gamma_1} - \lambda_{\gamma_3}$. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_1} = \pm\lambda_{\beta_2} = \pm(\lambda_{\gamma_3} - \lambda_{\gamma_1})$. Т.е. $p = 1$, и допустимый базис для ξ_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $b = 0$ получаем допустимый базис для ξ_4 из анализа точки z_7 .

2. Особая точка z_2 является вырожденной особой точкой ранга 1, поэтому можно выбрать $\mu_{\xi_2} = \lambda_{\gamma_2}$. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ p & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -\lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix}.$$

Получили, что $p = 0$ и $\sigma = -1$.

3. Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области VII. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_3} = \pm\lambda_{\beta_1}$. Особая точка z_1 является точкой типа центр-центр, $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = -1$ для дуг δ_1 и ξ_3 соответственно. Тогда

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}.$$

4. Особая точка z_{10} является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_5} = \pm\lambda_{\beta_1}$. Особая точка z_8 является образом вырожденной одномерной орбиты, поэтому можно взять $\mu_{\xi_5} = \lambda_{\gamma_3}$.

Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области $VIII$. Особая точка z_9 является особой точкой типа центр-центр, $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = -1$ для дуг α_1 и ξ_5 соответственно. Тогда

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 2.1.2 доказано. $\square$

Инвариант Фоменко–Цишанга для слоения Лиувилля на прообразе любой фиксированной допустимой кривой вычисляется алгоритмически по найденным выражениям для $\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i}$ и соотношениям из [35]. При вычислении меток n для семей в $Q_{a,b,h}^3$ мы ориентировали ребра молекулы единообразно по возрастанию K на прямой $H = \text{const}$. Напомним, что замена ориентации на Q^3 или знака дополнительного интеграла K не меняет класс лиувиллевой эквивалентности.

2.1.3 Классы слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$

Напомним, что точке (a, b, h) из пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют изоэнергетическая поверхность $Q_{a,b,h}$ со структурой слоения. Каждая регулярная орбита $M_{a,b}^4$ задается парой (a, b) , где $a > f_l(b) > 0$. Бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ содержит конечное число особых точек, имеющих на плоскости Ohk абсциссы h_i . Каждому такому h_i соответствует одна или несколько особых точек.

Образ $\mathfrak{F}(Q_{a,b,h})$ лежит на прямой $H = h$ плоскости Ohk . Пересечения этой прямой с $\Sigma^{a,b}$ являются образами бифуркационных слоев. Для неособой $Q_{a,b,h}^3$ они не совпадают с особыми точками $\Sigma^{a,b}$, т.е. лежат на дугах $\Sigma^{a,b}$ и соответствуют атомам графа Фоменко (молекулы без меток). Приписав каждому атому графа название $\alpha_1, \dots, \xi_5$ семейства пересекаемой дуги $\Sigma^{a,b}$, получим граф, который будем называть *графом Фоменко с именованными атомами*.

Утверждение 2.1.3. *В компактном случае Ковалевской встречается ровно 32 различных графа Фоменко с именованными атомами (таблицы 2.8-2.9) слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$.*

Замечание 20. *Из данного результата сразу следует теорема 2.1: инвариант Фоменко–Цишанга однозначно вычисляется по графу Фоменко с именованными атомами и допустимым базисам для дуг $\alpha_1, \dots, \xi_5$.*

В таблицах 2.8-2.9 также указаны вычисленные по допустимым базисам матрицы склейки на ребрах графов 1-32. Их классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots, L_{27}$ указаны в таблице 2.10.

Пусть все особые точки $\Sigma^{a,b}$ принадлежат семействам $y_1, \dots, z_{11}$ и имеют попарно различные абсциссы h_i . Тогда слоение на $M_{a,b}^4$ можно закодировать, записывая по очереди (по возрастанию h) названия семейств особых точек и номера графов Фоменко с именованными атомами, соответствующие интервалам (h_i, h_{i+1}) оси Oh . В качестве примера приведем код для любой точки

(a, b) из области VIII:

VIII: $y_1, 1, z_4, 13, z_{11}, 11, z_9$.

Определение 2.1.1. Назовем *разделяющим множеством* Θ множество пар (a, b) плоскости Oab , в окрестности которых есть пары (a_i, b_i) с различными кодами или пара (a', b') , которой не соответствует кода.

Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m , описанные И.К.Козловым в [51], содержатся в Θ , т.к. их точкам соответствуют некоторые перестройки бифуркационных диаграмм. В частности, для точек кривой f_l орбита $M_{a,b}$ сингулярна, а для точек (a, b) остальных кривых диаграмма $\Sigma^{a,b}$ имеет вырожденную особую точку, не принадлежащую семействам $y_1, \dots, z_{11}$. Эти кривые разделяют множество орбит с $b > 0$ на 9 областей I-IX, а луч $b = 0, a > 0$ на три промежутка X-XII.

Остальные дуги Θ состоят из точек (a, b) , для которых совпадают значения h гамильтониана H для двух и более особых точек $\Sigma^{a,b}$. Следующее утверждение описывает, как разделяющее множество делит плоскость Oab .

Утверждение 2.1.4. В компактном случае Ковалевской

1) разделяющее множество Θ , описанное в утверждении 2.1.10 как конечное объединение дуг, изображено на рисунках 2.1-2.2 в координатах (u, v) .

2) Θ разбивает области I-IX плоскости Oab на 61 подобласть, а промежутки X-XII оси Oa разбиваются на 4 интервала и луч. Точкам из одного подмножества соответствуют одинаковые коды, приведенные в таблицах 2.12-2.17 для случая $b \neq 0$ и в таблице 2.11 для оси $b = 0$.

3) номер графа Фоменко с именованными атомами, соответствующего произвольному неособому уровню h для пары $(a, b) \in \Theta \setminus f_l$, входит в код каждой из подобластей, содержащих эту пару (a, b) в своей границе.

Замечание 21. Для краткости в кодах подобластей области II опустим одинаковые символы в конце кода: $\dots, 6, z_2, 7, z_1$.

На рисунках указаны номера всех подобластей и функций f_i , задающих ребра Θ . Вершины Θ , в которых пересекается более двух кривых, пронумерованы от 0 до 9.

Замечание 22. Отметим, что на рисунке 2.1-2.2 разделяющее множество изображено в других координатах (u, v) . Из леммы 2.4 следует, что образ Θ при сделанной замене $(a, b) \rightarrow (u, v)$ удовлетворяет определению 2.1.1.

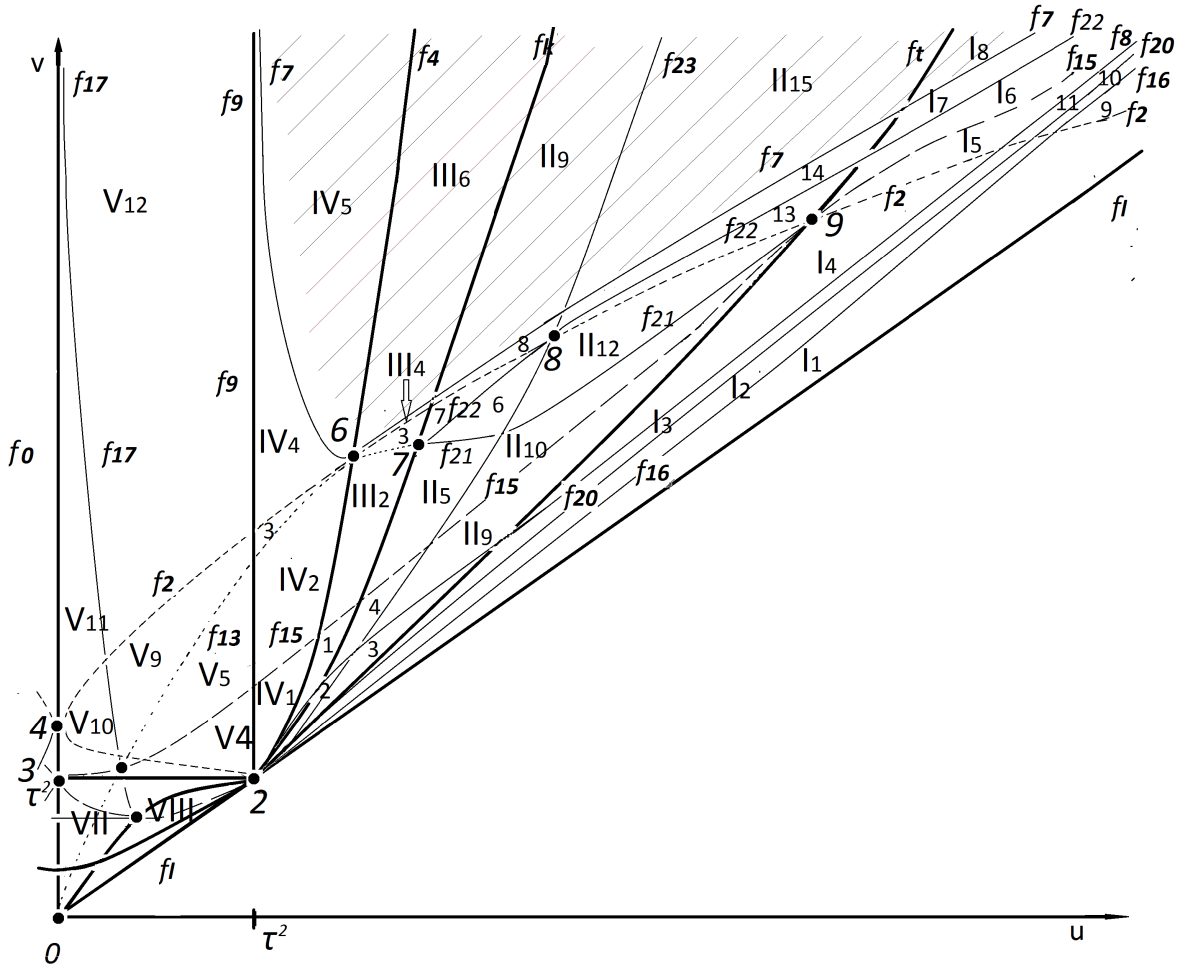


Рис. 2.1: Разделяющее множество: области I-V

2.1.4 Стратификация пространства параметров системы: двумерные и трехмерные страты

2.1.4.1 Трехмерные камеры неособых троек (a, b, h)

Опишем, каким тройкам (a, b, h) пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют одинаковые графы Фоменко с именованными атомами. Назовем *камерой* связное множество троек (a, b, h) с неособой $Q_{a,b,h}$, а *особым множеством* Λ^2 — множество троек (a, b, h) с особой $Q_{a,b,h}$.

Заметим, что если особая точка $\Sigma^{a,b}$ принадлежит семействам $y_1, \dots, \hat{y}_4, \dots, \hat{z}_7, \dots, z_{11}$, то ее абсцисса h является гладкой функцией от значений функций Казимира. Для нулей параметрической кривой (1.16) это верно, т.к. функции $h(a, b, z)$ и $k(a, b, z)$, определяющие ее, являются полиномами от z и z^{-1} . Для оставшихся точек это следует из леммы 2.10, в которой описаны явные уравнения поверхностей. Отметим, что при $b = 0$ некоторые из поверхностей первой серии могут склеиваться друг с другом непрерывно, но не гладко. Множеству точек склейки соответствуют особые точки типа y_4 и z_7 . Из данных соображений следует, что объединение границ

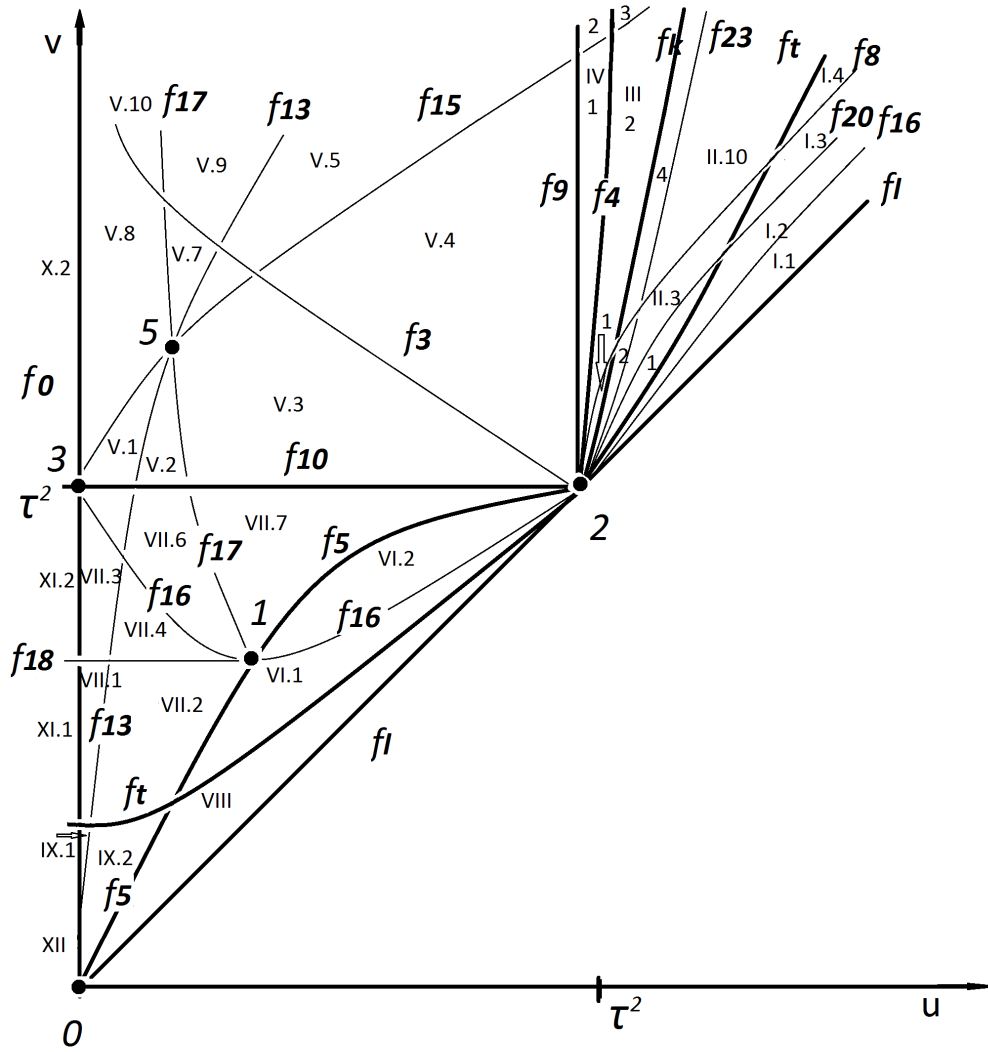


Рис. 2.2: Увеличенный фрагмент рисунка 2.1

всех камер совпадает с особым множеством $\mathbb{A}^2$. Отсюда особое множество замкнуто, а все камеры открыты. Сформулируем основное утверждение об устройстве пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$.

Утверждение 2.1.5. Каждая камера в пространстве параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ является открытым диском D^3 , всем точкам (a, b, h) которого соответствует одинаковый граф Фоменко с именованными атомами слоения на $Q_{a,b,h}^3$.

Каждая камера либо симметрична самой себе относительно плоскости $b = 0$ и трансверсально пересекает ее, либо не имеет с ней общих точек, расположена строго по одну сторону от нее и симметрична другой камере.

Каждый граф Фоменко с именованными атомами реализуется в одной камере (графы 1-11) или паре камер (графы 12-32), симметричных относительно плоскости $b = 0$.

Замечание 23. Множество троек (a, b, h) с пустыми $Q_{a,b,h}$ также гомеоморфно трехмерному

диску.

Тем самым, каждой камере в полупространстве $b > 0$ можно биективно сопоставить граф Фоменко с именованными атомами. Далее, для каждого из ребер Θ можно перечислить графы Фоменко с именованными атомами, соответствующие неособым тройкам (a, b, h) с парой (a, b) , лежащей на данном ребре.

Односвязность камеры следует из односвязности слоя проекции $(a, b, h) \rightarrow (a, b)$ камеры на плоскость Oab и односвязности базы. Это проверяется явно по таблицам кодов 2.12-2.17 и 2.11. Пусть некоторый номер графа Фоменко с именованными атомами присутствует в кодах двух соседних по дуге из Θ подобластей и для (a, b) с этой дуги, кроме возможно, ее концов. Согласно пункту 3 утверждения 2.1.4, на их объединение проецируется одна камера с данным графом.

2.1.4.2 Граф соседства трехмерных камер и двумерные грани

Назовем *соседними* две камеры, которые граничат друг с другом по двумерному подмножеству. Напомним, что граница каждой камеры лежит в особом множестве $\mathbb{A}^2$.

Максимальное связанное подмножество $\mathbb{A}^2$, каждой точке (a, b, h) которого соответствует ровно одна особая точка $\Sigma^{a,b}$ фиксированного семейства $y_1, \dots, z_{11}$ кроме y_4 и z_7 , назовем *гранью*. Проекция такой грани на плоскость Oab является инъекцией.

Теперь определим грани, лежащие в плоскостях $a = f_l(b)$ пространства $\mathbb{R}^3(a, b, h)$. Парам $a = f_l(b) > 0$ соответствуют сингулярные двумерные орбиты $M_{a,b}^2 \cong S^2$. Для каждой из них множество троек (a, b, h) с непустыми $Q_{a,b,h}$ является точкой или вертикальным отрезком.

Лемма 2.3. Пусть $\varkappa > 0$ и $a = f_l(b)$, тогда на $M_{a,b}^2$ функции H и K зависимы, неособый слой гомеоморфен одной или двум окружностям S^1 или $2S^1$. Слоение на $M_{a,b}^2$ можно однозначно описать его особыми слоями:

- при $0 < b \leq \sqrt{\varkappa^3 c_1^4}$ каждый из двух особых слоев, минимальный и максимальный, является точкой,
- при $\sqrt{\varkappa^3 c_1^4} < b$ седловой слой гомеоморфен восьмерке, минимальный является точкой, а максимальный — двумя точками.

Паре $(0, 0)$ соответствует одноточечная орбита $M_{0,0}$, а при $a = 2\varkappa^2 c_1^2, b = \varkappa^{3/2} c_1^2$ происходит перестройка особых слоев. Здесь *гранями* назовем максимальные связанные подмножества троек (a, b, h) с фиксированным числом окружностей в $Q_{a,b,h}$, реализующих неособые слои в M^2 . Следующее утверждение доказывается аккуратным рассмотрением проекций граней на плоскость Oab .

Утверждение 2.1.6. Каждая грань гомеоморфна открытому двумерному диску. Пересечение границ двух соседних камер (за исключением пары камер 1 и 2), содержит ровно одну грань.

В таблице 2.21 перечислены все пары соседних камер. Для каждой из них указано семейство особых точек, соответствующее точкам грани.

Замечание 24. Пара камер 1 и 2 граничит по двум граням, симметричным относительно плоскости $b = 0$. Их точкам соответствует семейство y_6 . В плоскости $b = 0$ точкам кривой, являющейся границей этих граней, соответствует особая точка из семейства y_4 . При этом типичная особенность типа седло-узел перестроилась в типичную особенность типа “эллиптическая вилка”, см. [35].

Семейство z_7 соответствует точкам кривой в плоскости $b = 0$, лежащей в границе нескольких граней. При $b \rightarrow 0$ не происходит перестроек прообразов особых точек типа z_4 и z_6 , имеющих тип центр-центр.

Замечание 25. В таблице 2.21 камеры в паре упорядочены по возрастанию h . Для граней p_{65}, p_{66} (и граней, симметричных им при $b < 0$) указано семейство особых точек $\Sigma^{a,b}$ или количество окружностей, одна или две, составляющих $Q_{a,b,h}$. Знак $\odot$ обозначает множество всех троек (a, b, h) с пустыми $Q_{a,b,h}$.

Составим граф, вершинами которого являются камеры, а ребра соответствуют наличию общей двумерной граничной грани. Этот граф изображен на рис. 2.3.

Данный граф восстанавливается из таблицы 2.21. Напомним, что каждая пара соседних камер (кроме камер 1 и 2) имеет единственную общую граничную грань. Две камеры 1 и 2 имеют две такие грани, симметричные друг другу относительно плоскости $b = 0$ и обе соответствующие особой точке y_6 бифуркационной диаграммы $\Sigma_{a,b}$. Их общее граничное ребро соответствует особой точке y_4 , являющейся пределом точки y_6 при $b \rightarrow 0$.

Поясним цветовые обозначения. Выделим синим вершины графа соседства (3-камеры пространства параметров), чей инвариант содержит атомы C_2 (единственные сложные атомы, встречающиеся в системе Ковалевской на пучке $so(3, 1) - e(3) - so(4)$). Изображение ребер определяется так: тонким ребрам сопоставлены невырожденные особенности ранга 0 системы Ковалевской (т.е. особые точки $y_1, y_3, y_7, y_{10}, y_{11}, y_{12}, z_1, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_9, z_{10}$). Толстыми линиями проведены остальные ребра графа соседства:

- красные ребра графа соседства соответствуют двумерным граням 2-остова $\mathbb{A}$, которым соответствуют особые точки y_5, y_8, z_2 бифуркационных диаграмм (связные компоненты круговых молекул совпадают с таковыми для гиперболической вилки — для y_5 , эллиптического удвоения периода — для z_2 , гиперболического удвоения периода — для y_8),
- фиолетовые ребра графа соседства соответствуют двумерным граням 2-остова $\mathbb{A}$, которым соответствуют особые точки y_6, y_9 бифуркационных диаграмм (связные компоненты их круговых молекул совпадают с таковыми для параболической особенности [28]),

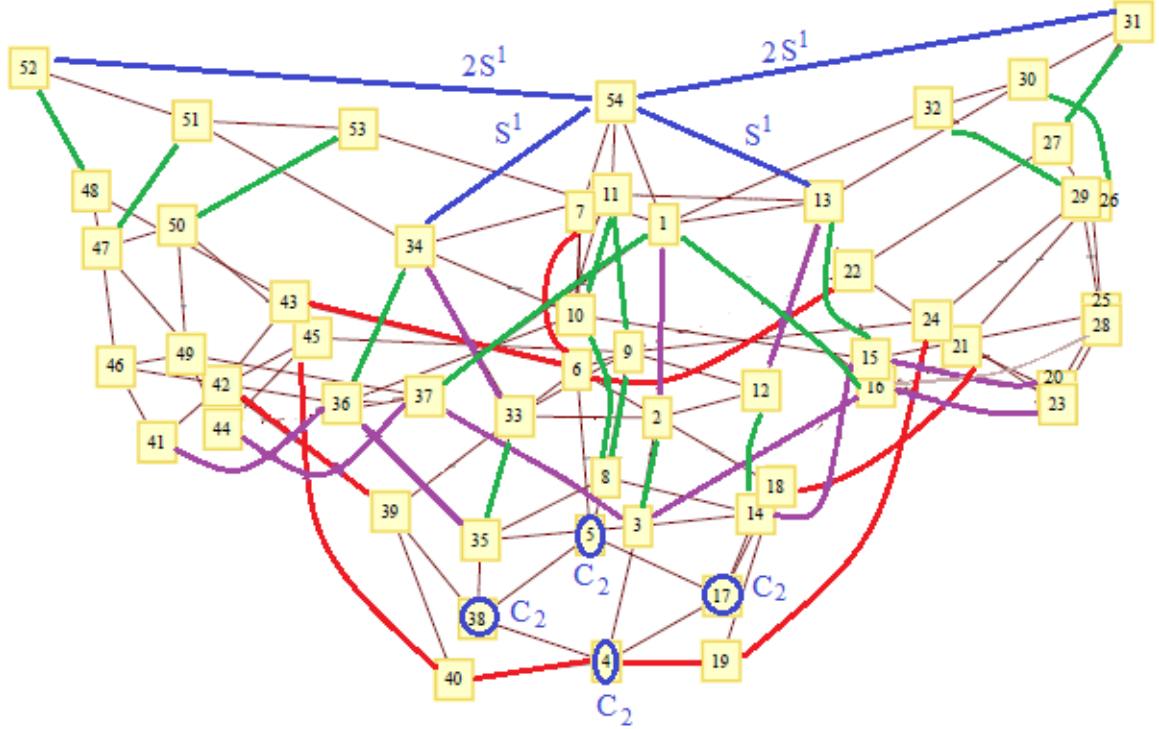


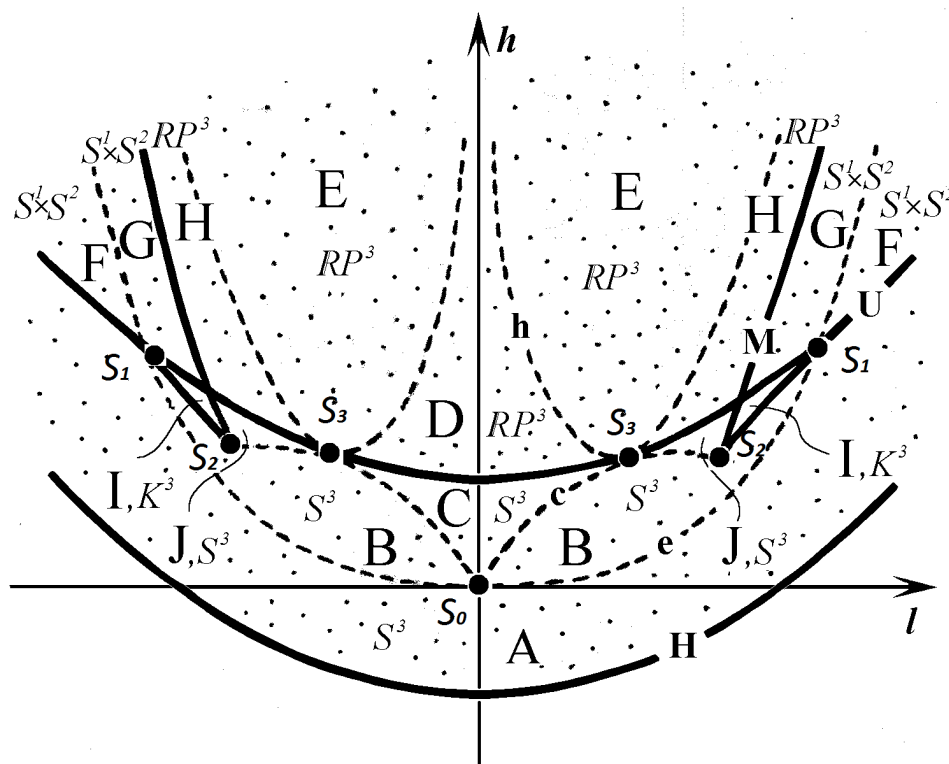
Рис. 2.3: Граф соседства 3-камер. Номера 1-11 соответствуют камерам, симметричным относительно плоскости $b = 0$. Номера $i, i + 21$ для $i = 12, \dots, 32$ соответствуют парам симметричных друг другу камер с инвариантом i из утверждения 2.1.3. Номер 54 соответствует камере пустых $Q_{a,b,h}$.

- зеленые ребра графа соседства соответствуют двумерным граням 2-остова $\mathbb{A}$, которым соответствуют особые точки y_2, y_{13}, z_{10} бифуркационных диаграмм (связные компоненты их круговых молекул совпадают с таковыми для параболической особенности [28]),
- синие ребра графа соседства соответствуют двумерным граням p_{65}, p_{66} (и симметричным им при $b \rightarrow -b$) 2-остова $\mathbb{A}$, проекция которых на плоскость Oab вырождена: они лежат в плоскостях $a = f_l(b) = 2\sqrt{\kappa}c_1|b|$. Прообраз каждой точки такой грани одномерен (т.к. орбита $M_{f_l(b),b}^2$ двумерна и гомеоморфна сфере S_2). Такие ребра соединяют вершины, соответствующие камерам 13, 31, 34, 52 с камерой пустых $Q_{a,b,h}^3$.

2.1.5 Связь с классическим случаем Ковалевской

Многие динамические системы, возникающие в механике, могут рассматриваться как системы на алгебре Ли $e(3)$ (например, см. [4]). В классическом случае Ковалевской можно без потери общности положить геометрический интеграл f_1 равным 1. Тогда плоскость Obh разбивается несколькими кривыми на области с лиувиллево эквивалентными слоениями $Q_{1,b,h}^3$. На

В случае $\varkappa = 0$ прообразы особых точек бифуркационных диаграмм $\Sigma^{1,b}$ содержатся в поверхностях $Q_{1,b,h}^3$, соответствующих изображенным кривым. Данные линии имеют 9 общих точек. Семь из них соответствуют вырождению критических точек. В [35] они назывались суперсингулярными и были объединены в классы S_0, S_1, S_2, S_3 . Отметим, что при пересечении кривых M и U вырождения не происходит — образы критических точек на Ohk имеют разное значение интеграла K .



В работе [51] установлено, что при предельном переходе $\varkappa \rightarrow +0$ сохраняются типы перестро-
ек для “старых” дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$ и особых точек $y_1, \dots, y_{13}$. Тем самым, области I-IV компактного
случая Ковалевской соответствуют интервалам, на которые ось Ob разбивается проекциями су-
персингулярных точек на рисунке 2.4. Отметим, что координата b точки пересечения кривых
 M и U разделяет один из интервалов на два, с разным порядком особых точек y_3 и y_{10} по оси
 Oh .

113

увиллево эквивалентно одному из слоений компактного случая.

Утверждение 2.1.7. *Заштрихованные на рисунке 2.1 подобласти I.8, II.15, II.9, III.6 и IV.5 компактного случая Ковалевской, лежащие выше кривой $v = f_7(u) = 2u^{3/2}/(\sqrt{u} - \sqrt{2}\kappa_1)$, соответствуют интервалам классического случая Ковалевской, а именно*

1. *в данных подобластях компактного случая все “старые” (имеющие аналоги в классическом случае Ковалевской) особые точки $y_i \in \Sigma^{a,b}$ лежат левее всех “новых” (не имеющих таких аналогов) особых точек z_i .*
2. *начало кода (т.е. последовательность до первой точки z_i особых точек y_i и молекул Фоменко с именованными атомами при возрастании h) этих подобластей компактного случая совпадает с кодами интервалов классического случая Ковалевской.*

Отметим, что соседним интервалам оси Ob на рисунке 2.4, ограниченными значениями b_i общих точек изображенных на нем кривых соответствуют соседние подобласти компактного случая. В силу независимости устройства сечения от выбора $a > 0$ для случая $\kappa = 0$, можно говорить о “вложении” классического случая Ковалевской при ненулевой постоянной площадей в компактный случай Ковалевской.

2.1.6 Устройство разделяющего множества

2.1.6.1 Поверхности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ и особые точки $\Sigma^{a,b}$

Абсциссы h особых точек $\Sigma^{a,b}$ кроме нулей параметрической кривой (1.16) удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $h = h_i(a, b)$ или $h = h(a, b, z_i(a, b))$. Все особые точки из одного семейства $y_1, \dots, \hat{y}_4, \dots, \hat{z}_7, \dots, z_{11}$ удовлетворяют ровно одному из этих уравнений.

Графиками этих функций от (a, b) являются двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$, обозначим их int, l и $\pm r, \pm l, lt, rt, cusp$. Будем называть их и соответствующие им особые точки $\Sigma^{a,b}$ *поверхностями* и *особыми точками первой серии*. В таблице 2.1 указано соответствие поверхностей и семейств особых точек.

В зависимости от (a, b) точке (a, b, h) такой поверхности может соответствовать одна или несколько особых точек, или $\Sigma^{a,b}$ может не содержать особых точек с такой абсциссой h .

Тройкам (a, b, h) из поверхностей $\pm r, \pm l$ соответствуют точки пересечения параметрической кривой (1.16) с левой и правой параболами, тройкам из lt, rt — касания этих кривых. Тройки из поверхности $cusp, int$ и l соответствуют точке возврата кривой (1.16), точке пересечения парабол и вершине левой параболы.

Нулям параметрической кривой (1.16), в том числе особым точкам из семейств y_{10}, y_{11} и z_1 , соответствует поверхность $root$, заданная неявно: $k(a, b, z) = 0$. Она не является однозначной над областями I и II. Эти семейства и поверхность будем относить ко *второй серии*.

$-l$	$+l$	$-r$	$+r$	lt	rt	$cusp$	l	int
y_1	$y_3, y_7, y_{12}z_9, z_{10}$	z_4	z_3, z_6, z_{11}	y_5, y_8	z_2, z_8	y_6, y_9	y_2, y_{13}	z_5

Таблица 2.1: Семейства особых точек $\Sigma^{a,b}$ и поверхности первой серии

Для удобства дальнейших вычислений перепараметризуем множество орбит $D = \{(a, b) | a \geq f_l \geq 0\}$ значениями (u, v) новых функций Казимира, которые выражаются через f_1, f_2 как решения уравнения $f^2 - 2f_1f + 4f_2^2 = 0$.

$$\begin{cases} u = a - \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} \\ v = a + \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} a = (u + v)/2 \\ b^2 = uv/(4\kappa) \end{cases} \quad (2.1)$$

Следующая лемма о порождаемом при этом отображении $\rho : (a, b) \rightarrow (u, v)$ в плоскости Oab доказывается явным вычислением. При этом образом лучей $b = 0, a \geq 0$ и $a = f_l(b) \geq 0, b \geq 0$ являются лучи $u = 0, v \geq 0$ и $v = u, u \geq 0$. Далее сохраним для $\rho(D)$ обозначение D .

Лемма 2.4. Пусть $\kappa > 0$, тогда замена (2.1) регулярна в $\text{Int } D$ и является гомеоморфизмом множеств D и $\{(u, v) | v \geq u \geq 0\}$.

Функции $h_i(a, b)$ и $z_i(a, b)$ для поверхностей первой серии были найдены в работе [51]. В лемме 2.10 они будут записаны как функции от (u, v) .

2.1.6.2 Равенство абсцисс особых точек первой серии

Укажем орбиты, для которых равны значения функций h_i первой серии, т.е. совпадают абсциссы h_i особых точек из семейств первой серии или происходит перестройка особых точек.

В утверждении 2.1.8 попарно приравняем их функции $h_i(a, b)$ и $h(a, b, z_i(a, b))$ и решим возникающие уравнения. Иными словами, поверхности первой серии будут в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ пересекаться или касаться над кривыми на плоскости орбит, перечисленными в таблицах 2.19 и 2.20.

Утверждение 2.1.8. Пусть $\kappa > 0$, тогда поверхности первой серии пересекаются в точности для пар (u, v) , лежащих на разделяющих кривых $f_0, \dots, f_{19}$.

В таблицах 2.19 и 2.20 для них указаны явные формулы вида $y = y(x)$ и значения x_1, x_2 аргумента x , при которых f_i лежит в D .

Замечание 26. В таблицах 2.19 и 2.20

1. в указанных интервалах $x \in (x_1, x_2)$ функция f_i определена, и точка с координатами x и $f_i(x)$ лежит в D , т.е. ей соответствует непустая орбита.
2. семейства в паре упорядочены по возрастанию абсцисс h их особых точек при $f_i(x) + \varepsilon > y > f_i(x)$, т.е. там $h_1 \leq h_2$. Пары сопоставлен нижний индекс 0, если на кривой

достигается минимум $h_2 - h_1$, и 1, если знак этой разности изменяется при переходе через кривую.

3. кривые f_l и f_t являются графиками функций f_1 и f_{14} , а кривые f_r , f_m — объединением графиков функций f_4 и f_5 , f_9 и f_{10} соответственно.

Утверждение 2.1.8 доказано в пункте 2.2.2.

Следствие 3. Пусть $\varkappa > 0$, тогда луч $a > 0, b = 0$ содержит ровно 4 точки, для которых имеются пересечение поверхностей первой серии:

$$\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} : l, +r, z_1, \quad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{2} : l, rt, \quad \varkappa^2 c_1^2 : +l, int, rt, \quad 4\varkappa^2 c_1^2 : +l, -r$$

2.1.6.3 Равенство абсцисс особых точек из разных серий

Теперь опишем разделяющие кривые, для точек (u, v) которых нуль параметрической кривой имеет абсциссу h , удовлетворяющую одному из уравнений первой серии $h = h_i(u, v)$ или $h = h(u, v, z_i(u, v))$. Отметим, что этим нулем не является точка z_1 — самая правая особая точка $\Sigma^{a,b}$, если содержится в ней.

Первой такой кривой является f_k , на которой точка возврата с параметром z_{cusp} является нулем кривой (1.16), т.е. $k(f_k(b), b, z_{cusp}(f_k(b), b)) = 0$. Оставшиеся четыре кривые $f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ описаны в утверждении 2.1.9. Рассмотрим замены координат $q = q(u, v)$, $s = s(v)$ и $\tilde{q} = q(v, u)$, $\tilde{s} = s(u)$.

$$\begin{cases} q(u, v) = \frac{\sqrt{u}}{v} \\ s(v) = 1/v \end{cases}, \quad \begin{cases} u = \frac{q^2}{s^2} \\ v = 1/s \end{cases} \quad (2.2)$$

Лемма 2.5. Пусть $\varkappa > 0$, тогда замена (2.2) задает гомеоморфизм множеств $E = \{(u, v) | v \geq u \geq \tau^2\}$ и $\{(q, s) | q/\tau \geq s \geq q^2, 0 < q \leq 1/\tau\}$ и регулярна в $\text{Int } E$.

В координатах (q, s) разделяющие кривые f_l, f_t, f_r и f_m являются графиками функций одной переменной, как и в исходных координатах (a, b) . Эти функции указаны в таблице 2.18. Для кривой f_k верен аналогичный факт, который будет доказан в разделе 2.2.3.

Лемма 2.6. Пусть $\varkappa > 0$, тогда в координатах (2.2) дуга кривой f_k , лежащая в области E является графиком явной функции $s = f_{24}(q)$

$$f_{24}(q) = -\frac{1}{\tau^2}(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) + \frac{2}{\tau^2}(1 - \tau^{2/3}q^{2/3})^{\frac{3}{2}}.$$

Далее будем обозначать листы поверхности $root$, соответствующие нулям y_{11} и y_{10} как $rootl$ и $rootr$ соответственно. Эти поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ склеиваются в точках (a, b, h) при $h = h(a, b, z_{cusp}(a, b))$, $a = f_k(b)$. Заметим, что проводить все попарные проверки поверхностей первой серии и $rootl$, $rootr$ на совпадение значений h не требуется.

Лемма 2.7. При $\kappa > 0$ достаточно проверить следующие пары поверхностей из разных серий:

- область I: $(rootr, -r), (rootr, +r)$,
- область II: $(rootr, -r), (rootr, +r), (rootr, +l)$ и $(rootl, -r)$.

Действительно, как было установлено в [51], $h'_z < 0$ при $0 < z < \sqrt[3]{b^2 c_1^2} = z_{cusp}$ и $h'_z > 0$ при остальных $z \neq 0$. Отсюда $h(z_1) > h(rt) > h(lt) > h(rootr)$ и $h(+l) > h(rootl)$. Т.к. $h(-l) < h_l < h(rootl)$ в области II и $h_l < h(rootr)$ в областях I, II, то положение оставшихся точек относительно $rootr$ и $rootl$ известно. Отсюда следует утверждение леммы 2.7.

Найдем уравнения разделяющих кривых $f_{20}, \dots, f_{23}$, на которых достигаются равенства значений гамильтониана в точках $\pm r$ или $\pm l$ и $rootl, rootr$.

Утверждение 2.1.9. Пусть $\kappa > 0$, тогда

1) равенства $h(rootr) = h(+r)$, $h(rootl) = h(-r)$ и $h(rootr) = h(-r)$ в координатах $(q, s) = (v^{-1}\sqrt{u}, v^{-1})$ достигается на графиках следующих функций $s = f_i(q)$ в плоскости Oqs , где $i \in \{20, 21, 22\}$ соответственно:

$$f_i: \quad s(q) = \frac{-(1 + 2\sigma_i \tau q) + \sqrt{(1 + 2\sigma_i \tau q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_i(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_i^4(q)} \right)}}{\tau^2}, \quad (2.3)$$

2) равенство $h(rootr) = h(+l)$ достигается на кривой, которая в координатах $(\tilde{q}, \tilde{s}) = (u^{-1}\sqrt{v}, u^{-1})$ $\tilde{s} = f_{23}(\tilde{q})$ является графиком функции $\tilde{s} = f_{20}(\tilde{q})$.

Здесь $\sigma_{20} = -1, \sigma_{21} = \sigma_{22} = +1$. В выражении w_i знаки “+” и “-” перед корнем определяются выбором правого или левого корня $rootr$ и $rootl$ соответственно, а знаки “+” и “-” под корнем равны $-\sigma_i$ и зависят от выбора $+r$ или $-r$:

$$w_{20} = \left(1 + \sqrt{1 - 8\sigma_{20}\tau\sqrt{u}/v} \right), w_{21,22} = \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\sigma_{21}\tau\sqrt{u}/v} \right).$$

Замечание 27. При $1 - 8\tau q < 0$, выражения w_{21}, w_{22} не определены. Значение $q = 1/(8\tau)$ соответствует общей точке $(u_0, f_{13}(u_0))$ кривых f_{21}, f_{22}, f_{13} и f_k .

Благодаря явному заданию кривых можно утверждать, что на рисунки 2.1 и 2.2 попали все ветви этих кривых, содержащиеся в Θ .

2.1.6.4 Дуги кривых, входящие в разделяющее множество

На следующем шаге для каждой из функций f_i укажем подмножество промежутка (x_1, x_2) , на котором точка графика f_i содержится в Θ . Отметим, что общая тройка (a, b, h) двух поверхностей содержится в $\mathbb{A}^2$, т.е. пара $(a, b) \in \Theta$, в точности если $\Sigma^{a,b}$ содержит две особые точки с равными значениями h или осуществляется одна из перестроек бифуркационных диаграмм, происходящих при пересечении кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m или $b = 0$.

Проверим, на каких дугах кривых f_i лежат тройки, которым соответствуют две особые точки $\Sigma^{a,b}$ с равными абсциссами. Функция f_i была записана в таблицу 2.20, если ее график содержит конечное или нулевое число точек из Θ , или в таблицу 2.19, если целая дуга графика f_i содержится в Θ . Следующее утверждение доказано в пункте 2.2.5.

Утверждение 2.1.10. *В компактном случае Ковалевской разделяющее множество Θ состоит из следующих дуг кривых f_i :*

1. $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14}, f_{15}, f_{16}$ — с указанными в таблице 2.19 областями определения в координатах (u, v) , заданных формулой (2.1),
2. $v = f_{18}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,
3. $v = f_{13}(u)$ — при $u \in (0, u_0)$. Здесь $u_0 = \frac{(5 + 3\sqrt{3})^2}{16}\tau^2$,
4. $v = f_{17}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,
5. $a = f_k(b)$ — при $b \geq 0$.
6. Кривые $f_6, f_{11}, f_{12}, a = f_{19}(b)$ не добавляют новых дуг и точек в Θ .
7. Описанные в утверждении 2.1.9 кривые f_{20}, f_{22}, f_{23} входят в Θ целиком, кривая f_{21} — до пересечения с f_t .

Замечание 28. Точка $(u_0, f_{13}(u_0))$ лежит на кривых f_{13} , где $h_{cusp} = h_{-r}$, и на кривой f_k , общей для поверхностей $rootr$, $rootl$ и $cusp$.

Таким образом, на рисунках 2.1 и 2.2 указаны все дуги разделяющих кривых, входящих в Θ . В частности, отсутствуют иные ветви кривых $f_{20}, \dots, f_{23}$.

2.1.6.5 Точки пересечения разделяющих кривых

Остается удостовериться, что на эти рисунки попали все точки пересечения этих дуг. В утверждении 2.1.11 докажем, что все точки пересечения дуг Θ , лежащие в достаточно малой окрестности вершины 2, уже указаны на рисунке 2.2 (т.е. при рассмотрении такой окрестности “под микроскопом” не обнаружатся новые вершины графа Θ).

Утверждение 2.1.11. *Все пересечения кривых из Θ вблизи точки (τ^2, τ^2) указаны на рисунке 2.2. А именно, кривые f_r, f_{16} не имеют там точек пересечения с другими кривыми, кривая f_8 пересекает кривые f_k, f_{23}, f_t , кривая f_{20} пересекает кривую f_t .*

Теперь опишем поведение кривых Θ на большом удалении от нуля в плоскости Ouv . В утверждении 2.1.12 докажем, что дуги Θ не пересекаются при достаточно больших (u, v) , т.е. все вершины Θ попали на рисунок 2.1.

Утверждение 2.1.12. *Кривые Θ пересекают окружность достаточно большого радиуса с центром в начале координат в следующем порядке. Окружность обходится против часовой стрелки.*

$$f_1 = f_l, f_2, f_{16}, f_{20}, f_8, f_{15}, f_{22}, f_7, f_{14} = f_t, f_{23}, f_{24} = f_k, f_4 = f_r, f_7, f_9 = f_m, f_{17}, f_0.$$

Следствие 4. *Разделяющее множество имеет структуру графа с 75 вершинами и 199 ребрами, симметричного относительно прямой $b = 0$. Все вершины и ребра Θ изображены на рисунках 2.1-2.2.*

2.1.7 Стратификация пространства параметров: одномерные ребра и вершины

Удалив из множества $\mathbb{A}$ двумерные грани, получим некоторый одномерный остов, являющийся объединением конечного числа гладких дуг в пространстве $\mathbb{R}^3$. Данный факт следует из гладкости функций $h_i(a, b)$ для каждого типа особых точек Σ при почти всех (a, b) и полученной структуры разделяющего множества. Также отметим, что образом проекции 3-камеры на плоскость Oab является связное и гомеоморфное диску множество, каждая 2-грань гомеоморфна диску, а ее проекция на данную плоскость является биекцией. Следовательно, образом каждой 2-грани является объединение одной или нескольких подобластей, на которые разделяющее множество делит плоскость орбит, объединенное с несколькими дугами и вершинами из разделяющего множества. При этом в прообразе каждой точки разделяющего множества обязательно имеется хотя бы одна точка указанного 1-остова.

Следовательно, имеем такой факт:

Лемма 2.8. *На рисунках 2.1 и 2.2 в прообразе каждой точки разделяющего множества, исключая две прямые ($u = v \geq 0$ и $u = 0, v > 0$) и некоторые точки пересечения разделяющих кривых, содержится ровно одна точка 1-остова разделяющего множества Θ .*

Теперь опишем, какие точки пересечения дуг разделяющего множества являются 0-вершинами стратификации, т.е. их прообраз в 1-остове имеет связную компоненту, не гомеоморфную интервалу.

Лемма 2.9. *Вершины стратификации попадающие в полупространство $b \geq 0$, проецируются в жирные черные точки 0 - 9 на рисунках 2.1 и 2.2. В прообразе каждой из них имеется единственная вершина стратификации. Отметим, что каждой вершине i с координатами $(a, -b, h)$, исключая вершины 0, 3 и 4, соответствует симметричная ей вершина i' с координатами $(a, -b, h)$.*

Отметим также, что в точках пересечения двух или нескольких кривых, которым не сопоставлена черная точка (образ вершины), без разрыва продолжается та из двух кривых, которой соответствует особая точка с большим значением координаты h .

Иначе говоря, каждый одномерный страт имеет своим концом или 0-вершину стратификации (образом которой является жирная черная точка на рисунках 2.1 и 2.2), или удаляется сколь угодно далеко от точки $a = b = 0$ в соответствующую сторону.

На основе полученных далее в разделе 2.1.6 формул для кривых разделяющего множества имеем, что каждая из 21 дуг разделяющего множества (кроме $b = 0$) инъективно проецируется на горизонтальную ось рис. 2.1 и рис. 2.2. В следующем утверждении для каждой из них укажем, на какие ребра стратификации делится 1-остов в их прообразе вершинами $0, \dots, 9, 1', 2'3', 4', \dots, 9'$ стратификации.

Утверждение 2.1.13. • 1-остов стратификации состоит из 83 ребер и 17 вершин.

- Каждое 1-ребро стратификации, исключая одно ребро в прообразе кривой f_{10} и одно ребро в прообразе кривой f_t при $\tau^2 < u < \tau^2$ либо расположено в одном из полупространств $b > 0$ или $b < 0$, либо проецируется на ось $b = 0$. Два этих ребра ограничены вершинами 2 и 2'.
- Для каждого ребра стратификации (гомеоморфного интервалу), пересекающегося со множеством $b \geq 0$ в $\mathbb{R}^3$, укажем ниже, на какой из кривых разделяющего множества лежит его проекция, в какой вершине оно начинается и заканчивается (возможно, в бесконечности). Ребра стратификации, принадлежащие одной и той же кривой, упорядочены по возрастанию координаты и на них.

$$\begin{aligned}
f_0 & \quad 0 \overset{1}{-} \infty, \quad 0 \overset{2}{-} \overset{3}{-} \overset{4}{-} \infty \\
f_1 & \quad 0 \overset{42}{-} \infty, \quad 0 \overset{43}{-} 2, \quad 2 \overset{44}{-} \infty, \quad 2 \overset{45}{-} \infty; \\
f_2 & \quad 4 \overset{9}{-} \overset{10}{-} \overset{11}{-} \overset{12}{-} \infty; \quad f_3 \quad 4 \overset{8}{-} 2; \quad f_4 \quad 2 \overset{27}{-} \overset{28}{-} \infty; \\
f_5 & \quad 0 \overset{22}{-} \overset{23}{-} 2; \quad f_7 \quad \infty \overset{29}{-} \overset{30}{-} \infty; \quad f_8 \quad 2 \overset{31}{-} \infty; \\
f_9 & \quad 2 \overset{26}{-} \infty; \quad f_{10} \quad 2' \overset{7}{-} 2; \quad f_{13} \quad 0 \overset{19}{-} \overset{20}{-} \overset{21}{-} 7; \\
f_t = f_{14} & \quad \infty \overset{40'}{-} 9' \overset{39'}{-} 2' \overset{5'}{-} 2' \overset{5}{-} 2 \overset{39}{-} 9 \overset{40}{-} \infty; \\
f_{15} & \quad 3 \overset{13}{-} \overset{14}{-} \overset{15}{-} \infty; \quad f_{16} \quad 3 \overset{16}{-} \overset{17}{-} \overset{18}{-} \infty; \quad f_{17} \quad \infty \overset{29}{-} \overset{30}{-} \infty; \\
f_{18} & \quad 1' \overset{6}{-} \text{frm}[o] - -; \quad f_{20} \quad 2 \overset{41}{-} \infty; \quad f_{21} \quad 7 \overset{36}{-} 9; \\
f_{22} & \quad 7 \overset{34}{-} \overset{35}{-} \infty; \quad f_{23} \quad 2 \overset{37}{-} \overset{38}{-} \infty; \quad f_k \quad 2 \overset{32}{-} \overset{33}{-} \infty.
\end{aligned}$$

2.2 Доказательства

2.2.1 Доказательство лемм

2.2.1.1 Явные формулы для поверхностей первой серии

Лемма 2.10. Пусть $\varkappa > 0$, тогда в области $\hat{D} = \{(a, b) \mid a > 2\sqrt{\varkappa}b > 0\}$ абсциссы особых точек первой серии в координатах (u, v) , заданных формулой (2.1), имеют следующий вид, где $\tau = \sqrt{2\varkappa c_1}$:

$$h_{\pm l} = \frac{u \pm 2\tau\sqrt{v}}{2\varkappa}, \quad h_{\pm r} = \frac{v \pm 2\tau\sqrt{u}}{2\varkappa}, \quad h_{lt} = \frac{v}{u}\varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}, \quad h_{rt} = \frac{u}{v}\varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa}, \quad (2.4)$$

$$h_{cusp} = 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa} \right)^{1/3}, \quad h_l = \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}, \quad h_{int} = \varkappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\varkappa}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Несложно посчитать, что

$$z_{\pm l} = \pm \sqrt{\frac{v}{2}} c_1, \quad z_{lt} = \frac{u}{2\varkappa}, \quad z_{\pm r} = \pm \sqrt{\frac{u}{2}} c_1, \quad z_{rt} = \frac{v}{2\varkappa}, \quad z_{cusp} = \left(\frac{uv}{4} \frac{c_1^2}{\varkappa} \right)^{1/3}.$$

Для поверхностей класса $h = h(a, b, z_i(a, b))$ данные выражения были получены подстановкой $z_i(u, v)$ в формулу

$$h(z) = \frac{b(u, v)^2 c_1^2}{z^2} + 2z.$$

Лемма 2.10 доказана. □

2.2.1.2 Доказательство леммы 2.3 о сингулярных орбитах

1. При $\varkappa > 0$ из $f_1 = f_l(f_2)$ следует, что $x_i = \sqrt{\varkappa}J_i$, т.е. объединение сингулярных орбит изоморфно $\mathbb{R}^3(\mathbf{J})$ со структурой алгебры Ли $so(3)$. Функцией Казимира является $f = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = b\varkappa^{-1/2}$. Интегралы H, K и f зависимы:

$$K = ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 - J_2^2)^2 + 4J_2^2(J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 = ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 + J_2^2)^2.$$

$$H = 2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_1^2 - J_2^2 + 2c_1x_1 = 2b\varkappa^{-1/2} - ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 + \varkappa c_1^2 + J_2^2).$$

Тем самым, $H = -\sqrt{K} + \varkappa c_1^2 + 2b\varkappa^{-1/2}$. Образ отображения момента (H, K) одномерен и лежит на параболе $k = (h - a\varkappa^{-1} - \varkappa c_1^2)^2$.

2. Интеграл $H(J_1, J_2)$ расслаивает $\mathbb{R}^3(\mathbf{J})$ на соосные круговые цилиндры и особую прямую $J_1 = \sqrt{\varkappa}c_1, J_2 = 0$. Значение $b_0 = \sqrt{\varkappa^3 c_1^4}$ соответствует касанию оси цилиндров и орбиты $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = b\varkappa^{-1/2}$.

Рассмотрим множество троек $(f_l(b), b, h)$, для которых $Q_{f_l(b), b, h}$ не диффеоморфно S^1 или $2S^1$. Для каждой сингулярной орбиты $M_{a,b}^2$ таковыми являются две точки $p_1^\pm$ касания

цилиндров и сферы, а при $b_0 < b$ также две точки $p_2^\pm$ пересечения оси цилиндров и сферы. Нетрудно найти их координаты:

$$p_1^\pm : \quad \left(\pm \varkappa^{-1/4} \sqrt{b}, 0, 0 \right), \quad p_2^\pm : \quad \left(\sqrt{\varkappa} c_1, 0, \pm \sqrt{b \varkappa^{-1/2} - \varkappa c_1^2} \right).$$

При $0 < b \leq b_0$ минимум и максимум H достигаются в точках p_1^- и p_1^+ соответственно. При $b_0 < b$ слой, содержащий точку p_1^+ , диффеоморфен окружности, а максимум H достигается в точках $p_2^\pm$. При этом $K(p_1^\pm) > 0$ и $K(p_2^\pm) = 0$.

3. Из леммы 2.10 при $a = f_l(b)$ имеем равенства $z_{-r} = z_{-l}$, $z_{+l} = z_{+r}$, $z_{lt} = z_{rt}$. Явно проверено, что $H(p_1^-) = h_{-l}$, $H(p_1^+) = h_{+l}$ и $H(p_2^\pm) = h_l = h_{rt}$. Равенство $H(p_2^\pm) = h(z_1)$ по непрерывности следует из расположения z_1 между вершинами парабол (1.17) и (1.18). Этих данных достаточно, чтобы описать $\mathbb{A}^2$ в окрестности плоскостей $a = f_l(b)$.

Лемма 2.3 доказана.

2.2.2 Доказательство утверждения 2.1.8

Достаточно сравнить значения функций $h_i(a, b)$ и $h(a, b, z_i(a, b))$ из леммы 2.10 для 36 пар поверхностей.

1. Сравнение значений h поверхностей $\pm l, \pm r, lt, rt$ не представляет сложностей. Для сравнения h_{cusp} и значения h для поверхностей $\pm l, \pm r$ сделаем замену $w = w(u, v) > 0$ и получим кубический многочлен с кратным корнем. Например, для $-l$ замена и многочлен имеют вид $w = u^{1/3} v^{-1/6} \tau^{-1/3}$ и $(w - 2)(w + 1)^2$ соответственно. Для пар $(lt, cusp)$ и $(rt, cusp)$ используется похожая замена $w = u^{-2/3} v^{1/3} \tau^{2/3}$.

Значения функций h_{+l} и h_{cusp} , h_{+r} и h_{cusp} равны на кривых $v = u^2/\tau^2, u > \tau^2$ и $u = v^2/\tau^2, 0 < v < \tau$ соответственно. Две эти кривые являются образом кривой f_r в координатах (u, v) .

2. Функции h_l и h_{+l} равны на кривой $a = f_t(b(t), t), b = b(t)$. Приняв за $t = \sqrt{u/(2\varkappa)}$, и подставив $a = a(u, v), b = b(u, v)$, получим уравнение кривой f_{14} . Отметим, что при $u \in (0, \tau^2)$ совпадают точки трех поверхностей: $+l, l$ и z_1 . При $v < f_{14}(u), 0 \leq u < \tau^2$ точкам поверхностей l и z_1 не соответствует особых точек $\Sigma^{u,v}$.

Сравнение значений h_l и h_{int} друг с другом или с одной из функций $h_{-l}, h_{\pm r}, h_{lt}, h_{rt}$ не представляет сложностей. Отметим, что образ кривой f_m в координатах (u, v) является объединением отрезка $v = \tau^2, 0 \leq u \leq \tau^2$ и луча $u = \tau^2, v \geq \tau^2$, на которых равны значения пар функций h_{int} и h_{rt} , h_{int} и h_{lt} соответственно.

3. Кривая $v = f_{17}(u)$, в точках которой равны h_l и h_{cusp} , и луч $v = u, u > 0$ не имеют общих точек кроме точки (τ^2, τ^2) , поскольку значение функции $uf_{17}(u) - u^2 > 0$ положительно в точках ее экстремумов $u = \tau^2$ и $u = \tau^2/4$ и в точке $u = 0$.
4. Пару $cusp$ и int рассмотрим в координатах (a, b) . Полученная кривая $a = f_{19}(b)$ не войдет в Θ , т.к. она лежит ниже прямой $a = f_l(b)$ при $b > 0, b \neq \varkappa^{3/2}c_1^2$:

$$f_{19}(b) = 3b^{2/3}\varkappa c_1^{2/3} - \varkappa^2 c_1^2 < 2\sqrt{\varkappa}b = f_l(b), \quad \text{т.к.} \quad 0 < (b^{1/3} + 1/2\varkappa^{1/2}c_1^{2/3})(b^{1/3} - \varkappa^{1/2}c_1^{2/3})^2.$$

Т.к. при $b > 0$ полученный многочлен от $b^{1/3}$ неотрицателен, и равен нулю только при $b = \varkappa^{3/2}c_1^2$, то единственной точкой кривой f_{19} в Θ является вершина 2.

Утверждение 2.1.8 доказано.

2.2.3 Уравнения кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m в координатах (q, s)

1. Подставив выражения $u(s, q)$ и $v(s)$ в уравнения кривых f_1, f_4, f_9, f_{14} из таблицы 2.19, легко получить уравнения из таблицы 2.18 для кривых f_l, f_t, f_r и f_m .
2. Прделав то же самое с уравнением кривой f_k в координатах (u, v) , получим квадратное уравнение относительно s .

$$\frac{u+v}{2} = \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\varkappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\varkappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2 \quad (2.6)$$

$$\frac{\tau^2}{2}s^2 + s(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) + 2q^2 - \frac{3q^{4/3}}{2\tau^{2/3}} = 0.$$

$$f_k : \quad s = f_k^\pm(q) = \frac{1 - 3x(q) \pm 2x^{\frac{3}{2}}(q)}{\tau^2}, \quad \text{где } x(q) = 1 - q^{2/3}\tau^{2/3}.$$

3. Выбор знака перед радикалом, т.е. нужной ветви f_k^- или f_k^+ , определяется попаданием данной ветви в E , т.е. условием $f_m(q) \leq f_k(q) \leq f_l(q)$ на промежутке $q \in (0, 1]$.

Найдя корни уравнений $f_k^\pm(q) = f_l(q)$ и $f_k^\pm(q) = f_m(q)$ с учетом их кратностей, легко увидеть, что $f_k^-(q) \geq f_m(q) \geq f_k^+(q) \geq f_l(q)$ при $0 < q \leq \tau^{-1}$. Значит, $f_k = f_k^+$.

Лемма 2.6 доказана.

2.2.4 Доказательство утверждения 2.1.9

Подробно обоснуем формулы для кривой f_{20} , разделяющей точки $+r$ и $rootr$. Небольшие отличия для остальных случаев будут указаны в пункте 3.

1. Приравняем $h(z) = h(z_{\delta r})$, тогда $z_{\delta r}$ и один из нулей параметрической кривой z_{rootr}, z_{rootl} сопряжены как корни этого уравнения

$$\frac{uv c_1^2}{4\kappa z^2} + 2z = \frac{v + 2\delta\tau\sqrt{u}}{2\kappa}.$$

Разделим многочлен на двучлен $z - z_{\delta r} = \left(z - \delta c_1\sqrt{u/2}\right)$ и вычислим корни квадратного трехчлена:

$$8\kappa z^3 - z^2(2v + 4\sqrt{2}\delta\kappa c_1\sqrt{u}) + uv c_1^2 = \left(z - \delta c_1\sqrt{u/2}\right)(8\kappa z^2 - 2vz - \sqrt{2}\delta c_1\sqrt{uv}),$$

$$z_{root} = \frac{v}{8\kappa} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\delta\tau\sqrt{u}/v}\right) = \frac{v}{8\kappa} w_{x,+r}(u, v).$$

В выражении $w_{x,y}(u, v)$ индексы $x \in \{rootl, rootr\}$ и $y \in \{+l, -r, +r\}$ указывают, абсциссы какой пары особых точек $\Sigma^{a,b}$ были приравнены. Правило выбора знака в выражении $w(u, v)$ с индексами x, y опишем в пункте 3. Получили, что $w(u, v)$ является функцией одной переменной $q = \sqrt{u}/v$ в случае $y = \pm r$ или одной переменной $\sqrt{v}/u$ в случае $y = +l$.

2. Подставим найденные z_{root} в уравнение $k(z) = 0$ и разделим на v^2 :

$$k(z) = \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uv c_1^2}{4\kappa z} + \frac{u^2 v^2 c_1^4}{(4\kappa)^2 z^4}\right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4 = 0,$$

$$2c_1^2 \frac{u}{v^2} + 2c_1^2 \frac{1}{v} - \frac{8uc_1^2}{v^2 w(q)} + \frac{u^2 c_1^4 8^4 \kappa^4}{(4\kappa)^2 v^4 w^4(q)} - 2\kappa c_1^2 \frac{1}{2\kappa v} - 2\sqrt{2}\delta\kappa c_1^3 \frac{\sqrt{u}}{v^2} + \frac{\kappa^2 c_1^4}{v^2} = 0.$$

Перепишем уравнение в координатах (q, s) :

$$\begin{aligned} & \kappa^2 c_1^2 s^2 + (1 - 2\delta\tau q)s + 2q^2 - 8\frac{q^2}{w(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w^4(q)} = 0 \\ & s = \frac{-(1 - 2\delta\tau q) \pm \sqrt{(1 - 2\delta\tau q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_{x,+r}(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_{x,+r}^4(q)}\right)}}{\tau^2} \end{aligned}$$

Здесь $w = w_{x,+r} = (1 \pm \sqrt{1 + 8\delta\tau q})$. Получена явная формула кривой $s(q)$, содержащей те и только те точки (q, s) для которых абсцисса корня совпадает с абсциссой z_{+r} .

3. Опишем выбор знаков для $s(q)$, $w_{x,y}(q)$ и σ_i . Достаточно описать пары $(x, y) \in \{(rootr, +r), (rootl, -r), (rootr, -r)\}$, т.к. для пары $(rootr, +r)$ вычисления проходятся аналогично случаю $(rootr, +r)$, в координатах $(\tilde{q}, \tilde{s}) = (q(v, u), s(u))$.

Из пункта 1 видно, что знак $\delta_i = \operatorname{sgn} z_{\pm r}$, т.е. $\sigma_i = -\delta_i, w_i(q) = 1 \pm \sqrt{1 - 8\sigma_i \tau q}$. Т.е. под радикалом функции $w_{x,y}(q)$ выбирают знак "плюс" для точки $+r$ и "минус" для $-r$.

Знак перед радикалом в $w_{x,-r}(q)$ определяет выбор корня — знак "плюс" для $rootr$ и знак "минус" для $rootl$. Отметим, что $h(+r) > h(rootl)$, поэтому этой паре не соответствует дуг Θ .

Знак перед внешним радикалом в итоговой функции $s(q)$ определяется двумя требованиями: неотрицательностью подкоренного выражения и принадлежностью кривой области E . Таким образом, перед внешним корнем надо выбрать знак "плюс" для всех трех кривых f_{20}, f_{21}, f_{22} .

Получили указанные в утверждении выражения для $\sigma_i, w_i(q)$ и $f_i(q), i \in \{20, 21, 22\}$. Утверждение 2.1.9 доказано.

2.2.5 Доказательство утверждения 2.1.10

Кривые $f_i, i \in \{1, 4, 5, 9, 10, 14\}$ с указанными в таблице 2.19 областями определения являются образами кривых f_l, f_t, f_r, f_m при замене $(a, b) \rightarrow (u, v)$, и потому входят в Θ .

Остальные кривые f_i соответствуют парам пересекающихся поверхностей. Проекция кривой их пересечения или касания на Oab имеет конечное число общих точек с границами областей I-IX. Для каждой кривой назовем подходящими те области, где обе особые точки входят в $\Sigma^{a,b}$. Дуга кривой, лежащая в такой области, войдет в разделяющее множество Θ .

1. Для кривых $f_2, f_3, f_7, f_8, f_{15}$ подходящими являются области I-V, V, I-IV, I-III, I-V. На всей области определения, указанной в таблице 2.19, каждая из кривых содержится в замыкании своих подходящих областей. Достаточно проанализировать порядок роста данных кривых, а для кривой f_8 — значения f'_t, f'_k, f'_8 и f'_r в точке $(\tau^2, \tau^2) \in Ouv$.

Для кривой f_{16} области I, VI и VII являются подходящими. Кривая лежит именно в них, поскольку $f_t(u) = f_{14}(u) < f_{16}(u) < \tau^2$ при $0 < u < \tau^2$ и $f_l(u) < f_{16}(u) < f_t(u)$ при $u > \tau^2$. Это легко обосновать, рассмотрев $f'_{14} - f'_{16}$ при $u < \tau^2$ и $f'''_{16}(u), f'''_{14}(u)$ при $u = \tau^2 + 0$.

2. Для кривой f_{18} подходящей является область VII. Данная кривая $v = \tau^2/2$ пересекает кривую $f_r : v(u) = \tau\sqrt{u}$ в точке $(\tau^2/4, \tau^2/2)$, т.е. при $u < \tau^2/4$ график $f_{18}(u)$ лежит в VII.
3. На кривой f_{13} совпадают абсциссы особых точек $-r$ и $cusp$. Подходящими областями являются III, IV, V, VII, IX. При $0 < u < \tau^2$ имеем $f_{13}(u) > f_5(u)$, т.е. график лежит в подходящих областях V, VII и IX. Порядок роста функции f_{13} равен $1/2$, т.е. график пересечет кривые f_4, f_k и f_{14} . Найдем точку пересечения u_0 кривых f_{13} и f_k , подставив $v = 8\tau\sqrt{u}$ в (2.6):

$$u + 8\tau\sqrt{u} = 3u + 3\tau\sqrt{u} - \frac{\tau^2}{4}$$

$$2u - 5\tau\sqrt{u} - \frac{\tau^2}{4} = 0, \quad u_0 = \frac{(5 + 3\sqrt{3})^2 \tau^2}{16}.$$

4. В точках пересечения кривых f_{17} и f_k имеем $h_{cusp} = h_l$ и $cusp = rootl = rootr$. Значит, в ней $h_{rootl} = h_l$, и эта точка принадлежит f_t . Точка (τ^2, τ^2) является единственной общей точкой трех кривых f_t, f_{17}, f_k , т.е. график f_{17} лежит ниже графика f_k и не попадает в подходящие области (III и IV) при $u > \tau^2$.

Кривая f_{17} пересекает кривую f_r в точке $(\tau^2/2, \tau^2/\sqrt{2})$, области V и VII являются подходящими, а область VIII нет.

5. Дуга $v < \tau^2$ кривой f_6 находится в областях VI и VIII, которые не являются для нее подходящими: при $v < \tau^2$ имеем $f_r(u) > f_6(u) > u$.

$$f_r(v) = \frac{v^2}{\tau^2} \vee \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau^2} = f_6(v) \Rightarrow (v + \sqrt{v}\tau^2 - 2\tau^4)v^{3/2} \vee 0. \quad (2.7)$$

Аналогично, при $0 < u < \tau^2/2$ график $v = f_{11}(u)$ лежит ниже прямой $v = 0$, а при $\tau^2/2 < u < \tau^2$ график лежит выше прямой $v = \tau^2$, т.е. в не подходящей для f_{11} области V. Из утверждения 2.1.8 следует, что график кривой $a = f_{19}(b)$ лежит вне D .

6. Функции f_{20}, f_{22}, f_{24} определены при сколь угодно близких к нулю значениях q , т.е. при сколь угодно больших v . Эти кривые $s = f_i(q)$ лежат выше кривой $s = f_l(q) = q^2$. Равенство абсциссы h для нуля параметрической кривой и одной из точек типов $-r, +r, +l$ возможно только при $f_l(b) \leq a \leq f_k(b)$, т.к. только в областях I и II параметрическая кривая (1.16) имеет нули, отличные от z_1 . Напомним, точка z_1 на плоскости Ohk всегда лежит правее остальных особых точек.

Для кривой f_{21} данный факт следует из рассмотрения области определения радикала. Самая правая на плоскости Osq точка кривой $s = f_{21}(q)$ лежит на кривой f_t .

Утверждение 2.1.10 доказано.

2.2.6 Доказательство утверждения 2.1.11

1. В координатах (u, v) кривые $f_{24} = f_k, f_{20}$ и f_{23} , выходящие из вершины 2 с координатами (τ^2, τ^2) , заданы неявно. На рисунке 2.1 разделяющее множество изображено в области “средних” по величине значений (u, v) . При бóльших значениях u или v не появляется новых дуг или точек их пересечения, входящих в разделяющее множество. Аналогично, в все малой окрестности вершины 2 отсутствуют дуги множества Θ или точки их пересечения, не изображенные на этом рисунке. Оба факта докажем аналитически.

На кривой f_{20} равны h_{rootr} и h_{+l} , на кривой $f_{23} = h_{rootr}$ и h_{+r} . При этом $h(+r) = h(+l)$ на кривой f_3 при $u \leq \tau^2$. Т.е. f_{20} и f_{23} имеют одну общую точку (τ^2, τ^2) .

Кривая f_{23} может пересечь f_k только в точке (u, v) , для которой $h(+l) = h(cusp)$, т.е. на кривой $f_4 = f_r$ при $u \geq \tau^2$. Значит, f_k лежит выше кривой f_{23} при $u > \tau^2$. Т.к. f_{20} пересекает f_{23} только в вершине 2, то она тоже не пересекает f_k при $u > \tau^2$.

2. Через точку пересечения f_8 и f_4 пройдет кривая f_3 . Т.е. это только точка (τ^2, τ^2) .

Пару кривых f_8 и f_k рассмотрим в координатах (q, s) . Уравнение f_k выведено в лемме 2.6, а уравнение f_8 несложно найти: $s > 0$, и в следующем уравнении требуется выбрать знак $+$

$$s = f_8(q) = \frac{q}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\tau q} \right).$$

Численное решение уравнения $f_8(q) = f_k(q)$ дает корень $q_0 = 1/\tau$ и корень $q_1 \cong 0,57$, отделенный от нуля и q_0 . При этом в точке q_0 имеем $f'_8(q_0 - 0) = 5\sqrt{2}/6 < \sqrt{2} = f'_k(q_0 - 0)$. Значение $q'_0 \cong 0,65$ является ближайшей к q_0 точкой равенства f'_k и f'_8 .

Из теории вычислительных методов следует, что достаточно исследовать достаточно малую окрестность q_0 на наличие общих точек этих кривых. Поскольку производные непрерывны, достаточно показать сохранение знака $f'_k(q) - f'_8(q)$ в некоторой окрестности.

Докажем, что на (q'_0, q_0) нет нулей второй производной, т.е. там $f''_k(q) > f''_8(q)$. Используем оценку:

Вторая производная $f''_k(q)$ имеет асимптотику $(q - q_0)^r$, $-1 < r < 0$, а $f''_8(q)$ определена и конечна в этой точке.

Для всех q из промежутка $0,69 = p < q < q_0$ верна оценка

$$f''_8(q) < -\frac{8p\sqrt{2}}{(1 + 8q_0\sqrt{2})} + \frac{4}{p\sqrt{1 + 8q_0\sqrt{2}}} < \frac{2^{2/3}}{3q_0\sqrt{1 - 2^{1/3}p^{2/3}}} - \frac{2}{p^{4/3}} < f''_k(q).$$

С помощью сеточного разбиения и оценки на третьи производные доказывается отсутствие нуля $f''_k - f''_8$ на промежутке $[q'_0, p]$. Поскольку между нулями непрерывной f' лежит ноль f'' , то на промежутке q_1, q_0 разность $f_k - f_8$ не обращается в ноль и не меняет знака.

Утверждение 2.1.11 доказано.

2.2.7 Доказательство утверждения 2.1.12

1. Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m не пересекаются друг с другом при больших значениях $u^2 + v^2$. Кривые f_7 при $u \rightarrow \tau^2 + 0$ и f_{17} при $u \rightarrow +0$ неограниченно возрастают, приближаясь справа к прямым f_m и $u = 0$ соответственно.

Все кривые, возможно, кроме f_k и $f_{20}, \dots, f_{23}$, монотонно возрастают при больших u с известной скоростью. Кривая f_7 не пересекается с f_{15} при больших u , т.к. $f_7(u) - f_{15}(u) =$

$const_7 - const_{15} + o(1)$, где $const_7 = 2\tau^2 > \tau^2 = const_{15}$. Аналогично в случае кривых f_8 и f_{16} .

Кривая f_2 имеет порядок роста как $u + const\sqrt{u} + \dots$. Начиная с некоторого u , кривая f_2 лежит ниже всех остальных кривых исключая f_l . Тем самым, дополнительных точек пересечения этой кривой с остальными при “больших” $u^2 + v^2$ не возникает.

2. Докажем, что кривая f_{22} лежит между f_7 и f_{15} при больших u . Все три кривые неограниченно возрастают при $q \rightarrow 0$. На кривой f_7 равны абсциссы $h_l = h_{-r}$, на кривой $f_{15} — h(z_{lt} = h_{-r}$, на кривой f_{22} имеем $h_{rootr} = h_{-r}$. При этом точка $rootr$ лежит левее точки z_{lt} и правее точки h_l . Значит, данные кривые не могут пересекаться. Аналогично кривая f_{20} лежит между f_8 и f_{16} при больших u .
3. Кривая f_{23} , в точках (u, v) которой $h_{rootr} = h_{+l}$, лежит на Ouv между f_k и f_t при всех отмеченных на чертеже u . На кривой f_k имеем совпадение особых точек: $rootr = rootl = cusp$. При этом кривая $h(z_{+l}) = h(z_{cusp})$ есть кривая f_r при $u > \tau^2$. Аналогично, на кривой $f_t + l = h_l = rootl$. Поскольку $rootr = rootl$ есть кривая f_k , то кривые f_t и f_{20} не пересекаются при $u > \tau^2$.
4. Кривые f_t, f_r имеют квадратичный порядок роста u^2 , f_k находится между ними, потому все три кривые повторно не пересекутся достаточно далеко с кривыми линейного порядка роста.

Утверждение 2.1.12 доказано.

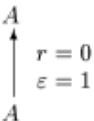
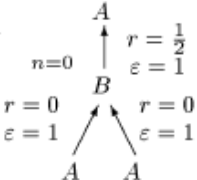
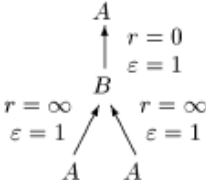
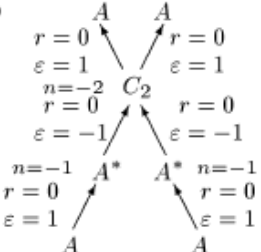
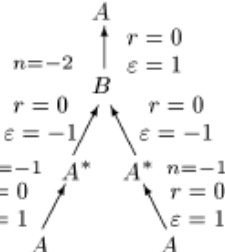
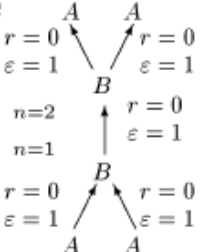
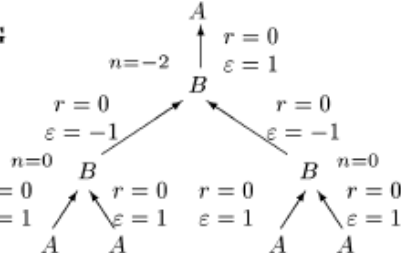
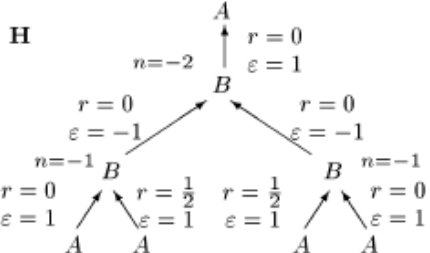
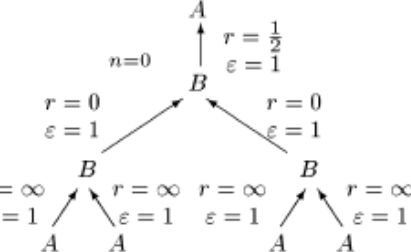
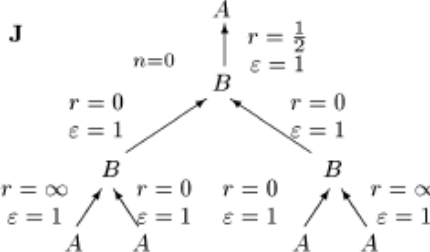
A 	B 	F 
D 	E 	C 
G 	H 	
I 	J 	

Таблица 2.2: Инварианты Фоменко–Цишанга классического случая Ковалевской.

y_1	$A \xrightarrow{r=0} A$	y_7	
y_2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} B \end{array}$		
y_3		y_8	$A \xrightarrow{r=1/2} B \xrightleftharpoons[r=\infty]{r=\infty} A^*$ дважды
		y_9	$A \xrightarrow{r=0} B \bigcirc_{r=\infty}$ дважды
y_4	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A \end{array}$	y_{10}	$\begin{array}{cc} A \xrightarrow{r=\infty} A & A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} A & A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
y_5	$A \xrightarrow{r=0} C_2 \xrightleftharpoons[r=\infty]{r=\infty} B$	y_{11}	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} B \end{array}$ дважды
		y_{12}	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} B \end{array}$
y_6	$A \xrightarrow{r=0} B \bigcirc_{r=\infty}$	y_{13}	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} B \end{array}$ дважды

Таблица 2.3: Круговые молекулы особых точек классического случая Ковалевской (алгебра $e(3)$).

z_1	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$	z_6	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} A \end{array}$
z_2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \\ A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \end{array}$	z_7	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
z_3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow^{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$	z_8	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=0} \\ \nearrow_{r=0} \end{array} B \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
z_4	$A \xrightarrow{r=0} A$	z_9	$A \xrightarrow{r=0} A$
z_5	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=\infty} \\ \nearrow_{r=\infty} \end{array} C_2 \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \\ A \begin{array}{l} \searrow_{r=\infty} \\ \nearrow_{r=\infty} \end{array} C_2 \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$	z_{10}	$A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow^{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array}$
		z_{11}	$A \xrightarrow{r=0} A$

Таблица 2.4: Круговые молекулы особых точек компактного случая Ковалевской (алгебра $so(4)$), новые по сравнению с классическим случаем.

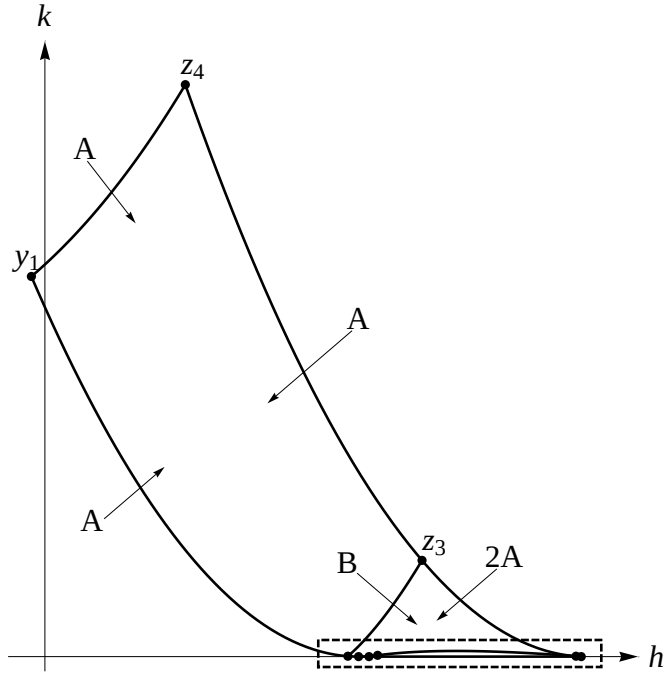


Рис. 2.5: Область I: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_l(b) < a < f_t(b)$

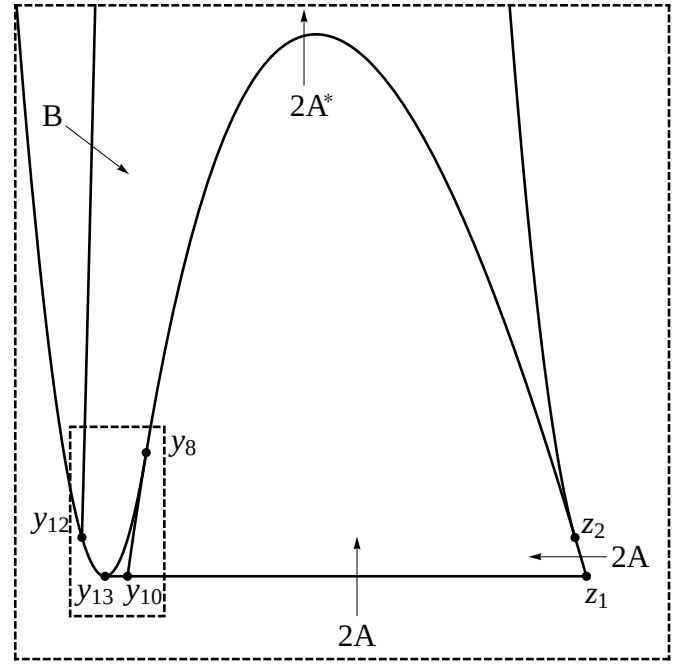


Рис. 2.6: Область I: увеличенный фрагмент рис. 2.5

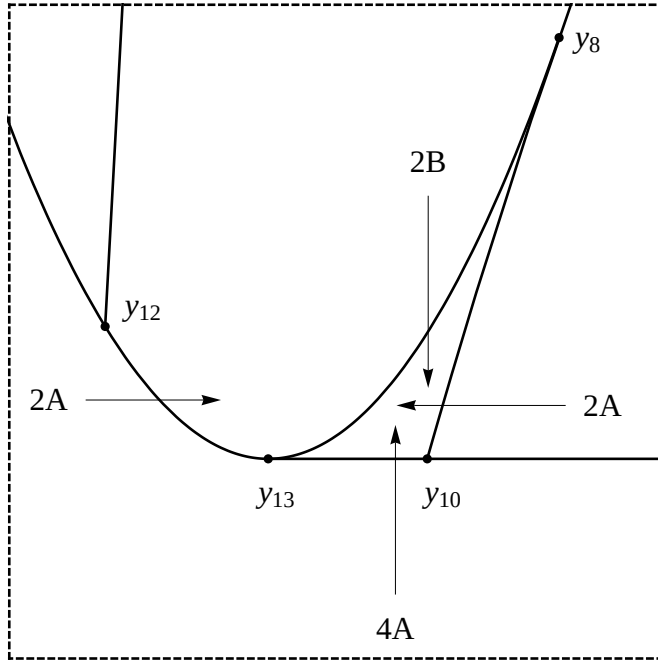


Рис. 2.7: Область I: увеличенный фрагмент рис. 2.6

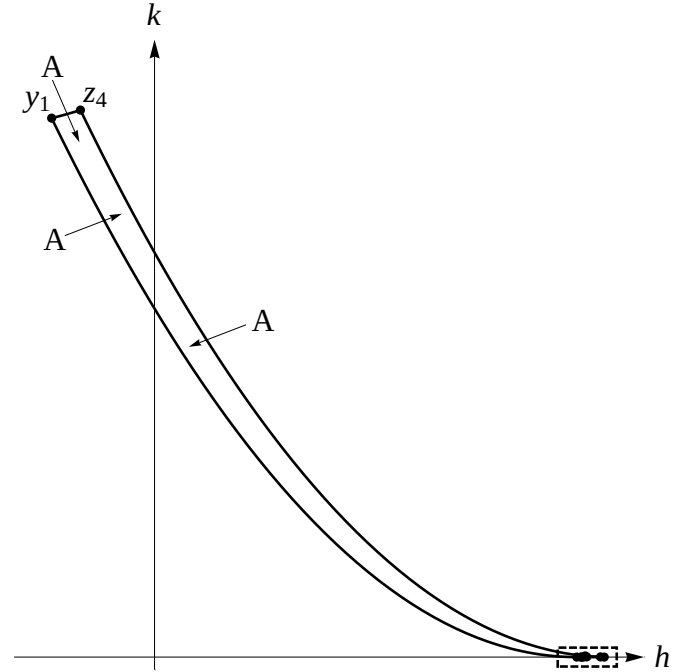


Рис. 2.8: Область II: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_t(b) < a < f_k(b)$

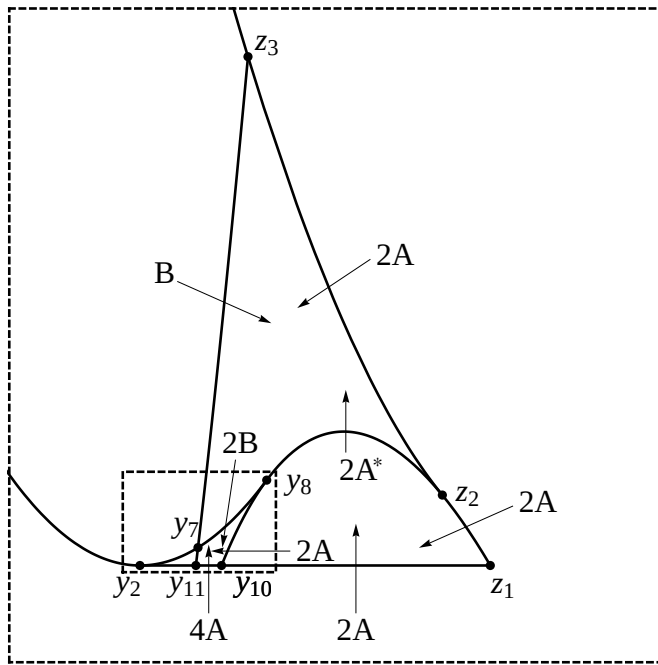


Рис. 2.9: Область II: увеличенный фрагмент рис. 2.8

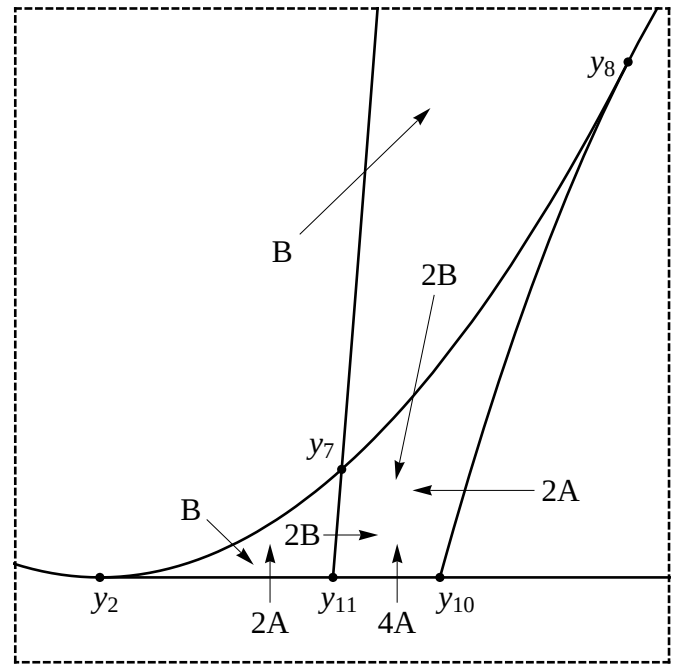


Рис. 2.10: Область II: увеличенный фрагмент рис. 2.9

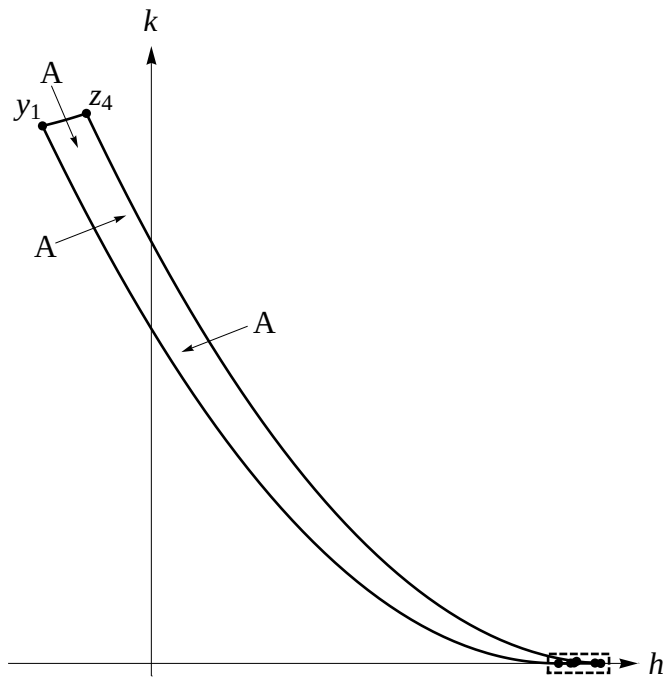


Рис. 2.11: Область III: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_k(b) < a < f_r(b)$

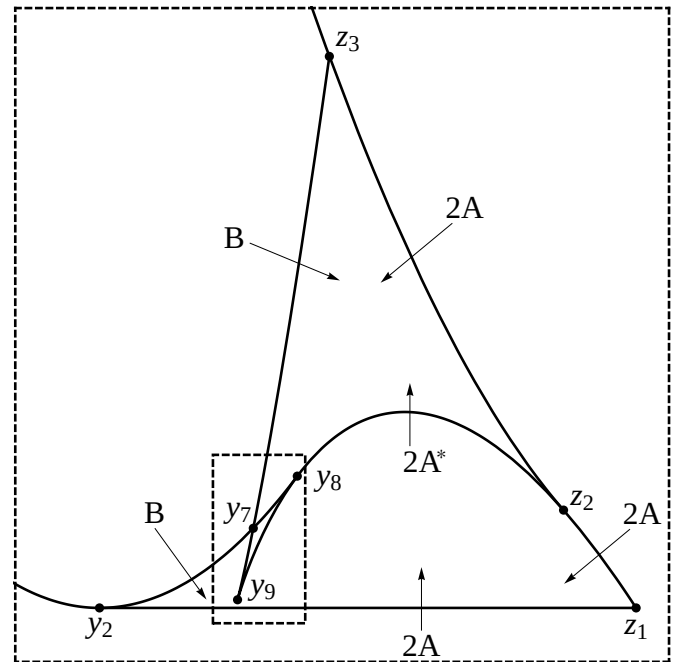


Рис. 2.12: Область III: увеличенный фрагмент рис. 2.11

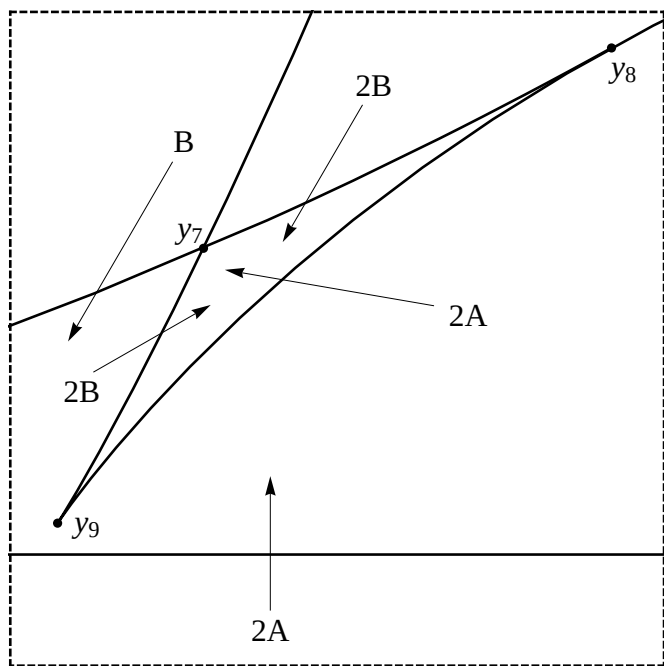


Рис. 2.13: Область III: увеличенный фрагмент рис. 2.12

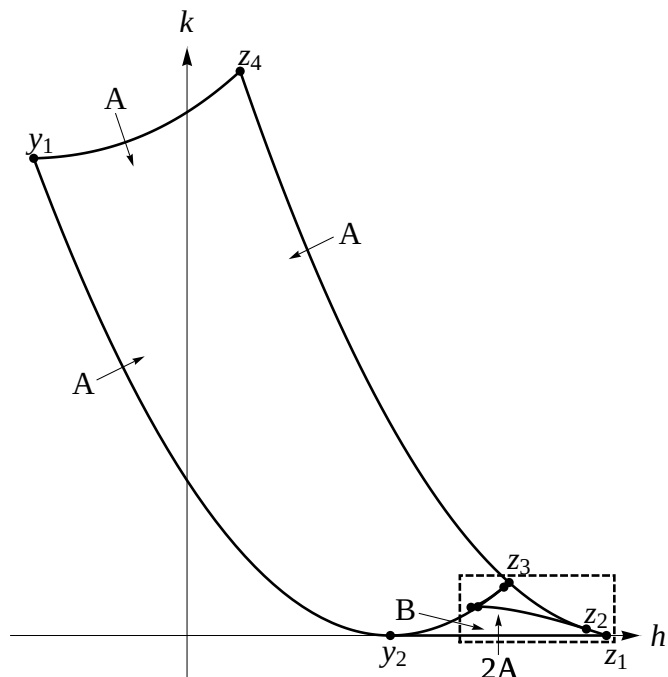


Рис. 2.14: Область IV: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_r(b) < a < f_m(b)$

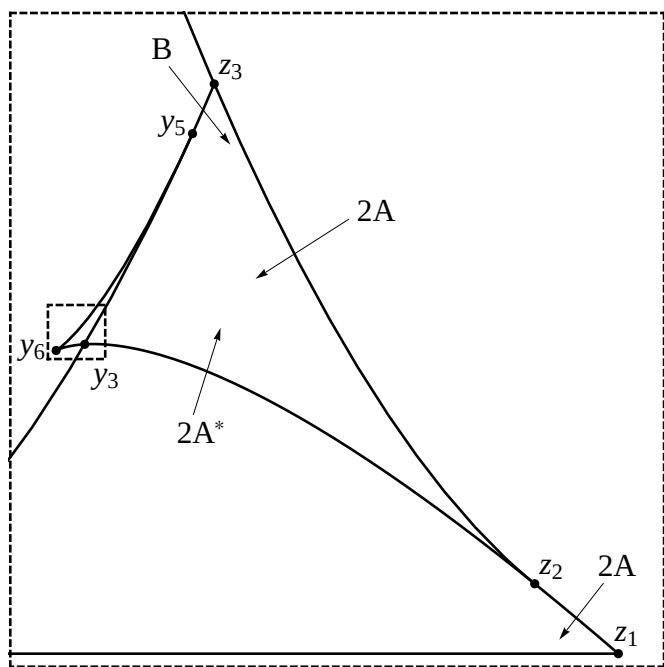


Рис. 2.15: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 2.14

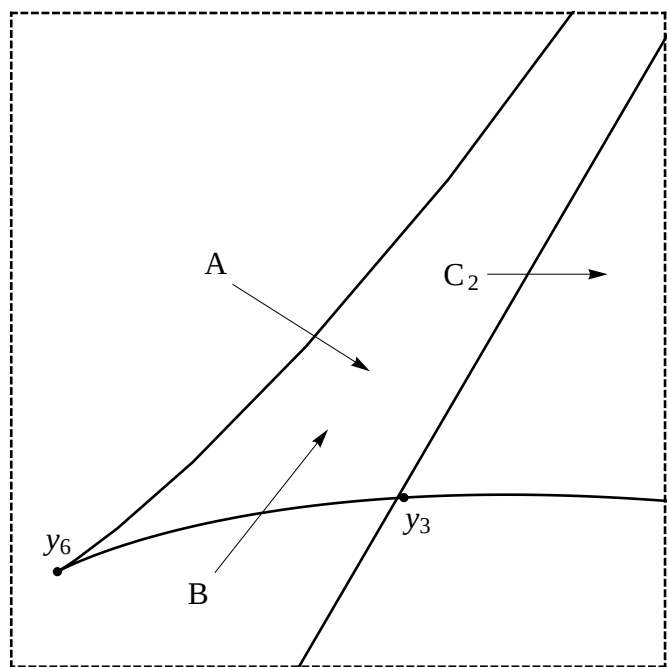


Рис. 2.16: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 2.15

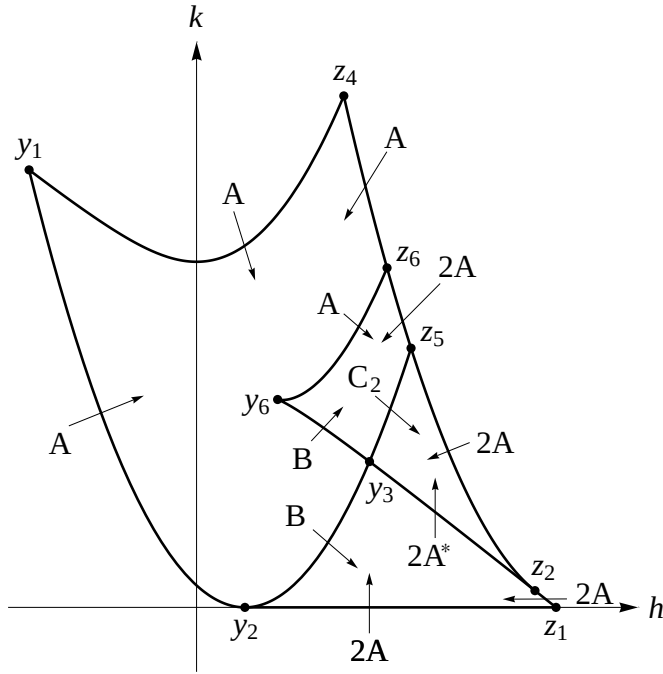


Рис. 2.17: Область V: $f_m(b) < a$

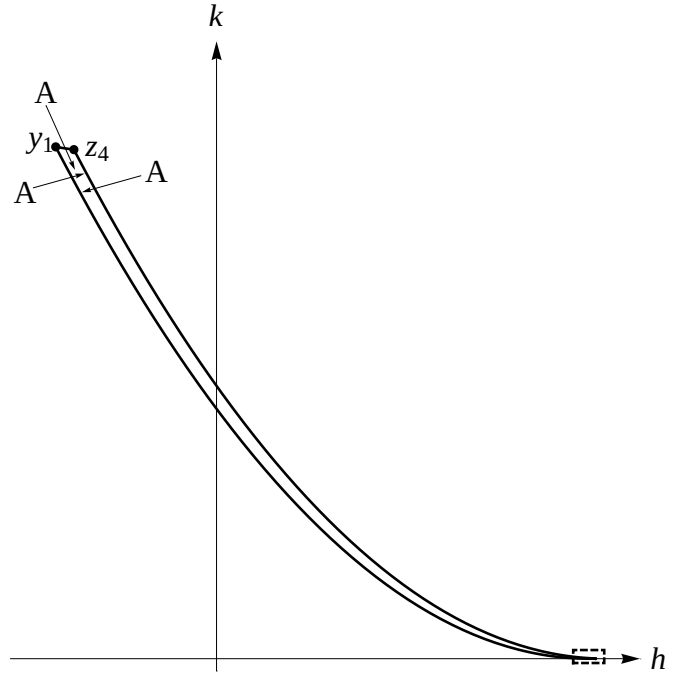


Рис. 2.18: Область VI: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $f_t(b) < a < f_r(b)$

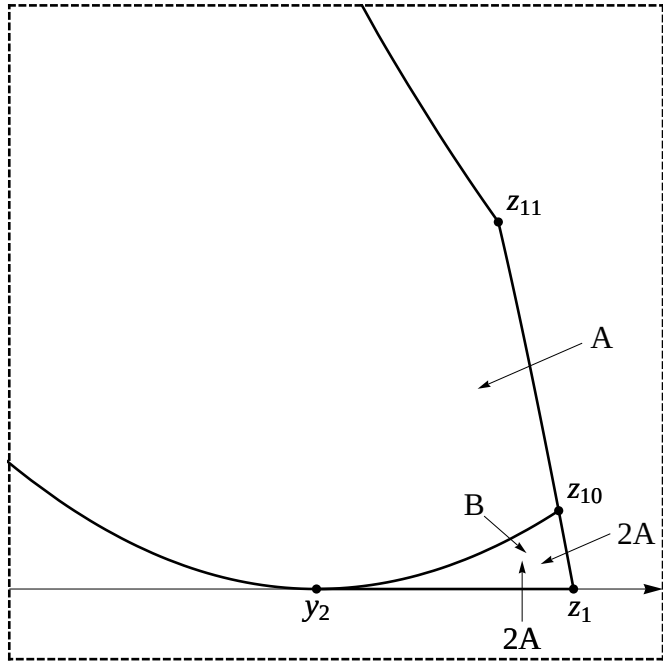


Рис. 2.19: Область VI: увеличенный фрагмент рис. 2.18

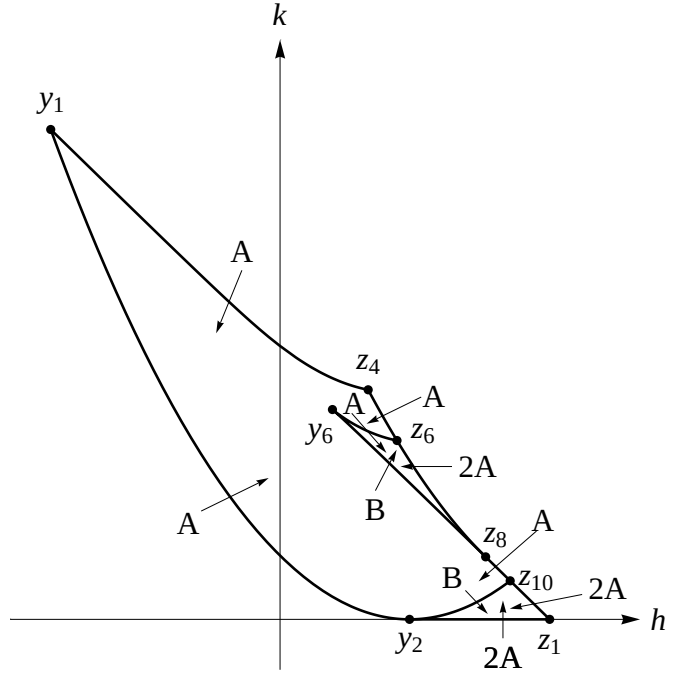


Рис. 2.20: Область VII: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $\max(f_t(b), f_r(b)) < a < f_m(b)$

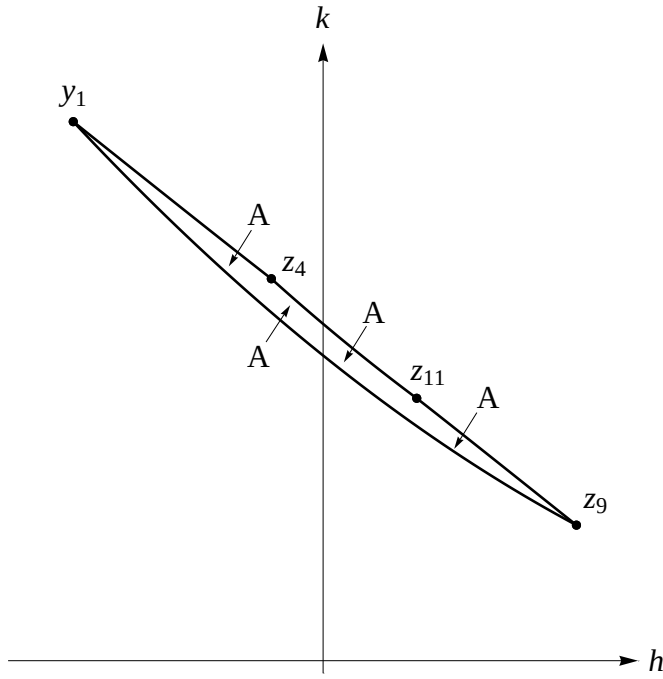


Рис. 2.21: Область VIII: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $f_l(b) < a < \min(f_r(b), f_t(b))$

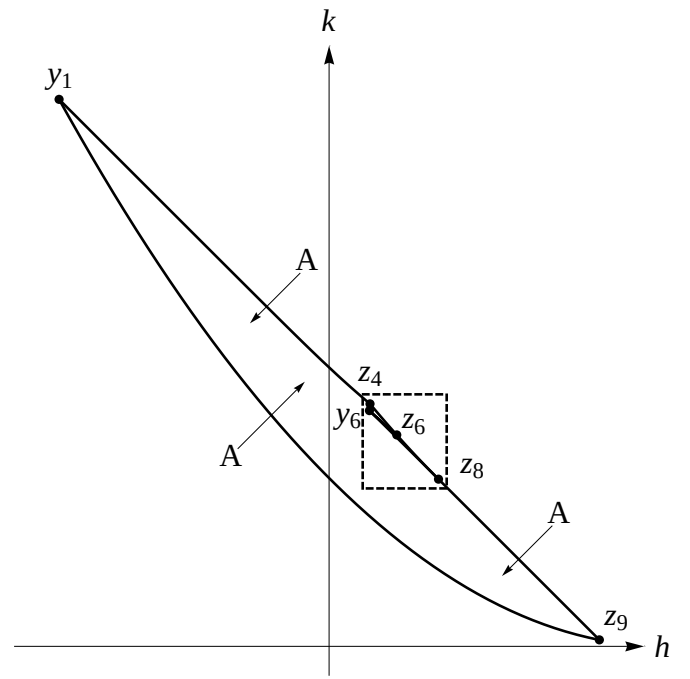


Рис. 2.22: Область IX: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $f_r(b) < a < f_t(b)$

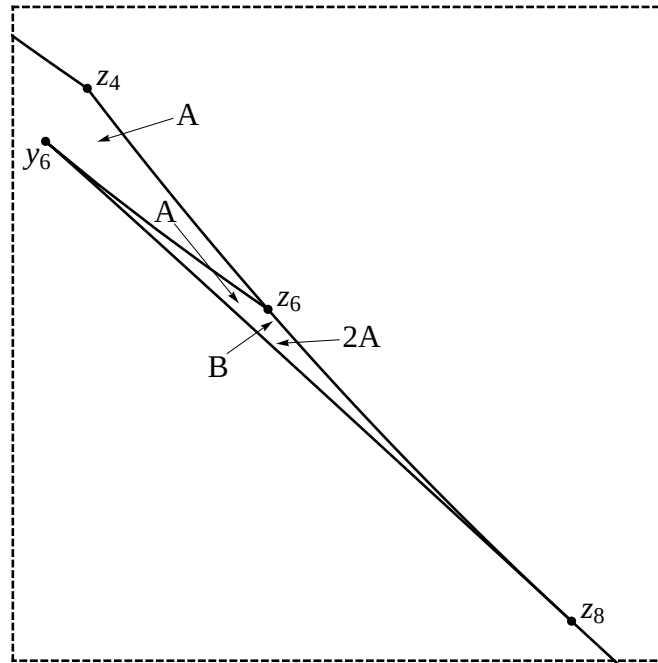


Рис. 2.23: Область IX: увеличенный фрагмент рис. 2.22

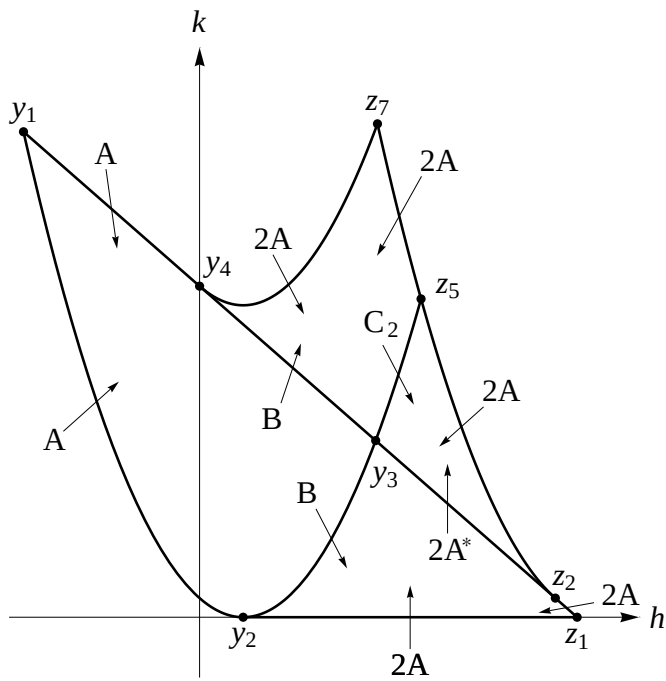


Рис. 2.24: Область X: $b = 0$, $\varkappa^2 c_1^2 < a$

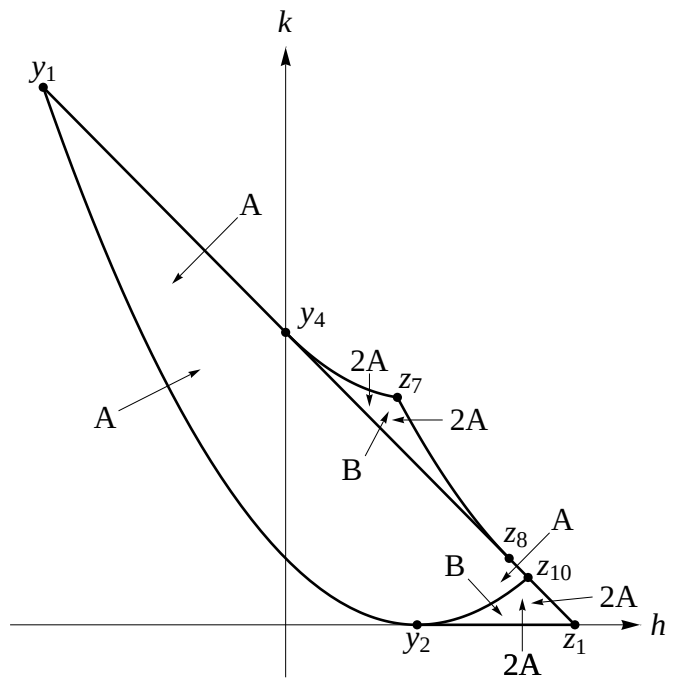


Рис. 2.25: Область XI: $b = 0$, $\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$

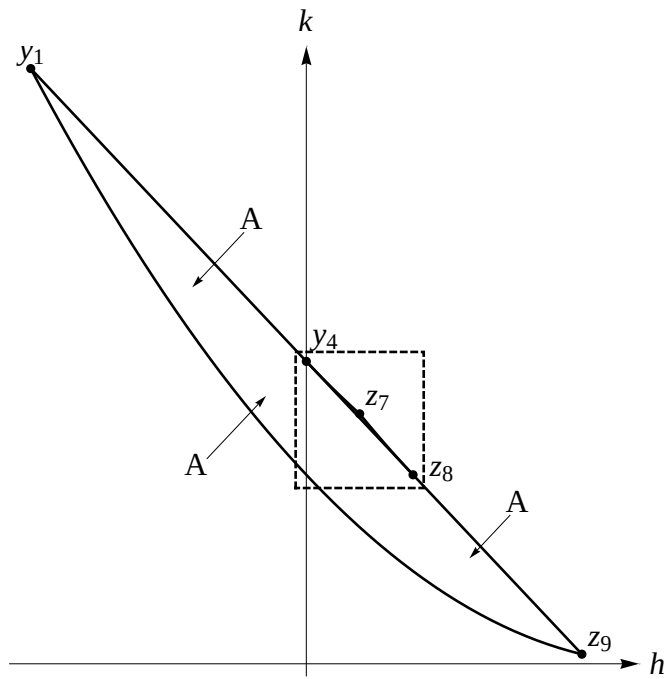


Рис. 2.26: Область XII: $b = 0$, $0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$

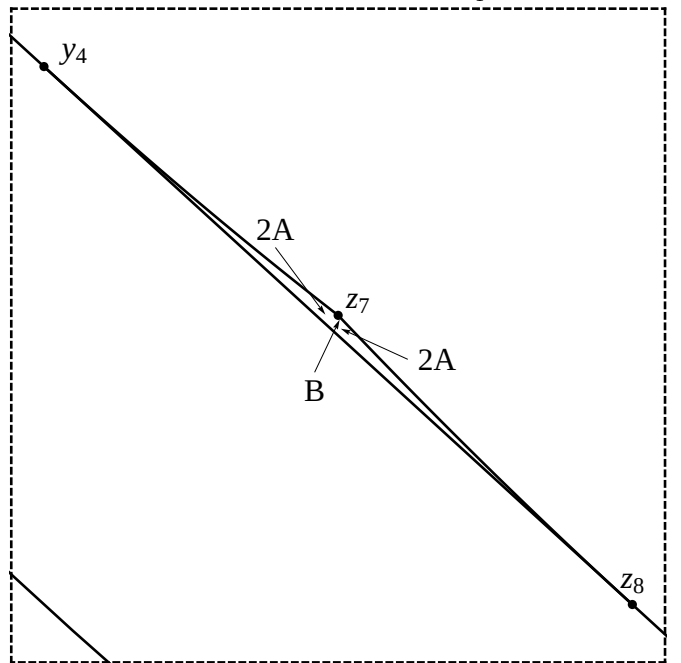


Рис. 2.27: Область XII: увеличенный фрагмент рис. 2.26

1	7	11	13	31
$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=-1 \\ A \end{array} \times 2$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=-1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\infty \\ \varepsilon=-1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\infty \\ \varepsilon=-1 \\ A \end{array} \times 2$
2	9	12	10	15
$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=1 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=-1 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=0 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\infty \\ \varepsilon=-1 \\ B \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$
16	22	27	30	32
$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\frac{1}{2} \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=-1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array} \times 2$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array} \times 2$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\infty \\ \varepsilon=-1 \\ B \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$
3	8	14	6	
$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=2 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=0 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \quad n=1 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A^* \quad n=-1 \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ A \end{array} \times 2$	
18	19	4	5	17
$\begin{array}{c} A \\ \\ r=\infty \\ \varepsilon=-1 \\ B \\ \diagdown \quad \diagup \\ A^* \quad A^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \\ B \quad n=-2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A^* \quad A^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ C_2 \quad n=-2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A^* \quad A^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ C_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A^* \quad A^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ C_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A^* \quad A^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad A \end{array}$

Таблица 2.5: Список инвариантов Фоменко–Цишанга компактного случая Ковалевской. Часть 1.

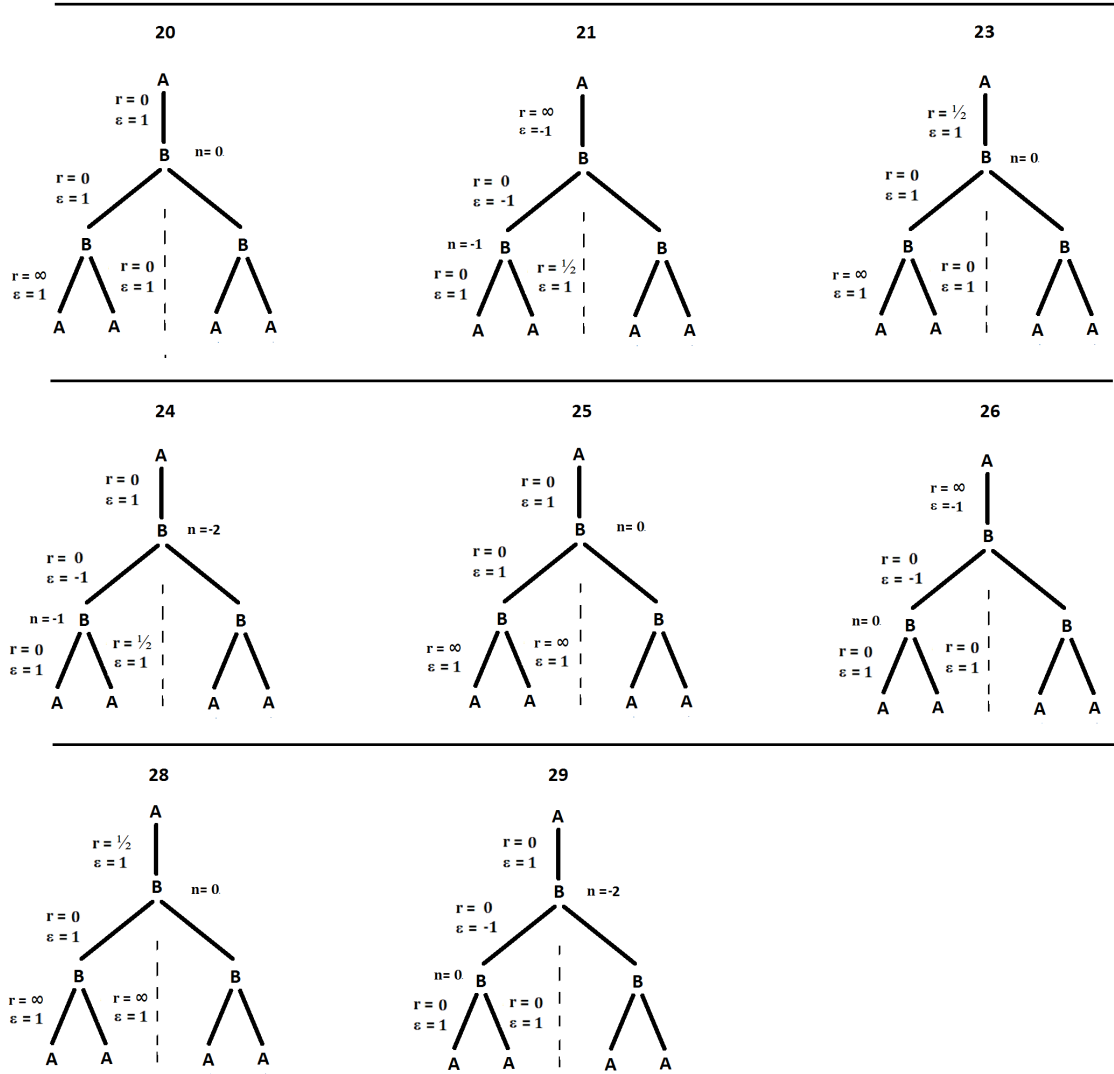


Таблица 2.6: Список инвариантов Фоменко–Цишанга компактного случая Ковалевской. Часть 2.

СИМВОЛ	дуга бифуркационной диаграммы	атом	семейство торов
ξ_1	$(z_4, z_3), (z_4, z_5), (z_4, z_{11}), (z_4, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(1)
ξ_2	$(z_3, z_2), (z_5, z_2)$	2 A	(3)
ξ_3	$(z_2, z_1), (z_{10}, z_1)$	2 A	(2)
ξ_4	$(z_6, z_5), (z_6, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(4)
ξ_5	$(z_8, z_9), (z_8, z_{10}), (z_{11}, z_{10}), (z_{11}, z_9)$	A	(1)

Таблица 2.7: Новые семейства дуг бифуркационных диаграмм компактного случая Ковалевской.

Таблица 2.8: Список молекул с матрицами склейки и именованными атомами для компактного случая Ковалевской. Часть 1.

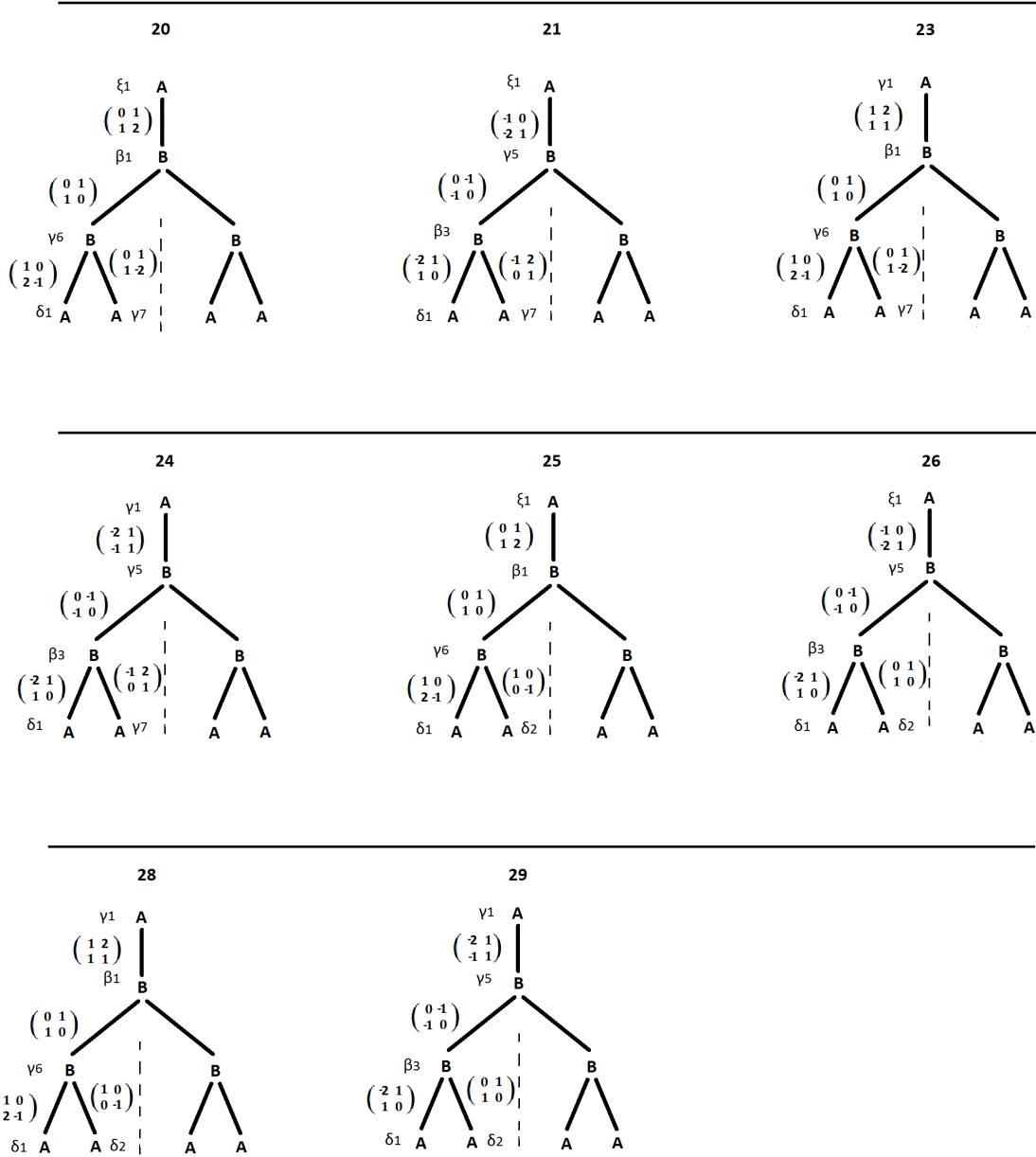


Таблица 2.9: Список молекул с матрицами склейки и именованными атомами для компактного случая Ковалевской. Часть 2.

класс L_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
молекула	1, 7, 11	2, 9	3	4	5	6	8	10	12, 15	13, 31	14	16	17		
класс L_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
молекула	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	32

Таблица 2.10: Классификация слоений Лиувилля на связных компонентах изоэнергетических поверхностей $Q_{a,b,h}^3$ для компактного случая Ковалевской.

X.1	y_1	1	y_4	2	y_2	3	y_3	4	z_7	5	z_5	6	z_2	7	z_1
X.2	y_1	1	y_4	2	y_2	3	z_7	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
XI.1	y_1	1	y_4	2	z_7	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1		
XI.2	y_1	1	y_4	2	z_7	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1		
XII	y_1	1	y_4	2	z_7	9	z_8	11	z_9						

Таблица 2.11: Промежутки X-XII: порядок 3-камер и особых точек.

IX.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	z_8	11	z_9				
IX.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	z_8	11	z_9				
VIII	y_1	1	z_4	13	z_{11}	11	z_9								
VII.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1
VII.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1
VII.3	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.4	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.5	y_1	1	y_6	2	z_4	12	y_2	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.6	y_1	1	z_4	13	y_6	12	y_2	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.7	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VI.1	y_1	1	z_4	13	z_{11}	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1				
VI.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	z_{11}	10	z_{10}	7	z_1				

Таблица 2.12: Области VI-IX: порядок 3-камер и особых точек.

V.3	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.4	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.5	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.6	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.7	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.9	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.12	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	z_4	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	y_2	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	y_2	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.8	y_1	1	y_6	2	y_2	3	z_4	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.10	y_1	1	y_6	2	y_2	3	z_4	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.11	y_1	1	y_6	2	y_2	3	y_3	4	z_4	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1

Таблица 2.13: Область V: порядок 3-камер и особых точек.

IV.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.2	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.3	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.4	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	z_4	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.5	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	y_5	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 2.14: Область IV: порядок 3-камер и особых точек.

III.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_9	20	y_7	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
III.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_9	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.3	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_9	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.4	y_1	1	y_2	16	y_9	23	z_4	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.5	y_1	1	y_2	16	y_9	23	y_7	24	z_4	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.6	y_1	1	y_2	16	y_9	23	y_7	24	y_8	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 2.15: Область III: порядок 3-камер и особых точек.

II.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8
II.3	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8
II.4	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.5	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.6	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	z_4	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.7	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	z_4	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.8	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	y_7	24	z_4	21	y_8	18	z_3
II.9	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	y_7	24	y_8	19	z_4	18	z_3
II.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	z_3	22	y_8
II.10	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.11	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.12	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	z_4	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.13	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	z_4	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.14	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	y_{10}	24	z_4	21	y_8	18	z_3
II.15	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	y_{10}	24	y_8	19	z_4	18	z_3

Таблица 2.16: Область II: порядок 3-камер и особых точек. Нетривиальная часть.

I.1	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	z_3	31	y_{13}	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.2	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.3	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.4	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.9	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	z_3	31	y_{13}	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.10	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.11	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.5	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.6	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	z_4	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.7	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	y_{10}	24	z_4	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.8	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	y_{10}	24	y_8	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 2.17: Область I: порядок 3-камер и особых точек.

номер	название	вид в (u, v)	вид в (q, s)
f_1	f_l	$v = u$	$s(q) = q^2$
f_4	f_r	$v = \frac{u^2}{\tau^2}$	$s(q) = \frac{q^{4/3}}{\tau^{2/3}}$
f_9	f_m	$u = \tau^2$	$s(q) = \frac{q}{\tau}$
f_{14}	f_t	$v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$q(s) = \tau s \sqrt{-1 + \frac{2}{\tau \sqrt{s}}}$
f_{24}	f_k	$\oslash$	$s(q) = -\frac{1}{\tau^2}(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) + \frac{2}{\tau^2}(1 - \tau^{2/3}q^{2/3})^{\frac{3}{2}}$

Таблица 2.18: Вид кривых в координатах (q, s) .

№	формула	(x_1, x_2)	пары особых точек
0	$u(v) = 0$	$(0, \infty)$	
1	$v(u) = u$	$(0, \infty)$	$(-l, +l)_0, (-r, +r)_0, (l, lt, rt, z_1)_0$
2	$v(u) = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0, \infty)$	$(+l, -r)_1$
3	$v(u) = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0, \tau^2)$	$(+l, +r)_1$
4	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	(τ^2, ∞)	$(+l, lt)_0, (cusp, +l)_0, (cusp, lt)_0$
5	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	$(0, \tau^2)$	$(+r, rt)_0, (cusp, +r)_0, (cusp, rt)_0$
7	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$	(τ^2, ∞)	$(lt, -r)_1$
8	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}$	(τ^2, ∞)	$(+r, lt)_1$
9	$u(v) = \tau^2$	$\tau^2, \infty)$	$(lt, +r)_1, (+r, int)_0, (lt, int)_1$
10	$v(u) = \tau^2$	$(0, \tau^2)$	$(+l, rt)_1, (+l, int)_0, (int, rt)_1$
13	$v(u) = 8\tau\sqrt{u}$	$(0, 64\tau^2)$	$(cusp, -r)_1$
14	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$(0, \tau^2)$	$(l, +l)_1$
14	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	(τ^2, ∞)	$(l, +l)_1, (+l, rootl)_1, (l, rootl)_1$
15	$v(u) = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0, \infty)$	$(l, -r)_1$
16	$v(u) = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0, \infty)$	$(l, +r)_1$
17	$v(u) = \frac{(2u + \tau^2)^3}{27\tau^2 u}$	$(0, \infty)$	$(cusp, l)_1$
18	$v(u) = \frac{\tau^2}{2}$	$\left(0, \frac{\tau^2}{2}\right)$	$(l, rt)_1$

Таблица 2.19: Разделяющие кривые для особых точек первой серии.

№	формула	(x_1, x_2)	пары особых точек
6	$u(v) = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau}$	$(0, \tau^2)$	$(rt, +l)_1$
11	$v(u) = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2} \right)$	$\left(\frac{\tau^2}{2}, \tau^2 \right)$	$(lt, rt)_1$
12	$v(u) = \frac{u^2}{64\tau^2}$	$(64\tau^2, \infty)$	$(-l, cusp)_1$
19	$\mathbf{a}(\mathbf{b}) = 3b^{2/3}c_1^{2/3}\varkappa - \varkappa^2c_1^2$	$\emptyset$	$(cusp, int)$

Таблица 2.20: Кривые с конечным числом точек разделяющего множества Θ .

грань	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
точка	y_1	y_2	y_3	z_5	z_2	z_1	y_3	y_2	z_8	z_{10}	z_8	y_2	z_9	y_6
выше	1	3	5	6	7	$\emptyset$	4	8	10	7	11	10	$\emptyset$	2
ниже	$\emptyset$	2	8	5	6	7	3	9	8	10	9	11	11	1
грань	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}
точка	z_4	z_6	z_4	y_6	z_{11}	y_2	z_6	y_2	y_6	z_{11}	y_3	z_6	y_2	z_4
выше	12	9	13	12	11	14	8	15	14	10	17	5	16	15
ниже	2	12	1	13	13	12	14	13	15	15	14	17	1	16
грань	p_{29}	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	p_{40}	p_{41}	p_{42}
точка	y_6	z_4	z_4	y_5	z_3	y_5	z_4	y_9	y_7	z_3	y_8	y_8	y_9	z_4
выше	3	17	14	18	6	19	18	20	21	22	6	18	23	20
ниже	16	4	3	17	18	4	19	15	20	21	22	21	16	23
грань	p_{43}	p_{44}	p_{45}	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	p_{50}	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}	p_{56}
точка	y_7	z_4	y_8	y_{11}	y_7	z_3	y_{10}	y_{10}	y_{10}	y_{11}	z_4	y_{10}	y_7	z_4
выше	24	21	19	25	26	27	22	21	20	28	25	23	29	26
ниже	23	24	24	15	25	26	27	26	25	16	28	28	28	29
грань	p_{57}	p_{58}	p_{59}	p_{60}	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}	p_{66}				
точка	y_{10}	y_{12}	z_3	y_{13}	y_{13}	y_{12}	z_4	y_{13}	S^1	S^2				
выше	24	30	31	27	26	32	30	29	$\emptyset$	$\emptyset$				
ниже	29	13	30	31	30	1	32	32	13	31				

Таблица 2.21: Перестройки меченых молекул для компактного случая Ковалевской.

Глава 3

Лиувиллев анализ аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(3, 1)$

3.1 Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской на $so(3, 1)$

Мы начнем с построения бифуркационных диаграмм для случая Ковалевской на $so(3, 1)$. Это можно сделать аналогично работе [51], где рассматривался случай $so(4)$. Разберем отдельно случаи $b = 0$ и $b \neq 0$.

3.1.1 Случай нулевой постоянной площадей ($b = 0$)

Для $\varkappa \neq 0$ бифуркационная диаграмма Σ интегрируемого случая Ковалевской (при фиксированном $f_1 = a$) содержится в объединении бифуркационных кривых на плоскости Ohk , заданных теми же формулами, что и в работе [51]. Напомним, что мы называем две бифуркационные диаграммы (одной и той же системы, но при разных значениях параметров системы или функций Казимира) *структурно различными*, если они не изоморфны как плоские графы, ребра которых оснащены символами 3-атомов, а вершины — инвариантами 4-особенностей отображения момента в своем прообразе (класс ее послойной гомеоморфности для невырожденной особенности или круговая молекула с r -метками для вырожденной особенности).

Теорема 3.1. *Бифуркационная диаграмма интегрируемого случая Ковалевской на $so(3, 1)$ (при $\varkappa < 0$) для нулевого значения интеграла площадей f_2 (т.е. для $b = 0$) определяется значением a функции Казимира f_1 . При этом ось Oa разбивается на шесть интервалов XII–XVII. Диаграммы для каждой из них показаны на рис. 3.1. Здесь $4a_0 := \varkappa^2 c_1^2$.*

$$Oa : \quad -\infty, \text{ XII}, -4a_0, \text{ XIII}, -a_0, \text{ XIV}, 0, \text{ XV}, a_0, \text{ XVI}, 4a_0, \text{ XVII}, +\infty.$$

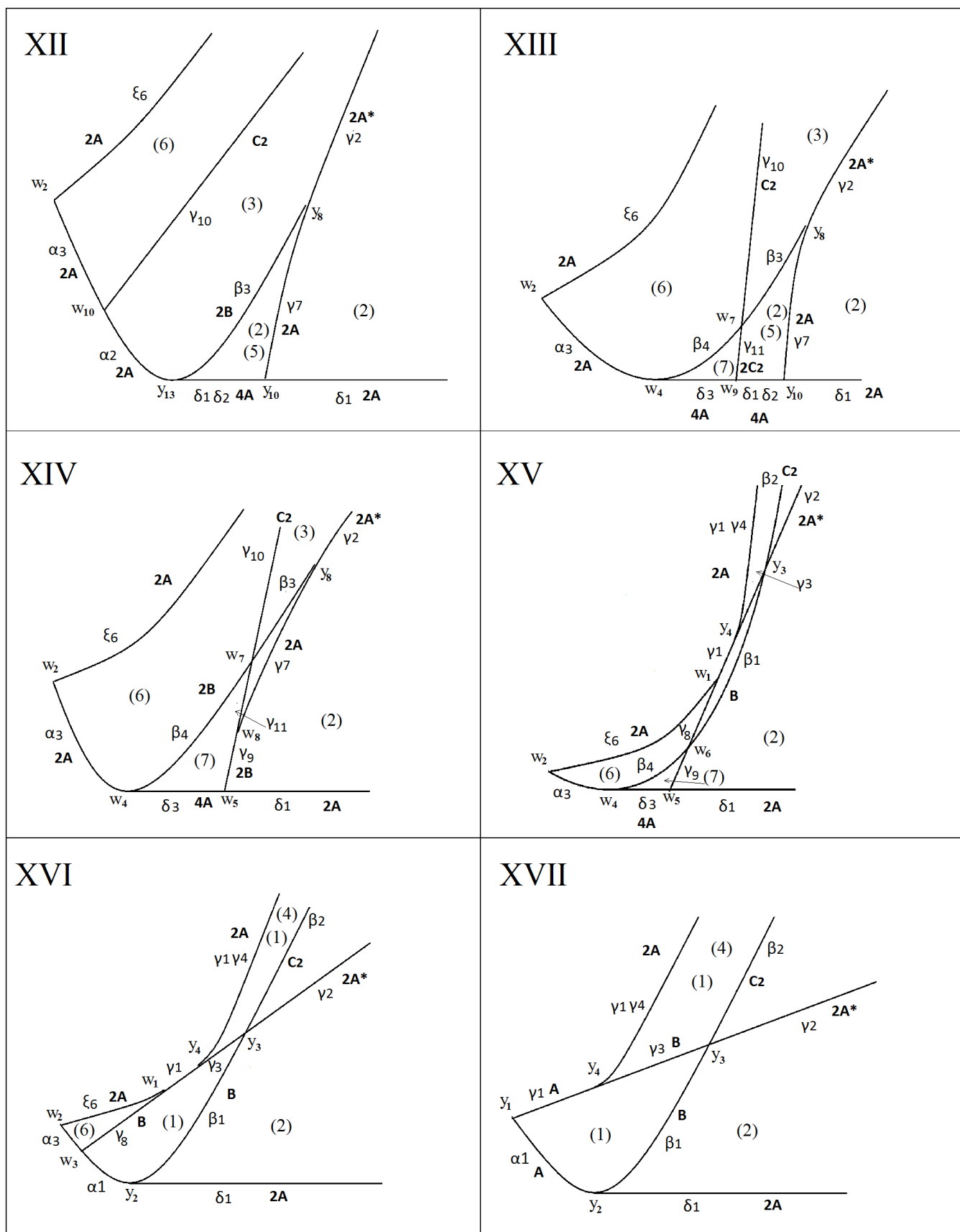


Рис. 3.1: Бифуркационные диаграммы системы Ковалевской на $so(3,1)$ при $b=0$

Обозначим и пронумеруем дуги диаграмм Σ так же, как в главах 1-2 и работах [35] и [118] (для систем Ковалевской на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$ соответственно). Буква в данном обозначении определяется бифуркационной кривой ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответствуют кривым классического случая Ковалевской, а ξ — “новой” параболе 1.18, которая при $\varkappa = 0$ отсутствует), а индекс может отличаться. Вся необходимая информация о “новых” дугах (т.е. дугах, не имеющих аналогов в случае Ковалевской на $e(3)$) содержится в табл. 3.1. Остальные дуги, как и ранее, называем “старыми” дугами. Для каждой дуги также укажем устройство прообраза в близких регулярных точках: сколько торов и из каких семейств находится в нем при больших и меньших значениях k интеграла (1.14).

новая дуга τ	3-атом	$k > k(\tau)$	$k < k(\tau)$	концы дуги τ	2-области	$b = 0$
ξ_6	$2A$	$2T^2$	$\emptyset$	$w_2; \{w_1, \infty\}$	V-XI	XII-XVI
α_3	$2A$	$\emptyset$	$2T^2$	$w_2; \{w_3, w_4, w_{10}\}$	V-XI	XII-XVI
β_4	$2B$	$4T^2$	$2T^2$	$w_4; \{w_6, w_7\}$	IX-XI	XIII-XV
δ_3	$4A$	$\emptyset$	$4T^2$	$w_4; \{w_5, w_9\}$	IX-XI	XIII-XV
γ_8	B	T^2	$2T^2$	$w_1; \{w_3, w_6\}$	V-XI	XV-XVI
γ_9	$2B$	$4T$	$2T$	$w_5; \{w_6, w_8\}$	IX-XI	XIV-XV
γ_{10}	C_2	$2T$	$2T$	$\{w_{10}, w_7\}; \infty$	-	XIII-XIV
γ_{11}	$2C_2$	$4T$	$4T$	$w_8; w_7$	-	XIII-XIV

Таблица 3.1: Новые дуги диаграмм $\Sigma^{a,b}$ для системы Ковалевской при $\varkappa < 0$

Прообраз множества особых точек $\Sigma^{a,b}$ содержит в себе все критические точки ранга 0 отображения $\mathfrak{F}$ и все вырожденные S^1 -орбиты, состоящие из точек ранга 1.

Замечание 29. Все критические точки ранга 1 кроме критических точек в прообразе точек w_1, w_4, w_8 невырождены, аналогично утверждениям 6-8 из работы [51] (доказательство абсолютно аналогично, т.к. формулы семейств критических точек и собственных требуемых значений линеаризаций гамильтонова поля записываются единообразно для $\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$).

Для особых точек $\Sigma^{a,b}$ в случае $\varkappa < 0$ используются обозначения y_i из [51] для “старых” точек (т.е. имеющих аналог при $\varkappa = 0$) и w_i для “новых” особых точек (такого аналога не имеющих). Информация о “новых” особых точках собрана в таблице 3.2. В этой таблице мы также укажем наименьшее значение ранга отображения момента в прообразе точки, количество орбит наименьшего ранга в прообразе и круговую молекулу этой особой точки. Затем добавим в таблицу 3.2 обозначения для тех же точек из работы [53], классов из [51] и информацию о том, в каких областях пространства орбит Oab при $b \neq 0$ и промежутках оси Oa лежат точки (a, b) , в бифуркационной диаграмме $\Sigma^{a,b}$ орбиты $M_{a,b}^4$ которой данная точка встречается.

Невырожденность критических точек ранга 0 проверяется аналогично работе [51] (утверждению 1.1.3 отсюда).

Утверждение 3.1.1. Все критические точки ранга 0, лежащие в орбитах $M_{a,0}^4$ для $a \notin \{\pm \varkappa^2 c_1^2, \pm \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}, 0\}$, $\varkappa < 0$, невырождены. Особые точки $w_2, w_3, w_5, w_6, w_7, w_9, w_{10}$ являются их образами в $\Sigma_{a,0}$ при отображении момента $\mathfrak{F}$. Невырожденные особенности ранга 0 перечислены в табл. 3.2 с их представлением в виде почти прямого произведения 2-атомов (см. [4]). Мы также укажем области в пространстве орбит и интервалы оси Oa , для которых данная особая точка w_i принадлежит $\Sigma_{a,0}$.

имя	[53]	[51]	rk	$\#$	круг. молекула	$b \neq 0$	Oa
w_1	γ_{ij}	rt	1	1	эллипт. вилка	V-XI	XV-XVI
w_2	δ_4	h_{int}	0	2	$2 A \times A$	V-XI	XI-XVI
w_3	δ_{12}	$+l$	0	1	$A \times B$	V-VIII	XVI
w_4	γ_{ij}	h_l	1	2	2 эллипт. вилка	IX-XI	XIII-XV
w_5	δ_{36}	r_3	0	2	$2 A \times B$	IX-XI	XIV-XV
w_6	δ_{13}	$+l$	0	1	$B \times B$	IX-XI	XV
w_7	-	$+l$	0	2	$B \times C_2$	-	XIII-XIV
w_8	-	z_{cusp}	1	2	2 гиперб. вилка	-	XIV
w_9	-	$r_{3,l}$	0	4	$2 A \times C_2$	-	XIII
w_{10}	-	$+l$	0	2	$A \times C_2$	-	XII

Таблица 3.2: Новые особые точки бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}$ для системы Ковалевской в случае $\varkappa < 0$

Замечание 30. Круговые молекулы особых точек w_1, w_4, w_8 совпадают с круговыми молекулами известных вырожденных особенностей ранга 1: эллиптической вилки (w_1, w_4) и гиперболической вилки (w_8), см. [35].

Доказательство. 1) Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{a,0}$, т.е. образ критического множества на орбите $M_{a,0}^4$, может быть построена исходя из диаграмм Σ_{a_n,b_n} для орбит M_{a_n,b_n}^4 , построенных в [53], путем предельного перехода $(a_n, b_n) \rightarrow (a, 0)$. Это следует из компактности следующего множества A при фиксированных $\varepsilon < 0$ и h_0 :

$$A = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \mid H = h < h_0, f_1 = a < -\varepsilon < 0\}.$$

В частности, если последовательность особых точек $x_n \in \Sigma_{a_n,b_n}$ имеет конечный предел x , когда $(a_n, b_n) \rightarrow (a, 0)$, то $x \in \Sigma_{a,0}$.

Отметим, что большинство формул из [51], задающих координаты особых точек бифуркационной диаграммы и компоненты линеаризации полей $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } F$ в особых точках остаются справедливыми и для случая $\varkappa < 0$.

2) Для каждого значения a функции f_1 легко определить количество и тип особых точек ранга 0, основываясь на утверждениях 15-17 из [51]. При этом была проверена их невырожденность и определены типы: центр-центр, центр-седло и седло-седло.

3) Поскольку критическое множество отображения момента замкнуто, и каждое изоэнергетическое неособое многообразие $Q_{a,b,h}^3$ компактно, то критические точки ранга 1 в прообразе любой неособой точки бифуркационной диаграммы Σ образуют одну или несколько окружностей.

Количество критических окружностей в прообразе точки дуги бифуркационной диаграммы и количество торов в камерах образа отображения момента на плоскости Ohk однозначно определяются, опираясь на количество и типы особых точек ранга 0 в прообразах особых точек w_i диаграмм $\Sigma_{a,0}$.

4) Остается только вопрос о типе бифуркации X в прообразе дуги γ_{10} . Поскольку особенность w_{10} имеет тип центр-седло с двумя критическими точками ранга 0, а особый слой атома X связан, либо $X = C_2$, либо $X = D_2$.

Напомним, что системе Ковалевской при каждом $\varkappa \in \mathbb{R}$ имеются симметрии σ_2, σ_3 , сохраняющие f_1, f_2, H, K , и симметрия σ_1 , меняющая знаки координат J_1, J_2, J_3 и не меняющая x_1, x_2, x_3 . Последняя сохраняет интегралы f_1, H, K и меняет знак f_2 . Тем самым, на $M_{a,0}^4$ она задает послойный гомеоморфизм, сохраняющий, в частности, структуру 3-атомов и невырожденных особенностей ранга 0.

Симметрия σ_1 меняет местами критические точки типа центр-центр в прообразе особенности w_2 . Их координаты, напомним, имеют вид $(J_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$ как точки ранга 0 серии 2 из утверждения 1.3.4 И.К.Козлова. Из непрерывности следует, что она меняет местами 3-атомы A на дуге α_3 (инцидентной вершине w_2) и, значит, положительные кольца искомого атома X . Аналогично, она обязана поменять местами критические точки типа центр-седло в прообразе точки w_{10} (принадлежащие той же серии 2). Такой симметрией атом D_2 , в отличие от C_2 , не обладает. $\square$

Замечание 31. Следовательно, разложение седловой особенности $B \times C_2$ на две особенности $B \times B$, аналогичное описанному в [4] и [87], реализуется в системе Ковалевской на $so(3, 1)$.

3.1.2 Связи с системой Ковалевской–Соколова на $e(3)$

Если $b \neq 0$, то случай Ковалевской на $so(3, 1)$ можно отождествить со случаем Ковалевской–Соколова, бифуркационные диаграммы которого построены в работе [53] М.П.Харламова, П.Е.Рябова и А.Ю.Савушкина. В ней, напомним, каждая орбита M^4 характеризовалась парой чисел (ζ_*, l_*) . А именно, $l = \langle M, \alpha \rangle / 2$, $\hat{a}^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $M = (M_1, M_2, M_3)$ — координаты и импульсы в $\mathbb{R}^6$ для интегрируемого случая Ковалевской–Соколова. Формулы для l_* и ζ_* таковы:

$$l_*^3 = \frac{2l^2}{\varepsilon_0 \hat{a}^3}, \quad \zeta_* = \frac{\hat{a}\zeta}{\varepsilon_0} = \frac{\hat{a}\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0}.$$

В случае Ковалевской–Соколова на $e(3)$ множество $\{l_* > 0, \zeta_* > 0\}$ разделено пятью кривыми $\theta_1, \dots, \theta_5$ на 11 областей $1 \dots 11$, см. рис. 3.2. Точкам из разных областей соответствуют 4-орбиты со структурно различными бифуркационными диаграммами Σ отображения момента.

В случае Ковалевской на $so(3, 1)$ рассмотрим на плоскости Oab разделяющие кривые f_r, f_k, f_m и два интервала f'_t и f''_t разделяющей кривой f_t , исключив их точки, попавшие на ось Oa (т.е. концы интервалов XII–XVII). Именно полученные кривые являются образами кривых $\theta_1, \dots, \theta_5$ при пуассоновом отображении из теоремы 1.10. Соответствие между двумя наборами этих кривых укажем в табл. 3.3.

Случай Ковалевской–Соколова на $e(3)$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
Случай Ковалевской на $so(3, 1)$	f_k	f'_t	f''_t	f_r	f_m
Точки на оси Oa	$-a_0$	$-4a_0$	$-4a_0, a_0$	0	$4a_0$

Таблица 3.3: Соответствие разделяющих кривых систем Ковалевской $so(3, 1)$ и Ковалевской–Соколова на $e(3)$

Области I–XI на плоскости Oab в системе Ковалевской $so(3, 1)$ являются образами при пуассоновых отображениях областей 1–11 плоскости $Ol_*\zeta_*$ случая Ковалевской–Соколова. Области 1, 2, 3 и 4 последней системы (т.е. области I, II, III, IV для системы Ковалевской $so(3, 1)$ соответственно) имеют аналоги в классическом случае Ковалевской ($\varkappa = 0$). Пронумеруем остальные области, продолжая нумерацию из [35].

3.2 Лиувиллев анализ системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$

В этом разделе мы вычислим инварианты Фоменко–Цишанга для слоения Лиувилля на любом трехмерном неособом изоэнергетическом подмногообразии $Q^3_{a,b,h}$ интегрируемого случая Ковалевской на $so(3, 1)$. Список инвариантов Фоменко (см. [4]) для них был составлен в работе [53]. Остается вычислить числовые метки. Мы найдем их аналогично случаю Ковалевской на $so(4)$ (т.е. работе [118] и главе 2), явно выразив допустимые базисы (см. 1.1.5.3) для каждой “новой” дуги бифуркационной диаграммы через однозначно определенные λ -циклы атомов-бифуркаций.

Мы также будем опираться на информацию о некоторых ранее изученных интегрируемых случаях, а именно о классическом случае Ковалевской и интегрируемом случае Соколова (изучавшемся в работах П.Е.Рябова [36] и П.В.Морозова [37]). Первая из этих двух систем есть предел случая Ковалевской на $so(3, 1)$ при $\varkappa \rightarrow -0$. Вторая система является пределом случая Ковалевской–Соколова, когда $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ (см. [53]).

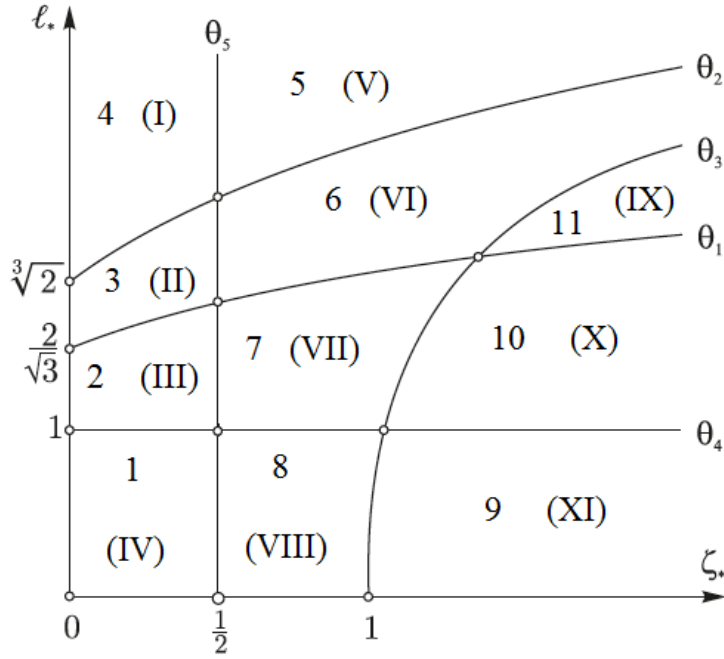


Рис. 3.2: Случай Ковалевской–Соколова

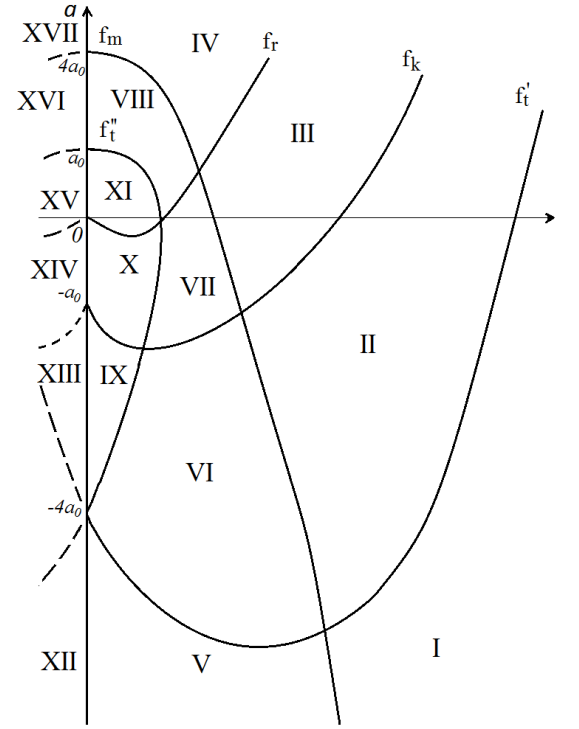


Рис. 3.3: Случай Ковалевской на $so(3, 1)$

Лемма 3.2. *Области 5, 10, 11 плоскости (ζ_*, l_*) параметров случая Ковалевской–Соколова сохраняются после перехода к пределу $\varepsilon_0 \rightarrow +0$.*

Доказательство. Параболы $l = \hat{a}^2 \varepsilon_1$ и $l = \hat{a}^2 \varepsilon_1 / 2$ являются пределами разделяющих кривых θ_1 и θ_2, θ_3 соответственно. Оси $O\hat{a}$ и Ol являются пределами кривых θ_4 и θ_5 соответственно. $\square$

Некоторые дуги, возникающие в обоих предельных случаях, имеют разные обозначения в разных работах. Мы начнем с обозначений для классического случая Ковалевской из [35] и укажем, как соотносятся обозначения для остальных дуг.

Теорема 3.3. *Допустимые базисы для “новых” дуг $\alpha_3, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \beta_4, \delta_3, \xi_6$ выражаются через однозначно определенные λ -циклы атомов-бифуркаций следующим образом:*

$$\alpha_3 : \frac{(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{\oslash}, \quad \beta_4 : \frac{(\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\gamma_8})_{(6)}}{(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_9})_{(7)}}, \quad \gamma_8 : \frac{(\lambda_{\gamma_8}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_8}, -\lambda_{\beta_1})_{(1)}}, \quad \gamma_9 : \frac{(\lambda_{\gamma_9}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_9}, -\lambda_{\beta_1})_{(2)}},$$

$$\gamma_{10} : \frac{(\lambda_{\gamma_{10}}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_{10}}, -\lambda_{\beta_3})_{(3)}}, \quad \gamma_{11} : \frac{(\lambda_{\gamma_{11}}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_{11}}, -\lambda_{\beta_3})_{(2,5)}}, \quad \delta_3 : \frac{(\lambda_{\delta_3}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{\oslash}, \quad \xi_6 : \frac{\oslash}{(\lambda_{\xi_6}, \lambda_{\gamma_5})_{(6)}}.$$

Представление этих λ -циклов как элементов целочисленной решетки (фундаментальной группе тора Лиувилля) показано на рис. 3.4. Отметим, что по сравнению с классической системой Ковалевской или ее $so(4)$ аналогом, в системе Ковалевской $so(3, 1)$ возникает два новых семейства регулярных торов Лиувилля. Обозначим их (6) и (7).

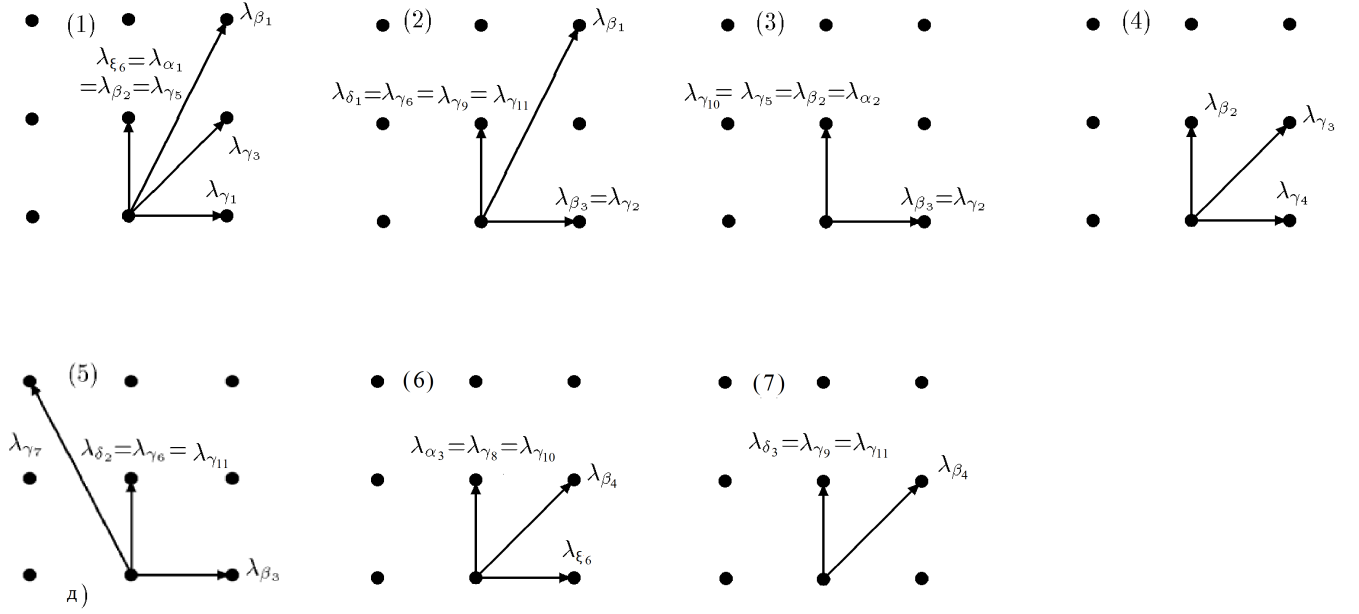


Рис. 3.4: Однозначно определенные λ -циклы для семейств (1)-(7) торов Лиувилля в системе Ковалевской на $so(3, 1)$.

Замечание 32. Цикл λ_{β_4} на торах семейства (6) (т.е. λ_{β_1} на торах семейства I из работы [37]) и цикл λ_{β_4} на торах семейства (7) (т.е. λ_{β_4} на торах семейства V из работы [37]) выражаются аналогично путем выбора базиса на решетке.

Доказательство. 1. Если дуга Σ и тип атома-бифуркации на ней не меняются при переходе к предельному случаю, то соответствующий допустимый базис также остается прежним. Тем самым, допустимые базисы для дуг $\alpha_3, \beta_4, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \delta_3, \xi_6$ известны из [37].

2. Особые точки w_3 и y_{12} имеют в прообразе особенности центр-седло $A \times B$, и потому $\lambda_{\xi_1} = \pm \lambda_{\alpha_1}$ и $\lambda_{\gamma_5} = \pm \lambda_{\alpha_1}$, т.е. $\lambda_{\xi_1} = \pm \lambda_{\gamma_5}$.

Симметрия $(\alpha, x) \rightarrow (-\alpha, -x)$ переводит торы семейств (2), (3), (5), (6) в себя и сохраняет $\text{sgrad } H$ в случае Соколова. Это означает, что направление $\text{sgrad } H$ совпадает на двух критических окружностях атома C_2 для дуг γ_{10}, γ_{11} .

Следовательно $\lambda_{\xi_1} = \lambda_{\gamma_5}$ и $\lambda_{\xi_2} = \lambda_{\gamma_6}$ для итоговых слоений $B(\xi_1) - B(\gamma_5)$ и $B(\gamma_6) - B(\xi_2)$, возникающих после возмущения атомов $C_2(\xi_3)$ and $2C_2(\xi_4)$.

3. Допустимые базисы для двух дуг ξ_1, ξ_2 можно вычислить, рассматривая особенность седло-седло в прообразе точке w_6 , имеющую тип $B \times B$, такой же как у особенности U_2 (особая точка y_3), изучавшейся в [35]. $\square$

Замечание 33. Используя теорему 3.3, мы можем подсчитать метки r, ε, n для инвариантов Фоменко–Цишанга по известным формулам, см. [4] или пункт 1.1.4.2. Как и всюду

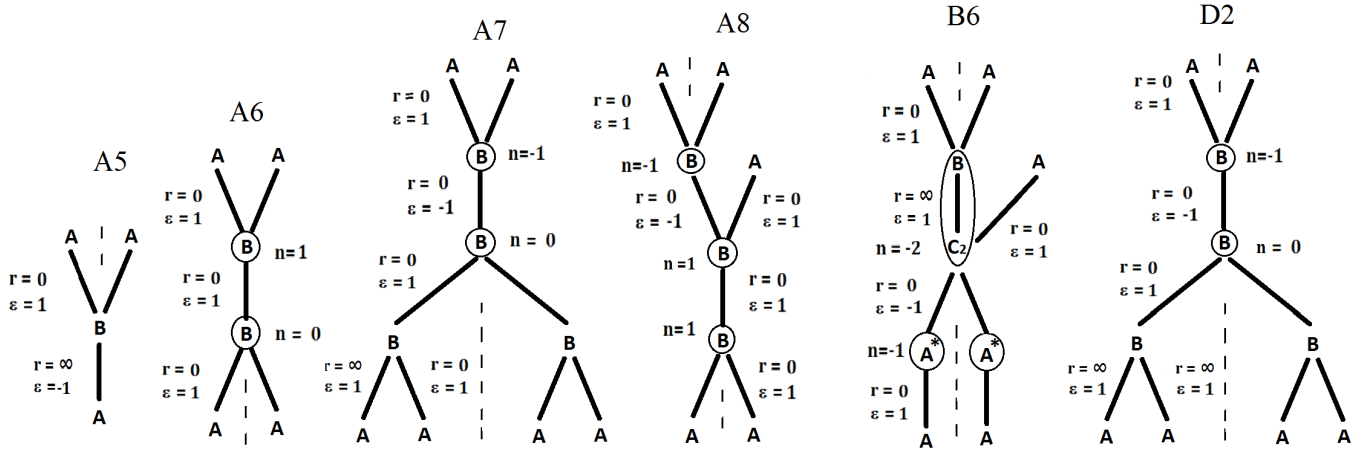


Рис. 3.5: Новые инварианты системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$

в настоящей работе, молекулы ориентируются направлением роста интеграла Ковалевской (1.14).

Используем обозначения из работы [53] (напомним, что они были написаны выше в разделе 1.3.4) для классов слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 .

Теорема 3.4. 1. В системе Ковалевской на алгебре $so(3,1)$ все 25 классов слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 (существующих при $b \neq 0$) попарно лиувиллево не эквивалентны, т.е. имеют различные инварианты Фоменко–Цишанга:

- 10 классов $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, B_3, D_1, A_4$ совпадают с классами A–J соответственно для классической системы Ковалевской (на алгебре $e(3)$),
- 3 класса E_1, E_2, F_1 совпадают с классами A, B, C системы Соколова (изученной в [36], [37]),
- 6 классов $B_4, B_5, C_3, C_4, F_2, G$ могут быть получены из классов E, F, I, H, D, G системы Соколова путем возмущения $C_2 \rightarrow B \frac{r=\infty}{\varepsilon=1} B$,
- инварианты Фоменко–Цишанга классов $A_5, A_6, A_7, A_8, B_6, D_2$ показаны на рис. 3.5.

2. В случае $b = 0$ каждое слоение Лиувилля принадлежит к одному из следующих классов: классов A–I системы Соколова, классов A–D классической системы Ковалевской или классов A_5, A_6 системы Ковалевской–Соколова, существующих также при $b \neq 0$.

3. Слоения A_5 и A_6 принадлежат соответственно к классам L_{26} и L_7 системы Ковалевской на алгебре $so(4)$ (возможно, после изменения знака боттовского интеграла).

Глава 4

Псевдо-евклидовый аналог семейства систем Ковалевской.

Целью наших исследований является изучение топологических свойств слоения, порождаемого четырьмя функциями $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}, F_{ps}$ — интегралами псевдо-евклидова семейства систем Ковалевской. Они, напомним, были заданы в разделе 1.3.5 главы 1 настоящей работы уравнениями (1.35), (1.36), (1.34) и условием $F = K_{\varkappa}/4$ для $K_{\varkappa}$ — интеграла Ковалевской (1.14).

В диссертации рассматривается следующий конкретный вопрос: является ли совместная поверхность уровня четырех этих функций компактной? Отметим, что все четыре интеграла являются полиномами, т.е. для компактности уровня достаточно его ограниченности.

Совместный уровень $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}, F_{ps}$ в $\mathbb{R}^6$ обозначим $T_{a,b,h,f}$:

$$T_{a,b,h,f} = \{\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x}) | \hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b, H_{ps} = h, F_{ps} = f\}. \quad (4.1)$$

Проиллюстрируем нетривиальность этого вопроса. Например, в псевдо-евклидовом случае теряют силу следующие простые оценки на величины фазовых переменных на совместном уровне, верные в евклидовом случае при $\varkappa = 0$.

$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < a,$$

$$\mathbf{J}^2/2 \leq J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 = h - 2c_1x_1 < |h| + 2c_1|\sqrt{a}|.$$

Отметим, что при $\varkappa > 0$ ситуация повторяется: в случае алгебры Ли $so(4)$ имеем $|x_i| \leq \sqrt{a}$ и $|J_i| \leq \sqrt{a/\varkappa}$ при $i = 1, 2, 3$, а для его псевдо-евклидова аналога такая оценка отсутствует:

$$a + \sigma(x_3^2 + \varkappa J_3^2) = x_1^2 + x_2^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2).$$

Основным результатом данной главы диссертации является критерий компактности совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ четырех первых интегралов системы $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}, F_{ps}$ системы из псевдо-евклидова семейства систем Ковалевской при любом вещественном значении параметра пучка $\varkappa$. Данный критерий действует при условии положительности $F_{ps} = f$ и отличия интеграла площадей $\hat{f}_2 = b$ от нуля.

4.1 Параметризация совместного уровня четырех первых интегралов

Компактность множества $T_{a,b,h,f}$ равносильна его ограниченности: оно замкнуто как заданное системой полиномиальных уравнений. Используя вид функций H_{ps} и $\hat{f}_1$, выразим функции J_3^2 и x_3^2 через переменные J_1, J_2, x_1, x_2 .

Замена координат $\xi_1 = J_1^2 - J_2^2 + 2b_1x_1 + \varkappa b_1^2$ и $\xi_2 = 2J_1J_2 + 2b_1x_2$ биективна и линейна по парам переменных x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 . Здесь $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4F_{ps} = K_\varkappa = k =: \tilde{f}^2$, т.е. существенно используется специальный вид интеграла $K_\varkappa$. Теперь перейдем к полярным координатам f, α, r, β с особенностями при $r = 0$ или $\tilde{f} = 0$:

$$\xi_1 = \tilde{f} \cos \alpha, \quad \xi_2 = \tilde{f} \sin \alpha, \quad J_1 = r \cos \beta, \quad J_2 = r \sin \beta.$$

Рассмотрим $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и множество $V = A(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^+(r) / \sim$ с эквивалентностью

$$(0, \beta, r) \sim (2\pi, \beta, r), \quad (\alpha, 0, r) \sim (\alpha, 2\pi, r), \quad (\alpha, \beta_1, 0) \sim (\alpha, \beta_2, 0) \quad \text{для } \forall \alpha, \beta, \beta_i \in [0, 2\pi].$$

Множество точек $x \in V : r(x) > 0$ есть произведение 2-тора на открытый луч. Примем $f \neq 0$.

Перепишем $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}$ в новых координатах. Из выражения для (1.34) получаем $J_1^2 - \sigma J_3^2 = h + (\xi_1 - \varkappa b_1^2)/2$ и подставляем правую часть соотношения в формулу (1.35). Функции J_3^2 и x_3^2 от (α, β, r) принимают вид

$$\sigma J_3^2(\alpha, \beta, r) = -h + (b_1^2 \varkappa)/2 - 1/2 \tilde{f} \cos \alpha + r^2 (\cos \beta)^2, \quad (4.2)$$

$$4b_1^2 \sigma x_3^2(\alpha, \beta, r) = r^4 + 2(\varkappa b_1^2 - \tilde{f} \cos(\alpha - 2\beta))r^2 + (-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4). \quad (4.3)$$

Возведя в квадрат уравнение $-b + x_1 J_1 + x_2 J_2 = \sigma x_3 J_3$ интеграла площадей, получим полином $P(r)$ степени 4 по r :

$$8b_1 P(r) = g_4(\alpha, \beta) r^4 + g_3(\alpha, \beta) r^3 + g_2(\alpha, \beta) r^2 + g_1(\alpha, \beta) r + g_0(\alpha, \beta) = 0. \quad (4.4)$$

Коэффициенты $g_j(\alpha, \beta)$ ограничены на A и непрерывно зависят от α, β , значений интегралов a, b, h, f на слое, параметра пучка $\varkappa$ и констант b_1, k :

$$g_4 = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos(\alpha - 4\beta), \quad g_3 = 8b_1 b \cos \beta,$$

$$g_2 = 4ab_1^2 - 4\tilde{f} h \cos(\alpha - 2\beta) + 2(2ab_1^2 - \tilde{f}^2 - 2\varkappa b_1^2 h + \varkappa^2 b_1^4) \cos 2\beta,$$

$$g_1 = b \cdot 8b_1 (-\tilde{f} \cos(\alpha - \beta) + \varkappa b_1^2 \cos \beta), \quad g_0 = 8b^2 b_1^2 + (2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos \alpha) (-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4).$$

Пусть $S \subset V$ есть поверхность корней $P(r)$. При $f \neq 0$ определена проекция $\pi : T_{a,b,h,f} \longrightarrow S$.

Лемма 4.1. *Прообраз $\pi^{-1}(x)$ точки $x \in S$ пуст тогда и только тогда, когда $J_3^2(x) < 0$ или $x_3^2(x) < 0$ (формулы (4.2)-(4.3)). Прообраз точки x состоит из одной точки, если $x_3(x) = J_3(x) = 0$. Прообраз остальных точек состоит из двух точек, причем если $x_3(x) \cdot J_3(x) \neq 0$, то он является одной из следующих пар точек:*

$$\left(+\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)} \right), \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)} \right) \text{ либо } \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)} \right), \left(+\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)} \right)$$

Доказательство. Пусть $rf \neq 0$. Тогда точки $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ из прообраза точки $x \in S$ заведомо лежат в множестве $F = f$. Возведение в квадрат уравнения $\sigma x_3 J_3 = -b + x_1 J_1 + x_2 J_2$ добавляет новые решения, в точках которых знак $x_3 J_3$ и знак правой части отличаются (так, при $x_3 J_3 = 0$ переход равносильен). Равенства (4.2) и (4.3) позволяют явно выразить $J_3^2(x), x_3^2(x)$ соответственно, т.е. выбор знаков дает ровно 4 варианта при $x_3 J_3 \neq 0$. Поскольку переход не равносильен, то потребуется выбрать одну из пар точек с одинаковым знаком $x_3 J_3$. $\square$

4.2 Достаточное условие компактности слоя слоения Ли-увилля

Лемма 4.2. *Какая-либо из шести координат $J_1, \dots, x_3$ не ограничена на поверхности уровня $T_{a,b,h,f}$ первых интегралов тогда и только тогда, когда на ее образе в S не ограничена функция $r^2 = J_1^2 + J_2^2$.*

Доказательство. Переменные x_1, x_2 и квадраты x_3^2, J_3^2 выражаются как полиномы от J_1, J_2 , от ξ_1, ξ_2 (ограниченных по модулю значением $\tilde{f}$ на 2-слое) и от некоторых постоянных системы. $\square$

Аналогично, множество $r = 0$ всегда компактно в $T_{a,b,h,f}$: подставим $J_1 = J_2 = 0$ в $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}, F_{ps}$.

Как известно, корни многочлена со старшим коэффициентом 1 непрерывно зависят от его коэффициентов. Если последние непрерывны на компакте, то все корни всех таких полиномов ограничены в совокупности. Тем самым лишь обращение в нуль (где-либо на A) старшего коэффициента $g_4(\alpha, \beta)$ может дать неограниченную поверхность S и, возможно, неограниченный уровень $T_{a,b,h,f}$.

Теорема 4.3 (достаточное условие компактности связной компоненты уровня интегралов). *Пусть для $H_{ps} = h, F_{ps} = f$, $\varkappa$ выполнено $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f = k$. Тогда для неевклидовой системы Ковалевской со значением параметра $\varkappa$ пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира $\hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b$ совместная поверхность уровня интегралов $T_{a,b,h,f}$ компактна.*

Доказательство. Старший коэффициент $P(r)$ в (4.4) равен $g_4(\alpha, \beta) = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos(\alpha - 4\beta)$. В случае $f \neq 0$ он отделен от нуля на торе A в том и только в том случае, когда уравнение

$\cos \gamma = (2h - \kappa b_1^2)/\tilde{f}$ не имеет корней $\gamma = \alpha - 4\beta$. В случае $f = 0$ этот коэффициент постоянен на уровне $T_{a,b,h,f}$.

При выполнении условия теоремы поделим P на g_4 , получим многочлен с непрерывными коэффициентами, ограниченными по модулю $M > 0$ на всем торе A . Тогда все корни многочленов $P(r)|_{\alpha,\beta}$ (т.е. тройки $(\alpha, \beta, r) \in S$) ограничены по модулю, например, выражением $|r| < 4 \cdot M^4$.

При любом $f \in \mathbb{R}$ из условия $(2h - \kappa b_1^2)^2 > 4f$ следует ограниченность конечно-значной функций $r(\alpha, \beta)$ на торе A или $r(\beta)|_{f=0}$ на $S^1(\beta)$, т.е. имеет место компактность связных компонент уровня $T_{a,b,h,f}$. $\square$

4.3 Критерий некомпактности совместного уровня четырех первых интегралов.

Пусть далее $f > 0$ и условие $(2h - \kappa b_1^2)^2 > 4f = \tilde{f}^2 = k$ не выполнено. Найдём нули функции g_4 на торе A :

Лемма 4.4. *В случае $f > 0$ нули старшего коэффициента g_4 многочлена P на торе A лежат на кривой $\alpha = 4\beta$ при $2h - \kappa b_1^2 = -\tilde{f}$, на кривой $\alpha = 4\beta + \pi$ при $2h - \kappa b_1^2 = \tilde{f}$ или на паре кривых $\alpha = 4\beta \pm \varphi$ при $|2h - \kappa b_1^2| > \tilde{f}$, где $\varphi = \arccos((\kappa b_1^2 - 2h)/\tilde{f}) \in (0, \pi)$.*

Примем $b > 0$ (случай $b < 0$ аналогичен). Тогда, за исключением конечного числа точек, для всех точек кривой из леммы 4.4 (назовем такую кривую *кривой нулей*) степень многочлена P равна 3, т.е. нечетна и ровно на единицу меньше максимальной. Исключенные точки имеют координату $\beta = \pi/2, 3\pi/2$.

Кривая нулей на торе с угловыми координатами (α, β) для разных значений величины $\frac{\kappa b_1^2 - 2h}{\tilde{f}}$, постоянной на каждом совместном уровне, изображена на рисунках 4.1, ..., 4.4.

Теорема 4.5 (критерий наличия некомпактной связной компоненты у поверхности уровня.). *Пусть $b \neq 0$ и $-\tilde{f} \leq \kappa b_1^2 - 2h \leq \tilde{f}$, где $F_{ps} = f = \tilde{f}^2/4 = k/4$. Тогда совместная поверхность уровня $T_{a,b,h,f}$ со значениями (a, b, h, f) содержит как минимум одну неограниченную компоненту.*

Доказательство. 1. При малом по модулю значении функции g_4 (в сравнении с остальными коэффициентами g_j) многочлен P имеет корень: переходя к пределу $r \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow -\infty$ в выражении $8b_1Pr^{-3}$, получим $g_4r - g_3 = 0$. Тем самым уравнение $P(r) = 0$ имеет ровно один “большой” по модулю вещественный корень r и его знак определяется знаками g_4 и b . А именно при $g_4 \cdot g_3 < 0$ знак корня положителен, т.е. ему соответствует точка в S с большим положительным r .

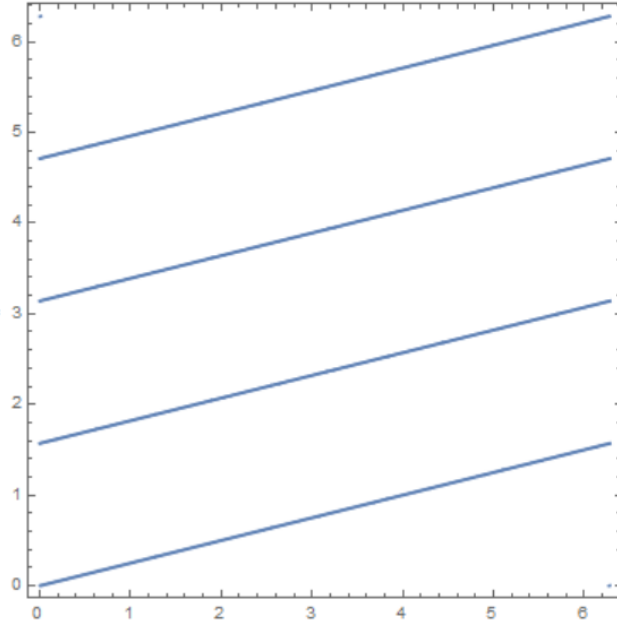


Рис. 4.1: Кривая нулей на торе: $\cos(\alpha - 4\beta) = 1$.

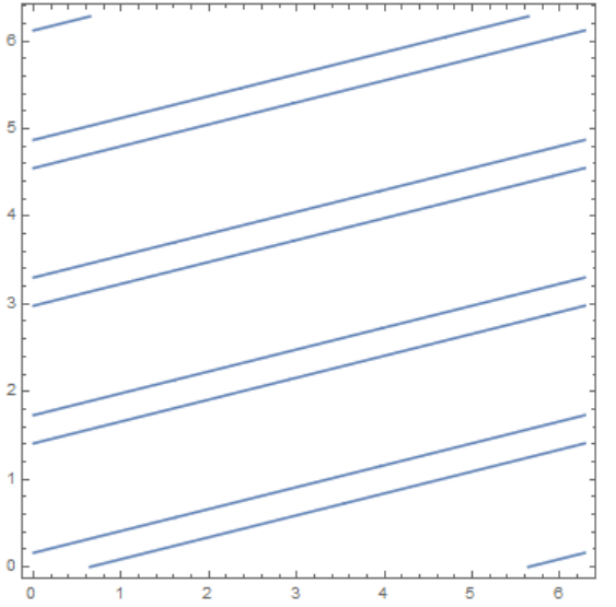


Рис. 4.2: Кривая нулей на торе: $\cos(\alpha - 4\beta) = 0,8$.

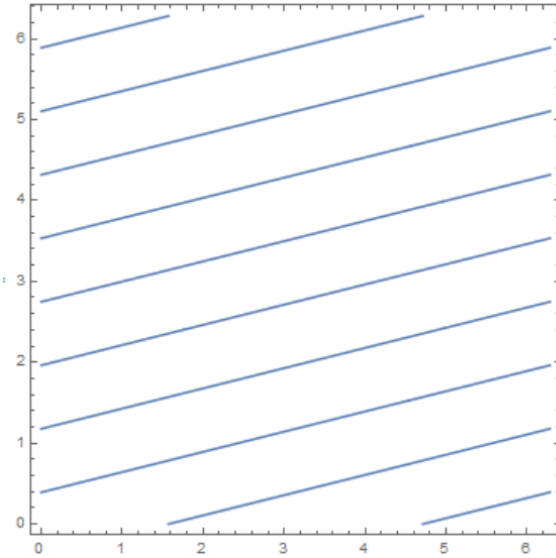


Рис. 4.3: Кривая нулей на торе: $\cos(\alpha - 4\beta) = 0$.

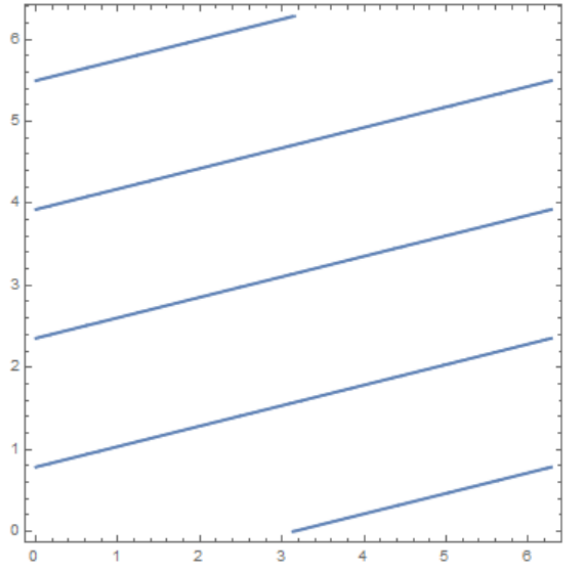


Рис. 4.4: Кривая нулей на торе: $\cos(\alpha - 4\beta) = -1$.

2. Рассмотрим на кривой нулей дуги, на которых $g_3 = 8b_1|b \cos \beta| > \delta$, и их ε -широкие трубчатые *проколотые* окрестности L_i (т.е. n дугам соответствует $2n$ односторонних тонких полосок).

Вдоль выбранной кривой нулей знак $\cos \beta$ меняется, а знак g_4 постоянен на каждой полосе, на которые тор разбивается кривыми нулей. Тогда в одной из связных компонент L_i знак корня

r всегда положителен, а модуль ограничен снизу возрастающей к бесконечности функцией от ε .

Тем самым некоторая связная компонента уровня $T_{a,b,h,f}$ содержит такой двумерный диск, что все его точки удалены от нуля пространства $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ не менее чем на любое выбранное “большое” расстояние. $\square$

Следствие 5. *Если связный слой уровня $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f}$ некомпактен, то вблизи него имеются компактные слои уровней $|2h - \varkappa b_1^2| = (1 + \varepsilon)\tilde{f}$, где $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ максимум расстояний от точек уровня до нуля пространства $\mathbb{R}^6$ растет (из-за наличия перемен знака у $\cos \beta$ при выбранном малом по модулю g_4).*

Теорема 4.6. *Совместный уровень первых интегралов $T_{a,b,h,f}$, для которого $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f} > 0$, является бифуркационным в $Q_h^3 = \{\hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b, H_{ps} = h\}$ и некомпактным. В его окрестности происходит перестройка компактного совместного уровня в некомпактный уровень.*

Замечание 34. *В обозначениях глав 1-3, имеем что при $b \neq 0$ совместный уровень компактен если и только если $(H - \varkappa c_1^2)^2 > K = K_\varkappa$, т.е. вне соответствующей параболы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.*

Для определения типа гомеоморфности слоя и количества этих слоев в поверхности уровня будет полезно изучить особенности рассматриваемой системы при $\cos \beta = 0$. В случае $b = 0$ близкую задачу следует решить для биквадратного уравнения $g_4 r^4 + g_2 r^2 + g_0 = 0$. Кроме того, видится перспективным применить к такому классу систем подходы, развитые М.П.Харламовым в работах [112] и [113].

Численное построение (в системе Wolfram Mathematica 12) поверхности S над квадратом A и проекции $T_{1,1,h,4}$ на нее для $h \in \{1.8, 2, 2.5\}$ и $\sigma = b_1 = 1, \varkappa = 0$ позволяет проиллюстрировать описанный в теореме 4.6 эффект.

Для каждого из данных наборов значений первых интегралов изобразим в координатах (α, β, r) поверхность S нулей полинома $P(\alpha, \beta, r) = 0$ и совместный уровень четырех интегралов. Надкритический уровень $h = 1.8, f = 4$ на рис. 4.5 и соответствующая поверхность S на рис. 4.6 является некомпактным. Бифуркационный уровень $h = 2, f = 4$ на рис. 4.7 и соответствующая поверхность S на рис. 4.8–4.9 являются некомпактными. В свою очередь, докритический уровень $h = 2.5, f = 4$ и соответствующая поверхность S , изображенные на рис. 4.10 и 4.11, являются компактными (ограниченными).

Заключение

В диссертации были получены результаты о топологических свойствах нескольких аналогов интегрируемой системы Ковалевской на нескольких разных алгебрах Ли.

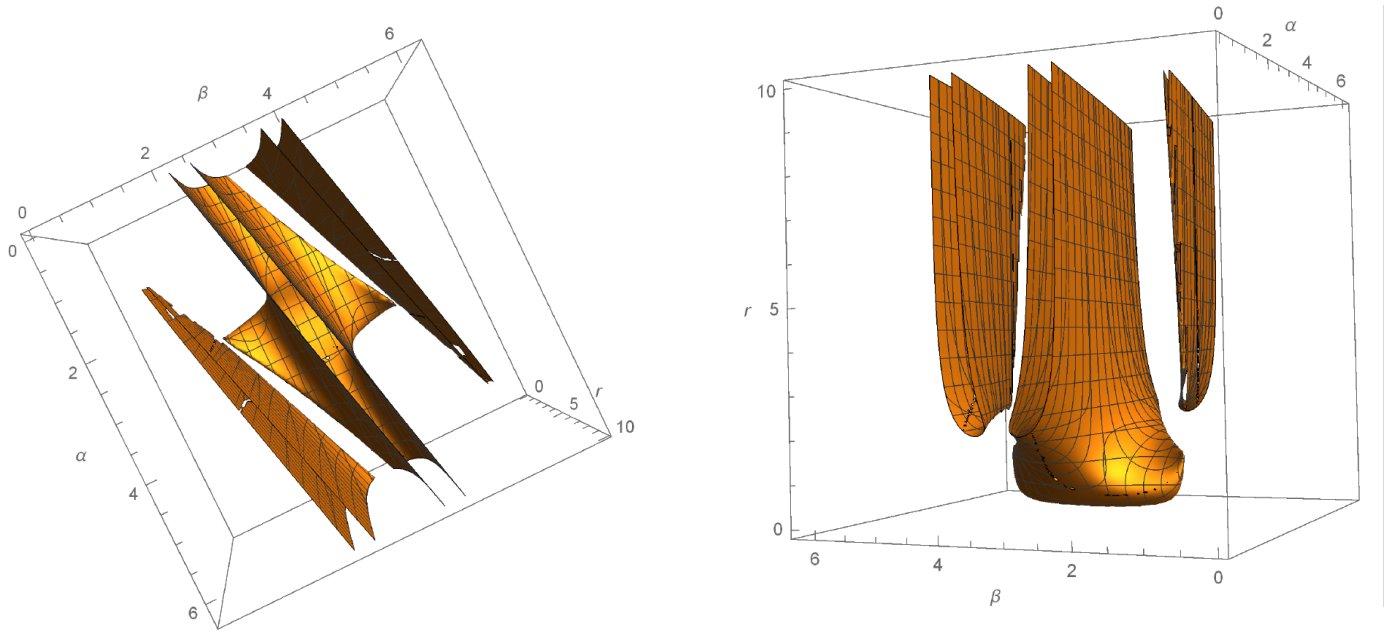


Рис. 4.5: База 2-накрытия уровня $h = 1.8$, $f = 4$ слоя Лиувилля: некомпактные слои.

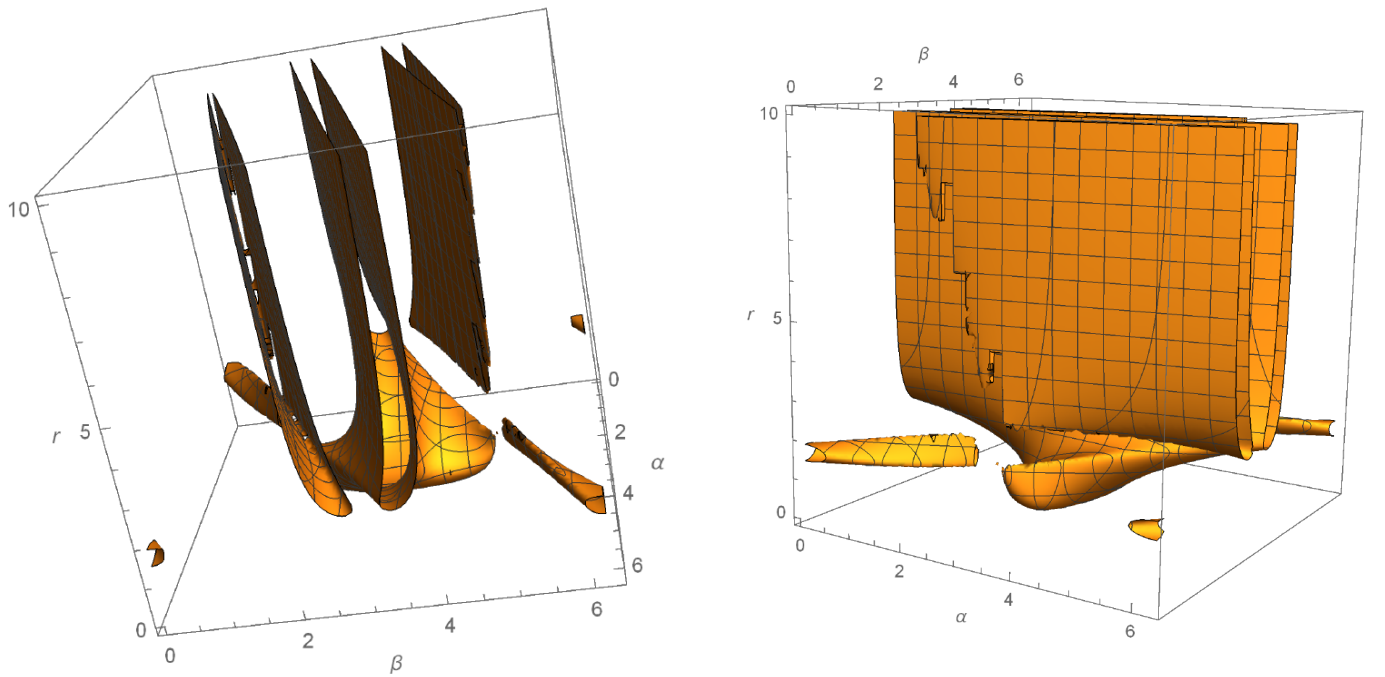


Рис. 4.6: Поверхность $h = 1.8$, $f = 4$ в координатах (r, α, β) : неограниченность поверхности.

В случае алгебры Ли $so(4)$ получен полный ответ о топологии слоений Лиувилля в ограничении на произвольную неособую трехмерную изоэнергетическую поверхность. Для каждой тройки значений функций Казимира (геометрического интеграла и интеграла площадей) и энергии системы, которой соответствует такая поверхность, вычислен инвариант Фоменко–Цишанга, т.е.

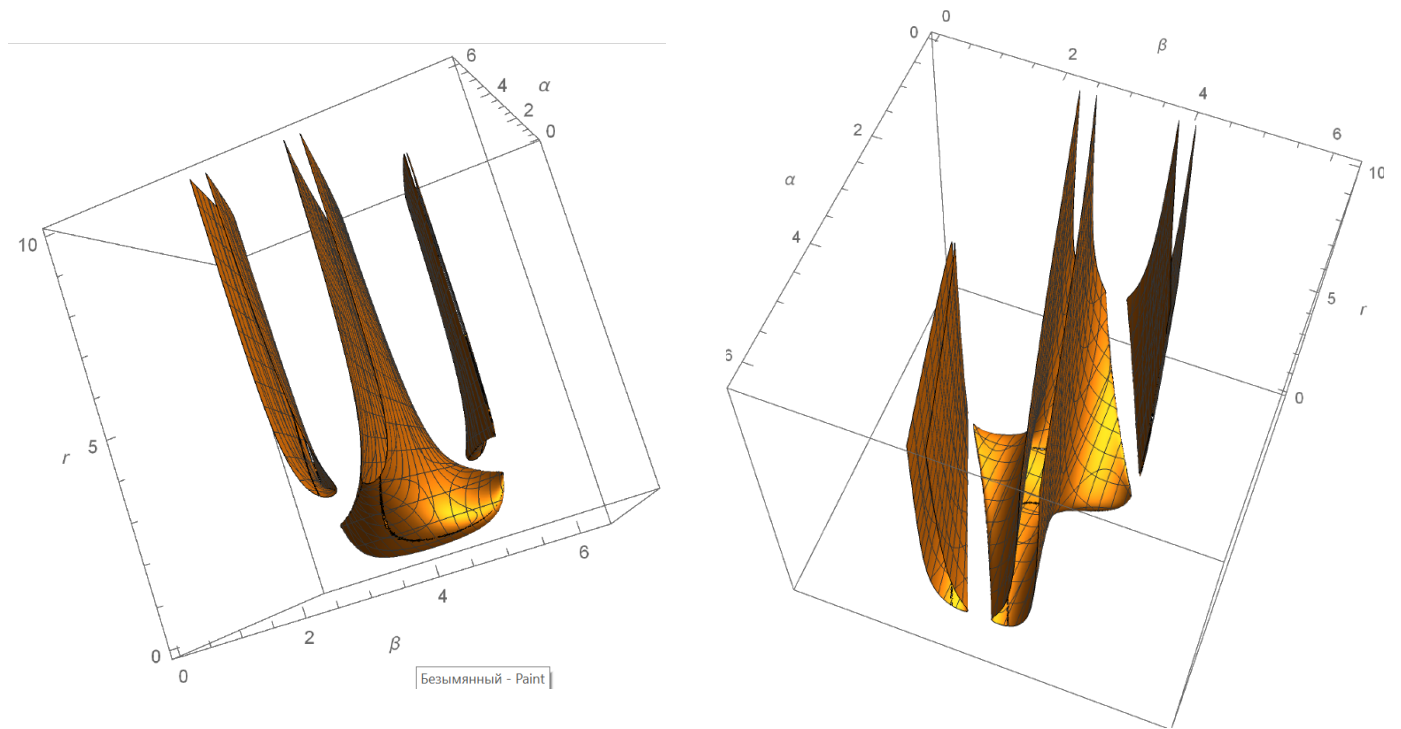


Рис. 4.7: База 2-накрытия бифуркационного уровня $h = 2, f = 4$ слоения Лиувилля: некомпактные особые слои.

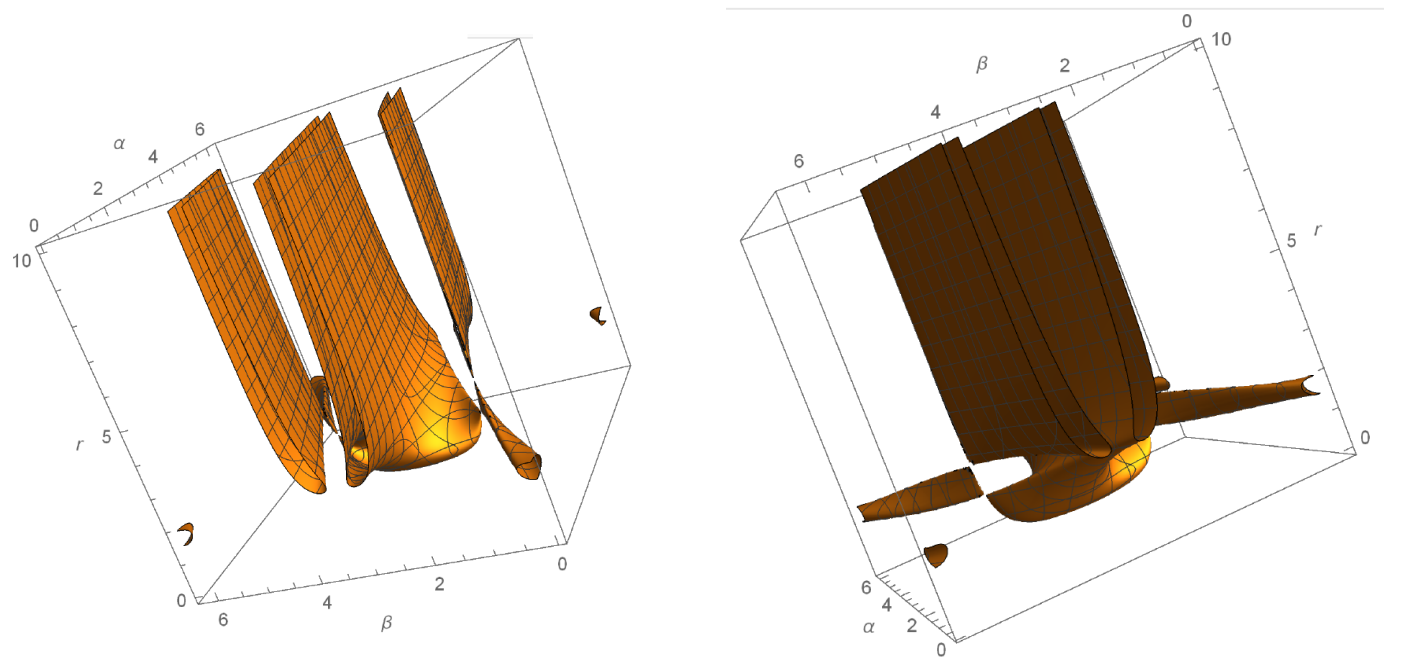


Рис. 4.8: Поверхность $h = 2, f = 4$ в координатах (r, α, β) : особая поверхность неограничена.

определен класс лиувиллевой эквивалентности системы в ограничении на эту поверхность. Обнаружены нетривиальные эквивалентности указанной системы с рядом других интегрируемых систем (Клебша, Ковалевской-Яхьи и Соколова) в подходящих зонах энергии, а также интегри-

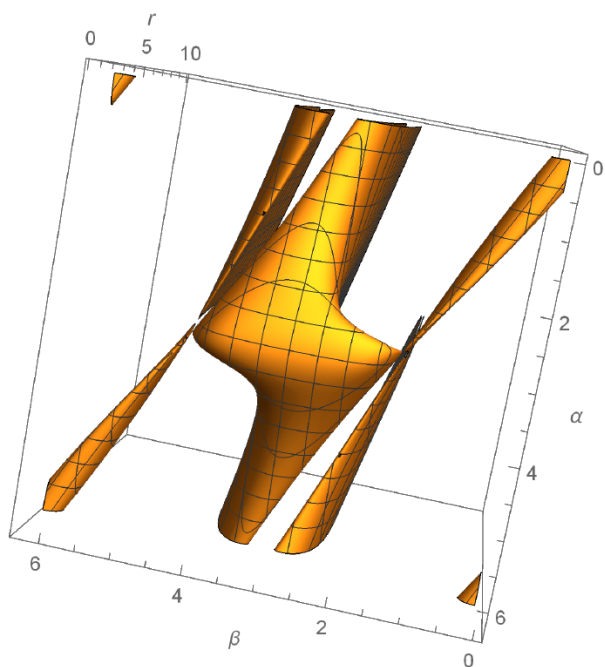


Рис. 4.9: Поверхность $h = 2, f = 4$ в координатах (r, α, β) : особая поверхность неограничена.

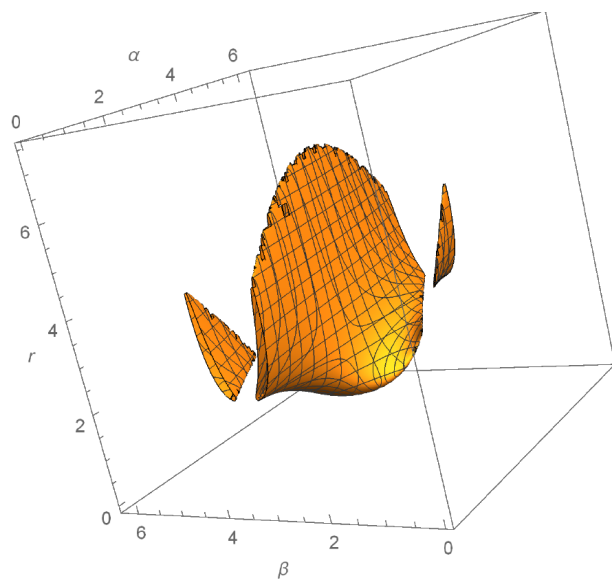
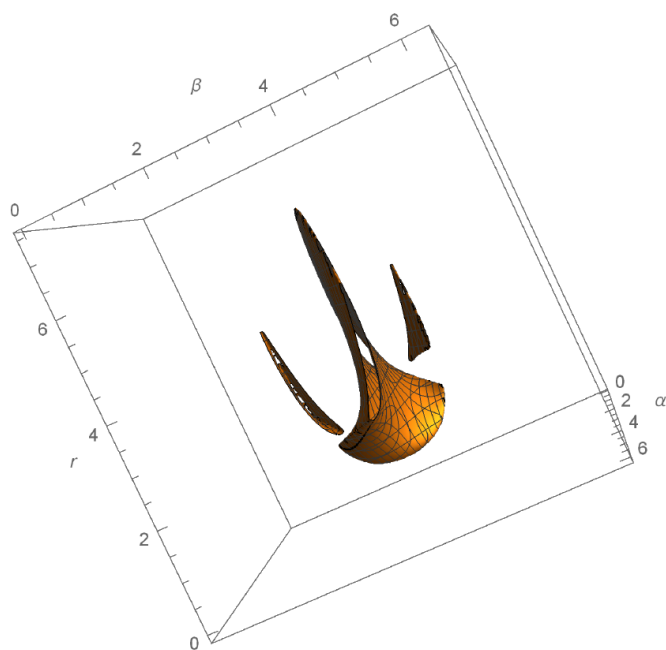


Рис. 4.10: База 2-накрытия уровня $h = 2.5, f = 4$ слоения Лиувилля: компактные слои.

руемыми билиардами. Кроме того, для каждого семейства дуг бифуркационной диаграммы аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$ удалось выразить соответствующий допустимый базис на торах, близких к ребрам данного семейства, в терминах однозначно определенных циклов бифуркаций классической системы Ковалевской.

В случае алгебры Ли $so(3, 1)$ также удалось вычислить инварианты Фоменко–Цишанга для

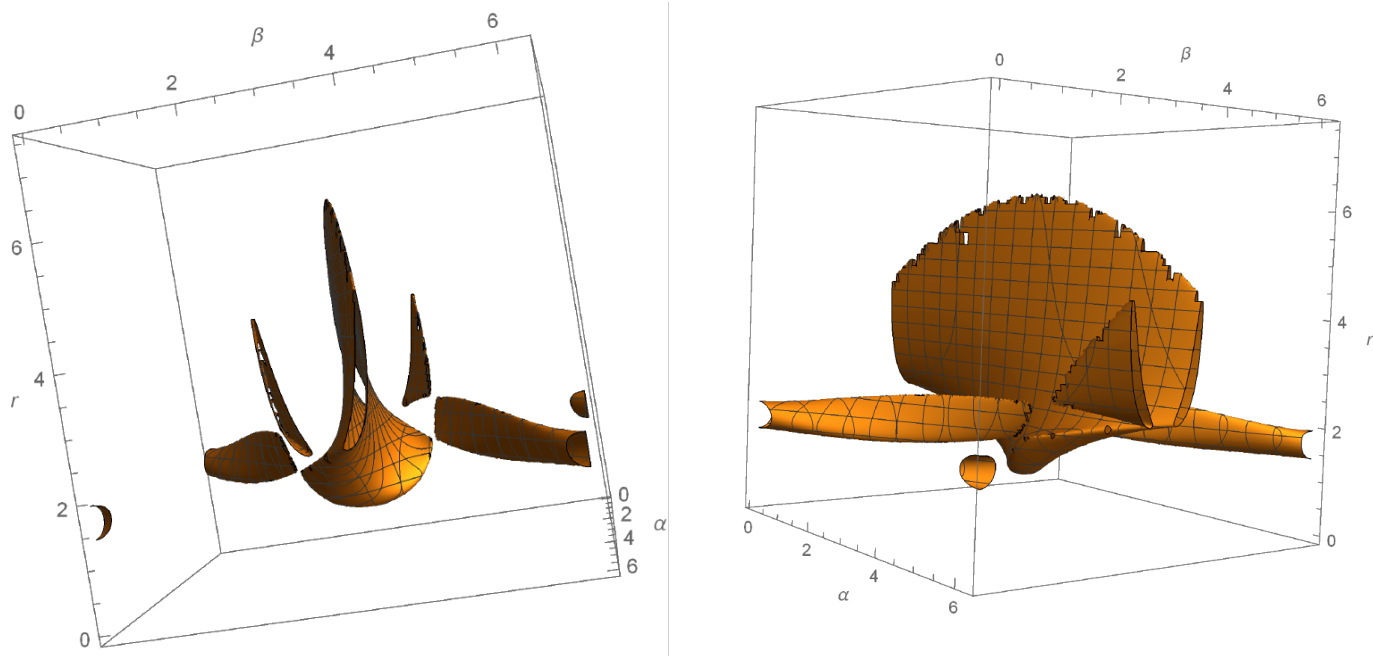


Рис. 4.11: Поверхность $h = 2.5, f = 4$ в координатах (r, α, β) : ограниченность поверхности.

произвольной неособой изоэнергетической поверхности. Во-первых, для этого в случае нулевой постоянной площадей была также построена бифуркационная диаграмма отображения момента в зависимости от значения геометрического интеграла. В случае ненулевой постоянной площадей данная система связана пуассоновым морфизмом с другой интегрируемой системой — волчком Ковалевской–Соколова. В настоящей работе удалось описать допустимые базисы для всех дуг бифуркационной диаграммы аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$ в терминах однозначно определенных циклов, что позволило завершить нахождение числовых меток и, основываясь на результатах М.П.Харламова, П.Е.Рябова и А.Ю.Савушкина, получить полный список инвариантов Фоменко–Цишанга на изоэнергетических поверхностях данного аналога системы Ковалевской и для волчка Ковалевской–Соколова.

Полученные результаты могут быть основой для исследования топологии других систем, входящих в многопараметрические семейства интегрируемых систем вместе с системой Ковалевской или ее аналогов на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$. Например, представляет интерес изучение топологии аналогов системы Ковалевской–Яхьи на $so(4)$ и $so(3, 1)$ (эта система получается из классической системы Ковалевской при добавлении гиростата и обладает указанными аналогами). Кроме того, система Ковалевской имеет ряд других интегрируемых аналогов, получаемых добавлением к гамильтониану сингулярных потенциалов, найденных в работах Х.М.Яхьи. Вычисленные нами инварианты лиувиллевой эквивалентности, кроме того, позволяют также ставить вопрос о моделировании аналогов системы Ковалевской при помощи интегрируемых билиардов на клеточных комплексах, возможно, с добавлением некоторого интегрируемого потенциала.

Для псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ изучен вопрос о компактности (ограниченности) совместной поверхности уровня четырех первых интегралов системы: ее функций Казимира, энергии и дополнительного интеграла. В случае ненулевого значения интеграла площадей получено уравнение параболы на плоскости значений энергии и интеграла Ковалевской, разделяющее образы компактных и некомпактных совместных уровней четырех первых интегралов системы. Полученные результаты дают важный пример некомпактных (и, вероятнее всего, некритических) бифуркаций в интегрируемых системах и, кроме того, могут быть использованы для дальнейшего исследования топологии псевдо-евклидовой системы Ковалевской на алгебре $e(2, 1)$ и ее аналогов на других алгебрах Ли.

Литература

- [1] S. Kowalewski, Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Mathematica* 12 (1889) 177–232.
- [2] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 54:3 (1990), 546–575
- [3] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, 45:2(272) (1990), 49–77
- [4] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999, т. 1, 2.
- [5] I. V. Komarov, Kowalewski basis for the hydrogen atom, *Theoret. and Math. Phys.* 47 1 (1981). 320–324.
- [6] В.В. Соколов, “Новый интегрируемый случай уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37.
- [7] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, V. V. Sokolov, A New Integrable Case on $so(4)$, *Doklady Physics*, 46:12 (2001), 888–889.
- [8] V.V. Sokolov, “A Generalized Kowalewski Hamiltonian and New Integrable Cases on $e(3)$ and $so(4)$ ” // in “Kowalevski property”, V. B. Kuznetsov (Ed.), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32, Providence, R.I.: AMS, 2002, pp. 304–315.
- [9] М. Оден, Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. — Ижевск, Изд-во УдГУ, 1999.
- [10] Ю.А. Браилов, “Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли” // *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 3–16.
- [11] В.В.Соколов, А.В.Цыганов, “Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина” // *ТМФ*, **131**:1 (2002), 118–125.

- [12] M. Adler, P. van Moerbeke. “A new geodesic flow on $SO(4)$ ” // Probability, Statistical Mechanics, and Number Theory. Adv. Math. Suppl. Stud. Orlando, Fla.: Acad. Press. — 1986. — Vol. 9. — P. 81–96.
- [13] H.M. Yehia, “New Integrable Cases in the Dynamics of Rigid Bodies” // Mech. Res. Comm., 1986, **13**:3 (1986), 169–172.
- [14] H.M. Yehia, “New generalizations of the integrable problems in rigid body dynamics” // J. Phys A: Math. Gen. **30** (1997), 7269–7275.
- [15] А.Г. Рейман, М.А. Семенов–Тян-Шанский, “Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений” // Функц. анализ и прил., **22**:2 (1988), 87–88.
- [16] В.В. Соколов, А.В. Цыганов, “Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина” // ТМФ., **131**:1 (2002), 118–125.
- [17] S. Smale, “Topology and Mechanics: 1”, Invent. Math., **10**:4 (1970), 305–331.
- [18] А.Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Доклады АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075.
- [19] А.Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307.
- [20] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I”, Матем. сб., 185:4 (1994), 27–80.
- [21] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. II”, Матем. сб., 185:5 (1994), 27–78.
- [22] M.P. Kharlamov, “Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields” // Regular and Chaotic Dynamics, **10**:4 (2005), 381–398.
- [23] Kharlamov M. P. Extensions of the appelrot classes for the generalized gyrostat in a double force field // Regular and Chaotic Dynamics. — 2014. — Vol. 19, no. 2. — P. 226–244.
- [24] Рябов П. Е. Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // ТМФ. — 2013. — Т. 176, № 2.— С. 205–221.

- [25] Ryabov P. E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // Journal of Geometry and Physics. — 2015. — Vol. 87. — P. 415–421.
- [26] С.В. Соколов, “Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата” // Доклады Академии наук, 477:6 (2017), 660–663.
- [27] В. В. Калашников, “Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии”, Изв. РАН. Сер. матем., 62:2 (1998), 49–74.
- [28] A. V. Bolsinov, L. Guglielmi, E. A. Kudryavtseva, “Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom”, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 376:2131 (2018), 20170424.
- [29] Wassermann G., *Classification of singularities with compact Abelian symmetry*. Univ. Regensburg, preprint, 1976; Singularities Banach Center Publications, **20** (1998), p. 475–498. PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw.
- [30] Broer H. W., Chow S. N., Kim Y., Vegter G., *A normally elliptic Hamiltonian bifurcation*, Z. angew. Math. Phys., **44** (1993), p. 389–432.
- [31] Kudryavtseva E., *Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems*, arXiv:2008.01067.
- [32] Харламов М. П., “Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской”, Прикладная математика и механика, 47:6 (1983), 922–930.
- [33] Харламов М. П., *Топологический анализ интегрируемых задачи динамики твердого тела*, Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета 1988.
- [34] A. A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”. In book: Topological Classification of Integrable Systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6). AMS, Providence (1991), P. 67–146.
- [35] Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сб. 2000. 191, № 2. 3–42.
- [36] P. E. Ryabov, Bifurcations of first integrals in the Sokolov case, Theor. Math. Phys. 134 2 (2003) 181–197.
- [37] П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа”, Матем. сб., 195:3 (2004), 69–114.

- [38] Т. А. Лепский, “Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени”, Матем. сб., 201:10 (2010), 109–136
- [39] Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский, “Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом”, Матем. сб., 202:3 (2011), 69–106
- [40] Кудрявцева Е.А., “Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками”, Докл. РАН, 445:4 (2012), 383–385
- [41] S. S. Nikolaenko, “Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case”, Lobachevskii J. Math., 38:6 (2017), 1050–1060
- [42] С. С. Николаенко, “Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях”, Матем. сб., 211:8 (2020), 68–101
- [43] Д. А. Федосеев, А. Т. Фоменко, “Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем”, Фундамент. и прикл. матем., 21:6 (2016), 217–243.
- [44] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20–67.
- [45] Borisov A.V., Mamaev I.S., “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces” // Rus. J. of Math. Phys. 2016. **23**:4 (2016). 431–454.
- [46] Соколов С. В., Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Труды МАИ, **100** (2018), 1–13.
- [47] Kotter F., “Sur le cas traite par Mme Kowalevski de rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, Acta Math., 17 (1893), 209–264.
- [48] Ведюшкина В.В., *Интегрируемые бильярды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы*, Докторская диссертация, МГУ, Москва, 2020.
- [49] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, Функц. анализ и его прил., 22:4 (1988), 38–51.
- [50] Аппельрот Г. Г., “Не вполне симметричные тяжелые гироскопы”, Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 61–156.
- [51] И. К. Козлов, Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // Матем. сб., **205**:4 (2014), 79–120.
- [52] Козлов И. К., Инварианты слоений в симплектической и пуассоновой геометрии, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 Москва, 2013. 193 с. РГБ ОД, 61 14-1/619.

- [53] M. P. Kharlamov, P. E. Ryabov, A. Yu. Savushkin, Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov Top, Regular and Chaotic Dynamics 21 1 (2016) 24–65.
- [54] I. V. Komarov, V. V. Sokolov, A. V. Tsiganov, Poisson Maps and Integrable Deformations of the Kowalevski Top, J. Phys. A, 36 29 (2003) 8035–8048.
- [55] Морозов П. В., Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 Москва, 2007. - 170 с. РГБ ОД, 61:07-1/756.
- [56] Fomenko A.T., Morozov P.V., *Some new results in topological classification of integrable systems in rigid body dynamics*, Contemp. geom. and related topics, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, 201–222.
- [57] П. В. Морозов, “Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи”, Матем. сб., 198:8 (2007), 59–82
- [58] Н. С. Славина, “Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи”, Матем. сб., 205:1 (2014), 105–160.
- [59] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, Матем. сб., 193:10 (2002), 113–138
- [60] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., 206:10 (2015), 127–176.
- [61] Жила А.И., *Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр*, Фундаментальная и прикладная математика. — 2019. — **22**, No.6. — с.85–94.
- [62] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии, 4-е изд., перераб. и доп., URSS, Москва, 2020 , 504 с.
- [63] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, “Современная геометрия. Методы и приложения”, Классический университетский учебник. Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Изд. шестое, изд-во УРПС, книжный дом “Либроком”, Москва, 2013
- [64] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds* , Differential Geometry 1983. **18**, p. 523–557.
- [65] А. Т. Фоменко, Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы, Классический учебник МГУ, 3-е изд., испр. и доп., ЛЕЛАНД, URSS, Москва, 2019 , 304 с.

- [66] А. А. Ошемков, “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей”, Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН, 205, Наука, М., 1994, 131–140.
- [67] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 201:8 (2010), 63–102.
- [68] Russmann H., Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung, Mathematische Annalen, 1964, v. 154, pp. 285–306.
- [69] Vey J., Sur certains systemes dynamiques separables. // American Journal of Mathematics, 1978, v. 100, pp. 591–614.
- [70] Ito H., Action-angle coordinates at singularities for analytic integrable systems. // Math Z., 1991, v. 206, pp. 363–407.
- [71] Ito H., Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems // Comment. Math. Helvetici, 1989, v. 64, pp. 412–461.
- [72] Eliasson L.H., Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Commentarii Mathematici Helvetici, 1990, v. 65, pp. 4–35.
- [73] Матвеев С.В., Фоменко А.Т., Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии, изд-во МГУ, М., 1991 , 303 с.
- [74] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:2 (1988), 378–407.
- [75] Waldhausen, F., Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I. // Invent. Math., 1967, v. 3., № 4., pp. 308–333.
- [76] Waldhausen, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II. // Invent. Math., 1967, v. 4., № 2., pp. 88–117.
- [77] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, Функц. анализ и его прил., 22:4 (1988), 38–51.
- [78] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, УМН, 44:1(265) (1989), 145–173; Russian Math. Surveys, 44:1 (1989), 181–219.
- [79] A.V. Bolsinov, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”. In book: Topological Classification of Integrable Systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6). AMS, Providence (1991), P. 147–183.

- [80] A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Singularities of integrable Hamiltonian systems, Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, eds. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, A.A. Oshemkov, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006, 1–67.
- [81] Zung N.T., Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities // *Compositio Math.*, 1996, V. 101., № 2., pp. 179–215.
- [82] Lerman L. M., Umanskii Ya. L., Structure of the Poisson action on $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I, II // *Selecta Math. Sov.* 1987. 6. 365–396.
- [83] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I”, *Матем. сб.*, 183:12 (1992), 141–176
- [84] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. II”, *Матем. сб.*, 184:4 (1993), 105–138
- [85] Матвеев В. С., Особенности отображения момента и топологическое строение интегрируемых геодезических потоков, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 Москва, 1996. - 107 с. РГБ ОД, 61 97-1/420-6.
- [86] Грабежной А., Дипломная работа, Москва, Московский Государственный Университет. 2002.
- [87] Тужилин М. А., Инварианты 3-мерных и 4-мерных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04, МГУ им. М.В. Ломоносова — Москва, 2018. — 94 с. РГБ ОД, 61 18-1/737;
- [88] Матвеев В.С., Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло // *Матем. сб.* 1996. 187, № 4. 29–58.
- [89] Nguen T. Z., Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems, *Letters in Mathematical Physics.* 1995. 33. 187–193.
- [90] Fomenko A. T. , Kibkalo V. A., Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics.*, Understanding Complex Systems, eds. Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z., Springer, 2021, - P. 3–26.
- [91] Ошемков А. А., Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех.* 2011. № 2. 10–19.

- [92] Nguyen Tien Zung. A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems // *Commentarii Mathematici Helvetici*, 2000, N. 75 pp. 271–283.
- [93] Жуковский Н. Е., “Геометрическая интерпретация случая движения тяжелого твердого тела вокруг фиксированной точкой, рассмотренного Ковалевской”, *Матем. сб.*, 19 (1896), 45–93.
- [94] Колосов Г.В. Об одном свойстве задачи Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // *Труды отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания*. М., 1901. Т. 11. С. 5–12.
- [95] Харламов М. П., “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Доклады АН СССР*, 273:6 (1983), 1322–1325.
- [96] Dullin H. R., “Die Energieflächen des Kowalewska-Kreisels, Dissertation Univ”. Bremen, Mainz Verlag, Aachen, 1994
- [97] Dullin H. R., Juhnke M., Richter P. H., “Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 4:6 (1994), 1535–1562.
- [98] Dullin H. R., Richter P. H., Veselov A. P., “Action variables of the Kovalevskaya top”, *Regular and Chaotic Dynam.*, 3:3 (1998), 18–31
- [99] Yehia H. M., Elmandouh A. A., “New integrable systems with a quartic integral and new generalizations of Kovalevskaya and Goriatchev cases” // *Reg. Chaot. Dyn.*, **13** (2008), 56–68.
- [100] Yehia H. M., “The Master integrable two-dimensional system with a quartic second integral” // *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39** (2006), 5807–5824.
- [101] Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В., “Теоретическая механика” : учебник для студентов вузов по специальностям “Математика” и “Механика”, Москва, Академия, 2010. - 429 с. ISBN 978-5-7695-5946-4
- [102] Richter P. H., Dullin H. R., Wittek A., “Kovalevskaya Top” // *Publ. Wiss. Film, Sect. Techn. Wiss./Naturw.* 13 (1997), 33–96.
- [103] Klein F., Sommerfeld A., “Über die Theorie des Kreisels”, Teubner, Leipzig, 1910.
- [104] S. Kowalewski, Sur une propriété du système d'équations différentielles qui
- [105] Аппельрот Г.Г., Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва, 1893

- [106] Ляпунов А. М., Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Сообщения Харьковского мат. общества, вторая серия, III, 1893, с. 123–140.
- [107] Кочина П. Я., “Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки”, Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 157–188
- [108] Погосян Т. И., Харламов М. П., “Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил”, ПММ, 43 (1979), 419–428.
- [109] Харламов М. П., “Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твердого тела”, Механика твердого тела, Наукова думка, Киев, 1979, 50–63
- [110] Погосян Т. И., “Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела”, Механика твердого тела, Наукова думка, Киев, 1980, 3–23
- [111] Погосян Т. И., “Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай”, Механика твердого тела, Наукова думка, Киев, 1983, 19–24.
- [112] Харламов М.П., Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динам., 6:4 (2010), 769–805.
- [113] Харламов М.П., Топологический анализ и булевы функции: II. Приложения к новым алгебраическим решениям // Нелинейная динам., 7:1 (2011), 25–51.
- [114] Ошемков А. А., Топологическая классификация гамильтонианов в некоторых классических случаях интегрируемости гамильтоновых систем, Дис. канд. физ.-мат. наук, Москва, 1992. - 108 с. РГБ ОД, 61:92-1/1832.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

- [115] Kibkalo V.A., *Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras*, Moscow Univ. Math. Bull. — 2020. — Vol. 75, no. 6. — P. 263–267.
- [116] Kibkalo V., *Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3, 1)$* , Topology and its Applications. — 2020. — Vol. 275, no. 107028.

- [117] V. A. Kibkalo, *Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$* , Sbornik Math. — 2019. — Vol. 210, no. 5. — P. 625–662.
- [118] Kibkalo V., *Topological Analysis of the Liouville Foliation for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra $so(4)$* , Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, no. 9. — P. 1396–1399.
- [119] Kibkalo V.A., *The topology of the analog of Kovalevskaya integrability case on the Lie algebra $so(4)$ under zero area integral*, Moscow Univ. Math. Bull. — 2016. — Vol. 71, no. 3. — P. 119–123.

Тезисы докладов

- [120] Kibkalo V.A., *Bifurcations of Lagrangian fibrations of Kovalevskaya-type integrable Hamiltonian systems*, Book of Abstracts: Equadiff 2019. — Leiden University, Netherlands, Leiden, 2019. — P. 51.
- [121] Kibkalo V., *Bifurcations of the Liouville foliations for Kovalevskaya cases on Lie algebras*, FDIS-2019: Titles and abstracts of the talks. — Shanghai Jiao Tong University, China, Shanghai, 2019. — P. 16–17.
- [122] Kibkalo V.A., *Topological invariants of the Liouville foliations for the Kovalevskaya case on $so(3,1)$* , ABSTRACT BOOK of 2018 International Conference on Topology and its Applications / Ed. by S. D. Iliadis. — University of Patras, Greece, Patras, 2018. — P. 125–127.
- [123] Kibkalo V., *Topological invariants of Liouville foliation for analogs of the Kovalevskaya integrable case*, The Seventh International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018”: Book of Abstracts. — Russia, Dolgoprudy, 2018. — P. 40–41.
- [124] Кибкало В.А., *Классы слоений Лиувилля для аналога случая интегрируемости Ковалевской на алгебре Ли $so(3, 1)$* , Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2018”. — Секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология”. — Москва, 2018.
- [125] Кибкало В.А., *Топология слоений Лиувилля фазового пространства случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$* , Материалы Международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2018”. — Изд-во “Научная книга”, Воронеж, 2018. — С. 236–239.
- [126] Kibkalo V.A. *Bifurcations of the Liouville foliations for the Kovalevskaya case on $so(4)$* , Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (FDIS 2017): Book

of abstracts. — Centre de Recerca Matemàtica, Spain, Bellaterra (Barcelona), 2017. — P. 33-34.

- [127] Кибкало В.А., *Инварианты слоения Лиувилля на поверхностях постоянной энергии для аналога случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$* , Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2017”. — Секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология”. — Москва, 2017.
- [128] Кибкало В.А., *Типы слоений Лиувилля интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ при произвольном значении постоянной площадей*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2016”. — Секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология”. — Москва, 2016.
- [129] В.А. Кибкало, *Лиувиллев анализ интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ при нулевой постоянной площадей*, Материалы Международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2016”. — Изд-во “Научная книга”, Воронеж, 2016. — С. 187-189.
- [130] Кибкало В.А., *Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга для случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ при особом значении постоянной площадей*, Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2015”. — Секция “Математика и механика”, подсекция “Геометрия и топология”. — Москва, 2015.