

Содержание

Введение	3
1 Гладкие инварианты в случае двух степеней свободы	17
1.1 Фокусные особенности интегрируемых систем с двумя степенями свободы	17
1.1.1 Нормальная форма	17
1.1.2 Локальная топология слоения	18
1.1.3 Единственность канонических интегралов и группа локальных автоморфизмов	19
1.1.4 Топология особого слоя и полулокальная топологическая классификация	22
1.1.5 Точность симплектической формы в окрестности особого слоя	23
1.1.6 Совпадение функций f_2 для всех особых точек на слое	25
1.1.7 Согласование знаков канонических интегралов	26
1.2 Гладкая классификация в случае двух степеней свободы	26
1.2.1 Гладкие особенности типа фокус-фокус	26
1.2.2 Случай одной особой точки на слое	29
1.2.3 Случай двух особых точек на слое	32
1.2.4 Полный C^1 -инвариант фокусной особенности сложности два	39
1.2.5 Теорема реализации	44
1.2.6 Случай нескольких особых точек на слое	46
2 Топологическая классификация в многомерном случае	49
2.1 Дальнейшие свойства фокусных особенностей с двумя степенями свободы	49
2.1.1 Описание группы автоморфизмов	49
2.1.2 Всякая фокусная особенность Aut -эквивариантно по-слойно гомеоморфна модельной	51
2.1.3 Сингулярная переменная «угол» на фокусной особенности	53
2.2 Топологическая классификация нерасщепляемых многомерных фокусных особенностей	54
2.2.1 Правильные кубические разбиения тора	54
2.2.2 Классификация фокусных особенностей	56
2.2.3 Модель почти прямого произведения	61
2.2.4 Подсчет числа особенностей	61
2.2.5 Особенности сложности два в случае четырех степеней свободы	63
2.2.6 Классификация почти торических особенностей	64
2.3 Расщепляемые особенности	64
2.3.1 Действие тора	65
2.3.2 Конструкция	66

2.3.3	Особенности ненулевого ранга	69
3	Топологические свойства многомерных фокусных особенностей	71
3.1	Монодромия	71
3.1.1	Матрица разложения базисных циклов	71
3.1.2	Монодромия	72
3.2	Устойчивость	75
3.2.1	L -тип	75
3.2.2	Неприводимые особенности	76
3.2.3	Устойчивость неприводимых особенностей	77
4	Гладкие инварианты многомерных особенностей	78
4.1	Гладкая эквивалентность неприводимых особенностей	78
4.2	Препятствие к разложению в гладкое почти прямое произведение	80
4.3	C^1 -классификация	82

Введение

Напомним, что гладкое многообразие M^{2n} называется симплектическим, если на нем задана замкнутая невырожденная 2-форма ω — симплектическая структура. Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии M^{2n} . Векторное поле

$$\text{sgrad } H = \omega^{-1}dH$$

называется косым градиентом функции H . Соответствующая динамическая система называется гамильтоновой, H — ее гамильтонианом. Число n называется числом степеней свободы гамильтоновой системы.

Симплектическая форма определяет еще одну структуру на M — скобку Пуассона, бинарную операцию на пространстве гладких функций, задаваемую формулой

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g).$$

Утверждение 1.

1. Скобка Пуассона задает на $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли.
2. Отображение $\text{sgrad} : C^\infty(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$ является гомоморфизмом алгебр Ли, что означает, что

$$\text{sgrad } \{f, g\} = [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g].$$

Доказательство см., например, в [1, 4].

Далее, имеет место очевидная формула

$$\{f, H\} = \frac{df}{dt},$$

где d/dt — производная вдоль векторного поля $\text{sgrad } H$. Таким образом, f является интегралом $\text{sgrad } H$ тогда и только тогда, когда скобка Пуассона f и H равна нулю (в таком случае говорят, что f и H коммутируют, или находятся в инволюции). В частности, гамильтониан H всегда является интегралом $\text{sgrad } H$ — «закон сохранения энергии».

Более подробное обсуждение понятий симплектического многообразия, гамильтоновой системы и скобки Пуассона можно найти в книгах [1, 4].

Определение 1. Предположим, что гамильтонова система $\text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии M^{2n} обладает n интегралами f_1, \dots, f_n , причем

1. $\{f_i, f_j\} = 0$, то есть интегралы находятся в инволюции.
2. f_1, \dots, f_n функционально независимы почти всюду.
3. Векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны, что означает, что их траектории могут быть продолжены на неограниченное время.

В этом случае говорят, что система вполне интегрируема по Лиувиллю (или просто интегрируема). Кроме того,

1. Слоение M^{2n} на связные компоненты множеств вида $\{f_1 = c_1, \dots, f_n = c_n\}$ называется слоением Лиувилля.
2. Отображение $F: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ называется отображением момента.
3. Слой лиувиллева слоения называется неособым, если на нем нет ни одной особой точки отображения момента. Остальные слои называются особыми.
4. Действие \mathbb{R}^n на M^{2n} , порожденное фазовыми потоками $\text{sgrad } f_i$, называется пуассоновым действием. Это действие определено корректно, поскольку $[\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j] = \text{sgrad } \{f_i, f_j\} = 0$.

Теорема 1 (Арнольд-Лиувилль, см. [1, 4]). *Предположим, что гамильтонова система $\text{sgrad } H$ интегрируема. Тогда*

1. *Каждый слой слоения Лиувилля есть интегральная поверхность системы.*
2. *Каждый неособый слой есть подмногообразие вида $T^r \times D^{n-r}$. Ограничение симплектической формы на каждое такое подмногообразие равно нулю (в таком случае говорят, что подмногообразие является лагранжесвым).*
3. *Все компактные неособые слои являются торами. Слоение Лиувилля в окрестности такого тора тривиально.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что все слои слоения Лиувилля компактны (если не оговорено противное).

Таким образом, фазовое пространство интегрируемой гамильтоновой системы расслоено на инвариантные поверхности, почти все из которых являются торами. Если мы хотим понять качественную картину динамики системы, нужно изучить топологию этого слоения. Поскольку в окрестности неособого слоя все слоения Лиувилля устроены одинаково (тривиальное слоение на торы), топология определяется, главным образом, особенностями. Именно особенности и являются предметом настоящей работы.

На рисунке 4 изображено слоения Лиувилля системы с одной степенью свободы на торе. Гамильтонианом служит функция высоты. Видно, что именно особые слои, не являющиеся торами (то есть, в

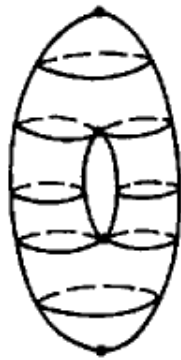


Рис. 1: Слоение Лиувилля на торе

данном случае, окружностями), определяют глобальную структуру слоения.

Теория качественного исследования интегрируемых гамильтоновых систем на основе исследования множества их особенностей была создана в работах А. Т. Фоменко [13, 14, 15], М. П. Харламова [16], а также Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [21]. Значительный вклад в развитие этой теории внесли (в алфавитном порядке) А. В. Болсинов (см. [2, 17, 3]), В. С. Матвеев (см. [7]), С. В. Матвеев (см. [2]), Нгуен Тьен Зунг (см. [25, 24, 27]), А. А. Ошемков (см. [8, 9, 10]).

Слоения Лиувилля можно изучать:

1. Локально, то есть в окрестности особой точки.
2. Полулокально, то есть в окрестности особого слоя.
3. На инвариантном подмногообразии, например, на поверхности постоянной энергии.
4. Глобально.

Если мы ставим себе задачу классификации слоений Лиувилля (в одном из указанных выше смыслов), то нужно также зафиксировать отношение эквивалентности. В зависимости от этого отношения классификация бывает:

1. Топологическая, или лиувиллева — классификация с точностью до послойного гомеоморфизма.
2. Гладкая — классификация с точностью до послойного диффеоморфизма.
3. Симплектическая — классификация с точностью до послойного симплектоморфизма.

Настоящая работа, в основном, посвящена задаче полулокальной топологической и гладкой классификации, а также описанию топологии слоения в окрестности особого слоя.

Понятно, что описать всевозможные особенности слоений Лиувилля в разумных терминах нельзя, как нельзя описать всевозможные особенности гладких функций. Следовательно, нужно ограничиться некоторым классом наиболее простых особенностей. Сейчас мы этот класс определим.

Пусть x — особая точка отображения момента ранга r . Пусть $L \subset T_x M^{2n}$ — касательное пространство к орбите пуассонова действия, проходящей через точку x . Поскольку L порождается векторами $\text{sgrad } f_i$, ограничение симплектической формы ω на L равно нулю. Следовательно, можно рассмотреть ω на пространстве L^\perp/L , где L^\perp — косоортогональное дополнение к L . Легко видеть, что эта форма невырождена.

Заметим теперь, что стабилизатор точки x при пуассоновом действии естественно симплектически действует на $T_x M$. Поскольку это действие сохраняет L , определен гомоморфизм

$$\text{St } x \rightarrow \text{Sp}(L^\perp/L).$$

Образом соответствующего гомоморфизма касательных алгебр является некоторая коммутативная подалгебра в $\mathfrak{sp}(L^\perp/L) \simeq \mathfrak{sp}(2(n-r), \mathbb{R})$.

Определение 2. Будем называть особую точку x невырожденной, если описанная подалгебра в $\mathfrak{sp}(2(n-r), \mathbb{R})$ является подалгеброй Картана.

Определим теперь, что такое тип невырожденной особой точки.

Пусть x — невырожденная особая точка ранга k , а \mathfrak{h} — соответствующая подалгебра Картана в $\mathfrak{sp}(2(n-r), \mathbb{R})$. Рассмотрим регулярный элемент $a \in \mathfrak{h}$. Поскольку $a \in \mathfrak{sp}$, спектр этого оператора имеет вид:

1. k_e пар вида $\pm \nu i$, где ν — ненулевое вещественное число.
2. k_h пар вида $\pm \lambda$, где λ — ненулевое вещественное число.
3. k_f четверок вида $\pm \lambda \pm \nu i$, где λ, ν — ненулевые вещественные числа.

При этом $k_e + k_h + 2k_f = n - r$.

Как легко видеть, числа k_e, k_h, k_f не зависят от выбора регулярного элемента $a \in \mathfrak{h}$.

Определение 3 (см. [31]). Определенная описанным выше образом тройка (k_e, k_h, k_f) называется типом особой точки.

1. Точки типа $(1, 0, 0)$ называются эллиптическими, или особыми точками типа центр.
2. Точки типа $(0, 1, 0)$ называются гиперболическими, или особыми точками типа седло.
3. Точки типа $(0, 0, 1)$ называются особыми точками типа фокус-фокус.

Точки других типов имеют составные названия. Например, точку типа $(1, 1, 0)$ следует называть точкой типа седло-центр.

Оказывается, что знания типа и ранга достаточно, чтобы полностью описать слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки. Определим следующие четыре слоения.

1. В окрестности нуля в \mathbb{R}^2 с симплектической структурой $dp \wedge dq$ рассмотрим слоение, заданное функцией $p^2 + q^2$. Обозначим это слоение L_{ell} .
2. В окрестности нуля в \mathbb{R}^2 с симплектической структурой $dp \wedge dq$ рассмотрим слоение, заданное функцией pq . Обозначим это слоение L_{hyp} .
3. В окрестности нуля в \mathbb{R}^4 с симплектической структурой $dp \wedge dq$ рассмотрим слоение, заданное коммутирующими функциями $p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - q_1p_2$. Обозначим это слоение L_{foc} .
4. В окрестности нуля в \mathbb{R}^2 с симплектической структурой $dp \wedge dq$ рассмотрим слоение, заданное функцией p . Обозначим это слоение L_{reg} .

Теорема 2 (Вэй–Элиассон, [29, 20], в полном объеме доказана в [23]). *Всякое слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки типа (k_e, k_h, k_f) и ранга r локально симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения L_{ell} , k_h экземпляров слоения L_{hyp} , k_f экземпляров слоения L_{foc} и r экземпляров слоения L_{reg} .*

Таким образом, всякая невырожденная особенность локально распадается в прямое произведение простейших особенностей — эллиптической, гиперболической и типа фокус-фокус, а так же слоения без особенности.

Как легко видеть, тип невырожденной особой точки является не только симплектическим, но и топологическим инвариантом слоения Лиувилля (топология в окрестности точек различных типов существенно различна). Следовательно, теорема Элиассона полностью решает задачу локальной топологической, гладкой и симплектической классификации слоений Лиувилля с невырожденными особенностями.

Рассмотрим теперь задачу полулокальной классификации. Поскольку в дальнейшем речь пойдет только о такой классификации, вместо слов «слоение Лиувилля в окрестности особого слоя» мы обычно будем говорить просто «особенность». Более точно, под особенностью следует понимать росток слоения Лиувилля на особом слое.

Обсудим сначала классификацию простейших особенностей.

1. Эллиптические особенности.

В случае эллиптической особенности особый слой совпадает с особой точкой, следовательно, полулокальная классификация совпадает с локальной.

2. Гиперболические особенности.

- Топологическая классификация.

Теория полулокальной топологической классификации гиперболических особенностей — это теория так называемых атомов (см. [2, 11, 4]).

- Гладкая классификация.

Можно показать, что гладкая полулокальная классификация гиперболических особенностей совпадает с топологической.

- Симплектическая классификация.

См. работу [19].

3. Особенности типа фокус-фокус.

- Топологическая классификация.

См. работы [7, 25].

- Гладкая классификация.

Задача гладкой полулокальной классификации фокусных особенностей решается в настоящей работе.

- Симплектическая классификация.
См. работу [30].

Оказывается, что полулокальная топологическая классификация произвольных невырожденных особенностей в некотором смысле сводится к классификации перечисленных выше простейших особенностей. Более точно, это верно для так называемых нерасщепляемых особенностей, которые мы сейчас определим.

Определение 4. Невырожденная особенность слоения Лиувилля называется нерасщепляемой, если множество особых значений отображения момента, ограниченного на окрестность особого слоя, совпадает с множеством особых значений отображения момента, ограниченного на окрестность любой особой точки минимального ранга на этом слое.

Из условия нерасщепляемости в частности вытекает, что все особые точки минимального ранга на слое должны иметь один и тот же тип (см. [24]). Этот тип называется типом особенности.

Определим теперь «особенности типа почти прямого произведения». Для этого рассмотрим несколько экземпляров окрестностей особых слоев простейших особенностей — эллиптической, гиперболической и типа фокус-фокус. Добавим в этот список окрестность регулярного слоя слоения Лиувилля, то есть тор на диск. Перемножим их. На произведении естественным образом определена структура слоения Лиувилля. Полученная особенность $V_1 \times \dots \times V_k$ называется особенностью типа прямого произведения. Предположим теперь, что на ней свободно действует конечная группа G , причем

1. Действие покомпонентное.
2. На каждом прямом сомножителе действие симплектическое и тождественное на базе слоения Лиувилля.
3. На каждом эллиптическом сомножителе действие тривиально.

Факторпространство $V_1 \times \dots \times V_k/G$ является симплектическим многообразием с заданной на нем структурой слоения Лиувилля.

Определение 5. Особенности вида $V_1 \times \dots \times V_k/G$ называются особенностями типа почти прямого произведения.

Теорема 3 (Нгуен Тьен Зунг, [24]). *Всякая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости, послойно гомеоморфна особенностям типа почти прямого произведения в окрестности особого слоя.*

Заметим, что эта теорема хоть и даёт полный список возможных особенностей, задачу классификации решает не до конца, поскольку непонятно, какие особенности из списка эквивалентны друг другу, а какие нет. В случае чисто гиперболических особенностей ранга 0 задача классификации недавно решена в работе [12]. В настоящей работе эта задача решается, напротив,

для особенностей без гиперболических компонент (так называемых почти торических особенностей).

Нгуен Тьен Зунг предположил также, что разложение в почти прямое произведение имеет место и в гладкой категории, однако, как мы покажем, это неверно: гладкая классификация в общем случае устроена существенно сложнее.

Что касается симплектической классификации многомерных особенностей, навряд ли она может быть произведена в разумных терминах в общем случае. В случае особенностей сложности один, эта задача решена А.В. Болсиновым и Сан Ву Нгок'ом (этот результат еще не опубликован).

Изложим теперь вкратце результаты работы.

В главе 1 производится гладкая классификация особенностей ранга 0 типа $(0, 0, 1)$, то есть особенностей типа фокус-фокус. Известно, что полным топологическим инвариантом в этом случае является число особых точек на слое (сложность). Однако, как замечено в [4], в гладкой категории это уже не так, если число особых точек на слое больше единицы.

Для того, чтобы сформулировать критерий гладкой эквивалентности фокусных особенностей, нам понадобится определить понятие связывающего диффеоморфизма особенности. Ограничимся для простоты случаем двух особых точек на слое.

Пусть наша система задается двумя коммутирующими функциями H, f , а x_1, x_2 — две особые точки типа фокус-фокус на слое $\{H = 0, f = 0\}$.

В силу теоремы Элиассона в окрестности x_1 найдутся функции f_1, f_2 со следующими свойствами:

1. f_1, f_2 задают то же слоение, что и H, f .
2. В некоторой локальной системе координат существует представление

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 q_1 + p_2 q_2, \\ f_2 &= p_1 q_2 - q_1 p_2 \end{aligned}$$

В окрестности x_2 найдутся \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 с теми же свойствами. Как легко видеть, f_1, f_2 , также как и \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 , можно рассматривать как системы координат на базе слоения, и замена $\phi: (f_1, f_2) \rightarrow (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ невырождена.

Определение 6. Эту замену будем называть связывающим диффеоморфизмом особенности.

Определим теперь, что такое допустимый диффеоморфизм. Обозначим за F отображение $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, заданное двумя функциями

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 q_1 + p_2 q_2, \\ f_2 &= p_1 q_2 - q_1 p_2. \end{aligned}$$

Определение 7. Диффеоморфизм $d: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ называется допустимым, если в некоторой окрестности нуля существует диффеоморфизм $D: (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^4, 0) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^4, 0) \\
\downarrow F & & \downarrow F \\
(\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{d} & (\mathbb{R}^2, 0)
\end{array}$$

Теорема 4. *Две фокусные особенности сложности два со связывающими диффеоморфизмами ϕ_1, ϕ_2 послойно гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие допустимые диффеоморфизмы d_1, d_2 , что*

$$\phi_2 = d_1 \phi_1^{\pm 1} d_2^{-1}.$$

Для того, чтобы эта теорема была осмысленной и ее можно было применить, нужно описать, как устроена группа допустимых диффеоморфизмов (а то могло бы, например, оказаться, что все диффеоморфизмы допустимы, и тогда любые две фокусные особенности с двумя точками на слое гладко эквивалентны.)

Для описания группы допустимых диффеоморфизмов введем в \mathbb{R}^2 комплексную координату $z = f_1 + f_2 i$.

Теорема 5. *Диффеоморфизм d окрестности нуля в \mathbb{R}^2 допустим тогда и только тогда, когда он представим в одной из следующих форм:*

1. $d(z) = z\psi(z)$.
2. $d(z) = \bar{z}\psi(z)$.

Проверить для двух особенностей, удовлетворяют ли их связывающие диффеоморфизмы условию $\phi_2 = d_1 \phi_1^{\pm 1} d_2^{-1}$ — это не совсем тривиальная задача. Гораздо проще выяснить, являются ли две особенности C^1 -эквивалентными: в этом случае инвариант можно написать явно.

Введем, как и ранее, комплексную координату $z = f_1 + f_2 i$ и положим

$$\mu(F) = \frac{|\partial\phi/\partial\bar{z}|}{|\partial\phi/\partial z|},$$

где ϕ — связывающий диффеоморфизм F , записанный в координатах z, \bar{z} .

Теорема 6. *Две особенности типа фокус-фокус F_1, F_2 с двумя особыми точками на слое послойно C^1 -эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.*

Для вычисления $\mu(F)$ по этой формуле нужно знать связывающий диффеоморфизм особенности. Найти связывающий диффеоморфизм в явном виде непросто (эта процедура равносильна поиску переменных действия. Хорошо известно, что найти явные выражения для переменных действия сложно.) Укажем, как можно вычислить $\mu(F)$, зная лишь линеаризации $\text{sgrad } H$ в особых точках.

Пусть x — особая точка типа фокус-фокус. Собственные значения линеаризации $\text{sgrad } H$ в точке x имеют вид $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$.

Теорема 7. Пусть F — особенность типа фокус-фокус с двумя особыми точками x_1, x_2 . Тогда существует естественный способ выбрать собственное значение λ_1 линеаризации $\text{sgrad } H$ в точке x_1 и собственное значение λ_2 линеаризации $\text{sgrad } H$ в точке x_2 так, что

$$\mu(F) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1 + \lambda_2|}.$$

В разделе 1.2.5 показано, что любой диффеоморфизм вида

$$\begin{cases} \tilde{x} = f(x, y), \text{ где } f(0, 0) = 0 \\ \tilde{y} = y \end{cases}$$

может быть реализован в качестве связывающего диффеоморфизма какой-либо особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое. Если теперь взять $\tilde{x} = x + ay$, то

$$\mu(F) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + 4}},$$

и при разных a мы получаем особенности, неэквивалентные даже в классе C^1 . Следовательно, гладкие инварианты фокусных особенностей нетривиальны.

Аналогичные результаты для случая большего числа точек на слое приводятся в разделе 1.2.6.

Перейдем теперь к главе 2. В этой главе обсуждаются многомерные фокусные особенности, то есть особенности типа $(0, 0, k_f)$, а также почти торические особенности (см. [28]), то есть особенности типа $(k_e, 0, k_f)$. Оказывается, классификация последних легко сводится к фокусным ранга нуль.

Теорема 8. Любая нерасщепляемая почти торическая особенность ранга r типа $(k_e, 0, k_f)$ топологически эквивалентна прямому произведению особенности ранга 0 типа $(0, 0, k_f)$ (то есть чисто фокусной особенности), k_e экземпляров особенности ранга 0 типа $(1, 0, 0)$ (то есть эллиптической особенности) и слоения без особенности $T^r \times D^r$.

Поскольку эллиптическая особенность с точностью до послыйного гооморфизма (и даже симплектоморфизма) единственна, классификация нерасщепляемых почти торических особенностей сводится к классификации нерасщепляемых чисто фокусных особенностей нулевого ранга. Особенности типа $(0, 0, n)$ ранга 0 для краткости будем называть фокусными особенностями степени n .

Утверждение 2. В окрестности особого слоя фокусной особенности F степени n существует единственное гамильтоново свободное почти всюду действие тора T^n .

Определение 8. Фактор особого слоя особенности F по действию T^n будем называть редуцированным особым слоем фокусной особенности.

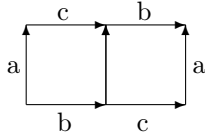


Рис. 2: Правильное кубическое разбиение тора (ребра с одинаковыми буквами нужно склеить в соответствии со стрелками).

Образы особых точек различного ранга определяют на редуцированном особом слое структуру клеточного комплекса. Как устроен этот комплекс?

Рассмотрим стандартное разбиение евклидова пространства \mathbb{R}^n на единичные кубы. Пусть G — некоторая подгруппа максимального ранга n в группе трансляций \mathbb{Z}^n этого разбиения.

Определение 9. Разбиение n -мерного тора на кубы будем называть правильным кубическим разбиением, если его можно получить факторизацией стандартного кубического разбиения \mathbb{R}^n по некоторой подгруппе G в группе \mathbb{Z}^n трансляций этого разбиения. Число кубов в разбиении будем называть его сложностью.

На рисунке 2 изображен пример правильного кубического разбиения двумерного тора. Соответствующая подгруппа G порождается векторами $(1, 1), (2, 0)$.

Теорема 9.

1. Редуцированный особый слой нерасщепляемой фокусной особенности степени n является правильным кубическим разбиением n -мерного тора. Сложность этого разбиения равна сложности особенности.
2. Отображение, сопоставляющее фокусной особенности ее редуцированный особый слой, является взаимно-однозначным соответствием между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и правильными кубическими разбиениями n -мерного тора.

Каждое правильное кубическое разбиения тора по определению задается подгруппой G в \mathbb{Z}^n . Две подгруппы задают одно и то же разбиение, если одна переходит в другую при некотором целочисленном ортогональном преобразовании (то есть композиции отражений относительно плоскостей $x_i = 0, x_i = x_j$).

Определение 10. Будем называть такие подгруппы ортогонально эквивалентными.

Теорема 10. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и классами ортогонально эквивалентных подгрупп конечного индекса в \mathbb{Z}^n . Сложность особенности равна индексу соответствующей подгруппы.

Таким образом, мы поставили в соответствие нерасщепляемой фокусной особенности некоторый комбинаторный объект, и задачу классификации можно считать полностью решенной.

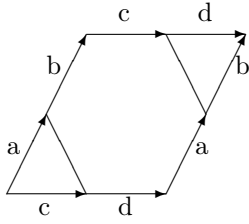


Рис. 3: Простое разбиение тора (ребра с одинаковыми буквами нужно склеить в соответствии со стрелками).

В разделе 2.3 рассматриваются многомерные фокусные особенности, не удовлетворяющие условию нерасщепляемости. Мы не ставим себе задачу полной классификации таких особенностей (наверяд ли она возможна в разумных терминах, если не делать никаких дополнительных предположений), но показываем, что они имеют достаточно богатую комбинаторно-топологическую структуру. В частности, обнаружены связи таких особенностей с торической топологией.

Как мы видели, на особом слое нерасщепляемых фокусных особенностей действует тор, и фактор является правильным кубическим разбиением тора. Такое действие существует и для расщепляемых особенностей. Аналогом правильных кубических разбиений в этом случае служат так называемые простые разбиения.

Определение 11. Клеточное разбиение многообразия назовем простым, если двойственное ему разбиение является кубическим.

Теорема 11. *Предположим, что*

1. Все особые точки на данном особом слое слоения Лиувилля имеют тип $(0, 0, k)$ (для различных точек k различно).
2. Особый слой содержит замкнутую орбиту пуассонова действия, состоящую из особых точек типа фокус-фокус ранга r степени n .

Тогда

1. Особый слой представляет собой объединение лагранжеево погруженных компактных многообразий.
2. В окрестности особого слоя имеется гамильтоново действие тора T^{r+n} .
3. Фактор особого слоя по действию тора (редуцированный особый слой) есть простое разбиение n -мерного тора. Замыкание каждой клетки этого разбиения является образом одного лагранжеева «куска» особого слоя.

В примерах редуцированный особый слой есть не просто клеточное разбиение, но разбиение на простые многогранники. По-видимому, это всегда так. Если к тому же $r = 0$, то многообразия особого слоя являются квазиторическими над этими простыми многогранниками (определение см. в [6]).

В качестве примера рассмотрим правильное разбиение тора, изображенное на рисунке 3. Оно является редуцированным особым слоем фокусной особенности ранга 0 степени 2. Особый слой этой особенности состоит из

двух вложенных многообразий $\mathbb{C}P^2$ (соответствующих треугольникам) и одного погруженного многообразия $\mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$ (соответствующего шестиугольнику).

Как показано в разделе 2.3.2, существует достаточно широкий класс простых разбиений тора, которые могут быть реализованы как редуцированный особый слой некоторой особенности. В частности, как показано в разделе 2.3.3, любой простой многогранник может быть «куском» редуцированного особого слоя некоторой фокусной особенности. Соответствующим «куском» особого слоя является момент-угол многообразие над этим многогранником (определение см. в [5]).

Перейдем к главе 3. В разделе 3.1.2 обсуждается монодромия в окрестности фокусных особенностей. Напомним, что такое монодромия.

Если выкинуть из слоения Лиувилля все особые слои, получится локально тривиальное расслоение. Каждому замкнутому пути на базе локально тривиального расслоения соответствует некоторый гомотопический класс отображений слоя в себя. Поскольку слой в нашем случае является тором, гомотопический класс определяется автоморфизмом группы одномерных гомологий. Этот автоморфизм и называется монодромией.

Пусть у нас есть нерасщепляемая фокусная особенность F степени n . Для того, чтобы сформулировать теорему о монодромии, нам понадобится дать определение матрицы разложения базисных циклов особенности. Зафиксируем некоторую подгруппу в \mathbb{Z}^n , соответствующую особенности F и выберем в ней базис. Составим матрицу $A(F)$ из векторов этого базиса, записанных по столбцам.

Определение 12. Матрица $A(F)$ называется матрицей разложения базисных циклов особенности (для данного базиса).

Рассмотрим теперь образ отображения момента в окрестности фокусной особенности F . Множество особых значений представляет собой объединение n дисков коразмерности 2, находящихся в общем положении. Множество регулярных значений диффеоморфно $T^n \times D^n$ и его фундаментальная группа изоморфна \mathbb{Z}^n . Более того, в фундаментальной группе имеется естественный базис $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, заданный с точностью до перестановки и изменения ориентации циклов. Этот базис определяется тем, что каждый его элемент зацеплен ровно с одним диском множества особых значений.

Теорема 12. *Существует способ согласованно выбрать порядок и ориентации циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и базис в группе одномерных гомологий тора Лиувилля так, что матрицы монодромии будут иметь вид*

$$h_{\gamma_i} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица, полученная из матрицы разложения базисных циклов обнулением всех строк, кроме i -ой.

Это утверждение является непосредственным обобщением формулы монодромии для фокусной особенности степени один (см. [7, 32, 25]).

В разделе 3.2 исследуется устойчивость фокусных особенностей при малых интегрируемых возмущениях. Под малым интегрируемым возмущением системы мы будем понимать интегрируемую систему, интегралы которой близки к интегралам исходной вместе с достаточным числом производных. Особенность будем называть устойчивой, если ее малое интегрируемое возмущение послонно топологически эквивалентно этой особенности.

Хорошо известно, что если на гладком многообразии задана функция, то сколь угодно малым возмущением можно развести ее особые точки на разные множества уровня. Оказывается, для интегрируемых систем это уже не так: особенности сложности, отличной от единицы, вообще говоря, нельзя разрушить малым возмущением.

Определение 13. Нерасщепляемую фокусную особенность будем называть неприводимой, если соответствующая подгруппа $G \subset \mathbb{Z}^n$ не лежит ни в какой нетривиальной подгруппе вида $k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_n\mathbb{Z}$.

Теорема 13. *Неприводимые особенности не меняют своего топологического типа при малом интегрируемом возмущении системы.*

Рассмотрим, например, подгруппу в \mathbb{Z}^2 , порожденную векторами $(m, 0)$ и $(1, 1)$. Соответствующая особенность, очевидно, неприводима, а ее сложность равна m . Следовательно, существуют устойчивые особенности сколько угодно большой сложности. Эти особенности следует ожидать в системах общего положения.

Перейдем к главе 4, посвященной гладким инвариантам многомерных фокусных особенностей. Для таких особенностей можно сформулировать общий критерий гладкой эквивалентности, однако, навряд ли он может быть успешно применен на практике. Однако, как показано в разделе 4.1, всё существенно упрощается в случае неприводимых особенностей.

Теорема 14. *Неприводимые особенности гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны.*

Поскольку топологическая классификация нам известна, задача гладкой классификации в неприводимом случае полностью решена.

В работе [24] Нгуен Тьен Зунг предположил, что разложение в почти прямое произведение нерасщепляемой особенности имеет место и в гладкой категории. Как показано в разделе 4.2 это, вообще говоря, неверно.

Теорема 15. *Существует нерасщепляемая фокусная особенность сложности два, гладко не эквивалентная никакому почти прямому произведению.*

Однако, как показано в разделе 4.3, разложение в почти прямое произведение всегда имеет место в C^1 -категории.

Теорема 16. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность C^1 -эквивалентна особенности типа почти прямого произведения.*

Эта теорема позволяет вычислять C^1 -инварианты многомерных фокусных особенностей, используя результаты главы 1.

1 Гладкие инварианты в случае двух степеней свободы

1.1 Фокусные особенности интегрируемых систем с двумя степенями свободы

В этом разделе приводятся известные утверждения о фокусных особенностях интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Если для какого-то утверждения нам не удалось найти убедительное доказательство в литературе, то мы приводим доказательство здесь.

1.1.1 Нормальная форма

Рассмотрим интегрируемую систему с двумя степенями свободы. Ее интегралы мы будем обозначать H, f . Предположим, что у нашей системы имеется особая точка типа фокус-фокус.

Из теоремы Элиассона следует, что в окрестности особой точки типа фокус-фокус можно выбрать такие канонические координаты (p, q) , что функции

$$\begin{aligned}f_1 &= p_1 q_1 + p_2 q_2, \\f_2 &= p_1 q_2 - q_1 p_2\end{aligned}$$

задают то же самое слоение Лиувилля. Покажем, что на самом деле H и f выражаются через f_1, f_2 .

Утверждение 1.1. *Особая точка типа фокус-фокус является изолированной особой точкой.*

Доказательство. Из определения особой точки типа фокус-фокус следует, что существует представление

$$\begin{aligned}H &= a f_1 + b f_2 + \text{члены порядка } \geq 3, \\f &= c f_1 + d f_2 + \text{члены порядка } \geq 3,\end{aligned}$$

причем $ad - bc \neq 0$.

Отсюда следует, что градиенты H и f независимы в некоторой проколотовой окрестности особой точки типа фокус-фокус. \square

Легко видеть, что локально совместные поверхности уровня функций f_1, f_2 связны. Действительно, вводя комплексные координаты

$$\begin{cases}z = p_1 - i p_2 \\w = q_1 + i q_2\end{cases}$$

получаем

$$f_1 + i f_2 = z w,$$

а поверхности вида $zw = c$, очевидно, связны. Поэтому слоение Лиувилля, задаваемое f_1, f_2 совпадает со слоением на их совместные поверхности уровня.

Утверждение 1.2. *В окрестности особой точки типа фокус-фокус существует симплектическая система координат p_1, p_2, q_1, q_2 , в которой гамильтониан H и дополнительный интеграл f имеют вид:*

$$\begin{cases} H = H(f_1, f_2) \\ f = f(f_1, f_2) \\ f_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ f_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2, \end{cases} \quad (1)$$

причем замена $f_1, f_2 \rightarrow H, f$ невырождена.

Доказательство. Мы показали, что слоение Лиувилля совпадает со слоением на совместные поверхности уровня f_1, f_2 . H и f постоянны на каждом слое слоения Лиувилля, поэтому они являются функциями от f_1, f_2 .

Рассмотрим некоторую неособую для отображения (f_1, f_2) точку на особом слое $f_1 = 0, f_2 = 0$. Она является неособой и для отображения момента (H, f) в силу утверждения 1.1. Рассмотрим некоторый двумерный трансверсальный слоению диск, проходящий через эту точку. f_1, f_2 задают на этом диске невырожденную систему координат, так же как и H, f . Следовательно, замена $f_1, f_2 \rightarrow H, f$ является гладкой и невырожденной в нуле, что и требовалось доказать. \square

Определение 1.1. Координаты p_1, p_2, q_1, q_2 мы будем называть нормальными координатами в окрестности особой точки, а функции f_1, f_2 — каноническими интегралами.

Важное замечание. f_1, f_2 являются функциями от H, f в некоторой окрестности особой точки. Поэтому их можно рассматривать как локальные координаты на базе слоения Лиувилля, которая в нашем случае локально совпадает с образом отображения момента. Поскольку f_1, f_2 являются функциями на базе, их можно рассматривать как функции не только в окрестности особой точки, но и в окрестности всего особого слоя.

1.1.2 Локальная топология слоения

Выясним, как устроено слоение Лиувилля в окрестности особой точки типа фокус-фокус. Имеет место простое

Утверждение 1.3 (см., например, [4]). *Рассмотрим окрестность особой точки фокус-фокус, представляющую собой шар в нормальных координатах. Тогда*

1. *Пересечение каждого достаточно близкого к особому неособого слоя слоения Лиувилля с этой окрестностью представляет собой цилиндр.*

2. Пересечение особого слоя с этой окрестностью является объединением двух трансверсально пересекающихся дисков.
3. Траектория $\text{sgrad } f_2$ на каждом слое замкнута с периодом 2π и для неособого слоя является образующей в его одномерной группе гомологий. На особом слое эта траектория стягивается в точку («исчезающий цикл»).



Рис. 4: Окрестность особой точки типа фокус-фокус

Условно можно изобразить окрестность особой точки типа фокус-фокус как окрестность вершины конуса.

1.1.3 Единственность канонических интегралов и группа локальных автоморфизмов

Нормальные координаты в окрестности фокусной особой точки определены неоднозначно. Однако, канонические интегралы определены почти однозначно. Имеет место следующая

Лемма 1.1 (Нгуен Тьен Зунг, [25]). *Рассмотрим функции f_1, f_2 , входящие в представление (1)*

1. Функция f_2 задана однозначно с точностью до знака.
2. Функция f_1 задана однозначно с точностью до знака и добавления плоской функции.

Доказательство.

1. Рассмотрим произвольную траекторию γ векторного поля $\text{sgrad } f_2$. Имеем

$$\int_{\gamma} pdq = \int_0^{2\pi} (p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2) dt = \int_0^{2\pi} (p_1 q_2 - q_1 p_2) dt = 2\pi f_2.$$

Рассмотрим теперь другую нормальную систему координат \tilde{p}, \tilde{q} . Пусть $\tilde{f}_2 = \tilde{p}_1 \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 \tilde{p}_2$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — траектория векторного поля $\text{sgrad } \tilde{f}_2$. Аналогично получаем

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{p} d\tilde{q} = 2\pi \tilde{f}_2.$$

$d(pdq - \tilde{p}d\tilde{q}) = 0$, а цикл $\tilde{\gamma}$ гомологичен нулю в окрестности особой точки, поэтому

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{p} d\tilde{q} = \int_{\tilde{\gamma}} pdq.$$

Далее, γ является образующей в одномерных гомологиях слоя. Поэтому $\gamma \sim \pm \tilde{\gamma}$ и, в силу того, что слой является лагранжевым,

$$\int_{\gamma} pdq = \pm \int_{\tilde{\gamma}} pdq,$$

откуда $f_2 = \pm \tilde{f}_2$.

Примечание 1.1. Эти рассуждения показывают, что f_2 является переменной действия, соответствующей «исчезающему» на особом слое циклу γ .

2. Доказательство основано на построении второй переменной действия. Строго говоря, построить вторую переменную действия нельзя, поскольку фундаментальная группа слоя изоморфна \mathbb{Z} и независимый цикл только один. Однако, можно построить «локальную» переменную действия.

Рассмотрим на каждом слое пару траекторий γ_1, γ_2 поля $\text{sgrad } f_2$ таких, что

- (а) Каждое из двух семейств траекторий гладко зависит от слоя.
- (б) γ_1 и γ_2 на особом слое лежат в разных компонентах связности.

Рассмотрим на каждом неособом слое участок траектории $\text{sgrad } f_1$, соединяющий γ_1 с γ_2 и проинтегрируем форму pdq по этому участку. Этот интеграл не зависит от выбора конкретной траектории $\text{sgrad } f_1$. Действительно, интеграл вдоль траектории $\text{sgrad } f_1$ от pdq на каждом конкретном слое пропорционален времени прохождения этой траектории, а время прохождения по траектории $\text{sgrad } f_1$ между двумя траекториями $\text{sgrad } f_2$ не зависит от траектории, так как эти векторные поля коммутируют.

Таким образом, мы получили функцию $s(f_1, f_2)$ на базе слоения, гладкую в проколотой окрестности нуля. Это и есть «локальная переменная действия». Утверждается, что s задана инвариантно относительно выбора нормальной системы координат и семейств траекторий γ_1, γ_2 с точностью до знака и прибавления гладкой вплоть до нуля функции.

- При изменении семейств траекторий γ_1 и γ_2 s изменяется на гладкую функцию — интеграл от pdq по участку траектории $\text{sgrad } f_1$ между старыми и новыми γ . Важно, что между старыми и новыми траекториями нет особой точки.
- При замене формы pdq на $\tilde{p}d\tilde{q}$ s изменяется на гладкую функцию. Действительно, $pdq - \tilde{p}d\tilde{q} = dF$, где F — некая гладкая функция. Таким образом, s меняется на разность значений F в конечных точках траекторий $\text{sgrad } f_1$.

- Предположим, траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_1$ ориентированы так же, как и траектории $\text{sgrad } f_1$. Тогда при замене f_1 на \tilde{f}_1 s также изменяется на гладкую функцию. Действительно, в этом случае разность интегралов по траекториям $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } \tilde{f}_1$ есть интеграл по некоторому участку траектории $\text{sgrad } f_2$, концы которого, очевидно, гладко зависят от слоя. Если же траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_1$ имеют противоположную ориентацию, s меняет знак.

Получим теперь явную формулу для $s(f_1, f_2)$. Выберем в качестве траекторий γ_1, γ_2 пересечение слоёв со сферой радиуса δ . Легко видеть, что они удовлетворяют требуемым свойствам. Прямым вычислением получаем

$$s(f_1, f_2) = -\frac{1}{2}f_1 \ln(f_1^2 + f_2^2) + \text{гладкая функция.}$$

Вычисления в другой нормальной системе координат дают

$$\tilde{s}(f_1, f_2) = -\frac{1}{2}\tilde{f}_1 \ln(\tilde{f}_1^2 + \tilde{f}_2^2) + \text{гладкая функция.}$$

Как было показано выше, $\tilde{s} = \pm s$. Рассмотрим сначала случай $\tilde{s} = s$. Имеем

$$\tilde{f}_1 \ln(\tilde{f}_1^2 + \tilde{f}_2^2) - f_1 \ln(f_1^2 + f_2^2) \in C^\infty.$$

Пусть

$$f_1 = x, f_2 = y, \tilde{f}_2 = \pm y, \tilde{f}_1 = f(x, y).$$

Имеем

$$f(x, y) \ln(f^2 + y^2) - x \ln(x^2 + y^2) \in C^\infty.$$

Положим $g_a(x) = f(x, ax)$.

$g(0) = 0$, поэтому $g_a(x) = xh_a(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} xh_a \ln(x^2h_a^2 + a^2x^2) - x \ln(x^2 + a^2x^2) = \\ = 2xh_a \ln x - 2x \ln x - x \ln(a^2 + 1) + xh_a \ln(a^2 + h_a^2) \in C^\infty. \end{aligned}$$

$h_a(0) = f_x(0) \neq 0$ при $a = 0$, поэтому $a^2 + h_a^2 \neq 0$ и $\ln(a^2 + h_a^2) \in C^\infty$.

Но тогда

$$2g_a \ln x - 2x \ln x \in C^\infty,$$

откуда $g_a(x) = x + \text{плоская функция}$ для любого a . Но отсюда необходимо следует равенство

$$f(x) = x + \text{плоская функция,}$$

то есть

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \text{плоская функция,}$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\tilde{s} = -s$. Рассуждая аналогично случаю $\tilde{s} = s$, получаем

$$\tilde{f}_1 = -f_1 + \text{плоская функция.}$$

Лемма доказана.

□

Из доказательства леммы видно, что канонические интегралы могут быть вычислены без нахождения нормальной системы координат в окрестности точки. f_2 находится как интеграл от формы действия по образующим слоёв в окрестности особой точки. Для вычисления f_1 нужно вычислить описанную выше локальную переменную действия s . При вычислении локальной переменной действия интегрировать можно по траекториям косого градиента любого интеграла нашей системы, функционально независимого с f_2 — выбор интеграла влияет лишь на гладкое слагаемое. f_1 находится как коэффициент при логарифме в асимптотике s .

Утверждение 1.4. *Рассмотрим слоение, возникающее в окрестности особой точки типа фокус-фокус. Рассмотрим группу Aut автоморфизмов базы этого слоения, поднимающихся до симплектоморфизма слоения. Она содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Каждая из образующих этой подгруппы меняет знак соответствующего канонического интеграла на противоположный.*

Доказательство. Выпишем образующие явно. Первый симплектоморфизм задаётся формулами

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = -q_1 \\ \tilde{p}_2 = -q_2 \\ \tilde{q}_1 = p_1 \\ \tilde{q}_2 = p_2. \end{cases} \quad (2)$$

Этот симплектоморфизм сохраняет f_2 и меняет знак f_1 на противоположный. Второй симплектоморфизм задаётся формулами

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = -p_1 \\ \tilde{p}_2 = p_2 \\ \tilde{q}_1 = -q_1 \\ \tilde{q}_2 = q_2. \end{cases} \quad (3)$$

Этот симплектоморфизм сохраняет f_1 и меняет знак f_2 на противоположный. □

Примечание 1.2. В аналитическом случае эта подгруппа исчерпывает всю группу Aut . Это прямое следствие леммы 1.1.

1.1.4 Топология особого слоя и полулокальная топологическая классификация

Теорема 1.1 (Нгуен Тьен Зунг, [25]). *Пусть x — особая точка типа фокус-фокус, лежащая на особом слое L слоения Лиувилля. Предположим, что*

1. *Особый слой L компактен.*

2. Все особые точки на L невырождены.
3. Выполнено условие нерасщепляемости.

Тогда

1. Все особые точки на L — особые точки типа фокус-фокус.
2. Особый слой L представляет собой объединение n лагранжеских сфер, трансверсально пересекающихся в особых точках, где n — число особых точек на слое (см. рис. 5).

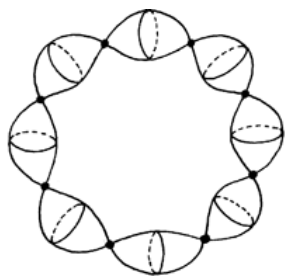


Рис. 5: Особность типа фокус-фокус

Таким образом, корректно говорить об особом слое типа фокус-фокус. В этом разделе и далее под фокусной особенностью будет пониматься росток слоения Лиувилля в окрестности особого слоя типа фокус-фокус. Число особых точек на слое называется сложностью особенности.

Имеет место следующая

Лемма 1.2 (Nguyen Tien Zung, [25]). *Все особенности типа фокус-фокус фиксированной сложности послойно гомеоморфны.*

Доказательство смотреть, например, в [4].

1.1.5 Точность симплектической формы в окрестности особого слоя

В этом разделе мы докажем, что симплектическая форма точна в окрестности особого слоя особенности типа фокус-фокус. Нам понадобится одно утверждение из теории Морса.

Утверждение 1.5. *Пусть f — функция Морса на гладком многообразии M , c — некоторое вещественное число, причём некоторая окрестность поверхности уровня f вида $\{x : |f(x) - c| \leq \delta\}$ компактна. Тогда всякая связная компонента поверхности уровня $\{x : f(x) = c\}$ является (топологическим) деформационным ретрактом своей малой окрестности.*

Доказательство. Покажем, что стягивание «по градиенту» f можно задать непрерывным и гомотопным тождественному отображением. Без ограничения общности $c = 0$. Выберем $\varepsilon \in (0, \delta)$, такое что 0 — единственное особое значение f на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Такое ε можно выбрать в силу компактности поверхности уровня $f = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 1$.

Пусть U — ε -окрестность связной компоненты поверхности уровня. Рассмотрим в этой окрестности векторное поле

$$v = \frac{\text{grad } f}{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle}.$$

Это векторное поле определено везде, кроме некоторого конечного числа особых точек f на поверхности $f = 0$. Оно выбрано из условия $v(f) \equiv 1$.

Для $t \in [0, 1)$ определим отображение $\phi_t: U \rightarrow U$ следующим образом:

- Если $|f(x)| \geq 1 - t$, то ϕ_t есть сдвиг на $|f| - (1 - t)$ вдоль векторного поля v в направлении уменьшения модуля f .
- Если $|f(x)| < 1 - t$, то $\phi_t(x) = x$.

Очевидно, что все ϕ_t непрерывны и $|f(\phi_t(x))| \leq 1 - t$. Покажем, что при $t \rightarrow 1$ ϕ_t сходится равномерно к некоторому отображению ϕ_1 , которое и будет искомой ретракцией.

Пусть для определенности $f(x) \geq 0$. Расстояние $d(\phi_h(x), \phi_s(x))$ оценивается длиной участка траектории векторного поля v , соединяющего уровни $f = 1 - h$ и $f = 1 - s$. Имеем

$$l = \int_h^s \|v(\phi_t(x))\| dt = \int_h^s \frac{1}{\|\text{grad } f(\phi_t(x))\|} dt = \int_{1-s}^{1-h} \frac{1}{\|\text{grad } f\|} df$$

Здесь мы воспользовались тем, что $v(f) = 1$ и f можно рассматривать как параметр на траектории v . Далее, в окрестности каждой особой точки

$$(\text{grad } f)^i = \pm 2g^{ij}x_j,$$

откуда

$$\|\text{grad } f\| > C\sqrt{\sum x_i^2} > C\sqrt{|f|}.$$

Аналогичная оценка, очевидно, имеет место и в дополнении к окрестностям особых точек и, таким образом, во всей окрестности U . Получаем

$$l < \int_{1-s}^{1-h} \frac{1}{C\sqrt{f}} dt = \frac{2}{C}(\sqrt{1-h} - \sqrt{1-s}).$$

Таким образом, выполнен критерий равномерной сходимости, и семейство ϕ_t равномерно сходится к некоторому непрерывному отображению ϕ_1 . Это и есть искомая ретракция, гомотопная тождественному отображению ϕ_0 . Утверждение доказано. \square

Лемма 1.3. *Особый слой типа фокус-фокус является деформационным ретрактом своей малой окрестности.*

Доказательство. В работе [25] (смотреть также [4]) построена фокусная особенность с n особыми точками на слое, заданная голоморфной функцией F на комплексном многообразии. Поскольку все фокусные особенности фиксированной сложности гомеоморфны, можно считать, что мы работаем в этой модели.

Рассмотрим функции $f_1 = \operatorname{Re} F$, $f_2 = \operatorname{Im} F$. f_1 и f_2 являются вещественной и мнимой частью голоморфной функции, поэтому их градиенты в любой эрмитовой метрике ортогональны. Обе они являются функциями Морса. Используя предыдущую лемму, можно сначала стянуть окрестность по градиенту f_1 , а потом по градиенту f_2 . Поскольку эти градиенты ортогональны, мы получим ретракцию на особый слой. \square

Следствие 1.3.1. *Симплектическая форма точна в окрестности особого слоя типа фокус-фокус.*

Доказательство. В силу леммы двумерные гомологии окрестности особого слоя порождаются образующими в гомологиях самого слоя. Поскольку особый слой лагранжев, интеграл от симплектической формы по любому двумерному циклу на нём равен нулю. Следовательно, интеграл по любому двумерному циклу в окрестности особого слоя также равен нулю. Но тогда, по теореме Де Рама, получаем, что симплектическая форма задаёт нулевой элемент в двумерных когомологиях окрестности особого слоя. \square

1.1.6 Совпадение функций f_2 для всех особых точек на слое

Рассмотрим особенность типа фокус-фокус с некоторым количеством особых точек на слое. Каждая точка определяет пару канонических интегралов. Поскольку канонические интегралы являются функциями на базе слоения, можно считать, что все они заданы в некоторой окрестности особого слоя.

Лемма 1.4. *Для любой пары точек канонические интегралы f_2 и \tilde{f}_2 совпадают с точностью до знака.*

Доказательство. Воспользуемся точностью симплектической формы в окрестности особого слоя. Пусть $\omega = d\alpha$. Как мы уже знаем,

$$f_2 = \int_{\gamma} \alpha,$$

где γ — траектория $\operatorname{sgrad} f_2$ на соответствующем слое. Аналогично,

$$\tilde{f}_2 = \int_{\tilde{\gamma}} \alpha,$$

где $\tilde{\gamma}$ — траектория $\operatorname{sgrad} \tilde{f}_2$ на соответствующем слое.

Заметим что, траектории $\operatorname{sgrad} f_2$ и $\operatorname{sgrad} \tilde{f}_2$ задают один и тот же, либо пару противоположных элементов в гомологиях слоя. Действительно, можно рассмотреть траекторию $\operatorname{sgrad} f_2$, целиком лежащую в малой окрестности первой точки, и траекторию $\operatorname{sgrad} \tilde{f}_2$ на том же слое, целиком лежащую в малой окрестности второй точки. Это два непересекающихся цикла на торе. Такие циклы обязательно задают один и тот же либо противоположные

элементы в $H^1(T^2)$.
Следовательно,

$$f_2 = \int_{\gamma} \alpha = \pm \int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \pm \tilde{f}_2,$$

что и требовалось. \square

Примечание 1.3. Функция f_2 является переменной действия. При этом f_2 и $-f_2$ — единственные переменные действия, которые можно гладко продолжить на особый слой. В силу этого, f_2 определяется однозначно и совпадает для различных точек на слое.

1.1.7 Согласование знаков канонических интегралов

Каждая особая точка на слое определяет пару канонических интегралов. Канонические интегралы определены с точностью до знака (и, возможно, с точностью до добавления плоской функции). Укажем способ согласовать знаки всех канонических интегралов.

Поток $\text{sgrad } f_2$ задаёт на окрестности особого слоя действие окружности. Фиксируем ориентацию на действующей окружности. Используя утверждение 1.4, можно выбрать все функции f_2 так, чтобы поток их косоугольного градиента тек в выбранном нами направлении. Далее, фиксируем некоторое направление обхода особых точек по особому слою. Это позволяет нам аналогичным образом однозначно выбрать знак f_1 в окрестности каждой точки. Теперь все канонические интегралы в окрестности каждой точки выбраны однозначно (быть может, с точностью до добавления плоской функции).

1.2 Гладкая классификация в случае двух степеней свободы

1.2.1 Гладкие особенности типа фокус-фокус

Мы переходим к изучению гладких структур в окрестности особого слоя фокусной особенности. Нам удобно определить понятие особенности фокус-фокус в отрыве от особенностей интегрируемых систем.

Определение 1.2. Мы будем говорить, что точка $x \in M^4$ является особой точкой типа фокус-фокус для отображения $F: M^4 \rightarrow N^2$, если существуют такие локальные системы координат в окрестности x и $F(x)$, в которых отображение записывается в виде

$$\begin{cases} f_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ f_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2, \end{cases}$$

По аналогии с симплектическими фокусными особенностями, будем называть систему координат (p, q) нормальной системой координат, а функции f_1, f_2 — каноническими интегралами. Канонические интегралы в гладком случае определены неоднозначно.

Примером особых точек типа фокус-фокус служат особые точки типа фокус-фокус интегрируемых систем, а так же невырожденные особые точки голоморфных функций на двумерных комплексных многообразиях.

Предположим, что многообразие M^4 ориентировано. Рассмотрим окрестность особой точки типа фокус-фокус. Особый слой, то есть множество уровня отображения F , содержащее особую точку, локально представляет собой два трансверсально пересекающихся диска. Градиенты компонент отображения F задают некоторую ориентацию в нормальном раслоении к этим дискам, а тем самым и на самих дисках.

Определение 1.3. Индекс пересечения ориентированных таким образом дисков назовём индексом особой точки типа фокус-фокус.

Это определение корректно. Действительно, если мы выберем другую систему координат в образе, то новые компоненты отображения F будут функциями от старых, а градиенты новых компонент на особом слое будут линейной комбинацией градиентов старых компонент с постоянными коэффициентами. Поэтому ориентация может поменяться лишь на обоих дисках одновременно. Следовательно, их индекс пересечения не изменится.

Конечно, индекс особой точки типа фокус-фокус зависит от выбора ориентации на M^4 . Но если этих точек много, то знаки индексов могут поменяться лишь все одновременно.

Индекс особой точки типа фокус-фокус равен ± 1 . Рассмотрим форму $dp^1 \wedge dq^1 \wedge dp^2 \wedge dq^2$ в некоторых нормальных координатах. Легко видеть, что знак ориентации, задаваемой ею на M^4 , совпадает с индексом особой точки. Отсюда следует, что индекс симплектической особой точки типа фокус-фокус всегда равен 1. То же верно и для невырожденных особых точек отображения двумерного комплексного многообразия в одномерное, рассматриваемых как особые точки типа фокус-фокус.

Примечание 1.4. Легко видеть, что понятие индекса можно определить для достаточно широкого класса изолированных особых точек отображений четырехмерных многообразий в двумерные. Нужно лишь потребовать, чтобы локально особый слой представлял собой два пересекающихся двумерных диска. В работе [26] вводится понятие знака «вырожденной особой точки типа фокус-фокус» негамильтоновой интегрируемой системы. Этот знак и определенный нами индекс — одно и то же число.

Определим теперь гладкую особенность типа фокус-фокус как полулокальный объект.

Определение 1.4. Пусть $F: M^4 \rightarrow N^2$ — гладкое отображение, причем M^4 компактно и ориентируемо. Пусть также $y \in N^2$, $n \in \mathbb{N}$, причём выполнены следующие условия

1. Множество уровня $F^{-1}(y)$ связно.
2. Множество уровня $F^{-1}(y)$ содержит ровно n особых точек. Все они — особые точки типа фокус-фокус.
3. Дополнение множества особых точек на $F^{-1}(y)$ до $F^{-1}(y)$ состоит из колец.

Росток слоения на множества уровня F в окрестности особого слоя $F^{-1}(y)$ будем называть (гладкой) особенностью типа фокус-фокус.

Примечание 1.5. Условие компактности и ориентируемости многообразия можно заменить на условие существования ориентируемой малой окрестности особого слоя, имеющей компактное замыкание.

Условие 1 на самом деле не важно. Оно попросту означает, что мы рассматриваем связную компоненту $F^{-1}(y)$.

Условие 3 эквивалентно тому, что в окрестности особого слоя существует гладкое послойное действие окружности, свободное всюду, кроме особых точек. Таким образом, мы ограничиваемся рассмотрением в некотором смысле «симметричных» особенностей.

Легко видеть, что особый слой гладкой особенности фокус-фокус устроен так же, как и для симплектической особенности — каждое кольцо замыкается двумя особыми точками, и особый слой представляет собой объединение сфер, пересекающихся в особых точках.

Индексы особых точек гладкой фокусной особенности определены однозначно с точностью до замены всех индексов на противоположные. Поэтому однозначно определены знаки на кольцах, соединяющих особые точки. Кольцо положительно, если оно соединяет точки одного индекса, и отрицательно в противоположном случае. Произведение знаков на всех кольцах равно $+1$.

Утверждение 1.6. *Число особых точек и набор знаков на кольцах — полный топологический инвариант гладкой фокусной особенности.*

Это утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению в симплектическом случае.

Ясно, что симплектическая фокусная особенность является гладкой фокусной особенностью, все кольца которой положительны. Верно и обратное:

Утверждение 1.7. *Всякая гладкая фокусная особенность с положительными кольцами послойно гладко эквивалентна симплектической.*

Мы получим это утверждение как следствие из теоремы 1.2 в случае сложности 1 и как следствие 1.7.3 из теоремы 1.7 в случае сложности 2.

В дальнейшем мы будем обсуждать только фокусные особенности с положительными кольцами. Заметим, что рассмотрение симплектической фокусной особенности как гладкой фокусной особенности с положительными кольцами имеет нетривиальный смысл: «забывание» симплектической структуры даёт нам большую свободу в выборе нормальных систем координат в окрестностях особых точек.

1.2.2 Случай одной особой точки на слое

В случае одной особой точки на слое утверждение леммы 1.2 можно усилить.

Теорема 1.2. *Всякий послойный диффеоморфизм между окрестностями особых точек двух фокусных особенностей сложности один можно продолжить до послойного диффеоморфизма между окрестностями особого слоя. В частности, все гладкие особенности типа фокус-фокус сложности один гладко послойно эквивалентны между собой.*

Примечание 1.6. Под «продолжением» понимаем диффеоморфизм, совпадающий с исходным в некоторой окрестности особой точки, возможно меньшей, чем та, на которой задано первоначальное отображение.

Предварительно докажем следующее утверждение

Лемма 1.5 (О шпивании). *Пусть $E_1 = [0, 1] \times S^1 \times \overline{D}^2$ — тривиальное слоение с базой диск и слоем цилиндр. Пусть E_2 — второй экземпляр того же слоения. Пусть U_L — произвольная открытая окрестность «левого края» $\{0\} \times S^1 \times \overline{D}^2$ слоения E_1 , U_R — окрестность «правого края» $\{1\} \times S^1 \times \overline{D}^2$ слоения E_1 . Пусть задана пара гладких вплоть до границы отображений $\xi_L: U_L \rightarrow E_2, \xi_R: U_R \rightarrow E_2$, причём*

1. ξ_L диффеоморфно отображает $\text{int } U_L$ на образ, ξ_R диффеоморфно отображает $\text{int } U_R$ на образ.
2. ξ_L переводит левый край E_1 в левый край E_2 . ξ_R переводит правый край в правый край.
3. ξ_L и ξ_R послойны и индуцируют одно и то же отображение баз слоений.
4. ξ_L и ξ_R сохраняют ориентацию.

Тогда существует послойный диффеоморфизм $\xi: E_1 \rightarrow E_2$, совпадающий с ξ_L в некоторой окрестности левого края E_1 и с ξ_R в некоторой окрестности правого края E_1 .

Доказательство. Пусть x, ϕ, y_1, y_2 — координаты на E_1 , причём x, ϕ — координаты на цилиндре, а y_1, y_2 — координаты на базе. Пусть $\tilde{x}, \tilde{\phi}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ — координаты на E_2 . Нужно построить отображение $x, \phi, y_1, y_2 \rightarrow \tilde{x}, \tilde{\phi}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$. Отображение на базе уже задано и его можно считать тождественным, то есть $\tilde{y}_i = y_i$. Осталось построить $\tilde{x}, \tilde{\phi}$ как функции на E_1 .

Введём обозначения

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= (0, \varepsilon) \times S^1 \times D^2 \subset E_1, \\ R_\varepsilon &= (1 - \varepsilon, 1) \times S^1 \times D^2 \subset E_1, \\ C_\varepsilon &= (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times S^1 \times D^2 \subset E_1. \end{aligned}$$

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $L_\varepsilon \subset U_L, R_\varepsilon \subset U_R$.

На L_ε уже заданы некоторые функции $\tilde{x}_L, \tilde{\phi}_L$ — компоненты ξ_L . Имеет место равенство

$$\tilde{x}_L(0, \phi, y_1, y_2) = 0,$$

поэтому

$$d\xi_L(0, \phi, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ * & b & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \tilde{x}_L}{\partial x} = a \neq 0, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial \phi} = b \neq 0.$$

Далее $\tilde{x}_L > 0$ при $x > 0$, поэтому $a > 0$. Якобиан ξ_L положителен, поэтому $b > 0$. Отсюда следует, что ε можно взять настолько малым, что в L_ε будут выполнены условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_L}{\partial x} &> 0, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial \phi} &> 0, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial \phi} &> 16\pi \frac{\partial \tilde{x}_L}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Выполнения аналогичных условий можно добиться и в окрестности правой границы.

Еще уменьшая, в случае необходимости, ε добьемся того, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}_R &> \frac{7}{8} \text{ на } R_\varepsilon, \\ \tilde{x}_L &< \frac{1}{8} \text{ на } L_\varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, что для покрытия $L_\varepsilon, R_\varepsilon, C_{\varepsilon/2}$ многообразия $\text{int } E_1$ существует гладкое разбиение единицы $\alpha_L, \alpha_R, \alpha_C$, зависящее только от координаты x , причём

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_L}{dx} &< 0 \text{ для } x \in \left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right), \\ \frac{d\alpha_R}{dx} &> 0 \text{ для } x \in \left(1 - \varepsilon, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \alpha_L x_L + \alpha_C \frac{2x + 1}{4} + \alpha_R x_R, \\ \tilde{\phi} &= \alpha_L \phi_L + \alpha_C \phi + \alpha_R \phi_R. \end{aligned}$$

Покажем, что эти формулы задают искомый диффеоморфизм. Проверим сначала невырожденность. Рассмотрим точку из $L_\varepsilon \cap C_{\varepsilon/2}$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= \alpha_L \frac{\partial x_L}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_C + \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \left(x_L - \frac{2x+1}{4} \right), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \phi} &= \alpha_L \frac{\partial x_L}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} &= \alpha_L \frac{\partial \phi_L}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} (\phi_L - \phi), \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi} &= \alpha_L \frac{\partial \phi_L}{\partial \phi} + \alpha_C.\end{aligned}$$

Очевидно, имеем

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} > 0.$$

Запишем якобиан

$$J_\xi = J_{\xi_L} + \alpha_C \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_L \frac{\partial \phi_L}{\partial \phi} \alpha_C + \alpha_L \left(-\frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x_L}{\partial \phi} (\phi_L - \phi) + \frac{\partial \phi_L}{\partial \phi} \left(\frac{2x+1}{4} - x_L \right) \right).$$

Первые три слагаемых, очевидно, положительны. Далее,

$$\frac{\partial x_L}{\partial \phi} (\phi_L - \phi) + \frac{\partial \phi_L}{\partial \phi} \left(\frac{2x+1}{4} - x_L \right) \geq \frac{1}{8} \frac{\partial \phi_L}{\partial \phi} - 2\pi \frac{\partial x_L}{\partial \phi} > 0.$$

Следовательно, якобиан нашего отображения положителен на $L_\varepsilon \cap C_{\varepsilon/2}$. Аналогично показывается невырожденность в $R_\varepsilon \cap C_{\varepsilon/2}$. Невырожденность в остальных областях очевидна.

Построенное отображение взаимно-однозначно. Действительно, достаточно проверить взаимно-однозначность ограничения ξ на каждый слой. Мы имеем невырожденное отображение цилиндра в цилиндр, переводящее края в края и диффеоморфное в окрестности этих краев. Всякое такое отображение является диффеоморфизмом. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы. Пусть (M^4, F) — первая особенность, (N^4, G) — вторая, а $x_M \in M^4, x_N \in N^4$ — соответствующие особые точки типа фокус-фокус. Пусть (p, q) — некоторые нормальные координаты в окрестности x_M . Окрестность x_M , на которой определено исходное отображение ϕ , содержит некоторый шар $U_\varepsilon(x_M)$.

Перенесем координаты p, q на окрестность x_N с помощью отображения ϕ . Отображение ϕ в новых координатах будет попросту тождественным.

На M^4 существует некоторая риманова метрика. Перенесем ее на $\phi(U_\varepsilon(x_M)) = U_\varepsilon(x_N)$ с помощью отображения ϕ . На N^4 существует метрика, совпадающая с полученной в окрестности $U_{\varepsilon/2}(x_N)$. Такую метрику можно построить с использованием разбиения единицы.

Рассмотрим теперь шар $U_{\varepsilon/4}(x_M)$. Если выкинуть этот шар из M^4 , то особый слой будет представлять из себя цилиндр. Обозначим его L . Существует диффеоморфизм $\xi: L \times D^2 \rightarrow U(L)$. Этот диффеоморфизм строится

стандартным образом: Пусть p — точка на цилиндре, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{D}^2$. Выпустим из точки p геодезическую на время 1 в направлении $\alpha \text{grad } H + \beta \text{grad } f$, где H, f — компоненты отображения F . Конец этой геодезической — это некоторая точка $y \in U(L)$. Положим $\xi(p, \alpha, \beta) = y$.

Пусть $\psi: U(L) \rightarrow L \times \mathbb{D}^2$ — отображение, обратное к построенному. ψ не является послойным диффеоморфизмом в смысле слоения $U(L)$ на множества уровня. Исправим его. Пусть $\psi(x) = (p(x), \alpha(x), \beta(x))$. Положим $\tilde{\psi}(x) = (p(x), H(x), f(x))$. Легко видеть, что сквозное отображение $\tilde{\phi}\phi^{-1}: L \times \mathbb{D}^2 \rightarrow L \times \mathbb{D}^2$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности L . Поэтому и $\tilde{\phi}$ является диффеоморфизмом.

Таким образом, в окрестности L возникает структура прямого произведения, согласованная с проекцией F . Прделаем то же самое со второй особенностью. Если окрестность нуля в \mathbb{R}^2 брать достаточно маленькой, то геодезические не выйдут за предел $\varepsilon/2$ — окрестностей особых точек. Таким образом, отображение $\phi: U_\varepsilon(x_M) \rightarrow U_\varepsilon(x_N)$ индуцирует некоторое послойное отображение окрестностей «краев» слоений на цилиндры. Поскольку мы согласовали метрики, это отображение переводит край в край. Далее, ориентации отображений окрестностей краев одинаковые, так как это ограничения одного и того же отображения ϕ . Здесь важно, что многообразия M^4, N^4 ориентируемы. Таким образом, мы оказываемся в ситуации леммы о сшивании. Отображение, существование которого гарантирует нам лемма, совпадает с ϕ в некоторой окрестности «краев» слоений. Поэтому эти отображения склеиваются с ϕ в послойный диффеоморфизм окрестностей особых слоёв. \square

Как мы увидим далее, в случае нескольких особых точек на слое утверждение теоремы не верно.

1.2.3 Случай двух особых точек на слое

Рассмотрим для начала случай двух точек, как наиболее показательный.

Лемма 1.6. *Пусть задан некоторый диффеоморфизм баз фокусных особенностей сложности 2, поднимаемый до послойных диффеоморфизмов окрестностей обеих особых точек. Тогда этот диффеоморфизм можно поднять до послойного диффеоморфизма окрестностей особого слоя.*

Доказательство. Лемма доказывается с использованием леммы о сшивании аналогично теореме 1.2. \square

Пусть у нас есть особенность с двумя точками типа фокус-фокус на слое. Занумеруем некоторым способом особые точки. Пусть f_1, f_2 — канонические интегралы для первой точки, а \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 — для второй. На базе слоения возникает две пары функций. Эти пары связаны между собой невырожденной заменой переменных, так как замены $(f_1, f_2) \rightarrow (H, f)$ невырождены.

Определение 1.5. Замена переменных $(f_1, f_2) \rightarrow (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ называется связывающим диффеоморфизмом особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое.

Все связывающие диффеоморфизмы симплектических фокусных особенностей имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = f(x, y) \\ \tilde{y} = y \end{cases} \quad (4)$$

$$\tilde{f}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, 0) > 0$$

Последнее условие следует из того, что мы выбрали знаки так, что потоки косых градиентов f_1 и \tilde{f}_1 текут в одном направлении (см. раздел 1.1.7).

При фиксированной ориентации на действующей окружности и направлении обхода особых точек связывающий диффеоморфизм определен однозначно с точностью до добавления плоской функции к f . Если разрешить менять ориентацию, то он определен однозначно с точностью до одновременной замены знаков x и \tilde{x} или y и \tilde{y} . Если поменять нумерацию особых точек, то связывающий диффеоморфизм поменяется на обратный. Очевидно, что связывающий диффеоморфизм, рассматриваемый с точностью до прибавления плоской функции, описанных замен знаков, и операции взятия обратного, является симплектическим инвариантом особенности.

Позже будет доказано, что всякий диффеоморфизм вида (4) может быть реализован в виде связывающего диффеоморфизма некоторой фокусной особенности.

В гладком случае определить связывающий диффеоморфизм однозначно нельзя. Когда мы будем говорить о связывающем диффеоморфизме гладкой особенности, будет иметься в виду, что мы зафиксировали канонические интегралы в окрестности каждой точки. **При этом всегда можно выбрать канонические интегралы так, чтобы связывающий диффеоморфизм был собственным.**

Определение 1.6. Мы будем говорить, что две особенности типа фокус-фокус с занумерованными особыми точками сильно послойно гладко эквивалентны, если между ними существует послойный диффеоморфизм, сохраняющий нумерацию особых точек.

Лемма 1.7. *Две фокусные особенности сложности 2 с положительными кольцами сильно послойно гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда при некотором выборе канонических интегралов их связывающие диффеоморфизмы совпадают.*

Доказательство. Пусть канонические интегралы выбраны так, что связывающие диффеоморфизмы совпали. Рассмотрим отображение баз, переводящее канонические интегралы, соответствующие первой точке первой особенности, в канонические интегралы, соответствующие первой точке второй

особенности. Это отображение поднимается до послыоного диффеоморфизма окрестностей первых особых точек — поднятием является тождественное отображение в соответствующих нормальных координатах. Но из условия совпадения связывающих диффеоморфизмов следует, что канонические интегралы для второй точки тоже сохраняются. Таким образом, построенное отображение баз может быть поднято и до отображения окрестностей вторых точек. Но тогда, в силу леммы 1.6, оно может быть поднято и до послыоного диффеоморфизма окрестностей особых слоев.

Обратно, если две особенности сильно послыоно диффеоморфны, то можно перенести канонические интегралы при помощи этого диффеоморфизма с одной особенности на другую и связывающие диффеоморфизмы совпадут. Лемма доказана. \square

Примечание 1.7. Утверждение верно и для двух особенностей сложности 2 с отрицательными кольцами. Однако, особенности с положительными кольцами и с отрицательными между собой, очевидно, не эквивалентны.

Пусть нам заданы две особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое. Можно ли выбрать канонические интегралы для каждой из особых точек так, чтобы связывающие диффеоморфизмы совпали? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно понять, какова степень произвола в выборе канонических интегралов.

Определение 1.7. Назовем диффеоморфизм ϕ окрестности нуля в \mathbb{R}^2 допустимым, если существует такой C^∞ -диффеоморфизм Φ окрестности нуля в \mathbb{R}^4 , что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^4, 0) \\ \downarrow zw & & \downarrow zw \\ (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array} \quad (5)$$

ϕ называется C^k -допустимым, если $\Phi \in C^k$.

Допустимые диффеоморфизмы образуют подгруппу A в группе $\text{Diffeo}(\mathbb{R}^2, 0)$. C^k -допустимые диффеоморфизмы образуют подгруппу $A(C^k)$.

Утверждение 1.8. Если f_1, f_2 — канонические интегралы для некоторой особой точки типа фокус-фокус, а d — допустимый диффеоморфизм, то $d(f_1, f_2)$ — также канонические интегралы. Обратно, если есть две пары канонических интегралов, то одна получается из другой подстановкой в допустимый диффеоморфизм.

Доказательство. Это следует непосредственно из определения канонических интегралов. \square

Утверждение 1.9. Пусть ϕ_1 — связывающий диффеоморфизм особенностей для некоторого выбора канонических интегралов, а ϕ_2 — для некоторого другого выбора канонических интегралов. Тогда выполнено соотношение $\phi_2 = d_1\phi_1d_2^{-1}$, где d_1, d_2 — допустимые диффеоморфизмы.

Доказательство. Мы знаем, что пары канонических интегралов получают друг из друга применением допустимого диффеоморфизма. Пусть это d_2 для первой точки, и d_1 для второй. Возникает коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ \downarrow d_2 & & \downarrow d_1 \\ (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{\phi_2} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

Следовательно, $\phi_2 = d_1\phi_1d_2^{-1}$ □

Утверждение 1.10. Связывающие диффеоморфизмы двух особенностей совпадают при некотором выборе канонических интегралов тогда и только тогда, когда они связаны соотношением $\phi_2 = d_1\phi_1d_2^{-1}$, где d_1, d_2 — допустимые диффеоморфизмы.

Доказательство. Пусть $\phi_2 = d_1\phi_1d_2^{-1}$. Пусть f_1, f_2 — канонические интегралы первой особой точки первой особенности. Заменяем их на $d_2(f_1, f_2)$. Интегралы \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 второй особой точки заменим на $d_1(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$. В силу предыдущего утверждения, связывающим диффеоморфизмом для новых интегралов будет ϕ_2 .

Обратно, пусть у нас есть связывающие диффеоморфизмы ϕ_1, ϕ_2 . Мы можем заменять канонические интегралы в окрестности всех четырех точек. По условию существуют такие замены, при которых связывающие диффеоморфизмы совпадут. Получаем условие

$$d_1\phi_1d_2^{-1} = d_3\phi_2d_4^{-1},$$

откуда

$$\phi_2 = d_3^{-1}d_1\phi_1(d_4^{-1}d_2)^{-1},$$

что и требовалось доказать. □

Рассмотрим "лево-правое" действие $A \times A$ на $\text{Diffeo}(\mathbb{R}^2, 0)$, заданное по формуле

$$\langle (d_1, d_2), \phi \rangle = d_1\phi d_2^{-1}$$

Обозначим это действие Ξ . Рассмотрим так же действие группы $\mathbb{Z}^2 = \langle a \rangle, \langle a, \phi \rangle = \phi^{-1}$. В результате произведения этих действий получим действие группы $A \times A \rtimes \mathbb{Z}^2$ на $\text{Diffeo}(\mathbb{R}^2, 0)$. Обозначим его $\tilde{\Xi}$.

Теорема 1.3 (Критерий гладкой эквивалентности особенностей типа фокус-фокус).

1. Две фокусные особенности сложности 2 с положительными кольцами сильно послойно гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда их связывающие диффеоморфизмы лежат в одной орбите действия Ξ .
2. Две фокусные особенности сложности 2 с положительными кольцами послойно гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда их связывающие диффеоморфизмы лежат в одной орбите действия $\tilde{\Xi}$.

Доказательство. Первое утверждение является очевидным следствием леммы 1.7 и утверждения 1.10. Действие группы \mathbb{Z}_2 возникает, потому что особые точки можно менять местами. При такой перестановке связывающий диффеоморфизм заменяется на обратный. Теорема доказана. \square

Аналогичное утверждение верно и для C^k -эквивалентности, нужно только заменить допустимые диффеоморфизмы на C^k -допустимые.

Займемся теперь описанием класса допустимых диффеоморфизмов.

Теорема 1.4 (Об устройстве группы допустимых диффеоморфизмов). *Диффеоморфизм ϕ окрестности нуля в \mathbb{R}^2 допустим тогда и только тогда, когда он представим в одной следующих форм:*

1. $\phi(z) = z\psi(z), \psi(0) \neq 0, z = x + iy$
2. $\phi(z) = \bar{z}\psi(z), \psi(0) \neq 0, z = x + iy$

Доказательство.

Необходимость.

Покажем, что из допустимости следует представимость в указанном виде. По определению допустимости, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^2, 0) \\ \downarrow zw & & \downarrow zw \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

Пусть $\Phi = (f, g)$. Тогда

$$\phi(zw) = f(z, w)g(z, w)$$

Имеем

$$f(0, w)g(0, w) = \phi(0) = 0$$

Отсюда, в силу невырожденности Φ , следует, что в некоторой окрестности нуля один из сомножителей обращается в ноль. Геометрически это означает, что трансверсально пересекающиеся в особой точке плоскости либо сохраняются, либо меняются местами.

Без ограничения общности можно считать, что $f(0, w) = 0$. Тогда существует разложение

$$f(z, w) = zh(z, w) + \bar{z}k(z, w) \quad (6)$$

Аналогично,

$$f(z, 0)g(z, 0) = 0$$

При этом $g(z, 0) = 0$ (в силу диффеоморфности разные плоскости переходят в разные). Имеем

$$g(z, w) = ws(z, w) + \bar{w}t(z, w) \quad (7)$$

Тогда

$$\phi(zw) = f(z, w)g(z, w) = (zh(z, w) + \bar{z}k(z, w))(ws(z, w) + \bar{w}t(z, w))$$

В силу невырожденности, в тейлоровском разложении $\phi(zw)$ должны присутствовать члены порядка 2. Поэтому, либо $h(0) \neq 0$, либо $k(0) \neq 0$.

Рассмотрим случай $h(0) \neq 0$. Если при этом $t(0) \neq 0$, то разложение $\phi(zw)$ содержит член вида $cz\bar{w}$, что невозможно. Поэтому $t(0) = 0$, а $s(0) \neq 0$.

Выберем разложения (6), (7) так, чтобы в разложении k в ряд по z, w, \bar{z}, \bar{w} не было z (все члены, содержащие z можно вынести в первое слагаемое разложения (6)), а в разложении t не было w . Покажем, что $k(z, w) = t(z, w) = 0$.

Предположим противное. Пусть m — минимальная степень одночлена, входящего в k , n — в t . Возможно два случая:

1. $m \neq n$. Без ограничения общности, $m < n$. Тогда

$$\phi(zw) = zwhs + w\bar{z}s(0)k_m[\bar{z}, w, \bar{w}] + \text{члены порядка } > m + 2, \quad (8)$$

где k_m — полином степени m от z, w, \bar{w} . Все одночлены $w\bar{z}s(0)k_m$ является членами ряда для $\phi(zw)$. Действительно, в двух других слагаемых разложения (8) нет подобных им одночленов. Но все члены ряда для $\phi(zw)$ должны иметь вид $(zw)^\alpha(\bar{z}\bar{w})^\beta$. Отсюда $k_m = 0$. Противоречие.

2. $m = n$ Рассуждая аналогично, получаем, что

$$w\bar{z}s(0)k_m[\bar{z}, w, \bar{w}] + z\bar{w}h(0)t_m[\bar{w}, z, \bar{z}] = 0$$

Второе слагаемое должно делиться на w , поэтому $z\bar{w}h(0)t_m = 0$ и $t_m = 0$. Противоречие.

Получаем

$$\phi(zw) = f(z, w)g(z, w) = (zh(z, w))(ws(z, w)) = zwhs,$$

откуда

$$\phi(z) = zh(z, 1)s(z, 1),$$

что и требовалось доказать. В случае $k(0) \neq 0$ аналогично получаем

$$\phi(z) = \bar{z}k(z, 1)t(z, 1)$$

Достаточность

Пусть ϕ имеет вид $z\psi(z)$. Зададим поднятие явными формулами. Положим

$$\Phi(z, w) = \begin{cases} z \\ w\psi(zw). \end{cases}$$

Это, очевидно, диффеоморфизм. Далее,

$$\tilde{z}\tilde{w} = zw\psi(zw) = \phi(zw),$$

что и требовалось доказать.

Осталось показать, что комплексное сопряжение — допустимый диффеоморфизм. Зададим поднятие следующими формулами:

$$\begin{cases} \tilde{z} = \bar{z} \\ \tilde{w} = \bar{w} \end{cases}$$

Теорема доказана. □

Следствие 1.4.1. *Всякую функцию $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, такую что $\text{grad } f(0, 0) \neq 0$ можно включить в допустимый диффеоморфизм в качестве компоненты f_2 .*

Доказательство. Запишем условие допустимости в вещественном виде.

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= (x + iy)(u + iv) = \\ &= xu - yv + i(xv + yu) \\ &\begin{cases} f_1 = xu - yv \\ f_2 = xv + yu \end{cases} \end{aligned}$$

Всякую функцию f_2 , сохраняющую ноль, можно представить в виде:

$$f_2 = xv + yu$$

Положим

$$f_1 = xu - yv$$

Условие $\text{grad } f(0, 0) \neq 0$ гарантирует то, что $u(0, 0) + iv(0, 0) \neq 0$. Пара f_1, f_2 образует допустимый диффеоморфизм. Утверждение доказано. □

Вернёмся теперь к вопросу поднятия заданного диффеоморфизма базы до гладкой эквивалентности фокусных особенностей с двумя точками на слое. Мы знаем, что для существования такого поднятия необходимо и достаточно, чтобы этот диффеоморфизм базы поднимался до диффеоморфизма окрестностей особых точек. Пусть теперь нам заранее известно, что особенности гладко эквивалентны. Пусть некоторый диффеоморфизм базы поднимается до диффеоморфизма окрестностей первых особых точек. Следует ли отсюда, что он может быть поднят и до диффеоморфизма окрестностей вторых особых точек? Очевидно, можно переформулировать этот вопрос так: Пусть задан некоторый автоморфизм базы особенности типа фокус-фокус с двумя точками на слое, поднимаемый до послыонного автоморфизма окрестности первой особой точки. Может ли он быть поднят и до автоморфизма окрестности второй особой точки? Ответ, вообще говоря, отрицательный. Дело в том, что возникающие замены канонических интегралов имеют вид $d, \phi^{-1}d\phi$, где ϕ — связывающий диффеоморфизм особенности. Первая замена, по предположению, допустима. Но отсюда никак не вытекает допустимость второй замены. На языке алгебры это означает, что группа допустимых диффеоморфизмов не является нормальной подгруппой в группе всех диффеоморфизмов. Это можно понять из их явного вида. Достаточно рассмотреть $d(z) = iz, \phi(z) = z + 2\bar{z}$.

1.2.4 Полный C^1 -инвариант фокусной особенности сложности два

Построим теперь полный C^1 -инвариант фокусной особенности с двумя особыми точками на слое. Нам понадобится

Лемма 1.8 (О C^k -допустимости). *C^k -диффеоморфизм $(\mathbb{R}^2, 0)$ C^k -допустим тогда и только тогда, когда его разложение до члена порядка k делится на z или на \bar{z} .*

Доказательство.

Достаточность.

Поступим так же, как и при доказательстве теоремы 1.4. Поскольку комплексное сопряжение является допустимым диффеоморфизмом, достаточно рассмотреть случай делимости на z . Существует представление

$$\phi = zh(z),$$

где $h(z) \in C^{k-1}$. Но тогда, положив

$$\Phi(z, w) = \begin{cases} z \\ wh(zw), \end{cases}$$

получим C^k -поднятие ϕ .

Доказательство необходимости дословно повторяет доказательство теоремы 1.4. \square

Действие $A(C^1) \times A(C^1) \times \mathbb{Z}_2$ на $\text{Diffeo}(\mathbb{R}^2, 0)$ порождает действие той же группы на дифференциалах в нуле. Имеет место следующая

Лемма 1.9. Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — связывающие диффеоморфизмы некоторых фокусных особенностей. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Дифференциалы ϕ_1 и ϕ_2 лежат в одной орбите действия $A(C^1) \times A(C^1) \times \mathbb{Z}_2$.
2. При некотором, и тогда при любом выборе канонических интегралов

$$\frac{|\partial\phi_1/\partial\bar{z}|}{|\partial\phi_1/\partial z|} = \frac{|\partial\phi_2/\partial\bar{z}|}{|\partial\phi_2/\partial z|}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассматривать лишь линейные допустимые диффеоморфизмы. Пусть

$$d\phi(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$$

Поскольку связывающие диффеоморфизмы всегда являются собственными, левая и правая допустимые замены либо обе собственные, либо обе несобственные.

Рассмотрим сначала действия собственными допустимыми диффеоморфизмами. Собственный линейный допустимый диффеоморфизм — это умножение на комплексное число. Орбита $d\phi$ при лево-правом действии имеет вид

$$d\phi_{\gamma,\delta}(z) = \gamma\delta\alpha z + \gamma\beta\bar{\delta}\bar{z},$$

где γ и δ — произвольные ненулевые комплексные числа. Чтобы найти инвариант этого действия, зададимся вопросом — какие условия надо наложить на

$$d\tilde{\phi}(z) = \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}\bar{z},$$

чтобы при некоторых γ и δ выполнялось равенство

$$d\tilde{\phi}(z) = d\phi_{\gamma,\delta}(z). \tag{9}$$

Имеем,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \gamma\delta\alpha \\ \tilde{\beta} &= \gamma\beta\bar{\delta}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\delta}{\bar{\delta}} = \frac{\tilde{\alpha}\beta}{\tilde{\beta}\alpha}. \tag{10}$$

Выражение в левой части равенства по модулю равно единице, откуда

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \right|. \tag{11}$$

Обратно, если верно равенство (11), то уравнение (10) разрешимо относительно δ и представление (9) существует.

Таким образом, отношение

$$\frac{|\partial\phi/\partial\bar{z}|}{|\partial\phi/\partial z|}$$

является полным инвариантом действия линейных собственных допустимых диффеоморфизмов на линейные связывающие диффеоморфизмы. Аналогично рассматривается несобственный случай. Наконец, легко показать, что при замене связывающего диффеоморфизма на обратный отношение не меняется. Лемма доказана. \square

Теорема 1.5 (О полном C^1 -инварианте). *Пусть ϕ — связывающий диффеоморфизм фокусной особенности с двумя точками на слое. Тогда выражение*

$$\mu(\phi) = \frac{|\partial\phi/\partial\bar{z}|}{|\partial\phi/\partial z|}, \quad (12)$$

задает полный C^1 -инвариант особенности.

Доказательство. Пусть две особенности C^1 -эквивалентны. Тогда их связывающие диффеоморфизмы лежат в одной орбите действия $A(C^1) \times A(C^1) \times \mathbb{Z}_2$. Это же, очевидно, верно и для их дифференциалов. Тогда, в силу леммы 1.9, μ -инвариант у них совпадает.

Обратно, пусть значения μ -инварианта совпали. Тогда существует C^1 -допустимое преобразование, приводящее $d\phi_1$ к $d\phi_2$. Это означает, что допустимыми заменами координат в окрестности особых точек, мы можем добиться того, чтобы дифференциалы связывающих диффеоморфизмов совпали. Тогда $\phi_1^{-1}\phi_2$ имеет тождественный дифференциал. В силу леммы о C^k -допустимости $d = \phi_1^{-1}\phi_2$ C^1 -допустим. Но $\phi_2 = \phi_1 d$, поэтому соответствующие особенности послойно C^1 -эквивалентны. Теорема доказана. \square

Примечание 1.8. Лемма о C^k -допустимости в сущности дает нам универсальный рецепт для вычисления полных C^k -инвариантов фокусных особенностей: нужно вычислять инварианты лево-правого действия полиномов степени k , делящихся на z (или \bar{z}), на всех полиномах той же степени.

Укажем формулу для μ в вещественных координатах.

Утверждение 1.11. *Если дифференциал связывающего диффеоморфизма имеет вид*

$$d\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то

$$\mu = \sqrt{\frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{(a+d)^2 + (b-c)^2}}$$

Для вычисления μ -инварианта нужно знать производные связывающего диффеоморфизма особенности. В симплектическом случае их можно выразить через собственные значения линеаризации $\text{sgrad } H$ в особых точках.

Пусть x — особая точка типа фокус–фокус. Собственные значения линеаризации $\text{sgrad } H$ в точке x имеют вид $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$. Укажем канонический способ выбрать одно из четырех собственных значений для каждой из особых точек на слое.

Каждой из пар $\lambda, \bar{\lambda}$ и $-\lambda, -\bar{\lambda}$ соответствует двумерное инвариантное подпространство. Эти подпространства являются касательными плоскостями к трансверсально пересекающимся в особой точке сферам. Таким образом, выбору одной из пар соответствует выбор одного из инвариантных подпространств, а выбор представителя внутри пары — выбору ориентации в этом подпространстве.

Без ограничения общности можно считать, что вещественные части собственных значений линеаризации $\text{sgrad } H$ отличны от нуля в каждой из особых точек. Если это не так, то в качестве гамильтониана можно выбрать другую функцию от H, f , для которой это условие выполнено (поскольку нас интересует лишь слоение, выбор гамильтониана не имеет значения).

Теперь для каждой особой точки можно выбрать пару собственных значений с положительной вещественной частью. Геометрический смысл этого условия состоит в следующем.

Рассмотрим поток $\text{sgrad } H$ на особом слое. Для каждой особой точки x этот поток втекает в x по одной сфере, а вытекает — по другой. Необходимо выбрать пару собственных значений, соответствующую той сфере, по которой поток вытекает.

Чтобы выбрать одно собственное значение из пары, выберем ориентацию на сфере. Это можно сделать для всех сфер одновременно, перенеся ориентацию с близкого к особому слою тора.

Теорема 1.6. *Пусть нам дана особенность типа фокус–фокус с двумя особыми точками x_1, x_2 . Обозначим через λ_1, λ_2 собственные значения линеаризации $\text{sgrad } H$ в точках x_1 и x_2 соответственно, выбранные описанным выше способом. Тогда S^1 -инвариант особенности может быть вычислен по следующей формуле*

$$\mu = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1 + \bar{\lambda}_2|}.$$

Доказательство. Пусть p, q — нормальные координаты в окрестности x_1 , f_1, f_2 — соответствующие канонические интегралы. Имеем

$$H = \alpha f_1 + \beta f_2 + \dots = \alpha(p_1 q_1 + p_2 q_2) + \beta(p_1 q_2 - q_1 p_2) + \dots, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial H}{\partial f_1}(0, 0),$$

$$\beta = \frac{\partial H}{\partial f_2}(0, 0).$$

Следовательно,

$$\text{sgrad } H = \begin{pmatrix} -\alpha p_1 + \beta p_2 \\ -\alpha p_2 - \beta p_1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 \\ \alpha q_2 - \beta q_1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризация этого поля есть

$$A_H = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы есть $\pm\alpha \pm \beta i$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$ (иначе можно поменять знак f_1). Следовательно, согласно описанному выше алгоритму, нужно выбрать пару $\alpha \pm \beta i$.

Далее, в алгоритме указано, что нужно выбрать ориентацию на всех сферах одновременно, перенеся ее с тора. Другой способ получить ту же ориентацию — задать ее при помощи пары векторов $\text{sgrad } H, \text{sgrad } f_2$ (вне особой точки эти вектора независимы). Легко видеть, что ориентация задаваемая этими векторами на диске $p_1 = 0, p_2 = 0$ отрицательна (с точки зрения координат q_1, q_2). Значит, нужно выбрать из пары $\alpha \pm \beta i$ собственное значение, задающее отрицательную ориентацию. Легко проверить, что таким собственным значением является $\alpha - \beta i$. Следовательно, $\lambda_1 = \alpha - \beta i$.

Для второй точки будем иметь

$$H = \gamma \tilde{f}_1 + \delta f_2 + \dots, \quad (14)$$

и $\lambda_2 = \gamma - \delta i$.

Далее,

$$\tilde{f}_1 = a f_1 + b f_2, \quad (15)$$

где a, b - компоненты дифференциала связывающего диффеоморфизма. Подставляя (15) в (14), получаем

$$H = \gamma a f_1 + (\delta + \gamma b) f_2 + \dots \quad (16)$$

Приравнивая (13) и (16), получаем

$$\begin{cases} \alpha = \gamma a, \\ \beta = \delta + \gamma b, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{\gamma}, \\ b = \frac{\beta - \delta}{\gamma}. \end{cases}$$

Используя утверждение 1.11 и учитывая, что $c = 0, d = 1$ (поскольку особенность симплектическая), будем иметь

$$\mu = \sqrt{\frac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2}{(\alpha+\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2}} = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1 + \bar{\lambda}_2|},$$

что и требовалось доказать. \square

1.2.5 Теорема реализации

Докажем обещанное утверждение о реализуемости диффеоморфизмов в качестве связывающих.

Теорема 1.7 (Теорема реализации). *Любой диффеоморфизм вида (4), может быть реализован в качестве связывающего диффеоморфизма какой-либо симплектической особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое.*

Доказательство. Рассмотрим два экземпляра четырехмерной окрестности особой точки типа фокус-фокус. Необходимо склеить эти окрестности в одно симплектическое многообразие так, чтобы связывающий диффеоморфизм совпадал с заданным. Возможность такой склейки следует из следующей леммы:

Лемма 1.10. *Пусть $E_1 \rightarrow D^2$ — лагранжево слоение на кольца, заданное коммутирующими независимыми функциями f_1 и f_2 , причем траектории $\text{sgrad } f_2$ замкнуты с периодом 2π , $E_2 \rightarrow D^2$ — такое же слоение, заданное функциями \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 , траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_2$ замкнуты с периодом 2π . Пусть ϕ — произвольный диффеоморфизм $(D^2, 0) \rightarrow (D^2, 0)$ вида (4). Пусть фиксирована пара замкнутых траекторий $\text{sgrad } f_2$ и $\text{sgrad } \tilde{f}_2$ на слое, висящем над нулем. Тогда ϕ можно поднять до послойного симплектоморфизма окрестностей замкнутых траекторий. Этот симплектоморфизм сохраняет ориентацию на каждом слое, заданную косыми градиентами f_1, f_2 для первого слоения и \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 для второго.*

Доказательство. Слоение E_1 задается функциями f_1 и f_2 . Положим

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f(f_1, f_2) \\ \tilde{f}_2 = f_2, \end{cases}$$

где $(f, y) = \phi$. \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 задают то же самое слоение, причем траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_2$ замкнуты с периодом 2π . Таким образом замена $f_1, f_2 \rightarrow \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ сводит задачу к случаю поднятия тождественного диффеоморфизма. Покажем теперь, что $p_1 = \tilde{f}_1, p_2 = \tilde{f}_2$ можно дополнить до канонической системы координат p_1, q_1, p_2, q_2 , заданной в окрестности замкнутой траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_2$. В построенных координатах искомый симплектоморфизм будет задаваться тождественным отображением.

Поскольку слоение тривиально, к нему можно выбрать трансверсальное лагранжево сечение $v(p_1, p_2): D^2 \rightarrow E$. На этом сечении положим $q_1 = q_2 = 0$. На слоении определено пуассоново действие абелевой группы \mathbb{R}^2 , порожденное сдвигами вдоль интегральных траекторий $\text{sgrad } \tilde{f}_1, \text{sgrad } \tilde{f}_2$. Поскольку траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_2$ замкнуты с периодом 2π , оно сводится к действию цилиндра $\mathbb{R} \times S^1$. С помощью этого действия разнесем координаты q_1, q_2 по окрестности замкнутой траектории. Полученная система координат является искомой.

Сохранение ориентации на слое следует из того, что ϕ - собственный. Лемма доказана. \square

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть первая особенность задается функциями f_1, f_2 , а вторая \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 . Рассмотрим поведение векторного поля $\text{sgrad } f_1$ в окрестности особой точки. Пересечение особого слоя с шаровой окрестностью особой точки — это два трансверсально пересекающихся диска. Легко видеть, что на одном диске $\text{sgrad } f_1$ имеет в особой точке сток, а на другом источник. При склейке двух таких шаровых окрестностей в одну особенность будем склеивать сток с источником.

Фиксируем в окрестности особых точек на склеиваемых дисках замкнутые траектории $\text{sgrad } \tilde{f}_1$ и $\text{sgrad } \tilde{f}_2$ соответственно. По лемме заданный нам диффеоморфизм поднимается до послыйного симплектоморфизма окрестностей замкнутых траекторий, при этом он сохраняет ориентацию, заданную $\text{sgrad } \tilde{f}_1, \text{sgrad } \tilde{f}_2$. Это гарантирует нам правильную ориентацию границ колец при склейке по симплектоморфизму. Результатом склейки является некомпактное симплектическое многообразие. Рассмотрим на нем функцию $H = f_1$. Гамильтонова система $\text{sgrad } H$ имеет особенность типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое и заданным связывающим диффеоморфизмом. Теорема доказана. \square

Следствие 1.7.1. *Существует однопараметрическое семейство гладко неэквивалентных особенностей типа фокус-фокус.*

Доказательство. Рассмотрим семейство диффеоморфизмов

$$\phi_a = \begin{cases} \tilde{x} = x + ay \\ \tilde{y} = y, \end{cases}$$

где $a > 0$. Для любого a ϕ_a можно реализовать в виде связывающего диффеоморфизма некоторой фокусной особенности. Легко видеть, что

$$\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}.$$

Следовательно, все эти особенности неэквивалентны даже в классе C^1 . \square

Следствие 1.7.2. *Для того, чтобы на гладкой особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое можно было ввести симплектическую структуру такую, что координаты p_1, q_1, p_2, q_2 в окрестности каждой особой точки являлись бы каноническими, необходимо и достаточно, чтобы связывающий диффеоморфизм в этих координатах имел вид (4).*

Доказательство. Необходимость была доказана ранее. Докажем достаточность. Пусть связывающий диффеоморфизм ϕ данной гладкой фокусной особенности имеет вид (4). По теореме реализации можно построить симплектическую особенность с таким же связывающим диффеоморфизмом. Поскольку связывающие диффеоморфизмы совпадают, наши гладкая и симплектическая особенность гладко послойно эквивалентны. Перенесем при помощи этой эквивалентности симплектическую структуру на гладкую особенность. Утверждение доказано. \square

Следствие 1.7.3. *На всякой гладкой особенности типа фокус-фокус с двумя особыми точками на слое можно ввести симплектическую структуру.*

Доказательство. Покажем, что заменой координат в окрестности одной из особых точек, можно привести связывающий диффеоморфизм к виду (4). Пусть в исходных координатах связывающий диффеоморфизм ϕ задается функциями f_1 и f_2 . Пусть также ϕ^{-1} задается функциями g_1 и g_2 . По лемме 1.4.1 g_2 можно включить в допустимый диффеоморфизм ψ . Поскольку ψ допустим, существует замена координат в окрестности второй точки, поднимающая ψ . В новых координатах связывающим диффеоморфизмом будет $\psi\phi$. Поскольку $g_2(f_1, f_2) = y$, это отображение имеет вид (4). Утверждение доказано. \square

1.2.6 Случай нескольких особых точек на слое

Распространим теперь полученные результаты на общий случай. Пусть имеется особенность типа фокус-фокус с n особыми точками на слое, $n > 2$. В окрестности каждой особой точки имеются свои нормальные координаты и, соответственно, свои канонические интегралы $f_1^k, f_2^k, 1 \leq k \leq n$. В

симплектическом случае все функции f_2^k можно считать совпадающими. Особый слой разбивается в объединение n колец, и на каждом кольце возникает свой связывающий диффеоморфизм ϕ_k (при этом предполагается, что фиксировано направление обхода особых точек и первая точка). Возникает набор $(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \text{Diffeo}(\mathbb{R}^2, 0)^n$, $\phi_1 \dots \phi_n = id$.

Лемма 1.11. *Если у двух особенностей наборы связывающих диффеоморфизмов совпадают, то они гладко эквивалентны.*

Аналогично случаю двух точек, это условие не является необходимым. Причина опять же в неоднозначности набора связывающих диффеоморфизмов. Этот набор определен однозначно лишь с точностью до действия группы D_n , которая является группой симметрии особенности типа фокус-фокус (ее действие переставляет особые точки) и группы A^n , где A — группа допустимых диффеоморфизмов (каждый сомножитель заменяет координаты в окрестности одной из точек). Опишем эти действия явно.

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_n &= \langle a, b \mid a^n = e, b^2 = e \rangle \\ \langle a, (\phi_1, \dots, \phi_n) \rangle &= (\phi_2, \dots, \phi_n, \phi_1) \\ \langle b, (\phi_1, \dots, \phi_n) \rangle &= (\phi_n^{-1}, \dots, \phi_1^{-1}) \\ \langle (d_1, \dots, d_n), (\phi_1, \dots, \phi_n) \rangle &= (d_1 \phi_1 d_2^{-1}, \dots, d_n \phi_n d_1^{-1}) \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1.8. *Две особенности типа фокус-фокус сложности n послойно гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда их наборы связывающих диффеоморфизмов лежат в одной орбите описанного выше действия группы $A^n \rtimes D_n$.*

Доказательство аналогично случаю двух точек.

Теорема 1.9 (О полном C^1 -инварианте для случая n точек).

1. У фокусной особенности с n особыми точками на слое имеется $2n - 3$ C^1 -инварианта. Этот набор является полным C^1 -инвариантом особенности.
2. В симплектическом случае эти инварианты могут быть выражены явно через собственные значения линеаризации $\text{sgrad } H$ в особых точках.

Доказательство. Заметим, что поскольку речь идет о размерности, можно считать, что порядок точек фиксирован и группа D_n не действует, а так же рассматривать только собственные линейные допустимые диффеоморфизмы. Для каждого из n колец, прилегающих к особым точкам, можно записать μ -инвариант. Получим $n - 1$ инвариант (последний связывающий

диффеоморфизм однозначно определен предыдущими, поэтому инвариантов на единицу меньше, чем колец). Остальные $n - 2$ инварианта возникают из «условий согласованности». Дело в том, что мы не можем выбирать пары допустимых диффеоморфизмов для каждого кольца независимо: диффеоморфизмы делаются в окрестности особых точек, поэтому выбрав пару для одного кольца, мы задаем один из диффеоморфизмов для каждого из колец-соседей. У нас есть $n - 1$ кольцо (связывающий диффеоморфизм на последнем, как уже было замечено, является зависимым от других), соответственно $n - 2$ пары смежных колец. Каждая пара дает одно условие согласованности. Выпишем это условие явно. Пусть

$$\phi_i(z) = \alpha_i z + \beta_i \bar{z},$$

а допустимые диффеоморфизмы задаются комплексными числами d_1, \dots, d_n . Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_i &= d_i \phi_i d_{i-1}^{-1}, \\ \tilde{\phi}_{i+1} &= d_{i+1} \phi_{i+1} d_i^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_i(z) &= d_{i-1}^{-1} d_i \alpha_i z + \bar{d}_{i-1}^{-1} d_i \beta_i \bar{z}, \\ \tilde{\phi}_{i+1}(z) &= d_i^{-1} d_{i+1} \alpha_{i+1} z + \bar{d}_i^{-1} d_{i+1} \beta_{i+1} \bar{z},\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_{i+1}}{\alpha_i \alpha_{i+1}} = \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}} = \frac{\bar{\beta}_i \tilde{\beta}_{i+1}}{\beta_i \beta_{i+1}},$$

откуда

$$\nu_i = \arg \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{\beta_i \beta_{i+1}}$$

является инвариантом. Рассматривается только аргумент, поскольку модуль этого выражения есть просто произведение μ -инвариантов для соседних колец. Легко показать, что μ -инварианты вместе с ν -инвариантами образуют полный набор C^1 -инвариантов.

Примечание 1.9. Эти формулы задают инварианты особенности лишь по модулю действия некоторой дискретной группы. Для полного описания инвариантов, нужно описать преобразования, происходящие с числами ν_i при этом действии.

После того, как мы выразили инварианты явно через производные связывающих диффеоморфизмов, второе утверждение теоремы становится очевидным. Теорема доказана. \square

В случае n особых точек также верны теорема реализации и следствие из нее. Формулируются и доказываются они аналогично случаю двух точек.

2 Топологическая классификация в многомерном случае

2.1 Дальнейшие свойства фокусных особенностей с двумя степенями свободы

В этом разделе мы установим некоторые дополнительные свойства фокусных особенностей с двумя степенями свободы. Эти результаты понадобятся нам при изучении многомерных особенностей, но представляют также и самостоятельный интерес.

2.1.1 Описание группы автоморфизмов

В этой главе мы выясним, как устроены автоморфизмы фокусных особенностей систем с двумя степенями свободы. Все особенности предполагаются нерасщепляемыми.

Определение 2.1. Автоморфизм фокусной особенности — это ее послыйный симплектоморфизм в себя, тождественный на базе слоения.

Пусть $\text{Aut}(F)$ — группа автоморфизмов особенности F . Как устроена эта группа?

Для начала докажем одну общую лемму.

Лемма 2.1. Пусть (M^{2n}, ω, F) — интегрируемая гамильтонова система и $\phi: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ — симплектоморфизм, тождественный на базе слоения Лиувилля. Предположим так же, что существует неособая точка $x \in M^{2n}$ такая, что $\phi(x)$ и x лежат в одной орбите пуассонова действия. Тогда найдется функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что на всех орбитах, проходящих через малую окрестность x , ϕ есть сдвиг вдоль траекторий $\text{sgrad } f(F(x))$ на время 1.

Доказательство. Пусть L — некоторое лагранжево сечение нашего слоения, проходящее через точку x . Пуассоново действие (при фиксированной системе координат на базе слоения f^1, \dots, f^n) задает отображение $\Pi: L \times \mathbb{R}^n \rightarrow M^{2n}$. По предположению $\phi(x) = \Pi(x, y)$. Легко видеть, что дифференциал Π в точке (x, y) невырожден, и следовательно Π диффеоморфно отображает окрестность $(x, y) \in (L, \mathbb{R}^n)$ на окрестность $\phi(x) \in M^{2n}$, откуда $\phi(z) = \Pi(z, y(z))$ для z , лежащих на L в окрестности x , где $y: L \rightarrow \mathbb{R}^n$. Поскольку L — сечение, можно считать, что отображение y задано на базе слоения.

Рассмотрим на базе слоения 1-форму $\alpha = y_i df^i$. Легко видеть, что условие лагранжевости $\phi(L)$ равносильно замкнутости этой формы. Следовательно, в малой окрестности точки $F(x)$ существует представление $\alpha = df$, и ϕ , ограниченное на L , есть сдвиг на время 1 вдоль траекторий косога градиента f .

Пусть ψ — сдвиг вдоль траекторий косоугольного градиента f на единицу. Тогда $\psi|_L = \phi|_L$. Покажем, что они совпадают всюду на орбитах, проходящих через L . Пусть $x = \Pi(x_L, y), x_L \in L$. Тогда

$$\phi(x) = \phi(\Pi(x_L, y)) = \Pi(\phi(x_L), y) = \Pi(\psi(x_L), y) = \psi(\Pi(x_L, y)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что сдвиг вдоль траекторий косоугольного градиента функции на базе слоения коммутирует с любым другим симплектоморфизмом, тождественным на базе слоения. Лемма доказана. \square

Здесь и далее в этом разделе независимые инволютивные интегралы нашей особенности мы будем обозначать f_1, f_2 , причем траектории косоугольного градиента f_2 замкнуты с периодом 2π .

Пусть $f = f(f_1, f_2)$. Тогда векторное поле $\text{sgrad } f$ касается слоев нашего слоения и его поток является автоморфизмом. Будем называть такие автоморфизмы гамильтоновыми.

Утверждение 2.1. *Предположим, автоморфизм ϕ фокусной особенности оставляет на месте все ее особые точки. Тогда ϕ гамильтонов.*

Доказательство.

1. **Если ϕ оставляет на месте все особые точки, то он оставляет на месте и кольца особого слоя.**

Противное, очевидно, возможно только если наша особенность имеет ровно две особые точки. Рассмотрим поток $\text{sgrad } f_1$ в окрестности одной из этих точек. На одном из колец этот поток втекает в особую точку, а на другом вытекает. Поскольку любой автоморфизм обязан сохранять поток $\text{sgrad } f_1$, кольца переставиться не могут.

2. **Если ϕ оставляет на месте хотя бы одно кольцо, то ϕ гамильтонов.**

Если мы рассмотрим произвольную точку x на кольце, то через ее окрестность проходят все торы Лиувилля, достаточно близкие к особому слою. По лемме 2.1 ϕ гамильтонов на этих торах. Но тогда по непрерывности он гамильтонов и на особом слое.

\square

Множество гамильтоновых симплектоморфизмов образует подгруппу в $\text{Aut}(F)$. Обозначим эту подгруппу Ham .

Пусть сложность F равна s . Занумеруем особые точки особенности F числами $1, \dots, s$ так, что соседние точки получают соседние номера. Любой автоморфизм F как-то переставляет эти особые точки. Тем самым определен гомоморфизм в группу перестановок $\psi: \text{Aut}(F) \rightarrow S_s$. Очевидно следующее

Утверждение 2.2. *Образ ψ есть подгруппа в циклической группе, порожденной циклом $(1, \dots, s)$.*

Утверждение 2.3. $\text{Aut}(F) \simeq \mathbb{Z}_k \times H$, где $k|s$, где $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle, a(x_m) = x_{m+k} \pmod{s}$ для всякой особой точки x_m .

Доказательство. Возьмем произвольный автоморфизм ϕ такой, что $\psi(\phi) = a$, где a — произвольная образующая в $\text{Im } \psi$. Тогда $\phi^k = h \in \text{Ham}$. Пусть h — это сдвиг вдоль траекторий косоуго градиента некоторого интеграла f на единицу. Рассмотрим сдвиг вдоль траекторий косоуго градиента f на $\frac{1}{k}$ и обозначим его j . $j^k = h$ и, поскольку H лежит в центре $\text{Aut}(F)$, имеем $(j^{-1}\phi)^k = e$. Легко видеть, что $\text{Aut}(F) = \text{Ham} \times \langle j^{-1}\phi \rangle$, что и требовалось. \square

Примечание 2.1. Рассмотрим переменные действия в окрестности фокусной особенности. Одна из них — это f_2 . Любая другая имеет в особой точке ветвление. Легко видеть, что элементы группы \mathbb{Z}_k вне особого слоя действуют как сдвиги на время 1 вдоль траекторий $\text{sgrad } \frac{m}{k}s$, где s — многозначная переменная действия в окрестности фокусной особенности.

Примечание 2.2. Разложение $\text{Aut}(F) = \mathbb{Z}_k \times \text{Ham}$ не является однозначным. Действительно, если a — образующая \mathbb{Z}_k , а h — сдвиг вдоль траектории $\text{sgrad } 2\pi \frac{m}{k}f_2$ на единицу, то ah также можно взять в качестве образующей, и мы получим другое разложение.

Поскольку траектории $\text{sgrad } f_2$ имеют период 2π , сдвиги вдоль этих траекторий порождают в H подгруппу, изоморфную S^1 .

Утверждение 2.4. Пусть $\text{Aut}(F) = \mathbb{Z}_k \times H$. Тогда все элементы конечного порядка в $\text{Aut}(F)$ лежат в ее «компактной части» $\text{Aut}_0(F) = \mathbb{Z}_k \times S^1$.

Доказательство. Достаточно проверить, что все элементы конечного порядка в H на самом деле лежат в S^1 . Пусть $h \in H, h^k = e$. h гамильтонов и является сдвигом на единицу вдоль траекторий косоуго градиента $f(f_1, f_2)$. Равенство $h^k = e$ означает, что траектории $\text{sgrad } f$ имеют период k . Тогда траектории $\text{sgrad } \frac{kf}{2\pi}$ имеют период 2π , и, следовательно, $\frac{kf}{2\pi}$ — переменная действия. Но единственные однозначные переменные действия в окрестности фокусной особенности — это f_2 и $-f_2$. Следовательно, $f = \pm \frac{2\pi f_2}{k}$, и $h \in S^1$. \square

2.1.2 Всякая фокусная особенность *Aut*-эквивариантно послонно гомеоморфна модельной

В книге [4] (раздел 9.8.3) построена «модельная» фокусная особенность с s точками на слое. Эта особенность симметрична и для нее $\text{Aut} = \mathbb{Z}_s \times H$. Модельную особенность сложности s будем обозначать $F(s)$.

Утверждение 2.5. Пусть F — фокусная особенность с s особыми точками на слое. Тогда существует гомеоморфизм $\psi: F \rightarrow F(s)$, индуцирующий вложение $\text{Aut}_0(F)$ в $\text{Aut}_0(F(s))$. Другими словами, существует также мономорфизм $\psi^*: \text{Aut}_0(F) \rightarrow \text{Aut}_0(F(s))$ такой, что для любого

$\phi \in \text{Aut}_0(F)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & F(s) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi^*(\phi) \\ F & \xrightarrow{\psi} & F(s) \end{array}$$

Доказательство. Как мы знаем, $\text{Aut}_0(F) \simeq \mathbb{Z}_k \times S^1$, $\text{Aut}_0(F(s)) \simeq \mathbb{Z}_s \times S^1$. Поскольку k делит s , \mathbb{Z}_k вкладывается в \mathbb{Z}_s , а $\text{Aut}(F)$ в $\text{Aut}(F(s))$. Возьмем этот мономорфизм в качестве ψ^* . Далее будем считать, что $\text{Aut}(F)$ действует на обеих особенностях, имея ввиду построенный мономорфизм. Наша задача состоит в построении $\text{Aut}(F)$ -эквивариантного гомеоморфизма ψ .

Рассмотрим произвольную особую точку x_1 особенности F и произвольную особую точку y_1 особенности $F(s)$. В окрестности особой точки типа фокус-фокус существует комплексные координаты z, w такие, что отображения момента в них имеет вид zw . Окрестность $U(x_1)$ можно отобразить на окрестность $U(y_1)$ с помощью отображения, тождественного в этих координатах. Это отображение, очевидно, $\text{Aut}(F)$ -эквивариантно. Далее, наш гомеоморфизм однозначным образом продолжается на орбиту $U(x_1)$. Если в результате остались незадействованные точки, процедуру нужно повторить необходимое число раз. При этом может получиться так, что гомеоморфизмы, построенные нами для разных точек, различны на базе слоения, и тогда продолжить их на всю особенность не получится. Для того, чтобы этого избежать, нужно предварительно согласовать выбор z, w для разных точек. Возможность такого согласования следует из S^1 -эквивариантного варианта леммы 9.9 из [4]. S^1 -эквивариантный гомеоморфизм окрестности особой точки типа фокус-фокус, поднимающий заданный диффеоморфизм ϕ базы, может быть задан уже известными нам формулами

$$\begin{cases} \tilde{z} = \frac{\phi(zw)}{zw} z, \\ \tilde{w} = w. \end{cases}$$

Примечание 2.3. Это отображение непрерывно, но, вообще говоря, не дифференцируемо.

Теперь нужно продолжить гомеоморфизм с окрестностей особых точек на окрестность особого слоя $U(L)$. Сделать это не составляет труда, поскольку на $U(L) \setminus (\bigcup U(x_i))$ наше действие свободно и имеет сечение. \square

Примечание 2.4. Существование S^1 -эквивариантного гомеоморфизма между фокусными особенностями одинаковой сложности было отмечено в [26].

Отметим еще одно важное свойство модельной особенности.

Утверждение 2.6. *Модельная фокусная особенность имеет структуру комплексной интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Aut_0 действует на ней биголоморфно и симплектично.*

Доказательство. Слоение на модельной фокусной особенности есть слоение на множества уровня голоморфной функции. Комплексная симплектическая форма задается в окрестности каждой особой точки формулой $dw \wedge dz$ — отображения склейки окрестностей сохраняют эту форму. Легко видеть, что элементы Aut_0 так же сохраняют эту форму, что и требовалось доказать. \square

2.1.3 Сингулярная переменная «угол» на фокусной особенности

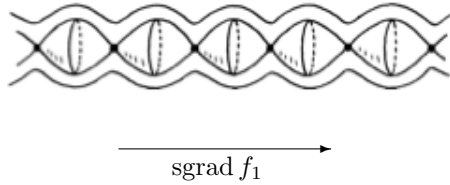


Рис. 6: Особенность $F(\infty)$

Фундаментальная группа фокусной особенности изоморфна \mathbb{Z} и порождается циклом «обходящим» особые точки. Покажем, что можно в окрестности особого слоя можно построить некий аналог переменной «угол» — функцию f_3 , задающую параметризацию этого цикла. Существование

этой «угловой» переменной будет неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

Поскольку с многозначной угловой переменной работать неудобно, перейдем к универсальному накрытию. А именно рассмотрим универсальное накрытие над модельной особенностью $F(m)$. Это накрытие одно и то же для всех m и является модельной особенностью $F(\infty)$.

Стрелкой на рисунке 6 указано направление потока $\text{sgrad } f_1$. Мы хотим построить функцию, растущую в этом направлении.

Лемма 2.2. *На модельной фокусной особенности $F(\infty)$ существует гладкая функция f_3 со следующими свойствами:*

1. f_3 принимает последовательные целые значения в особых точках.
2. f_3 не имеет особенностей вне особых точек.
3. $\{f_1, f_3\} > 0$ всюду, кроме особых точек.
4. $\{f_2, f_3\} = 0$.
5. $f_3(\phi(x)) = f_3(x) + 1$, где ϕ — автоморфизм, переводящий i -ую точку в $i + 1$ -ую.

Доказательство. Сначала построим f_3 в окрестности одной особой точки. Обозначим эту точку x_1 . В окрестности x_1 существуют канонические координаты (p, q) такие, что

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 q_1 + p_2 q_2, \\ f_2 &= p_1 q_2 - q_1 p_2. \end{aligned}$$

Положим

$$f_3 = q_1^2 + q_2^2 - p_1^2 - p_2^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \{f_1, f_3\} &= 2(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2), \\ \{f_2, f_3\} &= 0 \end{aligned}$$

Построенная нами функция в окрестности особой точки удовлетворяет всем требуемым свойствам. Далее, нужно перенести f_3 в окрестность каждой особой точки с помощью соответствующего симплектоморфизма. При этом значения f_3 нужно увеличивать на соответствующие целые числа.

Теперь осталось продолжить f_3 в области между окрестностями особых точек. Достаточно сделать это для одной такой области (далее f_3 продолжается однозначно), например для области между окрестностями x_1 и x_2 . Обозначим эту область как G .

Без ограничения общности можно считать, что окрестности особых точек — это шары в канонических координатах (p, q) . Тогда G расслоена на цилиндры, ограниченные траекториями $\text{sgrad } f_2$. Рассмотрим функцию T , которая есть время движения вдоль траектории $\text{sgrad } f_1$ от одной из границ G . Искомая функция f_3 будет функцией от T, f_1, f_2 . Она должна удовлетворять условию $\partial f_3 / \partial T > 0$ и гладко склеиваться с уже построенной функцией в окрестностях x_1, x_2 . Такую функцию легко построить при помощи разбиения единицы. f_3 так же должна коммутировать с f_2 , но этого условия всегда можно добиться усреднением построенной функцией по действию окружности. \square

2.2 Топологическая классификация нерасщепляемых многомерных фокусных особенностей

2.2.1 Правильные кубические разбиения тора

В этом разделе мы определим понятие правильного кубического разбиения тора и установим некоторые свойства таких разбиений. Правильные кубические разбиения тора понадобятся нам для классификации многомерных фокусных особенностей.

Рассмотрим стандартное разбиение евклидова пространства \mathbb{R}^n на единичные кубы.

Определение 2.2. Разбиение n -мерного тора на кубы будем называть правильным кубическим разбиением, если его можно получить факторизацией стандартного кубического разбиения \mathbb{R}^n по некоторой подгруппе G полного ранга n в группе \mathbb{Z}^n трансляций этого разбиения. Число n будем называть степенью кубического разбиения, число кубов — его сложностью.

Пусть L — правильное кубическое разбиение тора. По определению L получается из стандартной решетки факторизацией по подгруппе полного ранга $G \subset \mathbb{Z}^n$. Действие \mathbb{Z}^n на стандартной решетке определяет действие

\mathbb{Z}^n на L . Таким образом, определено отображение δ группы \mathbb{Z}^n в группу автоморфизмов L . Образ этого отображения обозначим за $\text{Aut}_0(L)$. Ядро δ есть G , поэтому $\text{Aut}_0(L) \simeq \mathbb{Z}^n/G$. $\text{Aut}_0(L)$ действует на множестве кубов разбиения L , а так же на множестве их вершин, транзитивно и свободно.

Насколько однозначно представление L в виде фактора \mathbb{R}^n/G ?

Лемма 2.3. *Два кубических разбиения тора \mathbb{R}^n/G_1 и \mathbb{R}^n/G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда G_2 получается из G_1 композицией некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = x_j$ и $x_i = 0$.*

Доказательство. Предположим, что разбиения \mathbb{R}^n/G_1 и \mathbb{R}^n/G_2 изоморфны, ϕ — изоморфизм. Поскольку группа автоморфизмов правильного кубического разбиения тора действует на нем транзитивно, можно считать, что ϕ переводит образ начала координат в образ начала координат. Тогда ϕ поднимается до автоморфизма стандартной решетки, сохраняющего начало координат. Но такой автоморфизм, очевидно, есть целочисленное и ортогональное преобразование, то есть композиция некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = x_j$ и $x_i = 0$. При этом G_1 он переводит в G_2 , что и требовалось доказать.

В обратную сторону утверждение очевидно. \square

Таким образом, действие \mathbb{Z}^n на L задано неоднозначно, а лишь с точностью до ортогонального автоморфизма \mathbb{Z}^n .

Определение 2.3. Правильное кубическое разбиение тора с фиксированным на нем действием группы \mathbb{Z}^n мы будем называть ориентированным правильным кубическим разбиением тора.

Очевидно следующее

Утверждение 2.7. *Ориентированные правильные кубические разбиения тора находятся во взаимнооднозначном соответствии с подгруппами конечного индекса в \mathbb{Z}^n .*

Пусть теперь L — ориентированное правильное кубическое разбиение тора. Обозначим за Δ_i автоморфизм, соответствующий i -ому базисному вектору \mathbb{Z}^n . Будем называть автоморфизмы Δ_i базисными сдвигами.

Рассмотрим произвольный базисный сдвиг Δ_i . Пусть m_i — его порядок в $\text{Aut}_0(L)$.

Утверждение 2.8. *Если $0 < k < m_i$, то $\Delta_i^k(K) \neq K$ для любого куба K .*

Доказательство. Предположим, что $\Delta_i^k(K) = K$ для некоторого K . Пусть \tilde{K} — любой другой куб. Тогда $\tilde{K} = a(K)$ для некоторого $a \in \text{Aut}_0$. Имеем

$$\Delta_i^k(\tilde{K}) = \Delta_i^k(a(K)) = a(\Delta_i^k(K)) = \tilde{K},$$

откуда Δ_i^k есть тождественное отображение, и $k = m_i$. Здесь мы воспользовались абелевостью Aut_0 . \square

Таким образом, m_i — это число сдвигов, которые нужно сделать в направлении i , чтобы куб перешел в себя. m_i будем называть порядком i -ого базисного сдвига L .

Поскольку $\Delta_i^{m_i}$ есть тождественное отображение, действие \mathbb{Z}^n сводится к действию $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$. Более точно, существует эпиморфизм $\tilde{\delta}: \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n} \rightarrow \text{Aut}_0(L)$, такой что $\delta = \tilde{\delta}\pi$, где π — стандартная проекция $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.

Пусть $\tilde{G} = \text{Ker } \tilde{\delta}$. Обозначим (единственное) правильное кубического разбиение окружности сложности m как $L(m)$.

Утверждение 2.9.

1. Всякое ориентированное правильное кубическое разбиение тора L представимо в виде почти прямого произведения

$$L \simeq L(m_1) \times \cdots \times L(m_n) / \tilde{G},$$

где m_i — порядки базисных сдвигов, $\tilde{G} = \text{Ker } \tilde{\delta}$.

2. \tilde{G} имеет тривиальное пересечение с \mathbb{Z}_{m_i} в $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.
3. Предположим, что существует другое представление

$$L \simeq L(k_1) \times \cdots \times L(k_n) / \tilde{H},$$

причем \tilde{H} имеет тривиальное пересечение с \mathbb{Z}_{k_i} . Тогда

- Числа k_i и m_i совпадают.
- \tilde{G} и \tilde{H} совпадают как подгруппы $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.

Таким образом, ориентированное правильное кубическое разбиения тора имеет однозначное представление в виде почти прямого произведения одномерных разбиений

$$L \simeq L(m_1) \times \cdots \times L(m_n) / \tilde{G}$$

при условии, что \tilde{G} имеет тривиальное пересечение с \mathbb{Z}_{m_i} . Если же разбиение не ориентировано, то разложение в почти прямое произведение может зависеть от ориентации. При изменении ориентации числа m_i могут меняться местами. Две подгруппы в $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$ задают одинаковое разбиение, если они получаются друг из друга композицией некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = 0$ и $x_i = x_j$ (когда $m_i = m_j$).

2.2.2 Классификация фокусных особенностей

В этом разделе мы будем рассматривать особенности ранга 0 типа $(0, 0, n)$, то есть особенности, имеющие только фокусные компоненты. Мы называем их фокусными особенностями степени n . Наша задача состоит в классификации таких особенностей с точностью до послыного гомеоморфизма.

Далее в тексте $F(m)$ обозначает модельную фокусную особенность степени 1 сложности m

Утверждение 2.10. *В окрестности особого слоя фокусной особенности F степени n существует единственное гамильтоново свободное почти всюду действие тора T^n .*

Доказательство. Это утверждение имеет место и в расщепляемом случае. Действительно, такое действие существует и единственно в окрестности произвольной особой точки ранга 0 фокусной особенности. Поскольку это действие гамильтоново, оно порождается некоторыми функциями на базе слоения, а значит может быть продолжено на всю окрестность особого слоя. \square

Определение 2.4. Фактор особого слоя особенности F по действию T^n будем называть редуцированным особым слоем фокусной особенности.

Образы особых точек различного ранга определяют на редуцированном особом слое структуру клеточного комплекса. Из определения а priori не следует инвариантность этого комплекса при гомеоморфизмах, поскольку послыйный гомеоморфизм не обязан коммутировать с действием тора. Для доказательства инвариантности воспользуемся теоремой Зунга

Теорема 2.1 (Нгуен Тьен Зунг, [24]). *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послыйно гомеоморфна особенности вида*

$$F = F_1 \times \cdots \times F_n / G,$$

где F_i — фокусные особенности степени 1, а действие G свободное, симплектическое, покомпонентное и тождественное на базе слоения.

Отсюда следует, что все орбиты пуассонова действия гомеоморфны $T^m \times \mathbb{R}^m$. Теперь можно определить редуцированный особый слой комбинаторно: для каждого m объявим $2m$ -мерные орбиты m -мерными клетками. Инцидентным орбитам будут соответствовать инцидентные клетки. Легко видеть, что определенный таким образом комплекс совпадает с редуцированным особым слоем. Кроме того, этот комплекс инвариантен относительно гомеоморфизмов (действительно, всякий послыйный гомеоморфизм сохраняет стратификацию особого слоя на орбиты пуассонова действия, поскольку окрестности точек на орбитах разных размерностей имеют различную топологическую структуру).

Утверждение 2.11. *Редуцированный особый слой нерасщепляемой фокусной особенности является правильным кубическим разбиением n -мерного тора.*

Доказательство. Очевидно, редуцированный особый слой прямого произведения особенностей степени 1 есть правильное кубическое разбиение тора. Если же мы имеем почти произведение, то группа G действует на этом разбиении просто трансляциями (это следует из нашего описания автоморфизмов фокусных особенностей), поэтому фактор также будет правильным кубическим разбиением тора. \square

Далее нашей целью будет доказать, что особенность однозначно, с точностью до послыоного гомеоморфизма, восстанавливается по своему редуцированному особому слою.

Используя утверждение 2.5, получаем

Утверждение 2.12. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послыоно гомеоморфна особенности вида*

$$F = F(m_1) \times \cdots \times F(m_n)/G,$$

где $F(m_i)$ — **модельные** фокусные особенности степени 1, а

$$G \subset \text{Aut}_0(F(m_1)) \times \cdots \times \text{Aut}_0(F(m_n))$$

действует свободно, покомпонентно и симплектично.

Таким образом, можно рассматривать лишь почти прямые произведения модельных особенностей. Отметим важное следствие.

Следствие 2.12.1. *Всякая чисто фокусная особенность ранга 0 степени n послыоно гомеоморфна некоторой невырожденной особенности комплексной интегрируемой системы с n степенями свободы.*

Доказательство. Действительно, прямое произведение модельных особенностей имеет указанную структуру, а G действует послыоно, биголоморфно и симплектично. \square

Переходя к универсальному накрытию $F(\infty) \rightarrow F(m)$ и используя утверждение 2.12, получаем

Утверждение 2.13. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послыоно гомеоморфна особенности вида $F(\infty)^n/G$, где $G \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$ действует свободно, покомпонентно и симплектично.*

Для решения задачи классификации необходимо дать ответ на вопрос: Какие подгруппы в $G \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$ определяют топологически эквивалентные особенности?

Поскольку $\text{Aut}_0(F(\infty)) \simeq \mathbb{Z} \times S^1$, определена проекция $\pi: \text{Aut}_0(F(\infty))^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$.

Теорема 2.2. *Пусть G_1, G_2 — подгруппы в $\text{Aut}_0(F(\infty))^n$, действующие на $F(\infty)^n$ свободно. Предположим также, что их проекции на \mathbb{Z}^n совпадают. Тогда существует послыоный диффеоморфизм $\Psi: F(\infty)^n \rightarrow F(\infty)^n$ и изоморфизм $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ такие, что для любого элемента $g \in G_1$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} F(\infty)^n & \xrightarrow{\Psi} & F(\infty)^n \\ \downarrow g & & \downarrow \psi(g) \\ F(\infty)^n & \xrightarrow{\Psi} & F(\infty)^n \end{array}$$

Другими словами, эти действия гладко сопряжены и особенности $F(\infty)^n/G_1, F(\infty)^n/G_2$ послыоно диффеоморфны.

Доказательство. Пусть π — проекция $\text{Aut}_0(F(\infty))^n$ на \mathbb{Z}^n . Из условий теоремы следует, что $(\pi|_{G_2})^{-1}\pi|_{G_1}: G_1 \rightarrow G_2$ является изоморфизмом. Этот изоморфизм мы и возьмем в качестве ψ .

Пусть Φ — действие тора. Ψ будем искать в виде

$$\Psi(x) = \Phi(\alpha(f_3^1(x), \dots, f_3^n(x)))x, \text{ где } \alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \text{ — гомоморфизм.}$$

При этом должно быть выполнено условие $\Psi(g(x)) = \psi(g)(\Psi(x))$:

$$\Phi(\alpha(f_3(g(x))))g(x) = \psi(g)(\Phi(\alpha(f_3(x)))x). \quad (17)$$

Заметим, что

$$\psi(g)(\Phi(\alpha(f_3(x)))x) = \Phi(\alpha(f_3(x))\psi(g)(x)),$$

поэтому уравнение (17), после замены x на $g^{-1}(x)$, переписывается в виде

$$\Phi(\alpha(f_3(x)))x = \Phi(\alpha(f_3(g^{-1}(x)))\psi(g)(g^{-1}(x))). \quad (18)$$

По условию $\psi(g)(g^{-1}) \in \mathbb{T}^n$ и может быть представлено в виде $\Phi(\beta(g))$, где $\beta: G_1 \rightarrow \mathbb{T}^n$ — гомоморфизм. Таким образом, уравнение (18) можно переписать как

$$\Phi(\alpha(f_3(x)))x = \Phi(\alpha(f_3(g^{-1}(x)))\Phi(\beta(g))(x))$$

или

$$\alpha(f_3(g(x)) - f_3(x)) = \beta(g).$$

По построению f_3 выражение $f_3(g(x)) - f_3(x)$ не зависит от x и линейно по g . Обозначим его за $\gamma(g)$. γ есть гомоморфизм G_1 в \mathbb{R}^n , поэтому уравнение $\alpha(\gamma(g)) = \beta(g)$ задает α на решетке полного ранга в \mathbb{R}^n . Далее α продолжается на все \mathbb{R}^n по линейности. Теорема доказана. \square

Следствие 2.2.1. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послойно гомеоморфна особенностям вида $F(\infty)^n/G$, где G — подгруппа полного ранга в $\mathbb{Z}^n \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$.*

Теперь мы готовы доказать теорему классификации.

Каждое правильное кубическое разбиения тора по определению задается подгруппой G в \mathbb{Z}^n . Две подгруппы задают одно и то же разбиение, если одна переходит в другую при некотором целочисленном ортогональном преобразовании (то есть композиции отражений относительно плоскостей $x_i = 0, x_i = x_j$).

Определение 2.5. Будем называть такие подгруппы ортогонально эквивалентными.

Теорема 2.3. *Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и классами ортогонально эквивалентных подгрупп конечного индекса в \mathbb{Z}^n . Сложность особенности равна индексу соответствующей подгруппы.*

Доказательство. Достаточно показать, что группа G из следствия 2.2.1 определена с точностью до целочисленного ортогонального преобразования. Предположим, что $F(\infty)^n/G_1 \simeq F(\infty)^n/G_2$. Тогда кубические разбиения тора \mathbb{R}^n/G_1 и \mathbb{R}^n/G_2 изоморфны и по лемме 2.3 G_2 получается из G_1 целочисленным ортогональным преобразованием.

Пусть теперь G_2 получена из G_1 некоторым целочисленным ортогональным преобразованием. Покажем, что действия G_2 и G_1 на $F(\infty)^n$ сопряжены. Достаточно рассмотреть два случая:

1. G_2 получена из G_1 транспозицией i -ой и j -ой координаты. Тогда в качестве сопрягающего диффеоморфизма можно взять перестановку i -ой и j -ой компоненты в $F(\infty)^n$.
2. G_2 получена из G_1 изменением знака i -ой координаты. Тогда в качестве сопрягающего диффеоморфизма можно взять отображение, «переворачивающее» i -ую компоненту $F(\infty)^n$.

Поскольку любое целочисленное ортогональное преобразование есть композиция этих двух, действия G_1 и G_2 сопряжены и наши особенности послонно гомеоморфны. \square

Теорема 2.4. *Отображение, сопоставляющее фокусной особенности ее редуцированный особый слой, является взаимно-однозначным соответствием между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и правильными кубическими разбиениями n -мерного тора. Сложность особенности равна сложности соответствующего разбиения.*

Доказательство. Мы уже показали, что редуцированные особые слои топологически эквивалентных особенностей изоморфны.

1. **Если редуцированные особые слои двух фокусных особенностей изоморфны, то эти особенности топологически эквивалентны.**

Действительно, пусть одна из особенностей представлена в виде $F(\infty)^n/G_1$, а другая в виде $F(\infty)^n/G_2$. Тогда их редуцированные особые слои имеют вид \mathbb{R}^n/G_1 и \mathbb{R}^n/G_2 . Они изоморфны, поэтому G_2 и G_1 связаны между собой целочисленным ортогональным преобразованием, откуда и следует топологическая эквивалентность особенностей.

2. **Всякое правильное кубическое разбиение тора является редуцированным особым слоем некоторой фокусной особенности.**

Всякое кубическое разбиение получается из стандартного разбиения \mathbb{R}^n факторизацией по $G \subset \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим особенность $F(\infty)^n/G$. Ее редуцированный особый слой будет совпадать с нашим разбиением.

\square

Примечание 2.5. Можно показать, что если фокусные особенности степени n гомеоморфны, то они также и T^n -эквивариантно гомеоморфны (в случае степени 1 это следствие из леммы 2.5). По-видимому, это проявление общего факта об особенностях, допускающих гамильтоново действие тора.

2.2.3 Модель почти прямого произведения

Используя уже имеющиеся у нас результаты о представлении правильных кубических разбиений в виде почти прямых произведений, получаем следующее

Утверждение 2.14 (о канонической модели почти прямого произведения в смысле Зунга). *Любая нерасщепляемая фокусная особенность гомеоморфна особенности вида $F(m_1) \times \cdots \times F(m_n)/G$, где $G \subset \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$, $G \cap \mathbb{Z}_{m_i} = 0$. Числа m_i в этом разложении определены однозначно с точностью до перестановки, а подгруппа G — однозначно с точностью до композиции отражений относительно плоскостей $x_i = 0$ и $x_i = x_j$ (когда $m_i = m_j$).*

2.2.4 Подсчет числа особенностей

В некоторых частных случаях можно явно вычислить число особенностей данной степени и сложности. Обозначим соответствующую функцию $\xi(n, s)$, n — степень, s — сложность.

Утверждение 2.15. *Для любой степени существует единственная с точностью до гомеоморфизма особенность сложности 1. Другими словами, $\xi(n, 1) = 1$.*

Для подсчета числа особенностей большей сложности полезна симметричная модель.

Утверждение 2.16. *Все порядки базисных сдвигов фокусной особенности делят ее сложность.*

Доказательство. Порядок базисного сдвига Δ_i — это длина орбиты куба под действием этого сдвига. Поскольку все орбиты имеют одинаковую длину, эта длина должна быть делителем общего числа кубов, то есть сложности. Можно объяснить этот факт алгебраически: если $F = F(m_1) \times \cdots \times F(m_n)/G$ — каноническая модель, то проекция G на $\mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$ не имеет ядра и $|G|$ делит $m_2 \cdots m_n$, откуда сложность F равна

$$\frac{m_1 \cdots m_n}{|G|} = m_1 \frac{m_2 \cdots m_n}{|G|} = km_1,$$

что и требовалось. □

Следствие 2.16.1. *Фокусная особенность сложности s послойно гомеоморфна особенности вида*

$$F = F(s) \times \cdots \times F(s)/G.$$

Эту модель мы называем симметричной. Группа G в симметричной модели — произвольная подгруппа в \mathbb{Z}_s^n индекса s . Степень произвола выбора G такая же, как и в модели универсального накрытия. Симметричная модель удобна тем, что нужно перечислять подгруппы в конечной группе. При этом никаких дополнительных условий проверять не нужно. Эту задачу можно легко решить, например, с помощью компьютера.

Рассмотрим случай, когда $s = p$ — простое. В этом случае мы должны перечислять гиперплоскости в линейном пространстве \mathbb{Z}_p^n . Всякая гиперплоскость задается своей нормалью. Таким образом, фокусной особенности сложности p , где p простое, мы сопоставили некоторый ненулевой вектор из \mathbb{Z}_p^n . Этот вектор задан с точностью до пропорциональности, изменений знаков и перестановки координат. Из этого рассуждения легко выводятся следующие утверждения:

Утверждение 2.17. $\xi(n, 2) = n$.

Утверждение 2.18. $\xi(n, 3) = n$.

Утверждение 2.19. Пусть p — нечетное простое. Тогда

$$\frac{p^n - 1}{(p-1)n!2^{n-1}} \leq \xi(n, p) \leq \frac{p^n - 1}{p-1},$$

$$\frac{2}{p-1} \left(C_{n+\frac{1}{2}(p-1)}^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \right) \leq \xi(n, p) \leq C_{n+\frac{1}{2}(p-1)}^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1$$

Доказательство. Рассмотрим на \mathbb{Z}_p^n действие группы H , порожденной изменениями знаков, перестановкой координат и умножениями на ненулевой элемент \mathbb{Z}_p . Множество особенностей состоит во взаимнооднозначном соответствии с орбитами этого действия. $|H| = (p-1)n!2^{n-1}$, поэтому

$$\xi(n, p) \geq \frac{p^n - 1}{(p-1)n!2^{n-1}}.$$

Длина каждой орбиты не меньше, чем $p-1$, откуда

$$\xi(n, p) \leq \frac{p^n - 1}{p-1}.$$

Докажем теперь вторую цепочку неравенств. В каждой орбите имеется представитель, все координаты которого меньше либо равны $\frac{1}{2}(p-1)$ и не убывают, поэтому

$$\xi(n, p) \leq C_{n+\frac{1}{2}(p-1)}^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1.$$

При этом одной и той же особенности соответствует не более $\frac{1}{2}(p-1)$ таких последовательностей, откуда получаем нижнюю оценку. \square

Не более, чем полиномиальный рост по сложности, очевидно, имеет место и в общем случае, в виду очевидной грубой оценки $\xi(n, m) \leq m^{n^2}$.

Утверждение 2.20. $\xi(n, m)$ растет по n не быстрее, чем полиномиально.

Доказательство. Кубическое разбиение тора сложности t степени n может быть склеено из t кубов. Можно считать, что гиперграни кубов помечены метками $1, \dots, n$, и мы склеиваем грани с одинаковыми метками. Каждому разбиению мы можем сопоставить «вектор» (склейка граней с меткой $1, \dots$ склейка граней с меткой n). Очевидно, разбиение останется тем же самым, если мы переставим компоненты этого «вектора» местами. Пусть $f(m)$ — число всевозможных разбиений на пары множества из $2m$ элементов. Искомое число разбиений не превосходит числа неупорядоченных наборов длины n , состоящих из чисел $1, \dots, f(m)$. Имеем

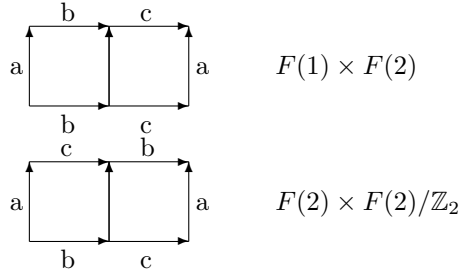
$$\xi(n, m) \leq C_{n+f(m)-1}^{f(m)-1} \leq (n + f(m) - 1)^{f(m)-1},$$

что и требовалось доказать. \square

Примечание 2.6. Алгебраическое доказательство этого факта автору неизвестно. Нетривиальность утверждения состоит в том, что число подгрупп в \mathbb{Z}^n заданного индекса растет вместе с n экспоненциально, но если мы отождествим между собой ортогонально-эквивалентные подгруппы, то число классов эквивалентности будет иметь полиномиальный рост.

2.2.5 Особенности сложности два в случае четырех степеней свободы

Рассмотрим особенности сложности 2 степени 2. Таких особенностей две и их редуцированные особые слои изображены на рисунке:



Вторая особенность является простейшим примером особенности, не представимой в виде прямого произведения. \mathbb{Z}_2 здесь вложена в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ как диагональ. Два квадрата, составляющие редуцированный особый слой этой особенности, граничат как по вертикальному, так и по горизонтальному ребру. Образно говоря, они прочнее сцеплены друг с другом, чем в случае прямого произведения. Далее мы покажем, что особенность $F(2) \times F(2)/\mathbb{Z}_2$ устойчива в классе особенностей интегрируемых систем. Для $F(1) \times F(2)$ это, вообще говоря, неверно: например, симплектическое прямое произведение $F(1) \times F(2)$ неустойчиво и при малом возмущении распадается на две особенности сложности один.

2.2.6 Классификация почти торических особенностей

Теорема 2.5. *Любая нерасщепляемая почти торическая особенность ранга r типа $(k_e, 0, k_f)$ топологически эквивалентна прямому произведению особенности ранга 0 типа $(0, 0, k_f)$ (то есть чисто фокусной особенности), k_e экземпляров особенности ранга 0 типа $(1, 0, 0)$ (то есть эллиптической особенности) и слоения без особенности $T^r \times D^r$.*

Доказательство. По теореме Зунга всякая особенность может быть представлена в виде $L \times E$, где E — эллиптическая особенность ранга 0, L — особенность без эллиптических компонент. Таким образом, нам надо показать, что всякая фокусная особенность ненулевого ранга — это прямое произведение фокусной особенности ранга 0 и слоения без особенности.

Всякая фокусная особенность ранга k может быть представлена в виде

$$F = (F_0 \times (T^k \times D^k))/G_0,$$

где $F_0 = F(m_1) \times \cdots \times F(m_n)$.

Как и в случае с особенностями нулевого ранга, перейдем к накрытию. Это позволит представить нашу особенность в виде

$$F = (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/G.$$

Шаг 1. Можно считать, что G действует на $F(\infty)^n$ сдвигами без подкруток. Другими словами, для всякого действия G существует диффеоморфизм $F(\infty)^n \times (T^k \times D^k)$ в себя, «убивающий» подкрутки. Это доказывается также, как и в случае нулевого ранга.

Шаг 2. Можно считать, что G действует на $F(\infty)^n$ свободно. Действительно, пусть это не так. Выделим подгруппу $H \subset G$, состоящую из элементов, оставляющих компоненту $F(\infty)^n$ неподвижной. Тогда

$$\begin{aligned} (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/G &= ((F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/H)/(G/H) = \\ &= (F(\infty)^n \times ((T^k \times D^k))/H)/(G/H) = (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/(G/H). \end{aligned}$$

Как легко видеть, действие G/H на $F(\infty)^n$ эффективно, а потому свободно (поскольку мы избавились от подкруток).

Шаг 3. Если G действует на $F(\infty)^n$ сдвигами и свободно, то при помощи диффеоморфизма $F(\infty)^n \times (T^k \times D^k)$ в себя можно избавиться от действия G на $T^k \times D^k$. Это делается так же, как мы избавлялись от подкруток в случае нулевого ранга. \square

2.3 Расщепляемые особенности

В этой главе рассматриваются особенности, не удовлетворяющие условию нерасщепляемости. По всей видимости, такие особенности всегда можно разрушить малым интегрируемым возмущением, и в приложениях они не встречаются. Однако, с расщепляемыми особенностями связана довольно

интересная геометрия. В частности, особый слой таких особенностей представляет собой объединение пересекающихся лагранжевых многообразий с действием тора, а пространство орбит этого действия является разбиением многомерного тора на простые многогранники.

2.3.1 Действие тора

Определение 2.6. Клеточное разбиение многообразия назовем простым, если двойственное ему разбиение является разбиением на кубы.

Теорема 2.6. *Предположим, что*

1. *Все особые точки на данном особом слое слоения Лиувилля имеют тип $(0, 0, k)$ (для различных точек k различно).*
2. *Особый слой содержит замкнутую орбиту пуассонова действия, состоящую из особых точек типа фокус-фокус ранга r степени n .*

Тогда

1. *Особый слой представляет собой объединение лагранжево погруженных компактных многообразий.*
2. *В окрестности особого слоя имеется гамильтоново свободное почти всюду действие тора T^{r+n} .*
3. *Фактор особого слоя по действию тора (редуцированный особый слой) есть простое разбиение n -мерного тора. Замыкание каждой клетки этого разбиения является образом одного лагранжева «куска» особого слоя.*

Доказательство.

1. Это следует из локальной структуры слоения в окрестности особой точки типа фокус-фокус.
2. Это прямое следствие теоремы 6.1 из работы [24].
3. Покажем сначала, что в замыкании каждой орбиты на особом слое есть замкнутая орбита, состоящая из особых точек типа фокус-фокус ранга r степени n .

Во-первых, замыкание всякой орбиты содержит замкнутую орбиту. Предположим, что степень этой замкнутой орбиты есть \tilde{n} . Тогда в ее окрестности (а значит, и во всей окрестности особого слоя) есть гамильтоново свободное почти всюду действие тора $T^{N-\tilde{n}}$, где N - число степеней свободы, и нет действия тора большей размерности. Но с другой стороны, у нас есть гамильтоново свободное почти всюду действие T^{N-n} , и нет действия тора большей размерности. Следовательно, $\tilde{n} = n$.

Далее, всякая орбита пуассонова действия есть тор на диск. Но в окрестности замкнутой орбиты действие тора «убивает» все нетривиальные циклы. Поскольку в замыкании каждой орбиты есть замкнутая, образ замыкания всякой орбиты есть клетка.

Таким образом, редуцированный особый слой является клеточным комплексом. То, что этот комплекс является многообразием и то, что он прост, следует из локальной структуры слоения. Осталось показать, что он является тором.

Рассмотрим действие тора не только на особом слое, но и во всей его окрестности. Легко видеть, что на факторпространстве слоения Ливилля попросту тривиально (это следует из локальной структуры). Но образы неособых слоев есть торы. Следовательно, образ особого слоя также есть тор. Теорема доказана.

□

Гипотеза 2.1. *Замыкание любой клетки редуцированного особого слоя фокусной особенности представляет собой простой многогранник.*

В примерах это всегда так. Для $n = 2$ это легко доказать: мы имеем диск с клеточным разбиением на границе. Это многогранник тогда и только тогда, когда число вершин больше двух. Но двухугольников на редуцированном особом слое быть не может, поскольку для любого ребра всегда найдется векторное поле, равное нулю на этом ребре, но не равное нулю на примыкающих ребрах, а также на внутренности клетки. Для двухугольника такого поля, очевидно, не существует.

В многомерном случае проблема состоит в том, что мы не умеем распознавать многогранники: неизвестно, какие условия достаточны для того, чтобы данный клеточный комплекс был комбинаторным многогранником.

Как будет показано, всякий простой многогранник P может быть включен в редуцированный особый слой фокусной особенности (вообще говоря, ненулевого ранга). Соответствующий лагранжев «кусок» особого слоя — это так называемое момент-угол многообразие Z_P .

2.3.2 Конструкция

Предъявим способ конструировать расщепляемые фокусные особенности нулевого ранга. Его идея является развитием примера 4 раздела 5.3 из работы [18] расщепляемой особенности типа седло-седло. Рассмотрим редуцированный особый слой особенности $F(\infty)^n$. Он представляет собой стандартное кубическое разбиение \mathbb{R}^n . Пусть L — некоторая гиперплоскость, находящаяся в общем положении с этим разбиением. На L возникает некоторое разбиение на многогранники (вообще говоря, не кубическое). Мы покажем, что существует фокусная особенность, редуцированный особый слой которой совпадает с этим разбиением. На $F(\infty)^n$ имеется n функций f_3^1, \dots, f_3^n . Эти функции имеют естественную интерпретацию как координаты на редуцированном особом слое особенности.

Построение нашей особенности разобьем на три шага: сечение, редукцию и компактификацию.

1. Сечение

Пусть плоскость L задана уравнением $\langle a, x \rangle = b$. Пусть также

$$f_3 = \begin{pmatrix} f_3^1 \\ \vdots \\ f_3^n \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_1^n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в $F(\infty)^n$ множество $\tilde{F}(L)$, заданное уравнениями

$$\begin{cases} \langle a, f_3 \rangle = b, \\ \langle a, f_1 \rangle = 0. \end{cases}$$

Утверждение 2.21. *Если L – гиперплоскость общего положения, то $\tilde{F}(L)$ – симплектическое подмногообразие коразмерности 2, на котором задана интегрируемая система с $2n - 1$ степенью свободы.*

Доказательство.

$$\{\langle a, f_1 \rangle, \langle a, f_3 \rangle\} = \sum a_i^2 \{f_1^i, g^i\}.$$

Если среди чисел a_i нет нулей и наша гиперплоскость не проходит через вершины редуцированного особого слоя, то это число не обращается в ноль. Следовательно, наша поверхность есть симплектическое подмногообразие. Далее, ограничения f_1^i, f_2^i на наши подмногообразия коммутируют. Достаточно проверить это условие в неособой точке. Пусть q_1^i, q_2^i – координаты, дополняющие f_1^i, f_2^i до канонической системы координат. Имеем $\{f_2^i, f_3^i\} = 0$, поэтому $f_3^i = f_3^i(f_1^i, q_1^i, f_2^i)$. Далее

$$\frac{\partial f_3^i}{\partial q_1^i} \neq 0,$$

поэтому можно выразить q_1^i через f_3^i .

$$q_1^i = q_1^i(f_1^i, f_3^i, f_2^i),$$

Запишем симплектическую форму в координатах $f_1^1, f_2^i, f_3^i, q_2^i$.

$$\omega = \alpha_i df_1^i \wedge df_3^i + \beta_i df_1^i \wedge df_2^i + df_2^i \wedge dq_2^i.$$

Пусть теперь M – наша поверхность. Имеем

$$\omega|_M = a_{ij} df_1^i \wedge df_3^j + b_{ij} df_1^i \wedge df_2^j + df_2^i \wedge dq_2^i,$$

откуда и следует наше утверждение. \square

2. Редукция

Особенности построенной системы имеют ранг 1.

На $\tilde{F}(L)$ имеется гамильтоново действие тора T^n , порожденное функциями $\{f_2^i\}$. Рассмотрим в этом торе одномерную подгруппу H , действующую сдвигами вдоль $\sum_i f_2^i$.

Утверждение 2.22. *H действует на $\tilde{F}(L)$ свободно.*

Применим к $\tilde{F}(L)$ процедуру редукции Марсдена-Вайнштейна (см. [22]) по H . В результате мы получим $4n - 4$ -мерное симплектическое многообразие с заданной на нем интегрируемой системой. Обозначим его $F(L)$.

Утверждение 2.23. *$F(L)$ есть окрестность особого слоя фокусной особенности ранга 0 степени $n - 1$, редуцированный особый слой которой совпадает с комплексом, высекаемым кубическим разбиением \mathbb{R}^n на L .*

3. Компактификация

Предположим, теперь что a — целочисленный вектор. Пусть $G_a = a^\perp \cap \mathbb{Z}^n$. G_a — подгруппа ранга $n - 1$. Плоскость L является G_a -инвариантной, поэтому G_a действует симплектоморфизмами на \tilde{F}_L , а следовательно и на $F(L)$. Пусть G — подгруппа полного ранга в G_A . Фактор $F(L, G) = F(L)/G$ является особенностью с компактными слоями.

Пример 2.1. Пусть $n = 3$, L задана уравнением $x + y + z = \frac{1}{2}$, $G = G_A$, то есть задается в \mathbb{Z}^3 уравнением $x + y + z = 0$. Редуцированный особый слой особенности $F(L, G)$ изображен на рисунке 7.

Бифуркационная диаграмма этой особенности — три 2-диска, имеющие общую точку.

Особый слой особенности из примера 2.1 состоит из двух вложенных многообразий $\mathbb{C}P^2$ и одного многообразия $\mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$, трансверсально самопересекающегося в трех точках (см. рисунок 7). Это легко следует из общей теории квазиторических многообразий.

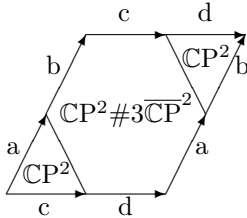


Рис. 7: Особый слой особенности из примера 2.1.

Также легко видеть, что если взять в качестве подгруппы G множество векторов G_a с четными координатами, то вместо одного погруженного $\mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$ мы получим четыре вложенных. Можно показать, что для любой расщепляемой фокусной особенности можно сделать подмногообразия особого слоя вложенными переходом к конечнолистному накрытию.

Все особенности, построенные описанным выше способом, распадаются при малом шевелении на

где Δ_i — одномерный симплекс (отрезок). Применяя описанную выше процедуру компактификации, можно получить особенность, особый слой которой представляет собой две пересекающиеся лагранжевы трехмерные сферы (или любое другое четное число). После S^1 -редукции эта особенность превращается в обычную особенность $F(2)$.

Аналогично можно рассмотреть $\tilde{F}(\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2})$: здесь возникают цепочки

$$S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n \rightarrow \Delta^n.$$

(первое отображение — обобщенное расслоение Хопфа).

Пример 2.3. Фокусные особенности над простыми многогранниками.

Можно дать более общую конструкцию нетривиальных расщепляемых особенностей ненулевого ранга. Для этого в качестве L надо взять не гиперплоскость, а плоскость коразмерности k . При этом шаг «сечение» проходит без существенных изменений и мы получаем особенность ранга k . Заметим, однако, что эта конструкция не даст нам новых особенностей нулевого ранга: редукцию провести невозможно. Легко проверяется, что построенная особенность $F(L)$ не допускает свободного действия тора размерности больше единицы.

Рассмотрим теперь произвольный простой комбинаторный многогранник P^n , имеющий m гиперграней. В [5] указано, как по этому многограннику каноническим образом построить многообразие \mathcal{Z}_P размерности $m+n$, на котором действует тор T^m , причем пространство орбит совпадает с P (момент-угол многообразия). Геометрическая интерпретация этой конструкции следующая.

Рассмотрим произвольную реализацию \tilde{P} комбинаторного многогранника P в \mathbb{R}^n . Пусть \tilde{P} задается системой неравенств

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq b_j, j = 1, \dots, m.$$

Поскольку \tilde{P} компактен, найдутся такие числа $c_j > 0$, что

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i < c_j \text{ на } \tilde{P}.$$

Теперь нашу систему можно переписать в виде

$$b_j \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \leq c_j, j = 1, \dots, m.$$

Пусть

$$X_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i - b_j}{c_j}.$$

Тогда наша система переписывается в виде

$$0 \leq X_j \leq 1.$$

Таким образом, мы реализовали наш многогранник как сечение m -куба n -плоскостью.

Рассмотрим квазиторическое многообразие $(\mathbb{C}P^1)^m$ над кубом I^m . Пусть $\pi: (\mathbb{C}P^1)^m \rightarrow I^m$ — проекция. Тогда $\pi^{-1}(P)$ — гладкое подмногообразие размерности $m + n$. Это и есть многообразие \mathcal{Z}_P . Нетрудно показать, что \mathcal{Z}_P зависит лишь от комбинаторного типа P , но не от его реализации.

Заметим, что поскольку $X_j < 1$, то на самом деле мы вложили \mathcal{Z}_P в $\mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}P^1)^m$.

Пусть наш многогранник получается сечением I^m плоскостью L . По плоскости L мы можем построить фокусную особенность ранга $m - n$. На этой особенности есть действие тора T^m и фактор особого слоя по этому действию является разбиением, высекаемым на L кубическим разбиением \mathbb{R}^m . В частности, это разбиение содержит P^n . Прообраз P^n является одним из лагранжевых кусков особого слоя и представляет собой описанное выше многообразие \mathcal{Z}_P .

Хотя на всем особом слое не существует свободного действия T^{m-n} , на \mathcal{Z}_P оно все же иногда существует (а именно тогда и только тогда, когда P реализуем как пространство орбит квазиторического многообразия, [5]) и фактор является квазиторическим многообразием над P .

Заметим, что, в отличие от \mathcal{Z}_P , получающаяся особенность зависит от реализации P . Простейший пример: P — отрезок. Если L задать уравнением $x + y = \frac{1}{2}$, то особый слой полученной особенности состоит только из трехмерных сфер. Если же L задать уравнением $x + 2y = \frac{1}{2}$, то трехмерные сферы будут чередоваться с многообразиями вида $S^1 \times S^2$.

3 Топологические свойства многомерных фокусных особенностей

3.1 Монодромия

3.1.1 Матрица разложения базисных циклов

В этом разделе мы введем понятие матрицы разложения базисных циклов особенности, необходимое для вычисления монодромии.

Зафиксируем некоторую подгруппу G в \mathbb{Z}^n , соответствующую особенности F , и выберем в ней базис. Составим матрицу $A(F)$ из векторов этого базиса, записанных по столбцам.

Определение 3.1. Матрица $A(F)$ называется матрицей разложения базисных циклов особенности (для данного базиса).

Матрица разложения базисных циклов особенности задана с точностью до умножения на обратимую целочисленную матрицу справа и на ортогональную целочисленную матрицу слева. Фокусная особенность по своей

матрице разложения базисных циклов восстанавливается однозначно (при этом любая невырожденная целочисленная матрица задает некоторую фокусную особенность).

Заметим также, что выбор базиса в G равносильно выбору базиса в $H^1(L)$, где L — ориентированный редуцированный особый слой. Таким образом можно говорить о матрице разложения базисных циклов для базиса в $H^1(L)$. Столбцы этой матрицы — это разложения базисных в $H^1(L)$ циклов по одномерным ориентированным ребрам L .

3.1.2 Монодромия

Этот раздел посвящен изучению строения слоения Лиувилля в дополнении к особым слоям вблизи фокусной особенности. Умение вычислять монодромию особенности дает возможность делать выводы о глобальном устройстве слоения Лиувилля системы, зная лишь локальное строение ее особенностей. И наоборот, зная, как устроена система вдали от особенности, мы можем определить топологический тип особенности.

Рассмотрим сначала случай степени 1. Пусть f_2 — периодический интеграл, f_1 — произвольный другой, функционально независимый с f_2 вне особых точек. Пусть x — точка на базе слоения, близкая к особому значению, γ — петля, обходящая особое значение в плоскости (f_1, f_2) в положительном направлении, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Пусть v_1 — класс одномерных целочисленных гомологий тора Лиувилля, лежащего в прообразе x , соответствующий траектории косоугольного градиента периодического интеграла f_2 , e_1 — произвольный цикл, дополняющий v_1 до базиса и идущий в направлении траектории $\text{sgrad } f_1$. Начнем двигаться по петле γ и следить, что происходит с базисом e_1, v_1 . Оказывается, что после совершения полного обхода мы получим базис, отличный от исходного. Соответствующий оператор на группе одномерных гомологий тора называется оператором монодромии.

Теорема 3.1 (см. [32, 25]). *В базисе (e_1, v_1) матрица оператора монодромии имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix},$$

где m — число особых точек на слое.

Наша задача состоит в обобщении этого результата на случай произвольной степени.

Бифуркационная диаграмма в случае фокусной особенности степени n — это n дисков коразмерности 2. Дополнение к бифуркационной диаграмме диффеоморфно $\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^n$. В его фундаментальной группе имеется выделенный базис из k циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (определенных с точностью до перестановки и изменения ориентации), каждый из которых зацеплен с одним единственным $2n - 2$ -мерным диском бифуркационной диаграммы. Следовательно, определено n операторов монодромии.

Рассмотрим сначала особенность сложности 1. С точностью до послыйного гомеоморфизма такая особенность единственна и имеет вид $F(1)^n$. Для каждого из сомножителей выберем базис на торе Лиувилля как описано выше. В результате мы получим базис $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ на торе Лиувилля особенности $F(1)^n$. Любой базис, построенный таким способом, мы будем называть стандартным. Очевидно, что

$$\begin{aligned} h_i(v_j) &= v_j, \\ h_i(e_j) &= e_j + \delta_{ij}v_j, \end{aligned}$$

где h_i — оператор монодромии, соответствующий обходу вокруг i -ого диска бифуркационной диаграммы.

Пусть теперь F — произвольная фокусная особенность степени n . Можно считать, что F есть почти прямое произведение $F(\infty)^n/G$.

Пусть $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ — базис на некотором торе Лиувилля, близком к особому слою, такой, что v_1, \dots, v_n — траектории косых градиентов периодических интегралов. Легко видеть, что особый слой F является деформационным ретрактом своей окрестности. Стягивая циклы e_i на особый слой и проецируя их на редуцированный особый слой, мы получим базис в одномерных гомологиях редуцированного особого слоя. Таким образом, **базис на торе Лиувилля фокусной особенности определяет базис на ее редуцированном особом слое.**

Лемма 3.1. *Пусть $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ — базис на торе Лиувилля особенности F , лежащем в прообразе точки x , такой, что v_1, \dots, v_n — траектории косых градиентов периодических интегралов. Тогда существует послыйное накрытие $\rho: F \rightarrow F(1)^n$, являющееся гомеоморфизмом на базе слоения и такое, что*

$$\begin{aligned} \rho(v_i) &= \tilde{v}_i, \\ \rho(e_i) &= \sum_j a_{ji} \tilde{e}_j. \end{aligned}$$

где $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ — стандартный базис на торе $\rho(x)$, (a_{ij}) — матрица разложения базисных циклов, соответствующая базису на редуцированном особом слое, построенному по $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$.

Примечание 3.1. Матрицу разложения базисных циклов можно записать лишь в том случае, если редуцированный особый слой ориентирован. Здесь речь идёт об ориентации, «поднятой» с особенности $F(1)^n$.

Доказательство. Рассмотрим на $F(\infty)^n$ действие группы \mathbb{Z}^n . Оно определяет действие группы \mathbb{Z}^n/G на F . Фактор F по этому действию есть особенность сложности 1, то есть $F(1)^n$.

Очевидно, что $\rho(v_i) = \tilde{v}_i$. Для доказательства равенства $\rho(e_i) = \sum_j a_{ji} \tilde{e}_j$ заметим, что именно так связаны между собой базисы на редуцированном особом слое F и $F(1)^n$. \square

Утверждение 3.1.

$$h_i(e_j) = e_j + a_{ij}v_i.$$

Доказательство. Воспользуемся существованием накрытия, построенного в 3.1. Имеет место очевидное равенство

$$\rho(h_i(e_j)) = h_i(\rho(e_j)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} h_i(\rho(e_j)) &= \sum_k a_{kj} h_i(\tilde{e}_k) = \sum_k a_{kj} (\tilde{e}_k + \delta_{ik} \tilde{v}_k) = \\ &= \left(\sum_k a_{kj} \tilde{e}_k \right) + a_{ij} \tilde{v}_i = \rho(e_j + a_{ij}v_i), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое равенство. \square

Теорема 3.2 (О монодромии). *Существует способ согласованно выбрать порядок и ориентации циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и базис в группе одномерных гомологий тора Лиувилля так, что матрицы монодромии будут иметь вид*

$$h_{\gamma_i} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица, полученная из матрицы разложения базисных циклов обнулением всех строк, кроме i -ой.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из предыдущего утверждения. \square

Утверждение 3.2. *Фокусная особенность восстанавливается по своей монодромии.*

Доказательство.

Действительно, фокусная особенность восстанавливается по своей матрице разложения базисных циклов, а

$$h_{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A & E \end{pmatrix}.$$

\square

Следствие 3.2.1. *С точностью до послойного гомеоморфизма нерасщепляемая почти торическая особенность однозначно восстанавливается по набору операторов монодромии h_{γ_i} .*

Поскольку монодромию можно определить в терминах аффинной структуры на базе слоения, это утверждение означает, что аффинная структура на базе почти торического слоения позволяет определить тип его особенностей (по крайней мере, если эти особенности нерасщепляемы).

Пример 3.1. Вычислим монодромию для особенности $F(2) \times F(2)/\mathbb{Z}_2$. Матрица разложения базисных циклов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Устойчивость

3.2.1 L -тип

В этом разделе мы обсудим понятие L -типа особенности, полезное для исследования устойчивости и гладкой классификации многомерных фокусных особенностей.

Понятие L -типа было введено А. В. Болсиновым ([17]) и перенесено на общий случай Нгуеном Тьен Зунгом ([24]). В нашем случае оно определяется так: нужно рассмотреть в образе отображения момента двумерные диски, соответствующие критическим точкам, ранг которых не превосходит 2. Пересечение прообраза каждого из этих дисков с множеством критических точек ранга не более, чем 2 — это четырехмерное симплектическое многообразие. На каждом из таких многообразий задана фокусная особенность степени 1 (возможно, несвязная). Набор из n пар вида (многообразие, особенность) и называется L -типом особенности. Поскольку первый элемент пары — многообразие — является попросту окрестностью особого слоя, то допустимо называть L -типом просто набор особенностей.

Введем теперь более общее понятие L_k -типа. Нужно лишь заменить в определении L -типа ранг 2 на ранг $2k$. L_k тип — это набор из C_n^k особенностей. Эти особенности индексируются наборами из k индексов. L^{m_1, \dots, m_k} — это особенность, соответствующая диску, на котором обращаются в ноль все интегралы из набора z^1, \dots, z^n , кроме интегралов с индексами m_1, \dots, m_k . Здесь $z^j = f_1^j + i f_2^j$.

$L_1 = (L^1, \dots, L^n)$ — это обычный L -тип. L_n — это сама особенность F .

Пусть наша особенность представлена в виде $F = F_1 \times \dots \times F_n/G$, где G — подгруппа в $\mathbb{Z}_{s(F_1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{s(F_n)}$. Рассмотрим в $\mathbb{Z}_{s(F_1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{s(F_n)}$ «координатную плоскость», натянутую на слагаемые с номерами m_1, \dots, m_k . Пусть G_{m_1, \dots, m_k} — пересечение G с этой плоскостью.

Утверждение 3.3. $L^{m_1, \dots, m_k}(F)$ есть несвязное объединение особенностей вида $F_{m_1} \times \dots \times F_{m_k}/G_{m_1, \dots, m_k}$ в количестве

$$\frac{s(F)}{s(F_{m_1} \times \dots \times F_{m_k}/G_{m_1, \dots, m_k})}.$$

Следствие 3.2.1. Пусть $F = F_1 \times \dots \times F_n/G$ — каноническая модель для F . Тогда L -тип F имеет вид

$$\left(\frac{s(F)}{s(F_1)} \text{ экземпляров } F_1, \dots, \frac{s(F)}{s(F_n)} \text{ экземпляров } F_n \right).$$

L_k -тип допускает простое геометрическое описание. Редуцированный особый слой L_k -типа особенности — это в точности k -мерный остов ее редуцированного особого слоя. Редуцированный особый слой L^{m_1, \dots, m_k} есть объединение граней, имеющих направление (m_1, \dots, m_k) .

3.2.2 Неприводимые особенности

Определение 3.2. Нерасщепляемую фокусную особенность будем называть неприводимой, если соответствующая подгруппа $G \subset \mathbb{Z}^n$ не лежит ни в какой нетривиальной подгруппе вида $k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_n\mathbb{Z}$.

Утверждение 3.4. Следующие условия эквивалентны:

1. Особенность неприводима.
2. Все компоненты ее L_{n-1} -типа связны.
3. Все строки матрицы разложения базисных циклов примитивны.
4. Если $F = F_1 \times \dots \times F_n/\tilde{G}$ — каноническая модель, то действие \tilde{G} на каждой компоненте почти прямого произведения транзитивно.
5. Любой набор из $n-1$ базисного сдвига порождает группу собственных автоморфизмов редуцированного особого слоя. Другими словами, для любого i можно добраться из любого куба в любой, не двигаясь в направлении i .
6. Все примыкающие особенности коранга 2 имеют сложность 1.

Доказательство. Очевидно, что условия 1, 3 и 4 эквивалентны.

Далее, число компонент связности L_{n-1} -типа в направлении 1 равно

$$p_1 = \frac{s(F)}{s(F_{m_2} \times \dots \times F_{m_n}/\tilde{G}_{m_2, \dots, m_n})}.$$

$\tilde{G}_{m_2, \dots, m_n}$ есть ядро оператора проекции π на \mathbb{Z}_{m_1} , ограниченного на \tilde{G} , поэтому $p_1 = |\pi(\tilde{G})|$. Отсюда следует эквивалентность условий 2 и 4.

Группа автоморфизмов редуцированного особого слоя есть \mathbb{Z}^n/G , поэтому условие 5 эквивалентно условию 1.

Далее, особый слой примыкающей особенности коранга 2 для прямого произведения $F_1 \times \dots \times F_n$ есть особый слой одной из особенностей F_i , умноженный на $T^{2(n-1)}$. Если теперь профакторизовать по G , то получится особенность сложности p_i , где p_i - число орбит действия \tilde{G} на F_i . Отсюда следует эквивалентность условий 4 и 6. Утверждение доказано. \square

Для степени 1 существует единственная неприводимая особенность — $F(1)$.

Утверждение 3.5. *Неприводимые особенности степени 2 сложности m это в точности особенности вида $F(m) \times F(m)/\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_m = \langle (1, a) \rangle$, где a взаимно просто с m . Число таких особенностей равно $\frac{1}{2}\phi(m)$ для $m \neq 2$ и 1 для $m = 2$.*

Доказательство. Неприводимость особенностей такого вида очевидна. Пусть теперь F неприводима, $F_l \times F_k/G$ — ее каноническая модель. $|\pi_{\mathbb{Z}_l}(G)| = l$, $\text{Ker } \pi_{\mathbb{Z}_l}|_G = 0$, поэтому $|G| = l = k$. Имеем $lk = |G|m$, поэтому $l = k = m$. Проекция G на \mathbb{Z}_l — изоморфизм, поэтому G — циклическая и порождается элементом вида $(1, a)$. Поскольку проекция на второй сомножитель также является изоморфизмом, a взаимнопросто с m . Далее a и $-a$ задают одинаковые особенности, а равенство $a = -a$ не может выполняться, если $(a, m) = 1$ и $m \neq 2$. Поэтому число различных особенностей равно $\frac{1}{2}\phi(m)$. \square

Таким образом, для степени 2 (и, следовательно, для любой большей) существуют неприводимые особенности любой сложности.

3.2.3 Устойчивость неприводимых особенностей

Утверждение 3.6. *Неприводимые особенности не меняют своего топологического типа при малом интегрируемом возмущении системы.*

Доказательство. Заметим, что поверхности, образующие L_{n-1} -тип — это в точности множество критических точек в окрестности особого слоя. В случае неприводимых особенностей критическое множество состоит из ровно n поверхностей. Каждая из этих поверхностей проецируется в $n - 2$ -мерный диск на бифуркационной диаграмме. При малом возмущении системы критические поверхности как-то непрерывно меняются, но их количество остается неизменным. Следовательно, бифуркационная диаграмма возмущенной особенности в окрестности особого слоя совпадает с бифуркационной диаграммой в окрестности особой точки ранга 0, что означает, что для возмущенной особенности выполнено условие нерасщепляемости. Мы знаем, что такие особенности однозначно задаются своими операторами монодромии. Но монодромия, очевидно, не меняется при непрерывном возмущении, и новая особенность гомеоморфна исходной. \square

Для всякой особенности, которая не является неприводимой, найдется гомеоморфная ей, распадающаяся при малом интегрируемом возмущении. Действительно, рассмотрим *симплектическое* почти прямое произведение $F(m_1) \times \cdots \times F(m_k)/G$. Предположим, проекция G на \mathbb{Z}_{m_1} есть $\tilde{G} \neq \mathbb{Z}_{m_1}$. Тогда найдется \tilde{G} -эквивариантное возмущение $F(m_1)$, разводящее некоторые особые точки на разные слои. Действительно, можно возмутить $F(m_1)/\tilde{G}$ (она содержит больше одной точки!), а потом поднять это возмущение на $F(m_1)$. В результате мы построим интегрируемое возмущение $F(m_1) \times \cdots \times F(m_k)/G$, разводящее особые точки на разные слои.

Если число связных компонент L_{n-1} -типа в направлении i равно p_i , то особенность может распасться не более, чем на $p_1 \cdots p_k$ частей. В частности, особенность распадается на особенности сложности 1 тогда и только тогда, когда она является прямым произведением.

Гипотеза 3.1. *Всякая фокусная особенность, не являющаяся неприводимой, распадается при малом интегрируемом возмущении на особенности меньшей сложности.*

Гипотеза 3.2. *Невырожденная особенность устойчива тогда и только тогда, когда число ее критических подмногообразий в окрестности особого слоя совпадает с числом критических подмногообразий в окрестности ее произвольной особой точки минимального ранга. В частности, все расщепляемые особенности неустойчивы.*

То, что из этого условия следует устойчивость, доказывается так же, как и в фокусном случае. Рассмотрим, например, особенности типа седло-седло сложности 2. Таких особенностей 39. 11 из них имеют связный L -тип (см. таблицу 9.1 в [4]). Эти особенности устойчивы.

4 Гладкие инварианты многомерных особенностей

4.1 Гладкая эквивалентность неприводимых особенностей

В этом разделе для канонических интегралов будет использоваться как вещественная, так и комплексная форма записи:

$$z_j = f_1^j + if_2^j.$$

Функции z_j также будем называть каноническими интегралами.

Понятие связывающего диффеоморфизма в многомерном случае определяется так же, как и для обычных фокусных особенностей. Как и в случае степени 1, достаточно рассматривать связывающие диффеоморфизмы только между соседними особыми точками.

Оказывается, что связывающие диффеоморфизмы в случае степени $n > 1$ устроены весьма специфическим образом.

Лемма 4.1. Пусть x_1, x_2 — две особые точки, z, \tilde{z} — соответствующие им наборы канонических интегралов. Пусть также $\Delta_i(x_1) = x_2$, где Δ_i — сдвиг в направлении i на редуцированном особом слое. Тогда для любого $j \neq i$ $\tilde{z}_j = z_j$.

Доказательство. Рассмотрим точку y , проекция которой на редуцированный особый слой лежит на ребре, соединяющем x_1 и x_2 . Эта точка ранга 2. Предположим, что y близка к x_1 . Тогда, очевидно ее канонические интегралы есть $z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n$. Если же взять точку w над тем же ребром, но близкую к x_2 , то каноническими интегралами будут $\tilde{z}_1, \dots, \hat{\tilde{z}}_i, \dots, \tilde{z}_n$. Но y и w лежат в одной орбите, поэтому канонические интегралы должны совпадать. \square

Следствие 4.1.1. Связывающие диффеоморфизмы имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{z}_1 & = z_1, \\ & \vdots \\ \tilde{z}_{i-1} & = z_{i-1}, \\ \tilde{z}_i & = \tilde{z}_i(z_1, \dots, z_n), \\ \tilde{z}_{i+1} & = z_{i+1}, \\ & \vdots \\ \tilde{z}_n & = z_n \end{cases}$$

Их условия нерасщепляемости следует также, что $\tilde{z}_i = 0$ при $z_i = 0$.

Утверждение 4.1. Если две фокусные особенности послойно гомеоморфны и все связывающие диффеоморфизмы совпадают, то они послойно диффеоморфны.

Утверждение доказывается также, как и для степени 1.

Теорема 4.1. Неприводимые особенности не имеют гладких инвариантов.

Доказательство. Рассмотрим две особые точки x_1 и x_2 . Зафиксируем произвольное i от 1 до n . По определению неприводимой особенности можно перевести x_1 в x_2 , не применяя сдвиг Δ_i . Но отсюда следует, что $\tilde{z}_i = z_i$. Поскольку это верно для любого i , все связывающие диффеоморфизмы нашей особенности тождественны и диффеоморфность равносильна гомеоморфности. \square

Все особенности, не являющиеся неприводимыми, имеют гладкие инварианты. Более того, эти гладкие инварианты устроены очень сложно и не сводятся к гладким инвариантам особенностей степени 1. Мы покажем, что существует особенность, гомеоморфная $F(1) \times F(2)$, но не представимая в виде почти прямого произведения в гладком смысле.

4.2 Препятствие к разложению в гладкое почти прямое произведение

В этом разделе мы построим препятствие к разложению в гладкое почти прямое произведение и приведем пример особенности, для которой это препятствие нетривиально.

Определение 4.1. Диффеоморфизм $(\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ базы слоения в окрестности фокусной особенности будем называть $2n$ -допустимым, если он может быть поднят до диффеоморфизма слоения и при этом не переставляет местами диски $\{z_j = 0\}$.

2 -допустимый диффеоморфизм — это просто допустимый диффеоморфизм.

Имеет место

Теорема 4.2. *Две фокусные особенности послойно диффеоморфны тогда и только тогда, когда они послойно гомеоморфны и после некоторых допустимых замен канонических интегралов в окрестностях особых точек все связывающие диффеоморфизмы совпадают.*

Утверждение доказывается также, как и для степени 1.

Теорема 4.3. *Диффеоморфизм $2n$ -допустим тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$\begin{cases} \tilde{z}_1 &= z_1 h_1(z), \\ &\vdots \\ \tilde{z}_n &= z_n h_n(z) \end{cases}$$

Все z_i в правой части можно заменять на \bar{z}_i .

Доказательство этого утверждения дословно повторяет соответствующее доказательство для степени 1.

Очевидно следующее

Утверждение 4.2. *Особенность представима в виде гладкого почти прямого произведения тогда и только тогда, когда допустимыми заменами все ее связывающие диффеоморфизмы приводятся к виду:*

$$\begin{cases} \tilde{z}_1 &= z_1, \\ &\vdots \\ \tilde{z}_{i-1} &= z_{i-1}, \\ \tilde{z}_i &= \tilde{z}_i(z_i), \\ \tilde{z}_{i+1} &= z_{i+1}, \\ &\vdots \\ \tilde{z}_n &= z_n \end{cases} \quad (19)$$

Теперь мы построим препятствие, не дающее привести связывающий диффеоморфизм к виду (19). Мы будем рассматривать случай $n = 2$, хотя аналогичная конструкция работает для любой степени.

Пусть связывающий диффеоморфизм имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{z}_1 = z_1, \\ \tilde{z}_2 = f(z_1, z_2). \end{cases}$$

Определим

$$\mu(z_1) = \left. \frac{|\partial f / \partial \bar{z}_2|}{|\partial f / \partial z_2|} \right|_{z_2=0}$$

Заметим, что $\mu(0)$ — это не что иное, как C^1 -инвариант особенности степени 1, лежащей в прообразе диска $\{z_1 = 0\}$ (L^2 в смысле главы « L_k -тип»).

Лемма 4.2. *μ есть функция $\{z_2 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, не зависящая от выбора канонических интегралов.*

Доказательство. Имеем

$$\tilde{z}_2 = f(z_1, z_2) = z_2 g(z_1) + \bar{z}_2 h(z_1) + \dots$$

Сделаем допустимые замены $z \rightarrow w$, $\tilde{z} \rightarrow \tilde{w}$. Будем иметь

$$\tilde{w}_2 r(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = w_2 q(w_1) g(z_1) + \overline{w_2 q(w_1)} h(z_1) + \dots$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu}(w_1) = \mu(z_1),$$

что и требовалось доказать. Несобственные допустимые замены рассматриваются аналогично. \square

Утверждение 4.3. *Если особенность разлагается в гладкое почти прямое произведение, то $\mu(z_1) = \mu(0) = \text{const}$.*

Осталось построить особенность, для которой это условие не выполнено.

Теорема 4.4 (Теорема реализации). *Любой диффеоморфизм $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ вида*

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f_1, \\ \tilde{f}_2 = f_2, \\ \tilde{f}_3 = f(f_1, f_2, f_3, f_4), \\ \tilde{f}_4 = f_4, \end{cases}$$

где $f(x, y, 0, 0) = 0$, может быть реализован в виде связывающего диффеоморфизма некоторой особенности, гомеоморфной $F(2) \times F(1)$.

Утверждение доказывается также, как и для степени 1.
 Возьмем $\tilde{f}_3 = f_3 + f_1 f_3$. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2 &= z_2 + \frac{1}{4}(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2), \\ \frac{\partial \tilde{z}_2}{\partial z_2} &= 1 + \frac{1}{4}(z_1 + \bar{z}_1), \\ \frac{\partial \tilde{z}_2}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{1}{4}(z_1 + \bar{z}_1),\end{aligned}$$

откуда $\mu(0) = 0, \mu(1) = 1/3$. Следовательно, наша особенность не может быть представлена в виде гладкого почти прямого произведения.

4.3 C^1 -классификация

На уровне C^1 -гладкости все связывающие диффеоморфизмы имеют вид (19). Следовательно, имеет место следующая

Теорема 4.5. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность C^1 -эквивалентна почти прямому произведению, причем C^1 -структуры на сомножителях определены однозначно.*

Доказательство. Второе утверждение теоремы следует из того, что эти сомножители диффеоморфны особенностям L^1, \dots, L^n (точнее, их связным компонентам). \square

Таким образом, C^1 -классификация фокусных особенностей сводится к задаче C^1 -классификации особенностей степени 1. Гладкие структуры на сомножителях не произвольны. Дело в том, что наличие действия группы G , переставляющей особые точки, накладывает ограничения на гладкую структуру. Задача гладкой классификации особенностей $F(m)$ с действующей группой G эквивалентна задаче гладкой классификации особенностей $F(m)/G$. Пусть $p_i(F)$ — число орбит действия G на i -ой компоненте почти прямого произведения. Пусть $I(m)$ — число C^1 -инвариантов особенности $F(m)$:

$$I(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 1, \\ 2m - 3, & \text{если } m > 1. \end{cases}$$

Явные выражения для инвариантов могут быть найдены в главе 1.2.

Утверждение 4.4. *Число C^1 -инвариантов фокусной особенности F степени n равно*

$$\sum_{i=1}^n I(p_i(F)).$$

С помощью аналогичной техники можно доказать, что всякая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости и не имеющая фокусных компонент, диффеоморфна почти прямому произведению. Если же особенность имеет фокусные компоненты, то а priori имеет место только C^1 -эквивалентность почти прямому произведению. C^1 -инварианты нерасщепимой особенности всегда определяются C^1 -инвариантами ее фокусных компонент.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т, Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. № 2. С. 49-77.
- [3] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Траекторная эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I; II. Матем. сборник, 185 (4), с. 27–80; 185 (5), с. 27–78 (1994).
- [4] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация. Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика издательский дом "Удмуртский университет 1999.
- [5] Бухштабер В.М., Панов Т.Е., Действия тора и комбинаторика многогранников, Солитоны, геометрия, топология — на перекрестках, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, 225, Наука, М., 1999, 96–131.
- [6] Бухштабер В.М., Панов Т.Е., Торические действия в топологии и комбинаторике, Издательство МЦНМО, 2004.
- [7] Матвеев В.С., Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло, Матем. сб., 187:4 (1996), 29–58.
- [8] Ошемков А.А., Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы для некоторых интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$ // Успехи матем. наук, 1987, Т.42, Вып.6, С.199–200.
- [9] Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей для некоторых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Т.23, М.: МГУ, 1988, С.122–131.
- [10] Ошемков А.А., Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Т.25, М.: МГУ, 1993, С.23–109.
- [11] Ошемков А.А., Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей, Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН, 205, Наука, М., 1994, 131–140.

- [12] Ошемков А.А., Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 201:8 (2010), 63–102.
- [13] Фоменко А.Т., Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, Доклады АН СССР. 1986. **287**, №5. 1071–1075.
- [14] Фоменко А. Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. Изв. АН СССР. Сер. матем.1986. **50**, № 6. 1276–1307.
- [15] Фоменко А. Т. , Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, УМН, 44:1(265) (1989), 145–173
- [16] Харламов М.П., Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988, 200 с.
- [17] Bolsinov A.V., Methods of calculation of Fomenko-Zieschang topological invariant, Advances in Sov. Math., 1991, Vol.6, AMS, Providence, pp. 147-183.
- [18] Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Singularities of integrable hamiltonian systems, Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publ., 2006, pp. 1-67.
- [19] Dufour J.-P., Molino P., and Toulet A., Classification des systems integrables en dimension 2 et invariants des modeles de Fomenko. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 318 : 942–952, 1994.
- [20] Eliasson L.H., Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case, Comm. Math. Helv., 65(1990), 4-35.
- [21] Lerman L. M. and Umanski Ya. L., Structure of the Poisson action of \mathbb{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I, II. Selecta Math. Sov., 6 : 365–396, 1987; 7 : 39–48, 1988.
- [22] Jerrold Marsden, Alan Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Rep. Mathematical Phys. 5 (1974), pp. 121-130
- [23] Miranda E., On symplectic linearization of singular Lagrangian foliations. Ph.D. Thesis. Universitat de Barcelona, 2003.
- [24] Nguyen Tien Zung, Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities, Compositio Mathematica, 101(1996), 179-215
- [25] Nguyen Tien Zung, A note on focus-focus singularities, Differential geomerty and applications, 7: 123-130, 1997

- [26] Nguyen Tien Zung, Another note on focus-focus singularities, *Lett. Math. Phys.* 60(2002), no. 1, 87-99
- [27] Nguyen Tien Zung, Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II : Topological classification. *Compositio Math.*, 138(2) : 125–156, 2003.
- [28] M. Symington. Four dimensions from two in symplectic topology. In *Proceedings of the 2001 Georgia International Topology Conference, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 153–208, 2003.
- [29] Vey J., Sur certain systemes dynamiques separables. *Amer. J. Math.*, 100: 591–614, 1978.
- [30] San Vu Ngoc, On semi-global invariants for focus-focus singularities, *Topology*, 42(2): 365-380, 2003
- [31] Williamson J., On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems, *Amer. J. Math.*, 58:1(1936), 141-163
- [32] M. Zou, Monodromy in two degrees of freedom integrable systems, *J. Geom. Phys.*, 10(1992), 37-45.