МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Карпунин Григорий Анатольевич

УДК 515.164.174+514.772+519.711.7

ТЕОРИЯ МОРСА МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

01.01.04 — геометрия и топология

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
профессор, доктор физико-
-математических наук,
А. А. Тужилин

Москва – 2001

Оглавление

Введение

1 Актуальность темы

Цель настоящей диссертации — разработать теорию Морса, применимую к изучению минимальных сетей в метрических пространствах. Источником большинства задач, связанных с минимальными сетями, является так называемая *проблема Штейнера*:

Среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество $\mathcal{A}$ точек плоскости, найти сеть наименьшей длины.

Решение этой задачи называется *абсолютно минимальной сетью*, затягивающей множество $\mathcal{A}$. Очевидно, что абсолютно минимальная сеть не может иметь циклов, поэтому в данной диссертации мы ограничимся рассмотрением сетей, являющихся деревьями. Абсолютно минимальную сеть в литературе также называют *деревом Штейнера* для множества $\mathcal{A}$.

Наверное, впервые в таком виде проблема Штейнера была сформулирована Ярником и Кесслером в 1934 году. Однако, свое название проблема Штейнера получила благодаря книге Куранта и Роббинса "*Что такое математика?*", написанной ими в 1941 году. Благодаря огромной популярности книги, название "проблема Штейнера" прочно вошло в лексикон математиков. Отметим, что книга Куранта и Роббинса породила не только недоразумение в авторстве, но, что более важно, привлекла к проблеме Штейнера интерес большого числа ученых.

Неугасающий интерес к проблеме Штейнера объясняется несколькими причинами. Первая из них состоит в том, что, несмотря на простоту постановки, эта задача чрезвычайно нетривиальна. И хотя существует несложный алгоритм построения кратчайшей сети, затягивающей данное множество из n точек плоскости, этот алгоритм связан с очень большим перебором возможных типов сетей (т.е. графов, определяющих комбинаторную структуру сети). В действительности, проблема Штейнера является NP-трудной, см. [26]. Последнее означает, что, скорее всего, для этой проблемы не существует полиномиального алгоритма, т.е. алгоритма, решающего задачу за время порядка не выше чем n^k, где k — некоторое фиксированное число.

Другая причина связана с тем, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Так, например, предположим, что возникла необходимость соединить некоторые города системой дорог. При этом желательно, чтобы затраты на прокладку дорог были наименьшими возможными. Естественно, затраты пропорциональны сумме длин дорог, т.е. длине искомой сети. В идеальном случае, когда на сеть больше не накладывается никаких ограничений (скажем, отсутствуют препятствия, и мы вольны прокладывать дороги там, где пожелаем), сеть дорог, минимизирующая затраты, является абсолютно минимальной сетью.

В приведенном только что примере можно заменить города на пункты потребления, а дороги — на нефте- или газопроводы. В этом случае абсолютно минимальная сеть — это оптимальная система нефте- или газоснабжения. Если под пунктами $A_1, A_2, \dots, A_n$ понимать местонахождения абонентов, а под абсолютно минимальной сетью Γ — телефонную сеть, то мы получим модельную ситуацию, использующуюся в США при вычислении федеральных тарифов за междугородные телефонные разговоры. В этом случае плата за разговор абонентов, находящихся в пунктах A_i и A_j, пропорциональна длине минимального пути в телефонной сети Γ, соединяющего A_i с A_j.

Существует много методов поиска абсолютно минимальной сети, затягивающей данную границу. Среди них различают точные и приближенные алгоритмы. В большинстве своем приближенные алгоритмы опираются на эвристические соображения и строго не обоснованы. Однако, среди приближенных алгоритмов можно выделить следующий. Рассмотрим все сети, затягивающие множество $\mathcal{A}$, такие что каждая вершина сети принадлежит $\mathcal{A}$. Сеть наименьшей длины среди этого семейства сетей называется *минимальным остовным деревом*. Примем теперь это дерево за дерево Штейнера (абсолютно минимальную сеть) для множества $\mathcal{A}$. Ясно, что полученная сеть, вообще говоря, имеет большую длину, чем абсолютно минимальная сеть. Тем не менее, этот подход оказывается весьма эффективным по целому ряду причин. Во-первых, существуют быстрые алгоритмы построения минимальных остовных деревьев (например, алгоритм Краскала [31] или алгоритм Шеймоса [35]), во-вторых, длина минимального остовного дерева, оказывается, не может сильно отличаться от длины абсолютно минимального дерева (это связано с так называемым отношением Штейнера, см. например [21]).

Некоторые точные методы поиска абсолютно минимальной сети основаны на том, что для определенного класса граничных множеств, таких как вершины правильного многоугольника [24], зигзаги [23], точки на окружности со специальными свойствами [22, 34], "достаточно плотные" выпуклые многоугольники [36] и некоторые другие, абсолютно минимальные сети описаны явно. Однако, большинство граничных множеств не входят в этот список. Остальные точные методы основаны на переборе так называемых *локально минимальных сетей*, т.е. сетей, у которых любой достаточно малый фрагмент абсолютно минимален. Имеется хорошо известная классическая теорема (для случая многообразий доказанная Ивановым и Тужилиным в [28]), описывающая локальную структуру локально минимальных сетей:

Теорема *Сеть* Γ *в римановом многообразии* $\mathcal{W}$*, затягивающая конечное множество* $\mathcal{A}$ *точек из* $\mathcal{W}$*, является локально минимальной, если и только если имеют место следующие свойства:*

- *все ребра сети* Γ *— геодезические;*
- *угол между любыми двумя ребрами, выходящими из одной вершины, не меньше* $120°$*; в частности, степень каждой вершины сети* Γ *не превосходит* 3*;*
- *все вершины степени* 1 *являются граничными, т.е. лежат в* $\mathcal{A}$*;*
- *если вершина степени* 2 *не граничная, то угол между выходящими из нее ребрами равен* $180°$*.*

Из этой теоремы следует, что мы можем, не изменяя локально минимальной сети Γ как подмножества многообразия $\mathcal{W}$, добавлять и удалять из Γ неграничные вершины степени 2 (также сделав естественную перестройку ребер). Полученная при этом сеть останется локально минимальной.

Вышесказанное приводит к следующему соглашению: в дальнейшем, не ограничивая общности, *будем всегда считать, что рассматриваемые сети не имеют неграничных вершин степени* 2.

Таким образом, можно считать, что все вершины степени 1 и 2 локально минимальной сети Γ принадлежат ее границе. Теперь видно, что по модулю этого соглашения имеется конечное число типов локально минимальных сетей. Мелзак [32] в 1960 году придумал алгоритм построения локально минимальной сети по заданному типу, являющемуся деревом, и заданной границе $\mathcal{A}$. Однако, этот алгоритм имеет экспоненциальную сложность. Хванг [27] в 1986 году сократил время работы этого алгоритма до линейного.

Ясно, что любая абсолютно минимальная сеть является локально минимальным деревом. Поэтому, строя все локально минимальные деревья с помощью алгоритма Мелзака-Хванга и выбирая затем из них сеть с наименьшей длиной, мы найдем абсолютно минимальную сеть. Таким образом, основная сложность этого метода заключается в большом переборе возможных типов локально минимальных сетей. Как мы уже отмечали, проблема Штейнера является NP-трудной.

Возникает вопрос: насколько a priori мы можем ограничить перебор возможных типов локально минимальных сетей, затягивающих данную границу? В работах [5] и [17] А. О. Иванов и А. А. Тужилин изучали влияние геометрии границы на такие априорные ограничения. Другими словами этот вопрос можно сформулировать следующим образом: *какое максимальное количество локально минимальных сетей может затягивать данную (но произвольную) границу*?

А. Т. Фоменко, А. О. Иванов и А. А. Тужилин предположили, что для ответа на этот вопрос мог бы быть полезен некий аналог теории Морса для минимальных сетей. Более развернуто их идея применения теории Морса для оценки количества локально минимальных сетей, затягивающих данную границу, изложена в следующей программе:

1. Построить конфигурационное пространство $\mathcal{K}$, точки которого можно было бы интерпретировать как сети с данной границей.

2. Задать на пространстве $\mathcal{K}$ функцию f.

3. Определить критические точки и критические значения функции f. Причем сделать это так, чтобы некоторые из критических точек можно было бы интерпретировать как локально минимальные сети с данной границей.

4. Определить аналог индекса из классической теории Морса для критических точек функции f.

5. Найти связь между индексами критических точек функции f и некоторыми характеристиками (например, топологией) пространства $\mathcal{K}$.

Оценивая индексы критических точек, с помощью п. 5) вышеизложенной программы можно оценивать и количество некоторых критических точек, в частности, локально минимальных сетей с данной границей, которые, согласно п. 3), также являются критическими точками.

В настоящей диссертации построена теория Морса минимальных сетей, удовлетворяющая всем пяти пунктам вышеприведенной программы, и продемонстрировано приложение построенной теории Морса для получения оценок на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу.

2 Краткое содержание диссертации

В главе 1 определяются базовые понятия и объекты данной диссертации: параметрическая сеть (или просто сеть) в общем метрическом пространстве; параметризующий граф сети; граничные и подвижные вершины, граничные и внутренние ребра сети и параметризующего графа; граница сети; количество внутренних ребер называется *рангом* сети и параметризующего графа; длина сети; минимальная параметрическая сеть. Вводится понятие *геометрического дерева* как дерева, имеющего n вершин степени 1, которые считаются граничными и помечены различными числами от 1 до n, и не имеющего вершин степени 2. Ниже, в разделе 3 Введения и более формально в главе 3, показывается, что для наших целей в качестве параметризующих графов сетей имеет смысл ограничиться рассмотрением только геометрических деревьев. Множество всех геометрических деревьев с n граничными вершинами обозначается через $\mathcal{G}$. На этом множестве задается отношение частичного порядка и выясняются некоторые свойства множества $\mathcal{G}$, связанные с этим отношением. Выводятся формулы, вычисляющие количество геометрических деревьев с фиксированным числом граничных и подвижных вершин.

Далее, изучаются *регулярные* сети, т.е. сети без вырожденных внутренних ребер, параметризованные геометрическими деревьями. Строится конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей с данной границей. На этом пространстве корректно определена функция ℓ длины сети. Пространство $\mathcal{T}$ понадобится в главе 2 при реализации программы построения теории Морса минимальных сетей.

В главе 2 формулируется общая концепция построения теории Морса для произвольных множеств и произвольных функций на них. В рамках этой концепции кратко напоминается классическая теория Морса и теория Морса для симплициальных комплексов, основы которой заложены О. Р. Мусиным в работе [12]. Определение комплекса V_- и индекса для критической точки из работы [12] послужили отправной точкой для разработанного в этой главе комбинаторного подхода к построению теории Морса для произвольных множеств и функций на них — комбинаторной теории Морса.

С помощью результатов комбинаторной теории Морса последовательно реализуется программа построения теории Морса минимальных сетей, изложенная в разделе 1 Введения. В качестве пары множество-функция берется из главы 1 конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей с данной границей и функция длины сети ℓ. К пространству $\mathcal{T}$ и функции ℓ применяется комбинаторный подход для определения критических значений, критических точек и их индексов. Выводится равенство Морса, связывающее индексы критических значений (точек) с "топологией" пространства $\mathcal{T}$. На пространстве $\mathcal{T}$ вводится некоторая фильтрация подпространствами $\mathcal{T}_{(k)}$, которая позволяет написать несколько равенств Морса. Показывается, что все критические точки функции ℓ можно интерпретировать как минимальные параметрические сети, и обратно. Для минимальной параметрической сети определяются мощные расщепления и доказывается, что индекс критической точки можно вычислить через мощные расщепления соответствующей минимальной параметрической сети. С помощью полученных равенств Морса выводятся формулы, позволяющие вычислить количество минимальных параметрических сетей ранга k через мощные расщепления минимальных параметрических сетей с меньшим рангом (более точно этот результат сформулирован ниже).

Основная задача **главы 3** — показать применимость теории Морса минимальных сетей для изучения минимальных сетей в различных метрических пространствах. Особое внимание уделяется следующим пространствам: евклидовы пространства $\mathbb{R}^N$, полные односвязные римановы многообразия с неположительной секционной кривизной и манхэттенская плоскость. Результаты теории Морса минимальных сетей позволяют получить оценки на количество локально минимальных сетей, затягивающих фиксированную границу общего положения в одном из этих пространств. Оценки подобного рода получены для локально минимальных сетей, затягивающих границу общего положения, состоящую из 4, 5 точек (случай 3 граничных точек тривиален) на двумерных полных односвязных римановых многообразий с неположительной секционной кривизной (в частности для евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и плоскости Лобачевского L^2). Для манхэттенской плоскости в случае границы общего положения из 4, 5 граничных точек получены оценки на количество локально минимальных критических множеств (здесь также случай 3 граничных точек тривиален). Кроме того, показано, что степени вершин сетей из локально минимальных критических множеств в случаях границы общего положения из 4 или 5 точек не превосходят 3. Отметим, что для границ не общего положения степень вершин таких сетей может быть равна 4. Также в этой главе найдена универсальная граница, т.е. граница, которую затягивают все комбинаторно возможные локально минимальные сети.

3 Основные результаты диссертации

Приведем основные определения и результаты диссертации.

1) Комбинаторная теория Морса.

Мы начнем изложение основных результатов и определений диссертации с комбинаторной теории Морса, идеи которой затем используются при реализации программы построения теории Морса для минимальных сетей из раздела 1 Введения.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое множество и f — вещественнозначная функция на $\mathcal{K}$. Обозначим через $\mathcal{K}_{\le c}$ подмножество точек из множества $\mathcal{K}$, в которых значение функции f не превосходит числа c. Главный вопрос, на который должна отвечать теория Морса для пары $(\mathcal{K}, f)$, можно сформулировать следующим образом: *Как меняется множество $\mathcal{K}_{\le c}$ с изменением числа c?*

В частности, в теории Морса для пары $(\mathcal{K}, f)$ должно быть определено что означает слово “меняется”. Так, в классической теории Морса, где $\mathcal{K}$ — гладкое многообразие и f — гладкая функция на $\mathcal{K}$, под “изменением” множества $\mathcal{K}_{\le c}$, которое является топологическим пространством, понимают изменение его гомотопического типа. В симплициальной теории Морса, основы которой заложены О. Р. Мусиным в работе [12], множество $\mathcal{K}$ является совокупностью вершин конечного симплициального комплекса $\mathcal{M}$ и f — произвольная вещественнозначная функции на $\mathcal{K}$. Здесь под "изменением" множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ понимается изменение комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$. Комплекс $\mathcal{M}_{\leq c}$ по определению состоит их всех симплексов, вершины которых суть вершины из множества $\mathcal{K}_{\leq c}$. Эти два примера теорий Морса подробнее рассматриваются в разделах 2 и 3 главы 2.

В диссертации предлагается комбинаторный подход к построению теории Морса для общего случая: $\mathcal{K}$ — произвольное множество, f — произвольная вещественнозначная функция на $\mathcal{K}$.

Для этого нам понадобится ввести на множестве $\mathcal{K}$ дополнительную структуру. Рассмотрим какое-нибудь конечное покрытие Σ множества $\mathcal{K}$ его подмножествами K_i, $\mathcal{K} = \cup_i K_i$. Покрытие $\Sigma = \{K_i\}$ далее будем называть *комбинаторной топологией* или, сокращенно, *к-топологией* пространства $\mathcal{K}$. Пространство, снабженное комбинаторной топологией назовем *комбинаторным топологическим пространством* или, сокращенно, *к-топологическим пространством*.

Определение. Нерв к-топологии (конечного покрытия) Σ пространства $\mathcal{K}$ мы будем называть *к-топологическим типом* пространства $\mathcal{K}$ и обозначать через $\mathcal{N}(\mathcal{K})$.

Замечание. Выбор подобной терминологии объясняется двумя причинами: во-первых, из любого конечного покрытия можно изготовить (хотя нам это и не понадобиться) настоящую топологию, использовав его как предбазу; и, во-вторых, техника симплициальных комплексов (в частности нервов) является одним из основных инструментов изучения чисто топологических проблем в науке, называемой *комбинаторная топология*, см. например [1] и [13].

Подмножество $\mathcal{K}_{\leq c}$ также можно считать к-топологическим пространством с индуцированной к-топологией $\Sigma_{\leq c} = \{K_i \cap \mathcal{K}_{\leq c}\}$. К-топологический тип пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ мы для сокращения записи будем обозначать через $\mathcal{N}_{\leq c}$. Отметим, что при $c_1 \leq c_2$ комплекс $\mathcal{N}_{\leq c_1}$ можно считать подкомплексом комплекса $\mathcal{N}_{\leq c_2}$. Под *изменением* пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ мы будем понимать изменение его к-топологического типа $\mathcal{N}_{\leq c}$. И далее, мы будем изучать именно изменение комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ при изменении параметра c.

Определение. Число $\tilde{c}$ называется *критическим значением* для функции f, если при прохождении параметра c через $\tilde{c}$ изменяется к-топологический тип пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$.

В силу конечности комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ функция f имеет конечное число критических значений. Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Тогда, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ комплекс $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+\varepsilon}$ ($\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-\varepsilon}$) остается неизменным. Обозначим этот комплекс через $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}$ ($\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$). Через $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ обозначим замыкание множества симплексов $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ до симплициального комплекса.

Два следующих простых утверждения дают ответ на главный вопрос, стоящий перед теорией Морса (см. выше).

Утверждение 2.1 *Пусть c_1, c_2,..., c_m — все критические значения функции f. Тогда эти значения разбивают всю прямую $\mathbb{R}$ на интервалы постоянства к-топологического типа пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$: $(-\infty, c_1)$, (c_1, c_2),..., (c_{m-1}, c_m), $(c_m, +\infty)$.*

Утверждение 2.2 *Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Парой Морса, измеряющей изменение к-топологического типа пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение $\tilde{c}$, является пара $(d\mathcal{N}_{\tilde{c}}, d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-})$.*

Другими словами, имеет место равенство: $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-} \cup d\mathcal{N}_{\tilde{c}} = \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}$.

Определим теперь индексы критических значений и найдем их связь с к-топологией пространства $\mathcal{K}$. *Индексом* критического значения $\tilde{c}$ функции f назовем следующую разность

$$\operatorname{ind}_f \tilde{c} := \chi(d\mathcal{N}_{\tilde{c}}) - \chi(d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}),$$

где $\chi(\cdot)$ — эйлерова характеристика.

Обозначим через $\mathcal{N}_0$ комплекс $\mathcal{N}_{\leq c_0}$, где c_0 — достаточно большое по модулю отрицательное число. Согласно утверждению 2.1 такое обозначение корректно. Тогда аналогом классического равенства Морса в нашем случае является следующее утверждение.

Утверждение 2.5 *Пусть c_1, c_2,..., c_m — все критические значения функции f. Сумма индексов всех критических значений функции f равняется эйлеровой характеристике комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ минус эйлерова характеристика комплекса $\mathcal{N}_0$, т.е.*

$$\sum_i \operatorname{ind}_f c_i = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})) - \chi(\mathcal{N}_0).$$

На практике вычисление критических значений функции f и соответствующих пар Морса по приведенным выше определениям, носящим "глобальный" характер, крайне неэффективно. Стремление "локализовать" вычисления как в классическом случае, так и в нашем, приводит к определению критической точки функции f и к понятию функции Морса (в нашем случае комбинаторной функции Морса).

Назовем *стратом* пространства $\mathcal{K}$ любое пересечение $K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$ элементов к-топологии пространства $\mathcal{K}$. Каждому симплексу $\triangle$ из комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ отвечает некоторый непустой страт пространства $\mathcal{K}$, который мы обозначим через $S(\triangle)$.

Утверждение 2.3 *Число $\tilde{c}$ является критическим значением функции f тогда и только тогда, когда существует страт $S(\triangle)$, на котором абсолютный минимум функции f равен $\tilde{c}$, т.е.*

$$\tilde{c} = \inf_{x \in S(\triangle)} f(x).$$

Естественно теперь дать такое определение критической точки

Определение. Точка x называется *критической* точкой для функции f, если она является точкой абсолютного минимума функции f на каком-либо страте $S(\triangle)$, содержащем эту точку, т.е.

$$f(x) = \inf_{x' \in S(\triangle)} f(x'), \quad \text{где } S(\triangle) \ni x.$$

На первом этапе "локализации" нам понадобится аналог классической функции Морса (а также симплициальной функции Морса, см. раздел 3 главы 2). Напомним, что в классическом случае для функции Морса изменение гомотопического типа множества $\mathcal{K}_{\le c}$ при прохождении через критическое значение описывается относительно просто — приклеиваются "ручки" вида $(D^\lambda \times D^{N-\lambda}, (\partial D)^\lambda \times D^{N-\lambda})$. Аналогичным свойством обладает и комбинаторная функция Морса.

Определение. *Комбинаторной функцией Морса* на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$ называется функция, для которой выполнены следующие два условия:

1. На каждом страте $S(\triangle)$ функция f достигает своей точной нижней грани. Обозначим через $\min_f S(\triangle)$ множество точек страта $S(\triangle)$, на которых достигается эта точная нижняя грань.

2. Для каждого критического значения $\tilde{c}$ комплекс $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ представляется в виде объединения симплексов $\triangle^j_{\tilde{c}}$, не лежащих в $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ (здесь симплекс $\triangle^j_{\tilde{c}}$ рассматривается как комплекс, т.е. вместе со всеми своими гранями), причем при $j' \neq j''$ выполнено включение $\triangle^{j'}_{\tilde{c}} \cap \triangle^{j''}_{\tilde{c}} \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$.

(Иллюстрацией к этому определению служит рис. 2.3 на стр. 70.)

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.7 *Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение комбинаторной функции Морса f. Парой Морса, измеряющей изменение к-топологического типа множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение $\tilde{c}$, является объединение "ручек" $(\triangle^j_{\tilde{c}}, \triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-})$. Причем пересечение двух различных "ручек" $\triangle^{j'}_{\tilde{c}}$ и $\triangle^{j''}_{\tilde{c}}$ принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$.*

Если определить *индекс* каждой ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ равенством $\operatorname{ind}_f \triangle^j_{\tilde{c}} := 1 - \chi(\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-})$. Тогда, равенство Морса (утверждение 2.5) в более "локализованном" виде можно переписать следующим образом.

Утверждение 2.8 *Пусть f — комбинаторная функция Морса на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$. Обозначим через $\triangle_\alpha$ совокупность ручек функции f. Тогда сумма индексов всех ручек функции f равна эйлеровой характеристике комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$, т.е.*

$$\sum_\alpha \operatorname{ind}_f \triangle_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})).$$

На втором этапе "локализации" мы каждой ручке сопоставим некоторую критическую точку, определим индекс у каждой точки и вычислим индекс каждой ручки через индекс соответствующей критической точки.

Пусть $\triangle_\alpha$ — некоторая ручка функции f. Выберем произвольную точку из множества $\min_f S(\triangle_\alpha)$ и обозначим ее x_α; точка x_α будет называться *каноническим представителем* ручки $\triangle_\alpha$ в пространстве $\mathcal{K}$.

Теперь определим для произвольной точки $x \in \mathcal{K}$ *комбинаторный потенциал* или, сокращенно, *к-потенциал*, который мы будем обозначать через $V_-(x)$. Симплекс $\triangle$ принадлежит комбинаторному потенциалу $V_-(x)$ тогда и только тогда, когда значение функции f в точке x не является абсолютным минимумом функции f в страте $S(\triangle)$. Легко заметить, что $V_-(x)$ — симплициальный комплекс.

Определение. *Индексом* произвольной точки x из пространства $\mathcal{K}$ назовем следующую разность

$$\operatorname{ind}_f x := 1 - \chi(V_-(x)).$$

Отметим, что ненулевым индексом обладают только критические точки.

Оказывается, что индекс ручки совпадает с индексом ее канонического представителя. Поэтому имеет место теорема.

Теорема 2.1 *Пусть f — комбинаторная функция Морса на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$. Обозначим через $\{\triangle_\alpha\}$ совокупность ручек функции f, а через x_α — их канонических представителей. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_\alpha \operatorname{ind}_f x_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})).$$

2) Реализация программы построения теории Морса минимальных сетей.

Начнем с пп. 1) и 2) — построим конфигурационное пространство сетей с данной границей и определим на нем функцию.

Обычно, формализуя представление о сети как о связном одномерном континууме, *сетью* в пространстве $\mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ — достаточно хорошее пространство, например многообразие или нормированное пространство, называется непрерывное отображение связного топологического графа (конечного одномерного CW-комплекса) в $\mathcal{W}$. При этом ограничение Γ на ребро графа G называется *ребром* сети Γ, а ограничение Γ на вершину графа G — *вершиной* сети Γ. Предполагаются также некоторые условия измеримости ребер сети Γ, например отображение Γ должно быть кусочно-гладким на каждом ребре графа G, для того, чтобы можно было определить *длину ребра*, как длину кривой, и *длину сети*, как сумму длин ее ребер.

Во многих задачах минимизации функционала длины на различных классах сетей (например, проблема Штейнера) ребра сети, доставляющей минимум длины, — это кратчайшие кривые, соединяющие пару вершин сети. Поэтому при изучении минимальных сетей достаточно ограничиться сетями, у которых каждое ребро является кратчайшей кривой. В частности, у таких сетей длина ребра равна расстоянию между вершинами, которые оно соединяет. Таким образом, мы приходим к следующему определению сети в общем метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$.

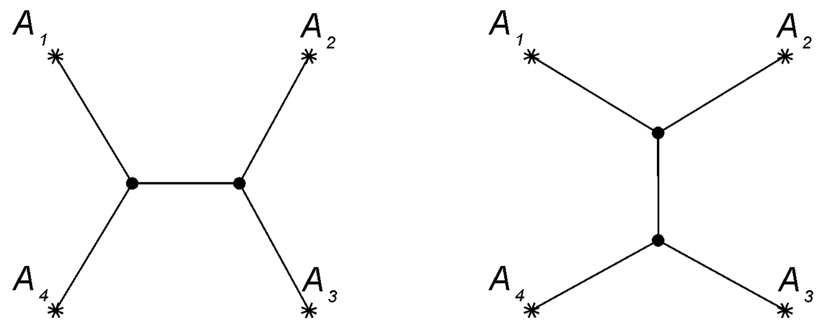


Рис. 1:

Определение. Пусть G — связный граф. Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G. Отображение $\Gamma : V(G) \to \mathcal{X}$ назовем *параметрической сетью* (или просто *сетью*) в пространстве $\mathcal{X}$. Сам граф G называется *параметризующим графом* сети Γ.

Пусть $e = (v, w)$ — ребро сети Γ. Длину ребра e по определению положим равной $\rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$. Сумму длин всех ребер сети Γ назовем *длиной сети* Γ.

Если выделено некоторое конечное подмножество $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{X}$, такое что оно содержится в образе $\operatorname{Im}\Gamma$ сети Γ, то говорят, что сеть Γ *затягивает* множество $\mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ называют *границей* сети Γ.

Для сетей с границей различают два понятия: топология сети и тип сети. Такая необходимость возникает из-за того, что топология сети Γ (т.е. класс графов, изоморфных G, где G — параметризующий граф сети Γ) не определяет полностью того, что естественно было бы называть комбинаторной структурой сети с границей. Например, две сети Γ_1 и Γ_2, изображенные на рис. 1, имеют одну и ту же топологию и границу. Но эту границу они "по-разному затягивают". Из приведенного примера мы видим, что для того, чтобы полностью определить комбинаторную структуру сети с границей, нужно задать соответствие точек из границы сети Γ некоторым вершинам ее параметризующего графа G. Эти вершины называются *граничными* для графа G, а их совокупность обозначается через ∂G. Такое соответствие $b : \partial G \to \mathcal{A}$ называется *граничным отображением* для графа G. Пара (G, b) называется *типом* сети Γ с границей $\mathcal{A}$. Обозначим через $[G, b]$ множество всех сетей типа (G, b). Отметим, что каждая сеть из $[G, b]$ задается лишь положениями своих подвижных вершин, поскольку положения граничных вершин уже заданы отображением b.

Определение. Сеть Γ, имеющая наименьшую длину среди всех сетей из множества $[G, b]$, называется *минимальной параметрической сетью* типа (G, b).

Выше, на примере локально минимальных сетей, мы видели, что не имеет смысла рассматривать сети, у которых неграничные вершины (их чаще называют *подвижными*) имеют степень 1 или 2. Таким образом, все подвижные вершины рассматриваемых нами сетей имеют степень не меньше 3. Отсюда, в частности, следует, что все вершины степени 1 являются граничными. Вообще говоря, у таких сетей могут быть граничные вершины v степени 2 и выше. Однако, с технической точки зрения удобно считать, что таких граничных вершин нет. Для этого можно искусственно "вставить" в граничную вершину v новую подвижную вершину u, перебросить все инцидентные граничной вершине v ребра на вершину u и соединить вершину u с вершиной v новым ребром (это ребро будет вырожденным, т.е. иметь нулевую длину). После проделанной процедуры получится новая сеть Γ, которая как подмножество пространства $\mathcal{X}$ совпадает с исходной, но у параметризующего дерева G сети Γ все вершины степени 1 и только они являются граничными и нет вершин степени 2.

Если точки из границы $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ сети Γ занумерованы числами от 1 до n, то оказываются занумерованными (помеченными) и граничные вершины дерева G — граничной точке A_i соответствует граничная вершина с пометкой i. Таким образом, при фиксированной границе $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ тип сети, затягивающей эту границу, определяется деревом с занумерованными (помеченными) граничными вершинами. Поэтому далее при фиксированной границе $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ у всех параметризующих деревьев G сетей Γ с границей $\mathcal{A}$ граничные вершины будут считаться помеченными различными числами от 1 до n; а также вместо обозначения $[G, b]$ будет использоваться сокращенное обозначение $[G]$.

Подводя итог вышесказанному, мы будем считать, если не оговорено противное, что при фиксированной границе $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ все параметризующие графы сетей, затягивающих границу $\mathcal{A}$, являются деревьями с n вершинами степени 1, которые считаются граничными и которые помеченными различными числами от 1 до n, и без вершин степени 2. Такие деревья назовем *геометрическими деревьями*. Множество всех геометрических деревьев с n граничными вершинами обозначим через $\mathcal{G}$ (как правило параметр n ясен из контекста, поэтому мы его будем опускать).

Приступим теперь непосредственно к построению конфигурационного пространства сетей с данной границей. Рассмотрим пространство, представляющее собой несвязную сумму $\tilde{\mathcal{T}} = \bigsqcup\limits_{G\in\mathcal{G}}[G]$. Пространства $[G]$ будем рассматривать как подмножества этой суммы. Зададим теперь на пространстве $\tilde{\mathcal{T}}$ отношение эквивалентности следующим образом.

Для этого нам понадобится операция редукции сети $\Gamma : G \to \mathcal{X}$ по вырожденному ребру. Пусть $e = (v, w)$ — вырожденное ребро сети Γ, т.е. $\Gamma(v) = \Gamma(w)$. "Стянем" это ребро в графе G в точку. На вновь образовавшейся вершине u отображение Γ положим равной $\Gamma(v)$. На неизменившихся вершинах графа G отображение Γ оставим прежним. Такая операция называется *редукцией* сети Γ по вырожденному ребру (v, w). Обратная операция к редукции по вырожденному ребру называется *расщеплением вершины*. Две точки (сети) $\Gamma_1 \in [G_1]$ и $\Gamma_2 \in [G_2]$ будем считать *эквивалентными*, если и только если, проредуцировав их по всем внутренним (т.е. соединяющим две подвижные вершины) вырожденным ребрам, мы получим одну и ту же сеть.

Построим фактор-пространство $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}/\!\sim$, где $\sim$ — описанная выше эквивалентность. Через π обозначим стандартную проекцию $\tilde{\mathcal{T}}$ на фактор-пространство $\mathcal{T}$. Пространство $\mathcal{T}$ состоит из всех классов эквивалентности по отношению $\sim$. Опишем теперь как устроены эти классы. Пусть Υ — класс эквивалентности сети Γ, тогда Υ состоит из всех сетей, получающихся из сети Γ некоторой комбинацией расщеплений ее подвижных вершин и редукций по ее вырожденным внутренним ребрам. Любую сеть из класса эквивалентности Υ назовем *представителем* данного класса. Заметим, что поскольку операции редукции и расщепления сохраняют длину сети, то все сети из одного класса эквивалентности имеют одинаковую длину. Следовательно, на пространстве $\mathcal{T}$ корректно определена *функция длины* ℓ.

В каждом классе эквивалентности существует и единственна сеть (представитель), которая является *регулярной* сетью, т.е. сетью без вырожденных внутренних ребер. Такую сеть мы назовем *регулярным представителем* данного класса. Очевидно, что любая регулярная сеть с границей $\mathcal{A}$ является регулярным представителем некоторого класса эквивалентности. Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между регулярными сетями с границей $\mathcal{A}$ и классами эквивалентности.

Это соответствие мотивирует следующее определение.

Определение. Пространство $\mathcal{T}$ назовем *конфигурационным пространством всех регулярных сетей с данной границей*.

В дальнейшем, если не оговорено противное, элементы (классы эквивалентности) пространства $\mathcal{T}$ будут рассматриваться как регулярные сети с данной границей.

Таким образом, пп. 1) и 2) реализованы.

Для того чтобы реализовать пп. 3), 4) и 5) воспользуемся определениями и результатами комбинаторной теории Морса (см. выше).

Сначала зададим к-топологию на пространстве $\mathcal{T}$. Поскольку проекция $\pi : \tilde{\mathcal{T}} \to \mathcal{T}$ не склеивает друг с другом никакие две различные сети Γ_1 и Γ_2, принадлежащие пространству $[G]$, то мы имеем вложение пространства $[G]$ в пространство $\mathcal{T}$. Образ пространства $[G]$ при этом вложении мы обозначим через $\langle G\rangle$. Ясно, что $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} \langle G\rangle$. Оказывается, имеет место более сильное равенство: $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}_{(n-3)}} \langle G\rangle$, где $\mathcal{G}_{(n-3)}$ — множество всех геометрических деревьев ранга $n-3$, т.е. бинарных деревьев. Таким образом, последнее равенство задает нам на пространстве $\mathcal{T}$ к-топологию $\Sigma = \{\langle G\rangle\}_{G\in\mathcal{G}_{(n-3)}}$. Теперь мы можем пользоваться всеми определениями и результатами комбинаторной теории Морса.

Следующее утверждение описывает критические точки функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$.

Утверждение 2.9 *Регулярная сеть Γ является критической точкой функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда Γ — регулярная минимальная параметрическая сеть.*

Напомним, что в п. 3) программы построения теории Морса минимальных сетей требовалось, чтобы локально минимальные сети являлись критическими точками функции ℓ на конфигурационном пространстве $\mathcal{T}$. В отличие от большинства введенных выше определений и конструкций для общего метрического пространства $\mathcal{X}$ понятие локально минимальной сети может быть бессодержательно. Однако, в случае когда $\mathcal{X}$ есть евклидово пространство или, более общо, полное односвязное многообразие $\mathcal{W}$ с неположительной секционной кривизной это понятие имеет смысл. В этом случае также можно показать (см. параграф 3.1 и раздел 4 главы 3), что локально минимальные сети на $\mathcal{W}$ можно интерпретировать как регулярные минимальные параметрические сети с топологией бинарного дерева. Поэтому локально минимальные сети на $\mathcal{W}$, в силу предыдущего утверждения, являются критическими точками.

Также напомним, что определение индекса сети Γ в комбинаторной теории Морса было дано через эйлерову характеристику к-потенциала $V_-(\Gamma)$. Для удобства вычислений необходимо выразить индекс критической сети Γ в терминах теории минимальных сетей, а именно, через расщепления сети Γ специального вида, способные уменьшить длину сети Γ. Сеть Γ' называется *расщеплением* сети Γ, если она получена с помощью последовательности операций расщепления подвижных вершин сети Γ; другими словами, сеть Γ' отличается от сети Γ несколькими дополнительными вырожденными внутренними ребрами $e_1,\ldots,\ e_s$. Если $s=1$, то расщепление Γ' называется *элементарным*. Каждое расщепление Γ' порождает набор так называемых *производных расщеплений* Γ_i сети Γ: Γ_i отличается от сети Γ только одним ребром e_i. Если расщепление Γ' способно уменьшить свою длину, т.е. не является минимальной параметрической сетью, то Γ' называется *геометрическим расщеплением* сети Γ. Расщепление Γ' называется *мощным*, если любое его производное расщепление является геометрическим. Обозначим через $PS_j(\Gamma)$ совокупность всех мощных расщеплений сети Γ, ранг которых равен j. Наконец, сеть Γ назовем *сетью с элементарно порожденными расщеплениями*, если для каждого ее геометрического расщепления Γ' в наборе его производных расщеплений также существует геометрическое расщепление. Пример сети с не элементарно порожденными геометрическими расщеплениями приведен в книге [29]. Следующее утверждение (в основном тексте диссертации как следствие) позволяет выразить индекс критической сети через ее мощные расщепления.

Следствие 2.4 *Пусть $\Gamma \in \mathcal{T}$ — регулярная минимальная параметрическая сеть ранга i с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда*

$$\chi(V_-(\Gamma)) = \sum_k (-1)^{k-1} \# PS_{i+k}(\Gamma).$$

Пусть теперь функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса. Перепишем также равенство Морса (теорема 2.1) в терминах теории минимальных сетей. Напомним, что в равенстве Морса фигурировали индексы канонических представителей Γ_α ручек $\triangle_\alpha$.

Оказывается, каждой ручке $\triangle_\alpha$ можно сопоставить некоторое подмножество критических точек, которое обозначается через $C(G_\alpha)$, где G_α — тип канонического представителя Γ_α. Критические подмножества $C(G_\alpha)$ попарно не пересекаются и в объединении дают все множество критических точек. Подробное описание множеств $C(G_\alpha)$ без привлечения языка комбинаторной теории Морса см. в разделе 5 главы 2. Отметим здесь лишь то, что для рассматриваемых в главе 3 примеров множества $C(G_\alpha)$ являются связными компонентами множества критических точек, а сеть Γ_α является в множестве $C(G_\alpha)$ сетью минимального ранга. *Рангом* критического подмножества $C(G_\alpha)$ называется ранг сети Γ_α. Обозначим через C_k совокупность критических подмножеств ранга k. Тогда равенство Морса выглядит следующим образом.

Предложение 2.6 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда имеет место формула*

$$|C_{n-3}| + \dots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \le n-3} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha),$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга строго меньшего $n-3$, а k_α обозначает ранг сети Γ_α.

По аналогии с пространством $\mathcal{T}$ рассмотрим пространства $\mathcal{T}_{(k)}$, которые образованы склейкой по введенной выше эквивалентности пространств $[G]$, соответствующих геометрическим деревьям G с n граничными вершинами и ранга не выше k. Эти пространства образуют фильтрацию на пространстве $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}_{(0)} \subset \mathcal{T}_{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{T}_{(n-4)} \subset \mathcal{T}_{(n-3)} = \mathcal{T}$. Мы можем провести для каждого пространства $\mathcal{T}_{(k)}$ рассуждения, аналогичные рассуждениям для пространства $\mathcal{T}$, и получить предложение

Предложение 2.7 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда имеет место формула*

$$|C_k| + \dots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \le k} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha),$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга строго меньшего k, а k_α обозначает ранг сети Γ_α.

Из этого предложения вытекает теорема, которая и используется в приложениях (см. главу 3).

Теорема 2.2 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда количество критических подмножеств ранга k выражается следующей формулой*

$$|C_k| = \sum_{\Gamma_\alpha:\ k_\alpha<k} (-1)^{k-k_\alpha-1} \# PS_k(\Gamma_\alpha)$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга $k_\alpha < k$.

Эта теорема позволяет, по индукции оценивая мощности совокупностей C_k, оценить и мощность совокупности C_{n-3}, в которой как раз содержаться все локально минимальные сети для рассматриваемых ниже примеров метрических пространств.

Таким образом, можно утверждать, что программа построения теории Морса минимальных сетей полностью реализована.

3) Приложение теории Морса минимальных сетей для получения оценок количества локально минимальных сетей с данной границей.

Напомним, что основным мотивом при разработке теории Морса минимальных сетей была попытка ответить на вопрос: *какое максимальное количество локально минимальных сетей может затягивать данную (но произвольную) границу*?

Данный вопрос, изначально ставившийся для евклидовой плоскости, не для всех метрических пространств $\mathcal{X}$ имеет смысл. Как мы уже отмечали, даже понятие локально минимальных сетей в общем метрическом пространстве не определено. Но и для тех пространств, в которых понятие локально минимальной сети вполне содержательно, этот вопрос является не совсем корректным. Причина некорректности состоит в том, что, несмотря на конечность количества типов локально минимальных сетей, самих локально минимальных сетей (или, более общо, минимальных параметрических сетей) может быть бесконечно много. Такая ситуация часто встречается в нормированных пространствах с негладкой нормой, например на манхэттенской плоскости, см. раздел 5 главы 3.

Единственность минимальных сетей присуща "гладким" пространствам. В диссертации показано (см. разделы 3 и 4 главы 3), что для границы $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ общего положения на полном односвязном многообразии $\mathcal{W}$ с неположительной секционной кривизной в каждом классе $[G]$, где G — геометрическое дерево, существует и единственна минимальная параметрическая сеть. Из этого утверждения следует, что каждое критическое подмножество $C(G_\alpha)$ состоит ровно из одной регулярной минимальной параметрической сети Γ_α. Таким образом, совокупность C_k в данном случае — это совокупность всех регулярных минимальных параметрических сетей ранга k. В частности, C_{n-3} — это совокупность всех регулярных минимальных параметрических сетей бинарной топологии, т.е. локально минимальных сетей, затягивающих границу $\mathcal{A}$. Заметим что для многообразия $\mathcal{W}$ все условия теоремы 2.2 выполняются, поэтому, оценивая мощные расщепления других критических сетей, с ее помощью можно получить следующую теорему.

Теорема 3.2 *Пусть $\mathcal{W}$ — двумерное односвязное полное многообразие с неположительной секционной кривизной,*

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ — граница общего положения, состоящая из четырех точек. Тогда количество локально минимальных сетей на многообразии $\mathcal{W}$, затягивающих границу $\mathcal{A}$, равно либо* 1*, либо* 2*.*
- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ — граница общего положения, состоящая из пяти точек. Тогда количество локально минимальных сетей на многообразии $\mathcal{W}$, затягивающих границу $\mathcal{A}$, не превосходит* 8*.*

Во многих компьютерных экспериментах с границей на евклидовой плоскости, проведенных как на механико-математическом факультете МГУ, так и в других научных заведениях России и за рубежом, видно, что не все комбинаторно возможные типы локально минимальных сетей (для 4 граничных точек их количество равно 3, а для 5 — 15) могут быть реализованы как настоящие локально минимальные сети. Поэтому должна существовать какая-то верхняя граница, оценивающая их количество. Теорема 3.2 — это первая строго доказанная оценка подобного рода для границ с фактически произвольной геометрией.

Несложно показать, что локально минимальные сети, затягивающие границу общего положения на многообразии $\mathcal{W}$, являются (строгими) локальными минимумами функции длины ℓ на пространстве $\mathcal{T}$. На манхэттенской плоскости $\mathcal{H}$, в силу уже отмечавшейся неединственности минимальных сетей фиксированного типа, это не так. (Строгим) *локальным минимумом* функции ℓ в такой ситуации естественно называть связное подмножество $W \subset \mathcal{T}$, на котором функция ℓ постоянна, скажем равна $\tilde{c}$, а в достаточно малой проколотой окрестности $B_\varepsilon(W)\setminus W$ подмножества W — строго больше $\tilde{c}$. Отметим, что локальный минимум W функции ℓ на $\mathcal{T}$ совпадает с одним из критических подмножеств $C(G_\alpha)$. Теперь основной вопрос можно было бы переформулировать следующим образом: *какое максимальное количество локальных минимумов может быть у функции длины сети ℓ на конфигурационном пространстве всех регулярных сетей с данной (но произвольной) границей?*

Ответом на этот вопрос для случая границ, состоящих из 4 и 5 точек, служит следующая теорема.

Теорема 3.3 *Пусть $\mathcal{H}$ — плоскость $\mathbb{R}^2$ с манхэттенской нормой,*

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ — граница общего положения, состоящая из четырех точек. Тогда все канонические представители локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ являются бинарными деревьями и количество этих локальных минимумов равно либо* 1*, либо* 2.

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ — граница общего положения, состоящая из пяти точек. Тогда все канонические представители локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ являются бинарными деревьями и количество этих локальных минимумов не превосходит* 6.

4) Явные формулы для вычисления количества геометрических деревьев определенного ранга.

Для сравнения полученных в п.3) настоящего раздела оценок с количеством комбинаторно возможных локально минимальных сетей необходимо перечислить геометрические деревья, являющихся бинарными, т.е. геометрические деревья с n граничными вершинами и $n-2$ подвижными. Представляет также интерес перечислить комбинаторно возможные критические сети с другим количеством подвижных вершин. Иными словами, нужно подсчитать количество $Q(n,k)$ геометрических деревьев с n граничными вершинами и k подвижными. В диссертации выведены следующие явные формулы для вычисления чисел $Q(n,k)$.

Теорема 1.1 *Числа $Q(n,k)$ могут быть выражены через классические числа Стирлинга $S_1(\cdot,\cdot)$ 2-ого рода следующим образом*

$$Q(n,k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_{n+k-2}^i S_1(n+k-2-i,k-i).$$

В частности, количество геометрических деревьев, являющихся бинарными деревьями с n граничными вершинами, равно

$$Q(n,n-2)=\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{(2(n-2))!}{(n-2)!}.$$

Поскольку количество регулярных минимальных параметрических сетей ранга k не может превышать количество их параметризующих графов, то имеем оценку $|C_k|\le Q(n,k+1)$. В частности, количество локально минимальных сетей с n граничными вершинами не превосходит числа $\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{(2(n-2))!}{(n-2)!}$.

5) Универсальная граница.

В п.3) настоящего раздела мы видели, что имеют место нетривиальные оценки на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу $\mathcal{A}$ на двумерном многообразии $\mathcal{W}$. Естественно возникает следующий вопрос: *Найдется ли граница $\mathcal{A}$ (разумеется уже не на двумерном многообразии $\mathcal{W}$), такая что для любого бинарного геометрического дерева G существует локально минимальная сеть типа G, затягивающая границу $\mathcal{A}$?*

Данный вопрос известен как *задача об универсальной границе*, которая была сформулирована А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в работе [7]. Перед тем как дать ответ на этот вопрос сформулируем следующую теорему

Теорема 3.1 *Пусть $\mathcal{A}$ — граница, состоящая из вершин правильного N-мерного симплекса евклидового пространства. Тогда для любого геометрического дерева G соответствующая минимальная параметрическая сеть типа G, затягивающая границу $\mathcal{A}$, невырождена (т.е. не имеет вырожденных ребер).*

Поскольку невырожденные минимальные параметрические сети являются регулярными, то, ограничиваясь в предыдущей теореме типами бинарных геометрических деревьев, получаем следствие

Следствие 3.2 *Пусть $\mathcal{A}$ — граница, состоящая из вершин правильного N-мерного симплекса евклидового пространства. Тогда для любого бинарного геометрического дерева G существует локально минимальная сеть типа G, затягивающая границу $\mathcal{A}$.*

Заметим, что свойство универсальности границы $\mathcal{A}$ не пропадает при любых его малых деформациях.

Напомним, что основным точным методом поиска минимального дерева Штейнера для данной границы $\mathcal{A}'$ на евклидовой плоскости является построение всех локально минимальных сетей, затягивающих $\mathcal{A}'$, и затем выбор из них наименьшей по длине. Пример универсальной границы показывает, что при решении таким методом задачи Штейнера для данной (но произвольной) границы $\mathcal{A}'$ в евклидовом пространстве достаточно большой размерности a priori нельзя откинуть ни один из комбинаторно возможных типов локально минимальных сетей. Таким образом, даже если бы существовал в многомерных евклидовых пространствах линейный алгоритм построения по данной границе $\mathcal{A}'$ и данному бинарному типу G соответствующей локально минимальной сети, задача Штейнера решалась бы за экспоненциальное время.

Стоит отметить, что совокупность вершин правильного N-мерного симплекса в евклидовом пространстве является единственным, известным на данный момент, нетривиальным примером границы с произвольным количеством граничных точек, для которой описаны все локально минимальные сети.

Апробация работы

Результаты диссертации рассказаны и обсуждены на следующих семинарах и конференциях, проводимых на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова:

— на семинаре А. О. Иванова и А. А. Тужилина по теории минимальных сетей;

— на семинаре В. М. Бухштабера и О. Р. Мусина по вычислительной геометрии и топологии;

— на семинаре В. И. Арнольда по теории особенностей;

— на семинаре И. Х. Сабитова и Э. Р. Розендорна по геометрии в целом;

— на VII международном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, МГУ, 2001 г.);

— на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, МГУ, 2001 г.).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 7 работах, список которых приведен в конце диссертации на стр. 179.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своим научным руководителям д.ф.-м.н. А. А. Тужилину и д.ф.-м.н. А. О. Иванову за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе. Также, автор хотел бы поблагодарить В. М. Бухштабера, В. А. Васильева, О. М. Касим-Заде, О. Р. Мусина, М. В. Пронина, Э. Р. Розендорна, И. Х. Сабитова, С. П. Тарасова, А. Т. Фоменко за полезные обсуждения результатов настоящей диссертации. Автор признателен руководству математического отдела НИИ Автоматики за поддержку и понимание.

Глава 1

Сети в метрических пространствах

В настоящей главе определяются базовые понятия и объекты данной диссертации.

1 Основные определения

1.1 Сети, параметризующие графы, длина сети

Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ — метрическое пространство.

Рассмотрим конечный связный граф G. Обозначим через $V(G)$ — множество вершин графа G, а через $E(G)$ — множество ребер графа G.

Определение. Отображение $\Gamma : V(G) \to \mathcal{X}$ назовем *параметрической сетью*(или просто *сетью*) в пространстве $\mathcal{X}$. Сам граф G называется *параметризующим графом* сети Γ. Если для сети Γ требуется явно указать ее параметризующий граф G, то мы будем использовать обозначение $\Gamma[G]$.

Ограничение отображения Γ на вершину v графа G, т.е. $\Gamma|_v$, будем называть *вершиной* сети Γ. Ограничение отображения Γ на пару вершин (v, w), образующих ребро (v, w) графа G, т.е. $\Gamma|_{(v,w)}$, будем называть *ребром* сети Γ. Множество вершин сети Γ обозначим через $V(\Gamma)$, а множество ребер сети Γ — через $E(\Gamma)$.

Замечание. Согласно введенным выше определениям на сети в метрическом пространстве естественно переносится вся терминология теории графов: смежность, инцидентность, степень вершины, циклы, понятие дерева и т.д.

Определение. *Длиной ребра* $\gamma = \Gamma|_{(v,w)}$ сети Γ будем называть величину $\ell(\gamma) = \rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$. Ребро γ сети Γ назовем *вырожденным ребром*, если его длина нулевая.

Для каждой сети Γ в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ определим *длину сети* Γ как сумму длин ее ребер, т.е.

$$\ell(\Gamma) = \sum_{\gamma \in E(\Gamma)} \ell(\gamma) = \sum_{(v,w) \in E(G)} \rho(\Gamma(v), \Gamma(w)).$$

1.2 Графы с границей, сети с границей

Выделим некоторое подмножество M множества вершин графа G, которое назовем *множеством граничных* или *неподвижных вершин* графа G, естественно сами вершины из множества M назовем *граничными* или *неподвижными вершинами.* Множество граничных вершин графа G мы будем обозначать через ∂G. Дополнение $V(G) \backslash \partial G$ будем называть *множеством внутренних* или *подвижных вершин* графа G, а сами вершины из множества $V(G) \backslash \partial G$ назовем *внутренними* или *подвижными вершинами.*

Пусть нам также задано некоторое конечное подмножество $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{X}$. Будем говорить, что граф G *затягивает* множество $\mathcal{A}$, если задано некоторое сюръективное отображение $b : \partial G \to \mathcal{A}$ множества граничных вершин ∂G графа G на $\mathcal{A}$. В таком случае отображение b называется *граничным отображением* для графа G, а множество $\mathcal{A}$ называется *границей.*

Ребро e графа G назовем *граничным ребром* графа G, если хотя бы один из его концов является граничной (неподвижной) вершиной. Ребро e графа G назовем *внутренним ребром* графа G, если оба его конца являются внутренними (подвижными) вершинами. *Рангом* графа G назовем количество его внутренних ребер.

Аналогичные определения вводятся и для сетей. Сеть $\Gamma[G]$ назовем *сетью с границей*, если у ее параметризующего графа выделено некоторое множество граничных вершин ∂G. Совокупность вершин сети Γ, соответствующих множеству граничных (неподвижных) вершин назовем *множеством граничных* или *неподвижных вершин* сети Γ, а вершины из этого множества назовем *граничными* или *неподвижными вершинами* сети Γ. Совокупность вершин сети Γ, соответствующих множеству внутренних (подвижных) вершин назовем *множеством внутренних* или *подвижных вершин* сети Γ, а вершины из этого множества назовем *внутренними* или *подвижными вершинами* сети Γ.

Ребро $\gamma = \Gamma|_{(v,w)}$ сети Γ назовем *граничным ребром* сети Γ, если ребро (v, w) графа G является граничным ребром. Ребро $\gamma = \Gamma|_{(v,w)}$ сети Γ назовем *внутренним ребром* сети Γ, если ребро (v, w) графа G является внутренним ребром. *Ранг* сети Γ по определению положим равным рангу ее параметризующего графа.

Обозначим через $\partial\Gamma$ ограничение отображение Γ на множество ∂G графа G, т.е. $\partial\Gamma = \Gamma|_{\partial G}$. Подмножество $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{X}$, являющееся образом при отображении $\partial\Gamma : \partial G \to \mathcal{X}$ называется *границей сети* Γ или *граничным множеством сети* Γ. Будем также говорить, что сеть Γ *затягивает* множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$.

Наконец, сеть Γ с границей $\mathcal{A}$ назовем *регулярной*, если сеть Γ не имеет вырожденных внутренних ребер. В свою очередь, сеть, которая вообще не имеет вырожденных ребер, называется *невырожденной*.

1.3 Тип сети с границей, минимальные параметрические сети

Определение. Пусть $\Gamma[G]$ — сеть с границей $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. *Типом сети* Γ называется пара (G, b), где $b : \partial G \to \mathcal{A}$ граничное отображение для графа G с множеством граничных вершин ∂G.

В дальнейшем важную роль будут играть класс сетей фиксированного типа, который мы будем обозначать через $[G, b]$. Заметим, что любая сеть $\Gamma \in [G, b]$ полностью определяется положением своих подвижных вершин. Поэтому можно сказать, что $[G, b] = \mathcal{X}^{|V(G)\setminus\partial G|}$.

Определение. Точку Γ абсолютного минимума (если она существует) функции длины ℓ на классе $[G, b]$ всех сетей фиксированного типа назовем *минимальной параметрической сетью* типа (G, b).

1.4 Операции редукции и расщепления

Определим операцию редукции графа по ребру.

Определение. Пусть G — некоторый граф , а (v, w) — его ребро. Удалим ребро (v, w) из множества ребер графа G, а вершины v и w — из множества вершин графа G. Теперь добавим в множество $V(G)\backslash\{v, w\}$ новую вершину u, а в множестве ребер $E(G)\backslash(v, w)$ заменим все вхождения вершин v и w на вершину u. Обозначим получившийся граф через $\tilde{G}$. Будем говорить, что граф $\tilde{G}$ получен из графа G *редукцией по ребру* (v, w).

Для операции редукции графа по ребру имеется обратная операция — расщепление вершины.

Определение. Пусть G — некоторый граф, а u — его вершина. Обозначим через $E(u)$ множество ребер графа G, инцидентных вершине u. Разобьем множество $E(u)$ на два подмножества $E(u) = E_1 \sqcup E_2$ (E_1 или E_2 могут быть пустыми). Теперь удалим из множества вершин графа G вершину u и добавим туда две новых вершины v и w. Множество ребер из графа G изменим следующим образом: заменим вхождения вершины u в подмножестве ребер E_1 на вершину v, а в подмножестве E_2 — на вершину w, и добавим новое ребро (v, w). Обозначим получившийся граф через G'. Будем говорить, что граф G' получен из графа G *расщеплением вершины* u.

Аналогичные операции можно определить и для сетей.

Определение. Пусть $\Gamma : V(G) \to \mathcal{X}$ — некоторая сеть с вырожденным ребром $\gamma = \Gamma|_{(v,w)}$, т.е. $\Gamma(v) = \Gamma(w)$. Обозначим через $\tilde{G}$ граф, полученный из G редукций по ребру (v, w); а через u — вершину, заменившую вершины v и w. Определим теперь сеть $\tilde{\Gamma} : V(\tilde{G}) \to \mathcal{X}$ следующим образом: положим отображение $\tilde{\Gamma}$ на неизменившихся вершинах равным Γ, а на вершине u равным $\Gamma(v)$ $(= \Gamma(w))$, т.е. $\tilde{\Gamma}|_{V(G)\backslash\{v,w\}} = \Gamma|_{V(G)\backslash\{v,w\}}$ и $\tilde{\Gamma}(u) = \Gamma(v) = \Gamma(w)$. Будем говорить, что сеть $\tilde{\Gamma}$ получена из сети Γ *редукцией по вырожденному ребру* γ.

Определение. Пусть $\Gamma : V(G) \to \mathcal{X}$ — некоторая сеть, и $\upsilon = \Gamma|_u$ — некоторая ее вершина. Обозначим через G' граф, полученный из G расщеплением вершины u; а через v и w — вершины, заменившие вершину

u. Определим теперь сеть $\Gamma' : V(G') \to \mathcal{X}$ следующим образом: положим отображение Γ' на неизменившихся вершинах равным Γ, а на вершинах v и w равным $\Gamma(u)$, т.е. $\Gamma'|_{V(G)\setminus u} = \Gamma|_{V(G)\setminus u}$ и $\Gamma'(v) = \Gamma'(w) = \Gamma(u)$. Будем говорить, что сеть Γ' получена из сети Γ *расщеплением вершины* v.

Очевидно, что операции редукции по вырожденному ребру и расщепление вершины не изменяют длины сети, т.е. $\ell(\Gamma) = \ell(\tilde{\Gamma}) = \ell(\Gamma')$.

1.5 Компоненты вырождения. Приведенные сети

Определение. Рассмотрим сеть $\Gamma[G]$. Связные компоненты множества всех вырожденных ребер графа G назовем *компонентами вырождения* параметризующего графа сети Γ. Из формальных соображений, каждую вершину графа G, все инцидентные ребра которой невырождены, также будем считать компонентой вырождения. Каждая компонента вырождения, очевидно, является подграфом в G, все вершины которого отображаются в одну и ту же точку. Ясно, что две различные компоненты вырождения графа G не пересекаются.

Снова рассмотрим сеть Γ. Проредуцируем ее по всем вырожденным ребрам. Полученную сеть $\tilde{\Gamma}$ будем называть *приведенной параметрической сетью* для сети Γ. Приведенная сеть уже не содержит вырожденных ребер.

Пусть Γ — параметрическая сеть с некоторой границей $\partial\Gamma : \partial G \to \mathcal{X}$, и $\tilde{\Gamma}$ — соответствующая приведенная сеть. Вершину приведенной сети назовем *подвижной*, если ее прообраз при редукции содержит хотя бы одну подвижную вершину сети Γ; вершину приведенной сети назовем *чисто подвижной*, если ее прообраз при редукции не содержит граничных вершин сети Γ. Остальные вершины сети $\tilde{\Gamma}$ будут считаться *граничными*.

2 Геометрические деревья

2.1 Определение множества геометрических деревьев $\mathcal{G}$

Определение. *Геометрическим деревом* будем называть дерево без вершин степени 2, у которого все вершины степени 1 считаются граничными, а остальные подвижными. Также будем считать, что все вершины степени 1 у геометрического дерева, пусть их n штук, помечены (занумерованы) различными числами от 1 до n.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех геометрических деревьев с n граничными вершинами, а через $\mathcal{G}_{(k)}$ — множество деревьев из $\mathcal{G}$, имеющих ранг k. Как правило, параметр n у множества $\mathcal{G}$ ясен из контекста и мы его будем опускать. Поскольку количество вершин степени 1 у деревьев из $\mathcal{G}$ равно n, то количество подвижных вершин лежит в пределах от 1 до $n-2$, следовательно количество их внутренних ребер (т.е. ранг) лежит в пределах от 0 до $n-3$. Таким образом, имеет место разбиение

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(0)} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{G}_{(n-3)}.$$

Скажем несколько слов об операциях расщепления и редукции для класса геометрических деревьев $\mathcal{G}$. Очевидно, что операция редукции по внутреннему ребру дерева $G \in \mathcal{G}$ не выводит за пределы класса $\mathcal{G}$. Более точно, если дерево G имело ранг k, то после редукции по его внутреннему ребру ранг у полученного дерева $\tilde{G}$ будет равен $k-1$. Заметим, что операция редукции по граничному ребру выводят за пределы класса $\mathcal{G}$, поскольку на единицу уменьшается количество вершин степени один. Поэтому, если не оговорено противное, то все редукции геометрических деревьев и сетей, параметризованных геометрическими деревьями, будут проводиться только по внутренним ребрам.

Очевидно также, что если в вершине u некоторого графа G делать расщепление $E(u) = E_1 \sqcup E_2$, в котором одно из множеств (E_1, E_2) пустое или одноэлементное, то это приведет к появлению дополнительной вершины степени 1. Следовательно, подобные расщепления вершин геометрического дерева $G \in \mathcal{G}$ выводят из класса $\mathcal{G}$. Поэтому мы далее будем предполагать, что во всех расщеплениях вершин геометрических деревьев и сетей, параметризованных геометрическими деревьями, соответствующие множества E_1 и E_2 содержат по крайней мере по два элемента. В частности, из-за этого соглашения граничные вершины и вершины степени три у геометрических деревьев не расщепляются.

2.2 Кодировки сцеплениями

Два разбиения множества $\{1,\dots,n\}$ на пары подмножеств (U_1, V_1) и (U_2, V_2), $\{1,\dots,n\} = U_1 \sqcup V_1 = U_2 \sqcup V_2$, называются *сцеплением*, если каждое из подмножеств разбиений состоит по крайней мере из двух элементов и одно из подмножеств первого разбиения целиком содержит одно из подмножеств второго разбиения.

Далее нам понадобится понятие ветки дерева G (не обязательно геометрического). Выкинем из множества ребер дерева G какое-нибудь произвольное ребро e. Тогда G распадется на два поддерева G_1 и G_2, которые мы и будем называть *ветками* дерева G, *инцидентными* ребру e. Ветка G_1 будет называться *дополнительной* к ветке G_2, и наоборот.

Рассмотрим теперь произвольное геометрическое дерево G ранга k из множества $\mathcal{G}$. Дерево G порождает некоторый набор разбиений множества $\{1,\dots,n\}$ на пары (U_1,V_1),..., (U_k,V_k), любые две из которых образуют сцепление, следующим образом. Любое внутреннее ребро e_i дерева G задает разбиение граничных вершин на два множества. И, поскольку все граничные вершины геометрического дерева помечены различными числами от 1 до n, это разбиение задает некоторое разбиение множества $\{1,\dots,n\}$ на пару непустых подмножеств (U_i,V_i). Покажем теперь, что любые два разбиения (U_i,V_i) и (U_j,V_j) образуют сцепление. Рассмотрим две ветки G_{U_i} и G_{V_i} дерева G, инцидентные ребру e_i. Граничным вершинам из ветки G_{U_i} соответствует множество U_i, граничным вершинам из ветки G_{V_i} — множество V_i. Предположим, что ветка G_{U_i} содержит внутреннее ребро e_j. Рассмотрим две ветки G_{U_j} и G_{V_j} дерева G, инцидентные ребру e_j. Тогда та из этих веток, которая не содержит ребра e_i, для определенности ветка G_{U_j}, обязана целиком содержаться в ветке G_{U_i}. Следовательно, $U_j\subset U_i$. Это и означает, что два разбиения (U_i,V_i) и (U_j,V_j) образуют сцепление.

Порожденный таким образом набор разбиений множества $\{1,\dots,n\}$ на пары (U_1,V_1),..., (U_k,V_k), любые две из которых образуют сцепление, назовем *кодировкой сцеплениями* геометрического дерева G.

Лемма 1.1 *Каждый набор разбиений множества $\{1,\dots,n\}$ на пары (U_1,V_1),..., (U_k,V_k), любые две из которых образуют сцепление, является кодировкой сцеплениями некоторого геометрического дерева G ранга k с n граничными вершинами.*

Доказательство. Пусть дан набор разбиений множества $\{1,\dots,n\}$ на пары (U_1,V_1),..., (U_k,V_k), любые две из которых образуют сцепление. Построим по этому набору геометрическое дерево ранга k с n граничными вершинами.

Перед построением требуемого дерева сделаем предварительную подготовку. Рассмотрим некоторое геометрическое дерево $\widetilde{G}$ с n граничными вершинами и некоторую его подвижную вершину u. Любое расщепление вершины u задается разбиением множества ребер $E(u)$, инцидентных вершине u, на два множества $E_1 = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$ и $E_2 = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}\}$. Разбиение $E(u) = E_1 \sqcup E_2$ определяет разбиение множества $\{1, \ldots, n\} = U \sqcup V$, где $U = \{\ldots\}_{i_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{i_t}$ и $V = \{\ldots\}_{j_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{j_q}$. Заметим, что в множествах U и V не менее двух элементов. Мы будем говорить, что разбиение (U, V) *согласовано* с расщеплением (E_1, E_2). Предположим, что в вершине u можно сделать два расщепления, согласованных со сцепленными разбиениями (U_1, V_1) и (U, V) (пусть для определенности $U_1 \supsetneq U$), т.е. совокупность всех наборов $\{\ldots\}_i$, $e_i \in E(u)$ можно разбить на две подсовокупности

$$\begin{matrix} \{\ldots\}_{i_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{i_s} = U_1 & & \{\ldots\}_{j_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{j_p} = V_1 \\ & \text{и} & \\ \{\ldots\}_{i_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{i_t} = U & & \{\ldots\}_{j_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{j_q} = V \end{matrix}$$

После того, как мы сделаем расщепление подвижной вершины u на две вершины u_1 и u_2, согласованное с парой (U_1, V_1), мы получим, что с вершиной u_1 связаны наборы чисел $\{\ldots\}_{i_1}, \ldots, \{\ldots\}_{i_s}, \{\ldots\}_{i_{s+1}}$, где $\{\ldots\}_{i_{s+1}} = \{\ldots\}_{j_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{j_p}$,; а с вершиной u_2 — наборы чисел $\{\ldots\}_{j_1}, \ldots, \{\ldots\}_{j_p}, \{\ldots\}_{j_{p+1}}$, где $\{\ldots\}_{j_{p+1}} = \{\ldots\}_{i_1} \cup \cdots \cup \{\ldots\}_{i_s}$.

Заметим, что u_1 можно дальше расщепить согласованно с парой (U, V), а u_2 — нельзя. Причина состоит в том, что одно из множеств (в данном случае U) строго содержится в одном из наборов (в данном случае в $\{\ldots\}_{j_{p+1}}$), связанных с вершиной u_2. Поскольку дальнейшие расщепления только укрупняют наборы $\{\ldots\}_i$, то после произвольного количества расщеплений имеется только одна вершина, которую можно расщепить парой (U, V).

Теперь требуемое дерево G с кодировкой (U_1, V_1),..., (U_k, V_k) строится следующим образом. Возьмем дерево $G_0 \in \mathcal{G}_{(0)}$ ранга 0, у которого единственная подвижная вершина u. Очевидно, что в этой подвижной вершине для любого разбиения (U_i, V_i) из кодировки дерева G можно сделать расщепление, согласованное с этим разбиением. При первом расщеплении, согласованным с (U_1, V_1), вершина u распадется на две вершины u_1 и u_2. Оставшийся набор разбиений (U_2, V_2),..., (U_k, V_k), в свою очередь, также распадется на две части: разбиения, для которых существует расщепление вершины u_1, согласованное с данным разбиением, и разбиения, для которых не существует расщепления вершины u_2, согласованного с данным разбиением. Затем делается расщепление соответствующей вершины, согласованное с разбиением (U_2, V_2) и т.д. После всех k расщеплений получим дерево G. $\square$

При доказательстве следующей леммы 1.3 нам понадобится так называемая *лемма об усах*. Определим сначала усы у дерева G. Удалим из дерева G все концевые ребра вместе с инцидентными им концевыми вершинами; получим дерево G'. Концевую вершину v дерева G' вместе с инцидентными ей концевыми ребрами дерева G назовем *усами* дерева G, а саму вершину v назовем *точкой крепления усов.* Поскольку в любом дереве с количеством вершин не менее 2 имеется не менее двух концевых вершин, см. [4], то получаем лемму об усах.

Лемма 1.2 *В любом дереве с количеством подвижных вершин не менее* 2 *имеется не менее двух усов.*

Лемма 1.3 *Два геометрических дерева $G_1 \in \mathcal{G}$ и $G_2 \in \mathcal{G}$ с одинаковой кодировкой сцеплениями изоморфны (как помеченные графы).*

Доказательство. Обозначим кодировку сцеплениями деревьев G_1 и G_2 через (U_1, V_1),..., (U_k, V_k). Предположим теперь, что деревья G_1 и G_2 неизоморфны. Рассмотрим дерево G_1. Согласно лемме об усах 1.2 у G_1 имеются усы, состоящие из точки крепления v и граничных ребер, инцидентных граничным вершинам с номерами i_1,..., i_s. Вершине v инцидентно также одно внутреннее ребро e дерева G_1. Ребру e соответствует некоторое разбиение (U_i, V_i) множества $\{1, \ldots, n\}$. Тогда номера i_1,..., i_s образуют одно из множеств этого разбиения, например U_i. Заметим, что никакое множество из остальных множеств U_j и V_j кодировки сцеплениями не содержится в множестве U_i. Покажем, что в дереве G_2 имеются усы с тем же самым набором граничных вершин i_1,..., i_s. В самом деле, найдем в дереве G_2 ребро e_2, соответствующее разбиению (U_i, V_i). Рассмотрим ветку, инцидентную ребру e_2 и содержащую граничные вершины с номерами из U_i. Эта ветка не содержит внутренних ребер, поскольку, если бы она содержала какое-нибудь внутреннее ребро e_2' с соответствующим разбиением $(U_{i'}, V_{i'})$, то тогда одно из множеств $U_{i'}$ или $V_{i'}$ строго содержалось бы в множестве U_i.

Таким образом, дерево G_2 имеет усы такого же вида как и у дерева G_1. Поэтому, если G_1 и G_2 неизоморфны, то деревья $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$, полученные из деревьев G_1 и G_2 редукцией по ребрам e_1 и e_2 соответственно, также неизоморфны. Далее находим усы в дереве $\tilde{G}_1$ и действуем по схеме, приведенной выше. Проделав k редукций, мы из дерева G_1 и дерева G_2 получим одно и то же дерево $G_0 \in \mathcal{G}_{(0)}$, что противоречит неизоморфности начальных деревьев G_1 и G_2. $\Box$

Резюмируя все вышесказанное, можно сделать следующий вывод.

Утверждение 1.1 *Кодировка сцеплениями устанавливает взаимнооднозначное соответствие между наборами сцепленных разбиений множества* $\{1, \ldots, n\}$ *и геометрическими деревьями из множества* $\mathcal{G}$.

Замечание. Кодировка сцеплениями позволяет сравнивать два внутренних ребра e_1 и e_2, принадлежащих геометрическим деревьям G_1 и G_2 соответственно. Будем говорить, что два внутренних ребра $e_1 \in E(G_1)$ и $e_2 \in E(G_2)$ *одинаковы (равны, эквивалентны и т.п.)*, если определяемые ими элементы (U_1, V_1) и (U_2, V_2) из кодировок сцеплениями деревьев G_1 и G_2 равны. Аналогичным образом, внутренние ребра сетей можно сравнивать посредством сравнения соответствующих ребер их параметризующих геометрических деревьев.

2.3 Частичный порядок на множестве $\mathcal{G}$

Определим отношение $\le$ частичного порядка на множестве $\mathcal{G}$ следующим образом. По определению $G' \le G$, если и только если дерево G' получено из дерева G с помощью последовательных операций расщепления подвижных вершин. Дерево G' назовем *потомком* дерева G; в свою очередь, дерево G будем называть *родителем (предком)* для дерева G'.

Лемма 1.4 *Для двух геометрических деревьев* G_1 *и* G_2 *из* $\mathcal{G}$ *отношение* $G_1 \le G_2$ *имеет место тогда и только тогда, когда для их кодировок сцеплениями выполняется включение*

$$\{(U_1^{(1)}, V_1^{(1)}), \ldots, (U_{k_1}^{(1)}, V_{k_1}^{(1)})\} \supset \{(U_1^{(2)}, V_1^{(2)}), \ldots, (U_{k_2}^{(2)}, V_{k_2}^{(2)})\}.$$

Доказательство. В одну сторону утверждение леммы является непосредственным следствием определения кодировки сцеплениями. В другую сторону — следует из лемм 1.1 и 1.3. $\Box$

Предложение 1.1 *Для любого набора деревьев $G_1, \ldots, G_s \in \mathcal{G}$ в множестве $\mathcal{G}$ имеется точная верхняя грань.*

Эту точную верхнюю грань мы будем называть *общим родителем (предком)* для деревьев $G_1, \ldots, G_s$.

Доказательство. Рассмотрим кодировки сцеплениями для деревьев $G_1, \ldots, G_s$:

$$\begin{array}{ccl} G_1 & — & \{(U_1^{(1)}, V_1^{(1)}), \ldots, (U_{k_1}^{(1)}, V_{k_1}^{(1)})\}; \\ & \vdots & \\ G_s & — & \{(U_1^{(s)}, V_1^{(s)}), \ldots, (U_{k_s}^{(s)}, V_{k_s}^{(s)})\}. \end{array}$$

Рассмотрим теперь дерево G, у которого кодировка сцеплениями образована пересечением кодировок сцеплениями деревьев G_i. В силу леммы 1.4, дерево G не меньше, чем любое дерево G_i. Предположим, что существует еще какое-то дерево G', которое не меньше всех G_i. Тогда его кодировка сцеплениями обязана содержаться в пересечении кодировок сцеплениями деревьев G_i, а значит дерево G' не меньше дерева G. Таким образом, дерево G является точной верхней гранью набора деревьев $G_1, \ldots, G_s$. $\square$

2.4 Перечисление геометрических деревьев

Формулировка задачи

Перечислить с точностью до изоморфизма все геометрические деревья с n граничными вершинами и k подвижными вершинами.

Обозначим через $\mathcal{G}(n,k)$ — совокупность геометрических деревьев с n граничными вершинами и k подвижными вершинами, а через $Q(n,k)$ — количество деревьев в этой совокупности.

Заметим, что количество подвижных вершин (число k) в геометрическом дереве с n граничными вершинами может меняться от 1 до $n-2$. При $k = n-2$ все подвижные вершины имеют степень 3. Напомним, что геометрические деревья, все подвижные вершины которых имеют степень 3, являются бинарными деревьями.

Сведение исходной задачи к перечислению помеченных деревьев

Также напомним, что все граничные вершины геометрических деревьев из класса $\mathcal{G}(n,k)$ помечены различными числами из множества $\{1,\ldots,n\}$, а подвижные вершины геометрических деревьев не помечены. Рассмотрим теперь вспомогательный класс деревьев без вершин степени 2, с n вершинами степени 1, помеченными различными числами из множества $\{1,\ldots,n\}$, и с k остальными вершинами, помеченными различными числами из множества $\{n+1,\ldots,n+k\}$. Вершины степени 1 этих деревьев мы также будем называть граничными, а остальные вершины — подвижными. Обозначим совокупность таких вспомогательных деревьев через $\tilde{\mathcal{G}}(n,k)$, а через $\tilde{Q}(n,k)$ — количество деревьев в этой совокупности.

Лемма 1.5 *Имеет место равенство*

$$Q(n,k) = \frac{1}{k!}\tilde{Q}(n,k).$$

Доказательство. Разобьем множество деревьев $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$ на классы эквивалентности следующим образом. Два дерева $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ из $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$ будем считать эквивалентными, если после стирания пометок на подвижных вершинах этих деревьев получится одно и то же дерево G из $\mathcal{Q}(n,k)$. Таким образом, можно сказать, что введенные только что классы эквивалентности — это деревья из $\mathcal{Q}(n,k)$. Теперь докажем, что количество элементов в каждом классе равно $k!$. Отсюда уже следует утверждение леммы.

В самом деле, любое дерево из класса, соответствующего дереву $G \in \mathcal{Q}(n,k)$, получается из дерева G некоторой пометкой подвижных вершин дерева G элементами из множества $\{n+1,\ldots,n+k\}$. Количество таких различных пометок равно $k!$. Осталось показать, что две различные пометки дерева G приведут к двум неизоморфным деревьям $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ из $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$.

Докажем, что если деревья $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ изоморфны, то пометки дерева G совпадают. Пусть φ — изоморфизм между $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$. Изоморфизм φ является некоторым автоморфизмом дерева G, если мы покажем, что он тождественный, то отсюда будет следовать совпадение пометок. Очевидно, что φ тождественен на граничных вершинах дерева G, поскольку пометку граничных вершин мы не меняли. Но автоморфизм любого дерева, тождественный на граничных вершинах, будет тождественным на всем дереве (это можно показать последовательным отрезанием усов, см. лемму об усах 1.2). $\square$

Таким образом исходная задача вычисления чисел $Q(n,k)$ свелась к вычислению чисел $\tilde{Q}(n,k)$.

Представление Прюфера

Далее нам понадобится взаимно однозначное соответствие, полученное Прюфером в [33], между помеченными деревьями порядка N (помеченным деревом порядка N называется дерево с N вершинами, которые помечены различными числами от 1 до N) и наборами из $N-2$ элементов $a_1, a_2, \dots, a_{N-2}$, где каждое a_k является целым числом от 1 до N, причем в наборе допускаются повторения. Следуя [20], напомним построение этого соответствия. В заданном помеченном дереве T возьмем висячую вершину v (т.е. вершину степени 1), имеющую наименьшую пометку, и выберем пометку a_1 вершины, смежной с v. Далее, проделав такой же шаг для дерева $T-v$, находим пометку a_2 (дерево $T-v$ получено из дерева T удалением вершины v и ребра, инцидентного вершине v). Этот процесс оборвется, когда останутся только две смежные вершины. Таким образом по каждому помеченному дереву T порядка N однозначно строится слово длины $N-2$ в алфавите $\{1,\dots,N\}$.

Опишем теперь обратную процедуру, позволяющую однозначным образом строить по каждому набору $(a_1, a_2, \dots, a_{N-2})$ помеченное дерево. Обозначим через b_1 наименьшее целое положительное число, не встречающееся в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_{N-2})$, и пусть $(c_2, \dots, c_{N-2})$ обозначает набор длины $N-3$, получающийся из набора $(a_1, a_2, \dots, a_{N-2})$ уменьшением всех его координат, больших, чем b_1 на 1. Тогда набор $(c_2, \dots, c_{N-2})$ состоит из чисел, принадлежащих множеству $\{1,\dots,N-1\}$, и мы можем предположить, что существует соответствующее дерево T порядка $N-1$. Изменим распределение пометок у вершин дерева T, прибавляя 1 к каждой пометке, превосходящей $b_1 - 1$. Затем введем N-ю вершину с пометкой b_1 и соединим с вершиной, помеченной числом a_1 в дереве T. Таким образом, получили единственное помеченное дерево, соответствующее данному набору длины $N-2$.

Из описанного выше построения взаимно однозначного соответствия легко следует лемма

Лемма 1.6 *В слово, отвечающее помеченному дереву T, входят лишь пометки невисячих вершин, причем с кратностями, равными степени соответствующей невисячей вершины минус 1.*

Перечисление бинарных деревьев

Пусть $\tilde{G}$ — некоторое дерево из совокупности $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$. Обозначим через d_i, $i=1,\ldots,k$, степени его подвижных вершин. Каждому дереву из $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$, согласно представлению Прюфера и лемме 1.6, соответствует слово длины $n+k-2=(d_1-1)+\cdots+(d_k-1)$, в которое пометка $n+i$ входит ровно $d_i-1\geq 2$ раз. И обратно, любое такое слово соответствует некоторому дереву из $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$. Количество слов описанного вида (а значит и число деревьев в совокупности $\tilde{\mathcal{Q}}(n,k)$) выражается с помощью формулы

$$\tilde{Q}(n,k)=\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=n+k-2\\ r_i\geq 2}}\frac{(n+k-2)!}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_k!}$$

Следовательно,

$$Q(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=n+k-2\\ r_i\geq 2}}\frac{(n+k-2)!}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_k!} \qquad (1.1)$$

При $k=n-2$ все r_i обязаны равняться 2, поэтому сумма в формуле (1.1) состоит из одного члена $\frac{(2(n-2))!}{2^{n-2}}$. Таким образом, получаем утверждение

Утверждение 1.2 *Количество бинарных деревьев с n помеченными граничными вершинами равно*

$$Q(n,n-2)=\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{(2(n-2))!}{(n-2)!}.$$

Числа Стирлинга 2-ого рода

Заметим, что формула (1.1) перечисляет количество способов разбить $(n+k-2)$-множество на k подмножеств мощности не менее 2.

Определение. *Обобщенным числом Стирлинга 2-ого рода* $S_h(t,s)$ будем называть количество способов разбить t-множество на s подмножеств мощности не менее h. Естественно предполагать, что $t \geq sh$.

Таким образом, $Q(n,k) = S_2(n+k-2,k)$.

В наших обозначениях классические числа Стирлинга 2-ого рода равны $S_1(t,s)$. Для чисел $S_1(t,s)$ имеются различные способы их вычисления, см. [9], как с помощью рекуррентных соотношений

$$S(t,s) = sS(t-1,s) + S(t-1,s-1),$$

так и в явном виде

$$S(t,s) = \frac{(-1)^s}{s!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_s^i i^t.$$

Поэтому далее мы выразим требуемые нам числа $Q(n,k) = S_2(n+k-2,k)$ через классические числа Стирлинга 2-ого рода.

Предложение 1.2 *При* $t > s$ *имеет место формула*

$$\sum_{i=0}^{s-1} C_t^i S_2(t-i,s-i) = S_1(t,s).$$

Доказательство. Легко увидеть, что количество разбиений t-множества на s подмножеств, i из которых одноэлементные, равно $C_t^i S_2(t-i,s-i)$. В самом деле, количество способов выбрать i одноэлементных подмножеств t-множества равно C_t^i. Оставшееся $(t-i)$-множество нужно разбить на $s-i$ множеств мощности не менее 2; количество способов сделать это равно по определению $S_2(t-i,s-i)$. Суммируя теперь по i от 0 до $s-1$, получаем требуемую формулу. $\square$

Выражение чисел $Q(n,k)$ через классические Стирлинга 2-ого рода

Положив в предложении 1.2 $t = n+k-2$ и $s = k$, и учитывая, что $Q(n,k) = S_2(n+k-2,k)$, получаем следствие

Следствие 1.1 *Числа $Q(n,k)$ связаны между собой следующим набором соотношений*

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_{n+k-2}^{i} Q(n,k-i) = S_1(n+k-2,k), \quad k=1,\dots,n-2. \qquad (1.2)$$

Соотношения (1.2) позволяют последовательно рекуррентным образом вычислять при фиксированном n все числа $Q(n,k)$, $k=1,\dots,n-2$, начиная с $Q(n,1)$.

Перепишем соотношения (1.2) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{2(n-2)}^{1} & \dots\dots\dots\dots & & C_{2(n-2)}^{n-3} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots & 1 \quad C_{n+k-2}^{1} & \dots & C_{n+k-2}^{k-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(n,n-2) \\ \dots \\ Q(n,k) \\ \dots \\ Q(n,1) \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} S_1(2(n-2),n-2) \\ \dots \\ S_1(n+k-2,k) \\ \dots \\ S_1(n-1,1) \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы выразить числа $Q(n,k)$ через классические числа Стирлинга 2-ого рода, нужно обратить это равенство.

Лемма 1.7 *Имеет место равенство*

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{2(n-2)}^{1} & \dots\dots\dots\dots & & C_{2(n-2)}^{n-3} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots & 1 \quad C_{n+k-2}^{1} & \dots & C_{n+k-2}^{k-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -C_{2(n-2)}^{1} & \dots\dots\dots\dots & & (-1)^{n-3} C_{2(n-2)}^{n-3} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots & 1 \quad -C_{n+k-2}^{1} & \dots & (-1)^{k-1} C_{n+k-2}^{k-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство получается прямой проверкой определения обратной матрицы с использованием при $t = n + k - 2$ и $s = k$ тождества

$$\sum (-1)^i C_t^i C_{t-i}^{s-i} = 0,$$

которое является частным случаем более общего тождества, см. [18],

$$\sum C_t^i C_{t-i}^{s-i} x^i = C_t^s (1+x)^s.$$

□

Используя матричный вид соотношений (1.2) и лемму 1.7, получаем теорему

Теорема 1.1 *Числа $Q(n,k)$ могут быть выражены через классические числа Стирлинга $S_1(\cdot,\cdot)$ 2-ого рода следующим образом*

$$Q(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{n+k-2}^i S_1(n+k-2-i, k-i).$$

Значения чисел $Q(n,k)$ при некоторых n и k

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1							
4	1	3						
5	1	10	15					
6	1	25	105	105				
7	1	56	490	1260	945			
8	1	119	1918	9450	17325	10395		
9	1	246	6825	56980	190575	270270	135135	
10	1	501	22935	302995	1636635	4099095	4729725	2027025

3 Конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей с данной границей

3.1 Построение пространства $\mathcal{T}$ и функции ℓ

Пусть $(\mathcal{W}, \rho)$ — некоторое метрическое пространство и $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^n$ — фиксированная граница в пространстве $\mathcal{W}$. Напомним, см. п.2) раздел 3

Введения, что мы рассматриваем сети, затягивающие границу $\mathcal{A}$, тип которых определяется некоторым геометрическим деревом G из множества $\mathcal{G}$. Для того, чтобы имело смысл рассматривать сети всех типов из множества $\mathcal{G}$, мы будем предполагать, что метрическое пространство $\mathcal{W}$ состоит из не менее, чем $n-2$ точек.

Рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{T}}$, представляющее собой несвязную сумму $\tilde{\mathcal{T}} = \bigsqcup_{G\in\mathcal{G}} [G]$. Пространства $[G]$ будем рассматривать как подмножества этой суммы. Зададим теперь на пространстве $\tilde{\mathcal{T}}$ отношение эквивалентности следующим образом.

Определение. Две точки (сети) $\Gamma_1 \in [G_1]$ и $\Gamma_2 \in [G_2]$ будем считать *эквивалентными*, если и только если, прoредуцировав их по всем внутренним вырожденным ребрам, мы получим одну и ту же сеть.

Построим теперь фактор-пространство $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}/\sim$, где $\sim$ — описанная выше эквивалентность. Через π обозначим стандартную проекцию $\tilde{\mathcal{T}}$ на фактор-пространство $\mathcal{T}$.

Пространство $\mathcal{T}$ состоит из всех классов эквивалентности по отношению $\sim$. Опишем теперь как устроены эти классы. Пусть Υ — класс эквивалентности сети Γ, тогда Υ состоит из всех сетей, получающихся из сети Γ некоторой комбинацией расщеплений ее подвижных вершин и редукций по ее вырожденным внутренним ребрам. Любую сеть из класса эквивалентности Υ назовем *представителем* данного класса. Заметим, что поскольку операции редукции и расщепления сохраняют длину сети, то все сети из одного класса эквивалентности имеют одинаковую длину. Следовательно, на пространстве $\mathcal{T}$ корректно определена *функция длины ℓ*.

В каждом классе эквивалентности существует и единственна сеть (представитель), которая является регулярной сетью. Такую сеть мы назовем *регулярным представителем* данного класса. Очевидно, что любая регулярная сеть с границей $\mathcal{A}$ является регулярным представителем некоторого класса эквивалентности. Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между регулярными сетями с границей $\mathcal{A}$ и классами эквивалентности. Это соответствие мотивирует следующее определение.

Определение. Пространство $\mathcal{T}$ назовем *конфигурационным пространством всех регулярных сетей с данной границей*.

В дальнейшем, если не оговорено противное, элементы (классы эквивалентности) пространства $\mathcal{T}$ будут рассматриваться как регулярные сети с данной границей.

3.2 Стратификация пространства $\mathcal{T}$

Поскольку проекция $\pi : \tilde{\mathcal{T}} \to \mathcal{T}$ две различные сети Γ_1 и Γ_2, принадлежащие пространству $[G]$, переводит в различные регулярные сети из пространства $\mathcal{T}$, то мы имеем вложение пространства $[G]$ в пространство $\mathcal{T}$. Образ пространства $[G]$ при этом вложении обозначим через $\langle G\rangle$. Ясно, что $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} \langle G\rangle$.

Лемма 1.8 *Отношение $G_1 \geq G_2$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место включение $\langle G_1\rangle \subset \langle G_2\rangle$.*

Доказательство. Пусть выполняется отношение $G_1 \geq G_2$. Возьмем какую-нибудь регулярную сеть $\Gamma \in \langle G_1\rangle$. Тип сети Γ, вообще говоря, может отличаться от G_1. Рассмотрим ее класс эквивалентности $\pi^{-1}(\Gamma)$. В этом классе эквивалентности возьмем сеть $\Gamma_1 \in [G_1]$. Поскольку дерево G_1 больше дерева G_2, то можно сделать расщепления подвижных вершин сети Γ_1 так, что сеть Γ_1 превратится в некоторую сеть Γ_2 из $[G_2]$, эквивалентную сети Γ_1. Таким образом, класс $\pi^{-1}(\Gamma)$ содержит сеть из $[G_2]$, и, следовательно, $\Gamma \in \langle G_2\rangle$.

Пусть теперь имеет место включение $\langle G_1\rangle \subset \langle G_2\rangle$. Возьмем какую-нибудь регулярную сеть $\Gamma_1 \in \langle G_1\rangle$. Поскольку мы предполагаем, что $|\mathcal{W}| \geq n-2$, то сеть Γ_1 можно выбрать так, чтобы тип сети Γ_1 совпадал с G_1. Тогда, в силу включения $\langle G_1\rangle \subset \langle G_2\rangle$, в классе эквивалентности $\Upsilon_1 = \pi^{-1}(\Gamma_1)$ содержится некоторая сеть $\Gamma_2 \in [G_2]$. Поскольку регулярная сеть Γ_1 является регулярным представителем класса Υ_1, то ее параметризующее дерево G_1 не меньше, чем параметризующее дерево любой другой сети из класса Υ_1, в частности, — сети Γ_2. Таким образом, $G_1 \geq G_2$. $\square$

Поскольку любое геометрическое дерево $G' \in \mathcal{G}$ имеет некоторого потомка G среди бинарных геометрических деревьев $\mathcal{G}_{(n-3)}$, т.е. $G' \geq G$, то получаем следствие.

Следствие 1.2

$$\mathcal{T} = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_{(n-3)}} \langle G \rangle.$$

Определение. Множество $\langle G \rangle$, соответствующее бинарному дереву $G \in \mathcal{G}_{(n-3)}$, будем называть *листом* пространства $\mathcal{T}$. Конечное пересечение листов пространства $\mathcal{T}$ назовем *стратом.*

Лемма 1.9 *Пусть нам дан набор геометрических деревьев $G_1, \ldots, G_s$. Обозначим через G их общего родителя. Тогда пересечение $\langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle$ совпадает с множеством $\langle G \rangle$.*

Доказательство. Нужно доказать два включения

$$\langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle \subset \langle G \rangle$$

и

$$\langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle \supset \langle G \rangle.$$

Поскольку $G \geq G_i$, $i = 1, \ldots, s$, то второе включение следует из леммы 1.8. Докажем первое включение $\langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle \subset \langle G \rangle$. Рассмотрим какую-нибудь регулярную сеть $\tilde{\Gamma} \in \langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle$; обозначим через $\tilde{G}$ ее тип. Тогда класс эквивалентности $\tilde{\Upsilon} = \pi^{-1}(\tilde{\Gamma})$ содержит эквивалентные сети $\Gamma_i \in [G_i]$, $i = 1, \ldots, s$. Поскольку сеть $\tilde{\Gamma}$ является регулярным представителем класса $\tilde{\Upsilon}$, то $\tilde{G} \geq G_i$, $i = 1, \ldots, s$, и, следовательно, $\tilde{G} \geq G$. Но тогда, в силу леммы 1.8, имеет место включение $\langle \tilde{G} \rangle \subset \langle G \rangle$. Следовательно, регулярная сеть $\tilde{\Gamma}$ содержится в множестве $\langle G \rangle$. Таким образом, первое включение доказано. $\square$

Утверждение 1.3 *Набор стратов пространства $\mathcal{T}$ совпадает с набором множеств $\{\langle G \rangle : G \in \mathcal{G}\}$.*

Доказательство. Взяв в лемме 1.9 в качестве деревьев $G_1, \ldots, G_s$ произвольные бинарные деревья, получаем, что каждый страт совпадает с некоторым множеством $\langle G \rangle$.

Обратно. Пусть $G \in \mathcal{G}$ — некоторое геометрическое дерево. Рассмотрим все бинарные геометрические деревья $G_1, \ldots, G_s$, которые меньше дерева G. Тогда G является общим родителем для набора деревьев $G_1, \ldots, G_s$, и, по лемме 1.9, пространство $\langle G \rangle$ совпадает со стратом $\langle G_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle G_s \rangle$. $\square$

Фактически все страты пространства $\mathcal{T}$ перечисляются геометрическими деревьями.

Пусть Γ — некоторая регулярная сеть. Наименьший по включению страт, содержащий сеть Γ, назовем *минимальным стратом для сети* Γ.

Лемма 1.10 *Невырожденная сеть* $\Gamma \in \mathcal{T}$ *имеет тип* G *тогда и только тогда, когда страт* $\langle G \rangle$ *является минимальным стратом для сети* Γ.

Доказательство. Пусть регулярная сеть Γ имеет тип G. Тогда страт $\langle G \rangle$ содержит сеть Γ. Рассмотрим еще какой-нибудь страт $\langle G' \rangle$, содержащий сеть Γ. Принадлежность сети Γ страту $\langle G' \rangle$ означает, что в классе эквивалентности $\Upsilon = \pi^{-1}(\Gamma)$ существует представитель Γ' типа G'. Поскольку сеть Γ является регулярным представителем класса Υ, то ее тип G не меньше типа G'. Следовательно, по лемме 1.8, имеет место включение $\langle G \rangle \subset \langle G' \rangle$. Таким образом, $\langle G \rangle$ — минимальный страт для сети Γ.

Пусть $\langle G \rangle$ — минимальный страт для регулярной сети Γ. Обозначим через G' тип сети Γ. Последнее означает, что $\Gamma \in \langle G' \rangle$. По только что проведенному рассуждению, имеет место включение $\langle G' \rangle \subset \langle G \rangle$. Теперь, из минимальности страта $\langle G \rangle$ вытекает, что $\langle G' \rangle = \langle G \rangle$. Следовательно, по утверждению 1.3, дерево G' совпадает с G. Таким образом, лемма доказана. $\square$

3.3 Примеры

Случай $n = 3$

Начнем с тривиального примера $n = 3$. В этом случае согласно таблице на стр. 45 имеется всего 1 геометрическое дерево G_0, изображенное на рис. 1.1. Поэтому пространство $\mathcal{T}$ состоит из одного листа, соответствующего множеству $\langle G_0 \rangle$.

Случай $n = 4$

При $n = 4$ согласно таблице на стр. 45 имеется 1 геометрическое дерево G_0 ранга ноль и 3 геометрических дерева G_0', G_0'', G_0''' ранга один — потомки дерева G_0, изображенные на рис. 1.2. Страт $\langle G_0 \rangle$ равен пересечению листов $\langle G_0' \rangle$, $\langle G_0'' \rangle$, $\langle G_0''' \rangle$, т.е. $\langle G_0 \rangle = \langle G_0' \rangle \cap \langle G_0'' \rangle \cap \langle G_0''' \rangle$. Пространство $\mathcal{T}$, соответствующее случаю $n = 4$, условно изображено на рис. 1.3

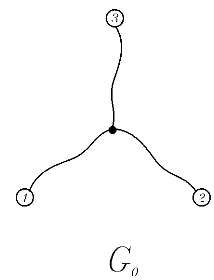


Рис. 1.1:

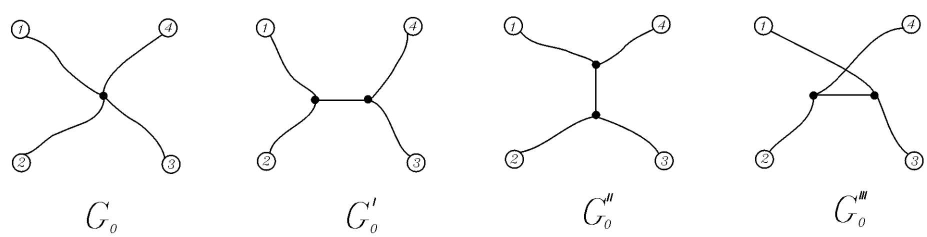


Рис. 1.2:

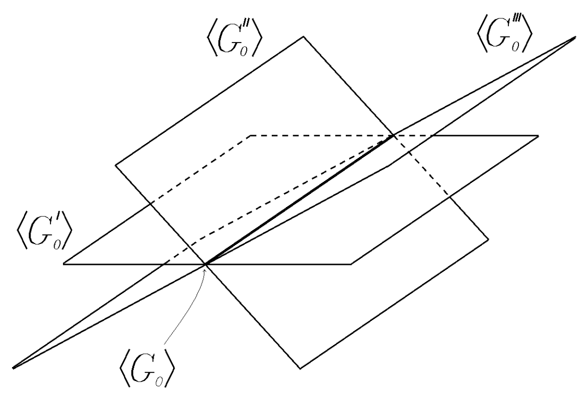


Рис. 1.3:

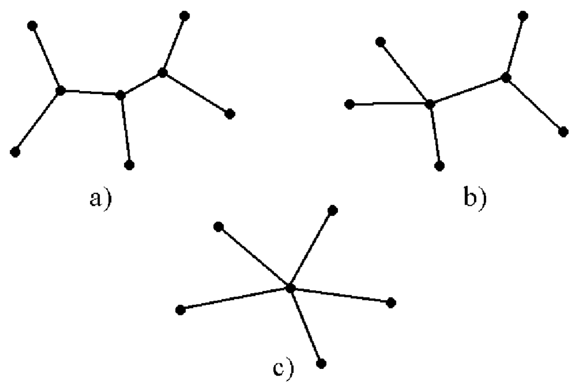


Рис. 1.4:

Случай $n = 5$

При $n = 4$ согласно таблице на стр. 45 имеется одно геометрическое дерево G_0 ранга ноль, 10 геометрических деревьев ранга 1 и 15 геометрических деревьев ранга два. Топологии этих геометрических деревьев изображены на рис. 1.4. Страт, отвечающий геометрическому дереву ранга 0 является пересечением 15 листов, отвечающих геометрическим деревьям ранга два. А каждый страт $\langle G_1 \rangle$, отвечающий геометрическому дереву G_1 ранга два, является пересечением 3 листов $\langle G_1' \rangle$, $\langle G_1'' \rangle$, $\langle G_1''' \rangle$, отвечающих геометрическим деревьям G_1', G_1'', G_1''' ранга два — потомкам дерева G_1.

Глава 2

Комбинаторная теория Морса

В настоящей главе формулируется общая концепция построения теории Морса для произвольных множеств и произвольных функций на них. В рамках этой концепции кратко напоминается классическая теория Морса и теория Морса для симплициальных комплексов, основы которой заложены О. Р. Мусиным в работе [12]. Определение комплекса V_- и индекса для критической точки из работы [12] послужили отправной точкой для разработанного в этой главе комбинаторного подхода к построению теории Морса для произвольных множеств и функций на них — комбинаторной теории Морса. С помощью результатов комбинаторной теории Морса последовательно реализуется программа построения теории Морса минимальных сетей, изложенная в разделе 1 Введения.

1 Общая концепция построения теории Морса

Перед тем, как рассматривать конкретные теории Морса, кратко сформулируем общую концепцию построения теории Морса:

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое множество, f — вещественнозначная функция на $\mathcal{K}$ и c — вещественное число. Обозначим через $\mathcal{K}_{\le c}$ подмножество множества $\mathcal{K}$, состоящее из всех точек x, в которых $f(x) \le c$. Основная задача теории Морса — изучить, как меняется множество $\mathcal{K}_{\le c}$ с изменением числа c.

(Эта формулировка является почти цитатой из монографии Горески и Макферсона [2], стр. 9.)

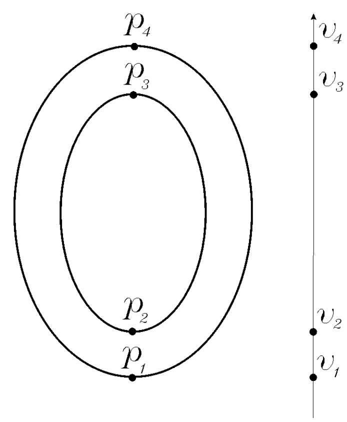


Рис. 2.1:

2 Классический случай

В классической теории Морса, см. например [10], в качестве множества $\mathcal{K}$ выступает гладкое замкнутое многообразие. Наилучшим образом ее иллюстрирует следующий стандартный пример: рассмотрим двумерный тор T, вложенный в трехмерное евклидово пространство, см. рис. 2.1

Пусть f — проекция на вертикальную координатную ось, так что $f(x)$ есть высота точки x. Будем медленно увеличивать c и наблюдать за изменениями пространства $T_{\leq c} = \{x : \ f(x) \leq c\}$. В классической теории Морса под *изменением* пространства $T_{\leq c}$ понимают изменение его гомотопического типа. Мы обнаружим, что он меняется лишь тогда, когда c проходит через одно из четырех критических значений v_1, v_2, v_3, v_4, соответствующих критическим точкам p_1, p_2, p_3, p_4. (*Критические точки* гладкой функции f на гладком многообразии $\mathcal{K}$ — это точки, в которых ее дифференциал df обращается в 0. *Критические значения* функции f — это ее значения в критических точках.) Эти наблюдения за тором T иллюстрируют первую часть основного результата классической теории Морса:

Теорема C1 *Пусть f — гладкая функция на гладком замкнутом многообразии $\mathcal{K}$. Пока число c меняется в пределах открытого интервала между двумя соседними критическими значениями функции f, гомотопический тип пространства остается постоянным.*

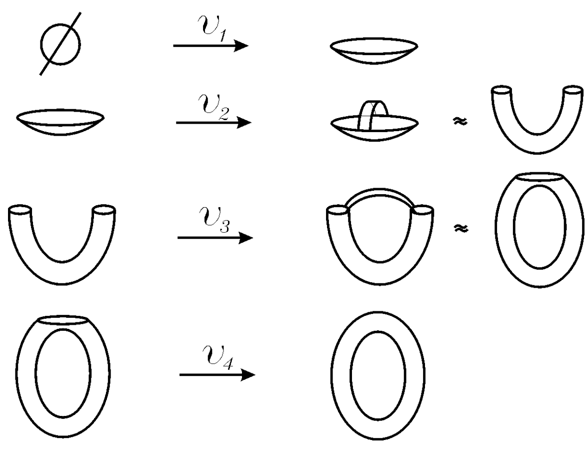
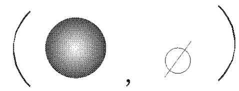
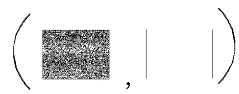
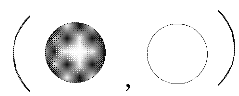


Рис. 2.2:

Посмотрим теперь, что происходит с гомотопическим типом пространства $T_{\leq c}$, когда c минует одно из критических значений, см. рис. 2.2. Если c меньше, чем v_1, то $T_{\leq c}$ пусто. Как только c проходит через v_1, пространство $T_{\leq c}$ изменяется: происходит добавление двумерного диска (имеющего форму чашки). При прохождении числа c через v_2 пространство $T_{\leq c}$ преобразуется посредством приклеивания прямоугольника вдоль двух его противоположных сторон. Когда c минует v_3, приклеивается вдоль двух противоположных сторон другой прямоугольник. Наконец, при прохождении числа c через v_4 приклеивается вдоль своего края двумерный диск (имеющий форму шапки), в результате чего получается весь тор T.

Определим *пару Морса* для функции f в критической точке $p \in \mathcal{K}$ как пару топологических пространств (A, B), где $B \subset A$, обладающую следующим свойством: изменение, происходящее с пространством $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении числа c через критическое значение $v = f(p)$, может быть описано как приклеивание пространства A вдоль B. Приведенные выше описания преобразований пространства $T_{\leq c}$ можно теперь объединить в следующую таблицу пар Морса для тора T:

Критическая точка	Пара Морса
p_1	 $= (D^0 \times D^2, \partial D^0 \times D^2)$
p_2 или p_3	 $= (D^1 \times D^1, \partial D^1 \times D^1)$
p_4	 $= (D^2 \times D^0, \partial D^2 \times D^0)$

Здесь через D^i обозначен замкнутый i-мерный диск, а через ∂D^i — ограничивающая его $(i-1)$-мерная сфера. (Отметим, что нульмерный диск представляет собой точку и его край пуст.)

Эта таблица пар Морса иллюстрирует вторую часть основного результата классической теории Морса.

Перед тем как сформулировать соответствующую теорему напомним, что в классической теории Морса из всех гладких собственных функций (гладкая функция называется *собственной*, если прообраз любого замкнутого отрезка компактен) на гладком многообразии выделяются *функции Морса*, обладающие двумя условиями:

- Все критические значения функции Морса различны.
- Каждая критическая точка функции функции Морса невырождена, т.е. матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных функции в этой точке, имеет ненулевой определитель.

Из приведенного выше определения следует, что множество всех критических точек функции Морса дискретно в гладком многообразии $\mathcal{K}$, а множество всех ее критических значений дискретно в $\mathbb{R}$.

Сформулируем теперь вторую часть основного результата классической теории Морса:

Теорема С2 *Пусть f — функция Морса на гладком многообразии $\mathcal{K}$ размерности N. Пара Морса, измеряющая топологические изменения пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение $v = f(p)$, является "ручкой" $(D^\lambda \times D^{N-\lambda}, (\partial D)^\lambda \times D^{N-\lambda})$, где λ — индекс Морса функции f в критической точке p, т.е. число отрицательных собственных значений матрицы Гессе функции f в p.*

В случае тора T индекс Морса равен нулю в точке p_1, единице в p_2 и p_3 и двум в p_4.

Из предыдущей теоремы выводится количественная связь между индексами критических точек и топологией многообразия $\mathcal{K}$ в виде следующей теоремы

Теорема C3 *Обозначим через C_λ — число критических точек с индексом λ на гладком замкнутом многообразии $\mathcal{K}$. Тогда имеет место равенство Морса:*

$$\sum_\lambda (-1)^\lambda C_\lambda = \chi(\mathcal{K}),$$

где $\chi(\cdot)$ — эйлерова характеристика.

3 Симплициальный случай

Пусть $\mathcal{M}$ — конечный симплициальный комплекс. Рассмотрим теперь в качестве множества $\mathcal{K}$ множество вершин $V(\mathcal{M})$ комплекса $\mathcal{M}$, а также рассмотрим некоторую вещественнозначную функцию f на $V(\mathcal{M})$. Обозначим через c_i значение функции f в вершине $v_i \in V(\mathcal{M})$. Мы, вообще говоря, не предполагаем, что все числа c_i различны.

Изучим теперь изменение множества $\mathcal{K}_{\leq c}$. В отличие от классического случая, здесь *изменение* мы понимаем непосредственно: множества $\mathcal{K}_{\leq c'}$ и $\mathcal{K}_{\leq c''}$ отличны друг от друга, если $\mathcal{K}_{\leq c'} \neq \mathcal{K}_{\leq c''}$. С каждым множеством $\mathcal{K}_{\leq c}$ связан подкомплекс $\mathcal{M}_{\leq c}$, состоящий из всех симплексов комплекса $\mathcal{M}$ с вершинами из $\mathcal{K}_{\leq c}$. Очевидно, что множество $\mathcal{K}_{\leq c}$ изменяется тогда и только тогда, когда изменяется комбинаторная структура комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$. По определению, каждое число c_i будет считаться *критическим значением* функции f, а каждую вершину v_i — *критической точкой*. Тогда аналогом первой части основного результата классической теории Морса (теорема C1) является следующий, в данном случае очевидный, результат

Теорема S1 *Пусть f — вещественнозначная функция на множестве вершин конечного симплициального комплекса $\mathcal{M}$. Пока число c меняется в пределах открытого интервала между двумя соседними критическими значениями функции f, комбинаторная структура комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ остается постоянной.*

Функцию Морса в симплициальном случае мы определим следующим образом. Функция f называется *симплициальной функцией Морса*, если для любого одномерного симплекса $(v_i, v_j) \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство $f(v_i) \neq f(v_j)$. Симплициальные функции Морса удобны тем, что изменение комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ при прохождении через критическое значение c_i описывается с помощью информации о поведении функции f в окрестности критических точек, отвечающих критическому значению c_i. (*Окрестностью* вершины v симплициального комплекса называется звезда этой вершины, которую мы обозначим через $St(v)$.)

Далее будем предполагать, что функция f является симплициальной функцией Морса. Определим для каждой вершины v_i два подкомплекса V_-^i и V_{0-}^i в звезде $St(v_i)$:

- V_-^i — множество симплексов из $St(v_i)$, в вершинах которых функция f строго меньше $c_i = f(v_i)$ (возможно, что V_-^i пуст);
- V_{0-}^i — множество симплексов из $St(v_i)$, в вершинах которых функция f меньше или равна $c_i = f(v_i)$.

Заметим, что для симплициальной функции Морса f комплекс V_{0-}^i является "конусом" над комплексом V_-^i с вершиной в точке v_i.

Аналогом второй части основного результата классической теории Морса (теорема C2) в симплициальном случае является следующая теорема

Теорема S2 *Пусть f — симплициальная функция Морса на вершинах симплициального комплекса $\mathcal{M}$. Пара Морса, измеряющая изменения комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение $\tilde{c}$, является объединением "ручек" $\bigcup\limits_{f(v_i)=\tilde{c}} (V_{0-}^i, V_-^i)$.*

О. Р. Мусин в работе [12] нашел связь между поведением функции f в окрестности критических точек и комбинаторной структурой комплекса $\mathcal{M}$. Для этого он определил индекс вершины v_i равенством $\operatorname{ind} v_i := 1 - \chi(V_-^i)$. Тогда аналогом классического равенства Морса (теорема C3) является следующая теорема, доказанная в [12].

Теорема S3 (О. Р. Мусин) *Имеет место равенство Морса:*

$$\sum_i \operatorname{ind} v_i = \chi(\mathcal{M}).$$

Вышеизложенная конструкция используется в компьютерной геометрии для распознавания некоторых свойств многообразий, которые дискретно представлены в памяти ЭВМ, подробнее см. работу [12].

4 Комбинаторный подход к общему случаю

В этом разделе излагается комбинаторный подход к построению теории Морса для общего случая, т.е. $\mathcal{K}$ — произвольное множество, f — произвольная вещественнозначная функция на $\mathcal{K}$. Согласно общей концепции построения теории Морса необходимо изучить как меняется множество $\mathcal{K}_{\leq c}$. Для этого мы введем на $\mathcal{K}$ некоторую дополнительную структуру Σ, называемую комбинаторной топологией (см. ниже). Эта структура, в свою очередь, индуцирует на множестве $\mathcal{K}_{\leq c}$ некоторую комбинаторную топологию $\Sigma_{\leq c}$. Под изменением множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ при вариации параметра c будет пониматься изменение комбинаторной топологии $\Sigma_{\leq c}$.

4.1 К-топологическое пространство $\mathcal{K}$

Возьмем какое-нибудь конечное покрытие $\Sigma = \{K_i\}$ множества $\mathcal{K}$ его подмножествами K_i, $\mathcal{K} = \cup_i K_i$. Покрытие $\Sigma = \{K_i\}$ будем называть *комбинаторной топологией* или, сокращенно, *к-топологией* на множестве $\mathcal{K}$. Множество, снабженное комбинаторной топологией назовем *комбинаторным топологическим пространством* или, сокращенно, *к-топологическим пространством*. Любое подмножество V к-топологического пространства $\mathcal{K}$ можно также считать к-топологическим пространством, на котором к-топология индуцирована к-топологией пространства $\mathcal{K}$ следующим образом: $V = \cup_i (V \cap K_i)$.

Далее нам понадобятся понятия симплициального комплекса и нерва (являющегося симплициальным комплексом) конечного покрытия множества $\mathcal{K}$. Понятие нерва будет играть важную роль в дальнейших конструкциях. Напомним их определения, см. например [13].

Определение. *(Абстрактным) симплексом* $\triangle$ назовем произвольное конечное множество объектов $(\imath_0, \imath_1, \dots, \imath_r)$. Каждый объект (он может быть любой природы) из этого множества называется *вершиной* симплекса $\triangle$. Каждое подмножество симплекса $\triangle$ также является симплексом и называется *гранью* симплекса $\triangle$. Количество вершин симплекса $\triangle$ минус один называется *размерностью* симплекса $\triangle$.

Совокупность $\mathfrak{N}$ (абстрактных) симплексов называется *(абстрактным) симплициальным комплексом*, если выполнено следующее условие: вместе с каждым симплексом $\triangle$ в совокупности $\mathfrak{N}$ содержаться и все грани симплекса $\triangle$.

Определение. Пусть $\Sigma = \{K_0, K_1, \ldots, K_n\}$ — некоторая система подмножеств множества $\mathcal{K}$. Построим абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{N}(\Sigma)$, называемый *нервом* системы Σ. Будем считать, что множество $(K_{i_0}, K_{i_1}, \ldots, K_{i_s})$ является симплексом комплекса $\mathcal{N}(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда $K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s} \neq \varnothing$.

Определение. Пусть $\mathcal{K}$ — к-топологическое пространство. Далее через $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ будем обозначать нерв к-топологии пространства $\mathcal{K}$. Комплекс $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ будем называть *комбинаторным топологическим типом* или, сокращенно, *к-топологическим типом* пространства $\mathcal{K}$.

Имеет место следующая простая лемма

Лемма 2.1 *Пусть U и V — подмножества к-топологического пространства $\mathcal{K}$ с индуцированными к-топологиями, причем $U \subset V$. Тогда имеется естественное вложение комплекса $\mathcal{N}(U)$ в $\mathcal{N}(V)$.*

Доказательство. Естественное вложение комплекса $\mathcal{N}(U)$ в комплекс $\mathcal{N}(V)$ установим следующим образом. Каждому симплексу комплекса $\mathcal{N}(U)$, отвечающему непустому пересечению $U \cap K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s}$, поставим в соответствие симплекс комплекса $\mathcal{N}(V)$, отвечающий аналогичному непустому пересечению $V \cap K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s}$. $\square$

Далее, если U и V являются подмножествами к-топологического пространства $\mathcal{K}$ с индуцированными к-топологиями, причем $U \subset V$, то мы будем считать комплекс $\mathcal{N}(U)$ подкомплексом комплекса $\mathcal{N}(V)$.

4.2 Изменение множества уровня $\mathcal{K}_{\leq c}$

Согласно общей концепции построения теории Морса из раздела 1 необходимо изучить как меняется множество $\mathcal{K}_{\leq c}$ при изменении параметра c.

Для к-топологического пространства $\mathcal{K}$ подмножество $\mathcal{K}_{\leq c}$ также является к-топологическим пространством с к-топологией $\Sigma_{\leq c}$, индуцированной к-топологией Σ. Нерв к-топологии (к-топологический тип) пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ мы для сокращения записи будем обозначать через $\mathcal{N}_{\leq c}$.

Определение. Под *изменением* пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ мы будем понимать изменение его к-топологического типа $\mathcal{N}_{\leq c}$. И далее, мы будем изучать именно изменение комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ при изменении параметра c.

4.3 Понятие критического значения

Неформально говоря, критическим значением функции f на пространстве $\mathcal{K}$ будем называть такое значение параметра c, при котором происходит изменение комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$.

Для того, чтобы дать это определение более формально, нам потребуется понятие комбинаторного замыкания набора симплексов до симплициального комплекса. Пусть Z — некоторый набор симплексов, тогда *симплициальным замыканием* этого набора будем называть следующий набор симплексов: $\bar{Z} = Z \cup \{\triangle' : \ \exists \triangle \in Z, \ \triangle' - \text{грань симплекса } \triangle\}$. Очевидно, что $\bar{Z}$ является симплициальным комплексом. Другими словами, $\bar{Z}$ — это наименьший по включению симплициальный комплекс, содержащий набор симплексов Z.

Определение. *Приращением* $d\mathcal{N}$ комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ на отрезке $[c_1, c_2]$ будем называть симплициальное замыкание множества симплексов $\mathcal{N}_{\leq c_2} \backslash \mathcal{N}_{\leq c_1}$, т.е.

$$d\mathcal{N} := \overline{\mathcal{N}_{\leq c_2} \backslash \mathcal{N}_{\leq c_1}}.$$

Определение. Число $\tilde{c}$ назовем *критическим значением* функции f, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, приращение $d\mathcal{N}$ комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ на отрезке $[\tilde{c} - \varepsilon, \tilde{c} + \varepsilon]$ не пусто. Будем обозначать это приращение через $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$.

Предложение 2.1 *У функции f конечное число критических значений.*

Доказательство. В самом деле, пусть c_1 и c_2, $c_1 \leq c_2$, — критические значения функции f, тогда для достаточно малых ε_1 и ε_2 в силу цепочки включений

$$\mathcal{N}_{\leq c_1-\varepsilon_1} \subsetneq \mathcal{N}_{\leq c_1+\varepsilon_1} \subseteq \mathcal{N}_{\leq c_2-\varepsilon_2} \subsetneq \mathcal{N}_{\leq c_2+\varepsilon_2}$$

приращения $d\mathcal{N}_{c_1}$ и $d\mathcal{N}_{c_2}$ в критических значениях c_1 и c_2 различны. Теперь конечность множества критических значений следует из того, что $d\mathcal{N}_{c_1}$ и $d\mathcal{N}_{c_2}$ являются подкомплексами конечного комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. $\square$

В силу конечности комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ комплекс $\mathcal{N}_{\leq c}$ меняется лишь в конечном числе значений параметра c (в критических значениях функции f), поэтому будут корректными следующие обозначения. Через $\mathcal{N}_{\leq c+}$ будем обозначать комплекс $\mathcal{N}_{\leq c+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — любое достаточно малое число. Аналогично, через $\mathcal{N}_{\leq c-}$ будем обозначать комплекс $\mathcal{N}_{\leq c-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — любое достаточно малое число.

Из определения критического значения и предложения 2.1 вытекает следующее утверждение, являющееся аналогом первой части основного результата классической теории Морса (теорема C1):

Утверждение 2.1 *Пусть c_1, c_2,…, c_m — все критические значения функции f. Тогда эти значения разбивают всю прямую $\mathbb{R}$ на интервалы постоянства к-топологического типа пространства $K_{\leq c}$: $(-\infty, c_1)$, (c_1, c_2),…, (c_{m-1}, c_m), $(c_m, +\infty)$.*

Согласно определению приращения в критической точке $\tilde{c}$ и введенных обозначений комплекс $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ равен $\overline{\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}}$. И поскольку $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}$, то имеет место равенство

$$\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-} \cup d\mathcal{N}_{\tilde{c}} = \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}.$$

Таким образом, получаем аналог второй части основного результата классической теории Морса (теорема C2)

Утверждение 2.2 *Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Парой Морса, измеряющей изменение к-топологического типа пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение $\tilde{c}$, является пара $(d\mathcal{N}_{\tilde{c}}, d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-})$.*

Другими словами, имеет место равенство: $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-} \cup d\mathcal{N}_{\tilde{c}} = \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}$.

4.4 Стратификация пространства $\mathcal{K}$

Определение. Назовем *стратом* к-топологического пространства $\mathcal{K}$ любое пересечение $K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$ элементов к-топологии пространства $\mathcal{K}$. Каждому симплексу $\triangle = (K_{i_0}, K_{i_1}, \dots, K_{i_s})$ из комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ отвечает некоторый непустой страт $K_{i_0} \cap K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$, который мы обозначим через $S(\triangle)$.

Рассмотрим некоторую точку x из пространства $\mathcal{K}$. Эта точка x может одновременно содержаться в нескольких стратах множества $\mathcal{K}$. Наименьший по включению страт, содержащий точку x, назовем *минимальным стратом* для точки x.

Лемма 2.2 *Пусть $S(\triangle')$ и $S(\triangle'')$ — два страта множества $\mathcal{K}$, причем их пересечение $S(\triangle') \cap S(\triangle'')$ не пусто. Тогда в комплексе $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ существует симплекс $\triangle$, такой что симплексы $\triangle'$ и $\triangle''$ являются его гранями и $S(\triangle) \subset S(\triangle') \cap S(\triangle'')$.*

Доказательство. Пусть симплексу $\triangle'$ отвечает непустое пересечение $K_{i'_0} \cap K_{i'_1} \cap \dots \cap K_{i'_s}$, а симплексу $\triangle'$ — непустое пересечение $K_{i''_0} \cap K_{i''_1} \cap \dots \cap K_{i''_t}$. Согласно условию леммы, пересечение $K_{i'_0} \cap \dots \cap K_{i'_s} \cap K_{i''_0} \cap \dots \cap K_{i''_t}$ не пусто, и поэтому оно задает некоторый симплекс $\triangle$ из комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Ясно, что симплекс $\triangle$ — искомый. $\square$

Следствие 2.1 *Пусть $S(\triangle)$ — некоторый страт множества $\mathcal{K}$. Тогда существует симплекс $\tilde{\triangle}$, такой что*

- *$S(\tilde{\triangle}) = S(\triangle)$;*
- *любой симплекс $\triangle'$, для которого $S(\triangle') = S(\triangle)$, является гранью симплекса $\tilde{\triangle}$.*

Для страта $S(\triangle)$ симплекс $\tilde{\triangle}$ из следствия 2.1 назовем *максимальным симплексом, задающим страт $S(\triangle)$.*

Назовем каждый максимальный симплекс $\triangle$, задающий страт $S(\triangle)$, *существенным симплексом* комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Имеет место простая лемма, доказательство которой непосредственно вытекает из определения максимального симплекса.

Лемма 2.3 *Сопоставление каждому страту максимального симплекса, задающего этот страт, определяет взаимнооднозначное соответствие между набором всех существенных симплексов комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ и набором стратов пространства $\mathcal{K}$.*

Лемма 2.4 *Пересечение двух существенных симплексов комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ также является существенным симплексом.*

Доказательство. Пусть $\triangle$ — существенный симплекс, которому отвечает страт (непустое пересечение) $S(\triangle) = K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k}$. Из определения максимального симплекса следует, что при добавлении к этому пересечению еще одного элемента K_i общее пересечение уменьшится. Рассмотрим еще одни существенный симплекс $\triangle'$, которому отвечает страт (непустое пересечение) $S(\triangle') = K_{i'_1} \cap \cdots \cap K_{i'_m}$ Тогда симплексу $\tilde{\triangle} = \triangle \cap \triangle'$ отвечает некоторый страт $S(\tilde{\triangle})$, являющийся пересечением элементов K_{i_j}, входящих как в симплекс $\triangle$, так и в симплекс $\triangle'$. Для определенности положим, что это пересечение $S(\tilde{\triangle}) = K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s} = K_{i'_1} \cap \cdots \cap K_{i'_s}$. Допустим, что симплекс $\tilde{\triangle}$ не является максимальным для страта $S(\tilde{\triangle})$. Тогда существует элемент K_i из покрытия множества $\mathcal{K}$, не входящий в какое-то из двух начальных пересечений, скажем в первое, и такой что $K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s} = K_i \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s}$. Следовательно,

$$(K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s}) \cap \cdots \cap K_{i_k} = (K_i \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s}) \cap \cdots \cap K_{i_k}.$$

Это означает, что симплекс $\triangle$ не является максимальным симплексом для страта $S(\triangle) = K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k}$, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, симплекс $\tilde{\triangle} = \triangle \cap \triangle'$ является максимальным симплексом для страта $S(\tilde{\triangle})$, и, следовательно, является существенным симплексом для комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. $\square$

4.5 Понятие критической точки

Введем теперь понятие критической точки для функции f.

Согласно лемме 2.1, мы считаем комплекс $\mathcal{N}_{\leq c}$ подкомплексом комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Очевидно, что симплекс $\triangle \in \mathcal{N}(\mathcal{K})$ будет принадлежать комплексу $\mathcal{N}_{\leq c}$ тогда и только тогда, когда пересечение множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ со стратом $S(\triangle)$ не пусто.

Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Это означает, что в комплексе $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+}$ появился симплекс $\triangle$, которого не было в комплексе $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. Другими словами, пересечение страта $S(\triangle)$ с множеством $\mathcal{K}_{\leq \tilde{c}+\varepsilon}$, не пусто, а с множеством $\mathcal{K}_{\leq \tilde{c}-\varepsilon}$ — пусто, где ε — достаточно малое положительное число. Таким образом, получаем лемму

Лемма 2.5 *Критическое значение $\tilde{c}$ является точной нижней гранью функции f в стратах, отвечающих симплексам из $\mathcal{N}_{\le\tilde{c}+}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$.*

и, как следствие, утверждение

Утверждение 2.3 *Число $\tilde{c}$ является критическим значением функции f тогда и только тогда, когда существует страт $S(\triangle)$, на котором абсолютный минимум функции f равен $\tilde{c}$, т.е.*

$$\tilde{c} = \inf_{x\in S(\triangle)} f(x).$$

Естественно теперь дать такое определение критической точки

Определение. Точка x называется *критической* точкой для функции f, если она является точкой абсолютного минимума функции f на каком-либо страте $S(\triangle)$, содержащем эту точку, т.е.

$$f(x) = \inf_{x'\in S(\triangle)} f(x'), \quad \text{где } S(\triangle) \ni x.$$

Критическим множеством $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$ для функции f, отвечающим критическому значению $\tilde{c}$, назовем объединение критических точек x, таких что $f(x) = \tilde{c}$.

Замечание. Вообще говоря, критическое множество $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$ может быть и пустым.

Утверждение 2.4 *Точка $x \in \mathcal{K}$ является критической точкой функции f тогда и только тогда, когда она является точкой абсолютного минимума функции f на минимальном страте для этой точки.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{K}$ — критическая точка функции f. Тогда, по определению критической точки, существует страт $S(\triangle) \ni x$, на котором функция f достигает в точке x абсолютного минимума на этом страте. Но, поскольку минимальный страт для точки x содержится в страте $S(\triangle)$, то точка x является точкой абсолютного минимума функции f и на минимальном страте для этой точки.

В обратную сторону утверждение следует из определения критической точки. $\square$

4.6 Комбинаторный потенциал точки из $\mathcal{K}$

Определим для произвольной точки $x \in \mathcal{K}$ *комбинаторный потенциал* $V_-(x)$ или, сокращенно, *к-потенциал* $V_-(x)$.

Определение. Симплекс $\triangle$ принадлежит комбинаторному потенциалу $V_-(x)$ тогда и только тогда, когда значение функции f в точке x не является точной нижней гранью функции f в страте $S(\triangle)$, т.е.

$$f(x) > \inf_{x' \in S(\triangle)} f(x').$$

Мы будем говорить, что *для точки x по страту $S(\triangle)$ можно уменьшить функцию f*.

Легко заметить, что $V_-(x)$ — симплициальный комплекс.

Определение. *Индексом* произвольной точки x из пространства $\mathcal{K}$ назовем следующую разность

$$\operatorname{ind}_f x := 1 - \chi(V_-(x)).$$

(ср. с определением индекса вершины из раздела 3 настоящей главы).

Лемма 2.6 *Пусть $S(\triangle)$ — минимальный страт для точки $x \in \mathcal{K}$, $f(x) = c$, а $\triangle$ — максимальный симплекс, задающий этот страт. Тогда $V_-(x) = \triangle \cap \mathcal{N}_{\leq c-}$.*

В последнем равенстве симплекс $\triangle$ рассматривается как симплициальный комплекс, т.е. вместе со всеми своими гранями.

Доказательство. Сначала докажем включение $V_-(x) \subset \triangle \cap \mathcal{N}_{\leq c-}$. Пусть $\triangle'$ — некоторый симплекс из к-потенциала $V_-(x)$. Тогда, согласно определению к-потенциала, в страте $S(\triangle')$ имеется некоторая точка x', такая что $f(x') < c$. Следовательно, симплекс $\triangle'$ принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\leq c-}$. С другой стороны, страт $S(\triangle')$ содержит точку x, а значит и минимальный страт $S(\triangle)$ для точки x. Поэтому, согласно лемме 2.2 и определению максимального симплекса, симплекс $\triangle'$ является гранью симплекса $\triangle$. Таким образом, включение $V_-(x) \subset \triangle \cap \mathcal{N}_{\leq c-}$ доказано.

Докажем обратное включение $V_-(x) \supset \triangle \cap \mathcal{N}_{\leq c-}$. Пусть симплекс $\triangle'$ принадлежит пересечению $\triangle \cap \mathcal{N}_{\leq c-}$. Из принадлежности симплекса $\triangle'$

комплексу $\triangle$ следует, что $S(\triangle') \supset S(\triangle) \ni x$. С другой стороны, поскольку $\triangle'$ принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\leq c-}$, то в страте $S(\triangle')$ существует точка x', такая что $f(x') < c$. Теперь из определения к-потенциала $V_-(x)$ вытекает $\triangle' \in V_-(x)$. Таким образом, обратное включение также доказано. $\square$

Предложение 2.2 *Пусть x — некоторая точка из множества $\mathcal{K}$, и $\triangle$ — максимальный симплекс, задающий минимальный страт для точки x. Точка x является критической точкой функции f тогда и только тогда, когда $V_-(x) \subsetneq \triangle$.*

Доказательство. Пусть x — критическая точка функции f. Тогда, согласно лемме 2.6, комплекс $V_-(x)$ является подкомплексом симплекса $\triangle$ (как комплекса). С другой стороны, симплекс $\triangle$ (как симплекс) не принадлежит к-потенциалу $V_-(x)$. В самом деле, значение $\tilde{c}$ функции f в критической точке x равно точной нижней грани функции f в страте $S(\triangle)$, следовательно, $\triangle \notin \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$.

Обратно. Пусть теперь для точки x выполняется строгое включение $V_-(x) \subsetneq \triangle$. Тогда симплекс $\triangle$ (как симплекс) не принадлежит к-потенциалу $V_-(x)$, а это значит, что функция f в точке x достигает своей точной нижней грани на страте $S(\triangle)$. Следовательно, x — критическая точка. $\square$

Следствие 2.2 *Пусть x — некритическая точка функции f, и $\triangle$ — максимальный симплекс, задающий минимальный страт для точки x. Тогда $V_-(x) = \triangle$ и $\operatorname{ind}_f x = 0$.*

Вычисление $\chi(V_-)$

В разделе 5 настоящей главы нам понадобится вычислять индексы критических точек или, эквивалентно, эйлеровы характеристики их к-потенциалов. Напомним, что по определению, эйлерова характеристика комплекса K равна следующей альтернированной сумме: количество 0-мерных симплексов − количество одномерных симплексов + количество 2-мерных симплексов и т.д. Из этого определения видно, что мы вынуждены знать количество r-мерных симплексов комплекса K для любого r. Такая информация часто бывает трудно вычислима. Поэтому мы поступим следующим образом. Представим комплекс K в виде объединения стягиваемых (в геометрическом смысле) подкомплексов K_i, так что все пересечения этих подкомплексов также стягиваемы, тогда $\chi(K) =$ количество подкомплексов K_i – количество их одинарных пересечений + количество двойных пересечений и т.д.

Уточним эту идею. Рассмотрим некоторый комплекс K. Симплекс $\triangle \in K$ назовем *наибольшим симплексом* комплекса K, если $\triangle$ не является гранью никакого другого симплекса из комплекса K. Возьмем теперь в качестве совокупности стягиваемых комплексов K_i набор наибольших симплексов комплекса K. Этот набор $\{K_i\}$ образует покрытие комплекса K. *Двойственным комплексом* K^* к комплексу K назовем нерв покрытия комплекса K его наибольшими симплексами K_i. Из алгебраической топологии известно, см. например [16], что комплексы K и K^* когомологичны; в частности, $\chi(K) = \chi(K^*)$.

Обратимся теперь к комплексам V_-, являющимся подкомплексами комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$, и изучим как устроен двойственный к V_- комплекс V_-^*.

Определение. Двойственный комплекс $V_-^*(x)$ к к-потенциалу $V_-(x)$ будем называть *ко-потенциалом* точки x.

Вершины комплекса V_-^* суть наибольшие симплексы комплекса V_-. Обозначим через S_i страт $S(\triangle_i)$, соответствующий наибольшему симплексу $\triangle_i$ комплекса $V_-(x)$. Поскольку $\triangle \in V_-(x)$, то по страту S_i для точки x можно уменьшить функцию f. В силу того, что симплекс $\triangle$ — наибольший симплекс в комплексе $V_-(x)$, страт S_i не содержит в себе как собственное подмножество никакого другого страта, по которому для точки x можно уменьшить функцию f.

Рассмотрим наибольшие симплексы $\triangle_{i_1},\ldots,\ \triangle_{i_k}$ комплекса $V_-(x)$. Обозначим через $\triangle$ — симплекс, являющийся их пересечением. Симплекс $\triangle$ есть максимальный симплекс, задающий соответствующий страт $S(\triangle)$. В самом деле, каждый наибольший симплекс $\triangle_{i_j}$ комплекса $V_-(x)$ является максимальным симплексом, задающим соответствующий страт S_{i_j}, а потому и существенным симплексом комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. По лемме 2.4, пересечение $\triangle$ существенных симплексов $\triangle_{i_1},\ldots,\ \triangle_{i_k}$ также будет существенным симплексом, т.е. максимальным симплексом для $S(\triangle)$. Поскольку симплекс $\triangle$ является гранью каждого из симплексов $\triangle_{i_1},\ldots,\ \triangle_{i_k}$, то страт $S(\triangle)$ содержит в себе страты $S_{i_1},\ldots,\ S_{i_k}$. Причем $S(\triangle)$ — наименьший по включению страт, содержащий в себе страты $S_{i_1},\ldots,\ S_{i_k}$.

Теперь можно считать, что вершинами ко-потенциала $V_-^*(x)$ являются наименьшие по включению страты S_i, по которым для точки x

можно уменьшить функцию f. А $(k-1)$-мерным симплексом с вершинами $S_{i_1},\dots,\ S_{i_k}$ является наименьший по включению страт, содержащий страты $S_{i_1},\dots,\ S_{i_k}$. Обозначим совокупность $(k-1)$-мерных симплексов (стратов) через $\mathcal{P}_k$. Таким образом, учитывая, что $\chi(V_-(x)) = \chi(V_-^*(x))$, получаем предложение

Предложение 2.3 *Имеет место равенство*

$$\chi(V_-(x)) = \sum_k (-1)^{k-1} \# \mathcal{P}_k.$$

4.7 Индексы критических значений и равенство Морса

Определение. *Индексом* критического значения $\tilde{c}$ назовем следующую разность

$$\operatorname{ind}_f \tilde{c} := \chi(d\mathcal{N}_{\tilde{c}}) - \chi\big(d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\le \tilde{c}-}\big),$$

где $\chi(\cdot)$ — эйлерова характеристика.

Обозначим через $\mathcal{N}_0$ комплекс $\mathcal{N}_{\le c_0}$, где c_0 — достаточно большое по модулю отрицательное число. Согласно утверждению 2.1 такое обозначение корректно.

Утверждение 2.5 *Пусть $c_1,\ c_2,\dots,\ c_m$ — все критические значения функции f. Сумма индексов всех критических значений функции f равняется эйлеровой характеристике комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ минус эйлерова характеристика комплекса $\mathcal{N}_0$, т.е.*

$$\sum_i \operatorname{ind}_f c_i = \chi\big(\mathcal{N}(\mathcal{K})\big) - \chi\big(\mathcal{N}_0\big).$$

Доказательство. В силу равенства из утверждения 2.2 и аддитивного свойства эйлеровой характеристики, для каждого критического значения c_i имеем

$$\chi(d\mathcal{N}_{c_i}) - \chi\big(d\mathcal{N}_{c_i} \cap \mathcal{N}_{\le c_i -}\big) = \chi(\mathcal{N}_{\le c_i +}) - \chi(\mathcal{N}_{\le c_i -}).$$

Учитывая определение индекса критического значения c_i и утверждение 2.1, просуммируем это равенство по i от 1 до m и получим

$$\sum_i \operatorname{ind}_f c_i = \chi(\mathcal{N}_{\le c_m +}) - \chi(\mathcal{N}_{\le c_1 -}).$$

Осталось заметить, что $\mathcal{N}_{\le c_m +} = \mathcal{N}(\mathcal{K})$ и $\mathcal{N}_{\le c_1 -} = \mathcal{N}_0$. $\square$

4.8 Неравенства Морса

Равенство из утверждения 2.5 носит название равенство Морса. Имеется, однако, более сильная теорема (см. ниже), использующая технику полиномов Пуанкаре. Эта техника позволяет помимо равенства Морса получать также и неравенства Морса (подробнее см. [19]).

Пусть c_i — критическое значение функции f. Рассмотрим группы гомологий $H_*(\mathcal{N}_{\leq c_i+}, \mathcal{N}_{\leq c_i-})$. И рассмотрим целые числа
$\beta_{k,i} = \dim H_k(\mathcal{N}_{\leq c_i+}, \mathcal{N}_{\leq c_i-})$.

Определение. *Полиномом Пуанкаре функции* f на $\mathcal{K}$ назовем полином

$$Q(f,t) = \sum_i (\sum_k \beta_{k,i} t^k).$$

Утверждение 2.6 *Пусть $Q(f,t)$ и $P((\mathcal{N}(\mathcal{K}), \mathcal{N}_0), t)$ — полиномы Пуанкаре функции и пары комплексов $(\mathcal{N}(\mathcal{K}), \mathcal{N}_0)$. Тогда разность $Q - P$ делится на $1 + t$ и отношение полиномов $(Q - P)/(1 + t)$ является полиномом с неотрицательными целыми коэффициентами.*

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичной теоремы Морса-Смейла из [19], сс. 405–407.

Из утверждения 2.6 можно вывести утверждение 2.5 следующим образом. Запишем равенство $(1 + t)R(t) = Q(t) - P(t)$. Подставляя в это равенство $t = -1$, получим

$$\sum_i \chi(\mathcal{N}_{\leq c_i+}, \mathcal{N}_{\leq c_i-}) = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})) - \chi(\mathcal{N}_0).$$

Заметим теперь, что $H_*(\mathcal{N}_{\leq c_i+}, \mathcal{N}_{\leq c_i-}) = H_*(d\mathcal{N}_{c_i}, d\mathcal{N}_{c_i} \cap \mathcal{N}_{\leq c_i-})$. Тогда

$$\chi(\mathcal{N}_{\leq c_i+}, \mathcal{N}_{\leq c_i-}) = \chi(d\mathcal{N}_{c_i}, d\mathcal{N}_{c_i} \cap \mathcal{N}_{\leq c_i-}) = \chi(d\mathcal{N}_{c_i}) - \chi(d\mathcal{N}_{c_i} \cap \mathcal{N}_{\leq c_i-}) = \operatorname{ind}_f c_i.$$

Утверждение 2.6 можно рассматривать как обобщение классических неравенств Морса. Мы в дальнейшем не будем пользоваться этим утверждением, а приводим его здесь лишь для полноты картины.

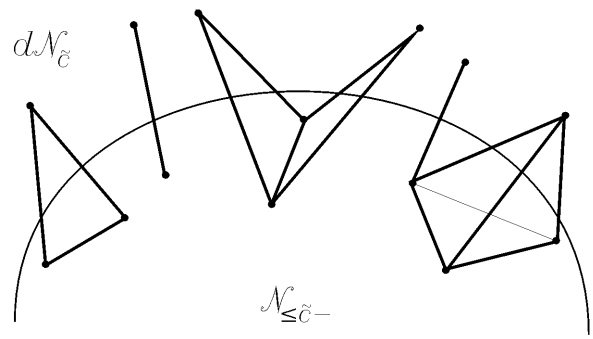


Рис. 2.3:

4.9 Комбинаторная функция Морса

Определение. *Комбинаторной функцией Морса* на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$ называется функция, для которой выполнены следующие два условия:

1. На каждом страте $S(\triangle)$ функция f достигает своей точной нижней грани. Обозначим через $\min_f S(\triangle)$ множество точек страта $S(\triangle)$, на которых достигается эта точная нижняя грань.

2. Для каждого критического значения $\tilde{c}$ комплекс $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ представляется в виде объединения симплексов $\triangle^j_{\tilde{c}}$, не лежащих в $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ (здесь симплекс $\triangle^j_{\tilde{c}}$ рассматривается как комплекс, т.е. вместе со всеми своими гранями), причем при $j' \neq j''$ выполнено включение $\triangle^{j'}_{\tilde{c}} \cap \triangle^{j''}_{\tilde{c}} \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$.

Иллюстрацией к этому определению служит рис. 2.3.

Также как в классическом и симплициальном случаях, комбинаторная функция Морса позволяет в некотором смысле локализовать описание изменений, происходящих с комбинаторным типом множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении через критическое значение $\tilde{c}$. Перепишем утверждение 2.2 в более “локализованном” виде

Утверждение 2.7 *Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение комбинаторной функции Морса f. Парой Морса, измеряющей изменение к-топологического типа множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое* *значение $\tilde{c}$, является объединение "ручек" $(\triangle^j_{\tilde{c}}, \triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-})$. Причем пересечение двух различных "ручек" $\triangle^{j'}_{\tilde{c}}$ и $\triangle^{j''}_{\tilde{c}}$ принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$.*

Определение. Симплексы $\triangle^j_{\tilde{c}}$ назовем *ручками* комбинаторной функции Морса, а пересечение $\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$ назовем *подошвой* ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$. Иногда под ручкой мы будем понимать пару $(\triangle^j_{\tilde{c}}, \triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-})$.

Замечание. Ручки комбинаторной функции Морса f — суть максимальные симплексы совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$, на которой индуцируется естественное отношение частичного порядка между симплексами "являться гранью".

Лемма 2.7 *Если для каждого страта $S(\triangle)$ к-топологического пространства $\mathcal{K}$ множество минимумов $\min_f S(\triangle)$ одноточечно, то функция f на пространстве $\mathcal{K}$ является комбинаторной функцией Морса.*

Доказательство. Очевидно, для функции f первое условие из определения комбинаторной функции Морса выполняется.

Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Рассмотрим два максимальных симплекса $\triangle_1$ и $\triangle_2$ из $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$. Обозначим, через x_1 и x_2 точки из $\min_f S(\triangle_1)$ и $\min_f S(\triangle_2)$ соответственно. Заметим, что $x_1 \neq x_2$. В самом деле, если бы точки x_1 и x_2 совпадали, то пересечение стратов $S(\triangle_1)$ и $S(\triangle_2)$ было бы не пусто. Поэтому, согласно лемме 2.2 существовал бы симплекс $\triangle'$, такой что $\triangle_1$ и $\triangle_2$ являются его гранями и $S(\triangle') = S(\triangle_1) \cap S(\triangle_2)$. С другой стороны, $\triangle'$ принадлежит совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$, поскольку $\inf\limits_{x \in S(\triangle')} f(x) = \tilde{c}$. Следовательно, $\triangle_1$ и $\triangle_2$ не были бы максимальными симплексами.

Покажем теперь, что пересечение $\triangle = \triangle_1 \cap \triangle_2$ этих симплексов не принадлежит совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$. Предположим противное, т.е. что $\triangle \in d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$. Тогда точная нижняя грань функции f на страте $S(\triangle)$ равна $\tilde{c}$. Более того, поскольку $S(\triangle)$ содержит в себе как страт $S(\triangle_1)$, так и страт $S(\triangle_2)$, то множество минимумов $\min_f S(\triangle)$ для этого страта содержит по крайне мере две точки. Последнее противоречит условию леммы. Таким образом, для функции f второе условие из определения комбинаторной функции Морса также выполняется. $\square$

По определению, *индекс* каждой ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ положим равным единице минус эйлерова характеристика ее подошвы, т.е. $\operatorname{ind}_f \triangle^j_{\tilde{c}} = 1 - \chi(\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-})$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.8 *Пусть f — комбинаторная функция Морса на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$. Обозначим через $\triangle_\alpha$ совокупность ручек функции f. Тогда сумма индексов всех ручек функции f равна эйлеровой характеристике комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{K})$, т.е.*

$$\sum_\alpha \operatorname{ind}_f \triangle_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{c}$ — критическое значение функции f. Тогда из определения ручек $\triangle^j_{\tilde{c}}$ функции f и аддитивности эйлеровой характеристики следует равенство

$$\operatorname{ind}_f \tilde{c} = \sum_j \operatorname{ind}_f \triangle^j_{\tilde{c}}.$$

Просуммировав это равенство по всем критическим значениям функции f и воспользовавшись утверждением 2.5, получим

$$\sum_\alpha \operatorname{ind}_f \triangle_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})) - \chi(\mathcal{N}_0).$$

По условию, f является комбинаторной функцией Морса, и поэтому достигает своей точной нижней грани на каждом страте пространства $\mathcal{K}$. Следовательно, f достигает своей точной нижней грани и на всем пространстве $\mathcal{K}$. Таким образом, комплекс $\mathcal{N}_0$ пуст и мы имеем доказываемое равенство. $\square$

Напомним, что в классической теории Морса каждому критическому значению функции Морса соответствовала только одна ручка. Это обуславливалось тем, что функции Морса всюду плотны в пространстве гладких функций, т.е. любую гладкую функцию можно немного пошевелить, чтобы она превратилась в функцию Морса. В нашем же случае, при комбинаторном подходе к построению теории Морса приходится рассматривать функции, для которых критическому значению отвечает несколько ручек. Для изучаемых в главе 3 примеров малым шевелением функции удается ее сделать лишь комбинаторной функцией Морса (в смысле данного определения). А дальнейшее "разнесение" ручек по разным критическим значением, по-видимому является достаточно трудной теоремой.

Однако, наличие нескольких ручек для одного критического значения ничему не препятствует, поскольку, как правило, критические значения изучаются посредством изучения соответствующих критических точек и поведения функции в окрестности этих критических точек. Переход от критических значений к критическим точкам сводит изучение поведения функции "в большом" к изучению поведения функции "в малом", в частности, сводит вычисление индексов критических значений и ручек к вычислению индексов критических точек. Напомним также, что в классической теории Морса каждой ручке функции Морса соответствовала единственная критическая точка. В нашем случае это для некоторых примеров выполняется, а для некоторых нет, см. главу 3. Перейдем теперь к описанию множества критических точек комбинаторной функции Морса.

Для каждой грани $\triangle$ симплекса $\triangle^j_{\tilde c}$, которая не принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\le\tilde c-}$, точная нижняя грань функции f в страте $S(\triangle)$ равна $\tilde c$. Поскольку f является комбинаторной функцией Морса, то точная нижняя грань $\tilde c$ в страте $S(\triangle)$ достигается. Обозначим через $C(\triangle^j_{\tilde c})$ объединение критических точек из множеств $\min_f S(\triangle)$ по всем симплексам $\triangle \in \triangle^j_{\tilde c} \backslash \mathcal{N}_{\le\tilde c-}$, т.е. $C(\triangle^j_{\tilde c}) = \bigcup\limits_{\triangle\in\triangle^j_{\tilde c}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde c-}} \min_f S(\triangle)$.

Лемма 2.8 *Множества $C(\triangle^j_{\tilde c})$ при разных j попарно не пересекаются и в объединении дают все критическое множество* $\mathrm{Crit}_f(\tilde c)$.

Доказательство. Предположим, что при $j' \ne j''$ множества $C(\triangle^{j'}_{\tilde c})$ и $C(\triangle^{j''}_{\tilde c})$ пересекаются, т.е. существуют симплексы $\triangle' \in \triangle^{j'}_{\tilde c}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde c-}$ и $\triangle'' \in \triangle^{j''}_{\tilde c}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde c-}$, такие что пересечение соответствующих множеств минимумов $\min_f S(\triangle')$ и $\min_f S(\triangle'')$ не пусто. Пусть x — некоторая точка из этого пересечения. Обозначим через $S(\triangle)$ минимальный страт для точки x, где $\triangle$ — максимальный симплекс, задающий страт $S(\triangle)$. Согласно следствию 2.1, симплексы $\triangle'$ и $\triangle''$ являются гранями симплекса $\triangle$. Поскольку $x \in S(\triangle) \subset S(\triangle')\cap S(\triangle'')$, то точная нижняя грань функции f на страте $S(\triangle)$ равна $\tilde c = f(x)$. Следовательно, симплекс $\triangle$, для которого $\triangle' \in \triangle^{j'}_{\tilde c}$ и $\triangle'' \in \triangle^{j''}_{\tilde c}$ — грани, принадлежит комплексу $d\mathcal{N}_{\tilde c}$. Этот факт противоречит определению симплексов $\triangle^{j'}_{\tilde c}$ и $\triangle^{j''}_{\tilde c}$.

Вторая часть леммы доказывается следующим образом. Пусть x — критическая точка из критического множества $\mathrm{Crit}_f(\tilde c)$. Тогда, по определению критической точки, она принадлежит некоторому множеству

$\min_f S(\triangle)$. Поскольку $f(x) = \tilde{c}$, то $\triangle \in d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. Следовательно, симплекс $\triangle$ является гранью для некоторого симплекса $\triangle^j_{\tilde{c}}$. Таким образом, $x \in C(\triangle^j_{\tilde{c}})$. $\square$

Итак, каждой ручке $\triangle^j_{\tilde{c}}$ отвечает критическое подмножество $C(\triangle^j_{\tilde{c}}) \subset \mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$. Однако, для вычисления индекса ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ не требуется вычислять индексы всех критических точек из $C(\triangle^j_{\tilde{c}})$; достаточно выбрать лишь одного представителя критического подмножества $C(\triangle^j_{\tilde{c}})$. Выберем произвольную точку из множества $\min_f S(\triangle^j_{\tilde{c}}) \subset C(\triangle^j_{\tilde{c}})$ и обозначим ее $x^j_{\tilde{c}}$; точка $x^j_{\tilde{c}} \in \mathcal{K}$ будет называться *каноническим представителем* ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ в критическом множестве $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$.

Лемма 2.9 *Страт $S(\triangle^j_{\tilde{c}})$ является минимальным стратом для любого канонического представителя ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ в критическом множестве $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$, а симплекс $\triangle^j_{\tilde{c}}$ является максимальным симплексом, задающим страт $S(\triangle^j_{\tilde{c}})$.*

Доказательство. Пусть $x^j_{\tilde{c}}$ — некоторый канонический представитель ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$. Предположим, что $S(\triangle^j_{\tilde{c}})$ — не минимальный страт для точки $x^j_{\tilde{c}}$. Тогда, воспользовавшись определением минимального страта и леммой 2.2, можно утверждать, что существует некоторый страт $S(\triangle) \ni x^j_{\tilde{c}}$, такой что $S(\triangle) \subset S(\triangle^j_{\tilde{c}})$ и $\triangle^j_{\tilde{c}}$ — грань симплекса $\triangle$. Поскольку $x^j_{\tilde{c}}$ — критическая точка, то значение $\tilde{c}$ функции f в этой точке, согласно лемме 2.5, является абсолютным минимумом функции f в страте $S(\triangle^j_{\tilde{c}})$, а значит $\tilde{c}$ является абсолютным минимумом и в страте $S(\triangle)$. Следовательно, симплекс $\triangle$, для которого $\triangle^j_{\tilde{c}}$ — грань, принадлежит совокупности $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. Но этого быть не может, поскольку f — комбинаторная функция Морса.

Из аналогичных рассуждений вытекает и вторая часть леммы. $\square$

Лемма 2.10 *Минимальный страт для любой точки из критического подмножества $C(\triangle^j_{\tilde{c}})$ содержит страт $S(\triangle^j_{\tilde{c}})$.*

Доказательство. Пусть $x \in C(\triangle^j_{\tilde{c}})$, т.е. точка x принадлежит некоторому множеству $\min_f S(\triangle)$, где $\triangle$ — грань симплекса $\triangle^j_{\tilde{c}}$. Обозначим через $S(\triangle')$ минимальный страт для точки x. Поскольку $S(\triangle) \supset S(\triangle')$ и $x \in \min_f S(\triangle)$, то x принадлежит множеству $\min_f S(\triangle')$. Следовательно, симплекс $\triangle'$ должен принадлежать совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}}$, т.е.

одной из ручек функции f, а множество $\min_f S(\triangle')$ одному из соответствующих этим ручкам критических подмножеств. Но пересечение $\min_f S(\triangle') \cap C(\triangle^j_{\tilde{c}})$ содержит точку x. Следовательно, симплекс $\triangle'$ является гранью симплекса $\triangle^j_{\tilde{c}}$ и имеет место включение $S(\triangle^j_{\tilde{c}}) \subset S(\triangle')$. $\square$

Предложение 2.4 *Пусть $x^j_{\tilde{c}}$ — канонический представитель ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ в критическом множестве $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$. Тогда к-потенциал $V_-(x^j_{\tilde{c}})$ точки $x^j_{\tilde{c}}$ совпадает с подошвой $\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ ручки $\triangle^j_{\tilde{c}}$ и имеет место равенство $\mathrm{ind}_f\, \triangle^j_{\tilde{c}} = \mathrm{ind}_f\, x^j_{\tilde{c}}$.*

Доказательство. Совпадение к-потенциала $V_-(x^j_{\tilde{c}})$ с подошвой $\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ вытекает из лемм 2.9 и 2.6. В свою очередь, равенство $\mathrm{ind}_f\, \triangle^j_{\tilde{c}} = \mathrm{ind}_f\, x^j_{\tilde{c}}$ следует из этого совпадения и определений соответствующих индексов. $\square$

Таким образом, для комбинаторной функции Морса, чтобы описывать изменение к-топологического типа множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении числа c через критическое значение $\tilde{c}$, достаточно знать лишь нескольких критических точек из множества $\mathrm{Crit}_f(\tilde{c})$, а именно — канонических представителей $x^j_{\tilde{c}}$. В самом деле, согласно утверждению 2.7, изменение комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ при прохождении через $\tilde{c}$ определяется приклейкой ручек $\triangle^j_{\tilde{c}}$ к комплексу $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ по своим подошвам $\triangle^j_{\tilde{c}} \cap \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. Каждая ручка $\triangle^j_{\tilde{c}}$, согласно лемме 2.9, определяется как максимальный симплекс, задающий минимальный страт для точки $x^j_{\tilde{c}}$, а подошва этой ручки, согласно предложению 2.4, — как к-потенциал $V_-(x^j_{\tilde{c}})$. Вычисление к-потенциалов точек для многих интересных случаев, см. главу 3 представляет собой локальную процедуру.

Теперь из утверждения 2.8 и предложения 2.4 вытекает следующая теорема

Теорема 2.1 *Пусть f — комбинаторная функция Морса на к-топологическом пространстве $\mathcal{K}$. Обозначим через $\{\triangle_\alpha\}$ совокупность ручек функции f, а через x_α — их канонических представителей. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_\alpha \mathrm{ind}_f\, x_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})).$$

5 Теория Морса минимальных сетей

В этом разделе мы реализуем программу построения теории Морса для минимальных сетей, сформулированную во Введении. В качестве пространства $\mathcal{K}$ мы возьмем конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей, затягивающих данную границу, а в качестве функции f — функцию ℓ длины сети. Напомним, что пространство $\mathcal{T}$ и функция ℓ были построены в разделе 3 главы 1. В настоящем разделе мы превратим пространство $\mathcal{T}$ в к-топологическое пространство и воспользуемся результатами комбинаторной теории Морса из предыдущего раздела. В частности, ее количественным результатом — равенством Морса. Оказывается, что для пространства $\mathcal{T}$ можно написать несколько равенств Морса, связывающих его к-топологический тип с критическими точками. Этот набор равенств Морса мы перепишем в более естественных для теории минимальных сетей терминах и выведем полезные для этой теории формулы.

5.1 Пространство $\mathcal{T}$ как к-топологическое пространство

К-топология на пространстве $\mathcal{T}$

Пусть $(\mathcal{X},\rho)$ — некоторое метрическое пространство и $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j=1}^n$ — фиксированная граница в пространстве $\mathcal{X}$. Рассмотрим конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей, затягивающих данную границу $\mathcal{A}$, и функцию ℓ длины сети. Напомним, что пара $(\mathcal{T},\ell)$ была построена в разделе 3 главы 1. Также напомним, см. следствие 1.2, что пространство $\mathcal{T}$ обладает конечным покрытием $\Sigma=\{\langle G\rangle\}_{G\in\mathcal{G}_{(n-3)}}$, где $\mathcal{G}_{(n-3)}$ — множество геометрических бинарных деревьев с n граничными вершинами. Покрытие Σ задает на пространстве $\mathcal{T}$ к-топологию.

Теперь мы можем воспользоваться результатами комбинаторной теории Морса из раздела 4 настоящей главы, где в качестве множества $\mathcal{K}$ берется пространство $\mathcal{T}$, а в качестве функции f — функция ℓ.

Комбинаторные свойства комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$

Изучим теперь комбинаторные свойства к-топологического типа пространства $\mathcal{T}$.

Лемма 2.11 *Комплекс $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ является симплексом размерности* $\frac{(2(n-2))!}{2^{n-2}(n-2)!} - 1$.

Доказательство. Поскольку каждый лист (элемент покрытия Σ) содержит в себе страт $\langle G_0\rangle$, где G_0 — геометрическое дерево топологии звезда, то пересечение всех листов пространства $\mathcal{T}$ не пусто. Следовательно, комплекс $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ является симплексом. Вершины этого симплекса суть листы пространства $\mathcal{T}$, количество которых равно $|\mathcal{G}_{(n-3)}|$ и, по утверждению 1.2, равно $\frac{(2(n-2))!}{2^{n-2}(n-2)!}$. $\square$

Поскольку по утверждению 1.3 и лемме 2.3 имеются взаимнооднозначные соответствия между стратами пространства $\mathcal{T}$ и геометрическими деревьями из множества $\mathcal{G}$ и между стратами пространства $\mathcal{T}$ и существенными симплексами комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$, то мы получаем лемму

Лемма 2.12 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между существенными симплексами комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ и геометрическими деревьями из $\mathcal{G}$.*

Лемма 2.13 *Рассмотрим два существенных симплекса $\triangle'$ и $\triangle$ комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$. Обозначим через G' и G соответствующие им геометрические деревья. Симплекс $\triangle'$ является гранью симплекса $\triangle$, если и только если выполняется неравенство $G' \le G$.*

Доказательство. Включение $\triangle' \subset \triangle$ выполняется тогда и только тогда, когда когда выполняется обратное включение $\langle G'\rangle = S(\triangle') \supset S(\triangle) = \langle G\rangle$. В свою очередь, последнее включение выполняется тогда и только тогда, когда верно неравенство $G' \le G$. $\square$

5.2 Критические точки и критические значения функции ℓ

Утверждение 2.9 *Регулярная сеть Γ является критической точкой функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда Γ — регулярная минимальная параметрическая сеть.*

Доказательство. Пусть Γ — критическая точка (регулярная сеть) функции ℓ. Обозначим через $\langle G\rangle$ минимальный страт для точки Γ. Согласно лемме 1.10, сеть Γ имеет тип G. По утверждению 2.4, в точке Γ

функция ℓ достигает своего абсолютного минимума на страте $\langle G\rangle$, т.е. $\ell(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma'\in\langle G\rangle} \ell(\Gamma')$. Следовательно, для сети Γ выполняется равенство $\ell(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma'\in[G]} \ell(\Gamma')$. Таким образом, регулярная сеть Γ является минимальной параметрической сетью типа G.

Обратно. Пусть регулярная сеть Γ типа G является минимальной параметрической сетью, т.е. $\ell(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma'\in[G]} \ell(\Gamma')$. Тогда, по лемме 1.10, страт $\langle G\rangle$ является минимальным стратом для сети Γ, и выполнено равенство $\ell(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma'\in\langle G\rangle} \ell(\Gamma')$. Следовательно, согласно утверждению 2.4, регулярная сеть Γ — критическая точка функции ℓ. $\square$

Следствие 2.3 *Пусть метрическое пространство $\mathcal{X}$ и граница $\mathcal{A}$ таковы, что для любого типа $G \in \mathcal{G}$ существует соответствующая минимальная параметрическая сеть* $\Gamma \in [G]$. *Тогда критические значения функции ℓ — это длины минимальных параметрических сетей.*

5.3 Комбинаторные и геометрические расщепления сетей

Определение. Пусть Γ — некоторая параметрическая сеть. Любая сеть Γ', полученная из сети Γ некоторой последовательностью расщеплений подвижных вершин, называется *комбинаторным расщеплением* сети Γ.

Элементарным расщеплением сети Γ назовем расщепление, которое отличается от сети Γ лишь одним дополнительным ребром (см. замечание на стр. 38). Пусть Γ' — некоторое комбинаторное расщепление сети Γ. Обозначим через $e_1,\ldots, e_k$ ребра сети Γ', которых нет в сети Γ . Этот набор ребер порождает набор элементарных расщеплений $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_k$ сети Γ следующим образом: у сети Γ_i по сравнению с сетью Γ одно новое ребро e_i. Элементарные расщепления $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_k$ сети Γ назовем *производными расщеплениями* для расщепления Γ' сети Γ.

Определение. Пусть $\Gamma' \in [G']$ — комбинаторное расщепление сети Γ. Если сеть Γ' не является минимальной параметрической сетью в классе $[G']$, тогда эту сеть назовем *геометрическим расщеплением* сети Γ. Также будем говорить, что *расщепление* Γ' *может уменьшить длину сети* Γ.

Определение. Комбинаторное расщепление Γ' сети Γ назовем *мощным расщеплением,* если все его производные расщепления являются геометрическими (могут уменьшить длину сети Γ).

Пусть Γ — некоторая сеть с границей $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{X}$. Рассмотрим какое-либо геометрическое расщепление Γ'. Если для сети Γ у каждого ее геометрического расщепления Γ' существует производное расщепление, которое является геометрическим, то тогда мы будем называть сеть Γ *сетью с элементарно порожденными геометрическими расщеплениями.* Пример сети с не элементарно порожденными геометрическими расщеплениями приведен в книге [29].

5.4 Комплекс мощных расщеплений сети

Пусть Γ — некоторая параметрическая сеть. Построим *комплекс мощных расщеплений* сети Γ, который мы обозначим через $\mathcal{PS}(\Gamma)$. Обозначим через $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_s$ все элементарные геометрические расщепления сети Γ. По определению положим геометрические расщепления $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_s$ вершинами комплекса $\mathcal{PS}(\Gamma)$. Также по определению комплекс $\mathcal{PS}(\Gamma)$ содержит $(k-1)$-мерный симплекс $(\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_k})$, если и только если существует мощное расщепление Γ' сети Γ, такое что сети $\Gamma_{i_1},\ldots, \Gamma_{i_k}$ образуют полный набор производных расщеплений для сети Γ'. Таким образом, $(k-1)$-мерные симплексы комплекса $\mathcal{PS}(\Gamma)$ — это мощные расщепления сети Γ с k дополнительными внутренними ребрами.

Предложение 2.5 *Пусть $\Gamma \in \mathcal{T}$ — регулярная минимальная параметрическая сеть с элементарно порожденными геометрическими расщеплениями. Тогда комплекс мощных расщеплений $\mathcal{PS}(\Gamma)$ сети Γ изоморфен ее ко-потенциалу $V_-^*(\Gamma)$.*

Доказательство. Поскольку Γ — регулярная минимальная параметрическая сеть, то, согласно утверждению 2.9, сеть Γ является критической точкой функции длины ℓ на пространстве $\mathcal{T}$. Напомним (см. параграф 4.6), что вершинами ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ критической точки Γ являются наименьшие по включению страты $\langle G_i\rangle$, по которым можно уменьшить длину сети Γ. Покажем, что каждый страт $\langle G_i\rangle$ определяет элементарное геометрическое расщепление $\Gamma_i \in [G_i]$ сети Γ. Предположим, что расщепление $\Gamma_i \in [G_i]$ получено из Γ добавлением нескольких (более одного) ребер. Рассмотрим все производные расщепления $\Gamma_i^{(1)}, \ldots, \Gamma_i^{(s)}$ для расщепления Γ_i. Поскольку Γ — сеть с элементарно порожденными расщеплениями, то среди расщеплений $\Gamma_i^{(1)}, \ldots, \Gamma_i^{(s)}$ найдется одно, скажем $\Gamma_i^{(j)} \in [G_i^{(j)}]$, которое может уменьшить длину сети Γ. Тогда соответствующий страт $\langle G_i^{(j)} \rangle$, по которому можно уменьшить длину сети Γ, строго содержится в страте $\langle G_i \rangle$. Следовательно, страт $\langle G_i \rangle$ не является наименьшим по включению стратом, по которому можно уменьшить длину сети Γ, что противоречит определению страта $\langle G_i \rangle$. Таким образом, страт $\langle G_i \rangle$ определяет элементарное геометрическое расщепление $\Gamma_i \in [G_i]$ сети Γ.

Верно и обратное. Обозначим через G тип сети Γ. Каждое элементарное геометрическое расщепление $\Gamma' \in [G']$ сети Γ определяет некоторый наименьший по включению страт $\langle G' \rangle$, по которому можно уменьшить длину сети Γ. В самом деле, не существует геометрического дерева G'' для которого выполняются строгие неравенства $G > G'' > G'$. Следовательно, не существует страта $\langle G'' \rangle$, для которого были бы выполнены строгие включения $\langle G \rangle \subset \langle G'' \rangle \subset \langle G' \rangle$.

Все вышесказанное устанавливает взаимнооднозначное соответствие между вершинами ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ — наименьшими по включению стратами $\langle G_i \rangle$, по которым можно уменьшить длину сети Γ, и вершинами комплекса мощных расщеплений $\mathcal{PS}(\Gamma)$ — элементарными геометрическими расщеплениями Γ_i.

Напомним также, что $(k-1)$-мерным симплексом с вершинами $\langle G_{i_1} \rangle, \ldots, \langle G_{i_k} \rangle$ ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ является наименьший по включению страт $\langle G' \rangle$, содержащий страты $\langle G_{i_1} \rangle, \ldots, \langle G_{i_k} \rangle$. Из этого определения страта $\langle G' \rangle$ и из леммы 1.8 следует, что дерево G' содержит ровно k дополнительных ребер (по сравнению с деревом G), определяемых деревьями $G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}$. Другими словами, геометрические расщепления $\Gamma_{i_1} \in [G_{i_1}], \ldots, \Gamma_{i_k} \in [G_{i_k}]$ образуют полный набор производных расщеплений для комбинаторного расщепления $\Gamma' \in [G']$ сети Γ. Таким образом, комбинаторное расщепление Γ' является мощным расщеплением сети Γ. Следовательно, каждому $(k-1)$-мерному симплексу ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ соответствует $(k-1)$-мерный симплекс комплекса $\mathcal{PS}(\Gamma)$. Проведя вышеизложенное рассуждение в обратном порядке, мы получим, что это соответствие взаимнооднозначное. □

Рассмотрим снова регулярную минимальную параметрическую сеть $\Gamma \in \mathcal{T}$ с элементарно порожденными расщеплениями. Пусть ранг сети Γ

равен i. Обозначим через $PS_j(\Gamma)$ совокупность всех мощных расщеплений сети Γ, ранг которых равен j. Тогда из предложения 2.5 вытекает следующая лемма

Лемма 2.14 *Количество $(k-1)$-мерных симплексов ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ равно количеству мощных расщеплений сети Γ, ранг которых равен $i+k$, т.е.*

$$\#\mathcal{P}_k = \#PS_{i+k}(\Gamma).$$

Из этой леммы и предложения 2.3 получаем следствие

Следствие 2.4 *Пусть $\Gamma \in \mathcal{T}$ — регулярная минимальная параметрическая сеть ранга i с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда*

$$\chi(V_-(\Gamma)) = \sum_k (-1)^{k-1} \#PS_{i+k}(\Gamma).$$

5.5 Критические подмножества функции ℓ и равенство Морса

Опишем теперь как устроены критические подмножества критических множеств $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$. В параграфе 4.9 раздела 4 настоящей главы для комбинаторных функций Морса критические подмножества отвечали ручкам рассматриваемой функции. В данном пункте мы для случая пространства $\mathcal{T}$ и функции ℓ дадим описание критических подмножеств в терминах, более близких к теории минимальных сетей.

Разбиение критического множества $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ на критические подмножества $C(\triangle_\alpha)$ можно описать другим, более непосредственным, способом, не апеллируя к ручкам $\triangle_\alpha$ функции ℓ.

Рассмотрим множество всех регулярных минимальных параметрических сетей длины $\tilde{c}$. Согласно утверждению 2.9, это множество совпадает с критическим множеством $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$. Рассмотрим также совокупность $\mathcal{G}(\tilde{c}) \subset \mathcal{G}$ всех геометрических деревьев, параметризующих сети из $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$. Выделим в совокупности $\mathcal{G}(\tilde{c})$, как в частично упорядоченном множестве, максимальные элементы G_α. Для каждого максимального дерева G_α рассмотрим множество $C(G_\alpha)$ всех сетей из $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$, параметризующее дерево которых меньше или равно дереву G_α. Сеть Γ_α из $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ типа G_α назовем *каноническим представителем* множества

$C(G_\alpha)$. Очевидно, что объединение всех множеств $C(G_\alpha)$ по всем максимальным деревьям G_α совпадает с критическим множеством $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$.

Лемма 2.15 *Пусть функция ℓ в каждом страте $S(\triangle)$ достигает своего минимума. Тогда максимальные симплексы в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$ взаимнооднозначно соответствуют максимальным деревьям из $\mathcal{G}(\tilde{c})$.*

Доказательство. Пусть $\triangle$ — максимальный симплекс в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$. Симплекс $\triangle$ является существенным симплексом комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$. Обозначим через G геометрическое дерево, соответствующее этому симплексу.

Рассмотрим множество минимумов $\min_\ell S(\triangle)$. По условию, оно не пусто. Возьмем какую-нибудь сеть Γ из $\min_\ell S(\triangle)$. Поскольку, симплекс $\triangle$ является максимальным симплексом в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$, то страт $S(\triangle) = \langle G\rangle$ является минимальным стратом для сети Γ. Следовательно, по лемме 1.10, тип сети Γ равен G. Таким образом, дерево G принадлежит совокупности $\mathcal{G}(\tilde{c})$.

Покажем, что G — максимальное дерево в совокупности $\mathcal{G}(\tilde{c})$. В самом деле, предположим, что G не является максимальным деревом, т.е. в критическом множестве $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ существует сеть Γ' типа G', такого что $G < G'$. Тогда существенный симплекс $\triangle'$, соответствующий дереву G', принадлежит совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$ и строго содержит симплекс $\triangle$, что противоречит максимальности симплекса $\triangle$.

Проведя рассуждения в обратную сторону, получим окончательное утверждение леммы. $\Box$

Лемма 2.16 *Функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса тогда и только тогда, когда функция ℓ на каждом страте достигает своего минимума и критические подмножества $C(G_\alpha)$ критических множеств $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ попарно не пересекаются.*

Доказательство. Согласно лемме 2.15, максимальные симплексы в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$ взаимнооднозначно соответствуют максимальным деревьям из $\mathcal{G}(\tilde{c})$. Пусть $\triangle_{\alpha_1}$ и $\triangle_{\alpha_2}$ — два произвольных максимальных симплекса в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\le\tilde{c}-}$. Обозначим через G_{α_1} и G_{α_2} соответствующие этим симплексам максимальные деревья из $\mathcal{G}(\tilde{c})$.

По определению, функция ℓ является комбинаторной функцией Морса тогда и только тогда, когда в каждом страте функция ℓ достигает своего минимума и пересечение любых двух максимальных симплексов $\triangle_{\alpha_1}$ и $\triangle_{\alpha_2}$ из совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ либо пусто, либо принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. Последнее означает, что в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$ не существует существенного симплекса $\triangle$, принадлежащего как $\triangle_{\alpha_1}$, так и $\triangle_{\alpha_2}$. Это равносильно следующему условию: в критическом множестве $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ не существует сети Γ с параметризующим деревом G, таким что $G \leq G_{\alpha_1}$ и $G \leq G_{\alpha_2}$. Что, в свою очередь, равносильно непересечению критических подмножеств $C(G_{\alpha_1})$ и $C(G_{\alpha_2})$. $\square$

Лемма 2.17 *Если ℓ — комбинаторная функция Морса, то разбиение критического множества $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ на критические подмножества $C(\triangle_\alpha)$ совпадает с разбиением $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ на критические подмножества $C(G_\alpha)$. Причем, если $C(\triangle_\alpha) = C(G_\alpha)$, то G_α является геометрическим деревом, соответствующим симплексу $\triangle_\alpha$ (в смысле леммы 2.12).*

Доказательство. Пусть $\triangle_\alpha$ — максимальный симплекс из совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}} \backslash \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-}$. По лемме 2.15, симплексу $\triangle_\alpha$ соответствует максимальное дерево G_α из $\mathcal{G}(\tilde{c})$.

Сеть Γ принадлежит критическому подмножеству $C(\triangle_\alpha)$ тогда и только тогда, когда найдется существенный симплекс $\triangle \subset \triangle_\alpha$, такой что $\Gamma \in \min_\ell S(\triangle)$ и страт $S(\triangle)$ является минимальным стратом для сети Γ. Последнее, в свою очередь, согласно определению критического множества $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ и утверждению 2.4, выполняется тогда и только тогда, когда тип G сети Γ, соответствующий симплексу $\triangle$, меньше либо равен дереву G_α и $\Gamma \in \mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$, т.е. $\Gamma \in C(G_\alpha)$. $\square$

Назовем *рангом* критического подмножества $C(G_\alpha)$ ранг дерева G_α. Это число равно наименьшему рангу представителей (сетей) из $C(G_\alpha)$ — рангу канонического представителя Γ_α. Обозначим через C_k совокупность критических подмножеств ранга k, взятую по всем критическим множествам $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ функции ℓ. Следующее предложение в теории Морса минимальных сетей можно считать аналогом равенства Морса.

Предложение 2.6 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда имеет место формула*

$$|C_{n-3}| + \cdots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \leq n-3} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha),$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α *критических подмножеств* $C(G_\alpha)$ *ранга строго меньшего* $n-3$*, а* k_α *обозначает ранг сети* Γ_α*.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1 имеем

$$\sum_\alpha \operatorname{ind}_\ell \Gamma_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{T})).$$

Используя определение индекса сети из $\mathcal{T}$ и лемму 2.11 перепишем это выражение следующим образом.

$$\sum_{\Gamma_\alpha} 1 - \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) = 1.$$

Сгруппировав слагаемые в этой сумме по рангу сетей Γ_α, имеем

$$|C_{n-3}| - \sum_{\Gamma_\alpha \in C_{n-3}} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) + |C_{n-4}| - \sum_{\Gamma_\alpha \in C_{n-4}} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) + \dots +$$
$$+|C_1| - \sum_{\Gamma_\alpha \in C_1} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) + |C_0| - \sum_{\Gamma_\alpha \in C_0} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) = 1.$$

Заметив, что, во-первых, для множеств $\Gamma_\alpha \in C_{n-3}$ комплекс $V_-(\Gamma_\alpha) = \varnothing$ и, во-вторых, $|C_0| = 1$, получаем следующее равенство

$$|C_{n-3}| + \dots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha \in C_{n-4}} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)) + \dots + \sum_{\Gamma_\alpha \in C_0} \chi(V_-(\Gamma_\alpha)).$$

Согласно следствию 2.4, $\chi(V_-(\Gamma_\alpha)) = \sum_{k_\alpha < j \le n-3} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha)$. Теперь, подставляя выражение из этой формулы в последнее равенство, получаем доказываемую формулу. □

5.6 Пространства $\mathcal{T}_{(k)} \subset \mathcal{T}$

Фильтрация на пространстве $\mathcal{T}$

По аналогии с пространством $\mathcal{T}$ рассмотрим пространства $\mathcal{T}_{(k)}$, которые образованы склейкой по введенной выше эквивалентности пространств $[G]$, соответствующих геометрическим деревьям G с n граничными вершинами и ранга не выше k. Эти пространства образуют фильтрацию на пространстве $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}_{(0)} \subset \mathcal{T}_{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{T}_{(n-4)} \subset \mathcal{T}_{(n-3)} = \mathcal{T}$.

Более формально. Пусть $\tilde{\mathcal{T}}_{(k)} = \bigsqcup\limits_{0 \le rank\, G \le k} [G]$. Тогда $\mathcal{T}_{(k)} = \tilde{\mathcal{T}}_{(k)}/\sim$. В наших обозначениях $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(n-3)}$.

На каждом $\mathcal{T}_{(k)}$, $k = 0, \ldots, n-3$, задается естественная к-топология: $\mathcal{T}_{(k)} = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}_{(k)}} \langle G \rangle$. Также на каждом $\mathcal{T}_{(k)}$ определена функция $\ell_{(k)} = \ell|_{\mathcal{T}_{(k)}}$ длины сети.

Критические точки на пространствах $\mathcal{T}_{(k)}$

Для всех пространств $\mathcal{T}_{(k)}$ имеется аналог утверждения 2.9, описывающий критические точки на пространствах $\mathcal{T}_{(k)}$.

Утверждение 2.10 *Невырожденная параметрическая сеть* Γ *является критической точкой функции* $\ell_{(k)}$ *на пространстве* $\mathcal{T}_{(k)}$ *тогда и только тогда, когда* Γ *— регулярная минимальная параметрическая сеть.*

Из этого утверждения вытекает, что множество критических значений функции $\ell_{(k)}$ является подмножеством множества критических значений функции ℓ.

Критические подмножества для функции $\ell_{(k)}$ и равенства Морса

Аналогично случаю пространства $\mathcal{T}$ и функции ℓ дается описание критических подмножеств критических множеств $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ для пары $\mathcal{T}_{(k)}$ и $\ell_{(k)}$.

Рассмотрим множество всех регулярных минимальных параметрических сетей длины $\tilde{c}$ из пространства $\mathcal{T}_{(k)}$. Согласно утверждению 2.10, это множество совпадает с критическим множеством $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$. Рассмотрим также совокупность $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c}) \subset \mathcal{G}$ всех геометрических деревьев, параметризующих сети из $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$. Выделим в совокупности $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$, как в частично упорядоченном множестве, максимальные элементы G_α. Для каждого максимального дерева G_α рассмотрим множество $C_{(k)}(G_\alpha)$ всех сетей из $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$, параметризующее дерево которых меньше или равно дереву G_α. Сеть Γ_α из $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ типа G_α назовем *каноническим представителем* множества $C_{(k)}(G_\alpha)$. Очевидно, что объединение всех множеств $C_{(k)}(G_\alpha)$ по всем максимальным деревьям G_α совпадает с критическим множеством $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$.

Лемма 2.18 *Пусть функция $\ell_{(k)}$ в каждом страте $S(\triangle)$ пространства $\mathcal{T}_{(k)}$ достигает своего минимума. Тогда максимальные симплексы в совокупности $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}\backslash\mathcal{N}_{\leq\tilde{c}-}$ взаимнооднозначно соответствуют максимальным деревьям из $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$.*

Лемма 2.19 *Функция $\ell_{(k)}$ на пространстве $\mathcal{T}_{(k)}$ является комбинаторной функцией Морса тогда и только тогда, когда функция $\ell_{(k)}$ на каждом страте пространства $\mathcal{T}_{(k)}$ достигает своего минимума и критические подмножества $C_{(k)}(G_\alpha)$ критических множеств $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ попарно не пересекаются.*

Лемма 2.20 *Если $\ell_{(k)}$ — комбинаторная функция Морса, то разбиение критического множества $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ на критические подмножества $C_{(k)}(\triangle_\alpha)$ совпадает с разбиением $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ на критические подмножества $C_{(k)}(G_\alpha)$. Причем, если $C_{(k)}(\triangle_\alpha) = C_{(k)}(G_\alpha)$, то G_α является геометрическим деревом, соответствующим симплексу $\triangle_\alpha$ (в смысле леммы 2.12).*

Доказательства лемм 2.18, 2.19 и 2.20 полностью аналогичны доказательствам соответствующих лемм для пары $\mathcal{T}$ и ℓ.

Таким образом, для комбинаторной функции Морса $\ell_{(k)}$ имеется эквивалентное описание критических подмножеств $C_{(k)}(\triangle_\alpha)$ посредством критических подмножеств $C_{(k)}(G_\alpha)$.

Лемма 2.21 *Максимальные деревья из $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$ — это в точности максимальные деревья ранга не выше k из $\mathcal{G}(\tilde{c})$.*

Доказательство. Критическое множество $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ — это в точности множество всех сетей из $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ ранга не выше k. Следовательно, множество $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$ — это в точности множество всех деревьев из $\mathcal{G}(\tilde{c})$ ранга не выше k. Таким образом, если дерево G принадлежит $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$, то и любое дерево G' из $\mathcal{G}(\tilde{c})$, такое что $G' \geq G$, также принадлежит $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$. Отсюда следует, что максимальное дерево из $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$ также будет максимальным деревом и в $\mathcal{G}(\tilde{c})$ и ранг этого дерева не выше k. Обратное, очевидно, тоже верно. $\square$

Следствие 2.5 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между критическими подмножествами $C_{(k)}(G_\alpha)$ ранга $k' \leq k$ критического множества $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$ и критическими подмножествами $C(G_\alpha)$ ранга $k' \leq k$ критического множества $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$.*

Лемма 2.22 *Пусть G_α — максимальное дерево ранга не выше k из $\mathcal{G}(\tilde{c})$. Тогда имеет место равенство $C_{(k)}(G_\alpha) = C(G_\alpha) \cap \mathcal{T}_{(k)}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.21, дерево G_α принадлежит множеству $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$ и является там максимальным деревом. Поэтому корректно говорить о критическом подмножестве $C_{(k)}(G_\alpha) \subset \mathrm{Crit}_{(k)}(\tilde{c})$. По определению, критическое подмножество $C_{(k)}(G_\alpha)$ — это множество всех регулярных минимальных параметрических сетей из $\mathcal{T}_{(k)}$, тип которых не превосходит G_α, что эквивалентно доказываемому равенству. □

Лемма 2.23 *Пусть функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса. Тогда функция $\ell_{(k)}$ на пространстве $\mathcal{T}_{(k)}$ также является комбинаторной функцией Морса.*

Доказательство. По лемме 2.16, если функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса, то на каждом страте пространства $\mathcal{T}$ функция ℓ достигает своего минимума и критические подмножества $C(G_\alpha)$ критических множеств $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ попарно не пересекаются. В таком случае и функция $\ell_{(k)}$ на каждом страте пространства $\mathcal{T}_{(k)}$ достигает своего минимума. Теперь, согласно леммам 2.21 и 2.22, максимальное дерево G_α из $\mathcal{G}_{(k)}(\tilde{c})$ является также максимальным деревом из $\mathcal{G}(\tilde{c})$, и для соответствующих критических подмножеств выполнено равенство $C_{(k)}(G_\alpha) = C(G_\alpha) \cap \mathcal{T}_{(k)}$. Таким образом, поскольку критические подмножества $C(G_\alpha)$ попарно не пересекались, то не будут попарно пересекаться и критические подмножества $C_{(k)}(G_\alpha)$. Из леммы 2.19 следует, что функция $\ell_{(k)}$ на пространстве $\mathcal{T}_{(k)}$ также является комбинаторной функцией Морса. □

Также как и для критических подмножеств $C(\triangle_\alpha)$ назовем *рангом* критического подмножества $C_{(k)}(G_\alpha)$ ранг дерева G_α. Это число равно наименьшему рангу представителей (сетей) из $C_{(k)}(G_\alpha)$ — рангу канонического представителя Γ_α. Благодаря следствию 2.5, мы можем использовать обозначение $C_{k'}$ и для совокупности критических подмножеств ранга k' критических множеств $\mathrm{Crit}_{\ell_{(k)}}(\tilde{c})$.

Согласно лемме 2.23, из того, что функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса, вытекает, что функция $\ell_{(k)}$ на пространстве $\mathcal{T}_{(k)}$ также является комбинаторной функцией Морса. Следовательно, мы можем провести для каждого пространства $\mathcal{T}_{(k)}$ рассуждения, аналогичные рассуждениям для пространства $\mathcal{T}$, и получить предложение, дающее целый набор равенств Морса.

Предложение 2.7 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда имеет место формула*

$$|C_k| + \cdots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \le k} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha),$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга строго меньшего k, а k_α обозначает ранг сети Γ_α.

5.7 Основная формула

Выведем теперь формулу для количества критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга k. Имеет место теорема

Теорема 2.2 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса на пространстве $\mathcal{T}$, и пусть все канонические представители Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Тогда количество критических подмножеств ранга k выражается следующей формулой*

$$|C_k| = \sum_{\Gamma_\alpha:\ k_\alpha < k} (-1)^{k-k_\alpha-1} \# PS_k(\Gamma_\alpha)$$

где суммирование ведется по всем каноническим представителям Γ_α критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга $k_\alpha < k$.

Доказательство. Чтобы получить доказываемую формулу нужно воспользоваться предложением 2.7 и из равенства

$$|C_k| + \cdots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \le k} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha)$$

вычесть равенство

$$|C_{k-1}| + \cdots + |C_1| = \sum_{\Gamma_\alpha} \sum_{k_\alpha < j \le k-1} (-1)^{j-k_\alpha-1} \# PS_j(\Gamma_\alpha).$$

□

Замечание. В главе 3 при применении теоремы 2.2 нам необходимо будет вычислять мощные расщепления различных сетей. Фактически, для каждой рассматриваемой сети нужно будет изучить как устроен комплекс ее мощных расщеплений. Эта задача условно разбивается на две подзадачи: "геометрическая" — вычислить все элементарные геометрические расщепления, т.е. вершины этого комплекса, и "комбинаторная" — выбрать из всей совокупности элементарных геометрических расщеплений такие подсовокупности, которые образуют мощные расщепления, т.е. грани этого комплекса. Именно таким образом и будет решаться задача вычисления мощных расщеплений данной сети.

Глава 3

Приложения

В этой главе мы применим комбинаторную теорию Морса, точнее теорию Морса минимальных сетей, разработанную в главе 2, к исследованию минимальных (минимальных параметрических и локально минимальных) сетей в пространствах двух типов: многообразия и нормированные пространства. Особое внимание будет уделено многообразиям неположительной секционной кривизны, как представителям первого типа, и манхэттенской плоскости, как представителю второго типа, а также евклидовым пространствам $\mathbb{R}^N$, как представителям обоих типов пространств. Идеи и результаты комбинаторной теории Морса позволяют получать оценки на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную (но произвольную) границу. Для некоторых важных частных случаев перечисленных выше пространств получение оценок подобного рода будет продемонстрированно в данной главе.

1 Минимальные сети в нормированных пространствах. Общие результаты

1.1 Некоторые факты из выпуклого анализа

В этом пункте мы напомним необходимые нам факты из выпуклого анализа, подробнее с которыми можно ознакомиться, например, в [11].

Субградиентом выпуклой функции $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^N$ называется ковектор $\xi \in T^*_x\mathbb{R}^N$, такой что

$$\xi(y - x) \le F(y) - F(x) \ \text{ для всех } y \in \mathbb{R}^N.$$

Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклая поверхность, и $x \in X$ — произвольная точка на этой поверхности. Гиперплоскость Π, проходящая через точку x называется *опорной гиперплоскостью* к поверхности X в точке x, если X лежит в замкнутом полупространстве, ограниченном плоскостью Π. Вектор, перпендикулярный к опорной гиперплоскости и направленный в открытое полупространство, ограниченное этой гиперплоскостью и не пересекающееся с X, называется *внешней нормалью* к поверхности X в точке x. Множество N_xX всех внешних нормалей к поверхности X в точке x называется *нормальным конусом*.

Для нормированного пространства $(\mathbb{R}^N, \rho)$ *конормой* ρ^*, соответствующей норме ρ, называется следующая функция, определенная на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) |\ \nu \in \Sigma\}.$$

Хорошо известно, принимая во внимание стандартное отождествление пространств $T_x^*\mathbb{R}^N$ и $T_x\mathbb{R}^N$, что *субградиентное множество* $S_F(x)$ *функции* F *в точке* x, т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x, — это непустое выпуклое подмножество нормального конуса в точке x к поверхности уровня функции F, проходящей через x. В то же время, функция F дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда множество $S_F(x)$ состоит из единственной точки, совпадающей с градиентом функции F в данном случае. Если функция $F = \rho$ — это норма, то имеет место следующий результат.

Предложение 3.1 *Пусть ρ — это норма, и пусть Σ_x — поверхность уровня функции F, проходящая через x. Тогда субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадет с множеством всех внешних нормалей к Σ_x в точке x, имеющих единичную конорму.*

1.2 Общий критерий минимальности параметрической сети

Пусть Γ — некоторая параметрическая сеть в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N, \rho)$. Рассмотрим пару (e, v), где v — подвижная вершина сети Γ, а e — ребро сети Γ, инцидентное вершине v. Припишем каждой такой паре (e, v) действительную N-мерную переменную $x_{e,v}$. Рассмотрим набор линейных уравнений, состоящий из всех уравнений следующих двух типов.

$$\begin{cases} \sum\limits_{e:e\ni v} x_{e,v} & = & 0, & \text{где } v \text{ — подвижная вершина сети } \Gamma, \\ x_{e,v} + x_{e,w} & = & 0, & \text{где } e = (vw) \text{ — внутреннее ребро сети } \Gamma. \end{cases}$$

Определение. Назовем этот набор уравнений *характеристической системой* сети Γ. Заметим, что характеристическая система полностью определяется параметризующим графом (типом) G сети Γ.

Далее, для каждого ребра e сети Γ и для каждой вершины v, инцидентной ребру e, определим вектор $n(e,v)$ следующим образом. Положим по определению вектор $n(e,v)$ равным направлению прямолинейного отрезка e, ориентированного от вершины v, если e — невырожденное ребро, и положим вектор $n(e,v)$ равным нулю, если e — вырожденное ребро. Пусть $S_\rho(e,v)$ — субградиентное множество функции ρ в точке $n(e,v)$.

Утверждение 3.1 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, [29]) *Сеть Γ является минимальной параметрической сетью в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N,\rho)$ тогда и только тогда, когда существует решение $\{x^0_{e,v}\}$ характеристической системы сети Γ, такое что для каждого ребра e сети Γ и для каждой подвижной вершины v, инцидентной ребру e, выполняется следующее условие: $x^0_{e,v} \in S_\rho(e,v)$.*

Пусть теперь ρ является гладкой функцией на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Тогда для каждой точки $x \neq 0$ субградиентное множество $S_\rho(x)$ состоит из одной точки — градиента функции ρ. Оказывается, в этом случае можно “локализовать” характеристическую систему сети Γ следующим образом.

Пусть v — некоторая подвижная вершина сети $\Gamma[G]$. Рассмотрим все невырожденные ребра, исходящие из вершины v. Для каждого такого невырожденного ребра e соответствующее субградиентное множество $S_\rho(e,v)$ состоит из единственного вектора, равного градиенту $\mathrm{grad}_\rho(e,v)$ функции ρ в точке $n(e,v)$. Пусть H_v равняется сумме градиентов $\mathrm{grad}_\rho(e,v)$ по всем невырожденным ребрам, исходящим из подвижной вершины v сети Γ (если таких невырожденных ребер нет, то положим по определению $H_v = 0$). Рассмотрим теперь приведенную сеть $\tilde\Gamma$ для сети $\Gamma[G]$. Пусть V — подвижная вершина приведенной сети $\tilde\Gamma$, а G_d^V — соответствующая вершине V компонента вырождения параметризующего графа G сети Γ.

Определение. Если компонента вырождения G_d^V не одноточечна, то линейную систему уравнений, заиндексированных подвижными вершинами v из G_d^V,

$$\sum_{e\in G_d^V:\ e\ni v} x_{e,v} + H_v = 0,$$

и дополненную системой уравнений, заиндексированных всеми внутренними ребрами $e=(vw)$ из G_d^V,

$$x_{e,v} + x_{e,w} = 0,$$

назовем *характеристической системой локальной структуры вершины* V.

Объединение характеристических систем локальной структуры по всем подвижным вершинам V приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ для сети Γ называется *характеристической системой локальной структуры сети* Γ.

Утверждение 3.2 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, [29])
Пусть Γ — параметрическая сеть общего вида, т.е. ее топология не обязательно является деревом, в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N,\rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ нормой ρ. Сеть Γ является минимальной параметрической сетью тогда и только тогда, когда

- *для каждой подвижной вершины $V\in\tilde{\Gamma}$, соответствующая компонента вырождения которой не одноточечна, существует решение $\{x_{e,v}^0\}$ характеристической системы локальной структуры вершины V, такое что для каждого ребра e сети Γ и для каждой подвижной вершины v, инцидентной ребру e, выполняется неравенство $\rho^*(x_{e,v}^0)\le 1$.*

- *для каждой подвижной вершины $V\in\tilde{\Gamma}$, соответствующая компонента вырождения которой состоит из одной вершины v, верно равенство $H_v=0$.*

1.3 Критерий минимальности параметрической сети с топологией дерева

Снова рассмотрим сеть Γ в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N,\rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ нормой ρ.

Хотя мы и ограничились рассмотрением сетей, параметризующие графы которых являются геометрическими деревьями, но утверждение 3.2 верно и для сетей произвольной топологии, т.е. допускаются циклы и кратные ребра. Характеристическая система локальной структуры сети Γ общего вида имеет, вообще говоря, неединственное решение. Однако, имеет место следующее предложение

Предложение 3.2 *Если параметризующий граф G сети Γ является деревом, то*

1. *характеристическая система ее локальной структуры совместна тогда и только тогда, когда в каждой чисто подвижной вершине V приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ сумма всех единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных V, равна 0;*

2. *в случае совместности эта характеристическая система обладает единственным решением.*

Доказательство. Поскольку характеристическая система локальной структуры сети Γ распадается на характеристические системы локальной структуры подвижных вершин V приведенной сети $\tilde{\Gamma}$, то утверждение достаточно доказать лишь для последних. Итак, пусть V — подвижная вершина приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ и G_d^V — соответствующая ей вырожденная компонента. Рассмотрим характеристическую систему локальной структуры вершины V, которую мы обозначим через Ξ_V. Если V — чисто подвижная вершина, то каждая переменная $x_{e,v}$ входит в эту систему ровно два раза, один раз в уравнение вида $\sum\limits_{e\in G_d^V:\ e\ni v} x_{e,v}+H_v=0$, а другой раз — в уравнение вида $x_{e,v}+x_{e,w}=0$. Поэтому, если мы просуммируем все уравнения первого вида системы Ξ_V и отдельно просуммируем все уравнения второго вида системы Ξ_V, а затем вычтем из первой суммы вторую, то получим $0=\sum\limits_{v\in G_d^V} H_v$. Таким образом в 1) доказана необходимость.

Теперь докажем достаточность одновременно с пунктом 2). Пусть G_b — одна из двух веток дерева G_d^V, инцидентная ребру $e=(uw)\in G_d^V$, например такая, что $u\in G_b$. Предположим, что ветка G_b не содержит граничных вершин из дерева G, и рассмотрим ограничение характеристической системы локальной структуры вершины V на ветку G_b, т.е. в новую систему войдут только те уравнения, в которые входит хотя бы одна переменная, отвечающая вершине из дерева G_b. Обозначим это ограничение через Ξ_u.

Лемма 3.1 *Система Ξ_u совместна при любых значениях векторов H_v, $v \in G_b$, и имеет единственное решение. При этом $x_{e,u} = -\sum\limits_{v \in G_b} H_v$.*

Доказательство. На систему Ξ_u написанную по графу G_b можно посмотреть с формальной точки зрения. А именно, пусть G — произвольное дерево, каждой вершине v которого приписан произвольный вектор H_v. Пусть также в дереве G имеется выделенная вершина u. Образуем новое дерево G', приклеив к вершине $u \in G$ дополнительное ребро (uw). Как и выше каждому направленному ребру (e, v) дерева G' поставим в соответствие N-мерную переменную $x_{e,v}$, и рассмотрим следующую совокупность уравнений $\sum\limits_{e \in G' \colon\ e \ni v} x_{e,v} + H_v = 0$ по всем вершинам v дерева G. Добавим к этой совокупности еще одну совокупность уравнений $x_{e,v} + x_{e,v'} = 0$ по всем ребрам $e = (vv')$ дерева G. Полученную таким образом систему мы также назовем *характеристической* для графа G (в случае если $G = G_b$ эта характеристическая система совпадает с Ξ_u). Доказывать утверждение леммы мы будем именно в этой ситуации.

Проведем индукцию по числу вершин дерева G. Если в дереве G одна вершина, то лемма очевидна. Пусть для всех деревьев с числом вершин равным k лемма доказана. Докажем ее для числа вершин равного $k+1$. У каждого дерева G имеется по крайней мере две вершины степени 1. Выберем из них одну отличную от u и обозначим ее через p, а единственное инцидентное ей ребро обозначим через $e = (pq)$. Тогда уравнение первого вида, соответствующее этой вершине, выглядит следующим образом $x_{e,p} + H_p = 0$. Из уравнения $x_{e,p} + x_{e,q} = 0$ следует, что $x_{e,q} = H_p$. Кроме этого уравнения переменную $x_{e,q}$ содержит еще только одно уравнение $\sum\limits_{e' \in G' \colon\ e' \ni q} x_{e',q} + H_q = 0$. Подставив в него вместо $x_{e,q}$ вектор H_p, мы получим: $\sum\limits_{e' \in G' \setminus \{e\} : e' \ni q} x_{e',q} + H_q + H_p = 0$, исключив тем самым переменную $x_{e,q}$. Собранные теперь вместе уравнения без $x_{e,q}$ и $x_{e,p}$ представляют характеристическую систему для дерева, полученного из G отрезанием ребра $e = (pq)$ и приписыванием в вершине q нового вектора $H_q + H_p$. Для этого графа по предположению индукции лемма доказана, а значит она доказана и для G. □

Если V — чисто подвижная вершина, то дополнительная к G_b ветка также не содержит граничных вершин. Согласно этой лемме, ограничение Ξ_w характеристической системы локальной структуры вершины V на дополнительную ветку также всегда имеет единственное решение и при этом $x_{e,w} = -\sum\limits_{v\in G_d^V\setminus G_b} H_v$. Заметим, что объединение систем Ξ_u, Ξ_w и уравнения $x_{e,u}+x_{e,w}=0$ дает всю начальную систему Ξ_V, следовательно, чтобы Ξ_V была совместна и имела единственное решение необходимо и достаточно выполнения равенства $\sum\limits_{v\in G_d^V} H_v = 0$.

Если же компонента вырождения G_d^V содержит граничную вершину $v' \in \partial G$, то выкидыванием всех инцидентных вершине v' ребер, принадлежащих графу G_d^V, мы разобьем систему Ξ_V на несколько подсистем, отвечающих соответствующим веткам, которые всегда однозначно разрешимы. $\Box$

Итак, пусть Γ — сеть в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N, \rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ нормой ρ. Предположим, что параметризующий граф G сети Γ является деревом. Обозначим через $\tilde\Gamma$ приведенную сеть для сети Γ. Рассмотрим подвижную вершину V сети $\tilde\Gamma$ и ее компоненту вырождения G_d^V. Сформулируем теперь критерий минимальности параметрической сети Γ.

Утверждение 3.3 *Для того, чтобы Γ была минимальной параметрической сетью необходимо и достаточно, чтобы для каждой подвижной вершины V приведенной сети $\tilde\Gamma$ выполнялось следующее условие: для каждой ветки G_b дерева G_d^V, не содержащей граничной вершины дерева G, имеет место $\rho^*(\sum\limits_{v\in G_b} H_v) \le 1$; если к тому же V — чисто подвижная вершина, то $\sum\limits_{v\in G_d^V} H_v = 0$.*

Доказательство. Этот критерий является следствием утверждения 3.2, предложения 3.2 и леммы 3.1. $\Box$

Предложение 3.3 *Все минимальные параметрические сети в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^N, \rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ нормой ρ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями.*

Доказательство. Пусть $\Gamma[G]$ — некоторая минимальная параметрическая сеть в пространстве $\mathbb{R}^N$, и пусть $\Gamma'[G']$ — некоторое ее расщепление. Это означает, что у характеристической системы локальной структуры сети Γ не существует решения, такого что для каждой N-мерной компоненты $x_{e,v}$ выполняется неравенство $\rho^*(x_{e,v}) \le 1$. Но, поскольку a) G' — дерево и b) для приведенной сети $\tilde{\Gamma}'$, которая совпадает с приведенной сетью $\tilde{\Gamma}$, выполняется условие 1) предложения 3.2, то по предложению 3.2, существует и единственно решение характеристической системы локальной структуры сети Γ'. Следовательно, в этом решении найдется N-мерная компонента $x^0_{e,v}$, $e \in G'$, такая что $\rho^*(x^0_{e,v}) > 1$.

Рассмотрим теперь еще одно расщепление Γ'' сети Γ, в котором добавлено (по сравнению с сетью Γ) только ребро e. Это расщепление является производным расщеплением для расщепления Γ'. По тем же причинам, что и для расщепления Γ', решение характеристической системы локальной структуры сети Γ'' существует и единственно. Причем, из леммы 3.1 вытекает, что значение переменной $x_{e,v}$ в этом решении будет совпадать со значением аналогичной переменной для сети Γ', т.е. с $x^0_{e,v}$. Поэтому выполняется неравенство $\rho^*(x_{e,v}) > 1$. Следовательно, по критерию минимальности параметрической сети 3.3, сеть Γ'' не является минимальной, т.е. расщепление Γ'' может уменьшить длину сети Γ. Таким образом, для произвольного расщепления Γ' сети Γ найдется производное расщепление Γ'', являющееся геометрическим. Предложение доказано. □

2 Минимальные сети на римановых многообразиях. Общие результаты

Напомним, что под параметрической сетью (или просто сетью) в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ мы понимали отображение множества вершин некоторого графа G в пространство ρ. Это, пожалуй, одно из самых разумных определений сети в общем метрическом пространстве. Подобное определение дает информацию лишь о положении вершин сети в пространстве $\mathcal{X}$ и ничего не говорит о ребрах — они как бы отсутствуют. В приложениях же необходимо знать каким образом соединяются ребром две данные вершины сети. И в тех пространствах, в которых имеется естественное определение ребра сети, под сетью понимают несколько другой объект. Ниже будет рассмотрен случай римановых многообразий.

В следующих двух пунктах даются основные определения и необходимые в дальнейшем результаты теории минимальных сетей [28] на римановых многообразиях.

2.1 Топологические графы

Определение. *Топологическим графом* G назовем произвольный конечный одномерный клеточный комплекс с фиксированным клеточным разбиением. Клетки размерности 0 называются *вершинами* графа G, а клетки размерности 1 — *ребрами*.

Замечание. Ясно, что мы получили топологическое представление абстрактных графов самого общего вида, т.е. графов с петлями и кратными ребрами, поэтому на топологические графы непосредственно переносится вся терминология как теории абстрактных графов, так и теории топологических пространств. Поэтому далее в этом разделе, в силу отмеченного соответствия между топологическими и абстрактными графами, мы часто для краткости будем называть топологические графы просто графами, опуская слово "топологический".

Также как и для обычных графов, см. раздел 1 главы 1, для топологических графов определяются граница графа, внутренние и граничные вершины, внутренние и граничные ребра и т.п.

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ — некоторая его точка (P не обязательно является вершиной графа G, см. замечание выше). *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ *точки* P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P — вершина, и не содержащее петель из G.

Наделим допустимую окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — отрезки в U, соединяющие эти точки. Полученное дерево обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P — граничная вершина графа G.

2.2 Параметрические сети

Определение. Пусть G — связный граф. Кусочно–гладкое отображение Γ графа G в риманово многообразие $\mathcal{W}$ называется *параметрической сетью*, а подмножество плоскости, совпадающее с образом $\operatorname{Im}\Gamma$, называется *следом* параметрической сети Γ. При этом граф G называется *параметризующим графом сети* Γ, а класс графов, изоморфных G, называется *топологией сети*.

Ограничение отображения Γ на вершину графа G назовем *вершиной*, а ограничение Γ на ребро графа G назовем *ребром* этой параметрической сети. Под *длиной сети* будем понимать сумму длин входящих в нее ребер.

Далее мы будем использовать следующие обозначения: $\Gamma[G]$ — сеть с параметризующим графом G; $\Gamma[(q'q'')]$ — ребро сети $\Gamma[G]$, соответствующее ребру $(q'q'')$ графа G; $\Gamma[q]$ — вершина $\Gamma[G]$, соответствующая вершине q графа G.

Также как и сетей в общих метрических пространствах, см. раздел 1 главы 1, для сетей на римановых многообразиях определяются граница сети, внутренние и граничные вершины, внутренние и граничные ребра, тип сети и т.п.

Определение. Минимальной параметрической сетью Γ типа (G, b) на многообразии $\mathcal{W}$ называется сеть, длина которой наименьшая среди всех параметрических сетей типа (G, b).

Пусть опять $\Gamma[G]$ — произвольная сеть, P — любая точка графа G, и G_U — локальный граф с центром в P. Сеть с границей, равной ограничению отображения Γ на G_U, называется *локальной сетью с центром в точке* P и обозначается через Γ_U. При этом, ограничение отображения Γ на каноническую границу ∂G_U локального графа G_U называется *канонической границей* локальной сети Γ_U и обозначается через $\partial\Gamma_U$.

2.3 Абсолютно и локально минимальные сети

Определение. Сеть Γ, затягивающая конечное множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ точек риманова многообразия $\mathcal{W}$, называется *абсолютно минимальной*, если ее длина — наименьшая среди длин всех сетей, затягивающих $\mathcal{A}$.

Невырожденная сеть Γ, затягивающая конечное множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ точек риманова многообразия $\mathcal{W}$ называется *локально минимальной*, если для любой ее точки P некоторая локальная сеть с центром в P является абсолютно минимальной сетью.

Следующая классическая теорема (для случая многообразий доказанная А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным, см., например, [28]) полностью описывает локальное устройство локально минимальных сетей на римановом многообразии $\mathcal{W}$.

Утверждение 3.4 *Невырожденная сеть Γ с границей $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ локально минимальна, если и только если:*

1. *все ребра сети Γ являются геодезическими;*
2. *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше $120°$;*
3. *все вершины степени 1 являются граничными;*
4. *если вершина степени 2 не граничная, то угол между выходящими из нее ребрами равен $180°$.*

3 Минимальные сети в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$

По утверждению 3.4, у локально минимальных сетей все ребра сети являются геодезическими. Такая ситуация имеет место для большинства задач минимизации длины сети. Поэтому при изучении локально минимальных сетей достаточно ограничиться так называемыми геодезическими сетями, т.е. сетями, у которых все ребра — геодезические кривые. Случай евклидовых пространств $\mathbb{R}^N$ хорош тем, что для любой пары точек существует единственная геодезическая, соединяющая эту пару точек. Эта геодезическая — обыкновенный отрезок, длина которого совпадает с евклидовым расстоянием между данными точками. Далее в евклидовых пространствах мы будем рассматривать только сети, все ребра которых являются прямолинейными отрезками. Таким образом, мы можем любую геодезическую сеть в $\mathbb{R}^N$ понимать как сеть в смысле определения параметрической сети в общих метрических пространствах, где заданы лишь положения вершин сети; и обратно.

3.1 Локально минимальные сети как регулярные минимальные параметрические сети

Одно из приложений теории Морса минимальных сетей — это получение оценок на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу. Для этого необходимо интерпретировать локально минимальные сети как регулярные минимальные параметрические сети (критические точки для пары $\mathcal{T}$ и ℓ). В настоящем параграфе это будет сделано.

Пусть Γ — локально минимальная сеть, затягивающая данную границу $\mathcal{A}$. Построим новую сеть Γ', след которой совпадает со следом сети Γ, и такую что параметризующий граф G' сети Γ' является бинарным деревом.

Если у сети Γ нет граничных вершин степени 2, то ее параметризующий граф G уже является бинарным деревом, поэтому можно положить $G' = G$ и $\Gamma' = \Gamma$. Если же у сети Γ есть граничные вершины степени 2, то с параметризующим графом G проделаем следующую процедуру. К каждой вершине $q \in V(G)$, $\deg q = 2$, приклеим новое ребро (pq). Полученный таким образом граф, который уже является бинарным деревом, обозначим через G'. На соответствующих ребрах $e \in E(G)$ и $e' \in E(G')$ положим $\Gamma'(e') = \Gamma(e)$, а на новых ребрах вида (pq) положим $\Gamma'((pq)) = \Gamma(q)$. Новые вершины степени 1 в графе G' объявим граничными, а новые вершины степени 3, которые раньше имели степень 2, объявим подвижными. Заметим, что у сети Γ' нет вырожденных внутренних ребер, и поэтому Γ' является регулярной сетью. Эту процедуру получения сети Γ' из локально минимальной сети Γ назовем *регуляризацией сети* Γ.

Лемма 3.2 *Пусть сеть* Γ' *получена регуляризацией локально минимальной сети* Γ*, затягивающей данную границу* $\mathcal{A}$*. Тогда для сети* Γ' *выполнены следующие три условия.*

1. Γ' *затягивает границу* $\mathcal{A}$*.*
2. *Параметризующий граф* G' *сети* Γ' *является бинарным деревом.*
3. Γ' *является регулярной минимальной параметрической сетью типа* G'*.*

Обратно, пусть для сети Γ' *выполнены условия 1)–3), тогда ее приведенная сеть* $\Gamma(\equiv \tilde{\Gamma}')$ *является локально минимальной сетью, затягивающей границу* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Эта лемма вытекает из утверждений 3.3 и 3.4. $\square$

Таким образом, регулярные минимальные параметрические сети с границей $\mathcal{A}$ и с бинарной топологией можно интерпретировать как локально минимальные сети, затягивающие границу $\mathcal{A}$.

3.2 Единственность минимальных параметрических сетей

В этом параграфе мы будем рассматривать параметрические сети в $\mathbb{R}^N$, затягивающие данную границу из n точек. Определим некоторое подмножество $\mathfrak{B}$ в множестве всех границ $\mathbb{R}^{Nn}$ и покажем, что для любой границы из $\mathfrak{B}$ и любого геометрического дерева из $\mathcal{G}$ минимальная параметрическая сеть в пространстве $[G]$ единственна.

Начнем мы с очень важного свойства функции длины ℓ сети на пространстве $[G]$ (которое нужно представлять как $\mathbb{R}^{Ns}$, где s — количество подвижных вершин дерева G) всех сетей типа G.

Лемма 3.3 *На пространстве* $[G]$ *функция* ℓ *выпукла.*

Доказательство. Эта лемма следует из того, что функция длины отрезка как функция его концов выпукла. Функция длины сети равна сумме длин ребер сети (отрезков), и потому как сумма выпуклых функций также выпукла. $\square$

Подвижная вершина V невырожденной сети Γ в $\mathbb{R}^N$ называется *слабо фиктивной*, если все ребра, инцидентные этой вершине, лежат на одной прямой, и количество ребер, инцидентных V, идущих в одну сторону, равно количеству ребер, инцидентных V, идущих в другую сторону.

Утверждение 3.5 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин [8]) *Пусть* Γ — *невырожденная минимальная параметрическая сеть типа* G *с фиксированной границей* $\mathcal{A}$, *где* G — *дерево. Сеть* Γ *будет единственной минимальной параметрической сетью в классе* $[G]$, *если и только если* Γ *не содержит слабо фиктивных вершин.*

Рассмотрим минимальную параметрическую сеть Γ, затягивающую фиксированную границу из n точек и такую что

1. каждая N-мерная компонента $x_{e,v}$ решения характеристической системы локальной структуры сети Γ по модулю строго меньше 1;

2. приведенная сеть $\tilde{\Gamma}$ сети Γ (напомним, что сеть $\tilde{\Gamma}$ невырождена) не содержит чисто подвижных слабо фиктивных вершин.

Объединим эти два условия в одно и назовем *условием единственности* для минимальной параметрической сети Γ. Множество границ из $\mathbb{R}^{Nn}$, для которых существует минимальная параметрическая сеть $\Gamma[G]$, обладающая условием единственности, мы обозначим через $\mathfrak{B}_G$.

Следующая лемма оправдывает название, данное вышеприведенному условию.

Лемма 3.4 *Минимальная параметрическая сеть* $\Gamma[G]$*, затягивающая границу* $\mathcal{A}$ *из* $\mathfrak{B}_G$*, является единственной минимальной параметрической сетью в классе* $[G]$ *всех сетей типа* G*, затягивающих* $\mathcal{A}$*.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть кроме $\Gamma[G]$ существует другая минимальная параметрическая сеть $\Gamma_1[G]$. Поскольку эти две сети принадлежат множеству точек минимума функции длины, которое, как известно, для выпуклой функции (см. лемму 3.3) является также выпуклым, то $\Gamma[G]$ и $\Gamma_1[G]$ можно соединить отрезком, состоящим целиком из минимальных параметрических сетей типа G. То есть в любой сколь угодно малой окрестности сети $\Gamma[G]$ есть другие минимальные параметрические сети типа G.

Пусть минимальная параметрическая сеть $\Gamma'[G]$ получается из $\Gamma[G]$ каким-то достаточно малым шевелением подвижных вершин сети $\Gamma[G]$. Но при любом достаточно малом шевелении подвижных вершин сети $\Gamma[G]$ мало меняются и направления ее невырожденных ребер. Следовательно, суммы единичных направляющих векторов невырожденных ребер, выражающих компоненты решения характеристической системы локальной структуры сети Γ (см. лемму 3.1), как были по модулю строго меньше 1, так и останутся. И если при этом шевелении появилось новое невырожденное ребро (uv), то для компоненты вырождения $G_d^V \ni u$ сумма всех невырожденных ребер, инцидентных вершинам из компоненты, не может быть равна 0 (то же самое можно сказать и про вершину v), хотя согласно утверждению 3.3 должна быть равна 0, так как сеть $\Gamma'[G]$ является минимальной параметрической сетью. Поэтому новых невырожденных ребер у сети Γ' появится не может. Таким образом показано, что топологии приведенных сетей $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma}'$ имеют один и тот же тип, который мы обозначим через $\tilde{G}$. Следовательно, вместе с сетью $\tilde{\Gamma}$, которая является минимальной параметрической сетью в $[\tilde{G}]$, у нас в том же классе имеется еще одна минимальная параметрическая сеть $\tilde{\Gamma}'$, а значит, у $\tilde{\Gamma}$ обязательно есть слабо фиктивные вершины. Теперь уже мы пришли к противоречию с пунктом 2) условия единственности для сети Γ. $\square$

Лемма 3.5 $\mathfrak{B}_G$ *является открытым подмножеством в множестве всех границ* $\mathbb{R}^{Nn}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}'$ — произвольное достаточно малое возмущение границы $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_G$, и пусть сеть $\Gamma[G]$ является единственной в своем классе (см. лемму 3.4) минимальной параметрической сетью, затягивающей $\mathcal{A}$. Среди всех минимальных параметрических сетей, затягивающих $\mathcal{A}'$ найдется близкая к $\Gamma[G]$ сеть $\Gamma'[G]$, такая, что те ребра дерева G, которые были невырожденными для сети $\Gamma[G]$ будут невырожденными и для сети $\Gamma'[G]$, причем новых невырожденных ребер у сети $\Gamma'[G]$ не появится, см. доказательство леммы 3.4. С другой стороны, в силу малого изменения углов между невырожденными ребрами сети $\Gamma[G]$, у приведенной сети $\tilde{\Gamma}'[\tilde{G}]$ не появится слабо фиктивных вершин, так как их не было у приведенной сети $\tilde{\Gamma}[\tilde{G}]$. Следовательно, минимальная параметрическая сеть $\Gamma'[G]$, затягивающая границу $\mathcal{A}'$, удовлетворяет условию единственности, а значит $\mathcal{A}' \in \mathfrak{B}_G$. $\square$

Лемма 3.6 $\mathfrak{B}_G$ *является всюду плотным подмножеством в множестве всех границ* $\mathbb{R}^{Nn}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma[G]$ минимальная параметрическая сеть, затягивающая границу $\mathcal{A}$. Будем пытаться строить границу $\mathcal{A}'' \in \mathfrak{B}_G$ близкое к $\mathcal{A}$, и при этом у единственной минимальной параметрической сети $\Gamma''[G]$, затягивающей $\mathcal{A}''$, множество невырожденных ребер будет таким же, как и у $\Gamma[G]$.

Рассмотрим произвольную подвижную вершину V приведенной сети $\tilde{\Gamma}[\tilde{G}]$ и ее компоненту вырождения G_d^V. Пусть $x_{e,v}$ одна из N-мерных компонент решения характеристической системы локальной структуры вершины V и G_b — произвольная ветка дерева G_d^V, инцидентная ребру e и не содержащая граничных вершин из ∂G. Такие ветки G_b мы далее будем называть *весомыми*. Заметим на будущее, что если компонента вырождения G_d^V не содержит граничных вершин из ∂G, то любые две дополнительные ветки являются весомыми, а если содержит, то только одна из них. Для того, чтобы все N-мерные компоненты $x_{e,v}$ решения характеристической системы локальной структуры вершины V по модулю были не больше 1, необходимо чтобы сумма единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных вершинам из ветки G_b была по модулю также не больше 1, т.е. $|\sum\limits_{v \in G_b} H_v| \leq 1$, см. лемму 3.1. Для некоторых весомых веток G_b вместо этого нестрогого неравенства имеется точное равенство единице. Малым изменением направлений невырожденных ребер, инцидентных вершинам из компоненты вырождения G_d^V мы добьемся строгих неравенств для каждой весомой ветки $G_b \subset G_d^V$. Проведем теперь эту процедуру подробно. Для этого разберем два случая.

1) Компонента вырождения G_d^V содержит (единственную) граничную вершину из ∂G, которую мы обозначим через p. Все ребра графа G_d^V мы разобьем на уровни следующим образом: ребро e будет относиться к уровню с номером k, если в G_d^V существует несамопересекающийся путь, состоящий из k ребер, начинающийся в вершине p и заканчивающийся ребром e. Пусть для каждой весомой ветки, инцидентной ребру с уровня $\leq k-1$, имеется строгое неравенство, а для какой-то весомой ветки G_b, инцидентной ребру (uw) с уровня k, $u \in G_b$, точное равенство. Пусть также $(uw_1), \ldots, (uw_s)$ — все ребра $k+1$–ого уровня, инцидентные вершине u, и $n_1, \ldots, n_t$ — все единичные направляющие векторы невырожденных ребер, инцидентных вершине u. Обозначим через $H(w_1), \ldots, H(w_s)$ совокупности единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных вершинам весомых веток $G_b(w_1), \ldots, G_b(w_s)$ соответственно. Поскольку в наборе $n_1, \ldots, n_t, H(w_1), \ldots, H(w_s)$ не менее двух векторов, то сколь угодно малым изменением их направлений (с одним лишь условием, что вектора из одной совокупности $H(w_i)$ поворачиваются на один и тот же угол) мы можем добиться того, чтобы их общая сумма стала по модулю строго меньше 1. Заметим, что при этом малость изменений можно выбрать так, что строгость неравенств для весомых веток, инцидентных ребрам с уровня $\leq k-1$, сохранится, а для остальных весомых веток (кроме G_b) соответствующие суммы еди-

ничных векторов вообще не меняются. Осталось перестроить сеть $\Gamma[G]$ в соответствии с изменением направлений ребер. Связные компоненты сети $\Gamma[G]$, полученные выкидыванием из G компоненты вырождения G_d^V, подвинем как единые целые вслед за изменяющими направление невырожденными ребрами, которые эти компоненты вырождения содержат. Рассуждая таким образом по индукции, в итоге получится, что для каждой весомой ветки неравенства станут строгими.

2) Компонента вырождения G_d^V не содержит граничных вершин из ∂G. Пусть для некоторой ветки $G_b(u)$ (в данном случае каждая ветка является весомой), инцидентной ребру (uw), имеется точное равенство единице. Преобразуем сеть $\Gamma[G]$ аналогично п. 1), сделав для $G_b(u)$ строгое неравенство. Но теперь нам нужно позаботиться и о дополнительной к $G_b(u)$ ветке $G_b(w)$, так как мы хотим, чтобы на каждом шаге преобразований получалась минимальная параметрическая сеть. Для этого аналогичную п. 1) процедуру проделаем и для ветки $G_b(w)$, так, чтобы сумма всех единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных вершинам из G_d^V, стала равной 0. Это можно сделать, так как к ветке $G_b(w)$ примыкает не менее двух невырожденных ребер. Осталось отметить лишь, что совокупность двух преобразований веток $G_b(u)$ и $G_b(w)$ не изменит значения модуля суммы единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных какой-нибудь другой ветке G_b. В самом деле, либо сама ветка G_b, либо ей дополнительная должна входить целиком в одну из двух веток $G_b(u)$ или $G_b(w)$, допустим входит дополнительная. Но все невырожденные ребра, примыкающие к дополнительной ветке перемещались как единое целое при проводимых выше преобразованиях, поэтому модуль соответствующей суммы не меняется у дополнительной ветки, а в силу равенства нулю суммы всех единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных вершинам из G_d^V, модуль соответствующей суммы не меняется и для ветки G_b. Проведем такие преобразования для каждого ребра $e = (uw)$ из G_d^V, у которого значение отвечающей этому ребру N-мерной переменной $x_{e,u}$ по модулю равно 1.

Проделав эту процедуру для каждой компоненты вырождения G_d^V, мы получим новую минимальную параметрическую сеть $\Gamma'[G]$, затягивающую близкое к $\mathcal{A}$ граничное множество $\mathcal{A}'$. Сеть $\Gamma'[G]$ удовлетворяет условию единственности, и осталось только избавиться от слабо фиктивных вершин у приведенной сети $\tilde{\Gamma}'[\tilde{G}]$. Пусть V слабо фиктивная вершина приведенной сети $\tilde{\Gamma}'[\tilde{G}]$ и a — прямая, содержащая все ребра, инцидентные вершине V. Выкинем вершину V из сети $\tilde{\Gamma}'[\tilde{G}]$, тогда сеть распадется на связные компоненты. Возьмем два противоположно направленных ребра, инцидентных вершине V, и изменим их направление на один и тот же малый угол, но отложенный для одного ребра в одну полуплоскость, относительно прямой a, а для другого ребра — в другую. Связные компоненты распавшейся сети переместим как единые целые вместе с входящими в них ребрами, инцидентными вершине V. Таким образом избавимся от каждой слабо фиктивной вершины V приведенной сети $\tilde{\Gamma}'[\tilde{G}]$. Окончательно, мы получили границу $\mathcal{A}''$, уже принадлежащую $\mathfrak{B}_G$, и минимальную параметрическую сеть $\Gamma''[G]$, затягивающую это множество $\mathcal{A}''$. $\square$

Предложение 3.4 *Пусть* $\mathfrak{B} = \bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}} \mathfrak{B}_G$. *Тогда множество* $\mathfrak{B}$ *— всюду плотное открытое подмножество множества всех границ* $\mathbb{R}^{Nn}$, *причем любая минимальная параметрическая сеть* $\Gamma[G]$, *затягивающая границу из* $\mathfrak{B}_G$ *будет единственной минимальной параметрической сетью в своем классе* $[G]$.

Доказательство. Утверждение предложения следует из лемм 3.4, 3.5, 3.6 и из конечности множества геометрических деревьев $\mathcal{G}$. $\square$

Из леммы 2.7 и предложения 3.4 вытекает важное следствие

Следствие 3.1 *Для границ из множества* $\mathfrak{B}$ *функция длины сети* ℓ *на пространстве* $\mathcal{T}$ *всех регулярных сетей с данной границей является комбинаторной функцией Морса.*

Границу $\mathcal{A}$ из множества $\mathfrak{B}$, никакие три точки которой не лежат на одной прямой, мы будем называть *типичной границей* или *границей общего положения*. Совокупность всех типичных границ мы обозначим через $\mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ — открытое и всюду плотное подмножество в $\mathbb{R}^{Nn}$.

3.3 Случай плоскости $\mathbb{R}^2$

В этом параграфе будет продемонстрировано применение комбинаторной теории Морса (точнее, теории Морса минимальных сетей; а еще точнее теоремы 2.2) для получения оценок на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу на евклидовой плоскости.

При применении теоремы 2.2 нам необходимо выполнение двух условий: функция ℓ должна быть комбинаторной функцией Морса на пространстве $\mathcal{T}$ и регулярные минимальные параметрические сети должны быть сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Для того, чтобы удовлетворить первому условию, мы будем рассматривать только типичные границы. Тогда следствие 3.1 гарантирует выполнение первого условия. Выполнение второго условия обеспечивается предложением 3.3.

Согласно лемме 3.2, можно интерпретировать локально минимальные сети, затягивающие данную границу, как регулярные минимальные параметрические сети с бинарной топологией и той же границей. Напомним, что совокупность всех критических подмножеств ранга $n-3$, т.е. критических подмножеств, канонический представитель которых имеет тип бинарного дерева, мы обозначали через C_{n-3}. В силу типичности границы и предложения 3.4, каждое критическое подмножество состоит ровно из одной регулярной минимальной параметрической сети; в частности, совокупность C_{n-3} — это в точности множество всех регулярных минимальных параметрических сетей с данной границей и бинарной топологией. Таким образом, нам нужно оценить мощность совокупности C_{n-3}.

Случай трех граничных точек

Начнем с простейшего случая. Рассмотрим типичную границу, состоящую из трех точек, $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^3$. В этом случае согласно таблице на стр. 45 имеется всего 1 геометрическое дерево G_0, изображенное на рис. 1.1. Поэтому конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей с границей $\mathcal{A}$ состоит из одного листа, соответствующего множеству $\langle G_0\rangle$, и совпадает с плоскостью $\mathbb{R}^2$. Следовательно, по лемме 3.4, имеется всего одна критическая точка, являющаяся абсолютным минимумом функции ℓ. Эта критическая точка и является единственной локально минимальной сетью, затягивающей множество $\mathcal{A}$.

Случай четырех граничных точек

Теперь рассмотрим типичную границу, состоящую из четырех точек, $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^4$. В этом случае, согласно таблице на стр. 45, имеется 1 геометрическое дерево G_0 ранга ноль и 3 геометрических дерева G_0', G_0'', G_0''' ранга один — потомки дерева G_0, изображенные на рис. 1.2. Пространство $[G_0]$ можно отождествить с $\mathbb{R}^2$, а пространства $[G_0']$, $[G_0'']$, $[G_0''']$ — с пространством $\mathbb{R}^4$. Поскольку страт $\langle G_0\rangle$ равен пересечению листов $\langle G_0'\rangle$, $\langle G_0''\rangle$, $\langle G_0'''\rangle$, т.е. $\langle G_0\rangle = \langle G_0'\rangle \cap \langle G_0''\rangle \cap \langle G_0'''\rangle$, то все конфигурационное пространство $\mathcal{T}$ представляет собой 3 экземпляра $\mathbb{R}^4$, склеенных друг с другом по своей "комплексной" диагонали. Пространство $\mathcal{T}$, соответствующее случаю $n = 4$, условно изображено на рис. 1.3.

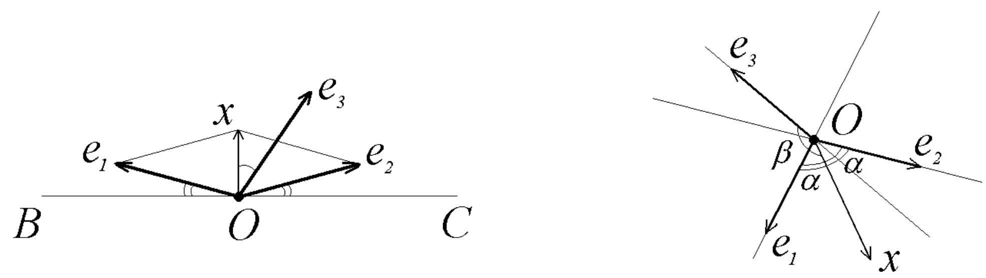
Формула из теоремы 2.2 позволяет вычислять количество регулярных минимальных параметрических сетей ранга $n-3$ через мощные расщепления регулярных минимальных параметрических сетей более низких рангов. В нашем случае количество сетей из C_1 вычисляется через мощные расщепления сетей из C_0. Поскольку имеется всего одно геометрическое дерево G_0 ранга 0, то и совокупность C_0 состоит лишь из одной регулярной минимальной параметрической сети $\Gamma_0[G_0]$. Таким образом,

$$|C_1| = \#PS_1(\Gamma_0).$$

У сети Γ_0 имеется всего три комбинаторных расщепления $\Gamma_0'[G_0']$, $\Gamma_0''[G_0'']$, $\Gamma_0'''[G_0''']$, отличающихся от сети Γ_0 добавлением лишь одного ребра, см. рис. 1.2. Поэтому все расщепления сети Γ_0 являются элементарными. Другими словами, комплекс мощных расщеплений сети Γ_0 нульмерен, и нам необходимо решить лишь "геометрическую" подзадачу (см. замечание на стр. 89) вычисления элементарных геометрических расщеплений сети Γ_0.

Напомним, что для того, чтобы проверить является ли данное расщепление Γ' сети Γ геометрическим, т.е. может ли оно уменьшить длину сети Γ, необходимо проверить является ли сеть Γ' минимальной параметрической сетью в своем классе. Эта проверка выполняется с помощью критерия 3.3 минимальности параметрической сети. Согласно этому критерию, необходимо сравнивать конорму ρ^* суммы различных единичных направляющих векторов невырожденных ребер сети Γ' с единицей. В евклидовом случае конорма ρ^* совпадает с евклидовой нормой ρ, т.е. с модулем вектора. Таким образом, нам понадобятся утверждения о сравнении модуля суммы единичных векторов с единицей. Приведем здесь два таких утверждения.

Лемма 3.7 *Два единичных вектора e_1 и e_2 в сумме дают вектор по модулю больший* 1 *тогда и только тогда, когда угол между e_1 и e_2 больше* 120°.



Достаточность. *Необходимость.*

Рис. 3.1:

Доказательство этой леммы проводится с помощью элементарных геометрических соображений.

Лемма 3.8 *Сумма трех единичных по длине векторов e_1, e_2, e_3, $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, выходящих из одной точки O, по модулю будет больше 1 тогда и только тогда, когда существует прямая, проходящая через точку O, такая, что все три вектора e_1, e_2, e_3 лежат от нее по одну сторону в открытой полуплоскости.*

Доказательство. Достаточность. Если существует какая-то прямая с условием, что вектора e_1, e_2, e_3 лежат от нее по одну сторону, пусть для определенности вектор e_3 лежит в замыкании внутренней области угла, образованного двумя лучами, выходящими из точки O по направлениям e_1 и e_2, то тогда существует прямая BC такая, что $\widehat{e_1OB} = \widehat{e_2OC}$, см. рис. 3.1. Пусть $x = e_1 + e_2$, тогда $\widehat{xe_3} < 90°$, и следовательно $|x + e_3| > 1$.

Необходимость. Покажем, что если прямой, относительно которой все вектора e_1, e_2, e_3 лежат по одну сторону, не существует, то $|e_1+e_2+e_3| < 1$. Условие отсутствия такой прямой эквивалентно тому, что для любого $i = 1, 2, 3$ два вектора e_{i+1}, e_{i+2} (здесь считаем, что $e_4 = e_1$ и $e_5 = e_2$) лежат по разные стороны от прямой, проходящей через точку O с направляющим вектором e_i, см. рис. 3.1. Положим $x = e_1+e_2$, $\widehat{xe_1} = \widehat{xe_2} = \alpha$ и $\widehat{xe_3} = \beta$. Тогда $|x| = 2\cos\alpha$. Выберем систему координат так, чтобы $x = (2\cos\alpha, 0)$ и $e_3 = (\cos\beta, \sin\beta)$, тогда $x + e_3 = (2\cos\alpha + \cos\beta, \sin\beta)$.

Теперь

$$|x + e_3|^2 = 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\cos\beta + 1 < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\alpha + \cos\beta < 0.$$

Но $\pi > \beta > \pi - \alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta < -\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta < 0$. Таким образом мы показали, что $|e_1 + e_2 + e_3| < 1$, если прямой, относительно которой все вектора e_1, e_2, e_3 лежат по одну сторону, не существует. Отсюда следует необходимость. $\square$

Подсчитаем теперь количество элементарных геометрических расщеплений сети Γ_0. Могут быть два случая.

1) У сети Γ_0 есть вырожденное граничное ребро. Пусть, без ограничения общности, это ребро будет инцидентно граничной вершине A_1 (см. рис. 3.2).

Так как Γ_0 является минимальной параметрической сетью, то из критерия 3.3 вытекает, что сумма единичных направляющих векторов выходящих из вершины A_1 ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 по модулю меньше либо равна 1. Выберем среди трех углов $\widehat{A_2A_1A_3}$, $\widehat{A_2A_1A_4}$, $\widehat{A_3A_1A_4}$ наименьший. Пусть для определенности это будет угол $\widehat{A_2A_1A_3}$. Его градусная мера должна быть меньше $120°$ (равенства быть не может, так как мы рассматриваем только типичные границы). Проведем через точку A_1 две прямые (A_2T) и (A_3S), тогда, как следует из леммы 3.8, ребро A_1A_4 должно лежать в замыкании внутренности угла $\widehat{SA_1T}$. Может быть два варианта (см. рис. 3.2).

a) Оба угла $\widehat{A_2A_1A_4}$, $\widehat{A_3A_1A_4} \geq 120°$. Тогда, используя критерий 3.3 и лемму 3.7, получаем, что только расщепление Γ_0'' не является минимальной параметрической сетью, а значит может уменьшить длину сети Γ_0. Следовательно, в данном случае сеть Γ_0 имеет только одно элементарное геометрическое расщепление.

b) Один из углов, например $\widehat{A_2A_1A_4}$, меньше $120°$, а другой $\widehat{A_3A_1A_4}$ — больше $120°$. Тогда, используя критерий 3.3 и лемму 3.7, получаем, что сети Γ_0'' и Γ_0''' не являются минимальными параметрическими сетями, а сеть Γ_0' — является. Следовательно, в данном случае сеть Γ_0 имеет ровно два элементарных геометрических расщепления.

2) У сети Γ_0 нет вырожденных граничных ребер.

Так как Γ_0 является минимальной параметрической сетью, то из критерия 3.3 вытекает, что сумма единичных направляющих векторов вы-

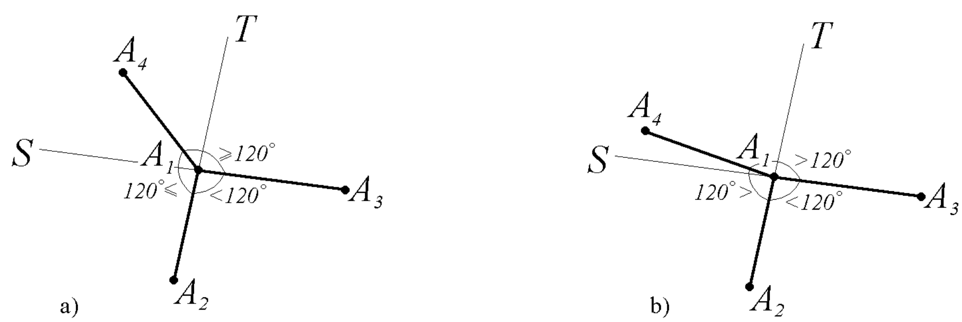


Рис. 3.2:

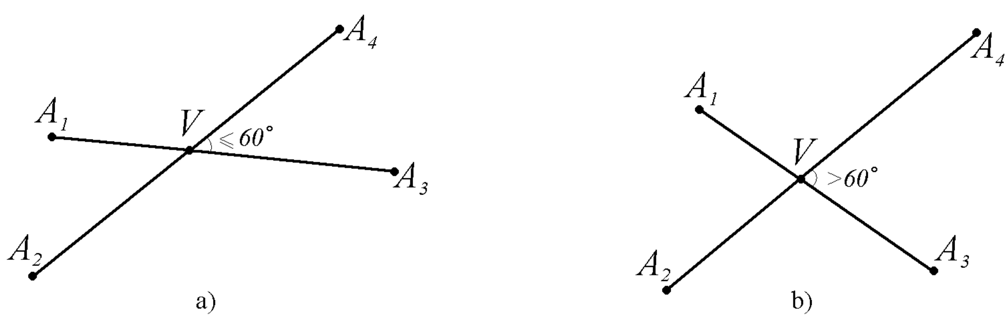


Рис. 3.3:

ходящих из подвижной вершины V ребер VA_1, VA_2, VA_3, VA_4 равна 0. Тогда эти четыре ребра разбиваются на пары ребер, лежащих на одной прямой, например так, как показано на рис. 3.3. Может быть два варианта (см. рис. 3.3).

a) Среди четырех углов $\widehat{A_iVA_{i+1}}$ (здесь считаем, что $A_5 = A_1$) есть угол, например $\widehat{A_3VA_4}$, градусная мера которого меньше или равна 60°. Тогда, используя критерий 3.3 и лемму 3.7, получаем, что только сеть Γ_0' не является минимальной параметрической сетью, а остальные — Γ_0'' и Γ_0''', — являются. Следовательно, в данном случае сеть Γ_0 имеет только одно элементарное геометрическое расщепление.

b) Среди четырех углов $\widehat{A_iVA_{i+1}}$ (здесь считаем, что $A_5 = A_1$) нет угла, градусная мера которого меньше или равна 60°, т.е. градусная мера всех этих углов строго меньше 120°. Тогда, используя критерий 3.3 и лемму 3.7, получаем, что сети Γ_0' и Γ_0'' не являются минимальными параметрическими сетями, а сеть Γ_0''' — является. Следовательно, в данном случае сеть Γ_0 имеет ровно два элементарных геометрических расщепления.

Итак, суммируя результаты случаев 1) и 2), получаем, что сеть Γ_0 имеет либо 1, либо 2 элементарных геометрических расщепления. Следовательно, имеется либо 1, либо 2 регулярных минимальных параметрических сети с бинарной топологией. Таким образом, из леммы 3.2 вытекает следующее утверждение

Утверждение 3.6 *Количество локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу из* 4 *точек на евклидовой плоскости, может быть равно либо* 1, *либо* 2.

Случай пяти граничных точек

В последнем рассматриваемом нами случае граница будет состоять из пяти точек общего положения, $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^5$. В этом случае, согласно таблице на стр. 45, имеется 1 геометрическое дерево G_0 ранга ноль, 10 геометрических деревьев ранга 1 и 15 геометрических деревьев ранга 2. Последние являются бинарными деревьями. Топологии всех этих деревьев изображены на рис. 1.4.

Соответственно всегда имеется одна регулярная минимальная параметрическая сеть $\Gamma_0[G_0]$ ранга 0; она составляет совокупность C_0. Потенциально могут быть 10 регулярных минимальных параметрических сетей ранга 1, составляющих совокупность C_1, и 15 регулярных минимальных параметрических сетей ранга 2, составляющих совокупность C_2. Напомним, см. параграф 3.1, что сети из C_2 можно интерпретировать как локально минимальные сети, затягивающие границу $\mathcal{A}$. Таким образом, комбинаторно количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу из 5 точек, может быть не более 15. Далее мы понизим эту очевидную оценку до 8.

Итак, нам нужно вычислить (точнее оценить) количество сетей в совокупности C_2. Теорема 2.2 дает нам при $n = 5$ две формулы:

$$\begin{aligned} |C_1| &= \#PS_1(\Gamma_0) \\ |C_2| &= \sum_{\Gamma_\alpha \in C_1} \#PS_2(\Gamma_\alpha) - \#PS_2(\Gamma_0). \end{aligned}$$

У регулярных минимальных параметрических сетей Γ_α из C_1 имеются две подвижные вершины: одна подвижная вершина степени 3 и одна подвижная вершина степени 4, см. рис. 1.4. Расщепляться сеть Γ_α из C_1 может только в своей подвижной вершине степени 4, поэтому для сети Γ_α комплекс мощных расщеплений нульмерен, также как и для сети Γ_0 в случае 4 граничных точек. Точно также, как и в случае 4 граничных точек оценивается и количество мощных расщеплений $\#PS_2(\Gamma_\alpha)$, и, следовательно, оно не превосходит 2. Таким образом, можно написать оценку

$$|C_2| \leq 2 \cdot |C_1| - \#PS_2(\Gamma_0) \leq 2 \cdot \#PS_1(\Gamma_0) - \#PS_2(\Gamma_0).$$

Из этого неравенства мы видим, что количество сетей в совокупности C_2 оценивается через мощные расщепления одной лишь сети Γ_0. Комбинаторные расщепления сети Γ_0 могут иметь ранг 1 или 2, поэтому комплекс $\mathcal{PS}(\Gamma_0)$ мощных расщеплений сети Γ_0 одномерен. Вершинами этого комплекса являются элементарные геометрические расщепления сети Γ_0. Эти расщепления имеют ранг 1, и их совокупность совпадает с $PS_1(\Gamma_0)$. В свою очередь, ребра комплекса $\mathcal{PS}(\Gamma_0)$ — это мощные расщепления ранга 2 сети Γ_0, т.е. их совокупность совпадает с $PS_2(\Gamma_0)$.

Попытаемся изучить комплекс $\mathcal{PS}(\Gamma_0)$ и рассмотрим два случая.

1) У сети Γ_0 *есть вырожденное граничное ребро.*
Пусть, без ограничения общности, это ребро будет инцидентно граничной вершине A_1 (см. рис. 3.4).

Так как сеть Γ_0 является минимальной параметрической сетью, то из критерия 3.3 вытекает, что сумма единичных направляющих векторов выходящих из вершины A_1 ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 по модулю меньше либо равна 1.

Подсчитаем количество элементарных геометрических расщеплений сети Γ_0. Их ранг равен 1, и топология изображена на рис. 1.4 b). Для этого необходимо, согласно критерию 3.3, чтобы сумма единичных направляющих векторов граничных ребер инцидентных одной подвижной вершине V, среди которых нет ребра A_1V, по модулю была строго больше 1. Мы будем говорить, что такая совокупность граничных ребер *отщепляется*. Таким образом, любое элементарное геометрическое расщепление Γ' сети Γ_0 однозначно задается либо двойкой, либо тройкой отщепляющихся граничных ребер. Поэтому для того, чтобы подсчитать количество элементарных геометрических расщеплений сети Γ_0, нужно подсчитать количество двоек и троек ребер, выходящих из вершины A_1, сумма единичных направляющих векторов которых по модулю строго больше 1.

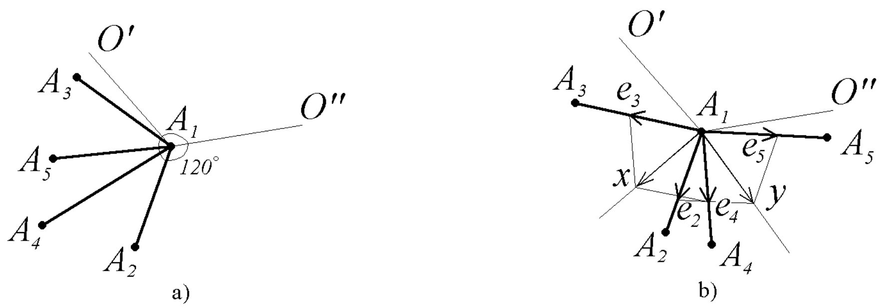


Рис. 3.4:

Для двойки ребер это условие эквивалентно тому, что угол между ними строго меньше 120°, а для тройки ребер эквивалентное условие содержится в лемме 3.8. Докажем, что это количество не больше 6.
Отщепляющиеся двойки граничных ребер.
Разберемся сначала с отщеплениями двоек ребер. Всего двоек ребер 6 (число сочетаний из 4 по 2). Покажем, что ни все 6, ни какие-либо 5 двоек не могут отщепиться, тем самым будет показано, что число отщеплений двоек ребер не более 4. В самом деле, если не менее 5 двоек отщепляются, то существует ребро, пусть это будет A_1A_2, которое составляет с оставшимися ребрами A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 угол строго меньше 120°. Проведем два разных луча $[A_1O')$ и $[A_1O'')$: $\widehat{A_2A_1O'} = \widehat{A_2A_1O''} = 120°$. Тогда все три ребра A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 содержатся в открытом секторе $O'A_2O''$ объединенным с точкой A_1. Достаточно проанализировать только две ситуации: или все три ребра A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 лежат по одну сторону от прямой (A_1A_2) или нет, см. рис. 3.4*a* и рис. 3.4*b*.

Ситуации, изображенной на рис. 3.4*a* быть не может, так как в этом случае выходящие из A_1 единичные направляющие векторы всех четырех ребер, лежащих в одном круговом секторе с углом равным 120°, дают в сумме вектор, длина которого больше 1.

Теперь рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 3.4*b*. Покажем, что и в этом случае длина суммы выходящих из вершины A_1 единичных направляющих векторов ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 будет строго больше 1. Разобьем эти четыре ребра на две пары: (A_1A_2, A_1A_5) и (A_1A_3, A_1A_4). Угол $\widehat{A_2A_1A_5}$ меньше 120°, в соответствии с выбором ребра A_1A_2. И угол $\widehat{A_3A_1A_4}$ тоже меньше 120°, так как если бы был больше,

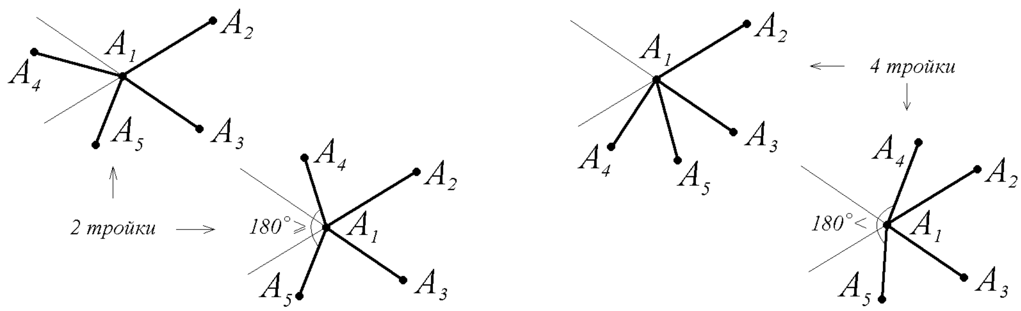


Рис. 3.5:

то и угол $\widehat{A_3A_1A_5}$ был бы больше $120°$, а это противоречит тому, что у нас по условию не менее 5 отщеплений. Пусть $x = e_3+e_4$ и $y = e_2+e_5$, где e_i — единичный направляющий вектор ребра A_1A_i, тогда $|x| > 1$, $|y| > 1$ и угол $\widehat{xy}$ меньше $120°$. Следовательно $|e_1 + e_2 + e_3 + e_4| = |x + y| > 1$. Этот случай заканчивает доказательство следующей леммы.

Лемма 3.9 *В случае 1) количество отщепляющихся двоек не больше 4.*

Отщепляющиеся тройки граничных ребер.
Теперь разберемся сколько может быть отщеплений по три ребра. Комбинаторных вариантов имеется всего 4 (число сочетаний из 4 по 3).

Лемма 3.10 *Рассмотрим* 4 *произвольных неколинеарных отрезка* A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5. *Тогда количество отщеплений по три отрезка равно либо* 2, *либо* 4. *Причем в последнем случае все отрезки* A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 *лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через точку* A_1.

Доказательство. Пусть угол $\widehat{A_2A_1A_3}$ наименьший среди всех пар отрезков. Проведем прямые (A_2A_1) и (A_3A_1), они разобьют плоскость на четыре сектора. Четыре принципиально различных случая расположения остальных отрезков A_1A_4 и A_1A_5 в этих секторах показаны на рис. 3.5. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3.8.
□

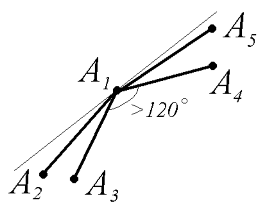


Рис. 3.6:

Лемма 3.11 *Пусть в случае 1) имеется* 4 *отщепления троек ребер. Тогда количество отщеплений двоек ровно* 2.

Доказательство. Как следует из леммы 3.10, все ребра A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через A_1. Пусть расположение ребер такое, как показано на рис. 3.6. Покажем, что угол $\widehat{A_3A_1A_4} > 120°$. Если бы выполнялось неравенство $\widehat{A_3A_1A_4} < 120°$, тогда длина вектора $x = e_3 + e_4$ была бы больше 1. Положим $y = e_2 + e_5$, тогда $\widehat{xy} < 90°$, следовательно $|x + y| = |e_2 + e_3 + e_4 + e_5| > 1$, чего быть не может. Итак, $\widehat{A_3A_1A_4} > 120°$, а значит отщеплений двоек ровно 2. $\square$

Суммируя результаты лемм 3.9, 3.10 и 3.11, для случая 1) получаем следующее предложение

Предложение 3.5 *В случае 1) имеется не более* 6 *отщеплений. Если имеется всего* 6 *отщеплений, то может быть только два варианта:*

- 2 *отщепления двоек ребер и* 4 *отщепления троек ребер;*
- 4 *отщепления двоек ребер и* 2 *отщепления троек ребер.*

Если имеется всего 5 *отщеплений, то может быть только один вариант:*

- 3 *отщепления двоек ребер и* 2 *отщепления троек ребер.*

Это предложение для случая 1) характеризует элементарные геометрические расщепления $PS_1(\Gamma_0)$ сети Γ_0 (они имеют ранг 1) и оценивает

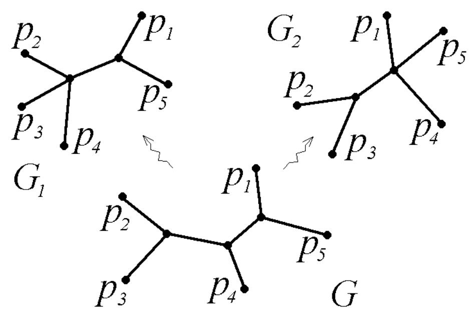


Рис. 3.7:

сверху их количество. Выясним теперь, что можно сказать о совокупности мощных расщеплений $PS_2(\Gamma_0)$ ранга 2 сети Γ_0. Напомним, что $PS_1(\Gamma_0)$ и $PS_2(\Gamma_0)$ — это соответственно вершины и ребра комплекса мощных расщеплений $\mathcal{PS}(\Gamma_0)$ сети Γ_0.

Лемма 3.12 *Каждой отщепляющейся тройке ребер инцидентно не менее одного мощного расщепления из $PS_2(\Gamma_0)$. Причем, разным тройкам инцидентны разные ребра.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть для определенности отщепляется тройка $\{A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4\}$. Тогда, как следует из леммы 3.8, все эти отрезки лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через точку A_1, и значит существует двойка ребер, скажем $\{A_1A_2, A_1A_3\}$, такая что $\widehat{A_2A_1A_3} < 120°$, т.е. эта двойка отщепляется. Таким образом, мы имеем два элементарных геометрических расщепления Γ_1 и Γ_2 сети Γ_0. Типы G_1 и G_2 этих двух расщеплений изображены на рис. 3.7. Из этого рис. 3.7 видно, что Γ_1 и Γ_2 образуют полный набор производных расщеплений для расщепления Γ, тип G которого изображен на том же рисунке. Поэтому Γ является мощным расщеплением сети Γ_0, инцидентным элементарному расщеплению Γ_1 (отщепляющаяся тройка).

Докажем второе утверждение. Для того, чтобы двум отщепляющимся тройкам было инцидентно одно и то же мощное расщепление из $PS_2(\Gamma_0)$, см. рис. 3.7, нужно, чтобы эти тройки пересекались лишь по одному ребру, чего в случае 1) быть не может. $\square$

Лемма 3.13 *Среди* 4 *отщеплений двоек ребер найдется по крайней мере одна пара двоек, которым инцидентно одно и то же мощное расщепление из $PS_2(\Gamma_0)$.*

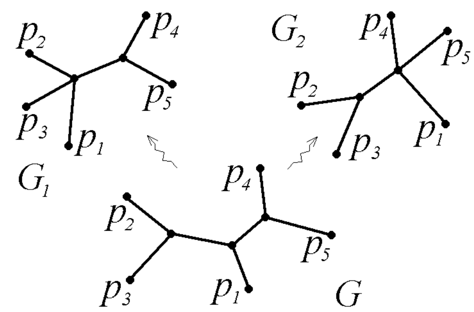


Рис. 3.8:

Доказательство. Если имеется 4 отщепления двоек ребер, то среди этих четырех двоек обязательно найдется пара двоек, скажем $\{A_1A_2, A_1A_3\}$ и $\{A_1A_4, A_1A_5\}$, все четыре ребра которых различны. Тип инцидентного этим отщеплениям двоек мощного расщепления из $PS_2(\Gamma_0)$ показан на рис. 3.8. $\square$

Предложение 3.6 *Если в случае 1) всего отщеплений* 6, *т.е.* $\#PS_1(\Gamma_0) = 6$, *то* $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 4$. *Если всего отщеплений* 5, *т.е.* $\#PS_1(\Gamma_0) = 5$, *то* $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 2$.

Доказательство. Разберем сначала случай 6 отщеплений. Разбираемые далее варианты согласуются с предложением 3.5. Если имеется 2 отщепления двоек ребер и 4 отщепления троек ребер, то предложение следует из леммы 3.12. Если же имеется 4 отщепления двоек ребер и 2 отщепления троек ребер, то пока леммы 3.12 и 3.13 нам могут гарантировать только $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 3$, то есть нужна еще 1.

Пусть среди 4 отщеплений двоек ребер только одной паре двоек инцидентно мощное расщепление из $PS_2(\Gamma_0)$ (если больше, то и $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 4$). Обозначим невырожденные ребра сети Γ_0 цифрами от 1 до 4, тогда с точностью до переобозначений имеется лишь единственная отвечающая данной ситуации возможность выбрать 4 двойки ребер, а именно, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$. Есть только два варианта расположения ребер 2 и 3 относительно ребра 1, см. рис. 3.9. Но вариант $a)$ не подходит, поскольку тогда ребро 4 либо с ребром 2, либо с ребром 3 образует угол строго меньший $120°$, и тогда появляется дополнительная отщепляющаяся двойка.

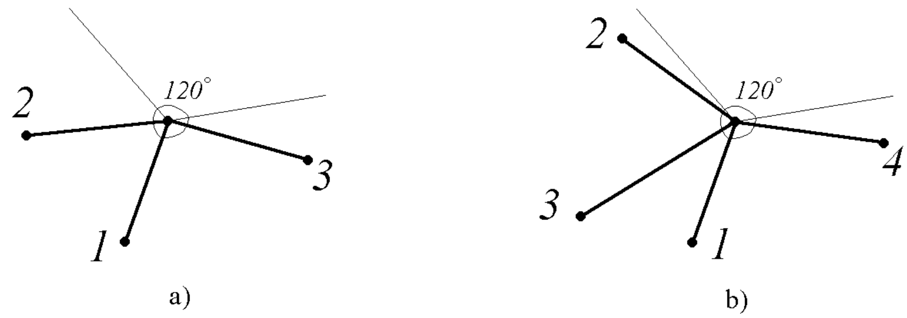


Рис. 3.9:

Вариант b) подходит, и при этом тройке $(1, 2, 3)$ будет инцидентно два мощных расщепления из $PS_2(\Gamma_0)$. Итак, в любом случае $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 4$.

Согласно предложению 3.5, если отщеплений ровно 5, т.е. среди них ровно 3 отщепления троек, а тогда из леммы 3.12 следует, что $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 3 \geq 2$. $\square$

2) У сети Γ_0 *нет вырожденных граничных ребер.*
Единственную подвижную вершину сети Γ_0 мы обозначим через V.

Так как сеть Γ_0 является минимальной параметрической сетью, то из критерия 3.3 вытекает, что сумма единичных направляющих векторов выходящих из вершины V ребер VA_1, VA_2, VA_3, VA_4, VA_5 должна быть равна 0.

Подсчитаем количество элементарных геометрических расщеплений сети Γ_0. Для этого необходимо, согласно критерию 3.3, чтобы сумма единичных направляющих векторов граничных ребер, инцидентных одной подвижной вершине элементарного геометрического расщепления $\Gamma \in PS_1(\Gamma_0)$, по модулю была строго больше 1. Мы будем говорить, что такая совокупность граничных ребер *отщепляется*. Заметим, что, в отличие от случая 1), для каждого элементарного геометрического расщепления $\Gamma \in PS_1(\Gamma_0)$, в силу равенства нулю суммы единичных направляющих векторов граничных ребер, отщепляется как двойка, так и дополнительная ей тройка граничных ребер. Поэтому для того, чтобы подсчитать количество элементарных геометрических расщеплений $\#PS_1(\Gamma_0)$ сети Γ_0, нужно подсчитать только количество двоек ребер, выходящих из вершины V, сумма единичных направляющих векторов которых по модулю строго больше 1. Для двойки ребер это условие эквивалентно тому, что угол между ними строго меньше 120°. Докажем, что и в случае 2) это количество не больше 6.

Для краткости двойку ребер $\{A_iV, A_jV\}$ будем обозначать просто (ij), а через e_k обозначим единичный направляющий вектор ребра VA_i, $k = 1, \ldots, 5$.

Лемма 3.14 *В случае 2) количество отщеплений двоек ребер не превосходит* 6*.*

Доказательство. Пусть граничные вершины расположены так, что их нумерация соответствует обходу против часовой стрелки вокруг подвижной вершины — точки V, см. рис. 3.10.

Если любой угол между не соседними ребрами не меньше 120°, то отщепляющихся двоек ребер может быть не больше 5. Пусть теперь у сети Γ_0 есть угол между не соседними ребрами, градусная мера которого строго меньше 120°. Из таких углов возьмем наименьший. Без ограничения общности можно считать, что это угол $\widehat{A_1VA_3}$. Проведем прямую (KL), содержащую биссектрису угла $\widehat{A_1VA_3}$, и прямую (ST), содержащую биссектрису угла $\widehat{LVA_2}$, а также прямую (A_2P), содержащую ребро A_2V. Пусть $\widehat{LVA_2} = 2\alpha$, тогда $\widehat{LVS} = \widehat{SVA_2} = \alpha$. Теперь обозначим через x вектор равный $e_1 + e_3$, а через y вектор равный $x + e_2$. Заметим, что $|x| > 1$ и x лежит на луче $[VL)$, и $|y| > 1$, но про вектор y можно лишь сказать, что он лежит во внутренней области угла $\widehat{SVA_2}$. Поскольку $e_5 + e_4 = -y$, то $\widehat{e_5e_4} < 2\alpha$. Поэтому векторы e_5 и e_4 лежат во внутренней области угла $\widehat{A_1VK}$ и составляют с лучом $[VP)$ угол не больший 2α. Так как $2\alpha < 60^\circ$, то следовательно отщепляться могут только двойки (12), (13), (23), (15), (14), (45), т.е. не более 6 отщеплений двоек. $\square$

Предложение 3.7 *Если в случае 2) имеется* 6 *отщеплений двоек, т.е.* $\#PS_1(\Gamma_0) = 6$, *то* $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 4$. *Если в случае 2) имеется* 5 *отщеплений двоек, т.е.* $\#PS_1(\Gamma_0) = 5$, *то* $\#PS_2(\Gamma_0) \geq 2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\#PS_1(\Gamma_0) = 6$.

Для того чтобы двум парам отщепляющихся двоек ребер было инцидентно одно и то же мощное расщепление из $PS_2(\Gamma_0)$ необходимо и достаточно, чтобы все эти четыре ребра были различными. Рассмотрим

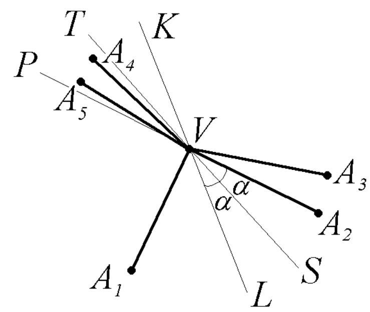


Рис. 3.10:

пары отщепляющихся двоек, соответствующих какому-нибудь мощному расщеплению из $PS_2(\Gamma_0)$.

Предположим, что среди 6 отщепляющихся двоек ребер имеется одна двойка, которая не имеет пары среди оставшихся пяти двоек. Пусть для определенности это будет двойка (12). Тогда оставшиеся пять двоек должны выбираться из набора (13), (14), (15), (23), (24), (25). Одна двойка лишняя, поэтому для определенности уберем двойку (13). Тогда формируются следующие пары двоек: $\{(23),(14)\}$, $\{(23),(15)\}$, $\{(14),(25)\}$, $\{(24),(15)\}$. Таким образом $\#PS_2(\Gamma_0) = 4$.

Теперь разберем вариант, когда любая двойка имеет пару. Тогда наихудший для нас случай, когда 6 двоек разбиваются на три пары и больше пар нет. Покажем, что так быть не может. В самом деле, возьмем какую-нибудь пару, пусть для определенности это будет пара $\{(12),(34)\}$. Следовательно двойки (15), (25), (35), (45) не должны содержатся среди оставшихся четырех двоек, а поскольку комбинаторно число двоек ребер равно 10 (число сочетаний из 5 по 2), то эти оставшиеся четыре двойки есть (13), (14), (23), (24). То есть получается, что ребро 5 образует с любым другим ребром угол не меньший 120°, чего быть не может.

Теперь рассмотрим случай $\#PS_1(\Gamma_0) = 5$.

Предположим, что, как и в предыдущем случае, среди 5 отщепляющихся двоек имеется одно, не имеющая пары. Пусть для определенности это будет двойка (12). Тогда оставшиеся четыре двойки должны выбираться из набора (13), (14), (15), (23), (24), (25). Есть три принципиальные, т.е. с точностью до переобозначений, возможности откинуть из этого набора две двойки.

- Две двойки либо с 1, либо с 2. Тогда остаются (15), (23), (24), (25) и формируются две пары $\{(15),(23)\}$, $\{(15),(24)\}$.
- Одну двойку с 1 и одну двойку с 2, но с одинаковыми вторыми ребрами. Тогда остаются (14), (15), (24), (25) и формируются две пары $\{(14),(25)\}$, $\{(24),(15)\}$.
- Одну двойку с 1 и одну двойку с 2, но с разными вторыми ребрами. Тогда остаются (14), (15), (23), (25) и формируются три пары $\{(14),(23)\}$, $\{(15),(23)\}$, $\{(14),(25)\}$.

Таким образом, при наличии отщепляющейся двойки без пары предложение для случая $\#PS_1(\Gamma_0) = 5$ доказано.

Если же любая отщепляющаяся двойка имеет пару среди оставшихся четырех, то очевидно, что не менее двух пар у нас найдется. $\square$

Вывод основного утверждения.

Напомним, что мы вывели оценку: $|C_2| \leq 2 \cdot \#PS_1(\Gamma_0) - \#PS_2(\Gamma_0)$. Суммируя теперь результаты случаев 1) и 2), из предложений 3.6 и 3.7 получаем, что правая часть $2 \cdot \#PS_1(\Gamma_0) - \#PS_2(\Gamma_0)$ этой оценки не превосходит 8. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3.7 *Количество локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу из* 5 *точек на евклидовой плоскости, не превосходит* 8.

3.4 Задача об универсальной границе

В параграфе 3.3 мы видели, что нетривиальные оценки на количество локально минимальных сетей, затягивающих данную границу $\mathcal{A}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, являются следствием того, что не все комбинаторно возможные расщепления минимальных параметрических сетей с границей $\mathcal{A}$ могут уменьшить их длину. Естественно возникают два тесно связанных между собой вопроса:

1. Найдется ли граница $\mathcal{A}$ (естественно уже не на евклидовой плоскости), такая что для любой минимальной параметрической сети Γ, затягивающей границу $\mathcal{A}$, любое ее комбинаторное расщепление может уменьшить длину сети Γ.

2. Найдется ли граница $\mathcal{A}$ (естественно уже не на евклидовой плоскости), такая что для любого бинарного дерева G, затягивающего границу $\mathcal{A}$, существует локально минимальная сеть типа G.

Второй вопрос известен как *задача об универсальной границе*, которая была сформулирована А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в работе [7].

Сформулируем теперь основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 3.1 *Для любого геометрического дерева G, затягивающего вершины правильного N-мерного симплекса, соответствующая минимальная параметрическая сеть типа G невырождена.*

Покажем, что эта теорема дает ответ на оба вопроса, поставленных выше, о границе $\mathcal{A}$ и, более того, предъявляет конкретный пример такой границы — вершины правильного N-мерного симплекса.

Итак, пусть граница $\mathcal{A}$ — это совокупность вершин правильного N-мерного симплекса.

1) Рассмотрим некоторую минимальную параметрическую сеть Γ, затягивающую границу $\mathcal{A}$, и некоторое ее комбинаторное расщепление Γ'. Поскольку у сети Γ' имеется хотя бы одно вырожденное ребро, то она является вырожденной, и, согласно теореме 3.1, не является минимальной параметрической сетью в своем классе. Следовательно, комбинаторное расщепление Γ' может уменьшить длину сети Γ.

2) Поскольку, как следует из леммы 3.2, в случае бинарных деревьев невырожденная минимальная параметрическая сеть является локально минимальной, то из теоремы 3.1 мы получаем ответ на второй вопрос.

Следствие 3.2 *Для любого бинарного дерева G, затягивающего вершины правильного N-мерного симплекса, существует локально минимальная сеть типа G.*

Доказательство теоремы 3.1

§1. Приведем здесь идею доказательства, детали которого излагаются начиная с §2. Очевидно, что для любого геометрического дерева G существует соответствующая минимальная параметрическая сеть типа G. Однако, у такой сети, вообще говоря, могли бы быть вырожденные ребра.

Покажем, что в случае когда граничное множество состоит из вершин правильного N-мерного симплекса, все ребра невырожденные.

Доказательство будет вестись от противного. Пусть Γ — некоторая минимальная параметрическая сеть, затягивающая вершины правильного N-мерного симплекса $\triangle$. Предположим, что у сети Γ имеются вырожденные ребра, через $e = (uv)$ обозначим одно из них. Рассмотрим две ветки $\Gamma_u \ni u$ и $\Gamma_v \ni v$, инцидентные этому ребру. Через $\triangle_u$ обозначим грань симплекса $\triangle$, образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_u, а через $\triangle_v$ обозначим грань симплекса $\triangle$, образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_v. Единичные направляющие вектора невырожденных ребер, принадлежащих ветке Γ_u и инцидентных компоненте вырождения ребра e, "смотрят" в грань $\triangle_u$, а единичные направляющие вектора невырожденных ребер, принадлежащих ветке Γ_v и инцидентных компоненте вырождения ребра e, "смотрят" в грань $\triangle_v$ (лемма 3.15). Одна из сумм этих единичных векторов, соответствующих вершине u или вершине v, по модулю будет строго больше 1 (следствие леммы 3.18), что противоречит критерию 3.3 минимальности параметрических сетей.

§2. Пусть e — единичный направляющий вектор некоторого невырожденного ребра, инцидентного компоненте вырождения, содержащей вершину u.

Лемма 3.15 *Луч, проведенный через вершину u в направлении вектора e, пересекает грань $\triangle_u$.*

Доказательство. Рассмотрим приведенную ветку $\tilde{\Gamma}_u$. Ветку $\tilde{\Gamma}_u$ рассматриваем как дерево с корнем $\tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — естественная проекция вершины u.

Далее проведем индукцию снизу вверх по глубине вершины $\tilde{u}'$ в ветке $\tilde{\Gamma}_u$. Пусть $\tilde{u}''$ — некоторая вершина глубины k, а e'' — направляющий вектор некоторого ребра, соединяющего вершину $\tilde{u}''$ с вершиной глубины $k+1$. Предположим, что для всех таких вершин $\tilde{u}''$ и векторов e'' доказано, что луч, проведенный через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e'', пересекает грань $\triangle_u$.

Заметим, что, если некоторый вектор e' равняется сумме всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих вершину $\tilde{u}''$ с вершинами глубины $k+1$, то луч, проведенный через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e' также пересекает грань $\triangle_u$.

Возьмем вершину $\tilde{u}'$ глубины $k-1$. Пусть e' — единичный направляющий вектор ребра, соединяющего вершину $\tilde{u}'$ с вершиной $\tilde{u}''$ глубины k. Согласно критерию 3.3 минимальности параметрических сетей вектор e' будет равен сумме всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих вершину $\tilde{u}''$ с вершинами глубины $k+1$. Следовательно луч, проведенный через вершину $\tilde{u}'$ в направлении вектора e', будет проходить и через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e' и по уже доказанному будет пересекать грань $\triangle_u$.

Двигаясь так снизу (с самых глубоких вершин) вверх, мы за конечное число шагов доберемся и до вершины $\tilde{u}$. Лемма доказана. $\square$

§3. Обозначим через s_u и s_v суммы единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v в ветках Γ_u и Γ_v соответственно. Тогда согласно критерию 3.3 минимальности параметрической сети имеют место следующие неравенства: $|s_u| \le 1$ и $|s_v| \le 1$.

Отвлечемся от минимальной параметрической сети и немного упростим картину. Поскольку мы предположили, что ребро (uv) — вырожденное, то точки соответствующие вершинам u и v совпадают в пространстве $\mathbb{R}^N$. Обозначим через O точку их совпадения. Проведем из точки O лучи в направлениях невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v. Согласно лемме 3.15, те лучи, которые отвечают ребрам связанным с вершиной u пересекут грань $\triangle_u$, а те лучи, которые отвечают ребрам связанным с вершиной v пересекут грань $\triangle_v$. Ограничимся рассмотрением отрезков этих лучей от точки O до пересечений с гранями.

Забудем теперь про сеть Γ, и тогда у нас останется следующая картина. Из точки O выходят две совокупности отрезков: $OU_1,\ldots,OU_r$, вторые концы которых лежат в грани $\triangle_u$, и $OV_1,\ldots,OV_m$, вторые концы которых лежат в грани $\triangle_v$. Отметим, что сумма единичных направляющих векторов отрезков, относящихся к грани $\triangle_u$, равна s_u, а сумма единичных направляющих векторов отрезков, относящихся к грани $\triangle_v$, равна s_v. Напомним, что $|s_u| \le 1$ и $|s_v| \le 1$. Чтобы прийти к противоречию, покажем, что одновременно оба эти неравенства выполнятся не могут.

§4. Далее, если не оговорено противное, расстояние между вершинами правильного симплекса будет считаться равным $\sqrt{2}$ (удобно считать вершинами правильного симплекса концы единичных векторов стандартного ортонормированного базиса). *Центром* правильного симплекса мы будем называть его центр масс.

Приведем здесь формулировку ключевой леммы, доказательство которой будет дано ниже, начиная с §8.

Пусть дан правильный $(q-1)$-мерный симплекс $\triangle$ в пространстве $\mathbb{R}^N$. Проведем гиперплоскость π параллельную симплексу $\triangle$, через d обозначим расстояние между ними. Рассмотрим произвольную точку O на плоскости π и проведем из нее k отрезков, оканчивающихся в симплексе $\triangle$, $k \leq q$. Пусть вектор s равен сумме единичных направляющих векторов этих отрезков. Обозначим через O' точку на плоскости π, ближайшую к центру C какой-нибудь $(k-1)$-мерной грани $\triangle'$ симплекса $\triangle$. Заметим, что длина отрезка CO' равна d, и он перпендикулярен как плоскости π, так и симплексу $\triangle'$.

Лемма 3.16 *Минимум модуля вектора s, взятый по всем расположениям точки O на гиперплоскости π и по всем расположениям вторых концов отрезков в симплексе $\triangle$, равен*

$$\min|s| = \sqrt{\frac{k^3d^2}{k-1+kd^2}}.$$

Он достигается, например, в ситуации, когда точка O совпадает с O', а вторые концы k отрезков совпадают с различными вершинами грани $\triangle'$.

§5. Выберем произвольно $(r-1)$-мерную подгрань $\triangle'_u$ в грани $\triangle_u$ и $(m-1)$-мерную подгрань $\triangle'_v$ в грани $\triangle_v$. Обозначим через U и V центры граней $\triangle'_u$ и $\triangle'_v$ соответственно. Несложно проверить, что прямая (UV) перпендикулярна обоим этим граням. Проведем теперь через точку O гиперплоскость π перпендикулярно прямой (UV). Тогда π будет параллельна как грани $\triangle'_u$, так и грани $\triangle'_v$. Пусть O' — точка пересечения гиперплоскости π и прямой (UV).

Применим лемму 3.16 к грани $\triangle_u$ (здесь она выступает в качестве самостоятельного правильного симплекса) и совокупности отрезков $OU_1,\dots, OU_r$, чтобы минимизировать модуль вектора s_u. Для этого заменим отрезки $OU_1,\dots, OU_r$ совокупностью отрезков $O'U'_1,\dots, O'U'_r$, где $U'_1,\dots, U'_r$ — различные вершины грани $\triangle'_u$. Соответствующая сумма единичных направляющих векторов отрезков $O'U'_1,\dots, O'U'_r$, которую мы обозначим через s'_u, будет по модулю не больше модуля вектора s_u, $|s'_u| \le |s_u| \le 1$.

Аналогично, заменим отрезки $OV_1, \ldots, OV_m$ совокупностью отрезков $O'V'_1, \ldots, O'V'_m$, где $V'_1, \ldots, V'_m$ — различные вершины грани $\triangle'_v$. Обозначим через s'_v соответствующую сумму единичных направляющих векторов отрезков $OV'_1, \ldots, OV'_m$. Тогда, как следует из леммы 3.16, модуль вектора s'_v будет не больше модуля вектора s_v, $|s'_v| \le |s_v| \le 1$.

Ограничимся теперь рассмотрением отрезков $O'U'_1, \ldots, O'U'_r, O'V'_1, \ldots, O'V'_m$ и симплекса $\triangle'$, образованного вершинами $U'_1, \ldots, U'_r$, $V'_1, \ldots, V'_m$. Дальнейшая наша цель — показать, что одновременное выполнение двух неравенств $|s'_u| \le 1$ и $|s'_v| \le 1$ невозможно.

§6. Рассмотрим $(q'-1)$-мерный правильный симплекс $\triangle'$ и точку O' на серединном перпендикуляре к $\triangle'$. Обозначим через d расстояние от O' до $\triangle$. Соединим точку O' отрезком с каждой вершиной симплекса $\triangle'$. Пусть s — сумма единичных направляющих векторов этих q' отрезков, направленных к вершинам симплекса. Согласно второму утверждению леммы 3.16 модуль вектора s равен $\sqrt{\frac{q'^3 d^2}{q'-1+q'd^2}}$. Из этой формулы мы видим, что $|s|$ монотонно возрастает с ростом d. Найдем такое $d(q')$, при котором $|s| = 1$. Имеем $d(q') = \frac{1}{\sqrt{q'(q'+1)}}$. Это расстояние мы назовем *критическим.*

Лемма 3.17 *Сумма критического расстояния до грани $\triangle'_u$ и критического расстояния до грани $\triangle'_v$ строго меньше длины отрезка UV.*

Доказательство. Пусть грань $\triangle'_u$ имеет размерность $r-1$, а грань $\triangle'_v$ — размерность $m-1$. Тогда длина отрезка UV равна $\sqrt{\frac{r+m}{rm}}$; а критические расстояния до граней $\triangle'_u$ и $\triangle'_v$ равны $\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}}$ и $\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$ соответственно. Нужно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}} + \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} < \sqrt{\frac{r+m}{rm}}\ .$$

Делая элементарные преобразования, легко показать, что это неравенство эквивалентно следующему неравенству

$$4(rm+r+m+1) < \\ < rm\left((r-m)^2 + 4(rm+r+m+1)\right),$$

которое всегда верно, если хотя бы одно из чисел r, m строго больше 1. Лемма доказана. $\square$

§7. Из определения критического расстояния в §6 и леммы 3.17 непосредственно следует лемма.

Лемма 3.18 *Для любой точки O', принадлежащей отрезку UV, хотя бы один из векторов s'_u или s'_v по модулю строго больше* 1.

Учитывая лемму 3.18 и неравенства $|s'_u| \le |s_u|$ и $|s'_v| \le |s_v|$ из §5, получаем, что хотя бы один из векторов s_u или s_v по модулю строго больше 1. Таким образом мы пришли к противоречию с критерием 3.3 минимальности параметрических сетей и доказали основную теорему.

Доказательство леммы 3.16

§8. Поскольку точки $U_1,\dots, U_k$ принадлежат правильному симплексу со стороной $\sqrt{2}$, то очевидно, что попарные расстояния между ними не больше $\sqrt{2}$. Можно считать, что все эти k точек лежат в некотором $(k-1)$-мерном шаре, в который можно вписать правильный $(k-1)$-мерный симплекс со стороной $\sqrt{2}$. Радиус такого шара равен $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$. В самом деле, достаточно воспользоваться теоремой Юнга [30] (см. также [25] стр. 111).

Утверждение 3.8 (Юнг, [30]) *Пусть D — подмножество диаметра w в $\mathbb{R}^{k-1}$. Существует $(k-1)$-мерный шар радиуса $w\cdot\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$, который содержит подмножество D.*

§9. Рассмотрим теперь вспомогательную задачу. Пусть B — $(k-1)$-мерный шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^N$. Проведем на расстоянии d от шара B параллельную ему гиперплоскость π. Рассмотрим произвольную точку O на плоскости π и проведем из нее k отрезков $OU_1,\dots, OU_k$, оканчивающихся в шаре. Пусть вектор s равен сумме единичных направляющих векторов этих отрезков. Обозначим через O' точку на плоскости π, ближайшую к центру U. Заметим, что длина отрезка UO' равна d, и он перпендикулярен как плоскости π, так и шару B.

Лемма 3.19 *Минимум модуля вектора s, взятый по всем расположениям точки O на гиперплоскости π и по всем расположениям точек $U_1,\ldots, U_k$ в шаре B, равен*

$$\min |s| = \sqrt{\frac{k^2d^2}{R^2+d^2}}.$$

Он достигается, например, в ситуации, когда точка O совпадает с O', а точки $U_1,\ldots, U_k$ образуют правильный $(k-1)$-мерный симплекс, вписанный в B.

Доказательство. Доказательство содержится в §9.1–§9.4.

§9.1. Заметим, что нам достаточно доказать лемму 3.19 в случае когда $N = k$. В самом деле, гиперплоскость π расслаивается на $(k-1)$-мерные аффинные подпространства параллельные шару B. Для каждого такого аффинного подпространства решаем задачу минимизации модуля вектора s. Ответ в каждой отдельной задаче зависит только от расстояния между шаром B и аффинным подпространством, причем минимальное значение модуля вектора s является монотонно возрастающей функцией от этого расстояния. Следовательно минимум в целом будет достигаться тогда, когда точка O принадлежит ближайшему к шару аффинному подпространству.

§9.2. Покажем, что можно свести задачу к случаю, когда точка O фиксирована и совпадает с O', а вторые концы отрезков $U_1,\ldots, U_k$, как и раньше, произвольно расположены в шаре B.

Рассмотрим конус C над шаром B с вершиной в точке O. Все направляющие вектора отрезков $OU_1,\ldots, OU_k$ лежат в конусе C. Граница ∂C этого конуса, которая также является конусом, но над границей шара B, и представляет собой поверхность второго порядка. Ее ось симметрии обозначим через (OM), $M \in B$. Если провести двумерную плоскость σ через прямую (OM), то в пересечении σ с ∂C образуется угол, и $[OM)$ будет его биссектрисой.

Проведем через точку K, находящуюся на луче $[OM)$ на расстоянии d от точки O, гиперплоскость π_1 перпендикулярную лучу $[OM)$. Рассмотрим в гиперплоскости π_1 шар B_1 с центром в точке K и радиусом R. Конус с вершиной в точке O над шаром B_1 обозначим через C_1, а его границу, также являющуюся конусом, но над границей шара B_1, через ∂C_1.

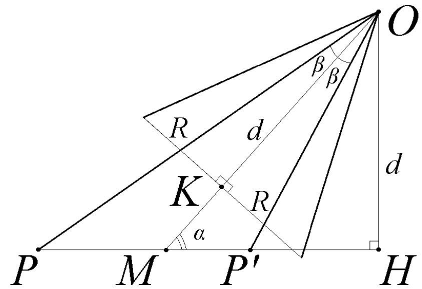


Рис. 3.11:

Покажем, что C лежит внутри C_1. Рассмотрим точку $P \in B$ и проведем через нее и прямую (OM) двумерную плоскость σ (см. рис. 3.11) Достаточно показать, что $\operatorname{tg}\beta \leq \frac{R}{d}$. В обозначениях рис. 3.11

$$\begin{gathered} OH = d, \\ PH - P'H = PP' = 2R, \\ P'H = d \cdot \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha - \beta), \\ PH = d \cdot \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha + \beta), \\ OM = \tfrac{d}{\sin\alpha}. \end{gathered}$$

Откуда получаем равенство $\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{R}{d}$. Учитывая это равенство и тот факт, что при $\pi/2 > \alpha > \beta > 0$ выполнено $\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha > 0$, после элементарных преобразований получим, что доказываемое неравенство $\operatorname{tg}\beta \leq \frac{R}{d}$ эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha \geq 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется при всех α и β.

Поскольку нас интересует сумма единичных направляющих векторов отрезков, которые лежат в конусе C, а значит и в C_1, то исходная задача на минимум эквивалентна задаче, в которой точка O фиксирована и совпадает с O', а вторые концы отрезков, как и раньше, произвольно расположены в шаре B.

§9.3. Можно считать, что вторые концы отрезков $U_1, \ldots, U_k$ лежат на границе шара B. В самом деле, предположим, что конец какого-то отрезка лежит не на границе шара. Обозначим через e — направляющий единичный вектор этого отрезка, а через s' сумму всех остальных направляющих векторов отрезков. Тогда этот отрезок можно пошевелить так, чтобы увеличить угол между e и s', а значит уменьшить модуль их суммы, т. е. уменьшить модуль вектора s. Следовательно, такое расположение не минимизирует модуль вектора s.

§9.4. Наша задача минимизации сводится к задаче минимизации модуля вектора s в случае, когда отрезки исходят не из точки O', а из центра U шара B. Покажем это и получим ответ.

Введем для краткости обозначения: $u_i = \overrightarrow{O'U_i}$, $e_i = u_i/|u_i|$, $x_i = \overrightarrow{UU_i}$. Тогда $u_i = x_i + \overrightarrow{O'U}$, $|x_i| = R$, $|\overrightarrow{O'U}| = d$. А поскольку $x_i \perp \overrightarrow{O'U}$, то $|u_i| = \sqrt{R^2 + d^2}$. Расписывая теперь $|s|^2$, получим

$$
\begin{gathered}
|s|^2 = |e_1 + \dots + e_k|^2 = \sum_{i,j} \tfrac{\langle u_i, u_j\rangle}{|u_i||u_j|} = \\
= \tfrac{1}{R^2+d^2} \sum_{i,j} \langle u_i, u_j\rangle = \tfrac{1}{R^2+d^2} \sum_{i,j} \left(\langle x_i, x_j\rangle + d^2\right) = \\
= \tfrac{k^2 d^2}{R^2+d^2} + \tfrac{1}{R^2+d^2} \sum_{i,j} \langle x_i, x_j\rangle = \tfrac{k^2 d^2}{R^2+d^2} + \tfrac{1}{R^2+d^2} |x_1 + \dots + x_k|^2
\end{gathered}
$$

Минимум выражения $|x_1 + \dots + x_k|^2$ равен 0 и достигается он, в частности, когда концы векторов x_i, т. е. точки $U_1, \dots, U_k$ являются вершинами правильного симплекса. $\square$

§10. Подставляя теперь в лемме 3.19 вместо R выражение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k-1}{2k}}$ из теоремы Юнга, получим утверждение леммы 3.16.

4 Минимальные сети на полных односвязных многообразиях $\mathcal{W}$ неположительной секционной кривизны

В этом разделе мы перенесем результаты раздела 3 для евклидового случая на случай полных односвязных многообразий $\mathcal{W}$ неположительной секционной кривизны. Поскольку у евклидовых пространств и многообразий $\mathcal{W}$ много общих свойств, существенных для теории минимальных сетей, в частности, 1) любые две точки многообразия $\mathcal{W}$ можно соединить единственной геодезической (см. утверждение 3.12) и 2) функция длины сети ℓ выпукла на многообразии $\mathcal{W}$ (см. утверждение 3.11), то и формулировки основных утверждений и их доказательства полностью аналогичны евклидовому случаю.

4.1 Экстремальные параметрические сети на многообразии

Кривая $\gamma(t)$ на многообразии M называется *квазиправильной*, если $\gamma(t)$ либо регулярна, либо точечна. Параметрическая сеть Γ (в смысле определения из раздела 2 настоящей главы) на многообразии M называется *квазиправильной*, если все ее ребра квазиправильные кривые.

Деформация Γ_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, квазиправильной сети Γ_0 называется *допустимой*, если

- для каждого ребра γ сети Γ деформация $\gamma(t, \varepsilon)$ является гладкой;
- для регулярного ребра γ при любом $\varepsilon > 0$ ребро γ_ε регулярно;
- для точечного (вырожденного) ребра γ либо при любом $\varepsilon > 0$ ребро γ_ε регулярно, либо при любом $\varepsilon > 0$ ребро γ_ε точечно.

Оказывается [29], что для любой допустимой деформации Γ_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, квзиправильной сети $\Gamma = \Gamma_0$ функция $\ell(\Gamma_\varepsilon)$ дифференцируема при $\varepsilon = 0$.

Определение. Квазиправильная (параметрическая) сеть Γ называется *экстремальной* для функционала длины ℓ, если для любой допустимой деформации Γ_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, сети $\Gamma = \Gamma_0$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \ell(\Gamma_\varepsilon) \geq 0.$$

Далее нам понадобится критерий экстремальности сети Γ на многообразиях. Определение характеристической системы локальной структуры сети Γ, используемой в этом критерии, полностью аналогично случаю нормированного пространства $(\mathbb{R}^N, \rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ нормой ρ.

Утверждение 3.9 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, [29]) *Квазиправильная параметрическая сеть Γ на римановом многообразии M, $\dim M = N$, является экстремальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия*

- *все ребра сети Γ — геодезические;*

- *характеристическая система локальной структуры сети* Γ *обладает решением, у которого модуль каждой* N*-мерной компоненты* $x_{e,v}$ *не превосходит* 1.

Из этого утверждения мы видим, что любая экстремальная сеть Γ является *геодезической сетью*, т.е. сетью, у которой каждое ребро является геодезической кривой.

Пусть теперь Γ — геодезическая сеть на римановом многообразии M. Предположим, что параметризующий граф G сети Γ является деревом. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ приведенную сеть для сети Γ. Рассмотрим подвижную вершину V сети $\tilde{\Gamma}$ и ее компоненту вырождения G_d^V. Сформулируем теперь критерий экстремальности сети Γ.

Утверждение 3.10 *Для того, чтобы* Γ *была экстремальной параметрической сетью необходимо и достаточно, чтобы для каждой подвижной вершины* V *приведенной сети* $\tilde{\Gamma}$ *выполнялось следующее условие: для каждой ветки* G_b *дерева* G_d^V*, не содержащей граничной вершины дерева* G*, имеет место* $|\sum_{v\in G_b} H_v| \le 1$*; если к тому же* V *— чисто подвижная вершина, то* $\sum_{v\in G_d^V} H_v = 0$.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству соответствующего утверждения 3.3 для нормированного пространства $(\mathbb{R}^N, \rho)$ с гладкой на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ нормой ρ.

4.2 Локально минимальные сети на многообразии как регулярные экстремальные параметрические сети

Критерии 3.10 и 3.4 экстремальности сети и локальной минимальности сети также как и в евклидовом случае позволяют интерпретировать локально минимальные сети на римановом многообразии M как регулярные экстремальные параметрические сети с бинарной топологией. Напомним, что регулярной сетью мы называли сеть без вырожденных граничных ребер, тип которой является геометрическим деревом. Более точно имеет место следующая лемма.

Лемма 3.20 *Пусть сеть Γ' получена регуляризацией локально минимальной сети Γ, затягивающей данную границу $\mathcal{A} \subset M$. Тогда для сети Γ' выполнены следующие три условия.*

1. *Γ' затягивает границу $\mathcal{A}$.*

2. *Параметризующий граф G' сети Γ' является бинарным деревом.*

3. *Γ' является регулярной экстремальной параметрической сетью типа G'.*

Обратно, пусть для сети Γ' выполнены условия 1)–3), тогда ее приведенная сеть $\Gamma(\equiv \tilde{\Gamma}')$ является локально минимальной сетью, затягивающей границу $\mathcal{A}$.

4.3 Геодезические деформации сетей на многообразии

Геодезическую ненулевой длины $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{W}$ называется *нормальной геодезической*, если она параметризована с точностью до умножения на константу натуральным параметром.

Определение. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{W}$ — нормальная геодезическая. Пусть кривые $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathcal{W}$ и $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathcal{W}$ — геодезические, причем $\gamma_1(0) = \gamma(a)$ и $\gamma_2(0) = \gamma(b)$. Определим *g-вариацию* V геодезической γ вдоль геодезических γ_1, γ_2:

(1) $V\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathcal{W}$;

(2) $V(t,0) = \gamma(t)$;

(3) кривая $V(a,s)$ (соответственно $V(b,s)$) для $s \in [0,1]$ задает нормальную геодезическую γ_1 (соответственно γ_2), если длина геодезической γ_1 (γ_2) не равна нулю, или является отображением в точку, если γ_1 (γ_2) есть отображение в точку;

(4) для любого s кривая $V(t,s)$, где $t \in [a,b]$, задает нормальную геодезическую (или кривую, которая является отображением в точку), соединяющую точки $V(a,s)$ и $V(b,s)$ и удовлетворяющую следующему условию: $V\colon [a,b] \times [0,s] \to \mathcal{W}$ — гомотопия кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{W}$.

Деформация Γ_s, $s \in [0,1]$ сети Γ_0 в сеть Γ_1 называется *геодезической деформацией* или *g-деформацией*, если ее ограничение на каждой ребро является g-вариацией этого ребра.

Утверждение 3.11 (М. В. Пронин, [15]) *Любые две параметрические сети Γ_0 и Γ_1 одинакового типа G можно соединить g-деформацией Γ_s, $s \in [0,1]$. При этом функция $\ell(s) = \ell(\Gamma_s)$ является непрерывной выпуклой функцией на отрезке $[0,1]$.*

4.4 Геодезические сети на многообразии $\mathcal{W}$ как параметрические сети в метрическом пространстве $\mathcal{W}$

Далее пусть $\mathcal{W}$ — односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны.

Напомним, что любое риманово многообразие M можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние $\rho(p,q)$ между двумя точками p, $q \in M$ как точную нижнюю грань кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки. Согласно теореме Хопфа-Ринова, см. например [10], для полного многообразия M любые две его точки p, q можно соединить геодезической, реализующей расстояние $\rho(p,q)$. Напомним также теорему существования и единственности геодезических для полных многообразий неположительной секционной кривизны, см. например [3].

Утверждение 3.12 ([3]) *Пусть M — полное риманово многообразие. Тогда для любых точек $p, q \in M$, для любого гомотопического класса путей из p в q существует геодезическая $\gamma : [0,1] \to M$ из этого класса (т.е. $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$). Если секционная кривизна M неположительна, то такая геодезическая единственна.*

Поэтому на многообразии $\mathcal{W}$ любую геодезическую сеть можно однозначно задать лишь положениями ее вершин. Таким образом, любая геодезическая сеть Γ на многообразии $\mathcal{W}$ может рассматриваться как параметрическая сеть в метрическом пространстве $(\mathcal{W}, \rho)$ в смысле определения параметрической сети в общем метрическом пространстве (см. параграф 1.1 главы 1). И обратно, любая параметрическая сеть Γ в метрическом пространстве $(\mathcal{W}, \rho)$ может рассматриваться как геодезическая сеть на многообразии $\mathcal{W}$.

4.5 Минимальные параметрические сети на многообразии $\mathcal{W}$

Очевидно, что любая минимальная параметрическая сеть на многообразии $\mathcal{W}$ является геодезической сетью. Поэтому сеть Γ является минимальной параметрической сетью на многообразии $\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда она является минимальной параметрической сетью в метрическом пространстве $(\mathcal{W}, \rho)$. Ясно, что минимальная параметрическая сеть на многообразии $\mathcal{W}$ является экстремальной сетью. Следовательно, имеет место лемма

Лемма 3.21 *Любая минимальная параметрическая сеть Γ в метрическом пространстве $(\mathcal{W}, \rho)$ является экстремальной параметрической сетью на многообразии $\mathcal{W}$.*

Лемма 3.22 *В любом в классе $[G, b]$ всех параметрических сетей типа (G, b) на полном римановом многообразии M существует минимальная параметрическая сеть.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^n$ границу, которую затягивает граф G, $b : \partial G \to \mathcal{A}$. Пусть у параметризующего графа G имеется s подвижных вершин. Обозначим через h максимум попарных расстояний между граничными точками, т.е. $h = \max\limits_{A_i, A_j} \rho(A_i, A_j)$. Рассмотрим множество $B = \cup_i B_{nh}(A_i) \subset M$, где $B_{nh}(A_i)$ — замкнутый шар радиуса nh с центром в точке A_i.

Покажем, что имеет место равенство $\inf\limits_{\Gamma \in M^{\times s}} \ell(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma \in B^{\times s}} \ell(\Gamma)$. В самом деле, для любой сети $\Gamma \in M^{\times s} \backslash B^{\times s}$ выполняется $\ell(\Gamma) > nh$; с другой стороны, существует сеть $\Gamma' \in B^{\times s}$ (можно, например, все подвижные сети Γ' расположить в какой-нибудь граничной точке A_i), такая что $\ell(\Gamma') \leq nh$.

Но $B^{\times s}$ — компактное подмножество в $M^{\times s}$ и функция ℓ непрерывна на $M^{\times s}$, следовательно существует сеть Γ_0, для которой $\ell(\Gamma_0) = \inf\limits_{\Gamma \in M^{\times s}} \ell(\Gamma)$. Согласно определению, сеть Γ_0 является минимальной параметрической сетью в классе $[G, b]$. $\square$

Лемма 3.23 *Пусть $[G, b]$ — класс параметрических сетей в метрическом пространстве $\mathcal{W}$, где G — дерево. Невырожденная минимальная* *параметрическая сеть* $\Gamma \in [G, b]$ *будет единственной минимальной параметрической сетью в классе* $[G, b]$*, если и только если* Γ *не содержит слабо фиктивных вершин.*

Доказательство. Предположим, что существует еще одна минимальная параметрическая сеть Γ' в классе $[G, b]$, отличная от Γ. Тогда, в силу утверждения 3.11, две минимальные параметрические сети Γ и Γ', рассматриваемые как геодезические сети, можно соединить g-деформацией Γ_s, $s \in [0, 1]$, $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_1 = \Gamma'$. Поскольку функция $\ell(s) = \ell(\Gamma_s)$ выпукла и принимает в крайних точках отрезка $[0, 1]$ свое наименьшее значение, то, следовательно, $\ell(s)$ постоянна на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, все сети Γ_s являются минимальными параметрическими сетями в классе $[G, b]$.

Далее доказательство продолжается по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения 3.5 из [8] для евклидового случая. $\square$

4.6 Типичные границы на многообразии $\mathcal{W}$

Отсюда и далее до конца настоящего раздела все типы рассматриваемых сетей будут предполагаться геометрическими деревьями с некоторой границей $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$.

Рассмотрим минимальную параметрическую сеть Γ, у которой

1. каждая N-мерная компонента $x_{e,v}$ решения характеристической системы локальной структуры сети Γ по модулю строго меньше 1;

2. приведенная сеть $\tilde{\Gamma}$ сети Γ (напомним, что сеть $\tilde{\Gamma}$ невырождена) не содержит слабо фиктивных чисто подвижных вершин.

Объединим эти два условия в одно и назовем *условием единственности* для минимальной параметрической сети Γ. Множество границ из $\mathcal{W}^{\times n}$, для которых существует минимальная параметрическая сеть $\Gamma[G]$, обладающая условием единственности, мы обозначим через $\mathfrak{B}_G$.

Следующая лемма оправдывает название, данное вышеприведенному условию.

Лемма 3.24 *Минимальная параметрическая сеть* $\Gamma[G]$*, затягивающая границу* $\mathcal{A}$ *из* $\mathfrak{B}_G$*, является единственной экстремальной параметрической сетью в классе* $[G]$ *всех параметрических сетей типа* G*, затягивающих* $\mathcal{A}$*.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует еще одна экстремальная параметрическая сеть Γ' в классе $[G]$, отличная от Γ. Покажем сначала, что сеть Γ', также как и Γ, является минимальной параметрической сетью в классе $[G]$. В самом деле, в силу утверждения 3.11, две параметрические сети Γ' и Γ можно соединить g-деформацией Γ_s, $s \in [0,1]$, $\Gamma_0 = \Gamma'$, $\Gamma_1 = \Gamma$. Допустим, что $\ell(\Gamma) < \ell(\Gamma')$. Тогда, поскольку функция $\ell(s) = \ell(\Gamma_s)$ выпукла, то $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\ell(\Gamma_s) < 0$. Следовательно, сеть Γ' не может быть экстремальной.

Мы показали, что сети Γ и Γ' являются минимальными параметрическими сетями в классе $[G,\mathcal{A}]$. Таким образом, функция $\ell(s)$ принимает в крайних точках отрезка $[0,1]$ свое наименьшее значение, следовательно, $\ell(s)$ постоянна на отрезке $[0,1]$. Поэтому все сети Γ_s являются минимальными параметрическими сетями в классе $[G,\mathcal{A}]$.

Далее доказательство продолжается по той же схеме, что и доказательство аналогичной леммы 3.4 для евклидового случая. $\square$

Следующие леммы 3.25, 3.26 и предложение 3.8 вместе со своими доказательствами являются точными аналогами соответствующих утверждений и доказательств для евклидового случая.

Лемма 3.25 $\mathfrak{B}_G$ *является открытым подмножеством в множестве всех границ* $\mathcal{W}^{\times n}$.

Лемма 3.26 $\mathfrak{B}_G$ *является всюду плотным подмножеством в множестве всех границ* $\mathcal{W}^{\times n}$.

Предложение 3.8 *Пусть* $\mathfrak{B} = \bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}} \mathfrak{B}_G$. *Тогда множество* $\mathfrak{B}$ *— всюду плотное открытое подмножество множества всех границ* $\mathcal{W}^{\times n}$, *причем любая минимальная параметрическая сеть* $\Gamma[G]$, *затягивающая границу из* $\mathfrak{B}_G$ *будет единственной минимальной параметрической сетью в своем классе* $[G]$.

Из леммы 2.7 и предложения 3.8 вытекает важное следствие

Следствие 3.3 *Для границ из множества* $\mathfrak{B}$ *функция длины сети* ℓ *на пространстве* $\mathcal{T}$ *всех регулярных сетей с данной границей является комбинаторной функцией Морса.*

Границу $\mathcal{A}$ из множества $\mathfrak{B}$, никакие три точки которой не лежат на одной прямой, мы будем называть *типичной границей* или *границей общего положения* на многообразии $\mathcal{W}$. Совокупность всех типичных границ мы обозначим через $\mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ — открытое и всюду плотное подмножество в $\mathcal{W}^n$.

4.7 Оценки количества локально минимальных сетей с данной границей на многообразии $\mathcal{W}$

Теперь у нас имеется достаточный набор утверждений о минимальных сетях на двумерном многообразии $\mathcal{W}$, для того, чтобы воспользоваться теорией Морса минимальных сетей и результатами проделанных вычислений для евклидового случая и получить оценки количества локально минимальных сетей с данной границей на многообразии $\mathcal{W}$.

В самом деле, из леммы 2.7 и предложения 3.8 вытекает, что для границ из множества $\mathfrak{A}$ функция длины сети ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ всех регулярных сетей с данной границей является комбинаторной функцией Морса. В свою очередь, также как и для нормированного пространства с гладкой нормой, из критерия 3.10 следует (см. предложение 3.3), что все экстремальные параметрические сети на многообразии $\mathcal{W}$ являются сетями с элементарно порожденными расщеплениями. Таким образом, мы можем использовать основную количественную теорему 2.2.

С другой стороны, критерий 3.10 экстремальности, а для многообразия $\mathcal{W}$ минимальности, параметрической сети Γ полностью совпадает со случаем евклидового пространства $\mathbb{R}^N$. И поскольку в каждой точке многообразия $\mathcal{W}$ риманова метрика приводится с помощью некоторой замены координат к евклидовому виду, то для многообразия $\mathcal{W}$ остаются верными утверждения о структуре расщеплений минимальных параметрических сетей на $\mathcal{W}$ (см. параграф 3.3). Следовательно, остаются справедливыми и следующие оценки.

Теорема 3.2 *Пусть $\mathcal{W}$ — двумерное односвязное полное многообразие с неположительной секционной кривизной,*

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ — граница общего положения, состоящая из четырех точек. Тогда количество локально минимальных сетей на многообразии $\mathcal{W}$, затягивающих границу $\mathcal{A}$, равно либо* 1, *либо* 2.

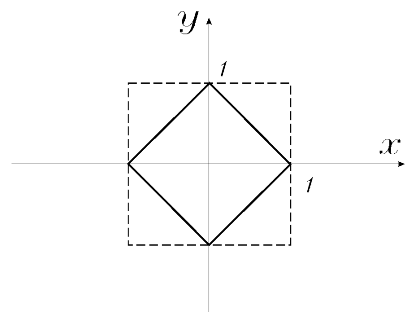


Рис. 3.12: Манхэттенская плоскость.

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ — граница общего положения, состоящая из пяти точек. Тогда количество локально минимальных сетей на многообразии $\mathcal{W}$, затягивающих границу $\mathcal{A}$, не превосходит* 8.

5 Минимальные сети на манхэттенской плоскости $\mathcal{H}$

5.1 Манхэттенская плоскость

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана некоторая система координат (x, y). Напомним, что *манхэттенской нормой* ρ вектора $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ называется сумма модулей его координат, т.е. $\rho(v) = |x| + |y|$. Плоскость $\mathbb{R}^2$ с введенной на ней манхэттенской нормой называется *манхэттенской плоскостью*. Манхэттенская плоскость также является метрическим пространством с метрикой, индуцированной нормой ρ.

Сферой Минковского для манхэттенской нормы ρ, т.е. множеством векторов из $\mathbb{R}^2$, норма которых равна 1, является квадрат, изображенный на рис. 3.12 сплошной линией. Назовем этот квадрат *квадратом нормы* ρ. Пунктирной линией на рис. 3.12 изображена сфера Минковского конормы ρ^* (мы здесь пользуемся стандартным отождествлением $T_x^*\mathbb{R}^2$ и $T_x\mathbb{R}^2$). Этот квадрат мы назовем *квадратом конормы* ρ^*.

Из рис. 3.12 видно, что для почти всех векторов v субградиентное множество $S_\rho(v)$ состоит из одного вектора. Исключение составляют вектора, имеющие вертикальное или горизонтальное направление, такие вектора мы назовем *особыми*.

Далее до конца раздела 5 для удобства будем считать, что все границы $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ обладают следующими двумя условиями.

1. Все точки множества $\mathcal{A}$ различны;

2. Пусть (A_i, A_j) — прямая, проведенная через пару граничных точек A_i, A_j. Потребуем, чтобы для каждой пары граничных точек прямая (A_i, A_j) не имела ни вертикального, ни горизонтального направления.

Совокупность всех границ, обладающих этими двумя свойствами, обозначим через $\mathfrak{A}$. В совокупности всех границ $\mathbb{R}^{2n}$ множество $\mathfrak{A}$ является открытым и всюду плотным подмножеством. Поэтому любую границу $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{A}$ будем называть *типичной границей* или *границей общего положения.*

До конца раздела 5 настоящей главы будем считать, что все сети затягивают границы общего положения.

5.2 Формулировка задачи

В отличие от случая евклидовой плоскости, где каждое критическое подмножество $C(G_\alpha)$ состоит из одной точки (отсюда, в частности, следовала комбинаторная морсовость функции ℓ), для манхэттенской плоскости такой факт, вообще говоря, не имеет места. Поэтому для евклидовой плоскости задача подсчета количества локально минимальных сетей свелась к подсчету критических подмножеств ранга $n-3$. Для манхэттенской плоскости таким образом задачу ставить не имеет смысла, поскольку даже при типичных конфигурациях граничных точек может существовать бесконечно много локально минимальных сетей данного типа.

Заметим, что в евклидовом случае локально минимальные сети являлись локальными минимумами функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$. Таким образом, задача поиска локально минимальных сетей эквивалентна задаче поиска локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$.

Основное отличие случая манхэттенской плоскости от евклидовой состоит в том, что в типичной ситуации для манхэттенской плоскости локальные минимумы функции ℓ на $\mathcal{T}$ неизолированы, или, другими словами, локальный минимум состоит не из одной точки, а из целого множества.

Определение. Пусть для всех точек некоторого связного подмножества $W \subset \mathcal{T}$ значения функции ℓ одинаковы и равны c. Подмножество W назовем *локальным минимумом функции ℓ в традиционном смысле*, если в любой достаточно малой проколотой окрестности $B_\varepsilon(W)\backslash W$ значения функции ℓ во всех точках из $B_\varepsilon(W)\backslash W$ строго больше c.

Итак, до конца этого раздела мы будем решать следующую задачу: для манхэттенской плоскости оценить количество локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$.

5.3 Комбинаторные локальные минимумы

Оказывается, что, если ℓ является комбинаторной функцией Морса, то ее локальные минимумы W в традиционном смысле совпадают с некоторыми из критических подмножеств $C(G_\alpha)$. Класс таких подмножеств можно выделить с помощью следующего комбинаторного определения.

Определение. Пусть $C(G_\alpha)$ — некоторое критическое подмножество функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$, а Γ_α — его канонический представитель. Критическое подмножество (G_α) называется *комбинаторным локальным минимумом* функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$, если к-потенциал $V_-(\Gamma_\alpha)$ сети Γ_α пуст.

Лемма 3.27 *Пусть ℓ — комбинаторная функция Морса. Множество $W \subset \mathcal{T}$ является локальным минимумом функции ℓ в традиционном смысле тогда и только тогда, когда W совпадает с одним из комбинаторных локальных минимумов $C(G_\alpha)$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество $W \subset \mathcal{T}$ является локальным минимумом функции ℓ в традиционном смысле и $\ell(W) = \tilde{c}$. Покажем сначала, что $\tilde{c}$ — критическое значение. Рассмотрим какой-нибудь страт $S(\triangle)$, пересекающийся с множеством W. Покажем, что существенный симплекс $\triangle$ присутствует в комплексе $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}}$, но не присутствует в комплексе $\mathcal{N}_{<\tilde{c}}$. В самом деле, пересечение $W \cap S(\triangle)$ является локальным минимумом для функции ℓ, ограниченной на страт $S(\triangle)$. И в силу выпуклости функции ℓ на страте $S(\triangle)$ подмножество $W \cap S(\triangle)$ является также глобальным минимумом для $\ell|_{S(\triangle)}$. Следовательно, множество $\mathcal{T}_{<\tilde{c}}$ не пересекается со стратом $S(\triangle)$, и симплекс $\triangle$ не принадлежит комплексу $\mathcal{N}_{<\tilde{c}}$. Поэтому при прохождении значения $\tilde{c}$ комплекс $\mathcal{N}_{\leq c}$ перестраивается, следовательно, $\tilde{c}$ — критическое значение.

Из приведенных выше рассуждений также следует, что W является подмножеством критического множества $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$. Поэтому оно пересекается с одним из критических подмножеств $C(G_\alpha) \subset \mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$. В силу выпуклости функции ℓ, каждое из критических подмножеств $C(G_\alpha) \subset \mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ является связным, и в объединении эти непересекающиеся критические подмножества дают все критическое множество $\mathrm{Crit}_\ell(\tilde{c})$ (см. лемму 2.17). Следовательно, имеет место равенство $C(G_\alpha) = W$.

Покажем теперь, что критическое множество $C(G_\alpha)$ является комбинаторным локальным минимумом. В самом деле, в силу определения локального минимума W, канонический представитель Γ_α критического подмножества $C(G_\alpha)$ является локальным минимумом (возможно нестрогим) функции ℓ в каждом из стратов, содержащих сеть Γ_α. По причине выпуклости функции ℓ, в каждом из таких стратов сеть Γ_α является и абсолютным минимумом функции ℓ. Следовательно, к-потенциал $V_-(\Gamma_\alpha)$ пуст.

Достаточность. Пусть $C(G_\alpha)$ — некоторый комбинаторный локальный минимум. Множество $C(G_\alpha)$ связно и $\ell(C(G_\alpha)) = \tilde{c}$. Согласно определению комбинаторного локального минимума, $V_-(\Gamma_\alpha) = \varnothing$. Поскольку, для любой сети Γ из критического подмножества $C(G_\alpha)$ ее к-потенциал $V_-(\Gamma)$ содержится в к-потенциале $V_-(\Gamma_\alpha)$ канонического представителя Γ_α, то $V_-(\Gamma)$ также пуст. Это означает, что в любой достаточно малой проколотой окрестности $B_\varepsilon(G_\alpha)\backslash G_\alpha$ критического подмножества $C(G_\alpha)$ нет точек, значение функции ℓ в которых строго меньше $\tilde{c}$. Следовательно, G_α — локальный минимум функции ℓ в традиционном смысле. □

Таким образом, лемма 3.27 сводит задачу нахождения локальных минимумов в традиционном смысле к нахождению комбинаторных локальных минимумов.

5.4 Локальное устройство минимальной параметрической сети топологии звезда

Для получения оценок на количество комбинаторных локальных минимумов (критических подмножеств) с помощью теоремы 2.2 нам потребуется информация о мощных расщеплениях минимальных параметрических сетей. Вся необходимая информация о мощных расщеплениях сети, согласно критерию 3.1, содержится в ее локальной структуре.

Изучение локальной структуры минимальных параметрических сетей начнем со случая, когда минимальная параметрическая сеть Γ имеет топологию звезды G, т.е. у геометрического дерева G имеется n граничных вершин и одна подвижная вершина v. Ребра, вектора направлений которых являются особыми, также будем называть *особыми ребрами*. Пусть $\min_\ell[G]$ — множество минимальных параметрических сетей для класса $[G]$. В дальнейшем нам будет полезно выделить из множества $\min_\ell[G]$ какую-нибудь сеть с наименьшим количеством особых ребер; такую сеть назовем *лучшим представителем* множества $\min_\ell[G]$.

В силу п.2) определения границы общего положения, два особых ребра не могут иметь совпадающие или противоположные направления. Следовательно, у любой сети особых ребер не более двух.

Рассмотрим теперь случай минимальной параметрической сети с одним особым ребром. Для каждого особого ребра e субградиентное множество $S_\rho(e,v)$ является одной из сторон квадрата конормы ρ^*, см. рис. 3.12. *Средним* значением субградиента для особого ребра e назовем ковектор, являющийся серединой этой стороны, а *крайними* значениями субградиента для особого ребра e назовем ковектора, являющиеся концами этой стороны. Заметим, что для каждого неособого ребра e субградиентное множество $S_\rho(e,v)$ состоит из единственного ковектора, являющегося одной из вершин квадрата конормы ρ^*. Поэтому субградиент для неособого ребра e определен однозначно. Напомним, что переменная $x_{e,v}$ в решении характеристической системы сети Γ принимает значение из субградиентного множества $S_\rho(e,v)$ ребра e. Поэтому для неособого ребра e значение переменной $x_{e,v}$ определено однозначно.

Поскольку субградиент ребра, вообще говоря, определен неоднозначно, то это выражение ("субградиент ребра") некорректно. Однако, если у нас имеется некоторое решение $\{x^0_{e,v}\}$ характеристической системы сети Γ, то это решение однозначно приписывает каждому ребру один из его субградиентов, а именно — $x^0_{e,v}$. В такой ситуации выражение "субградиент ребра" становится корректным.

Лемма 3.28 *Пусть невырожденная минимальная параметрическая сеть* Γ *топологии звезда имеет одно особое ребро* e*. Тогда*

- n *— четно;*

- *решение характеристической системы сети* Γ *единственно;*
- *компонента* $x_{e,v}$ *решения характеристической системы сети* Γ *принимает одно из крайних значений субградиента для ребра* e.

Доказательство. Пусть для определенности особое ребро e направлено вертикально вверх. Будем последовательно удалять из совокупности всех неособых ребер пары ребер с противоположно направленными субградиентами. В конце концов у нас останется один из следующих вариантов:

a) Одно особое ребро e.

b) Одно особое ребро e и несколько (не менее одного) неособых ребер, направленных в одну сторону квадрата нормы ρ.

c) Одно особое ребро e, несколько (не менее одного) неособых ребер, направленных в одну сторону квадрата нормы ρ и несколько (не менее одного) неособых ребер, направленных в сторону квадрата нормы, смежную к вышеупомянутой.

Обозначим через $x^0_{e,v}$ решение характеристической системы сети Γ. Согласно критерию 3.1, сумма всех субградиентов $x^0_{e,v}$ ребер равна 0. Поэтому и сумма субградиентов оставшихся ребер равна 0. Следовательно случая **a)** быть не может. Случая **c)** также быть не может. В самом деле, конорма суммы субградиентов оставшихся неособых ребер в данном случае строго больше 1. Следовательно, сумма субградиентов всех этих неособых ребер и особого ребра e, конорма которого равна 1, не может быть равна 0.

В случае **b)** количество оставшихся неособых ребер не превосходит одного, иначе опять (по тем же причинам, что и в случае **c)**) сумма субградиентов всех оставшихся ребер не может равняться 0. Таким образом, остается одно особое ребро e и одно неособое. Следовательно, n должно быть четным. Субградиент неособого ребра всегда единственен. Поэтому субградиент $x^0_{e,v}$ особого ребра e также определяется однозначно, как противоположно направленный, и принимает одно из крайних своих значений. $\square$

Аналогичными рассуждениями доказываются и следующие две леммы

Лемма 3.29 *Пусть невырожденная минимальная параметрическая сеть Γ топологии звезда не имеет особых ребер. Тогда n — четно.*

Лемма 3.30 *Пусть невырожденная минимальная параметрическая сеть Γ топологии звезда имеет два особых ребра e_1 и e_2. Тогда ребра e_1 и e_2 направлены в две смежные вершины квадрата нормы ρ, и*

1. *если n — четно, то решение характеристической системы для сети Γ единственно; и компоненты этого решения, отвечающие особым ребрам e_1 и e_2, принимают одно из крайних значений субградиента для этих особых ребер.*

2. *если n — нечетно, то решение характеристической системы для сети Γ единственно; и компоненты этого решения, отвечающие особым ребрам e_1 и e_2, принимают средние значения субградиента для этих особых ребер.*

Лемма 3.31 *Пусть в множестве $\min_\ell[G]$ нет сетей с вырожденными ребрами. Тогда лучший представитель множества $\min_\ell[G]$ имеет*

1. *0 особых ребер, если n — четно;*

2. *2 особых ребра, если n — нечетно.*

Доказательство. Пункт 2) утверждения леммы следует из лемм 3.28, 3.29 и 3.30.

Докажем пункт 1). Пусть Γ — минимальная параметрическая сеть из $\min_\ell[G]$. Из лемм 3.28 и 3.30 следует, что в решении характеристической системы сети Γ субградиенты особых ребер обязаны принимать свои крайние значения. Это означает, что мы можем пошевелить немного подвижную вершину сети Γ, так чтобы все ребра стали неособыми, а их субградиенты (уже определяемые однозначно) остались прежними. При этом новая сеть $\tilde{\Gamma}$ останется минимальной параметрической сетью, т.е. будет принадлежать множеству $\min_\ell[G]$. Таким образом получится лучший представитель множества $\min_\ell[G]$ без особых ребер. $\square$

Лемма 3.32 *Пусть в $\min_\ell[G]$ имеется сеть Γ с вырожденным ребром, тогда*

1. *если n — нечетно, то $\min_\ell[G]$ состоит из одной сети Γ;*

2. *если n — четно, то существует невырожденная сеть $\tilde{\Gamma} \in D$ без особых ребер.*

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем сети, затягивающие границы общего положения. Поскольку у сети Γ имеется одно вырожденное ребро, то одна из граничных вершин совпадает с подвижной, и, следовательно, в силу п.2) из определения границы общего положения, все остальные невырожденные ребра обязаны быть неособыми.

Мысленно удалим у сети Γ все пары невырожденных ребер с противоположно направленными субградиентами. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства леммы 3.28, получаем, что

— при нечетном n не останется ни одного невырожденного ребра. Предположим, что кроме Γ существует еще сеть $\tilde{\Gamma} \in \min_\ell[G]$. В силу выпуклости множества $\min_\ell[G]$, любые две точки из $\min_\ell[G]$ можно соединить отрезком, лежащим в $\min_\ell[G]$. Следовательно, в любой достаточно малой окрестности сети Γ должна существовать минимальная параметрическая сеть из D без вырожденных ребер. Но малое шевеление подвижной вершины, делающее вырожденное ребро невырожденным, не изменит субградиентов изначально невырожденных ребер, поэтому сумма субградиентов всех изначально невырожденных ребер останется равной 0. Следовательно, и субградиент нового невырожденного ребра должен быть равным 0. Чего не может быть у невырожденных ребер, поскольку любой субградиент невырожденного ребра имеет единичную конорму.

— при четном n останется ровно одно невырожденное ребро e. Следовательно, субградиент вырожденного ребра должен быть противоположно направлен к субградиенту ребра e. Сдвинем достаточно мало подвижную вершину в направлении ребра e. Тогда у вновь образовавшейся сети $\tilde{\Gamma}$ все ребра будут невырожденными, и сумма субградиентов всех ребер будет равной 0. Следовательно, по критерию 3.1, сеть $\tilde{\Gamma}$ — минимальная параметрическая сеть из $\min_\ell[G]$. $\square$

Назовем два невырожденных неособых ребра *парными ребрами* , если их субградиенты противоположно направлены. Резюмируя все вышесказанное, сформулируем предложение

Предложение 3.9 *Пусть* $\min_\ell[G]$ *— множество минимальных параметрических сетей топологии звезда, затягивающих типичную границу из* n *точек на манхэттенской плоскости. Тогда*

1. *Если* n *— нечетно, то* $\min_\ell[G]$ *состоит всего из одной сети* Γ. *Причем, после удаления парных ребер сеть* Γ *будет устроена следующим образом:*
   - *если* Γ *— невырождена, то из трех оставшихся ребер два особых ребра направлены в концевые вершины какой-либо стороны квадрата нормы* ρ, *а одно неособое ребро — во внутренность противоположной стороны квадрата нормы* ρ.
   - *если* Γ *— вырождена, то остается только одно вырожденное ребро.*
2. *Если* n *— четно, то существует невырожденный лучший представитель* $\Gamma \in \min_\ell[G]$ *без особых ребер. Причем у любого невырожденного лучшего представителя без особых ребер все ребра разбиваются на парные ребра.*

5.5 Мощные расщепления минимальных параметрических сетей некоторых типов

Начнем с изучения мощных расщеплений минимальных параметрических сетей типа звезда в случаях 3, 4 и 5 граничных точек.

В случае 3 граничных точек никаких расщеплений нет.

В случае 4 граничных точек для сети Γ имеются только расщепления с одним внутренним ребром. Все геометрические расщепления ранга один, т.е. с одним внутренним ребром, являются мощными. Оказывается, имеет место предложение

Предложение 3.10 *Пусть* Γ *— невырожденная минимальная параметрическая сеть топологии звезда без особых ребер, затягивающая типичную границу из* 4 *точек манхэттенской плоскости. Тогда для сети* Γ *количество ее мощных расщеплений ранга один* $PS_1(\Gamma)$ *может быть либо* 1, *либо* 2.

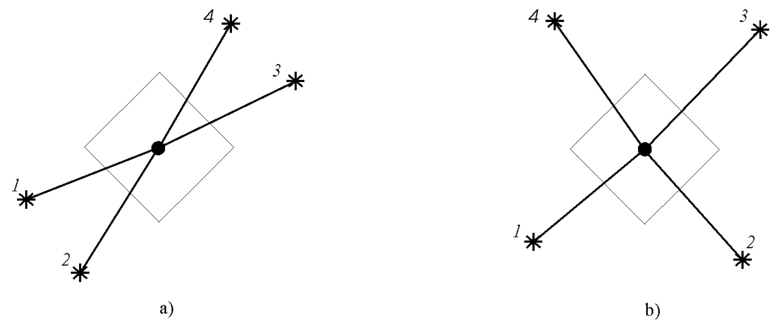


Рис. 3.13:

Доказательство. Согласно предложению 3.9, все ребра сети Γ разбиваются на парные ребра. Таким образом, имеется только два типа локальной структуры сети Γ в подвижной вершине. Эти типы показаны на рис. 3.13.

Из трех возможных расщеплений $(\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1,3\},\{2,4\})$ и $(\{1,4\},\{2,3\})$ (здесь приведены их кодировки сцеплениями, см. параграф 2.2 главы 1) сети Γ геометрическими (мощными) расщеплениями являются только

- для типа a) локальной структуры — $(\{1,2\},\{3,4\})$;
- для типа b) локальной структуры — $(\{1,2\},\{3,4\})$ и $(\{1,4\},\{2,3\})$;

что легко проверяется с помощью общего критерия 3.1 минимальности параметрической сети в нормированном пространстве. □

В случае 5 граничных точек для сети Γ имеются расщепления ранга один и ранга два. Все геометрические расщепления ранга один являются мощными. Оказывается, имеет место предложение

Предложение 3.11 *Пусть Γ — минимальная параметрическая сеть топологии звезда, затягивающая типичную границу из 5 точек манхэттенской плоскости. Тогда для сети Γ количество ее мощных расщеплений ранга один $PS_1(\Gamma)$ не меньше 2 и не больше 4, и оно связано с количеством мощных расщеплений ранга два $PS_2(\Gamma)$ следующим образом:*

- *если $PS_1(\Gamma) = 2$, то $PS_2(\Gamma) = 1$;*

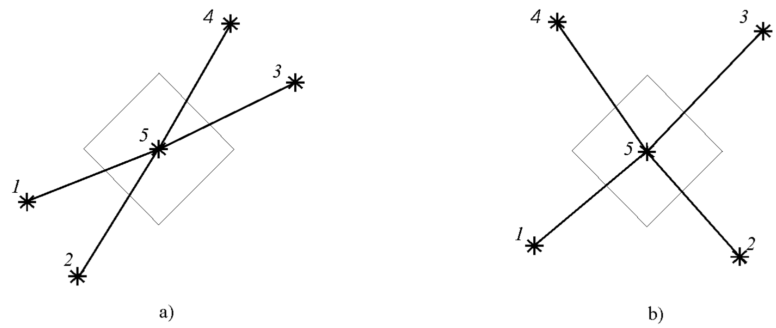


Рис. 3.14:

- *если* $PS_1(\Gamma) = 3$*, то* $PS_2(\Gamma) = 2$*;*
- *если* $PS_1(\Gamma) = 4$*, то* $PS_2(\Gamma) = 2$*.*

Доказательство. Будем различать два случая: вырожденная и невырожденная сеть Γ.

У вырожденной сети Γ только одно ребро имеет нулевую длину, скажем (VA_5). Остальные ребра невырожденные и неособые. Согласно предложению 3.9, эти ребра разбиваются на парные. Поэтому имеется только два варианта локальной структуры сети Γ в подвижной вершине V. Оба варианта изображены на рис. 3.14.

У невырожденной сети Γ, согласно предложению 3.9, имеется два особых ребра, направленных в концевые вершины некоторой стороны квадрата нормы ρ; а также можно выделить одно неособое ребро, направленное в противоположную сторону квадрата нормы ρ. Остальные два неособых ребра должны быть парными ребрами. Следовательно, имеется два варианта локальной структуры сети Γ в подвижной вершине V, которые изображены на рис. 3.15.

Перечислим теперь возможные комбинаторные расщепления сети Γ ранга 1. Поскольку для любого геометрического дерева с пятью граничными вершинами каждое внутреннее ребро задает разбиение множества граничных вершин на двухэлементное и трехэлементное подмножества, то можно в их кодировках сцеплениями оставлять только двухэлементные подмножества. Таким образом, имеется десять возможных расщеплений сети Γ: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$.

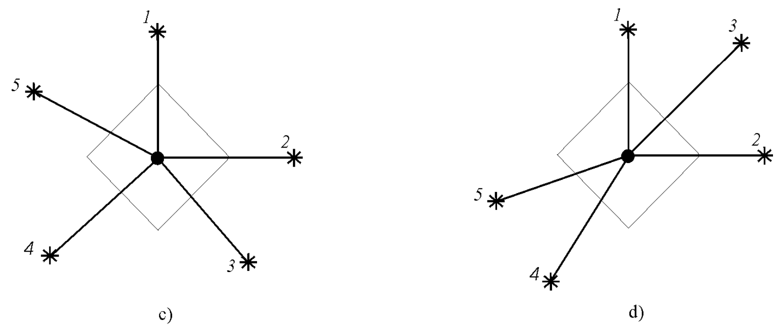


Рис. 3.15:

	Мощные расщепления ранга 1	Мощные расщепления ранга 2
a)	$\{1,2\}$, $\{3,4\}$	$(\{1,2\},\{3,4\})$
b)	$\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$	$(\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1,4\},\{2,3\})$
c)	$\{4,5\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{1,5\}$	$(\{4,5\},\{2,3\})$, $(\{3,4\},\{1,5\})$
d)	$\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5\}$	$(\{1,3\},\{4,5\})$, $(\{2,3\},\{4,5\})$

Таблица 3.1:

Для каждого из типов (a,b,c,d) локальной структуры сети Γ мощные расщепления легко находятся с помощью общего критерия 3.1 минимальности параметрической сети. В таблице 3.1 изображены все мощные расщепления ранга один и два для каждого из типов локальной структуры сети Γ. Из этой таблицы следует доказываемое предложение. $\square$

Для случая 5 граничных точек нам потребуется изучить мощные расщепления $PS_2(\Gamma)$ ранга 2 регулярной минимальной параметрической сети $\Gamma[G]$, где G — геометрическое дерево с 5 граничными вершинами и 2 подвижными. Прежде, чем сформулировать предложение о количестве таких расщеплений, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3.33 *Пусть два вектора e_1 и e_2 направлены в одну сторону квадрата манхэттенской нормы ρ, причем направление хотя бы одного из этих векторов неособое. Тогда конорма суммы любых соответствующих этим векторам субградиентов s_1 и s_2 строго больше* 1*, т.е.* $\rho^*(s_1+s_2)>1$.

Доказательство. Предположим, что вектор e_1 имеет неособое направление. Тогда у соответствующего субградиента (однозначно определенного) $s_1 = (x_1, y_1)$ модули координат равны 1. Пусть, без ограничения общности, $x_1 = y_1 = 1$. Поскольку вектора e_1 и e_2 направлены в одну сторону квадрата нормы, то хотя бы одна из координат, скажем x_2, любого субградиента $s_2 = (x_2, y_2)$ положительна. Следовательно, $\rho^*(s_1 + s_2) = \max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|) = \max(1 + x_2, |y_1 + y_2|) > 1$. $\square$

Лемма 3.34 *Пусть дан конечный набор ковекторов* $\{s_i\}_{i=1}^m$ *с условиями: для всех ковекторов* $\rho^*(s_i) \leq 1$ *и* $\sum\limits_{i=1}^m s_i = 0$. *Тогда в этом наборе найдется пара векторов* s_i *и* s_j, *таких что* $\rho^*(s_i + s_j) \leq 1$.

Доказательство. При $m = 2$ утверждение леммы очевидно. Без ограничения общности, предположим, что все $s_i \neq 0$. Напомним, что для манхэттенской нормы ρ конорма ковектора $s_i = (x_i, y_i)$ выражается следующим образом: $\rho^*(s_i) = \max(|x_i|, |y_i|)$.

Допустим, что в данном наборе есть ковектор s_i, у которого одна из координат равна 0, например $x_i = 0$. Тогда, поскольку $\sum\limits_{i=1}^m y_i = 0$, найдется ковектор $s_j = (x_j, y_j)$, у которого координата y_j имеет противоположный знак координате y_i. Следовательно, $\rho^*(s_i + s_j) = \max(|x_i|, |y_i + y_j|) \leq \max(|x_i|, |y_i|, |y_j|) \leq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда у всех ковекторов s_i координата x_i имеет обратный знак координате y_i. Тогда, по тем же соображениям что и выше ($\sum\limits_{i=1}^m x_i = 0$), для ковектора $s_i = (x_i, y_i)$ найдется ковектор $s_j = (x_j, y_j)$, такой что знаки соответствующих координат противоположны. Следовательно, $\rho^*(s_i + s_j) = \max(|x_i + x_j|, |y_i + y_j|) \leq \max(|x_i|, |x_j|, |y_i|, |y_j|) \leq 1$.

Осталось рассмотреть последний случай, когда у всех ковекторов из данного набора обе координаты ненулевые и в данном наборе существует ковектор s_i, у которого обе координаты имеют одинаковые знаки. Предположим, для определенности, что у ковектора s_i обе координаты положительны. Тогда, как и выше, существует ковектор $s_j = (x_j, y_j)$, у которого координата y_j отрицательна. Если при этом координата x_j также отрицательна, то $\rho^*(s_i + s_j) = \max(|x_i + x_j|, |y_i + y_j|) \leq \max(|x_i|, |x_j|, |y_i|, |y_j|) \leq 1$. Если же $x_j > 0$, то, по тем же соображениям что и выше, существует ковектор $s_k = (x_k, y_k)$, у которого координата x_k отрицательна. Если $y_k < 0$, то $\rho^*(s_i + s_k) \le 1$; если $y_k > 0$, то $\rho^*(s_j + s_k) \le 1$. $\Box$

Предложение 3.12 *Пусть G — геометрическое дерево с 5 граничными вершинами и 2 подвижными, а $\Gamma[G]$ — регулярная минимальная параметрическая сеть, затягивающая границу общего положения. Тогда для сети Γ количество ее мощных расщеплений ранга два $PS_2(\Gamma)$ равно либо 1 , либо 2.*

Доказательство. Обозначим через a_i граничные вершины дерева G, а через u и w — подвижные вершины графа G степени 2 и 3 соответственно. Пусть u смежна с вершинами a_4 и a_5, а w смежна с вершинами a_1, a_2 и a_3. Через e_i, $i = 1, 2, 3$, обозначим ребро $\{a_i, w\}$; через e — ребро $\{u, w\}$.

Поскольку сеть Γ является минимальной параметрической сетью, то, согласно критерию 3.1, существует решение $\{x^0_{e,v}\}$ характеристической системы сети Γ, каждая компонента которого принадлежит соответствующему субградиентному множеству $S_\rho(e, v)$. Фактически на направленных ребрах (e, v) заданы значения $x^0_{e,v}$ их субградиентов, так что выполняются уравнения из критерия 3.1. Напомним, что, по определению субградиентов, $\rho^*(x^0_{e,v}) \le 1$. Также, из критерия 3.1, у нас имеется уравнение $x^0_{e_1,w} + x^0_{e_2,w} + x^0_{e_3,w} + x^0_{e,w} = 0$. Теперь мы находимся в условиях леммы 3.34. Следовательно, имеются два значения субградиентов, например $x^0_{e_1,w}$ и $x^0_{e_2,w}$, таких что $\rho^*(x^0_{e_1,w} + x^0_{e_2,w}) \le 1$.

Рассмотрим расщепление Γ' сети Γ, устроенное следующим образом. Параметризующий граф G' получается из графа G расщеплением в последнем вершины w. Добавилось новое внутреннее ребро e', которое разделило ребра e_1, e_2, e_3, e на пары e_1, e_2 и e_3, e. Покажем, что сеть Γ' также является минимальной параметрической сетью. Найдем решение $\{x^0_{e,v}\}$ характеристической системы сети Γ', каждая компонента которого принадлежит соответствующему субградиентному множеству $S_\rho(e, v)$. Для этого субградиенты $\{x^0_{e,v}\}$ старых ребер оставим прежними, а субградиент внутреннего ребра e' положим с точностью до знака равным $x^0_{e_1,v} + x^0_{e_2,v}$. Поскольку ребро e' — вырожденное и $\rho^*(x^0_{e_1,v} + x^0_{e_2,v}) \le 1$, то ковектор $x^0_{e_1,v} + x^0_{e_2,v}$ принадлежит субградиентному множеству ребра e'. Тогда, как легко проверить с помощью критерия 3.1, сеть Γ' является минимальной параметрической сетью, или, другими словами, расщепление Γ' не является геометрическим. Таким образом, из 3 возможных расщеплений сети Γ найдется одно, которое не является геометрическим расщеплением, т.е. $PS_2(\Gamma) \le 2$.

Покажем теперь, что по крайней мере одно геометрическое расщепление сети Γ в множестве $PS_2(\Gamma)$ существует. Для этого изучим возможные типы локальной структуры сети Γ в подвижной вершине w, в которой стыкуется 4 ребра e_1, e_2, e_3 и e. Рассмотрим сначала случай, когда ни одно из ребер e_1, e_2, e_3 не вырождено. В этом случае, в силу типичности границы, количество особых ребер не превосходит трех. Варианты локальной структуры с не более чем двумя особыми ребрами уже были рассмотрены при доказательстве предложения 3.10 и в каждом из этих вариантов было не менее одного расщепления. Рассмотрим теперь вариант, в котором имеется три особых ребра. Из-за типичности границы, ребро e должно быть особым и все три особых ребра должны иметь разные направления. Следовательно, для одного неособого ребра, скажем e_1, найдется особое ребро, скажем e_2, такое что e_1 и e_2 направлены в одну сторону квадрата нормы ρ. В силу леммы 3.33, конорма суммы любых двух субградиентов, соответствующих этим ребрам, строго больше 1. Поэтому комбинаторное расщепление Γ' сети Γ, отделяющее ребра e_1 и e_2 в подвижной вершине v, может уменьшить длину сети Γ. Таким образом, $\Gamma' \in PS_2(\Gamma)$.

Пусть теперь одно ребро, для определенности e_1, вырождено. Тогда особое направление может иметь только внутреннее ребро e. Если

- e — неособое ребро, то
  - либо сумма субградиентов ребер e_2 и e_3 строго больше 1. В этом случае эти ребра направлены в одну сторону квадрата нормы или в смежные. Тогда геометрическим расщеплением $\Gamma' \in PS_2(\Gamma)$ сети Γ будет расщепление, отделяющее ребра e_2 и e_3 от ребер e_1 и e.
  - либо сумма субградиентов ребер e_2 и e_3 равна 0. В этом случае ребра e_2 и e_3 направлены в противоположные стороны квадрата нормы, и одно из этих ребер, скажем e_2, с ребром e направлены либо в одну сторону квадрата нормы, либо в смежные. Тогда для соответствующих субградиентов s и s_2 выполнено неравенство $\rho^*(s + s_2) > 1$, и геометрическим расщеплением $\Gamma' \in PS_2(\Gamma)$ сети Γ будет расщепление, отделяющее ребра e и e_2 от ребер e и e_2.

- e — особое ребро, то
  - либо сумма субградиентов ребер e_2 и e_3 строго больше 1. В этом случае эти ребра направлены в одну сторону квадрата нормы или в смежные. Тогда геометрическим расщеплением $\Gamma' \in PS_2(\Gamma)$ сети Γ будет расщепление, отделяющее ребра e_2 и e_3 от ребер e_1 и e.
  - либо сумма субградиентов ребер e_2 и e_3 равна 0. В этом случае ребра e_2 и e_3 направлены в противоположные стороны квадрата нормы, и одно из этих ребер, скажем e_2, с ребром e направлены в одну сторону квадрата нормы. Тогда, по лемме 3.33 для соответствующих субградиентов s и s_2 выполнено неравенство $\rho^*(s+s_2) > 1$, и геометрическим расщеплением $\Gamma' \in PS_2(\Gamma)$ сети Γ будет расщепление, отделяющее ребра e и e_2 от ребер e и e_2.

□

5.6 Комбинаторная морсовость функции ℓ для случаев 3, 4, 5 граничных точек

Для применения основной формулы из теоремы 2.2 нам необходимо проверить, что функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса.

Поскольку функция ℓ на каждом страте $\langle G\rangle$ выпукла и “на бесконечности равна бесконечности”, то она достигает своей точной нижней грани на каждом страте пространства $\mathcal{T}$. Следовательно, условие 1) из определения комбинаторной функции Морса выполняется для произвольного количества граничных точек.

Однако, условие 2) этого определения выполняется только для случаев 3, 4 и 5 граничных точек. Чтобы это показать нам необходимо подробнее рассмотреть приращение $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ в каждом критическом значении $\tilde{c}$.

Лемма 3.35 *Пусть $\tilde{c}$ — самое большое критическое значение функции ℓ. Тогда комплекс $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ представляет собой симплекс, отвечающий геометрическому дереву типа звезда.*

Доказательство. Согласно следствию 2.3, критические значения функции ℓ — это длины минимальных параметрических сетей. Поскольку типы всех минимальных параметрических сетей являются некоторыми расщеплениями геометрического дерева типа звезда, то, следовательно, длина минимальной параметрической сети типа звезда не меньше, чем длина любой минимальной параметрической сети другого типа. □

Для 3 граничных точек имеется всего один тип сетей — звезда. Поэтому для 3 граничных точек условие 2) из определения комбинаторной функции Морса выполнено.

Для 4 граничных точек для максимального критического значения $\tilde{c}$, в силу леммы 3.35, условие 2) также выполнено. Рассмотрим теперь остальные критические значения. Пусть c — немаксимальное критическое значение. Тогда в критическом множестве $\mathrm{Crit}_\ell(c)$ нет регулярных сетей типа звезда. Следовательно, типы регулярных сетей из $\mathrm{Crit}_\ell(c)$ — это бинарные деревья. Таким образом, максимальные симплексы для комплекса $d\mathcal{N}_c$ соответствуют стратам $\langle G\rangle$, где G — бинарное дерево, т.е. являются нульмерными симплексами. Нульмерные симплексы не пересекаются, поэтому для случая 4 граничных точек условие 2) из определения комбинаторной функции Морса полностью выполняется.

Остался случай 5 граничных точек. Пусть c — некоторое критическое значение. Разберем структуру комплекса $d\mathcal{N}_c$. В качестве максимальных симплексов в этот комплекс могут входить: симплекс, отвечающий страту типа звезда, — 14-мерный; симплексы, отвечающие типам деревьев с двумя подвижными вершинами, — 2-мерные; симплексы, отвечающие бинарным деревьям, — 0-мерные.

Если в $d\mathcal{N}_c$ входит максимальный симплекс, отвечающий типу звезда, то никаких других максимальных симплексов в $d\mathcal{N}_c$ нет. Поэтому для данного критического значения c условие 2) из определения комбинаторной функции Морса выполняется.

Если в $d\mathcal{N}_c$ в качестве максимальных симплексов входят только симплексы отвечающие бинарным деревьям, то эти нульмерные симплексы не пересекаются, и для данного критического значения c условие 2) из определения комбинаторной функции Морса также выполняется.

Разберем случай, когда в комплексе $d\mathcal{N}_c$ нет максимального симплекса, отвечающего типу звезда, но имеются максимальные симплексы, отвечающие деревьям с двумя подвижными вершинами. Без ограничения общности можно считать, что в $d\mathcal{N}_c$ нет максимальных нульмерных симплексов. Пусть $\triangle_1$ и $\triangle_2$ — максимальные симплексы, отвечающие деревьям с двумя подвижными вершинами. Покажем, что либо $\triangle = \triangle_1 \cap \triangle_2 \in \mathcal{N}_{<c}$, либо в комплексе $d\mathcal{N}_c$ имеется максимальный симплекс, отвечающий типу звезда, т.е. получим противоречие. Таким образом, и для случая 5 граничных точек условие 2) из определения комбинаторной функции Морса также будет выполнено.

Обозначим через G_1 и G_2 геометрические деревья, отвечающие симплексам $\triangle_1$ и $\triangle_2$ соответственно. Поскольку в комплексе $d\mathcal{N}_c$ симплексы $\triangle_1$ и $\triangle_2$ максимальны, то в критическом множестве $\mathrm{Crit}_\ell(c)$ существуют две регулярных минимальных параметрических сети Γ_1 и Γ_2 типов G_1 и G_2 соответственно. Все максимальные симплексы являются существенными, их пересечение, согласно лемме 2.4, также является существенным симплексом. Поскольку $\triangle_1$ и $\triangle_2$ — существенные симплексы, отвечающие деревьям с двумя подвижными вершинами, то их пересечение $\triangle = \triangle_1 \cap \triangle_2$ — 0-мерный существенный симплекс, отвечающий некоторому бинарному дереву G. Предположим, что $\triangle \notin \mathcal{N}_{<c}$. Это означает, что минимум функции ℓ на страте $\langle G\rangle$ равен c. Следовательно, множество минимумов $\min_\ell\langle G\rangle$ содержит сети Γ_1 и Γ_2. В силу выпуклости множества $\min_\ell\langle G\rangle$, сети Γ_1 и Γ_2 можно соединить отрезком, целиком лежащим в $\min_\ell\langle G\rangle$. Имеется два варианта: либо на этом отрезке найдется регулярная минимальная параметрическая сеть Γ типа G, либо на нем найдется регулярная минимальная параметрическая сеть Γ_0 типа G_0 — звезда. Второй вариант противоречит нашему предположению, поскольку тогда бы в комплексе $d\mathcal{N}_c$ имелся бы максимальный 14-мерный симплекс, отвечающий типу звезда. Оказывается, что и для первого варианта в множестве $\min_\ell\langle G\rangle$ (уже не на вышепостроенном отрезке) найдется регулярная минимальная параметрическая сеть Γ_0 типа звезда.

Предложение 3.13 *Пусть G — бинарное дерево, затягивающее 5 точек на манхэттенской плоскости. Обозначим через e_1 и e_2 внутренние ребра дерева G. Пусть $\Gamma \in \min_\ell[G]$ — минимальная параметрическая сеть без вырожденных внутренних ребер. Тогда, если в множестве $\min_\ell[G]$ существуют сеть Γ_1 с вырожденным ребром e_1 и невырожденным ребром e_2 и сеть Γ_2 с вырожденным ребром e_2 и невырожденным ребром e_1, то множеству $\min_\ell[G]$ принадлежит и минимальная параметрическая сеть Γ_0 с двумя вырожденными внутренними ребрами.*

Доказательство. При доказательстве данного предложения нам пона-

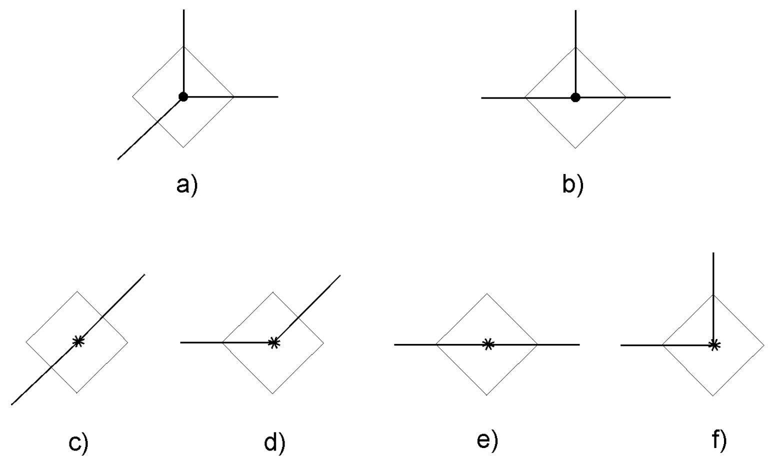


Рис. 3.16:

добится лемма о локальной структуре в окрестности подвижной вершины степени 3 регулярной минимальной параметрической сети $\Gamma[G]$.

Лемма 3.36 *Регулярная минимальная параметрическая* $\Gamma[G]$ *в окрестности своей подвижной вершины степени* 3 *может быть устроена одним из следующих способов, изображенных на рис. 3.16.*

На рис. 3.16 звездочкой отмечена граничная вершина, а точкой — подвижная.

Доказательство. Обозначим через v подвижную вершину сети Γ, а через e_1, e_2, e_3 — ребра, инцидентные этой вершине. Поскольку сеть Γ является минимальной параметрической сетью, то, в силу критерия 3.1, соответствующие субградиенты ребер s_1, s_2, s_3 должны удовлетворять уравнению $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Это уравнение в каждом из рассматриваемых далее случае однозначно определяет взаимное расположение ребер e_1, e_2, e_3 (с точностью до отражений относительно координатных осей и поворотов на угол кратный $\frac{\pi}{2}$).

Пусть у сети Γ в подвижной вершине v

- нет вырожденных ребер, инцидентных v, и

  - нет особых ребер, инцидентных v. Такого случая быть не может, см. лемму 3.29 (про локальную структуру звезды при $n = 3$).
  - имеется одно особое ребро, инцидентное v. Такого случая быть не может, см. доказательство леммы 3.28 (про локальную структуру звезды при $n = 3$)
  - имеются два особых ребра и одно неособое ребро, инцидентные v. В этом случае может быть единственный возможный вариант, изображенный на рис 3.16 a).
  - имеются три особых ребра, инцидентных v. В этом случае может быть единственный возможный вариант, изображенный на рис 3.16 b).

- есть вырожденные ребра (тогда такое ребро одно и оно является граничным) и
  - нет особых ребер, инцидентных v. В этом случае может быть единственный возможный вариант, изображенный на рис 3.16 c).
  - имеется одно особое ребро, инцидентное v. В этом случае может быть единственный возможный вариант, изображенный на рис 3.16 d).
  - имеются два особых ребра, инцидентных v. В этом случае может быть два возможных варианта, изображенных на рис 3.16 e) и f).

□

Следствие 3.4 *Пусть v — подвижная вершина регулярной минимальной параметрической сети $\Gamma[G]$, которой инцидентны два граничных ребра и одно внутреннее. Тогда локальная структура сети Γ в подвижной вершине v может быть устроена одним из пяти способов, изображенных на рис. 3.17 (с точностью до отражений относительно координатных осей и поворотов на угол кратный $\frac{\pi}{2}$).*

Пусть v — подвижная вершина регулярной минимальной параметрической сети $\Gamma[G]$, которой инцидентны одно граничное ребро и два внутренних. Тогда локальная структура сети Γ в подвижной вершине

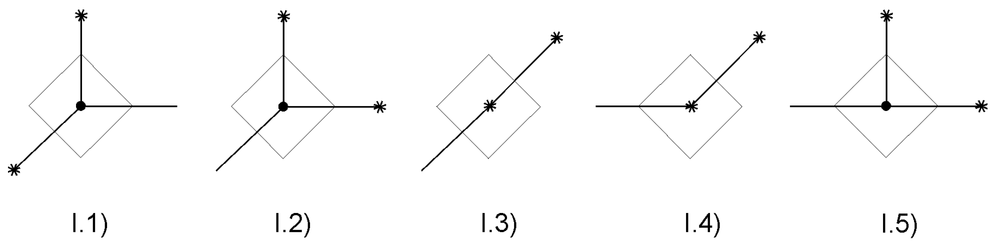


Рис. 3.17:

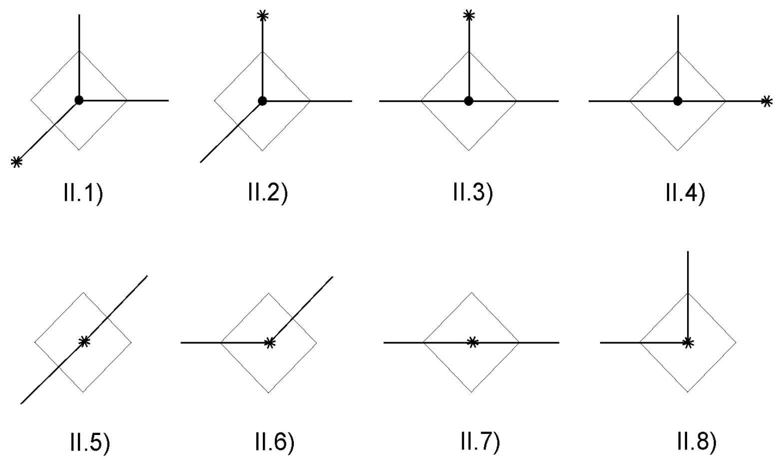


Рис. 3.18:

v может быть устроена одним из восьми способов, изображенных на рис. 3.18 (с точностью до отражений относительно координатных осей и поворотов на угол кратный $\frac{\pi}{2}$).

Также нам будет нужна следующая очевидная геометрическая лемма.

Лемма 3.37 *Пусть $[P_0, Q_0]$ и $[P_1, Q_1]$ — отрезки на плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что точки $P = P(t)$ и $Q = Q(t)$ движутся равномерно и прямолинейно из точек $P_0 = P(0)$ и $Q_0 = Q(0)$ в точки $P_1 = P(1)$ и $Q_1 = Q(1)$. Тогда*

- *если прямые* (P_0, Q_0) *и* (P_1, Q_1) *параллельны, то и прямая* $(P(t), Q(t))$ *в любой момент времени* $0 < t < 1$ *параллельна этим прямым;*
- *если прямые* (P_0, Q_0) *и* (P_1, Q_1) *не параллельны, то и прямая* $(P(t), Q(t))$ *в любой момент времени* $0 < t < 1$ *не параллельна ни одной из этих прямых.*

(Здесь мы полагаем, что "прямая" (P, Q) *при* $P = Q$ *параллельна любой прямой на плоскости* $\mathbb{R}^2$*.)*

Следующая лемма описывает структуру множества $\min_\ell[G]$ минимальных параметрических сетей типа G при определенных условиях.

Лемма 3.38 *Пусть в множестве* $\min_\ell[G]$ *имеется регулярная минимальная параметрическая сеть* Γ*, которая в окрестности своей подвижной вершины* v *устроена так,*

1. *как показано на рис. 3.16 a), т.е. вершине* v *инцидентны два особых невырожденных ребра* e_1 *и* e_2 *и одно невырожденное неособое ребро* e*. Тогда у любой минимальной параметрической сети* Γ' *из* $\min_\ell[G]$ *ребра* e'_1 *и* e'_2 *параллельны соответствующим ребрам* e_1 *и* e_2 *сети* Γ*.*
2. *как показано на рис. 3.16 c), т.е. вершине* v *инцидентны два неособых невырожденных ребра и одно вырожденное граничное ребро* (v, w)*, где* w *— граничная вершина и* $\Gamma(w) = A$*,* $A \in \mathcal{A}$ *— граничная точка. Тогда у любой минимальной параметрической сети* Γ' *из* $\min_\ell[G]$ *положение подвижной вершины* v *совпадает с положением граничной вершины* w*, т.е.* $\Gamma'(v) = \Gamma'(w) = A$*.*
3. *как показано на рис. 3.16 d), т.е. вершине* v *инцидентны одно особое невырожденное ребро* e*, одно неособое невырожденное ребро и одно вырожденное граничное ребро* (v, w)*, где* w *— граничная вершина и* $\Gamma(w) = A$*,* $A \in \mathcal{A}$ *— граничная точка. Тогда у любой минимальной параметрической сети* Γ' *из* $\min_\ell[G]$ *подвижная вершина* v *расположена на прямой, проходящей через точку* A *и перпендикулярной ребру* e *сети* Γ*.*

4. *как показано на рис. 3.16 b), т.е. вершине v инцидентны два особых противоположно направленных невырожденных ребра и одно невырожденное особое ребро e им перпендикулярное. Тогда у любой минимальной параметрической сети Γ' из $\min_\ell[G]$ ребро e' параллельно соответствующему ребру e сети Γ.*

5. *как показано на рис. 3.16 e), т.е. вершине v инцидентны два особых противоположно направленных невырожденных ребра e_1 и e_2 и одно вырожденное граничное ребро (v, w), где w — граничная вершина и $\Gamma(w) = A$, $A \in \mathcal{A}$ — граничная точка. Тогда у любой минимальной параметрической сети Γ' из $\min_\ell[G]$ подвижная вершина v расположена на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной ребрам e_1 и e_2.*

6. *как показано на рис. 3.17 I.1), т.е. вершине v инцидентно одно особое невырожденное граничное ребро (v, w_1) и $\Gamma(w_1) = A_1$, $A_1 \in \mathcal{A}$ — граничная точка; одно неособое невырожденное граничное ребро (v, w_2) и $\Gamma(w_2) = A_2$, $A_2 \in \mathcal{A}$ — граничная точка и одно особое невырожденное внутреннее ребро e. Тогда у любой минимальной параметрической сети Γ' из $\min_\ell[G]$ подвижная вершина v расположена на отрезке прямой $l = (\Gamma(v), \Gamma(w))$, ограниченном точкой A_1 и прямой, проходящей через точку A_2 и перпендикулярной прямой l.*

Доказательство. 1) Поскольку множество $\min_\ell[G]$ в пространстве $[G]$ является выпуклым, то две минимальные параметрические сети Γ и Γ' соединяет отрезок, целиком состоящий из минимальных параметрических сетей. Этот отрезок представляет собой линейную деформацию $\Gamma(t)$ сети $\Gamma = \Gamma(0)$ в $\Gamma' = \Gamma(1)$. Предположим, что у сети Γ' ребро e_1' не параллельно соответствующему ребру e_1 сети Γ. Тогда, согласно лемме 3.37, ребро e_1' будет не параллельно соответствующему ребру e_1 сети Γ и для любой сети $\Gamma(t)$ при $t > 0$. Таким образом, для достаточно малого $t > 0$ подвижной вершине v минимальной параметрической сети $\Gamma(t)$ инциденты два неособых невырожденных ребра e_1 и e и одно невырожденное ребро e_2. Такой локальной структуры у минимальной параметрической сети, согласно лемме 3.36 не бывает. Следовательно, ребро e_1' сети Γ' параллельно соответствующему ребру e_1 сети Γ. Аналогичная ситуация и с ребром e_2'.

2) Поскольку множество $\min_\ell[G]$ в пространстве $[G]$ является выпуклым, то две минимальные параметрические сети Γ и Γ' соединяет отрезок, целиком состоящий из минимальных параметрических сетей. Этот отрезок представляет собой линейную деформацию $\Gamma(t)$ сети $\Gamma = \Gamma(0)$ в $\Gamma' = \Gamma(1)$. Предположим, что у сети Γ' положения вершин v и w не совпадают, или, другими словами, ребро (v, w) невырождено. Тогда, ребро (v, w) будет невырожденным и для любой сети $\Gamma(t)$ при $t > 0$. Таким образом, для достаточно малого $t > 0$ подвижной вершине v минимальной параметрической сети $\Gamma(t)$ инциденты два неособых невырожденных ребра с противоположными субградиентами и одно невырожденное ребро. Такой локальной структуры у минимальной параметрической сети, согласно лемме 3.36 не бывает. Следовательно, $\Gamma'(v) = \Gamma'(w) = A$.

3)–5) Эти пункты доказываются рассуждениями, аналогичными пунктам 1) и 2).

6) Тот факт, что подвижная вершина v лежит на прямой l, следует из пункта 1). Подвижная вершина v не может лежать вне отрезка прямой l, ограниченном точкой A_1 и прямой, проходящей через точку A_2 и перпендикулярной прямой l, поскольку это противоречило бы лемме 3.36 о локальной структуре минимальных параметрических сетей в окрестности подвижной вершины v. $\square$

Закончим доказательство предложения 3.13. Обозначим через v подвижную вершину минимальной параметрической сети Γ, которой инцидентны два внутренних ребра и одно граничное; а через w_1 и w_2 — остальные подвижные вершины. Будем последовательно разбирать варианты локальной структуры сети Γ в подвижной вершине v из следствия 3.4, дополненные вариантами локальной структуры сети Γ в подвижных вершинах w_1 и w_2. Напомним, что мы рассматриваем границы $\mathcal{A}$ общего положения, поэтому некоторые сочетания локальных структур будут автоматически исключаться из рассмотрения.

1. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.1). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен одним из шести способов, изображенных на рис. 3.19.

Заметим, что без ограничения общности можно рассматривать только первые два фрагмента (слева). В самом деле, если у минимальной параметрической сети Γ рассматриваемый фрагмент со второго по шестой, то малым шевелением подвижных вершин v и w_1 сеть Γ может

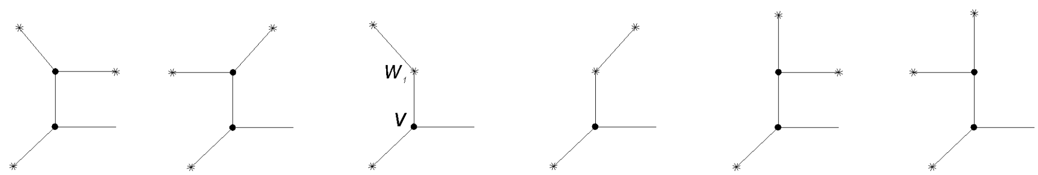


Рис. 3.19:

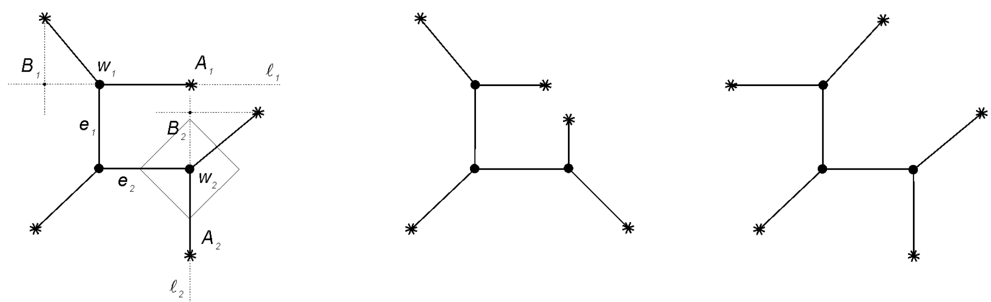


Рис. 3.20:

быть переведена в минимальную параметрическую сеть Γ', у которой соответствующий фрагмент первый или второй. Например, для третьего фрагмента достаточно мало сдвинуть влево по горизонтали подвижные вершины v и w_1.

Таким образом, сеть Γ может быть устроена одним из трех способов, изображенных на рис. 3.20.

Согласно утверждению 6) леммы 3.38, подвижные вершины w_1 и w_2 должны принадлежать отрезкам $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ соответственно. Согласно же утверждению 1) леммы 3.38, ребра e_1 и e_2 должны быть перпендикулярны отрезкам $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ соответственно. Поэтому для того, чтобы существовала сеть Γ_1 с вырожденным ребром e_1 необходимо, чтобы отрезок $[A_2, B_2]$ пересекался с прямой l_1. Аналогично, для существования сети Γ_2 с вырожденным ребром e_2 необходимо, чтобы отрезок $[A_1, B_1]$ пересекался с прямой l_2. Следовательно, отрезки $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ пересекаются. Из рис. 3.20 видно, что, поместив все три подвижные вершины v, w_1 и w_2 в точку пересечения этих отрезков мы получим минимальную параметрическую сеть Γ_0 типа звезда. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой первого типа

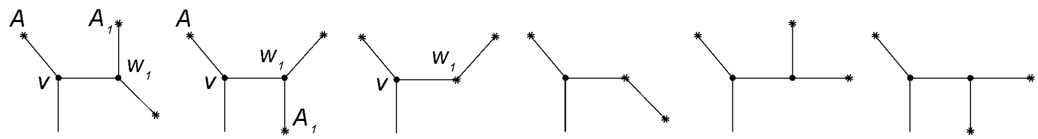


Рис. 3.21:

предложение 3.13 доказано.

2. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.2). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен одним из шести способов, изображенных на рис. 3.21.

Заметим, что без ограничения общности можно рассматривать только первые два фрагмента (слева). В самом деле, если у минимальной параметрической сети Γ рассматриваемый фрагмент со второго по шестой, то малым шевелением подвижных вершин v и w_1 сеть Γ может быть переведена в минимальную параметрическую сеть Γ', у которой соответствующий фрагмент первый или второй. Например, для третьего фрагмента достаточно мало сдвинуть вверх по вертикали подвижные вершины v и w_1.

Согласно утверждению 1) леммы 3.38, подвижные вершины v и w_1 должны лежать на вертикальных (в данном случае) прямых, проходящих через граничные точки A и A_1 соответственно, см. рис. 3.21. Следовательно, ребро $e_1 = (v, w_1)$ не может быть вырожденным. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой, изображенной на рис. 3.18 II.2), не существует сети Γ_1, и условия предложения 3.13 не выполняются.

3. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.3). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен одним из шести способов, изображенных на рис. 3.22.

Согласно утверждениям 1), 3) и 4) леммы 3.38, подвижные вершины v и w_1 должны лежать на вертикальных (в данном случае) прямых, проходящих через граничные точки A и A_1 соответственно, см. рис. 3.22. Следовательно, ребро $e_1 = (v, w_1)$ не может быть вырожденным. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой, изображенной на рис. 3.18 II.3), не существует сети Γ_1, и условия пред-

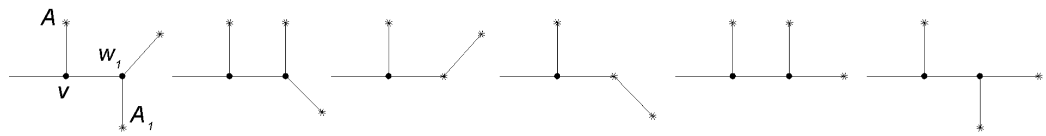


Рис. 3.22:

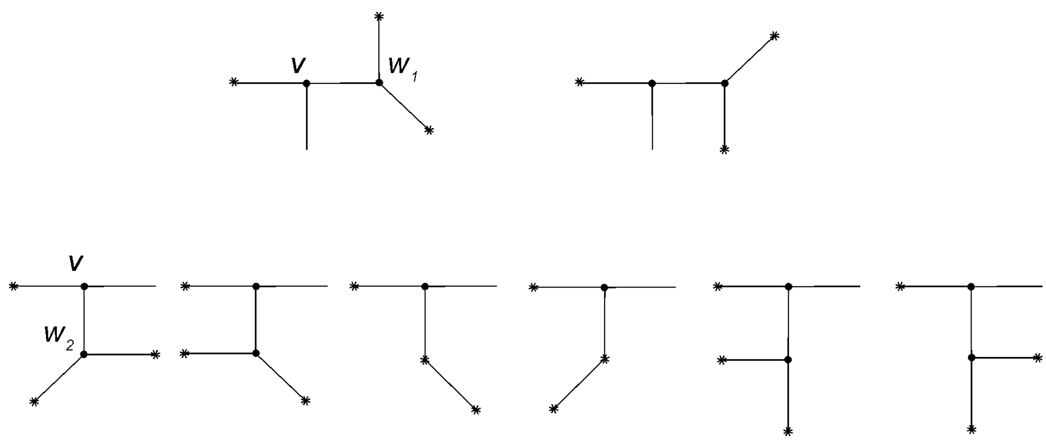


Рис. 3.23:

ложения 3.13 не выполняются.

4. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.4). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен двумя способами, изображенными в верхней половине рис. 3.23; а фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_2 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен одним из шести способов, изображенных в нижней половине рис. 3.23.

Таким образом, сеть Γ может быть устроена одним из двенадцати способов, изображенных на рис. 3.24.

Заметим, что все эти двенадцать типов сети Γ малым шевелением подвижных вершин могут быть сведены к трем уже рассмотренным типам, изображенным на рис. 3.20.

5. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.5). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен

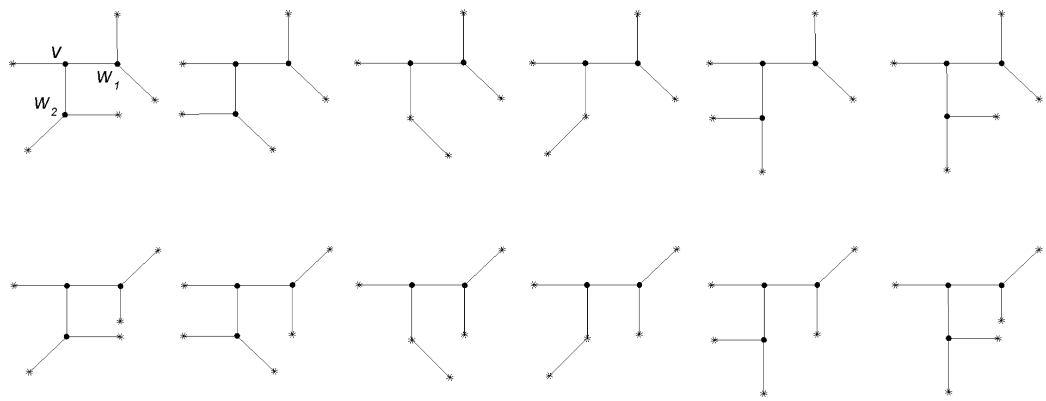


Рис. 3.24:

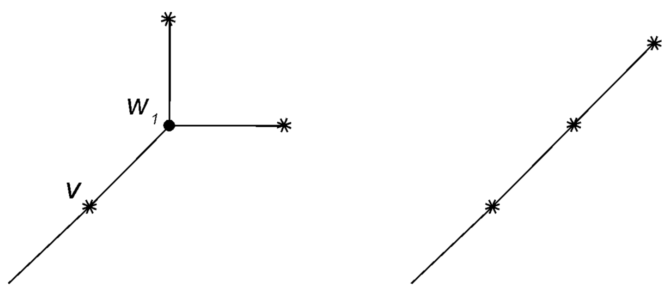


Рис. 3.25:

двумя способами, изображенными на рис. 3.25.

Согласно утверждениям 1) и 2) леммы 3.38, подвижные вершины v и w_1 не могут перемещаться. Следовательно, ребро $e_1 = (v, w_1)$ не может быть вырожденным. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой, изображенной на рис. 3.18 II.5), не существует сети Γ_1, и условия предложения 3.13 не выполняются.

6. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.6). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен двумя способами, изображенными на рис. 3.26.

Согласно утверждениям 1) и 5), подвижные вершины v и w_1 должны лежать на вертикальных (в данном случае) прямых, проходящих через граничные точки A и A_1 соответственно, см. рис. 3.26. Следовательно,

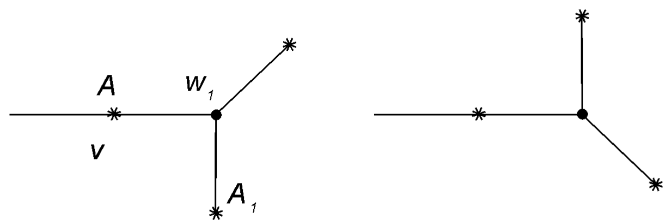


Рис. 3.26:

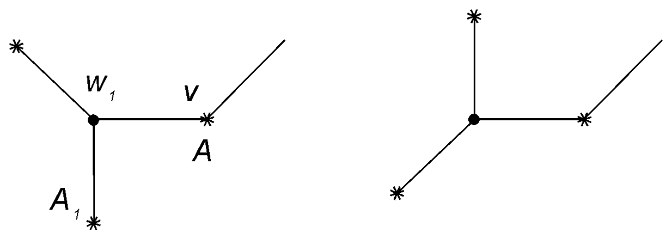


Рис. 3.27:

ребро $e_1 = (v, w_1)$ не может быть вырожденным. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой, изображенной на рис. 3.18 II.6), не существует сети Γ_1, и условия предложения 3.13 не выполняются.

7. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.7). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен двумя способами, изображенными на рис. 3.27.

Согласно утверждениям 1) и 3), подвижные вершины v и w_1 должны лежать на вертикальных (в данном случае) прямых, проходящих через граничные точки A и A_1 соответственно, см. рис. 3.27. Следовательно, ребро $e_1 = (v, w_1)$ не может быть вырожденным. Таким образом, для сети Γ, обладающей в вершине v локальной структурой, изображенной на рис. 3.18 II.7), не существует сети Γ_1, и условия предложения 3.13 не выполняются.

8. Пусть в вершине v сеть Γ имеет локальную структуру, изображенную на рис. 3.18 II.8). Тогда фрагмент сети Γ, включающий подвижные вершины v и w_1 (или w_2) вместе с инцидентными им ребрами, может быть устроен двумя способами, изображенными на рис. 3.28.

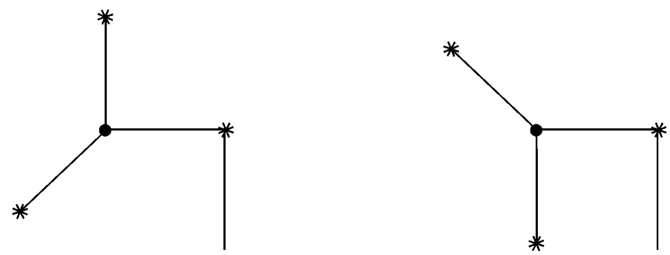


Рис. 3.28:

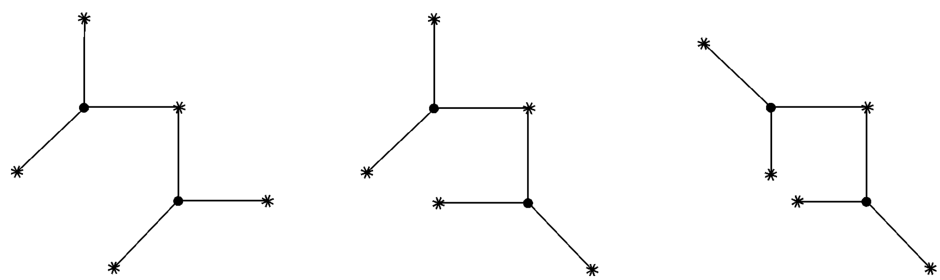


Рис. 3.29:

Таким образом, сеть Γ может быть устроена одним из трех способов, изображенных на рис. 3.29.

Заметим, что все эти три типа сети Γ малым шевелением подвижных вершин могут быть сведены к трем уже рассмотренным типам, изображенным на рис. 3.20.

Предложение 3.13 полностью доказано. □

5.7 Оценки количества локальных минимумов для случаев 3, 4 и 5 граничных точек

Случай трех граничных точек

В случае 3 граничных точек имеется только одно критическое множество $C(G_0)$, канонический представитель Γ_0 которого имеет тип звезды. Минимальная параметрическая сеть Γ_0 не расщепляется, поэтому множество $C(G_0)$ является комбинаторным локальным минимумом, а значит, в силу леммы 3.27, и локальным минимумом в традиционном смысле. Таким образом, в случае 3 граничных точек у функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ имеется ровно один локальный минимум.

Случай четырех граничных точек

В случае 4 граничных точек имеется два набора C_0 и C_1 критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга ноль и один соответственно.

Набор C_0 состоит из одного критического множества $C(G_0)$, канонический представитель Γ_0 которого имеет ранг 0, т.е. тип сети Γ_0 — звезда. Отметим, что критическое множество $C(G_0)$ не является локальным минимумом, поскольку, согласно предложению 3.10, сеть Γ_0 обладает геометрическими расщеплениями.

Набор C_1 состоит из нескольких критических подмножеств $C(G_\alpha)$, канонические представители которых имеют ранг 1. Сети ранга 1, т.е. бинарные деревья, не имеют расщеплений, поэтому все множества $C(G_\alpha)$ из набора C_1 являются локальными минимумами.

Поскольку для случая 4 граничных точек функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса, то мы можем воспользоваться основной формулой из теоремы 2.2, которая позволяет выразить мощность набора C_1 следующим образом

$$|C_1| = \#PS_1(\Gamma_0).$$

Согласно предложению 3.10, $\#PS_1(\Gamma)$ равно либо 1, либо 2.

Таким образом, получаем утверждение

Утверждение 3.13 *Пусть $\mathcal{A}$ — граничное множество общего положения, состоящее из 4 точек на манхэттенской плоскости. Тогда все канонические представители локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ являются бинарными деревьями и количество этих локальных минимумов равно либо* 1*, либо* 2.

Случай пяти граничных точек

В случае 5 граничных точек имеется три набора C_0, C_1 и C_2 критических множеств $C(G_\alpha)$ ранга ноль, один и два соответственно.

Набор C_0 состоит из одного критического множества $C(G_0)$, канонический представитель Γ_0 которого имеет ранг 0, т.е. тип сети Γ_0 — звезда.

Отметим, что критическое множество $C(G_0)$ не является локальным минимумом, поскольку, согласно предложению 3.11, сеть Γ_0 обладает геометрическими расщеплениями.

Лемма 3.39 *Все мощные расщепления сети* Γ_0 *элементарно порождены.*

Доказательство. У сети Γ_0 есть расщепления только двух рангов: 1 и 2. Мощные расщепления ранга один $PS_1(\Gamma_0)$ всегда являются элементарными.

Покажем теперь, что мощные расщепления ранга 2 элементарно порождены. Пусть Γ' — мощное расщепление ранга 2, а Γ_1 и Γ_2 — сети ранга 1, образующие полный набор производных расщеплений для расщепления Γ'. Из леммы 3.30 вытекает, что субградиенты $s_1,\ldots,\, s_5$ граничных ребер $e_1,\ldots,\, e_5$ сети Γ_0 определяются однозначно. Следовательно, определяются однозначно и субградиенты граничных ребер сетей Γ_1, Γ_2 и Γ'. Они также равны $s_1,\ldots,\, s_5$. По субградиентам граничных ребер однозначно определяются субградиенты внутренних ребер сетей Γ_1, Γ_2 и Γ'. Поэтому, если элементарные расщепления Γ_1 и Γ_2 не могут уменьшить длину сети Γ (т.е. они являются минимальными параметрическими сетями), то расщепление Γ' также не может уменьшить длину сети Γ, что противоречит исходному предположению. Следовательно, одно из расщеплений Γ_1 или Γ_2 является геометрическим. □

Набор C_1 состоит из нескольких критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга 1. Отметим, что критические множества $C(G_\alpha)$ не являются локальными минимумами, поскольку, согласно предложению 3.12, их канонические представители Γ_α обладают геометрическими расщеплениями.

Набор C_2 состоит из нескольких критических подмножеств $C(G_\alpha)$ ранга 2. Сети ранга 2, т.е. бинарные деревья, не имеют расщеплений, поэтому все множества $C(G_\alpha)$ из набора C_2 являются локальными минимумами.

Поскольку для случая 5 граничных точек функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ является комбинаторной функцией Морса и все мощные геометрические расщепления минимальных параметрических сетей элементарно порождены, то мы можем воспользоваться основной формулой из теоремы 2.2, которая позволяет выразить мощности наборов C_1 и C_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} |C_1| &= \#PS_1(\Gamma_0), \\ |C_2| &= \sum_{C(G_\alpha)\in C_1} \#PS_2(\Gamma_\alpha) - \#PS_2(\Gamma_0). \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими двумя равенствами и предложением 3.12, согласно которому $\#PS_2(\Gamma_\alpha) \leq 2$, получим неравенство:

$$|C_2| \leq 2|C_1| - \#PS_2(\Gamma_0) = 2\#PS_1(\Gamma_0) - \#PS_2(\Gamma_0).$$

Осталось применить предложение 3.11, которое нам дает оценку $|C_2| \leq 6$.

Резюмируя теперь результаты случаев 4 и 5 граничных точек, получаем следующую теорему

Теорема 3.3 *Пусть $\mathcal{H}$ — плоскость $\mathbb{R}^2$ с манхэттенской нормой,*

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ — граница общего положения, состоящая из четырех точек. Тогда все канонические представители локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ являются бинарными деревьями и количество этих локальных минимумов равно либо* 1, *либо* 2.

- *и $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ — граница общего положения, состоящая из пяти точек. Тогда все канонические представители локальных минимумов функции ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ являются бинарными деревьями и количество этих локальных минимумов не превосходит* 6.

5.8 Некоторые примеры для случая 6 граничных точек

На рис. 3.30 приведен пример минимальной параметрической сети $\Gamma[G]$, затягивающей границу общего положения из 6 точек. В соответствующем множестве $\min_\ell[G]$ существует минимальная параметрическая сеть Γ_1 с вырожденным ребром e_1, и существует минимальная параметрическая сеть Γ_2 с вырожденным ребром e_2, но не существует минимальной параметрической сети Γ_0 с обоими вырожденными ребрами.

Этот пример показывает, что для 6 граничных точек общего положения предложение 3.13 не верно, и функция ℓ на пространстве $\mathcal{T}$ не является комбинаторной функцией Морса.

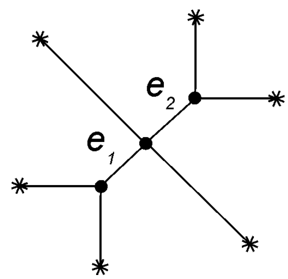


Рис. 3.30:

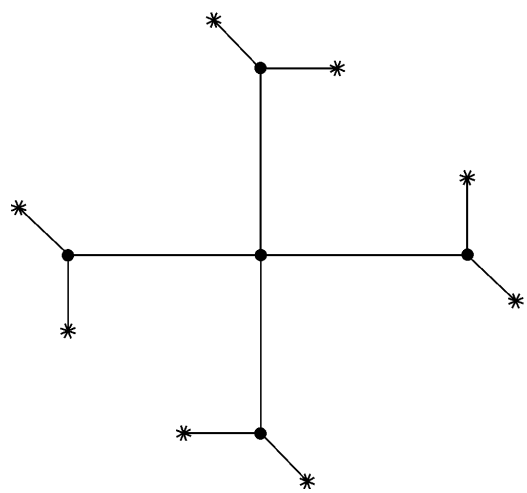


Рис. 3.31:

На рис. 3.31 приведен пример еще одной минимальной параметрической сети $\Gamma'[G']$, затягивающей границу общего положения из 6 точек. В соответствующем множестве $\min_\ell[G']$ сеть Γ' является каноническим представителем и не обладает геометрическими расщеплениями. Следовательно, критическое множество $\min_\ell[G']$ является локальным минимумом.

Таким образом, для 6 граничных точек имеются локальные минимумы, канонический представитель которых не является бинарным деревом.

Литература

[1] *Александров П. С.*, Комбинаторная топология. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

[2] *Горески М., Макферсон Р.*, Стратифицированная теория Морса. — М.: Мир, 1991.

[3] *Громол Д., Мейер В., Клингенберг В.*, Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1975

[4] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.*, Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

[5] *Иванов А. О.* Геометрические свойства локально минимальных сетей. — Дис.... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1998.

[6] *Иванов А. О., Тужилин А. А.*, Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. — Lewiston: The Edwin Mellen Press, 1999.

[7] *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато. — УМН, 1992, т. 47, N2, сс. 53–115.

[8] *Иванов А. О., Тужилин А. А.*, Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей. — Изв. РАН., Сер. Матем., 1997, т. 61, N6, сс. 119–152.

[9] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. Под ред. К. А. Рыбникова — М.: Наука, 1982.

[10] *Милнор Дж.*, Теория Морса. — М.: Мир, 1965.

[11] *Михайлевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.*, Оптимизационные задачи в индустриальном планировании: модели, методы, алгоритмы. — М.: Наука, 1986.

[12] *Мусин О. Р.*, О некоторых задачах вычислительной геометрии и топологии. — Сборник ВоронежГУ “Алгебраические вопросы анализа и топологии.”, 1990, сс. 30–51.

[13] *Понтрягин Л. С.*, Основы комбинаторной топологии. — М.: Наука, 1986.

[14] *Препарата Ф., Шеймос М.*, Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989.

[15] *Пронин М. В.*, Локально минимальные сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны. — Вестник МГУ, Серия 1, Математика и механика, 1998, N5, сс. 12–16.

[16] *Скляренко Е. Г.*, Гомологии и когомологии общих пространств. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 50, сс. 129-266, М.: ВИНИТИ, 1989.

[17] *Тужилин А. А.* Классификация локально минимальных плоских сетей с выпуклыми границами. — Дис.. . . доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1997.

[18] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. — М.: Мир, 1967.

[19] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.*, Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

[20] *Харари Ф., Палмер Э.*, Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.

[21] *Cieslik D.*, The Steiner Ratio of Metric Spaces. — Greifswald, preprint of Inst. of Math. and C.S., Ernst–Moritz–Arndt Univ., Greifswald, Germany, 1998.

[22] *Du D. Z., Hwang F. K. and Chao S. C.*, Steiner minimal trees for points on a circle. — Proc. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 95, N4, pp. 613–618.

[23] *Du D. Z., Hwang F. K. and Weng J. F.*, Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines. — Trans. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 278, N1, pp. 149–156.

[24] *Du D. Z., Hwang F. K. and Weng J. F.*, Steiner minimal trees for Regular Polygons. — Disc. and Comp. Geometry, 1987, vol. 2, pp. 65–84.

[25] *Eggleston H. G.*, Convexity. — Cambridge Tracts in Math. and Math. Ph., N47, 1992.

[26] *Garey M. R., Graham R. L. and Johnson D. S.*, Some NP-complete geometric problems. — Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., 1976, pp. 10–22.

[27] *Hwang F. K.*, A linear time algorithm for full Steiner trees. — Oper. Res. Letter, 1986, vol. 5, pp. 235–237.

[28] *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.*, Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations. — Boca Raton: CRC Press, 1994.

[29] *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.*, Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems. — Singapore: World Scientific, 2001.

[30] *Jung H. W. E.*, Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. — J. reine u. ange Math., 1901, vol. 123, pp. 241–257.

[31] *Kruskal J. B.*, On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 7, pp. 48–50.

[32] *Melzak Z. A.*, On the problem of Steiner. — Canad. Math. Bull., 1960, vol. 4, pp. 143–148.

[33] *Prüfer H.*, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, — Arch. Math. Phys., 1918, vol. 27, 742–744.

[34] *Rubinstein J. H., Thomas D. A.*, Graham's problem on shortest networks for points on a circle, — Algorithmica.

[35] *Shamos M. I.*, Computational Geometry. — Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978.

[36] *Thomas D. A., Rubinstein J. H., Cole T.*, The Steiner minimal network for convex configuration, — The Univ. of Melbourne, Depart. of Math., Research report, 1991, Preprint N15.

Список работ автора по теме диссертации

[37] *Карпунин Г. А.*, Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера. — Матем. сборник, 2000, т. 191, N5, сс. 64–90.

[38] *Карпунин Г. А.*, Минимальные сети на правильном n-мерном симплексе. — Матем. заметки, 2001, т. 69, N6, сс. 854–865.

[39] *Карпунин Г. А.*, Аналог теории Морса для плоских линейных сетей. — Дополнение 2 в [6], сс. 388–407.

[40] *Карпунин Г. А.*, Универсальные граничные множества в обобщенной проблеме Штейнера. — Записки научных семинаров ПОМИ. Геометрия и топология 6, т. 279, С.-П.: Изд-во ПОМИ, 2001, сс. 168–182.

[41] *Карпунин Г. А.*, Минимальные сети на правильном d-мерном симплексе. — Материалы VII международного семинара "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, 2001). Часть II, М.: Изд-во центра прикл. иссл. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001, сс. 261–263.

[42] *Karpunin G. A.*, Morse Theory for Planar Linear Networks. — Section 5.5 in [29], pp. 232–252.

[43] *Karpunin G. A.*, Combinatorial Morse Theory and Minimal Networks. — Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения И.Г.Петровского (XX сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского): Тезисы докладов, М.: Изд-во МГУ, 2001, сс. 183–184.