МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Иванова Татьяна Алексеевна

УДК 514.765.2 + 517.913 + 517.958

Автодуальные связности Янга-Миллса и некоторые интегрируемые системы

01.01.04. - геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доцент В.В.Трофимов

Москва - 1992

Оглавление

Введение

Вариационные задачи - один из наиболее важных классов математических задач, имеющих непосредственное приложение к различным областям знания. В последнее время был достигнут значительный прогресс в изучении многомерных вариационных задач, связанных с функционалами многомерного риманого объема, с функционалами действия типа функционала Дирихле (см., например, [1],[2],[3] и ссылки там), с функционалом Янга-Миллса для формы кривизны F связности A в главном G-расслоении над четырехмерным римановым многообразием M ([4],[5],[6],[7]). Современный математический аппарат многомерных вариационных задач включает в себя мощные методы алгебраической топологии, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории групп и алгебр Ли. Геометрические методы построения многомерных экстремалей, методы вычисления топологических свойств экстремалей и их явного построения для задач типа Плато (минимизация многомерного функционала объема) детально разработаны А.Т.Фоменко и его учениками [1-3]. Глубокие связи качественной картины поведения функционала Дирихле с топологическими свойствами многообразий раскрыты в [8] (см. также [3]).

Функционал Янга-Миллса привлек к себе особенно пристальное внимание математиков после того, как в 1983 году Саймон Дональдсон доказал [9] несглаживаемость некоторых четырехмерных топологических многообразий, изучая пространство решений уравнений Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала Янга-Миллса, называемых уравнениями Янга-Миллса (см. также [7]). Теорема Дональдсона показывает, что гладкие структуры в размерности 4 нельзя описать в терминах характеристических классов. Теорема доказывается путем изучения решений нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, решения которой дают абсолютный минимум функционала Янга-Миллса с $G = SU(2)$ и образуют подмножество множества решений уравнений Янга-Миллса. Такая система была введена в работе [10] и называется уравнениями автодуальности или автодуальными уравнениями Янга-Миллса (см. также [11],[5],[7]).

Не меньший интерес представляют уравнения Янга-Миллса в сочетании с "внешними полями материи" (уравнения Янга-Миллса-Хиггса) [6,12]. Они привлекательны не только физической мотивировкой [12], но и богатым геометрическим и топологическим содержанием (см. [13], [6]).

Пространства решений автодуальных уравнений Янга-Миллса и Янга-Миллса-Хиггса разбиваются на классы относительно некоторого естественного отношения эквивалентности; в результате получается так называемое пространство модулей [6,7,13]. Наряду с направлением, где исследуется топология четырехмерного риманова многообразия M путем изучения пространства модулей, по-прежнему представляет интерес построение нетривиальных решений уравнений Янга-Миллса и Янга-Миллса-Хиггса (см., например, [12-15]).

Первые нетривиальные решения автодуальных уравнений Янга-Миллса в случае, когда $M = S^4$, $G = SU(2)$, так называемые инстантоны, были получены в 1975 г. А.А.Белавиным, А.М.Поляковым, А.С.Шварцем и Ю.С. Тюпкиным [10]. Более полное описание решений на $M = S^4$ в случае группы $G = SU(2)$ было получено в работе [16]. Представляют также интерес статические решения уравнений Янга-Миллса-Хиггса типа монополей, полная классификация которых на R^3 для калибровочной группы $G = SU(n)$ приводится в работе [17]. Важную роль при нахождении решений указанных уравнений играет требование инвариантности полей относительно той или иной группы симметрий. Обсуждение условий симметрии полей можно найти , например, в [18], [19].

В последнее время немало работ было посвящено построению автодуальных решений уравнений Янга-Миллса в тривиальном главном G-расслоении над R^d ($d \geq 4$)(см. [20-31] и ссылки там).

Известны анзацы ($\equiv$ подстановки для компонент A_μ связности A), сводящие уравнения автодуальности в R^4 и $R^{2,2}$ к уравнению Кортевега-де Фриза, нелинейному уравнению Шредингера [32], к уравнениям sin-*Gordon*, *sh-Gordon*, Лиувилля [33,5,18], к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды (см., например, [18],[34]), Эйлера [35], обобщенного волчка Ковалевской [36], к уравнениям модели N-волн [37]. Известно, что многие интегрируемые уравнения в пространствах $R^{2,0}$ и $R^{1,1}$ можно вложить в уравнения автодуальности в R^4 и $R^{2,2}$. Соответственно, каждое решение интегрируемых нелинейных уравнений в $d = 2$ дает решение $d = 4$ уравнений Янга-Миллса или Янга-Миллса-Хиггса. Наложение условий симметрии на калибровочные поля также редуцирует уравнения автодуальности к интегрируемым системам. Так, условие цилиндрической симметрии полей, например, редуцирует к уравнениям двумеризованной цепочки Тоды [18], условие инвариантности полей относительно сдвигов вдоль одной, двух и трех координат редуцирует уравнения автодуальности в R^4 к уравнениям Богомольного, двумерной киральной модели, к уравнениям Нама, а уравнения автодуальности в $R^{2,2}$ — к уравнениям трехмерной киральной модели, к уравнениям двумерных главных киральных моделей в $R^{2,0}$ и $R^{1,1}$, к модифицированным уравнениям Нама соответственно. Это также дает большой запас решений $d = 4$ уравнений Янга-Миллса и Янга-Миллса-Хиггса.

Отметим, что в отличие от $d = 4$, явных решений уравнений ЯнгаМиллса в R^d с $d > 4$ к настоящему моменту известно очень мало. Это решение в R^8 с калибровочной группой $SO(8)$ [22,23], решение в R^7 с калибровочной группой $SO(7)$ [38] и решение в R^8 с калибровочной группой $SU(2)$ [20].

Цель нашей работы — описание новых случаев редукции уравнений автодуальности для полей Янга-Миллса в $d \geq 4$ к интегрируемым уравнениям в $d = 1$ и получение классов точных решений уравнений в R^d ($d \geq 4$) с произвольной калибровочной группой.

Перейдем теперь к краткому изложению содержания диссертации.

В первой главе приводятся определения и обозначения, используемые в работе: вводятся понятия главного G-расслоения над многообразием M, 1-формы связности A в главном G-расслоении над многообразием M (локально $A = A_\mu(x)dx^\mu$, $x \in U_\alpha \subset$ M), 2-формы кривизны F связности A (локально $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])dx^\mu \wedge dx^\nu$). Здесь же выводятся тождества Бьянки для тензора кривизны и уравнения экстремалей для функционала Янга-Миллса (т.е. уравнения Янга-Миллса)(см.[39],[40]). Мы рассматриваем M $= R^d$.Связности Янга-Миллса определяются как решения уравнений Янга-Миллса в R^d с произвольной калибровочной группой G. Уравнения автодуальности вводятся как линейные уравнения на тензор кривизны связности в тривиальном главном G-расслоении над R^d [21], решения которых в силу тождеств Бьянки образуют подмножество множества решений уравнений Янга-Миллса в R^d. В случае $d = 4$ уравнения автодуальности, определенные таким образом, совпадают с уравнениями, введенными в [10].

Вторая глава содержит подробное описание моделей, к уравнениям которых приводят $d = 4$ уравнения автодуальности при размерной редукции. Этот материал можно найти в современной монографической литературе: [6], [12], [13] и в статьях [27], [28], [42]-[47], например.

На основании представления нулевой кривизны со спектральным параметром (см.[48]) для уравнений автодуальности в $R^{2,2}$ приводится ряд анзацев, редуцирующий эти уравнения к интегрируемым уравнениям в $d = 2$: к уравнению модели N-волн [37], уравнению Буссинеска [49], а также к динамическим системам: к алгебраическим аналогам системы Вольтерра и к уравнению Эйлера-Арнольда [35].

Описана редукция уравнений Нама — уравнений автодуальности для компонент связности, зависящих от одной переменной — к уравнениям цепочки Тоды (см., например, [34]), а также модифицированных уравнений Нама — к уравнениям цепочки Тоды [34] и к обобщенным уравнениям волчка Ковалевской [36].

В последнем параграфе второй главы приводится обобщение Уорда [34] уравнений Нама. Таким образом, вторая глава представляет собой описание результатов, уже полученных в данной области, которые автор обобщает, дополняет или на которые в последующих главах существенно опирается.

В первом параграфе третьей главы (п.1.3) доказывается Теорема 1 о редукции уравнений автодуальности в R^4 для произвольной калибровочной группы G (G — полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}$) к уравнениям Нама на множестве связностей специального вида [24], [25]

Теорема 1. Любое решение $T_a(\tau)$ уравнений Нама

$$\epsilon_{abc}\dot{T}_c = [T_a, T_b] + \epsilon_{abc}[T_4, T_c]$$

на $\mathcal{G}$-значные функции $T_a(\tau)$, $T_4(\tau)$, $\dot{T}_c \equiv dT_c/d\tau$ ($a, b, c = 1, 2, 3$) дает решение вида

$$A_\mu(x) = -2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu T_a(\tau) - 2x_\mu T_4(\tau)$$

с $\tau = x_\mu x_\mu$ ($\mu, \nu, \ldots = 1, \ldots, 4$) уравнений автодуальности

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{\mu\nu}$$

модели Янга-Миллса в R^4 с произвольной калибровочной группой G. Здесь $\eta^a_{\mu\nu}$ - постоянные тензоры т'Хофта: $\eta^a_{bc} = \epsilon^a_{bc}, \eta^a_{\mu 4} = -\eta^a_{4\mu} = \delta^a_\mu$.

В п.2.1 третьей главы формулируется Следствие Теоремы 1:

Следствие. Для связностей вида

$$A^a_\mu(x) = -2\eta^b_{\mu\nu} x_\nu T^a_b(\tau),$$

где

$$T^a_b(\tau) = 0 \text{ при } a \neq b,$$

$$T^1_1(\tau) = \alpha_1\varphi_1(\tau),\ T^2_2(\tau) = \alpha_2\varphi_2(\tau),\ T^3_3(\tau) = \alpha_3\varphi_3(\tau),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые вещественные параметры, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — вещественные функции от $\tau = x_\mu x_\mu$, уравнения автодуальности $SU(2)$-модели Янга-Миллса в R^4 совпадают с уравнениями Эйлера на пространстве $sl^*(2, R)$.

Далее строится автодуальное решение $SU(2)$-модели Янга-Миллса.

Редукция $SU(n)$-уравнений Нама к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды на $sl(n, R)$ [34] позволяет строить класс точных автодуальных решений $SU(n)$-модели Янга-Миллса (см. п.2.6. главы III). В п.2.7 главы III выписывается явный вид решения уравнений автодуальности с $G = SU(3)$.

Редукция уравнений автодуальности в R^4 к уравнениям Богомольного в R^3 позволяет сформулировать Утверждение 1 (см. п.2.2 главы III):

Утверждение 1. Любое решение $T_\mu(\tau)$ уравнений Нама дает решение вида

$$A_a = 2\epsilon_{abc}\frac{x_c}{(x_q x_q)^{3/2}}T_b(\tau) + 2\frac{(x_a}{(x_q x_q)^{3/2}}T_4(\tau),$$

$$\chi = -2\frac{x_a}{(x_q x_q)^{3/2}}T_a(\tau)$$

с $\tau = 2/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ уравнений Богомольного

$$F_{ab} = \epsilon_{abc} D_c \chi$$

в R^3 с произвольной калибровочной группой G.

В п.2.3 главы III приводится решение $SU(2)$-уравнений Богомольного, т.е. статическое решение модели Джорджи-Глэшоу [28]. Для $G = SU(n)$ класс точных решений уравнений Богомольного указанного в Утверждении 1 вида можно получить, используя редукцию уравнений Нама к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды (см.п.2.6 главы III).

Редукция уравнений автодуальности в R^4 к уравнениям G^C/G киральной модели в R^2 приводит к Утверждению 2 (см. п.2.4 гл.III):

Утверждение 2 [24,25]. Существует взаимно-однозначное соответ- ствие между сферически-симметричными решениями уравнений G^C/G киральной модели в R^2

$$F_{\alpha\beta} = -[\mathrm{B}_\alpha, \mathrm{B}_\beta], \quad D_{[\alpha}\mathrm{B}_{\beta]} = 0, \quad D_\alpha \mathrm{B}_\alpha = 0$$

($\alpha,\beta,...=1,2$) и решениями уравнений Нама с $\tau = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Далее рассматриваются уравнения автодуальности в псевдоевклидовом пространстве $R^{2,2}$ с метрикой $g_{\mu\nu} = diag(1, 1, -1, -1)$. В §3 третьей главы вводится анзац для компонент связности, аналогичный анзацу Теоремы 1 из §1 третьей главы и формулируется

Теорема 2. Любое решение $T_a(\tau)$ модифицированных уравнений Нама

$$f^c_{ab}\dot{T}_c = [T_a, T_b] + f^c_{ab}[T_4, T_c]$$

на $\mathcal{G}$-значные функции $T_a(\tau)$, $T_4(\tau)$, $\dot{T}_c \equiv dT_c/d\tau$ $(a, b, c = 1, 2, 3)$ дает решение вида

$$A_\mu(x) = -2\bar{\eta}^a_{\mu\nu} x^\nu T_a(\tau) - 2x_\mu T_4(\tau)$$

с $\tau = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ $(\mu,\nu,... = 1,...,4)$ уравнений автодуальности

$$F_{12} = -F_{34}, \quad F_{13} = -F_{24}, \quad F_{14} = F_{23}$$

модели Янга-Миллса в $R^{2,2}$ с произвольной калибровочной группой G. Здесь $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ - аналоги тензоров т'Хофта в $R^{2,2}$, f^a_{bc} – структурные константы алгебры $sl(2,R)$: $f^3_{12} = -f^2_{31} = -f^1_{23} = -1$; $\bar{\eta}^a_{bc} = -f^a_{bc}, \bar{\eta}^a_{\mu 4} = -\bar{\eta}^a_{4\mu} = \delta^a_\mu$.

С помощью редукции уравнений автодуальности в $R^{2,2}$ к уравнениям модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$, описанной в п.2.2 второй главы, получаем следующее утверждение

Утверждение 3. Любое решение $T_\mu(\tau)$ модифицированных уравнений Нама даст решение вида

$$A_a = -2f^b_{ac}\frac{x^c}{(x_q x^q)^{3/2}}T_b(\tau) - 2\frac{x_a}{(x_q x^q)^{3/2}}T_4(\tau),$$

$$\chi = 2\frac{x^a}{(x_q x^q)^{3/2}}T_a(\tau)$$

с $\tau = 2/(x_1^2+x_2^2-x_3^2)^{1/2}$ уравнений модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$ с произвольной калибровочной группой G.

Редукция уравнений автодуальности в $R^{2,2}$ к уравнениям двумерной главной киральной модели в $R^{2,0}$ и в $R^{1,1}$, описанная в п.2.3 §2 главы II, позволяет получить

Утверждение 4 [24,25]. Каждому решению $T_\mu(\tau)$ с $\tau = \frac{1}{2}\ln x_\sigma x^\sigma$ модифицированных уравнений Нама можно взаимно-однозначно сопоставить сферически-симметричное решение уравнений главной киральной модели в $R^{2,0}$ или в $R^{1,1}$ следующего вида:

$$A_\alpha = -2\epsilon_{\alpha\beta}\frac{x^\beta}{x_\sigma x^\sigma}T_3(\tau) + \frac{x_\alpha}{x_\sigma x^\sigma}T_4(\tau),$$

$$B_\alpha = \frac{2}{x_\sigma x^\sigma}\left[\epsilon_{\alpha\beta}x^\beta T_1(\tau) - x_\alpha T_2(\tau)\right].$$

В свою очередь, редукция модифицированных уравнений Нама к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды на алгебре Ли $\mathcal{G}$ позволяет выписать классы точных решений уравнений модели Янга-Миллса в $R^{2,2}$, модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$, двумерных главных киральных моделей в $R^{2,0}$ и $R^{1,1}$ указанного в Теореме 2 и Утверждениях 3,4 вида.

Кроме уравнений цепочки Тоды и уравнений обобщенного волчка Ковалевской [36], модифицированные уравнения Нама могут быть редуцированы к уравнениям гамильтоновых систем с потенциалом четвертой степени (п.3.5 §3 главы III).

В заключительной четвертой главе рассматриваются уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в R^8 и в R^d вида $\mathcal{H} \oplus R$, где $\mathcal{H}$ -простая компактная алгебра Ли, а также уравнения Янга-Миллса в R^{pq}.

В §1 четвертой главы строится анзац, редуцирующий уравнения автодуальности в R^8 к обобщенным уравнениям Нама (уравнениям Уорда) на алгебре $\mathcal{H} = so(8)$

$$S^A_{BC}\dot{T}_A = [T_B, T_C],$$

где S^A_{BC} - структурные константы некоторой компактной простой алгебры Ли $\mathcal{H}$, и доказывается Теорема 3 [26]:

Теорема 3 [26]. Любое решение $T_{cd}(u)$ уравнений Уорда

$$S_{abcdmn}\dot{T}_{mn} = [T_{ab}, T_{cd}],$$

где S_{abcdmn} - структурные константы алгебры Ли $so(8)$, на 28 элементов $T_{ab}(u)(a,b,c,... = 1,...,7$ и $T_{ab} = -T_{ba})$ из полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ дает решение уравнений автодуальности модели Янга-Миллса в R^8 следующего вида

$$A_a = -\frac{4}{3}Q_{abcd}T_{cd}(u)x_b$$

с $u = 1 + x_a x_a$. Определение тензора Q_{abcd} приводится в п.1.2 главы IV.

В §2 главы IV формулируется Теорема 4:

Теорема 4. Для $R^d = \mathcal{H} \oplus R$, где $\mathcal{H}$ — простая компактная алгебра Ли, уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в $R^d = \mathcal{H} \oplus R$ для $A_\mu = A_\mu(t)$, где $t \equiv x^d$, совпадают с уравнениями Уорда на алгебре Ли $\mathcal{H}$.

Последний параграф главы IV посвящен редукции уравнений Янга-Миллса в евклидовом пространстве R^{pq} к уравнениям Янга-Миллса в пространстве R^p:

Теорема 5. Любому решению A_μ уравнений Янга-Миллса в евклидовом пространстве R^p можно сопоставить решение

$$A_{(\mu i)} = A_\mu(X_\nu)\beta_i,$$

уравнений Янга-Миллса в пространстве R^{pq}. Здесь $\mu, \nu, ... = 1, ..., p$; $i, j, ... = 1, ..., q$; $X_\mu = x_{\mu i}\beta_i$, $\beta_i = const$.

В п.3.3 последней главы приводятся примеры решений уравнений Янга-Миллса в пространствах R^{4q}, R^{8q}, построенные с помощью указанной выше редукции из автодуальных решений уравнений Янга- Миллса в пространствах R^4 и R^8 соответственно.

Результаты диссертации опубликованы в работах [24,25,26,27,28,29, 65].

Основные положения, выносимые на защиту, сводятся к следующему:

1) На множестве связностей специального вида уравнения автодуальности в R^4 и $R^{2,2}$ редуцированы к системам обыкновенных дифференциальных уравнений — к уравнениям Нама и к модифицированным уравнениям Нама соответственно, что позволяет получить классы точных автодуальных решений модели Янга-Миллса в R^4 и $R^{2,2}$ для произвольной калибровочной группы G. Показано, что модифицированные уравнения Нама могут быть редуцированы к гамильтоновым системам, связанным с эрмитовыми симметрическими пространствами. Выписаны классы точных решений для уравнений, получаемых из уравнений автодуальности в R^4 и $R^{2,2}$ размерной редукцией к трем и двум координатам.

2) Уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в R^8 редуцированы к обобщенным уравнениям Нама (уравнениям Уорда) на алгебре Ли $\mathcal{H} = so(8)$. Такая редукция дает возможность строить автодуальные решения модели Янга-Миллса в R^8 с произвольной калибровочной группой , используя решения уравнений Уорда.

3) Введены уравнения автодуальности для калибровочных полей в пространстве $R^d = \mathcal{H} \oplus R$, где $\mathcal{H}$ — простая компактная алгебра Ли. Показано, что уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в R^d с произвольной калибровочной группой G для связностей, зависящих от x^d, совпадают с уравнениями Уорда на $\mathcal{H}$. Это позволяет построить космологические решения модели Янга-Миллса в R^d=$\mathcal{H} \oplus R$, используя решения уравнений Уорда.

4) Введен анзац для компонент связности, позволяющий редуцировать уравнения Янга-Миллса в R^{pq} $(p, q = 2, 3, ...)$ к уравнениям Янга-Миллса в R^p. Это дает возможность строить новые классы решений уравнений Янга-Миллса в R^{pq} из решений уравнений Янга-Миллса в R^p.

ГЛАВА I. Связности, модель Янга-Миллса и автодуальность

§1. Главное расслоение. Связность в расслоении

1.1. Главное расслоенное пространство. Пусть P - некоторое многообразие, G - группа Ли. Дифференцируемое главное расслоение или главное расслоенное пространство над М с группой Ли G состоит из многообразия P и действия группы G на P, удовлетворяющего условиям [39]:

А. Группа G свободно действует на P справа: отображение $P \times G \to P$ означает, что $P \times G \ni (u,a) \to ua \in P$.

В. M - фактор-пространство многообразия P по соотношению эквивалентности, порождаемому действием группы Ли G, $\mathrm{M} = P/G$, и каноническая проекция $\pi: P \to \mathrm{M}$ дифференцируема.

С. Многообразие P локально тривиально, т.е. каждая точка $x \in \mathrm{M}$ обладает окрестностью U такой, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению $U \times G$ в следующем смысле: существует диффеоморфизм ψ: $\pi^{-1}(U) \to U \times G$, такой, что $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, где φ - отображение $\pi^{-1}(U)$ в группу G, удовлетворяющее условию $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ для всех $u \in \pi^{-1}(U)$ и $a \in$G.

Главное расслоенное пространство обозначается через $P(M,G)$. Многообразие P называется пространством расслоения, M - базовым пространством, G - структурной группой.

Для любого $x \in \mathrm{M}\pi^{-1}(x)$ есть замкнутое многообразие в P, называемое слоем над x. Каждый слой диффеоморфен группе Ли G, рассматриваемой как многообразие.

1.2. Ассоциированное расслоение. Пусть $P(M,G)$ - главное расслоение, а N - многообразие, на котором G действует слева: $G \times N \ni (a,\xi) \to a\xi \in \mathrm{N}$. На произведении многообразий $P \times N$ определим действие G справа так: элемент $a \in G$ отображает $(u,\xi) \in P \times G$ в $(ua, a^{-1}\xi) \in P\times\mathrm{N}$. Факторпространство для $P \times N$ относительно такого группового действия обозначается $E = P\times_G\mathrm{N}$. Отображение $P \times N \to M$, переводящее (u,ξ) в $\pi(u)$, индуцирует отображение π_E , называемое проекцией, из E на M. Для любого $x \in$М множество $\pi^{-1}(x)$ называется слоем в E над x. Действие G на $\pi^{-1}(U)\times N$ задается как $(x,a,\xi) \to (x, ab, b^{-1}\xi)$ для $(x,a,\xi) \in U\times G\times N$ и $b \in G$. Отсюда следует, что изоморфизм $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$ индуцирует изоморфизм $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times N$. Введем дифференцируемую структуру в E требованием, что $\pi_E^{-1}(U)$ есть открытое многообразие в Е, диффеоморфное с $U \times N$ относительно изоморфизма $\pi_E^{-1}(U) \approx U\times\mathrm{N}$. Тогда проекция π_E есть дифференцируемое отображение E на М. E, или точнее $E(M,N,G,P)$, назовем расслоением над базой M со стандартным слоем N и структурной группой G, ассоциированным с главным расслоением $P(M,G)$.

1.3. Сечения расслоения. Глобальной секущей поверхностью главного расслоения $P(M,G)$ называется такое отображение σ базового пространства М на полное пространство Р, что $\pi(\sigma(x)) = x$ для любого $x \in$М. Локальное сечение над $U_\alpha \subset$ М - это такое отображение σ_α: $U_\alpha \to$ Р, что $\pi(\sigma_\alpha(x)) = x$ для любого $x \in U_\alpha$.

1.4. Связность в расслоении. Пусть $T_u(\mathrm{P})$ - касательное пространство к Р в точке u, G_u - подпространство из $T_u(\mathrm{P})$, состоящее из векторов, касательных к слою через u. Связность Г в главном расслоении Р - это такое сопоставление подпространства Q_u из $T_u(\mathrm{P})$ каждой точке $u \in$Р, что

а) $T_u(\mathrm{P}) = G_u \oplus Q_u$,

б) $Q_{ua} = (R_a)_* Q_u$ для любого $u \in P$ и $a \in G$, где R_a - преобразование в P, индуцированное элементом $a \in G$, $R_a u = ua$;

в) Q зависит дифференцируемо от u. G_u называется вертикальным подпространством в $T_u(P)$, а Q_u - горизонтальным подпространством в $\mathrm{T}_u(P)$.

1.5. Фундаментальное векторное поле. Векторное поле X на многообразии P есть сопоставление вектора $X_u \in T_u(P)$ каждой точке $u \in P$. Любому вектору $\mathcal{A} \in T_e(G) \equiv \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ - алгебра Ли группы Ли G) можно сопоставить векторное поле $\Sigma(\mathcal{A})$ на P следующим образом. Действие однопараметрической подгруппы $a_t = \exp(t\mathcal{A})$ позволяет через любую точку $u \in P$ провести кривую $u_t = R_{\exp(t\mathcal{A})}(u) = u\exp(t\mathcal{A})$. Тогда для любой вещественной функции f на P

$$\frac{d}{dt}f(u_t)\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}u_t^i\mid_{t=0}\frac{\partial}{\partial u_t^i}f(u_t)\mid_{t=0} = (u\mathcal{A})^i\frac{\partial}{\partial u_t^i}f(u_t)\mid_{t=0} = \Sigma(\mathcal{A})_u f,$$

где $\Sigma(\mathcal{A})_u = u\mathcal{A}$. Очевидно, $\Sigma(\mathcal{A})_u \in T_u(P)$. Поскольку действие G отображает каждый слой в себя, то $\Sigma(\mathcal{A})_u$ касается слоя в каждой точке $u \in$Р. Так как G действует свободно на Р, т.е.

$R_a u = u \iff a$=e, то $\Sigma(\mathcal{A}) \neq 0$ на P, если $\mathcal{A} \neq 0$. В силу того, что размерность каждого слоя равна размерности $\mathcal{G}$, то отображение Σ: $\mathcal{A} \to \Sigma(\mathcal{A})$ из $\mathcal{G}$ в $T_u(P)$ есть линейный изоморфизм $\mathcal{G}$ на касательное пространство в т.u к слою через т.u. Для каждого $\mathcal{A}$ $\Sigma(\mathcal{A})$ называется фундаментальным векторным полем на P.

1.6. Форма связности. Расщепление касательного к P пространства на горизонтальное и вертикальное подпространства можно реализовать с помощью формы связности ω . Для каждого $X \in T_u(P)$ значение $\omega(X)$ формы связности на X определяется как единственное $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, такое, что $\Sigma(\mathcal{A})_u$ равно вертикальной компоненте для X. То есть форма связности - это 1-форма ω со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$, обладающая следующими свойствами:

а) $\omega(\Sigma(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$;

б) $((R_a)^*\omega)(X) = \mathrm{Ad}_a - 1\omega(\mathcal{A})$;

в) X_u горизонтально $\iff \omega(X_u) = 0$.

Определим локальную форму на $U_\alpha \in$ M для любого α как $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$, где σ_α - локальное сечение: $U_\alpha \to$ P. Считаем, что M – d-мерное многообразие с локальными координатами x^μ ($\mu = 1,...,d$) в окрестности U_α , тогда ω_α может быть записана через компоненты $A_{\mu\alpha}(x)$ - функции на базе со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$: $\omega_\alpha = \sum_\mu A_{\mu\alpha}(x)dx^\mu$.

В дальнейшем мы будем рассматривать $M = R^d$ и $P = R^d \times$G. Для такого P выбор глобального сечения σ задает систему координат в $P(R^d, G)$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие между спроектированными формами $A_\mu dx^\mu$ и формами связности ω.

§2. Форма кривизны

2.1. Ковариантная производная в расслоении. Поднятием $\tilde{}$X векторного поля X на многообразии M называется единственное горизонтальное поле на P, которое проектируется на X, т.е. $\pi_*(\tilde{X}_u) = X_{\pi(u)}$ для любого $u \in$P. Рассмотрим векторное поле $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, где x^μ - локальные координаты в $U_\alpha \subset$ M, тогда ∂_μ обладает поднятием $\tilde{\partial}_\mu$ в пространстве $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Если σ_α - секущая над U_α, тогда

$$\omega_\alpha(\partial_\mu) = (\sigma_\alpha^*\omega)(\partial_\mu) = \omega(\sigma_{\alpha *}\partial_\mu) = \omega(\Sigma(A_{\mu\alpha})) = A_{\mu\alpha}.$$

Следовательно, $\omega(\sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha}))=0$, и $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha})$ - горизонтальное поле, такое, что $\pi_*(\sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha})) = \partial_\mu$. Поэтому $\tilde{\partial}_\mu |_{u=\sigma_\alpha(x)} = \sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha})$.

Для $P(R^d, G)\sigma_\alpha = \sigma$. Точки над $\sigma_\alpha(x)$ имеют координаты (x, e), поэтому σ_α воспроизводит $U_\alpha = R^d$ в P. Следовательно, во всем $P(R^d, G)$ мы можем отождествить ∂_μ и $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu$. Опишем действие $\Sigma(A_\mu)$ в точке $u_0 = \sigma_\alpha(x) = \sigma(x) = (x, e)$. Для этого проведем в $P(R^d, G)$ кривую $u_t = u_0 \exp(tA_\mu) = (x, \exp(tA_\mu))$ и используем ее для вычисления производной по направлению

$$\frac{df}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{du_t^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_t^i}\Big|_{t=0} = A_\mu \frac{\partial f}{\partial u_t^2}\Big|_{t=0},$$

где $u_t^1 = x$, $u_t^2 = \exp(tA_\mu)$, т.е. $\Sigma(A_\mu) = (0, A_\mu)$. Таким образом, $\tilde{\partial}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ — поднятие поля ∂_μ в точку $\sigma(x)$ в главном расслоении $P(R^d, G)$. Ковариантной производной будем называть $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$. Действие операторов D_μ на векторы в присоединенном представлении группы G совпадает с действием операторов $D_\mu = \partial_\mu + adA_\mu$ (см.[40]).

2.2. 2-форма кривизны. Пусть $D_\mu = \partial_\mu + adA_\mu$. Вычислим

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + adA_\mu,\ \partial_\nu + adA_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu] + [\partial_\mu,\ A_\nu] + +[A_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

так как

$$[A_\nu, \partial_\mu]B(x) = A_\mu(\partial_\nu B) - \partial_\nu(A_\mu B) = -(\partial_\nu A_\mu)(B),$$
$$[\partial_\mu, A_\nu]B(x) = \partial_\mu(A_\nu B) - A_\nu(\partial_\mu B) = (\partial_\mu A_\nu)(B).$$

Форма $F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G называется формой кривизны связности A_μ [5].

2.3. Калибровочные преобразования. Если выбрать другую секущую $\sigma'(x) = \sigma(x)g(x), g(x) \in G$ в расслоении $P(R^d, G)$, то ковариантная производная изменится $D'_\mu = \partial_\mu - A'_\mu$, но т.к. $D'_\mu\sigma'(x) = (D_\mu\sigma)g(x)$, то можно получить формулу калибровочных преобразований компонент связности $A_\mu(x)$:

$$\partial_\mu(\sigma g) - \sigma g A'_\mu = (\partial_\mu\sigma - \sigma A_\mu)g, \quad \text{или} \quad (\partial_\mu\sigma)g + \sigma\partial_\mu g - \sigma g A'_\mu = (\partial_\mu\sigma)g - \sigma A_\mu g.$$

Приводя подобные члены и вынося σ за скобку, получаем

$$\sigma(\partial_\mu g - gA'_\mu + A_\mu g) = 0,$$

что эквивалентно

$$A'_\mu = g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g.$$

При этом величины $F_{\mu\nu}$ преобразуются следующим образом [5]:

$$F'_{\mu\nu} = g^{-1}F_{\mu\nu}g.$$

Замечание. Отношение эквивалентности на множестве связностей, которое устанавливается формулой калибровочных преобразований, уменьшает число независимых компонент 1-формы связности $\omega = A^a_\mu J_a dx^\mu$($J_a$ - генераторы группы Ли G, $a = 1,..., \mathrm{dimG}$, $\mu = 1,\ldots, \mathrm{dim}M$) с числа $\mathrm{dim}M \times \mathrm{dim}G$ до числа $(\mathrm{dim}M - 1)\times\mathrm{dim}G$.

2.4. Тождества Бьянки для 2-формы кривизны. Запишем форму кривизны F через форму связности $\omega = A_\mu dx^\mu$:

$$F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}dx^\mu\Lambda dx^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\Lambda dx^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu dx^\mu\Lambda dx^\nu + \partial_\nu A_\mu dx^\nu\Lambda dx^\mu +$$
$$+\frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]dx^\mu\Lambda dx^\nu = \partial_\mu A_\nu dx^\mu\Lambda dx^\nu + A_{[\mu}A_{\nu]}dx^\mu\Lambda dx^\nu = d\omega + \omega\Lambda\omega.$$

Для $X, Y \in T_u P$, $u \in P$, имеем [39]:

$$F(X,Y) = d\omega(X,Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)].$$

Считая, что $\omega(X) = A$, формально запишем

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A].$$

Вычислим ковариантный дифференциал $DF = D_{[\mu}F_{\nu\sigma]}dx^\mu\Lambda dx^\nu\Lambda dx^\sigma$:

$$DF = dF + [A, F] = d^2A + \frac{1}{2}d[A,A] + [A, dA + \frac{1}{2}[A,A]] =$$
$$= \frac{1}{2}[dA, A] - \frac{1}{2}[A, dA] + [A, dA] + \frac{1}{2}[A,[A,A]] = \frac{1}{2}[A^c J_c, [A^a J_a, A^b J_b]] = \frac{1}{2}[A^c J_c, A^a\Lambda A^b[J_a, J_b] =$$
$$= \frac{1}{2}[A^c J_c, A^a\Lambda A^b f^e_{ab} J_e] = \frac{1}{2}A^c\Lambda A^a\Lambda A^b f^e_{ab} f^d_{ce} J_d = \frac{1}{2}A^{[c}_\mu A^a_\nu A^{b]}_\sigma dx^\mu\Lambda dx^\nu\Lambda dx^\sigma f^e_{[ab}f^d_{c]e}J_d = 0,$$

так как $f^e_{[ab}f^d_{c]e} = 0$ - тождество Якоби для структурных констант f^e_{ab} группы Ли G. Здесь J_a - генераторы группы Ли G. Итак, получили $DF = 0$ или $D_{[\mu}F_{\nu\sigma]}=0$ - тождества Бьянки. Отметим, что квадратные скобки в индексах означают антисимметризацию по всем заключенным в них индексам.

§3. Модель Янга-Миллса в $\mathbf{R}^d$

3.1. Лагранжиан модели Янга-Миллса. Моделью Янга-Миллса в R^d с калибровочной группой G назовем модель с функционалом действия [5]:

$$S[A_\mu] = \int_{R^d} \mathrm{Sp}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^d x. \tag{1}$$

Гладкую функцию $L(A_\mu) = \mathrm{Sp} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ называют лагранжианом модели Янга-Миллса. Лагранжиан $L(A_\mu)$ инвариантен относительно калибровочных преобразований [5], [11].

3.2. Уравнения Янга-Миллса. Выведем уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала (1). Запишем $L(A_\mu)$ в виде:

$$L(A_\mu) = SpF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\lambda\sigma}g_{ab},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика в R^d, $g_{ab} = f^c_{ad}f^d_{bc}$ - метрика Киллинга-Картана на группе Ли G. Вычислим $\partial L/\partial A^e_\rho$ и $\partial L/\partial A^e_{\rho,\kappa}$, где $A_\rho = A^e_\rho J_e$ и $A^e_{\rho,\kappa} = \partial A^e_\rho/\partial x^\kappa$. Имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial A^e_\rho} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}\left\{\frac{\partial}{\partial A^e_\rho}F^a_{\mu\nu}\right\}F^b_{\lambda\sigma}g_{ab} = 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial A^e_\rho}\left\{f^a_{pq}A^p_\mu A^q_\nu\right\}F^b_{\lambda\sigma}g_{ab} =$$

$$= 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\left\{\delta^p_e\delta^\rho_\mu A^q_\nu + \delta^q_e\delta^\rho_\nu A^p_\mu\right\}F^b_{\lambda\sigma}f^a_{pq}g_{ab} = 4A^q_\mu F^{b\sigma\mu}f^a_{eq}g_{ab} = 4A^q_\mu F^{b\sigma\mu}f^p_{qb}g_{pe} = 4g_{pe}[A_\mu, F^{\sigma\mu}]^p;$$

$$\frac{\partial L}{\partial A^e_{\rho,\kappa}} = 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial A^e_{\rho,\kappa}}\left(A^a_{\mu,\nu} - A^a_{\nu,\mu}\right)F^b_{\lambda\sigma}g_{ab} = 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\left(\delta^\rho_\mu\delta^\kappa_\nu\delta^a_e - \delta^\rho_\nu\delta^\kappa_\mu\delta^a_e\right)F^b_{\lambda\sigma}g_{ab} = 4g^{\rho\lambda}g^{\kappa\sigma}F^b_{\lambda\sigma}g_{eb};$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial A^e_{\rho,\kappa}}\right)_{,\kappa} = 4g^{\rho\lambda}g^{\kappa\sigma}F^b_{\lambda\sigma,\kappa}g_{eb},$$

откуда получаем

$$D_\mu F^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}_{,\mu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \tag{2}$$

— уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала (1). Уравнения (2) называются уравнениями Янга-Миллса. Связность A_μ, удовлетворяющую (2), назовем Янг-Миллсовской связностью.

3.3. Автодуальные Янг-Миллсовские связности. Уравнениями (анти)автодуальности для модели Янга-Миллса (1) назовем следующие линейные уравнения на компоненты $F_{\mu\nu}$ 2-формы кривизны F:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \zeta F_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$ - некоторый полностью антисимметричный четырехиндексный тензор в R^d, ζ - отличная от нуля константа. Связности, кривизна которых удовлетворяет уравнениям (3), назовем (анти)-автодуальными связностями.

Лемма. Любая (анти)автодуальная связность является Янг-Миллсовской связностью и реализует экстремум действия (1).

Доказательство. Домножим тождества Бьянки $D_{[\sigma}F_{\mu\nu]}=0$ на $\zeta^{-1}\mathcal{E}_{\rho\sigma\mu\nu}$: $3D_\sigma(\zeta^{-1}\mathcal{E}_{\rho\sigma\mu\nu}F_{\mu\nu}) = 0$. Таким образом, если кривизна связности удовлетворяет уравнениям (3), то уравнения Янга-Миллса (2) следуют из тождеств Бьянки.

Замечание. Уравнения (3) для пространства R^d размерности $d = 4$ были введены в работе [10]. В случае $d > 4$ тензор $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$ не может быть инвариантным относительно преобразований группы вращений пространства R^d [21]. Полностью антисимметричные четырехиндексные тензоры можно ввести на пространствах R^d с некоторой дополнительной структурой, например: комплексной, кватернионной, октонионной, или какой-либо другой структурой на евклидовых пространствах, инвариантной относительно подгрупп $\mathrm{H} \subset SO(d)$ типа $U(n), Sp(n), Spin(7), \ldots$ соответственно. Уравнения (3) при этом будут инвариантны относительно подгруппы H в $SO(d)$ [20],[21] (см. также [41]).

ГЛАВА II. Размерная редукция уравнений автодуальности

§1. Размерная редукция уравнений автодуальности в $\mathbf{R}^4$

1.1. Модель Джорджи-Глэшоу. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $R^{1,3}$ метрикой $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1), \mu,\nu,\ldots=0,1,2,3$. Зафиксируем калибровочную группу $G=SU(2)$. Рассмотрим расслоение $AdP=E(R^{1,3},su(2),SU(2),P)$, ассоциированное с главным расслоением $P(R^{1,3}, SU(2))$, над базой $R^{1,3}$ со слоем - алгеброй Ли $su(2)$ и структурной группой $SU(2)$.

Сечения AdP-расслоения называются полями Хиггса $\chi(x)$. Над базой $R^{1,3}$ сечения $\chi(x)$ определены глобально и являются функциями на $R^{1,3}$ со значениями в алгебре Ли $su(2)$: $\chi(x)=\chi^a(x)\sigma_a/2i$, где $J_a=\sigma_a/2i$ - генераторы алгебры Ли $su(2)$, σ_a - матрицы Паули [5], a $=1,2,3$.

Моделью Джорджи-Глэшоу называется модель с функционалом действия (см., например, [12])

$$S[A_\mu]=-\int_{R^{1,3}}\{\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu\chi^a)(D_\nu\chi^a)+\frac{1}{4}\lambda(\chi^a\chi^a-l^2)^2\}d^4x \tag{4}$$

где λ, l - параметры, $F^a_{\mu\nu}$ - компоненты 2-формы кривизны $F=\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma_a}{2i}dx^\mu\wedge dx^\nu$ в AdP - расслоении.

Пределом Богомольного-Прасада-Зоммерфельда модели (4) называется модель (4) с $\lambda\to 0$ и функционалом действия [12,27,28]:

$$S[A_\mu]=-\int_{R^{1,3}}\{F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu\chi^a)(D_\nu\chi^a)\}d^4x \tag{5}$$

Рассмотрим статические конфигурации полей $A^a_\mu(x)$, $\chi^a(x)$:

$$\partial_0 A^a_\mu=0,\quad \partial_0\chi^a=0 \tag{6a}$$

с дополнительным условием:

$$A^a_0=0. \tag{6б}$$

Функционалом энергии полей χ^a, A^a_μ, удовлетворяющих (6), называется функционал [12]

$$E=\int_{R^3}\{\frac{1}{4}F^a_{ij}F^{aij}+\frac{1}{2}\delta^{ij}(D_i\chi^a)(D_j\chi^a)\}d^3x, \tag{7}$$

где $i,j=1,2,3$.

Для полей (6) уравнения Эйлера-Лагранжа модели (5) имеют вид [12]:

$$D_iF^a_{ij}=\epsilon^a_{bc}\chi^b(D_j\chi^c),\qquad D_iD^i\chi^a=0. \tag{8}$$

$SU(2)$-уравнениями Богомольного называются уравнения вида:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^a_{jk}=\pm D_i\chi^a. \tag{9}$$

Лемма [12]. Решения уравнений (9) удовлетворяют уравнениям (8) для полей (6) модели (5) и доставляют экстремум функционала энергии (7).

Доказательство аналогично доказательству леммы из п.I.3.3.

1.2. Редукция к уравнениям Богомольного. При размерной редукции d=n модели к d=m ($m<n$) модели в простейшем случае предполагается инвариантность полей относительно сдвигов по $n-m$ координатам, т.е. $\partial_pA_\mu(x)=0$, $\partial_p\chi(x)=0$ для моделей типа Янга-Миллса-Хиггса ($n-m+1\leq p\leq n, 1\leq\mu\leq n$). Для определения связности в этом случае вполне достаточно m компонент A_μ, остальные $n-m$ компонент связности для n-мерной модели, редуцированной к d=m, становятся дополнительными скалярными полями с точки зрения m измерений.

Рассмотрим $SU(2)$-модель Янга-Миллса (определение см. в п.3.1 главы I).

Утверждение (см., например, [12]). Функционал энергии (7) модели Джорджи-Глэшоу в пределе Богомольного-Прасада-Зоммерфельда совпадает с редуцированным к d=3 функционалом действия $SU(2)$-модели Янга-Миллса в R^4 при отождествлении $A_4\equiv\chi(x)$. Уравнения Янга-Миллса (2) при этом редуцируются к уравнениям (8), а уравнения (анти)автодуальности (3) с $\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma}=\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ и $\zeta=\pm2$ - к уравнениям Богомольного (9).

Доказательство. Итак, для $SU(2)$-модели Янга-Миллса в R^4 лагранжиан имеет вид:

$$L(A_\mu) = F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu},$$

где $\mu, \nu, ... = 1, ..., 4$; $a = 1, 2, 3$. Предположим, что $\partial_4 A_\mu(x) = 0$, тогда

$$F_{\mu\nu} = \{F_{ij},\ F_{i4} = D_i A_4 = \partial_i A_4 + [A_i, A_4]\},$$

где $i, j, \ldots = 1, 2, 3$, и $L(A_\mu)$ принимает вид:

$$L(A_\mu) = F^a_{ij} F^{aij} + F^a_{i4} F^{ai4} + F^a_{4i} F^{a4i} = F^a_{ij} F^{aij} + 2(D_i A^a_4)(D_i A^a_4)$$

Переобозначая $A_4(x) \equiv \chi(x)$, получаем подынтегральное выражение функционала энергии (7) с точностью до выбора нормировочного коэффициента. Уравнения Янга-Миллса (2) при $\partial_4 A_\mu(x) = 0$ расщепляются на пару уравнений:

$$D_i F_{ij} + D_4 F_{4j} = 0, \quad D_i F_{i4} = 0,$$

которые после переобозначения $A_4(x) \equiv \chi(x)$ и учета того, что $G = SU(2)$ и

$$D_4 F_{4j} = [A_4, F_{4j}] = -\epsilon^a_{bc} \chi^b (D_j \chi^c) \sigma_a / 2i,$$

совпадают с уравнениями (8).

Уравнения (3) в R^4 имеют вид ($\zeta = 2$ для автодуальных и $\zeta = -2$ для антиавтодуальных связностей) [10]:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = \pm F_{\mu\nu}, \tag{10}$$

где $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ – полностью антисимметричный тензор в R^4. Для связностей, инвариантных относительно сдвигов вдоль x^4, уравнения (10) расщепляются на следующие два уравнения

$$\frac{1}{2} \epsilon_{4ijk} F_{jk} = \pm F_{4i}, \quad \frac{1}{2} \epsilon_{ijk4} F_{k4} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij4k} F_{4k} = \pm F_{ij}.$$

Будем считать, что поля A_μ зависят только от координат пространства R^3 и перейдем от тензора $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ к ϵ_{ijk}, определенному в R^3, пользуясь тем, что $\epsilon_{ijk4} = \epsilon_{ijk}$. Тогда уравнения (10) примут вид

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} = \mp D_i A_4, \quad \mp \epsilon_{ijk} D_k A_4 = F_{ij}. \tag{11}$$

Второе уравнение равносильно первому, т.к. для ϵ_{ijk} имеем следующее свойство: $\epsilon_{mij} \epsilon_{mkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$-$\delta_{il}\delta_{jk}$. Переобозначая A_4 через χ, получаем, что уравнения (11) совпадают с уравнениями Богомольного для произвольной калибровочной группы. Фиксируя $G = SU(2)$, получаем $SU(2)$-уравнения Богомольного (9).

1.3. Модель Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского [50]. Пусть К – компактная группа Ли, Н - ее замкнутая подгруппа, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{H}$ - соответствующие алгебры Ли. М = К/Н – пространство левых смежных классов по подгруппе Н. Фиксируем в алгебре $\mathcal{K}$ левоинвариантное скалярное произведение, и пусть $\mathcal{M}$ - ортогональное дополнение к подалгебре $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$. Отождествим все касательные пространства к группе К при помощи левых сдвигов. Предположим сразу, что М = К/Н – симметрическое пространство, тогда $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$ – разложение Картана и $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}, [\mathcal{H}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}, [\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{H}$.

Рассмотрим К-расслоение над R^2. Следуя [50], введем A и B – дифференциальные формы на R^2 со значениями в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ соответственно, $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$, $DB = dB + [A, B]$.

Двумерной K/H -моделью Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского назовем модель с функционалом действия:

$$S[A, B] = \int_{R^2} \{trF_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2\mathrm{tr}(D_\alpha B_\beta)(D_\alpha B_\beta) + tr[B_\alpha, B_\beta][B_\alpha, B_\beta]\}, \tag{12}$$

где tr - след на алгебре Ли $\mathcal{K}$, $\alpha, \beta, \ldots = 1,2; a,b,c = 1,\ldots,\dim K$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для модели (12) имеют вид [50]:

$$D_\alpha F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, D_\beta B_\alpha], \quad D_\beta D_\beta B_\alpha = -[[B_\beta, B_\alpha], B_\beta], \tag{13}$$

Уравнениями автодуальности модели (12) называют следующие уравнения [50]:

$$F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, B_\beta], \quad D_\alpha B_\beta = D_\beta B_\alpha, \quad D_\alpha B_\alpha = 0. \tag{14}$$

Лемма. Решения уравнений (14) удовлетворяют (13) и доставляют экстремум функционала (12). Доказательство заключается в применении оператора D_α к уравнениям (14).

1.4. Модель кирального поля. Рассматриваем K-расслоение над R^2. Введем векторное поле $L_\alpha(x) = g^{-1}\partial_\alpha g(x) = A_\alpha(x) + B_\alpha(x)$, где $x \in R^2$, $g(x) \in K$, A_α и B_α определены в предыдущем пункте. K/H-киральной моделью называется модель с функционалом действия

$$S[B_\alpha] = \int_{R^2} \mathrm{Sp} B_\alpha B_\alpha d^2x$$

и уравнениями движения [50]:

$$D_\alpha B_\alpha = 0. \tag{15a}$$

Так как $L_\alpha(x) = g^{-1}(x)\partial_\alpha g(x)$, то $\partial_\alpha L_\beta - \partial_\beta L_\alpha + [L_\alpha, L_\beta] = 0$, или, поскольку $L_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$,

$$F_{\alpha\beta} + [B_\alpha, B_\beta] + D_\alpha B_\beta - D_\beta B_\alpha = 0.$$

В силу того, что $F_{\alpha\beta} \subset \mathcal{H}$, $[B_\alpha, B_\beta] \subset \mathcal{H}$, $D_\alpha B_\beta \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$, последнее уравнение расщепляется на два:

$$F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, B_\beta], \quad D_\alpha B_\beta = D_\beta B_\alpha. \tag{15б}$$

Итак, мы получили, что уравнения автодуальности (14) модели (12) совпадают с уравнениями движения (15) K/H киральной модели [50,5].

1.5. Редукция к уравнениям модели Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского и к уравнениям киральной модели. Вернемся к рассмотрению модели Янга-Миллса (1) в R^4 с произвольной калибровочной группой G. Предположим, что компоненты связности A_μ инвариантны относительно трансляций вдоль x^3 и x^4, т.е. $\partial_3 A_\mu = \partial_4 A_\mu = 0$. Тогда для описания связности достаточно двух компонент $A_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, и можно считать, что $x \in R^2$.

Утверждение [50]. Функционал действия двумерной G^c/G -модели Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского совпадает с редуцированным к $d = 2$ функционалом теории Янга-Миллса, уравнения Янга-Миллса (2) при этом редуцируются к уравнениям (13), а уравнения автодуальности (10) (со знаком "+") — к уравнениям (14) или, что эквивалентно, к уравнениям движения (15) G^c/G-киральной модели.

Доказательство. Пусть $\partial_3 A_\mu = \partial_4 A_\mu = 0$. Тогда

$$F_{\mu\nu} = \{F_{\alpha\beta}, \quad D_\alpha A_i, \quad [A_i, A_j]\},$$

где $\alpha,\beta=1,2$; $i,j=3,4$; $\mu=(\alpha,i)$, и

$$\mathrm{Sp} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathrm{Sp} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2\mathrm{Sp}(D_\alpha A_i)(D_\alpha A_i) + \mathrm{Sp}[A_i, A_j][A_i, A_j].$$

Далее $D_\mu F_{\mu\nu} = \{D_\mu F_{\mu\beta}, \ D_\mu F_{\mu i}\}$, поэтому уравнения Янга-Миллса $D_\mu F_{\mu\nu} = 0$ примут вид:

$$D_\alpha F_{\alpha\beta} - [A_i, D_\beta A_i] = 0, \quad D_\alpha D_\alpha A_i + [A_j, [A_j, A_i]] = 0. \tag{16}$$

Для уравнений автодуальности (10) выберем следующую форму записи:

$$F_{12} = F_{34}, \quad F_{13} = -F_{24}, \quad F_{14} = F_{23},$$

тогда при редукции к $d = 2$ получаем

$$F_{12} = [A_3, A_4], \quad D_1 A_3 = -D_2 A_4, \quad D_1 A_4 = D_2 A_3. \tag{17}$$

Напомним, $A_\mu(x)$, $\mu = 1, ..., 4$, принимают значения в алгебре Ли $\mathcal{G}$, $x \in R^2$.

Рассмотрим группу Ли К $= G^c = G \otimes_R C$ с алгеброй Ли $\mathcal{K} = \mathcal{G} \oplus i\mathcal{G}$. Очевидно, Н $= G$ — подгрупна в К, М $=$ К/Н $= G^c/G$ — симметрическое пространство. Введем поля $B_1 \equiv iA_3$, $B_2 \equiv iA_4$, принимающие значения в $\mathcal{M}=i\mathcal{G}$. Тогда $\mathcal{A}=A_\alpha dx^\alpha$ и $\mathcal{B}=B_\alpha dx^\alpha$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ — дифференциальные формы на R^2 со значениями в $\mathcal{H}=\mathcal{G}$ и $\mathcal{M}=i\mathcal{G}$ соответственно. Перепишем лагранжиан и уравнения (16), (17) в новых обозначениях:

$$\mathrm{Sp} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = tr F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2\mathrm{tr}(D_\alpha B_\beta)(D_\alpha B_\beta) + tr[B_\alpha, B_\beta][B_\alpha, B_\beta]. \tag{18}$$

где tr – след на алгебре Ли $\mathcal{K} = \mathcal{G} \oplus i\mathcal{G}$, Sp - след на $\mathcal{G}$ и $tr\mid_\mathcal{G} \equiv \mathrm{Sp}$,

$$D_\alpha F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, D_\beta B_\alpha], \quad D_\beta D_\beta B_\alpha = -[[B_\beta, B_\alpha], B_\beta], \tag{19}$$

$$F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, B_\beta], \quad D_\alpha B_\beta = D_\beta B_\alpha, \quad D_\alpha B_\alpha = 0. \tag{20}$$

Мы получили, что лагранжиан (18), уравнения (19) и (20) совпадают с лагранжианом (12), уравнениями движения (13) и уравнениями автодуальности (14) двумерной G^c/G-модели Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского соответственно. В то же время уравнения (20) совпадают с уравнениями (15) G^c/G-киральной модели. Утверждение доказано.

1.6. Уравнения Нама. Предположим, что компоненты связности A_μ модели Янга-Миллса (1) в R^4 с произвольной калибровочной группой G инвариантны относительно сдвигов вдоль координат x^1, x^2, x^3, т.е. $\partial_1 A_\mu = \partial_2 A_\mu = \partial_3 A_\mu = 0$. Тогда уравнения автодуальности (10) примут вид

$$-\partial_4 A_1 + [A_1, A_4] = [A_2, A_3], \quad \partial_4 A_2 - [A_2, A_4] = [A_1, A_3], \quad -\partial_4 A_3 + [A_3, A_4] = [A_1, A_2]. \tag{21}$$

Связность над R описывается одной компонентой $A_4(x^4)$, кривизна такой связности равна нулю. Поэтому $\exists$ такое $g(x) \in G$, что $A_4^g = g^{-1} A_4 g + + g^{-1}\partial_4 g = 0$, или, т.к. $x = x^4 \in R$, $g' + A_4 g = 0$. В силу того, что это уравнение линейно по g, его решение существует и единственно для $\forall A_4(x^4) \in \mathcal{G}$. Итак, фиксируем калибровку, в которой $A_4 \equiv 0$. Переобозначим $\tau \equiv x^4$, $T_1 = -A_1$, $T_2 = -A_2$, $T_3 = -A_3$, $\partial_4 \equiv \frac{d}{d\tau}$, $\dot{T}_a = \frac{d}{d\tau} T_a$, $a, b, c, ... = 1, 2, 3$. Тогда уравнения (21) можно записать в виде (см., например, [11]):

$$\epsilon_{abc} \dot{T}_c = [T_a, T_b]. \tag{22}$$

Уравнения (22) называются уравнениями Нама. Уравнениями Нама будем также называть следующую систему дифференциальных уравнений

$$\epsilon_{abc}(\dot{T}_c + [T_c, T_4]) = [T_a, T_b], \tag{22$'$}$$

где $T_4 = -A_4$, т.е. компонента A_4 не устранена калибровочным преобразованием. В пользу рассмотрения уравнений (22$'$) говорит тот факт, что фиксировать калибровку можно не только условием $T_4 = 0$, но и любым другим, например, $T_4 = -T_3$.

Каждому решению уравнений (22$'$) по схеме, предложенной в [17, 51], можно сопоставить мультимонопольное решение уравнений Богомольного. Подробное изложение конструкции Нама можно найти, например, в [6].

Приведем представление Лакса для уравнений Нама (22) (см., [11], стр.535). Пусть

$$L_0 = T_1 + iT_2, \quad L_1 = -2iT_3, \quad L_2 = T_1 - iT_2, \tag{23a}$$

тогда для матриц

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2, \quad \mathrm{M}(\lambda) = M_0 + \lambda M_1, \tag{23б}$$

где параметр $\lambda \in C$, при условии

$$M_0 = \frac{1}{2}L_1, \quad M_1 = L_2, \tag{23в}$$

уравнение

$$\frac{dL(\lambda)}{d\tau} = [L(\lambda), M(\lambda)] \tag{23г}$$

эквивалентно уравнениям Нама (22). Приведем представление Лакса для уравнений (22′). Пусть

$$L_0 = T_1 + iT_2, \quad L_1 = -2iT_3, \quad L_2 = T_1 - iT_2, \quad M_0 = -T_4 - iT_3, \quad M_1 = L_2, \tag{23а′}$$

тогда для матриц (23б) уравнение (23г) эквивалентно уравнениям (22′). Покажем это более подробно. Запишем (23г) в виде

$$\frac{d}{d\tau}(L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2) = [L_0, M_0] + \lambda[L_1, M_0] + \lambda[L_0, M_1] + \lambda^2[L_2, M_0] + \lambda^2[L_1, M_1] + \lambda^3[L_2, M_1].$$

Для L_0, L_1, L_2, M_0, M_1 вида (23а′), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем

$$\begin{aligned}
\dot T_1 + i\dot T_2 &= [T_1 + iT_2, -T_4 - iT_3],\\
-2i\dot T_3 &= [-2iT_3, -T_4 - iT_3] + [T_1 + iT_2, T_1 - iT_2],\\
\dot T_1 - i\dot T_2 &= [T_1 - iT_2, -T_4 - iT_3] + [-2iT_3, T_1 - iT_2],
\end{aligned}$$

откуда, раскрывая коммутаторы и приравнивая мнимые и вещественные части, получаем уравнения Нама (22′).

Фиксируя калибровку дополнительным условием $M_0 = \frac{1}{2}L_1$, т.е. зануляя A_4= $-T_4$, получаем представление Лакса (23) для уравнений Нама (22), приведенное в [11].

1.7.Редукция уравнений Нама к уравнениям цепочки Тоды. Уравнения Нама (22) могут быть редуцированы к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды, связанной с алгеброй $sl(n,R)$ (см., например, [34]). Рассмотрим в качестве калибровочной группы G=$SU(n)$. Алгебра Ли $\mathcal{G}$=$su(n)$ этой группы совпадает с множеством антиэрмитовых матриц следа нуль. Возьмем три антиэрмитовы матрицы

$$T_1 = i\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & a_n\\ a_1 & 0 & \ddots & & & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & -a_n\\ -a_1 & 0 & \ddots & & & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = i\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & b_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}, \qquad \sum_{J=1}^{n} b_J = 0, \tag{24}$$

где a_J, b_J - вещественные функции от τ.

Подставим анзац (24) в уравнения Нама (22). Получим, что уравнения $\dot T_1$= $[T_2,T_3]$ и $\dot T_2$= $[T_3,T_1]$ совпадают и, следовательно, уравнения $\dot T_3$= $[T_1,T_2]$, $\dot T_2$= $[T_3,T_1]$ сT_a вида (24) можно записать в виде уравнений Лакса

$$\frac{d}{d\tau}L = [L, M], \quad L = T_2 - iT_3, \quad M = iT_1, \tag{25}$$

Представление Лакса (25) для уравнений Нама (22) с фиксированным видом (24) матриц T_a совпадает с представлением Лакса для уравнений конечной непериодической цепочки Тоды, связанной с алгеброй Ли $sl(n,R)$ (см., например, [52]). Решения уравнений цепочки Тоды известны (см.[52] и ссылки там).

§2. Размерная редукция уравнений автодуальности в пространстве $\mathbf{R}^{2,2}$

2.1. Уравнения автодуальности в изотропных координатах. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $R^{2,2}$ с метрикой $g_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,-1)$; $\mu,\nu,... = 1,...4$. Введем в пространстве $R^{2,2}$ изотропные координаты $z = 2^{-1/2}(x^1+x^2)$, $t = 2^{-1/2}(x^2-x^1)$, $y = 2^{-1/2}(x^3+x^4)$, $x = 2^{-1/2}(x^3-x^4)$ и положим $A_z = 2^{-1/2}(A_1+A_2)$, $A_t = 2^{-1/2}(A_2-A_1)$, $A_y = 2^{-1/2}(A_3+A_4)$, $A_x = 2^{-1/2}(A_3-A_4)$. В изотропных координатах уравнения автодуальности

$$F_{12} = F_{34}, \quad F_{13} = -F_{24}, \quad F_{14} = -F_{23}, \tag{26}$$

модели Янга-Миллса (1) в $R^{2,2}$ примут вид

$$F_{tx} = 0, \quad F_{yz} = 0, \quad F_{tz} + F_{xy} = 0. \tag{27}$$

Калибровочная группа G произвольна. Так как $F_{yz}= 0$, то $\exists g_1(x) \in G$ (здесь $x \in R^{2,2}$) такое ,что $A_y=g_1^{-1}\partial_y g_1$, $A_z=g_1^{-1}\partial_z g_1$. Аналогично, т.к. $F_{tx}= 0$, то $\exists g_2(x)\in G$ такое ,что $A_t=g_2^{-1}\partial_t g_2$, $A_x=g_2^{-1}\partial_x g_2$.

Покажем, что уравнения автодуальности в $R^{2,2}$ эквивалентны следующему уравнению для $g(x)=g_1g_2^{-1}$ [42,43]:

$$\partial_t(g^{-1}\partial_z g) + \partial_x(g^{-1}\partial_y g) = 0. \tag{28}$$

Вычислим

$$g_2F_{tz}g_2^{-1} = g_2(\partial_t g_1^{-1})(\partial_z g_1)g_2^{-1} + g_2g_1^{-1}(\partial_t\partial_z g_1)g_2^{-1} - g_2(\partial_z g_2^{-1})(\partial_t g_2)g_2^{-1} - (\partial_z\partial_t g_2)g_2^{-1} +$$
$$+(\partial_t g_2)g_1^{-1}(\partial_z g_1)g_2^{-1} - g_2g_1^{-1}(\partial_z g_1)g_2^{-1}(\partial_t g_2)g_2^{-1};$$

$$\partial_t(g^{-1}\partial_z g) = \partial_t(g_2g_1^{-1}(\partial_z g_1)g_2^{-1}) + \partial_t(g_2\partial_z g_2^{-1}) = (\partial_t g_2)g_1^{-1}(\partial_z g_1)g_2^{-1} + g_2(\partial_t g_1^{-1})(\partial_z g_1)g_2^{-1} +$$
$$+g_2g_1^{-1}(\partial_t\partial_z g_1)g_2^{-1} + g_2g_1^{-1}(\partial_z g_1)(\partial_t g_2^{-1}) + (\partial_t g_2)(\partial_z g_2^{-1}) + g_2\partial_t\partial_z g_2^{-1};$$

тогда

$$-g_2F_{tz}g_2^{-1} + \partial_t(g^{-1}\partial_z g) = g_2(\partial_z g_2^{-1})(\partial_t g_2)g_2^{-1} + (\partial_z\partial_t g_2)g_2^{-1} +$$
$$+g_2g_1^{-1}(\partial_z g_1)g_2^{-1}(\partial_t g_2)g_2^{-1} + g_2g_1^{-1}(\partial_z g_1)(\partial_t g_2) + (\partial_t g_2)(\partial_z g_2^{-1}) + g_2\partial_t\partial_z g_2^{-1} = 0,$$

так как

$$1) \qquad (\partial_t g_2)g_2^{-1} = -g_2\partial_t g_2^{-1},$$

$$2) \quad \partial_z\partial_t(g_2g_2^{-1}) = 0 \Rightarrow (\partial_z\partial_t g_2)g_2^{-1} + (\partial_t g_2)(\partial_z g_2^{-1}) + (\partial_z g_2)\partial_t g_2^{-1} + g_2\partial_z\partial_t g_2^{-1} = 0$$

Аналогично доказывается, что $g_2F_{xy}g_2^{-1} = \partial_x(g^{-1}\partial_y g)$.

Итак, мы показали, что (27) и (28) – две эквивалентные формы записи уравнений автодуальности (3) в $R^{2,2}$.

2.2. Редукция к уравнениям модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$. Предположим теперь, что $g(x)=g(x^1,x^2,x^3) = g(t,\ z,\ w = x+y) \in G$, т.е. G-значная функция $g(x)$ инвариантна относительно сдвигов вдоль x^4. Тогда уравнение (28) примет вид:

$$\partial_t(g^{-1}\partial_z g) + \partial_w(g^{-1}\partial_w g) = 0. \tag{29}$$

Вернемся к координатам x^1,x^2,x^3; получим

$$(\eta^{ab}+\epsilon^{ab})\partial_a(g^{-1}\partial_b g)=0, \tag{30}$$

где $\eta^{ab}=diag(-1,1,1)$, $\epsilon^{ab}=\left\{\epsilon^{12}=-\epsilon^{21}=-1, \text{остальные} \epsilon^{ab}=0\right\}$, $\partial_a\equiv\partial/\partial x^a$, $a,b,c=1,2,3$.

Уравнения (30) являются уравнениями модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$ (см. [44-47]).

Известно, что уравнения (30) эквивалентны уравнениям для скалярного χ и векторного полей A_a на $R^{2,1}$ со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G:

$$D_a\chi=-\frac{1}{2}\epsilon_{abc}F^{bc}, \tag{31}$$

где ϵ_{abc} – полностью антисимметричный в $R^{2,1}$ тензор с $\epsilon_{123}=1$. Уравнения (31) есть уравнения Богомольного в $R^{2,1}$ (сравни с (9)) и могут быть получены стандартной процедурой размерной редукции уравнений автодуальности (26) в $R^{2,2}$, описанной в п.1.5.

2.3. Редукция к уравнениям главной киральной модели в $R^{2,0}$ и в $R^{1,1}$. Рассмотрим уравнение (30). Пусть $g(x)$=$g(x^2,x^3)$, т.е. $\partial_1 g(x)$=0. Тогда, фактически, $x\in R^{2,0}$, и уравнения (30) редуцируются к следующим уравнениям:

$$\partial_2(g^{-1}\partial_2 g)+\partial_3(g^{-1}\partial_3 g)=0. \tag{32}$$

Уравнения (32) для $g(x)\in G$, $x\in R^{2,0}$, являются уравнениями главной киральной модели в $R^{2,0}$.

Уравнения (32) эквивалентны уравнениям (15) для векторных полей $B_\alpha(x)$ и $A_\alpha(x)$ ($x\in R^{2,0}$, $\alpha,\beta,...$=1,2) со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G. Аналогично тому, как это было сделано в п.1.5, уравнения (15) для $\mathcal{G}$-значных полей $B_\alpha(x)$ и $A_\alpha(x)$ могут быть получены из уравнений автодуальности в $R^{2,2}$ стандартной процедурой размерной редукции к d=2. Разница в том, что мы получим редукцию к уравнениям двумерной $G\times G/\mathrm{diag}(G\times G)$ - киральной модели, т.е. к уравнениям главной киральной модели.

Вернемся к уравнению (30). Пусть $g(x)$=$g(x^1,x^3)$, т.е. $\partial_2 g(x)$=0. Тогда можно считать, что x=$(x^1,x^3)\in R^{1,1}$, и уравнение (28) редуцируется к следующему уравнению:

$$-\partial_1(g^{-1}\partial_1 g)+\partial_3(g^{-1}\partial_3 g)=0, \tag{33а}$$

которое является уравнением главной киральной модели в $R^{1,1}$.

Пусть теперь в уравнениях (30) $g(x)=g(x^1,x^2)$, т.е. $\partial_3 g(x)=0$. Тогда $x=(x^1,x^2)\in R^{1,1}$, и уравнение (28) редуцируется к уравнению модифицированной главной киральной модели в $R^{1,1}$:

$$-\partial_1(g^{-1}\partial_1 g)+\partial_2(g^{-1}\partial_2 g)+\partial_2(g^{-1}\partial_1 g)-\partial_1(g^{-1}\partial_2 g)=0. \tag{33б}$$

Уравнения (33б) называют также уравнениями движения главной киральной модели с "многозначным добавком" [57].

2.4. Модифицированные уравнения Нама. Предположим, что компоненты связности A_μ модели Янга-Миллса (1) в R^4 с произвольной калибровочной группой G инвариантны относительно сдвигов вдоль координат x^1,x^2,x^4, т.е. $\partial_1 A_\mu=\partial_2 A_\mu=\partial_4 A_\mu=0$. Тогда уравнения автодуальности (26) в $R^{2,2}$ с сигнатурой (- + + -) примут вид:

$$-\partial_3 A_1+[A_1,A_3]=-[A_2,A_4],\quad \partial_3 A_2-[A_2,A_3]=[A_1,A_4],\quad \partial_3 A_4+[A_3,A_4]=[A_1,A_2]. \tag{34}$$

Обратим компоненту A_3 в 0 калибровочным преобразованием и переобозначим $\tau\equiv x^3$, T_1= A_4, T_2= A_1, T_3= A_2, $\partial_3\equiv\frac{d}{d\tau}$, $\dot T_a$=$\frac{d}{d\tau}T_a$, a, b, c,... = 1,2,3. Тогда уравнения (34) можно записать в виде

$$f^c_{ab}\dot T_c=[T_a,T_b]. \tag{35}$$

Здесь f^c_{ab} - структурные константы группы Ли $SL(2,R)$: $f^3_{12}=-f^2_{31}=-f^1_{23}=-1$. Уравнения (35) будем называть модифицированными уравнениями Нама, т.к. они получаются из уравнений Нама (22) заменой: $T_1\to iT_1$, $T_2\to iT_2$.

Приведем представление Лакса для уравнений (35). Пусть

$$L_0 = T_2 + T_3, \quad L_1 = 2T_1, \quad L_2 = T_3 - T_2, \tag{36a}$$

тогда для матриц

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2, \quad \mathrm{M}(\lambda) = M_0 + \lambda M_1, \tag{36б}$$

где параметр $\lambda \in C$, при условии

$$M_0 = \frac{1}{2} L_1, \quad M_1 = L_2, \tag{36в}$$

уравнение

$$\frac{dL(\lambda)}{d\tau} = [L(\lambda), M(\lambda)] \tag{36г}$$

эквивалентно модифицированным уравнениям Нама (35).

Модифицированными уравнениями Нама будем также называть следующую систему дифференциальных уравнений на четыре $\mathcal{G}$-значные функции T_μ:

$$f^c_{ab}\left(\dot{T}_c + [T_c, T_4]\right) = [T_a, T_b], \tag{35'}$$

где $T_4 = -A_3$, т.е. компонента A_3 не устранена калибровочным преобразованием.

Представление Лакса для уравнений (35′) имеет вид, аналогичный (36). А именно, если положить

$$L_0 = T_2 + T_3, \quad L_1 = 2T_1, \quad L_2 = T_3 - T_2, \quad M_0 = -T_4 + T_1, \quad M_1 = L_2, \tag{36a}$$

то для матриц (36б) уравнение (36г) эквивалентно уравнениям (35′). Покажем это более подробно. Запишем (36г) в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left(L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2\right) = [L_0, M_0] + \lambda[L_1, M_0] + \lambda[L_0, M_1] + \lambda^2[L_2, M_0] + \lambda^2[L_1, M_1] + \lambda^3[L_2, M_1].$$

Для L_0, L_1, L_2 , M_0, M_1 вида (36а′), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем

$$\dot{T}_2 + \dot{T}_3 = [T_3 + T_2, -T_4 + T_1], \quad 2\dot{T}_1 = [2T_1, -T_4 + T_1] + [T_2 + T_3, T_3 - T_2],$$
$$\dot{T}_3 - \dot{T}_1 = [T_3 - T_2, -T_4 + T_1] + [2T_1, T_3 - T_2],$$

откуда, раскрывая коммутаторы и приравнивая мнимые и вещественные части, получаем модифицированные уравнения Нама (35′).

2.5. Редукция модифицированных уравнений Нама к уравнениям цепочки Тоды. Приведем представление Лакса для обобщенной непериодической цепочки Тоды, связанной с простой вещественной алгеброй Ли $\mathcal{G}$ [53]. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра Картана в $\mathcal{G}$, $\alpha_i \in \mathcal{A}$ — набор корней, $e_{\alpha_i} \in \mathcal{G}$ — корневой вектор, отвечающий корню α_i. В базисе Картана-Вейля справедливы коммутационные соотношения:

$$[p, e_\alpha] = (p, \alpha) e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, \quad [\alpha_i, p] = 0, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta} \tag{37}$$

где $p \in \mathcal{A}$ и (p, α) — скалярное произведение Киллинга-Картана:

$$(x, y) = \mathrm{Tr}(adx \circ ady), \quad adx(z) = [x, z].$$

Уравнение (36г) с $L(\lambda, \tau)$, $\mathrm{M}(\lambda, \tau) \in \mathcal{G}$ вида

$$L(\lambda, \tau) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha e_{-\alpha} + \lambda p + \lambda \sum_{\alpha \in \Delta}^{2} e_\alpha \exp(q, \alpha), \qquad \mathrm{M}(\lambda, \tau) = \lambda \sum_{\alpha \in \Delta} e_\alpha \exp(q, \alpha), \tag{38}$$

где $p(\tau), q(\tau) \in \mathcal{A}$, c_α — вещественные константы, эквивалентно (в силу (37)) уравнениям обобщенной непериодической цепочки Тоды [53]:

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q}\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \exp(q, \alpha)\Big), \quad \dot{q} = p.$$

Сравнивая {(36г),(36б),(36а$'$)} с {(36г),(38)}, получаем, что анзац

$$T_1 = T_4 = \frac{1}{2}pT_2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha e_{-\alpha} - \sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha \exp(q, \alpha)\Big), \quad T_3 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha e_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha \exp(q, \alpha)\Big),$$

редуцирует модифицированные уравнения Нама (35$'$) к уравнениям обобщенной непериодической цепочки Тоды {(36г),(38)}.

2.6. Редукция модифицированных уравнений Нама к уравнениям обобщенного волчка Ковалевской. Представление Лакса со спектральным параметром λ для уравнений обобщенного волчка Ковалевской имеет вид

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2, \mathrm{M}(\lambda) = M_0 + \lambda M_1,$$

аналогичный (36б) [54,36]. Матрицы L и M принадлежат алгебре $\mathcal{G} = so(p,q)$, причем L_1 и M_0 — из максимальной компактной подалгебры $\mathcal{K} = so(p) \oplus so(q)$, в то время как L_0 и $L_2{=}M_1$ принадлежат ортогональному дополнению к $\mathcal{K}$ в $\mathcal{G}$. Отождествление (36а$'$) задает вложение обобщенного волчка Ковалевской в модифицированные уравнения Нама (35$'$) [36].

§3. Уравнения автодуальности в $\mathrm{R}^{2,2}$ и некоторые интегрируемые системы

3.1. Представление нулевой кривизны для уравнений автодуальности. Уравнения автодуальности (27) могут быть получены как условие совместности

$$[\partial_t - \lambda\partial_y + A_t - \lambda A_y, \partial_x + \lambda\partial_z + A_x + \lambda A_z] = 0$$

следующей линейной системы (ср.[48]):

$$(\partial_t - \lambda\partial_y + A_t - \lambda A_y)\psi = 0, \quad (\partial_x + \lambda\partial_z + A_x + \lambda A_z)\psi = 0, \tag{39}$$

λ – комплексный параметр, ψ – вектор-столбец. Предположим, что связность A_μ в $R^{2,2}$ и ψ зависят только от изотропных координат t и x, т.е. $\partial_y\psi = \partial_z\psi = \partial_y A_\mu = \partial_z A_\mu = 0$. В этом случае система (39) примет вид

$$(\partial_t + A_t - \lambda A_y)\psi = 0, \quad (\partial_x + A_x + \lambda A_z)\psi = 0,$$

и условие совместности

$$[\partial_t + A_t - \lambda A_y, \partial_x + A_x + \lambda A_z] = 0 \tag{40}$$

после приравнивания нулю компонент при λ^2, λ, λ^0 принимает вид

$$\partial_t A_x - \partial_x A_t + [A_t, A_x] = 0, \quad [A_y, A_z] = 0, \quad \partial_t A_z + \partial_x A_y + [A_t, A_z] + [A_x, A_y] = 0. \tag{41}$$

Рассмотрим условие нулевой кривизны

$$\partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [V(\lambda), U(\lambda)] = 0 \tag{42}$$

связности в $R^{1,1}$ с компонентами

$$U(\lambda, x, t) = U_0(x,t) + \lambda U_1(x,t), \quad V(\lambda, x, t) = V_0(x,t) + \lambda V_1(x,t), \tag{43}$$

линейно зависящими от спектрального параметра λ.

Предложение. Интегрируемые уравнения в $R^{1,1}$, имеющие представление нулевой кривизны $\{(42),(43)\}$, могут быть получены редукцией уравнений автодуальности (27).

Доказательство следует из формул (27), (40)-(43).

Замечание. Утверждение Предложения является следствием представления нулевой кривизны для уравнений (10), приведенного в работе [48], и перехода к сигнатуре $(-++-)$: $[D_t - \lambda D_y, D_x + \lambda D_z] = 0$.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих утверждение Предложения.

3.2. Редукция к уравнениям модели N-волн. Следуя [55], положим

$$U_0 = [U_1, W], \quad U_1 = \gamma diag(a_1, \dots, a_n), \quad V_0 = [V_1, W], \quad V_1 = \gamma diag(b_1, \dots, b_n), \tag{44}$$

где W - произвольная $n \times n$ матрица с нулевой диагональю, γ, a_j, b_j – произвольные постоянные $(j, \dots = 1, \dots, n)$ и $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. Подставляя (44) в $\{(42),(43)\}$, получаем уравнение

$$[U_1, \partial_t W] - [V_1, \partial_x W] + [[V_1, W], [U_1, W]] = 0, \tag{45}$$

описывающее эволюционную систему с квадратичной нелинейностью. Для A_μ рассмотрим следующий анзац:

$$A_z = U_1, \quad A_y = -V_1$$

с U_1 и V_1 из (44). Подставляя этот анзац в (41), получаем, что

$$A_x = U_0, \quad A_t = V_0$$

и уравнения автодуальности (41) редуцируются к (45) [37].

В случае антиэрмитовой редукции, когда $\gamma = i$ и $W^+ = -W$, уравнение (45) описывает нелинейное взаимодействие $N = n(n\text{-}1)/2$ волновых пакетов [55]. Если дополнительно потребовать, чтобы $W \in so(n)$ и $\partial_t W = 0$, тогда уравнение (45) совпадёт с уравнениями Эйлера на алгебре $so(n)$ [56]. Итак, для калибровочной группы $G = SU(n)$ и связности A_μ в $R^{2,2}$, зависящей только от одной изотропной координаты $x = 2^{-1/2}(x^3 - x^4)$, при условиях $\gamma = i$, $W^+ = -W$, $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ и $\partial_t W = 0$ мы получаем вложение уравнений Эйлера в уравнения автодуальности (27) [35].

3.3. Редукция к уравнению Буссинеска. Представление Лакса для уравнения Буссинеска приводится в [57]. Алгоритм, согласно которому можно перейти от представления Лакса к представлению нулевой кривизны также см. в [57]. Выпишем явный вид матриц U_0, V_0, U_1, V_1

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ w & \frac{3}{2}u & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} -u & 0 & -1 \\ w - u_x & \frac{1}{2}u & 0 \\ w_x - u_{xx} & w - \frac{1}{2}u_x & \frac{1}{2}u \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где u и w – вещественные функции от x, t. Подставляя (46) в (43), затем (43) – в (42), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем следующую систему уравнений:

$$w_t = w_{xx} - u_{xxx} - \frac{3}{4}(u^2)_x, \quad u_t = \frac{4}{3}w_x - u_{xx}.$$

Исключая w, получаем уравнение Буссинеска

$$3u_{tt} + 3(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{47}$$

Для компонент связности A_μ в расслоении над $R^{2,2}$, зависящими только от двух изотропных координат t и x, выберем анзац:

$$A_x = U_0, \quad A_z = U_1, \quad A_y = -V_1$$

с U_0, U_1, V_1 из (46). Подставляя этот анзац в (41), получаем, что $A_t = V_0$ и уравнения автодуальности (27) для модели Янга-Миллса (1) в $R^{2,2}$ с калибровочной группой $G{=}GL(3,R)$ редуцируются к уравнению Буссинеска (47) [49].

3.4. Редукция к уравнениям модели Вольтерра. В работе [37] было описано вложение динамической системы — модели Вольтерра — в уравнения автодуальности (27). В работах О.И.Богоявленского [53] были построены алгебраические аналоги системы Вольтерра в простых алгебрах Ли. При этом система Вольтерра соответствует алгебре Ли A_n. Мы опишем редукцию уравнений автодуальности (27) к алгебраическим аналогам системы Вольтерра для произвольной простой алгебры Ли. Воспольпользуемся обозначениями п.2.5.

Назовем набор корней $\alpha_1,...,\alpha_n$ допустимым, если для всех $i,j \le n$ вектор α_i-α_j не является корнем; тогда

$$[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = 0.$$

В каждой простой алгебре Ли имеется один важный допустимый набор корней, состоящий из простых положительных корней $\omega_1,..., \omega_n$ и корня $\omega_0 = -\Omega$, где Ω - максимальный корень. Справедливо равенство

$$k_0\omega_0 + k_1\omega_1 + ... + k_n\omega_n = 0,$$

где все $k_i > 0$ и являются целыми числами, $k_0 = 1$. Из определения допустимого набора корней и тождества Якоби в силу (37) получаем следующие коммутационные соотношения:

$$i \ne j,k: \quad [e_{\omega_i}, e_{-\omega_j}] = 0, \quad [e_{\omega_i}, e_{-\omega_i}] = \omega_i, \quad [[e_{\omega_k}, e_{\omega_j}], e_{-\omega_i}] = 0, \quad [[e_{\omega_j}, e_{\omega_i}], e_{-\omega_j}] = (\omega_i, \omega_j)e_{\omega_i}.$$

Динамическая система, являющаяся алгебраическим обобщением системы Вольтерра, имеет следующее представление Лакса [53]:

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)], \quad L(\lambda, t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} m_{ij}[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}] + \lambda\sum_{i=0}^{n} a_i^{-1}(t)e_{\omega_i}, \quad M(\lambda, t) = \lambda\sum_{i=0}^{n} k_i a_i(t)e_{-\omega_i}.$$

Здесь $m_{ij} = -m_{ji}$=const. В силу приведенных выше коммутационных соотношений указанное представление Лакса эквивалентно системе уравнений:

$$\dot{a}_i(t) = a_i^2(t)\left(\sum_{s=0}^{n} m_{is}(\omega_i, \omega_s)k_s a_s(t)\right),$$

которая и описывает алгебраические обобщения системы Вольтерра.

Предположим теперь, что связность A_μ в $R^{2,2}$ зависит только от одной изотропной координаты t, тогда, выбирая

$$A_t(t) = 0, \quad A_y(t) = -\sum_{i=0}^{n} k_i a_i(t)e_{-\omega_i}, \quad A_x(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} m_{ij}[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}], \quad A_z(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{-1}(t)e_{\omega_i},$$

получаем, что уравнения (40) с $\partial_x \equiv 0$, совпадают с представлением Лакса для алгебраических обобщений системы Вольтерра. Таким образом, мы получили редукцию уравнений автодуальности (27) к алгебраическим аналогам системы Вольтерра, введенным в [53].

3.5. Редукция к уравнениям Эйлера.

Предложение. Всякому решению уравнений Эйлера, описывающих вращение n-мерного твердого тела, можно сопоставить волновое решение уравнений модифицированной главной киральной модели в $R^{1,1}$ с $G = SU(n)$.

Доказательство. Предположим, что связность A_μ в $R^{2,2}$ зависит только от изотропных координат t и z, т.е. $\partial_y A_\mu = \partial_x A_\mu$=0. Тогда уравнения автодуальности (27) примут вид:

$$F_{tz} = -[A_x, A_y], \quad D_t A_x = 0, \quad D_z A_y = 0. \tag{48}$$

Уравнения (48) представляют собой уравнения модифицированной главной киральной модели в изотропных координатах. Предполагая, что $A_\mu = A_\mu(t) = A_\mu((x^2 - x^1)/\sqrt{2})$, получаем

$$A'_z = [A_z, A_t] + [A_y, A_x], \tag{49а}$$

$$A'_x = [A_x, A_t], \tag{49б}$$

$$[A_z, A_y] = 0, \tag{49в}$$

где штрих обозначает производную d/dt.

Далее, следуя [35], требуем, чтобы A_x, A_t были антисимметричными $n \times n$ матрицами, а $A_z = i diag(a_1, \ldots, a_n)$, $A_y = i diag(b_1, \ldots, b_n)$, причём $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, a_i, b_i=const. Тогда соотношение (49в) выполняется, (49а) позволяет выразить компоненты матрицы A_t через компоненты M_{ij} матрицы $\mathrm{M} \equiv A_x$, а уравнение (49б) можно записать следующим образом [35]:

$$\mathrm{M}'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{ik} - \lambda_{kj}) \mathrm{M}_{ik} \mathrm{M}_{kj}, \tag{50}$$

где $\lambda_{ij} = (b_i - b_j)/(a_i - a_j)$ для $i \neq j$. Уравнения (50) представляют собой уравнения Эйлера, описывающие вращение n-мерного твердого тела, или уравнения геодезического потока на группе $SO(n)$, где λ_{ij} - левоинвариантная диагональная метрика на $SO(n)$ [58-60].

В работе [35] приведена редукция уравнений автодуальности (27) сразу к системе (49).

§4. Уравнения Уорда.

4.1. Обобщение уравнений Нама. В работе [34] Уорд ввел и рассмотрел следующие нелинейные дифференциальные уравнения на $\mathcal{G}$– значные функции $\mathrm{T}_A(u)$:

$$S^A_{BC} \dot{T}_A = [T_B, T_C], \tag{51}$$

где S^A_{BC} – структурные константы некоторой простой алгебры Ли $\mathcal{H}$, $\dot{T}_A = \frac{dT_A}{du}$, $u \in C$, $A, B, C, \ldots = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}$. В случае, когда $\mathcal{H} = su(2)$ уравнения (51) совпадают с уравнениями Нама (22), при $\mathcal{H} = sl(2, R)$ – с модифицированными уравнениями Нама (35). Будем называть уравнения (51) обобщенными уравнениями Нама или уравнениями Уорда.

4.2. Об интегрируемости уравнений Уорда. Как отмечается в [34], уравнения (51) образуют переопределенную систему (за исключением случаев $\mathcal{H} = su(2)$ и $\mathcal{H} = sl(2, R)$), и вопрос об их интегрируемости пока остается открытым. Однако для $\mathcal{H} = sp(n)$ уравнения Уорда имеют представление типа Лакса (со спектральным "параметром", принадлежащим пространству CP^{2n-1})[34]. Действительно, любой элемент из $sp(n)$ можно представить как тензор второго ранга $\xi_{\alpha\beta}$, симметричный по α, β: $\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\alpha}$, где $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, 2n$. Симплектическую форму обозначим через $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$. Уравнение (35) может быть записано как уравнение для $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$, а именно:

$$\omega^{(\gamma}_{(\beta} \dot{\mathrm{T}}^{\delta)}_{\alpha)} = [\mathrm{T}_{\alpha\beta}, \mathrm{T}^{\gamma\delta}], \tag{52}$$

где индексы поднимаются с помощью $\omega^{\alpha\beta}$, а круглые скобки в индексах означают симметризацию по заключенным в них индексам. Положим $L = T_{\alpha\beta}\pi^\alpha\pi^\beta$ и $M = T_{\alpha\beta}\pi^\alpha\eta^\beta$, где $\eta^\beta = \frac{1}{n}\omega^{\gamma\beta}\frac{1}{\pi^\gamma}$, и, следовательно, $\omega_{\alpha\beta}\pi^\alpha\eta^\beta = 2$. Тогда (52) могут быть записаны в виде уравнения типа Лакса $\dot{L}(\pi) = [L(\pi), M(\pi)]$ с $2n-1$ параметрами π^α, которые можно трактовать как однородные координаты на многообразии CP^{2n-1} [34].

ГЛАВА III. Автодуальность в $\mathbb{R}^4$ и уравнения Нама

§1. Автодуальные связности и уравнения Нама

1.1. Кватернионная структура в R^4. В векторном пространстве R^4 введем структуру алгебры кватернионов. Для этого зададим ассоциативное умножение базисных векторов $e_\mu = \{e_a, e_4\}$ в R^4: $e_a e_b = -\delta_{ab} e_4 + \epsilon_{abc} e_c$, $e_a e_4 = e_4 e_a = e_a$, $e_4 = id$, $a, b, c = 1, 2, 3$, $\mu, \nu, ... = 1, ..., 4$. При этом векторное пространство R^4 отождествляется с алгеброй кватернионов H [5].

Рассмотрим два представления некоммутативной ассоциативной алгебры H вещественными антисимметричными 4×4 матрицами $\{\eta^a, \eta^4\}$ вида

$$\eta^a_{bc} = \epsilon^a_{bc}, \quad \eta^a_{b4} = -\eta^a_{4b} = \delta^a_b, \quad \eta^4_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \tag{53а}$$

и матрицами $\{\bar{\eta}^a, \bar{\eta}^4\}$

$$\bar{\eta}^a_{bc} = \epsilon^a_{bc}, \quad \bar{\eta}^a_{b4} = -\bar{\eta}^a_{4b} = -\delta^a_b, \quad \bar{\eta}^4_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \tag{53б}$$

По построению элементы $\eta^a_{\mu\nu}$ и $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ матриц η^a и η^a удовлетворяют соотношениям:

$$\eta^a_{\mu\nu}\eta^b_{\nu\sigma} = -\delta^{ab}\delta_{\mu\sigma} + \epsilon^{abc}\eta^c_{\mu\sigma}, \quad \bar{\eta}^a_{\mu\nu}\eta^b_{\nu\sigma} = -\delta^{ab}\delta_{\mu\sigma} + \epsilon^{abc}\bar{\eta}^c_{\mu\sigma}.$$

Четырехиндексный антисимметричный тензор в R^4 $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ может быть следующим образом представлен через $\eta^a_{\mu\nu}$ и $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ [61]:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^a_{\mu\nu}\eta^a_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} = -\bar{\eta}^a_{\mu\nu}\bar{\eta}^a_{\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}.$$

Более того, для $\eta^a_{\mu\nu}$ и $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ выполняется:

$$\eta^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta^a_{\alpha\beta}, \quad \bar{\eta}^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\eta}^a_{\alpha\beta}.$$

Тензоры $\eta^a_{\mu\nu}$ и $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ называются автодуальными и антиавтодуальными тензорами т'Хофта.

1.2. Анзац для компонент связности. Рассмотрим анзац Белавина- Полякова-Шварца-Тюпкина для связности в $SU(2)$-расслоении над R^4 [10], записанный с помощью тензоров т'Хофта:

$$A_\mu = -2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu\varphi(\tau)\sigma_a/2i, \tag{54}$$

где σ_a– матрицы Паули, $\sigma_a/2i$ – генераторы алгебры Ли $su(2)$, $\tau = x_\mu x_\mu$, $\varphi(\tau)$ - некоторая функция от τ. Анзац (54) дает одноинстантонное 5-параметрическое решение $SU(2)$-теории Янга-Миллса в R^4 [10] (см. также [12, 11, 61]):

$$A_\mu = 2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu/(x_\sigma x_\sigma + \alpha^2), \tag{55}$$

α^2=const.

Обобщим анзац (54) на произвольную калибровочную группу G следующим образом:

$$A_\mu = -2\eta^\sigma_{\mu\nu}x_\nu T_\sigma(\tau) = -2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu T_a(\tau) - 2x_\mu T_4(\tau), \tag{56}$$

где $T_\sigma(\tau)$ – $\mathcal{G}$-значные функции, $\mu, \nu, \lambda, \sigma, ... = 1, ..., 4$, $a, b, c, ... = 1, 2, 3$; $\mu = (a, 4)$.

1.3. Редукция к уравнениям Нама (см. [24], [25]).

Теорема 1. Любое решение уравнений Нама (22′) с $\tau = x_\mu x_\mu$ дает решение вида (56) уравнений автодуальности (10) модели Янга-Миллса (1) в R^4.

Доказательство. Вычислим кривизну связности (56), учитывая, что $T_\sigma(\tau)$ удовлетворяют уравнениям Нама (22′). Итак

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = -2\eta^a_{\nu\sigma}\partial_\mu(x_\sigma T_a(\tau)) + 2\eta^a_{\mu\sigma}\partial_\nu(x_\sigma T_a(\tau)) + 4\eta^a_{\mu\kappa}x_\kappa\eta^b_{\nu\sigma}x_\sigma[T_a, T_b] +$$

$$+4x_{[\mu}\eta^a_{\nu]\sigma}[T_4, T_a] = -2\eta^a_{\nu\sigma}\delta_{\mu\sigma}T_a(\tau) - 2\eta^a_{\nu\sigma}x_\sigma(2x_\mu)\dot{T}_a(\tau) + 2\eta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\kappa}T_a + 2\eta^a_{\mu\sigma}x_\sigma(2x_\nu)\dot{T}_a +$$

$$+4\epsilon^c_{ab}\eta^a_{\mu\kappa}x_\kappa\eta^b_{\nu\sigma}x_\sigma(\dot T_c+[T_c,T_4]) = 4\eta^a_{\mu\nu}T_a + 4x_{[\nu}\eta^a_{\mu]\sigma}x_\sigma(\dot T_a - [T_4,T_a]) + 4\epsilon^c_{ab}\eta^a_{\mu\kappa}x_\kappa\eta^b_{\nu\sigma}x_\sigma\dot T_c.$$

Воспользуемся теперь следующим тождеством для тензоров т'Хофта [61]:

$$\epsilon^c_{ab}\eta^a_{\mu\kappa}\eta^b_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\nu}\eta^c_{\kappa\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\eta^c_{\nu\kappa} - \delta_{\kappa\nu}\eta^c_{\mu\sigma} + \delta_{\kappa\sigma}\eta^c_{\mu\nu}, \tag{57}$$

тогда

$$\epsilon^c_{ab}\eta^a_{\mu\kappa}x_\kappa\eta^b_{\nu\sigma}x_\sigma(\dot T_c+[T_c,T_4]) = x_\mu\eta^c_{\nu\sigma}x_\sigma(\dot T_c+[T_c,T_4]) - x_\nu\eta^c_{\mu\sigma}x_\sigma(\dot T_c+[T_c,T_4]) +$$

$$+\tau\eta^c_{\mu\nu}(\dot T_c+[T_c,T_4]) = (x_{[\mu}\eta^c_{\nu]\sigma}x_\sigma + \tau\eta^c_{\mu\nu})(\dot T_c+[T_c,T_4]), \tag{58}$$

т.к. $\eta^c_{\kappa\sigma}x_\kappa x_\sigma\dot T_c \equiv 0$. Подставляя (58) в выражение для $F_{\mu\nu}$ и приводя подобные члены, получаем

$$F_{\mu\nu} = 4\eta^c_{\mu\nu}\left(T_c + \tau(\dot T_c + [T_c,T_4])\right).$$

Автодуальность тензора кривизны $F_{\mu\nu}$ связности (56) при условии, что T_a удовлетворяют уравнениям Нама (22′), доказана.

Покажем теперь, что требования автодуальности связности (56) приводит к уравнениям Нама на матрицы T_a. Воспользуемся тем, что $\epsilon_{dfc}\epsilon_{abc} = \delta_{da}\delta_{fb} - \delta_{db}\delta_{af}$, тогда, домножив левую и правую части тождества (57) на ϵ^{dfc}, получаем

$$\eta^{[a}_{\mu\kappa}\eta^{b]}_{\nu\sigma} = \epsilon^{ab}_c(\delta_{\mu\nu}\eta^c_{\kappa\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\eta^c_{\nu\kappa} - \delta_{\kappa\nu}\eta^c_{\mu\sigma} + \delta_{\kappa\sigma}\eta^c_{\mu\nu})$$

и

$$F_{\mu\nu} = 4\eta^a_{\mu\nu}T_a + 4x_{[\nu}\eta^a_{\mu]\sigma}x_\sigma(\dot T_a - [T_4,T_a]) + 2x_\kappa x_\sigma[T_a,T_b]\epsilon^{ab}_c\cdot(\delta_{\mu\nu}\eta^c_{\kappa\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\eta^c_{\nu\kappa} - \delta_{\kappa\nu}\eta^c_{\mu\sigma} + \delta_{\kappa\sigma}\eta^c_{\mu\nu}) =$$

$$4\eta^a_{\mu\nu}T_a + 4x_{[\nu}\eta^a_{\mu]\sigma}x_\sigma(\dot T_a - -[T_4,T_a]) + 2x_{[\mu}\eta^c_{\nu]\sigma}x_\sigma\epsilon^{ab}_c[T_a,T_b] + 2\tau\epsilon^{ab}_c[T_a,T_b]\eta^c_{\mu\nu} =$$

$$= 4\eta^c_{\mu\nu}\left(T_c + \frac{\tau}{2}\epsilon^{ab}_c[T_a,T_b]\right) + 4x_{[\nu}\eta^c_{\mu]\sigma}x_\sigma\left(\dot T_c + [T_c,T_4] - \frac12\epsilon^{ab}_c[T_a,T_b]\right)$$

Тензор $F_{\mu\nu}$ автодуален $\Longleftrightarrow$ $\dot T_c + [T_c,T_4] - \frac12\epsilon^{ab}_c[T_a,T_b] = 0$. Но эти уравнения следуют из уравнений Нама $\epsilon^e_{fd}\left(\dot T_e + [T_e,T_4]\right) = [T_f,T_d]$ после домножения на ϵ^{fd}_c.

Фактически, мы доказали, что связность (56) автодуальна $\Longleftrightarrow$ $T_\mu(\tau)$ удовлетворяют уравнениям Нама (22′), имеющим представление Лакса (23′). Если зафиксировать калибровку условием $\partial_\mu A_\mu$=0, что соответствует занулению T_4, то анзац (56) перейдет в анзац работ [24], [25]:

$$A_\mu(x) = -2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu T_a(\tau),$$

редуцирующий уравнения автодуальности (10) к уравнениям Нама (22), имеющим представление Лакса (23).

§2. Некоторые классы точных решений в $\mathbf{R}^4$

2.1. Решение $SU(2)$-модели Янга-Миллса в R^4. Зафиксируем калибровочную группу $G = SU(2)$. Пусть $T_4 = 0$. Тогда анзац (56) сводится к анзацу работ [27,28]:

$$A^a_\mu(x) = -2\eta^b_{\mu\nu}x_\nu T^a_b(\tau), \tag{59a}$$

где $T^a_b(\tau) = 0$ при $a \neq b$,

$$T^1_1(\tau) = \alpha_1\varphi_1(\tau), \quad T^2_2(\tau) = \alpha_2\varphi_2(\tau), \quad T^3_3(\tau) = \alpha_3\varphi_3(\tau), \tag{59б}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые вещественные параметры. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — вещественные функции от $\tau = x_\mu x_\mu$. Из Теоремы 1 п.1.3 получаем [27,28]:

Следствие. Для связностей вида (59) уравнения автодуальности (10) (со знаком "+") евклидовой $SU(2)$-модели Янга-Миллса (1) в R^4 совпадают с уравнениями Эйлера на пространстве $sl^*(2, R)$.

Действительно, уравнения Нама (22) для калибровочной группы $G{=}SU(2)$ примут вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\varphi_2\varphi_3, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\varphi_1\varphi_3, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_3}\varphi_2\varphi_1. \tag{60}$$

Редукция $SU(2)$-уравнений автодуальности в R^4 к уравнениям (60) рассматривалась в работе [27].

Уравнения (60) совпадают с уравнениями Эйлера [58-60]

$$\dot{\varphi}_a = h^{cd} f^b_{ea}\varphi_d\varphi_b$$

на коалгебре $sl^*(2,R)$, где f^a_{bc} - структурные константы алгебры Ли $sl(2,R)$, гамильтониан $h = (h^{ab})$ имеет диагональный вид [27,28]:

$$h^{11} = \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} - h^{33}, \quad h^{22} = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} - h^{33}, \quad h^{33} \in R$$

$$h^{ab} = 0 \text{ при } a \neq b.$$

Параметры α_b должны удовлетворять соотношению: $-\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2=0$.

Выпишем решение системы (60) [27,28]:

$$\varphi_1 = -\frac{A}{\alpha}cs(A\tau + \mathrm{B} \mid m), \quad \varphi_2 = -\frac{A}{\alpha}ds(A\tau + \mathrm{B} \mid m), \quad \varphi_3 = -\frac{A}{\alpha}ns(A\tau + \mathrm{B} \mid m), \tag{61}$$

где A, B, m $(0 \leq m \leq 1)$ – вещественные параметры, $\tau = x_\mu x_\mu$ $(\mu{=}1,\dots,4)$.

Для автодуальных связностей $SU(2)$-модели Янга-Миллса в R^4 в этом случае получаем:

$$A^1_\mu(x) = 2\eta^1_{\mu\nu}x_\nu Acs(Ax_\sigma x_\sigma + \mathrm{B} \mid m),$$
$$A^2_\mu(x) = 2\eta^2_{\mu\nu}x_\nu Acs(Ax_\sigma x_\sigma + \mathrm{B} \mid m),$$
$$A^3_\mu(x) = 2\eta^3_{\mu\nu}x_\nu Acs(Ax_\sigma x_\sigma + \mathrm{B} \mid m),$$

Решения (61) сингулярны в бесконечном числе точек R^4, однако при $m{=}1$ получается несингулярное решение системы (60), подстановка которого в анзац (56) дает решение Минковского [62]:

$$A^1_\mu(x) = 2\eta^1_{\mu\nu}x_\nu A/sh(A\tau + \mathrm{B}), \quad A^2_\mu(x) = 2\eta^2_{\mu\nu}x_\nu A/sh(A\tau + \mathrm{B}), \quad A^3_\mu(x) = 2\eta^3_{\mu\nu}x_\nu Acth(A\tau + \mathrm{B})$$

При $A \to 0$, $B \to 0$, $B/A = \alpha^2 =$ const решение Минковского переходит в одноинстантонное решение Белавина-Полякова-Шварца-Тюпкина (55).

2.2. Точечноподобные монополи для произвольной калибровочной группы. Пусть $T_\mu(\tau)$ - функции от $\tau{=}2/(x_a x_a)^{1/2}$, $\mu,\dots{=}1,\dots,4$, $a,\dots{=}1,2,3$. Для статических полей $A_a(x)$, $\chi(x)$ (см.(6) в п.1.1 главы II) со значениями в произвольной алгебре Ли $\mathcal{G}$ $(x \in R^3)$ выберем следующий анзац

$$A_a = 2\epsilon_{abc}\frac{x_c}{(x_q x_q)^{3/2}}T_b(\tau) + 2\frac{x_a}{(x_q x_q)^{3/2}}T_4(\tau), \quad \chi = -2\frac{x_a}{(x_q x_q)^{3/2}}T_a(\tau). \tag{62}$$

Для уравнений Богомольного (сравни с (9) из п.1.2 главы II):

$$F_{ab} = \epsilon_{abc}D_c\chi \tag{63}$$

получаем следующее утверждение:

Утверждение 1. Любое решение $T_\mu(\tau)$ уравнений Нама (22$'$) с $\tau = 2/(x_1^2 + x_2^2 + x_2^3)^{1/2}$ дает решение вида (62) уравнений Богомольного (63) в R^3 с произвольной калибровочной группой G.

Доказательство. Вычислим кривизну F_{ab} связности A_a следующего вида: $A_a = 2\epsilon_{abc}x_b\psi_c + 2x_a\psi_4$ и ковариантные производные поля $\chi = 2x_a\psi_a$, где ψ_μ – $\mathcal{G}$-значные функции от $s{=}x_a x_a$, и подставим в уравнения Богомольного (63). Точкой здесь будем обозначать $\frac{d}{ds}$. Итак,

$$F_{12}= - 4\psi_3 - 4(x_1^2 + x_2^2)\dot\psi_3 - 4(x_1^2 + x_2^2)[\psi_4, \psi_3] - 4x_3^2[\psi_2, \psi_1]+$$

$$+4x_1x_3\left(\dot\psi_1 + [\psi_2, \psi_3] + [\psi_4, \psi_1]\right) + 4x_2x_3\left(\dot\psi_2 + [\psi_3, \psi_1] + [\psi_4, \psi_2]\right),$$

$$D_3\chi = 4x_1x_3\left(\dot\psi_1 + [\psi_2, \psi_3] + [\psi_4, \psi_1]\right) + 4x_2x_3\left(\dot\psi_2 + [\psi_3, \psi_1] + [\psi_4, \psi_2]\right) + 2\psi_3 + 4x_3^2\dot\psi_3+$$

$$+4(x_1^2 + x_2^2)[\psi_2, \psi_1] + 4x_3^2[\psi_4, \psi_3];$$

откуда

$$F_{12} = D_3\chi \iff 6\psi_3 + 4s\dot\psi_3 + 4s[\psi_2, \psi_1] + 4s[\psi_4, \psi_3] = 0.$$

Далее

$$F_{13} = 4\psi_2 + 4(x_1^2 + x_3^2)\dot\psi_2 + 4x_2^2[\psi_1, \psi_3] + 4x_1^2[\psi_4, \psi_2]-$$

$$-4x_1x_2\left(\dot\psi_1 + [\psi_2, \psi_3] + [\psi_4, \psi_1]\right) - 4x_2x_3\left(\dot\psi_3 + [\psi_4, \psi_3] + [\psi_1, \psi_2]\right),$$

$$D_2\chi = 4x_1x_2\left(\dot\psi_1 + [\psi_2, \psi_3] + [\psi_4, \psi_1]\right) + 4x_2x_3\left(\dot\psi_3 + [\psi_1, \psi_2] + [\psi_4, \psi_3]\right) + 2\psi_2+$$

$$+4x_2^2\dot\psi_2 + 4(x_1^2 + x_3^2)[\psi_1, \psi_3] + 4x_2^2[\psi_4, \psi_2];$$

откуда

$$F_{13} = -D_2\chi \iff 6\psi_2 + 4s\dot\psi_2 + 4s[\psi_1, \psi_3] + 4s[\psi_4, \psi_2] = 0.$$

И, наконец,

$$F_{23} = -4\psi_1 - 4(x_3^2 + x_2^2)\dot\psi_1 + 4(x_3^2 + x_2^2)[\psi_1, \psi_4] + 4x_1^2[\psi_2, \psi_3] + 4x_1x_3\left(\dot\psi_3 + [\psi_1, \psi_2] + [\psi_4, \psi_3]\right) +$$

$$+4x_2x_1\left(\dot\psi_2 + [\psi_3, \psi_1] + [\psi_4, \psi_2]\right),$$

$$D_1\chi = 4x_1x_3\left(\dot\psi_3 + [\psi_1, \psi_2] + [\psi_4, \psi_3]\right) + 4x_2x_1\left(\dot\psi_2 + [\psi_3, \psi_1] + [\psi_4, \psi_2]\right) + 2\psi_1 + 4x_1^2\dot\psi_1+$$

$$+4(x_2^2 + x_3^2)[\psi_3, \psi_2] + 4x_1^2[\psi_4, \psi_1];$$

откуда

$$F_{23} = -D_1\chi \iff 6\psi_1 + 4s\dot\psi_1 + 4s[\psi_4, \psi_1] + 4s[\psi_3, \psi_2] = 0.$$

Запишем полученную систему уравнений в виде:

$$\dot\psi_1 + \frac{3}{2s}\psi_1 + [\psi_4, \psi_1] + [\psi_3, \psi_2] = 0,$$

$$\dot\psi_2 + \frac{3}{2s}\psi_2 + [\psi_1, \psi_3] + [\psi_4, \psi_2] = 0,$$

$$\dot\psi_3 + \frac{3}{2s}\psi_3 + [\psi_2, \psi_1] + [\psi_4, \psi_3] = 0.$$

Для $\mathcal{G}$-значных функций $T_a(\tau) = -\psi_a s^{3/2}$, $T_4(\tau) = \psi_4 s^{3/2}$, где $\tau = 2/s^{1/2} = 2/(x_a x_a)^{1/2}$, $\psi_\mu = -s^{-3/2}T_\mu$, $ds = (-8/\tau^3)d\tau$, получаем уравнения Нама

$$\epsilon_{abc}\frac{d}{d\tau}T_c = [T_a, T_b] + \epsilon_{abc}[T_4, T_c]$$

Если положить $T_4 = 0$, то анзац (62) редуцирует уравнения Богомольного к уравнениям Нама (22).

2.3. Статическое решение модели Джорджи-Глэшоу. Зафиксируем калибровочную группу $G = SU(2)$. Пусть $T_4 = 0$ в (62). Выберем $T_a(\tau) = T_a^b(\tau)\sigma_b/2i$, где $T_a^b(\tau)$ удовлетворяют (59б), $\tau = 2/(x_a x_a)^{1/2}$. Тогда получаем редукцию $SU(2)$-уравнений Богомольного к системе (60). Выпишем с помощью решения (61) системы (60) статическое решение модели Джорджи-Глэшоу [27,28]:

$$A_\mu^1(x) = 2A\eta^1_{\mu a}\frac{x_a}{r^3}cs\left(\frac{A}{r} + B \mid m\right), \quad A_\mu^2(x) = 2A\eta^2_{\mu a}\frac{x_a}{r^3}ds\left(\frac{2A}{r} + B \mid m\right),$$

$$A_\mu^3(x) = 2A\eta^3_{\mu a}\frac{x_a}{r^3}ns\left(\frac{2A}{r} + B \mid m\right), \tag{64}$$

где $r = (x_a x_a)^{1/2}$. Для удобства записи мы здесь отождествили $\chi \equiv A_4$.

Решение (64) — 6-параметрическое, т.к. можно ввести еще 3 параметра c_a: $x_a = x'_a - c_a$.

При $B = 0$, $A \to 0$ имеем $cs\left(\frac{2A}{r} \mid m\right) \sim \frac{r}{2A}$, $ds\left(\frac{2A}{r} \mid m\right) \sim \frac{r}{2A}$, $ns\left(\frac{2A}{r} \mid m\right) \sim \frac{r}{2A}$ [63], поэтому при $B = 0$, $A \to 0$ решение (64) переходит в решение Ву-Янга

$$A_b^a = \epsilon^a_{bc}\frac{x_c}{r^2}, \quad \chi^a = -\frac{x^a}{r^2},$$

описывающее точечноподобный монополь [14]. По этой причине мы считаем решение (62) обобщением точечноподобного монополя на произвольную калибровочную группу.

2.4. Сферически-симметричные решения G^c/G-киральной модели. Любое $SO(2)$-инвариант векторное поле A_α в R^2 имеет вид [19]:

$$A_\alpha = x_\alpha\psi(\rho) + \epsilon_{\alpha\beta}x_\beta\varphi(\rho),$$

где $\alpha,\beta = 1,2$; $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$.

Для полей A_α, B_α модели (12) выберем $SO(2)$-инвариантный анзац [27, 28]:

$$A_\alpha = -2\epsilon_{\alpha\beta}\frac{x_\beta}{x_\sigma x_\sigma}T_3(\tau) + \frac{x_\alpha}{x_\sigma x_\sigma}T_4(\tau), \quad B_\alpha = \frac{2}{x_\sigma x_\sigma}\left[\epsilon_{\alpha\beta}x_\beta T_1(\tau) - x_\alpha T_2(\tau)\right] \tag{65}$$

где $T_a(\tau)$ – $\mathcal{G}$-значные функции от $\tau = \frac{1}{2}\ln x_\sigma x_\sigma$.

Для анзаца (65) получаем [24,25]

Утверждение 2. Существует взаимно-однозначное соответствие между сферически-симметричны решениями уравнений (15) G^c/G киральной модели в R^2 и решениями уравнений Нама (22′) с $\tau = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Доказательство. Вычислим $F_{\alpha\beta}$, $[B_\alpha, B_\beta]$, $D_\alpha B_\beta$ и $D_\alpha B_\alpha$ для следующего анзаца

$$A_1 = 2x_1\psi_4 + 2x_2\psi_3, \quad A_2 = 2x_2\psi_4 - 2x_1\psi_3, \quad \tilde{B}_1 = 2x_1\psi_2 - 2x_2\psi_1, \quad \tilde{B}_2 = 2x_1\psi_1 + 2x_2\psi_2,$$

где $\psi_\mu(\mu = 1, ..., 4)$ – функции от $s = x_1^2 + x_2^2$. Точкой обозначим производную $\frac{d}{ds}$. Итак, приводя подобные члены, получаем

1) $F_{12} = -4\psi_3 - 4s\dot{\psi}_3 + 4s[\psi_3, \psi_4]$;
2) $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2] = -4s[\psi_1, \psi_2]$;
3) $D_1\tilde{B}_1 = 2\psi_2 + 4x_1^2\dot{\psi}_2 + 4x_1^2[\psi_4, \psi_2] - 4x_2^2[\psi_3, \psi_1] - 4x_1x_2(\dot{\psi}_1 + [\psi_4, \psi_1] - [\psi_3, \psi_2])$;
4) $D_2\tilde{B}_2 = 2\psi_2 + 4x_2^2\dot{\psi}_2 + 4x_2^2[\psi_4, \psi_2] - 4x_1^2[\psi_3, \psi_1] + 4x_1x_2(\dot{\psi}_1 + [\psi_4, \psi_1] - [\psi_3, \psi_2])$;
5) $D_1\tilde{B}_2 = 2\psi_1 + 4x_1^2\dot{\psi}_1 + 4x_1^2[\psi_4, \psi_1] + 4x_2^2[\psi_3, \psi_2] + 4x_1x_2(\dot{\psi}_2 + [\psi_4, \psi_2] + [\psi_3, \psi_1])$;
6) $D_2\tilde{B}_1 = -2\psi_1 - 4x_2^2\dot{\psi}_1 - 4x_2^2[\psi_4, \psi_1] - 4x_1^2[\psi_3, \psi_2] + 4x_1x_2(\dot{\psi}_2 + [\psi_4, \psi_2] + [\psi_3, \psi_1])$;

Полагая $B_\alpha = i\tilde{B}_\alpha$, из уравнений (14) (или (15)):

$$F_{\alpha\beta} = -[B_\alpha, B_\beta], \quad D_{[\alpha}B_{\beta]} = 0, \quad D_\alpha B_\alpha = 0$$

получаем

$$\psi_1 + s\dot{\psi}_1 + s[\psi_4, \psi_1] = s[\psi_2, \psi_3], \; \psi_2 + s\dot{\psi}_2 + s[\psi_4, \psi_2] = s[\psi_3, \psi_1], \; \psi_3 + s\dot{\psi}_3 + s[\psi_4, \psi_3] = s[\psi_1, \psi_2].$$

Пусть $\tau = \ln s$, $T_1(\tau) = -s\psi_1$, $T_2(\tau) = -s\psi_2$, $T_3(\tau) = -s\psi_3$, $T_4(\tau) = s\psi_4$, тогда для $T_a(\tau)$ получаем уравнения

$$\epsilon_{abc}\frac{d}{d\tau}T_c = [T_a, T_b] + \epsilon_{abc}[T_4, T_c],$$

совпадающие с уравнениями Нама (22′). Если положить $T_4 = 0$, то анзац (65) редуцирует уравнения (14) (или (15)) к уравнениям Нама (22) и совпадает с анзацем работ [24,25].

2.5. Решение $SL(2, C)/SU(2)$ киральной модели [27,28]. Положим $T_4 = 0$ для анзаца (65) и выберем $T_a = T_a^b i\sigma_b/2$, где $i\sigma_a/2$ — генераторы алгебры $su(2)$. Пусть T_a^b удовлетворяют ограничениям (59б). Тогда получаем, что решения (61) системы (60) дают решения уравнений движения $SL(2,C)/SU(2)$ киральной модели следующего вида

$$A_\alpha = 2A\epsilon_{\alpha\beta}\frac{x_\beta}{x_\sigma x_\sigma} ns(A\ln(x_1^2 + x_2^2) + B \mid m)$$

$$B_\alpha = \frac{2}{x_\sigma x_\sigma}\left[-\epsilon_{\alpha\beta}x_\beta cs(A\ln x_\sigma x_\sigma + B \mid m) - x_\alpha ds(A\ln x_\sigma x_\sigma + B \mid m)\right],$$

где α,β,σ=1,2; A, B, m $(0 \le m \le 1)$ — вещественные параметры. При $m = 1$ решение переходит в известное вихревое решение абелевой модели Хиггса для скалярного поля с нулевой массой (см. [12]).

2.6. Автодуальные решения модели Янга-Миллса с калибровочной группой $G = SU(n)$. Так как уравнения Нама (22) могут быть редуцированы к уравнениям конечной непериодической цепочки Тоды, связанной с алгеброй $sl(n, R)$ (см., п.1.7 главы II), то анзац (56) с $T_4 = 0$ и $su(n)$-значными функциями $T_a(\tau)$ вида (24) дает класс точных решений уравнений автодуальности $SU(n)$-модели Янга-Миллса в R^4. Для калибровочной группы $G = SU(2)$ точное решение из этого класса построено в п.2.1.

Поскольку к уравнениям Нама мы редуцировали уравнения Богомольного, уравнения движения G^c/G-киральной модели, уравнения автодуальности G^c/G-модели Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского, то редукция уравнений Нама к уравнениям $sl(n, R)$-цепочки Тоды позволяет построить классы точных решений $SU(n)$-уравнений Богомольного, уравнений движения $SL(n,C)/SU(n)$-киральной модели, уравнений автодуальности $SL(n,C)/SU(n)$-модели Фаддеева-Семенова-Тян-Шанского. Точные решения такого типа выписаны для трехмерных алгебр в п.2.3, 2.5.

2.7. Явный вид решений $SU(3)$-модели Янга-Миллса, $SU(3)$-уравнений Богомольного, уравнений $SL(3, C)/SU(3)$ киральной модели. Выпишем наименее громоздкое решение уравнений цепочки Тоды, связанной с алгеброй Ли $sl(3, R)$. Итак, для компонент матриц T_1, T_2, T_3 вида (24) имеем

$$a_1 = A_1\exp(A_1\varphi + B_1)\frac{\Phi^{1/2}}{\Psi}, \quad a_2 = A_2\exp(A_2\varphi + B_2)\frac{\Psi^{1/2}}{\Phi},$$

$$b_1 = \frac{2A_1 + A_2}{3} + \frac{A_1\exp(2A_1\varphi + 2B_1}{\Psi}\left\{1 - \frac{A_1}{A_1 + A_2}\exp(2A_2\varphi + 2B_2)\right\},$$

$$b_3 = -\frac{A_1 + 2A_2}{3} - \frac{A_2\exp(2A_2\varphi + B_2)}{\Phi}\left\{1 - \frac{A_2}{A_1 + A_2}\exp(2A_1\varphi + 2B_1)\right\},$$

$$\Psi = 1 - \exp(2A_1\varphi + 2B_1) + \frac{A_1^2}{(A_1 + A_2)^2}\exp(2A_1\varphi + 2B_1)\exp(2A_2\varphi + 2B_2),$$

$$\Phi = 1 - \exp(2A_2\varphi + 2B_2) + \frac{A_2^2}{(A_1 + A_2)^2}\exp(2A_1\varphi + 2B_1)\exp(2A_2\varphi + 2B_2), \quad b_2 = -b_1 - b_3,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 - вещественные постоянные.

Подставляя матрицы T_1, T_2, T_3 вида (24) с выписанными выше компонентами a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 в анзац (56) с T_4=0, получаем явный вид автодуального решения $SU(3)$-модели Янга-Миллса в R^4.

Подстановка в анзац (62) с $T_4 = 0$ дает решение $SU(3)$-уравнений Богомольного, а в анзац (65) с $T_4=0$ — решение уравнений $SL(3,C)/SU(3)$ киральной модели.

§3. Автодуальные связности в $\mathbf{R}^{2,2}$ и модифицированные уравнения Нама

3.1. Аналоги тензоров т'Хофта в $\mathbf{R}^{2,2}$. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $R^{2,2}$ с метрикой $g_{\mu\nu} = diag(1,1,-1,-1)$; $\mu,\nu,... = 1,...,4$. Введем в $R^{2,2}$ автодуальные тензоры $\tilde{\eta}^a_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\eta}^a_{bc} = f^a_{bc}, \quad \tilde{\eta}^a_{\mu 4} = -\tilde{\eta}^a_{4\mu} = \delta^a_\mu.$$

Здесь $\mu = (a,4)$, f^a_{bc} – структурные константы группы Ли $SL(2,R)$: $f^3_{12} = -f^2_{31} = -f^1_{23} = -1$.

3.2. Редукция к модифицированным уравнениям Нама.

Теорема 2. Любое решение $T_\mu(\tau)$ уравнений ($35'$) с $\tau = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ дает решение вида

$$A_\mu(x) = -2\tilde{\eta}^a_{\mu\nu}x^\nu T_a(\tau) - 2x_\mu T_4(\tau) \tag{66}$$

уравнений автодуальности (26) модели Янга-Миллса (1) в $R^{2,2}$ с произвольной калибровочной группой G.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.

3.3. Решения модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$. Вспомним редукцию уравнений автодуальности в $R^{2,2}$ к уравнениям модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$ (см. п.2.2. главы II). Получаем Утверждение 3, доказательство которого проводится аналогично доказательству Утверждения 2 (см. п.2.2. главы III).

Утверждение 3. Любое решение $T_\mu(\tau)$ модифицированных уравнений Нама ($35'$) дает решение вида

$$A_a = -2f^b_{ac}\frac{x}{(x_q x^q)^{3/2}}T_b(\tau) - 2\frac{x_a}{(x_q x^q)^{3/2}}T_4(\tau), \quad \chi = 2\frac{x}{(x_q x^q)^{3/2}}T_a(\tau) \tag{67}$$

с $\tau = 2/(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)^{1/2}$ уравнений модифицированой главной киральной модели в $R^{2,1}$ (28) (эквивалентных (29)).

Таким образом, мы построили отображение всего множества решений уравнений ($35'$) (или (35)) во множество решений уравнений (28) вида (67) (или (67) с $T_4 = 0$).

3.4. Решения уравнений двумерных главных киральных моделей в $\mathbf{R}^{2,0}$ и в $\mathbf{R}^{1,1}$. Размерная редукция уравнений (28) к уравнениям (32) и (33а) (см. п.2.3. главы II) приводит к Утверждению 4, доказательство которого проводится аналогично доказательству Утверждения 2 (см. п.2.4 главы III) [24,25].

Утверждение 4. Каждому решению $T_\mu(\tau)$ с $\tau = \frac{1/2}{\ln}x_\sigma x^\sigma$ модифицированных уравнений Нама ($35'$) можно взаимно-однозначно сопоставить сферически-симметричное решение уравнений главной киральной модели в $R^{2,0}$ или в $R^{1,1}$ следующего вида:

$$A_\alpha = -2\epsilon_{\alpha\beta}\frac{x^\beta}{x_\sigma x^\sigma}T_3(\tau) + \frac{x_\alpha}{x_\sigma x^\sigma}T_4(\tau), \quad B_\alpha = \frac{2}{x_\sigma x^\sigma}[\epsilon_{\alpha\beta}x^\beta T_1(\tau) - x_\alpha T_2(\tau)]. \tag{68}$$

3.5. Редукция модифицированных уравнений Нама к уравнениям гамильтоновых систем, связанных с эрмитовыми симметрическими пространствами. Изложим конструкцию построения гамильтоновых систем, связанных с эрмитовыми симметрическими пространствами [64] (см. также [60],[52]).

Пусть симметрическое пространство связано с симметрической алгеброй $(\mathcal{G},\sigma)$, где σ: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\sigma^2=id$, $\sigma \not\equiv id$ и $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$, причем $[\mathcal{K},\mathcal{K}] \subset \mathcal{K}$, $[\mathcal{K},\mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$, $[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subset \mathcal{K}$. В случае эрмитова симметрического пространства существует такой элемент $A \in \mathcal{K}$, что $\mathcal{K} = \{B \in \mathcal{G} : [A,B] = 0\}$. Метрика ad_A имеет только три различных собственных значения: 0 и $\pm a$, т.е. $[A,\mathcal{K}] = 0$, $[A, X^\pm] = \pm a X^\pm$ для всех $X^\pm \in \mathcal{P}^\pm$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \oplus \mathcal{P}^-$.

Пусть $e_{\pm\alpha}$ — базис пространства $\mathcal{P}^\pm$, $R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta}$ - компоненты тензора кривизны симметрического пространства G/K: $[e_\alpha,[e_\gamma,e_{-\delta}]] = R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta}e_\alpha$; Λ — произвольная постоянная диагональная матрица, ω_α — линейные комбинации собственных значений матрицы Λ, $Q(x) \subset \mathcal{P}$: $Q(x) = \sum_\alpha(q^\alpha e_\alpha + r^{-\alpha}e_{-\alpha})$. Предположим, что

$$L_0 = -\frac{1}{a}\sum_{\alpha}(q^\alpha_x e_\alpha - r^{-\alpha}_x e_{-\alpha}) + \frac{1}{a}\sum_{\alpha,\beta} q^\alpha r^{-\beta}[e_\alpha, e_{-\beta}] - \Lambda,$$

$$L_1 = -Q = -\sum_{\alpha}(q^\alpha e_\alpha + r^{-\alpha} e_{-\alpha}), \quad L_2 = -A, \tag{69}$$

$$M_0 = L_1 = -Q \quad \text{и} \quad M_1 = L_2 = -A,$$

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2, \quad M(\lambda) = M_0 + \lambda M_1.$$

Тогда уравнения $\frac{dL}{dx} = [L, M]$ совпадают с уравнениями гамильтоновой системы

$$q^\alpha_{xx} + \sum_{\beta,\gamma,\delta} R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta} q^\beta q^\gamma r^{-\delta} + \omega_\alpha q^\alpha = 0, \; r^{-\alpha}_{xx} + \sum_{\beta,\gamma,\delta} R^{-\alpha}_{-\beta,-\gamma,\delta} r^{-\beta} r^{-\gamma} q^\delta + \omega_\alpha r^{-\alpha} = 0, \tag{70}$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha,-\beta} p_\alpha s_{-\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} R_{-\alpha,\beta,\gamma,-\delta} r^{-\alpha} q^\beta q^\gamma r^{-\delta} + \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha g_{\alpha,-\beta} q^\alpha r^{-\beta},$$

где $p_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha,-\beta} r^{-\beta}_x$, $s_{-\beta} = \sum_\alpha g_{\alpha,-\beta} q^\alpha_x$ и $g_{\alpha,-\beta} = \mathrm{tr} e_\alpha e_{-\beta}$ – метрика на симметрическом пространстве.

Сравним (69) с представлением { (36а′), (36б) } модифицированных уравнений Нама (35′). После наложения дополнительного условия $M_0 = L_1$, что соответствует выбору калибровки $T_4 = -T_1$ (а не $T_4 = 0$!), представление Лакса {(36а′),(36б)} со спектральным параметром λ для модифицированных уравнений Нама (35′) совпадает с представлением Лакса (69) со спектральным параметром λ для уравнений интегрируемой гамильтоновой системы (70), связанной с эрмитовыми симметрическими пространствами.

При $r^{-\alpha} = -q^\alpha$ ($s_{-\alpha} = -p_\alpha$) уравнения (70) принимают вид

$$q^\alpha_{xx} - \sum_{\beta,\gamma,\delta} R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta} q^\beta q^\gamma q^\delta + \omega_\alpha q^\alpha = 0.$$

Это гамильтонова система с гамильтонианом, у которого потенциал V имеет степень 4. Имеется четыре бесконечные серии эрмитовых симметрических пространств: $SU(m+n)/S(U(m) \times U(n))$, $\mathrm{Sp}(n)/U(n)$, $SO(2n)/U(n)$, $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$. Отвечающие им потенциалы V выписаны в [64] (см. также [60],[52]).

Что касается модели Янга-Миллса в $R^{2,2}$, то для калибровочных групп $SU(m+n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{SO}(2n)$, $\mathrm{SO}(n+2)$ требуя, чтобы для $x = \tau \in R$

$$T_1 = -T_4 = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(q^\alpha e_\alpha + r^{-\alpha} e_{-\alpha}),$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{a}\sum_{\alpha}(q^\alpha_x e_\alpha - r^{-\alpha}_x e_{-\alpha}) + \frac{1}{a}\sum_{\alpha,\beta} q^\alpha r^{-\beta}[e_\alpha, e_{-\beta}] - \Lambda - A\right\},$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}\sum_{\alpha}(q^\alpha_x e_\alpha - r^{-\alpha}_x e_{-\alpha}) + \frac{1}{a}\sum_{\alpha,\beta} q^\alpha r^{-\beta}[e_\alpha, e_{-\beta}] - \Lambda + A,\right\} \tag{71}$$

получаем автодуальные решения уравнений Янга-Миллса в $R^{2,2}$ вида (66) с $\tau = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

Для указанных калибровочных групп, выбирая $T_\mu(\tau)$ в виде (71), получаем решение (67) уравнений (29) и (30) модифицированной главной киральной модели в $R^{2,1}$ с $\tau = 2/(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ (см. Утверждение 3).

Аналогично, используя (71), получаем сферически-симметричные решения (68) уравнений главной киральной модели в $R^{2,0}$ и в $R^{1,1}$ с $\tau = \ln(x_\sigma x^\sigma)^{1/2}$.

Глава IV. Автодуальные связности в R^d $(d > 4)$ и обобщенные уравнения Нама

§1. Редукция уравнений автодуальности в R^8 к обобщенным уравнениям Нама

1.1. Уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в R^8. Рассмотрим евклидово пространство R^8 с метрикой δ_{ab}, $a, b, ... = 1, ..., 8$. Отождествим R^8 с алгеброй октонионов, умножение базисных элементов $e_a = \{e_\alpha, e_8\}$ которой задается с помощью октонионных структурных констант $\psi_{\alpha\beta\gamma}$: $e_\alpha e_\beta = -\delta_{\alpha\beta} e_8 + \psi_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma$, $e_\alpha e_8 = e_8 e_\alpha = e_\alpha$, $e_8 = id$; $\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, ..., 7$. Октонионные структурные константы являются частью структурных констант группы $SO(7)$ с индексами, пробегающими касательное пространство в начале координат к семимерной сфере $S^7 = SO(7)/G_2$ (см., например, [65]). В R^7 определён тензор:

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\rho} = -\frac{1}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\lambda\kappa}\psi_{\sigma\lambda\kappa},$$

где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\lambda\kappa}$ — полностью антисимметричный в R^7 тензор. Введем в R^8 полностью антисимметричный тензор $\mathcal{E}_{abcd}$ следующим образом [66]:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\rho} = \varphi_{\alpha\beta\gamma\rho}, \quad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma 8} = \psi_{\alpha\beta\gamma}.$$

По построению, тензор $\mathcal{E}_{abcd}$ удовлетворяет следующим соотношениям [66]:

$$\mathcal{E}_{abcd}\mathcal{E}_{ijkd} = \delta_{a[i}\delta_{j]b}\delta_{ck} + \delta_{b[i}\delta_{j]c}\delta_{ak} + \delta_{c[i}\delta_{j]a}\delta_{bk} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ij[ab}\delta_{c]k} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{jk[ab}\delta_{c]i} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ki[ab}\delta_{c]j}, \tag{72а}$$

$$\mathcal{E}_{abcd}\mathcal{E}_{ijcd} = 6\delta_{a[i}\delta_{j]b} + 4\mathcal{E}_{abij}. \tag{72б}$$

Согласно определению п.3.3 главы I уравнениями автодуальности модели Янга-Миллса (1) в R^8 будут следующие уравнения $(\zeta = -2)$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{abcd}F_{cd} = -F_{ab} \tag{73}$$

1.2. Анзац для компонент связности. Введём тензоры (ср. [66]):

$$Q_{abcd} \equiv \frac{3}{8}\delta_{a[c}\delta_{d]b} - \frac{1}{8}\mathcal{E}_{abcd}, \tag{74а}$$

$$\overline{Q}_{abcd} \equiv \frac{1}{8}\delta_{a[c}\delta_{d]b} + \frac{1}{8}\mathcal{E}_{abcd}, \tag{74б}$$

проектирующие произвольный антисимметричный тензор T_{ab} на ортогональные 21- и 7-мерные подпространства 28-мерного векторного пространства антисимметричных тензоров в R^8:

$$T_{ab} = \frac{1}{2}\delta_{a[c}\delta_{d]b}T_{cd} = (Q_{abcd} + \overline{Q}_{abcd})T_{cd} = Q_{abcd}T_{cd} + \overline{Q}_{abcd}T_{cd} = N_{ab} + \overline{N}_{ab}.$$

В силу (72), (74) тензор N_{ab} автодуален в смысле определения п.3.3 главы I :

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{abcd}N_{cd} = -N_{ab},$$

а тензор $\overline{N}_{ab}$ антиавтодуален $(\zeta=6)$:

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{abcd}\overline{N}_{cd} = 3\overline{N}_{ab},$$

что эквивалентно следующим соотношениям:

$$\overline{Q}_{cdab}N_{ab} = 0, \quad Q_{cdab}\overline{N}_{ab} = 0.$$

Для компонент 1-формы связности в G-расслоении над R^8 выберем следующий анзац:

$$A_a = -\frac{4}{3} Q_{abcd} T_{cd}(u) x_b, \tag{75}$$

где $T_{cd}(u)$ – $\mathcal{G}$-значные функции аргумента $u \in C$.

1.3. Редукция к уравнениям Уорда.

Теорема 4 [26]. Любое решение $T_{cd}(u)$ уравнений Уорда (51) с $u = 1 + x_a x_a$ и $\mathcal{H} = so(8)$ дает решение вида (75) уравнений автодуальности (73) модели Янга-Миллса (1) в R^8 с произвольной калибровочной группой G.

Доказательство. Уравнения (51) для $\mathcal{H} = so(8)$ удобно переписать в виде:

$$S_{abcdmn} \dot{T}_{mn} = [T_{ab}, T_{cd}], \tag{76}$$

где парный индекс (ab) нумерует 28 элементов $T_A(u)$ $(A, B, \ldots = 1, \ldots, 28)$ из произвольной полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$, причём $T_{ab} = -T_{ba}$, $S_{abcdmn} = \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{b[m}\delta_{n]d} - \delta_{bc}\delta_{a[m}\delta_{n]d} + \delta_{bd}\delta_{a[m}\delta_{n]c} - \delta_{ad}\delta_{b[m}\delta_{n]c})$ - структурные константы алгебры Ли $\mathcal{H} = so(8)$. Вычислим компоненты F_{ab} кривизны F связности $A_a = \gamma Q_{abcd} T_{cd}(u) x_b$:

$$\partial_a A_b - \partial_b A_a = -2\gamma Q_{abcd} T_{pq} + 2\gamma x_{[a} Q_{b]cpq} x_c \dot{T}_{pq};$$

$$[A_a, A_b] = \gamma^2 Q_{acpq} Q_{bdmn} x_c x_d [T_{pq}, T_{mn}] = \gamma^2 Q_{acpq} Q_{bdmn} x_c x_d S_{pq,mn,ij} \dot{T}_{ij} =$$

$$= \gamma^2 \dot{T}_{ij} Q_{acpq} Q_{bdmn} x_c x_d (\delta_{pm}\delta_{qi}\delta_{nj} - \delta_{qm}\delta_{pi}\delta_{nj} + \delta_{qn}\delta_{pi}\delta_{mj} - \delta_{pn}\delta_{qi}\delta_{mj}) =$$

$$= \gamma^2 \dot{T}_{ij} Q_{acim} Q_{bdjm} x_c x_d = \frac{1}{6}\gamma^2 \dot{T}_{ij} x_c x_d \{3(\delta_{am}\delta_{ci} - \delta_{ai}\delta_{cm}) - \mathcal{E}_{acmi}\}\{3(\delta_{bm}\delta_{dj} - \delta_{bj}\delta_{dm}) - \mathcal{E}_{bdmj}\} =$$

$$= \frac{1}{6}\gamma^2\{-9\dot{T}_{aj} x_b x_j + 9\dot{T}_{bj} x_j x_a + 9\dot{T}_{ab}\tau - 6\dot{T}_{ij} x_i x_c \mathcal{E}_{abcj} + \dot{T}_{ij} x_c x_d \mathcal{E}_{acim}\mathcal{E}_{bdjm}\} =$$

$$= \frac{1}{6}\gamma^2\{-9\dot{T}_{aj} x_b x_j + +9\dot{T}_{bj} x_j x_a + 9\dot{T}_{ab}\tau - 6\dot{T}_{ij} x_i x_c \mathcal{E}_{abcj} + \dot{T}_{ij} x_c x_d [(\delta_{cb}\delta_{id} - \delta_{cd}\delta_{bi})\delta_{aj} +$$

$$+(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ad}\delta_{bc})\delta_{ij} + (\delta_{ib}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{ab})\delta_{cj} +$$

$$+\mathcal{E}_{acbd}\delta_{ij} + \mathcal{E}_{cibd}\delta_{aj} + \mathcal{E}_{acdj}\delta_{ib} + \mathcal{E}_{iabd}\delta_{cj} + \mathcal{E}_{cidj}\delta_{ab} + \mathcal{E}_{iadj}\delta_{cb} + \mathcal{E}_{acjb}\delta_{id} + \mathcal{E}_{cijb}\delta_{ad} + \mathcal{E}_{iajb}\delta_{cd}]\} =$$

$$= \gamma^2\{-\frac{1}{4}\dot{T}_{ij} x_i x_c \mathcal{E}_{abcj} + \frac{5}{8} x_{[a}\dot{T}_{b]j} x_j + \frac{5}{8}\dot{T}_{ab}\tau - \frac{1}{16}\dot{T}_{ij} x_c x_{[a}\mathcal{E}_{b]cij} + \frac{1}{16}\dot{T}_{ij}\tau\mathcal{E}_{aibj}\} -$$

$$-2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm} + 2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm} = \gamma^2\{-\frac{1}{4}\dot{T}_{ij} x_i x_c \mathcal{E}_{abcj} + \frac{5}{8} x_{[a}\dot{T}_{b]j} x_j + \frac{5}{8}\dot{T}_{ab}\tau -$$

$$-\frac{1}{16}\dot{T}_{ij} x_c x_{[a}\mathcal{E}_{b]cij} + \frac{1}{16}\dot{T}_{ij}\tau\mathcal{E}_{aibj}\} - 2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j \frac{1}{64}(3(\delta_{am}\delta_{bi} - \delta_{ai}\delta_{bm}) -$$

$$-\mathcal{E}_{abmi})\{3(\delta_{cm}\delta_{dj} - \delta_{cj}\delta_{dm}) - \mathcal{E}_{cdmj}\} + 2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm} = \gamma^2(-\frac{1}{4}\dot{T}_{ij} x_i x_c \mathcal{E}_{abcj} +$$

$$+\frac{5}{8} x_{[a}\dot{T}_{b]j} x_j + \frac{5}{8}\dot{T}_{ab}\tau - \frac{1}{16}\dot{T}_{ij} x_c x_{[a}\mathcal{E}_{b]cij} + \frac{1}{16}\dot{T}_{ij}\tau\mathcal{E}_{aibj}) - \frac{1}{32}\gamma^2(18 x_{[b}\dot{T}_{a]j} x_j - 3\dot{T}_{cd} x_j x_{[b}\mathcal{E}_{a]cdj} +$$

$$+6\dot{T}_{jm} x_i x_j \mathcal{E}_{abmi} + \dot{T}_{cd} x_i x_j \{(\delta_{bc}\delta_{id} - \delta_{bd}\delta_{ci})\delta_{aj} + (\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{cb})\delta_{ij} + (\delta_{ic}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{ac})\delta_{bj} + \mathcal{E}_{abcd}\delta_{ij} +$$

$$+\mathcal{E}_{bicd}\delta_{aj} + \mathcal{E}_{abdj}\delta_{ic} + \mathcal{E}_{iacd}\delta_{bj} + \mathcal{E}_{bidj}\delta_{ac} + \mathcal{E}_{iadj}\delta_{bc} + \mathcal{E}_{abjc}\delta_{id} + \mathcal{E}_{bijc}\delta_{ad} + \mathcal{E}_{iajc}\delta_{bd}\}) +$$

$$+2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm} = \frac{1}{16}\gamma^2[18 x_{[a}\dot{T}_{b]i} x_i - 3\dot{T}_{cd} x_{[a}\mathcal{E}_{b]cdj} x_j + 9\dot{T}_{ab}\tau - \frac{3}{2}\tau\dot{T}_{cd}\mathcal{E}_{abcd} + 32\dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm}] =$$

$$= \frac{3}{16}\gamma^2\{3(\delta_{bi}\delta_{cj} - \delta_{bj}\delta_{ci}) - \mathcal{E}bcij\}\dot{T}_{ij} x_c x_a - \frac{3}{16}\gamma^2\{3(\delta_{ai}\delta_{cj} - \delta_{aj}\delta_{ci}) - \mathcal{E}_{acij}\}\dot{T}_{ij} x_c x_b +$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^2\{3(\delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi}) - \mathcal{E}_{abij}\}\dot{T}_{ij}\tau + 2\gamma^2 \dot{T}_{cd} x_i x_j Q_{abim} Q_{cdjm} =$$

$$= 2\gamma^2 Q_{abij}\{\frac{3}{8}\dot{T}_{ij}\tau + \dot{T}_{cd} x_i x_m Q_{cdmj}\} + \frac{3}{2}\gamma^2 \dot{T}_{ij} x_c x_{[a} Q_{b]cij};$$

где $\tau = x_a x_a$.

Для $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a + [A_a, A_b]$ получаем:

$$F_{ab} = -2\gamma Q_{abcd}T_{pq} + 2\gamma x_{[a}Q_{b]cpq}x_c\dot{T}_{pq} + 2\gamma^2 Q_{abij}\{\frac{3}{8}\dot{T}_{ij}\tau + \dot{T}_{cd}x_i x_m Q_{cdmj}\} + \frac{3}{2}\gamma^2\dot{T}_{ij}x_c x_{[a}Q_{b]cij}.$$

Или, в более удобном виде:

$$F_{ab} = 2Q_{abij}\{-\gamma T_{ij} + \frac{3}{8}\gamma^2\dot{T}_{ij}\tau + \gamma^2\dot{T}_{cd}x_i x_m Q_{cdmj}\} + \gamma(2 + \frac{3}{2}\gamma)\dot{T}_{ij}x_c x_{[a}Q_{b]cij}. \quad (77)$$

Итак, тензор F_{ab} вида (81) автодуален $\Longleftrightarrow \gamma = -\frac{4}{3}$:

$$F_{ab} = Q_{abij}\{\frac{8}{3}T_{ij} + \frac{4}{3}(u-1)\dot{T}_{ij} + \frac{16}{9}x_b Q_{cdb[j}x_{i]}\dot{T}_{cd}\}. \quad (78)$$

Автодуальность тензора кривизны связности (75) при условии (76) следует также из того, что $\overline{Q}_{cdab}F_{ab} = 0$. Здесь вычисления короче.

1.4. Октонионный "инстантон". Выберем простейшее решение уравнений Уорда для $\mathcal{H} = so(8)$:

$$T_{ab} = -\frac{1}{u}J_{ab}, \quad (79)$$

где J_{ab} - генераторы алгебры $so(8)$. Решение (79) с T_{ab} вида (79) было построено в работах [22,23]. Оно является октонионным аналогом одноинстантонного решения (55).

§2. Редуцированные уравнения автодуальности в $\mathbf{R}^n$ как уравнения Уорда

2.1. Уравнения автодуальности модели Янга-Миллса в $\mathbf{R}^n = \mathcal{H}\oplus\mathbf{R}$. Рассмотрим простую компактную алгебру Ли $\mathcal{H}$ группы Ли H. Пусть $n = \dim\mathcal{H} + 1$. Тогда R^n как векторное пространство можно отождествить с $\mathcal{H} \oplus R$. Построим четырехиндексный антисимметричный тензор $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$ в R^n следующим образом:

$$\mathcal{E}_{ABCn} = S_{ABC}, \quad \mathcal{E}_{ABCD} = 0, \quad (80)$$

где S_{ABC} - структурные константы простой компактной алгебры Ли $\mathcal{H}$, $A, B, C, ... = 1, ..., n-1$; $\mu, \nu, ... = 1, ..., n$. Нормируем структурные константы S_{ABC} так, чтобы $S_{ACD}S_{BCD} = 2\delta_{AB}$, $\delta_{\mu\nu}$ – метрика на $R^n = \mathcal{H} \oplus R$, δ_{AB} – метрика на $\mathcal{H}$. Переобозначим $x_n \in R$ через t: $x_n \equiv t$.

2.2. Редукция к уравнениям Уорда.

Теорема 4. Для $R^n = \mathcal{H} \oplus R$, где $\mathcal{H}$ - простая компактная алгебра Ли, уравнения автодуальности (3) с ζ=2 и тензором $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$ вида (80) для $A_\mu = A_\mu(t)$ совпадают с уравнениями Уорда (51) на компоненты $A_B(t)$ 1-формы связности A.

Доказательство. Предположим, что $A_\mu = A_\mu(t)$, где $t \equiv x_n$, т.е. $\partial_B A_\mu(t) = 0$. В этом случае калибровочным преобразованием $A_\mu \to A_\mu^g = g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g, g(x) \in G$, можно обратить A_n в 0, т.е. $A = A_B(t)dx^B$ [6]. Обозначим производную по t точкой: $\dot{A}_B \equiv \partial_n A_B \equiv \frac{d}{dt}A_B(t)$. Тогда

$$F_{BD} = [A_B, A_D], \quad F_{nC} = \dot{A}_C. \quad (81)$$

В силу (81) уравнения (3) принимают вид

$$S_{ABC}F_{Cn} = F_{AB}. \quad (82a)$$

$$\frac{1}{2}S_{BCD}F_{CD} = F_{Bn}. \quad (82б)$$

Так как уравнения (82б) следуют из уравнений (82а) после домножения на S_{DAB}, то уравнения (82) эквивалентны следующим уравнениям:

$$S_{BCD}\dot{A}_D = -[A_B, A_C]. \quad (83)$$

Уравнения (83) совпадают с уравнениями (51) для компактной простой алгебры Ли $\mathcal{H}$, если $T_B = -A_B$, $u = t$.

§3. О редукции уравнений Янга-Миллса в $\mathbf{R}^{pq}$ к уравнениям Янга-Миллса в $\mathbf{R}^p$

3.1. Анзац для компонент связности. Рассмотрим пространство R^{pq} с метрикой δ_{AB}, $A, B, ... = 1, ..., pq$. Заменим индексы $A, B, ...$ на двойные индексы $(\mu i), (\nu j), ...$, где $\mu, \nu, ... = 1, ..., p; i, j, ... = 1, ..., q$. Метрический тензор $\delta_{(\mu i)(\nu j)}$ $(=\delta_{AB})$ при этом можно выбрать в виде

$$\delta_{(\mu i)(\nu j)} = \delta_{\mu\nu}\delta_{ij}.$$

Введем переменные

$$X_\mu = x_{\mu i}\beta_i, \tag{84}$$

где $\beta_i = const$ и, как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Для компонент A_B 1-формы связности A в тривиальном главном G-расслоении над R^{pq}, где G - произвольная полупростая группа Ли, выберем следующий анзац:

$$A_{(\mu i)} = A_\mu(X_\nu)\beta_i. \tag{85}$$

Здесь A_μ зависит только от "составных" координат (84).

Доказательство. Координаты вида (84) для частного случая $p = 4, q = 2$ и $(\beta_1, \beta_2) = (1, -1)$ использовались Р.Уордом в работе [20] при построении решения уравнений автодуальности в пространстве R^8 с калибровочной группой $G = SU(2)$.

3.2. Редукция уравнений Янга-Миллса в $\mathbf{R}^{pq}$ к уравнениям Янга-Миллса в $\mathbf{R}^p$.

Теорема 5. Любому решению уравнений Янга-Миллса в евклидовом пространстве R^p можно сопоставить решение вида (85) уравнений Янга-Миллса в пространстве R^{pq} . Обратно, анзац (85) редуцирует уравнения Янга-Миллса в R^{pq} к уравнениям Янга-Миллса в R^p.

Доказательство. Подставим анзац (85) в определение тензора $F_{(\mu i)(\nu j)}$, где $\mu, \nu, ... = 1, ..., p; i, j, ... = 1, ..., q$. Получим

$$F_{(\mu i)(\nu j)} = \beta_i\beta_j(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) = \beta_i\beta_j F_{\mu\nu}, \tag{86}$$

где $\partial_{\mu i} \equiv \partial/\partial x_{\mu i} = \beta_i \partial/\partial X_\mu = \beta_i\partial_\mu$. Подставим (85),(86) в уравнения Янга-Миллса в R^{pq}:

$$\partial_{\mu i}F_{(\mu i)(\nu j)} + [A_{(\mu i)}, F_{(\mu i)(\nu j)}] = \beta_j\beta^2(\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}]) = 0. \tag{87}$$

Так как мы считаем β_i вещественными постоянными, то $\beta^2 = \beta_i\beta_i \neq 0$, и, следовательно, анзац (85) редуцирует уравнения Янга-Миллса в пространстве R^{pq} к уравнениям Янга-Миллса в пространстве R^p, параметризуемым координатами X_μ:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.(88)$$

3.3. Примеры.

Пример 1. Пусть $p = 4$, $q = 2, 3, ...$. Тогда для анзаца (85) уравнения Янга-Миллса в R^{4q}, редуцируются к уравнениям Янга-Миллса в R^4. Следовательно, всякому автодуальному решению уравнений Янга-Миллса в R^4 можно сопоставить решение уравнений Янга-Миллса в R^{4q}. Например, решению (56)

$$A_\mu = -2\eta^\sigma_{\mu\nu}X_\nu T_\sigma(X_\lambda X_\lambda)$$

сопоставляется решение уравнений Янга-Миллса в R^{4q} следующего вида:

$$A_{(\mu i)} = -2\beta_i\eta^\sigma_{\mu\nu}x_{\nu j}\beta_j T_\sigma(u),$$

где $u = 1 + x_{\lambda k}x_{\lambda l}\beta_k\beta_l$, $\mu, \nu, \sigma, ... = 1, ..., 4;\ i, j, k, ... = 1, ..., q$.

Пример 2. Пусть $p = 8, q = 2, 3, \ldots$. В этом случае анзац (85) позволяет всякому автодуальному решению уравнений Янга-Миллса в R^8 сопоставить решение уравнений Янга-Миллса в R^{8q}. Так, например, решению (75)

$$A_a = -\frac{4}{3} Q_{abcd} X_b T_{cd}(u),$$

где $u = 1 + X_b X_b$, $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, 8$, соответствует решение уравнений Янга-Миллса в R^{8q} следующего вида:

$$A_{(ai)} = -\frac{4}{3} \beta_i Q_{abcd} x_{bj} \beta_j T_{cd}(u),$$

где $u = 1 + x_{ak} x_{al} \beta_k \beta_l$, $a, b, \ldots = 1, \ldots, 8$; $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, q$.

В частности, решение (79) в R^8 позволяет получить следующее решение в R^{8q}:

$$A_{(ai)} = \frac{4}{3} \beta_i Q_{abcd} x_{bj} \beta_j J_{cd} / (1 + x_{ek} x_{el} \beta_k \beta_l),$$

где x_{ek} - координаты в R^{8q}, $\beta_i = const$, J_{cd} - генераторы алгебры Ли $so(8)$.

Литература

[1] Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.

[2] Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

[3] Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

[4] Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калиб- ровочных полей. М.: Наука, 1988.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986.

[6] Монополи: топологические и вариационные методы. Сборник статей. М.: Мир, 1989.

[7] Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. М.: Мир, 1988.

[8] Плужников А.И. О минимумах функционала Дирихле// ДАН СССР. 1986. Т.290. No2. С.289-293.

[9] Donaldson S.K. An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds// J.Diff.Geom. 1983. V.18. P.269-316.

[10] Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations.// Phys. Lett. 1975. V. 59B. $N1$. P.85-87.

[11] Сергеев А.Г. Теория твисторов и классические калибровочные поля: Обзор.// В кн.: Монополи: топологические и вариационные методы. М.: Мир. 1989. С.492-555.

[12] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

[13] Atiyah M., Hitchin N. The geometry and dynamics of magnetic monopoles. Princeton, 1988.

[14] Actor A. Classical solutions of $SU(2)$ Yang-Mills theories
// Rev.Mod.Phys. 1979. V.51.$N3$. P.461-525.

[15] Филиппов А.Т. Нетривиальные решения нелинейных задач теории поля.// ЭЧАЯ. 1980. Т.11. Вып.3. С.735-801.

[16] Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu.I. Construction of instantons// Phys.Lett.A. 1978. V.65. P.185-187.

[17] Nahm W. All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups // Preprint CERN TH-3172, 1981.

[18] Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.

[19] Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.

[20] Ward R.S. Completely solvable gauge field equations in dimension greater than four// Nucl.Phys. 1984.V.236B.No2.P.381-396.

[21] Corrigan E., Devchand C., Fairlie D.B., Nuyts J. First-order equations for gauge fields in spaces of dimension greater than four// *Nucl.Phys.* 1983. V.B214. P.452-464.

[22] Fairlie D.B., Nuyts J. Spherically-symmetric solutions of gauge theories in eight dimensions// J.Phys.A. : Math.Gen. 1984. V.17. $N14$. P.2867 -2872.

[23] Fubini S., Nicolai H. The octonionic instanton// Phys.Lett. 1985. V.155B. P.369-372.

[24] Иванова Т.А. Уравнения Нама и автодуальные связности// УМН. 1991. Т.46, вып.4. С.149-150.

[25] Иванова Т.А. Уравнения типа Эйлера в модели Янга-Миллса и в модели киральных полей// Вестн.МГУ.Сер.1.Матем.Мех. 1992. No 3. С.10-14.

[26] Иванова Т.А. Уравнения Уорда и автодуальные связности в R^8// УМН. 1992. Т.47, вып.2. С.191-192.

[27] Иванова Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат.заметки. 1992. Т.52. Вып.2. С.43-51.

[28] Иванова Т.А. Солитоны некоторых моделей теоретической физики и уравнения Эйлера// Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М.: Изд-во МГУ, 1991. С.71-81.

[29] Иванова Т.А. Уравнения Эйлера и сферически-симметричные решения уравнений Янга-Миллса // Управляемые динамические системы. Саранск: Изд-во Мордовского ун-та. 1991. С.94-98.

[30] Попов А.Д. О решениях уравнений Янга-Миллса и Янга-Миллса- Хиггса// Теор.Мат.Физ. 1991. Т.89.No3. С.402-412.

[31] Popov A.D. Spherically symmetric solutions of Yang-Mills equations in $D = 7$ for arbitrary gauge group // Europhys.Lett. 1992. V.17. No1. P.23-26.

[32] Mason L.J., Sparling G.A.J. Nonlinear Schrödinger and Korte weg-de Vries are reductions of Self-Dual Yang-Mills // Phys. Lett. 1989. V.137A. N1, 2. P.29-33.

[33] Ward R.S. Integrable and solvable system, and relations among them // Phil.Trans.R.Soc.Lond. 1985. V.A315. P.451-457.

[34] Ward R.S. Generalized Nahm equations and classical Yang-Baxter equations// Phys. Lett. 1985. V.112A. P.3-5.

[35] Ward R.S. Multi-dimensional integrable systems// Lect. Notes Phys. 1987. V.280. P. 106-116.

[36] Ablowitz M.J., Chakravarty S., Clarkson P.A. Reductions of Self-Dual Yang-Mills Fields and Classical Systems// Phys. Rev. Lett. 1990. V.65. P.1085-1087.

[37] Ablowitz M.J., Chakravarty S. On Reductions of Self-Dual Yang-Mills Equations// Painlevé Transcendents. Plenum Press, New York, 1992.

[38] Семихатов А.М. Октонионы и твисторы в высших размерностях // В кн.:"Теоретико-групповые методы в физике.Труды 3 Межд. семинара". М.: Наука, 1986. Т.1. С.156-164.

[39] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1. М.: Наука. 1981.

[40] Даниэль М., Виалле С.М. Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга-Миллса // УФН. 1982. Т.136. Вып.3. С.377-419.

[41] Мантуров О.В. Однородные пространства и инвариантные тензоры// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т.18. М.: ВИНИТИ. 1986. С.105-142.

[42] Yang C.N.// Phys.Rev.Lett. 1977. V.38. P.1377-1379.

[43] Pohlmeyer K. On the lagrangian theory of anti-self-dual fields in four-dimensional Euclidean space // Commun.Math. Phys. 1980. V.72.N1. P.37-47.

[44] Manakov S.V., Zakharov V.E. Three-dimensional model of relativistic invariant field theory, integrable by the inverse scattering transform // Lett.Math.Phys. 1981. V.5. P.247-253.

[45] Ward R.S. Soliton solutions in an integrable chiral model in 2+1 dimensions // J.Math.Phys. 1988. V.29.N2. P.386-389.

[46] Ward R.S. Integrability of the chiral equations with torsion term // Nonlinearity. 1988. V.1. P.671-679.

[47] Ward R.S. Classical solutions of the chiral model, unitons and holomorphic vector bundles // Commun.Math.Phys. 1990. V.128.N2. P.319-332.

[48] Belavin A.A., Zakharov V.E. Yang-Mills equations as inverse scattering problem// Phys.Lett. 1978. V.B73. P. 53-57.

[49] Bakas I., Depieux D.// Mod.Phys.Lett. 1991. V.A6.P.1561-1574.

[50] Семенов-Тян-Шанский М.А., Фаддеев Л.Д. К теории нелинейных киральных полей // Вестн. Ленингр. ун-та. 1977. No 13. С.81-88.

[51] Nahm W. The algebraic geometry of multimonopoles // Lect.Notes in Phys. 1983. V.180. P.456-466.

[52] Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

[53] Богоявленский О.И. Представление Лакса со спектральным пара- метром для некоторых динамических систем// Изв.АН СССР. Сер. матем. 1988. Т.52, No2. С.243-266.

Богоявленский О.И. Алгебраические конструкции интегрируемых динамических систем — расширение системы Вольтерра.// УМН. 1991. Т.46. Выпуск 3. С. 3-48.

[54] Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Теоретико-групповые ме тоды в теории конечномерных интегрируемых систем. Интегрируемые системы. II. Совр.пробл.матем. Фунд.напр. М.: ВИНИТИ. 1987. Т.16. С.119-193.

[55] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

[56] Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц.анализ и его прилож. 1976. Т.10. No4. С.93-94.

[57] Дубровин Б.Ф., Кричевер И.М., Новиков С.П. Интегрируемые сис темы.I. "Современные пробл.математики. Фундаментальные направления. Т.4.(Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР)" М., 1985. С.179-284.

[58] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли// УМН.1984.Т.39, No2.С.3-56.

[59] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Совр.пробл.матем. Новейшие достижения. Т.26. ВИНИТИ. 1986. С.3-108.

[60] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли // Совр.пробл.матем. Фунд.направл. Т.16 .М.: ВИНИТИ. 1987. С.227-299.

[61] Прасад М.К. Инстантоны и монополи в теориях калибровочных полей Янга-Миллса.// Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983. С.64-96.

[62] Minkowski P. On the ground-state expectation value of the field strength bilinear in gauge theories and constant classical fields // Nucl.Phys. 1981. V.177B. P.203-217.

[63] Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И.М. М.: Наука, 1979.

[64] Fordy A., Wojciechowski S., Marshall I. A family of integrable quartic potentials related to symmetric spaces // Phys. Lett. 1986. V.113A. N8. P.395-400.

[65] Иванова Т.А. Эйнштейновские метрики на семимерной сфере// Труды семинара по тензорному и векторному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1991. С.81-86.

[66] Dündarer R., Gürsey F., Tze C.-H. Generalized vector products, duality, and octonionic identities in $D = 8$ geometry// J. Math. Phys. 1984. V.25. P. 1496-1506.