

На правах рукописи

УДК 531.36

Ивочкин Михаил Юрьевич

**Интегрируемость и неинтегрируемость
уравнений движения тяжелого тела
эллипсоидальной формы на гладкой
горизонтальной плоскости**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

д. ф.-м. н., проф.

Карапетян А. В.

к. ф.-м. н., доц.

Ошемков А. А.

Москва

2009

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор методов, используемых для исследования интегрируемости и неинтегрируемости дифференциальных уравнений	8
1.1. Интегрируемость дифференциальных уравнений.	8
1.2. Неинтегрируемость дифференциальных уравнений.	8
Глава 2. Топологический анализ движения эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости	32
2.1. Введение	32
2.2. Постановка задачи. Схема исследования	33
2.3. Построение бифуркационных диаграмм, изучение перестроек торов	38
2.4. Исследование изоэнергетических многообразий	50
Глава 3. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости	56
3.1. Введение	56
3.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы.	56
3.3. Доказательство неинтегрируемости	58
Глава 4. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости	63

4.1. Введение	63
4.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы.	63
4.3. Доказательство неинтегрируемости	65
Глава 5. Необходимые и достаточные условия полной алгебраической интегрируемости уравнений движения тяжелого неоднородного шара на гладкой горизонтальной плоскости . . .	70
5.1. Введение	70
5.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы	70
5.3. Доказательство теоремы 1	72
5.4. Доказательство теоремы 2	76
Заключение	80
Литература	81

Введение

Постановка задачи

Задача о движении тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости — одна из классических задач механики. Эта задача в определенном смысле представляет собой обобщение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Естественным образом встает вопрос об исследовании возможных интегрируемых случаев. Известно, что в этой задаче существуют аналоги случаев Эйлера и Лагранжа. Однако случаев нетривиальной интегрируемости (скажем, аналога случая Ковалевской) пока обнаружено не было.

В настоящей работе рассматриваются задачи анализа интегрируемых случаев уравнений движения тела эллипсоидальной формы (в частности шара) на гладкой горизонтальной плоскости.

Известны разные методы для изучения интегрируемых случаев. Одними из наиболее продвинутых и наглядных являются методы топологического анализа: с помощью этих методов исследуются перестройки инвариантных многообразий (метод С. Смейла), строятся топологические инварианты (метод А.Т. Фоменко).

Для доказательства неинтегрируемости задачи (в случаях, отличных от аналогов случаев Эйлера и Лагранжа) используются методы В.В. Козлова, С.Л. Зиглина, Моралиса-Руиза-Рамиса.

Этот вопрос был исследован в работе [14], [83], в которой в первом приближении по малому параметру найдены необходимые условия интегрируемости. Вопрос, являются ли найденные условия и достаточными для интегрируемости, рассматривался в работах [29], [8]. В диссертации во втором приближении найдены более сильные и простые необходимые условия интегрируемости, что приводит к вырождению в данной задаче для первого приближения случая

Клебша в тривиальный случай Эйлера. Для случая, когда поверхность тела - шар, методами дифференциальной теории Галуа доказывается отсутствие нетривиальных случаев интегрируемости.

Обзор результатов

1) Дан обзор различных методов доказательства неинтегрируемости систем дифференциальных уравнений, применяемых в задачах механики.

2) Для уравнений, описывающих движение тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения (аналог случая Лагранжа), было выполнено:

- построены бифуркационные диаграммы Смейла, описаны перестройки торов Лиувилля;

- исследованы изоэнергетические многообразия.

3) Для уравнений движения тяжелого трехосного эллипсоида с малыми возмущениями полуосей, для которого центр масс совпадает с геометрическим центром, было получено необходимое условие существования дополнительного мероморфного интеграла.

4) Для уравнений движения тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида, для которого главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности и центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида-поверхности, были получены необходимые условия существования аналитического интеграла.

5) Для уравнений движения тяжелого неоднородного шара были получены необходимые и достаточные условия того, что система уравнений движения является алгебраически вполне интегрируемой.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации,

дан краткий обзор работ, связанных с исследованием интегрируемых и неинтегрируемых задач в динамике твердого тела и приведено краткое содержание диссертации.

Ставится задача исследовать обнаруженные интегрируемые случаи для уравнений движения, описывающих движение тела эллипсоидальной формы по гладкой горизонтальной плоскости, а также найти условия, при которых интегралы существуют. Естественные интегрируемые случаи, которые здесь возникают, - это случай Эйлера, когда эллипсоид вырождается в шар с совпадающими геометрическим центром и центром масс, и Лагранжа, когда эллипсоид динамически и геометрически симметричен. Поскольку в известной литературе движение аналога волчка Лагранжа не рассматривалось, то имеет смысл начать рассмотрение именно с этого случая.

В первой главе дается обзор различных методов, используемых при доказательстве интегрируемости и неинтегрируемости дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассматривается движение тяжелого твердого динамически и геометрически симметричного эллипсоида со смещенным вдоль оси симметрии центром масс на гладкой горизонтальной плоскости. Согласно программе Смейла по исследованию гамильтоновых систем с симметрией рассматривается отображение момента. Строятся и классифицируются при различных значениях параметров бифуркационные диаграммы. Для каждой области бифуркационной диаграммы устанавливается число торов Лиувилля, изучаются перестройки этих торов. Описываются особенности отображения момента, для каждого значения параметров изучаются особенности ранга 1 и 2. Кроме того, в случае, когда центр масс совпадает с геометрическим, строятся и классифицируются бифуркационные диаграммы в трехмерном пространстве, а также исследуются перестройки так называемых изоэнергетических многообразий.

В третьей главе рассматривается эллипсоид, близкий к шару, с мало отличающимися полуосями. В этом случае, в [14] было доказано, что необходимые условия существования дополнительного интеграла таковы:

- (1) Центр масс эллипсоида совпадает с его геометрическим центром
- (2) Главные центральные оси инерции эллипсоида сонаправлены с главными геометрическими осями эллипсоида-поверхности
- (3) Выполнено условие Клебша:

$J_1(B_2 - B_3) + J_2(B_3 - B_1) + J_3(B_1 - B_2) = 0$, где J_1, J_2, J_3 - моменты инерции тела, B_1, B_2, B_3 - главные полуоси эллипсоида - поверхности.

Вставал вопрос, является ли данное условие и достаточным. В отличие от работы [14], в диссертации берется не гомоклиническое частное решение, а эллиптическое. Методом дифференциальной теории Галуа находятся условия, при которых группа Галуа для линеаризованного в первом приближении возмущенного уравнения будет абелева. Поскольку риманова поверхность частного решения - это тор с одной особой точкой, то для него условия теоремы Моралиса-Руиза-Рамиса эквивалентны однозначности решения при обходе около этой особой точки. Таким образом, можно исследовать условия выполнения теста Ковалевской-Пенлеве в окрестности этой особой точки. В первом приближении получаются уже известные результаты. Во втором приближении условие Клебша вырождается в тривиальное условие: все полуоси эллипсоида равны.

В четвертой главе рассматривается динамически и геометрически симметричный эллипсоид, для которого главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности и при этом центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида-поверхности. Берется стационарное решение, которое соответствует вращению тела вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс. Затем уравнения движения рассматриваются в окрестности этого решения и в этой окрестности анализируется строе-

ние нормальной формы. Необходимые условия интегрируемости получаются применением теоремы В.В. Козлова [28], [11].

В пятой главе применяется метод Ковалевской—Ляпунова—Иошиды для уравнений, описывающих движение шара с произвольным распределением масс на гладкой горизонтальной плоскости. Последовательно рассматриваются три различных частных решения. Для каждого из них применяется метод Ковалевской—Ляпунова—Иошиды, последовательно получают необходимые условия интегрируемости. В конечном итоге, получается, что эти условия оказались настолько жесткими, что существуют лишь аналоги случаев Эйлера и Лагранжа.

В заключении коротко сформулированы основные результаты работы.

Результаты опубликованы в работах [25], [24] и докладывались на семинарах и конференциях:

- Семинар "Современные геометрические методы" кафедры дифференциальной геометрии и приложений мех-мата МГУ под руководством проф., акад. РАН А.Т. Фоменко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.С. Мищенко, доц. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, 14.02.2007
- VI Международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 01-06.08.2007
- X Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", Москва, 01-05.06.2008
- Семинар "Избранные задачи динамики" кафедры теоретической механики и мехатроники мех-мата МГУ под руководством проф., чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, 16.10.2008
- V Международная конференция "Поляховские чтения", Санкт-Петербург, 03-06.02.2009
- Семинар имени В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А.В. Карапетяна, чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Я.В. Татарина, 08.04.2009

Обзор методов, используемых для исследования интегрируемости и неинтегрируемости дифференциальных уравнений

1.1. Интегрируемость дифференциальных уравнений.

Задача поиска интегрируемых случаев в динамике твердого тела берет свое начало с работ Эйлера, Лагранжа, Пуансо и др. Более подробное описание известных интегрируемых случаев см. в работах [8], [38]. Новый подход, связанный с изучением топологического анализа берет свое начало с работ [44], [56], [2]. Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в работах [52], [5] была построена теория, позволяющая в инвариантном виде их классифицировать.

1.2. Неинтегрируемость дифференциальных уравнений.

Наряду с методами исследования интегрируемых систем разрабатывались и методы для доказательства того, что интегралов для данных дифференциальных уравнений не существует. Наиболее простой способ поиска интегралов - поиск интегралов определенного вида (например полиномов) методом неопределенных коэффициентов. Так были получены многие интегрируемые случаи, например, [45]. Существует много различных теорий, которые позволяют доказать неинтегрируемость. Можно попытаться их расклассифицировать следующим образом:

1. Локальные методы, основанные на анализе уравнений, линеаризованных в окрестности известного точного решения (А. Пуанкаре)

Пуанкаре в своей книге [39] разработал теорию неинтегрируемости для классических задач механики. Отправной точкой являлась линеаризация уравнений около частного решения.

1) *Лемма Пуанкаре* ([39]). Пусть $I = I(\mathbf{x})$ — первый интеграл системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, тогда для всех решений $\mathbf{x}_0(t)$ выражение $J = \langle DI(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle$ является линейным зависящим от времени первым интегралом уравнения в вариациях $\dot{\mathbf{u}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$

Линейную систему использовать проще, чем нелинейную, поэтому локальную интегрируемость (т.е. предполагая независимость интегралов на частном решении) можно доказывать, например, на основе теории Галуа.

2) *Метод Пуанкаре для векового множества.* ([39], [27], [29]) В той же книге [39] для доказательства неинтегрируемости плоской круговой ограниченной задачи трех тел Пуанкаре использовал следующий метод. Пусть $M = D \times \mathbb{T}^n$ (D — область в $\mathbb{R}^n = \{I\}$) снабжено стандартной симплектической структурой $dI \wedge d\varphi$, и пусть $H : M \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ — аналитическая функция такая, что $H(I, \varphi, 0) = H_0(I)$. При $\epsilon = 0$ имеем полностью интегрируемую систему с гамильтонианом H_0 . Рассмотрим полную систему:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad H(I, \varphi, \epsilon) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \varphi) + O(\epsilon^2) \quad (2.1)$$

Разложим функцию $H_1(I, \varphi)$ в ряд Фурье $H_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} h_m(I) e^{\langle im, \varphi \rangle}$.

Определение: Множество Пуанкаре — это множество значений $I \in D$, для каждого из которых существуют $n - 1$ линейно независимых векторов k_1, \dots, k_{n-1} таких, что

$$1) \langle k_s, \omega(I) \rangle = 0, \quad 1 \leq s \leq n - 1; \quad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$$

$$2) h_{k_s}(I) \neq 0$$

Теорема: Функции H_0 и F_0 зависимы на множестве Пуанкаре.

Данный метод применялся в работах [27], [29], [30], [43], где неинтегрируемость доказывалась с использованием всюду плотности множества Пуанкаре.

3) *Метод Пуанкаре для периодических решений* ([39], [27], [29]).

Теорема: Предположим, что гамильтонова система с гамильтонианом H имеет p интегралов $F_1 = H, F_2, \dots, F_p$, дифференциалы которых линейно независимы в каждой точке траектории периодического решения. Тогда $p + 1$ характеристических показателей этого решения равны 0. Если интегралы F_s коммутируют, то среди показателей по крайней мере $2p$ равны нулю. Пусть дана гамильтонова система с p интегралами. Если они независимы на периодическом решении, тогда $p + 1$ мультипликаторов равны 1.

Глобальная неинтегрируемость доказывается путем установления всюду плотности невырожденных периодических решений.

4) *Метод Пуанкаре для доказательства несуществования однозначных интегралов* ([39], [27], [29])

Пусть $D_{\mathbb{C},\delta} = \{I \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} I \in D \subset \mathbb{R}^n, |\operatorname{Im} I| < \delta\}$, $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ — комплексный тор с комплексно-угловыми координатами $\varphi \bmod 2\pi$, E — некоторая окрестность нуля в \mathbb{C} . Пусть $H : D_{\mathbb{C},\delta} \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n \times E \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция.

При $\epsilon \neq 0$ решения возмущенных уравнений (2.1) уже не будут, вообще говоря, однозначными. Пусть γ — некоторый замкнутый контур на комплексной плоскости времени. Пусть все решения системы с функцией Гамильтона $H_0(I)$ однозначны на комплексной плоскости $t \in \mathbb{C}$: $I = I^0, \varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t$.

Согласно известной теореме Пуанкаре, решение уравнений (2.1) можно разложить в степенные ряды

$$I = I^0 + \epsilon I^1(t) + O(\epsilon^2), \quad \varphi = \varphi^0 + \omega t + \epsilon \varphi^1(t) + O(\epsilon^2)$$

сходящиеся при достаточно малых значениях ϵ , если $t \in \gamma$.

Теорема: Пусть для некоторых начальных данных I^0, φ^0 функция I^1 неоднозначна вдоль замкнутого контура $\gamma \in \mathbb{C}\{t\}$. Тогда дополнительные интегралы зависят на γ .

Данный метод применялся в работе [28], где была доказана локальная интегрируемость при малом ϵ .

Основной недостаток данных методов — их локальный характер.

2. Метод исследования векового множества частных невырожденных решений (А. Пуанкаре, В.В. Козлов)

Согласно КАМ теории при возмущении невырожденной гамильтоновой системы частные нерезонансные решения сохраняются. Чаще всего резонансные частные решения располагаются в фазовом пространстве всюду плотно. Если мы докажем, что невырожденные частные решения расположены всюду плотно, то и интегралы окажутся зависимыми уже на всем фазовом пространстве.

В классической теории возмущений для гамильтоновых систем это можно сформулировать так.

Используя малый параметр ϵ , можно попытаться с помощью канонической замены $(I, \varphi \bmod 2\pi) \mapsto (J, \psi \bmod 2\pi)$ упростить систему (2.1). В новых переменных систему можно легко проинтегрировать. Замена осуществляется с помощью производящей функции $S(\varphi, J) = \langle \varphi, J \rangle + \epsilon S_1(\varphi, J)$, $\psi = \partial S / \partial J$, $I = \partial S / \partial \varphi$.

Пусть $\mathcal{H} = H_0(J + \epsilon \partial S_1 / \partial \varphi + \dots) + \epsilon H_1(\varphi, J + \dots) + O(\epsilon^2)$.

Разлагая функции $S(\varphi, J)$, $H_1(\varphi, J)$ в ряды Фурье

$$S_1(\varphi, J) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} S_1^k(J) e^{i k \cdot \varphi}, \quad H_1^k(\varphi, J) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} H_1^k(J) e^{i k \cdot \varphi}$$

и приравнивая коэффициенты рядов Фурье для левой и правой частей разложения, получим:

$$\langle \omega, \partial S_j / \partial \varphi \rangle - \mathcal{H}_j(J) = \Phi_j(\varphi, J), \quad j = 1, \dots, n,$$

где функция $\Phi_j(\varphi, J)$ известна к данному шагу процедуры.

На формальном уровне такая замена построена, однако данные ряды расходятся из-за малых знаменателей. На некоторой гиперповерхности $\langle k, \omega(J) \rangle = 0$ функция S_j формально не определена (если числители дробей, представляющие функцию S_j тоже не равны нулю). Часто в совокупности эти поверхности образуют всюду плотное множество.

Теорема Предположим, что выполнены следующие предположения:

- (1) гамильтониан H - аналитическая функция
- (2) невозмущенная система невырождена
- (3) множество Пуанкаре таково, что любая вещественно-аналитическая функция, равная нулю на нем, обращается в нуль всюду на D .

Тогда возмущенная система не имеет полного набора первых интегралов, аналитических по ϵ .

3. Метод, основанный на анализе однозначности решений (С.В. Ковалевская, А.М. Ляпунов, Х. Иошида)

1) Квазиоднородные системы.

Рассматриваются так называемые квазиоднородные дифференциальные уравнения, имеющие квазиоднородные решения. Такой тип уравнений получается при разложении мероморфных уравнений в окрестности мероморфного частного решения. Можно явно выписать общее решение получившихся уравнений. Можно наложить условия, чтобы общее решение было однозначным. В этом заключается процедура Ковалевской–Ляпунова.

Если у квазиоднородной системы имеется квазиоднородный интеграл, тогда его степень будет равна показателям Ковалевской (собственные значения лучей, определяемых квазиоднородными решениями). В этом заключается теорема Иошиды.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с голоморфной пра-

вой частью, представляемая в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{f}^{(m)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad (2.2)$$

Предположим, что она допускает первый интеграл $I(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$

Теорема ([31], [67], [91], [13], [16])

1⁰. Пусть функции $\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{x})$ квазиоднородны, т.е. инвариантны относительно преобразований $t \rightarrow \delta t, x_i \rightarrow \delta^{p_i+q^{(j)}-1}x_i, \quad 0 < q^{(i)} < q^{(j)}, i < j$ и уравнение $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{x})$ имеет ненулевое частное решение

$$x_j^{(0)}(t) = \alpha_j t^{p_j}, \alpha_j \in \mathbb{C}, p_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n$$

2⁰. Производная интеграла $I(\mathbf{x})$ не равна нулю на этом решении, а сам он является квазиоднородным многочленом.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) матрица Ковалевской $K = \frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{\alpha}) - \text{diag}(\mathbf{p})$ диагонализируема; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

и ее собственные значения ρ_i , называемые показателями Ковалевской, — целые;

Пусть $\boldsymbol{\beta}_i$ — собственные векторы матрицы Ковалевской.

2) решение системы (2.2) имеет вид

$$x_j(t) = t^{p_j} \left(\alpha_j + \sum_s c_{js} (\ln t) t^{\langle \rho, s \rangle} \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

где коэффициенты c_{js} являются полиномами от $\ln t$.

3) степень квазиоднородности первого интеграла $I(\mathbf{x})$ есть показатель Ковалевской.

Замечание. Можно требовать, чтобы общее решение вида (2.3) было однозначным, для этого нужны также условия совместности на коэффициенты c_{js} . Тогда суммирование будет вестись по некоторой решетке периодов, получающейся из условий резонанса на показатели Ковалевской. В этом заключается проверка уравнений (2.2) на тест Пенлеве [16].

2) *Квазиоднородные системы с малым параметром.*

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с голоморфной и аналитической по ϵ правой частью (ϵ —малый параметр)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) + \epsilon^2 \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad (2.4)$$

Предположим, что она допускает $0 < k \leq n - 1$ интегралов, представленных в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)} + \epsilon \mathbf{F}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{F}^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^k \quad (2.5)$$

Пусть \mathbf{I} — k интегралов невозмущенной системы, соответствующие нулевому значению ϵ в разложении (2.5).

Известна следующая теорема, восходящая в идейном плане к работам Ковалевской и Ляпунова.

Теорема ([16] с. 245, предложение (4.11)).

1⁰. Пусть функция $\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{x})$ квазиоднородна, т.е. невозмущенная система инвариантна относительно преобразований $t \rightarrow \delta t, \quad x_j \rightarrow \delta^{p_j} x_j$, и она имеет ненулевое решение

$$x_j^{(0)}(t) = \alpha_j t^{p_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, p_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n$$

2⁰. Интегралы $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{x})$ — функционально независимые на этом решении квазиоднородные многочлены (т.е. ранг матрицы Якоби для функций $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{x})$ максимален на решении)

3⁰. Функции $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots$) —многочлены.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) матрица Ковалевской $K = \frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{\alpha}) - \text{diag}(\mathbf{p})$ диагонализируема; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

и ее собственные значения ρ_i — показатели Ковалевской, —целые;

Пусть $\boldsymbol{\beta}_i$ — собственные векторы матрицы Ковалевской.

2) решение системы (2.4) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \epsilon \mathbf{x}^{(1)}(t) + \epsilon^2 \mathbf{x}^{(2)}(t) + \dots$$

где

$$\mathbf{x}^{(i)}(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-\ell+1} s_{ij}(t) \ln^j(t), & \text{если } i \geq \ell - 1 \\ s_{i0}(t), & \text{если } i < \ell - 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

и $s_{ij}(t)$ — суммы одночленов по t , ℓ — параметр, который соответствует члену наименьшего порядка по ϵ , где требуется логарифмическая поправка (если соотношение (2.6) не содержит логарифмов вообще, то будем считать $\ell = \infty$).

3) выполнены k условий:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{s}_{l1} \right\rangle = 0 \quad (2.7)$$

Замечание. Утверждение (1) составляет теорему Йошиды [91], которая вытекает из условий 1^0 , 2^0 (см. предыдущий пункт). Утверждение (2) выводится методом вариации произвольных постоянных при учете масштабной инвариантности уравнений и условия 3^0 . Утверждение (3) получается подстановкой разложения (2.6) в интегралы (2.5) и их разложением в ряд по степеням ϵ . Там, где впервые встретится логарифм, будет ветвление решения, что противоречит однозначности первых интегралов. Из условия 2^0 следует, что якобиан замены $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{I})$ существует и невырожден ($\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{I}} \neq 0$) на решении, поэтому можно рассматривать соотношения для \mathbf{I} вместо \mathbf{F} . Отсюда и следует искомое утверждение.

3) Связь метода Ковалевской–Ляпунова–Йошиды с нормализацией обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности особой точки.

Заменой переменных $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\xi, \tau)$, где $x_j = t^{p_j} \xi_j$, $t = e^\tau$ можно преобразовать квазиоднородное дифференциальное уравнение (2.2) в уравнение в

окрестности положения равновесия, имеющее следующий вид:

$$\xi' = K\xi + \dots \quad (2.8)$$

где K - матрица Ковалевской.

Все утверждения предыдущих теорем можно сформулировать в терминах уравнения (2.8). В частности, условие выполнения теста Пенлеве будет означать линеаризуемость системы (2.8).

4) *Алгебраически вполне интегрируемые системы, связь с тестом Пенлеве.*

Можно рассматривать такие системы дифференциальных уравнений, для которых свойство Пенлеве всегда выполнено. В общем случае оно не выполняется, например, для системы с гамильтонианом: $H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V_n(q)$, где $V_n(q)$ - многочлен степени большей, чем 4.

Системы, для которых это условие выполнено, называются алгебраически вполне интегрируемыми системами (а.в.и.с.).

$$\dot{\mathbf{x}} = \{H, \mathbf{x}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

H - действительный многочлен по \mathbf{x} .

Пусть F_1, \dots, F_k - полиномы Казимира для (2.9) и на их уровне система невырождена.

Точное определение таково:

Определение ([57]) Гамильтонова система (2.9) называется алгебраически вполне интегрируемой системой (а.в.и.с.), если:

(1) Помимо полиномов Казимира F_1, \dots, F_k система имеет $m = (n - k)/2$ дополнительных независимых полиномиальных первых интегралов F_{k+1}, \dots, F_{k+m} в инволюции таких, что для $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{k+m}) \in \mathbb{R}^n$ инвариантное многообразие

$$\mathcal{C}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{R}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F_i(\mathbf{x}) = a_i, i = 1, \dots, k + m\}$$

является объединением действительных торов;

(2) для векторной постоянной \mathbf{a} существует абелев тор \mathbb{T}^{2m} с комплексными координатами τ_1, \dots, τ_m и n абелевыми функциями $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau_1, \dots, \tau_m)$, параметризующими некомпактные инвариантные многообразия

$$\mathcal{C}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : F_i(\mathbf{z}) = a_i, i = 1, \dots, k + m\};$$

(3) на $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$ комплексный гамильтонов поток является линейным и может быть записан в виде

$$\dot{\tau}_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\mu_i = \text{const}).$$

Таким образом, определение а.в.и.с. говорит, что для почти всех значений постоянных μ_i поверхности уровней первых интегралов в действительной области являются действительными алгебраическими торами и что любой действительный тор является частью комплексного тора, на котором движение фазового потока линейно.

Теорема (о связи а.в.и.с. и мероморфности локальных решений) ([58])

Если система (2.9) является алгебраически вполне интегрируемой системой с k абелевыми функциями, то эта система допускает существование решений в виде локальных разложений в ряды Лорана с возрастающими степенями и $k - 1$ свободным параметром (т.е. $k - 1$ положительным показателем Ковалевской):

$$x_j(t) = t^{p_j} \left(\alpha_j + \sum_{s=1}^{\infty} c_{js} t^{\langle \rho, s \rangle} \right), \quad (2.10)$$

где $p_j \in \mathbb{N}$, c_{js} - постоянные.

5) *Связь метода Ковалевской–Ляпунова–Иошиды с методом дифференциальных групп Галуа.*

В методе Моралиса-Руиза-Рамиса (см. п.5) при изучении нормального уравнения в вариациях решения рассматриваются лишь локально, в окрестности их особых точек. Тогда можно явно выписать в квадратурах решение

вокруг таких особых точек. С точки зрения фазового пространства рассматривается сфера с двумя особенностями: ноль и бесконечность. Метод дифференциальных групп Галуа здесь не работает. Однако, наложив условия отсутствия ветвления, можно доказывать не мероморфную интегрируемость (как в методе Моралиса-Руиза-Рамиса), а то, что система является алгебраически вполне интегрируемой.

4. Метод, основанный на исследовании группы монодромии для системы, линеаризованной в окрестности известного точного нестационарного решения (С.Л. Зиглин)

В работах С.Л. Зиглина [21] предлагался следующий метод доказательства неинтегрируемости.

Пусть дана система комплексных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = X_H(x), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x \in M^{2n}, \quad H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.11)$$

(M^{2n} — комплексное $2n$ -мерное аналитическое многообразие).

Пусть $x_0 = \varphi(t)$ — частное решение, не являющееся положением равновесия, и пусть риманова поверхность Γ этого решения параметризована комплексным временем t . Рассматривается уравнение в вариациях в окрестности данного частного решения:

$$\dot{\eta} = X'_H(\varphi(t))\eta, \quad \eta \in T_\Gamma \quad (2.12)$$

"Фазовым пространством" системы (2.12) является риманова поверхность Γ .

Если система (2.11) имеет дополнительные интегралы, находящиеся в инволюции, то можно понизить порядок системы (2.11) на число этих интегралов и вместо уравнения в вариациях (2.12) можно исследовать нормальное уравнение в вариациях (2.13) (Н.У.В.).

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad A \in Mat(2m, K) \quad (2.13)$$

Для уравнения (2.13) полем коэффициентов всегда можно считать $K = \mathcal{M}(\bar{\Gamma})$, где $\Gamma = \bar{\Gamma}$ — риманова поверхность частного решения с мероморфными особенностями для данной параметризации [72].

Определение: Матрицей монодромии M называется элемент фундаментальной группы $M \in \pi(\bar{\Gamma}, t_0)$.

Существование мероморфных первых интегралов накладывает ограничения на группу монодромии, а именно: требуется существование у нее инвариантов.

Лемма Зиглина ([21]) Если гамильтонова система (4.1) имеет мероморфный интеграл в некоторой окрестности $U \in \mathbb{M}^{2n}$ такой, что фундаментальная группа для Γ порождена петлями, лежащими в U , тогда фундаментальная группа M нормального уравнения в вариациях имеет рациональный первый интеграл: $F(g\xi) = F(\xi), \forall g \in M, \quad F \in \mathbb{C}(\xi)$.

Группа монодромии в данной лемме выступает лишь как имеющая инвариант — здесь не учитываются свойства именно самой группы монодромии, вместо нее можно было бы рассматривать другую группу. В работах [59], [61] были детально исследованы группы, имеющие инварианты. Наиболее простые группы с такими свойствами были исследованы еще Зиглиным в работе [21].

Определение: Элемент $g \in M$ называется резонансным, если для его собственных значений $\text{spectr}(g) = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_m, \lambda_m^{-1}), \lambda_i \in \mathbb{C}$ выполнено соотношение:

$$\prod_{l=1}^m \lambda_l^{k_l} = 1, \text{ для некоторых } (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m, \sum_{i=1}^m k_i \neq 0.$$

Теорема Зиглина ([21]) Пусть гамильтонова система имеет независимые мероморфные интегралы в окрестности частного решения (на самом решении интегралы могут быть зависимы), и группа монодромии Н.У.В. содержит нерезонансный элемент g . Тогда любой другой элемент группы монодромии

переводит собственные векторы элемента g в себя. В частности, любые два нерезонансных элемента группы монодромии коммутируют.

Метод Зиглина для доказательства неинтегрируемости использовался в работах [21], [92].

5. Метод, основанный на исследовании группы Галуа для системы, линеаризованной в окрестности известного точного нестационарного решения (Ж.Ж. Моралис-Руиз, Ж.П. Рамис).

Другой подход к проблеме неинтегрируемости был предложен в работе [72]. В ней вместо группы монодромии используются группы Галуа. Такой подход дает более тонкий анализ при изучении неинтегрируемости — фактически это линейный аналог теоремы Арнольда–Лиувилля о фазовых торах (условия на существования инвариантов для группы Галуа дают условия на ее коммутативность).

Группы Галуа изучать легче, чем группы монодромии (первая теория — алгебраическая, вторая — геометрическая; вторая более наглядна, но для нее не существует аппарата вычисления). Теория, позволяющая находить группы монодромии, к настоящему времени еще не построена, что связано с нерешенностью в полной мере проблемы Римана–Гильберта [55].

Для того чтобы дать определение группы Галуа, нужно ввести понятие расширения Пикара–Вессю.

Определение: Расширением Пикара–Вессю (Р.П.В.) для уравнения (2.13) называется минимальное поле, содержащее все решения уравнения (2.13), замкнутое относительно операции дифференцирования:

$$PV = K_0[X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{n,n}, \det^{-1}(X)]/I,$$

$I = \{\text{max дифференциальный идеал уравнения}\}$, $X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{n,n}, X$ — фундаментальная система решений ($n = 2m$).

Также рассмотрим следующую башню конечных расширений полей, по-

лучающихся присоединением одного элемента:

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m, \quad K_{i+1} = K_i(t_i), \quad t_i \in K_{i+1} \quad (2.14)$$

Определение: Расширение (2.14) называется

(1) Алгебраическим: t_i — алгебраический над K_i ;

(2) Присоединением интеграла: $t_i' \in K_i$;

(3) Присоединением экспоненты: $t_i'/t_i \in K_i$.

Определение: Расширением Лиувилля для уравнения (2.13) называется расширение, удовлетворяющее свойствам (1)-(3) для (2.14).

Определение: Расширением функций, интегрируемых в квадратурах, называется расширение, удовлетворяющее свойствам (2)-(3) для (2.14).

Классическое определение функций, интегрируемых в квадратурах в терминах расширения Пикара–Вессии имеет вид:

Определение: Уравнение (2.13) называется интегрируемым в квадратурах, если для него расширение Пикара–Вессии содержится в расширении Лиувилля.

От расширяющихся полей Пикара–Вессии переходят к соответствующим сужающимся группам Галуа.

Определение: Группой Галуа уравнения (2.13) называется множество всех дифференциальных автоморфизмов расширения Пикара–Вессии, коммутирующих с дифференцированием.

Элемент группы Галуа переводит решение в решение, поэтому его можно представить в виде матрицы, причем это представление инвариантно. Между полями Пикара–Вессии и расширениями Галуа существует взаимно-однозначное соответствие.

Теорема (Основная теорема теории Галуа) Существует взаимно-однозначное соответствие между нормальными подгруппами H групп Галуа G и подполями F расширений Галуа PV :

- (1) $H \subset G \rightarrow PV^H = \{a \in PV | \sigma(a) = a, \forall \sigma \in H\}$
- (2) $F \subset PV \rightarrow Gal(PV/F) = \{\sigma \in G | \sigma(a) = a, \forall a \in F\}$
- (3) $F \subset PV$ есть расширение Галуа $\iff Gal(PV/F)$ — нормальная под-
группа в G .

Для групп Галуа существует результат, аналогичный лемме Зиглина для групп монодромии. Приведем его формулировку:

Лемма Моралиса-Руиза-Рамиса. Если уравнение (2.11) имеет мероморфный интеграл в некоторой окрестности $U \in M^{2n}$, то группа Галуа G нормального уравнения в вариациях имеет рациональный первый интеграл: $F(g\xi) = F(\xi)$, $\forall g \in G$, $F \in \mathbb{C}(\xi)$.

Теорема Моралиса-Руиза-Рамиса ([72]) Если гамильтонова система имеет мероморфные интегралы в окрестности частного решения, то связная компонента группы Галуа для Н.У.В. абелева.

Теорема Моралиса-Руиза-Рамиса является обобщением теоремы Зиглина, поскольку группа монодромии содержится в группе Галуа $M \subset G$.

Для многих систем общего вида (например, для рациональных систем) существуют целые алгоритмы вычисления групп Галуа [68], [69], [86], [87].

Методом дифференциальных групп было решено большое число задач механики: задача Ситникова для трех тел [72], [74], тело с неподвижной точкой [78], обобщенный сферический маятник [81], спутник на круговой орбите [79], частные случаи задачи N тел [77], [76], плоская круговая ограниченная задача трех тел [89], [88], [90], кельтский камень [62], задачи математической физики [80].

6. Метод расщепления сепаратрис (А. Пуанкаре, В.К. Мельников, В.В. Козлов, С.Л. Зиглин)

Рассматривается возмущенная гамильтонова система, имеющая в невозмущенном случае гомоклиническое решение. При возмущении периодическое решение сохраняется, но сепаратрисные поверхности в общем случае совпа-

дать не будут. Далее обычно рассматривают два различных варианта метода - действительный и комплексный. В действительном методе рассматривается пересечение устойчивых и неустойчивых асимптотических поверхностей, в комплексном - их самопересечение. В качестве меры расстояния между ними берется так называемый интеграл Пуанкаре–Мельникова. Если он равен нулю, то поверхности пересекаются. Если существуют дополнительные интегралы, то они постоянны на асимптотических поверхностях. Если они пересекаются, то пересекаются всюду плотно, откуда и следует несуществование интегралов.

1) *Действительный случай.* Пусть имеется гамильтонова система X_{H_0} с гамильтонианом $H_0(x, y)$, имеющая гиперболическое положение равновесия с частным решением $(x_0(t), y_0(t))$, асимптотическим к этому положению равновесия.

Возмущенное уравнение определяется гамильтонианом:

$$H(x, y, t, \epsilon) = H_0(x, y) + \epsilon H_1(x, y, t) + O(\epsilon^2).$$

Интеграл Пуанкаре–Мельникова:

$$\mu(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(x_0(t), y_0(t), t + t_0) dt.$$

Теорема. Если функция $\mu(t_0)$ имеет простые нули в некоторой точке, то асимптотические поверхности пересекаются трансверсально.

2) *Комплексный случай.*

Пусть M_0 двумерное комплексно аналитическое многообразие и X_{H_0} комплексное гамильтоново векторное поле на M_0 с гамильтонианом H_0 . Пусть в координатах (x, y) на M_0 система Гамильтона

$$\dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y} \quad (2.15)$$

имеет гиперболическое положение равновесия (x_0, y_0) , т.е. собственные векторы $\pm\lambda$ имеют ненулевые действительные части.

Тогда система (2.15) имеет сепаратрисное решение:

$$\Gamma_0 : (x_0(t), y_0(t)) \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = y_0 \quad (2.16)$$

Пусть

- 1) функции $(x_0(t), y_0(t))$ мероморфны при $t \in \mathbb{C}$.
- 2) $H(x, y, t, \epsilon) = H_0(x, y) + \epsilon H_1(x, y, t) + O(\epsilon^2)$ — возмущение гамильтониана $H_0(x, y)$.
- 3) $H(x, y, t)$ периодична с периодом ω по t . Эта функция определена на многообразии $M = M_0 \times F_\omega$, где $F_\omega = \mathbb{C}/\omega\mathbb{Z}$ — риманова поверхность.

Гамильтонова система, определенная функцией $H(x, y, \theta)$ над M , имеет вид:

$$\dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{\theta} = 1, \quad (x, y, \theta) \in M.$$

При $\epsilon = 0$ данная система имеет гиперболическое 2π периодическое решение $\Pi_0 : (x_0, y_0, \theta = 0 \pmod{2\pi})$. Как известно, при малом возмущении существует периодическое решение $\Pi_\epsilon : (x_p(t, \epsilon), y_p(t, \epsilon), \theta = \theta_0 + t \pmod{2\pi})$, так, что $(x_p(t, 0), y_p(t, 0)) = (x_0, y_0)$.

Рассмотрим комплексную устойчивую сепаратрису Λ_ϵ^+ невозмущенной системы как множество интегральных кривых, асимптотических к Π_ϵ при $t \rightarrow \infty$. Для фиксированного ϵ эта поверхность двумерна и может иметь самопересечения.

Невозмущенная сепаратриса есть $\Lambda_0^+ = \Gamma_0 \times F_{2\pi}$; она расслаивается на однопараметрическое семейство интегральных кривых $\Gamma_{\theta_0} : (x_0(t), y_0(t), t + \theta_0)$, $\theta_0 \in F_{2\pi}$. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ есть замкнутый путь на комплексном времени с $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R}$. Определим следующую функцию на $F_{2\pi}$:

$$\mu(\theta_0) = \int_{\gamma} \{H_0, H_1\}(x_0(t), y_0(t), t + \theta_0) dt.$$

Теорема Если функция $\mu(t_0)$ имеет простой нуль в некоторой точке, тогда для достаточно малого $\epsilon \neq 0$ сепаратриса Λ^+ имеет трансверсальное самопересечение и система (2.15) не имеет дополнительного голоморфного первого интеграла.

3) *Связь между вычислением интеграла Пуанкаре–Мельникова и дифференциальной теорией Галуа.*

Для вычисления интеграла Пуанкаре–Мельникова используется метод вычетов. Общая формула выражения для интеграла через вычеты, в предположении мероморфности функций, приведена в работе [23].

Существует связь между методом вычисления интеграла Пуанкаре–Мельникова и методами дифференциальной теории Галуа.

Всегда можно считать, что мероморфные функции $(x_0(t), y_0(t))$ периодичны с комплексным периодом $i\omega$. Тогда $x_0(t), y_0(t) \in M(F_{i\omega})$, т.е. принадлежат полю мероморфных функций над римановой поверхностью, являющейся цилиндром. Это следует из того факта, что при $t \rightarrow \pm\infty$ $x_0(t), y_0(t)$ есть функции от экспоненты с периодом $\omega = Re(\frac{2\pi}{|\lambda|})$.

Как и в методе Пуанкаре–Мельникова, рассматривается уравнение в вариациях вдоль однопараметрического семейства Γ_{θ_0} . Возмущенное уравнение в вариациях имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0xy} & H_{0yy} & H_{1y} \\ -H_{0xx} & -H_{0xy} & -H_{1x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \nu \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Здесь ν вспомогательная переменная, нужная, чтобы возмущенное уравнение в вариациях было однородным.

В качестве исходного поля для коэффициентов выберем $K = \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it})$, поскольку $x_0, y_0 \in \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}})$, а $H_1 \in \mathbb{C}(e^{it})$. Для каждого θ_0 расширение Пикара–Вессие есть $K \subset L_{\theta_0} = K(u_{11}, \dots, u_{33})$, где U фундаментальная матрица

решений. Пусть Gal есть группа Галуа для данного расширения.

Пусть U - фундаментальная матрица решений уравнения (2.17), тогда U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} H_{0y} & H_{0y}\delta & k(\theta_0) \\ -H_{0x} & \frac{1}{H_{0y}} - H_{0x}\delta & \mu(\theta_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\delta = \int \frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t), y_0(t), t) dt,$$

$$k(\theta_0) = \int \left(\frac{H_{1y}}{H_{0y}} - \delta \{H_0, H_1\}(x_0(t), y_0(t), t + \theta_0) \right) dt.$$

Теорема Пусть $K = \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it})$ является дифференциальным полем коэффициентов для (2.17) и выполнены следующие условия

(1) Функции $(x_0(t), y_0(t))$ принадлежат полю $K = \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it})$ и возмущенный гамильтониан H_1 зависит от (x, y) как рациональная функция, а от t — как функция от e^{it} ;

(2) Функция $\delta \in M(\mathbb{C})$ — мероморфная;

(3) Функция $\delta \notin K$.

Тогда для того, чтобы Gal была абелевой для фиксированного $\theta_0 \in F_{2\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\theta_0) \in L = K(\delta)$. К тому же, необходимым условием абелевости этой группы Галуа, является равенство нулю интеграла Пуанкаре–Мельникова над $F_{2\pi}$.

4) *Связь между вычислением интеграла Пуанкаре–Мельникова и методом Ковалевской–Ляпунова–Иошиды.*

В работах [65], [64] указана связь между вычислением интеграла Пуанкаре–Мельникова и методом Ковалевской–Ляпунова–Иошиды. Вычислять интеграл Пуанкаре–Мельникова можно через вычеты, причем они берутся по цилиндрической поверхности, определяемой через периодическое решение. В указанных работах эти вычеты представлены как функции от соотношений,

определяющих условия совместимости для прохождения теста Пенлеве.

7. Метод, основанный на анализе резонансности нормальной формы (В.В. Козлов, А.Д. Брюно).

В окрестности положения равновесия рассматривается нормальная гамильтонова форма. Пусть она зависит от какого-то параметра, и предположим, что существуют независимые в точке дополнительные интегралы при всех значениях данного параметра. Тогда можно выбрать этот параметр таким образом, чтобы имел место резонанс, а условие резонансности дает равенство нулю резонансного члена в гамильтониане. В итоге получаются два условия интегрируемости. Основные недостатки метода: его локальность и то, что он дает лишь два условия (если параметров тоже два, то метод работает). В общем виде данная теорема звучит так:

Пусть $H = H_2 + \dots + H_{m-1} + H_m + \dots$ — разложение в окрестности равновесия аналитически зависящей от параметров функции Гамильтона, приведенной к нормальной форме до слагаемых $(m - 1)$ -го порядка включительно.

Теорема ([28], [11]) Предположим, что:

(1) Существуют такие параметры (их будем называть особыми), при всех значениях которых существует независимый дополнительный интеграл.

(2) Особые параметры можно выбрать так, чтобы были выполнены условия:

$$\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}(\epsilon) \rangle = 0, \quad |\mathbf{k}| = m \text{ и } \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}(\epsilon) \rangle \neq 0, \quad |\mathbf{k}| < m,$$

$\boldsymbol{\omega}$ — вектор частот, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$.

(3) При условии (2) квадратичная часть дополнительного интеграла независима с H_2 .

Тогда резонансный коэффициент в H_m обращается в ноль.

Данный метод для гамильтоновых систем применялся в [28], для негамильтоновых — в работе [11].

8. Метод алгоритмического анализа проверки на интегрируемость в квадратурах для линейного дифференциального уравнения, коэффициенты которого являются рациональными функциями времени (Дж. Ковачич)

Рассматривается линейное уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами:

$$y'' = r(x)y, \quad r(x) \in \mathbb{C}(x) \quad (2.19)$$

Следующая теорема классифицирует группы Галуа для уравнения (2.19). Изначально она была доказана Лиувиллем на языке линейной алгебры, позднее переформулирована на языке теории Галуа.

Теорема [82]. Для уравнения (2.19) верны следующие утверждения:

Случай 1. Существует решение $y(x) = e^{\int \omega dx}$, $\omega(x) \in \mathbb{C}(x) \iff G$ — триангулируема $\iff G = T \cup D$, где

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \neq 0, b \neq 0, a, b \in \mathbb{C} \right\} \text{ (ровно одно экспоненциальное решение), } D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \neq 0, a \in \mathbb{C} \right\} \text{ (два экспоненциальных решения)}$$

\iff все полюса $r(x)$ имеют или четный порядок, или равный 1, а порядок полюса $r(x)$ в ∞ или четный, или не меньше 2.

Случай 2. Если условие случая 1 не имеет места, то:

Существует решение $y(x) = e^{\int \omega dx}$, $\omega(x)^2 \in \mathbb{C}(x) \iff G$ — нетриангулируема, но импримитивна $\iff G = D^\dagger$, где

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \eta \neq 0, \eta \in \mathbb{C} \right\}$$

\iff существует полюс $r(x)$ имеющий нечетный порядок больший 2 или его порядок равен 2.

Случай 3. Если условия случаев 1, 2 не имеют места, то:

Все решения алгебраичны над $\mathbb{C}(x) \iff G$ — конечная группа.

Случай 4. Если условия случаев 1, 2, 3 не имеют места, то Лиувиллевых решений нет, то есть $G = SL(2)$.

Однако данная теорема не дает конструктивной проверки нахождения группы Галуа. Такой алгоритм был предложен Дж. Ковачичем [69].

Алгоритм Ковачича позволяет конструктивно найти необходимые и достаточные условия того, удовлетворяет ли дифференциальное уравнение второго порядка классификации, данной в теореме 3. Ограничимся рассмотрением лишь первого и второго случаев теоремы 3.

Теорема (Дж. Ковачич 1985) [69]

Случай 1

Пусть Γ — множество полюсов функции $r(x)$.

1 шаг. Для каждого $c \in \Gamma \cup \infty$ определим рациональную функцию $[\sqrt{r}]_c$ и два комплексных числа α_c^+ , α_c^- следующим образом:

(c_1) Если $c \in \Gamma$ полюс первого порядка, тогда $[\sqrt{r}]_c = 0$, $\alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1$.

(c_2) Если $c \in \Gamma$ полюс второго порядка, тогда $[\sqrt{r}]_c = 0$ и пусть b — коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$, то $\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4b}}{2}$.

(c_3) Если $c \in \Gamma$ полюс порядка $2\nu \geq 4$, тогда $[\sqrt{r}]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \dots + \frac{d}{(x-c)^2}$ (разложение функции \sqrt{r} в окрестности полюса до членов 2-го порядка), $\alpha_c^\pm = \frac{1}{2}(\pm \frac{b}{a} + \nu)$, где b — разность коэффициентов при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ в $r(x)$ и при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ в $\{[\sqrt{r(x)}]_c\}^2$.

(∞_1) Если порядок $c \in \infty$ больше 2, тогда $[\sqrt{r}]_\infty = 0$, $\alpha_\infty^+ = 0$, $\alpha_\infty^- = 1$.

(∞_2) Если порядок $c \in \infty$ равен 2, тогда $[\sqrt{r}]_\infty = 0$, $\alpha_\infty^+ = \alpha_\infty^- = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4b}}{2}$, где b — коэффициент при $\frac{1}{x^2}$.

(∞_3) Если порядок $c \in \infty$ равен -2ν , тогда $[\sqrt{r}]_\infty = ax^\nu + \dots + d$, $\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}(\pm \frac{b}{a} - \nu)$, где b — разность коэффициентов при $x^{\nu-1}$ в $r(x)$ и при $x^{\nu-1}$ в $\{[\sqrt{r(x)}]_\infty\}^2$.

2 шаг.

Для каждого семейства $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \infty}$, $s(c) = \{\pm\}$ определим число

$$deg = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}.$$

Тогда число deg должно быть целое неотрицательное и определим:

$$\omega = \sum_{c \in \Gamma} \left(s(c) [\sqrt{r}]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x - c} \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_{\infty}.$$

3 шаг.

Существует полиномиальное решение степени deg у уравнения:

$$P'' + 2\omega P' + (\omega' + \omega^2 - r)P = 0 \quad (2.20)$$

Тогда $\eta = P(x)e^{\int \omega dx}$ — решение уравнения (2.19). Если условия шагов 2 и 3 не выполняются, следовательно данный случай не имеет места.

Случай 2

Если в результате применения алгоритма выяснилось, что случай 1 не имеет места, то нужно проверить случай 2 (при применении алгоритма для случая 2 предполагается известным, что случай 1 не имеет места).

Пусть Γ — множество полюсов функции $r(x)$.

1 шаг. Для каждого $c \in \Gamma \cup \infty$ определим множество $E = \cup E_c$ и комплексные числа e_i следующим образом:

(c₁) Если $c \in \Gamma$ полюс первого порядка, тогда $E_c = \{4\}$,

(c₂) Если $c \in \Gamma$ полюс второго порядка, тогда $E_c = \{2 + k\sqrt{1 + 4b} | k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z}$, где b — коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$,

(c₃) Если $c \in \Gamma$ полюс порядка $\nu > 2$, тогда $E_c = \{\nu\}$,

(∞_1) Если порядок $c \in \infty$ больше 2, тогда $E_{\infty} = \{0, 2, 4\}$,

(∞_2) Если порядок $c \in \infty$ равен 2, тогда $E_{\infty} = \{2 + k\sqrt{1 + 4b} | k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z}$, где b — коэффициент при $\frac{1}{x^2}$,

(∞_3) Если порядок $c \in \infty$ меньше 2, тогда $E_\infty = \{\nu\}$.

2 шаг.

Для каждого семейства $(e_c)_{c \in \Gamma \cup \infty} \in E_c$, определим число

$$deg = \frac{1}{2}(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c).$$

Тогда число deg должно быть целое неотрицательное и определим:

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c}.$$

3 шаг.

Существует полиномиальное решение степени deg у уравнения:

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r)P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P = 0$$

Пусть $\Phi = \theta + \frac{P'}{P}$ и пусть ω — решение уравнения:

$$\omega^2 + \Phi\omega + \left(\frac{1}{2}\Phi' + \frac{1}{2}\Phi^2 - r\right) = 0$$

Тогда $\eta = P(x)e^{\int \omega dx}$ — решение уравнения (2.19). Если условия шагов 2 и 3 не выполняются, следовательно, данный случай не имеет места.

Топологический анализ движения эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости

2.1. Введение

В этой главе рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости. Имеются различные аналогии между этой задачей и задачей о движении твердого тела с неподвижной точкой. В частности, в обеих задачах при любых значениях параметров системы уравнения движения обладают тремя независимыми интегралами, и, таким образом, для интегрируемости уравнений движения требуется еще один независимый интеграл, наличие которого определяется условиями на параметры системы.

Однако, в отличие от задачи о теле с неподвижной точкой, где геометрическая форма тела несущественна, в задаче о движении тела по плоскости необходимо учитывать вид поверхности тела. Обычно на форму поверхности накладывается условие выпуклости и условие, что касание поверхности с плоскостью происходит в одной точке.

На данный момент в задачах о движении тел по гладкой плоскости существование дополнительного интеграла доказано для двух случаев: во-первых, для случая, когда тело является неоднородным шаром, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, а моменты инерции произвольны, и во-вторых, для случая динамически симметричного тела вращения [14]. В первом случае задача аналогична задаче о волчке Эйлера. В данной работе рассматривается второй случай: в качестве поверхности берется динамически симметричный эллипсоид вращения, при этом уравнения движения, фактически, сходны с уравнениями движения для волчка Лагранжа.

Основным результатом данной главы является построение бифуркационных диаграмм Смейла [44]. Описание перестроек инвариантных торов и топологически инвариантных поверхностей проводится методами теории топологической классификации, развитой в работах А.Т. Фоменко и его учеников (см. [5], [53]).

Задача в аналогичной постановке для волчка Лагранжа решалась в [37], [47].

2.2. Постановка задачи. Схема исследования

Тело, имеющее форму эллипсоида, движется по гладкой горизонтальной плоскости. Ось симметрии поверхности тела совпадает с осью динамической симметрии тела, причем центр масс лежит на этой оси на расстоянии s от геометрического центра эллипсоида-поверхности, а главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями поверхности тела (аналог волчка Лагранжа). На тело наложена одна голономная связь: таким образом, высота центра масс над плоскостью определяется лишь ориентацией главных центральных осей инерции тела (например, углами Эйлера), и система имеет пять степеней свободы.

Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат; Se_1, Se_2, Se_3 — главные центральные оси инерции тела; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости центра масс тела в осях $OXYZ$; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела в осях $Se_1e_2e_3$; $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор восходящей вертикали, направленный по OZ , в осях $Se_1e_2e_3$; (b_1, b_1, b_3) — главные полуоси эллипсоида; m — масса тела; $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ — главный центральный тензор инерции тела; $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ — радиус-вектор из центра масс тела в точку касания с плоскостью, $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ — вектор реакции плоскости.

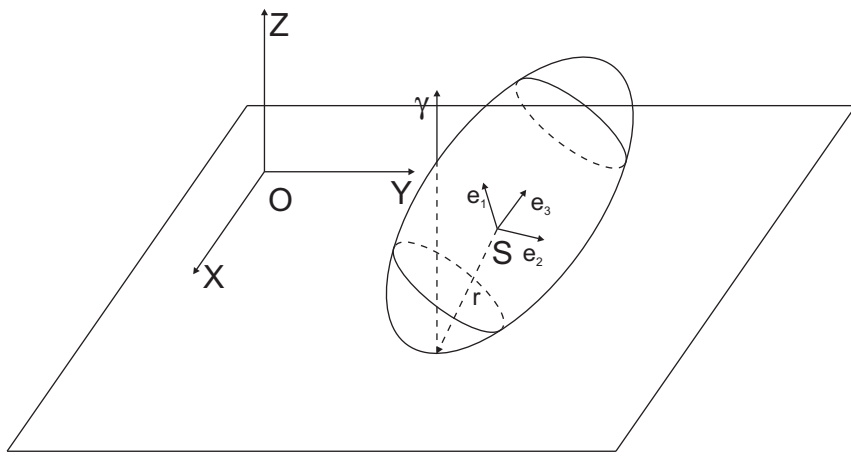


Рис. 2.1. Эллипсоид на плоскости

Движение центра масс тела в сопутствующих осях описывается следующим уравнением:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} - mg\boldsymbol{\gamma}.$$

В проекции на оси OX, OY получаем $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$. Таким образом, можно выбрать инерциальную систему координат с началом в центре масс тела, движущуюся равномерно вдоль горизонтальной плоскости. В проекции на OZ имеем:

$$v_z = \dot{z}, \quad m\dot{v}_z = N - mg.$$

Выражая отсюда значение N и подставляя его в закон изменения главного кинетического момента относительно точки S , а также учитывая условие постоянства вертикального единичного орта, получим уравнения Эйлера–Пуассона:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times (m\ddot{z} + mg)\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (2.1)$$

В общем случае для произвольного распределения масс нужно еще задать косинусы углов между главными осями эллипсоида и главными осями инерции тела, а также координаты геометрического центра в главных осях инерции и по ним найти выражения для $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$. В рамках сделанных предпо-

ложений, имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{1/2}} - s\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1^2, b_1^2, b_3^2)$.

Таким образом, возвышение центра масс над опорной плоскостью, может быть выражена формулой:

$$z = -(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) = (b_1^2\gamma_1^2 + b_1^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2)^{1/2} + s\gamma_3.$$

Как известно [35], уравнения (2.1) можно переписать в виде уравнений Гамильтона для системы с двумя степенями свободы, фазовое пространство которой является орбитой коприсоединенного представления алгебры Ли.

Перейдем к каноническим импульсам:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{J_1 + a\gamma_1^2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & 0 \\ \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & \frac{J_1 + a\gamma_2^2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{m(b_3^2 - b_1^2)^2\gamma_3^2}{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2}$.

Пусть $e(3) = \mathfrak{so}(3) \oplus_{\rho} \mathbb{R}^3$ — шестимерная алгебра Ли группы движений \mathbb{R}^3 , и $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ — естественные координаты в коалгебре $e(3)^*$. Базисные скобки Пуассона имеют вид:

$$\{M_i, M_j\} = -\epsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\epsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Скобка Пуассона вырождена и обладает двумя функциями Казимира, коммутирующими в структуре (2.2) с любой функцией от $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$: $K = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ и

$\Gamma = \gamma^2$. Интеграл $K = const$ (проекция кинетического момента на вертикальную ось), связан с инвариантностью вращений тела относительно вертикали; интеграл $\Gamma = const$ — геометрический, выражает условие постоянства единичного орта. Положив $\gamma^2 = 1$, исключим единственный сингулярный слой. Уровень $M_{1,k}^4 = \{K = k, \gamma^2 = 1\}$ диффеоморфен TS^2 .

Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид обобщенных уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}; & \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}; \\ H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + mgz; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} \left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{a(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)^2}{J_1} \right) + \frac{M_3^2}{2J_3} + \\ &mg \left((b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2)^{1/2} + s\gamma_3 \right). \end{aligned}$$

Дополнительный интеграл Лагранжа: $M_3 = J_3\omega$.

Итак, задача заключается в том, чтобы построить бифуркационные диаграммы Смейла для системы (2.3).

В соответствии с программой Смейла [44] исследования симметрии, рассмотрим отображение момента

$$\mathcal{F} = (H, M_3): M_{1,k}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Образ критического множества есть бифуркационная диаграмма Σ отображения \mathcal{F} . Множество Σ имеет меру нуль в \mathbb{R}^2 по теореме Сарда. Над каждой связной компонентой $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ отображение (2.4) является расслоением по

теореме о неявной функции. Если все слои слоения компактны, то тип интегральных многообразий может измениться лишь при переходе через Σ . В этих связных компонентах интегральные многообразия представляют собой объединение двумерных торов, как всякое связное, ориентируемое, компактное двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек (т.к. особые точки лежат на особых слоях первых интегралов).

Изучим особенности отображения (2.4). Пусть \tilde{H}, \tilde{M}_3 — ограничения функций H, M_3 на $M_{1,k}^4$ соответственно.

Предположим, что ранг дифференциала (2.4) упал ровно на единицу в некоторой точке, например, $d\tilde{M}_3 = \lambda d\tilde{H}$, причем $d\tilde{H} \neq 0$. Тогда ядро дифференциала трехмерно: три вектора, касательных к $M_{1,k}^4$, перейдут при отображении \mathcal{F} в ноль, а один — в ненулевой вектор с тангенсом угла наклона, равным множителю Лагранжа λ . Таким образом, можно рассмотреть ограничение функции M_3 уже на трехмерное изоэнергетическое многообразие $Q_{h,k}^3 = \{H = h, K = k, \Gamma = 1\}$ (локально) и на этом изоэнергетическом многообразии исследовать критические точки. Итак, сначала надо найти те значения (h, k) , при которых определено изоэнергетическое многообразие $Q_{h,k}^3$, т.е. сначала нужно построить бифуркационные диаграммы в плоскости (k, h) , а затем — и бифуркационные диаграммы отображения (2.4) в плоскости (h, ω) . Связь между этими бифуркационными диаграммами такова: фиксированной точке, не принадлежащей $\Sigma_{k,h}$, соответствует вертикальный отрезок, соединяющий внешние точки $\Sigma_{h,\omega}$ при соответствующем фиксированном значении h . Затем строятся молекулы [52], т.е. исследуются особенности функции M_3 на изоэнергетическом многообразии $Q_{h,k}^3$.

2.3. Построение бифуркационных диаграмм, изучение перестроек торов

Поскольку интеграл Лагранжа линеен по импульсам, будем рассматривать не его как функцию на $Q_{h,k}^3$, а интеграл энергии как функцию на совместном уровне $P_{k,\omega}^3 = \{K = k, \Gamma = 1, M_3 = J\omega\}$.

Эти подходы равносильны для $Q_{h,k}^3$, являющихся многообразием, так как критические множества у функций M_3 на $Q_{h,k}^3$ и H на $P_{k,\omega}^3$ (за исключением тех слоев, где лежат точки $\gamma_3 = \pm 1$) одинаковы и соответствующие индексы гессианов тоже равны.

Обезразмерим параметры, так что $mg = 1, b_1 = 1, J_1 = 1, b_3 = b > 0, J_3 = J > 0$, и введем обозначения: $c = b^2 - 1, x = \gamma_3$.

Теорема 1. *Для системы с гамильтонианом (2.3) разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, \omega)$ имеют при разных значениях k вид, изображенный на рисунке 2.2, причем для случая $-1 < c < 0$: если $0 < s < \frac{-c}{\sqrt{c+1}}$, то $2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 6$, если $\frac{-c}{\sqrt{c+1}} < s < \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{2/3}}$, то $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 6$, если $s > \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{2/3}}$, то $1 \rightarrow 6$. Для случая $c > 0$: если $0 < s < \frac{c}{\sqrt{c+1}}$, то $7 \rightarrow 1 \rightarrow 6$; если $s > \frac{c}{\sqrt{c+1}}$, то $1 \rightarrow 6$.*

∇ Условие для критических множеств имеет вид:

$$dH = \lambda_1 dK + \lambda_2 d\Gamma + \lambda_3 dM_3. \quad (3.1)$$

$$K = k, M_3 = J\omega, \Gamma = 1$$

Из него получаем $M_1 = \lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma})_1, M_2 = \lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma})_2, M_3 = J(\lambda_1\gamma_3 + \lambda_3)$. Подставив найденные M_i в выражение для H , получим второй приведенный потенциал:

$$V_{k,\omega}(x) = \frac{(k - J\omega x)^2}{2(1 - x^2)} + \frac{J\omega^2}{2} + (cx^2 + 1)^{1/2} + sx \quad (k \neq \pm J\omega). \quad (3.2)$$

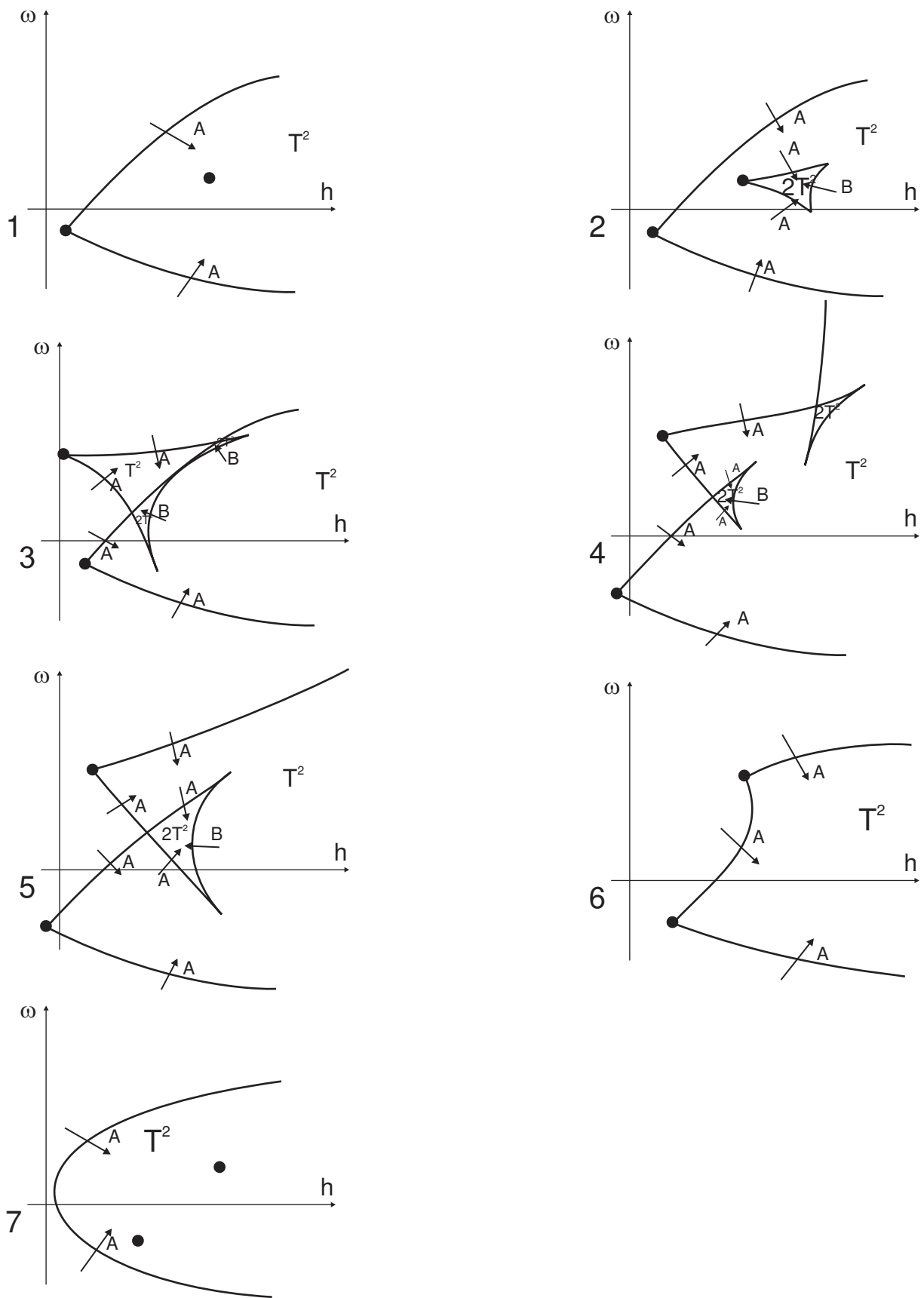


Рис. 2.2. Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,\omega}$ для случая смещенного центра масс



Рис. 2.3. Расположение гиперболы, эллипса, прямой

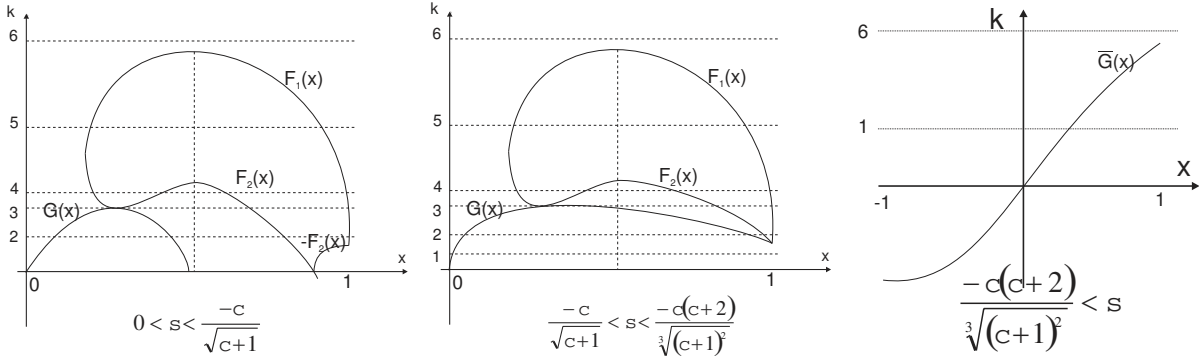


Рис. 2.4. Изменение вида бифуркационных диаграмм при разных k при $-1 < c < 0$

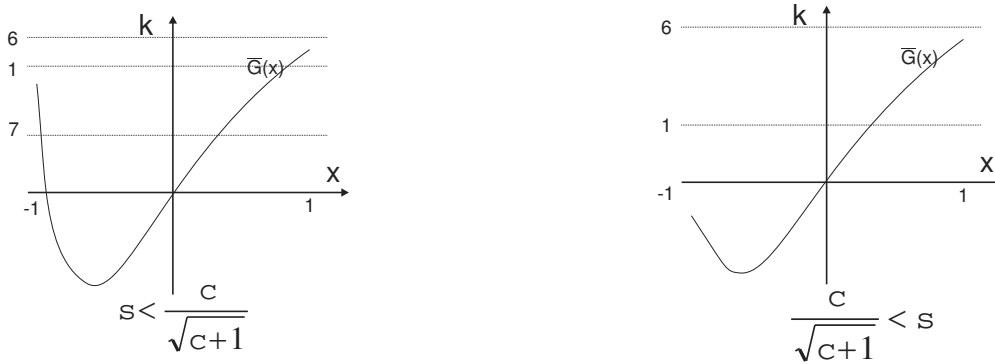


Рис. 2.5. Изменение вида бифуркационных диаграмм при разных k при $c > 0$

Область возможности движения имеет вид:

$$U_{k,\omega,h} = \{x \in [-1; 1] : V_{k,\omega}(x) \leq h\} \subset S^2. \quad (3.3)$$

Критические точки $V_{k,\omega}(x)$ задают критические множества.

Уравнения бифуркационных кривых имеют вид:

$$h(x) = \frac{(k - J\omega x)^2}{2(1 - x^2)} + \frac{J\omega^2}{2} + (cx^2 + 1)^{1/2} + sx, \quad (3.4_{\pm})$$

где $x \in [-1; 1]$.

$$M_{\pm}(x) = \frac{k(1+x^2) \pm (1-x^2) \left(k^2 - \frac{4cx^2}{(cx^2+1)^{1/2}} - 4sx \right)^{1/2}}{2x}.$$

Введем переменные $p = (k + J\omega)/2$, $q = (k - J\omega)/2$. В них приведенный потенциал запишется в виде:

$$V_{p,q}(x) = \frac{p^2}{1+x} + \frac{q^2}{1-x} + \frac{(p-q)^2}{2J} + \sqrt{cx^2+1} + sx.$$

Продифференцируем его три раза, и приравняем к нулю полученные выражения:

$$V'_{p,q}(x) = -\frac{p^2}{(1+x)^2} + \frac{q^2}{(1-x)^2} + \frac{cx}{(cx^2+1)^{1/2}} + s = 0; \quad (3.5)$$

$$V''_{p,q}(x) = \frac{2p^2}{(1+x)^3} + \frac{2q^2}{(1-x)^3} + \frac{c}{(cx^2+1)^{3/2}} = 0; \quad (3.6)$$

$$V'''_{p,q}(x) = \frac{-6p^2}{(1+x)^4} + \frac{6q^2}{(1-x)^4} + \frac{-3c^2x}{(cx^2+1)^{5/2}} = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим расположение на плоскости (q, p) прямой $p + q = k$ и гиперболы, задаваемой уравнением (3.5).

Условие пересечения:

$$F(q) = \frac{4xq^2}{(1-x^2)^2} + \frac{2kq}{(1+x)^2} - \frac{k^2}{(1+x)^2} + \frac{cx}{\sqrt{cx^2+1}} + s = 0.$$

Следующее условие задает область определения выражения (3.4_±):

$$D/4 = \frac{k^2 - \frac{4cx^2}{\sqrt{cx^2+1}} - 4sx}{(1-x^2)^2} = \frac{k^2 - \overline{G(x)}}{(1-x^2)^2} > 0.$$

Введем также $G(x) = \sqrt{\overline{G(x)}}$.

Пусть $(p_0, q_0) > 0$ — точка пересечения гиперболы (3.5) и эллипса (3.6). Тогда значения для величин $F_1(x) = p_0 + q_0$ и $F_2(x) = q_0 - p_0$ выражаются следующей формулой:

$$F_i(x) = 1/\sqrt{2}(-1)^{i+1}(1+x)^{3/2} \sqrt{\frac{c(2cx^3 + 3x - 1)}{2(cx^2 + 1)^{3/2}}} + s + \\ + 1/\sqrt{2}(1-x)^{3/2} \sqrt{\frac{-c(2cx^3 + 3x + 1)}{2(cx^2 + 1)^{3/2}}} - s.$$

Рассмотрим точку пересечения прямой $p + q = k$ и гиперболы (3.5). Эта точка лежит внутри эллипса, граница которого задается уравнением (3.6), тогда и только тогда, когда точки пересечения гиперболы и эллипса лежат по разные стороны от прямой (доказательство элементарно следует из вида возможного расположения кривых, например как на рис. 2.3). Таким образом, функция $\overline{G(x)}$ отвечает за параметризацию $\Sigma_{h,\omega}$, а $F_i(x)$ ($i = 1, 2$) — за знак $V'_{k,\omega}(x)$.

Для случая $-1 < c < 0$ у функций $F_i(x)$ существует два разделяющих значения величины s : $\{\frac{-c}{\sqrt{c+1}}, \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}}\}$; а для $c > 0$ — одно: $s = \frac{c}{\sqrt{c+1}}$.

Для случая $-1 < c < 0$ при $0 < s < \frac{-c}{\sqrt{c+1}}$ при разных x ветви гиперболы могут лежать в разных четвертях и для расположения их пересечения с прямой относительно эллипса возможны восемь вариантов; при $-1 < c < 0$ при $\frac{-c}{\sqrt{c+1}} < s < \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}}$ расположение сходно с изображенным на рис. 2.3. Для случая $s > \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}}$ вторая производная потенциала всегда положительна, также как и для случая $c > 0$ (см. рис. 2.4, 2.5) ∇ .

Теорема 2 *Перестройки торов изображены на рисунке 2.2.*

∇ При фиксированном $\gamma \in S^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3(M_1, M_2, M_3)$ множество $\{H = h\}$ представляет собой эллипсоид, а пересечение плоскостей $\{K = k\}$ и $\{M_3 = J\omega\}$, в случае их непараллельности, задает прямую, причем в качестве меры их пересекаемости выступает при фиксированных параметрах

приведенный потенциал (3.2). Слой над каждой точкой $\gamma \in S^2$ гомеоморфен либо двум точкам (если $\gamma \in U_{k,\omega,h} \setminus \partial U_{k,\omega,h}$), либо точке (если $\gamma \in \partial U_{k,\omega,h}$), либо пуст (если $\gamma \notin U_{k,\omega,h}$). Приведенный потенциал не определен при $k = \pm J\omega$, когда точки $\gamma_3 = \pm 1$ принадлежат ОВД (3.3).

Собственные значения гессиана $d^2 H|_{P_{k,\omega}^3}$ такие же как и для волчка Лагранжа:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1 + \frac{(k - J\omega x)^2}{(1 - x^2)^2}, \quad \mu_3 = (1 - x^2)V''_{k,\omega}$$

Лемма.

Случай неособых поверхностей.

- Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть кольцо, тогда такому распределению параметров отвечает двумерный тор.

Два случая с особыми поверхностями, когда на поверхности лежит одна критическая окружность.

- Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть окружность, тогда такому распределению параметров также отвечает окружность, а бифуркация появления из пустого множества и перехода в тор, есть атом А.

- Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть два кольца, соединенные критической окружностью, тогда такому распределению параметров отвечает восьмерка умноженная на окружность, т.е. бифуркация раздвоения тора (атом В).

Два случая с особыми поверхностями, когда на поверхности лежит одна невырожденная критическая точка.

- Если $k = \pm J\omega$ и компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть точка $\{\gamma_3 = \pm 1\}$, тогда такому распределению параметров также отвечает изолированная точка (случай центр-центр).

- Если $k = \pm J\omega$ и компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть диск, с центром в

$\{\gamma_3 = \pm 1\}$, тогда такому распределению параметров отвечает тор с «перетяжкой» (случай фокус-фокус).

Доказательство теоремы следует из леммы и доказательства теоремы 1 ∇ .

Теорема 3. Если центр масс не смещен ($s=0$), то в трехмерном пространстве $\Sigma_{k,h,\omega}$ задает ласточкин хвост с двумя дополнительными поверхностями при $-1 < c < 0$, и поверхность с двумя лучами при $c > 0$ (рисунок 2.6).

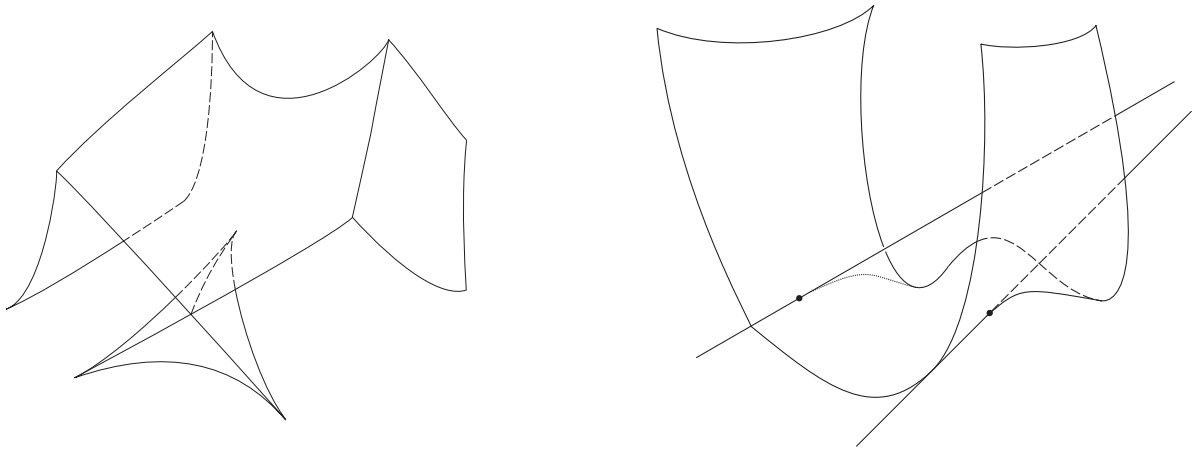


Рис. 2.6. Типичные поверхности критических значений в пространстве (k, h, ω)

∇ Докажем, что единственная точка, в которой верны одновременно (3.5)-(3.7), есть точка $x = 0$.

На плоскости (q, p) уравнения (3.5) и (3.7) задают гиперболу, а (3.6)—эллипс. Необходимое условие их пересечения в одной из четырех (или двух) точек есть:

$$\begin{vmatrix} \frac{-1}{(1+x)^2} & \frac{1}{(1-x)^2} & \frac{cx}{(cx^2+1)^{1/2}} \\ \frac{-6}{(1+x)^3} & \frac{6}{(1-x)^3} & \frac{-3c^2x}{(cx^2+1)^{3/2}} \\ \frac{-6}{(1+x)^4} & \frac{6}{(1-x)^4} & \frac{-3c^2x}{(cx^2+1)^{5/2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) равносильно следующему: $xP(x) = 0$, где $P(x) = 2c^2x^4 + 5cx^2 + c + 4$. «Бипарабола» $P(x)$ положительна на интервале $(0;1)$, т.к. $P(\pm 1) = 2(c+1)(c+2) > 0$, а абсцисса вершины «бипараболы» больше единицы. Заметим, что $V_{k,\omega}^{(4)} = -c(c+4)/8 \neq 0$. Тогда в точке $x = 0$ при значениях параметров $k^2 = -c, \omega = 0$ второй приведенный потенциал имеет тип A_3 [3]. Докажем, что в этой точке имеет место версальная деформация [10], откуда будет следовать, что в пространстве (k, h, ω) локально образ критического множества есть ласточкин хвост [3].

Выражения для производных по параметру :

$$\frac{\partial V_{k,\omega}}{\partial k} = \frac{\sqrt{-c}}{1-x^2},$$

$$\frac{\partial V_{k,\omega}}{\partial \omega} = \frac{-J\sqrt{-cx}}{1-x^2}.$$

Необходимое и достаточное условие версальной деформации выполнено:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-c} \\ -J\sqrt{-c} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Докажем, что точки типа A_2 лежат только на ребрах ласточкиного хвоста, а также, что при $k > \sqrt{-c}$ нет атомов типа В, а при $0 < k < \sqrt{-c}$, если рассматривать сечения $k = const$, а также те критические точки x , которые лежат на внешних кривых, выходящих из точек, где лежат $x = \pm 1$, то найдется такое $x_0(k)$, что всем x , так что $|x| < |x_0|$ будет соответствовать атом В, а иначе атом — А.

Координаты точки пересечения гиперболы и эллипса $(q_0, p_0) > 0$ имеют вид:

$$q_0 = \frac{\sqrt{-c}\sqrt{(1-x)^3u}}{2(cx^2+1)^{3/4}}, p_0 = \frac{\sqrt{-c}\sqrt{(1+x)^3v}}{(cx^2+1)^{3/4}}, \text{ где } u = \sqrt{2cx^3 + 3x + 1}, v = \sqrt{-2cx^3 - 3x + 1}$$

Условия критерия означают, что $q_0 + p_0 > k, \quad q_0 - p_0 < k$.

Рассмотрим функции

$$F_i(x) = \frac{\sqrt{(1-x)^3}u + (-1)^{i+1}\sqrt{(1+x)^3}v}{2(cx^2 + 1)^{3/4}}, (i = 1, 2)$$

Докажем, что функция $F_1(x)$ монотонно убывает, а $F_2(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0; 1)$; если это так, то неравенства верны для всех x из промежутка $[0; x_0]$ (x_0 -точка пересечения кривой $F_1(x)$ или $F_2(x)$ с горизонтальной прямой $k/\sqrt{-c}$), тогда нужное утверждение будет доказано.

Производные функций $F_1(x), F_2(x)$ таковы:

$$F'_i(x) = \frac{-3x}{4(cx^2+1)^{7/4}} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{u} + (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{1+x}}{v} \right) P(x) (-1)^{i+1} < 0 \text{ где } x > 0.$$

Докажем, что бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,\omega}$ в случае $s = 0$ (сечения поверхностей рис 2.6) имеют вид как на рис. 2.7-2.8, а типичные — как на рис. 2.9.

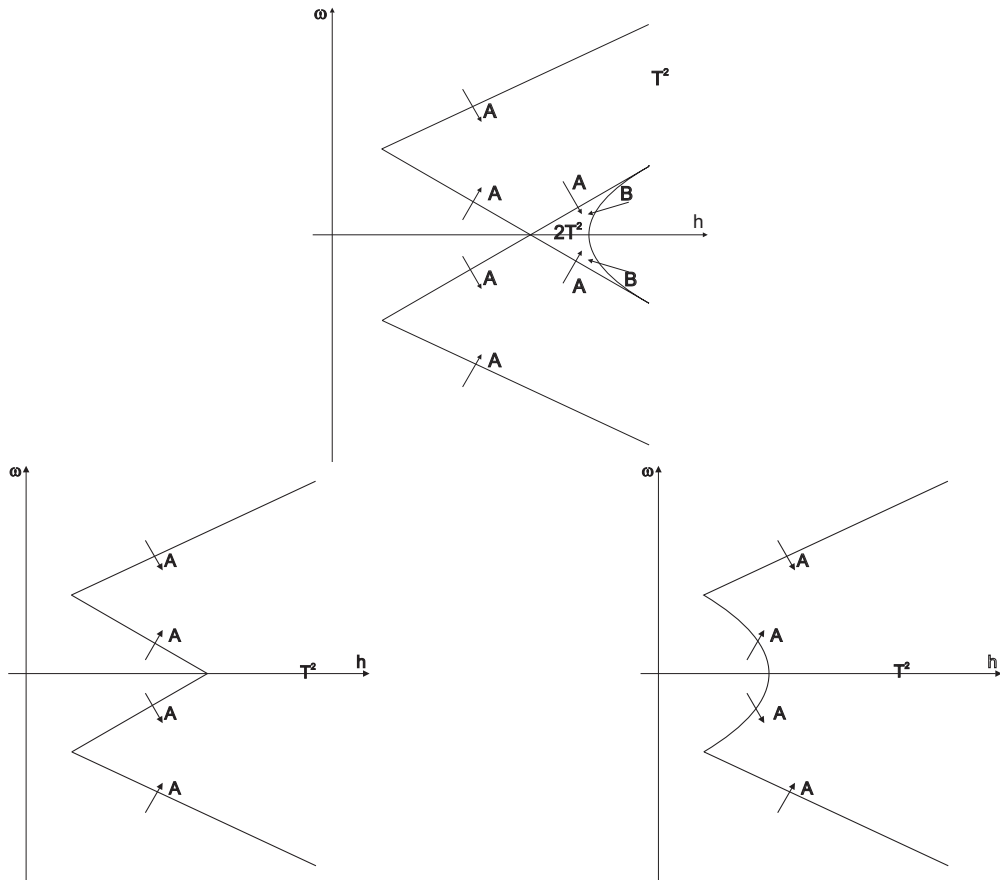


Рис. 2.7. Бифуркационная диаграмма для случая $-1 < c < 0$

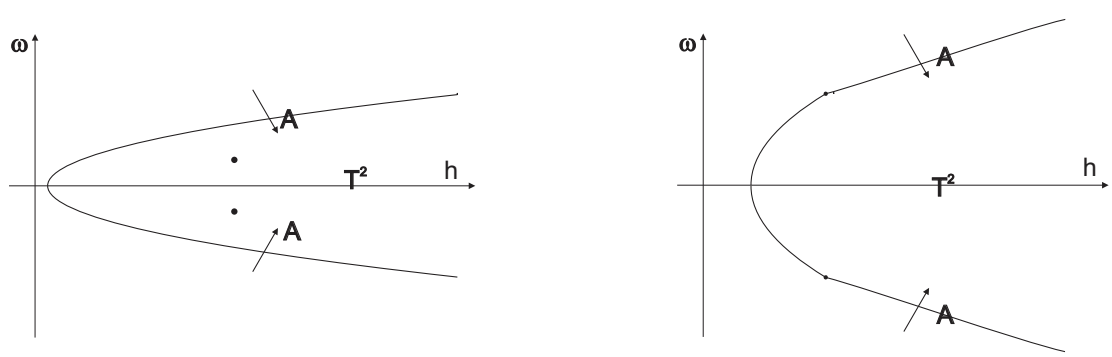


Рис. 2.8. Бифуркационные диаграммы для случая $c > 0$

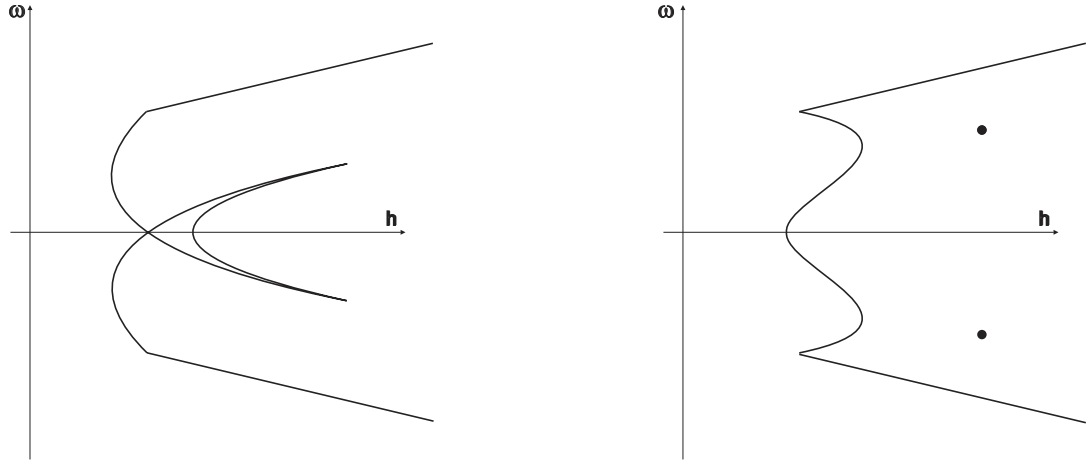


Рис. 2.9. Типичные бифуркационные диаграммы для случаев $-1 < c < 0$, $0 < J < 1$ и $0 < c$, $1 < J$

Будем рассматривать точки пересечения прямой и эллипса при $1 > x > 0$, а параметр при $q > 0$ (противоположный случай исследуется аналогично).

Если $c > 0$, то $V''_{p,q}(x) > 0$. В таком случае уравнения (3.4 $_{\pm}$) задают график функции $h = h(\omega)$, причем критические точки и значения этой функции однозначно определяются из вида бифуркационных диаграмм, которые будут построены в пункте 4.

Пусть теперь $-1 < c < 0$.

Докажем, что (3.4 $_{+}$) задает при $x > 0$ график монотонно возрастающей функции. Прямым подсчетом убеждаемся, что

$$M'_+(x) = -\frac{k(1-x^2)}{2x^2} - \frac{\frac{(x^2+1)k^2}{2x^2} + \frac{cx^2(3cx^2+c+4)}{(cx^2+1)^{3/2}}}{\sqrt{k^2 - \frac{4cx^2}{\sqrt{(cx^2+1)^{3/2}}}}} < 0,$$

$$h'(x) < 0.$$

$F(x) < 0$, при $x > 0$, это значит, что $F(q)$ имеет ровно два корня - один положительный, другой отрицательный. С точки зрения бифуркационной диаграммы рис. 2.7 это означает следующее: при фиксированном k , $0 < k < \sqrt{-c}$ любая критическая точка $x \in [-1; 1]$ лежит на $\Sigma_{k,\omega}$; значения $x > 0$ соответствуют точкам, где $q > 0$ есть внешняя дуга $\Sigma_{k,\omega}$, выходящая из точки, где лежит $x = 1$, а $q < 0$ отвечает «внутренней» дуге $\Sigma_{k,\omega}$; для $x < 0$ ситуация симметрична.

Теперь изучим, в каких местах $\Sigma_{h,\omega}$ возможны деформации, меняющие топологию с точки зрения изоэнергетических многообразий (см. рис. 2.9).

Можно прямыми вычислениями показать, что график функции $\omega_-(x)$ при $0 < k < \sqrt{-c}$ имеет вид:

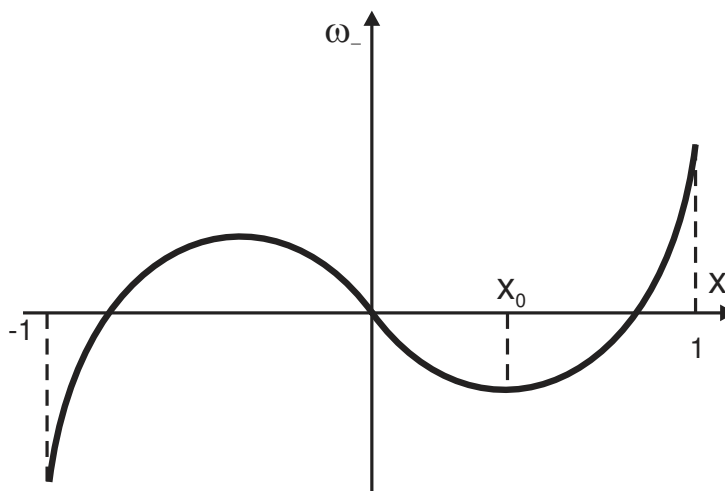


Рис. 2.10. график функции $\omega_-(x)$

Из (3.1) следует, что $\lambda_3(x)$ есть тангенс угла наклона к $\Sigma_{h,\omega}$ и имеет вид $\lambda_3(x) = \omega - \frac{k - I\omega x}{1 - x^2} - \frac{k}{1 + x}$. Можно показать, что при тех $x > 0$, где $\omega_-(x) > 0$, следует, что $\lambda(x) < 0$. Последнее означает, что при $x_0 < x < 1$ (x_0 - внутренний экстремум ω_-) $h = h(\omega)$ является графиком, имеющим не более двух внутренних экстремумов (см. п. 4) ∇ .

Теорема 4. Если центр масс не смещен ($s=0$), то точки ($\gamma_3 = \pm 1$) имеют тип особенности фокус-фокус при $c > 0$, $k^2 < \frac{4c}{\sqrt{c+1}}$; при $c > 0$, $k^2 > \frac{4c}{\sqrt{c+1}}$ или $-1 < c < 0$, эти точки принадлежат связной компоненте $\Sigma_{h,\omega}$ и имеют особенность типа центр-центр.

∇Выберем локальные координаты в окрестности точки $(0, 0, \pm J\omega, 0, 0, 1)$ и линеаризуем уравнения (2.3) в окрестности этих точек. Получим:

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 + (J-1)\omega M_2 - \frac{c}{\sqrt{c+1}}\gamma_2 &= 0, & \dot{\gamma}_1 - \omega\gamma_2 + M_2 &= 0, \\ \dot{M}_2 - (J-1)\omega M_1 + \frac{c}{\sqrt{c+1}}\gamma_1 &= 0, & \dot{\gamma}_2 + \omega\gamma_1 - M_1 &= 0, \end{aligned}$$

Полагая $u = M_1 + iM_2, v = \gamma_1 + i\gamma_2$; получим:

$$\dot{u} - (J-1)i\omega u + \frac{c}{\sqrt{c+1}}iv = 0, \quad \dot{v} + \omega iv - iu = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - (J-2)\omega i\lambda + (J-1)\omega^2 - \frac{c}{\sqrt{c+1}} = 0,$$

которое, как и для любой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы имеет корни вида $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$. В нашем случае $\alpha = (\frac{c}{\sqrt{c+1}} - \frac{k^2}{4})^{1/2}$, $\beta = k(\frac{1}{2} - \frac{1}{J})$.

Таким образом, тип особенности – фокус-фокус, если $\frac{c}{\sqrt{c+1}} - \frac{k^2}{4} > 0$, и центр-центр в противном случае. Переход от одного типа к другому называется гамильтоновой бифуркацией Хопфа (рис. 2.11). Напомним, что для волчка Лагранжа точка $\gamma_3 = -1$ центр масс занимает нижнее положение и всегда имеет тип центр-центр. ∇

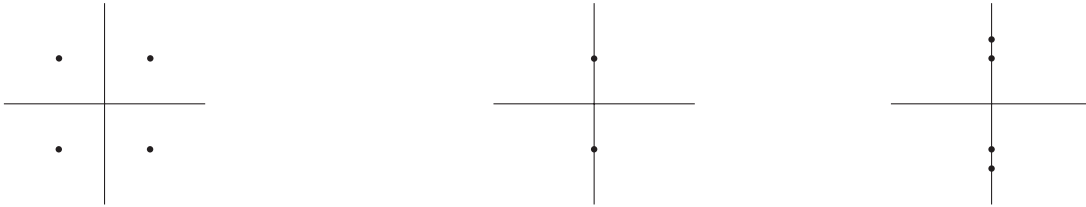


Рис. 2.11. Бифуркация собственных значений

2.4. Исследование изоэнергетических многообразий

Рассмотрим отображение:

$$K \times H: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h) \quad (4.1)$$

Образ множества критических точек есть бифуркационная диаграмма $\Sigma_{k,h}$, а полный прообраз точки, не лежащей на $\Sigma_{k,h}$, является изоэнергетическим многообразием $Q_{h,k}^3$. Отображение (4.1) является собственным, т.е. прообраз компакта — компакт. Тогда для каждой связной компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_{k,h}$ тип многообразия одинаков.

Условие функциональной зависимости: $dH = \lambda dK + \mu d\Gamma$. Переменные \mathbf{M}, γ разделились в силу линейности по γ интеграла проекции момента и квадратичности по \mathbf{M} интеграла H . В таком случае $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{A}^{-1} \gamma$, подставляя это в выражение для H , получаем первый приведенный потенциал:

$$V_k(\gamma_3) = \frac{k^2}{2(1 + (J - 1)\gamma_3^2)} + (c\gamma_3^2 + 1)^{1/2} + s\gamma_3. \quad (4.2)$$

Область возможности движения на сфере Пуассона:

$$U_{k,h}(\gamma_3) = \{\gamma_3 \in [-1; 1] : V_k(\gamma_3) \leq h\} \subset S^2. \quad (4.3)$$

Для каждой компоненты связности $\mathbb{R}^2(k, h) \setminus \Sigma_{k,h}$ тип многообразия $Q_{h,k}^3$ устанавливается на основании метода, предложенного Смейлом, связанного со стандартным надстраиванием $Q_{h,k}^3$ над областями возможности движения. При фиксированном $\gamma \in S^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3(M_1, M_2, M_3)$ множество $\{H = h\}$ представляет собой эллипсоид, а $\{K = k\}$ задает плоскость, причем в качестве меры их пересечения выступает при фиксированных параметрах приведенный потенциал (4.2). Слой над каждой точкой $\gamma \in S^2$ гомеоморфен либо окружности (если $\gamma \in U_{k,h} \setminus \partial U_{k,h}$), либо точке (если $\gamma \in \partial U_{k,h}$), либо пуст (если $\gamma \notin U_{k,h}$).

Теорема 5. *Связные компоненты изоэнергетических поверхностей могут быть только следующего вида: $S^3, \mathbb{R}P^3, S^1 \times S^2$.*

Для системы с гамильтонианом (2.3) при $s = 0$ разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ имеют следующий вид:

$$h = \frac{k^2}{2} + 1 \quad (4.4)$$

(в прообразе каждой точки, где лежит одна критическая окружность $\gamma_3 = 0$),

$$h = \frac{k^2}{2J} + \sqrt{c+1} \quad (4.5)$$

(в прообразе каждой точки, где лежат две критические точки $\gamma_3 = \pm 1$),

$$k^2 = \left(x - \frac{J-c-1}{J-1} \right)^2 \frac{J-1}{cx^{1/2}}, h = \frac{3x^{1/2}}{2} + \frac{c+1-J}{2(J-1)x^{1/2}}, x \in [1; c+1] \quad (4.6)$$

(в прообразе каждой точки, где лежат две критические окружности $\gamma_3 = \pm \text{const} \neq 0, \pm 1$).

Бифуркационные диаграммы вида (4.6) существуют лишь при $c > 0, J > 1$ и $c < 0, J < 1$.

Для $-1 < c < 0, 1 < J$ и $c > 0, 0 < J < 1$ бифуркационные диаграммы, тип изоэнергетических многообразий и соответствующие графы Роба приведены на рисунке 2.12 (a-b).

Для $c > 0, J > 1$ бифуркационные диаграммы, тип изоэнергетических многообразий и соответствующие графы Роба приведены на рисунках 2.13-2.18.

Бифуркационные диаграммы для случая $0 < J < 1, c < 0$ получаются из приведенных на рисунках 2.13-2.18, если рассматривать их в обратном порядке, а соответствующие графы переворачивать.

▽

Доказательство будет проведено в частном случае ($s=0$). Более того, в этом частном случае будут описаны кривые на плоскости k, h .

Критические множества задаются условием критических точек приведенного потенциала; отсюда следует вид бифуркационных диаграмм (4.4)–(4.6).



Рис. 2.12. а) $0 < c, 0 < J < 1$ и б) $-1 < c < 0, 1 < J$

Рассмотрим производные функций, задающие кривую (4.6):

$$\begin{aligned} k'(x) &= h'(x) \sqrt{\frac{J-1}{c}} x^{1/4} \\ h'(x) &= 0.75 \left(x - \frac{c+1-J}{3(J-1)} \right) x^{-3/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ориентированная кривизна равна:

$$\kappa = -\frac{|3(J-1)||x-c-1+J|}{4\sqrt{(J-1)(x^{1/2}(J-1)(c+1)-1)}x^{9/4}} < 0.$$

Вид кривой (4.6) при $-1 < c < 0, 0 < J < 1$ и $0 < c, 1 < J$ определяется следующими параметрами: при $4(c+1)(3c+4)^{-1} < J < 0.25(c+4)$ это клов (точка возврата степени $3/2$), в остальных же случаях – возрастающая дуга, причем концы кривой обязательно лежат на каждой кривой (4.4), (4.5). В случае точки возврата V_k имеет два экстремума в промежутке $(0;1)$. Координаты точки возврата имеют вид: $k = \frac{4}{27^{1/4}} \left(\frac{c+1-J}{J-1} \right)^{3/4} \sqrt{\frac{J-1}{c}}, h = 3^{1/2} \sqrt{\frac{c+1-J}{J-1}}$. Можно показать, что точка возврата всегда лежит внутри ограниченной области между параболой. ∇

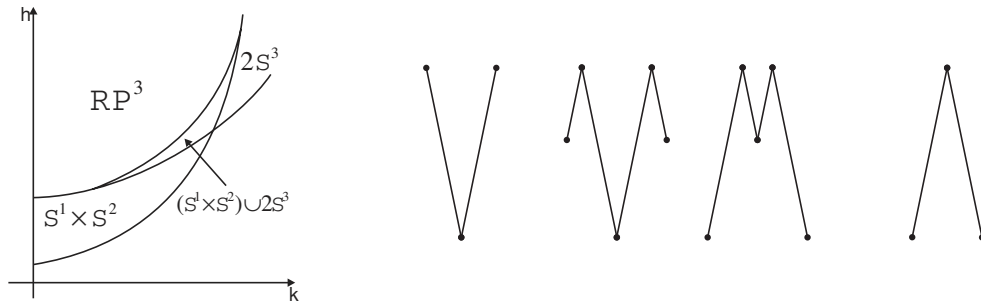


Рис. 2.13. Бифуркационная диаграмма случая $1 < J < 4(c+1)/(3c+4)$

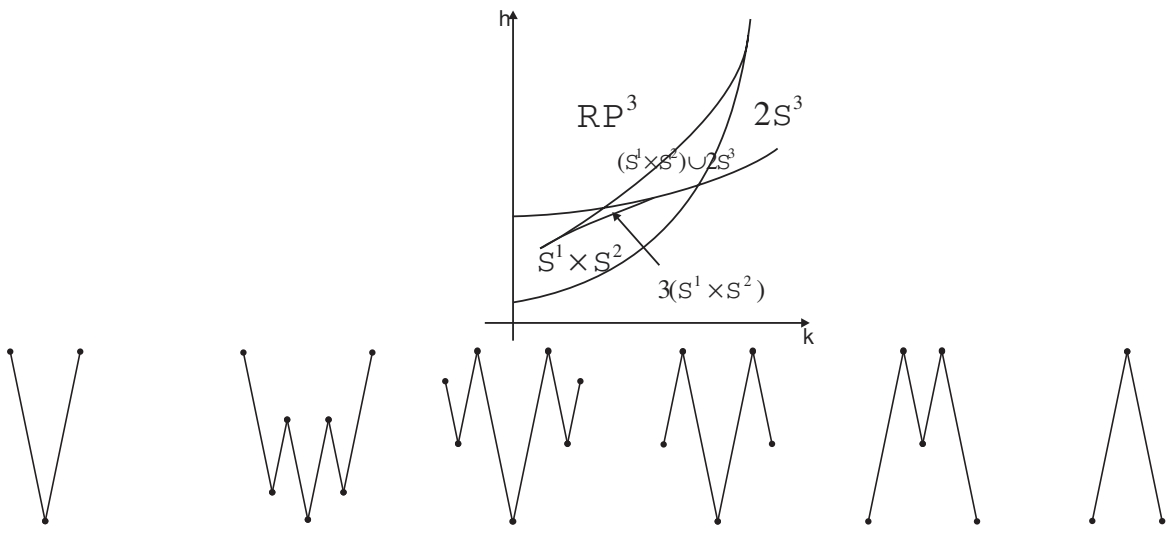


Рис. 2.14. Бифуркационная диаграмма случая $4(c+1)/(3c+4) < J < 2\sqrt{c+1}/(\sqrt{c+1}+1)$

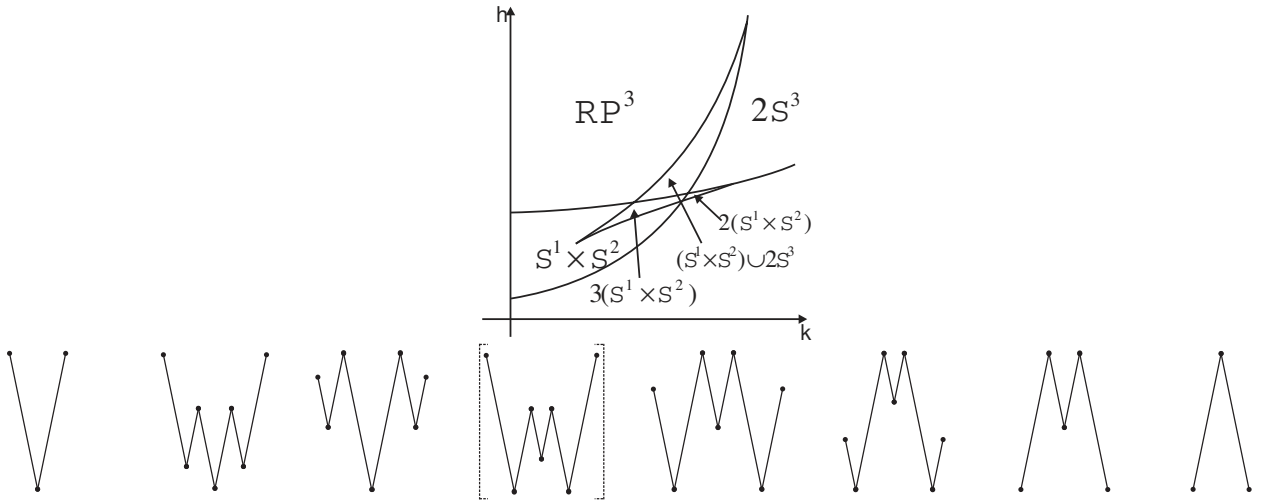


Рис. 2.15. Бифуркационная диаграмма случая $2\sqrt{c+1}/(\sqrt{c+1}+1) < J < (c+1)^{1/4}$

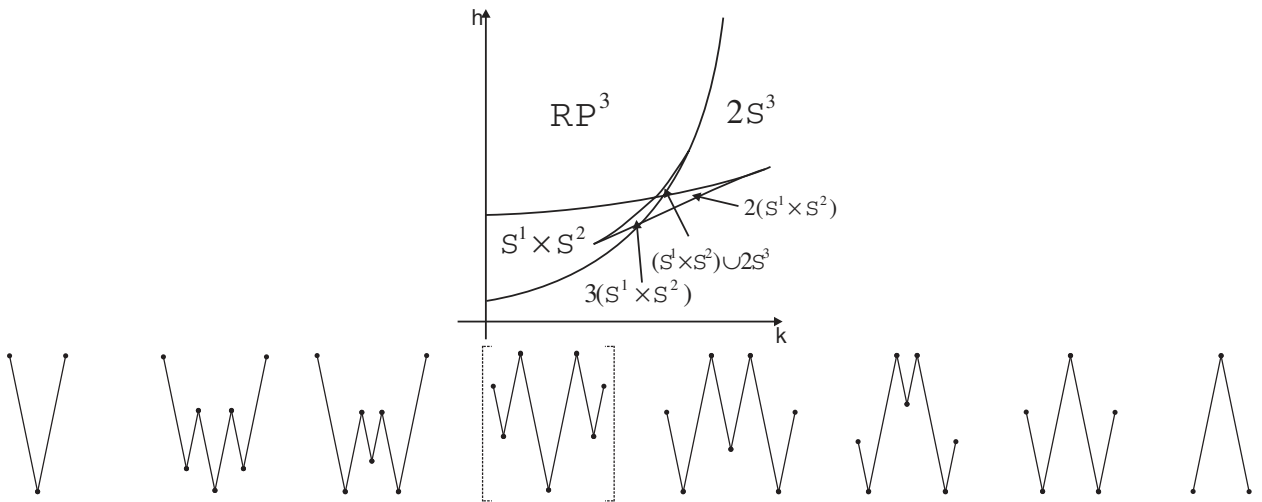


Рис. 2.16. Бифуркационная диаграмма случая $(c+1)^{1/4} < J < (\sqrt{c+1}+1)/2$

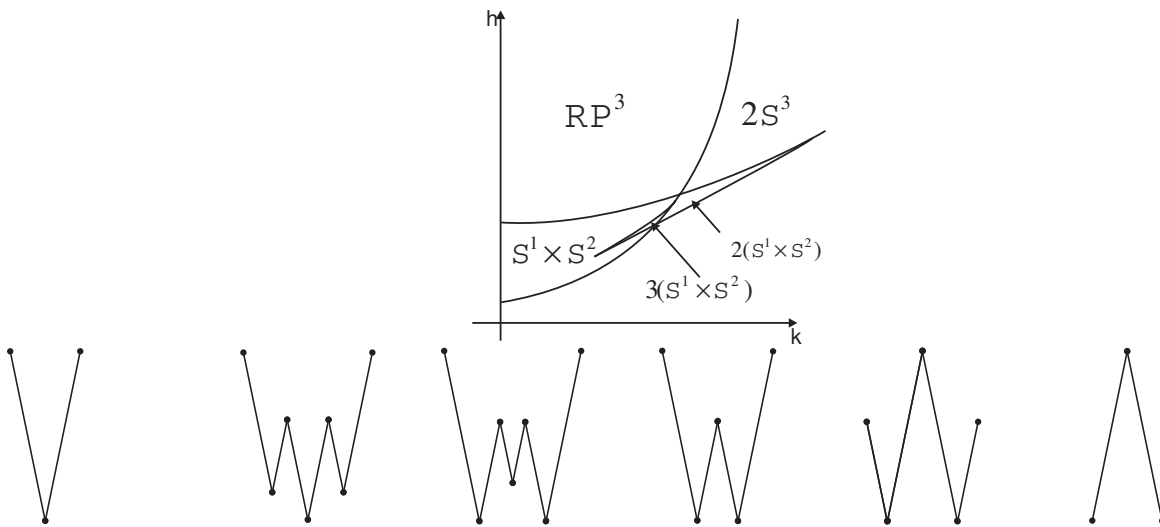


Рис. 2.17. Бифуркационная диаграмма случая $(\sqrt{c+1}+1)/2 < J < (c+4)/4$

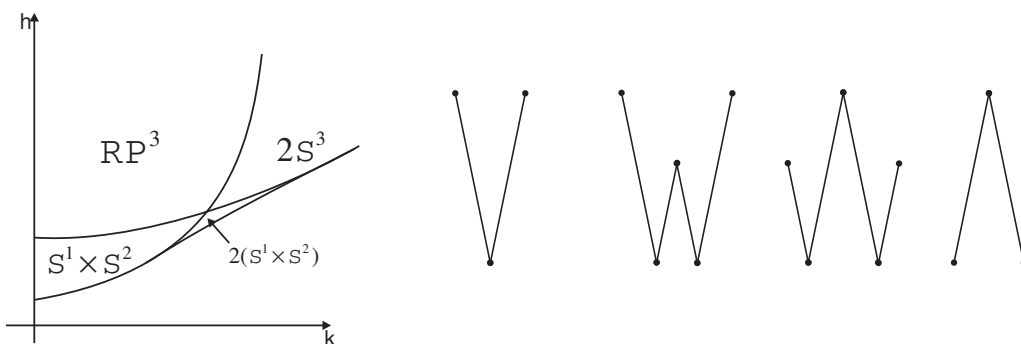


Рис. 2.18. Бифуркационная диаграмма случая $(c+4)/4 < J$

Ввиду четности приведенного потенциала $\gamma_3 = 0$ — всегда критическое значение, механически это соответствует ситуации, когда ось симметрии эллипсоида лежит в горизонтальной плоскости, а сам он перманентно вращается вокруг вертикали, чего не может быть для волчка Лагранжа. Кроме того, для волчка Лагранжа критические точки $\gamma_3 = \pm 1$ лежат на разных ветвях бифуркационных диаграмм, а на непараболических ветвях лежит по одной критической окружности.

Молекулы для случая $-1 < c < 0$, $J > 1$, $s = 0$ (тогда нет изгибов у $\Sigma_{h,\omega}$) изображены на рисунке 2.19. Данному условию удовлетворяет, например, однородный эллипсоид.

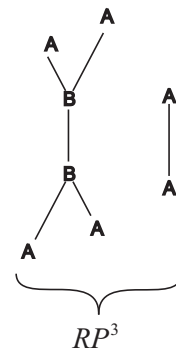
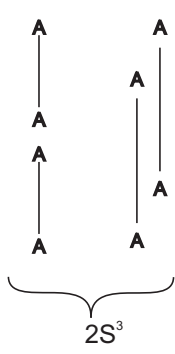


Рис. 2.19. Молекулы для бифуркационной диаграммы рис. 2.7

Для других изоэнергетических многообразий молекулы строятся аналогично.

Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости

3.1. Введение

В этой главе рассматривается эллипсоид, движущийся по гладкой горизонтальной плоскости. Уравнения движения сходны с уравнениями движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В общем случае для их интегрируемости также недостает одного интеграла. Для трехосного эллипсоида, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, доказывается отсутствие дополнительного мероморфного интеграла, за исключением тривиального случая.

3.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы.

Рассматривается движение тяжелого твердого тела, имеющего форму трехосного эллипсоида, на гладкой горизонтальной плоскости. На систему наложена одна голономная связь — высота центра масс над плоскостью однозначно определяется ориентацией тела, т.е. система имеет пять степеней свободы. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат, S — центр масс тела, Se_1, Se_2, Se_3 — главные центральные оси инерции тела, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости центра масс тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скоро-

сти тела, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор восходящей вертикали, направленный по OZ , m — масса тела, (b_1, b_2, b_3) — главные полуоси эллипсоида, $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — главный центральный тензор инерции тела, $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ — радиус-вектор из центра масс тела в точку его касания плоскостью, \mathbf{N} — нормальная реакция плоскости, $z = -\langle \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \rangle$ — возвышение центра масс тела над плоскостью.

Закон движения центра масс имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} - mg\boldsymbol{\gamma}.$$

В проекции на оси OX, OY получаем $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$, т.е. всегда можно выбрать инерциальную систему координат с центром в центре масс тела, которая движется равномерно вдоль горизонтальной плоскости и в которой $v_x = v_y = 0$. В проекции на ось OZ имеем: $v_z = \dot{z}$, $m\ddot{z} = N - mg$.

Выражая отсюда значение N и подставляя результат в закон изменения главного кинетического момента относительно S и учитывая условие постоянства вертикального единичного орта, получим уравнения Эйлера–Пуассона

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times (m\ddot{z} + mg)\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (2.1)$$

(здесь и далее предполагается, что $z = z(\boldsymbol{\gamma})$)

Уравнения (2.1) при любых параметрах имеют три первых интеграла (энергии, площадей и геометрический интеграл):

$$H = \frac{\langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz, \quad K = \langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rangle, \quad \Gamma = \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \rangle.$$

Ограничение системы (2.1) на совместный уровень интегралов $M_{k,c} = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) | K = k, \Gamma = c\}$ представляет собой лагранжеву систему с двумя степенями свободы. Для ее интегрируемости, согласно теореме Лиувилля, недостает одного дополнительного интеграла.

Цель главы — определение необходимых условий существования дополнительного интеграла.

Пусть главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями поверхности тела, а центр масс совмещен с геометрическим центром. Тогда

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}) = -\langle \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \rangle^{-1/2} \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1^2, b_2^2, b_3^2),$$

$$z = \sqrt{b_1^2 \gamma_1^2 + b_2^2 \gamma_2^2 + b_3^2 \gamma_3^2}.$$

Пусть $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ — момент количества движения, тогда уравнения движения (2.1) можно записать в виде гамильтоновой системы

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \quad (2.2)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle + mgz,$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\gamma}) = D^{-1} \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{123} & \eta_{132} \\ \eta_{123} & \xi_{31} & \eta_{231} \\ \eta_{132} & \eta_{231} & \xi_{12} \end{vmatrix}$$

$$\xi_{ij} = J_i J_j + m(J_i a_j^2 + J_j a_i^2), \quad \eta_{ijk} = -m a_i a_j J_k; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$D = J_1 J_2 J_3 + m(J_1 J_2 a_3^2 + J_1 J_3 a_2^2 + J_2 J_3 a_1^2)$$

$$a_1 = (b_3^2 - b_2^2) \gamma_2 \gamma_3 z^{-1} \quad (123)$$

3.3. Доказательство неинтегрируемости

Теорема Пусть все J_1, J_2, J_3 различны и эллипсоид близок к шару: $b_i = R + \epsilon B_i$, ($i = 1, 2, 3$). Тогда уравнения движения (2.2) допускают частное решение вида (3.4), и не имеют дополнительного мероморфного аналитического по ϵ интеграла, если не выполнено условие

$$B_1 = B_2 = B_3.$$

∇ Доказательство теоремы сходно с рассмотренным ранее ([15], [41], [73]).

В первом приближении по ϵ получаем уравнения

$$\dot{m}_1 = (A_3 - A_2)m_2m_3 + \epsilon(B_3 - B_2)\gamma_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_1 = A_3m_3\gamma_2 - A_2m_2\gamma_3 \quad (123) \quad (3.1)$$

$$A_i = J_i^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями Кирхгофа–Клебша для движения тела в идеальной жидкости, для них интегралы имеют вид

$$H = \frac{1}{2} (A_1m_1^2 + A_2m_2^2 + A_3m_3^2) + \epsilon\frac{1}{2} (B_1\gamma_1^2 + B_2\gamma_2^2 + B_3\gamma_3^2),$$

$$K = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3,$$

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

Сделаем замену

$$\overline{m}_1 = m_1\pi_1; \quad \pi_1 = \sqrt{(A_1 - A_3)(A_2 - A_1)} \quad (123)$$

Заметим, что в таком случае верны равенства

$$\frac{A_1^2}{\pi_1^2} + \frac{A_2^2}{\pi_2^2} + \frac{A_3^2}{\pi_3^2} = -1, \quad \frac{A_1}{\pi_1^2} + \frac{A_2}{\pi_2^2} + \frac{A_3}{\pi_3^2} = 0$$

В новых переменных (черту над m_i далее опускаем) уравнения (3.1) запишутся в виде

$$\dot{m}_1 = m_2m_3 + \epsilon\pi_1(B_3 - B_2)\gamma_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_1 = A_3m_3\pi_3^{-1}\gamma_2 - A_2m_2\pi_2^{-1}\gamma_3 \quad (123) \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) при $\epsilon = 0$ имеют четыре интеграла:

$$I_1 = m_1^2 - m_2^2, \quad I_2 = m_3^2 - m_2^2,$$

$$I_3 = m_1\pi_1^{-1}\gamma_1 + m_2\pi_2^{-1}\gamma_2 + m_3\pi_3^{-1}\gamma_3, \quad I_4 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad (3.3)$$

причем $2H_0 = A_1m_1^2\pi_1^{-2} + A_2m_2^2\pi_2^{-2} + A_3m_3^2\pi_3^{-2}$ — линейная комбинация интегралов I_1 и I_2 .

Ясно, что все четыре интеграла независимы.

При $\epsilon = 0$ система (3.2) имеет вид:

$$\dot{m}_1 = m_2 m_3, \quad \dot{\gamma}_1 = A_3 m_3 \pi_3^{-1} \gamma_2 - A_2 m_2 \pi_2^{-1} \gamma_3 \quad (123) \quad (3.4)$$

Для эллиптического частного решения системы (3.4) применим метод Моралиса-Руиза-Рамиса [72]. Поскольку риманова поверхность решения - тор с одной особой точкой, то условия абелевости связной компоненты группы Галуа равносильны однозначности решения возмущенного уравнения (см. главу 1, пункты 4,5) при обходе около особой точки $t = 0$. Поэтому в таком случае можно применить теорему для неинтегрируемости квазиоднородных систем с малым параметром (см. главу 1, пункт 3) для $n = 6, k = 4$.

Разложим эллиптическое частное решение уравнения (3.4) в ряд Лорана по переменной t в окрестности полюса $t = 0$. Первые члены разложения будут иметь вид:

$$m_1^{(0)} = -t^{-1}, \quad m_2^{(0)} = t^{-1}, \quad m_3^{(0)} = t^{-1}, \quad \gamma_1^{(0)} = -\frac{A_1}{\pi_1}, \quad \gamma_2^{(0)} = \frac{A_2}{\pi_2}, \quad \gamma_3^{(0)} = \frac{A_3}{\pi_3}$$

Найдем общее решение для уравнений (3.2). Для этого, согласно теореме, найдем собственные векторы и собственные значения матрицы Ковалевской. Общее решение уравнений (3.2) имеет вид

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^6 c_i \boldsymbol{\beta}_i t^{\mathbf{p} + \rho_i}$$

При этом коэффициенты c_i находятся методом вариации произвольных постоянных.

Выпишем первые три компоненты вектора $\mathbf{x}^{(1)}(t)$:

$$m_1^{(1)} = c_1 t + c_2 t - c_3 t^{-2}, \quad m_2^{(1)} = c_1 t + c_3 t^{-2}, \quad m_3^{(1)} = c_2 t + c_3 t^{-2} \quad (3.5)$$

Показатели Ковалевской для них: $R = \{-1, 2, 2\}$.

Решение в первом приближении для неоднородного случая находится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид:

$$c_1 = \Delta_1 \ln t + c_1^0, \quad c_2 = \Delta_2 \ln t + c_2^0, \quad c_3 = \Delta t^3 + c_3^0, \quad \text{где}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \zeta_{123} & 1 & -1 \\ \zeta_{231} & 0 & 1 \\ \zeta_{312} & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \zeta_{123} & -1 \\ 1 & \zeta_{231} & 1 \\ 0 & \zeta_{312} & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \zeta_{123} \\ 1 & 0 & \zeta_{231} \\ 0 & 1 & \zeta_{312} \end{vmatrix}$$

$$\zeta_{ijk} = (B_k - B_j)\gamma_k\gamma_j\pi_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

c_1^0, c_2^0, c_3^0 — произвольные постоянные.

В таком случае первые три компоненты вектора \mathbf{s}_{11} , задающего точное решение, имеют вид:

$$(\mathbf{s}_{11}(t))_1 = (\Delta_1 + \Delta_2)t, \quad (\mathbf{s}_{11}(t))_2 = \Delta_1 t, \quad (\mathbf{s}_{11}(t))_3 = \Delta_2 t.$$

В силу необходимого условия интегрируемости (см. введение) нужно взять скалярное произведение векторов \mathbf{s}_{11} и $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0, 0, 0)$.

Таким образом, это условие равносильно равенству нулю коэффициентов при логарифмах:

$$-\zeta_{123} = \zeta_{231} = \zeta_{312} \quad (3.6)$$

Систему (3.6) можно переписать в виде:

$$\frac{(B_2 - B_3)A_2}{A_3 - A_2} + \frac{(B_1 - B_3)A_1}{A_1 - A_3} = 0 \quad (123),$$

а затем в виде одного условия Клебша:

$$\frac{B_2 - B_3}{A_1} + \frac{B_3 - B_1}{A_2} + \frac{B_1 - B_2}{A_3} = 0.$$

Теперь рассмотрим второе приближение уравнений (3.2):

$$\dot{m}_1 = m_2 m_3 + \epsilon \zeta_{123} + \epsilon^2 \left(\langle \mathbf{P}(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + \frac{mg\zeta_{123}}{R\pi_1} \right) \quad (3.7)$$

$$\dot{\gamma}_1 = A_3 \pi_3^{-1} m_3 \gamma_2 - A_2 m_2 \pi_2^{-1} \gamma_3 + \epsilon^2 \langle \mathbf{q}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{m} \rangle \quad (123)$$

Здесь введены обозначения: \mathbf{P} — некая матрица, зависящая от $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{q} — некий вектор, зависящий от $\boldsymbol{\gamma}$,

$$\kappa_{123} = (B_2 - B_3)\gamma_2\gamma_3 [(B_2 - B_1)(2\gamma_2^2 - 1) + (B_3 - B_1)(2\gamma_3^2 - 1)] \pi_1 \quad (123)$$

Теорема снова применима, поскольку теперь логарифм может возникнуть во втором приближении. Коэффициенты при квадратичных по \mathbf{m} слагаемых в равенствах (3.7) не важны, так как они будут пропорциональны t^{-2} и поэтому решения в (3.5) не будут иметь логарифмической части. Проводя рассуждения, аналогичные случаю первого приближения, получим условия существования интеграла:

$$-\kappa_{123} = \kappa_{231} = \kappa_{312} \quad (3.8)$$

Из равенств (3.6) и (3.8) следуют уравнения

$$\kappa_{123}\zeta_{123}^{-1} = \kappa_{231}\zeta_{231}^{-1} = \kappa_{312}\zeta_{312}^{-1}$$

Они дают два соотношения, связывающие параметры B_1, B_2, B_3 . Упрощая их, при учете равенства $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = -1$, убеждаемся, что они равносильны условию $B_1 = B_2 = B_3$. ∇

Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости

4.1. Введение

Рассматривается динамически и геометрически симметричный эллипсоид, движущийся по гладкой горизонтальной плоскости. Уравнения движения сходны с уравнениями движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В общем случае для их интегрируемости также недостает одного интеграла. Для динамически и геометрически симметричного эллипсоида, главные центральные оси инерции которого сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности и центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида-поверхности, находятся необходимые условия существования дополнительного аналитического интеграла.

4.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы.

Как показано в предыдущей главе, если все моменты инерции эллипсоида различны, а центр масс не совпадает с центром эллипсоида, то дополнительного мероморфного первого интеграла не существует, за исключением

тривиального случая. Заметим, что доказательство этого факта существенно опирается на близость центра масс и геометрического центра — при произвольном расположении центра о существовании дополнительного интеграла ничего не известно.

Таким образом, основным объектом исследования в этой главе является динамически и геометрически симметричное твердое тело ($b_1 = b_2$, $J_1 = J_2$), поверхность которого — эллипсоид вращения, главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности, центр масс располагается в "экваториальной" ($e_3 = 0$) плоскости симметрии эллипсоида-поверхности.

Без нарушения общности можно считать, что центр эллипсоида поверхности располагается на оси Se_1 связанной с телом подвижной системы координат на расстоянии α_1 от центра масс.

Пусть $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ — момент количества движения, тогда уравнения движения можно записать в виде гамильтоновой системы

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \quad (2.2)$$

где
$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle + V(\boldsymbol{\gamma}),$$

$$\mathbf{A} = D^{-1} \begin{pmatrix} J_1 J_3 + m(J_1 a_3^2 + J_3 a_2^2) & -m a_1 a_2 J_3 & -m a_1 a_3 J_1 \\ -m a_1 a_2 J_3 & J_1 J_3 + m(J_3 a_1^2 + J_1 a_3^2) & -m a_2 a_3 J_1 \\ -m a_1 a_3 J_1 & -m a_2 a_3 J_1 & J_1^2 + m(J_1 a_2^2 + J_1 a_1^2) \end{pmatrix},$$

$$D = J_1^2 J_3 + m(J_1^2 a_3^2 + J_1 J_3 a_2^2 + J_1 J_3 a_1^2)$$

$$V = mg(\alpha_1 \gamma_1 + \sqrt{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2) \gamma_3^2}), \quad a_1 = \frac{m(b_1^2 - b_3^2) \gamma_2 \gamma_3}{\sqrt{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2) \gamma_3^2}},$$

$$a_2 = \frac{m(b_3^2 - b_1^2) \gamma_2 \gamma_3}{\sqrt{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2) \gamma_3^2}} - \alpha_1 \gamma_3, \quad a_3 = \alpha_1 \gamma_2.$$

4.3. Доказательство неинтегрируемости

Теорема. *Необходимые условия существования дополнительного, не зависящего от значения постоянной площадей, аналитического первого интеграла, независимого на частном решении, которому отвечает перманентное вращение тела вокруг вертикали, проходящей через центр масс, имеют вид:*

$$f \equiv 9(9\alpha_1 + 9\beta_1 - \alpha_1 y)u^2 + 2(-36\alpha_1^2 y + 32\alpha_1^2 y^2 + 9\alpha_1 + 9\beta_1 - 5\alpha_1 y)u - 8\alpha_1^2 + \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 y = 0 \quad (3.1)$$

$$g \equiv (2187\beta_1^2 + 1944m\alpha_1^2 y\beta_1 + 972m\alpha_1^3 y + 2916\beta_1 + 5103\alpha_1 + 972\alpha_1 y m\beta_1^2 - 324\alpha_1^2 y^2 m\beta_1 - 324m\alpha_1^3 y^2 - 3969\alpha_1 y)u^4 + (1188m\alpha_1^3 y + 729\beta_1^2 - 4374\alpha_1^2 - 252m\alpha_1^3 y^2 - 252\alpha_1^2 y^2 m\beta_1 + 9477\alpha_1^2 y + 972\beta_1 + 2376m\alpha_1^2 y\beta_1 + 1701\alpha_1 - 1611\alpha_1 y - 540m\alpha_1^4 y^2 + 36\alpha_1^4 y^3 m - 540\alpha_1^3 y^2 m\beta_1 - 4581\alpha_1^2 y^2 + 1188\alpha_1 y m\beta_1^2)u^3 + (228m\alpha_1^3 y + 108\beta_1 + 1863\alpha_1^2 y + 228\alpha_1 y m\beta_1^2 + 189\alpha_1 + 84m\alpha_1^3 y^2 - 708m\alpha_1^4 y^2 - 211\alpha_1 y + 60\alpha_1^4 y^3 m + 456m\alpha_1^2 y\beta_1 - 455\alpha_1^2 y^2 - 1458\alpha_1^2 + 81\beta_1^2 + 48\alpha_1^5 y^3 m + 84\alpha_1^2 y^2 m\beta_1 - 708\alpha_1^3 y^2 m\beta_1)u^2 + (-9\alpha_1 y + 12\alpha_1 y m\beta_1^2 + 96\alpha_1^5 y^3 m + 7\alpha_1 + 33\alpha_1^2 y^2 + 63\alpha_1^2 y + 12m\alpha_1^3 y^2 + 4\beta_1 + 12m\alpha_1^3 y + 12\alpha_1^2 y^2 m\beta_1 - 162\alpha_1^2 + 24m\alpha_1^2 y\beta_1 + 3\beta_1^2 + 12\alpha_1^4 y^3 m - 180m\alpha_1^4 y^2 - 180\alpha_1^3 y^2 m\beta_1)u - 6\alpha_1^2 + 3\alpha_1^2 y^2 - 12m\alpha_1^4 y^2 - 12\alpha_1^3 y^2 m\beta_1 + 48\alpha_1^5 y^3 m - 12\alpha_1^4 y^3 m - 3\alpha_1^2 y = 0, \quad (3.2)$$

u — вспомогательная переменная (определена в тексте доказательства).

Доказательство:

Доказательство основано на приведении системы дифференциальных уравнений к нормальному виду в окрестности частного решения (см. пункт 7 главы 1).

Уравнения движения (2.1) допускают следующее частное решение: $(-k, 0, 0, -1, 0, 0)$, которому отвечает перманентное вращение тела вокруг вертикали, проходящей через центр масс.

Перейдем от переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ на фиксированных уровнях первых интегралов $\{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) | K = k, \Gamma = 1\}$ к переменным (x_1, x_2, y_1, y_2) (с точностью до сдвига — это углы Эйлера и сопряженные к ним импульсы) по формулам:

$$M_1 = \frac{\sin(-\pi/2 + x_2)(k - y_2 \cos(\pi/2 + x_1))}{\sin(\pi/2 + x_1)} + y_1 \cos(-\pi/2 + x_2),$$

$$M_2 = \frac{\cos(-\pi/2 + x_2)(k - y_2 \cos(\pi/2 + x_1))}{\sin(\pi/2 + x_1)} - y_1 \cos(-\pi/2 + x_2),$$

$$M_3 = y_2,$$

$$\gamma_1 = \sin(\pi/2 + x_1) \sin(-\pi/2 + x_2),$$

$$\gamma_2 = \sin(\pi/2 + x_1) \cos(-\pi/2 + x_2),$$

$$\gamma_3 = \cos(\pi/2 + x_1).$$

Выберем размерные параметры задачи так, что:

$$mg = 1, J_1 = 1, b_1 = 1, \beta_1 = b_3^2 - 1, y = 1/J_3, x = \sqrt{k}.$$

Тогда первые три члена в разложении гамильтониана имеют вид:

$$H^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2}{2} + \frac{yy_2^2}{2} + \sqrt{x}x_1y_2 + \frac{(x + \alpha_1 + \beta_1)x_1^2}{2} + \frac{\alpha_1x_2^2}{2} \quad (3.3)$$

$$H^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned} H^{(4)} = & \frac{-m(\alpha_1 + \beta_1)^2 x_1^2 y_1^2}{2} - m(\alpha_1 + \beta_1) \alpha_1 y x_1 x_2 y_1 y_2 - m \alpha_1 (\alpha_1 + \beta_1) \sqrt{x} x_1^2 x_2 y_1 + \\ & + \frac{x_1^2 y_2^2}{2} - \frac{m \alpha_1^2 y^2 x_2^2 y_2^2}{2} + 5/6 \sqrt{x} y_2 x_1^3 - m \alpha_1^2 \sqrt{x} y x_1 x_2^2 y_2 + \\ & + (x/3 - \alpha_1/24 - \beta_1^2/8 - \beta_1/6) x_1^4 - \frac{(2m \alpha_1 x + 1) \alpha_1 x_1^2 x_2^2}{4} - \alpha_1 x_2^4/24 \quad (3.4) \end{aligned}$$

Характеристический многочлен для системы с гамильтонианом (3.3) имеет вид:

$$\lambda^4 + (\alpha_1 y + x + \alpha_1 + \beta_1)\lambda^2 + \alpha_1(-x + xy + (\alpha_1 + \beta_1)y) = 0 \quad (3.5)$$

Условие резонанса $\pm 1 : 3$ можно представить в виде:

$$9x^2 - 82\alpha_1 xy + 9\alpha_1^2 y^2 + 118\alpha_1 x + 18\beta_1 x - 82\alpha_1^2 y - 82\alpha_1 \beta_1 y + 9\alpha_1^2 + 18\alpha_1 \beta_1 + 9\beta_1^2 = 0 \quad (3.6)$$

Сделаем каноническую замену переменных:

$$x_1 = q_1 - p_2, x_2 = \frac{q_2 - p_1}{\beta}, y_1 = \frac{\alpha q_2 + (\beta - \alpha)p_1}{\beta}, y_2 = \alpha q_1 + (\beta - \alpha)p_2 \quad (3.7)$$

α, β — параметры, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha} + \alpha, \frac{\sqrt{x}\alpha_1}{\alpha} - \sqrt{x}\alpha - \alpha_1 + \alpha_1 y - x - \beta_1 = 0, \alpha_1(y + \frac{\sqrt{x}}{\alpha}) > 0, \alpha_1 y - \alpha\sqrt{x} > 0$$

Тогда получаем:

$$H^{(2)}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{A_1 p_1^2}{2} + \frac{B_1 q_1^2}{2} + \frac{A_2 p_2^2}{2} + \frac{B_2 q_2^2}{2},$$

причем

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha^2}, B_1 = 2\alpha\sqrt{x} + x + \alpha_1 + \alpha^2 y + \beta_1 = (\alpha^2 + \alpha_1)(y + \frac{\sqrt{x}}{\alpha})$$

$$A_2 = \frac{y\alpha_1^2 - 2\sqrt{x}\alpha_1\alpha + (x + \alpha_1 + \beta_1)\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{(\alpha^2 + \alpha_1)(\alpha_1 y - \alpha\sqrt{x})}{\alpha^2}, B_2 = \frac{\alpha^2}{\alpha_1 + \alpha^2}$$

Функция (3.3) при такой замене записывается в виде:

$$H^{(4)}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 4} h_{\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}.$$

Наконец, замена

$$q_s = \left(\frac{Q_s}{2} + \frac{P_s i}{\omega_s}\right)\lambda_s, p_s = \frac{1/2i\omega_s Q_s + P_s}{\lambda_s}, \text{ где}$$

$$\omega_s = \sqrt{A_s B_s}, \lambda_s = \sqrt{A_s} (s = 1, 2)$$

приводит функции $H^{(2)}, H^{(4)}$ к виду:

$$H^{(2)}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = i\omega_1 Q_1 P_1 + i\omega_2 Q_2 P_2.$$

$$H^{(4)}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=4} h'_{\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2} Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}.$$

$$h'_{1003} = u_{1003} + iv_{1003}, h'_{0310} = \frac{\omega_2^3}{4\omega_1} (u_{1003} - iv_{1003})$$

$$u_{1003} = \frac{h_{0310}\omega_1\lambda_2^3}{2\omega_2^3\lambda_1} - \frac{h_{0112}\omega_1}{2\omega_2\lambda_1\lambda_2} + \frac{h_{1003}\lambda_1}{2\lambda_2^3} - \frac{h_{1201}\lambda_1\lambda_2}{2\omega_2^2} \quad (3.8)$$

$$v_{1003} = -\frac{h_{1300}\lambda_1\lambda_2^3}{2\omega_2^3} + \frac{h_{0013}\omega_1}{2\lambda_1\lambda_2^3} - \frac{h_{0211}\omega_1\lambda_2}{\omega_2^2\lambda_1} + \frac{h_{1102}\lambda_1}{\omega_2\lambda_2}$$

$$h'_{0130} = u_{0130} + iv_{0130}, h'_{3001} = \frac{\omega_1^3}{4\omega_2} (u_{0130} - iv_{0130})$$

$$u_{0130} = \frac{h_{3001}\omega_2\lambda_1^3}{2\omega_1^3\lambda_2} - \frac{h_{1021}\omega_2}{2\omega_1\lambda_2\lambda_1} + \frac{h_{0130}\lambda_2}{2\lambda_1^3} - \frac{h_{2110}\lambda_2\lambda_1}{2\omega_1^2} \quad (3.9)$$

$$v_{0130} = -\frac{h_{3100}\lambda_2\lambda_1^3}{2\omega_1^3} + \frac{h_{0031}\omega_2}{2\lambda_2\lambda_1^3} - \frac{h_{2011}\omega_2\lambda_1}{\omega_1^2\lambda_2} + \frac{h_{1120}\lambda_2}{\omega_1\lambda_1}$$

В нашей задаче $v_{1003} = v_{0130} = 0$ и при выполнении условия $\omega_1 = 3\omega_2$, величина u_{1003} , а вместе с ней и коэффициент h'_{1003} , обращается в нуль при выполнении условия:

$$\frac{3A_2}{A_1} \left(\frac{h_{0310}}{B_2} - \frac{h_{0112}}{A_2} \right) + \frac{h_{1003}}{A_2} - \frac{h_{1201}}{B_2} = 0 \quad (3.10)$$

Вместо параметра k (интеграл площадей) будем работать с параметром $u = \alpha^2$.

Если $\omega_1 = 3\omega_2$, то $\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{\alpha_1(y+\sqrt{x}/\alpha)}{\alpha_1 y - \alpha\sqrt{x}} = 9$. Отсюда выражаем x через α :

$$\sqrt{x} = \frac{8\alpha_1 y \alpha}{9\alpha^2 + 1}.$$

Условие резонанса (3.6) запишется в виде условия (3.1).

Из (3.6), (3.8), (3.9) находим значения для h_{0310} , h_{0112} , h_{1003} , h_{1201} и, подставляя их в (3.10), получим (3.2).

В случае когда эллипсоид — шар ($b_1 = b_2 = b_3 = R$), условия (3.1), (3.2) перепишутся в следующем виде:

$$f \equiv 9J_3(J_1 - 9J_3)u^2 - 2J_1\alpha_1(32J_1 - 9J_3)(J_1 - J_3)u + J_1^2\alpha_1^2J_3(9J_1 - J_3) = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} g \equiv & -81J_3(12J_3\alpha_1^2 + 63J_3^2 - 49J_3J_1 - 4\alpha_1^2J_1)u^4 + \quad (3.12) \\ & -9\alpha_1J_1(132\alpha_1^2J_3^2 - 88\alpha_1^2J_1J_3 - 297J_3^3 + 874J_1J_3^2 - 509J_1^2J_3 + 4J_1^2\alpha_1^2)u^3 + \\ & + J_1^2\alpha_1^2(624\alpha_1^2J_1J_3 - 228\alpha_1^2J_3^2 + 455J_1^2J_3 + 1269J_3^3 - 108\alpha_1^2J_1^2 - 1652J_1J_3^2)u^2 + \\ & + \alpha_1^3J_1^3(-33J_1^2J_3 + 155J_3^3 + 168\alpha_1^2J_1J_3 - 108\alpha_1^2J_1^2 - 54J_1J_3^2 - 12\alpha_1^2J_3^2)u + \\ & + 3\alpha_1^4J_1^4(-12J_1^2\alpha_1^2 + 4\alpha_1^2J_1J_3 - J_1^2J_3 + 2J_3^3 + J_1J_3^2) = 0 \end{aligned}$$

Замечание

В случае $J_1 = 2J_3 = 2J$ условие (3.11) дает

$$f \equiv -J^2(34J\alpha_1 + 9\alpha^2)(-2J\alpha_1 + 7\alpha^2),$$

а условие (3.12)

$$\begin{aligned} g \equiv & 5\alpha^2J^3(34J\alpha_1 + 9\alpha^2)(-2J\alpha_1 + 7\alpha^2)(2J\alpha_1 + 9\alpha^2) - \\ & - 12\alpha_1^2J^2(2J\alpha_1 + \alpha^2)(-10J\alpha_1 + 3\alpha^2)(9\alpha^4 - 2J\alpha_1\alpha^2 - 8\alpha_1^2J^2). \end{aligned}$$

С учетом $f = 0$ первое слагаемое в g , которое имеет по α_1 четвертый порядок, равно нулю, что соответствует классическому случаю Ковалевской; второе слагаемое в g имеет шестой порядок по α_1 и отлично от нуля, т.е. аналога интеграла Ковалевской в классическом смысле здесь не существует.

Необходимые и достаточные условия полной алгебраической интегрируемости уравнений движения тяжелого неоднородного шара на гладкой горизонтальной плоскости

5.1. Введение

В этой главе рассматривается проблема поиска интегрируемых случаев в задаче о движении тяжелого твердого шара по гладкой горизонтальной плоскости. Уравнения движения шара по горизонтальной плоскости сходны с уравнениями движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В общем случае для их интегрируемости также недостает одного интеграла. Методом Ковалевской–Ляпунова–Иошиды доказывается, что дополнительный интеграл существует лишь в двух случаях, аналогичных случаям Эйлера и Лагранжа.

5.2. Постановка задачи. Уравнения движения и их первые интегралы

Тяжелый твердый шар движется по гладкой горизонтальной плоскости. Если исключить из рассмотрения движение центра масс вдоль плоскости (которое является равномерным), то уравнения движения шара можно представить в виде:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\gamma}) = D^{-1} \begin{pmatrix} J_2 J_3 + m(J_2 a_3^2 + J_3 a_2^2) & -m a_1 a_2 J_3 & -m a_1 a_3 J_2 \\ -m a_1 a_2 J_3 & J_1 J_3 + m(J_3 a_1^2 + J_1 a_3^2) & -m a_2 a_3 J_1 \\ -m a_1 a_3 J_2 & -m a_2 a_3 J_1 & J_1 J_2 + m(J_1 a_2^2 + J_2 a_1^2) \end{pmatrix},$$

$$D = J_1 J_2 J_3 + m(J_1 J_2 a_3^2 + J_1 J_3 a_2^2 + J_2 J_3 a_1^2)$$

$$V = mg(X_1 \gamma_1 + X_2 \gamma_2 + X_3 \gamma_3), \quad a_1 = X_2 \gamma_3 - X_3 \gamma_2 \quad (123)$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор восходящей вертикали; m — масса тела; $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — главный центральный тензор инерции тела; (X_1, X_2, X_3) — координаты центра масс; $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ — вектор импульса.

Уравнения (2.1) при любых значениях параметров имеют первые интегралы:

$$H = \frac{\langle \mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle}{2} + V = h \text{ — интеграл энергии,}$$

$$K = \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = k \text{ — интеграл площадей,}$$

$$\Gamma = \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = c \text{ — геометрический интеграл.}$$

Ограничение системы (2.1) на совместный уровень интегралов $M_{k,c} = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) | K = k, \Gamma = c\}$ — гамильтонова система с двумя степенями свободы. Для ее интегрируемости, согласно теореме Арнольда–Лиувилля, недостает одного дополнительного интеграла.

Доказательство неинтегрируемости следует концепциям, разработанным С.В. Ковалевской, А.М. Ляпуновым, С.Л. Зиглиным в работах [15], [21], [22], а также методам, основанным на применении дифференциальной теории Галуа [72], [78]. Эти теории опираются на исследование уравнения в вариациях в окрестности частного решения, не являющегося положением равновесия. Условия отсутствия ветвления налагает определенные ограничения, что и дает необходимые условия интегрируемости. Схожие задачи рассматривались

в работах [25], [24], [62].

Основной результат формулируется следующим образом:

Теорема 1 Если $J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1$, то система уравнений (2.1) не являются алгебраически вполне интегрируемой, за исключением случая, когда $X_1 = X_2 = X_3 = 0$.

Теорема 2 Если хотя бы два J_i ($i = 1, 2, 3$) совпадают (например, $J_1 = J_2$), то система уравнений (2.1) не являются алгебраически вполне интегрируемой, за исключением случая Лагранжа (когда $X_1 = X_2 = 0$).

5.3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 состоит из последовательного доказательства двух лемм.

Без ограничения общности будем считать, что $m = g = 1$.

Лемма 1 Необходимое условие мероморфной интегрируемости уравнений (2.1), в предположении различности моментов инерции — это условие Гесса:

$$X_1 \sqrt{J_1(J_2 - J_3)} + X_2 \sqrt{J_2(J_3 - J_1)} + X_3 \sqrt{J_3(J_1 - J_2)} = 0 \quad (3.1)$$

Доказательство леммы 1. Возьмем частное решение вида

$$\gamma_1 = 0, \quad \dot{M}_1 = \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2}\right) M_2 M_3 \quad (123) \quad (3.2)$$

Тогда уравнение в вариациях для (1.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = \frac{(J_2 - J_3)M_3 m_2}{J_3} + \frac{(J_2 - J_3)M_2 m_3}{J_2} - X_3 n_2 + X_2 n_1 & (123) \\ n_1 = \frac{M_3 n_2}{J_3} - \frac{M_2 n_3}{J_2} & (123) \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение (3.2) можно выписать в явном виде: $M_1 = \sqrt{\frac{(f-2hJ_3)J_1}{J_1-J_3}} cn(\tau, k)$, $M_2 = \sqrt{\frac{(f-2hJ_3)J_2}{J_2-J_3}} sn(\tau, k)$, $M_3 = \sqrt{\frac{(2hJ_1-f)J_3}{J_1-J_3}} dn(\tau, k)$,

где $k^2 = \frac{(J_1 - J_2)(f - 2hJ_3)}{(J_2 - J_3)(2hJ_1 - f)}$, $\tau = \sqrt{\frac{(J_2 - J_3)(2hJ_1 - f)}{J_1 J_2 J_3}} t$, $f = const$. Тогда риманова поверхность для решения системы (3.2) — это тор с выколотой особой точкой $t = 0$, причем образующие этого тора нерезонансны. Согласно теореме Зиглина, условие интегрируемости есть условие их коммутруемости, что в данном случае равносильно равенству тождественному элементу обхода около единственной особенности. А это в свою очередь дает однозначность решения при обходе около особой точки. Рассматривая все функции в окрестности этой особой точки, получим, что логарифмы отсутствуют лишь в случае выполнения условия Гесса [15].

Лемма 1 доказана.

Следствие 1: Если предположить, что все моменты инерции упорядочены, например, $J_1 > J_2 > J_3$, то из (3.1) следует, что $X_2 = 0$.

Лемма 2 Пусть $X_2 = 0$, $J_1 > J_2 > J_3$. Тогда для того, чтобы система (2.1) была алгебраически вполне интегрируемой, необходимо: $X_1 X_3 = 0$.

Доказательство леммы 2. Решение $M_2 = M_2(t)$, $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, $\gamma_3 = \gamma_3(t)$, $M_1 = M_3 = \gamma_2 = 0$ удовлетворяет уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M}_2 = X_1 \gamma_3 - X_3 \gamma_1 + 0.5 \left(\gamma_3 \frac{\partial A_{22}}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial A_{22}}{\partial \gamma_3} \right) M_2^2 \\ \dot{\gamma}_1 = -A_{22} M_2 \gamma_3 \\ \dot{\gamma}_3 = A_{22} M_2 \gamma_1 \end{array} \right.$$

Введем возмущение:

$$m_1 = M_1, m_3 = M_3, m_2 = M_2 - M_2(t),$$

$$n_1 = \gamma_1 - \gamma_1(t), n_3 = \gamma_3 - \gamma_3(t), n_2 = \gamma_2.$$

Нормальное вариационное уравнение в возмущенных переменных имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_1 = -\gamma_3 \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2} M_2 m_1 + (A_{33} - A_{22} - \gamma_3 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2}) M_2 m_3 + \\ \quad + ((\frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2} + 0.5 \frac{\partial A_{22}}{\partial \gamma_3} - 0.5 \gamma_3 \frac{\partial A_{22}^2}{\partial \gamma_2^2}) M_2^2 + X_3) n_2 \\ \dot{m}_3 = (A_{22} - A_{11} + \gamma_1 \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2}) M_2 m_1 + \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2} M_2 m_3 + \\ \quad + ((0.5 \gamma_1 \frac{\partial A_{22}^2}{\partial \gamma_2^2} - \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2} - 0.5 \frac{\partial A_{22}}{\partial \gamma_1}) M_2^2 - X_1) n_2 \\ \dot{n}_2 = A_{11} \gamma_3 m_1 - A_{33} \gamma_1 m_3 + (\gamma_3 \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2} - \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2}) M_2 n_2 \\ \quad \gamma_1 m_1 + \gamma_3 m_3 + M_2 n_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Выразим из двух последних уравнений (3.4) выражения для m_1 и m_3 :

$$m_1 = \frac{\gamma_3 \dot{n}_2 - ((\gamma_3 \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2} - \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2}) \gamma_3 + \frac{\gamma_1}{J_3}) M_2 n_2}{\frac{\gamma_3^2}{J_1} + \frac{\gamma_1^2}{J_3}},$$

$$m_3 = \frac{-\gamma_1 \dot{n}_2 - (-\gamma_3 \frac{\partial A_{12}}{\partial \gamma_2} - \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_2}) \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{J_1}) M_2 n_2}{\frac{\gamma_3^2}{J_1} + \frac{\gamma_1^2}{J_3}}.$$

Подставим их во второе уравнение системы (3.4) и в итоге получим одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной $n = n_2$:

$$\ddot{n} + a_1 \dot{n} + a_0 n = 0 \quad (3.5)$$

Сделаем замену времени:

$$z = \frac{\gamma_3}{1 + \gamma_1}, \quad \gamma_1 = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \gamma_3 = \frac{2z}{1 + z^2}. \quad (3.6)$$

Тогда

$$M_2 = \frac{2(J_2(1 + z^2)^2 + (X_3(1 - z^2) - 2X_1 z)^2) \dot{z}}{(1 + z^2)^3}.$$

Уравнение (3.5) с учетом (3.6) имеет вид:

$$n'' + b_1 n' + b_0 n = 0 \quad (3.7)$$

$$b_1 = \frac{\ddot{z} + a_1 \dot{z}}{\dot{z}^2} = \frac{zh + X_1 z - X_3}{p_3(z)} + \frac{3z}{1+z^2} - \frac{2(J_2(1+z^2)z - p_\alpha(z)(X_3 z + X_1))}{p_1(z)} - \frac{8(J_3 - J_1)z(1-z^2)}{J_1 J_3 p_2(z)(1+z^2)},$$

$$b_0 = -\frac{1}{(z^2 + 1)^2} \left(\frac{4J_2(J_1 - J_3 - J_2)}{J_1 J_3} - \frac{32(J_1 - J_3)J_2 z^2}{J_1 p_2(z)} - \frac{4J_2(X_1(1-z^2) + 2X_3 z)}{J_1 J_3 p_1(z)} + \frac{2J_2 p_\beta}{J_1 J_3 p_3(z)} \right),$$

где
$$p_\alpha(z) = X_3(1-z^2) - 2X_1 z,$$

$$p_\beta(z) = J_1 X_1(1-z^2) + 2J_3 X_3 z,$$

$$p_1(z) = J_2(1+z^2)^2 + p_\alpha^2(z),$$

$$p_2(z) = J_1(1-z^2)^2 + 4J_3 z^2,$$

$$p_3(z) = (1+z^2)h - X_1(1-z^2) - 2X_3 z.$$

Все конечные полюсы функции $r(z) = \frac{b'_1}{2} + \frac{b''_1}{4} - b_0$, кроме $z = \infty$, второго порядка, а полюсы $z = \infty$ имеют четвертый порядок. Вычислим старшие коэффициенты b в разложении $r(z)$ в этих полюсах:

$$z = \frac{-X_1 \pm \sqrt{X_1^2 + X_3^2 + J_2}}{X_3 \pm i\sqrt{J_2}}, \text{ тогда } b = \frac{5}{16};$$

$$z = \frac{X_3 \pm \sqrt{X_1^2 + X_3^2 - h^2}}{X_1 + h}, \text{ тогда } b = -\frac{3}{16};$$

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{J_3}{J_1}} \pm \sqrt{\frac{J_3}{J_1} - 1} \right) i, \text{ тогда } b = \frac{3}{4};$$

$$z = i, \text{ тогда } b_i = \frac{21}{16} - \frac{J_2(J_1 + J_3 - J_2)}{J_1 J_3} - \frac{J_2(J_1 X_1 + i J_3 X_3)}{2J_1 J_3 (X_1 + i X_3)};$$

$$z = -i, \text{ тогда } b_{-i} = b_i^*.$$

Необходимым условием однозначности решения для системы (3.7) в окрестности всех полюсов является рациональность всех коэффициентов b , что и дает условия: $J_1 = J_2 = J_3, X_2 = 0$ (Лагранж), либо $X_1 X_3 = 0$.

Рассмотрим случай $J_1 = J_2, X_2 = X_3 = 0$. Чтобы получить в этом случае дополнительные условия на параметры, воспользуемся условием целочисленности величины $1 + \sqrt{1 + 4b_i}$. По смыслу эта величина соответствует удвоенной степени старшего слагаемого в разложении решения уравнения (3.7) в окрестности полюса $z = i$ по степеням $(z - i)$, а также степени старшего

слагаемого в разложении решения (3.5) в окрестности полюса $t = 0$ по степеням t (удвоение при переходе от переменной t к z связано с видом замены (3.6)). Заметим, что величины b остальных конечных полюсов функции $r(z)$, кроме $z = \pm i$, характеризуют особенности, возникающие при замене (3.6) в точках, где зануляется $\frac{dz}{dt}$, поэтому эти полюса принципиально отличаются от полюсов $z = \pm i$. Итак из условия целочисленности величины $1 + \sqrt{1 + 4b_i}$ получаем дополнительные ограничения: $J_1/J_3 = 5/8$, либо $J_1/J_3 = 9/8$.

Лемма 2 доказана.

Следствие 2: Из леммы 2 следует, что в интегрируемом случае хотя бы два момента инерции совпадают.

Без ограничения общности будем считать, что в интегрируемом случае $J_1 = J_2$. Тогда можно повернуть главные оси инерции так, что $X_2 = 0$, и применяя лемму 2, получим, что для интегрируемости необходимо выполнение хотя бы одного из следующих условий:

1. $X_1 = X_2 = 0$, $J_1 = J_2$ (случай Лагранжа),
2. $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ (случай Эйлера),
3. $J_1 = J_2 = J_3$ (тогда любая ось является главной осью инерции и получаем частный вариант для случая Лагранжа),
- 4.а. $X_2 = X_3 = 0$, $J_1 = J_2 = 9/8J_3$,
- 4.б. $X_2 = X_3 = 0$, $J_1 = J_2 = 5/8J_3$.

Теорема 1 доказана.

5.4. Доказательство теоремы 2

Лемма 3 Пусть $J_1 = J_2$ и $X_3 = X_2 = 0$, тогда для того, чтобы система (2.1) была алгебраически вполне интегрируемой, необходимо: $J_3/J_1 = m/2$, $m \in \mathbb{N}$

Доказательство: Решение $M_3 = M_3(t), \gamma_1 = \gamma_1(t), \gamma_2 = \gamma_2(t)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{M}_3 = -X_1\gamma_2 + 0.5\gamma_1 M_3^2 \frac{\partial A_{33}}{\partial \gamma_2} \\ \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 A_{33} M_3 \\ \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1 A_{33} M_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

Введем возмущение: $m_{1,2} = M_{1,2}, m_3 = M_3 - M_3(t), n_{1,2} = \gamma_{1,2} - \gamma_{1,2}(t), n_3 = \gamma_3$.

Нормальное вариационное уравнение в возмущенных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = (A_{33} - A_{22} + \gamma_2 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3}) M_3 m_2 + (0.5\gamma_2 \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial \gamma_3^2} - 0.5 \frac{\partial A_{33}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3}) M_3^2 n_3 \\ \dot{m}_2 = (A_{11} - A_{33}) M_3 m_1 - \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3} M_3 m_2 + (-0.5\gamma_1 \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial \gamma_3^2} M_3^2 + X_1) n_3 \\ \dot{n}_3 = -\gamma_2 A_{11} m_1 + \gamma_1 A_{22} m_2 + \gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3} M_3 n_3 \\ m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + M_3 \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Перепишем (4.2) в виде одного дифференциального уравнения второго порядка, для этого продифференцируем \dot{n}_3 :

$$\begin{aligned} \ddot{n}_3 = & (-A_{11}^2 M_3^2 + A_{11} (0.5\gamma_2 \frac{\partial A_{33}}{\partial \gamma_2} M_3^2 - 0.5 \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial \gamma_3^2} M_3^2 + X_1 \gamma_1) + \frac{d(\gamma_1 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3} M_3)}{dt} + \\ & + (\frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3})^2 M_3^2 \gamma_1^2 + 2 \frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3} A_{11} M_3^2 \gamma_2) n_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сделаем замену времени: $z = \frac{\gamma_2}{1+\gamma_1}$.

Тогда $\gamma_1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \gamma_2 = \frac{2z}{1+z^2}, M_3 = \frac{-2\dot{z}}{A_{33}(1+z^2)}, \dot{z}^2 = \frac{(h-X_1+z^2(h+X_1))(1+z^2)A_{33}}{2}$.

Исходное уравнение имеет вид:

$$\ddot{n} + a_1 \dot{n} + a_0 n = 0.$$

После замены времени получаем:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{J_1}$$

$$A_{33} = \frac{(1+z^2)^2}{J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2}, \quad \frac{\partial A_{33}}{\partial \gamma_2} = \frac{-4X_1^2 z(1+z^2)^3}{(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)^2}$$

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial \gamma_3} = \frac{2X_1^2 z(1+z^2)}{J_1(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)}, \quad \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial \gamma_3^2} = \frac{8X_1^4 z^2(1+z^2)^2}{J_1(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)^2}$$

В итоге получаем уравнение (4.4):

$$n'' + b_1 n' + b_0 n = 0 \quad (4.4)$$

$$b_1 = \frac{\ddot{z} + a_1 \dot{z}}{\dot{z}^2} = \frac{z(h + X_1)}{(h + X_1)z^2 + h - X_1} + \frac{3z}{1+z^2} - \frac{2z(J_3(1+z^2) + 2X_1^2)}{J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2}$$

$$b_0 = \frac{a_0}{\dot{z}^2} = \frac{4(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)^2}{J_1^2(1+z^2)^6} + \frac{16X_1^2 z^2}{J_1(1+z^2)^4} - \frac{32X_1^2 z^2(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)}{J_1^2(1+z^2)^6} +$$

$$+ \frac{64X_1^4 z^4}{J_1^2(1+z^2)^6} - \frac{8X_1^2 z^2}{(1+z^2)^3 J_1} + \frac{4(1-z^2)X_1^2}{J_1(1+z^2)^3} - \frac{16X_1^2(1-z^2)z^2(J_3(1+z^2) + 2X_1^2)}{J_1(1+z^2)^3(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)} +$$

$$+ \frac{16X_1^4 z^2(1-z^2)^2}{J_1(1+z^2)^4(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)} + \frac{8X_1^3 z^2(1-z^2)}{J_1(1+z^2)^4(h - X_1 + z^2(h + X_1))} -$$

$$- \frac{2X_1(1-z^2)(J_3(1+z^2)^2 + 4X_1^2 z^2)}{J_1(1+z^2)^4(h - X_1 + z^2(h + X_1))}.$$

После замены $y = e^{\frac{1}{2} \int b_1(z) dz} n$ система (4.4) запишется в виде:

$$y'' = \left(\frac{b'_1}{2} + \frac{b_1^2}{4} - b_0 \right) y \quad (4.5)$$

Множество полюсов уравнения (4.5) состоит из полюсов второго порядка.

Бесконечность имеет четвертый порядок.

Коэффициенты b при этих полюсах равны:

$$z = \pm i, b = \frac{J_3^2}{J_1^2} + \frac{J_3}{2J_1} - \frac{3}{16},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{X_1 - h}{X_1 + h}}, b = \frac{-3}{16},$$

$$z = \pm i \left(\frac{X_1}{\sqrt{J_3}} \pm \sqrt{1 + \frac{X_1^2}{J_3}} \right), b = \frac{5}{16}.$$

Чтобы получить в этом случае утверждение леммы, воспользуемся условием целочисленности величины $1 + \sqrt{1 + 4b_i}$ (аналогично Лемме 2).

Лемма 3 доказана.

Поскольку дополнительные условия на отношение J_1/J_3 в случае $J_1 = J_2$, $X_2 = X_3 = 0$, полученные в Лемме 1 (Следствие 2) и Лемме 2, не выполняются одновременно, то утверждение Теоремы 2 непосредственно вытекает из Следствия 2 и Леммы 3. Теорема 2 *доказана.*

Заключение

- Дан топологический анализ динамики тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения на гладкой горизонтальной плоскости (аналог случая Лагранжа): построены бифуркационные диаграммы Смейла, описаны перестройки торов Лиувилля, построены топологические инварианты теории Фоменко.
- Получено необходимое условие существования дополнительного мероморфного интеграла уравнений движения тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости для случая эллипсоида с мало различающимися полуосями, центр масс которого совпадает с геометрическим центром.
- Получены необходимые условия существования дополнительного аналитического интеграла уравнений движения тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости для случая, когда главные центральные оси инерции эллипсоида сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности, а центр масс эллипсоида лежит в экваториальной плоскости.
- Получены необходимые и достаточные условия того, что система уравнений движения тяжелого неоднородного шара на гладкой горизонтальной плоскости является алгебраически полной интегрируемой системой.

Литература

- [1] *Аппель П.* Теоретическая механика, т.1,2, государственное издательство Физико-математической литературы, Москва, 1960
- [2] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики, Москва, Издательство "Наука", 1989
- [3] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Москва, МЦНМО, 2004
- [4] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические методы классической и небесной механики, Москва, Эдиториал УРСС, 2002
- [5] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы: геометрия, топология, классификация, Издательский дом "Удмурский Университет", 1999
- [8] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 384 стр.
- [7] *Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.)* Неголономные динамические системы, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002
- [8] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 384 стр.
- [9] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Современные методы теории интегрируемых систем, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003
- [10] *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. Москва, Мир, 1988

- [11] Брюно А.Д. Теория нормальных форм уравнений Эйлера-Пуассона// препринт N 100, Москва, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, 2005, 27 с.
- [12] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел, плоские периодические орбиты, Москва, Издательство Наука, 1990
- [13] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. Москва, Издательство Наука, 1988
- [14] Буров А.А., Карапетян А.В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости. ПММ том 49, вып. 3, 1985
- [15] Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1953
- [16] Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006. 316 с.
- [17] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей, Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2002, 559 с.
- [18] Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем, Москва, Издательство Наука, 1979

- [19] Докшевич А.И. Решение в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2004. 166 с.
- [20] Емельянов К.В., Цыгвинцев А.В. Показатели Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием, Матем. сб., 2000, том 191, номер 10, страницы 39–50
- [21] Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах, Функциональный анализ и его приложения, том 16(1982), N 3, с. 30-30
- [22] Зиглин С.Л. Зиглин С.Л. Об отсутствии вещественно-аналитического первого интеграла в некоторых задачах динамики. Функциональный анализ и его приложения., т. 31, № 1, с. 3-11 (1997).
- [23] Зиглин С.Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела, Труды ММО N 41(1980), с. 287-303
- [24] Ивочкин М.Ю. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости, ПММ том 75, вып. 5, 2009, 858-863
- [25] Ивочкин М.Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости, Матем. сб., 2008, 199:6, 85–104
- [26] Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений, Издательство Эдиториал УРСС, 1998
- [27] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела, Издательство МГУ, 1980

- [28] *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // Прикл. мат. и мех. 1978, т. 42, вып. 3, с. 400-406
- [29] *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Ижевск, Издательство УдГУ, 1995
- [30] *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи вращения динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой 1,2, Вестн. Моск Универс. сер.1 Матем. Мех. 1985, № 6, с. 78-81; № 1, с. 39-44
- [31] *Ляпунов А.И.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд-во Харьковского Мат. Об-ва, 1892, 250 с.
- [32] *Маркеев А.Т.* Теоретическая механика, издательство РХД, 2001
- [33] *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, т. 12, с. 3-52
- [34] *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005
- [35] *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с.3-49
- [36] *Оден М.* Вращающиеся волчки. Курс интегрируемых систем, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999
- [37] *Ошемков А.А.* Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1993, вып. 25, часть 2, М. МГУ с.23-109.

- [38] *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002, 237 стр.
- [39] *Пуанкаре А.* Избранные труды, том 1, Издательство Наука, 1971
- [40] *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Интегрируемые системы, теоретико-групповой подход, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003
- [41] *Садэтов С.Т.* О резонансах на показатели Ковалевской, Матем. заметки, 54:4 (1993), 152–153
- [42] *Садэтов С.Т.* Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа //Вестник Московского университета, Сер. матем., механ. — 1990, № 3, 56-62
- [43] *Сальникова Т.В.* Неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа, //Вестник Московского университета, Сер. матем., механ. — 1985, № 4, 62-66
- [44] *Смейл С.* Топология и механика, //УМН, т. 15, №2, 1972, с. 77-125
- [45] *Соколов В.В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа, ТМФ, 2001, том 129, номер 1, страницы 31–37
- [46] *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, Издательство УРСС, Москва, 2001
- [47] *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, Вестник МГУ. Сер. матем., механ, 1974, №6.
- [48] *Трещев Д.В.* Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем, Издательство Фазис, Москва, 1998

- [49] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений, Издательство Факториал, Издательство УдГУ, 1995
- [50] Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика, издательство УРСС, 2004
- [51] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н Курс современного анализа, издательство УРСС, 2007
- [52] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия, методы и приложения, Издательство Московского Университета, 1988.
- [53] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Известия АН СССР, т.54, N 3, с.546-575.
- [54] Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела, Ленинград, издательство Ленинградского Университета, 1988
- [55] Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа, Издательство МЦНМО, Москва, 2008
- [56] Abraham R., Marsden J.E. Foundations of mechnics, Second Edition, Addison-Wesley, 1978
- [57] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis and application, Second Edition, Applied mathematical science, vol.75, Springer-Verlag, New York, 1988
- [58] Adler M.P., van Moerbeke P Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves and linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, Adv.Math., 1989, v.30, pp.267-379

- [59] *Baider A., Churchill R.C., Rod D.L., Singer M.F.* On the infinitesimal geometry of integrable systems, Fields Institute Communications Volume 7, 1990
- [60] *Boucher D., Weil J.-A.* Application of J.-J. Morales and J.P. Ramis theorem to test the non-complete integrability of the planar three body problem, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol.3, de Gruyter, Berlin, 2003
- [61] *Churchill R.C., Rod D.L., Singer M.F.* Group-theoretic obstructions to the integrability of hamiltonian systems, Ergodic Theory Dynam. Systems, (15), 1995, № 1, 15-48
- [62] *Dullin H.R., Tsygvintsev A.V.* On the analytic non-integrability of the Rattleback problem, Annales de la faculte des sciences de Toulouse, Vol. XVII, n. 3, pp. 495-517, 2008
- [63] *Goriely A.* A brief history of Kovalevskaya exponents and modern developments, 2000 Regular and Chaotic Dynamics.
- [64] *Goriely A.* Integrability, partial integrability and nonintegrability for systems of ordinary differential equations, J. Math. Phys. 1996. 37 (1996) 1871-1893.
- [65] *Goriely A., Tabor M.* How to compute the Melnikov vector?, 1994 in Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC'94, ACM Press, pp. 205-210.
- [66] *Goriely A., Tabor M.* The Singularity analysis for nearly integrable systems: Homoclinic intersections and local multivaluedness, Physica D. 85 (1995) 93-125.
- [67] *Hille E.* Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, A Wiley-Interscience Publication, 1976

- [68] *Kimura T.* On Riemann's Equations which are Solvable by Quadratures, *j.Funkcialaj Ekvacioj*, 12(1969), 269-281
- [69] *Kovacic J.J.* An algorithm for solving second order linear homoheneous differential equations, *j.Symbolic.Comput.*,2(1):3-43,1986
- [70] *Landsman N. P., Pflaum M., Schlichenmaier M.* Quantization of singular symplectic quotients, Birkhauser, 2001, p.318
- [71] *Lerman L. M., Shilnikov L. P.* Homoclinical structures in nonautonomous systems: nonautonomous chaos. *Chaos* 2 (1992), no. 3, 447–454
- [72] *Morales-Ruiz J.J.* Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems, Birkhauser, 1999, p.184
- [73] *Morales-Ruiz J.J.* A note on a connection between the Poincare-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiod Theory, 2002
- [74] *Morales-Ruiz J.J., Peris J.M.* On a galoisian approach to the splitting of separatrices, *Annales de la faculte des science de Toulouse 6 serie*, tome 8, n 1, 1999, p.125-141
- [75] *Morales-Ruiz J.J., Ramis J.-P.* Galosian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods Apl. Anal.* (8) 2001, № 1, p.113-120
- [76] *Morales-Ruiz J.J., Simon S.* On the meromorphic non-integrability of some N-body problems, 1999, p.184
- [77] *Morales-Ruiz J.J., Ramis J.-P., Simon S.* Integrability of Hamiltonian systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations, *Annales Ec. Norm. Sup.* 40 (2007), № 6, 845-884
- [78] *Maciejewski A., Przybylska M.* Differential Galois Approach to the Non-integrability of heavy top problem, *Annales de la Faculte de Science*, 2004

- [79] *Maciejewski A., Przybylska M.* Non-integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields , *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 87, n.4, 2004, p.317-351
- [80] *Maciejewski A., Przybylska M., Stachowiak T., Szydłowski M.* Global integrability of cosmological scalar fields , *J. Phys. A: Math. Theor.* 41 465101 (26pp), 2008
- [81] *Maciejewski A., Przybylska M., Weil J.-A.* Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem , 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 2579-2597
- [82] *Ritt J.F.* *Differential Algebra*, New York: Dover Publication, 1950
- [83] *Salnikova T.V.* On integrability of the motion of an axisymmetric rigid body, 2001 *J. Phys. A: Math.Gen.* 34, 2179-2184
- [84] *Singer M.F., M. van der Put* *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, Berlin, 2003, 438
- [85] *Singer M.F., Ulmer F.* Necessary conditions for Liouvillian solutions of third order linear differential equations, vol. 6, № 1, 1995
- [86] *Singer M.F., Ulmer F.* Galois groups of Second and Third Order Linear Differential Equations, *J. Symbolic Computation*, vol. 11, № 1-000, 1997
- [87] *Smith C.J.* A discussion and implementation of Kovacic's algorithm for ordinary differential equations, University of Waterloo Computer Science Dept. Research Report CS-84-35, 1984
- [88] *Tsygvintsev A.V.* Non-existence of new meromorphic first integrals in the planar three-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 86 (2003), no. 3, 237-247

- [89] *Tsygvintsev A.V.* On some exceptional cases in the integrability of the three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 99, No. 1, 237-247, 2007
- [90] *Tsygvintsev A.V.* The meromorphic non-integrability of the three-body problem, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik de Gruyter (Crelle's journal)*, N 537, 2001, 127-149
- [91] *Yoshida H.* Necessary conditions for the existence of algebraic first integrals. Pt 1. Kovalevski exponents // *Celest. Mech.* 1983. Vol.31. N.4. P.363-379
- [92] *Zoladek H.* The monodromy group, Birkhauser Verlag, 2000