МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Иванов Александр Олегович

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

01.01.04 — геометрия и топология

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 1997

Содержание

Введение **1**
1 Исторический обзор 2
2 Основные результаты теории абсолютно минимальных сетей 8
2.1 Общие факты из теории абсолютно минимальных сетей 8
2.2 Оболочки Штейнера 9
2.3 Гексогональная система координат 12
2.4 Абсолютно минимальные деревья, затягивающие множества специального вида 14
2.5 Минимальные остовные деревья как приближенные решения проблемы Штейнера 19
3 Основные результаты теории локально минимальных сетей 23
3.1 Плоские локально минимальные бинарные деревья с выпуклой границей 24
3.2 Невырожденные плоские локально минимальные сети с выпуклой границей 27
3.3 Локально минимальные сети в других объемлющих пространствах 29
4 Краткое содержание диссертации 35

1 Обобщенные сети на многообразиях **57**
1.1 Графы: топологический подход 57
1.1.1 Топологические графы, их эквивалентность . . . 58
1.1.2 Маршруты, пути, циклы 60
1.1.3 Подграфы, остовы 61
1.1.4 Операции над графами 62
1.1.5 Граница графа, локальный граф 64
1.1.6 Взвешенные графы, остовы минимального веса . 65
1.2 Общее определение сети 66

1.3 Параметрические сети 68
1.3.1 Параметрические сети, приведенные параметрические сети, компоненты вырождения 68
1.3.2 Гладкие, кусочно-гладкие, вложенные и погруженные параметрические сети 70
1.3.3 Граница параметрической сети. Замкнутые параметрические сети 70
1.3.4 Эквивалентности параметрических сетей 71
1.3.5 Длина параметрической сети на римановом многообразии 75
1.3.6 Взвешенная длина параметрической сети 75
1.3.7 Деформации параметрических сетей 77
1.3.8 Формулы первой и второй вариации длины кривой 78
1.3.9 Формула первой вариации длины геодезической параметрической сети 86
1.3.10 Вторая локальная геодезическая вариация погруженных параметрических сетей 87
1.3.11 Формула первой вариации взвешенной длины геодезической параметрической сети 89
1.4 Сети–следы 89
1.4.1 Следы 90
1.4.2 Граница следа. Замкнутые следы 91
1.4.3 Длина следа 92
1.4.4 Канонический представитель 93
1.4.5 Деформации следов 99
1.4.6 Локальное устройство следов 102

2 Минимальные сети: естественные обобщения проблемы Штейнера 105
2.1 Глобальная и локальная минимальность 105
2.2 Локально минимальные параметрические сети и следы . 107
2.2.1 Слабо локально минимальные параметрические сети 107
2.2.2 Сильно локально минимальные параметрические сети 108
2.2.3 Локально минимальные взвешенные параметрические сети 110
2.2.4 Локально минимальные сети следы 110
2.2.5 Общая задача о поиске локально минимальных сетей 111
2.3 Разные классы сетей — разные минимизационные задачи 111
2.3.1 Замкнутые параметрические сети фиксированного типа 113

2.3.2 Параметрические сети с границей 114
2.3.3 Множество всех параметрических сетей 114
2.3.4 Параметрические сети, гомотопные данной 115
2.3.5 Следы 116
2.3.6 Другие важные семейства сетей 117
2.4 Теоремы существования 118
2.4.1 Параметрические сети с фиксированной границей 118
2.4.2 Замкнутые параметрические сети 120
2.4.3 Взвешенные параметрические сети 122
2.4.4 Следы с фиксированной границей 122
2.4.5 Замкнутые следы 123
2.4.6 Теорема существования 124

3 Локальная структура минимальных сетей 127
3.1 Локальная структура минимальных параметрических сетей 127
3.1.1 Критерий локальной минимальности погруженных параметрических сетей 128
3.1.2 Общий случай: критерий слабой локальной минимальности параметрических сетей 132
3.1.3 Необходимые факты из теории выпуклых функций 134
3.1.4 Общий случай: сильно локально минимальные параметрические сети 139
3.1.5 Критерий сильной локальной минимальности параметрической сети в евклидовом пространстве . 150
3.2 Локальная структура взвешенных локально минимальных параметрических сетей 151
3.2.1 Критерий локальной минимальности взвешенных погруженных параметрических сетей 151
3.2.2 Общий случай: условия слабой и сильной локальной минимальности взвешенных параметрических сетей 152
3.2.3 Сильно локально минимальные взвешенные параметрические сети в евклидовом пространстве . . 154
3.2.4 Общие теоремы о локальной структуре параметрических сетей 154
3.3 Локальная структура минимальных следов 155
3.4 Локальная единственность 159

4 Глобальная структура плоских локально минимальных деревьев 165
4.1 Плоские ломаные I: случай общего положения 168

4.1.1 Твистинги и кручение 169
4.1.2 Пара ломаных в общем положении 172
4.1.3 Некоторые следствия и оценки 183
4.1.4 Шапочки 186
4.2 Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев 189
4.2.1 Число вращения плоского бинарного дерева . . . 190
4.2.2 Свойства минимальных 2-деревьев 192
4.2.3 Алгоритм Мелзака 195
4.2.4 Алгоритм Хванга 198
4.2.5 Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга . . . 201
4.2.6 Теорема об общем положении 203
4.2.7 Теорема о связи числа вращения плоского минимального бинарного дерева и количества уровней выпуклости его граничного множества 205
4.3 Плоские ломаные II: общий случай 217
4.4 Геометрия плоских линейных деревьев 236
4.4.1 Число вращения плоского линейного дерева 238
4.4.2 Геометрическая граница линейного дерева 239
4.4.3 Правильные линейные деревья 240
4.4.4 Квази-геодезические 246
4.4.5 Шапочки 250
4.4.6 Доказательство теоремы 6 255
4.4.7 Случай $p = q$ 256
4.4.8 Случай $p < q$ 262
4.4.9 Завершение доказательства теоремы в общем случае 270
4.4.10 Некоторые следствия 272
4.5 Геометрия плоских минимальных взвешенных бинарных деревьев 274
4.5.1 Число вращения плоского взвешенного бинарного дерева 275
4.5.2 Обобщенный алгоритм Мелзака: случай трех точек 277
4.5.3 Обобщенный алгоритм Мелзака: общий случай . 281

5 Геометрия множества взвешенных локально минимальных сетей с фиксированными типом и границей в $\mathbb{R}^N$ 289
5.1 Геодезические сети. Линейные сети 290
5.2 Взвешенные минимальные сети в $\mathbb{R}^N$ 296
5.2.1 Структура множества взвешенных локально минимальных сетей 300
5.2.2 Формы Максвелла 307
5.2.3 Усы 309

5.2.4 Доказательство теоремы 8 310
5.3 Взвешенные минимальные сети Штейнера на плоскости 312
5.3.1 Оснащение вращения 313
5.3.2 Функция Максвелла 318
5.3.3 Построение деформации невырожденной минимальной сети 320

Общий список работ **326**

Список работ по теме диссертации **333**

Введение

Цель настоящей диссертации — изучение геометрических свойств локально минимальных сетей на римановых многообразиях. С точки зрения римановой геометрии, локально минимальные сети являются естественным обобщением обычных геодезических. Напомним, что соединяющая пару фиксированных точек риманова многообразия геодезическая обладает следующим определяющим свойством: каждый ее фрагмент между достаточно близкими точками A и B является кратчайшей кривой среди всех кривых, соединяющих A и B. Предположим теперь, что фиксировано не две точки риманова многообразия W, а некоторое конечное его подмножество M, состоящее из большего числа точек. Чтобы обобщить на этот случай понятие геодезических, естественно перейти от кривых к рассмотрению связных одномерных континуумов — *сетей*. Затягивающая множество $M \subset W$ сеть называется *абсолютно минимальной*, если она имеет наименьшую возможную длину, и *локально минимальной*, если каждый достаточно малый ее фрагмент имеет наименьшую возможную длину, т.е. является абсолютно минимальной сетью. В этом смысле естественно говорить о локально минимальных сетях как о "разветвленных геодезических".

Локально минимальные сети также естественно возникают при рассмотрении обобщений следующей классической задачи: среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество точек плоскости, найти сеть наименьшей длины, т.е. абсолютно минимальную сеть. Эта задача, известная в современной литературе как *проблема Штейнера*, на протяжении многих десятков лет привлекает внимание специалистов (см. исторический обзор ниже). Неослабевающий интерес к проблеме Штейнера объясняется не только большим количеством приложений, таких как транспортная задача, но также и тем, что, несмотря на простоту постановки, эта задача оказывается чрезвычайно нетривиальной. Хотя имеется несложный алгоритм Мелзака–Хванга построения кратчайшей сети, затягивающей данное множество точек плоскости (см. ниже), этот алгоритм

связан с прямым перебором очень большого числа возможных топологий (комбинаторных структур) кратчайшей сети. На самом деле, как показано в [29], задача Штейнера является $\mathcal{N}P$-трудной, т.е., неформально говоря, скорее всего не существует алгоритма, строящего решение за полиномиальное время. Поэтому большое значение имеет изучение геометрических ограничений, накладываемых на возможную структуру сетей условием минимальности. При таком геометрическом подходе естественно, как и в случае кратчайших кривых, расширить класс рассматриваемых сетей, перейдя от сетей кратчайших "в целом" к изучению сетей кратчайших "в малом", т.е. перейти к изучению локально минимальных сетей.

Отметим, что нетривиальность задачи описания локально минимальных сетей проявляется, в отличие от задачи описания обычных геодезических, уже в случае когда объемлющее многообразие — это евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Оказывается, уже здесь возникает ряд новых эффектов, не имеющих аналогов в теории обычных геодезических. К таким эффектам можно отнести возможное изменение топологии сети при уменьшении ее длины, необходимость перебора всевозможных топологий сети, наличие геометрических ограничений на возможные топологии минимальной сети, существование непрерывных семейств локально минимальных сетей, обусловленное ее топологическими свойствами. Изучению этих новых эффектов и посвящена настоящая диссертация.

1 Исторический обзор

Понятие локально минимальной сети впервые неявным образом появилось при изучении следующей классической задачи, известной в литературе как проблема Штейнера: *среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество M точек плоскости, найти сеть наименьшей длины.* Эта задача была названа "проблемой Штейнера" в замечательной книге Ричарда Куранта и Герберта Е. Роббинса "*Что такое математика?*" в честь Якоба Штейнера (Jacob Steiner, 1796–1863), швейцарского математика, профессора Берлинского университета. Именно после появления этой очень популярной книги интерес к абсолютно минимальным сетям разгорелся с новой силой, и терминология, предложенная Курантом и Роббинсом стала общепринятой.

Следует отметить, однако, что сама задача о поиске абсолютно минимальных сетей имеет более длинную историю. Мы проследим ее здесь, воспользовавшись историческими обзорами в [88], [62], [37] и [34].

По-видимому, впервые задача такого типа была поставлена Ферма (1601–1665) до 1640 года. А именно, Ферма интересовал ответ на следующий вопрос: *как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек A_1, A_2 и A_3 была наименьшей?*

Торричелли предложил геометрическое решение этой задачи. Построим на сторонах заданного треугольника $A_1A_2A_3$ вне его три правильных треугольника и опишем вокруг них окружности. Тогда, как показал Торричелли, построенные три окружности пересекутся в одной точке T, которая известна теперь в планиметрии как *точка Торричелли*, см. рис. 1. Торричелли утверждал, что $F = T$, т.е. эта точка T и является решением задачи, поставленной Ферма. Однако, заметим, Торричелли ошибся: его рассуждения справедливы только в предположении, что все углы треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходят 120°. Если же один из этих углов, скажем угол $\hat{A}_1$, больше 120°, то, как легко видеть, точка Торричелли лежит вне треугольника $A_1A_2A_3$ и не минимизирует суммарное расстояние до вершин треугольника. В этом случае, как незавиcимо заметили Хейпеп (в 1834 году) и, позднее, Бертран (в 1853 году), искомой точкой является вершина A_1.

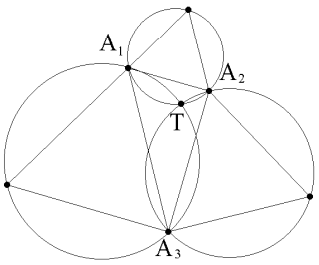


Рис. 1: Точка Торричелли.

Вернемся в $XVII$ век. В 1647 году выходит книга Кавальери "*Excercitationes Geometricae*", в которой отмечается важное свойство точки Торричелли T, в предположении, что эта точка лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$: все углы между отрезками A_iT равны между собой и равны 120°. Этот факт оказывается весьма фундаментальным, и его аналоги, как мы увидим, имеют место в существенно более общих ситуациях.

В середине следующего столетия, в 1750 году, в своей книге "*Doctrine and Application of Fluctions*" Симпсон предложил другой способ построения точки Торричелли. Конструкция Симпсона состоит в следующем. Снова построим на сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ и вне

его правильные треугольники. Объединение каждого из построенных нами треугольников с исходным треугольником $A_1A_2A_3$ представляет собой четырехугольник, одна из диагоналей которого совпадает с соответствующей стороной треугольника $A_1A_2A_3$. Проведем недостающие диагонали. Три построенных отрезка называются теперь *линиями Симпсона*. Симпсон показал, что эти отрезки или их продолжения пересекаются в одной точке, совпадающей с точкой Торричелли, рис. 2.

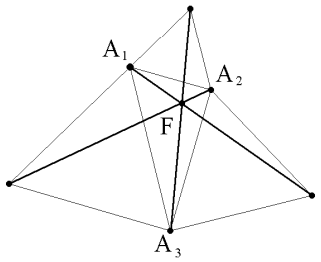


Рис. 2: Линии Симпсона пересекаются в точке Торричелли.

Уже в XIX веке, в 1834 году, Хейнен показал, что если точка Торричелли лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$, то длины всех трех линий Симпсона равны между собой и равны сумме расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника. Таким образом, собирая воедино все сказанное выше, мы получаем следующий полный ответ на поставленную Ферма задачу.

Решение задачи Ферма. *Точка F, являющаяся решением задачи Ферма, единственна.*

Если один из углов треугольника $A_1A_2A_3$, скажем $\hat{A}_1$, больше или равен $120°$, *то $F = A_1$.*

Если же все углы треугольника $A_1A_2A_3$ меньше $120°$, *то F совпадает с точкой Торричелли. В этом случае все углы между отрезками SA_i равны между собой и равны* $120°$. *При этом линии Симпсона имеют одинаковые длины, равные $|SA_1| + |SA_2| + |SA_3|$.*

Симпсон предложил следующее обобщение задачи Ферма: найти на плоскости (в d-мерном пространстве) точку S, сумма расстояний от которой до n данных точек наименьшая из возможных. Отметим, что эта задача отличается от сформулированной выше проблемы Штейнера, так как в задаче Симпсона рассматриваются не все возможные сети, затягивающие данное множество M, а лишь сети, имеющие ровно одну дополнительную вершину — вершину S. Одним из вариантов задачи Симпсона занимался Якоб Штейнер.

Другое обобщение задачи Ферма получается, если в качестве объекта, у которого минимизируется длина, рассматривать произвольные *сети*, затягивающие данные множества точек. Впервые случай 4 и 5 точек рассматривался в работах французских математиков Жергонна, Клайперона и Ламе, а также в письмах Гаусса. Наконец, в 1934 году Ярник и Кесслер поставили задачу в следующем современном виде: *найти кратчайшую сеть, связывающую n данных точек плоскости.*

Ярник и Кесслер решили поставленную проблему для граничных множеств, образующих вершины правильных n-угольников при $n = 3$, 4, 5 и $n \geq 13$. Для $n = 3$, 4, 5 Ярник и Кесслер нашли очевидные абсолютно минимальные сети, а для $n \geq 13$ показали, что абсолютно минимальная сеть состоит из $(n-1)$-ой стороны рассматриваемого правильного n-угольника. В работе этих авторов не было ссылок на Ферма, так как им, по-видимому, казалось, что они занимаются совсем другой задачей. Переписка Гаусса и работы французских математиков им также не были известны. Заметим, кстати, что случаи оставшихся n были разобраны лишь в работе [21] Ду, Хванга и Венга 1987 года, где было показано, что и в этих случаях ответ такой же, как и для $n \geq 13$.

Как мы уже отметили выше, проблема Штейнера получила свое название благодаря книге Куранта и Роббинса "*Что такое математика?*", написанной ими в 1941 году. Авторы этой книги сформулировали описанную выше задачу Ферма, назвав ее проблемой Штейнера, а затем поставили проблему Ярника и Кесслера как естественное обобщение проблемы Штейнера. Ни на Ферма, ни на Ярника и Кесслера ссылок сделано не было. Как уже отмечалось, благодаря огромной популярности книги, терминология, связанная с именем Штейнера, стала в этом контексте общепринятой. Отметим, что книга Куранта и Роббинса породила не только недоразумение в вопросах приоритета, но, что гораздо более важно, привлекла к проблеме поиска минимальных сетей интерес большого числа ученых.

В дальнейшем проблемой Штейнера занимались многие известные математики, такие как Винтер, Гилберт, Грехем, Гэри, Джонсон, Ду, Кокейн, Мелзак, Поллак, Рубинштейн, Томас, Хванг и другие. Ниже мы вкратце опишем основные результаты, полученные в этой науке за последние 40 лет. Одна из причин этого неослабевающего интереса специалистов к минимальным сетям состоит в том, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Например, очевидно, заданное конечное множество M можно интерпретировать как набор конечных (терминальных) пунктов. Тогда минимальная сеть — это самая дешевая транспортная система, обеспечивающая коммуникации между данными конечными пунктами.

Здесь естественно предполагается, что стоимость коммуникаций пропорциональна их длине. Отметим здесь же, что в реальных задачах часто встречаются ситуации, когда коэффициент пропорциональности между стоимостью отдельного участка транспортной сети и длиной этого участка зависит от конкретного участка сети. В этом случае естественно определить *взвешенную длину сети* как линейную комбинацию длин ребер сети с некоторыми положительными коэффициентами (для каждого ребра фиксирован свой коэффициент, называемый *весом* этого *ребра*). Отметим что в этом случае топология сети предполагается фиксированной. Сети, для ребер которых фиксированы веса, будем называть *взвешенными*. На случай взвешенных сетей естественным образом переносятся понятия абсолютно минимальных и локально минимальных сетей (в смысле взвешенной длины), см. [46]. *Взвешенные минимальные сети* так же изучаются в данной работе. Оказывается, что многие результаты, справедливые для обычных локально минимальных сетей обобщаются на случай взвешенных локально минимальных сетей.

Локально минимальные сети можно наблюдать в несложных физических экспериментах, описанных ниже, а так же в живой природе. Скажем, если пренебречь высотой пчелиных сот, то получится локально минимальная сеть, построенная из шестиугольников с углами по 120°. Таким образом, пчелы, повинуясь инстинкту, уменьшают количество воска, идущего на постройку сот.

Перейдем теперь к физическим опытам. Отметим, что в них, как и в случае пчелиных сот, возникают именно *локально* минимальные сети, а вовсе не обязательно абсолютно минимальные сети. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает естественность рассматриваемых нами объектов.

В первом эксперименте мы получим локально минимальные сети наблюдая за мыльными пленками — физическими моделями минимальных поверхностей.

Возьмем две прозрачные пластины, расположим их в параллельных плоскостях на некотором расстоянии друг от друга, и соединим их произвольным числом штырьков, перпендикулярных пластинам. Опустим полученную конструкцию в мыльный раствор и осторожно извлечем ее наружу. На конфигурации осядет мыльная пленка, перпендикулярная пластинам (рис. 3).

Граница полученной мыльной пленки состоит из двух частей: первая часть границы — это объединение вертикальных отрезков — штырьков, соединяющих пластины, а вторая часть — объединение двух одинаковых “следов”, по которым пленка касается пластин. Если h — расстояние между пластинами, а l — длина одного из “следов”, то

площадь мыльной пленки равна hl.

Хорошо известно, что мыльная пленка всегда стремится занять такое положение, в котором ее площадь больше нельзя уменьшить без предварительного увеличения. Поэтому каждый из "следов" является сетью, длину которой нельзя уменьшить малыми шевелениями, оставляющими на месте точки крепления штырьков — границу этой сети, т.е. является локально минимальной сетью.

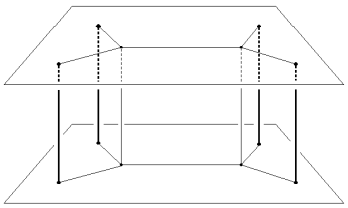


Рис. 3: Мыльные пленки, моделирующие локально минимальные сети.

Опишем теперь механическую систему в которой естественно возникает локально минимальная сеть.

Возьмем n кусков нерастяжимой нити, например лески. На одном конце каждого из кусков, кроме одного, сделаем незатягивающуюся петельку. Из полученных $n-1$-ого отрезка с петелькой выберем k_1 штук, и через петельки проденем единственный отрезок без петли. Тем самым мы получим конфигурацию, состоящую из k_1+1-ого отрезка и имеющую k_1+2 концов.

Далее, из оставшихся незадействованными отрезков лески выберем k_2 штук и проденем через их петельки концы построенной конфигурации. Тем самым мы получим новую конфигурацию уже с k_1+k_2+2 концами. Опять из оставшихся отрезков выберем k_3 и вновь перестроим конфигурацию. Будем продолжать это процесс до тех пор, пока все отрезки не будут заняты. В результате мы построим конфигурацию G, число концов которой равно $n+1$.

Возьмем пластину, скажем лист оргстекла или фанеры, и просверлим в ней $n+1$ маленькое сквозное отверстие (отверстия будут соответствовать граничным точкам минимальной сети). Расположим пластину горизонтально и пропустим сверху концы конфигурации G через отверстия так, чтобы на каждое из них приходилось по одному концу из G. Прикрепим теперь к концам грузики одинаковой массы. Когда полученная механическая система прийдет в состояние равновесия, конфигурация из лески образует локально минимальную сеть,

граница которой — набор просверленных отверстий, рис. 4.

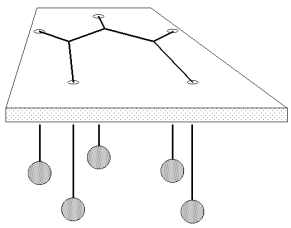


Рис. 4: Механическая реализация локально минимальных сетей.

2 Основные результаты теории абсолютно минимальных сетей

Основное внимание в литературе уделяется классическому случаю изучения абсолютно минимальных сетей на плоскости. В данном разделе мы приведем основные результаты, посвященные исследованию плоских абсолютно минимальных деревьев. Более подробную информацию можно найти в цитируемых ниже работах, а также в книге [37] и в обзоре из книги [46].

2.1 Общие факты из теории абсолютно минимальных сетей

Пусть $M = \{M_i\}$ — фиксированное множество, состоящее из n точек плоскости. Первые естественные вопросы рассматриваемой теории — это теоремы существования и единственности абсолютно минимальных деревьев, затягивающих M. В случае плоскости несложно показать, что абсолютно минимальное дерево, затягивающее M всегда существует, однако, вообще говоря, такое дерево не единственно, см. рис. 5.

Кроме того, хорошо известно, см. например [30], локальное устройство абсолютно минимальных сетей. А именно, каждая абсолютно минимальная сеть состоит из отрезков, стыкующихся в вершинах под углами, не превосходящими 120°. В частности, степени вершин локально минимальной сети не превосходят 3. Более того, можно считать, что все вершины степени 1 и 2 являются граничными, т.е. при-

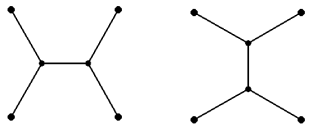


Рис. 5: Две абсолютно минимальных сети, затягивающих вершины квадрата.

надлежат M. Отметим, что сети, степени вершин которых не превосходят 3, называются *сетями Штейнера.*

В отличие от локальной структуры абсолютно минимальных сетей, которая полностью описана, про глобальнос устройство извсстно далеко не все. Конечно, ясно, что каждая абсолютно минимальная сеть является деревом, степени вершин которого не больше 3. В частности, абсолютно минимальное дерево содержит не более $n-2$ вершин, не лежащих в граничном множестве M (напомним, что через n мы обозначили количество точек в M). Эти дополнительные вершины называются *точками Штейнера.*

Мы уже отмечали, что задача построения абсолютно минимального дерева является $\mathcal{N}P$-трудной, и этот факт является одной из мотиваций, обосновывающих актуальность исследования тех ограничений на возможные топологии минимальной сети, которые накладывает геометрия граничного множества M, изучения возможного расположения точек Штейнера минимальной сети, и т.п. Иными словами, важно исследовать дополнительные свойства минимальных сетей и связь этих свойств с геометрией границы M.

Несколько таких свойств формулируется в терминах так называемой оболочки Штейнера — подмножества плоскости, вне которого не может лежать абсолютно минимальная сеть.

2.2 Оболочки Штейнера

Приводимые ниже результаты можно найти в обзоре [30], а также в статье [9].

Определение. Множество $\mathrm{StH}(M) \subset \mathbb{R}^2$ называется *оболочкой Штейнера множества* M, если каждое абсолютно минимальное дерево, затягивающее M, содержится в $\mathrm{StH}(M)$.

Ясно, что оболочка Штейнера определена не однозначно, и чем меньшую по включению оболочку Штейнера нам удастся найти, тем более сильные ограничения на расположение точек Штейнера мы получим. Приведем несколько характерных результатов на эту тему.

Пусть Г — абсолютно минимальное дерево, затягивающее множество M. Мы начнем с одного из простейших утверждений, называемого "свойством лунки".

Лункой L, соответствующей отрезку AB, назовем пересечение двух открытых кругов радиуса AB с центрами в A и B соответственно.

Утверждение В.1 (Свойство лунки) *Пусть* Г — *абсолютно минимальное дерево, затягивающее множество* M, *и* AB — *произвольное ребро из* Г. *Тогда лунка* L, *соответствующая* AB, *не содержит вершин дерева* Г.

Следующие несколько утверждений позволяют показать, что выпуклая оболочка граничного множества M является оболочкой Штейнера, а затем, в некоторых случаях, последовательно сокращать оболочку Штейнера.

Утверждение В.2 (Свойство бесконечного клина) *Пусть* W — *внутренность некоторого угла величины не меньше чем* $2\pi/3$. *Предположим, что* W *не содержит точек из* M. *Тогда* W *не содержит точек Штейнера дерева* Г.

Внутренность угла W часто называют *бесконечным клином*. Из свойства бесконечного клина немедленно вытекает следующий важный результат.

Следствие В.1 (Свойство выпуклой оболочки) *Выпуклая оболочка множества* M *является одной из оболочек Штейнера для* M.

Пусть Г, как и выше, обозначает абсолютно минимальное дерево, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Рассмотрим некоторый треугольник ABC, угол B которого не меньше $2\pi/3$. Обозначим через W множество, полученное из ABC выбрасыванием сторон AB и BC, прилежащих к углу B. Множество W будем называть (*конечным*) *клином*, порожденным ABC.

Утверждение В.3 (Свойство конечного клина) *Пусть конечный клин* W, *порожденный треугольником* ABC, *не содержит точек множества* M, *а отрезок* AC *лежит на границе некоторой оболочки Штейнера* $\mathrm{StH}(M)$. *Тогда* W *не содержит точек Штейнера абсолютно минимального дерева* Г, *затягивающего* M.

Приведем здесь один способ, предложенный Кокейном [9], позволяющий уменьшать оболочку Штейнера.

Пусть U — некоторый многоугольник на плоскости, являющийся оболочкой Штейнера множества M, а ∂U — его граница. Пару точек A и C из M назовем *соседними на* ∂U, если отрезок AC лежит на ∂U, и на интервале AC нет точек из M. Пусть A и C — пара соседних на ∂U точек из M. Точку B из M назовем *хорошей для* A *и* C, если угол B треугольника ABC не меньше $2\pi/3$, и ограниченный клин W, порожденный ABC, не содержит точек из M.

Утверждение B.4 *В сделанных выше предположениях, множество U', полученное из U выбрасыванием ограниченного клина W, является оболочкой Штейнера для M.*

Алгоритм, предложенный Кокейном, состоит в следующем. Пусть U — некоторая оболочка Штейнера. Рассмотрим всевозможные пары соседних на ∂U точек из M, и для каждой такой пары A, C найдем все хорошие точки $B \in M$ и рассмотрим соответствующие клинья W, порожденные ABC. Из всех построенных клиньев выберем тот клин W_0, у которого угол при вершине B максимальный. Если таких клиньев несколько, то возьмем любой из них. Обозначим через U' множество $U \setminus W_0$, которое, как мы уже знаем, является оболочкой Штейнера для M, поэтому для U' можно повторить описанную процедуру. Алгоритм заканчивает работу, когда для построенного на предыдущем шаге множества $\widetilde{U}$ ни для какой пары соседних на $\partial\widetilde{U}$ точек из M нет хорошей точки из M.

Предложение B.1 (Кокейн) *Пусть U — некоторая оболочка Штейнера множества M. Применим к U описанный выше алгоритм. Полученное в результате множество $\widetilde{U}$ определено однозначно и является оболочкой Штейнера для M.*

Отметим, что в результате описанной процедуры может получиться множество, представляющее собой объединение многоугольников P_i, соединенных между собой некоторыми ломаными L_i (возможно одноточечными). Эти ломаные, очевидно, составлены из ребер абсолютно минимального дерева. Более того, в этом случае достаточно построить абсолютно минимальные деревья для каждого из множеств $M_i = M \cap P_i$. Абсолютно минимальное дерево для всего множества M при этом совпадает с объединением абсолютно минимальных деревьев для M_i и ломаных L_i.

Подчеркнем, что описанная выше процедура улучшения оболочки Штейнера не единственна. Например, Хванг, Сонг, Тинг и Ду в [23]

предложили способ, позволяющий отрезать от оболочки Штейнера некоторые четырехугольники специального вида. Мы не приводим здесь их результат, отсылая к работе [23].

2.3 Гексогональная система координат

Как было отмечено выше, имеются алгоритмы Мелзака и Хванга, позволяющие находить все абсолютно минимальные сети, затягивающие данное множество M точек плоскости. В действительности, эти алгоритмы перебирают все затягивающие M плоские деревья, степени вершин которых не превосходят 3 (такие деревья называются *деревьями Штейнера*) и для каждого такого дерева Γ проверяют, существует ли планарно эквивалентное ему локально минимальное дерево Γ_m, затягивающее множество M, такое что ограничение на множество M планарной эквивалентности, переводящей Γ в Γ_m, является тождественным отображением. Если такое Γ_m существует, то алгоритмы строят его в явном виде и вычисляют длину. На заключительной стадии длины всех найденных локально минимальных сетей сравниваются между собой и выбирается локально минимальное дерево наименьшей длины. Это дерево и является абсолютно минимальным.

Геометрическая конструкция, лежащая в основе алгоритма Мелзака, является обобщением построений Торричелли и Симпсона, см. подробности ниже. В процессе работы этого алгоритма дополнительные вершины минимальной сети — точки Штейнера, вычисляются как точки пересечения отрезков и окружностей. Сравнительно недавно Кларк [8], а затем независимо Хванг и Венг [36], предложили алгебраическую версию алгоритма Мелзака, в которой точки Штейнера находятся как решения *линейных* уравнений. Хванг и Венг использовали в этих целях так называемые гексогональные координаты.

Пусть на плоскости фиксированы три прямые U, V и W, пересекающиеся в точке O и разбивающие плоскость на шесть равных углов. Фиксируем ориентацию каждой из этих прямых так, как показано на рис. 6. Каждой точке P плоскости $\mathbb{R}^2$ поставим в соответствие три числа (u, v, w), где u — алгебраическая величина проекции точки P на ось U вдоль оси V, v — алгебраическая величина проекции точки P на ось V вдоль оси W, и, наконец, w — алгебраическая величина проекции точки P на ось W вдоль оси U. Числа (u, v, w) называются *гексагональными координатами* точки P в системе координат UVW. Иногда гексагональные координаты точки P обозначаются через $(u(P), v(P), w(P))$.

Следующее утверждение очевидно.

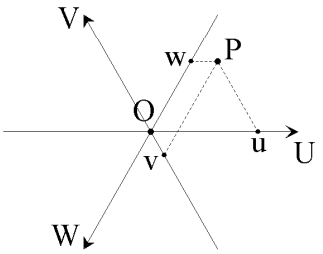


Рис. 6: Гексагональные координаты.

Утверждение B.5 *Для произвольной точки P плоскости $\mathbb{R}^2$ выполнено следующее соотношение: $u + v + w = 0$.*

Пусть Γ — локально минимальное бинарное дерево, каждое ребро которого параллельно одной из осей гексагональной системы координат. Отметим, что если отрезок AB параллелен одной из гексагональных осей (например, оси U), то соответствующие гексагональные координаты (в данном случае w-координаты) точек A и B совпадают. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение B.6 *Если ребра локально минимального бинарного дерева Γ параллельны соответствующим осям гексагональных координат, то координаты всех точек Штейнера дерева Γ являются линейными функциями координат точек множества M и вычисляются однозначно.*

Далее, напомним, что каждое дерево является двудольным графом. Последнее означает, что множество вершин дерева можно разбить на два подмножества, называемые долями, так, чтобы каждое ребро дерева соединяло вершины, принадлежащие разным долям. Пусть $V = V_1 \sqcup V_2$ — такое разбиение множества V вершин локально минимального бинарного дерева Γ.

Утверждение B.7 *Пусть на плоскости фиксирована гексагональная система координат UVW. Пусть Γ — локально минимальное бинарное дерево, затягивающее множество M, и предположим, что каждое ребро дерева Γ параллельно одной из координатных осей. Тогда, для произвольного разбиения $V = V_1 \sqcup V_2$ множества вершин дерева Γ на доли, имеем:*

$$\sum_{P \in V_1 \cap M} \big[u(P) + v(P) + w(P)\big] - \sum_{P \in V_2 \cap M} \big[u(P) + v(P) + w(P)\big] = 0.$$

Утверждения В.6 и В.7 показывают, что гексагональные координаты граничных точек множества M, затянутого фиксированным минимальным бинарным деревом, связаны между собой линейным уравнением. Это уравнение называется *характеристическим*. Отметим, что если рассмотреть дерево другой топологии, то характеристическое уравнение окажется, вообще говоря, другим, так как изменится разбиение множества вершин дерева на доли.

С помощью характеристического уравнения удается найти направления ребер минимального бинарного дерева данной топологии, затягивающего данное множество точек (если такое дерево существует), или, что все равно, найти гексагональную систему координат, оси которой параллельны ребрам этого минимального дерева.

Утверждение В.8 *Если система гексагональных координат $U'V'W'$ повернута относительно исходной системы UVW на угол φ против часовой стрелки, то для произвольной точки P имеем:*

$$\begin{pmatrix} u'(P) \\ v'(P) \\ w'(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & k & -k \\ -k & l & k \\ k & -k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix},$$

где $k = \sin(\varphi)/\sqrt{3}$, а $l = \cos(\varphi)$.

Воспользовавшись утверждением В.8, можно записать характеристическое уравнение, которое, очевидно, будет линейным уравнением на k и l. Поскольку повороты на углы φ, $\varphi + 2\pi/3$ и $\varphi + 4\pi/3$ дают, очевидно, одинаковые, с точностью до обозначения осей, системы координат, а также поскольку имеет место соотношение $l^2 + 3k^2 = 1$, можно, найти угол φ (если такой существует), удовлетворяющий характеристическому уравнению. Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение В.2 (Кларк, Хванг, Венг) *Исходя из гексагональных координат точек множества M и топологии бинарного дерева Γ с границей M, с помощью характеристического уравнения можно найти направления ребер невырожденного минимального дерева Γ с той же границей M (если такое дерево существует).*

2.4 Абсолютно минимальные деревья, затягивающие множества специального вида

Иногда, если наложить достаточно жесткие ограничения на устройство граничного множества M, удается полностью решить задачу о

поиске абсолютно минимального дерева. В настоящем пункте мы расскажем о некоторых задачах такого типа. Отметим, что большинство рассматриваемых в данном пункте граничных множеств лежит на границе своей выпуклой оболочки. Такие граничные множества мы будем называть *выпуклыми*[1].

Зигзаги

Рассмотрим на плоскости ломаную L, звенья которой "поворачивают в разные стороны". Последнее означает, что если фиксировать некоторую ориентацию ломаной L, и каждой паре последовательных векторов-звеньев ломаной L поставить в соответствие знак ориентированного угла от первого звена ко второму, то получится знакопеременная последовательность. Ломаные, обладающие таким свойством, называются *зигзагами*.

Пусть теперь M — конечное множество точек плоскости. Множество M называется *зигзагом*, если существует ломаная-зигзаг L, множество вершин которой совпадает с M. В этом случае говорят, что L *параметризует зигзаг* M.

Пусть $M = \{M_i\}_{i=1}^{k}$ — некоторый зигзаг, параметризованный ориентированной ломаной-зигзагом L. Предположим, что точки из M занумерованы последовательно в соответствии с ориентацией L. Зигзаг M называется *регулярным*, если существует такая его параметризация L, что последовательные углы $M_iM_{i+1}M_{i+2}$ ломаной L одинаковы по величине. Величина этого угла называется в этом случае *углом зигзага* M в данной параметризации.

Зигзаг M называется *выпуклым*, если множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Зигзаг M называется *нормальным*, если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|M_iM_{i+1}\| &\le \|M_iM_{i+2}\|, \qquad 1 \le i \le k-3, \\ \|M_{i+1}M_{i+2}\| &\le \|M_iM_{i+2}\|, \qquad 2 \le i \le k-2. \end{aligned}$$

Непосредственно из определений вытекает следующее несложное утверждение.

[1]Конечно, подмножество плоскости, состоящее из конечного числа n точек, $n \ge 2$, не является выпуклым в стандартном смысле этого слова. Множества, лежащие на границе своей выпуклой оболочки обычно называют *экстремальными*. Однако, в данном контексте для экстремальных граничных множеств традиционно используется термин "выпуклое граничное множество". Мы не будем отступать от общепринятой терминологии.

Утверждение В.9 *Пусть M — некоторый зигзаг. Если зигзаг M выпуклый, то отрезок M_1M_k пересекает каждый отрезок M_iM_{i+1}. Если зигзаг M нормальный, то угол $M_iM_{i+1}M_{i+2}$ не меньше чем $\pi/3$.*

Рассмотрим регулярный выпуклый зигзаг M, и пусть α — угол зигзага M, а L — параметризующая M ломаная. Обозначим через Δ_i невырожденные треугольники, ограниченные ломаной L и отрезком M_1M_k, см. рис 7. Построим в каждом треугольнике Δ_i абсолютно минимальное дерево T_i, затягивающее вершины треугольника Δ_i, и обозначим через T дерево, совпадающее с объединением $\cup T_i$ деревьев T_i. Положим

$$x_i = \|M_{2i-1}M_{2i}\|, \quad \text{и} \quad y_i = \|M_{2i}M_{2i+1}\|.$$

Тогда имеет место следующий результат, доказанный Ду, Хвангом и Венгом [20].

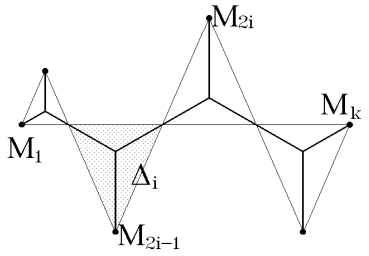


Рис. 7: Абсолютно минимальная сеть, затягивающая зигзаг.

Предложение В.3 (Ду, Хванг, Венг) *Если M — регулярный выпуклый нормальный зигзаг с углом α (по отношению к некоторой фиксированной параметризации), то построенное выше дерево T является абсолютно минимальным деревом, затягивающим M. Его длина имеет вид:*

$$\sqrt{\left(\sum x_i\right)^2 + \left(\sum y_i\right)^2 - 2\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)\cos(\pi/3+\alpha)} \quad \text{при } \pi/3 \le \alpha \le 2\pi/3,$$

$$\sum x_i + \sum y_i \quad \text{при } 2\pi/3 \le \alpha \le \pi.$$

Из предложения В.3 вытекает, что при $\pi/3 \le \alpha < 2\pi/3$ абсолютно минимальное дерево, затягивающее регулярный выпуклый зигзаг с углом α, содержит точки Штейнера, а при $2\pi/3 \le \alpha \le \pi$ — не содержит. Последнее означает, что абсолютно минимальное дерево в этом случае совпадает с минимальным остовным деревом.

Точки на окружности

Другой класс граничных множеств, для которого удается найти абсолютно минимальное дерево, это точки, расположенные на окружности достаточно плотно. Оказывается, в этом случае абсолютно минимальное дерево является минимальным остовным деревом для своих граничных точек.

Пусть $M = \{M_i\}$ — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности единичного радиуса. Положим $\rho = \sqrt{3}/2$, и $k = 1 - (1-\rho)\pi/\rho = 0,51399\ldots$. Тогда имеет место следующий результат, полученный Ду, Хвангом и Чао [19].

Предложение B.4 (Ду, Хванг, Чао) *Если длины всех сторон многоугольника M, кроме, быть может, одной, меньше, чем k, то абсолютно минимальное дерево для множества M представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.*

Усиление этого результата получено в работе [73] Рубинштейна и Томаса. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение B.5 (Рубинштейн, Томас) *Пусть $M = \{M_i\}$ — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности радиуса r. Если не более одной стороны многоугольника M имеет строго большую чем r длину, то абсолютно минимальное дерево для множества M представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.*

“Достаточно плотные” выпуклые многоугольники

Следующий результат получен Рубинштейном, Томасом и Коле [86] и является обобщением предыдущего. Авторы статьи [86] описывают некоторый класс выпуклых многоугольников, для которых абсолютно минимальная сеть снова совпадает с множеством сторон многоугольника, за исключением самой длинной. Вершины этих многоугольников по-прежнему расположены “достаточно плотно”, но уже не обязательно лежат на окружности.

Пусть $M = \{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$ — последовательные вершины некоторого строго выпуклого многоугольника, который будем обозначать той же буквой M. Для удобства предположим, что индексы i в M_i являются элементами группы $\mathbb{Z}_n$. Для любых трех последовательных точек M_{i-1}, M_i и M_{i+1} обозначим через r_i и O_i радиус и центр окружности, описанной вокруг треугольника $M_{i-1}M_iM_{i+1}$. Наименьшее из r_i число r называется *радиусом максимальной кривизны многоугольника M.*

Мы говорим, что четыре последовательных вершины M_{i-1}, M_i, M_{i+1} и M_{i+2} *совместимы*, если центры O_i и O_{i+1} окружностей, описанных вокруг соответствующих треугольников, лежат с той же стороны относит прямой (M_i, M_{i+1}), что и все остальные точки M_j.

Предложение B.6 (Томас, Рубинштейн, Коле) *Пусть r — радиус максимальной кривизны выпуклого многоугольника M, и пусть все последовательные четверки точек из M совместимы. Если не более одной стороны многоугольника M длиннее чем r, то абсолютно минимальная сеть, затягивающая M, состоит из всех сторон многоугольника M, за исключением самой длинной.*

Вершины квадратной решетки

В работах [3]–[6] австралийских математиков под руководством Рубинштейна выполнен цикл исследований, описывающих различные свойства абсолютно минимальных сетей, затягивающих конечное множество M, состоящее из вершин стандартной квадратной решетки. Эти работы развивают результаты, полученные в [10] и [11], в первой из которых были исследованы абсолютно минимальные сети, затягивающие так называемые лестницы, т.е. все вершины с координатами (m, n), где $1 \leq m \leq m_0$, $n = 1, 2$, а во второй — высказана гипотеза о том, как устроены абсолютно минимальные деревья для решетки размера $2^k \times 2^k$, т.е. для решетки, составленной из всех вершин вида (m, n), где $1 \leq m \leq 2^k$ и $1 \leq n \leq 2^k$. А именно, Чанг, Гарднер и Грехем предположили, что в этом симметричном случае абсолютно минимальная сеть также имеет симметричную структуру и составлена из одинаковых "элементарных кирпичей", совпадающих с абсолютно минимальным деревом, затягивающим вершины единичного квадрата. Эта гипотеза была доказана в [4]. В последующих работах Бразил, Рубинштейн и Томас показали, что уже в случае решеток размера $2^k \times 2^l$, $k \neq l$, соответствующие абсолютно минимальные деревья содержат более сложные блоки, см. рис. 8. Так как эти результаты австралийской школы требуют для своей формулировки введения многих новых понятий, описывающих структуру абсолютно минимальных сетей, мы не будем приводить их здесь, а ограничимся сделанными ссылками и некоторыми примерами, приведенными на рис. 8.



Рис. 8: Примеры абсолютно минимальных сетей, затягивающих вершины, лежащие на квадратной решетке.

2.5 Минимальные остовные деревья как приближенные решения проблемы Штейнера

Рассмотрим все сети, затягивающие множество M, такие что каждая вершина сети принадлежит M. Сеть наименьшей длины среди этого семейства сетей называется *минимальным остовным деревом.* Ясно, что полученная сеть, вообще говоря, имеет большую длину, чем абсолютно минимальное дерево (например, если M — вершины правильного треугольника, то абсолютно минимальная сеть состоит из трех отрезков, соединяющих центр этого треугольника с его вершинами, а минимальное основное дерево состоит из двух сторон треугольника). Однако, как мы уже отмечали, задача поиска абсолютно минимального дерева является $\mathcal{N}P$-трудной, поэтому большое практическое значение имеет построение приближенных решений этой задачи. Один из самых распространенных способов состоит в построении минимального остовного дерева. Поэтому важно, с одной стороны, уметь как можно быстрее строить минимальные остовные деревья, а с другой стороны — уметь оценивать, на сколько длина минимального остовного дерева может отличаться от длины абсолютно минимального дерева.

Задача о поиске минимального остовного дерева легко сводится к задаче об остове минимального веса во взвешенном графе. В самом деле, пусть M — произвольное множество, состоящее из n точек плоскости. Построим линейную реализацию полного графа K_n, соединив каждую пару точек M_i и M_j из M отрезком. Превратим граф K_n во взвешенный, положив $\omega(e_{ij}) = |M_iM_j|$, где e_{ij} — ребро графа K_n, соединяющее вершины, соответствующие M_i и M_j. Очевидно, что остов минимального веса взвешенного графа K_n с весовой функцией ω совпадает с минимальным остовным деревом, затягивающим множество

M. Поэтому, для построения минимального остовного дерева можно использовать, например, полиномиальный алгоритм Краскала [61], см. ниже, который приведет к успеху за $O(n^3)$ операций.

Заметим, однако, что при поиске остова минимального веса для произвольного полного взвешенного графа с n вершинами имеется $n(n-1)/2$ входных данных (веса ребер), тогда как в случае поиска минимального остовного дерева достаточно задать координаты n точек на плоскости (граничных вершин), т.е. количество входных данных равно $2n$. Это наводит на мысль, что можно построить более быстрый алгоритм поиска минимального остовного дерева, используя геометрию этой задачи. Такой алгоритм действительно существует. Оказывается, при поиске очередного ребра e_{i+1} минимального веса достаточно перебирать лишь ребра так называемой триангуляции Делоне граничного множества, что позволяет существенно сократить число операций (Шеймос, [76]). А именно, с помощью триангуляции Делоне удается построить алгоритм, строящий минимальное остовное дерево за $O(n \lg n)$ операций.

Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного

Триангуляция Делоне тесно связана с так называемой диаграммы Вороного конечного множества точек плоскости. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — такое множество. *Многоугольником Вороного точки M_i множества M* называется множество $\mathrm{Vor}(M_i)$, состоящее из всех таких точек плоскости, расстояние до которых от точки M_i не больше, чем до любой другой точки множества M:

$$\mathrm{Vor}(M_i) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|XM_i\| \le \|XM_j\|,\ j \ne i\}.$$

Ясно, что многоугольник Вороного точки M_i представляет собой пересечение замкнутых полуплоскостей Π_j, $j \ne i$, где полуплоскость Π_j содержит точку M_i и ограничена серединным перпендикуляром к отрезку M_iM_j. Поэтому $\mathrm{Vor}(M_i)$ является выпуклым многоугольником (возможно, неограниченным).

Построив для каждой точки M_i из множества M ее многоугольник Вороного, мы получим разбиение плоскости в объединение выпуклых многоугольников, которое называется *диаграммой Вороного множества M*. Вершины многоугольников $\mathrm{Vor}(M_i)$ называются *вершинами диаграммы Вороного*, а их ребра — *ребрами диаграммы Вороного*. Ясно, что каждое ребро диаграммы Вороного принадлежит ровно двум многоугольникам Вороного.

Приведем несколько важных свойств диаграммы Вороного. Чтобы упростить формулировки, мы будем предполагать, что множество M

находится в общем положении в следующем смысле: *никакие четыре точки из M не лежат на одной окружности, и никакие три точки из M не лежат на одной прямой.*

Утверждение В.10 *В сделанных предположениях, в каждой вершине диаграммы Вороного стыкуется ровно три ее ребра.*

Таким образом, каждая вершина V диаграммы Вороного множества M является центром окружности $C(V)$, на которой лежат ровно три точки из множества M.

Утверждение В.11 *Внутри круга, ограниченного окружностью $C(V)$, не содержится точек из множества M.*

Построим теперь плоский граф $\mathcal{D}(M)$, двойственный к диаграмме Вороного, взяв в качестве множества вершин графа $\mathcal{D}(M)$ множество M. Пара вершин M_i и M_j графа $\mathcal{D}(M)$ смежны и соединены отрезком M_iM_j — ребром графа $\mathcal{D}(M)$, тогда и только тогда, когда многоугольники Вороного $\mathrm{Vor}(M_i)$ и $\mathrm{Vor}(M_j)$ имеют общее ребро. Имеет место следующий важный результат, доказанный Делоне [13].

Утверждение В.12 *В сделанных предположениях, граф $\mathcal{D}(M)$ является триангуляцией множества M.*

Определение. Граф $\mathcal{D}(M)$ называется *триангуляцией Делоне множества M.*

Из сказанного выше вытекает, что триангуляция Делоне множества M обладает следующим свойством: внутри окружности, описанной вокруг произвольного треугольника триангуляции, нет точек из M. Оказывается, это свойство можно принять за определение триангуляции Делоне. Такое определение уже не требует предположения о том, что точки множества M находятся в общем положении. Ясно, как в этом случае получить триангуляцию Делоне из диаграммы Вороного. Если построить граф $\mathcal{D}(M)$, двойственный к диаграмме Вороного $\mathrm{Vor}(M)$ произвольного множества M, то у графа $\mathcal{D}(M)$, вообще говоря, могут получиться ограниченные грани с числом вершин больше чем 3. Однако, очевидно, все вершины каждой такой грани расположены на некоторой окружности (с центром в соответствующей вершине диаграммы Вороного), внутри которой нет точек из множества M. Поэтому, чтобы завершить построение триангуляции в этом случае, достаточно дополнить граф $\mathcal{D}(M)$ ребрами произвольных триангуляций диагоналями его нетреугольных ограниченных граней.

Приведем теперь результат Шеймоса, связывающий триангуляции Делоне и минимальные остовные деревья.

Предложение B.7 *Пусть M — произвольное конечное множество точек плоскости, и Γ — некоторое минимальное остовное дерево, затягивающее M. Тогда ребра Γ являются ребрами триангуляции Делоне $\mathcal{D}(M)$ множества M.*

Итак, каждое минимальное остовное дерево, затягивающее конечное множество точек плоскости, является подграфом триангуляции Делоне этого множества. Мы не будем приводить здесь алгоритм, позволяющий быстро (а именно, за $O(n \lg n)$ операций) построить триангуляцию Делоне множества M, состоящего из n точек плоскости. Этот алгоритм подробно изложен, например, в [69]. Исходя из триангуляции Делоне, можно построить минимальное остовное дерево за n операций. Подводя итоги, сформулируем следующий результат Шеймоса [76].

Предложение B.8 (Шеймос) *Минимальное остовное дерево, затягивающее множество, состоящее из n точек плоскости, может быть построено за оптимальное время порядка $O(n \lg n)$ операций.*

Отношение Штейнера

В предыдущем разделе мы рассказали про то, как можно быстро построить приближение для абсолютно минимального дерева, т.е. минимальное остовное дерево. Однако, как мы уже отмечали, мало научиться строить какое-то приближенное решение, не менее важно понять, насколько сильно построенное приближение отличается от точного решения. Пусть имеется некоторый алгоритм $\mathcal{A}$, строящий для произвольного множества M точек плоскости некоторую сеть $\mathcal{A}(M)$, затягивающую M, которую мы хотим рассматривать как приближенное решение задачи Штейнера. Обозначим через $L_a(M)$ длину этой сети, а через $L_s(M)$ — длину абсолютно минимального дерева для M. Тогда, очевидно, число $L_s(M)/L_a(M)$ не превосходит 1, и оно тем меньше, чем алгоритм $\mathcal{A}$ хуже, т.е. чем построенное алгоритмом $\mathcal{A}$ дерево сильнее отличается от абсолютно минимального дерева. Величину

$$\rho_a = \inf_M \big(L_s(M)/L_a(M)\big),$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным множествам M точек плоскости, естественно рассматривать как характеристику "хорошести" приближений, получаемых с помощью алгоритма $\mathcal{A}$. Очевидно, что $0 \le \rho_a \le 1$. Ясно, что алгоритм A тем лучше, чем ближе число ρ_a к 1. Поэтому вычисление ρ_a для конкретных приближений представляет собой важную, однако очень сложную задачу.

Если в качестве алгоритма $\mathcal{A}$ взять построение минимального остовного дерева, то соответствующее число ρ_a известно в литературе как *отношение Штейнера* и обычно обозначается просто через ρ. Иногда бывает удобно определить также отношение Штейнера $\rho(n)$ для множеств M, состоящих из n точек плоскости.

В 1968 году Гилберт и Поллак [30] вычислили отношение Штейнера $\rho(3)$ для множеств, состоящих из трех точек. А именно, они показали, что

$$\rho(3) = \inf_{M=\{A,B,C\}\subset\mathbb{R}^2} \big(L_s(M)/L_m(M)\big) = \sqrt{3}/2,$$

где через $L_m(M)$ обозначена длина минимального остовного дерева, затягивающего множество M. Так как, очевидно, $\rho \le \rho(3)$, получаем следующую оценку: $\rho \le \sqrt{3}/2$. В той же работе Гилберт и Поллак выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза (Гилберт, Поллак) *Отношение Штейнера ρ равно*

$$\sqrt{3}/2 = 0,8660254\ldots$$

Эта гипотеза была доказано только в 1990 году Ду и Хвангом.

Предложение B.9 (Ду, Хванг) *Гипотеза Гилберта–Поллака верна, а именно $\rho = \sqrt{3}/2$.*

Отметим, что за доказательство этого результата шла упорная борьба. С одной стороны, вычислялись числа $\rho(n)$ для малых n. Поллак [67] показал, что $\rho(4) = \sqrt{3}/2$, т.е. доказал, что гипотеза справедлива для множеств M, состоящих из $n = 4$ точек. Ду, Хванг и Яо [22] доказали, что $\rho(5) = \sqrt{3}/2$, а затем Рубинштейн и Томас [72] — распространили этот результат на случай $n = 6$, вычислив $\rho(6)$. С другой стороны предпринимались попытки получить оценки снизу на ρ. Гилберт и Поллак сообщают [30], что Моор установил справедливость неравенства $0,5 \le \rho$. Затем оценка последовательно улучшалась так: Грэхем и Хванг $0,57 \le \rho$; Чанг и Хванг $0,74 \le \rho$; Ду и Хванг $0,8 \le \rho$; Чанг и Грэхем $0,824 \le \rho$. Таким образом, борьба пошла уже за сотые и тысячные. Наконец, спустя 22 года, блестящие работы Ду и Хванга [17] и [18] поставили точку в истории этой задачи.

3 Основные результаты теории локально минимальных сетей

Локально минимальные сети возникают как естественное расширение класса абсолютно минимальных сетей. Как уже отмечалось выше, локально минимальные сети неявно возникли при изучении абсолютно

минимальных сетей на плоскости: именно локально минимальные сети перебирает алгоритм Мелзака, строящий абсолютно минимальную сеть, затягивающую фиксированное конечное множество M точек плоскости. Переход к изучению локально минимальных сетей на плоскости позволяет получить ряд нетривиальных результатов, которые, в частности, дают возможность существенно сократить перебор возможных топологий при построении абсолютно минимального дерева. Отметим, что с локальной точки зрения локально минимальные сети устроены точно так же как абсолютно минимальные.

Изучение локально минимальных сетей на других римановых многообразиях также представляет интерес. Здесь особое внимание в литературе уделяется исследованию замкнутых (без фиксированной границы) локально минимальных сетей на замкнутых поверхностях с метрикой постоянной кривизны.

3.1 Плоские локально минимальные бинарные деревья с выпуклой границей

Класс бинарных деревьев является основным при изучении абсолютно минимальных деревьев, так как каждое такое дерево Γ представимо в виде объединения минимальных бинарных деревьев, стыкующихся между собой в ряде вершин степени 2. Поэтому важной проблемой является изучение свойств плоских локально минимальных бинарных деревьев. В серии работ [42], [43], [45] А. А. Тужилиным совместно с автором получена полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей[2].

Мы начнем с определения важного инварианта плоских бинарных деревьев, введенного в рассмотрение автором и А. А. Тужилиным в [42], [43], — так называемого *числа вращения*. Пусть Γ — плоское бинарное дерево, (a, b) — некоторая упорядоченная пара его ребер, и γ — единственный путь в Γ, соединяющий эти ребра. Ориентируем путь γ от a к b, и пусть P — произвольная вершина степени 3 дерева Γ, лежащая внутри γ, т.е. не совпадающая ни с одной из его концевых вершин. Выберем круговую окрестность U вершины P, такую что $U \cap \Gamma$ является деревом, не содержащим вершин из Γ, отличных от P. Тогда пересечение $\partial U \cap \Gamma$ состоит из трех точек, которые мы обозначим через A_i, $i = 1,\ 2,\ 3$. Пусть a_1 — первое, и a_2 — последнее ребро из γ, инцидентное P, и пусть $A_i \in a_i$, $i = 1,\ 2$. Рассмотрим дугу δ окружности ∂U, лежащую между A_1 и A_2 и содержащую A_3.

[2]Эти результаты не включены в основное содержание диссертации и приводятся здесь лишь для полноты литературного обзора.

Если движение по дуге δ от A_1 к A_2 происходит по часовой стрелке, то будем говорить, что мы *поворачиваем направо в точке* P. В противном случае, скажем, что мы *поворачиваем налево в точке* P. *Числом вращения* $\mathrm{tw}(a,b)$ *упорядоченной пары* (a,b) ребер плоского бинарного дерева Γ называется разность количества $\#L$ левых и количества $\#R$ правых поворотов во всех внутренних вершинах пути γ:

$$\mathrm{tw}(a,b) = \#L - \#R.$$

Определение. *Числом вращения* $\mathrm{tw}\,\Gamma$ *бинарного дерева* Γ называется максимум чисел вращения $\mathrm{tw}(a,b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер из Γ.

Оказывается в терминах числа вращения можно полностью описать все плоские локально минимальные бинарные деревья с выпуклой границей. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение B.10 *Плоское бинарное дерево* Γ *планарно эквивалентно некоторому локально минимальному бинарному дереву с выпуклой границей тогда и только тогда, когда* $\mathrm{tw}\,\Gamma \leq 5$.

Отметим, что доказательство этого результата опирается на полученное в работах [42], [43], [45] эффективное описание всевозможных топологий плоских бинарных деревьев с числом вращения, не превосходящим 5. Это описание выполнено на языке диагональных триангуляций многоугольников. Мы не будем излагать его здесь полностью, а лишь приведем ключевые идеи.

Напомним, что плоские бинарные деревья и триангуляции диагоналями плоских многоугольников — суть двойственные объекты. А именно, двойственный граф триангуляции диагоналями представляет собой бинарное дерево, и, обратно, по каждому плоскому бинарному дереву несложно построить соответствующую диагональную триангуляцию. Описание плоских бинарных деревьев с числом вращения не превосходящим 5 удобно проводить в терминах диагональных триангуляций специального вида. А именно, назовем *паркетом* диагональную триангуляцию, все треугольники которой — правильные. Оказывается, паркеты очень хорошо “чувствуют” геометрию таких бинарных деревьев.

Отметим, что если мы попытаемся построить паркет для произвольного бинарного дерева, то может оказаться, что соответствующий плоский многоугольник имеет самопересечения. Однако, оказывается, если число вращения бинарного дерева не превосходит 5, то таких проблем не возникает. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение В.11 *Каждое плоское бинарное дерево планарно эквивалентно двойственному графу некоторого вложенного паркета.*

Поэтому задача описания всех плоских бинарных деревьев с числом вращения не превосходящим 5 сводится к классификации всех вложенных паркетов, двойственные графы которых удовлетворяют этому ограничению. Обозначим класс таких паркетов через $\mathcal{WP}_5$.

Оказывается, каждый паркет из $\mathcal{WP}_5$ обладает, в некотором смысле, "регулярной" частью — так называемым скелетом, и "случайной" частью — так называемыми наростами. Назовем треугольник паркета *крайним*, если не менее двух его сторон лежат на границе паркета как подмножества плоскости. Треугольник паркета назовем *внутренним*, если все три его стороны не лежат на границе паркета. Крайний треугольник, смежный с внутренним треугольником, называется *нарост*ом. Оказывается, каждый паркет можно превратить в скелет. Для этого нужно для каждого внутреннего треугольника паркета, смежного с наростами, выбросить ровно один нарост. Эта неоднозначная процедура задает представление паркета в виде объединения скелета и наростов, см. рис. 9.

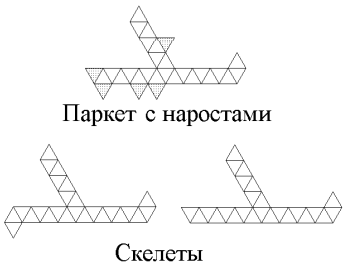


Рис. 9: Паркет с наростами и соответствующие ему скелеты.

В работах [42], [43], [45] получена полная классификация паркетов из $\mathcal{WP}_5$. Оказывается, что скелеты паркетов из $\mathcal{WP}_5$ имеют достаточно регулярную структуру и могут быть разделены на три основных семейства. Также удается описать всевозможные расположения наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{WP}_5$. Мы не будем здесь приводить формулировки соответствующих теорем, так как они требуют введения ряда новых объектов. Отметим лишь, что эта классификация является эффективной в том смысле, что она позволяет при доказательстве предложения В.10 перебрать все паркеты из $\mathcal{WP}_5$ и для каждого из них предъявить явно способ построения соответствующего локально минимального бинарного дерева с выпуклой границей.

В серии работ А. А. Тужилина и автора, см. [43], [45], [50], [51] начато исследование всех локально минимальных сетей, затягивающих вершины правильных многоугольников. Эта задача была поставлена А. Т. Фоменко в [26]. А. А. Тужилин в [82]– [84] завершил полное описание всех локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных n-угольников, в важном частном случае, когда соответствующие им паркеты являются скелетами. Оказалось, что среди скелетов, допускающих правильную минимальную реализацию, имеется две бесконечные серии и одна конечная по n серия.

В работе [56] автором и А. А. Тужилиным получены некоторые новые ограничения на возможные топологии локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных многоугольников. Кроме того, в [56] изучаются локально минимальные сети затягивающие множества точек, близкие к правильным многоугольникам. Оказывается, на таких граничных множествах локально минимальные сети устроены существенно иначе. А именно, в [56] построена бесконечная серия квазиправильных многоугольников (многоугольников, множества вершин которых лежат на окружности и не сильно отличаются от множеств вершин соответствующих правильных многоугольников), которые нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом. Сформулируем соответствующий результат.

Пусть $P = \{p_i\}$ — правильный n-угольник, вписанный в единичную окружность S^1 с центром в нуле, и ε — неотрицательное число, меньшее чем π/n. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ — произвольная последовательность из ± 1. Обозначим через m_i точку, полученную из p_i поворотом на угол $s_i\varepsilon$, и пусть $M = \{m_i\}$. Многоугольник M называется *ε-квазиправильным многоугольником типа s.*

Предложение B.12 *Пусть s — периодическая последовательность длины $n = 10k$ с периодом $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$, и ε — произвольное положительное число, такое что $\pi/(2n) \le \varepsilon < \pi/n$. Тогда при $k \ge 8$ множество M вершин ε-квазиправильного n-угольника типа s нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом.*

3.2 Невырожденные плоские локально минимальные сети с выпуклой границей

Локально минимальные сети, в отличие от абсолютно минимальных сетей, вовсе не обязаны быть деревьями. Оказалось, см. [43], [46], что описанный в предыдущем пункте подход применим также к случаю произвольных плоских локально минимальных сетей без вершин степени 2 с выпуклой границей. Сети Штейнера без вершин степени 2

называются *невырожденными.*

Пусть Γ — плоская локально минимальная невырожденная сеть с выпуклой границей. Тогда, как нетрудно показать, все ограниченные грани плоской сети Γ представляют собой шестиугольники. Плоские невырожденные сети Штейнера, все ограниченные грани которых являются шестиугольниками, называются *тривиальными* сетями.

Вообще говоря, дословно перенести понятие числа вращения на случай произвольной плоской невырожденной сети Штейнера нельзя. Дело в том, что для фиксированной пары (a, b) ребер такой сети может существовать несколько соединяющих их путей. Число вращения от a до b может быть подсчитано вдоль каждого из таких путей, и, вообще говоря, могут получиться разные ответы. Однако, на случай тривиальных сетей понятие числа вращения обобщить удается, см. [43]. Дело в том, что имеет место следующий результат.

Утверждение В.13 *Пусть* Γ — *тривиальная сеть, и* (a, b) — *произвольная пара ее граничных ребер, т.е. ребер, инцидентных вершинам степени* 1. *Тогда число вращения от* a *до* b *одинаково вдоль всех путей, соединяющих* a *и* b.

Утверждение В.13 обосновывает корректность следующего определения.

Определение. Числом вращения $\operatorname{tw}\Gamma$ плоской тривиальной сети Γ называется максимум чисел вращения $\operatorname{tw}(a, b)$ между произвольными упорядоченными парами ее граничных ребер.

Имеет место следующий результат, см. [43].

Предложение В.13 *Плоская невырожденная локально минимальная сеть с выпуклой границей является тривиальной, и ее число вращения не превосходит* 5.

Оказывается, язык паркетов применим и для описания плоских тривиальных сетей, число вращения которых не превосходит 5. В работе [43] для тривиальных сетей доказывается аналог предложения В.11 и строится описание всех вложенных паркетов, двойственные графы которых тривиальны, а число вращения этих двойственных графов не превосходит 5. Однако, это описание оказывается существенно более сложным чем в случае бинарных деревьев. Это является одной из причин того, что следующее утверждение, обратное к предложению В.13, пока не доказано.

Гипотеза *Пусть* Γ *— плоская тривиальная сеть, число вращения которой не превосходит* 5. *Тогда существует планарно эквивалентная* Γ *локально минимальная сеть* Γ_m *с выпуклой границей.*

3.3 Локально минимальные сети в других объемлющих пространствах

Минимальные сети на римановых многообразиях, отличных от $\mathbb{R}^n$, также представляют интерес. Отметим, что в случае $W \neq \mathbb{R}^2$ точные алгоритмы построения минимальных сетей не известны, см. однако [78], что делает задачу еще более сложной. На римановых многообразиях общего вида имеет смысл рассматривать также минимальные сети с пустой границей, так называемые *замкнутые сети*, которые можно представлять себе "свободно плавающими" в многообразии. Каждая такая сеть — это граф в многообразии, все вершины которого имеют степень 3, а ребра представляют собой отрезки геодезических, стыкующихся в вершинах под углами в 120°.

Замкнутые локально минимальные сети на сфере и проективной плоскости

Задача об описании всех замкнутых локально минимальных сетей на стандартной двумерной сфере S^2 возникла при изучении особенностей минимальных поверхностей — мыльных пленок, см., например [26], [85]. Пусть M — минимальная поверхность в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, и P — некоторая ее внутренняя точка. Пересечем поверхность M со сферой малого радиуса с центром в точке P. Это пересечение представляет собой некоторую сеть Γ на сфере. Несложно показать, что в пределе, при стремлении радиуса сферы к нулю, сеть Γ превращается в замкнутую локально минимальную сеть на сфере, а участок поверхности, лежащий внутри сферы, превращается в конус над Γ с вершиной в P. Таким образом, задача описания особенностей мыльных пленок сводится к описанию замкнутых локально минимальных сетей на сфере и последующему исследованию на устойчивость конусов над этими сетями с вершиной в центре сферы.

Оказывается, как было показано Хепесом в [33], см. также [26], что на сфере S^2, с точностью до движения, существует ровно 10 замкнутых локально минимальных сетей, топологии которых изображены на рис. 10. Отметим, что лишь три из них (на рис. 10 — это три верхних сети) соответствуют устойчивым конусам, и, значит, особенностям мыльных пленок. Последнее замечание соответствует одному из принципов Плато, описывающих свойства минимальных поверхностей.

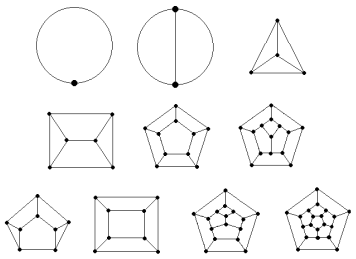


Рис. 10: Топологии замкнутых минимальных сетей на сфере.

В книге [46] замечено, что на проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ с метрикой постоянной кривизны, с точностью до движения, имеется ровно 3 замкнутых локально минимальных сети. Этот результат немедленно вытекает из описания замкнутых локально минимальных сетей на сфере и наличия локально изометричного двулистного накрытия $S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Соответствующие сети на сфере представляют собой замкнутую геодезическую, куб и додекаедр.

Замкнутые минимальные сети на других замкнутых поверхностях постоянной кривизны

Ряд примеров замкнутых минимальных сетей на двумерных поверхностях постоянной отрицательной кривизны возник в работе Эдмондса, Эвинга и Кулкарни [24]. Общая проблема описания замкнутых локально минимальных сетей на замкнутых двумерных поверхностях постоянной кривизны была поставлена А.Т.Фоменко [26], который предположил, что эта задача может оказаться проще, чем задача описания локально минимальных сетей на плоскости. Первые результаты в этом направлении были получены И. В. Птицыной (Шклянко), которая в работе [77] анонсировала несколько результатов, направленных на описание замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах. Затем, И. В. Птицыной, А. А. Тужилиным и автором было завершена полная классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах [41] и, как следствие, на плоских бутылках Клейна [46], [80]. Оказалось, что ситуация на плоских поверхностях существенно отличается от ситуации на поверхностях постоянной положительной кривизны: на каждом плоском торе и на каждой плоской бутылке Клейна имеется бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей. При этом каждая такая сеть не является жесткой: она может быть продеформирована в классе ло-

кально минимальных сетей. Мы приведем здесь лишь формулировку основного классификационного результата для случая плоских торов, см. подробности в [41], [46].

Две сети на торе T^2 назовем *эквивалентными*, если существует гомотопный тождественному отображению гомеоморфизм тора на себя, переводящий одну сеть в другую. Пусть плоский тор $T^2 = T^2(a,b)$ получен факторизацией стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$ по действию подгруппы сдвигов $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ с образующими a и b, где a и b — фиксированные линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^2$, и обозначим через $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to T^2$ — соответствующее локально изометричное накрытие. Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на торе T^2, и $\widetilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ — поднятие сети Γ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда $\widetilde{\Gamma}$ представляет собой бесконечный плоский граф, все ребра которого — прямолинейные отрезки, стыкующиеся между собой в вершинах степени 3 под углами в 120°. Граф $\widetilde{\Gamma}$ инвариантен относительно сдвигов на векторы a и b.

Путь γ в сети $\widetilde{\Gamma}$ назовем *сетевой геодезической*, если при движении вдоль пути γ, проходя через его внутренние вершины, мы попеременно сворачиваем то "налево", то "направо" (понятие левых и правых поворотов определяется так же как в случае обычных плоских невырожденных сетей Штейнера). Пусть P — произвольная вершина из $\widetilde{\Gamma}$. Ясно, что из вершины P можно выпустить 6 различных бесконечных сетевых геодезических, начинающихся в P. Фиксируем из них две таких, что их объединение само не является сетевой геодезической, и обозначим через γ_1 и γ_2, см. рис. 11. Пусть A_i — первая, считая от P, точка на γ_i, эквивалентная вершине P, т.е. такая что $\pi(P) = \pi(A_i)$. Тогда однозначно определена целочисленнная матрица $M = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$, такая что

$$PA_1 = pa + qb, \qquad PA_2 = ra + sb.$$

Обозначим через Δ определитель матрицы M. Без ограничения общности будем предполагать, что $\Delta > 0$ (ясно, что при необходимости можно перенумеровать геодезические γ_1 и γ_2).

Рассмотрим фрагменты сетевых геодезических γ_i между точками P и A_i. Каждый из них состоит из четного числа ребер сети $\widetilde{\Gamma}$. Эти числа мы обозначим через $2m$ и $2n$ для γ_1 и γ_2 соответственно. Оказывается, числа m и n делятся на определитель Δ, а пары чисел (p,q) и (r,s) — взаимно просты. Положим $mu = \Delta$, и $nv = \Delta$. Определим, наконец, целочисленную матрицу

$$\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pv & ru \\ qv & su \end{pmatrix}.$$

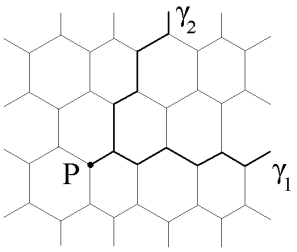


Рис. 11: Бесконечная сеть $\widetilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ и две бесконечных сетевых геодезических, начинающихся в вершине P.

Итак, по замкнутой локально минимальной сети Γ на торе T^2 мы построили целочисленную матрицу $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ с положительным определителем. Это построение зависит от выбора пары сетевых геодезических (γ_1, γ_2). Несложно проверить, что если выбрать другую пару сетевых геодезических, то полученная целочисленная матрица умножится справа на некоторую степень матрицы $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим фактор множество $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$, где через $M_2^+(\mathbb{Z})$ обозначено множество всех целочисленных 2×2 матриц с положительным определителем, а через $\langle J \rangle$ — циклическая группа порядка 6, порожденная J и действующая на $M_2^+(\mathbb{Z})$ умножением справа. Каждой замкнутой локально минимальной сети на плоском торе T^2 мы сопоставили элемент из $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$, который будем называть *типом сети.* Имеет место следующий результат, см. [41].

Предложение B.14 *Эквивалентным замкнутым локально минимальным сетям соответствуют одинаковые типы из $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$. Обратно, для каждого элемента $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ существует плоский тор и замкнутая локально минимальная сеть на нем, такая что $[g]$ — тип этой сети.*

Далее, чтобы определить, существует ли на данном плоском торе $T^2(a, b)$ сеть данного типа $[g]$, где $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, мы построим на плоскости треугольник OAB следующим образом. В качестве вершины O выберем начало координат, а вершины A и B определим так:

$$A = Pa + Qb, \qquad B = Ra + Sb.$$

Предложение B.15 *Замкнутая локально минимальная сеть типа* $[g]$ *на плоском торе* $T'^2(a,b)$ *существует, если и только если все углы треугольника* OAB *меньше* 120°.

Более подробно с классификацией замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах можно познакомится в работе [41]. В качестве следствия в [46] и [80] получено полное описание замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна.

Случай поверхностей рода $g \geq 2$ с метриками постоянной отрицательной кривизны изучен гораздо хуже. Здесь известно несколько серий примеров, см. [24], [77], [46]. Совсем недавно студент механико-математического факультета М. Пронин доказал, что в каждом классе эквивалентности сетей на поверхности отрицательной кривизны существует не более одной локально минимальной сети. Другими словами, в случае отрицательной кривизны, как и в случае положительной кривизны, локально минимальные сети являются жесткими. В работе [87] А. Вдовина и Е. Селиванова описан алгоритм перечисления возможных топологий замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях фиксированного рода g при условии, что все грани сети имеют одинаковое количество вершин.

Замкнутые минимальные сети в других объемлющих пространствах

В современных приложениях, связанных прежде всего с компьютерным моделированием, важную роль играет изучение минимальных сетей на римановых многообразиях с особенностями, таких как поверхности пространственных многогранников. Отметим, что поверхность многогранника можно рассматривать как замкнутое двумерное многообразие с плоской метрикой и конечным числом особых точек — вершин многогранника. В книге [46] описана локальная структура локально минимальных сетей на многогранниках, сформулирован аналог теоремы Гаусса–Бонне для этого случая, позволяющий получать ограничения на возможную структуру минимальных сетей, приведены бесконечные серии примеров замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях всех платоновых тел, за исключением додекаэдра.

В работе [81], см. также [46], И. В. Птицына получила полное описание замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях тетраэдров (т.е. треугольных пирамид все грани которых конгруэнтны друг другу). Эта классификация вытекает из существования разветвленного накрытия каждого такого тетраэдра подходящим плоским тором и из приведенной выше классификации сетей на торах. Недавно

Т. В. Аникеева показала, что на всех платоновых телах существует бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей. Этот результат получен как следствие из следующего общего утверждения, см. [1].

Предложение В.16 *Если на поверхности многогранника P существует замкнутая локально минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической и не проходящая через вершины из P, то на многограннике P существует бесконечно много топологически разных замкнутых локально минимальных сетей. В частности, если на поверхности выпуклого многогранника существует замкнутая локально минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической, то на этом многограннике существует бесконечно много топологически разных замкнутых локально минимальных сетей.*

Ряд результатов о замкнутых локально минимальных сетях фиксированной топологии на сфере с произвольной метрикой получен Морганом и его учениками в [66].

О локально минимальных сетях в объемлющих пространствах размерности больше 2 известно очень мало. До недавнего времени все знания для случая сетей в $\mathbb{R}^3$ ограничивались небольшим набором примеров. Это связано с тем, что аналога алгоритма Мелзака для построения минимальных сетей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, не существует. Сравнительно недавно круг примеров расширился благодаря основанному на методе градиентного спуска итерационному алгоритму, предложенному Смитом [78].

Замкнутые сети в многообразиях размерности больше чем 2 также практически не изучались. Недавно М. Пронин пытался рассмотреть случай стандартной трехмерной сферы S^3. Оказалось, что замкнутые локально минимальные сети на трехмерной сфере устроены гораздо более сложно чем на двумерной. А именно, М. Пронин в [79] построил бесконечную серию примеров топологически различных замкнутых локально минимальных сетей на S^3, а также построил примеры таких сетей, которые допускают деформации в классе локально минимальных сетей. Таким образом, на сфере S^3, в отличие от S^2, существует бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей, и, кроме того, эти сети не являются жесткими.

Цели данной работы

Систематическое исследование различных геометрически естественных подходов к определению локально минимальных сетей. Доказательство

существования минимальных сетей на полных римановых многообразиях во всех рассматриваемых классах. Изучение новых эффектов, возникающих при переходе от обычных геодезических к локально минимальным сетям. Описание локальной структуры минимальных сетей на римановых многообразиях. Поиск ограничений, накладываемых геометрией и топологией объемлющего многообразия и геометрическими свойствами граничного множества на глобальное устройство минимальных сетей. Изучение глобальных геометрических свойств плоских линейных деревьев. В частности, описание (взвешенных) локально минимальных деревьев на плоскости, затягивающих множество M с заданным количеством уровней выпуклости. Изучение геометрии множества всех линейных сетей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, параллельных данной линейной сети и имеющих фиксированную геометрическую границу. Описание структуры множества всех минимальных сетей в $\mathbb{R}^n$, имеющих данную топологию и затягивающих фиксированное множество точек.

4 Краткое содержание диссертации

Во введении рассказывается история вопроса и дается обзор классических и современных результатов, посвященных исследованию минимальных сетей.

В первой главе формулируются основные определения и доказывается ряд полезных в дальнейшем технических результатов. Мы приведем здесь лишь те из них, которые необходимы для формулировки теорем.

Конечный одномерный клеточный комплекс G будем называть *топологическим графом*. Одномерные клетки топологического графа G называются его *ребрами*, а нульмерные клетки — *вершинами*. Если в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин, то такой граф G мы будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. *Подвижным подграфом* $\widehat{G}$ *графа* G *с границей* ∂G назовем подграф, натянутый на множество всех вершин из G, не входящих в ∂G.

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ *точки* P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P — вершина, и не содержащее петель из G. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — отрезки в U, соединяющие эти точки. Полученное дерево обозначим через G_U и будем называть *локальным графом точки* P. Опреде-

лим *каноническую границу* ∂G_U *локального графа* G_U, положив $\partial G_U = \big(\partial G \cap U\big) \cup \big(G \cap \partial U\big)$.

Граф G, на множестве E ребер которого задана положительная функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}$, называется *взвешенным графом*, а сама функция ω — *весовой функцией взвешенного графа* G. Значение $\omega(e)$ весовой функции на произвольном ребре e графа G называется *весом ребра* e.

Определение. Подмножество Γ многообразия W назовем *сетью*, если существует некоторый связный топологический граф G и его непрерывное отображение f в многообразие W, такое что $\Gamma = f(G)$. Непрерывное отображение $f\colon G \to W$ в этом случае называется *параметризацией сети* Γ, а граф G — *параметризующим графом сети* Γ.

Пусть Γ — произвольная сеть на многообразии W. Тогда, очевидно, существует бесконечно много различных параметризаций сети Γ. Иногда, однако, бывает удобно зафиксировать некоторую конкретную параметризацию сети. Сеть Γ вместе с некоторой фиксированной параметризацией $\varphi\colon G \to W$ называется *параметрической сетью типа* G на многообразии W. Так как параметризация $\varphi\colon G \to W$ однозначно задает, в частности, и саму сеть $\Gamma = \varphi(G) \subset W$, то естественно отождествлять параметрическую сеть (Γ, φ) с ее параметризацией $\varphi\colon G \to W$, что мы и будем делать. Таким образом, можно дать другое эквивалентное определение параметрической сети.

Определение. *Параметрической сетью типа* G или *топологии* G на многообразии W называется произвольное непрерывное отображение $\varphi\colon G \to W$ связного графа G в многообразие W.

Сеть Γ на многообразии W, совпадающая с образом $\varphi(G)$ параметрической сети $\varphi\colon G \to W$, называется *следом* параметрической сети $\varphi\colon G \to W$. Про параметрическую сеть, следом которой является данная сеть Γ, говорят, что она *параметризует* сеть Γ.

Пусть G — граф с границей ∂G, и $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть. Ограничение $\partial\Phi$ отображения Φ на ∂G называется *границей параметрической сети* Φ. Говорят, что *сеть* Φ *затягивает множество* M точек многообразия W, если $\Phi(\partial G) = M$. Параметрическую сеть Φ назовем *замкнутой*, если ее граница пуста.

Пусть W — произвольное многообразие, $\Phi\colon G \to W$ — произвольная параметрическая сеть типа G на W. Ограничения отображения Φ на вершины и ребра графа G называются соответственно *вершинами* и *ребрами* параметрической сети Φ. Ребро сети назовем *вырожденным*, если оно — отображение в точку. Параметрическую сеть Φ

будем называть (*кусочно-*)*гладкой*, если каждое ее невырожденное ребро — (кусочно-)гладкая регулярная кривая. Кусочно-гладкая параметрическая сеть Φ называется *погруженной*, если все ее ребра невырождены. Погруженная параметрическая сеть Φ называется *вложенной*, если отображение Φ является вложением топологического пространства G в W, т.е. если отображение Φ задает гомеоморфизм между параметризующим графом G и следом $\Gamma = \Phi(G)$. *В дальнейшем все рассматриваемые сети предполагаются* (*кусочно-*)*гладкими.*

Пусть W — гладкое риманово многообразие, и $\Phi\colon G \to W$ — гладкая или кусочно-гладкая параметрическая сеть на нем. Тогда естественно определить *длину* $\ell(\Phi)$ *сети* Φ как сумму длин всех ее ребер. Если G — взвешенный граф с положительной весовой функцией ω, то определим *взвешенную длину* $\ell_\omega(\Phi)$ *сети* Φ как линейную комбинацию длин всех ее ребер с коэффициентами — весами этих ребер.

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть, и P — некоторое k-мерное многообразие с краем или без, например k-мерный куб $I^k \subset \mathbb{R}^k$, где $I = [-1, 1]$ — стандартный отрезок. Пусть O — некоторая точка в P (если $P = I^k$, то в качестве O обычно выбирают точку, все координаты которой равны нулю).

Определение. *Непрерывной k-параметрической деформацией Φ_t, $t \in P$, параметрической сети* Φ называется произвольное непрерывное отображение $\Theta\colon P \times G \to W$, $\Theta(t, g) = \Phi_t(g)$, такое что $\Theta(O, g) = \Phi(g)$. Непрерывная деформация Φ_t называется *гладкой* (*кусочно-гладкой*) если, во-первых, каждая сеть Φ_t является (кусочно-)гладкой, и, во-вторых, для каждого ребра e графа G ограничение отображения Φ_t на $P \times e$ является гладким отображением.

Амплитудой деформации Φ_t в точке x назовем точную верхнюю грань расстояний между точками $\Phi(x)$ и $\Phi_t(x)$, взятую по всевозможным значениям параметра t. Максимум амплитуды деформации Φ_t, взятый по всем точкам x, назовем *амплитудой деформации* Φ_t. *Малой деформацией* будем называть деформацию с достаточно малой амплитудой.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех параметрических сетей на многообразии W. Введем на $\mathcal{M}$ отношение эквивалентности, отнеся к одному классу параметрические сети, имеющие один и тот же след. Соответствующее фактор-множество обозначим через $\mathcal{T}$, и пусть $\pi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{T}$ каноническая проекция. Элементы множества $\mathcal{T}$ будем называть *следами*, а само $\mathcal{T}$ — *пространством следов*.

Ясно, что между пространством следов и множеством всех сетей существует естественное взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем мы будем отождествлять эти два множества, перенося на следы

всю введенную для сетей терминологию. Например, если $\tau \in \mathcal{T}$ — некоторый след, то про произвольную параметрическую сеть $\Phi\colon G \to W$, такую что $\Phi \in \tau$, будем говорить, что Φ *параметризует след* τ.

Пусть $M \subset W$ — конечное множество точек, и $\Gamma \in \mathcal{T}$ — некоторый след. Скажем, что след Γ *затягивает множество* M, если M содержится в Γ, рассматриваемом как подмножество в W. В этом случае множество M называется *границей* $\partial\Gamma$ *следа* Γ. Каждый след, затягивающий некоторое граничное множество M, можно параметризовать сетью, затягивающей то же граничное множество M. След назовем *замкнутым*, если его граница пуста.

Определим теперь длину следа на римановом многообразии W. Для этого выберем произвольный след τ из $\mathcal{T}$, рассмотрим всевозможные параметрические сети $t \in \tau$, у каждой из них вычислим длину $\ell(t)$, и положим $\ell(\tau) = \inf_{t\in\tau} \ell(t)$. Число $\ell(\tau)$ будем называть *длиной следа* τ.

Вообще говоря, не для любого элемента τ из $\mathcal{T}$ можно выбрать такого представителя $t \in \tau$, длина которого равнялась бы $\ell(\tau)$. Тем не менее, во многих случаях, и, в частности, если все ребра сети могут быть параметризованы отрезками геодезических, такого представителя выбрать можно. Более того, среди таких представителей существует и единственен (с точностью до естественной эквивалентности) представитель, являющийся вложенной параметрической сетью. Этот представитель называется *каноническим представителем следа*.

Пусть Γ — сеть из пространства следов, P — произвольное k-мерное многообразие с краем или без, и $O \in P$ — некоторая точка. Отображение $\mathcal{F}$ из P в пространство $\mathcal{T}$, при котором выделенная точка O переходит в сеть Γ, назовем *деформацией следа* Γ. Ясно, что множество $\mathcal{M}$ всех параметрических сетей является дизъюнктным объединением множеств $\mathcal{M}_G$ параметрических сетей типа G по всевозможным конечным графам G. Рассмотрим множество $\pi^{-1}\big(\mathcal{F}(P)\big) \subset \mathcal{M}$ и обозначим через $\mathcal{M}_G^{\mathcal{F}}$ пересечение этого множества с $\mathcal{M}_G$. Образ множества $\mathcal{M}_G^{\mathcal{F}}$ при проекции π состоит из всех следов из $\mathcal{F}(P)$, которые могут быть параметризованы сетями типа G. Этот образ мы обозначим через $\mathcal{F}_G$. Ясно, что множества следов $\mathcal{F}_G$ могут пересекаться, и, кроме того, объединение всех $\mathcal{F}_G$ совпадает с $\mathcal{F}(P)$.

Наименьшее число множеств $\mathcal{F}_G$, которыми может быть покрыто множество $\mathcal{F}(P)$, назовем *типом деформации* $\mathcal{F}$. Деформацию $\mathcal{F}$ назовем *деформацией конечного типа*, если ее тип конечен. Деформации конечного типа удобны тем, что для них естественно определяются понятия непрерывности и гладкости. А именно, деформация $\mathcal{F}$ конечного типа называется *непрерывной* (*гладкой*), если существует такое конечное покрытие множества $\mathcal{F}(P)$ множествами $\mathcal{F}_G$, и такое сечение $\xi\colon \mathcal{F}(P) \to \mathcal{M}$ (т.е. $\pi \circ \xi(\tau) = \tau$ для произвольного следа $\tau \in \mathcal{F}(P)$), что

деформации $\xi \circ \mathcal{F}\colon P \to \mathcal{M}_G$, индуцированные $\mathcal{F}$ в пространствах $\mathcal{M}_G$, являются непрерывными (гладкими) деформациями соответствующих параметрических сетей. *В дальнейшем мы будем рассматривать лишь гладкие деформации конечного типа.*

Во второй главе определяются понятия абсолютной минимальности, а также сильной и слабой локальной минимальности для (взвешенных) параметрических сетей и понятия абсолютной и локальной минимальности для сетей–следов. Доказана теорема существования минимальных сетей во всех основных рассматриваемых семействах сетей на полных римановых многообразиях.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство сетей на римановом многообразии W, и Λ — функционал длины или взвешенной длины на $\mathcal{M}$. Сеть из $\mathcal{M}$, на которой Λ принимает наименьшее возможное значение, называется *абсолютно минимальной сетью* в $\mathcal{M}$ относительно Λ.

В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Теорема существования) *Пусть W — связное полное риманово многообразие, и M — некоторое фиксированное конечное множество точек из W, возможно пустое. Тогда*

- *в семействе $\mathcal{M}_G(\beta)$ параметрических сетей фиксированного типа G с границей $\beta\colon \partial G \to M$, возможно пустой;*
- *в семействе $\mathcal{M}_G(\beta, \omega)$ взвешенных параметрических сетей фиксированного типа G с положительной весовой функцией ω и границей $\beta\colon \partial G \to M$, возможно пустой;*
- *в семействе $\mathcal{M}_\psi(\beta)$ параметрических сетей, эквивалентных данной сети $\psi\colon G \to W$ с непустой границей $\beta\colon \partial G \to M$;*
- *в семействе $\mathcal{M}(M)$ всех параметрических сетей с границей M, возможно пустой;*
- *в семействе $\mathcal{T}(M)$ сетей–следов с границей M, возможно пустой,*

существует абсолютно минимальная сеть.

Перейдем теперь к определению локально минимальных сетей. Как мы уже отмечали, локально минимальные сети или “разветвленные геодезические” возникают как естественное обобщение понятия стандартных геодезических на случай граничного множества, состоящего из трех и более точек многообразия W. При переходе к такому граничному множеству сразу же возникает существенное отличие от случая

обычных геодезических. А именно, данное конечное подмножество многообразия можно, вообще говоря, затянуть сетями разной топологии, т.е. сетями, параметризующие графы которых не гомеоморфны. Отсюда два возможных подхода к определению локально минимальных сетей: можно определять минимальность сети в классе сетей фиксированной топологии, другими словами, в классе параметрических сетей фиксированного типа, а можно перейти к сетям–следам, разрешив тем самым топологии меняться.

Мы рассмотрим здесь обе эти возможности, начав со случая параметрических сетей. В случае параметрических сетей естественно возникает два понятия локальной минимальности — сильная и слабая. Разница между ними состоит в определении того, что такое "малость" носителя деформации параметрической сети.

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть с границей или без нее, $x \in G$ — произвольная точка графа G. *Слабой локальной сетью точки* x назовем параметрическую сеть Φ^x_{wloc}, являющуюся ограничением сети Φ на некоторый локальный граф G^x_{loc} точки x, с границей, равной ограничению отображения Φ на каноническую границу локального графа G^x_{loc}.

Определение. Параметрическая сеть Φ называется *слабо локально минимальной*, если у любой точки x ее параметризующего графа G существует такая слабая локальная сеть Φ^x_{wloc}, что любая ее достаточно малая деформация, сохраняющая границу, не уменьшает длину сети Φ^x_{wloc}.

Таким образом, слабо локально минимальные сети не уменьшает свою длину при малых деформациях, возмущающих не более одной вершины сети.

Далее, обозначим через $\widetilde{G}$ граф, полученный из G факторизацией по всем ребрам, соответствующим вырожденным ребрам сети Φ, и пусть $\pi\colon G \to \widetilde{G}$ стандартная проекция. Тогда корректно определена сеть $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{G} \to W$, такая что $\widetilde{\Phi} \circ \pi = \Phi$, которая, очевидно, не содержит вырожденных ребер. Эта сеть называется *приведенной сетью*. Прообраз вершины графа $\widetilde{G}$ при проекции π назовем *приведенной компонентой сети* Φ, соответствующей этой вершине.

Пусть $x \in G$ — произвольная точка графа G, и $y = \pi(x)$. Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U точки y в графе $\widetilde{G}$. Замкнутое множество $G^x_{\mathrm{sloc}} = \pi^{-1}(U) \subset G$ наделим естественной структурой графа, объявив его вершинами все вершины из G, попавшие в G^x_{sloc}, а также все точки из множества $\pi^{-1}(\partial U) \subset G$. Определим

границу графа G^x_{sloc}, положив:

$$\partial G^x_{\text{sloc}} = \big(\pi^{-1}(\partial U)\big) \cup \big(\partial G \cap G^x_{\text{sloc}}\big).$$

Сильной локальной сетью Φ^x_{sloc} точки x назовем параметрическую сеть, являющуюся ограничением отображения Φ на G^x_{sloc}, с соответствующей границей $\Phi|_{\partial G^x_{\text{sloc}}}$.

Определение. Параметрическая сеть Φ называется *сильно локально минимальной*, если для любой точки x ее параметризующего графа G существует такая сильная локальная сеть Φ^x_{sloc}, что любая достаточно малая деформация сети Φ^x_{sloc}, сохраняющая ее границу, не уменьшает длину сети Φ^x_{sloc}.

Таким образом, сильно локально минимальная сеть не уменьшает свою длину при малых деформациях, возмущающих не более одной вершины соответствующей приведенной сети.

Ясно, что из сильной локальной минимальности параметрической сети вытекает ее слабая локальная минимальность. Отметим также, что для погруженных сетей понятия сильной и слабой локальной минимальности совпадают.

Пусть теперь $\Gamma \subset W$ — след с границей или без, и $x \in \Gamma$ — произвольная его точка. Можно показать, что пересечение сети Γ с любой достаточно малой шаровой окрестности U точки x является следом некоторой погруженной параметрической сети, каждое ребро которой соединяет x с соответствующей точкой из ∂U. В частности, пересечение окрестности U со следом Γ вновь является следом, который мы обозначим через Γ^x_{loc}. Положим $\partial\Gamma^x_{\text{loc}} = \big(\Gamma \cap \partial U\big) \cup \big(\partial\Gamma \cap U\big)$. След Γ^x_{loc} с границей $\partial\Gamma^x_{\text{loc}}$ будем называть *локальным следом точки* $x \in \Gamma$.

Определение. След Γ называется *локально минимальным*, если у любой его точки x существует такой локальный след Γ^x_{loc}, что любая достаточно малая деформация следа Γ^x_{loc}, неподвижная на $\partial\Gamma^x_{\text{loc}}$, не уменьшает длину следа Γ^x_{loc}.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство параметрических сетей или сетей–следов на римановом многообразии W. Легко видеть, что всякая глобально минимальная сеть из $\mathcal{M}$ являтся локально минимальной в соответствующем смысле. Таким образом, следующая задача является естественным обобщением задачи о поиске в $\mathcal{M}$ абсолютно минимальных сетей.

Задача (Обобщенная проблема Штейнера) *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство сетей на римановом многообразии W. Описать все локально минимальные сети из $\mathcal{M}$.*

Из теоремы 1 вытекает, очевидно, существование сильно и слабо локально минимальных параметрических сетей, а также локально минимальных сетей–следов во всех рассматриваемых классах.

В третьей главе описывается локальное устройство локально минимальных сетей каждого из рассмотренных выше типов. Каждая такая сеть состоит, очевидно, из отрезков геодезических — иначе можно легко уменьшить ее (взвешенную) длину, продеформировав любое негеодезическое ребро. Поэтому описать локальную структуру локально минимальных сетей — это описать, как эти геодезические отрезки стыкуются в вершинах сети.

Начнем со случая параметрических сетей. Мы сформулируем теорему для случая взвешенных локально минимальных параметрических сетей, имея ввиду, что обычные локально минимальные сети есть частный случай взвешенных.

Пусть W^n — риманово многообразие размерности n, и $\Phi\colon G \to W$ — взвешенная параметрическая сеть типа G с границей $\partial\Phi$, возможно пустой, и положительной весовой функцией. Для каждой подвижной вершины V_i из Φ обозначим через N_i линейную комбинацию единичных векторов направлений приходящих в вершину V_i невырожденных ребер сети Φ с коэффициентами — весами этих ребер. Если таких ребер нет, положим $N_i = 0$. Пусть V_i — произвольная вершина. *Индексом вырождения d_i вершины* V_i назовем сумму весов всех вырожденных ребер, инцидентных V_i.

Далее, пусть $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{G} \to W$ — приведенная сеть, соответствующая сети Φ. Вершина V графа $\widetilde{G}$ называется *подвижной*, если в ее прообразе $\pi^{-1}(V)$ содержится хотя бы одна подвижная вершина из G. Рассмотрим приведенную компоненту G_d^V, соответствующую произвольной подвижной вершине V из $\widetilde{G}$, и ориентируем ребра из G_d^V так, чтобы все ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин из G_d^V, имели одни и те же начало и конец. Каждую такую ориентацию будем называть *правильной*. Определим матрицу смежности правильно ориентированного взвешенного графа G_d^V, положив c_{ij} равным по величине сумме весов всех (вырожденных) ребер графа G_d^V, соединяющих вершины V_i и V_j, и присвоив c_{ij} знак "плюс", если и только если V_i — начало всех ребер из G_d^V, идущих из V_i в V_j, и знак "минус"в противном случае. Поставим в соответствие каждой неупорядоченной паре $\{V_i, V_j\}$ соседних вершин графа G_d^V, переменную x_{ij} размерности n, а именно, $x_{ij} = (x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^n)$. Отметим, что, по определению, $x_{ij} \equiv x_{ji}$. Для каждой *подвижной* вершины V_i графа G_d^V запишем векторное линейное

уравнение

$$\sum_{\substack{j \\ V_j \text{ смежна с } V_i}} c_{ij}x_{ij} = N_i,$$

где суммирование берется по всем (не только подвижным) вершинам V_j графа G_d^V, соседним с V_i.

Определение. Линейную систему уравнений

$$\sum_{\substack{j \\ V_j \text{ смежна с } V_i}} c_{ij}x_{ij} = N_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где k — количество подвижных вершин графа G_d^V, назовем *характеристической системой локальной структуры вершины* V. Объединение характеристических систем локальной структуры по всем подвижным вершинам V приведенной сети называется *характеристической системой локальной структуры сети* Φ.

Замечание. Характеристическая система локальной структуры каждой вырожденной вершины V параметрической сети зависит, вообще говоря, от выбора правильной ориентации соответствующей приведенной компоненты. Однако, решения систем, соответствующих различным ориентациям, получаются друг из друга подходящей заменой знаков их n-мерных компонент. Поскольку, как мы увидим из нижеследующей теоремы, нас интересуют только модули n-мерных компонент решений характеристической системы, мы, допуская тем самым определенную вольность, не будем в дальнейшем различать системы, соответствующие разным правильным ориентациям.

В диссертации доказана следующая теорема о локальной структуре (взвешенных) локально минимальных параметрических сетей.

Теорема 2 (О локальной структуре) *Пусть W^n — риманово многообразие, и $\Phi\colon G \to W$ — взвешенная параметрическая сеть типа G с границей $\partial\Phi$, возможно пустой, и положительной весовой функцией.*

- *Погруженная сеть Φ локально минимальна если и только если все ее ребра — геодезические, а вектора $N_i = 0$.*
- *Сеть Φ слабо локально минимальна если и только если все ее ребра — геодезические, и для каждой подвижной вершины V_i сумма d_i весов всех инцидентных V_i вырожденных ребер больше или равна модулю вектора N_i.*

- *Если сеть* Φ *сильно локально минимальна, то все ее ребра — геодезические, и ее характеристическая система локальной структуры имеет решение, каждая* n*-мерная компонента которого по модулю не превосходит* 1.

  Если все ребра сети Φ *— геодезические, и характеристическая система локальной структуры сети* Φ *имеет решение, каждая* n*-мерная компонента которого по модулю строго меньше* 1*, то* Φ *— сильно локально минимальна.*

В случае $W = \mathbb{R}^n$ теорему 2 удается превратить в критерий локальной минимальности и для случая параметрических сетей общего вида.

Следствие 1 *Взвешенная параметрическая сеть* $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ *типа* G *с границей* $\partial\Phi$ *и положительной весовой функцией, заданная в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$*, сильно локально минимальна, если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, и ее характеристическая система локальной структуры имеет решение, каждая* n*-мерная компонента которого по модулю не превосходят* 1*.*

Для локально минимальных сетей–следов доказана следующая теорема.

Теорема 3 *След* Γ*, затягивающий конечное (возможно пустое) множество* M *точек риманова многообразия* W*, является локально минимальным тогда и только тогда, когда след* Γ *обладает следующими свойствами:*

1. *след* Γ *обладает каноническим представителем* Φ*;*
2. *все ребра канонического представителя* Φ *следа* Γ *— геодезические;*
3. *угол между каждой парой смежных ребер параметрической сети* Φ *не меньше* 120°*, поэтому, в частности, степень каждой вершины из* Φ *не превосходит трех, а в вершине степени* 3 *векторы направлений ребер расположены в одной двумерной плоскости (в касательном пространстве к многообразию* W *в этой вершине);*
4. *все вершины степени* 1 *являются граничными;*
5. *вершины степени* 2 *также являются граничными за исключением ровно одного тривиального случая, когда граница параметрической сети* Φ *пуста, а сама сеть* Φ *состоит из одной вер-*

шины и одного циклического ребра, стыкующегося в этой вершине под углами в 180° (*т.е. след* Γ' — *замкнутая геодезическая*).

Из теоремы 3 вытекает, что при описании минимальных следов можно ограничиться следами вложенных параметрических сетей, степени вершин которых не превосходят 3. Такие сети мы будем называть *сетями Штейнера.*

Опираясь на теорему 2, удается доказать следующий общий результат о локальной единственности.

Предложение 1 *Пусть* M — *множество, состоящее из* $n \geq 3$ *попарно различных точек, лежащих на некоторой геодезической сфере* $\partial B(\varepsilon)$ *радиуса* ε *в римановом многообразии* W. *Пусть* G — *звезда с* n *лучами и* β — *некоторое взаимно однозначное отображение множества вершин степени* 1 *звезды* G *на множество* M. *Тогда, если* ε *достаточно мало, то в классе параметрических сетей* $\mathcal{M}_G(\beta)$ *существует единственная абсолютно минимальная сеть. При этом единственная подвижная вершина этой сети расположена в замкнутом геодезическом шаре* $B(\varepsilon)$.

Предложение 1 позволяет определить локальную минимальность погруженных параметрических сетей не в терминах деформаций, как это сделано выше, а в терминах абсолютной минимальности малого фрагмента сети.

Предложение 2 *Погруженная параметрическая сеть* Φ *в римановом многообразии* W *локально минимальна, если и только если у каждой точки сети* Φ *существует локальная сеть* $\Phi_{\mathrm{loc}}\colon G_{\mathrm{loc}} \to W$, *являющаяся абсолютно минимальной сетью типа* G_{loc} *с соответствующей границей* $\partial\Phi_{\mathrm{loc}}$.

В четвертой главе изучаются геометрические свойства *плоских линейных деревьев*, т.е. плоских связных ациклических графов, все ребра которых — прямолинейные отрезки. Отметим, что каждый плоской граф можно рассматривать как вложенную в плоскость сеть. Полученные результаты затем используются для получения ограничений на возможную глобальную структуру плоских локально минимальных и взвешенных локально минимальных сетей.

Пусть на плоскости фиксирована ориентация. Определим понятие числа вращения произвольного плоского линейного дерева Γ. Пусть a и b — произвольные ребра из Γ. Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ, начинающийся на a и заканчивающийся

на b. Путь $\gamma(a,b)$ представляет собой ориентированную ломаную на плоскости, и его последовательные звенья $a = e_1, \ldots, e_n = b$ можно рассматривать как векторы. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева* Γ назовем сумму ориентированных углов между последовательными парами (e_i, e_{i+1}), $i = 1, \ldots, n-1$, векторов-звеньев ломаной $\gamma(a,b)$, умноженную на $3/\pi$. Напомним, что ориентированный угол между упорядоченной парой (v_1, v_2) не противонаправленных векторов равен величине меньшего из двух углов между v_1 и v_2, взятой со знаком ориентированного репера (v_1, v_2).

Определение. *Числом вращения* $\operatorname{tw}\Gamma$ *линейного дерева* Γ называется максимум чисел вращения, взятый по всем упорядоченным парам ребер из Γ.

Определим теперь понятие геометрической границы плоского линейного дерева Γ.

Определение. Вершину P линейного дерева Γ назовем *граничной*, если существует проходящая через P прямая ℓ, такая что одна из открытых полуплоскостей, ограниченных ℓ, содержит все ребра из Γ, инцидентные P. Множество всех граничных вершин дерева Γ назовем *геометрической границей* дерева Γ и обозначим через $\partial_g\Gamma$.

Напомним определение разбиения произвольного непустого конечного множества M точек плоскости на уровни выпуклости. Отнесем к *первому уровню выпуклости M^1 множества M* все точки из M, лежащие на границе выпуклой оболочки множества M. Выбросим не пустое множество M^1 из M. Если полученное в результате множество не пусто, используем для его преобразования ту же процедуру. А именно, все точки из $M \setminus M^1$, попавшие на границу выпуклой оболочки этого множества, отнесем ко *второму уровню выпуклости M^2 множества M*. Продолжим этот процесс до тех пор, пока все точки из M не попадут на какой-нибудь уровень выпуклости. Множество M^i называется *i-ым уровнем выпуклости множества M*. Количество уровней выпуклости множества M обозначим через $\varkappa(M)$.

Теорема 4 *Пусть Γ — произвольное линейное дерево, и $M = \partial_g\Gamma$ — его геометрическая граница. Тогда*

$$\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(M) - 1) + 6.$$

Эта оценка является точной в том смысле, что для каждого целого $k \ge 1$ существует плоское линейное дерево Γ, такое что $\operatorname{tw}\Gamma = 12(k-1)+6$, и $\varkappa(\partial_g\Gamma) = k$.

Продемонстрируем, как работает теорема 4 на примерах плоских локально минимальных деревьев, и минимальных взвешенных деревьев.

Пусть Γ — вложенное взвешенное локально минимальное дерево фиксированного типа G с положительной весовой функцией, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Тогда, из следствия 1 вытекает, что дерево Γ — линейное, и геометрическая граница $\partial_g\Gamma$ содержится во множестве M.

Следствие 2 *Пусть* Γ — *произвольное локально минимальное взвешенное дерево типа* G *с положительной весовой функцией, затягивающее фиксированное конечное множество* M *точек плоскости. Тогда* $\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(\partial_g\Gamma) - 1) + 6 \le 12(\varkappa(M) - 1) + 6$.

Если предполагать дополнительно, что (взвешенное) локально минимальное дерево Γ является бинарным деревом, то приведенные только что результаты можно усилить. Во-первых, в этом случае естественно предполагать, что $M = \partial_g\Gamma$, и легко показать, что неравенство из следствия 2 превращается в строгое.

Кроме того, в этом случае можно естественно определить число вращения плоского бинарного (взвешенного) дерева исходя лишь из класса его планарной эквивалентности и весовой функции. Именно так было определено число вращения плоского бинарного дерева в работе автора и А. А. Тужилина [43]. Такой подход позволяет при переборе возможных топологий минимальных бинарных деревьев с данной границей отсеивать большое число вариантов исходя только из класса планарной эквивалентности дерева и весовой функции.

Пусть Γ — плоское бинарное дерево, и (a, b) — произвольная упорядоченная пара его ребер. Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ, начинающийся на a и заканчивающийся на b. Тогда, проходя через каждую внутреннюю вершину пути $\gamma(a, b)$, мы сворачиваем или "налево" или "направо" (напомним, что предполагается фиксированной некоторая ориентация плоскости). Более формально, для каждой внутренней вершины P пути $\gamma(a, b)$ построим круговую окрестность U, пересечение которой с Γ состоит из трех ребер, стыкующихся в P. Пусть A и B — точки пересечения с окружностью ∂U входящего в P и выходящего из P ребер пути $\gamma(a, b)$ соответственно. Если, двигаясь по окружности ∂U от точки A к точке B в положительном направлении, мы пройдем через точку пересечения ∂U с третьим инцидентным P ребром из Γ, то будем говорить, что в P мы свернули "налево", а если нет — то "направо". *Числом вращения* $\operatorname{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары* (a, b) ребер бинарного дерева Γ называется разность

между количеством левых и правых поворотов во всех внутренних вершинах пути γ.

Определение. *Числом вращения* $\operatorname{tw}\Gamma$ *плоского бинарного дерева* Γ называется максимум чисел вращения $\operatorname{tw}(a,b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер Γ.

Отметим, что если бинарное дерево Γ является локально минимальным, то определенное так число вращения $\operatorname{tw}\Gamma$ совпадает с числом вращения дерева Γ как линейного дерева.

Следствие 3 *Пусть* Γ — *произвольное локально минимальное бинарное дерево, затягивающее фиксированное конечное множество* M *точек плоскости. Тогда* $\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(M)-1)+5$, *где через* $\operatorname{tw}\Gamma$ *обозначено число вращения* Γ *как плоского бинарного дерева.*

Замечание. В случае $\varkappa(M)=1$, т.е. если множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, из следствия 3 вытекает оценка $\operatorname{tw}\Gamma \le 5$. Автором и А. А. Тужилиным [42], [43], [45] получено полное описание плоских бинарных деревьев с не превосходящим 5 числом вращения и доказана обратная теорема: любое плоское бинарное дерево Γ', $\operatorname{tw}\Gamma' \le 5$, эквивалентно локально минимальному дереву с границей M, $\varkappa(M)=1$, см. выше предложение B.10. Для $\varkappa(M)>1$ аналогичный результат не известен.

Перейдем к случаю взвешенных бинарных деревьев. Из следствия 1 вытекает, что веса каждых трех ребер вложенного взвешенного минимального бинарного дерева, инцидентных одной и той же его вершине степени 3, удовлетворяют *правилу треугольника*, т.е. сумма любых двух из них строго больше чем третий — это необходимое условие существования такого вложенного взвешенного минимального бинарного дерева. Поэтому, говоря о взвешенных бинарных деревьях, мы в дальнейшем всегда *будем предполагать, что веса каждой тройки ребер бинарного дерева, инцидентных одной и той же его вершине степени* 3, *удовлетворяют правилу треугольника.*

Рассмотрим произвольную вершину P степени 3 из Γ, и пусть e_i, $i=1,\ 2,\ 3$, — ребра сети Γ, инцидентные P, а ω_i — вес ребра e_i. Рассмотрим на плоскости треугольник, длины сторон которого равны ω_i, $i=1,\ 2,\ 3$, и обозначим через α_i угол этого треугольника, противолежащий стороне длины ω_i.

Упорядоченной паре (e_i,e_j), $i\ne j$, сопоставим число $\pm\alpha_k(3/\pi)$, где k — третье "дополнительное" значение индекса, т.е. $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$.

Знак "плюс" выбирается, если при движении по пути e_ie_j через вершину P мы сворачиваем налево, а знак "минус" — в противном случае. Это число назовем *твистингом от ребра* e_i *к ребру* e_j.

Рассмотрим теперь произвольную пару (a, b) ребер дерева Γ, и пусть $\gamma(a, b)$ — единственный ориентированный путь в γ, начинающийся на a и заканчивающийся на b. Пусть $a = e_1, \ldots, e_n = b$ — последовательные ребра пути $\gamma(a, b)$. *Числом вращения* $\mathrm{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары* (a, b) ребер из Γ назовем сумму твистингов последовательных пар ребер (e_i, e_{i+1}), $i = 1, \ldots, n-1$.

Определение. Максимум чисел вращения $\mathrm{tw}(a, b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер дерева Γ, называется *числом вращения* $\mathrm{tw}\,\Gamma$ *взвешенного бинарного дерева* Γ.

Отметим, что если плоское взвешенное бинарное дерево является минимальным, то его число вращения как плоского взвешенного бинарного дерева совпадает с его числом вращения как линейного дерева.

Следствие 4 *Пусть* Γ *— минимальное взвешенное бинарное дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество* M *точек плоскости. Тогда* $\mathrm{tw}\,\Gamma < 12(\varkappa(M) - 1) + 6$, *где через* $\mathrm{tw}\,\Gamma$ *обозначено число вращения* Γ *как плоского взвешенного бинарного дерева.*

В диссертации также получено обобщение алгоритма Мелзака [64] для случая взвешенных бинарных деревьев. Пусть G — произвольное топологическое взвешенное бинарное дерево с положительными весами, ∂G — некоторая граница графа G, содержащая все его вершины степени 1, и пусть $\beta\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное граничное отображение, и $\beta(\partial G) = M$. Обобщенный алгоритм Мелзака позволяет или построить вложенную минимальную взвешенная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, или установить, что такой сети не существует. Кроме того, найден аналог *линий Симпсона*, и доказано, что взвешенная длина каждой линии Симпсона равна взвешенной длине минимального бинарного дерева.

Замечание. Результаты следствий 3 и 4 были первоначально получены автором без использования теоремы 4, исходя только из теоремы о локальной структуре таких сетей, разработашого автором обобщения алгоритма Мелзака для взвешенных минимальных бинарных деревьев, и геометрических построений, аналогичных доказательству теоремы 4.

В пятой главе изучаются семейства взаимно параллельных линейных сетей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, у которых предполагаются фиксированными топология и граница. Полученные результаты используются для описания множества всех локально минимальных (взвешенных) сетей в $\mathbb{R}^n$ с фиксированной топологией и границей.

Сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ называется *линейной*, если все ее ребра — прямолинейные отрезки. Пусть Γ и Γ' — две погруженных линейных сети одного и того же типа G. Ориентируем граф G произвольным образом. Это позволит нам рассматривать образы ребер этого графа при отображениях Γ и Γ' как векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы скажем, что сети Γ и Γ' *параллельны*, если для каждого ребра e из G векторы $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ сонаправлены.

Пусть задана погруженная линейная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ типа G с некоторой фиксированной границей φ. Наша цель — описать множество $[G,\varphi]_\Gamma$ всех параллельных Γ линейных сетей того же типа G и с той же границей φ. Разрежем граф G по всем граничным вершинам степени больше 1 и определим границу каждой связной компоненты G_i как множество всех тех ее вершин степени 1, которые порождены вершинами из ∂G. Полученное разбиение графа G назовем *разбиением на невырожденные компоненты* G_i.

Чтобы описать множество $[G,\varphi]_\Gamma$, мы построим следующую линейную систему уравнений. Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторые евклидовы координаты. Фиксируем некоторую ориентацию сети Γ, и будем называть эту ориентацию *исходной*. Если e — произвольное ребро сети Γ, ориентированное одним из двух возможных способов, то положим $\varepsilon(e)$ равным 1, если эта ориентация ребра e совпадает с исходной. В противном случае, положим $\varepsilon(e) = -1$. Пусть $\nu(e)$ — координаты единичного вектора направления ребра e сети Γ в исходной ориентации.

Разобьем граф G на невырожденные компоненты, и пусть $\Gamma_i = \Gamma|_{G_i}$ — соответствующие компоненты сети Γ. Рассмотрим произвольную компоненту Γ_i. Обозначим через $M_1,\dots,M_n$ координаты образов граничных вершин вершин $v_1,\dots,v_n$ сети Γ_i. Пусть e_j — единственное граничное ребро, инцидентное вершине v_j. Для каждого ребра e_j, отличного от e_1, фиксируем некоторый ориентированный путь γ_j в Γ, соединяющий ребра e_1 и e_j, начинающийся в v_1 и заканчивающийся в v_j. Отметим, что ориентация пути γ_j определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из γ_j. Далее, пусть $c_1,\dots,c_k$ — циклы из Γ_i, соответствующие некоторой фундаментальной системе циклов графа G_i, на каждом из которых фиксирована ориентация. Как и в случае путей γ_j, ориентация каждого цикла c_q определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из c_q.

Каждому ребру e сети Γ_i поставим в соответствие вещественную переменную λ_e. Рассмотрим следующую линейную систему уравнений на вещественные переменные λ_e, записанную в векторной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e:e\in\gamma_j} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = M_j - M_1, & \forall\gamma_j, \\ \sum\limits_{e:e\in c_q} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_c = 0, & \forall c_q. \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений называется *фундаментальной системой невырожденной компоненты* Γ_i, а ее ранг — *рангом* $\operatorname{rk}\Gamma_i$ *компоненты* Γ_i.

Определение. *Фундаментальной системой сети* Γ называется линейная система уравнений, составленная из фундаментальных систем всех невырожденных компонент сети Γ. *Рангом* $\operatorname{rk}(\Gamma)$ *сети* Γ называется ранг ее фундаментальной системы.

Отметим, что определенная нами фундаментальная система сети Γ зависит от выбора путей γ_j и циклов c_q. Оказывается, однако, что все фундаментальные системы сети Γ эквивалентны как линейные системы уравнений. В частности, множества решений всех фундаментальных систем совпадают, и ранг сети Γ определен корректно, т.е. не зависит от выбора фундаментальной системы сети.

Предложение 3 *Пусть* Γ *— погруженная линейная сеть типа* G *в* $\mathbb{R}^n$ *с границей* φ. *Обозначим через* r *ранг сети* Γ, *а через* m *— количество ребер сети* Γ. *Тогда множество* $[G,\varphi]_\Gamma$ *погруженных линейных сетей типа* G *с границей* φ, *параллельных* Γ, *представляет собой внутренность выпуклого* $(m-r)$*-мерного многогранного множества* (*возможно, не ограниченного*). *Более того, многогранное множество* $[G,\varphi]_\Gamma$ *содержит не более чем* m *граней максимальной размерности.*

Чтобы использовать предложение 3 для описания множества всех взвешенных локально минимальных сетей с фиксированными топологией и границей, нужно воспользоваться следующим фактом.

Утверждение 1 *Пусть* G *— взвешенный граф с положительной весовой функцией* ω, *а* Γ *и* Γ' *— две взвешенных погруженных минимальных сети типа* G *с одной и той же границей* φ. *Тогда сети* Γ *и* Γ' *параллельны.*

Следствие 5 *Пусть* Γ *взвешенная локально минимальная погруженная сеть типа* G *в* $\mathbb{R}^n$ *с границей* φ *и положительной весовой функцией. Тогда множество взвешенных локально минимальных сетей типа* G *с границей* φ *представляет собой внутренность выпуклого* $(m-\operatorname{rk}\Gamma)$*-мерного ограниченного многогранника, где* m *— количество ребер сети. Более того, этот многогранник содержит не более чем* m *граней максимальной размерности.*

Далее, ребро Γ сети отнесем к *нулевому уровню*, если оно принадлежит какому-нибудь циклу подвижного подграфа $\widehat{G}$ этой сети. Ребро, не принадлежащее нулевому уровню, но инцидентное некоторому ребру этого уровня, назовем *ребром первого уровня*, а все остальные ребра (т.е. ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях) назовем *ребрами второго уровня*. Имеет место следующий результат.

Предложение 4 *Любые две взвешенных локально минимальных погруженных сети одного и того же типа* G *в* $\mathbb{R}^n$ *с границей* φ *и положительной весовой функцией имеют одинаковую взвешенную длину и могут быть продеформированы друг в друга в классе взвешенных локально минимальных сетей того же типа и с той же границей. Более того, при каждой такой деформации остаются неподвижными все ребра второго уровня и все прямые, содержащие ребра первого уровня.*

Для плоских (взвешенных) локально минимальных сетей Штейнера число $(m-\operatorname{rk}\Gamma)$ может быть вычислено в геометрических терминах.

Теорема 5 *Пусть* Γ *плоская взвешенная минимальная погруженная сеть Штейнера типа* G *с границей* φ *и положительной весовой функцией. Тогда множество взвешенных локально минимальных сетей типа* G *с границей* φ *представляет собой внутренность выпуклого* $(k+f)$*-мерного ограниченного многогранника, где* k *— цикломатическое число подвижного подграфа графа* G*, а* f *— количество подвижных вершин из* G *степени* 2*. Более того, этот многогранник содержит не более чем* m *граней максимальной размерности, где* m *— количество ребер сети* Γ*.*

Научная новизна

1. Доказано существование минимальных сетей во всех основных рассматриваемых классах сетей на полном римановом многообразии: для параметрических сетей фиксированного типа с данной границей, взвешенных параметрических сетей фиксированного типа с данной границей, параметрических сетей данного гомотопического типа с данной

не пустой границей, параметрических сетей любого типа с данной границей, сетей–следов с данной границей, см. теорему 1.

2. Описана локальная структура параметрических (взвешенных) минимальных сетей и сетей–следов в римановом многообразии W, см. теоремы 2 и 3. В частности, получены критерии локальной минимальности погруженных (взвешенных) параметрических сетей и сетей–следов в терминах их локальной структуры. Для параметрических (взвешенных) сетей общего вида получены как необходимое, так и достаточное условия их локальной минимальности. Для случая $W = \mathbb{R}^n$ эти условия удается превратить в критерий локальной минимальности (взвешенных) параметрических сетей общего вида, см. следствие 1.

3. Изучаются геометрические свойства плоских *линейных деревьев* — плоских связных ацикличных графов, все ребра которых — прямолинейные отрезки. Для плоских линейных деревьев вводятся оригинальные понятия их *геометрической границы* и *числа вращения*. Найдена линейная функция от числа уровней выпуклости геометрической границы плоского линейного дерева, ограничивающая сверху число вращения этого дерева, см. теорему 4. Показана точность полученной оценки.

4. В качестве следствия из теоремы 1 о локальной структуре минимальных сетей и теоремы 4 о связи между числом вращения плоского линейного дерева и числом уровней выпуклости его геометрической границы получены точные ограничения на возможную структуру локально минимальных плоских бинарных деревьев и локально минимальных плоских деревьев, затягивающих фиксированное конечное множество M точек плоскости, в терминах количества уровней выпуклости множества M и числа вращения плоских бинарных деревьев, см. следствие 3. Отметим, что понятие числа вращения для случая плоских бинарных деревьев введено автором совместно с Алексеем Августиновичем Тужилиным [43].

5. В качестве следствия из теоремы 1 о локальной структуре взвешенных минимальных сетей и теоремы 4 о связи между числом вращения плоского линейного дерева и числом уровней выпуклости его геометрической границы получены ограничения на возможную структуру взвешенных локально минимальных плоских бинарных деревьев, затягивающих фиксированное конечное множество M точек плоскости, в терминах количества уровней выпуклости множества M и числа вращения взвешенных плоских бинарных деревьев, см. следствие 4.

6. Для плоских взвешенных минимальных бинарных деревьев построен аналог алгоритма Мелзака, позволяющий для данного конечного подмножества плоскости или построить взвешенное локально минимальное бинарное дерево данного типа, или определить, что такого

дерева не существует. Также для этого случая построен аналог линий Симпсона, взвешенная длина которых оказывается равной взвешенной длине минимального дерева.

7. Показано, что множество всех линейных сетей в $\mathbb{R}^n$, параллельных данной погруженной линейной сети и имеющих те же топологию и границу, представляет собой выпуклое многогранное множество. Вычислена размерность этого многогранного множества и оценено количество его граней максимальной размерности, см. предложение 3. Этот результат используется для описания структуры множества всех (взвешенных) локально минимальных сетей данного типа, затягивающих фиксированное конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, см. следствие 5. Кроме того, изучено, чем две таких сети могут отличаться друг от друга, см. предложение 4. В качестве следствия получено обобщение теоремы Хванга [35] о единственности плоского локально минимального дерева данной топологии с данной границей на случай (взвешенных) локально минимальных деревьев в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Наконец, для случая плоских сетей Штейнера размерность многогранника всех локально минимальных сетей данного типа с данной границей вычислена в топологических терминах, см. теорему 5.

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Часть результатов получена автором совместно с А. А. Тужилиным и включена в диссертацию для полноты изложения.

Апробация работы

Результаты диссертации рассказаны и обсуждены на многочисленных научных конференциях, в том числе, на международных конференциях и математическом конгрессе, а также на ведущих научно-исследовательских семинарах как в России, так и за рубежом. В частности,

— на Ломоносовских чтениях (МГУ, Москва);

— на Зимних математических школах в Воронеже;

— на Ташкентской конференции по геометрии инвариантов многообразий (Ташкент, 1992);

— на конференции, посвященной Лобачевскому (Санкт-Петербург, 1992);

на семинаре по геометрической визуализации под руководством проф. T. Kunii (Айзу, Япония, 1993, 1997);

— на Александровских чтениях в МГУ, в том числе на международной конференции посвященной 100-летию П. С. Александрова;

— на международном математическом конгрессе (Цюрих, Швейцария, 1994);

— на конференции по уравнениям в частных производных и их приложениям (Санкт-Петербург, СПОМИ РАН, 1995);

— на конференции, посвященной Чебышеву, (МГУ, Москва, 1996);

— на международной конференции по дифференциальной геометрии (Рио де Жанейро, Бразилия, 1996);

— на международной конференции по геометрии (Санкт Петербург, Международный Математический Институт Эйлера, 1997);

— на международной конференции по интеллектуальным системам (Москва, МГУ, 1997);

— на молодежной научной школе по дискретной математике (Москва, МГУ, 1997);

— на научных семинарах в Московском государственном университете;

— на семинаре профессора J. Jost в Рурском университете (Бохум, Германия, 1993);

— на семинаре профессора A. Rigas в Институте математики, статистики и компьютерных методов (IMECC) университета г. Кампинаса (Кампинас, Бразилия, 1993);

— на семинаре профессора F. Mercury в Институте математики, статистики и компьютерных методов (IMECC) университета г. Кампинаса (Кампинас, Бразилия, 1994);

— на семинаре профессора R. Asperty в университете г. Сан-Пауло (Сан-Пауло, Бразилия, 1994);

— на семинаре профессора S. Hildebrandt в Боннском университете (Бонн, Германия, 1996);

— на семинаре профессора F. Tomi в Хайдельбергском университете (Хайдельберг, Германия, 1996);

— на семинаре профессора Ю. Манина в институте Макса Планка (Бонн, Германия, 1996);

— на семинаре профессора H. Zieschang в Рурском университете (Бохум, Германия, 1994, 1996);

— на семинарах по геометрии и топологии в ПОМИ РАН (Санкт Петербург, 1997).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 14 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Автор глубоко признателен своему учителю академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко, который научил автора работать, сформировал его научные интересы, и постоянно проявляет внимание к автору и

интерес к его работе. Автор также глубоко благодарен своему другу и коллеге Алексею Августиновичу Тужилину за многолетнее плодотворное сотрудничество в решении научных, а так же многих других проблем.

Глава 1

Обобщенные сети на многообразиях

В данной главе строятся основы теории сетей на многообразиях. Мы рассмотрим два подхода: можно рассматривать сеть как отображение в многообразие некоторого фиксированного топологического графа (так пазываемые параметрические сети), а можпо определять сеть просто как подмножество многообразия, допускающее представление в виде образа некоторой, неважно какой именно, параметрической сети (так называемые сети–следы). Если объемлющее многообразие — риманово, то естественно определяется функция — длина сети (или, более общо, взвешенная длина). В следующей главе вся эта общая теория будет использована для постановки и решения задач минимизации длины и взвешенной длины сети, см. формальные определения ниже. В данной же главе приводится ряд общих определений и предварительных технических результатов, таких как формулы первой и второй вариации длины, необходимых для дальнейшего изложения.

1.1 Графы: топологический подход

Мы будем рассматривать графы с топологической точки зрения. Такой подход будет удобен для нас в дальнейшем при определении сетей и работе с ними. Кроме того, одним из преимуществ топологического подхода является то обстоятельство, что он естественнее, чем классический комбинаторный подход, позволяет работать с графами, имеющими кратные ребра и петли, что тоже важно для нас.

1.1.1 Топологические графы, их эквивалентность

Суть топологического подхода к теории графов состоит в том, что графы рассматривается сразу вместе с введенной на них естественной топологией. Цель данного пункта — дать определение графа как топологического пространства. Говоря неформально, топологическим графом называется совокупность отрезков, склеенных по своим концам. Формальное определение удобно дать на языке клеточных комплексов.

Напомним, см., например, [28], что хаусдорфово топологическое пространство K называется *клеточным комплексом*, если задано его представление в виде объединения $\cup_{n=0}^{\infty} \cup_{i \in I_n} e_i^n$ попарно непересекающихся множеств (*клеток*), причем для каждой клетки e_i^n существует непрерывное отображение φ стандартного замкнутого n-мерного диска $D^n \subset \mathbb{R}^n$ в K, называемое *характеристическим отображением клетки* e_i^n, такое что сужение φ на внутренность $\operatorname{int} D^n$ диска D^n есть гомеоморфизм $\varphi\colon \operatorname{int} D^n \to e_i^n$. Кроме того, предполагаются выполненными следующие две независимые аксиомы.

($\mathcal{C}$) Граница $\partial e_i^n = (\operatorname{cl} e_i^n) \setminus e_i^n$ клетки e_i^n содержится в объединении конечного числа клеток e_i^m размерности $m < n$.

($\mathcal{W}$) Множество $F \subset K$ замкнуто в K тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^n пересечение $F \cap \operatorname{cl} e_i^n$ замкнуто в K.

Представление пространства K в виде объединения клеток называется *клеточным разбиением*. Ограничение $\varphi|_{S^{n-1}}$ характеристического отображения φ клетки e_i^n на границу S^{n-1} диска D^n называется *приклеивающим отображением*. Число n называется *размерностью клетки* e_i^n, а верхняя грань размерностей всех клеток комплекса K — *размерностью* K. Говорят, что комплекс *конечен*, если он состоит из конечного числа клеток.

Замкнутое подмножество клеточного комплекса K, являющееся объединением его клеток, называется *подкомплексом*. Ясно, что каждый подкомплекс — это клеточный комплекс. Если $K = \cup_{n=0}^{\infty} \cup_{i \in I_n} e_i^n$ — клеточный комплекс, то легко видеть, что множество $K^m = \cup_{n=0}^{m} \cup_{i \in I_n} e_i^n$ является замкнутым подмножеством в K, т.е. является подкомплексом. Подкомплекс K^m называется *m-ым остовом* комплекса K.

Далее, непрерывное отображение φ клеточного комплекса X в клеточный комплекс Y называется *клеточным*, если $\varphi(X^m) \subset Y^m$ для любого m. Как известно, см. например [28], каждое непрерывное отображение одного клеточного комплекса в другой гомотопно клеточному.

Иногда бывает удобным фиксировать характеристические отображения клеток клеточного комплекса. Клеточные комплексы с задан-

ными характеристическими отображениями иногда называют *оснащенными*.

Дадим теперь определение топологического графа.

Определение. *Топологическим графом* G назовем произвольный оснащенный одномерный клеточный комплекс. Клетки размерности 0 называются *вершинами* графа G, а клетки размерности 1 — *ребрами*. Замыкания ребер графа G будем называть *замкнутыми ребрами*.

Замечание. Каждый клеточный комплекс K может быть построен из стандартных замкнутых шаров с помощью приклеивающих отображений. В самом деле, пусть уже построен $(n-1)$-ый остов K^{n-1}, и $\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha \to K$ — характеристическое отображение, соответствующее n-мерной клетке e^n_α комплекса K. Поскольку $\varphi(\partial D^n_\alpha) \subset K^{n-1}$, определено отображение Φ несвязного объединения $\mathcal{S} = \amalg_\alpha S^{n-1}_\alpha$, где $S^{n-1}_\alpha = \partial D^n_\alpha$, в K^{n-1}, а именно, $\Phi|_{S^{n-1}_\alpha} = \varphi_\alpha|_{S^{n-1}_\alpha}$. Пусть $\mathcal{D} = \amalg_\alpha D^n_\alpha$. Тогда очевидно, что $K^n = \mathcal{D} \cup_\Phi K^{n-1}$, т.е. n-ый остов K^n получается из K^{n-1} приклеиванием всех n-мерных клеток по их приклеивающим отображениям.

В частности, каждый топологический граф — это топологическое пространство, склеенное из набора отрезков по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков.

Пусть G_1 и G_2 — топологические графы. Клеточное отображение $\varphi\colon G_1 \to G_2$ называется *отображением графов*, если его ограничение на каждое ребро графа G_1 есть или гомеоморфизм или отображение в точку (которая, по определению, является некоторой вершиной графа G_2).

Определение. Отображение графов называется *эквивалентностью*, если оно — гомеоморфизм. Графы G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $\varphi\colon G_1 \to G_2$.

С точки зрения теории графов эквивалентные графы устроены одинаково, и их, как правило, не различают.

Ребро e и вершина v топологического графа G называются *инцидентными*, если v лежит в замыкании ребра e. Две различных вершины v_1 и v_2 графа называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру e, про которое говорят, что оно *соединяет* вершины v_1 и v_2. Два различных ребра графа называются *соседними*, если они инцидентны одной и той же вершине. Ребро графа, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*. Ребра, не являющиеся петлями, называются *простыми*.

Граф G называется *простым*, если он, во-первых, не имеет петель, и, во-вторых, каждые две вершины из G соединяются не более чем одним ребром. Ясно, что, с точностью до эквивалентности, простой граф G можно задать как систему двухэлементных подмножеств множества всех его вершин. При этом каждое двухэлементное подмножество задает ребро графа G, соединяющее соответствующие вершины. Такой подход принят в комбинаторной теории графов, см. например [25]. Однако, для наших дальнейших целей топологический подход гораздо более удобен.

Пусть v — произвольная вершина топологического графа G. Рассмотрим ее полный прообраз при характеристических отображениях всех инцидентных ей ребер. Этот полный прообраз представляет собой объединение тех концов отрезков, параметризующих ребра, которые отображаются в вершину v. Количество элементов в этом множестве называется *степенью вершины* v и обозначается через $\deg(v)$. Таким образом, если представить топологический граф склеенным из отрезков, то степень вершины равна числу концов отрезков, склеивающихся в эту вершину. Ясно, что степень вершины v равна сумме числа простых ребер, инцидентных v, и удвоенного числа инцидентных v петель.

Замечание. Из аксиом клеточного комплекса вытекает, что степень каждой вершины топологического графа конечна. Следовательно, если граф имеет конечное число вершин, то он компактен.

Поскольку каждый топологический граф по определению является топологическим пространством, в дальнейшем терминология, относящаяся к топологическим пространствам (связность, компактность и т.д.), будет, как правило, без оговорок применяться к графам. Так же без оговорок будет использоваться терминология, относящаяся к клеточным комплексам.

1.1.2 Маршруты, пути, циклы

Определим теперь стандартные понятия маршрута, пути, цикла и т.д. воспользовавшись топологическим подходом. Начнем с определения погружения графов.

Определение. Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — отображение графов. Отображение φ называется *погружением*, если никакое ребро графа G_1 не отображается в точку.

Погружение φ назовем *невырожденным*, если никакая пара ребер графа G_1 не отображается в одно и то же ребро графа G_2. Погружение φ назовем *вложением*, если оно гомеоморфно отображает граф G_1 на его образ в G_2. Другими словами, вложение не склеивает ни ребер, ни вершин графа, а невырожденное погружение может склеивать вершины, но не может склеивать ребра.

Определение. Граф L, гомеоморфный отрезку, назовем *топологической (незамкнутой) ломаной*, а граф S, гомеоморфный окружности, — *топологической замкнутой ломаной*.

Маршрутом в графе G называется погружение φ топологической ломаной в граф G. Маршрут называется *замкнутым*, если ломаная замкнута, и *незамкнутым* в противном случае. Если отображение φ — невырожденное погружение, то соответствующий маршрут называется *погруженным путем*. Если отображение φ — вложение, то соответствующий маршрут называется *простым путем* или, для краткости, *путем*, а замкнутый простой путь — *циклом*.

1.1.3 Подграфы, остовы

Произвольный подкомплекс графа G называется *подграфом* в G. Ясно, что каждый подграф сам является графом.

Пусть $\varphi\colon L \to G$ — простой путь в графе G. Тогда $\varphi(L) \subset G$ является, очевидно, подграфом в G, который мы также будем называть *простым путем*. Далее, пусть $\varphi\colon S \to G$ — цикл в графе G. Тогда $\varphi(S) \subset G$ является, очевидно, подграфом в G, который мы также будем называть *циклом*.

Определение. Простой связный граф, несодержащий циклов, называется *деревом*.

Простой граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Степень каждой вершины полного графа с n вершинами равна, очевидно, $n-1$. При $n = 2$ полный граф является деревом, а при $n > 2$ — не является.

Простой граф G с $n+1$ вершиной называется *звездой с n лучами*, если n его вершин имеют степень 1, а одна — степень n. Вершина степени n звезды с n лучами называется *центром звезды*. Очевидно, что звезда является деревом, каждое из ребер которого соединяет центр звезды с соответствующей вершиной степени

Легко проверить, что имеет место следующий результат, см. например [25].

Предложение 1.1 *Простой связный граф G с n вершинами является деревом, если и только если G имеет ровно $(n-1)$ ребро.*

Подграф H графа G называется *остовным*, если множества вершин графов H и G совпадают. Остовный подграф связного графа G называется *остовом*, если он является деревом.

Каждый связный граф имеет остов. Количество остовов конечного связного графа может быть вычислено с помощью классической матричной теоремы Кирхгофа, см. например [25]. Нам, однако, понадобится лишь следствие из нее.

Предложение 1.2 *Число остовов полного графа с n вершинами равно n^{n-2}.*

Замечание. *В дальнейшем, там где не оговорено противное, мы будем предполагать все графы конечными.*

1.1.4 Операции над графами

Пусть G — некоторый топологический граф, и e — произвольное его ребро. Рассмотрим подпространство G' в G, полученное выкидыванием из G внутренности ребра e. Подпространство G' наделим структурой одномерного клеточного комплекса, т.е. топологического графа, объявив клетками размерности 0 (т.е. вершинами) комплекса G' все вершины графа G, а клетками размерности 1 (т.е. ребрами) комплекса G' — все ребра графа G, за исключением ребра e. Описанная только что перестройка графа G называется *выкидыванием из G ребра e* и обозначается $G \setminus e$.

Пусть G — топологический граф, и v — произвольная его вершина. Пару (G, v) назовем *отмеченным топологическим графом.*

Пусть (G, v) и (G', v') — два отмеченных топологических графа. Пусть $I = [a, b]$ — отрезок. Склеим G, I и G' (как топологические пространства) следующим образом. Точку $a \in I$ отождествим с v, а точку $b \in I$ — с v'. Полученное топологическое пространство $\overline{G}$ наделим структурой графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G и G', а в качестве ребер — все ребра из G и G', а также отрезок I (точнее, его образ при склейке). Эта операция называется *склейкой отмеченных графов (G, v) и (G', v')*, а ребро, полученное из отрезка I, — *ребром склейки.*

Пусть G — топологический граф, и v — произвольная его вершина степени больше 1. Построим новый граф G', перестав отождествлять те концы отрезков, параметризующих инцидентные v ребра, которые склеиваются в вершину v графа G. Говорят, что граф G' получен из G

разрезанием по вершине v. Ясно, что граф G' имеет столько же ребер, что и граф G, а количество вершин у графа G' больше, чем у графа G на степень d вершины v в графе G без единицы. Отметим, что у графа G' имеется ровно d вершин, которые возникли при разрезании вершины v (в графе G они все склеиваются в вершину v).

Пусть G — топологический граф, e — произвольное его ребро, и $I = [a, b]$ — отрезок, параметризующий ребро e. Пусть v и v' — вершины графа G, инцидентные ребру e (эти вершины могут совпадать, если e — циклическое ребро). Для определенности, предположим, что точка $a \in I$ отождествляется с v, а точка $b \in I$ — с v'. Выберем на e (фактически, на $[a, b]$) некоторую внутреннюю точку A, и рассмотрим два отрезка: $I_1 = [a, A]$ и $I_2 = [A, b]$. Выбросим из графа G ребро e и к полученному графу $G \setminus e$ приклеим отрезки I_1 и I_2, отождествив вершину v с точкой $a \in I_1$, а вершину v' — с точкой $b \in I_2$. Полученное топологическое пространство наделим структурой графа, объявив вершинами все вершины из $G \setminus e$, а также *две разные точки* $A_1 = A \in I_1$ и $A_2 = A \in I_2$; в качестве ребер возьмем все ребра из $G \setminus e$, плюс отрезки I_1 и I_2. Описанная операция называется *разрезанием графа* G *по точке* A и обозначается $G \setminus A$. Естественные вложения отрезков I_1 и I_2 в отрезок I порождают очевидным образом погружение графа $G \setminus A$ в граф G; при этом точки A_1 и A_2 переходят в одну точку $A \in e$. Ребро e будем называть *ребром разреза*, а точку A — *точкой разреза*. Также скажем, что ребро e при разрезании по точке A *распадается на два ребра* e_1 и e_2, параметризованных соответственно отрезками I_1 и I_2, а точка A *распадается на две вершины* A_1 и A_2 графа $G \setminus A$.

Определим теперь операцию на графе G, обратную к разрезанию. Для этого выберем в G две вершины v и v' степени 1, и пусть e и e' — ребра, инцидентные соответственно v и v'. Отождествим вершины v и v'. Полученное топологическое пространство обозначим через G'. Параметризуем очевидным образом объединение $e \cup e'$ некоторым отрезком, и после этого введем на G' структуру графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G, за исключением v и v', а в качестве множества ребер графа G' — множество всех ребер из G, из которого выброшены e и e' и добавлено $e \cup e'$. Так полученный граф обозначим через $G/v \sim v'$, а описанную операцию назовем *склейкой графа* G *по вершинам* v *и* v'. Вершины v и v' называются *вершинами склейки*.

Более общо, пусть H — произвольный подграф в топологическом графе G. Фактор-пространство G/H, очевидно, является графом, т.е. одномерным клеточным комплексом. Граф G/H называется *фактор-графом* графа G по подграфу H.

В частности, пусть граф G' получен из графа G разрезанием по вершине v степени d, и $v'_1, \ldots, v'_d$ — вершины графа G', возникшие при

этом разрезании. В качестве подграфа H' в G' выберем граф с вершинами $v'_1, \ldots, v'_d$ и не содержащий ребер, т.е. пустой граф с вершинами $v'_1, \ldots, v'_d$. Очевидно, граф G'/H' эквивалентен исходному графу G. Соответствующую проекцию $G' \to G = G'/H'$ мы обозначим через ν и назовем *восстанавливающим отображением*. Если граф G' получен из G разрезанием по нескольким вершинам, то восстанавливающее отображение определяется точно так же. Формально, в последнем случае граф G' получается последовательным применением операции разрезания по одной вершине, и восстанавливающее отображение можно определить как композицию соответствующих восстанавливающих отображений.

1.1.5 Граница графа, локальный граф

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G мы будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины — *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть G — некоторый граф с границей B. Обозначим через $\widehat{G}_B$ подграф в G, порожденный всеми подвижными вершинами графа G. Подграф $\widehat{G}_B$ называется *подвижным подграфом графа* G (по отношению к границе B). Отметим, что подвижный подграф состоит в точности из всех внутренних ребер графа G.

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ *точки* P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P — вершина, и не содержащее петель из G. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — отрезки в U, соединяющие эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U *локального графа* G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P — граничная вершина графа G. Другими словами, $\partial G_U = \big(\partial G \cap U\big) \cup \big(G \cap \partial U\big)$.

Отметим, что количество ребер произвольного локального графа графа G с центром в вершине v графа G равно степени этой вершины в графе G.

Пусть G — некоторый граф с границей ∂G. Разрежем граф G по всем граничным вершинам степени больше 1, и обозначим через G_i

полученные связные компоненты. Пусть, как и выше, ν — это восстанавливающее отображение графа $\sqcup G_i$ на G. Для каждой компоненты G_i определим границу ∂G_i как множество всех тех вершин из G_i степени 1, которые лежат в прообразе $\nu^{-1}(\partial G)$ границы ∂G при восстанавливающем отображении ν. Каждая компонента G_i с границей ∂G_i называется *невырожденной компонентой графа* G.

1.1.6 Взвешенные графы, остовы минимального веса

В заключение раздела 1.1, рассмотрим классическую оптимизационную задачу теории графов — задачу о поиске остова наименьшего веса.

Понятие взвешенного графа естественно возникает в приложениях, где различные ребра графа не всегда равноправны. Это находит отражение в следующем определении.

Граф G, на множестве E ребер которого задана функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}$ называется *взвешенным графом*, а сама функция ω — *весовой функцией взвешенного графа* G. Если e — произвольное ребро графа G, то значение $\omega(e)$ весовой функции на этом ребре называется *весом ребра* e. Рассмотрим произвольный подграф $H \subset G$. Тогда *вес* $\omega(H)$ *подграфа* H естественным образом определяется как сумма весов всех ребер из H.

В приложениях, таких как транспортная задача, часто возникает необходимость найти во взвешенном графе G подграф специального вида (например, остов) и экстремального веса. Задача о поиске остова минимального веса относится как раз к задачам такого типа.

Задача 1.1 (Об остове минимального веса) *Пусть G — связный простой взвешенный граф с весовой функцией ω. Найти остов T_0 графа G наименьшего возможного веса $\omega(T_0)$, т.е.*

$$\omega(T_0) = \min\bigl\{\omega(T) | T \text{ — остов графа } G\bigr\}.$$

Отметим, что решение этой задачи, очевидно существует (напомним, что мы предполагаем конечность графа G), и называется *остовом минимального веса* или *минимальным остовным деревом* в графе G. Однако, *a priori* вовсе не очевидно, что существует полиномиальный алгоритм, строящий остов минимального веса. Действительно, например полный граф K_n с n вершинами имеет n^{n-2} различных остовов, см. предложение 1.2, поэтому простой перебор вариантов не полиномиален.

Полиномиальные алгоритмы построения минимальных остовных деревьев были построены практически одновременно и независимо Дейкстрой [14], Краскалом [61] и Примом [70]. Проиллюстрируем идею работы алгоритмов такого типа на примере алгоритма Краскала. Этот алгоритм состоит в следующем. Пусть G — простой связный взвешенный граф, количество вершин которого обозначим через n. Начнем с так называемого пустого подграфа $O_n \subset G$, т.е. графа, состоящего из n вершин и не имеющего ребер. На первом шаге алгоритма построим подграф $T_1 \subset G$, который получается из O_n добавлением к нему ребра e_1 графа G, где e_1 — одно из ребер наименьшего веса: $\omega(e_1) \leq \omega(e)$ для произвольного ребра e графа G.

Пусть на i-ом шаге работы алгоритма построен некоторый подграф $T_i \subset G$. Тогда на $(i+1)$-ом шаге построим подграф $T_{i+1} \subset G$ так. Рассмотрим множество E_i ребер графа G, не входящих в подграф T_i и таких, что добавление любого ребра из E_i к подграфу T_i не приводит к образованию циклов. Выберем из множества E_i ребро e_{i+1} наименьшего веса. Тогда подграф T_{i+1} получается из подграфа T_i присоединением ребра e_{i+1}.

Алгоритм заканчивает работу, построив подграф T_{n-1}.

Имеет место следующий несложный результат (см., например, [25]).

Предложение 1.3 *Пусть G — взвешенный граф, весовая функция ω которого неотрицательна. В сделанных выше обозначениях, для произвольного i, $2 \leq i \leq n-1$, подграф T_i может быть построен. Более того, подграф T_{n-1} является остовом минимального веса взвешенного графа G.*

Можно показать, что алгоритм Краскала находит минимальное остовное дерево взвешенного графа G, имеющего n вершин и m ребер, за $O(nm)$ шагов [25]. Минимальные остовные деревья встречаются в приложениях, в частности, как приближенные решения проблемы Штейнера (см. Введение и [69]).

1.2 Общее определение сети

Как уже отмечалось выше, в зависимости от специфики конкретной вариационной задачи, понятие сети на многообразии определяется по разному. В настоящем параграфе обсуждаются два основных подхода и даются общие определения сетей на многообразии.

Пусть W — произвольное гладкое многообразие.

Определение. Связное подмножество Γ многообразия W назовем *сетью*, если оно представимо в виде образа $f(G)$ некоторого топологического графа G при непрерывном отображении $f\colon G \to W$, т.е. если существует некоторый топологический граф G и его непрерывное отображение f в многообразие W, такое что $\Gamma = f(G)$. Непрерывное отображение $f\colon G \to W$ в этом случае называется *параметризацией сети* Γ, а граф G — *параметризующим графом сети* Γ.

Пусть Γ — произвольная сеть на многообразии W. Тогда, очевидно, существует бесконечно много различных параметризации сети Γ.

Пример. На рис. 1.1 показаны различные параметризации одной и той же сети на плоскости $\mathbb{R}^2$. Отображение $f_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$ переводит вершину графа G_i с номером k в точку A_k сети Γ, а все вершины без номера — в точку A_7. Ребро графа G_i, инцидентное вершине с номером k, отображается в отрезок кривой A_kA_7, а все ребра, соединяющие незанумерованные вершины из G_i, отображаются в точку A_7. Отметим, что параметризующие графы G_1 и G_2 параметризаций $f_1\colon G_1 \to W$ и $f_2\colon G_2 \to W$ эквивалентны, а параметризующий граф G_3 параметризации $f_3\colon G_3 \to W$ — не эквивалентен графам G_1 и G_2.

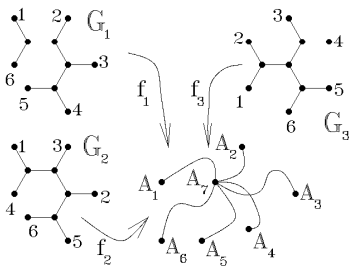


Рис. 1.1: Несколько разных параметризаций сети на плоскости

Замечание. Отметим, что из связности сети как подмножества многообразия не вытекает связность ее параметризующего графа.

Иногда бывает удобно зафиксировать некоторую конкретную параметризацию сети.

Определение. Сеть Γ вместе с некоторой фиксированной параметризацией $\varphi\colon G \to W$ называется *параметрической сетью типа* G на многообразии W.

По определению, каждая параметрическая сеть — это пара (Γ, φ), состоящая из сети $\Gamma \subset W$ и фиксированной параметризации $\varphi\colon G \to \Gamma \subset W$. Однако, так как, параметризация $\varphi\colon G \to W$ однозначно задает, в частности, и саму сеть $\Gamma = \varphi(G) \subset W$, то естественно отождествлять параметрическую сеть (Γ, φ) с ее параметризацией $\varphi\colon G \to W$, что мы и будем делать. Таким образом, можно дать другое эквивалентное определение параметрической сети.

Определение. *Параметрической сетью типа* G на многообразии W называется произвольное непрерывное отображение $\varphi\colon G \to W$ графа G в многообразие W.

Сеть Γ на многообразии W, совпадающая с образом $\varphi(G)$ параметрической сети $\varphi\colon G \to W$, называется *следом* параметрической сети $\varphi\colon G \to W$. Про параметрическую сеть, следом которой является данная сеть Γ, говорят, что она *параметризует* сеть Γ.

Итак, мы определили сети и параметрические сети на многообразии W. Эти два понятия связаны следующим очевидным образом.

Утверждение 1.1 *Пусть $\varphi\colon G \to W$ — произвольная параметрическая сеть на многообразии W. Тогда ее образ $\varphi(G)$ является сетью на W.*

Каждая сеть на многообразии W является следом некоторой параметрической сети на W.

1.3 Параметрические сети

Мы начнем изучение сетей со случая параметрических сетей. Затем, в следующем параграфе, мы вернемся к случаю общих сетей, рассматривая их как следы параметрических сетей. Ниже в данном параграфе, говоря о параметрических сетях, мы иногда, там где это не вызовет недоразумений, будем, для краткости, опускать слово "параметрическая" и называть параметрические сети просто сетями, допуская тем самым определенную вольность речи.

1.3.1 Параметрические сети, приведенные параметрические сети, компоненты вырождения

Пусть W — произвольное многообразие, $\Phi\colon G \to W$ — произвольная параметрическая сеть типа G на W, и $\Gamma = \Phi(G)$ — ее след. Ограничения отображения Φ на вершины и ребра графа G называются соответственно *вершинами* и *ребрами* параметрической сети Φ, а образы

вершин и ребер параметрической сети Φ — *следами вершин* и *следами ребер* из Φ соответственно.

В дальнейшем мы будем, как правило без оговорок, применять к параметрическим сетям терминологию, относящуюся к их параметризующим графам. Например, будем называть сеть *связной*, *конечной*, *простой* и т.п., если ее параметризующий граф связен, конечен, прост соответственно.

Пусть H — произвольный подграф параметризующего графа G параметрической сети $\Phi\colon G \to W$. Рассмотрим ограничение $\Phi|_H$ отображения Φ на подграф H. Если образ $\Phi(H)$ связен, то, очевидно, отображение $P|_H$ является параметрической сетью, которую мы будем называть *подсетью параметрической сети* Φ, соответствующей подграфу H. Подсети, порожденные связными компонентами графа G, будем называть *связными компонентами параметрической сети* Φ.

Ребро параметрической сети $\Phi\colon G \to W$, а также соответствующее ребро графа G, назовем *вырожденным*, если оно является отображением в точку. Отметим, что замыкание вырожденного ребра графа G также отображается в точку. Поэтому имеет смысл говорить о вырожденных *замкнутых* ребрах. Связные компоненты множества всех замкнутых вырожденных ребер графа G назовем *компонентами вырождения* параметризующего графа параметрической сети Φ. Каждая компонента вырождения, очевидно, является подграфом в G, целиком отображающимся в точку. Ясно, что две различные компоненты вырождения графа G не пересекаются. Параметрическую сеть, все ребра которой вырождены, назовем *точечной*. В частности, подсети, порожденные компонентами вырождения, являются точечными сетями.

Пусть H — подграф в G, являющийся объединением всех компонент вырождения параметрической сети $\Phi\colon G \to W$. Тогда корректно определено отображение $\widetilde{\Phi}$ фактор-графа G/H в многообразие W, такое что $\widetilde{\Phi} \circ \pi = \Phi$, где $\pi\colon G \to G/H$ — стандартная проекция на фактор-пространство. Ясно, что отображение $\widetilde{\Phi}$ непрерывно и, поэтому, определяет параметрическую сеть $\widetilde{\Phi}\colon G/H \to W$, которую мы назовем *приведенной параметрической сетью*. Приведенная сеть уже не содержит вырожденных ребер. След приведенной сети $\widetilde{\Phi}$ совпадает, очевидно, со следом сети Φ. Прообраз вершины приведенной сети при проекции π назовем *приведенной компонентой сети* Φ, соответствующей этой вершине. Ясно, что каждая приведенная компонента или является точкой, или представляет собой объединение некоторых компонент вырождения сети Φ.

Вершину параметрической сети Φ назовем *вырожденной*, если соответствующая вершина параметризующего графа принадлежит некото-

рой компоненте вырождения. В противном случае вершину будем называть *невырожденной*. Отметим, что все вершины приведенной сети невырождены. *Степенью невырожденной вершины* параметрической сети назовем степень соответствующей вершины параметризующего графа. *Степенью вершины* параметрической сети Φ будем называть степень соответствующей вершины приведенной сети $\widetilde{\Phi}$.

1.3.2 Гладкие, кусочно-гладкие, вложенные и погруженные параметрические сети

Пусть W — произвольное гладкое многообразие, и $\Phi\colon G \to W$ — некоторая параметрическая сеть на нем. Рассмотрим произвольное замкнутое ребро $\Phi\colon \mathrm{cl}(e) \to W$ сети Φ, которое, по определению, представляет собой ограничение отображения Φ на замыкание $\mathrm{cl}(e)$ одномерной клетки e клеточного комплекса G, и пусть $\chi\colon I \to G$ — характеристическое отображение ребра e, где $I = [0,\ 1]$ — стандартный отрезок. Будем говорить, что ребро $\Phi\colon e \to W$ параметрической сети Φ *(кусочно-)гладкое*, если отображение $\Phi \circ \chi\colon I \to W$ является (кусочно-)гладким отображением отрезка I в гладкое многообразие W (вплоть до границы), т.е. (кусочно-)гладкой кривой. Отображение $\Phi \circ \chi\colon I \to W$ иногда называют *координатным представлением* замкнутого ребра $\Phi\colon \mathrm{cl}(e) \to W$ параметрической сети Φ. Далее, ребро сети будем называть *регулярным*, если оно задает регулярную кривую на W.

Определение. Параметрическую сеть $\Phi\colon G \to W$ будем называть *(кусочно-)гладкой*, если каждое ее невырожденное ребро является (кусочно-)гладкой регулярной кривой. Кусочно-гладкая параметрическая сеть Φ называется *погруженной*, если все ее ребра — вложенные кривые. Погруженная параметрическая сеть Φ называется *вложенной*, если отображение Φ является вложением топологического пространства G в W, т.е. если отображение Φ задает гомеоморфизм между параметризующим графом G и следом $\Phi(G)$ параметрической сети Φ.

Замечание. В дальнейшем, если не оговорено противное, все параметрические сети предполагаются гладкими или кусочно-гладкими.

1.3.3 Граница параметрической сети. Замкнутые параметрические сети

Во многих практически значимых ситуациях возникает так называемая граничная задача. А именно, на многообразии W выделяется

некоторое конечное множество точек M, и рассматриваются параметрические сети, множества вершин которых содержат M. Про такие сети говорят, что они *затягивают* множество M.

Более формально, пусть $M \subset W$ — некоторое конечное множество точек многообразия W, и пусть G — граф с границей M_G, состоящей из не меньшего, чем множество M, числа элементов. Фиксируем некоторое сюръективное отображение β из M_G на M. Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть, "уважающая" отображение β, т.е. $\Phi(v) = \beta(v)$ для любой вершины v из M_G. Вершины $\Phi\colon v \to W$, где $v \in M_G$, будем называть *граничными* или *неподвижными вершинами сети* Φ, а сеть Φ — параметрической сетью, *затягивающей множество* M *по отображению* β, или параметрической сетью с *границей* $\beta\colon M_G \to M$. Не граничные вершины сети будем называть *подвижными* или *внутренними*. Если нам не важен конкретный вид отображения β, а лишь вид множества $M \subset W$, то про параметрическую сеть Φ, уважающую некоторое отображение $\beta\colon M_G \to M$ для некоторого M_G, будем говорить, что она *затягивает множество* M, и такую параметрическую сеть Φ будем называть сетью с *границей* M.

Определение. Параметрическую сеть Φ назовем *замкнутой*, если ее граница пуста.

Подвижная вершина параметрической сети, имеющая степень два и не инцидентная петле, называется *фиктивной*. Это связано с тем, что во многих задачах такие вершины можно исключить из рассмотрения, "склеив" инцидентные фиктивной вершине два (нециклических) ребра в единое ребро. Ребро параметрической сети, инцидентное некоторой ее фиктивной вершине, также будем называть *фиктивным*.

В дальнейшем нам также понадобится следующее определение.

Определение. Пусть Φ — параметрическая сеть с некоторой границей $\beta\colon M_G \to M$, и $\widetilde{\Phi}$ — соответствующая приведенная сеть. Вершину приведенной сети назовем *подвижной*, если ее прообраз при канонической проекции содержит хотя бы одну подвижную вершину сети Φ.

1.3.4 Эквивалентности параметрических сетей

Часто в рамках тех или иных задач формально различные параметрические сети обладают принципиально одинаковыми свойствами. Естественно в этих случаях считать такие сети одинаковыми. В настоящем разделе мы введем несколько естественных отношений эквивалентности на множестве параметрических сетей.

Пусть $\Phi_1\colon G_1 \to W$ и $\Phi_2\colon G_2 \to W$ — параметрические сети (замкнутые или с одной и той же границей) на многообразии W. Если существует эквивалентность $f\colon G_1 \to G_2$ графов G_1 и G_2, для которой $\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$, то говорят, что сети Φ_1 и Φ_2 получаются друг из друга *заменой параметризации*. Если сети Φ_1 и Φ_2 — гладкие, то дополнительно предполагается, что эквивалентность f является диффеоморфизмом графов в следующем смысле. Если $\Phi_1\colon \mathrm{cl}(e_1) \to W$ — произвольное замкнутое ребро сети Φ_1, переходящее в замкнутое ребро $\Phi_2\colon \mathrm{cl}(e_2) \to W$ сети Φ_2, и $\chi_i\colon I \to G_i$ — характеристические отображения ребер e_i, то композиция отображений $\chi_2^{-1} \circ f \circ \chi_1$ корректно определена на внутренности отрезка I, является там гомеоморфизмом и, как легко видеть, продолжается до гомеоморфизма на весь отрезок I. Эквивалентность f называется *диффеоморфизмом графов*, если для каждого ребра построенный гомеоморфизм отрезка I есть диффеоморфизм.

Из определения вытекает, что в случае, когда сети Φ_i затягивают одно и то же непустое множество M по граничным отображениям $\beta_i\colon M_{G_i} \to M \subset W$, то эквивалентность $f\colon G_1 \to G_2$ порождает взаимно однозначное соответствие между M_{G_1} и M_{G_2}, т.е. переводит границу M_{G_1} графа G_1 в границу M_{G_2} графа G_2. Однако, иногда нам может быть важно, чтобы отображение $f\colon M_{G_1} \to M_{G_2}$ было не произвольно, а фиксировано. Например, если $G_1 = G_2 = G$, $M_{G_1} = M_{G_2} = M_G$, и сети Φ_i отличаются лишь параметризациями $\Phi_i\colon G \to W$, то мы можем потребовать, чтобы замена параметризации порождала тождественное отображение на множестве M_G. Такая замена параметризации называется *жесткой*.

Пример. Пусть G — дерево с четырьмя вершинами степени 1 и двумя вершинами степени 3. В качестве многообразия W возьмем плоскость $\mathbb{R}^2$, а в качестве M — вершины квадрата. Пусть M_G — все вершины дерева G степени 1. Рассмотрим вложенную параметрическую сеть $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$, затягивающую множество M так, как показано на рис. 1.2. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ — разбиение множества M на два двухэлементных множества, в каждое из которых входят те точки из M, которые инцидентны ребрам сети Φ, выходящим из одной вершины. Обозначим через τ осевую симметрию, переводящую M_1 в M_2, и через τ_G — соответствующее преобразование множества M_G, т.е. такое преобразование, при котором $\tau(\Phi(m)) = \Phi(\tau_G(m))$ для любого $m \in M_G$. Продолжим преобразование τ_G до некоторой эквивалентности $f\colon G \to G$. Тогда, очевидно, сети $\Phi \circ f\colon G \to \mathbb{R}^2$ и $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ получаются друг из друга заменой параметризации, не являющейся жесткой.

Всюду ниже мы не будем различать параметрические сети, получа-

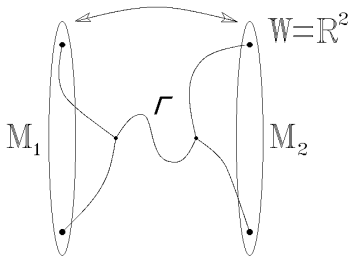


Рис. 1.2: Нежесткая замена параметризации

ющиеся одна из другой заменой параметризации (жесткой, если требуется).

Пусть теперь параметрические сети Φ_1 и Φ_2 на многообразии W удовлетворяют следующему условию: существует гомеоморфизм F многообразия W на себя, при котором след $\Phi_1(G_1)$ сети Φ_1 переходит в след $\Phi_2(G_2)$ сети Φ_2. Тогда эти параметрические сети назовем *слабо эквивалентными.* Если отображение F при этом гомотопно тождественному отображению многообразия W на себя (в классе гомеоморфизмов), то такие параметрические сети назовем *слабо деформационно эквивалентными.* Мы не предполагаем, вообще говоря, что границы слабо эквивалентных сетей переходят одна в другую. Это ограничение появится в следующей, сильной эквивалентности, которая может быть определена так.

Предположим, что существует гомеоморфизм F многообразия W на себя, при котором параметрическая сеть Φ_1 переходит, с точностью до параметризации, в параметрическую сеть Φ_2, т.е. существует такая замена параметризации $f\colon G_1 \to G_2$, что $F \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ f$. Кроме того, если сеть Φ_i затягивает множество $M_i \subset W$, то будем дополнительно предполагать, что ограничение F на множество M_1 взаимно однозначно отображает M_1 на M_2. Тогда параметрические сети Φ_1 и Φ_2 назовем *сильно эквивалентными.* Если отображение F к тому же гомотопно в классе гомеоморфизмов тождественному отображению многообразия W на себя, то такие сети назовем *сильно деформационно эквивалентными* или, просто, *эквивалентными.*

Замечание. Параметризующие графы сильно эквивалентных параметрических сетей всегда эквивалентны по определению, что, вообще говоря, неверно для слабо эквивалентных сетей. В самом деле, две любых точечных сети на связном многообразии слабо деформационно эквивалентны, однако, если их параметризующие графы не гомеоморфны,

то эти сети, очевидно, не эквивалентны в сильном смысле.

Иногда, при изучении параметрических сетей данного типа G, затягивающих фиксированное конечное подмножество M точек многообразия W, нам может оказаться важным вид граничного отображения $\beta\colon M_G \to M$. Поэтому в таком случае мы будем накладывать, как и на замены параметризации (см. выше), ограничения на сильную (деформационную) эквивалентность. А именно, мы будем предполагать, что гомеоморфизм $F\colon W \to W$ тождественен на M, а перепараметризация $f\colon G \to G$ тождественна на M_G. В этом случае сильную эквивалентность мы также будем называть *жесткой*.

Для класса вложенных сетей понятия сильной и слабой деформационной эквивалентности совпадают, поскольку вложение осуществляет гомеоморфизм параметризующего графа с образом.[1] В этом случае вместо деформации многообразия при определении деформационной эквивалентности можно рассматривать деформацию самой сети. А именно, пусть $\Phi_0\colon G \to W$ и $\Phi_1\colon G \to W$ — вложенные параметрические сети, и предположим, что задано кусочно-гладкое отображение $F\colon G \times [0,1] \to W$, где G — параметризующий граф сетей Φ_0 и Φ_1, причем сеть $F(\cdot,0) = \Phi_0$ совпадает с Φ_0, сеть $F(\cdot,1) = \Phi_1$ совпадает с Φ_1, и каждая сеть $F(\cdot,t) = \Phi_t$ является вложенной параметрической сетью. Тогда говорят, что существует (кусочно-)гладкая деформация Φ_t, $t \in [0,1]$, одной параметрической сети в другую в классе вложений. Следующее утверждение вытекает из общих теорем о существовании накрывающей изотопии, см. например [75].

Утверждение 1.2 *Вложенные сети $\Phi_0\colon G \to W$ и $\Phi_1\colon G \to W$ являются деформационно эквивалентными, если и только если существует деформация одной из них в другую в классе вложений.*

Доказательство. Если сети Φ_0 и Φ_1 деформационно эквивалентны, то, по определению, существует гомотопия F_t гомеоморфизма $F\colon W \to W$ в классе гомеоморфизмов, переводящего одну сеть в другую, в тождественное отображение. Ограничение этой гомотопии на след сети Φ_0, порождает требуемую деформацию сетей в классе вложений.

Обратно, пусть существует деформация F_l сети Φ_0 в сеть Φ_1 в классе вложений. Очевидно, эту деформацию можно продолжить до деформации некоторой малой трубчатой окрестности следа $\Phi_0(G)$ сети

[1] Для класса вложенных сетей совпадают также понятия сильной и слабой эквивалентности. Возможно, естественно было бы в этом случае называть такую эквивалентность просто "эквивалентностью", однако у нас этот термин уже закреплен за сильной деформационной эквивалентностью, что более удобно для наших целей.

Φ_0, являющейся многообразием с краем, в трубчатую окрестность следа $\Phi_1(\Gamma)$ сети Φ_1. Осталось воспользоваться общим результатом о существовании накрывающей изотопии для изотопных локально плоских вложений, см. например [75], и получить изотопию объемлющего многообразия, ограничение которой на след сети Φ_0 совпадает с исходной деформацией F_t. Утверждение доказано.

1.3.5 Длина параметрической сети на римановом многообразии

Пусть W — гладкое риманово многообразие, и $\Phi\colon G \to W$ — конечная гладкая или кусочно-гладкая параметрическая сеть на нем. Тогда естественно определить *длину* $\ell(\Phi)$ *сети* Φ как сумму длин всех ее ребер. Так как каждое ребро параметрической сети представляет собой (кусочно-)гладкое вплоть до границы отображение отрезка в многообразие, длина каждого ребра, а, значит, и всей сети, определена и конечна.

Замечание. Отметим, что непрерывная на отрезке кривая, гладкая лишь на его внутренности, может иметь бесконечную длину. В качестве примера достаточно рассмотреть график γ функции $y(x) = x\cos(\pi/x)$ на отрезке $[0,1]$. Поскольку в точках вида $1/k$ значение функции равно $\pm 1/k$, длина кривой γ по крайней мере не меньше суммы $\sum_1^\infty (1/k)$ гармонического ряда. Поэтому кривая γ имеет бесконечную длину.

Отметим, что длина параметрической сети $\Phi\colon G \to W$ не определяется ее следом $\Phi(G)$. Действительно, следы различных ребер сети могут совпадать как подмножества многообразия. В этом случае соответствующее подмножество дает вклад, пропорциональный количеству переходящих в него ребер графа G.

1.3.6 Взвешенная длина параметрической сети

Как уже упоминалось выше, в приложениях часто приходится иметь дело с графами, ребра которых "неравноправны". Один из возможных подходов к задачам такого рода состоит в рассмотрении взвешенных графов, т.е. графов, на ребрах которых заданы числа, называемые весами ребер (см. выше). Для таких графов можно ставить, например, классическую задачу о поиске остова минимального веса, которая легко решается с помощью алгоритмов типа Краскала, см.

предложение 1.3. Отметим, что в таком контексте граф рассматривается абстрактно, вне какого бы то ни было объемлющего многообразия. Однако в реальных задачах учитывать специфику объемлющего многообразия часто бывает необходимо. Скажем, при изучении транспортных сетей может оказаться, что стоимость разных участков сети пропорциональна длине этих участков с разными коэффициентами пропорциональности. Подобная ситуация может быть смоделирована с помощью следующей конструкции, возникшей в работах автора и А. А. Тужилина [46, 49, 39].

Пусть G — взвешенный граф с положительной весовой функцией ω, и $\Phi\colon G \to W$ — (кусочно-)гладкая параметрическая сеть на римановом многообразии W. Так как между множествами ребер графа G и сети Φ имеется естественное взаимно однозначное соответствие, можно считать что весовая функция ω задана так же и на множестве ребер сети Φ. Сеть Φ вместе с весовой функцией ω мы будем называть *взвешенной параметрической сетью типа* G. *Взвешенной длиной* $\ell_\omega(\Phi)$ взвешенной параметрической сети Φ назовем линейную комбинацию длин ребер сети Φ с коэффициентами — весами этих ребер:

$$\ell_\omega(\Phi) = \sum_{e \in G} \ell(e)\omega(e).$$

Ясно, что взвешенная длина любой взвешенной сети Φ конечна и неотрицательна.

Замечание. Можно рассматривать существенно более общую задачу, определив *обобщенную весовую функцию* ω *графа* G как отображение из множества ребер $E(G)$ этого графа во множество $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких функций на прямой, а *обобщенную взвешенную длину сети* $\Phi\colon G \to W$ как выражение следующего вида:

$$\sum_{e \in G} f_e\big(\ell(e)\big),$$

где через f_e обозначена функция $\omega(e)$, а через $\ell(e)$ — длина ребра e. Если $f_e(x) = a_e x$, $a > 0$, мы получим обычную взвешенную длину, определенную выше. Однако, даже если наложить на функции f_e, такие естественные ограничения как положительность и монотонность (в этом случае сети минимальной обобщенной взвешенной длины необходимо будут состоять из отрезков геодезических), локальная структура сетей минимальной обобщенной взвешенной длины, т.е. правила стыковки ребер сети в ее вершинах, будет, вообще говоря, существенно зависеть от длин ребер сети. Это существенное отличие от случая

сетей минимальной (взвешенной) длины, см. теорему 2, выводит задачу изучения геометрии сетей минимальной обобщенной взвешенной длины за рамки настоящей работы.

1.3.7 Деформации параметрических сетей

Выше мы уже сталкивались с необходимостью непрерывно деформировать сеть. В настоящем пункте мы дадим общее определение деформации сети.

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть, и P — некоторое k-мерное многообразие с краем или без, например k-мерный куб $I^k \subset \mathbb{R}^k$, где $I = [-1, 1]$ — стандартный отрезок. Пусть O — некоторая точка в P (если $P = I^k$, то в качестве O обычно выбирают точку, все координаты которой равны нулю).

Определение. *Непрерывной k-параметрической деформацией Φ_t, $t \in P$, параметрической сети* Φ называется произвольное непрерывное отображение $\Theta\colon P \times G \to W$, $\Theta(t, g) = \Phi_t(g)$, такое что $\Theta(O, g) = \Phi(g)$. Непрерывная деформация Φ_t называется *гладкой* (*кусочно-гладкой*) если, во-первых, каждая сеть Φ_t является (кусочно-)гладкой, и, во-вторых, для каждого ребра e графа G ограничение отображения Φ_t на множество $P \times e$ является гладким отображением.

Часто при деформации изменяется не вся сеть, а лишь некоторая ее часть. Замыкание подмножества графа G, на котором происходит это изменение, называется *носителем деформации*. Другими словами, носителем деформации Φ_t называется наименьшее замкнутое подмножество в G, на дополнении к которому деформация Φ_t неподвижна. Иногда, однако, нам будет удобнее работать с множествами, на которых деформация не происходит. Каждое такое множество мы будем называть *неподвижным множеством* рассматриваемой деформаций.

Более формально, пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметризованная сеть, и $\Phi_t\colon G \to W$ — ее деформация. Пусть K — множество всех тех $g \in G$, для каждого из которых $\Phi_t(g) = \Phi(g)$ при любом t из области изменение параметра деформации Φ_t. Множество K называется *неподвижным множеством деформации* Φ_t, а его элементы — *неподвижными точками* этой деформации. Отметим, что множество K замкнуто и не совпадает с дополнением до носителя, который, по определению, также замкнут.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с так называемыми “малыми” деформациями сетей. Чтобы придать этому выражению формальный смысл, вводится понятие амплитуды. Пусть, как и выше,

$\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть, $\Phi_t\colon G \to W$ — некоторая ее деформация, а x — произвольная точка графа G. *Амплитудой деформации Φ_t в точке x* назовем точную верхнюю грань расстояний между точками $\Phi(x)$ и $\Phi_t(x)$, взятую по всевозможным значениям параметра t. Максимум амплитуды деформации Φ_t, взятый по всем точкам x, назовем *амплитудой деформации* Φ_t. *Малой деформацией* будем называть деформацию с достаточно малой амплитудой.

1.3.8 Формулы первой и второй вариации длины кривой

В данном разделе мы напомним как дифференцируется функционал длинны кривой на римановом многообразии.

Пусть W — риманово многообразие, и $\gamma\colon [0,1] \to W$ — кусочно гладкая кривая на W. Пусть $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 1$ — разбиение отрезка $[0,1]$ на участки регулярности кривой γ. Последнее означает, что ограничение γ_i кривой γ на каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ представляет собой гладкую регулярную кривую. Определим *однопараметрическую деформацию γ_t кривой γ*, задав кусочно-гладкое отображение $F\colon [-1,1] \times [0,1] \to W$, такое что $F(0,x) = \gamma(x)$, и положив $F(t,x) = \gamma_t(x)$. При этом будем предполагать, что участки гладкости всех кривых γ_t совпадают.

Рассмотрим теперь траекторию движения каждой точки кривой γ при деформации γ_t. Для этого фиксируем некоторое $x \in [0,1]$ и рассмотрим кривую $\gamma_t(x)$. Вдоль γ определено поле $d\gamma_t(x)/dt|_{t=0}$ векторов скоростей кривых $\gamma_t(x)$ в момент времени $t = 0$, которое называется *полем деформации γ_t*.

Обозначим через $\ell(t)$ длину кривой γ_t, а через $E(x)$ — поле деформации γ_t. В каждой точке $\gamma(x_i)$ рассмотрим единичные векторы направлений приходящих в эту точку кривых γ_j, и обозначим через N_i сумму этих векторов, см. рис. 1.3. Положим $E_i = E(x_i)$.

Предложение 1.4 (Первая вариация длины кривой) *Функция $\ell(t)$ дифференцируема. Ее производная в начальный момент времени имеет вид*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=0}^{k} \langle E_i, N_i \rangle - \int_\gamma \langle E, (\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)^N \rangle,$$

где через $\dot\gamma$ обозначен вектор скорости кривой γ, а через $(\cdot)^N$ — ортогональная проекция на нормальное подпространство к кривой γ.

Рассмотрим теперь следующий важный частный случай формулы первой вариации. Пусть γ — гладкая кривая, соединяющая точки A

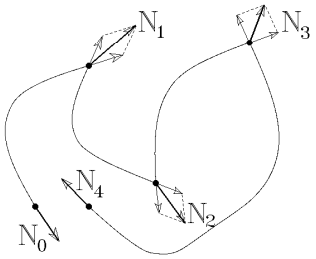


Рис. 1.3: Первая вариация длины кривой

и B многообразия W. Предположим что деформация $\gamma_t(x) = F(t,x)$ также является гладкой и оставляет неподвижными концы отрезка γ, т.е. $F(t,0) = A$, и $F(t,1) = B$.

Следствие 1.1 *В сделанных предположениях, формула первой вариации имеет вид*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = -\int_\gamma \langle E, (\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)^N\rangle.$$

В частности, кривая γ является геодезической на W тогда и только тогда, когда для любой деформации γ_t производная функции длины кривой γ_t в начальный момент времени равна нулю.

Приведем еще один важный частный случай формулы первой вариации.

Следствие 1.2 *Пусть каждая гладкая кривая γ_i, из которых составлена кривая γ, является геодезической. Тогда формула первой вариации имеет вид*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=0}^{k}\langle E_i, N_i\rangle.$$

В дальнейшем нам понадобится еще один аналог формулы первой вариации. Пусть из некоторой точки A полного риманова многообразия W выходит две гладких регулярных кривых $\gamma_i\colon [0,1] \to W$, $i = 1,\ 2$. Обозначим через $\ell(t)$ длину кратчайшей геодезической, соединяющей точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, и пусть E_i — вектор скорости кривой γ_i в начальный момент времени $t = 0$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.5 *Функция $\ell(t)$ дифференцируема в начальный момент времени $t = 0$. Ее производная имеет вид:*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \|E_1 - E_2\|.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай евклидового пространства: $W = \mathbb{R}^n$. Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные регулярные кривые, выходящие из общей точки $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = A$, и обозначим через $E_i(t)$ вектор скорости кривой γ_i в момент времени t. В силу следствия 1.2, в произвольный момент времени $t > 0$ производная $d\ell/dt$ длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, равна $\langle E_1(t), N_1\rangle + \langle E_2(t), N_2\rangle$, где $N_1 = \big(\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\big)/\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$, и $N_2 = -N_1$. Поэтому,

$$\frac{d\ell}{dt} = \Big\langle E_1(t) - E_2(t), \frac{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|}\Big\rangle.$$

Чтобы перейти к пределу при $t \to 0+$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1 *Пусть $a\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, причем $a(0) = 0$, и $a'(0) \neq 0$. Тогда*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{a(t)}{\|a(t)\|} = \frac{a'(0)}{\|a'(0)\|}.$$

Доказательство. Действительно, раскладывая $a(t)$ в ряд Тейлора с центром в точке $t = 0$, имеем:

$$\frac{a(t)}{\|a(t)\|} = \frac{a(0) + a'(0)t + o(t)}{\sqrt{\langle a(0), a(0)\rangle + 2\langle a(0), a'(0)\rangle t + \langle a'(0), a'(0)\rangle t^2 + o(t^2)}}.$$

Так как $a(0) = 0$ последнее выражение при $t \geq 0$ переписывается в виде

$$\frac{a'(0)t + o(t)}{\|a'(0)\|t\sqrt{1 + o(1)}} = \frac{a'(0) + o(1)}{\|a'(0)\|\sqrt{1 + o(1)}}.$$

Переходя к пределу при $t \to 0+$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Теперь, переходя в выражении для $d\ell/dt$ к пределу при $t \to 0+$ и положив $E_i(0) = E_i$, получим

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \Big\langle E_1 - E_2, \frac{E_1 - E_2}{\|E_1 - E_2\|}\Big\rangle = \|E_1 - E_2\|.$$

Перейдем теперь к общему случаю. Ясно, что достаточно рассмотреть нормальную окрестность точки A в многообразии W. Обозначим через $\nu_t(s)$ единственную кратчайшую геодезическую, соединяющую точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, и предположим что s — параметр, пропорциональный натуральному. Снова в силу следствия 1.2, в произвольный момент времени $t > 0$ производная $d\ell/dt$ длины отрезка кратчайшей геодезической, соединяющего точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, равна $\langle E_1(t), N_1(t)\rangle + \langle E_2(t), N_2(t)\rangle$, где векторы $N_1(t)$ и $N_2(t)$ суть единичные векторы направления геодезической ν_t, приходящей в точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ соответственно.

Обозначим через $N(t, s)$ векторное поле вдоль ν_t, пропорциональное полю скоростей $d\nu_t/ds$ и равное $N_2(t)$ в точке $\gamma_2(t)$. Очевидно, $N(t, s)$ — поле, параллельное вдоль геодезической ν_t, и значение этого поля в точке $\gamma_1(t)$ равно $-N_1(t)$. Далее, рассмотрим параллельное вдоль геодезической ν_t векторное поле $E_2(t, s)$, совпадающее с $E_2(t)$ в точке $\gamma_2(t)$. Ясно, что скалярное произведение $\langle E_2(t, s), N(t, s)\rangle$ не зависит от s. Поэтому

$$\langle E_2(t), N_2(t)\rangle = \langle E_2(t, s), N(t, s)\rangle = \langle E_2(t, 0), N(t, 0)\rangle = -\langle E_2(t, 0), N_1(t)\rangle,$$

где $E_2(t, 0)$ и $N(t, 0)$ — значения соответствующих полей в точке $\gamma_1(t)$. Таким образом,

$$\frac{d\ell}{dt} = \langle E_1(t) - E_2(t, 0), N_1(t)\rangle.$$

Перейдем теперь к пределу при $t \to 0+$. Так как при $t \to 0+$ кратчайшая геодезическая ν_t стремится к точке, очевидно, $E_2(t, 0) \to E_2$. Поэтому

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \langle E_1 - E_2, \lim_{t\to 0+} N_1(t)\rangle.$$

Для вычисления предела $\lim_{t\to 0+} N_1(t)$, введем в малой шаровой окрестности U_ε радиуса ε точки A на многообразии W нормальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$. Обозначим через ρ расстояние от точки A. Хорошо известно, что уравнения геодезических в этих координатах имеют вид $\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}(\rho, x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, где все символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(\rho, x)$ равны нулю в точке A, т.е. при $\rho = 0$, см. например [60]. Поэтому, в силу теоремы о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий, каждая геодезическая $\nu_t(s)$, лежащая в окрестности $U(\rho)$ радиуса ρ отличается от "прямой", т.е. от кривой вида $x^i(s) = a^i s + b^i$, где a^i и b^i — некоторые постоянные, на члены порядка ρ. Отметим так же, что в силу регулярности кривых $\gamma_i(t)$ можно предполагать, что расстояние $\rho(\gamma_i(t))$ от точки A до точки $\gamma_i(t)$ монотонно возрастает, и $\rho(\gamma_i(t)) \to 0+$ при $t \to 0+$.

Разложим координатные представления кривых $\gamma_i(t)$ в ряд по t с центром в $t = 0$. Имеем: $\gamma_i(t) = E_i t + o(t)$. Тогда, из сказанного выше вытекает, что для каждого фиксированного t, геодезическая $\nu_t(s)$ в нормальных координатах может быть записана в виде

$$\nu_t(s) = \Big(E_2 t + o(t) + \big((E_1 - E_2)t + o(t)\big)s\Big) + \eta(t,s)O(\rho), \quad \rho \to 0+,$$

где $\eta(t,s) \to 0$ при $t \to 0+$. Поэтому

$$N_1(t) = \frac{\nu_t'(s)}{\|\nu_t'(s)\|} = \frac{(E_1 - E_2)t + o(t) + \eta'(t,s)O(\rho)}{\|(E_1 - E_2)t + o(t) + \eta'(t,s)O(\rho)\|},$$

где штрихом обозначено дифференцирование по s. Так как условие $t \to 0+$ влечет $\rho \to 0+$, и так как $\eta'(t,s) \to 0$ при $t \to 0+$, получаем:

$$\lim_{t \to 0+} N_1(t) = (E_1 - E_2)/\|E_1 - E_2\|,$$

что и завершает доказательство.

Следствие 1.1 утверждает, что геодезические являются критическими точками функционала длины, если ограничиться деформациями, неподвижными на концах выбранной геодезической. Чтобы определить тип критической точки, соответствующей геодезической γ, т.е. выяснить, является ли эта критическая точка минимумом, максимумом или седловой точкой функционала длины, оказывается полезным вычислять вторую вариацию функционала длины — аналог гессиана обычной функции. Для этого рассматриваются уже двупараметрические деформации γ_{ts} геодезической γ, зависящие от параметров t и s, и определяются два векторных поля вдоль геодезической γ: одно, E_t, — поле деформации по параметру t при фиксированном начальном значении для s, и второе, E_s, — наоборот, поле деформации по s при фиксированном t. Вторая смешанная производная от функционала длины кривых γ_{ts} в начальный момент времени и называется *второй вариацией* функционала длины.

Если рассматривать вариации, неподвижные на концах геодезической, то соответствующий гессиан представляет собой билинейную форму от таких E_t и E_s. Если эта форма положительно определена, то, как известно, при всевозможных малых деформациях геодезической γ, неподвижных на ее концах, длина геодезической γ будет увеличиваться. Если же существует деформация, для которой гессиан отрицателен, то при этой деформации длина геодезической γ будет уменьшаться. В первом случае геодезическая γ называется *устойчивой*, а во втором — *неустойчивой*.

Вторая вариация оказывается полезной при доказательстве теорем о локальной структуре минимальных сетей. Эти вопросы мы разберем ниже, а пока ограничимся тем, что выпишем формулу второй вариации в общем случае, т.е. не предполагая фиксированными концы деформируемой геодезической. При этом мы приведем эту формулу только для случая $t = s$, т.е. вместо билинейной формы рассмотрим квадратичную, из которой соответствующая билинейная форма может быть получена "поляризацией", см. подробности в [32].

Пусть $\gamma_t(s)$ — гладкое однопараметрическое семейство кривых, $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $\gamma_a(s) = \gamma(s)$ — некоторая геодезическая в натуральной параметризации, и $X = X(\imath, s)$ — семейство полей скоростей кривых $\gamma_t(s)$, т.е. $X(t,s) = d\gamma_t(s)/ds$. Обозначим через $\ell(t)$ длину кривой γ_t. Пусть E — поле деформации γ_t, и $\widetilde{E} = E - \langle E, X\rangle X$. Отметим, что вдоль геодезической γ поле $\widetilde{E}$ перпендикулярно γ, т.е. полю X.

Предложение 1.6 *Функция $\ell(t)$ дважды дифференцируема в начальный момент времени $t = a$ (на отрезке $[a,b]$). Ее вторая производная имеет вид:*

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2\ell}{dt^2}\right|_{t=a} &= \langle \nabla_E E, X\rangle\big|_c^d + \int_c^d \big(\langle \nabla_X \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle - \langle R(E,X)X, E\rangle\big)\, ds \\ &= \langle \nabla_E E, X\rangle\big|_c^d - \int_c^d \big(\langle \nabla_X \nabla_X \widetilde{E}, \widetilde{E}\rangle + \langle R(\widetilde{E},X)X, \widetilde{E}\rangle\big)\, ds + \\ &\quad + \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle\big|_c^d.\end{aligned}$$

В частности, если деформация γ_t неподвижна на концах геодезической γ, то

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2\ell}{dt^2}\right|_{t=a} &= \int_c^d \big(\langle \nabla_X \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle - \langle R(E,X)X, E\rangle\big)\, ds \\ &= -\int_c^d \big(\langle \nabla_X \nabla_X \widetilde{E}, \widetilde{E}\rangle + \langle R(\widetilde{E},X)X, \widetilde{E}\rangle\big)\, ds + \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle\big|_c^d.\end{aligned}$$

В дальнейшем нам также будет важен частный случай так называемых геодезических деформаций геодезической. Пусть $\gamma(s)$, $s \in [0,a]$, — некоторая геодезическая в римановом многообразии W, параметризованная пропорционально натуральному параметру. Ее деформация $V\colon [0,a] \times [0,1] \to W$, такая что для любого фиксированного $\varepsilon \in [0,1]$ кривая $V(s,\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(s)$ является геодезической, скорость которой постоянна, называется *геодезической деформацией геодезической* $\gamma = \gamma_0(s)$.

Несложно показать (см., например [32]), что поле E геодезической вариации V удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, а именно, имеет место следующий результат.

Предложение 1.7 *Пусть $V = \gamma_\varepsilon(s)$ — произвольная геодезическая деформация геодезической γ в римановом многообразии W, и пусть E — поле деформации V. Тогда вдоль γ имеет место следующее равенство:*

$$\nabla_X \nabla_X E + R(E, X)X = 0,$$

где X — поле скоростей геодезической γ. Обратно, для произвольного векторного поля E, заданного вдоль геодезической γ и удовлетворяющего этому соотношению, существует геодезическая деформация V, такая что E совпадает с полем этой деформации.

Дифференциальное уравнение из предложения 1.7 называется *уравнением Якоби*, а его решения — *полями Якоби*. Итак, поле любой геодезической деформации $\gamma_\varepsilon(s)$, ограниченное на геодезическую $\gamma_0(s) = \gamma$, является полем Якоби вдоль γ. Более того, все поля Якоби вдоль γ представимы в таком виде.

Замечание. Ограничение произвольного поля Якоби, заданного вдоль геодезической γ, на любой отрезок этой геодезической, также, очевидно, является полем Якоби.

Из линейности уравнения Якоби немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 1.8 *Пусть $\gamma \subset W$ — некоторая геодезическая, а v и w — два произвольных касательных вектора к многообразию W в точке $\gamma(0)$. Тогда существует единственное поле Якоби E, такое что $E(0) = v$, а $\nabla_{\dot\gamma} E = w$. Множество всех полей Якоби вдоль γ образует линейное пространство размерности $2n$, где n — размерность многообразия W.*

Легко показать, что если якобиево поле E вдоль γ является касательным к γ, то это поле имеет вид: $(a + bs)\dot\gamma$, где a и b — некоторые постоянные. Отсюда несложно получить следующее предложение.

Предложение 1.9 *Каждое поле Якоби E вдоль $\gamma(s)$ однозначно представимо в виде $E = (a + bs)\dot\gamma + \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ — ортогональное к γ поле Якоби.*

Сравнивая уравнение Якоби с подинтегральным выражением в формуле второй вариации длины геодезической, легко заметить, что для геодезических деформаций эта формула сильно упрощается.

Следствие 1.3 *Пусть $\ell(\varepsilon)$ — длина геодезической $\gamma_\varepsilon(s)$, порожденной геодезической деформацией $V(\varepsilon, s) = \gamma_\varepsilon(s)$. Тогда*

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla_E E, X\rangle\Big|_0^a + \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle\Big|_0^a,$$

где X — поле скоростей геодезической $\gamma_0(s)$, E — поле деформации V, а $\widetilde{E}$ – его нормальная составляющая.

Пусть p — произвольная точка полного риманова многообразия W. Изучим локальное поведение функции расстояния $\rho(p, x)$ от переменной точки x до p. Напомним, что в достаточно малой окрестности точки p функция $\ell(x)$ равна длине единственной кратчайшей геодезической, соединяющей точки p и x. Предположим, что точка x движется по некоторой кривой $x(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда набор кратчайших геодезических, соединяющих p и $x(\varepsilon)$ определяет геодезическую деформацию γ_ε. Рассмотрим функцию $\ell(\varepsilon) = \rho(p, x(\varepsilon))$. Из следствия 1.3 вытекает следующий результат.

Следствие 1.4 *В сделанных выше предположениях, вторая производная функции $\ell(\varepsilon)$ в начальный момент времени $\varepsilon = 0$ имеет вид:*

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla_E E, X\rangle + \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle,$$

где X — поле скоростей геодезической γ_0, E — поле деформации, $\widetilde{E}$ — его нормальная составляющая, и значение правой части вычисляется в точке $x = x(0)$. Более того, если точка x достаточно близка к точке p, то второе слагаемое в правой части равенства неотрицательно, причем равенство нулю достигается если и только если поле $\widetilde{E}$ тождественно равно нулю вдоль γ_0, т.е. кривая $x(\varepsilon)$ является продолжением геодезической γ_0.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Рассмотрим функцию $f(s) = \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle$, где s — параметр геодезической γ_0. Напомним, что $\widetilde{E}$, по построению, является полем Якоби вдоль γ_0, и $\widetilde{E}$ равно нулю в точке $p = \gamma_0(0)$. Поэтому $f(0) = 0$. Вычислим производную df/ds в точке $s = 0$. Имеем:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{s-0} = \langle \nabla_X \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle = \|\nabla_X \widetilde{E}\|^2 \geq 0,$$

причем, если выполнено точное равенство, то поле Якоби $\widetilde{E}$ равняется нулю тождественно. Поэтому непрерывная функция $f(s)$ или строго возрастает от 0 на некотором отрезке $(0, \delta)$, $\delta > 0$, или кривая $x(\varepsilon)$ — продолжение геодезической γ_0. Следствие доказано.

1.3.9 Формула первой вариации длины геодезической параметрической сети

В настоящем пункте мы обобщим формулу первой вариации длины кривой (предложение 1.4) на случай параметрических сетей, ребра которых представляют собой отрезки геодезических. Такие сети мы будем называть *геодезическими сетями.* Формула первой вариации геодезической сети, получающаяся в результате этого обобщения, будет нам чрезвычайно полезна в дальнейшем при изучении минимальных сетей.

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — геодезическая сеть, затягивающая конечное подмножество M риманова многообразия W. Рассмотрим произвольную гладкую деформацию Φ_t, $t \in [-1,1]$, сети Φ, и пусть $\ell(t)$ — длина параметрической сети Φ_t. Обозначим через E_i векторы скоростей движения подвижных вершин V_i сети Φ при деформации Φ_t в начальный момент времени $t = 0$.

Рассмотрим произвольную подвижную вершину V_i и все инцидентные ей невырожденные ребра сети Φ, если они есть. Обозначим через N_i сумму единичных векторов скоростей, с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину V_i. Если все ребра, инцидентные вершине V_i вырождены, то положим $N_i = 0$. Пусть V_i и V_j — две произвольные подвижные вершины. Обозначим через ν_{ij} число вырожденных ребер, соединяющих V_i с V_j.

Предложение 1.10 (Первая вариация геодезической сети) *Функция $\ell(t)$ дифференцируема. Более того, производная этой функции в начальный момент времени имеет вид:*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \sum_i \langle E_i, N_i\rangle + \sum_{i<j} \|E_i - E_j\|\nu_{ij} = \sum_i \langle E_i, N_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \|E_i - E_j\|\nu_{ij}.$$

Доказательство. Эта формула немедленно вытекает из определения длины сети, следствия 1.2 и предложения 1.5.

Пусть x — некоторая подвижная вершина графа G, и V — вершина приведенной сети $\widetilde{\Phi}$, прообраз которой при канонической проекции $\pi\colon G \to \widetilde{G}$ содержит x. Предположим, что деформация Φ_t локальна в следующем смысле: носитель G_{supp} этой деформации содержит те и только те вершины графа G, которые принадлежат приведенной компоненте вершины V. Обозначим через Φ_{supp} сеть, являющуюся ограничением сети Φ на носитель G_{supp}, превращенный естественным образом в граф (к G_{supp} добавлены неподвижные вершины степени 1). В

этих предположениях, правая часть формулы первой вариации имеет следующую важную для дальнейшего геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим набор векторов $\{E_i\}$ как множество точек в пространстве $\mathbb{R}^n$, где n — размерность многообразия W. Пусть k — количество элементов множества $\{E_i\}$, т.е. количество подвижных вершин сети Φ_{supp}, тогда конфигурационное пространство всевозможных положений $\{E_i\}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^{nk}$. Пусть $E = (E_1, \dots, E_k)$, и $N_V = (N_1, \dots, N_k)$, тогда первая сумма в формуле первой вариации равна скалярному произведению в $\mathbb{R}^{nk}$ векторов E и N_V, т.е. равна $\langle E, N_V \rangle$. Отметим, что скалярное произведение на $\mathbb{R}^{nk}$ задается как на прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ — касательное пространство к риманову многообразию W в той точке, в которую переходят все подвижные вершины сети Φ_{supp}, т.е. в точке V.

Обозначим через Φ_d^V — сеть в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $\{E_i\}$, такую что каждая пара E_i и E_j ее вершин соединяется ν_{ij} отрезками — ребрами сети Φ_d^V. Отметим, что параметризующий граф этой сети совпадает с параметризующим графом приведенной компоненты сети Φ_{supp}, соответствующей V. Вторая сумма в формуле первой вариации равна длине сети Φ_d^V. Обозначим, для краткости, длину сети Φ_d^V через $\ell_V(E)$.

Итак, мы получаем следующее следствие.

Следствие 1.5 *В сделанных выше обозначениях, формула первой вариации длины для деформации Φ_t может быть записана в следующем виде:*

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \langle E, N_V \rangle + \ell_V(E).$$

1.3.10 Вторая локальная геодезическая вариация погруженных параметрических сетей

Пусть U — некоторое выпуклое подмножество полного риманова многообразия W. Рассмотрим некоторую погруженную параметрическую сеть Φ, целиком лежащую в U, затягивающую конечное множество $M \subset U$, имеющую одну подвижную вершину V, и такую, что все ее ребра — суть геодезические, соединяющие V с точками из M. Пусть, как и выше, N_i — единичные вектора направлений, с которыми точки, движущиеся по ребрам сети Φ, приходят в вершину V. Рассмотрим такую деформацию $\Phi(\varepsilon)$ сети P, что вершина V движется по произвольной кривой $V(\varepsilon) \subset U$, $V(0) = V$, а ребра каждой сети $\Phi(\varepsilon)$ — суть геодезические, соединяющие $V(\varepsilon)$ с точками из M. Такие деформации параметрической сети Φ будем называть *геодезическими деформациями сети* Φ.

Обозначим через $\ell(\varepsilon)$ длину сети $\Phi(\varepsilon)$. Тогда, в силу предложения 1.10, первая производная функции $\ell(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\langle \sum_i N_i, E \rangle,$$

где E — вектор скорости кривой $V(\varepsilon)$ в начальный момент времени. Предположим, что эта первая производная равна нулю. Тогда с помощью следствия 1.3 несложно вычислить вторую производную функции $\ell(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$.

Предложение 1.11 *В сделанных выше предположениях, вторая производная функции $\ell(\varepsilon)$ длины параметрической сети Φ при геодезической вариации $\Phi(\varepsilon)$ имеет вид:*

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla_E E, \sum_i N_i \rangle\big|_V + \sum_i \langle \widetilde{E}_i, \nabla_{N_i} \widetilde{E}_i \rangle\big|_V,$$

где E_i — поле деформации вдоль i-го ребра, и $\widetilde{E}_i$ — нормальная составляющая поля E_i.

В частности, если вершина V движется вдоль некоторой геодезической, то вторая производная длины сети может быть записана так.

Следствие 1.6 *Если в предположениях предложения 1.11 подвижная вершина V сети Φ движется вдоль некоторой геодезической, то вторая производная длины параметрической сети Φ при такой деформации имеет вид:*

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_i \langle \widetilde{E}_i, \nabla_{N_i} \widetilde{E}_i \rangle\big|_V.$$

Из следствия 1.4 вытекает следующий важный результат.

Следствие 1.7 *В сделанных выше предположениях, если единственная подвижная вершина сети Φ движется по геодезической, то вторая производная функции $\ell(\varepsilon)$ в начальный момент времени неотрицательна:*

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

Более того, равенство нулю достигается если и только если след сети Φ представляет собой отрезок некоторой геодезической γ, на котором расположена вершина V четной степени, образы половины инцидентных V ребер лежат на γ по одну сторону от V, а другой

половины — по другую, причем кривая $V(\varepsilon)$ является частью геодезического отрезка γ. Таким образом, или функция $\ell(\varepsilon)$ постоянна, или ее вторая производная строго больше нуля в начальный момент времени.

1.3.11 Формула первой вариации взвешенной длины геодезической параметрической сети

В настоящем пункте мы обобщим формулу первой вариации длины геодезической параметрической сети на случай взвешенной длины взвешенных геодезических параметрических сетей, т.е. геодезических сетей, на множестве ребер которых задана весовая функция.

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — взвешенная геодезическая параметрическая сеть, затягивающая конечное подмножество M риманова многообразия W. Рассмотрим произвольную гладкую деформацию Φ_t сети Φ, и пусть $\omega(t)$ — взвешенная длина сети Φ_t. Как и выше, обозначим через E_i векторы скоростей движения подвижных вершин V_i сети Φ при деформации Φ_t в начальный момент времени $t = 0$. Далее, рассмотрим произвольную подвижную вершину V_i и все инцидентные ей невырожденные ребра сети Φ, если они есть. Обозначим через N_i линейную комбинацию единичных векторов скоростей, с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину V_i, взяв в качестве коэффициентов этой линейной комбинации веса соответствующих ребер. Если все ребра, инцидентные вершине V_i вырождены, то положим $N_i = 0$. Пусть V_i и V_j — две произвольные подвижные вершины. Обозначим через ν_{ij} сумму весов всех вырожденных ребер, соединяющих V_i с V_j.

Следствие 1.8 *Функция $\omega(t)$ дифференцируема. Производная этой функции в начальный момент времени имеет вид:*

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{t=0} = \sum_i \langle E_i, N_i\rangle + \sum_{i<j} \|E_i - E_j\|\nu_{ij}.$$

1.4 Сети–следы

В предыдущем параграфе мы познакомились с параметрическими сетями. Однако, в практических задачах конкретный вид параметризующего графа параметрической сети часто не имеет значения, а важен только образ параметрической сети как подмножество многообразия, т.е. след параметрической сети. Кроме того, во многих прикладных

задачах приходится иметь дело с такими деформациями сетей, при которых существенно меняется их топология (например, сеть с циклами превращается в дерево), причем эти деформации являются, в некотором естественном смысле, непрерывными. Все это приводит к необходимости, наряду с параметрическими сетями, также рассматривать и сети как таковые. При этом, конечно, естественно использовать технику, развитую выше для параметрических сетей.

Имея все это в виду, мы отождествим между собой все параметрические сети, следы которых совпадают. Полученное в результате множество сетей естественно называть пространством следов, а его элементы — следами.

1.4.1 Следы

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех конечных кусочно-гладких параметрических сетей на многообразии W, т.е. сетей, имеющих лишь конечное число вершин, и, значит, ребер. Введем на $\mathcal{M}$ отношение эквивалентности, отнеся к одному классу параметрические сети, имеющие один и тот же след. Соответствующее фактор-множество обозначим через $\mathcal{T}$.

Определение. Элементы множества $\mathcal{T}$ будем называть *следами*, а само множество $\mathcal{T}$ — *пространством следов.*

Ясно, что между пространством следов и множеством всех сетей, допускающих параметризацию конечной параметрической сетью, существует естественное взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем мы будем отождествлять эти два множества, перенося на следы всю введенную для сетей терминологию. Например, если $\tau \in \mathcal{T}$ — некоторый след, то про произвольную параметрическую сеть $\Phi\colon G \to W$, такую что $\Phi \in \tau$, будем говорить, что Φ *параметризует след* τ.

В заключение данного пункта, мы приведем пример, иллюстрирующий полезность перехода к рассмотрению следов.

Пример. Как было рассказано во Введении, минимальные сети можно моделировать с помощью мыльных пленок. Проделав достаточно много экспериментов с различными конфигурациями из пластин и проволочек, можно заметить, что все возникающие минимальные сети — следы на пластинах от затягивающих эти конфигурации мыльных пленок — обладают интересной особенностью: каждая вершина любой такой сети имеет степень, не превосходящую трех. Несложно слегка модифицировать конструкцию так, чтобы можно было в процессе эксперимента изменять положения проволочек друг относительно друга.

При этом мыльная пленка, а вместе с ней и минимальная сеть, будут деформироваться по следующим правилам: если в процессе деформации никакая пара неграничных вершин сети, т.е. вершин, отличных от точек крепления проволочек, не сливается в одну вершину, то мыльная пленка и минимальная сеть изменяют свою форму непрерывно. Если же в процессе деформации некоторая пара неграничных вершин сети слилась в одну вершину, то эта новая вершина степени более чем три мгновенно распадется на несколько вершин степени не более трех. На рис. 1.4 изображена такая перестройка в случае сетей, затягивающих вершины прямоугольников.

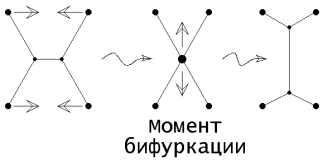


Рис. 1.4: Перестройка сети, затягивающей вершины прямоугольника

Такая перестройка не может быть описана как непрерывная деформация в классе параметрических сетей, зато она, очевидно является таковой в пространстве следов (Аккуратное определение деформации следа см. ниже.).

1.4.2 Граница следа. Замкнутые следы

Пусть $M \subset W$ — конечное множество точек, и $\Gamma \in \mathcal{T}$ — некоторый след. Скажем, что след Γ *затягивает множество* M, если M содержится в Γ, рассматриваемом как подмножество в W. В этом случае множество M называется *границей следа* Γ, а точки из M — *граничными.*

Пусть $\Phi\colon G \to W$ произвольная параметризация следа Γ, затягивающего некоторое конечное множество M точек многообразия W. Для каждой точки $m \in M$ выберем в $\Phi^{-1}(m) \in G$ произвольную точку v_m, и построим новый граф G', добавив к множеству вершин графа G точки v_m, пе являющиеся вершипами из G. При этом ребра из G, па которые попали точки v_m, разобьются на несколько ребер. Отображение Φ естественно порождает отображение $\Phi'\colon G' \to W$, задающее параметрическую сеть, затягивающую множество M. Таким образом,

доказано следующее утверждение.

Утверждение 1.3 *Каждый след, затягивающий некоторое граничное множество M, можно параметризовать сетью, затягивающей то же граничное множество M.*

Из утверждения 1.3 вытекает корректность следующего определения.

Определение. Если Γ — след с фиксированной границей M, то *параметризацией следа* Γ *с границей* M будем называть каждую параметрическую сеть из Γ, затягивающую множество M.

Определение. След назовем *замкнутым*, если его граница пуста.

1.4.3 Длина следа

Определим теперь длину следа на римановом многообразии W. Для этого выберем произвольный след τ из $\mathcal{T}$, рассмотрим всевозможные параметрические сети $t \in \tau$, у каждой из них вычислим длину $\ell(t)$, и положим

$$\ell(\tau) = \inf_{t \in \tau} \ell(t).$$

Число $\ell(\tau)$ будем называть *длиной следа* τ.

Замечание. Отметим, что так определенная длина следа τ совпадает с хаусдорфовой мерой следа τ, рассматриваемого как подмножества многообразия W.

Зададимся теперь следующим вопросом: для любого ли элемента τ из $\mathcal{T}$ можно выбрать такого представителя $t \in \tau$, длина которого равнялась бы $\ell(\tau)$? В общем случае ответ отрицательный.

Пример. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ сеть Γ с двумя вершинами V_i и двумя ребрами e_i. Фиксируем на $\mathbb{R}^2$ стандартные координаты (x, y), и пусть $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (1, 0)$, ребро e_1 совпадает с отрезком V_1V_2, а ребро e_2 задается графиком функции $y = f(x)$, имеющей следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(\pi/x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, сеть Γ — гладкая, однако пересечение ее ребер имеет бесконечно много компонент связности.

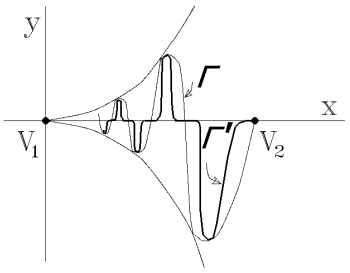


Рис. 1.5: Ребра сети Γ пересекаются по бесконечному набору отрезков

Сеть Γ легко модифицировать в сеть Γ' так, чтобы каждая компонента пересечения ребер сети Γ' состояла не из точки, а из целого замкнутого отрезка (рис. 1.5).

Очевидно, в классе эквивалентности $[\Gamma'] \in \mathcal{T}$ сети Γ' не существует представителя, длина которого равнялась бы $\ell([\Gamma'])$, так как пространство $\mathcal{T}$, по определению, порождено конечными сетями. (См. также утверждение 1.5 ниже.)

Тем не менее, во многих случаях, и, в частности, для изучаемых нами минимальных сетей, такого представителя выбрать можно. Более того, среди таких представителей существует и единственен представитель, являющийся вложенной параметрической сетью без фиктивных вершин.

Определение. Вложенная параметрическая сеть $\Phi \in \tau$ без фиктивных вершин называется *каноническим представителем следа* $\tau \in \mathcal{T}$.

Ясно, что длина канонического представителя следа τ совпадает с длиной самого следа τ. В следующем пункте мы более подробно изучим проблему существования и единственности канонического представителя.

1.4.4 Канонический представитель

Начнем со следующего утверждения о единственности канонического представителя.

Утверждение 1.4 *Если у сети существует канонический представитель, то он единственен (с точностью до деформационной эквивалентности).*

Доказательство. Если у канонического представителя имеется неграничная вершина степени 2, то, из-за отсутствия у него фиктивных вершин, эта вершина инцидентна циклическому ребру, являющемуся единственным ребром представителя в силу связности. В этом случае след представляет собой вложенную замкнутую кривую, и все канонические представители, очевидно, различаются лишь расположением их единственной вершины на этой кривой. Ясно, что все такие представители деформационно эквивалентны.

Пусть теперь у представителя нет неграничных вершин степени 2. Тогда, в силу вложенности канонического представителя, следы всех его вершин — это, в точности, все граничные точки (если они есть), а также все точки из следа, из которых выходит $k \neq 2$ кривых. Ясно, что, тем самым, множество следов вершин представителя определено однозначно. Мы обозначим это множество через $\hat{V}$. Ясно, что и множество следов всех ребер, как множество связных компонент следа, из которого выброшено множество $\hat{V}$, так же определено однозначно. Это множество кривых мы обозначим через $\hat{E}$. Пусть $\hat{G}$ — граф, вершины которого суть точки множества $\hat{V}$, а ребра — кривые из $\hat{E}$. Если $\Phi\colon G \to W$ и $\Phi'\colon G' \to W$ — два канонических представителя, то отображения $\Phi\colon G \to \hat{G}$ и $\Phi'\colon G' \to \hat{G}$ являются, в силу вложенности канонических представителей, эквивалентностями графов, поэтому сети Φ и Φ' отличаются на параметризацию. Утверждение доказано.

Точку P, принадлежащую сети Γ, рассматриваемой как подмножество многообразия W, назовем *регулярной*, если существует окрестность U точки P в многообразии W, такая что пересечение $\Gamma \cap U$ может быть представлено как отрезок вложенной кусочно-гладкой кривой, для которой P — внутренняя точка. В противном случае точку $P \in \Gamma$ назовем *особой*. В следующем утверждении формулируется критерий существования канонического представителя в терминах особых точек следа.

Утверждение 1.5 *Сеть Γ имеет канонического представителя тогда и только тогда, когда эта сеть содержит конечное число особых точек.*

Доказательство. Если сеть Γ обладает каноническим представителем, то, по определению, существует такая вложенная конечная параметрическая сеть Φ, след которой совпадает с Γ. В силу конечности параметрической сети Φ и ее вложенности, след Γ состоит из конечного числа отрезков кусочно-гладких вложенных кривых, каждая пара которых может пересекаться лишь по своим концевым точкам. Ясно, что

особыми могут являться лишь концевые точки этих кривых, поэтому особых точек конечное число.

Обратно, пусть Γ — сеть с конечным числом особых точек. Пусть V — множество всех особых точек сети Γ, к которому добавлены все граничные точки. Так как сеть Γ является следом некоторой конечной параметрической сети $\Phi\colon G \to W$, дополнение в Γ до конечного множества V состоит из конечного числа кривых γ_i.

Действительно, предположим противное. Тогда существует такая точка $v \in V$, из которой выходит бесконечное количество кривых γ_i, и, значит, существует такое замкнутое ребро e параметрической сети Φ, которое бесконечное количество раз проходит через точку v. Поэтому найдется бесконечная последовательность точек x_k из параметризующего замкнутое ребро e отрезка I, каждая из которых переходит в точку v. В силу компактности отрезка I, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность x_k сходится к некоторой точке x отрезка I. Однако, в этой точке вектор скорости ребра e равен нулю, т.е. ребро e не регулярно, а, значит, по определению параметрической сети, вырождено. Последнее противоречит выбору сети Φ.

Построим граф, взяв в качестве вершин точки множества V, а в качестве ребер — кривые γ_i. Построенное вложение этого конечного графа в многообразие W и задает искомую параметрическую сеть, являющуюся каноническим представителем следа Γ.

Замечание. Если в определении параметрической сети отказаться от регулярности кривых, задающих ребра сети, то утверждение 1.5 уже не будет верным.

Пример. На плоскости $\mathbb{R}^2$ возьмем единичную окружность S^1 с центром в $(1,0)$, и умножим радиус-вектор точки этой окружности на достаточно быстро убывающую функцию. Например, пусть (x,y) — стандартные координаты на плоскости. Построим кривую γ, координатное представление которой имеет вид: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t) = e^{-1/t}(1+\cos(2\pi/t))$, $y(t) = e^{-1/t}\sin(2\pi/t)$ при $t \in (0,1]$, и $x(0) = y(0) = 0$, см. рис. 1.6. Легко видеть, что это гладкая кривая, единственная точка самопересечения следа которой совпадает с началом координат O, причем γ проходит через O бесконечное число раз. Таким образом, рассмотрев сеть, состоящую из двух вершин: точки $(2/e, 0)$ и точки $O = (0,0)$, соединенных одним ребром γ, получим пример сети, след которой содержит ровно одну особую точку и не имеет канонического представителя. Единственное ребро этой сети — кривая γ, не регулярна ровно в одной точке $\gamma(0)$, поскольку вектор скорости в точке $\gamma(0)$ равен, очевидно, нулю.

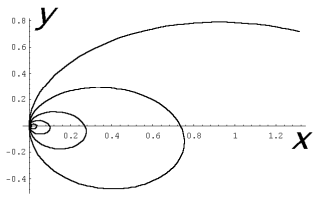


Рис. 1.6: Сеть, не имеющая канонического представителя

В следующем утверждение разбирается особенно важный для нас случай так называемых геодезических сетей.

Определение. Параметрическая сеть, все невырожденные ребра которой — геодезические отрезки, назовем *параметрической геодезической сетью.* Сеть, среди представителей которой существует параметрическая геодезическая сеть, будем называть *геодезической сетью.*

Параметрическая сеть, каждое невырожденное ребро которой составлено из конечного числа геодезических отрезков, назовем *параметрической кусочно-геодезической сетью.* Сеть, среди представителей которой существует параметрическая кусочно-геодезическая сеть, будем называть *кусочно-геодезической сетью.*

Утверждение 1.6 *Пусть* $\Gamma \subset W$ *— геодезическая сеть. Тогда у* Γ *существует канонический представитель.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon G \to W$ — геодезическая параметрическая сеть, параметризующая Γ. В силу утверждения 1.5, достаточно показать, что пересечение любых двух ее ребер состоит из конечного числа линейно связных компонент. Так как, по предположению, ребра Φ — геодезические отрезки, то достаточно показать, что пересечение любых двух геодезических отрезков состоит из конечного числа линейно связных компонент.

Предположим противное, т.е. пусть существуют два геодезических отрезка $\gamma_1\colon I_1 \to W$ и $\gamma_2\colon I_2 \to W$, таких что пересечение H их следов состоит из бесконечного числа линейно связных компонент. Выберем в каждой из этих компонент по одной точке x^α. Так как I_j — компакты, то H — замкнуто. Поэтому последовательность x^α имеет предельную точку. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность x^α сходится к некоторой точке $x \in H$.

Положим $t_j^\alpha = \gamma_j^{-1}(x^\alpha)$. В силу компактности отрезка I_j, последовательность t_j^α имеет предельную точку при каждом j. В силу непрерывности отображений γ_j, образ каждой такой предельной точки совпадает с x. Снова, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность t_j^α сходится к некоторой точке $t_j \in I_j$, причем $\gamma_1(t_1^\alpha) = \gamma_2(t_2^\alpha)$, и $x = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.

Теперь ясно, что касательные прямые к γ_1 и γ_2 в точке x совпадают, поэтому, по свойству геодезических, существует окрестность точки x в многообразии W, такая что геодезические $\gamma_i \cap U$ или пересекаются только по точке x, или пересекаются по геодезическому отрезку, выходящему из точки x. Обе эти возможности противоречат выбору точки x.

Следующее утверждение является элементарным усилением предыдущего.

Утверждение 1.7 *Пусть* Γ — *кусочно-геодезическая сеть. Тогда у сети* Γ *существует канонический представитель.*

Пусть M — произвольное конечное множество точек многообразия W. Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ множество всех следов, затягивающих M. Приводимое ниже утверждение будет чрезвычайно полезно нам при доказательстве теорем существования следов минимальной длины, затягивающих фиксированные множества точек полного риманова многообразия.

Утверждение 1.8 *Каждая сеть* Γ *из* $\mathcal{T}(M)$ *содержит, как подмножество* W, *некоторую сеть* $\Gamma' \in \mathcal{T}(M)$, *обладающую каноническим представителем.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon G \to W$ — произвольный представитель сети Γ. Прежде всего, избавимся от самопересечений ребер сети Φ.

Лемма 1.2 *Пусть* γ — *произвольная кусочно-гладкая регулярная кривая в* W, *соединяющая точки* A *и* B. *Тогда существует вложенная кусочно-гладкая кривая* γ', *содержащаяся в* γ *и также соединяющая точки* A *и* B.

Доказательство. Легко видеть, что кривую γ можно представить в виде конечного объединения гладких вложенных кривых. Пусть γ_q — последовательные кривые одного из таких разбиений. Ориентируем кривую γ от A к B, и пусть A_q — начальная, а A_{q+1} — конечная точки кривой γ_q.

Построение кривой γ' будем проводить по индукции. Обозначим часть кривой γ, заключенную между двумя произвольными ее точками X и Y, через $\gamma[X, Y]$. Предположим, что для некоторого q уже построена вложенная кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в $\gamma[A, A_q]$ и соединяющая точки A и A_q. Такую кривую обозначим через $\gamma'[A, A_q]$. Построим теперь кривую $\gamma'[A, A_{q+1}]$.

Пусть $\hat{K} \subset W$ состоит из всех точек пересечения кривых $\gamma[A, A_q]$ и γ_q. Положим $\gamma_q = \{\varphi\colon [a, b] \to W\}$. Обозначим через K соответствующее $\hat{K}$ подмножество отрезка $[a, b]$, т.е. $K = \varphi^{-1}(\hat{K})$. Так как следы кривых $\gamma[A, A_q]$ и γ_q — замкнутые подмножества многообразия W (в силу компактности отрезков, образами которых эти следы являются), то $\hat{K}$ замкнуто, поэтому замкнуто также и K. Пусть s — точная верхняя грань множества $K \subset [a, b]$. Так как K — замкнуто, то $s \in K$, т.е. $\varphi\colon s \to W$ является последней точкой пересечения кривой γ_q с кривой $\gamma[A, A_q]$. Часть кривой γ_q, параметризованную отрезком $[s, b]$, обозначим через δ.

Пусть $\gamma[A, A_q] = \{\psi\colon [c, d] \to W\}$, и пусть $K' = \psi^{-1}(\hat{K})$. Так как кривые γ_q и $\gamma[A, A_q]$ — вложенные, то между K и K' имеется естественное взаимно-однозначное соответствие ν, "спаривающее" точки, имеющие одинаковые образы в $\hat{K}$. Пусть $t = \nu(s)$. Ясно, что $\psi(t) = \varphi(s)$. Рассмотрим часть кривой $\gamma[A, A_q]$, параметризованную отрезком $[c, t]$. Эту часть обозначим через δ'.

Рассмотрим объединение кривых δ и δ'. Ясно, что это объединение может быть параметризовано как вложенная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки A и A_{q+1}, след которой содержится в следе кривой γ. Таким образом, построенная кривая может быть использована в качестве кривой $\gamma[A, A_{q+1}]$.

Последовательно обработав все кривые γ_q, в результате получим искомую кривую γ'. Доказательство леммы закончено.

Заменим теперь каждое самопересекающееся ребро параметрической сети Φ в соответствие с леммой 1.2 на ребро без самопересечений. В результате мы получим новую параметрическую сеть, след которой содержится в Γ и имеет то же множество вершин, а ребра — не имеют самопересечений. Эту новую сеть мы обозначим через $\hat{\Phi}\colon G \to W$.

Построим теперь вложенную параметрическую сеть Φ', след $\Gamma' \subset \Gamma$ которой и будет искомой сетью. Начнем с произвольного ребра, скажем f, сети $\hat{\Phi}$ и включим его во множество ребер параметрической сети Φ'. Пусть e — любое другое ребро из $\hat{\Phi}$. Если пересечение внутренностей ребер f и e пусто, то просто добавим ребро e к сети Φ'. В противном случае, по аналогии с доказательством леммы 1.2, разобьем ребро e на три части, первая из которых e_1 — до первой точки пере-

сечения e с f, вторая e_2 — от первой до последней точки пересечения e и f, и третья e_3 — от последней точки пересечения e и f. Добавим к параметрической сети Φ' ребра e_1 и e_3. Очевидно, получим вложенную сеть, след которой содержится в сети Γ, а множество вершин — содержит все вершины из Γ (отметим, что пересечение внутренностей ребер e и f не содержит вершин сети Γ).

Далее, будем последовательно добавлять к параметрической сети Φ' части новых ребер из $\hat{\Phi}$, расположенные до первой и после последней точек пересечения этого ребра с уже построенной сетью. Ясно, что полученная в результате параметрическая сеть Φ' является вложенной, затягивает множество M, и ее след Γ' содержится в сети Γ. Канонический представитель сети $\Gamma' \in \mathcal{T}(M)$ совпадает с построенной параметрической сетью Φ'.

1.4.5 Деформации следов

Пусть Γ — некоторый след, P — произвольное k-мерное многообразие или область в нем, и $O \in P$ — некоторая его точка.

Отображение $\mathcal{F}$ из P в пространство $\mathcal{T}$, при котором выделенная точка O переходит в сеть Γ, назовем *деформацией следа* Γ. При этом след $\mathcal{F}(p)$, где $p \in P$, будем обозначать через Γ_p. Пусть, как и выше, $\pi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{T}$ — каноническая проекция множества $\mathcal{M}$ всех параметрических сетей на фактор-множество $\mathcal{T}$. Ясно, что множество $\mathcal{M}$ является дизъюнктным объединением множеств $\mathcal{M}_G$ параметрических сетей типа G по всевозможным конечным графам G. Рассмотрим множество $\pi^{-1}\big(\mathcal{F}(P)\big) \subset \mathcal{M}$ и обозначим через $\mathcal{M}_G^{\mathcal{F}}$ пересечение этого множества с $\mathcal{M}_G$. Образ множества $\mathcal{M}_G^{\mathcal{F}}$ при проекции π состоит из всех следов из $\mathcal{F}(P)$, которые могут быть параметризованы сетями типа G. Этот образ мы обозначим через $\mathcal{F}_G$. Множества следов $\mathcal{F}_G$ могут пересекаться, и, кроме того, объединение всех $\mathcal{F}_G$ совпадает с $\mathcal{F}(P)$.

Наименьшее число множеств $\mathcal{F}_G$, которыми может быть покрыто множество $\mathcal{F}(P)$, назовем *типом деформации* $\mathcal{F}$. Деформацию $\mathcal{F}$ назовем *деформацией конечного типа*, если ее тип конечен.

Пример. Пусть Γ — сеть, являющаяся отрезком, а многообразие P — полуинтервал $[0, 1)$. Рассмотрим деформацию Γ_t сети Γ следующего вида: при $t \in [0, 1/2]$ сети Γ_t состоят из одной кривой, при $t \in (1/2, 3/4]$ сети Γ_t состоят из двух кривых, при $t \in (3/4, 7/8]$ сети Γ_t состоят из трех кривых и т.д. (рис. 1.7). Легко понять, что эта деформация не является деформацией конечного типа.

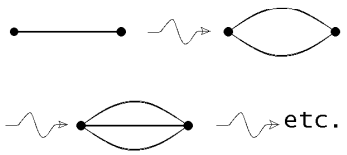


Рис. 1.7: Деформация бесконечного типа

Деформации конечного типа удобны тем, что для них естественно определяются понятия непрерывности и гладкости. А именно, деформация $\mathcal{F}$ конечного типа называется *непрерывной* (*гладкой*), если существует такое конечное покрытие множества $\mathcal{F}(P)$ множествами $\mathcal{F}_G$, и такое сечение $\xi\colon \mathcal{F}(P) \to \mathcal{M}$ (т.е. $\pi \circ \xi(\tau) = \tau$ для произвольного следа $\tau \in \mathcal{F}(P)$), что деформации $\xi \circ \mathcal{F}\colon P \to \mathcal{M}_G$, индуцированные $\mathcal{F}$ в пространствах $\mathcal{M}_G$, являются непрерывными (гладкими) деформациями соответствующих параметрических сетей.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь гладкие деформации конечного типа, не оговаривая этого специально.

Пусть Γ — сеть, и Γ_t — ее деформация, $\Gamma_O = \Gamma$. Так как рассматриваемые сети параметризованы конечными графами, они являются замкнутыми подмножествами многообразия W. Действительно, параметризующие графы компактны, поэтому следы соответствующих параметрических сетей, являющиеся их образами, также компактны, и, значит, замкнуты. Рассмотрим замкнутое множество K, являющееся пересечением всех следов Γ_t. Это множество мы назовем *неподвижным множеством деформации* Γ_t, а его элементы — *неподвижными точками* для Γ_t.

Важным частным случаем деформаций сетей является случай $P = [-1, 1]$. Оказывается, имеет место следующее предложение.

Предложение 1.12 *Пусть* Γ *и* Γ' *— два произвольных следа с фиксированной границей* M*, возможно пустой, на многообразии* W*. Тогда существует непрерывная деформация* $\Gamma_t\colon [0, 1] \to \mathcal{T}(M)$*, такая что* $\Gamma_0 = \Gamma$ *и* $\Gamma_1 = \Gamma'$*.*

Доказательство. Если многообразие W односвязно, очевидно, каждый след с пустой границей можно продеформировать в точку. Да-

лее, покажем, что каждый след с не пустой границей может быть продеформирован в след некоторого дерева, т.е. в след без циклов. В самом деле, пусть τ — некоторый след, и $\Phi\colon G \to W$ — некоторая его параметризация, причем граф G содержит цикл γ. Рассмотрим произвольную вершину V графа G, принадлежащую γ, и разрежем цикл γ по этой вершине. Последнее означает, что мы построим новый граф G' так. Пусть e_1 и e_2 — ребра цикла γ, инцидентные V. Множество вершин графа G' — это множество вершин графа G, к которому добавлена одна новая вершина V', множество ребер графа G' — это множество ребер графа G, в котором ребро e_2, соединявшее вершину V с некоторой вершиной X, заменено на ребро $e_2' = V'X$.

Легко построить параметрическую сеть $\Phi'\colon G' \to W$, след которой совпадает со следом τ сети Φ: для этого достаточно положить Φ' равным Φ на всех ребрах G', отличных от e_2', а на ребре e_2' определить Φ' равным ограничению Φ на ребро e_2 графа G. Отметим, что если вершина V входила в граничное множество, то мы ее там и оставим, поэтому сеть Φ' затягивает то же множество, что и Φ. Очевидно, сеть Φ' имеет на один цикл меньше, чем сеть Φ, поэтому след τ можно так продеформировать в пространстве следов, что этот цикл разрушится. Пример такой деформации приведен на рис. 1.8. Поступая точно также со всеми циклами следа τ можно, очевидно, продеформировать его в след без циклов.

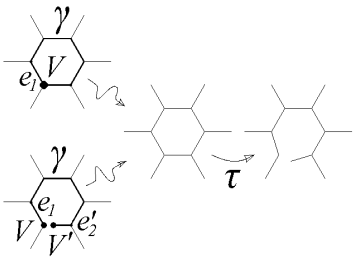


Рис. 1.8: Исчезновение цикла при деформации в пространстве следов

Итак, каждый след с границей можно непрерывно продеформировать в некоторый след без циклов. Теперь для завершения доказательства предложения осталось показать, что в пространстве $\mathcal{T}(M)$, следы всех деревьев могут быть непрерывно продеформированы друг в друга с сохранением границы. Для этого продеформируем сначала произвольный след в звезду, затягивающую множество M. Теперь заметим, что для любых двух однореберных следов γ_1 и γ_2, соединяющих произвольные две точки A и B и многообразия, существует непрерывная

деформация одного в другой, неподвижная на A и B. Действительно, достаточно сначала продеформировать γ_1 в объединение γ_2 и некоторой петли, а затем, как и выше, стянуть петлю в точку. Из сказанного вытекает, что любая звезда с границей M может быть непрерывно продеформирована в звезду с той же границей M, что и завершает доказательство.

Отметим, что наличие в пространствах следов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}(M)$ непрерывных деформаций, вдоль которых разрываются циклы, т.е. происходят изменения топологии рассматриваемой сети, очень естественно в контексте задач о поиске сетей наименьшей длины. Очевидно, что абсолютно минимальная сеть не должна иметь циклов: выбрасывание ребра из цикла сохраняет свойство рассматриваемой сети затягивать свое граничное множество и уменьшает длину. Поэтому абсолютно минимальные сети не содержат циклов. В пространстве следов, минимизируя длину произвольного следа, можно с помощью непрерывных деформаций добраться до следов без циклов. Ясно, что в пространствах параметрических сетей такая деформация не будет непрерывной.

1.4.6 Локальное устройство следов

В настоящем пункте мы покажем, что каждая сеть локально является следом некоторой стандартно устроенной параметрической сети. А именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.9 *Пусть* Γ *— произвольная сеть на римановом многообразии* W*, и* $x \in \Gamma$ *— некоторая точка из* Γ*. Тогда у точки* x *существует такая окрестность* U*, пересечение которой с сетью* Γ *является следом некоторой погруженной параметрической сети* $\Phi\colon G \to W$*. Более того, окрестность* U *можно подобрать таким образом, чтобы*

1. *пересечение* M *ее границы* ∂U *с сетью* Γ *состояло из конечного, скажем* k*, числа точек, и, значит, для такой окрестности* U *можно предполагать, что параметрическая сеть* Φ *затягивает множество* M *или* $M \cup \{x\}$*;*

2. *множество следов вершин параметрической сети* Φ *совпадает с* $M \cup \{x\}$*, а множество ребер — с отрезками вложенных кривых, каждый из которых соединяет* x *с некоторой точкой из* M*.*

Доказательство. Пусть $\psi : G \to W$ — произвольная параметрическая сеть, след которой совпадает с Γ. Выберем ψ, при необходимости

переходя к приведенной сети, так, чтобы сеть ψ была погруженной (мы выбрасываем все вырожденные ребра). Напомним, что каждое ребро сети ψ является кусочно-регулярной кривой, а потому может быть разбито на конечное число вложенных кривых.

Легко показывается, что у каждой точки x следа произвольной вложенной кривой γ существует такая шаровая (в метрике многообразия W) окрестность U^x, что пересечение кривой γ с каждой шаровой окрестностью $V^x \subset U^x$ точки x состоит из одной компоненты, причем пересечение $\partial V^x \cap \gamma$ границы каждой такой окрестности с кривой γ является или точкой (кривая γ выходит из x), или парой точек. Такую окрестность U^x назовем *хорошей*.

Далее, в силу конечности количества вложенных компонент, из которых составлены все ребра сети ψ, число этих компонент, проходящих через данную точку следа, конечно. Поэтому можно выбрать такую окрестность U^x точки x, пересечение которой с сетью ψ состоит из конечного числа вложенных кривых γ_i, каждая из которых либо разбивается точкой x на две части γ_i^1 и γ_i^2 (число таких кривых γ_i^j обозначим через k_1), либо заканчивается в x (число таких кривых обозначим через k_2), причем для каждой из γ_i окрестность U^x является хорошей. Возьмем теперь в качестве графа H граф с $k_1 + k_2 + 1$ вершиной, ребра которого соединяют одну выбранную вершину, скажем X, со всеми остальными. Определим отображение графа H в W, переведя вершину X в точку x, и продолжим это отображение до параметрической сети $\psi\colon H \to W$ так, чтобы каждое ребро e из H параметризовало или соответствующую кривую γ_i (если γ_i выходит из x), или одну из частей γ_i^j кривой γ_i. Доказательство закончено.

Определение. Окрестность U, удовлетворяющую всем условиям утверждения 1.9, назовем *хорошей*.

Ниже мы используем возможность выбрать у каждой точки сети хорошую окрестность для описания локального устройства сетей специального вида.

Глава 2

Минимальные сети: естественные обобщения проблемы Штейнера

В данной главе теория сетей на многообразиях, разработанная в главе 1, используется для постановки естественных задач минимизации функционалов длины и взвешенной длины на пространствах сетей. Все эти задачи возникают как обобщения классической проблемы Штейнера, о которой говорилось во Введении. Для каждой задачи исследуются вопросы существования решения. Вопросы единственности решения обсуждаются в главах 3 и 5.

2.1 Глобальная и локальная минимальность

Рассмотрим некоторую вещественную функцию $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, заданную на каком-либо множестве $\mathcal{X}$. Точка x_0 из $\mathcal{X}$ называется *точкой абсолютного* или *глобального минимума функции* f, если для произвольной точки x из $\mathcal{X}$ имеет место следующее неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Абсолютный минимум называется *строгим*, если равенство достигается только при $x = x_0$.

При изучении функционалов длины и взвешенной длины сложилась следующая терминология. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый класс сетей на римановом многообразии W, и Λ — некоторый такой функционал.

Определение. Сети из $\mathcal{M}$, являющиеся точками абсолютного минимума функционала Λ на множестве $\mathcal{M}$, называются *глобально мини-*

мальными или *абсолютно минимальными сетями* (в $\mathcal{M}$ относительно Λ).

При изучении функционалов типа длины естественно возникает еще один важный тип минимальности, за которым установилось название "локальная минимальность". Если, скажем, в качестве множества $\mathcal{M}$ мы рассмотрим множество всех гладких кривых, соединяющих пару фиксированных точек A и B полного риманова многообразия (т.е. сетей $\Phi\colon [0,1] \to W$, затягивающих множество $\{A, B\}$), то абсолютно минимальной сетью в $\mathcal{M}$ будет, очевидно каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая A и B. Однако, хорошо известно, что не всякая геодезическая является кратчайшей кривой, соединяющей свои концевые точки. Тем не менее, геодезическая обладает следующим определяющим свойством локальной минимальности: длина каждого ее фрагмента между достаточно близкими точками P_1 и P_2 не может быть уменьшена малыми деформациями этого фрагмента, оставляющими на месте точки P_1 и P_2. Локально минимальные сети, как уже отмечалось во Введении, представляют собой естественное обобщение понятия геодезической. Определения локально минимальных сетей мы выделим в отдельный раздел 2.2.

Замечание. Если множество $\mathcal{X}$, на котором задана функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ наделено структурой топологического пространства, то, наряду с понятием глобального минимума, определено понятие локального минимума: точка x_0 из $\mathcal{X}$ называется точкой *локального минимума* функции f на топологическом пространстве $\mathcal{X}$, если существует окрестность U точки x_0, такая что x_0 — это точка глобального минимума для ограничения функции f на U. В данной работе рассматриваемые классы сетей не наделяются топологией, хотя, конечно, это можно сделать, см. например книгу автора и А. А. Тужилина [46]. Если на некотором классе сетей введена топология, то сети, являющиеся локальными минимумами функционала длины относительно этой топологии, называются *локально минимальными "в целом"*. Отметим, что в [46] топология вводится таким образом, что каждая локально минимальная "в целом" сеть является локально минимальной в определяемом ниже смысле. Вопросы локальной минимальности "в целом" в данной работе не рассматриваются.

2.2 Локально минимальные параметрические сети и следы

В данном разделе мы определим понятия локально минимальных параметрических сетей и локально минимальных сетей–следов на многообразиях. Напомним (см. Введение), что локально минимальные сети можно рассматривать как некоторое естественное обобщение геодезических — разветвленные геодезические.

Стандартные геодезические на римановом многообразии W — это решения следующей граничной задачи: среди кривых, соединяющих пару фиксированных граничных точек из W, найти такие, что каждая достаточно малая по амплитуде и носителю и постоянная на границе деформация этих кривых увеличивала бы их длину. Во введении отмечалось, что разветвленные геодезические (или локально-минимальные сети) возникают как естественное обобщение понятия стандартных геодезических на случай граничного множества, состоящего из трех и более точек многообразия W. В этом случае естественно перейти от рассмотрения кривых, т.е. отображений отрезка в многообразие, к рассмотрению сетей, т.е. отображений графов в многообразие. При этом сразу же возникает новый эффект, не встречающийся в случае обычных геодезических. А именно, данное конечное подмножество многообразия можно, вообще говоря, затянуть сетями разной топологии, т.е. сетями, параметризующие графы которых не эквивалентны. Отсюда два возможных подхода к определению разветвленных геодезических: можно определять локально минимальные сети в классе сетей фиксированной топологии, другими словами, в классе параметрических сетей одного типа, а можно перейти к сетям–следам, разрешив тем самым топологии меняться.

Мы рассмотрим здесь обе эти возможности, начав со случая параметрических сетей. В случае параметрических сетей, как мы сейчас увидим, естественно возникает два понятия локальной минимальности — сильная и слабая. Разница между ними состоит в определении того, что такое “малость” носителя деформации параметрической сети.

2.2.1 Слабо локально минимальные параметрические сети

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть с границей или без, $x \in G$ — произвольная точка графа G, и G^x_{loc} — локальный граф с центром в точке x. Напомним, что для каждого локального графа G^x_{loc} определена его каноническая граница $\partial G^x_{\mathrm{loc}}$. Рассмотрим ограничение

отображения Φ на G^x_{loc}. Мы получим сеть, которую будем обозначать через Φ^x_{wloc}, с границей β_{wloc}, равной ограничению отображения Φ на каноническую границу $\partial G^x_{\mathrm{loc}}$ локального графа G^x_{loc}. Положим $M^x = \beta_{\mathrm{wloc}}(\partial G^x_{\mathrm{loc}})$.

Определение. Параметрическую сеть Φ^x_{wloc} с границей $\beta_{\mathrm{wloc}}\colon \partial G^x_{\mathrm{loc}} \to M^x \subset W$ назовем *слабой локальной сетью точки* $x \in G$.

Замечание. Рассмотрим множество всех локальных графов некоторой фиксированной точки $x \in G$. Наименьшее по включению замкнутое подмножество в G, содержащее все локальные графы точки x, очевидно совпадает со звездой $S(x)$ точки x, т.е. с подграфом в G, состоящим из всех ребер, инцидентных x. Отметим, что звезда $S(x)$ не является, по определению, локальным графом точки x.

Такое определение локальной сети приводит к следующему определению локальной минимальности.

Определение. Параметрическая сеть Φ называется *слабо локально минимальной*, если у любой точки x ее параметризующего графа G существует такая слабая локальная сеть Φ^x_{wloc}, что любая достаточно малая деформация сети Φ^x_{wloc}, сохраняющая ее границу β_{wloc}, не уменьшает длину сети Φ^x_{wloc}.

2.2.2 Сильно локально минимальные параметрические сети

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть, и x — произвольная точка из G. Обозначим через $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{G} \to W$ соответствующую Φ приведенную сеть, и пусть $\pi\colon G \to \widetilde{G}$ — стандартная проекция (см. раздел 1.3 главы 1). Положим $y = \pi(x)$.

Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U точки y в графе $\widetilde{G}$. Замкнутое множество $G^x_{\mathrm{sloc}} = \pi^{-1}(U) \subset G$ наделим естественной структурой графа, объявив его вершинами все вершины из G, попавшие в G^x_{sloc}, а также все точки из множества $\partial_t\big(G^x_{\mathrm{sloc}}\big) \subset G$, где через ∂_t обозначена операция взятия топологической границы: $\partial_t(A) = \mathrm{cl}(A) \setminus \mathrm{int}(A)$. Отметим, что по определению, граф G^x_{sloc} содержит те и только те вырожденные ребра графа G, которые переводятся проекцией π в вершину $y = \pi(x)$ приведенного графа $\widetilde{G}$.

Обозначим через Φ^x_{sloc} параметрическую сеть, полученную ограничением отображения Φ на G^x_{sloc}. Определим границу параметрической сети Φ^x_{sloc}. Положим:

$$\partial G^x_{\mathrm{sloc}} = \big(\partial_l G^x_{\mathrm{sloc}}\big) \cup \big(\partial G \cap G^x_{\mathrm{sloc}}\big).$$

Другими словами, множество $\partial G^x_{\mathrm{sloc}}$ — это объединение множества всех вершин графа G^x_{sloc}, образы которых при проекции π лежат на границе окрестности U, и множества всех вершин из G^x_{sloc}, являющихся граничными для сети Φ. Определим границу β_{sloc} сети Φ^x_{sloc} как ограничение отображения Φ на множество $\partial G^x_{\mathrm{sloc}}$.

Определение. Параметрическую сеть Φ^x_{sloc} с границей $\beta_{\mathrm{sloc}} : \partial G^x_{\mathrm{sloc}} \to W$ назовем *сильной локальной сетью для* Φ.

Замечание. Как и в случае слабых локальных сетей, рассмотрим наименьшее замкнутое подмножество $\mathcal{S}(x)$ в G, содержащее все графы G^x_{sloc}, на которых определены сильно локальные сети фиксированной точки $x \in G$. Ясно, что $\mathcal{S}(x)$ является подграфом в G, состоящим из всех ребер графа G, переходящих в $y = \pi(x)$ при проекции π, а также из тех ребер графа G, которые смежны с этими ребрами. Ясно, что ограничение Φ на $\mathcal{S}(x)$ не является сильной локальной сетью точки x.

Определение. Параметрическая сеть Φ называется *сильно локально минимальной*, если для любой точки x ее параметризующего графа G существует такая сильная локальная сеть Φ^x_{sloc}, что любая достаточно малая деформация сети Φ^x_{sloc}, сохраняющая ее границу β_{sloc}, не уменьшает длину сети Φ^x_{sloc}.

Ясно, что из сильной локальной минимальности параметрической сети вытекает ее слабая локальная минимальность. Отметим также, что для погруженных сетей понятия сильной и слабой локальной минимальности совпадают. В дальнейшем мы иногда будем пользоваться термином "локально минимальная параметрическая сеть," не уточняя сильная или слабая локальная минимальность имеется ввиду, если соответствующее утверждение имеет место как для тех, так и для других минимальных сетей.

Замечание. Понятие локальной минимальности можно было бы определять в терминах "малости носителя" малых деформаций. А именно, сеть называется слабо локально минимальной, если ее длина не уменьшается при любой достаточно малой неподвижной на границе деформации, носитель которой достаточно мал как подмножество параметризующего графа G. Далее, сеть называется сильно локально минимальной, если ее длина не уменьшается при любой достаточно малой неподвижной на границе деформации, носитель которой достаточно мал как подмножество объемлющего многообразия W. Однако, на наш взгляд, язык локальных сетей, во-первых, наглядней, а во-вторых, удобней в техническом отношении.

2.2.3 Локально минимальные взвешенные параметрические сети

Пусть G — взвешенный граф с положительной весовой функцией ω, и $\Phi\colon G \to W$ — (кусочно-)гладкая параметрическая сеть на римановом многообразии W. В этом случае, очевидно, на классе параметрических сетей типа G возникает функция ℓ_ω, сопоставляющая каждой сети Φ из этого класса ее взвешенную длину. Более того, каждую локальную сеть параметрической сети Φ можно превратить во взвешенную сеть, приписав ребрам локальной сети веса соответствующих ребер из Φ. Это дает возможность определить взвешенную длину каждой локальной сети, и, тем самым, понятия *сильно* и *слабо локально минимальной* взвешенной параметрической сети дословно повторив соответствующие определения для функционала длины.

Функционалы взвешенной длины обладают следующим важным свойством локальной аддитивности. Пусть $\mathcal{W}$ — функционал взвешенной длины, заданный на некотором семействе $\mathcal{M}$ параметрических сетей на римановом многообразии W. Пусть $\Phi \in \mathcal{M}$ — произвольная параметрическая сеть, и Φ_{loc} — произвольная ее локальная сеть (сильная или слабая), определенная на графе $G_{\mathrm{loc}} \subset G$. Выбросим из графа G его подмножество G_{loc}, и на замыкании полученного множества зададим естественную структуру взвешенного графа, который обозначим через $\overline{G}$. Наконец, пусть $\overline{\Phi}$ — это взвешенная параметрическая сеть, порожденная графом $\overline{G}$.

Утверждение 2.1 *В сделанных предположениях, взвешенная длина $\ell_\omega(\Phi)$ сети Φ равна сумме взвешенных длин локальной сети Φ_{loc} и сети $\overline{\Phi}$:*

$$\ell_\omega(\Phi) = \ell_\omega(\Phi_{\mathrm{loc}}) + \ell_\omega(\overline{\Phi}).$$

2.2.4 Локально минимальные сети–следы

Пусть теперь $\Gamma \subset W$ — след с границей или без, и $x \in \Gamma$ — произвольная его точка. Рассмотрим произвольную хорошую окрестность U точки x, существующую в силу утверждения 1.9 главы 1. Напомним, что пересечение хорошей окрестности U со следом Γ вновь является следом, который мы обозначим через Γ^x_{loc}. Обозначим через $\partial\Gamma^x_{\mathrm{loc}}$ пересечение Γ с границей окрестности U, к которому добавлена точка x, в том случае, если x принадлежит границе следа Γ. Другими словами, $\partial\Gamma^x_{\mathrm{loc}} = \big(\Gamma \cap \partial U\big) \cup \big(\partial\Gamma \cap U\big)$. След Γ^x_{loc} с границей $\partial\Gamma^x_{\mathrm{loc}}$ будем называть *локальным следом для точки $x \in \Gamma$.*

Определение. След Γ называется *локально минимальным*, если у любой его точки x существует такой локальный след 1^x_{loc}, что любая достаточно малая деформация[1] следа Γ^x_{loc}, неподвижная на $\partial\Gamma^x_{\mathrm{loc}}$, не уменьшает длину следа Γ^x_{loc}.

2.2.5 Общая задача о поиске локально минимальных сетей

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство параметрических сетей или сетей–следов на римановом многообразии W. Легко видеть, что всякая глобально минимальная сеть из $\mathcal{M}$ является локально минимальной в соответствующем смысле. Таким образом, следующая задача является естественным обобщением задачи о поиске в $\mathcal{M}$ абсолютно минимальных сетей.

Задача 2.1 (Обобщенная проблема Штейнера) *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство сетей на римановом многообразии W. Описать все локально минимальные сети из $\mathcal{M}$.*

В пункте 2.3 будут рассмотрены основные стандартные классы сетей, на которых естественно рассматривать обобщенную проблему Штейнера.

2.3 Разные классы сетей — разные минимизационные задачи

В данном разделе мы опишем основные семейства сетей, на которых естественно ставится обобщенная проблема Штейнера. Сначала мы просто перечислим их, а затем более подробно остановимся на наиболее важных случаях.

В главе 1 мы ввели в рассмотрение классы параметрических сетей и сетей–следов на многообразии. При этом, в каждом из этих классов можно рассматривать как подкласс замкнутых сетей, так и подкласс сетей с фиксированной непустой границей. Таким образом, возникает четыре естественных семейства сетей: параметрические сети, замкнутые или с фиксированной границей, и следы, замкнутые или с фиксированной границей.

Для параметрических сетей $\Phi = \{\varphi\colon G \to W\}$ на многообразии W имеется возможность фиксировать топологию параметризующего

[1] Напомним, что все деформации следов предполагаются гладкими и конечного типа.

	Граница	Тип	
		G	$\varphi : G \to W$
Параметрические сети	фиксирована	фиксирован	
	фиксирована	фиксирован	не фиксирован
	фиксирована	не фиксирован	
	без границы	фиксирован	
	без границы	фиксирован	не фиксирован
	без границы	не фиксирован	
Сети–следы	фиксирована	–	–
	без границы	–	–

Таб. 2.1: Естественные классы сетей

графа G, что удваивает количество классов параметрических сетей (итого, их стало четыре). Кроме того, в отличие от сетей–следов (см. предложение 1.12), вообще говоря, не для всякой пары параметрических сетей существует непрерывная деформация, переводящая одну из них в другую. Таким образом, фиксировав некоторую параметрическую сеть $\varphi\colon G \to W$, мы можем рассмотреть семейство параметрических сетей, получаемых из сети φ непрерывными деформациями. В результате, получим так называемую задачу поиска минимальной параметрической сети *фиксированного гомотопического типа.* Отметим, что фиксируя гомотопический тип $\varphi\colon G \to W$ параметрической сети, мы автоматически фиксируем и ее топологический тип G. Возможность фиксировать гомотопический тип параметрической сети приводит к добавлению еще двух различных классов параметрических сетей.

Таким образом, имеется шесть естественных классов параметрических сетей, и два класса сетей–следов, см. таблицу 2.1. Для каждого из указанных классов сетей можно поставить одну из двух минимизационных задач: о поиске абсолютно минимальных сетей и о поиске локально минимальных сетей. Итого, получается 16 разных "обобщенных проблем Штейнера".

Отметим, что некоторые из этих 16 задач тривиальны, а именно, замкнутые глобально минимальные сети совпадают с точечными сетями, за исключением случая параметрических сетей с фиксированным нетривиальным гомотопическим типом параметризующего отображения. В остальных случаях, если в задаче имеется нетривиальное решение, то, в самой общей постановке, поиск этого решения как правило чрезвычайно сложен. Поэтому, чтобы задача стала обозримой, естественно вводить некоторые дополнительные ограничения. Пре-

жде всего, это могут быть условия на топологические и метрические свойства объемлющего многообразия (скажем, односвязность или постоянность кривизны). Если мы имеем дело с граничной задачей, то также естественными представляются геометрические ограничения на устройство границы рассматриваемых сетей (например, в случае плоскости, свойства выпуклой оболочки границы, или наличие у границы достаточно большой группы симметрий). Основное внимание в данной работе, как уже отмечалось выше, уделяется изучению локально минимальных сетей на плоскости и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с теми или иными ограничениями на устройство границ рассматриваемых сетей.

В нескольких следующих разделах мы более подробно остановимся на нескольких стандартных задачах минимизации длины сетей.

2.3.1 Замкнутые параметрические сети фиксированного типа

Пусть $\mathcal{M}_G$ — множество всех замкнутых параметрических сетей на римановом многообразии W, параметризованных фиксированным графом G. На пространстве $\mathcal{M}_G$ задача о поиске абсолютно минимальной сети тривиальна: глобально минимальные сети — это все точечные сети и только они.

Задача о поиске локально минимальных сетей в случае семейства $\mathcal{M}_G$ может быть переформулирована так: среди всех параметризованных графом G замкнутых параметрических сетей найти локально минимальные сети. Отметим, что в евклидовом пространстве эта задача тривиальна (так же как и задача об абсолютно минимальных сетях): все замкнутые локально минимальные сети в $\mathbb{R}^n$ являются точечными. Однако, если изменить метрику в $\mathbb{R}^n$, или если в качестве объемлющего многообразия W взять многообразие с более сложной топологией, то эта задача уже становится весьма непростой.

Пример. Рассмотрим вложение плоскости $\mathbb{R}^2$ в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения M, изображенной на рис. 2.1. Пусть (r, φ, z) — стандартные цилиндрические координаты, и $r = f(z)$ — уравнение, задающее M. Выделенная параллель γ проходит через точку локального минимума функции $f(z)$, поэтому γ — геодезическая. Выбрав на γ некоторую точку P, можно представить γ как параметрическую сеть Φ с одной вершиной P и единственным циклическим ребром. Перенеся метрику, индуцированную на M из $\mathbb{R}^3$, а также кривую γ, на плоскость $\mathbb{R}^2$, получим не точечную локально минимальную сеть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с этой метрикой.

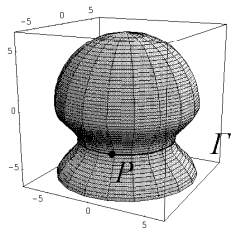


Рис. 2.1: Не точечная локально минимальная параметрическая сеть.

2.3.2 Параметрические сети с границей

Пусть $\mathcal{M}_G(\beta)$ — множество всех параметрических сетей типа G, затягивающих фиксированное конечное множество $M \subset W$ по граничному отображению $\beta\colon \partial G \to M \subset W$. Задача поиска абсолютно (локально) минимальной сети на классе сетей $\mathcal{M}_G(\beta)$ состоит в поиске среди всех сетей типа G, затягивающих фиксированное граничное множество M по отображению β, сети наименьшей длины (соответственно, локально минимальных сетей).

В некоторых отдельных случаях эта задача разрешима. Например, если объемлющее многообразие это стандартная плоскость $\mathbb{R}^2$, параметризующий граф G — дерево, степени вершин которого не превосходят трех, то, как отмечалось во Введении, хорошо известен алгоритм Мелзака [64], позволяющий или найти на плоскости погруженную локально минимальную сеть из пространства $\mathcal{M}_G(\beta)$, или убедиться в том, что такой сети не существует. В общем случае эта задача чрезвычайно сложна.

2.3.3 Множество всех параметрических сетей

Чтобы найти сеть действительно наименьшей возможной длины, следует рассматривать класс всех параметрических сетей, замкнутых или с фиксированной границей. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех замкнутых параметрических сетей, а через $\mathcal{M}(M)$ — множество всех параметрических сетей, затягивающих фиксированное множество M по всевозможным граничным отображениям. Ясно, что множество $\mathcal{M}$ является дизъюнктивным объединением множеств $\mathcal{M}_G$, каждое из которых состоит из всех замкнутых параметрических сетей данного типа G, а множество $\mathcal{M}(M)$ является дизъюнктивным объединением всевозможных множеств $\mathcal{M}_G(\beta)$ параметрических сетей всевозможных типов G, затягивающих множество M по всевозможным граничным



Рис. 2.2: Минимальные сети, затягивающие квадрат

отображениям.

Решение задач о поиске локально минимальных сетей на пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}(M)$ — это просто дизъюнктивные объединения решений соответствующих задач на пространствах $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{M}_G(\beta)$. Чтобы найти абсолютно минимальную сеть, нужно, очевидно, найти абсолютно минимальные сети на каждом из пространств $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{M}_G(\beta)$, а затем среди построенных сетей взять сеть наименьшей длины. Уже в случае, когда объемлющее пространство W — это стандартная евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, эта задача нетривиальна. Рассмотрим следующий простой пример. Пусть M — множество вершин квадрата. Слева на рис. 2.2 показана сеть, состоящая из четырех ребер и одной вершины, расположенной в центре квадрата. Эта сеть абсолютно минимальная в классе сетей топологии звезды с четырьмя вершинами степени 1. Однако, как известно, вершины квадрата можно затянуть сетью меньшей длины и другого топологического типа, изображенной на рис. 2.2 справа. Причем, очевидно, таких сетей две. Таким образом, мы видим, что при поиске абсолютно минимальных сетей произвольного топологического типа, вообще говоря, приходится перебирать различные топологии. Именно это обстоятельство и делает задачу очень сложной.

2.3.4 Параметрические сети, гомотопные данной

Рассмотрим теперь задачу о поиске минимальных сетей фиксированного гомотопического типа. Чтобы пояснить смысл понятия гомотопического типа сети, отметим, что, вообще говоря, не каждые две сети из $\mathcal{M}_G$ могут быть продеформированы одна в другую непрерывной деформацией.

Пусть Φ_0 и Φ_1 — некоторые параметрические сети. Мы скажем, что сети Φ_0 и Φ_1 *гомотопны*, если существует такая непрерывная де-

формация Φ_t, $t \in [0,1]$, сети Φ_0, что $\Phi_0 = \Phi_t|_{t=0}$, и $\Phi_t|_{t=1} = \Phi_1$. Отметим, что гомотопные сети по определению имеют один и тот же топологический тип. Если у сети Φ_i, $i = 0,\ 1$ фиксирована граница β_i, то будем предполагать дополнительно, что деформация Φ_t неподвижна на границе. Очевидно, при этом границы β_i совпадают.

Фиксируем теперь некоторую параметрическую сеть $\Phi\colon G \to W$ с фиксированной границей β (возможно пустой). Рассмотрим в $\mathcal{M}_G(\beta)$ подмножество $\mathcal{M}_\Phi$, состоящее из всех сетей, гомотопных Φ. Задачи поиска глобально или локально минимальных сетей на пространстве $\mathcal{M}_\Phi$ как правило, не тривиальны, если только сеть Φ не гомотопна точечной сети. В последнем случае, тривиальной оказывается задача о поиске абсолютно минимальной сети.

2.3.5 Следы

Рассмотрим теперь задачи минимизации в классе $\mathcal{T}$ следов. Легко видеть, что след абсолютно минимальной длины (с границей M или замкнутый) совпадает со следом параметрической сети, абсолютно минимальной в классе $\mathcal{M}(M)$ всех параметрических сетей с той же границей M или, соответственно, в пространстве $\mathcal{M}$ всех замкнутых параметрических сетей.

Интересней дело обстоит с задачами о локально минимальных следах. На рис. 2.3 приведен пример непрерывной деформации следа. Сеть, соединяющая центр квадрата с его вершинами, не является локально минимальной в пространстве $\mathcal{T}$: малая деформация, расщепляющая вершину степени 4 на две вершины степени 3, изображенная на рис. 2.3, и постоянная вне малой окрестности вершины степени 4, уменьшает длину сети. Переход от первой сети ко второй называется *расщеплением вершины* (в данном случае, вершины степени 4 на две вершины степени 3).

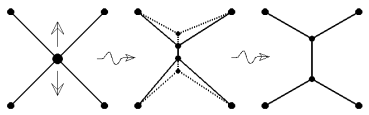


Рис. 2.3: Расщепление вершины

2.3.6 Другие важные семейства сетей

Как уже говорилось выше, задача описания всех минимальных сетей, затягивающих фиксированное множество точек, чрезвычайно сложна. Существует несколько способов редукции этой проблемы. Во-первых, можно ограничить набор топологий рассматриваемых сетей. В частности, как будет показано в следующей главе, минимальные следы обладают следующим свойством: степень каждой вершины канонического представителя минимального следа (канонический представитель существует в силу утверждения 1.7 главы 1) не превосходит 3. Это обстоятельство позволяет выделить класс так называемых *сетей Штейнера* — вложенных сетей, параметризующие графы которых обладают только вершинами степени не более 3.

Другой способ упрощения проблемы состоит в изучении возможных топологий минимальных сетей, затягивающих конкретное множество M, исходя из геометрических свойств множества M. Так, например, рассмотрим экстремальное множество M точек плоскости, т.е. такое множество, которое лежит на границе своей выпуклой оболочки. Оказывается, что свойство множества M быть экстремальных накладывает сильные ограничения на возможные топологии минимальных сетей с границей M, см. Введение.

Далее, если граничное множество M обладает большой группой симметрий, то это приводит к еще большим ограничениям на возможные топологии минимальных сетей. Так, например, А. А. Тужилиным совместно с автором изучаются минимальные сети, затягивающие вершины правильных многоугольников на плоскости, см. работы [42, 44, 45, 40, 46, 50, 51, 82, 83, 84].

Наконец, можно выбирать в качестве объемлющего пространства многообразия специального вида, например многообразия постоянной кривизны. В работе [41] И. В. Птицыной, А. А. Тужилиным и автором получена полная классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах. В работе [80], см. также [46], получено полное описание замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна. В [46] также построен ряд примеров таких сетей на двумерных замкнутых поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Наконец, в [46] приведены примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях многогранников, которые рассматриваются как плоские многообразия с конечным набором особых точек — вершин. В [81] получена классификация замкнутых локально минимальных сетей на поверхности тетраэдров, см. также [46].

2.4 Теоремы существования

В настоящем параграфе мы докажем теоремы существования минимальных сетей в основных семействах сетей, введенных в рассмотрение выше. Отметим, что из существования абсолютно минимальных сетей вытекает существование локально минимальных сетей.

2.4.1 Параметрические сети с фиксированной границей

Пусть M — множество, состоящее из $n > 0$ точек связного полного риманова многообразия W, и пусть G — некоторый связный топологический граф, с границей ∂G. Предположим, что задано сюръективное граничное отображение $\beta\colon \partial G \to M$, и рассмотрим семейство $\mathcal{M}_G(\beta)$ всех параметрических сетей $\Phi\colon G \to W$ с границей β.

Предложение 2.1 *Существует такая параметрическая сеть $\Phi_0 \in \mathcal{M}_G(\beta)$, что ее длина $\ell(\Phi_0)$ не превосходит длины любой другой сети из $\mathcal{M}_G(\beta)$. Другими словами, в каждом семействе $\mathcal{M}_G(\beta)$ существует абсолютно минимальная сеть.*

Доказательство. Пусть a — точная нижняя грань длин сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$. Рассмотрим произвольную последовательность Φ_i сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$, такую что числовая последовательность $\ell(\Phi_i)$ сходится к a при $i \to \infty$. Поскольку объемлющее многообразие W полно, каждые две точки на нем можно соединить кратчайшей геодезической. Перестроим каждую сеть Φ_i, заменив каждое ее ребро на кратчайшую геодезическую, соединяющую вершины, инцидентные этому ребру. Сети, каждое ребро которых является кратчайшей геодезической, будем называть *кратчайшими геодезическими сетями.* Таким образом, мы получили новую последовательность Φ_i', состоящую из кратчайших геодезических сетей. При этом, $\ell(\Phi_i') \leq \ell(\Phi_i)$ для каждого i. Так как кратчайшая геодезическая, соединяющая пару точек, вообще говоря, не единственна, то описанный только что способ построения может привести к нескольким сетям. Однако, очевидно, все они имеют одинаковую длину. Ясно, что при $i \to \infty$ также имеем $\ell(\Phi_i') \to a$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2.1 *Точная нижняя грань длин всех сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$ совпадает с точной нижней гранью длин всех кратчайших геодезических сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$.*

Итак, для доказательства предложения достаточно показать, что точная нижняя грань длин кратчайших геодезических сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$ достигается. Покажем это.

Прежде всего, отметим, что длина кратчайшей геодезической сети из $\mathcal{M}_G(\beta)$ полностью определяется расположением вершин этой сети. Так как граничные вершины фиксированы, то длина кратчайшей геодезической сети из $\mathcal{M}_G(\beta)$ полностью определяется расположением всех остальных вершин этой сети. Таким образом, возникает функция

$$\ell_G \colon W \times \cdots \times W \to \mathbb{R},$$

ставящая в соответствие каждому набору точек из W длину соответствующей кратчайшей геодезической сети (количество сомножителей W равно числу вершин графа G, не попавших в его границу ∂G).

Следующая лемма непосредственно вытекает из непрерывности функции расстояния $\rho(A, B)$, определенной на полном римановом многообразии как точная нижняя грань длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих A и B.

Лемма 2.2 *Построенная выше функция ℓ_G непрерывна.*

Если многообразие W компактно, то функция ℓ_G достигает своего минимума по теореме Вейерштрасса, что и требовалось.

Пусть теперь W не компактно. Оказывается, если длина кратчайшей геодезической сети близка к точной нижней грани a, то вершины этой сети не могут располагаться слишком далеко от граничного множества M. Действительно, рассмотрим произвольную кратчайшую геодезическую сеть из $\mathcal{M}_G(\beta)$, и пусть L — ее длина. Рассмотрим замкнутый шар B радиуса $L + 1$ с центром в одной из граничных точек. Ясно, что все точки из M лежат внутри B. Кроме того, если вершина кратчайшей геодезической сети лежит вне B, то длина этой сети больше чем $L + 1$. Поэтому длины всех таких сетей отделены от a некоторым положительным числом $\delta \geq 1$. Поэтому, достаточно показать достижимость точной нижней грани длин тех кратчайших геодезических сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$, вершины которых лежат внутри компакта $B \subset W$. Последнее опять вытекает из теоремы Вейерштрасса. Предложение доказана.

Из предложения 2.1 можно вывести результаты о существовании глобально минимальных сетей и в некоторых других классах сетей. Пусть $\mathcal{M}(M)$ — множество всех параметрических сетей, затягивающих фиксированное конечное множество M точек полного риманова многообразия W.

Следствие 2.1 *Во множестве $\mathcal{M}(M)$ всех параметрических сетей с фиксированной границей M существует абсолютно минимальная сеть.*

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{M}(M)$ является дизъюнктивным объединением классов $\mathcal{M}_G(\beta)$ параметрических сетей по всевозможным типам G и граничным отображениям β, таким что образ β совпадает с M. По предложению 2.1, на каждом $\mathcal{M}_G(\beta)$ точная нижняя грань длин сетей достигается.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.3 *Точная нижняя грань длин всех сетей из $\mathcal{M}(M)$ совпадает с точной нижней гранью длин тех сетей из $\mathcal{M}(M)$, параметризующие графы которых являются деревьями, у которых все вершины степени 1 и 2 — граничные.*

Так как число граничных вершин фиксировано, то число топологий деревьев из леммы 2.3 конечно. Кроме того, очевидно, конечным является число всевозможных граничных отображений β. Поэтому точная нижняя грань длин сетей из $\mathcal{M}(M)$ совпадает с наименьшей точной нижней гранью длин сетей из конечного семейства пространств $\mathcal{M}_G(\beta)$, описанных в лемме 2.3, которая, очевидно, достигается. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь задачу о поиске минимальных параметрических сетей данного гомотопического типа. А именно, пусть фиксирована некоторая параметрическая сеть $\psi\colon G \to W$ из $\mathcal{M}_G(\beta)$. Обозначим через $\mathcal{M}_\psi(\beta)$ множество всех сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$, гомотопных ψ.

Следствие 2.2 *Во множестве $\mathcal{M}_\psi(\beta)$ параметрических сетей данного гомотопического типа с фиксированной границей существует абсолютно минимальная сеть.*

Доказательство. Доказательство следствия 2.2 получается дословным повторением доказательства предложения 2.1. При этом следует заменять кратчайшие геодезические, соединяющие пары точек полного риманова многообразия W, на кратчайшие геодезические данного гомотопического типа. Следствие доказано.

2.4.2 Замкнутые параметрические сети

Пусть снова W — связное полное риманово многообразие, и G — связный топологический граф. Рассмотрим $\mathcal{M}_G$ класс всех замкнутых па-

раметрических сетей, параметризованных графом G. Ясно, что функционал длины, заданный на $\mathcal{M}_G$, достигает своего минимального значения (а именно, нуля) на произвольной точечной сети $\varphi\colon G \to * \in W$ из $\mathcal{M}_G$. Точно так же, функционал длины достигает нуля на множестве всех замкнутых параметрических сетей (т.е. на дизъюнктном объединении всевозможных $\mathcal{M}_G$).

Предположим теперь, что фиксирована некоторая замкнутая параметрическая сеть $\psi\colon G \to W$, и рассмотрим семейство $\mathcal{M}_\psi$ всех замкнутых параметрических сетей φ из $\mathcal{M}_G$, таких что φ гомотопно ψ. Очевидно, что если сеть ψ гомотопна точечной, то функционал длины вновь достигает минимума (нуля) на $\mathcal{M}_\psi$. Однако, если сеть ψ гомотопически нетривиальна, то ситуация существенно иная. А именно, в $\mathcal{M}_\psi$ может не существовать не только глобально, но и локально минимальных сетей.

Пример. Возьмем в качестве многообразия W некомпактную двумерную поверхность, полученную вращением графика функции $x = e^{-z}$ вокруг оси Oz, где $Oxyz$ — стандартная евклидова система координат в $\mathbb{R}^3$, см. рис. 2.4. Пусть G — граф, состоящий из одной вершины и одного циклического ребра. Очевидно, G, как топологическое пространство, гомеоморфен окружности S^1. Пусть $\psi\colon G \to W$ — некоторая вложенная сеть, след которой совпадает с какой-нибудь параллелью поверхности вращения W, т.е. кривой $W \cap \{z = \text{const}\}$. Легко показать, что на W нет замкнутых геодезических, поэтому, в частности, в классе $\mathcal{M}_\psi$ нет минимальных сетей.

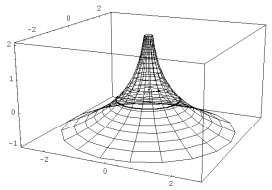


Рис. 2.4: Поверхность вращения графика функции e^{-z}.

Замечание. В предыдущем примере существенную роль играет некомпактность объемлющего многообразия W. Хорошо известно, см. например [59], что на каждом компактном замкнутом римановом многообразии существует замкнутая геодезическая, а значит и замкнутая локально минимальная сеть.

2.4.3 Взвешенные параметрические сети

Пусть, как и выше, M — множество, состоящее из $n > 0$ точек полного риманова многообразия W, и пусть G — некоторый связный взвешенный топологический граф с границей ∂G и положительной весовой функцией ω. Как и выше, предположим, что задано сюръективное граничное отображение $\beta\colon \partial G \to M$, и рассмотрим семейство $\mathcal{M}_G(\beta)$ всех параметрических сетей $\Phi\colon G \to W$ с границей β. Зададим на пространстве $\mathcal{M}_G(\beta)$ функционал взвешенной длины, который обозначим через ℓ_ω.

Предложение 2.2 *Существует такая параметрическая сеть $\Phi_0 \in \mathcal{M}_G(\beta)$, что ее взвешенная длина $\ell_\omega(\Phi_0)$ не превосходит взвешенной длины любой другой сети из $\mathcal{M}_G(\beta)$. Другими словами, в пространстве $\mathcal{M}_G(\beta)$ существует сеть, абсолютно минимальная относительно функционала взвешенной длины ℓ_ω.*

Доказательство. В силу определения функционалов взвешенной длины, очевидно, имеет место следующий аналог леммы 2.1.

Лемма 2.4 *В сделанных выше предположениях, точная нижняя грань взвешенных длин всех сетей из $\mathcal{M}_G(\beta)$ совпадает с точной нижней гранью взвешенных длин всех кратчайших геодезических сетей из семейства $\mathcal{M}_G(\beta)$.*

Поэтому, доказательство можно закончить дословно повторяя доказательство предложения 2.1.

Замечание. Отметим, что из предложения 2.2 вытекает, как и в случае обычного функционала длины, существование параметрических сетей, локально минимальных (как слабо так и сильно) относительно функционала взвешенной длины.

2.4.4 Следы с фиксированной границей

Пусть, как и выше, M — конечное множество точек связного полного риманова многообразия W. Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ множество всех следов, затягивающих M.

Предложение 2.3 *В классе $\mathcal{T}(M)$ всех следов, затягивающих фиксированное конечное множество M, существует абсолютно минимальная сеть.*

Доказательство. Пусть a — точная нижняя грань длин следов из класса $\mathcal{T}(M)$. Рассмотрим произвольную последовательность следов Γ_i, длины $\ell(\Gamma_i)$ которых сходятся к a при $i \to \infty$. Перестроим следы Γ_i следующим специальным образом.

В силу утверждения 1.8 главы 1, каждый след Γ_i можно заменить на содержащийся в нем (как подмножество W в подмножестве W) след Γ_i', обладающий каноническим представителем. Ясно, что $\ell(\Gamma_i') \leq \ell(\Gamma_i)$, поэтому последовательность $\ell(\Gamma_i')$ также сходится к a при $i \to \infty$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 2.5 *Точная нижняя грань длин всех следов из $\mathcal{T}(M)$ совпадает с точной нижней гранью длин всех следов из $\mathcal{T}(M)$, обладающих каноническим представителем.*

Множество всех следов из $\mathcal{T}(M)$, обладающих каноническим представителем, обозначим через $\mathcal{T}_c(M)$. Далее, следующая лемма очевидна.

Лемма 2.6 *Точная нижняя грань длин всех следов из $\mathcal{T}_c(M)$ совпадает с точной нижней гранью длин таких следов из $\mathcal{T}_c(M)$, что параметризующие графы их канонических представителей являются деревьями, у которых все вершины степени 1 и 2 — граничные.*[2]

Пусть Γ_i — последовательность следов из $\mathcal{T}_c(M)$, такая что (1) параметризующий граф G_i канонического представителя $\varphi_i\colon G_i \to W$ следа Γ_i такой, как в лемме 2.6, и (2) последовательность $\ell(\Gamma_i)$ сходится к точной нижней грани a. Поскольку число граничных вершин фиксировано, существует лишь конечное число топологий деревьев из леммы 2.6. Поэтому в последовательности Γ_i можно выбрать такую подпоследовательность Γ_{i_k}, что параметризующие графы G_{i_k} следов Γ_{i_k} одинаковы. Теперь утверждение предложения 2.3 вытекает из существования абсолютно минимальной параметрической сети данного топологического типа. Доказательство предложения 2.3 закончено.

2.4.5 Замкнутые следы

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех замкнутых следов на полном связном римановом многообразии W.

[2]Утверждение про вершины степени 2 содержит одну тонкость. А именно, существует единственная сеть, неграничная вершина степени 2 которой не может быть выброшена из множества вершин: это сеть из одного циклического ребра. Однако, для такой сети утверждение леммы вытекает из предположения о том, что граница изучаемой сети не пуста.

Предложение 2.4 *На множестве $\mathcal{T}$ всех замкнутых следов на полном римановом многообразии W функционал длины достигает минимума (нуля) на произвольном точечном следе.*

Доказательство. Утверждение предложения немедленно вытекает из предложения 1.12 главы 1: любой след из множества $\mathcal{T}$ можно непрерывно продеформировать в любой другой след из $\mathcal{T}$. Доказательство закончено.

2.4.6 Теорема существования

Подведем итоги, сформулировав следующую общую теорему существования.

Теорема 1 *Пусть W — связное полное риманово многообразие, и M — некоторое фиксированное конечное множество точек из W, возможно пустое. Тогда*

- *в семействе $\mathcal{M}_G(\beta)$ параметрических сетей фиксированного типа G с границей $\beta\colon \partial G \to M$, возможно пустой;*
- *в семействе $\mathcal{M}_G(\beta,\omega)$ взвешенных параметрических сетей фиксированного типа G с положительной весовой функцией и границей $\beta\colon \partial G \to M$, возможно пустой, на котором задан функционал взвешенной длины;*
- *в семействе $\mathcal{M}_\psi(\beta)$ параметрических сетей гомотопического типа $\psi\colon G \to W$ с непустой границей $\beta\colon \partial G \to M$;*
- *в семействе $\mathcal{M}(M)$ всех параметрических сетей с границей M, возможно пустой;*
- *в семействе $\mathcal{T}(M)$ сетей–следов с границей M, возможно пустой,*

существует абсолютно минимальная сеть. В частности, в этих пространствах существуют локально минимальные сети.

Таким образом, на связном полном римановом многообразии, для 7 из 8 естественных классов сетей, перечисленных в таблице 2.1, а именно, для всех этих пространств, кроме семейства замкнутых параметрических сетей фиксированного гомотопического типа, доказаны теоремы существования глобально, а, значит, и локально минимальных параметрических сетей и следов. Кроме того, доказано существование параметрических сетей фиксированного типа с

фиксированной границей, глобально и локально минимальных относительно функционалов взвешенной длины.

Глава 3

Локальная структура минимальных сетей

Цель настоящей главы состоит в описании локального устройства минимальных сетей каждого из рассмотренных в главе 2 типов. Каждая такая сеть состоит, очевидно, из отрезков геодезических — иначе можно легко уменьшить ее (взвешенную) длину, продеформировав любое негеодезическое ребро. Поэтому описать локальную структуру минимальных сетей — это описать, как эти геодезические отрезки стыкуются в вершинах сети. Чтобы дать требуемое описание, мы воспользуемся формулой первой вариации геодезической сети (см. предложение 1.10 главы 1), а также следствием 1.7 главы 1 о неотрицательности второй производной функции длины погруженной параметрической геодезической сети при геодезической деформации. Затем, мы обобщим теоремы о локальной структуре локально минимальных параметрических сетей на случай параметрических сетей, локально минимальных относительно функционалов взвешенной длины. В последнем разделе данной главы, мы используем полученные результаты о локальной структуре минимальных сетей при обсуждении вопросов локальной единственности минимальных сетей.

3.1 Локальная структура минимальных параметрических сетей

Цель настоящего параграфа — изучение локальной структуры минимальных параметрических сетей.

3.1.1 Критерий локальной минимальности погруженных параметрических сетей

Из формулы первой вариации длины геодезической сети легко получается описание локальной структуры минимальных параметрических сетей, являющихся погруженными. Напомним, что для погруженных параметрических сетей понятия слабой и сильной локальной минимальности совпадают. Локальное устройство минимальных параметрических сетей общего вида мы опишем ниже.

Предложение 3.1 *Пусть W — риманово многообразие, и Φ — погруженная параметрическая сеть в W с некоторой границей β, возможно пустой. Тогда сеть Φ локально минимальна тогда и только тогда, когда все ее ребра — геодезические, и, кроме того, сумма единичных векторов направлений ребер, исходящих из каждой подвижной вершины сети Φ, равна нулю.*

Доказательство. Пусть сначала Φ — погруженная локально минимальная параметрическая сеть с некоторой границей. Тогда, как уже отмечалось, все ребра сети Φ — суть отрезки геодезических. Далее, по определению, каждая подвижная вершина V сети Φ обладает такой локальной сетью Φ^V_{loc}, что все достаточно малые деформации $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$ этой локальной сети, оставляющие на месте ее границу $\partial\Phi^V_{\mathrm{loc}}$, не уменьшают длину локальной сети $\Phi^V_{\mathrm{loc}} = \Phi^V_{\mathrm{loc}}(0)$. Поэтому, функция $\ell(\varepsilon)$ длины локальной сети имеет минимум в начальный момент $\varepsilon = 0$. С другой стороны, в силу предложения 1.10 главы 1, функция $\ell(\varepsilon)$ дифференцируема в начальный момент $\varepsilon = 0$. Отсюда вытекает, что производная функции $\ell(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ существует и равна нулю для произвольной деформации $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$. Эта производная может быть вычислена с помощью того же предложения 1.10 главы 1. Она равна скалярному произведению вектора E скорости движения подвижной вершины V при деформации $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$ в начальны момент $\varepsilon = 0$ и вектора N, равного сумме единичных векторов направлений ребер, исходящих из вершины V. Поскольку вектор E может быть любым, вектор N равен нулю, что и требовалось.

Пусть теперь Φ — произвольная погруженная параметрическая сеть с некоторой границей. Предположим, что Φ удовлетворяет условиям предложения. Снова рассмотрим произвольную подвижную вершину V сети Φ, некоторую ее локальную сеть Φ^V_{loc}, и произвольную деформацию $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$ этой локальной сети, постоянную на границе этой локальной сети. Тогда из предложения 1.10 главы 1 вытекает, что первая производная функции $\ell(\varepsilon)$ длины продеформированной локальной

сети Φ^V_{loc} равна нулю при $\varepsilon = 0$. Теперь перейдем к анализу второй производной функции $\ell(\varepsilon)$.

Поскольку все рассматриваемые деформации локальных сетей являются малыми, при проверке локальной минимальности сети Φ, достаточно рассматривать только геодезические деформации ее локальных сетей. В силу следствия 1.7 главы 1, каждая подвижная вершина V сети Φ имеет такую локальную сеть Φ^V_{loc}, что при произвольной геодезической деформации $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$ этой локальной сети, сохраняющей ее границу $\partial\Phi_{\mathrm{loc}}$, или вторая производная функции длины $\ell(\varepsilon)$ продеформированной сети $\Phi^V_{\mathrm{loc}}(\varepsilon)$ положительна в начальный момент времени, или функция $\ell(\varepsilon)$ постоянна. Поэтому, точка $\varepsilon = 0$ является точкой локального минимума функции $\ell(\varepsilon)$, т.е. длина локальной сети Φ^V_{loc} не увеличивается при произвольной геодезической деформации. Поэтому, погруженная параметрическая сеть Φ локально минимальна. Предложение доказано.

Пример. Пусть G — граф с четырьмя вершинами P_0, P_1, P_2 и Q и тремя ребрами P_iQ, $i = 0,\ 1,\ 2$. Пусть $T = A_0A_1A_2$ — треугольник на стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, и пусть граничное отображение β переводит P_i в A_i. Пусть Φ — локально минимальная параметрическая сеть типа G, затягивающая вершины треугольника $A_0A_1A_2$ по отображению β. Выясним, при каких условиях локально минимальная сеть Φ типа G, затягивающая вершины треугольника $A_0A_1A_2$ по отображению β, существующая в силу теоремы 1, является погруженной, и определим, где расположена вершина S сети Φ, соответствующая Q.

Заметим, что Φ погруженная если и только если S не совпадает ни с одной из вершин треугольника T. Предположим, что это так, и пусть n_i — единичный вектор, со направленный с SA_i. Тогда, по предложению 3.1,

$$\sum n_i = 0.$$

Легко проверить, что это условие равносильно равенству между собой углов A_iSA_{i+1}, где сложение в индексах понимается по модулю 3. Поэтому все эти углы равны 120°. Ниже мы покажем (даже в более общем случае), что такая точка S существует тогда и только тогда, когда все углы треугольника T меньше 120°, при этом точка S единственна и может быть найдена как точка пересечения так называемых линий Симпсона. В рассматриваемом случае (см. общее определение в главе 4) *линия Симпсона*, соответствующая граничной вершине A_i, определяется как отрезок, соединяющий точку A_i с вершиной A'_i правильного треугольника $A_{i-1}A'_iA_{i+1}$, построенного вне треугольника T. Легко проверить, что в сделанных предположениях три линии Сим-

псона пересекаются в единственной точке S, лежащей в треугольнике T.

Пример. Пусть теперь G — дерево, состоящее из четырех ребер P_iQ, стыкующихся в одной вершине Q. Пусть M — множество вершин строго выпуклого плоского четырехугольника. Пусть β — граничное отображение, переводящее множество вершин P_i в точки из M. Тогда параметрическая сеть Φ типа G, след которой совпадает с объединением диагоналей четырехугольника M, является локально минимальной в пространстве $\mathcal{M}_G(\beta)$.

Пример. Пусть теперь G — дерево, состоящее из n ребер P_iQ, стыкующихся в вершине Q. Пусть M — множество вершин строго выпуклого плоского n-угольника. По теореме 1 существует локально минимальная параметрическая сеть типа G, затягивающая M по граничному отображению β, переводящему вершины P_i в точки из M. Легко понять, что эта сеть является погруженной, причем ее вершина S, соответствующая вершине Q дерева G, расположена внутри многоугольника M. Расположение этой точки однозначно (см. главу 5) определяется тем условием, что сумма единичных векторов, направленных из S в вершины многоугольника M, равна нулю. Отметим, что в случае $n \geq 5$ точка S не может быть построена с помощью циркуля и линейки [30, 37].

Пример. Пусть G — граф с четырьмя вершинами P_0, P_1, P_2 и Q, без циклических ребер, причем каждое ребро инцидентно вершине Q. Обозначим через p_i количества ребер графа G, инцидентных P_i. Пусть $T = A_0A_1A_2$ — треугольник на стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, и пусть граничное отображение β переводит P_i в A_i. Пусть Φ — локально минимальная параметрическая сеть типа G, затягивающая вершины треугольника $A_0A_1A_2$ по отображению β. Выясним, при каких условиях локально минимальная сеть Φ типа G, затягивающая вершины треугольника $A_0A_1A_2$ по отображению β, существующая в силу теоремы 1, является погруженной, и определим, где расположена вершина S сети Φ, соответствующая Q.

Заметим, что Φ погруженная если и только если S не совпадает ни с одной из вершин треугольника T. Предположим, что это так, и пусть n_i — единичный вектор, сонаправленный с SA_i. Тогда, по предложению 3.1,

$$\sum p_i n_i = 0,$$

и, в частности, существует треугольник Δ, длины сторон которого равны p_0, p_1 и p_2 соответственно. Таким образом, условие выполнения

неравенств треугольника для чисел p_i является необходимым для того, чтобы точка S не совпадала ни с одной из вершин треугольника T.

Отметим, что точка S не может лежать вне треугольника T в силу положительности p_i. По этим же причинам точка S не может лежать на стороне треугольника T. Значит, точка S лежит внутри T.

Пусть α_i — величина угла треугольника Δ, лежащего против стороны длины p_i, и пусть $\beta_i = \pi - \alpha_i$ — величина соответствующего внешнего угла треугольника Δ. Легко видеть, что угол A_iSA_{i+1} равен β_{i+2}, где сложение в индексах здесь и ниже понимается как сложение по модулю 3, см. рис. 3.1.

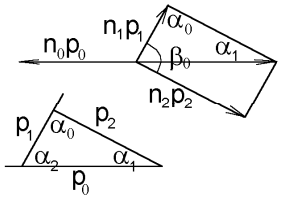


Рис. 3.1: Треугольник Δ и вид минимальной сети.

Опишем окружности вокруг треугольников SA_iA_{i+1}, и продолжим отрезки A_iS за вершину S до пересечения с окружностью, описанной вокруг треугольника $SA_{i+1}A_{i+2}$, в точке A'_i. Легко видеть, что треугольники $A_iA_{i+1}A'_{i+2}$ подобны между собой и подобны треугольнику Δ, при этом в треугольнике $A_iA_{i+1}A'_{i+2}$ угол при вершине A'_i равен α_i, а при вершинах A_j равен α_j.

Так как точка S находится внутри T, то $\alpha_i + \hat{A}_i < \pi$, где через $\hat{A}_i$ обозначена величина угла треугольника T при вершине A_i. Легко видеть, что неравенства треугольника на числа p_i, а также неравенства $\alpha_i + \hat{A}_i < \pi$, связывающие величины углов треугольника Δ и треугольника T, являются необходимыми и достаточными условиями того, что точка S не совпадает ни с одной из вершин треугольника T, т.е. условиями невырожденности минимальной сети Φ.

Итак, способ построения точки S можно описать так. Предположим, что существует треугольник Δ со сторонами p_0, p_1 и p_2, и пусть α_i — угол этого треугольника, лежащий против стороны длины p_i. Будем считать, что обход треугольника Δ, для которого при движении от стороны длины p_0 к стороне длины p_2 мы проходим сторону длины p_1, происходит в противоположном направлении обходу треугольника T, для которого при движении от A_0 к A_2 мы проходим вершину A_1.

Построим на сторонах треугольника T и вне его треугольники вида $A_iA_{i+1}A'_{i+2}$, ориентируемо подобные Δ, причем так, чтобы углы A'_i равнялись α_i. Несложные рассуждения показывают, что если $\alpha_i + \hat{A}_i < \pi$ для любого i, $i = 1, 2, 3$, то отрезки $A_iA'_i$ пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника T. Эта точка пересечения и есть искомая точка S. Как и выше, отрезки $A_iA'_i$ назовем *линиями Симпсона*.

В частности, если числа p_i равны между собой, то точка S определяется из условия равенства нулю суммы единичных направляющих векторов ребер SA_i. Ясно, что в это условие равносильно равенству между собой углов A_iSA_{i+1}, откуда вытекает, что все эти углы равны 120°. Наше необходимое и достаточное условие невырожденности минимальной сети в этом случае превращается в условие того, что каждый угол треугольника T меньше 120°.

Отметим, что описанная конструкция позволяет построить точку S, а значит и всю минимальную сеть Φ, с помощью циркуля и линейки с делениями.

3.1.2 Общий случай: критерий слабой локальной минимальности параметрических сетей

Пусть теперь $\Phi\colon G \to W$ — параметрическая сеть общего вида (не обязательно погруженная) с границей $\beta\colon \partial G \to M \subset W$.

Рассмотрим произвольную подвижную вершину V_i и все инцидентные ей невырожденные ребра сети Φ, если они есть. Обозначим через N_i сумму единичных векторов скоростей, с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину V_i. Если все ребра, инцидентные вершине V_i вырождены, то положим $N_i = 0$. Пусть V_i и V_j — две произвольные подвижные вершины. Обозначим через ν_{ij} число вырожденных ребер, соединяющих V_i с V_j, и назовем число $d_i = \sum_j \nu_{ij}$ *индексом вырождения вершины* V_i.

Предложение 3.2 *Пусть W — риманово многообразие. Параметрическая сеть Φ на W слабо локально минимальна в пространстве $\mathcal{M}_G(\beta)$, если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, модуль суммы N_i единичных векторов направлений невырожденных ребер, исходящих из каждой подвижной вершины V_i сети Φ, не превосходит индекса d_i вырождения этой вершины:*

$$\|N_i\| \le d_i.$$

Доказательство. Пусть сеть Φ — слабо локально минимальна, V_i — произвольная ее подвижная вершина, и Φ^V_{wloc} — такая слабая ло-

кальная сеть вершины V, что любая достаточно малая деформация этой сети, неподвижная на ее границе M^V, не увеличивает длину сети Φ^V_{wloc}. Рассмотрим произвольную такую деформацию и запишем с помощью предложения 1.10 главы 1 формулу первой производной длины $\ell(\varepsilon)$ сети Φ^V_{wloc} при этой деформации. Эта производная, по условию, должна быть неотрицательна. Поскольку сеть Φ^V_{wloc} имеет ровно одну подвижную вершину — вершину V_i, имеем:

$$\left.\frac{d\ell}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \langle E_i, N_i\rangle + \sum_j \|E_i\|\nu_{ij} = \langle E_i, N_i\rangle + \|E_i\|d_i \geq 0. \qquad (*)$$

Это неравенство должно быть выполнено для произвольного вектора E_i, в частности, для вектора E_i, противонаправленного вектору N_i. В этом случае имеем:

$$\|E_i\|(d_i - \|N_i\|) \geq 0,$$

поэтому $\|N_i\| \leq d_i$, что и требовалось.

Пусть теперь все ребра параметрической сети Φ — геодезические, и в каждой подвижной вершине V_i сети Φ выполнено неравенство $\|N_i\| \leq d_i$. Как и при доказательстве предложения 3.1, в силу малости рассматриваемых деформаций, при проверке локальной минимальности достаточно рассматривать лишь геодезические деформации локальных сетей (в данном случае — слабых локальных сетей). Снова воспользуемся предложением 1.10 главы 1 для вычисления первой производной $d\ell_i/d\varepsilon$ длины слабой локальной сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$ произвольной подвижной вершины V_i при геодезической деформации. Из формулы $(*)$ ясно, что наименьшее значение этой производной в начальный момент $\varepsilon = 0$ достигается на такой деформации, при которой вектор скорости E_i подвижной вершины V_i в начальный момент $\varepsilon = 0$ противонаправлен вектору N_i. Таким образом,

$$\left.\frac{d\ell_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \geq \|E_i\|(d_i - \|N_i\|).$$

По предположению, это значение неотрицательно. Итак, производная функции $\ell_i(\varepsilon)$ длины деформируемой локальной сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$ произвольной подвижной вершины V_i неотрицательна. Если все неравенства строгие, то эта производная строго больше нуля, и, очевидно, соответствующая деформация увеличивает длину сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$, откуда вытекает слабая локальная минимальность сети Φ.

Пусть теперь для некоторой подвижной вершины V_i выполнено точное равенство $\|N_i\| = d_i$. Тогда деформация φ_ε локальной сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$, у которой $E_i = -\alpha N_i$, $\alpha > 0$, в первом приближении не меняет длину

сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$, поскольку $d\ell_i/d\varepsilon = 0$ (в начальный момент времени). Любая деформация, не удовлетворяющая этому условию, по прежнему увеличивает длину сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$. Построим по сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$ новую погруженную сеть Φ'_{wloc}, заменив каждое вырожденное ребро сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$ на отрезок единственной кратчайшей геодезической, выходящий из V_i в направлении вектора N_i, и приходящий в некоторую близкую к V_i точку $A \in W$, являющуюся граничной для новой сети Φ'_{wloc}. По построению, погруженная сеть Φ'_{wloc} удовлетворяет условию предложения 3.1, и, следовательно, локально минимальна. Поэтому любая ее достаточно малая деформация не увеличивает длину сети Φ'_{wloc}. В частности, деформация φ'_ε, порожденная деформацией φ_ε, постоянная на ребрах V_iA сети Φ'_{wloc}, также не увеличивает длину этой сети. Отметим, что при этой деформациях вершина V_i движется по продолжению геодезической AV_i за точку V_i. Осталось заметить, что длины сетей $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$ и Φ'_{wloc} во все время деформации отличаются на константу $d_i\rho(V_i, A)$, где $\rho(V_i, A)$ — расстояние от V_i до A. Поэтому деформация φ_ε, как и все остальные деформации, не увеличивает длину исходной локальной сети $\Phi^{V_i}_{\text{wloc}}$. Предложение доказано.

Пример. Рассмотрим граф G с 6 вершинами P_i, Q_i, $i = 1, 2, 3$, и шестью ребрами вида P_iQ_i и Q_iQ_j (см. рис. 3.2). Пусть M — множество вершин произвольного фиксированного треугольника на плоскости. Пусть задано взаимно однозначное граничное отображение $\beta\colon \{P_i\} \to M$. Рассмотрим сеть $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, отображающую цикл $Q_1Q_2Q_3$ в произвольную точку S плоскости, а ребра P_iQ_i в отрезки, соединяющие точку S с соответствующей точкой из M. Построенная сеть будет слабо локально минимальной в классе $\mathcal{M}_G(\beta)$ для произвольного положения точки S. В самом деле, для каждой подвижной вершины V_i сети Φ величина вектора N_i равна 1, а индекс вырождения d_i равен 2, поэтому условия предложения 3.2 выполнены. Тем не менее, если сумма $-\sum_i N_i$ не равна нулю, то длину такой сети можно уменьшить, двигая точку S в направлении вектора $-\sum_i N_i$. Отметим, однако, что указанная деформация не является “слабо локальной”, т.е. не может быть представлена в виде деформации какой-либо слабо локальной сети из Φ.

3.1.3 Необходимые факты из теории выпуклых функций

При изучении условий сильной локальной минимальности нам понадобится несколько хорошо известных понятий и результатов из теории выпуклых функций, которые мы напомним в данном разделе. Дока-

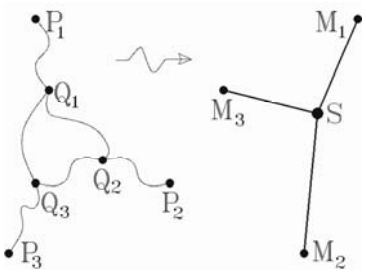


Рис. 3.2: Слабо локально минимальная параметрическая сеть

зательства приведенных здесь результатов можно найти, например, в книгах [63] и [71].

Подмножество X линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек x и y из X отрезок $[x, y]$ целиком лежит в X. Другими словами, для каждого числа λ из отрезка $[0, 1]$ точка $x(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y$ принадлежит множеству X.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, заданная на подмножестве X пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим график $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ как подмножество пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. *Надграфиком функции* f называется подмножество $G^+(f)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ следующего вида: $G^+(f) = \{(x, t) \mid x \in X,\ t \geq f(x)\}$.

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой (вниз)*, если ее надграфик $G^+(f)$ является выпуклым подмножеством пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Непосредственно из определения вытекает следующий результат.

Предложение 3.3 *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является выпуклой вниз, если и только если одновременно выполнены следующие два условия:*

1. *множество X является выпуклым;*
2. *для любых двух точек x и y множества X и произвольного числа λ из отрезка $[0, 1]$ имеет место следующее неравенство:*

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Условие (2), очевидно, означает, что ограничение функции f на отрезок $[x, y]$, целиком лежащий в X для произвольных x и y из X в силу условия (1), является выпуклой функцией на этом отрезке.

Если вместо надграфика функции f взять ее *подграфик* $G^-(f)$, который определяется как подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из всех точек вида (x,t), таких что $x \in X$ и $t \le f(x)$, и рассмотреть функции, подграфики которых являются выпуклыми подмножествами в $\mathbb{R}^{n+1}$, то мы получим определение функций, *выпуклых вверх*. Очевидно, что если функция f выпукла вниз, то функция $-f$ выпукла вверх и наоборот. Поэтому для выпуклых вверх функций имеет место аналог предложения 3.3, в котором следует заменить знак неравенства на обратный.

Хорошо известно, см. например [63], что выпуклые функции обладают рядом полезных свойств, основные из которых перечислены в следующем предложении.

Предложение 3.4 *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция. Тогда она обладает следующими свойствами:*

- *функция f непрерывна во всех внутренних точках множества X;*
- *функция f почти всюду дифференцируема, причем, если f дифференцируема в точке $x \in X$, то она непрерывно дифференцируема в x;*
- *в каждой внутренней точке $x \in X$ существует производная $f'_e(x)$ функции f по любому направлению $e \in \mathbb{R}^n$, т.е. существует конечный предел*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+te)-f(x)}{t} = f'_e(x);$$

- *для любого конечного множества точек $x_1,\dots,x_k$ множества X и любых неотрицательных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, таких что их сумма $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ равна 1, выполнено неравенство*

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k) \ge f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k);$$

  (Точка $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ принадлежит множеству X, так как X — выпукло.)

- *линейная комбинация выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами сама является выпуклой функцией.*

При решении задач на минимум и максимум для дифференцируемой функции f обычно работают с градиентом $\operatorname{grad} f$ или, что все

равно, с касательными плоскостями к графику $G(f)$. Выпуклые функции не являются, вообще говоря, дифференцируемыми, однако, оказывается, понятия касательной плоскости и градиента можно естественным образом обобщить так, чтобы они имели смысл в каждой точке области определения выпуклой функции (а не только в тех точках, где функция дифференцируема). Мы приведем здесь соответствующую конструкцию для функций выпуклых вниз. Для функций выпуклых вверх можно проделать все то же самое, заменяя, где необходимо, знаки неравенств на обратные.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, и $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ее график. Рассмотрим семейство гиперплоскостей $\{\Pi\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через некоторую точку $(x, f(x))$ графика $G(f)$. Плоскость Π из этого семейства называется *опорной к надграфику $G^+(f)$ в точке* $(x, f(x))$, если надграфик $G^+(f)$ целиком лежит в одном из замкнутых полупространств, на которые Π разбивает $\mathbb{R}^{n+1}$. Если Π не параллельна оси t, то это полупространство содержит каждый луч, выпущенный из произвольной точки плоскости Π в направлении вектора $(0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что это условие однозначно определяет рассматриваемое полупространство.

Каждая гиперплоскость Π, проходящая через $(x, f(x))$ задается уравнением вида $\langle N, y - x\rangle - 1(t - f(x)) = 0$, где $y \in \mathbb{R}^n$, $(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и $(N,-1)$ — вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональный к Π. Ясно, что Π является опорной, если и только если для любой точки (y,t) надграфика $G^+(f)$ выполнено неравенство $\langle N, y-x\rangle - (t - f(x)) \le 0$: в этом случае вектор $(N,-1)$, отложенный в точке $(x, f(x))$, направлен наружу надграфика $G^+(f)$. В частности, для точек вида $(y, f(y))$, принадлежащих надграфику для любого $y \in X$, получаем, что

$$\langle N, y - x\rangle \le f(y) - f(x) \quad \text{для произвольной точки } y \in X.$$

Каждый вектор $N \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий последнему соотношению, называется *субградиентом функции f в точке x*. Множество всех субградиентов в точке x, рассматриваемое как подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, называется *субградиентным множеством в точке x* и обозначается через $S_f(x)$. Таким образом, каждый субградиент является проекцией на координатное пространство $\{t = 0\}$ некоторого вектора $(N,-1)$, нормального к опорной гиперплоскости.

Может возникнуть впечатление, что понятие субградиента "нелокально" — действительно, в определении принимают участие все точки из множества X. Однако, как видно из следующего предложения, это не так.

Предложение 3.5 *Пусть, как и выше, X — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Вектор N является субградиентом выпуклой вниз функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ в точке x, если и только если для любого вектора $e \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$f'_e(x) \geq \langle e, N \rangle,$$

где через $f'_e(x)$ обозначена производная функции f по направлению e в точке x.

Понятие субградиентного множества обобщает стандартное понятие градиента в следующем смысле.

Предложение 3.6 *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ выпуклая вниз функция, и x — произвольная внутренняя точка из X. Тогда множество $S_f(x) \subset \mathbb{R}^n$ непусто, выпукло и ограничено. Более того, если $S_f(x)$ состоит ровно из одного вектора s, то функция f дифференцируема в точке x и $s = \operatorname{grad} f(x)$; если же $S_f(x)$ состоит более чем из одной точки, то f недифференцируема в x.*

Определение. Точку $x \in X$ назовем *стационарной* для выпуклой функции f, если среди опорных плоскостей в точке $(x, f(x))$ имеется горизонтальная плоскость, т.е. плоскость вида $\{t = \text{const}\}$.

Отметим, что точка x является стационарной для функции f если и только если субградиентное множество $S_f(x)$ содержит 0. Далее, непосредственно из определений вытекает, что каждая стационарная точка выпуклой вниз функции является ее точкой минимума, а каждая стационарная точка выпуклой вверх функции является ее точкой максимума. Обратно, каждая точка минимума или максимума выпуклой функции является, очевидно, стационарной точкой. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.7 *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция. Тогда точка $x \in X$ является точкой минимума функции f если и только если точка x стационарная, т.е. $S_f(x) \ni 0$.*

Оказывается, множество стационарных точек выпуклой функции устроено достаточно просто. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение 3.8 *Пусть f — выпуклая функция на $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество стационарных точек функции f выпукло и, значит, линейно связно. В частности, все стационарные значения функции f совпадают, т.е. каждый локальный минимум (максимум) является глобальным.*

Для дальнейшего нам будет полезно разобраться, как субградиентное множество выпуклой функции, являющейся линейной комбинацией выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами, связано с субградиентными множествами исходных функций.

Предложение 3.9 *Пусть выпуклая вниз функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ представлена в виде $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$, где a_i — неотрицательные числа, а f_i — выпуклые вниз функции на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в каждой внутренней точке x множества X субградиентное множество функции f представимо в виде:*

$$S_f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i S_{f_i}(x),$$

т.е. каждый вектор s из $S_f(x)$ представим в виде линейной комбинации с коэффициентами α_i некоторых векторов s_i из $S_{f_i}(x)$, и, обратно, линейная комбинация любых векторов $s_i \in S_{f_i}(x)$ с коэффициентами α_i принадлежит $S_f(x)$.

3.1.4 Общий случай: сильно локально минимальные параметрические сети

Перейдем теперь к исследованию локального устройства сильно локально минимальных сетей. Прежде всего отметим, что неравенства из предложения 3.2 представляют собой необходимое условие сильной локальной минимальности. Однако, оно уже не является достаточным. Принципиальное отличие сильно локально минимальных сетей от слабо локально минимальных состоит в том, что длина первых не увеличивается при деформации сетей с носителем, содержащим *целиком* компоненту вырождения произвольной вершины приведенной сети.

Мы начнем с рассмотрения нескольких типичных примеров таких деформаций, что даст нам возможность сформулировать еще некоторые необходимые условия сильно локальной минимальности. Пусть Φ — произвольная параметрическая сеть, и Φ^x_{sloc} — некоторая сильно локальная сеть для Φ. Предположим сначала, что все подвижные вершины V_i сети Φ^x_{sloc} движутся под действием рассматриваемой вариации с одинаковой скоростью, т.е. все векторы E_i скорости подвижных вершин V_i в начальный момент времени равны между собой и равны некоторому вектору E. Тогда, в соответствие с формулой первой вариации длины сети (см. предложение 1.10 главы 1), первая производная

длины деформируемой сильно локальной сети имеет вид:

$$\left.\frac{d\ell}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_i \langle E, N_i\rangle + \sum_{i<j} \nu_{ij}\|E - E\| = \Big\langle E, \sum_i N_i \Big\rangle.$$

Поскольку это выражение должно быть неотрицательным для любого вектора E, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.1 *Пусть $\Phi\colon G \to W$ — сильно локально минимальная параметрическая сеть, и N_i — сумма единичных векторов направлений невырожденных ребер, исходящих из подвижной вершины V_i сети Φ. Тогда, для произвольной вершины X приведенной сети $\widetilde{\Phi}$, сумма векторов N_i, отвечающих всем вершинам сети Φ, соответствующим X, равна нулю:*

$$\sum_{i:\varphi(V_i)=X} N_i = 0.$$

Пусть теперь задано произвольное разбиение множества подвижных вершин компоненты вырождения вершины X приведенной сети $\widetilde{\Phi}$ на два множества, которые мы обозначим через A и B. Рассмотрим деформацию сети Φ, при которой все подвижные вершины из A движутся со скоростью E_A, а все подвижные вершины из B — со скоростью E_B. В этом случае производная длины деформируемой сильно локальной сети, в соответствие с формулой первой вариации, записывается так:

$$\left.\frac{d\ell}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \Big\langle E_A, \sum_{i:V_i\in A} N_i\Big\rangle + \Big\langle E_B, \sum_{i:V_i\in B} N_i\Big\rangle + \|E_A - E_B\| \sum_{i,j:V_i\in A,\ V_j\in B} \nu_{ij}.$$

Введем обозначения

$$N_A = \sum_{i:V_i\in A} N_i, \qquad N_B = \sum_{i:V_i\in B} N_i, \qquad \nu_{AB} = \sum_{i,j:V_i\in A,\ V_j\in B} \nu_{ij},$$

и перепишем выражение для $d\ell/d\varepsilon$ в следующем виде:

$$\langle E_A, N_A\rangle + \langle E_B, N_B\rangle + \|E_A - E_B\|\nu_{AB}.$$

Из утверждения 3.1 вытекает, что $N_B = -N_A$, поэтому, окончательно, имеем:

$$\left.\frac{d\ell}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \langle E_A - E_B, N_A\rangle + \|E_A - E_B\|\nu_{AB}.$$

Это выражение должно быть неотрицательным при произвольном значении вектора $E_A - E_B$, откуда вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.2 *Пусть* $\Phi\colon G \to W$ *— сильно локально минимальная параметрическая сеть, и* $A \sqcup B$ *— произвольное разбиение множества подвижных вершин некоторой ее компоненты вырождения. Тогда, во введенных выше обозначениях, имеют место следующие неравенства:*

$$\|N_A\| \le \nu_{AB}, \qquad \|N_B\| \le \nu_{AB}.$$

Можно было бы ожидать, что если неравенства из утверждения 3.2 выполнены для произвольного разбиения множества подвижных вершин каждой компоненты вырождения параметрической сети Φ, то сеть Φ будет сильно локально минимальной. Однако это не так.

Пример. Пусть G — граф, имеющий шесть вершин P_i, Q_i, $i = 0,\ 1,\ 2$, ребра вида P_iQ_i в количестве p штук для каждого i, и ребра вида Q_iQ_j в количестве q штук для каждой пары (i, j), $i < j$. Рассмотрим плоскую параметрическую сеть $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$, параметризованную графом G с границей β, заданной на множестве вершин $\{P_i\}$ и отображающей его на множество вершин правильного треугольника $A_0A_1A_2$, и пусть Φ отображает ребра Q_iQ_j в центр S этого треугольника, а ребра P_iQ_i в отрезки A_iS.

Несложно проверить, что если положить $p = 2q - 1$, то выполнено и равенство из утверждения 3.1, и неравенства из утверждения 3.2. Однако, построенная нами сеть не является сильно локально минимальной при достаточно больших q. В самом деле, рассмотрим деформацию сети Φ, при которой вершина Q_i движется вдоль отрезка A_iS_i в сторону A_i с единичной скоростью. Тогда, очевидно,

$$\langle E_i, N_i\rangle = -p, \qquad \|E_i - E_j\| = \sqrt{3}, \qquad \nu_{ij} = q.$$

Поэтому, в силу формулы первой вариации, производная длины сети Φ в начальный момент времени имеет вид:

$$-3p + 3\sqrt{3}q = 3q(\sqrt{3} - 2) + 3.$$

Ясно, что

$$3q(\sqrt{3} - 2) + 3 < 0 \quad \text{при } q > 2 + \sqrt{3} > 3,$$

поэтому, начиная со случая $q = 4$, $p = 7$ построенная сеть Φ не является сильно локально минимальной.

Получим теперь достаточное условие сильной локальной минимальности параметрической сети $\Phi\colon G \to W$. Для этого следует разобраться с локальным устройством вершины соответствующей приведенной сети, т.е. понять как и в каком количестве могут стыковаться

ребра сильно локально минимальной параметрической сети в точке $P = \widetilde{\Phi}(V)$ многообразия W, где V — произвольная подвижная вершина графа $\widetilde{G}$, параметризующего приведенную сеть $\widetilde{\Phi}$. Обозначим через x некоторую вершину графа G, переходящую в V при канонической проекции $\pi\colon G \to \widetilde{G}$, и рассмотрим деформацию Φ_ε сети Φ, носитель которой содержится в параметризующем графе G^x_{sloc} некоторой сильно локальной сети Φ^x_{sloc} сети Φ. Формула первой вариации в этом случае может быть записана в следующем виде (см. следствие 1.5 из главы 1):

$$\left.\frac{d\ell}{dt}\right|_{t=0} = \langle E, N_V\rangle + \ell_V(E).$$

Напомним обозначения из главы 1. Пусть k — количество подвижных вершин сильно локальной сети Φ^x_{sloc}, т.е. количество подвижных вершин в приведенной компоненте, соответствующей вершине V, и пусть n — размерность объемлющего многообразия W. Тогда вектор E из пространства $\mathbb{R}^{nk}$ имеет вид $(E_1, \dots, E_k)$, где $E_i \in \mathbb{R}^n \simeq T_V W$ — вектор скорости i-ой подвижной вершины V_i сети Φ^x_{sloc} при деформации Φ_ε при $\varepsilon = 0$. Далее, вектор N_V также принадлежит $\mathbb{R}^{nk}$ и составлен из векторов $N_i \in \mathbb{R}^n \simeq T_V W$, $i = 1, \dots, k$, где вектор N_i равен сумме единичных касательных векторов невырожденных ребер, приходящих в вершину V_i (если такие ребра есть). Наконец, $\ell_V(E)$ — это функция на пространстве $\mathbb{R}^{nk}$, которая строится по сети Φ^x_{sloc} так:

$$\ell_V(E) = \sum_{i<j} \nu_{ij} \|F_i - F_j\|,$$

где ν_{ij} — количество вырожденных ребер сети Φ^x_{sloc}, соединяющих вершины V_i и V_j.

По определению сильно локально минимальной сети, если сеть Φ сильно локально минимальна, то для каждой подвижной вершины V соответствующей приведенной сети имеет место неравенство

$$\langle E, N_V\rangle + \ell_V(E) \geq 0.$$

С другой стороны, если для каждой подвижной вершины V геодезической сети Φ и для произвольного ненулевого вектора E выполнены строгие неравенства

$$\langle E, N_V\rangle + \ell_V(E) > 0,$$

то для любой деформации сильно локальной сети Φ^x_{sloc} первая производная функции длины положительна, поэтому такая деформация увеличивает длину, откуда вытекает сильная локальная минимальность параметрической сети Φ.

Рассмотрим функцию $t = \ell_V(E)$ на $\mathbb{R}^{nk}$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.3 *Функция $\ell_V\colon \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}$ выпукла вниз на пространстве $\mathbb{R}^{nk}$.*

Доказательство. Напомним, что функция ℓ_V имеет вид:

$$\ell_V(E) = \sum_{i<j} \nu_{ij} \|E_i - E_j\|.$$

Поскольку линейная комбинация выпуклых вниз функций с положительными коэффициентами — снова выпуклая вниз функция, см. предложение 3.4, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3.1 *Предположим, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксировано некоторое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть (x, y) — пара точек из $\mathbb{R}^n$, и $\rho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$ — расстояние между ними в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда функция $\rho\colon (x, y) \mapsto \rho(x, y)$ выпукла на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим пару произвольных точек $X_1 = (x_1, y_1)$ и $X_2 = (x_2, y_2)$ из $\mathbb{R}^{2n}$, и пусть $t \in [0, 1]$. Так как $\mathbb{R}^{2n}$ — выпукло, то, в силу предложения 3.3, достаточно показать, что

$$\rho((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \le (1-t)\rho(x_1, y_1) + t\rho(x_2, y_2).$$

В самом деле, пусть $a_i = y_i - x_i$, $i = 1,\ 2$. Тогда, возведя обе части неравенства в квадрат и выразив соответствующие расстояния через скалярные произведения векторов a_i, получим:

$$(1-t)^2|a_1|^2 + t^2|a_2|^2 + 2(1-t)t\langle a_1, a_2\rangle \le (1-t)^2|a_1|^2 + t^2|a_2|^2 + 2(1-t)t|a_1||a_2|,$$

что верно в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца. Лемма доказана.

Итак, функция $t = \ell_V(E)$ выпукла вниз на $\mathbb{R}^{nk}$. Далее, $\ell_V(\lambda E) = |\lambda|\ell_V(E)$, поэтому график этой функции представляет собой конус C_V в пространстве $\mathbb{R}^{nk+1}$ с вершиной в начале координат $O \in \mathbb{R}^{nk+1}$. Конус C_V лежит в верхнем полупространстве $t \ge 0$, симметричен относительно оси Ot и, по определению, ограничивает выпуклое подмножество $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{nk+1} \mid t \ge \ell_V(x)\}$ — надграфик функции ℓ_V. Поэтому неравенство

$$\langle E, N_V\rangle + \ell_V(E) \ge 0 \qquad \text{для любого вектора } E \in \mathbb{R}^{nk},$$

которое переписывается в виде

$$\langle -N_V, E-0\rangle \le \ell_V(E)-\ell_V(0) \qquad \text{для любого вектора } E\in\mathbb{R}^{nk},$$

эквивалентно тому, что гиперплоскость $t=-\langle E,N_V\rangle$ в пространстве $\mathbb{R}^{nk+1}$ является опорной в точке O к конусу C_V. При этом неравенство выполняется строго для всех ненулевых E, если и только если эта гиперплоскость пересекает конус C_V только по точке O. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 3.10 *Если сеть Φ сильно локально минимальна, то, для каждой подвижной вершины V ее приведенной сети, гиперплоскость $t=-\langle E,N_V\rangle$ является опорной в точке O для конуса C_V в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^{nk+1}$, т.е. вектор $-N_V$ является субградиентом функции $t=\ell_V(E)$ в точке $O'=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{nk}$.*

Если для каждой подвижной вершины V приведенной сети $\widetilde{\Phi}$ геодезической сети Φ гиперплоскость $t=-\langle E,N_V\rangle$ является опорной в точке O для конуса C_V, причем пересечение этой гиперплоскости с конусом C_V состоит из единственной точки O, то сеть Φ является сильно локально минимальной.

Переформулируем теперь требования предложения 3.10 в более конструктивной форме. Для этого рассмотрим приведенную компоненту G_d^V, соответствующую вершине V, и ориентируем ее ребра так, чтобы все ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин из G_d^V имели одни и те же начало и конец. Каждую такую ориентацию будем называть *правильной*. Определим матрицу смежности правильно ориентированного графа G_d^V, положив c_{ij} равным по величине числу ν_{ij} всех (вырожденных) ребер графа G_d^V, соединяющих вершины V_i и V_j, и присвоив c_{ij} знак "плюс", если и только если V_i — начало всех ребер из G_d^V, соединяющих V_i и V_j, и знак "минус"в противном случае. Поставим в соответствие каждой неупорядоченной паре $\{V_i,V_j\}$ соседних вершин графа G_d^V, переменную x_{ij} размерности n, а именно, $x_{ij}=(x_{ij}^1,\dots,x_{ij}^n)$. Отметим, что, по определению, $x_{ij}\equiv x_{ji}$. Для каждой *подвижной* вершины V_i графа G_d^V запишем векторное линейное уравнение

$$\sum_{\substack{j\\ V_j \text{ смежна с } V_i}} c_{ij}x_{ij}=N_i,$$

где суммирование берется по всем (не только подвижным) вершинам V_j графа G_d^V, соседним с V_i.

Определение. Линейную систему уравнений

$$\sum_{\substack{j \\ V_i \text{ смежна с } V_j}} c_{ij}x_{ij} = N_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где k — количество подвижных вершин графа G_d^V, назовем *характеристической системой локальной структуры вершины* V. Объединение характеристических систем локальной структуры по всем подвижным вершинам V приведенной сети называется *характеристической системой локальной структуры сети* Ф.

Замечание. Характеристическая система локальной структуры каждой вырожденной вершины V параметрической сети зависит, вообще говоря, от выбора правильной ориентации соответствующей приведенной компоненты. Однако, решения систем, соответствующих различным ориентациям, получаются друг из друга подходящей заменой знаков их n-мерных компонент. Поскольку, как мы увидим из нижеследующего предложения, нас интересуют только модули n-мерных компонент решений характеристической системы, мы, допуская тем самым определенную вольность, не будем в дальнейшем различать системы, соответствующие разным правильным ориентациям.

Предложение 3.11 *Пусть* Ф *— параметрическая сеть общего вида. Тогда, если сеть* Ф *сильно локально минимальна, то все ее ребра — геодезические, и, кроме того, ее характеристическая система локальной структуры имеет такое решение, что значения каждой его* n*-мерной переменной* x_{ij} *по модулю не превосходит единицы.*

Если характеристическая система локальной структуры геодезической сети Ф *имеет такое решение, что значение каждой его* n*-мерной компоненты* x_{ij} *по модулю строго меньше единицы, то сеть* Ф *— сильно локально минимальна.*

Доказательство. Мы получим утверждение предложения как следствие из предложения 3.10. Определим вид субградиентного множества функции $z = \ell_V(E)$ в точке $O' = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{nk}$. Для этого мы представим функцию $\ell_V(E)$ в виде линейной комбинации простейших выпуклых функций $\|E_i - E_j\|$ с положительными коэффициентами ν_{ij}, и воспользуемся предложением 3.9, описывающим структуру субградиентного множества линейной комбинации выпуклых функций.

Лемма 3.2 *Субградиентное множество функции* $z = \|E_i - E_j\|$*, определенной на* $\mathbb{R}^{nk}$*, в точке* O' *вида* $E_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, k$, *имеет вид:*

$$\{(N_1, \ldots, N_k) : \|N_i\| \le 1,\ \|N_j\| \le 1,\ N_i = -N_j,\ N_\alpha = 0 \text{ при } \alpha \ne i,\ \alpha \ne j\}.$$

Доказательство. Напомним, что, по определению, вектор N из $\mathbb{R}^{nk}$ является субградиентом функции $f\colon \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}$ в точке $X \in \mathbb{R}^{nk}$ если и только если

$$\langle N, Y - X\rangle \le f(Y) - f(X) \quad \text{для произвольного вектора } Y \in \mathbb{R}^{nk}.$$

В нашем случае, $N = (N_1, \dots, N_k)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$, и это условие переписывается в виде

$$\sum_{\alpha-1}^{k} \langle N_\alpha, Y_\alpha\rangle \le \|Y_i - Y_j\| \quad \text{для произвольных } Y_\alpha \in \mathbb{R}^n. \qquad (*)$$

Пусть N — произвольный субградиент функции $\|E_i - E_j\|$. Поскольку правая часть неравенства $(*)$ зависит только от Y_i и Y_j, то, очевидно, $N_\alpha = 0$ при α отличных от i и j. Для таких векторов N условие $(*)$ принимает вид

$$\langle N_i, Y_i\rangle + \langle N_j, Y_j\rangle \le \|Y_i - Y_j\| \quad \text{для произвольных } Y_i \text{ и } Y_j \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, если, скажем, $Y_i = 0$, то, чтобы наше неравенство выполнялось для любого вектора Y_j, необходимо $\|N_j\| \le 1$. Аналогично, $\|N_i\| \le 1$. Далее, если $Y_i = Y_j$, то правая часть неравенства обращается в ноль. Левая часть при этом имеет вид $\langle N_i + N_j, Y_i\rangle$ и должна быть неположительна для любого Y_i, в частности, для $Y_i = N_i + N_j$. Поэтому $N_i = -N_j$. Итак, каждый субградиент функции $\|E_i - E_j\|$ имеет вид, описанный в лемме.

Обратно, если вектор $N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{R}^{nk}$ имеет указанный вид, то для любого вектора $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ получим:

$$\langle N, Y\rangle = \langle N_i, Y_i - Y_j\rangle \le \|N_i\|\|Y_i - Y_j\| \le \|Y_i - Y_j\|,$$

поскольку $\|N_i\| \le 1$ по условию. Поэтому в этом случае N является субградиентом функции $\|E_i - E_j\|$ в точках вида $E_i = E_j = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3.2 и предложения 3.9 вытекает следующий результат.

Лемма 3.3 *Вектор $N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{R}^{nk}$ принадлежит субградиентному множеству функции $\ell_V(E)$ в точке O', если и только если каждая его n-мерная компонента N_i, $i = 1, \dots, k$, представима в виде*

$$N_i = \sum_j \nu_{ij} p_{ij},$$

где p_{ij} — некоторые векторы из $\mathbb{R}^n$, такие что $\|p_{ij}\| \le 1$, и $p_{ij} = -p_{ji}$, а суммирование производится по таким и только таким индексам j, что вершина V_j смежна с вершиной V_i в компоненте G_d^V.

Пусть (c_{ij}) — как и выше, матрица смежности, соответствующая некоторой правильной ориентации приведенной компоненты G_d^V. Положим $x_{ij} = p_{ij}$, если $c_{ij} > 0$, т.е. если вершина V_i является началом всех ребер, идущих из нее в вершину V_j. Отметим, что каждой неупорядоченной паре $\{V_i, V_j\}$ соседних вершин графа G_d^V соответствует свой вектор x_{ij}. В этих обозначениях, лемма 3.3 может быть переформулирована так.

Вектор $N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{R}^{nk}$ принадлежит субградиентному множеству функции $\ell_V(E)$ в точке O', если и только если существует такой набор n-мерных векторов x_{ij}, соответствующих неупорядоченным парам $\{V_i, V_j\}$ вершин графа G_d^V, что $\|x_{ij}\| \le 1$, и каждая n-мерная компонента N_i, $i = 1, \dots, k$, вектора N представима в виде

$$N_i = \sum_j c_{ij} x_{ij}.$$

Последнее условие, очевидно, эквивалентно условию существованию решения (x_{ij}) характеристической системы локальной структуры для вершины V, такого что $\|x_{ij}\| \le 1$. При этом, если все неравенства выполняются как строгие, т.е. если $\|x_{ij}\| < 1$, то опорная гиперплоскость, соответствующая субградиенту N пересекает конус C_V лишь по точке O. Теперь утверждение предложения непосредственно вытекает из предложения 3.10. Доказательство закончено.

Отметим, что утверждения 3.1 и 3.2 непосредственно выводятся из предложения 3.11. В самом деле, сложив все уравнения характеристической системы локальной структуры произвольной вершины V приведенной сети, мы получим в левой части 0, так как $c_{ij} = -c_{ji}$, а в правой части — сумму всех N_i, выходящих из вершины V, что эквивалентно утверждению 3.1. Чтобы получить утверждение 3.2, достаточно сложить уравнения, соответствующие вершинам сети, отнесенным к одному и тому же элементу разбиения. В результате все переменные, соответствующие соседним вершинам сети, попавшим в один и тот же элемент разбиения, сократятся, и мы получим следующие два уравнения:

$$\sum_{\substack{i \in A,\ j \in B,\\ i \text{ смежна с } j}} c_{ij} x_{ij} = N_A, \qquad \sum_{\substack{i \in A,\ j \in B,\\ i \text{ смежна с } j}} c_{ji} x_{ij} = N_B.$$

Так как максимум модуля левой части каждого из выражений, при условии $\|x_{ij}\| \le 1$, равен ν_{AB}, мы получаем утверждение 3.2.

Пример. Вновь рассмотрим сеть Φ из предыдущего примера. А именно, пусть G — граф, имеющий шесть вершин P_i, Q_i, $i = 0,\ 1,\ 2$, ребра вида P_iQ_i в количестве p штук для каждого i, и ребра вида Q_iQ_j в количестве q штук для каждой пары (i, j), $i < j$. Сеть $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ параметризована графом G; граница β сети Φ отображает множество вершин $\{P_i\}$ на множество вершин правильного треугольника $A_0A_1A_2$; наконец, отображение Φ переводит ребра Q_iQ_j в центр S этого треугольника, а ребра P_iQ_i — в отрезки A_iS. Выясним, при каких p и q сеть Φ является сильно локально минимальной. Для этого, в соответствии с предложением 3.11, достаточно записать характеристическую систему локальной структуры и проверить, имеются ли среди ее решений такие, что все их 2-мерные компоненты по модулю не превосходят 1.

Приведенная сеть $\widetilde{\Phi}$ имеет только одну подвижную вершину — точку S, поэтому характеристическая система уравнений локальной структуры в этом случае совпадает с характеристической системой локальной структуры для вершины S. Приведенная компонента G_d^S состоит из трех вершин Q_1, Q_2 и Q_3, и $3q$ ребер вида Q_iQ_j. Зададим правильную ориентацию графа G_d^S, ориентировав все ребра из G_d^S от Q_i к $Q_{(i+1) \bmod 3}$, $i = 0,\ 1,\ 2$. При такой ориентации, матрица смежности (c_{ij}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & q & -q \\ -q & 0 & q \\ q & -q & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическая система уравнений локальной структуры записывается так:

$$\begin{cases} qx_{01} - qx_{20} &= pN_0 \\ -qx_{01} + qx_{12} &= pN_1 \\ qx_{20} - qx_{12} &= pN_2, \end{cases} \qquad (*)$$

где x_{01}, x_{12} и x_{20} — неизвестные векторы из $\mathbb{R}^2$, а N_i, $i = 0,\ 1,\ 2$, — единичные векторы $A_iS/\|A_iS\|$.

Отметим, что сумма векторов N_i, $i = 0,\ 1,\ 2$, равна нулю по условию; сумма левых частей уравнений системы $(*)$ также, очевидно, равна нулю. Общее решение системы $(*)$ имеет вид:

$$\big(x_{01}, x_{12}, x_{20}\big) = \big(N_0p/q + y, (N_0p + N_1p)/q + y, y\big),$$

где y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$. Чтобы проверить, имеются ли среди решений системы $(*)$ удовлетворяющие условиям $\|x_{ij}\| \le 1$, перепишем решение системы в виде:

$$qx_{01} = pN_0 + qy, \qquad qx_{12} = -pN_2 + qy.$$

Условие $\|x_{ij}\| \le 1$ эквивалентно существованию такого вектора y, $\|y\| \le 1$, что оба вектора $pN_0 + qy$ и $-pN_2 + qy$ не превосходят по модулю q, т.е. лежат в круге радиуса q с центром в нуле. Предположим, что такой вектор y существует. Рассмотрим на плоскости треугольник T, одна вершина которого расположена в точке нуль, а две другие — в точках pN_0 и $-pN_2$. Этот треугольник, очевидно, правильный, и длина его стороны равна p. Сдвинув треугольник T на вектор qy мы снова получим правильный треугольник T', который по предположению целиком лежит в круге радиуса q с центром в точке нуль. Такое, очевидно, возможно только если длина p стороны треугольника T' не превосходит длины стороны правильного треугольника, вписанного в круг радиуса q, т.е. $p \le \sqrt{3}q$. Последнее неравенство эквивалентно следующему геометрическому условию: круги радиуса q, построенные в вершинах правильного треугольника T имеют общую точку.

Обратно, предположим, что круги радиуса q, построенные в вершинах треугольника T имеют общую точку z. Это означает, что существуют такие векторы y_0, y_1 и y_2, что $\|y_i\| \le 1$, и

$$pN_0 + qy_0 = qy_1 = -pN_2 + qy_2 = z.$$

Но тогда

$$pN_0 - qy_1 = -qy_0, \qquad -pN_2 - qy_1 = qy_2, \qquad y_1 = z/q,$$

т.е. существует вектор $y = -y_1$, не превосходящий по модулю единицы, и такой, что векторы $pN_0 + qy$ и $-pN_2 + qy$ лежат в круге радиуса q с центром в нуле. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.4 *В рассматриваемом случае, характеристическая система локальной структуры* $(*)$ *имеет решение* (x_{01}, x_{12}, x_{20}), *такое что* $\|x_{ij}\| \le 1$, *если и только если три круга радиуса* q, *построенные в вершинах правильного треугольника со стороной* p, *имеют общую точку, т.е. если и только если* $p \le \sqrt{3}q$. *Далее, если* $p < \sqrt{3}q$, *то эти круги пересекаются по внутренней точке, система* $(*)$ *имеет решение, удовлетворяющее строгим неравенствам, и сеть* Φ *сильно локально минимальна.*

Замечание. Предположим теперь, что p и q — не обязаны быть целыми числами. Это соответствует случаю функционала взвешенной длины, см. ниже. Тогда имеет смысл ставить вопрос о том, что же происходит, если $p = \sqrt{3}q$? В этой ситуации теорема 3.11 неприменима, так как характеристическая система локальной структуры имеет лишь решение (x_{01}, x_{12}, x_{20}) удовлетворяющее равенствам $\|x_{ij}\| = 1$, которое

соответствует единственной точке пересечения трех окружностей радиуса q, построенных в вершинах правильного треугольника со стороной $p = \sqrt{3}q$. Оказывается, тем не менее, используя специфику стандартной евклидовой плоскости можно доказать сильную локальную минимальность рассматриваемой сети (этот факт вытекает из доказанной в следующем разделе общего результата, см. предложение 3.12). Данный пример интересен тем, что строгий локальный минимум оказывается не единственным: существует целое семейство сильно локально минимальных сетей одной взвешенной длины, изображенное на рис. 3.3.

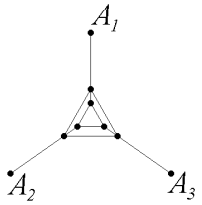


Рис. 3.3: Семейство сетей, сильно локально минимальных относительно функционала взвешенной длины

3.1.5 Критерий сильной локальной минимальности параметрической сети в евклидовом пространстве

Если объемлющее многообразие W — это стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то предложение 3.11 можно превратить в критерий.

Предложение 3.12 *Пусть* Φ *— параметрическая сеть общего вида в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$*. Тогда сеть* Φ *сильно локально минимальна, если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, и характеристическая система локальной структуры сети* Φ *имеет такое решение* x*, что значения каждой* n*-мерной переменной* x_{ij} *из* x *по модулю не превосходит единицы.*

Доказательство. Необходимость условий предложения 3.12 вытекает из предложения 3.11. Перейдем к доказательству достаточности.

Поскольку объемлющее многообразие — это стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, значение функционала длины на каждой параметрической сети, все ребра которой — отрезки прямых, однозначно

определяется положением подвижных вершин этой сети. Пусть сеть Φ имеет k подвижных вершин. Тогда функционал длины на $\mathcal{M}_G(\beta) \ni \Phi$ можно представить как функцию, заданную на прямом произведении

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ сомножителей}} = \mathbb{R}^{nk},$$

и равную, очевидно, сумме длин ребер линейной сети, которая однозначно восстанавливается по положению подвижных вершин (элементу из $\mathbb{R}^{nk}$), фиксированному граничному множеству и фиксированному топологическому типу G сети Φ.

Но тогда, в силу леммы 3.1 и предложения 3.4, функционал длины — выпуклая вниз функция на пространстве $\mathbb{R}^{nk}$. Далее, в силу предложения 3.7, множество точек локального минимума функционала длины на $\mathbb{R}^{nk}$ совпадает со множеством его стационарных точек. Наконец, см. доказательство предложения 3.11, наше условие эквивалентно тому, что производная функционала длины в точке Φ по любому направлению неотрицательна, откуда, в силу предложения 3.5, вытекает, что точка Φ — стационарна для функционала длины. Предложение доказано.

3.2 Локальная структура взвешенных локально минимальных параметрических сетей

Результаты раздела 3.1 могут быть обобщены на случай взвешенных параметрических сетей с положительными весами. Для этого следует воспользоваться следствием 1.8. Как и выше, мы приведем отдельно критерий для погруженных параметрических взвешенных сетей, и необходимое и достаточное условия для взвешенных параметрических сетей общего вида.

3.2.1 Критерий локальной минимальности взвешенных погруженных параметрических сетей

Напомним, что для погруженных сетей понятия сильной и слабой локальной минимальности совпадают. Имеет место следующий результат.

Предложение 3.13 *Пусть* Φ *— погруженная взвешенная параметрическая сеть, веса всех ребер которой положительны. Тогда сеть* Φ

локально минимальна если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, линейная комбинация единичных векторов направлений ребер, исходящих из каждой подвижной вершины сети Φ*, с коэффициентами, равными весам этих ребер, равна нулю.*

Доказательство. Доказательство предложения 3.13 получается дословным повторением доказательства предложения 3.1, в котором вместо формулы первой вариации длины сети (предложение 1.10 главы 1) нужно использовать формулу первой вариации взвешенной длины сети (следствие 1.8 главы 1). Доказательство закончено.

3.2.2 Общий случай: условия слабой и сильной локальной минимальности взвешенных параметрических сетей

Пусть $\Phi\colon G \to W$ — взвешенная параметрическая сеть общего вида (не обязательно погруженная) с границей $\beta\colon \partial G \to M \subset W$, и предположим снова, что веса всех ребер сети Φ — положительны.

Рассмотрим произвольную подвижную вершину V_i и все инцидентные ей невырожденные ребра сети Φ, если они есть. Обозначим через N_i линейную комбинацию единичных векторов скоростей, с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину V_i, взяв в качестве коэффициентов линейной комбинации веса соответствующих ребер. Если все ребра, инцидентные вершине V_i, вырождены, то положим $N_i = 0$. Далее, пусть V_i и V_j — две произвольные подвижные вершины. Обозначим через ν_{ij} сумму весов всех вырожденных ребер, соединяющих V_i с V_j, и назовем число $d_i = \sum_j \nu_{ij}$ *индексом вырождения вершины* V_i.

Предложение 3.14 *Взвешенная параметрическая сеть* Φ *с положительными весами слабо локально минимальна если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, модуль суммы векторов* N_i*, исходящих из каждой подвижной вершины* V_i *сети* Φ*, не превосходит индекса* d_i *вырождения этой вершины:*

$$\|N_i\| \leq d_i.$$

Чтобы сформулировать условие сильной локальной минимальности, мы обобщим понятие характеристической системы локальной структуры на случай взвешенных сетей. А именно, пусть Φ — взвешенная параметрическая сеть с положительными весами, параметризованная графом G. Как обычно, обозначим через $\widetilde{\Phi}$ соответствующую приведенную сеть. Пусть V — произвольная подвижная вершина из $\widetilde{\Phi}$, и

G_d^V — приведенная компонента, соответствующая вершине V. Как и выше, зададим на G_d^V какую-нибудь правильную ориентацию. Определим *взвешенную матрицу смежности* (c_{ij}), положив c_{ij} по величине равным суммарному весу всех (вырожденных) ребер графа G_d^V, соединяющих вершины V_i и V_j, и присвоив c_{ij} знак "плюс", если и только если V_i — начало всех ребер из G_d^V, идущих из V_i в V_j, и знак "минус"в противном случае. Поставим в соответствие каждой неупорядоченной паре $\{V_i, V_j\}$ соседних вершин графа G_d^V, переменную x_{ij} размерности n, а именно, $x_{ij} = (x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^n)$. Отметим, что, по определению, $x_{ij} \equiv x_{ji}$.

Определение. Линейную систему уравнений

$$\sum_{\substack{j \\ V_j \text{ смежна с } V_i}} c_{ij}x_{ij} = N_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

где k — количество подвижных вершин графа G_d^V, назовем *характеристической системой локальной структуры вершины* V. Объединение характеристических систем локальной структуры по всем подвижным вершинам V приведенной сети называется *характеристической системой локальной структуры взвешенной параметрической сети* Ф.

Предложение 3.15 *Пусть* Ф — *взвешенная параметрическая сеть с положительными весами. Тогда если сеть* Ф *сильно локально минимальна, то все ее ребра — геодезические, и, кроме того, ее характеристическая система локальной структуры имеет такое решение, что значение каждой его n-мерной переменной* x_{ij} *по модулю не превосходит единицы.*

Если все ребра взвешенной параметрической сети Ф *с положительными весами — геодезические, и ее характеристическая система локальной структуры имеет такое решение, что значение каждой его n-мерной компоненты* x_{ij} *по модулю строго меньше единицы, то сеть* Ф — *сильно локально минимальна.*

Доказательства предложений 3.14 и 3.15 получаются дословным повторением доказательств предложения 3.2 и предложения 3.11 соответственно.

3.2.3 Сильно локально минимальные взвешенные параметрические сети в евклидовом пространстве

Если объемлющее многообразие W — это стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то, как и в случае обычной длины, предложение 3.15 можно превратить в критерий.

Предложение 3.16 *Пусть Φ — взвешенная параметрическая сеть с положительными весами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда сеть Φ сильно локально минимальна, если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, и характеристическая система локальной структуры сети Φ имеет такое решение x, что значения каждой n-мерной переменной x_{ij} из x по модулю не превосходит единицы.*

Доказательство. Для доказательства заметим, что функционал взвешенной длины на семействе линейных сетей данного типа с фиксированной границей, представляет собой выпуклую функцию на пространстве $\mathbb{R}^{nk}$, где k — количество подвижных вершин рассматриваемых параметрических сетей. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством предложения 3.12.

3.2.4 Общие теоремы о локальной структуре параметрических сетей

Подведем итоги, сформулировав следующую общую теорему о локальной структуре взвешенных локально минимальных параметрических сетей на римановом многообразии. Отметим, что в случае постоянной весовой функции мы получаем обычные локально минимальные сети.

Теорема 2 (О локальной структуре) *Пусть W^n — риманово многообразие, и $\Phi\colon G \to W$ — взвешенная параметрическая сеть типа G с границей $\partial\Phi$, возможно пустой, и положительной весовой функцией. Для каждой подвижной вершины V_i из Φ обозначим через N_i линейную комбинацию единичных векторов направлений приходящих в V_i невырожденных ребер сети Φ с коэффициентами — весами этих ребер. Если таких ребер нет, положим $N_i = 0$.*

- *Погруженная сеть Φ локально минимальна, если и только если все ее ребра — геодезические, а вектора $N_i = 0$.*
- *Сеть Φ слабо локально минимальна если и только если все ее ребра — геодезические, и для каждой подвижной вершины V_i сумма*

весов всех инцидентных V_i вырожденных ребер больше или равна модулю вектора N_i.

- *Если сеть Φ сильно локально минимальна, то все ее ребра — геодезические, и ее характеристическая система локальной структуры имеет решение, каждая n-мерная компонента которого по модулю не превосходит 1.*

  Если характеристическая система локальной структуры геодезической сети Φ имеет решение, каждая n-мерная компонента которого по модулю строго меньше 1, то Φ — сильно локально минимальна.

В случае $W = \mathbb{R}^n$ теорему 2 удается превратить в критерий локальной минимальности.

Теорема 3 (О локальной структуре) *Пусть $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ — взвешенная параметрическая сеть типа G с границей $\partial\Phi$ и положительной весовой функцией, заданная в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Для каждой подвижной вершины V_i из Φ обозначим через N_i линейную комбинацию единичных векторов направлений приходящих в V_i невырожденных ребер сети Φ с коэффициентами — весами этих ребер. Если таких ребер нет, положим $N_i = 0$.*

- *Погруженная сеть Φ локально минимальна если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, а вектора $N_i = 0$.*

- *Сеть Φ слабо локально минимальна если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, и для каждой подвижной вершины V_i сумма весов всех инцидентных V_i вырожденных ребер больше или равна модулю вектора N_i.*

- *Сеть Φ сильно локально минимальна, если и только если все ее ребра — прямолинейные отрезки, и ее характеристическая система локальной структуры имеет решение, каждая n-мерная компонента которого по модулю не превосходят 1.*

3.3 Локальная структура минимальных следов

В настоящем параграфе мы опишем локальное устройство минимальных следов. Напомним, что след Γ, затягивающий конечное множество M (возможно пустое) точек риманова многообразия W, называется

локально минимальным, если всякая его точка имеет такой локальный след Γ_{loc}, что любая малая деформация следа Γ_{loc}, неподвижная на его границе $\partial\Gamma_{\text{loc}}$, не уменьшает длину этого следа.

Теорема 4 *След* Γ*, затягивающий конечное (возможно пустое) множество* M *точек риманова многообразия* W*, является локально минимальным тогда и только тогда, когда след* Γ *обладает следующими свойствами:*

1. *след* Γ *обладает каноническим представителем* Φ*;*
2. *все ребра канонического представителя* Φ *следа* Γ *— геодезические;*
3. *угол между каждой парой смежных ребер параметрической сети* Φ *не меньше* $120°$*;*
4. *все вершины степени* 1 *являются граничными;*
5. *все вершины степени* 2 *также являются граничными за исключением ровно одного тривиального случая, когда граница параметрической сети* Φ *пуста, а сама сеть* Φ *состоит из одной вершины и одного циклического ребра, стыкующегося в этой вершине под углами в* $180°$ *(т.е. след* Γ *— замкнутая геодезическая).*

Доказательство. Пусть Γ — локально минимальный след, затягивающий M. Покажем, что для него выполняются все условия предложения.

Пусть $x \in \Gamma$ — произвольная точка из Γ. По определению, существует такой локальный след Γ^x_{loc} точки x, что любая малая деформация следа Γ^x_{loc}, неподвижная на его границе $\partial\Gamma^x_{\text{loc}}$, не уменьшает длину следа Γ^x_{loc}. Поэтому, в силу свойств геодезических, каждое ребро следа Γ должно являться следом некоторой геодезической (иначе можно уменьшить длину следа малой деформацией негеодезического ребра). Таким образом, Γ является следом некоторой геодезической сети и, в силу утверждения 1.6 главы 1, обладает каноническим представителем Φ. Первые два условия теоремы проверены.

Далее, пусть γ_1 и γ_2 — два ребра сети Φ, встречающиеся в вершине $x \in W$ под углом меньшим чем $120°$. Рассмотрим локальный след Γ^x_{loc} точки x, каждая малая деформация которого, неподвижная на его границе, не увеличивает длину следа Γ^x_{loc}. По определению, след Γ^x_{loc} состоит из конечного числа, скажем k, геодезических отрезков,

каждый из которых соединяет точку x с некоторой точкой, принадлежащей границе $\partial\Gamma^x_{\text{loc}}$ следа Γ^x_{loc}, причем все эти геодезические отрезки пересекаются только в точке x. Обозначим через γ'_1 и γ'_2 ребра следа Γ^x_{loc}, соответствующие ребрам γ_1 и γ_2 следа Γ.

Пусть $\Phi'\colon G' \to W$ — канонический представитель следа Γ^x_{loc}, и v' — вершина в G', соответствующая x, а e'_1 и e'_2 — ребра из G', соответствующие γ'_1 и γ'_2. Расщепим вершину v' в следующем смысле. Рассмотрим граф G'', получающийся из G' так. Разрежем граф G' по вершине v' на две компоненты так, чтобы в одной компоненте оказались оба ребра e'_1 и e'_2, стыкующиеся в вершине, которую мы обозначим через v'_1, а во второй — все остальные ребра (если они есть), стыкующиеся в вершине, обозначаемой v'_2. Соединим вершины v'_1 и v'_2 ребром e'. Полученный в результате граф мы и обозначим через G''.

Определим теперь параметрическую сеть $\Phi''\colon G'' \to W$, совпадающую с Φ' на всех ребрах графа G'', кроме ребра e', а ребро e' отображающее в точку x. По определению, след сети Φ'' совпадает с Γ^x_{loc}. Поэтому каждая достаточно малая деформация сети Φ'', постоянная на границе $\partial\Gamma^x_{\text{loc}}$, задает деформацию следа Γ^x_{loc} и, поэтому, не должна уменьшать длину сети Φ''. Однако, в соответствии с предложением 3.2, сеть Φ'' не является даже слабо локально минимальной, поскольку степень вырождения подвижной вершины v'_1 равна 1, а соответствующий вектор N равен сумме двух единичных векторов, угол между которыми меньше 120°, и, поэтому, $\|N\| > 1$. Поэтому существует сокращающая деформация следа Γ^x_{loc}. Противоречие. Итак, локально минимальный след Γ обладает свойством (3).

Свойства (4) и (5) очевидны.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть след Γ обладает всеми свойствами (1)–(5) . Покажем, что тогда след Γ является локально минимальным.

Пусть x — произвольная точка из Γ. Если x не является вершиной канонического представителя Φ следа Γ, то существует такой локальный след точки x, который представляет собой достаточно малый отрезок геодезической. Поэтому любая его деформация не увеличивает длину, что и требовалось.

Пусть теперь x — вершина параметрической сети Φ. Если x имеет степень 1, то, снова, в силу свойств геодезических, любая деформация достаточно малого локального следа точки x не увеличивает длину этого локального следа, что и требовалось.

Пусть теперь x имеет степень 2. Если x — не граничная вершина, то опять же все следует из свойств геодезических. Пусть x — граничная вершина. Рассмотрим локальный след Γ^x_{loc} точки x, представляющий собой объединение двух геодезических отрезков, стыкующихся в вер-

шине x под углом не меньшим чем 120°. Рассмотрим произвольную малую деформацию следа Γ^x_{loc}, неподвижную на границе этого следа. По определению, так как эта деформация имеет конечный тип, она на достаточно малом начальном отрезке времени представляет собой деформацию Φ'_ε некоторой параметрической сети Φ', параметризующей Γ^x_{loc}. Если сеть Φ' — погруженная, то она локально минимальна в силу предложения 3.1, поэтому деформация Φ'_ε не уменьшает длину сети Φ'.

Пусть теперь сеть Φ' имеет вырожденные ребра, которые в этом случае, очевидно, отображаются в вершину x. Тогда из формулы первой вариации вытекает, что первая производная функции длины $\ell(\varepsilon)$ длины сети $\Phi'(\varepsilon)$ неотрицательна. Если $d\ell/d\varepsilon > 0$, то длина сети Φ'_ε возрастает. Далее, эта производная равна нулю в том и только том случае, если угол α между ребрами следа Γ^x_{loc} в точности равен 120°, вырожденное ребро, инцидентное x единственно, и вершина x', отщепляющаяся от вершины x, движется вдоль геодезической, выпущенной из x в направлении биссектрисы угла α внутрь этого угла. Однако, и в этом случае деформация Φ'_ε не уменьшает длину сети Φ'. В самом деле, предположим противное, и рассмотрим сеть Φ'', полученную из сети Φ' добавлением отрезка геодезической, выпущенной из x вдоль продолжения биссектрисы угла α вне этого угла, и заканчивающегося граничной вершиной. Тогда деформация Φ'_ε легко продолжается до деформации погруженной локально минимальной сети Φ'', причем эта деформация должна укорачивать сеть Φ''. Противоречие.

Случай, когда вершина x имеет степень три, разбирается точно также. Итак, каждая точка x следа Γ обладает локальным следом, длина которого не уменьшается при деформациях. Доказательство предложения закончено.

Из теоремы 4 вытекает следующий результат.

Следствие 3.1 *Пусть* Γ — *локально минимальный след с границей* M, *возможно пустой. Тогда степень каждой вершины из* Γ *не превосходит трех, а в вершине степени* 3 *векторы направлений ребер расположены в одной двумерной плоскости* (*в касательном пространстве к многообразию* W *в этой вершине*).

Из следствия 3.1 вытекает, что при описании минимальных следов можно ограничиться следами вложенных параметрических сетей, параметризующие графы которых обладают только вершинами степени не более 3. Такие сети мы будем называть *сетями Штейнера.*

3.4 Локальная единственность

Одна из трудностей, стоящих на пути решения задач, связанных с поиском минимальных сетей, состоит в том, что минимальная сеть, как правило, не единственна. Например, в случае замкнутых параметрических сетей, у которых не фиксирован гомотопический тип, решение задачи о поиске минимальных параметрических сетей, очевидно, не единственно, поскольку решением является каждая точечная сеть.

Если же фиксирован гомотопический тип параметрической сети, то решение может как не существовать (см. пример выше), так и быть не единственным. Например, на поверхности вращения, заданной в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнением $r = 2 + \sin z$, существует бесконечно много минимальных сетей с одной вершиной и одним циклическим ребром, следы которых имеют вид $z = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если фиксирована некоторая не пустая граница, то, вообще говоря, единственности решения задачи о поиске минимальной сети тоже ожидать не приходится. Описание множества всех локально минимальных (взвешенных) сетей фиксированного типа G с данной границей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ приводится в главе 5. В случае же риманова многообразия W общего вида удается получить только следующий важный локальный результат.

Пусть w — произвольная точка риманова многообразия W. Напомним, что *геодезическим шаром $B(w, \varepsilon)$ с центром в точке w и радиуса ε* называется образ шара $\{v \in T_w W \mid \|v\| < \varepsilon\}$ при экспоненциальном диффеоморфизме $\exp_w$ (здесь ε выбирается достаточно малым). Все геодезические шары $B(w, \varepsilon)$ достаточно малого радиуса выпуклы в том смысле, что любые две точки x и y из $B(w, \varepsilon)$ соединяются единственной кратчайшей геодезической, лежащей в $U(w)$, см. например [68]. Более того, имеет место следующий результат.

Предложение 3.17 *Пусть w — произвольная точка риманова многообразия W. Тогда существует такой замкнутый геодезический шар $B(w, \varepsilon) = \{x \in W \mid \rho(x, w) \leq \varepsilon\}$ с центром в точке w, что любые две точки из $B(w, \varepsilon)$ соединяются единственной кратчайшей геодезической, которая целиком, за исключением, быть может, своих концевых точек, лежит в открытом шаре $U(w, \varepsilon)$. В последнем случае, кратчайшая геодезическая подходит к геодезической сфере $\partial B(w, \varepsilon)$ трансверсально.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, существование открытого геодезического шара, такого что любые две его точки соединяет

единственная кратчайшая геодезическая, лежащая в этом шаре, хорошо известно, см. например [68]. Поэтому, переходя к замыканию, заключаем, что существует замкнутый шар $B(w,\varepsilon)$, обладающий тем же свойством. Для завершения доказательства предложения остается проверить, что каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая произвольную точку x геодезической сферы $\partial B(w,\varepsilon)$ с любой другой точкой из замкнутого шара $B(w,\varepsilon)$, трансверсальна сфере $\partial B(w,\varepsilon)$ в точке x. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.4 *Геодезическая, касающаяся геодезической сферы $\partial B(w,\varepsilon)$, не лежит внутри ограничиваемого этой сферой замкнутого геодезического шара $B(w,\varepsilon)$.*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим произвольную геодезическую ζ, касающуюся геодезической сферы $\partial B(w,\varepsilon)$ в некоторой точке x. Из точки x в центр w шара $B(w,\varepsilon)$ идет единственная кратчайшая геодезическая, которую мы обозначим через γ. Геодезическая ζ порождает геодезическую вариацию γ_t, при которой конец w геодезической γ_t стоит на месте, а другой ее конец — точка x_t, $x_0 = x$, движется по геодезической ζ. Обозначим через $\ell(t)$ длину геодезической γ_t. Тогда, как следует из формулы первой вариации (следствие 1.2 главы 1), первая производная функции $\ell(t)$ в точке $t = 0$ равна нулю. С помощью следствия 1.4 главы 1 вычислим вторую производную функции $\ell(t)$ в начальный момент времени. Она имеет вид

$$\left.\frac{d^2\ell}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla_E E, X\rangle + \langle \widetilde{E}, \nabla_X \widetilde{E}\rangle,$$

где X — поле скоростей геодезической γ_0, E — поле деформации, $\widetilde{E}$ — его нормальная составляющая, и значение правой части вычисляется в точке $\zeta(0) \in \partial B(w,\varepsilon)$. Однако первое слагаемое в правой части равно нулю, так как кривая ζ, вдоль которой движется точка x — геодезическая. Второе же слагаемое неотрицательно в силу следствия 1.4 главы 1, причем равенство нулю достигается если и только если геодезическая ζ является продолжением геодезической γ_0. Последнее невозможно, так как ζ и γ_0 перпендикулярны. Итак, вторая производная функции $\ell(t)$ в точке $t = 0$ положительна, поэтому $\ell(t) > \ell(0) = \varepsilon$ при достаточно малых t. Последнее означает, что начальный отрезок геодезической ζ лежит вне геодезического шара $B(w,\varepsilon)$. Лемма доказана.

Из леммы 3.4 вытекает справедливость предложения 3.17. Доказательство закончено.

Из предложения 3.17 вытекает следующее полезное следствие.

Следствие 3.2 *Пусть $B(\varepsilon)$ — геодезический шар, обладающий свойствами, описанными в предложении 3.17, и γ — произвольная кратчайшая геодезическая. Тогда γ пересекает геодезическую сферу $\partial B(\varepsilon)$ не более чем в двух точках. Если же начальная и конечная точки геодезической γ лежат внутри шара $B(\varepsilon)$, то геодезическая γ не пересекает геодезическую сферу $\partial B(\varepsilon)$.*

Доказательство. Действительно, выйдя из геодезического шара $B(\varepsilon)$, кратчайшая геодезическая уже не может в него вернуться, поскольку, в силу предложения 3.17, кратчайшая геодезическая, соединяющая пару точек из геодезической сферы $\partial B(\varepsilon)$, целиком лежит в геодезическом шаре $B(\varepsilon)$.

С помощью следствия 1.7 главы 1 и следствия 3.2 можно доказать следующий общий результат о локальной единственности.

Предложение 3.18 *Пусть M — множество, состоящее из $n \geq 3$ попарно различных точек, лежащих на некоторой геодезической сфере $\partial B(\varepsilon)$ радиуса ε в римановом многообразии W. Пусть G — звезда с n лучами и β — некоторое взаимно однозначное отображение множества вершин степени 1 звезды G на множество M. Тогда, если ε достаточно мало, то в пространстве параметрических сетей $\mathcal{M}_G(\beta)$ существует единственная абсолютно минимальная сеть. При этом единственная подвижная вершина этой сети расположена в замкнутом геодезическом шаре $B(\varepsilon)$.*

Доказательство. Прежде всего, выберем ε настолько малым, чтобы каждая абсолютно минимальная сеть, затягивающая множество M, лежала бы в выпуклом геодезическом шаре $B(r)$ некоторого фиксированного радиуса r.

Предположим, что в пространстве $\mathcal{M}_G(\beta)$ существует две разных абсолютно минимальных сети Φ_0 и Φ_1. Так как каждые две точки в шаре $B(r)$ соединяются единственной геодезической, каждая такая сеть однозначно определяется положением своей единственной подвижной вершины. Обозначим через S_i подвижную вершину сети Φ_i, $i = 0, 1$.

Построим единственную кратчайшую геодезическую $S(t) \subset B(r)$, $t \in [0, 1]$, соединяющую точки S_0 и S_1. Геодезическая $S(t)$ порождает геодезическую деформацию $\Phi(t)$, переводящую сеть Φ_0 в сеть Φ_1. Обозначим через $\ell(t)$ функцию длины сети $\Phi(t)$. Так как сети Φ_0 и Φ_1 — абсолютно минимальны в $\mathcal{M}_G(\beta)$, функция $\ell(t)$ принимает в точках

$t = 0$ и $t = 1$ свое наименьшее значение. Кроме того, так как функция $\ell(t)$ не постоянна (см. следствие 1.7 главы 1) и непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$, в некоторой точке $\tau \in (0,\ 1)$ функция $\ell(t)$ должна иметь максимум. Если соответствующая точка $S(\tau)$ не принадлежит граничному множеству M (т.е. все ребра параметрической сети Φ_τ невырождены), то функция $\ell(t)$ дважды дифференцируема в точке τ, и мы получаем противоречие со следствием 1.7 главы 1, в силу которого вторая производная функции $\ell(t)$ в точке τ должна быть положительна.

Отметим далее, что точки S_i, $i = 0,\ 1$, не могут лежать вне геодезического шара $B(\varepsilon)$. В самом деле, если, скажем, точка S_0 лежит вне $B(\varepsilon)$, то она лежит на некоторой геодезической сфере $\partial B(\rho)$, где $\varepsilon < \rho \leq r$. Тогда, в силу предложения 3.17, примененного к шару $B(\rho)$, все ребра погруженной сети Φ_0 приходят в точку S_0 трансверсально и "изнутри" шара $B(\rho)$, поэтому сумма касательных векторов к этим ребрам не может равняться нулю — эта сумма будет иметь положительную проекцию на внутреннюю нормаль к $\partial B(\rho)$ в точке S_0. Последнее противоречит абсолютной минимальности погруженной параметрической сети Φ_0. Действительно, абсолютно минимальная погруженная сеть является также и локально минимальной сетью, и мы получаем противоречие с предложением 3.1 о локальной структуре таких сетей.

Итак, обе концевые точки геодезической $S(t)$ лежат в геодезическом шаре $B(\varepsilon)$. Поэтому, в силу следствия 3.2, все внутренние точки геодезической $S(t)$ лежат внутри геодезического шара $B(\varepsilon)$. В частности, сеть Φ_τ, соответствующая максимальному значению функции $\ell(\tau)$, является погруженной. Последнее, как мы уже показали выше, приводит к противоречию. Предложение доказано.

Предложение 3.18 позволяет дать следующую естественную интерпретацию понятию локально минимальной погруженной параметрической сети (напомним, что в случае погруженных сетей понятия сильной и слабой локальной минимальности совпадают).

Предложение 3.19 *Погруженная параметрическая сеть Φ в римановом многообразии W локально минимальна, если и только если у каждой точки сети Φ существует локальная сеть $\Phi_{\mathrm{loc}}\colon G_{\mathrm{loc}} \to W$, являющаяся абсолютно минимальной сетью типа G_{loc} с соответствующей границей β_{loc}.*

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно вытекает из предложения 3.18 и определения локальной минимальности.

Замечание. Таким образом, погруженные локально минимальные сети являются "локально кратчайшими", т.е. каждый достаточно малый

фрагмент такой сети является кратчайшей сетью с соответствующей канонической границей.

Глава 4

Глобальная структура плоских локально минимальных деревьев

В предыдущих главах была построена общая теория локально минимальных сетей на римановых многообразиях, где локальная минимальность понималась в смысле функционала длины или, более общо, в смысле функционалов взвешенной длины. В частности, были доказана общая теорема существования локально минимальных параметрических сетей и сетей-следов, см. главу 2, теоремы о локальной структуре локально минимальных параметрических сетей и следов, а также общий результат о локальной единственности параметрических сетей, см. главу 3. Однако, наряду с общей теорией, большой интерес представляет изучение геометрии минимальных сетей на конкретных классических многообразиях, и, прежде всего, на стандартной евклидовой плоскости и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. С одной стороны, случай плоскости особенно важен для приложений. Например, транспортная задача — это, как правило, задача о поиске некоторой минимальной сети на плоскости, где минимизируется или функционал длины, или функционал взвешенной длины. С другой стороны, изучение глобальных свойств минимальных сетей в $\mathbb{R}^n$ — это, в некотором смысле, изучение локальных свойств сетей в римановых многообразиях общего вида.

Сети на плоскости для краткости обычно называют *плоскими*. Как уже отмечалось во Введении, задача поиска плоских абсолютно или локально минимальных сетей с фиксированной границей еще весьма да-

лека от своего полного решения. В данной главе мы ограничимся рассмотрением плоских локально минимальных сетей (как сетей-следов, так и параметрических сетей) без циклов — деревьев, с фиксированной границей. При этом основное внимание будет уделяться локально минимальным следам. Отметим, что именно такие сети чаще всего встречаются в реальных прикладных задачах (действительно, на практике обычно ищут абсолютно минимальную сеть, а она, очевидно, лежит в соответствующем пространстве следов и не имеет циклов).

Одной из самых естественных постановок задачи о поиске сети, минимальной в том или ином смысле, является обычная граничная задача. На разработанном в предыдущих главах языке, это, как правило, задача о поиске минимального следа в некотором пространстве $\mathcal{T}(M)$ сетей-следов с фиксированной границей $M \subset \mathbb{R}^2$. Однако в такой постановке проблема оказывается чрезвычайно сложной (как было показано в [29] эта задача является $\mathcal{NP}$-трудной, т.е., говоря неформально, "скорее всего" не существует полиномиального алгоритма ее решения[1]). Эта сложность обусловлена прежде всего тем, что существует экспоненциально много возможных топологий плоских минимальных сетей с данной границей. И, вообще говоря, для каждой такой топологии приходится проверять, а не реализуется ли именно на ней искомый абсолютный минимум. Поэтому, естественно пытаться искать какие-либо априорные ограничения на возможные топологии минимальных сетей, и, прежде всего, — ограничения в терминах геометрии данного граничного множества M.

Основная цель данной главы состоит в построении эффективного ограничения на возможные топологии плоских локально-минимальных деревьев с произвольной фиксированной границей в терминах геометрии этой границы. Напомним, что из теоремы 4 главы 3 вытекает, что при описании минимальных следов можно ограничиться вложенными сетями Штейнера, т.е. вложенными параметрическими сетями, степени вершин параметризующих графов которых не превосходят 3. Сеть Штейнера, являющуюся деревом, будем называть *деревом Штейнера*. Мы начнем с изучения важного частного случая деревьев Штейнера — *бинарных деревьев*, — деревьев, степени вершин которых равны 1 или 3. Эти деревья в литературе часто называют *полными деревьями Штейнера*. При этом естественно предполагать, что граница каждого бинарного дерева совпадает со множеством его вершин степени 1. В этом случае подвижные вершины, т.е. вершины степени 3 часто называют *точками Штейнера*.

Для плоских бинарных деревьев естественно определяется важный

[1] Формальное определение $\mathcal{NP}$-трудности можно найти, например, в книге [69]

планарный инвариант (т.е. инвариант относительно планарной эквивалентности) — число вращения, который впервые был введен в рассмотрение автором и А. А. Тужилиным в [42, 43], см. определение ниже. Отметим, что *планарная эквивалентность* сетей Штейнера — это сильная деформационная эквивалентность, см. главу 1. С помощью числа вращения автором и А. А. Тужилиным сначала было получено полное описание плоских локально минимальных деревьев, затягивающих вершины выпуклых многоугольников [42, 43, 45, 46], см. также введение. В частности, было показано, см. также ниже следствие 4.7, что плоское бинарное дерево тогда и только тогда планарно эквивалентно некоторому локально минимальному дереву, затягивающему множество вершин какого-либо выпуклого многоугольника на плоскости, когда число вращения этого дерева не превосходит 5.

Уже тогда, см. [85, 44, 46], высказывалась гипотеза о том, что число вращения может оказаться полезным и при описании устройства локально минимальных бинарных деревьев в общем случае. Эта гипотеза подтвердилась в работе автора [38]. А именно, оказалось, что существует связь между числом вращения плоского локально минимального бинарного дерева и количеством уровней выпуклости его граничного множества. Напомним определение разбиения произвольного непустого конечного множества M точек плоскости на уровни выпуклости. Отнесем к *первому уровню выпуклости* M^1 *множества* M все точки из M, лежащие на границе выпуклой оболочки множества M. Заметим, что M^1 не пусто. Выбросим M^1 из M. Если полученное в результате множество не пусто, используем для его преобразования ту же процедуру. А именно, все точки из M, попавшие на границу выпуклой оболочки множества $M \setminus M^1$, отнесем ко *второму уровню выпуклости* M^2 *множества* M. Продолжим этот процесс до тех пор, пока все точки из M не попадут на какой-нибудь уровень выпуклости. Построенное разбиение $M = \sqcup_{i=1}^{k} M^i$ называется *разбиением на уровни выпуклости*, а множество M^i называется *i-ым уровнем выпуклости множества* M. Если $M = \sqcup_{i=1}^{k} M^i$, то говорят, что M *имеет k уровней выпуклости*. Число уровней выпуклости множества M обозначим через $\varkappa(M)$. Отметим, что множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, если и только если оно имеет один уровень выпуклости, который, очевидно, совпадает с ним самим. Мы покажем, что число вращения произвольного локально минимального бинарного дерева Γ не превосходит $12(\varkappa(\partial\Gamma) - 1) + 5$. Данное неравенство существенно ограничивает возможные топологии минимальных бинарных деревьев.

Более того, см. ниже раздел 4.5, оказалось что число вращения так же хорошо работает и в случае бинарных деревьев, локально минималь-

ных относительно произвольного функционала взвешенной длины [39]. В недавней совместной работе [52, 53] автор и А. А. Тужилин с помощью понятия числа вращения получили нетривиальные ограничения на топологии произвольных (не обязательно бинарных) минимальных деревьев, а также ряд интересных результатов, касающихся локально минимальных параметрических сетей (см. ниже раздел 4.4).

Отметим здесь же, что разработанный в [52, 53] подход имеет и самостоятельный интерес с точки зрения изучения геометрии плоских деревьев (не обязательно минимальных), все ребра которых представляют собой прямолинейные отрезки. Такие плоские деревья мы будем называть *линейными*. Действительно, основная теорема раздела 4.4 сформулирована без всяких предположений о минимальности. В такой постановке задача была предложена автору О. Р. Мусиным во время обсуждения результатов автора [38, 39]. Автор пользуется случаем поблагодарить О. Р. Мусина и всех участников его семинара за интересное и содержательное обсуждение.

Мы начнем эту главу с разработки технического аппарата, который позволит нам работать с ломаными на плоскости. Наш интерес к ломаным объясняется тем, что каждый путь в плоском локально минимальном дереве, очевидно, является ломаной.

4.1 Плоские ломаные I: случай общего положения

В данном разделе мы введем необходимые определения и обозначения, и подробно изучим геометрию пары ломаных, соединяющих две фиксированных точки плоскости. При этом мы будем предполагать, что эти ломаные находятся "общем положении". В дальнейшем, см. раздел 4.3, мы откажемся от этого предположения.

Напомним определение ломаной.

Определение. Конечный набор прямолинейных отрезков $[A_i, A_{i+1}] = \Delta_i$, $i = 0, \dots, n-1$, называется *незамкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, а интервалы (A_i, A_{i+1}) попарно не пересекаются и не содержат точек A_k, $k = 0, \dots, n$.

Конечное множество отрезков $\Delta_i = [A_i, A_{(i+1) \bmod n}]$, $i = 0, \dots, n-1$ называется *замкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, а интервалы $(A_i, A_{(i+1) \bmod n})$ попарно не пересекаются и не содержат точек A_k, $k = 0, \dots, n-1$.

Отрезки $[A_i, A_{i+1}]$ называются *ребрами ломаной*, а точки A_i — ее *вершинами*. Если ломаная незамкнута, то вершины A_0 и A_n называ-

ются *концевыми*, а все остальные — *внутренними вершинами* ломаной. Далее, если ломаная L незамкнута, то ее ребра $[A_i, A_{i+1}]$ при $i = 0,\ n-1$ называются *концевыми ребрами*, а все остальные — *внутренними ребрами* ломаной L. Если же ломаная L — замкнута, то все ее вершины и ребра называются *внутренними*.

Ломаная L' называется *подломаной* ломаной L, если каждое ребро ломаной L' является также и ребром ломаной L.

Если ломаные L' и L совпадают как подмножества плоскости, но L' содержит некоторые дополнительные вершины, то L' называется *измельчением ломаной* L.

Отметим, что, по определению, каждая ломаная представляет собой вложенную кусочно-гладкую (даже кусочно-линейную) кривую на плоскости.

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения. Если L — незамкнутая ломаная, а A и B — две ее произвольные точки, то через $L[A, B]$ обозначим часть L между A и B. Если из $L[A, B]$ выброшена точка A или B, то заменим соответствующую квадратную скобку "[" или "]" на круглую, "(" или ")".

Замечание. В дальнейшем, говоря о ломаных, мы, допуская определенную вольность речи, иногда будем подразумевать их "естественные" измельчения, которые очевидно определяются из контекста. Например, если некоторая ломаная L', как подмножество плоскости, содержится в ломаной L, то мы будем говорить, что L' является подломаной ломаной L, хотя формально это верно лишь для измельчения ломаной L, полученного добавлением ко множеству ее вершин всех вершин ломаной L'.

4.1.1 Твистинги и кручение

Пусть L — произвольная ломаная. По определению, все ее вершины A_i канонически перенумерованы. Ясно, что каждая ломаная может быть задана занумерованным набором своих вершин. Если перенумеровать точки A_i в противоположном порядке, то мы снова получим ломаную, которая совпадает с исходной, как подмножество плоскости. Выбор одной из двух канонических нумераций вершин ломаной L называется *ориентацией ломаной* L. Если ориентация ломаной L фиксирована, то можно рассматривать каждое звено A_iA_{i+1} ломаной L как вектор с началом в A_i и концом в A_{i+1}.

Напомним, что если (a, b) — упорядоченная пара линейно независимых векторов на плоскости, на которой раз и навсегда фиксирована

ориентация, то можно определить *ориентированный угол* $\alpha(a,b)$ от a к b так. Величина $\alpha(a,b)$ равна величине меньшего из двух углов между векторами, а знак — знаку ориентированного репера (a,b). Если векторы a и b сонаправлены, то ориентированный угол также определен и равен нулю. Для противонаправленных векторов ориентированный угол не определен.

В дальнейшем, нам будет удобно нормировать ориентированный угол.

Определение. *Твистингом* $\mathrm{tw}(a,b)$ упорядоченной пары векторов a и b назовем число $\alpha(a,b)/(\pi/3)$.

Итак, пусть L — ориентированная ломаная, и $a_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n-1$ — ее последовательные ребра (если ломаная замкнута, то сложение в индексах понимается по модулю n).

Определение. *Твистингом* $\mathrm{tw}\,A_i$ *вершины* A_i назовем твистинг между последовательными векторами-звеньями, инцидентными A_i, т.е. число $\mathrm{tw}(a_{i-1}, a_i)$.

Отметим, что в случае незамкнутой ломаной твистинг определен лишь для внутренних вершин.

Предположим теперь, что ломаная L незамкнута.

Определение. Сумма твистингов всех внутренних вершин ориентированной ломаной L называется *кручением вдоль* L и обозначается через $\mathrm{tn}\,L$:

$$\mathrm{tn}\,L = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{tw}\,A_i.$$

Если ломаная L состоит из одного звена, то положим $\mathrm{tn}\,L = 0$.

Легко видеть, что кручение вдоль незамкнутой ориентированной ломаной L обладает следующими свойствами:

- если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (косая симметрия);
- если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают;
- если A_i — произвольная внутренняя вершина L, а L_1 и L_2 — ориентированные в соответствие с ориентацией L ломаные, на которые A_i разбивает L, то $\mathrm{tn}\,L = \mathrm{tn}\,L_1 + \mathrm{tw}\,A_i + \mathrm{tn}\,L_2$;

- если P — произвольная точка, лежащая внутри произвольного ребра из L, а L_1 и L_2 — ломаные, на которые P разбивает L, ориентированные в соответствие с ориентацией L, то $\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} L_1 + \operatorname{tn} L_2$ (аддитивность).

Пусть теперь L — замкнутая ориентированная ломаная.

Определение. Сумма твистингов всех вершин из L называется *кручением вдоль замкнутой ломаной* L и обозначается через $\operatorname{tn} L$:

$$\operatorname{tn} L = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{tn} A_i.$$

Сформулируем несколько очевидных свойств кручения вдоль замкнутой ориентированной ломаной L.

- Если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (кососимметричность).

- Если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают.

- Если A_i — произвольная вершина L, и L' — незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по A_i, и ориентированная в соответствие с ориентацией L, то $\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} L' + \operatorname{tw} A_i$. Более точно, чтобы получить ломаную L' из ломаной L, следует выбросить из L малую (связную) окрестность $U_A \subset L$ точки A_i, не содержащую вершин ломаной L, отличных от точки A_i, если A_i — вершина.

- Если P — произвольная точка лежащая внутри произвольного ребра из L, и L' — незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по P и ориентированная в соответствии с ориентацией L, то $\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} L'$.

Следующее предложение непосредственно вытекает из определений.

Предложение 4.1 *Пусть L — произвольная замкнутая ломаная, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\operatorname{tn} L = 6$. Если же L ориентирована по часовой стрелке, то $\operatorname{tn} L = -6$.*

В дальнейшем нам также понадобится следующее понятие деформации ломаной.

Определение. Семейство ломаных L^t, $t \in [0,1]$, с вершинами в точках A_i^t, где $i = 0, \ldots, n+1$, называется *деформацией ломаной* $L = L^0$, если все кривые A_i^t непрерывны. Часто деформацию произвольного измельчения ломаной L мы также будем называть деформацией ломаной L, опуская слово "измельчение".

Вершина A_i ломаной L называется *неподвижной* при деформации L^t, если $A_i^t = A_i$ для любого $t \in [0,1]$. Все остальные вершины называются *подвижными*. Ребро $[A_i, A_{i+1}]$ ломаной L, называется *подвижным*, если подвижна хотя бы одна из его вершин. Множество всех подвижных ребер из L называется *носителем деформации* L^t.

Легко доказывается следующее предложение.

Предложение 4.2 *Пусть L^t — произвольная деформация ориентированной ломаной L. Если L незамкнута, то предположим дополнительно, что направления первого и последнего ее звеньев не меняются в процессе деформации. Тогда кручение вдоль L не меняется при деформации:*

$$\operatorname{tn} L^t = \operatorname{const} = \operatorname{tn} L, \qquad t \in [0,1].$$

Доказательство. Действительно, из определения кручения вдоль ломаной немедленно вытекает, что в процессе описанной деформации кручение ломаной L^t не меняется с точностью до $(3/\pi)2k\pi = 6k$. С другой стороны, очевидно, кручение $\operatorname{tn} L^t$ деформируемой ломаной непрерывно зависит от t, откуда и вытекает требуемое утверждение. Доказательство закончено.

4.1.2 Пара ломаных в общем положении

Пусть L^1 и L^2 — две ломаные, некоторые вершины которых фиксированы.

Определение. Будем говорить, что L^1 и L^2 *находятся в общем положении*, если они пересекаются не более чем в конечном числе точек, каждая из которых или не является вершиной ни одной из ломаных, или является фиксированной вершиной одной из L^i.

Пусть теперь L^1 и L^2 — некоторые ломаные. Предположим, что эти ломаные находятся в общем положении. Выбросим из L^2 все точки пересечения с L^1, и обозначим через L_j^2 замыкания полученных последовательных связных компонент. Ясно, что L_j^2 являются ломаными. Если ломаная L^2 ориентирована, то будем предполагать что компоненты L_j^2 занумерованы в соответствие с ориентацией ломаной L^2.

Определение. Построенное разбиение $L^2 = \cup L_j^2$ назовем *каноническим разбиением*[2] *ломаной* L^2 *по отношению к* L^1.

Предположим теперь, что ломаные L^1 и L^2 соединяют фиксированные точки A и B и находятся в общем положении. Пусть $L^2 = \cup_{j=1}^N L_j^2$ — каноническое разбиение L^2 относительно L^1. Ориентируем обе ломаные L^1 и L^2 от A к B. Каждая ломаная L_j^2, вместе с соответствующей частью ломаной L^1, ограничивает некоторую ограниченную область Ω_j на плоскости. Более точно, если A_j и B_j — начальная и конечная вершины ломаной L_j^2, и b_j — часть ломаной L^1 между A_j и B_j, то область Ω_j ограничена замкнутой ломаной $L_j^2 \cup b_j$. Ломаную b_j будем называть *основанием* области Ω_j, а сами области Ω_j — *Ω-областями*. Первая и последняя из Ω_j называются *концевыми*, а все остальные — *внутренними* Ω-областями.

Выбранная ориентация ломаной L^2 определяет *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2. Припишем каждой из L_j^2 знак следующим образом. Определим *знак* $\operatorname{sign}(L_j^2)$ *ломаной* L_j^2 равным $+1$, если обход области Ω_j против часовой стрелки индуцирует движение вдоль L_j^2, как вдоль части границы $\partial\Omega_j$ области Ω_j, в положительном направлении. В противном случае, положим $\operatorname{sign}(L_j^2) = -1$.

Определение. Пусть $L^2 = \cup_{j=1}^N L_j^2$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1. Сумма знаков $\operatorname{sign}(L_j^2)$ по всем $j = 1, \ldots, N$ называется *индексом ломаной* L^2 *относительно* L^1 и обозначается через $\operatorname{ind}(L^2, L^1)$.

Рассмотрим теперь концевые области Ω_1 и Ω_N, и ориентируем их границы — замкнутые ломаные, в соответствие с положительным направлением движения вдоль L_1^2 и L_N^2. Обозначим через $\alpha(L^2, L^1)$ твистинг точки A как вершины ориентированной замкнутой ломаной $\partial\Omega_1$, и через $\beta(L^2, L^1)$ — твистинг точки B как вершины ориентированной замкнутой ломаной $\partial\Omega_N$. Назовем эти числа *начальным* и *конечным твистингом ломаной* L^2 *по отношению к* L^1. Отметим, что $\alpha(L^2, L^1)$ совпадает с деленным на $\pi/3$ ориентированным углом между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1, и направлением начального звена ломаной L^2. В свою очередь, $\beta(L^2, L^1)$

[2]Такое определение канонического разбиения было дано в [38, 39]. В разделе 4.3 мы дадим *другое* определение канонического разбиения, работающее без предположений об общем положении ломаных. Поэтому определенное только-что понятие естественнее называть, скажем, *регулярным каноническим разбиением*, что мы и будем делать начиная с раздела 4.3. Здесь мы сохраним терминологию из [38].

совпадает с деленным на $\pi/3$ ориентированным углом между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1. (Напомним, что так как ломаные L_1 и L_2 находятся в общем положении, величины этих углов отличны от π, поэтому ориентированный угол определен.)

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат данного раздела.

Предложение 4.3 *Пусть L^1 и L^2 — ломаные, соединяющие пару различных точек A и B и ориентированные от A к B. Предположим, что единственные фиксированные вершины ломаных L^1 и L^2 — это точки A и B, и, кроме того, пусть ломаные L^1 и L^2 находятся в общем положении. Тогда*

$$\operatorname{tn} L^2 = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

Прежде чем доказывать это предложение, приведем другое, иногда более удобное, определение индекса одной ломаной по отношению к другой.

Пусть L^1 и L^2 — такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1, и пусть Ω_j — произвольная внутренняя область, а L^2_j — соответствующий элемент канонического разбиения.

Определение. Область Ω_j и ломаная L^2_j называются *A-областью* и *A-элементом* соответственно, если Ω_j содержит точку A и не содержит B. Если Ω_j содержит B и не содержит A, то Ω_j и L^2_j называются *B-областью* и *B-элементом*. Далее, если Ω_j содержит как A, так и B, то Ω_j и L^2_j называются *полными*, или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A, ни B, то Ω_j и L^2_j называются *пустыми*, или *E-областью* и *E-элементом*.

Ясно, что каждая внутренняя Ω-область (внутренний элемент канонического разбиения) является или A-, или B-, или F-, или E-областью (элементом). Таким образом, мы разбили множество всех внутренних Ω-областей (внутренних элементов канонического разбиения) на четыре класса, каждый из которых может быть пустым. Продолжим теперь это разбиение на концевые Ω-области (элементы) так. Отметим, что концевая Ω-область не может содержать внутри себя одновременно точки A и B. Если концевая Ω-область содержит внутри себя точку A или B, то отнесем ее, соответственно, к A- или B-областям. В противном случае, если замыкание концевой Ω-области содержит точку A, то отнесем эту область к A-областям, иначе — к B-областям. В

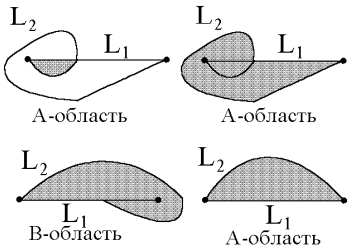


Рис. 4.1: Примеры концевых A- и B-областей.

частности, если существует ровно одна Ω-область (она же концевая), то отнесем ее к A-областям, см. рис. 4.1.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Определим *знак области* Ω_j как знак $\operatorname{sign}(L^2_j)$ и обозначим его через $\operatorname{sign}(\Omega_j)$. Припишем каждой Ω-области букву $X_j^{\operatorname{sign}(\Omega_j)}$, где буква X_j равна A, B, F или E в зависимости от того, к какому классу принадлежит область Ω_j. Составим *слово* $W(L^2, L^1)$, записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\operatorname{sign}(\Omega_1)} \cdots X_N^{\operatorname{sign}(\Omega_N)}.$$

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв, и обозначим его через $\operatorname{Weight}(L^2, L^1)$. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4.1 *Во введенных выше обозначениях,*

$$\operatorname{ind}(L^2, L^1) = \operatorname{Weight}(L^2, L^1).$$

Перейдем теперь к доказательству предложения 4.3.

Доказательство предложения 4.3. План доказательства таков. Мы определим специальную деформацию некоторого измельчения ломаной L^2 (такую деформацию мы будем называть элементарной), в результате которой ломаные L^1 и L^2 остаются в общем положении, уменьшается количество ограниченных ими пустых областей, но индекс и концевые твистинги не меняются. Ясно, что последовательным применением таких деформаций можно преобразовать ломаную L^2 в ломаную, не образующую пустых областей с L^1, для которой, как оказывается, легко описывается структура канонического разбиения по отношению к L^1, и непосредственно доказывается искомая зависимость между кручениями.

Рассмотрим произвольную пустую область Ω_i, и предположим, что внутри ее основания b_i расположена некоторая точка $P \in L^2$. Так как L^2 и L^1 находятся в общем положении, и P не является фиксированной вершиной, то ломаная L^2 входит внутрь области Ω_i. С другой стороны, область Ω_i не содержит концевых точек ломаной L^2, так как Ω_i пустая, поэтому ломаная L^2 должна выйти из Ω_i, пересекая при этом основание b_i в некоторой внутренней точке $P' \neq P$. Таким образом, если внутри основания b_i пустой области Ω_i содержится точка из L^2, то существует другая пустая область Ω_j, содержащаяся внутри Ω_i.

Множество пустых областей образует, очевидно, частично упорядоченное множество относительно операции включения. Рассмотрим в этом множестве некоторую максимальную цепь:

$$\Omega_i \supset \Omega_{i_1} \supset \cdots \supset \Omega_{i_k}.$$

Ясно, что ни внутри основания области Ω_{i_k}, являющейся минимальным элементом этой цепи, ни внутри самой области Ω_{i_k}, нет точек ломаной L^2.

Определение. Пустая Ω-область, внутренность (а значит, и внутренность основания) которой не содержит точек ломаной L^2, назовем *строго пустой областью.* Соотвстствующис основания будсм называть *пустыми.*

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 4.1 *Если множество пустых Ω-областей не пусто, то среди них найдется строго пустая Ω-область.*

В дальнейшем нам будет полезна следующая элементарная лемма, см. рис. 4.2.

Лемма 4.2 *Пусть W — произвольный многоугольник, A и B — любые его различные вершины, и l и b — две ломаных, на которые точки A и B разбивают границу многоугольника W. Тогда для некоторых измельчений l' и b' ломаных l и b существует деформация l'_t, сохраняющая на месте точки A и B, переводящая l' в b' и такая, что все ломаные l'_t лежат в многоугольнике W.*

Определим теперь элементарные деформации ломаной L^2, образующей пустые области относительно L^1. Каждая элементарная деформация Φ будет состоять из двух шагов. Первый шаг Φ_1 определяется так. Выберем одну из строго пустых областей, существующих в силу

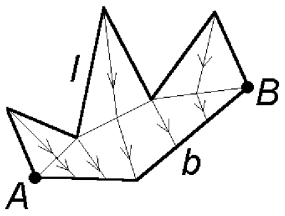


Рис. 4.2: Деформация ломаной l на измельчение ломаной b внутри многоугольника W.

леммы 4.1, и обозначим ее через Ω_i. Концевые точки соответствующей ломаной L_i^2 разбивают границу области Ω_i на две ломаных, одна из которых является основанием b_i этой области, а вторая совпадает с L_i^2. Деформация (измельчения) ломаной L_i^2 на (измельчение ломаной) b_i, существующая в силу леммы 4.2, задает деформацию всей ломаной L^2, и, так как Ω_i строго пуста, в результате этой деформации у ломаной L^2 самопересечений не возникает. Итак, первый шаг Φ_1 элементарной деформации ломаной L^2 состоит в вытеснении некоторой ее строго пустой области Ω_i на основание b_i. Ломаную, полученную в результате описанной деформации, обозначим через $\overline{L^2}$.

Перейдем к построению второго шага Φ_2 элементарной деформации. Для этого в каждой вершине V_j построенного на первом шаге измельчения основания b_i области Ω_i выберем единичный вектор e_j, направленный в сторону, противоположную той, с которой к b_i примыкает Ω_i. Второй шаг Φ_2 элементарной деформации состоит в следующем. Вершины ломаной $\overline{L^2}$, не являющиеся вершинами измельчения b_i, остаются на месте, а каждая вершина V_j измельчения движется с единичной скоростью вдоль вектора e_j. Очевидно, всегда можно сдвинуть вершины V_j настолько мало, что не возникнет новых пересечений деформированной ломаной $\overline{L^2}$ с L^1, пересечение по b_i исчезнет, и не возникнет самопересечений у деформируемой ломаной $\overline{L^2}$.

Итак, мы определили два шага элементарной деформации ломаной L^2, образующей пустые области относительно L^1. Последовательно применяя их, мы получим деформацию Φ ломаной L^2, которую будем называть *элементарной*. Отметим, что элементарные деформации не меняют направления концевых ребер ломаной L^2, поскольку элементы канонического разбиения ломаной L^2, содержащие ее концевые ребра, не являются пустыми по определению. Далее, из леммы 4.1 следует, что последовательными элементарными деформациями можно

перестроить ломаную L^2 в ломаную, не образующую пустых областей относительно L^1, и находящуюся с L^1 в общем положении. Результат этой перестройки будем называть *редуцированной ломаной.*

Докажем теперь следующую важную лемму.

Лемма 4.3 *Элементарные деформации ломаной L^2 сохраняют как индекс* $\mathrm{ind}(L^2, L^1)$, *так и начальный $\alpha(L^2, L^1)$ и конечный $\beta(L^2, L^1)$ твистинги ломаной L^2 по отношению к L^1.*

Доказательство. По определению, каждая элементарная деформация Φ затрагивает лишь три последовательных Ω-области, скажем Ω_{i-1}, Ω_i, Ω_{i+1}, средняя из которых, Ω_i, является строго пустой. Области Ω_{i-1} и Ω_{i+1} будем называть *крайними.* В результате элементарной деформации эти три области перестраиваются в одну Ω-область, которую мы обозначим через Ω'. Граница области Ω' является объединением двух ломаных, пересекающихся только по своим концевым вершинам: основания b' области Ω', и ломаной $l' \subset L^2$.

Рассмотрим деформацию Φ^{-1}, обратную к элементарной деформации Φ. Напомним, что элементарная деформация Φ определена как последовательность двух деформаций Φ_1 и Φ_2. Поэтому обратная деформация также представима в виде последовательности двух деформаций: деформации Φ_2^{-1}, обратной к Φ_2, и деформации Φ_1^{-1}, обратной к Φ_1. В процессе деформации Φ_2^{-1} некоторая подломаная ломаной l' "слипается" с ломаной L^1; деформация Φ_1^{-1} "снимает" l' с L^1, в результате чего образуются области Ω_{i-1}, Ω_i и Ω_{i+1}.

Возможны следующие два случая, см. рис. 4.3.

1. При деформации Φ_2^{-1} ломаная l' подходит к L^1, оставаясь при этом внутри замыкания области Ω'. Легко видеть, что в этом случае знаки крайних областей Ω_{i-1} и Ω_{i+1} совпадают со знаком области Ω' (эти три области лежат по одну и ту же сторону от ломаной L^2), а знак области Ω_i противоположен знаку области Ω' (область Ω_i расположена по другую сторону от L^2):

$$\mathrm{sign}(\Omega_{i-1}) = \mathrm{sign}(\Omega_{i+1}) = \mathrm{sign}(\Omega'), \qquad -\mathrm{sign}(\Omega_i) = \mathrm{sign}(\Omega').$$

   Поэтому

$$\mathrm{sign}(\Omega_{i-1}) + \mathrm{sign}(\Omega_i) + \mathrm{sign}(\Omega_{i+1}) = \mathrm{sign}(\Omega').$$

2. При деформации Φ_2^{-1} ломаная l' подходит к L^1, оставаясь при этом внутри области $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$. В этом случае одна из крайних областей, пусть, для определенности, Ω_{i-1}, не пересекается с Ω' и



Рис. 4.3: Деформация, обратная к элементарной

имеет противоположный знак, так как лежит по другую сторону от L^2. Вторая же крайняя область содержит Ω' и имеет тот же знак, так как лежит по ту же сторону от L^2. Знак области Ω_i также совпадает со знаком области Ω'. Таким образом,

$$\operatorname{sign}(\Omega_i) = \operatorname{sign}(\Omega_{i+1}) = \operatorname{sign}(\Omega'), \qquad -\operatorname{sign}(\Omega_{i-1}) = \operatorname{sign}(\Omega').$$

Поэтому снова

$$\operatorname{sign}(\Omega_{i-1}) + \operatorname{sign}(\Omega_i) + \operatorname{sign}(\Omega_{i+1}) = \operatorname{sign}(\Omega').$$

Таким образом, сумма знаков трех последовательных областей Ω_{i-1}, Ω_i, Ω_{i+1}, участвующих в деформации, совпадает со знаком области Ω', в которую они перестраиваются, что и означает сохранение индекса.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что концевые твистинги также не меняются. Но это так, поскольку построенная деформация не меняет направления концевых ребер ломаной L^2. Лемма 4.3 доказана.

Итак, для доказательства предложения 4.3 осталось показать, что оно справедливо для случая ломаных L^1 и L^2, таких что L^2 не образует пустых областей с L^1. Нам понадобится следующее определение. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку пересечения P ломаных L^1 и L^2. Пусть L^2_i и L^2_{i+1} — последовательные элементы канонического разбиения, первый из которых заканчивается, а второй начинается в точке P. Обозначим через Q начальную точку L^2_i, и через R — конечную точку L^2_{i+1}.

Определение. Точка P называется *точкой монотонности*, если точка Q предшествует P, а точка R следует за P на ориентированной ломаной L^1.

Приведем несколько очевидных свойств точки монотонности.

Лемма 4.4 *Пусть Ω_{i-1} и Ω_i — последовательные Ω-области, и предположим, что концевая точка P области Ω_{i-1}, совпадающая с начальной точкой области Ω_i, является точкой монотонности. Тогда*

1. *если Ω_i является A-областью, то $\Omega_{i-1} \subset \Omega_i$, и поэтому Ω_{i-1} — или A-область, или E-область;*

2. *если Ω_i является F-областью, то $\Omega_{i-1} \subset \Omega_i$, и Ω_{i-1} — или A-область, или E-область;*

3. *если Ω_{i-1} является F-областью, то $\Omega_{i-1} \supset \Omega_i$, и Ω_i — или B-область, или E-область;*

4. *если Ω_{i-1} является B-областью, то $\Omega_{i-1} \supset \Omega_i$, и. Ω_i — или B-область, или E-область.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Граница области Ω_i состоит из элемента канонического разбиения L_i^2 ломаной L^2 и основания $b_i \subset L^1$. При этом часть $L^1[\Lambda, P)$ ломаной L^1 от Λ до P лежит, очевидно, внутри Ω_i. Поэтому начальная точка предыдущего элемента L_{i-1}^2 канонического разбиения ломаной L^2 лежит внутри области Ω_i. Так как конечная точка элемента L_{i-1}^2 совпадает с P, отсюда вытекает, что и весь элемент L_{i-1}^2 содержится в замыкании области Ω_i. Поэтому область Ω_{i-1} содержится в Ω_i, и, в частности, не может содержать точки B. Доказательство первого утверждения закончено.

Остальные утверждения доказываются аналогично.

Следующая лемма поясняет важность понятия точки монотонности для доказательства предложения 4.3.

Лемма 4.5 *Предположим, что L^2 не имеет пустых областей относительно L^1. Тогда все внутренние точки пересечения ломаных L^1 и L^2 являются точками монотонности. В частности, порядки, индуцированные на множестве точек пересечения ломаных L^1 и L^2 ориентациями этих ломаных, совпадают.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть Ω_i — первая из Ω-областей, такая что одна из концевых точек соответствующего элемента L_i не является точкой монотонности. Ясно, что у такого L_i ровно одна концевая точка не является точкой монотонности, причем

эта точка — конечная для L_i. Обозначим эту точку через P и покажем, что в этом случае ломаная L^2 имеет пустую Ω-область. Это противоречие и завершит доказательство леммы.

Пусть Ω_i является A-областью. Тогда, так как P — первая точка не монотонности, из леммы 4.4 следует, что

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_i,$$

и все области Ω_j, $j = 1, \ldots, i$ являются A-областями. Так как P не точка монотонности, конечная точка $\overline{P}$ элемента L^2_{i+1} расположена внутри основания области Ω_i. Ломаная L^2 входит внутрь области Ω_i через точку $\overline{P}$, и, так как Ω_i не содержит точки B, ломаная L^2 должна выйти из области Ω_i через некоторую внутреннюю точку $\overline{Q} \neq \overline{P}$ основания области Ω_i. Обозначим через $\overline{L}$ часть ломаной L^2 между $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Напомним, что все области Ω_j, $j \leq i$, являются последовательно вложенными друг в друга A-областями. Пусть j_0 обозначает наименьшее целое число j, для которого $\Omega_j \cap \overline{L} \neq \emptyset$. Положим $\Omega' = \Omega_{j_0}$, $L' = L^2_{j_0}$, и обозначим через $\overline{L}'$ связную компоненту пересечения ломаной $\overline{L}$ с замыканием области Ω'.

Ломаная $\overline{L}'$ пересекается с ломаной L^1 только по своим концевым точкам, причем эти концевые точки лежат внутри основания области Ω'. Действительно, $\overline{L}'$ лежит в замыкании области Ω', а часть ломаной L^1, расположенная внутри замыкания области Ω', разбита на основания Ω-областей Ω_j, $j \leq j_0$, поэтому, если бы $\overline{L}'$ пересекла L^1 в некоторой своей внутренней точке, или одна из концевых точек ломаной $\overline{L}'$ не лежала бы внутри основания области Ω', то $\overline{L}'$ пересекла бы область Ω_j, $j < j_0$, что невозможно в силу выбора j_0. Отсюда вытекает, что область $\overline{\Omega}'$, которую $\overline{L}'$ ограничивает вместе с соответствующей частью ломаной L^1, является Ω-областью, основание которой лежит внутри основания области Ω'. Так как $\overline{L}'$ лежит в замыкании области Ω', то $\overline{\Omega}' \subset \Omega'$, и, поэтому, область $\overline{\Omega}'$ не содержит точки B. Покажем, что $\overline{\Omega}'$ также не может содержать точку A.

Пусть A' и B' — концевые точки ломаной L', причем, без ограничения общности, предположим, что $A' \in L^1(A, B')$. Обозначим через $\overline{A}'$ и $\overline{B}'$ концевые точки ломаной $\overline{L}'$. В силу доказанного выше, $L^1[\overline{A}', \overline{B}'] \subset L^1(A', B')$. Кроме того, так как $\partial\Omega' \cap \partial\overline{\Omega}' = L^1[\overline{A}', \overline{B}']$ и $\overline{\Omega}' \subset \Omega'$, то A' не принадлежит замыканию области $\overline{\Omega}'$. Если $A \in \overline{\Omega}'$, то $L^1[A, A']$ пересекает $\partial\overline{\Omega}'$, и так как $\partial\overline{\Omega}' = L^1[\overline{A}', \overline{B}'] \cup \overline{L}'$ и $L^1[A, A'] \cap L^1[\overline{A}', \overline{B}'] = \emptyset$, то $L^1[A, A'] \cap \overline{L}' \neq \emptyset$. Однако, $\overline{L}' \cap L^1[A, B] = \{\overline{A}', \overline{B}'\}$, $L^1[A, A'] \not\ni \overline{A}'$, и

$L^1[A, A'] \not\ni \overline{B}'$, поэтому $L^1[A, A'] \cap \overline{L}' = \emptyset$, противоречие, завершающее рассмотрение этого случая.

Пусть Ω_i является F-областью. По лемме 4.4,

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_i,$$

и все Ω_j при $j < i$ представляют собой A-области.

Пусть A_i и $B_i = P$ — первая и последняя точки из L_i^2. Если L_{i+1}^2 приходит на $L^1(A_i, B_i)$, то мы получаем E-область с помощью тех же рассуждений, что и выше. Если L_{i+1}^2 приходит на $L^1(A, A_i)$, то L_{i+1}^2 приходит на границу некоторой A-области снаружи этой области, и мы опять можем применить рассуждения, приведенные выше.

Таким образом, осталось рассмотреть последний случай, а именно, когда Ω_i является B-областью. Если опять мы обозначим через A_i и $B_i = P$ первую и последнюю точки элемента L_i^2, то, как легко видеть, элемент L_{i+1}^2 должен вернуться на $L^1(A_i, B_i)$, и мы опять получаем E-область. Это противоречие и завершает доказательство леммы 4.5.

Из лемм 4.4 и 4.5 немедленно вытекает важное следствие.

Следствие 4.1 *Пусть L^1 и L^2 — произвольная пара незамкнутых ломаных, соединяющих фиксированные точки A и B и находящихся в общем положении. Предположим, что L^2 не ограничивает пустых областей относительно L^1. Тогда слово $W(L^2, L^1)$ имеет одну из следующих двух форм:*

- *$A^p F^r B^q$, где все p, q и r — одновременно или положительны, или отрицательны, и $r = \pm 1$; или*
- *$A^p B^q$, где $pq \leq 0$, причем, если $p = 0$, то $|q| \geq 2$, и если $q = 0$, то $|p| \geq 1$.*

Вернемся к доказательству предложения 4.3. Рассмотрим произвольную область Ω_i и фиксируем направление обхода ее границы в соответствие с ориентацией ломаной L^2. Обозначим через A_i и B_i начальную и конечную точки ломаной L_i^2 соответственно, а через L_i^1 — основание области Ω_i, т.е. участок ломаной L^1 между A_i и B_i. Тогда, в силу предложения 4.1 и свойств кручения замкнутой ломаной, имеем:

$$\operatorname{tn} L_i^2 - \operatorname{tn} L_i^1 + \alpha_i(L_i^2, L_i^1) + \beta_i(L_i^2, L_i^1) = 6 \operatorname{sign} \Omega_i, \qquad (*_i)$$

где через $\alpha_i(L_i^2, L_i^1)$ и $\beta_i(L_i^2, L_i^1)$ обозначены соответственно начальный и конечный твистинги L_i^2 по отношению к L_i^1.

Из монотонности всех внутренних точек пересечения ломаных L^1 и L^2 вытекает, что

$$\beta_i(L_i^2, L_i^1) = -\alpha_{i+1}(L_{i+1}^2, L_{i+1}^1).$$

Поэтому, суммируя соотношения $(*_i)$ для всех i, получаем

$$\operatorname{tn} L^2 - \operatorname{tn} L^1 + \alpha(L^2, L^1) + \beta(L^2, L^1) = 6 \operatorname{ind}(L^2, L^1).$$

Предложение 4.3 полностью доказано.

4.1.3 Некоторые следствия и оценки

Пусть L^1 и L^2, как и выше, пара ломаных в общем положении при фиксированных общих концевых вершинах A и B. Предложение 4.3 дает возможность вычислять кручение вдоль одной из них, если известно кручение вдоль второй, концевые твистинги и индекс $\operatorname{ind}(L^2, L^1)$. Однако нам в дальнейшем будут также полезны оценки кручения в терминах общего числа A- и B-областей, порожденных ломаными L^1 и L^2. Мы получим их как следствия предложения 4.3.

Определение. Количество всех A- и B-элементов канонического разбиения ломаной L^2 по отношению к ломаной L^1 называется *AB-модулем ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\text{AB-Mod}(L^2, L^1)$. Также удобно назвать число $\text{AB-Mod}(L^2, L^1) + 1$ *модулем L^2 относительно L^1* и обозначать его через $\operatorname{Mod}(L^2, L^1)$.

Следствие 4.2 *В предположениях предложения 4.3, выполнены следующие оценки:*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| = |\operatorname{Weight}(L^2, L^1)| \leq \operatorname{Mod}(L^2, L^1),$$

и, поэтому,

$$|\operatorname{tn} L^2| < |\operatorname{tn} L^1| + 6 \operatorname{Mod}(L^2, L^1) + 6.$$

Доказательство. Покажем сначала, что AB-модуль ломаной L^2 относительно L^1 не увеличивается при элементарных деформациях ломаной L^2. Рассмотрим элементарную деформацию ломаной L^2. Напомним, что при этой деформации три последовательных Ω-области Ω_{i-1}, Ω_i и Ω_{i+1}, из которых Ω_i является строго пустой, перестраиваются в одну Ω-область Ω'.

Рассмотрим те же две возможности, что и выше, в доказательстве леммы 4.3, см. рис 4.3. В первом случае, см. рис 4.3, область Ω' представляет собой объединение областей Ω_{i-1} и Ω_{i+1}, и малой области,



Рис. 4.4: Устройство Ω-областей.

возникающей при втором шаге элементарной деформации. Эта малая область, очевидно, не содержит ни A, ни B. Поэтому, если Ω' является, скажем A-областью, то одна из областей Ω_{i-1} и Ω_{i+1} также является A-областью. Таким образом, в этом случае число A- и B-областей не увеличивается.

Во втором случае Ω' содержится или в Ω_{i-1}, или в Ω_{i+1}. Пусть, для определенности, $\Omega' \subset \Omega_{i+1}$, см. рис. 4.4. Тогда, как легко видеть, Ω_{i+1} содержит также область Ω_{i-1}. Образуем область Ω'_{i+1}, выкинув из Ω_{i+1} замыкания областей Ω_{i-1} и Ω'. Из определения элементарной деформации ясно, что замыкание области Ω'_{i+1} не содержит точек A и B. Таким образом, имеем:

$$\overline{\Omega_{i+1}} = \overline{\Omega'} \cup \overline{\Omega_{i-1}} \cup \overline{\Omega'_{i+1}},$$

где черта обозначает замыкание. Более того, множества, стоящие в правой части равенства, пересекаются только по граничным точкам.

Пусть теперь Ω', скажем, A-область. Тогда или Ω_{i+1} — тоже A-область, и AB-модуль не увеличился, или Ω_{i+1} — F-область. Но в последнем случае, очевидно, Ω_{i-1} — это B-область, т.к. в этом случае область $\overline{\Omega_{i-1}}$ обязана содержать B, поэтому AB-модуль опять же не увеличился.

Итак, обозначим через $\overline{L^2}$ ломаную, редуцированную из L^2, т.е. полученную из L^2 последовательными элементарными деформациями и не образующую с L^1 пустых областей. Нами доказана следующая лемма.

Лемма 4.6 *Во введенных выше обозначениях,*

$$\text{AB-Mod}(\overline{L^2}, L^1) \leq \text{AB-Mod}(L^2, L^1).$$

В силу следствия 4.1, редуцированная ломаная $\overline{L^2}$ образует не более одной F-области, поэтому, из леммы 4.3 и утверждения 4.1 вытекает, что

$$\begin{aligned}|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| = |\operatorname{ind}(\overline{L^2}, L^1)| &\le \text{AB-Mod}(\overline{L^2}, L^1) + 1 \\ &\le \text{AB-Mod}(L^2, L^1) + 1 = \operatorname{Mod}(L^2, L^1).\end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство следствия 4.2, осталось воспользоваться предложением 4.3 и заметить, что каждый из концевых твистингов $\alpha(L^2, L^1)$ и $\beta(L^2, L^1)$ строго меньше трех в силу общего положения ломаных L^1 и L^2. Доказательство закончено.

Следствие 4.2 можно несколько усилить так.

Следствие 4.3 *Пусть L^1 и L^2 — ломаные с фиксированными общими концевыми вершинами A и B и находящиеся в общем положении. Обозначим через $\overline{L^2}$ ломаную, редуцированную из L^2. Рассмотрим канонические разбиения ломаных L^2 и $\overline{L^2}$ относительно L^1. Пусть p и q — количества A- и B-элементов канонического разбиения исходной ломаной L^2 относительно L^1. Тогда*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le p + q + 1.$$

Более того,

- *если канонические разбиения обеих ломаных L^2 и $\overline{L^2}$ относительно L^1 не содержат F-элементов, то*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le \max(p, q);$$

- *если каноническое разбиение исходной ломаной L^2 не содержит F-элемента, а каноническое разбиение редуцированной ломаной $\overline{L^2}$ содержит F-элемент, то*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le p + q - 1.$$

Доказательство. Первое утверждение следствия 4.3 — это просто первое утверждение следствия 4.2.

Для доказательства второго утверждения следствия, воспользуемся наблюдениями, сделанными при доказательстве следствия 4.2, принимая во внимание следующие факты.

1. Количество A-областей может увеличиться в процессе элементарной деформации только на 1, при этом пара крайних областей Ω_{i-1} и Ω_{i+1}, одна из которых является F-областью, а другая — B-областью, перестраиваются в A-область при деформации второго типа. Количество F-областей и B-областей при этом уменьшается на 1. (Аналогично для B-областей.)

2. Количество F-областей может увеличиться при элементарной деформации только на 1, при этом пара крайних областей Ω_{i-1} и $\Omega_{i\,|\,1}$, одна из которых является A-областью, а другая — B-областью, перестраиваются в F-область при деформации первого типа. При этом количество как A-, так и B-областей уменьшается на 1.

Так как исходная ломаная L^2 не образует F-областей, то для увеличения количества A-областей (соответственно, B-областей) необходимо предварительное появление F-области, которое, в свою очередь, приводит к уменьшению количеств A- и B-областей на 1. Поэтому, количества A- и B-областей канонического разбиения редуцированной ломаной $\overline{L^2}$ не превосходят p и q соответственно. В силу следствия 4.1, слово $W(\overline{L}^2, L^1)$ имеет вид $A^x B^y$, где $xy < 0$, $|x| \le p$, и $|y| \le q$. Теперь требуемое неравенство вытекает из утверждения 4.1.

Докажем теперь третье утверждение следствия. Пусть некоторая элементарная деформация ломаной L^2 приводит к появлению первой F-области. Тогда эта F-область получается в результате объединения одной A- и одной B-области. Поэтому при этой деформации число A-областей и число B-областей уменьшаются на 1. Таким образом, количества A- и B-областей в разбиении ломаной $\overline{L^2}$ не превосходят $p-1$ и $q-1$ соответственно. Теперь третье утверждение вытекает из первого. Следствие доказано.

4.1.4 Шапочки

В данном разделе мы определим важное для дальнейшего понятие шапочки.

Пусть ломаная L^1 замкнута, а ломаная L^2 незамкнута. Как всегда, будем предполагать, что ломаные находятся в общем положении. Рассмотрим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_i^2$ ломаной L^2 по отношению к L^1. Обозначим через W область, ограниченную ломаной L^1. Тогда каждый внутренний элемент L_j^2 канонического разбиения, лежащий вне W, называется *шапочкой*. Если концевая точка, скажем A, ломаной L^2 принадлежит L^1, и соответствующий концевой элемент разбиения лежит вне W, то этот концевой элемент также называется *шапочкой*.

Пусть L_j^2 — некоторая шапочка, и A_j и B_j — концевые вершины L_j^2. Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаных, которые мы обозначим через L' и L''. Рассмотрим области W' и W'', ограниченные парами ломаных (L_j^2, L') и (L_j^2, L'') соответственно. Тогда

одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $W' \subset W''$.

Определение. Внутренность построенной выше "меньшей" области W' называется *шапочкой, соответствующей* L_j^2, или H*-областью*, и обозначается через $H(L_j^2)$. Ломаную L' назовем *основанием шапочки* (как L_j^2, так и $H(L_j^2)$), и обозначим через $b(L_j^2)$.

Ясно, что $\partial H(L_j^2) = L_j^2 \cup b(L_j^2)$.

Ниже нам понадобится частный случай, когда замкнутая ломаная L^1 порождена некоторым уровнем выпуклости конечного множества M точек плоскости. А именно, обозначим t-ый уровень выпуклости множества M через M^t, через σ^t — выпуклую оболочку множества M^t, и через W^t — границу многоугольника σ^t, т.е. $W^t = \partial\sigma^t$. Положим, для удобства, $\sigma = \sigma^1$, и $W = W^1$.

Пусть L^2 — незамкнутая ломаная, содержащаяся в σ. Предположим, что L^2 находится в общем положении по отношению ко всем замкнутым ломаным W^t.

Определение. Шапочка, образованная ломаной L^2 по отношению к W^t называется t*-шапочкой.*

Пусть L_i^2 — некоторая t-шапочка. Предположим, что L_i^2 пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^s$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^{s-1}$ для некоторого s, рис. 4.5. Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i^2 образует s-шапочку, но не образует $(s-1)$-шапочки.

Определение. В только что введенных обозначениях, каждая из s-шапочек, образованных ломаной L_i^2, называется *топом* шапочки L_i^2 или ее *верхушкой.* Число s называется *индексом шапочки* L_i^2.

Замечание. Пусть L_i^2 — некоторая шапочка, и L' — некоторый ее топ. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $H(L') \subset H(L_i^2)$. Тем не менее, следующее предложение имеет место.

Предложение 4.4 *Пусть* L_i^2 *и* L_j^2 *— две* t*-шапочки, и* $H(L_i^2) \subset H(L_j^2)$. *Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда для любого топа* L_i' *меньшей шапочки* L_i^2 *найдется топ* L_j' *большей шапочки* L_j^2, *такой что* $H(L_i') \subset H(L_j')$.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим произвольный топ L_i' меньшей шапочки L_i^2. Так как $L_i' \subset H(L_j^2)$, существует топ L_j' большей шапочки L_j^2, такой что $L_i' \subset H(L_j')$, откуда немедленно следует, что $H(L_i') \subset H(L_j')$, что и требовалось.

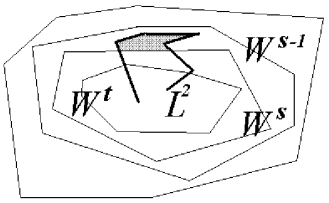


Рис. 4.5: Верхушка t-шапочки индекса s.

В заключение настоящего раздела приведем одну полезную оценку на кручение ломаной L^2, концевые точки A и B которой фиксированы и расположены на замкнутой ломаной L^1, ограничивающей выпуклую область. Как обычно, предположим, что ломаные находятся в общем положении, и обозначим через L' и L'' те ломаные, на которые токи A и B разбивают L^1.

Следствие 4.4 *В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:*

$$|\operatorname{tn} L^2| < 3|\operatorname{ind}(L^2, L') + \operatorname{ind}(L^2, L'')| + 6.$$

Доказательство. Ориентируем ломаные L' и L'' от A к B. В силу предложения 4.3, имеем:

$$\operatorname{tn} L^2 = \operatorname{tn} L' + 6\operatorname{ind}(L^2, L') - \alpha(L^2, L') - \beta(L^2, L'),$$
$$\operatorname{tn} L^2 = \operatorname{tn} L'' + 6\operatorname{ind}(L^2, L'') - \alpha(L^2, L'') - \beta(L^2, L'').$$

Обозначим начальные вектора-звенья ориентированных ломаных L^2, L' и L'' через b, b' и b'' соответственно. Так как ломаные L^2 и L^1 находятся в общем положении, каждый из концевых твистингов $\alpha(L^2, L')$ и $\alpha(L^2, L'')$ по модулю строго меньше чем 3. Обозначим через U вертикальный угол с вершиной в точке A, образованный прямыми, проходящими через b' и b'' и содержащий ограниченную ломаной L^1 выпуклую область σ. Возможны следующие два случая: или звено b лежит во внутренности вертикального угла U, или во внутренности дополнительного вертикального $\overline{U}$, см. рис. 4.6.

В первом случае, очевидно, знаки твистингов $\alpha(L^2, L')$ и $\alpha(L^2, L'')$, различны, и поэтому

$$|\alpha(L^2, L') + \alpha(L^2, L'')| < 3.$$

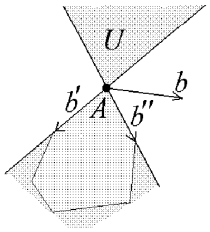


Рис. 4.6: Вертикальный угол U.

Во втором случае, знаки твистингов $\alpha(L^2, L')$ и $\alpha(L^2, L'')$ одинаковы, поэтому их сумма может, вообще говоря, оказаться больше 3. Однако, легко видеть, что модуль одного из твистингов $\alpha(L^2, L')$ и $\alpha(L^2, L'')$ в рассматриваемом случае строго меньше чем модуль твистинга вершины A ломаной L^1. Поэтому

$$|\alpha(L^2, L') + \alpha(L^2, L'')| - |\operatorname{tw} A| < 3,$$

и, таким образом, в любом случае

$$|\alpha(L^2, L') + \alpha(L^2, L'')| < 3 + |\operatorname{tw} A|.$$

Ясно, что аналогичные рассуждения можно провести и для концевых твистингов $\beta(L^2, L')$ и $\beta(L^2, L'')$, для которых имеет место следующее неравенство:

$$|\beta(L^2, L') + \beta(L^2, L'')| < 3 + |\operatorname{tw} B|.$$

Кроме того, так как L^1 ограничивает выпуклую область, и обе ломаные L' и L'' ориентированы от A к B, имеет место следующее неравенство:

$$|\operatorname{tn} L' + \operatorname{tn} L''| + |\operatorname{tw} A| + |\operatorname{tw} B| \leq |\operatorname{tn} L^1| = 6.$$

Теперь, складывая первые два равенства и используя сделанные выше оценки, получаем требуемое. Следствие доказано.

4.2 Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев

В данном разделе мы изучим устройство локально минимальных невырожденных деревьев Штейнера или бинарных деревьев. Напомним,

что невырожденное дерево Штейнера — это след плоской вложенной сети, параметризованной некоторым бинарным деревом. Мы будем изучать невырожденные деревья Штейнера с точностью до планарной эквивалентности. Для краткости, будем называть бинарные деревья 2-*деревьями*, а локально минимальные деревья просто минимальными деревьями.

Пусть Γ — некоторое плоское 2-дерево, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Из общих результатов о локальном устройстве (см. главу 3), вытекает, что сеть Γ минимальна с границей M, если и только если все ребра из Γ — прямолинейные отрезки, стыкующиеся в вершинах степени три под углами в 120°, и все вершины степени 1 из Γ принадлежат множеству M. Заметим, что если $P \in M$ — некоторая вершина степени 3 сети Γ, то Γ также является минимальным 2-деревом с границей $M \setminus \{P\}$. Поэтому можно предполагать без ограничения общности, что мы в дальнейшем и будем делать, что граница минимального 2-дерева состоит из всех его вершин степени 1 и только из них.

4.2.1 Число вращения плоского бинарного дерева

Рассмотрим произвольное плоское 2-дерево Γ, выберем некоторую пару (a, b) его ребер, и пусть γ — единственный путь в Γ, соединяющий эти ребра. Ориентируем путь γ от a к b, и пусть P — произвольная вершина степени 3 дерева Γ, лежащая внутри γ, т.е. не совпадающая ни с одной из его концевых вершин. Выберем хорошую круговую окрестность U вершины P, т.е., напомним, такую окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки P, что ее пересечение с деревом Γ представляет собой звезду с центром в P и вершинами степени 1, лежащими на окружности ∂U. Пересечение $\partial U \cap \Gamma$ состоит из трех точек, которые мы обозначим через A_i, $i = 1, 2, 3$. Пусть a_1 — первое, и a_2 — последнее ребро из γ, инцидентное P, и пусть $A_i \in a_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим дугу δ окружности ∂U, лежащую между A_1 и A_2 и содержащую A_3.

Если движение по дуге δ от A_1 к A_2 происходит по часовой стрелке, то будем говорить, что мы *поворачиваем направо в точке* P, и припишем P число -1. В противном случае, скажем, что мы *поворачиваем налево в точке* P и припишем P число $+1$. Число, приписанное вершине P, называется *твистингом вершины* P *пути* γ. *Числом вращения* $\mathrm{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары* (a, b) ребер 2-дерева Γ называется сумма твистингов во всех внутренних вершинах пути γ. По определению, положим $\mathrm{tw}(a, a) = 0$.

Определение. *Числом вращения* $\mathrm{tw}\,\Gamma$ *бинарного дерева* Γ называется

максимум чисел вращения $\mathrm{tw}(a,b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер Γ.

Легко проверить, что число вращения обладает следующими свойствами.

Утверждение 4.2 *Пусть* Γ — *произвольное плоское бинарное дерево.*

- $\mathrm{tw}(a,b) = -\mathrm{tw}(b,a)$ *для любых ребер* a *и* b *дерева* Γ (*косая симметрия*);
- $\mathrm{tw}(a,b)+\mathrm{tw}(b,c) = \mathrm{tw}(a,c)$ *для любых ребер* a, b *и* c *из* Γ *лежащих на одном пути в дереве* Γ (*аддитивность вдоль путей*);
- *если* $\mathrm{tw}\,\Gamma = \mathrm{tw}(a,b)$, *то ребра* a *и* b *инцидентны вершинам степени* 1.

Доказательство. Первые два пункта очевидны. Для доказательства последнего утверждения, предположим противное, и пусть, для определенности, ребро b не инцидентно вершине степени 1. Тогда оно инцидентно вершинам степени 3. Обозначим через B последнюю вершину пути $\gamma(a,b)$, а через c' и c'' — ребра из Γ, инцидентные B и не лежащие в $\gamma(a,b)$. Рассмотрим пути γ' и γ'', полученные из γ добавлением к пути γ ребра c' и c'' соответственно. Тогда, в силу второго пункта, $\mathrm{tw}(a,c') = \mathrm{tw}(a,b) + \mathrm{tw}(b,c')$, а $\mathrm{tw}(a,c'') = \mathrm{tw}(a,b) + \mathrm{tw}(b,c'')$. Кроме того, ясно что $\mathrm{tw}(b,c') = -\mathrm{tw}(b,c'')$. Поэтому или $\mathrm{tw}(a,c')$, или $\mathrm{tw}(a,c'')$ больше чем $\mathrm{tw}(a,b)$, что противоречит выбору ребер a и b. Доказательство закончено.

Непосредственно из определения числа вращения вытекает следующий факт.

Утверждение 4.3 *Если* Γ_0 *и* Γ_1 — *два планарно эквивалентных бинарных дерева, то* $\mathrm{tw}\,\Gamma_0 = \mathrm{tw}\,\Gamma_1$.

Доказательство. Действительно, планарная эквивалентность сетей Штейнера Γ_0 и Γ_1 означает, что существует непрерывная деформация Γ_t, $t \in [0,1]$, сети Γ_0 в сеть Γ_1 в классе вложенных сетей. Пусть γ_0 — произвольный путь в Γ_0. Деформация Γ_t порождает деформацию γ_t кусочно гладкой вложенной кривой γ_0 в классе вложенных кривых. Ясно, что деформация Γ_t может быть продолжена на малые хорошие окрестности всех вершин степени три сетей Γ_t, поэтому, очевидно, твистинги вершин пути γ_t не зависят от параметра деформации t, что и означает постоянность числа вращения для любой пары ребер из Γ_t. Доказательство закончено.

Число вращения между ребрами минимального бинарного дерева имеет прозрачный геометрический смысл.

Утверждение 4.4 *Пусть* Γ *— минимальное бинарное дерево, и* a *и* b *— произвольные его ребра. Обозначим через* γ *единственный путь в дереве, начинающийся на* a *и заканчивающийся на* b*. Тогда число вращения* $\mathrm{tw}(a,b)$ *между* a *и* b *равно кручению* $\mathrm{tn}\,\gamma$ *ориентированной от* a *к* b *ломаной* γ*.*

Доказательство. Это немедленно вытекает из определений и того факта, что ребра минимального 2-дерева стыкуются под углами в 120°.

4.2.2 Свойства минимальных 2-деревьев

В настоящем пункте мы приведем несколько важных для дальнейшего свойств плоских минимальных 2-деревьев.

Пусть Γ — плоское минимальное 2-дерево с границей M, и пусть γ — некоторый ориентированный путь в нем.

Определение. Путь γ называется *сетевой геодезической* на Γ, если твистинги любых двух его соседних внутренних вершин имеют противоположные знаки.

Пусть P — произвольная вершина минимального 2-дерева Γ, и e — некоторое ребро из Γ, инцидентное P. Рассмотрим максимальные сетевые геодезические, начинающиеся в P и содержащие e (таких существует не более чем две). Каждая такая сетевая геодезическая называется *сетевым геодезическим лучом с началом в* P*, выпущенным в направлении* e. Ясно, что концевая вершина сетевого геодезического луча, отличная от P, является граничной вершиной дерева Γ.

Рассмотрим на плоскости угол α величиной 120° с вершиной в точке P и такой, что его биссектриса содержит ребро e. Внутренность угла α, к которой добавлена точка P, называется *характеристическим клином пары* (P,e) и обозначается через $\mathrm{Wdg}(P,e)$. Следующее предложение немедленно следует из определений.

Предложение 4.5 *Пусть* P *— вершина минимального* 2*-дерева* Γ*, и* e *— инцидентное ей ребро. Тогда каждый сетевой геодезический луч, выпущенный из* P *в направлении* e*, содержится в характеристическом клине* $\mathrm{Wdg}(P,e)$*. В частности, каждый характеристический клин содержит граничную вершину дерева* Γ*.*

Следующее предложение также будет нам полезно.

Предложение 4.6 *Пусть* Γ — *минимальное* 2*-дерево, затягивающее конечное множество* M *точек плоскости,* L — *некоторый путь в* Γ, *и* σ — *некоторый выпуклый многоугольник, ограниченный ломаной* L', *находящейся с* L *в общем положении. Рассмотрим каноническое разбиение* $L = \cup L_j$ *ломаной* L *относительно* L', *и пусть* L_i — *некоторая шапочка, образованная* L *по отношению к* L'. *Тогда, если соответствующая* H*-область* $H(L_i)$ *содержит точку пути* L, *то* $H(L_i)$ *содержит также и точку из граничного множества* M.

Доказательство. Пусть некоторая точка $P \in L$ принадлежит $H(L_i)$. Если P не является вершиной сети Γ, то рассмотрим ребро e из Γ, которому она принадлежит. Так как σ — выпуклый многоугольник, и $P \notin \sigma$, одна из вершин сети Γ, инцидентных e, так же не лежит в σ. Но ребро e не может пересекать L_i, так как иначе дерево Γ содержало бы цикл, поэтому эта вершина лежит в $H(L_i)$. Таким образом, не ограничивая общности, мы сразу можем предполагать, что P — вершина сети Γ. Если $P \in M$, то предложение имеет место. Пусть теперь P — некоторая внутренняя вершина дерева Γ, т.е. его точка Штейнера, и e_i, $i = 1, 2, 3$ — ребра дерева Γ, инцидентные P.

Рассмотрим характеристические клинья, порожденные P. В силу выпуклости многоугольника σ, существует две возможности: или один из клиньев не пересекает многоугольник σ, или все клинья пересекают σ, но один из ограничивающих их лучей не пересекает σ (а два других — пересекают).

Рассмотрим первый случай, и пусть, скажем, клин $\mathrm{Wdg}(P, e_1)$ не пересекает σ. Тогда, в силу предложения 4.5, сетевые геодезические лучи, выпущенные из P в направлении e_1, содержатся в $\mathrm{Wdg}(P, e_1)$ и, поэтому, также не пересекают σ. Поскольку эти лучи начинаются внутри области $H(L_i)$, граница которой состоит из L_i и части границы многоугольника, и эти лучи не пересекают σ и не могут пересекать L_i, они заканчиваются внутри области $H(L_i)$, которая поэтому содержит граничные точки. В первом случае предложение доказано.

Рассмотрим второй случай, и пусть r_1 и r_2 — лучи ограничивающие один из характеристических клиньев точки P и пересекающие σ. Рассмотрим ребро сети инцидентное P и параллельное r_1, и пусть, для определенности, это ребро e_1. Тогда, в силу выпуклости σ, ребро e_1 не пересекает σ (будучи ориентированным от точки P, ребро e_1 противонаправлено лучу r_1), и, рассуждая как и выше, можно заключить, что отличная от P инцидентная e_1 вершина из Γ также лежит внутри $H(L_i)$. Если это граничная вершина, то все доказано. Если это точка Штейнера, то один из ее характеристических клиньев порожден лучами, противонаправленными лучам r_1 и r_2. Поэтому этот клин не

пересекает σ в силу выпуклости последнего, и мы находимся вновь в условиях рассмотренного выше первого случая. Предложение доказано.

Следствие 4.5 *Пусть* Γ — *минимальное* 2*-дерево, затягивающее множество* M*, и пусть* L — *некоторый путь в* Γ*. Предположим, что* L *находится в общем положении по отношению к границам всех уровней выпуклости множества* M*. Пусть* L' *некоторая шапочка пути* L*, и* $\hat{L}'$ — *некоторая верхушка шапочки* L'*. Тогда*

$$H(\hat{L}') \cap L = \emptyset.$$

Доказательство. По определению, верхушка $H(\hat{L}')$ шапочки L' не может содержать точек из M. Поэтому утверждение следствия вытекает из предложения 4.6.

Следствие 4.6 *Пусть* Γ — *минимальное* 2*-дерево, затягивающее множество* M*, и пусть* L — *некоторый путь в* Γ*. Предположим, что* L *находится в общем положении по отношению к границам всех уровней выпуклости множества* M*. Тогда, если* L *образует две шапочки* L' *и* L''*, такие что* $H(L') \subset H(L'')$*, то эти шапочки имеют разные индексы. В частности, если* $L_1, \ldots, L_m$ — *шапочки, образованные путем* L*, такие что*

$$H(L_1) \subset \cdots \subset H(L_m),$$

и L_1 *является* l*-шапочкой, то* $m < l$*.*

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение следствия, мы предположим противное, а именно, пусть индексы L' и L'' равны между собой. Пусть $\hat{L}'$ — некоторая верхушка L'. Тогда, в силу предложения 4.4, существует такая верхушка $\hat{L}''$, что $H(\hat{L}') \subset H(\hat{L}'')$, и, в частности, $\hat{L}' \subset H(\hat{L}'')$. Последнее противоречит следствию 4.5.

Второе утверждение следствия немедленно вытекает из первого. Действительно, индекс шапочки L_1 не больше чем t, индексы шапочек L_i убывают, поэтому индекс последней шапочки — L_m, не больше чем $\operatorname{ind} L_1 - (m-1)$, и, в итоге,

$$\operatorname{ind} L_m \leq \operatorname{ind} L_1 - (m-1) \leq t - m + 1.$$

Осталось заметить, что индекс любой шапочки строго больше 1, поэтому $1 < t - m + 1$. Доказательство закончено.

4.2.3 Алгоритм Мелзака

В данном разделе мы обсудим хорошо известный алгоритм Мелзака [64], позволяющий строить плоские локально минимальные 2-деревья данной топологии с данной границей. Более формально, пусть G — произвольное топологическое бинарное дерево, M_G — некоторое подмножество вершин из G, содержащее все его вершины степени 1, и пусть $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное граничное отображение, $\beta(M_G) = M$. Алгоритм Мелзака позволяет ответить на следующий вопрос: существует ли погруженная локально минимальная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, или, как говорят, существует ли у G *минимальная реализация с границей* β.

Замечание. На самом деле алгоритм Мелзака работает и для произвольных деревьев Штейнера, не обязательно невырожденных. Для этого достаточно разбить произвольное дерево Штейнера в объединение бинарных деревьев — *невырожденных компонент*, и, если для каждой невырожденной компоненты существует бинарное минимальное дерево с соответствующей границей, то проверить под какими углами стыкуются невырожденные компоненты в вершинах степени два.

Напомним алгоритм Мелзака. Прежде всего, можно предполагать без ограничения общности, что M_G совпадает со множеством всех вершин степени 1 бинарного дерева G. Действительно, как известно [35, 55], если 2-дерево G имеет минимальную реализацию с границей β, то эта реализация единственна. Поэтому, если какие-то вершины степени 3 попали во множество M_G, то следует сначала рассмотреть ограничение β_1 граничного отображения β на множество всех вершин степени 1 бинарного дерева G, проверить, существует ли минимальная реализация Γ_1 дерева G с границей β_1, и если да, то проверить, совпадает ли ограничение отображения Γ_1 на M_G с заданным отображением β. Итак, мы предполагаем, что M_G совпадает с множеством всех вершин из G степени 1.

Если G имеет ровно одно ребро, то, очевидно, минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда образы граничных вершин этого дерева различны (напомним, что мы ищем погруженную минимальную сеть). Пусть теперь G состоит более чем из одного ребра.

Определение. Два смежных ребра произвольного 2-дерева G образуют *усы*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

Лемма 4.7 *Если 2-дерево G состоит из трех ребер, то каждая пара его ребер образует усы. Если же G имеет более трех ребер, то оно содержит, по крайней мере, двое непересекающихся усов.*

Доказательство. Первое утверждение леммы 4.7 очевидно. Доказательство второго утверждения проведем по индукции. Отметим сначала, что количество ребер в произвольном 2-дереве нечетно. Предположим, что для всех 2-деревьев с числом ребер, меньшим $2n+1$ и большим 3, утверждение имеет место. Рассмотрим произвольное дерево G, состоящее из $2n+1$ ребер. Пусть e — произвольное ребро из G, не инцидентное вершинам степени 1. Разрезав G по ребру e, мы получим два 2-дерева, G' и G'', каждое из которых состоит более чем из одного ребра. По предположению индукции и по первому утверждению настоящей леммы, каждое из G' и G'' имеет усы, не содержащие ребра e. Доказательство закончено.

Итак, по лемме 4.7, дерево G имеет некоторые усы (e, e'). Пусть v и v' — вершины степени 1, инцидентные ребрам e и e' соответственно, а s — вершина степени 3, инцидентная одновременно ребрам e и e'. Обозначим через e'' третье ребро, инцидентное вершине s, а через w — отличную от s вершину, инцидентную ребру e''.

Если образы $A = \beta(v)$ и $A' = \beta(v')$ вершин v и v' при отображении β совпадают, то минимальной реализации не существует. В противном случае, построим правильный треугольник $AA'B$ одним из двух возможных способов.

Перестроим дерево G в дерево G', отрезав от G усы. Определи граничное отображение β' на множестве $M_{G'}$ всех вершин из G' степени 1, положив его равным β везде, кроме s, и определив $\beta'(s)$ равным B.

Следующая лемма вытекает из элементарных планиметрических построений.

Лемма 4.8 *Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с границей β, то для одного из двух правильных треугольников $AA'B$ дерево G' имеет минимальную реализацию Γ' с границей β'. Минимальные сети Γ и Γ' совпадают на $G' \setminus e''$. При этом, луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ содержится внутри угла ABA' и содержит точку $\Gamma(s)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности S^1, описанной вокруг треугольника ABA'. В частности, точка $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1.*

Обратно, если существует минимальная реализация Γ' дерева G' с границей β', и выполняются следующие условия:

- *луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w)$ содержится внутри угла ABA', и*

- *точка* $\Gamma'(w)$ *лежит вне круга, ограниченного окружностью* S^1, *которая описана вокруг правильного треугольника* ABA',

то существует минимальная реализация Γ *дерева* G *с границей* β, *которая получается из* Γ' *так. Обозначим через* C *точку пересечения интервала* $(\Gamma'(s), \Gamma'(w))$ *с окружностью* S^1. *На всех ребрах из* G, *отличных от* e, e' *и* e'', *отображение* Γ *определим равным отображению* Γ'. *На ребрах* e, e' *и* e'' *определим его так, чтобы эти ребра переходили соответственно в отрезки* $[C, A]$, $[C, A']$ *и* $[C, \Gamma'(w)]$ *соответственно. При этом, конечно же,* $\Gamma(s) = C$.

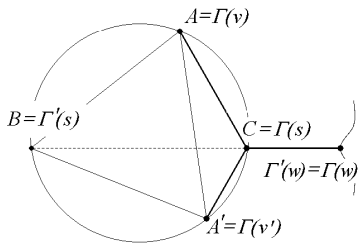


Рис. 4.7: Иллюстрация идеи алгоритма Мелзака.

Итерируя описанный только что процесс перестройки дерева G и граничного отображения β в дерево G' и граничное отображение β' до тех пор, пока в результирующем дереве останется ровно одно ребро, мы реализуем *прямой ход алгоритма Мелзака.* Каждая итерация называется *шагом прямого хода алгоритма Мелзака.* Ясно, что если прямой ход состоит из n шагов, то существует 2^n реализаций прямого хода, в зависимости от выбора правильного треугольника ABA' на каждом шаге.

Для завершения алгоритма Мелзака, необходимо выполнить так называемый *обратный ход.* На первом шаге обратного хода мы проверяем, не совпали ли образы граничных вершин результирующего дерева, состоящего из одного ребра. Если нет, то строим минимальную реализацию этого дерева, отображая единственное его ребро в отрезок, соединяющий образы граничных вершин при результирующем граничном отображении. После этого, начинаем последовательно строить минимальные реализации деревьев, полученных на прямом ходе. Соответствующие построения мы уже описали в лемме 4.8. Если на одном из шагов обратного хода нарушаются условия леммы 4.8, то переходим к испытанию следующей из 2^n реализаций прямого хода. Таким образом, или при проверке очередной реализации прямого хода

обратный ход алгоритма Мелзака приведет к построению искомой минимальной реализации, или будут проверены все 2^n вариантов и сделан вывод о том, что данное дерево G не имеет минимальной реализации с граничным отображением β.

Как мы уже отмечали, к успешному завершению прямого хода алгоритма Мелзака может привести не более одной реализации прямого хода. Алгоритм Мелзака, не умея отсеивать "неперспективные" последовательности, тратит много времени на работу с ними. Однако, оказывается, можно заранее понять, как устроена та единственная последовательность треугольников ABA', которая может привести к успешному завершению алгоритма Мелзака. Эту задачу решает алгоритм, предложенный Хвангом в [35].

4.2.4 Алгоритм Хванга

Изложенная здесь конструкция предложена Хвангом, см. [35].

Пусть G — 2-дерево с границей $\beta\colon M_G \to M \subset \mathbb{R}^2$, заданной на множестве M_G всех вершин из G степени 1. Начнем с рассмотрения случаев, когда дерево G содержит мало ребер.

Если G состоит ровно из одного ребра, то все очевидно, так как треугольники ABA' строить не надо.

Если G имеет три ребра, т.е. M_G состоит из трех вершин, то имеются следующие возможности: или все точки из $M = \beta(M_G)$ лежат на одной прямой (тогда, очевидно, минимальной реализации не существует), или точки из M образуют невырожденный треугольник. В последнем случае один из двух треугольников ABA' из прямого хода алгоритма Мелзака пересекается с внутренностью выпуклой оболочки $\operatorname{conv} M$ множества M, а другой — нет. Легко видеть, что тот ABA', который пересекает внутренность $\operatorname{conv} M$, никогда не приводит к положительному результату, т.е. к минимальной сети. Поэтому в этом случае однозначно определено "правильное" расположение треугольников ABA'.

Пусть теперь G состоит из пяти ребер, т.е. множество M_G содержит четыре вершины. Обозначим через (e, e') и (f, f') — имеющиеся две пары усов. Пусть E, E', F и F' — β-образы граничных вершин, инцидентных соответственно e, e', f и f'. Очевидно, если какие-либо из этих четырех точек совпадают, то искомую минимальную сеть построить нельзя. Пусть теперь все эти точки различны. Обозначим через ℓ_e и ℓ_f прямые, проходящие соответственно через E, E', и F, F'. Из элементарных планиметрических соображений вытекает, что если дерево G имеет минимальную реализацию с границей β, то точки E и E' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно

прямой ℓ_f, а также точки F и F' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e. Более того, если вершина B треугольника EBE', который строится на вершинах E и E', лежит в той же полуплоскости относительно ℓ_e, что и точки F и F', то это не приводит к минимальной реализации дерева G. Аналогичные рассуждения имеют место и для треугольника FCF' на вершинах F и F'. Таким образом, и в этом случае однозначно определено правильное расположение треугольников EBE' и FCF'.

Предположим теперь, что дерево G состоит более чем из 5 ребер, т.е. его граница состоит более чем из четырех вершин. Напомним, что по лемме 4.7, в дереве G имеется, по крайней мере, двое непересекающихся усов. Нам будут полезны следующие определения.

Пусть (e, e') и (f, f') — пара непересекающихся усов в дереве G. Обозначим через s_e и s_f общие вершины соответственно для первых и для вторых усов. Мы скажем, что эти двое усов *смежны*, если существует вершина s, смежная одновременно с s_e и s_f. Далее, пусть (e, e') — усы, и s_e — вершина, общая для ребер из этих усов. Пусть f — ребро, соединяющее некоторую вершину степени 1 с некоторой вершиной s_f. Мы скажем, что усы (e, e') и ребро f *смежны*, если вершины s_e и s_f соединены ребром. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.9 *Пусть G — произвольное 2-дерево, содержащее более 5 ребер. Тогда в G или существует пара смежных усов, или имеются усы, смежные ребру, инцидентному вершине степени 1.*

Доказательство. Отрежем от дерева G все усы. Так как G имеет более четырех граничных вершин, то полученное 2-дерево G' будет, очевидно, содержать более одного ребра. По лемме 4.7, 2-дерево G' обладает некоторыми усами, скажем (e, e'). Однако эти усы не могут быть усами дерева G, иначе они должны были быть отрезанными. Поэтому к усам (e, e') крепятся или одни усы дерева G, или двое усов из G. В первом случае мы получаем усы, смежные с граничным ребром, а во втором случае — пару смежных усов. Доказательство закончено.

Итак, рассмотрим два случая. Пусть сначала в дереве G существует пара смежных усов (e, e') и (f, f'). Обозначим через E, E', F и F' β-образы граничных вершин из G, инцидентных e, e', f и f' соответственно. Пусть ℓ_e и ℓ_f — прямые, проходящие соответственно через E, E' и F, F'.

Лемма 4.10 *Если существует минимальная реализация дерева G, то или точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f, или точки F и F' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e.*

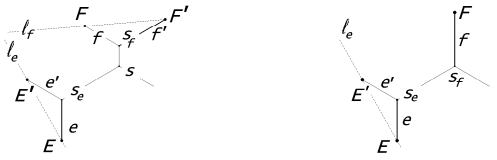


Рис. 4.8: Алгоритм Хванга.

Доказательство. Действительно, утверждение леммы равносильно тому, что отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$ не пересекаются. Последнее очевидно из элементарных планиметрических соображений, см. рис. 4.8.

Следующая лемма также элементарна.

Лемма 4.11 *Пусть точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f. Тогда если вершина B треугольника ABA', построенного на точках F и F', лежит в той же полуплоскости, что и точки E и E', то эта реализация прямого хода алгоритма Мелзака не приводит к построению минимальной сети.*

Перейдем теперь ко второму случаю, а именно, когда в дереве G имеются некоторые усы (e, e'), смежные с некоторым ребром f, инцидентным вершине степени 1. Обозначим через E, E' и F соответственно β-образы граничных вершин, инцидентных ребрам e, e' и f. Обозначим через ℓ_e прямую, проходящую через E и E'. Легко видеть, что имеет место следующий результат.

Лемма 4.12 *Если существует минимальная реализация дерева G, то точка F не лежит на прямой ℓ_e. Более того, при правильном выборе треугольника ABA', построенного на точках E и E', вершина B и точка F должны лежать в разных открытых полуплоскостях относительно прямой ℓ_e.*

Итак, правильный выбор треугольников ABA' на i-ом шаге прямого хода алгоритма Мелзака в случае, когда текущее дерево G_i состоит более чем из 5 ребер, заключается в следующем.

Если имеются усы (e, e'), смежные с граничным ребром f, то сначала проверяем, различны ли β-образы граничных вершин, инцидентных e, e' и f (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не

лежит ли β-образ F граничной вершины, инцидентной f, на прямой ℓ_e, проведенной через β-образы граничных вершин, инцидентных усам (e, e'). Если лежит, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе располагаем вершину B так, чтобы она была отделена прямой ℓ_e от F.

Если не существует усов, смежных с граничным ребром, то обязана существовать пара смежных усов, скажем (e, e') и (f, f'). Если E, E', F, F' — образы граничных вершин ребер e, e', f, f' соответственно, то проверяем, различны ли точки E, E', F и F' (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не пересекаются ли отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$. Если пересекаются, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе выбираем ту пару точек из (E, E') и (F, F'), которая лежит в одной открытой полуплоскости относительно прямой, проведенной через другую из пар этих точек. Пусть, например, точки E и E' лежат с одной стороны относительно прямой ℓ_f, проведенной через F и F'. Построим треугольник ABA' на вершинах F и F' так, чтобы его вершина B была отделена прямой ℓ_f от точек E и E'.

4.2.5 Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга

Итак, мы выяснили, что, исходя из геометрии множества $M = \beta(M_G)$ и топологии дерева G можно однозначно определить правильный выбор треугольника ABA' на каждом шаге прямого хода алгоритма Мелзака. В дальнейшем, говоря об алгоритме Мелзака, мы всегда будем предполагать, что все треугольники ABA' выбираются именно так. Конечно, мы не гарантированы, что в результате обратного хода будет построена минимальная реализация дерева G, так как ее, вообще говоря, может и не существовать. Однако, если на каждом шаге обратного хода выполняются условия леммы 4.8, то такая реализация существует. Более того, из алгоритма Хванга–Мелзака вытекает следующая теорема единственности, полученная Хвангом [35], см. также обобщение этого результата в главе 5.

Предложение 4.7 *Для каждого дерева Штейнера G и граничного отображения $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ существует не более одной минимальной реализации.*

Приведем еще одно полезное следствие из рассмотренных алгоритмов. Как было отмечено выше, для успешного завершения обратного хода алгоритма Мелзака необходимо и достаточно выполнение на каждом шаге условий леммы 4.8. Легко видеть, что если существует минимальная реализация 2-дерева G с граничным отображением β, то при малом шевелении границы, т.е. при малом изменении граничного

отображения β, условия леммы 4.8 по-прежнему выполняются. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее определение.

Пусть G — произвольное бинарное дерево, и M_G — некоторое подмножество множества его вершин. Введем на множестве всех отображений $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ метрику ρ следующим образом. Если β и β' — два таких отображения, то положим

$$\rho(\beta, \beta') = \max_{v \in M_G} |\beta(v), \beta'(v)|.$$

Предложение 4.8 *Предположим, что 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ для некоторого граничного отображения β, заданного на множестве M_G всех вершин из G степени 1. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого граничного отображения β', $\rho(\beta, \beta') < \varepsilon$, дерево G также имеет минимальную реализацию с граничным отображением β'. Иными словами, минимальные 2-деревья устойчивы при малых вариациях границы.*

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех граничных отображений β' дерева G, таких что $\rho(\beta', \beta) < \delta$, существуют минимальные реализации Γ' дерева G с границами β', и расстояние между образами $\Gamma(v)$ и $\Gamma'(v)$ произвольной вершины $v \in G$ при отображениях Γ и Γ' меньше ε. Иными словами, минимальная реализация дерева G непрерывно зависит от граничного отображения этого дерева.

Замечание. Предложение 4.8 не может быть обобщено на произвольные деревья Штейнера в силу того, что при малом шевелении граничного отображения угол между ребрами невырожденных компонент, стыкующихся в некоторой вершине степени 2, может стать меньше 120° (если, конечно, до этого он был в точности равен 120°).

Напомним, что результатом прямого хода алгоритма Мелзака является пара точек. В качестве первого шага обратного хода мы строим отрезок, соединяющий полученные точки. Этот отрезок называется *линией Симпсона*. Отметим, что, в силу произвольности выбора усов на каждом шаге прямого хода, мы, вообще говоря, можем построить много разных линий Симпсона. На самом деле, существует естественное взаимно однозначное соответствие между линиями Симпсона и ребрами 2-дерева G. Действительно, в процессе прямого хода мы перестраиваем дерево G, отрезая от него выбранные усы. На последнем шаге прямого хода от дерева G остается ровно одно ребро, которое и надо поставить в соответствие полученной линии Симпсона. Несложно

показать, что каждому ребру дерева G соответствует некоторая линия Симпсона. Более того, имеет место следующее утверждение [64].

Утверждение 4.5 *Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с граничным отображением β, то длина любой линии Симпсона сети Γ равна длине этой сети.*

Мы используем полученные следствия для доказательства следующего важного для нас результата об общем положении.

4.2.6 Теорема об общем положении

Пусть Γ — минимальное 2-дерево, затягивающее конечное множество M точек плоскости.

Определение. Будем говорить, что Γ *находится в общем положении*, если каждое его ребро e находится в общем положении с каждым отрезком $[m_i m_j]$, соединяющим любую пару вершин m_1, m_2 из M. Последнее означает, что ребро e может пересекаться с отрезком $[m_i m_j]$ лишь по одной точке, которая или является внутренней как для e, так и для $[m_i m_j]$, или принадлежит M.

Предложение 4.9 *Для любого минимального 2-дерева, затягивающего конечное множество M точек плоскости, состоящее по крайней мере из трех точек, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует деформация множества M в некоторое множество M', такая что:*

- *расстояние между каждой смещенной вершиной $m' \in M'$ и ее начальным положением $m \in M$ не превосходит ε;*
- *разбиение множества M на уровни выпуклости сохраняется при этой деформации;*
- *эта деформация может быть продолжена до деформации минимального 2-дерева Γ в классе минимальных 2-деревьев в некоторое минимальное 2-дерево Γ', топология которого совпадает, конечно, с топологией исходного дерева Γ;*
- *полученное дерево Γ' находится в общем положении.*

Доказательство. Тот факт, что любая достаточно малая деформация граничного множества M может быть продолжена до деформации затягивающего это множество минимального 2-дерева Γ в классе минимальных 2-деревьев и поэтому, очевидно, без изменения топологии

дерева Γ, вытекает из предложения 4.8. Ясно также, что среди таких деформаций существует деформация, сохраняющая разбиение множества M на уровни выпуклости, и такая что в продеформированном множестве M, которое мы снова обозначим через M, все уровни выпуклости представляют собой многоугольники с углами меньшими чем π. Заметим, что любые достаточно малые деформации не меняют разбиение на уровни выпуклости такого перестроенного множества M.

Таким образом, осталось показать, что существуют сколь угодно малые деформации граничного множества M, переводящие сеть Γ в сеть общего положения. Начнем с того, что с помощью малой деформации преобразуем множество M в такое множество, которое мы снова обозначим через M, что угол между любой парой отрезков, соединяющих точки из M, не кратен $\pi/3$. Для так перестроенного множества M лишь один из отрезков, соединяющих точки из M, может оказаться параллельным ребру затягивающей M перестроенной минимальной сети, которую мы снова обозначаем через Γ.

Предположим, что такой отрезок существует, и обозначим его через a. Так как множество M состоит по крайней мере из трех точек, существует точка $P \in M$, не являющаяся концевой точкой отрезка a. Напомним, что направление любой линии Симпсона минимального 2-дерева Γ совпадает с точностью до $\pi/3$ с направлениями ребер Γ и может быть записано в виде:

$$\sum_{P_j \in M, P_j \neq P} P_j \exp(\sqrt{-1}k_j\pi/3) + P\exp(\sqrt{-1}k\pi/3),$$

где k_j и k — некоторые целые числа. (Здесь мы рассматриваем точки P и P_j из M как соответствующие комплексные числа).

Поскольку умножение на $\exp(\sqrt{-1}k\pi/3)$ задает изоморфизм плоскости, ясно, что существует изменяющее направление линии Симпсона смещение точки P, причем сколь угодно малое. Отрезок a при этом не изменяется. Таким образом, существует деформация множества M, такая, что направления всех отрезков, соединяющих точки из перестроенного M, отличны от направлений ребер перестроенной сети Γ. Снова будем обозначать перестроенное множество и сеть теми же буквами.

Наконец, предположим, что некоторая точка Штейнера P сети Γ попала на отрезок a, соединяющий некоторые точки из M. Нам остается показать, что малыми деформациями можно "снять" точку Штейнера P с отрезка a. Если таких точек несколько, то мы будем их "снимать" последовательно.

Итак, пусть $P \in a$, и обозначим через e одно из ребер сети Γ, инцидентное P. Разрежем сеть Γ по ребру e. Мы получим две сети Γ'

и Γ''. Множество M, в свою очередь, так же распадется на две компоненты: множества M' и M'', инцидентные Γ' и G'' соответственно. Для определенности, предположим, что M' содержит точку, не являющуюся концевой вершиной отрезка a.

Напомним, что для каждого ребра сети Γ найдется линия Симпсона, содержащая это ребро. Пусть L — линия Симпсона, содержащая ребро e. Напомним, что пользуясь алгоритмом Мелзака можно построить по точкам множества M'' такой правильный треугольник T с одной отмеченной вершиной B; и, пользуясь точками множества M', — такую точку R, что

- отрезок BR совпадает с линией Симпсона L;
- вершина P совпадает с точкой пересечения линии Симпсона L с описанной вокруг треугольника T окружностью S^1.

Принимая во внимание, что

- расположение вершин треугольника T определяется только точками из M'';
- направление линии Симпсона L можно изменить малым шевелением любой точки из M', в частности, той точки из M', которая не является концевой точкой отрезка a;
- в результате деформации, порожденной шевелением этой точки из M' отрезок a и окружность S^1 не изменяются, а линия Симпсона L меняет свое направление при неподвижной концевой точке B;

можно построить малую деформацию, в результате которой вершина P перестает принадлежать отрезку a. Доказательство теоремы закончено.

4.2.7 Теорема о связи числа вращения плоского минимального бинарного дерева и количества уровней выпуклости его граничного множества

Основным результатом данного раздела является следующий важный результат.

Предложение 4.10 *Если плоское минимальное* 2*-дерево* Γ *затягивает конечное подмножество* M *точек плоскости, имеющее* k *уровней выпуклости, то число вращения* $\operatorname{tw}\Gamma$ *дерева* Γ *не превосходит* $12(k-1)+$

5. *Эта оценка является точной в следующем смысле: для любого целого* $k \geq 1$ *существует минимальное* 2*-дерево* Γ, $\operatorname{tw}\Gamma = 12(k-1)+5$, *граница которого имеет ровно* k *уровней выпуклости.*

Замечание. Отметим, что предложение 4.10 существенно ограничивает возможные топологии минимальных 2-деревьев, если число уровней выпуклости граничного множества M, состоящего из n точек, невелико по сравнению с максимально возможным числом уровней выпуклости у множеств, имеющих n точек. В самом деле, ясно, что множество, состоящее из n точек, имеет не более $[(n+2)/3]$ уровней выпуклости, а число вращения плоского 2-дерева с n граничными вершинами не превосходит $n-2$. Поэтому, предложение 4.10 дает нетривиальную оценку если только $12(k-1)+5 < n-2$, т.е. $k < (n+5)/12$.

Таким образом, предложение 4.10 можно уточнить следующим образом.

Теорема 5 *Если плоское минимальное* 2*-дерево* Γ *затягивает конечное подмножество* M *точек плоскости, состоящее из* n *элементов и имеющее* k *уровней выпуклости, то число вращения* $\operatorname{tw}\Gamma$ *дерева* Γ *не превосходит* $\min(n-2, 12(k-1)+5)$. *Эта оценка является точной в следующем смысле: для любого* n *и* $1 \leq k \leq [(n+2)/3]$, *существует минимальное* 2*-дерево* Γ *с границей* M, *состоящей из* n *точек и имеющей* k *уровней выпуклости, причем*

- *если* $k < (n+5)/12$, *то* $\operatorname{tw}\Gamma = 12(k-1)+5$,
- *если же* $(n+5)/12 \leq k \leq [(n+2)/3]$, *то* $\operatorname{tw}\Gamma = n-2$.

Эта теорема обобщает следующий результат автора и А. А. Тужилин [42, 43, 45, 46] относительно числа вращения минимальных 2-деревьев с выпуклой границей (т.е. $k=1$).

Следствие 4.7 *Число вращения плоского минимального бинарного дерева с выпуклой границей не превосходит* 5.

Замечание. В случае выпуклых границ автором и А. А. Тужилиным была доказана и обратная теорема [42, 43, 45, 46], а именно: *если число вращения плоского* 2*-дерева* Γ *не превосходит* 5, *то существует планарно эквивалентное ему минимальное* 2*-дерево с выпуклой границей.* Конструктивное доказательство этого факта, полученное в [43, 45, 46], существенно опирается на полное описание всех плоских бинарных деревьев с числом вращения не превосходящим 5, см. там же, а также Введение. Оказалось, что множество всех таких бинарных деревьев

допускает конечное, в некотором смысле, описание на языке триангуляций специального вида. Уже в случае бинарных деревьев с числом вращения 6 такой конечности нет, что существенно усложняет ситуацию. К сожалению, автору неизвестно, справедлива ли аналогичная обратная теорема в рассматриваемом здесь общем случае.

Замечание. Ниже мы докажем общую теорему о связи числа уровней выпуклости геометрической границы плоского линейного дерева и числа вращения этого дерева, см. теорему 6. Предложение 4.10 может быть получено как следствие из этой теоремы. Однако мы приведем здесь независимое доказательство предложения 4.10 из [38], чтобы разработать необходимую для доказательства теоремы 6 технику.

Пусть a и b — некоторые ребра из Γ, такие что $\operatorname{tw}\Gamma = \operatorname{tw}(a,b)$. Напомним, что в этом случае ребра a и b — граничные. Обозначим через L единственный путь в Γ, соединяющий a и b, и ориентируем L от a к b. Тогда $\operatorname{tn} L = \operatorname{tw}\Gamma$. Обозначим через A и B концевые вершины L, инцидентные a и b соответственно. Ясно, что обе точки A и B принадлежат M.

Пусть M^t — t-ый уровень выпуклости множества M. Предположим, что $A \in M^p$, $B \in M^q$, и пусть $p \le q$.

Обозначим через σ^t выпуклую оболочку множества M^t, и через W^t — границу множества σ^t: $\partial\sigma^t = W^t$. Для краткости положим $\sigma = \sigma^1$, и $W = W^1$.

Пусть $S^t = \sigma^t \setminus \sigma^{t+1}$. Если множество σ^{t+1} не пусто, то множество S^t два-связно (т.е. гомотопно окружности), и ограничено W^t и W^{t+1}, причем $W^t \subset S^t$, а $W^{t+1} \cap S^t = \emptyset$.

В силу предложения 4.9 можно не ограничивая общности предполагать, что сеть Γ находится в общем положении. Всюду ниже мы предполагаем, что это предположение имеет место.

Мы отдельно рассмотрим две возможности: или $p = q$, или $p < q$. Начнем с первого случая.

Случай $p = q$

Пусть сначала $p = q = 1$. Хорошо известно, см. например [30, 46], что минимальное дерево всегда лежит в выпуклой оболочке своего граничного множества (в следующем разделе мы докажем более общее утверждение, см. предложение 4.20). Поэтому путь L целиком лежит внутри выпуклого многоугольника σ. Мы находимся в условиях следствия 4.4, где в качестве замкнутой ломаной выступает граница W многоугольника σ. Обозначив через W' и W'' компоненты, на которые разбивают

точки A и B ломаную W, получим

$$|\operatorname{tn} L| < 3|\operatorname{ind}(L, W') + \operatorname{ind}(L, W'')| + 6 = 6,$$

так как $\operatorname{ind}(L, W') = -\operatorname{ind}(L, W'')$, поскольку ломаная L образует ровно одну Ω область по отношению к каждой из ломаных W' и W'', причем знаки этих областей, очевидно противоположны. Осталось заметить, что, в силу утверждения 4.4, $\operatorname{tw}(a, b) = \operatorname{tn} L$, и, кроме того, $\operatorname{tw}(a, b)$ — целое число, поэтому неравенства $\operatorname{tw}(a, b) < 6$ и $\operatorname{tw}(a, b) \leq 5$ равносильны. Итак, для случая $p = q = 1$ предложение 4.10 доказано. Полученное утверждение понадобится нам так же в виде следующей леммы.

Лемма 4.13 *Пусть W — замкнутая ломаная, ограничивающая выпуклый многоугольник σ, и пусть L — ломаная, соединяющая точки $A \in W$ и $B \in W$, лежащая в σ и находящаяся с W в общем положении. Обозначим через a и b концевые ребра L, инцидентные A и B соответственно. Тогда $|\operatorname{tn} L| < 6$. В частности, если L — путь в минимальном 2-дереве, то $|\operatorname{tw}(a, b)| = |\operatorname{tn} L| \leq 5$.*

Предположим теперь что $p \geq 2$. Обозначим через W_1 и W_2 те части ломаной W^p, на которые ее разбивают точки A и B. Рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L относительно W^p. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — множества, состоящие из всех p-шапочек, образованных L, таких что замыкание их оснований содержит точки A и B соответственно. Поскольку, очевидно, основания шапочек, принадлежащих $\mathcal{H}_A$ (соответственно, $\mathcal{H}_B$) упорядочены по включению, тоже самое имеет место и для соответствующих H-областей. Тогда из следствия 4.6 вытекает следующий результат.

Предложение 4.11 *Каждое из множеств $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ состоит не более чем из $p - 1$ элемента.*

Отметим, что все остальные p-шапочки, порожденные L (т.е. шапочки, замыкания оснований которых не содержат ни A, ни B), являются пустыми элементами относительно W_1 или W_2.

Отметим также, что каждый внутренний не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2, содержит, как подмножество, некоторую шапочку из $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$, а разные такие непустые элементы соответствуют разным шапочкам из $\mathcal{H}$. Уже отсюда можно было бы получить оценку на количество A- и B-элементов, образованных ломаной L по отношению к W_i, и, следовательно, на индексы $\operatorname{ind}(L, W_i)$, однако эта оценка оказывается слишком грубой для доказательства теоремы. Поэтому необходимы немного более тонкие рассуждения.

Рассмотрим произвольную шапочку, соответствующую произвольной пустой области Ω, образованной L по отношению к W_i. Мы назовем такую шапочку *пустой шапочкой*. Так же как и выше, в доказательстве предложения 4.3, можно найти строго пустую область Ω', содержащуюся в Ω. Ясно, что Ω' также является пустой шапочкой по отношению к W_i. Применяя элементарную деформацию к Ω', перестроим L так, чтобы полученная ломаная образовывала одной шапочкой и одной пустой областью меньше по отношению к W_i. Ясно, что при такой элементарной деформации не меняются ни направления концевых ребер пути L, ни шапочки, принадлежащие $\mathcal{H}$ (последнее имеет место так как элементы разбиения смежные с элементом L', соответствующим Ω', лежат внутри W^p и, поэтому, не принадлежат p-шапочкам из $\mathcal{H}$). Повторяя этот процесс до тех пор, пока все пустые шапочки не будут уничтожены, и используя тот факт, что кручение ломаной L не меняется при элементарных деформациях, получим следующее предложение.

Предложение 4.12 *Существует деформация ломаной L, неподвижная на всех непустых шапочках и на граничных ребрах ломаной L, такая что полученная в результате ломаная не образует пустых шапочек. Кручение ломаной L также не меняется при этой деформации.*

Таким образом, можно предполагать, что L не образует пустых шапочек.

Определим теперь числа n_i, $i = 1, 2$, так. Положим n_i равным количеству не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ концевых областей, образованных ломаной L по отношению к W_i. Очевидно, $n_i \leq 2$ по определению. Далее, напомним, что ломаная L ориентирована от A к B. Обозначим через n_f общее количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ первых элементов разбиений L относительно как W_1, так и W_2. Аналогично, через n_l обозначим количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ последних, не совпадающих с первыми, элементов этих разбиений. Очевидно, $n_f \leq 2$, $n_l \leq 2$, и $n_1 + n_2 = n_f + n_l$. Оказывается, если ломаная L не образует пустых шапочек, то имеет место следующая более сильная оценка.

Предложение 4.13 *Пусть ломаная L не образует пустых шапочек, по отношению к W^p. Тогда, в сделанных выше обозначениях, имеет место следующее неравенство:*

$$n_1 + n_2 = n_f + n_l \leq 2.$$

Доказательство. В тривиальном случае, когда ломаная L пересекает ломаную W^p лишь в точках A и B, имеем очевидно две возможности:

или ломаная L целиком лежит в σ^p, и тогда $n_1 = n_2 = 1$, $n_f = 2$, $n_l = 0$ (для каждой W_i имеется всего одна (первая) концевая область, не содержащая шапочку), поэтому $n_1 + n_2 = 2$; или ломаная L целиком лежит вне σ^p, и тогда $n_1 = n_2 = n_f = n_l = 0$ (для каждой W_i имеется всего одна концевая область, содержащая шапочку), поэтому $n_1 + n_2 = 0$.

Предположим теперь, что имеется хотя бы одна точка пересечения ломаных L и W^p, отличная от A и B. Рассмотрим первый элемент L_1 канонического разбиения ломаной L относительно ломаной W^p. Предположим сначала, что L_1 лежит вне многоугольника σ^p. В этом случае, очевидно, первые элементы разбиения L по отношению к ломаным W_i содержат шапочки из $\mathcal{H}$, поэтому каждое из чисел n_i, $i = 1, 2$, не превосходит единицы, откуда $n_1 + n_2 \leq 2$. Кроме того, очевидно, в этом случае $n_f = 0$.

Пусть теперь L_1 лежит внутри σ^p, и предположим, для определенности, что конец ломаной L_1 принадлежит W_1 (напомним, что ломаная L, и значит все элементы канонического разбиения, ориентированы от A к B). Тогда первый концевой элемент разбиения L по отношению к W_1 не содержит шапочки. Однако, так как ломаная L находится в общем положении с W, следующий элемент L_2 канонического разбиения ломаной L относительно W^p лежит вне σ^p, поэтому образует шапочку, которая по нашему предположению не пустая. Наконец, ясно что первый элемент канонического разбиения ломаной L по отношению к W_2 в этом случае содержит $L_1 \cup L_2$, поэтому он содержит непустую шапочку, т.е. шапочку из $\mathcal{H}$, откуда $n_f \leq 1$.

Таким образом, вне зависимости от расположения первого элемента ломаной L, имеет место неравенство $n_f \leq 1$. Аналогично можно показать, что $n_l \leq 1$, откуда окончательно получаем: $n_f + n_l \leq 2$. Предложение доказано.

Обозначим через n_i^A количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ концевых A-элементов разбиения ломаной L по отношению к W_i, и, аналогично, через n_i^B — количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ концевых B-элементов разбиения ломаной L по отношению к W_i. Очевидно, $n_1^A + n_1^B = n_1$, и $n_2^A + n_2^B = n_2$, поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.8 *В сделанных выше обозначениях,*

$$n_1^A + n_2^A + n_1^B + n_2^B \leq 2.$$

Замечание. Из определений немедленно вытекает, что количество A-элементов, образованных ломаной L по отношению к ломаной W_i, не

превосходит $n_i^A + \#(\mathcal{H}_A)$, а количество B-элементов, образованных ломаной L по отношению к ломаной W_i, не превосходит $n_i^B + \#(\mathcal{H}_B)$, где через $\#(X)$ обозначается количество элементов во множестве X.

Рассмотрим теперь канонические разбиения ломаной L по отношению к W_i, и воспользуемся следствием 4.3 для оценки индекса. Имеются следующие возможности.

(1.) Разбиение ломаной L относительно W_i содержит F-элемент. Этот F-элемент, очевидно, содержит как шапочку из $\mathcal{H}_A$ так и из $\mathcal{H}_B$ (возможно, одну и ту же). Тогда, в силу предложения 4.11, общее количество A- и B-элементов не превосходит $2(p-2)+n_i$, откуда имеем:

$$|\operatorname{ind}(L, W_i)| \le 2(p-2) + n_i + 1 = 2p - 3 + n_i.$$

(2.) Разбиение ломаной L относительно W_i не содержит F-элемента. Тогда как количество A-областей, так и количество B-областей, не превосходит $(p-1) + \max(n_i^A, n_i^B)$. Здесь возможно два случая.

(2а.) После редукции ломаной L по отношению к W_i каноническое разбиение редуцированной ломаной снова не содержит F-элемента. Тогда, в силу следствия 4.3, имеем:

$$|\operatorname{ind}(L, W_i)| \le p - 1 + \max(n_i^A, n_i^B) \le 2p - 3 + \max(n_i^A, n_i^B),$$

при $p \ge 2$.

(2б.) После редукции ломаной L по отношению к W_i каноническое разбиение редуцированной ломаной содержит F-элемент. Тогда, в силу следствия 4.3, имеем:

$$|\operatorname{ind}(L, W_i)| \le p - 1 + n_i^A + p - 1 + n_i^B - 1 \le 2p - 3 + n_i.$$

Оценим сумму $|\operatorname{ind}(L, W_1) + \operatorname{ind}(L, W_2)|$, для чего сложим соответствующие оценки. Напомним, что, в силу предложения 4.13, $n_1 + n_2 \le 2$. Далее, очевидно, $\max(n_1^A, n_1^B) + \max(n_2^A, n_2^B) \le n_1 + n_2 \le 2$. Наконец, точно так же $n_i + \max(n_j^A, n_j^B) \le n_1 + n_2 \le 2$. Итак, во всех случаях получаем, что

$$|\operatorname{ind}(L, W_1) + \operatorname{ind}(L, W_2)| \le 2(2p-3) + 2 = 4(p-1).$$

Теперь, воспользовавшись следствием 4.4, имеем:

$$|\operatorname{tn} L| < 3\,|\operatorname{ind}(L, W_1) + \operatorname{ind}(L, W_2)| + 6 \le 3 \cdot 4(p-1) + 6 = 12(p-1) + 6,$$

или $|\operatorname{tn} L| \le 12(p-1) + 5$, так как число вращения минимального 2-дерева целое. Предложение 4.10 доказано в рассматриваемом случае $p = q$.

Случай $p < q$

Итак, пусть теперь $p < q$. Разобьем ломаную L следующим образом. Первый фрагмент — L_1, это часть ломаной L между точкой $A = A_1$ и такой первой точкой $B_1 \in L$, что вся оставшаяся часть ломаной L между B_1 и B лежит внутри σ^p. Другими словами, L_1 — это минимальная связная часть ломаной L, содержащая A и такая, что $L \setminus L_1$ целиком содержится в σ^p. Отметим, что фрагмент L_1 может быть пустым.

Второй фрагмент L_2 ломаной L — это часть ломаной L между точкой $A_2 = B_1$ и такой первой точкой B_2, что вся оставшаяся часть ломаной L, начиная с B_2 лежит в σ^{p+1}. Другими словами, B_2 — это первая точка на L, такая что $L \setminus (L_1 \cup L_2) \subset \sigma^{p+1}$.

Далее, для $i > 1$ и такого что $p + i - 1 \leq q$, т.е. $i \leq q - p + 1$, определим фрагмент L_i ломаной L как часть L между $A_i = B_{i-1}$ и такой первой точкой B_i, что оставшаяся часть ломаной L от B_i до B содержится в σ^{p+i-1}.

Последний фрагмент разбиения — L_{q-p+2} совпадает с оставшейся частью ломаной L, если она не пуста.

Итак, мы построили разбиение ломаной L на участки L_1, L_2, ... , L_{q-p+2}, такие что каждый фрагмент L_i соединяет точки A_i и B_i, где A_1, $B_1 \in W^p$, $A_i = B_{i-1} \in W^{p+i-2}$, и $B_i \in W^{p+i-1}$ при $1 \leq i \leq q-p+1$, причем $L_i \subset \sigma^{p+i-2}$ при $1 \leq i \leq q-p+1$. Кроме того, A_{q-p+2} и B_{q-p+2} принадлежат W^q, и $L_{q-p+2} \subset \sigma^q$. Обозначим через a_i и b_i концевые ребра ломаной L_i, инцидентные точкам A_i и B_i соответственно.

Кручение ломаной L_1 можно оценить с помощью результатов предыдущего пункта, а именно, $|\operatorname{tn} L_1| \leq 12(p-1) + 5$. Далее, мы оценим кручение каждого из L_i, $2 \leq i \leq q - p + 1$, доказав следующее предложение.

Предложение 4.14 *В сделанных выше обозначениях, если* $2 \leq i \leq q - p + 1$, *то* $|\operatorname{tn} L_i| \leq 9$.

Наконец, мы докажем следующий результат.

Предложение 4.15 *Если участок* L_{q-p+2} *не пуст, то*

$$|\operatorname{tn} L_{q-p+1} + \operatorname{tn} L_{q-p+2}| \leq 12.$$

Ясно, что предложения 4.14 и 4.15 завершают доказательство предложения 4.10. Действительно, так как ломаная L находится в общем положении по отношению ко всем многоугольникам W^i, для кручения

ломаной L получаем:

$$\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} L_1 + \sum_{i=2}^{q-p} \operatorname{tn} L_i + \operatorname{tn} L_{q-p+1} + \operatorname{tn} L_{q-p+2},$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{tn} L &\le 12(p-1) + 5 + 9(q-p-1) + 12 = \\ &= 9q + 3p - 4 \le 9q + 3(q-1) - 4 = 12q - 7 = 12(q-1) + 5,\end{aligned}$$

что и требовалось. Перейдем теперь к доказательству предложений 4.14 и 4.15.

Доказательство предложения 4.14. Прежде всего отметим, что если L_i состоит меньше чем из 4 ребер, то предложение 4.14, очевидно, имеет место. Итак, предположим, что L_i состоит по крайней мере из 4 ребер. Ориентируем L_i от A_i к B_i, и обозначим три последних ребра ломаной L_i через b'', b' и b_i соответственно. Вершину, инцидентную ребрам b'' и b' обозначим через B'', а вершину инцидентную b' и b_i — через B'. Кроме того, обозначим через c'' и c' ребра сети Γ, инцидентные соответственно вершинам B'' и B' и не лежащие на пути L, см. рис. 4.9.

Напомним, что из каждой вершины сети в направлении каждого инцидентного ей ребра выходит не более двух различных сетевых геодезических лучей. Пусть γ_1 и γ_2 — два таких сетевых геодезических луча, выходящих из точки B' в направлении c', которые, вообще говоря, могут совпадать. Рассмотрим первую точку C'_j пересечения геодезического луча γ_j, $j = 1, 2$, с многоугольниками W^t. Ясно, что поскольку точка B' лежит в S^{p+i-2}, точка C'_j лежит или на W^{p+i-2}, или на W^{p+i-1}. Если C'_j лежит на W^t, будем говорить, что геодезический луч γ_j *приходит сначала на* W^t. Существует две возможности: или хотя бы один из геодезических лучей, скажем γ_1, приходит сначала на W^{p+i-2}, или оба луча γ_1 и γ_2 приходят сначала на W^{p+i-1}.

Рассмотрим первый случай, см. рис. 4.9. Обозначим снова через γ_1 отрезок сетевого геодезического луча γ_1 между точками B' и C'_1. Ориентируем γ_1 от B' к C'_1, и пусть c'_1 — последнее ребро отрезка γ_1.

Обозначим через γ'_1 путь в Γ, соединяющий точки A_i и C'_1. Эта ломаная линия лежит внутри σ^{p+i-2}, находится в общем положении с $W^{p+i-2} = \partial\sigma^{p+i-2}$ и соединяет две точки, лежащие на W^{p+i-2}. Таким образом, в силу леммы 4.13, $|\operatorname{tw}(a_i, c'_1)| \le 5$. В силу аддитивности числа вращения вдоль пути, имеем:

$$\operatorname{tw}(a_i, c'_1) = \operatorname{tw}(a_i, b') + \operatorname{tw}(b', c') + \operatorname{tw}(c', c'_1) = \operatorname{tw}(a_i, b') + \operatorname{tw}(b', c') + \operatorname{tn}(\gamma_1).$$



Рис. 4.9: Средний элемент разбиения пути L.

Но, так как γ_1 — отрезок сетевой геодезической, $|\operatorname{tn}\gamma_1| \leq 1$. Итак,

$$|\operatorname{tw}(a_i, b')| = |\operatorname{tw}(a_i, c_1') - \operatorname{tw}(b', c') - \operatorname{tn}(\gamma_1)| \leq 5 + 1 + 1 = 7,$$

и, поэтому, $|\operatorname{tw}(a_i, b_i)| = |\operatorname{tn} L_i| \leq 8$. В первом случае предложение доказано.

Рассмотрим второй случай, а именно, пусть оба геодезических луча γ_1 и γ_2 приходят сначала на W^{p+i-1}, см. рис. 4.9. Обозначим через C' вершину ребра c', отличную от B'. Легко видеть, что или само ребро c', или его продолжение приходит сначала на W^{p+i-1}, причем приходит трансверсально.

Таким образом, лучи, выпущенные из точки B' вдоль ребер b_i и c' и образующие угол величиной в 120°, который мы обозначим через α, приходят сначала на W^{p+i-1}. Отсюда следует, что характеристический клин $\operatorname{Wdg}(B', b')$ не пересекает σ^{p+i-1}, поскольку он ограничен лучами, противонаправленными лучам, образующим угол α. Поэтому обе сетевых геодезических луча, выпущенных из B' в направлении b' приходят сначала на W^{p+i-2}. Ясно, что один из этих геодезических лучей содержит геодезический луч выпущенный из точки B'' в направлении c''. Взяв этот последний геодезический луч в качестве γ_1 и повторив рассуждения, примененные в первом случае, мы получим оценку $|\operatorname{tw}(a_i, b_i)| = |\operatorname{tn} L_i| \leq 9$, так как между ребрами b'' и b_i расположено две вершины, а не одна как в первом случае. Предложение 4.14 доказано.

Итак, если последний фрагмент L_{q-p+2} разбиения пути L пуст, то теорема 4.10 вытекает из только что доказанного предложения 4.14. Если же он не пуст, нам потребуется с помощью чуть более тонких рассуждений получить оценку на кручение сразу двух последних фраг-

ментов разбиения. Эта оценка и приведена в предложении 4.15, к доказательству которого мы переходим.

Доказательство предложения 4.15. Как и в доказательстве предложения 4.14 предположим, что L_{q-p+1} состоит по крайней мере из 4 звеньев. Мы сохраним обозначения из доказательства предложения 4.14, положив $i = q - p + 1$. Однако теперь мы рассмотрим три возможности: (1) оба геодезических луча γ_j, $j = 1, 2$, приходят сначала на W^{q-1}, (2) один из них приходит сначала на W^{q-1}, а второй — на W^q, и, наконец, (3) оба геодезических луча γ_j, $j = 1, 2$, приходят сначала на W^q.

Как и выше, обозначив через γ'_j путь в Γ соединяющий точки A_{q-p+1} и C'_j, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}\operatorname{tw}(a_{q-p+1}, c'_j) &= \operatorname{tw}(a_{q-p+1}, b') + \operatorname{tw}(b', c') + \operatorname{tw}(c', c'_j) \\ &= \operatorname{tw}(a_{q-p+1}, b') + \operatorname{tw}(b', c') + \operatorname{tn}\gamma_j.\end{aligned}$$

Рассмотрим первый случай. Так как оба геодезических луча γ_j, $j = 1, 2$, выпущены из одной и той же вершины B' в одном и том же направлении c', то кручение одного из них, скажем γ_1, или равно нулю, или противоположно по знаку с $\operatorname{tw}(b', c')$. Поэтому получаем:

$$|\operatorname{tw}(a_{q-p+1}, b')| = |\operatorname{tw}(a_{q-p+1}, c'_1) - \operatorname{tw}(b', c') - \operatorname{tn}\gamma'_1| \le 5 + 1 = 6,$$

откуда $|\operatorname{tw}(a_{p-q+1}, b_{q-p+1})| \le 7$.

С другой стороны, в силу леммы 4.13, $|\operatorname{tw}(a_{q-p+2}, b_{q-p+2})| \le 5$, поэтому

$$|\operatorname{tw}(a_{q-p+1}, b_{q-p+2})| = |\operatorname{tn} L_{q-p+1} + \operatorname{tn} L_{q-p+2}| \le 12.$$

В первом случае предложение доказано.

Для разбора оставшихся двух случаев нам потребуется следующий результат. Пусть W — замкнутая ломаная, ограничивающая выпуклый многоугольник σ, и пусть L — ломаная, соединяющая точки $A \in W$ и $B \in W$, лежащая внутри σ и находящаяся с W в общем положении. Ориентируем ломаную L от A к B, и обозначим через a и b начальное и конечное звенья ломаной L соответственно. Ломаная L разбивает область σ на две области. Обозначим через $\overline{\sigma}$ ту из этих двух областей, обход границы которой против часовой стрелки порождает на L ориентацию от A к B. Пусть α — твистинг точки A как вершины ломаной $\partial\overline{\sigma}$.

Лемма 4.14 *В сделанных только что предположениях, имеет место следующая оценка:*

$$\operatorname{tw}(a, b) < 6 - \alpha.$$

Доказательство. Обозначим через β твистинг в точке B как в вершине ломаной $\partial\overline{\sigma}$, и пусть x — кручение вдоль ломаной $W \cap \partial\overline{\sigma}$, ориентация на которой согласована с обходом $\partial\overline{\sigma}$ против часовой стрелки. Тогда, в силу предложения 4.1, имеем:

$$\alpha + \mathrm{tw}(a,b) + \beta + x = 6.$$

Поскольку σ — выпуклый многоугольник, $x \geq 0$. Кроме того, $\beta > 0$ из соображений общего положения, что и завершает доказательство.

Следствие 4.9 *Если в предположениях леммы 4.14 ломаная L является путем в минимальном 2-дереве, то*

- *если $\alpha \geq 1$, то $\mathrm{tw}(a,b) \leq 4$;*
- *если $\alpha \geq 2$, то $\mathrm{tw}(a,b) \leq 3$.*

Вернемся к доказательству предложения. Прежде всего, предположим, что $\mathrm{tn}\, L \geq 0$ (если это не так, достаточно применить отражение относительно некоторой прямой, и применить те же рассуждения), и будем оценивать вращение ломаной L сверху.

Ориентируем замкнутую ломаную W^q против часовой стрелки, а участок L_{q-p+2} — от A_{q-p+2} к B_{q-p+2}. Как и в лемме 4.14, обозначим через $\overline{\sigma}^q$ ту из двух областей, на которые разбивает L_{q-p+2} область σ^q, обход границы $\partial\overline{\sigma}^q$ которой против часовой стрелки порождает на L_{q-p+2} ориентацию от A_{q-p+2} к B_{q-p+2}. Обозначим через α твистинг в вершине A_{q-p+2} ломаной $\partial\overline{\sigma}^q$. Заметим, что мы находимся в условиях следствия 4.9.

Рассмотрим случай (2). Поскольку один из геодезических лучей γ_j, $j = 1,\ 2$, скажем γ_1, приходит сначала на W^{q-1}, мы получаем оценку $|\,\mathrm{tn}\, L_{q-p+1}| \leq 8$. Если это неравенство строгое, то так как вращение ломаной L_{q-p+1} — целое число, $|\,\mathrm{tn}\, L_{q-p+1}| \leq 7$, и доказательство можно завершить также как и в случае (1).

Предположим теперь, что $\mathrm{tn}\, L_{q-p+1} = 8$. Это возможно, только если твистинг в вершине B' равен $+1$, см. рис. 4.10. Легко видеть, что продолжение ребра b' через вершину B' необходимо приходит сначала на W^q. Таким образом, из точки B' выходят два луча: один вдоль ребра b_{q-p+1}, а другой — вдоль продолжения ребра b', образующих угол в $\pi/3$ и приходящих сначала на W^q, причем трансверсально. Из вышесказанного легко получить оценку на твистинг α, а именно $\alpha > 1$ (соответствующий угол больше чем $\pi/3$). Тогда, по следствию 4.9, $\mathrm{tn}\, L_{q-p+2} \leq 4$, откуда

$$\mathrm{tn}\, L_{q-p+1} + \mathrm{tn}\, L_{q-p+2} \leq 8 + 4 = 12.$$



Рис. 4.10: Последний элемент разбиения пути L.

Рассмотрим оставшийся третий случай, когда оба геодезических луча γ_j, $j = 1, 2$, приходят сначала на W^q. Тогда мы имеем следующую оценку: $|\operatorname{tn} L_{q-p+1}| \leq 9$. Причем эта оценка достигается только если твистинги в обоих вершинах B' и B'' положительны, если же это не так, то $|\operatorname{tn} L_{q-p+1}| \leq 7$, и все доказано. Если же мы имеем строгое равенство $\operatorname{tn} L_{q-p+1} = 9$, то оба эти твистинга необходимо равны $+1$, см. рис. 4.10. Рассмотрим продолжение ребра c' за вершину C'. Ясно, что этот луч приходит сначала на W^q. Таким образом, из точки B' выходят два луча: один вдоль ребра b_{q-p+1}, а другой — вдоль ребра c', образующих угол в $2\pi/3$ и приходящих сначала на W^q, причем трансверсально. Из вышесказанного легко получить оценку на твистинг α, а именно $\alpha > 2$ (соответствующий угол больше чем $2\pi/3$). Снова воспользовавшись следствием 4.9, получаем: $\operatorname{tn} L_{q-p+1} \leq 3$, откуда,

$$\operatorname{tn} L_{q\ \ p\,|\,1} + \operatorname{tn} L_{q\ \ p\,|\,2} \leq 9 + 3 = 12.$$

Предложение 4.15, а вместе с ним предложение 4.10 и теорема 5, полностью доказаны.

4.3 Плоские ломаные II: общий случай

В дальнейшем нам придется иметь дело с парами ломаных, которые, вообще говоря, не находятся в общем положении (дело в том, что теперь мы собираемся работать с произвольными линейными деревьями, а пе только с экстремалями фупкционала длипы или взвешепной длины). Поэтому нам нужно обобщить соответствующие результаты из раздела 4.1 на общий случай. Этому обобщению и посвящен настоящий раздел.

Итак, пусть L^1 и L^2 — две произвольных ломаных на плоскости. Выбросим из ломаной L^2 множество $L^1 \cap L^2$. Замыкания L_j^2 полученных связных компонент, очевидно, являются ломаными, каждая из которых — подломаная ломаной L^2. Рассмотрим теперь само множество $L^1 \cap L^2$. Отметим, что как $L^1 \cap L^2$, так и его связные компоненты, — замкнуты. Кроме того, ясно, что произвольная связная компонента S_i^2 множества $L^1 \cap L^2$ — или ломаная, которая является подломаной как L^2, так и L^1, или точка. Таким образом, мы представили ломаную L^2 в виде объединения замкнутых множеств двух типов: L_j^2 и S_i^2.

Определение. Построенное разбиение $L^2 = (\cup L_j^2) \bigcup (\cup S_i^2)$ назовем *каноническим разбиением ломаной L^2 по отношению к L^1*. Ломаные L_j^2 будем называть *регулярными* элементами канонического разбиения, а элементы S_i^2 — *сингулярными*.

Пусть теперь ломаная L^2 — незамкнута. Элемент канонического разбиения ломаной L^2 по отношению к L^1, содержащий хотя бы одну из концевых вершин ломаной L^2, назовем *концевым*. Все остальные элементы канонического разбиения будем называть *внутренними*. Если же ломаная L^2 — замкнута, то все элементы ее канонического разбиения будем, по определению, называть *внутренними*.

Замечание. Отметим, что если V — концевая вершина ломаной L^2, то она принадлежит или одному, или двум элементам канонического разбиения. При этом, в первом случае элемент канонического разбиения, содержащий V, может быть как регулярным ($V \notin L^1$), так и сингулярным ($V \in S_i^2$, и $S_i^2 \neq V$). Во втором случае, один из таких элементов регулярный, а другой — сингулярный и совпадает с V (другими словами, во втором случае вершина V является изолированной точкой пересечения ломаных L^1 и L^2).

Замечание. С формальной точки зрения, для ломаных, находящихся в общем положении, в разделе 4.1 было определено *другое* понятие канонического разбиения, которое мы, начиная с этого места, будем называть *регулярным каноническим разбиением*. Пусть L^1 и L^2 — пара ломаных, находящихся в общем положении при некоторых фиксированных общих вершинах. Пусть $L^2 = \cup \overline{L}_j^2$ — регулярное каноническое разбиение, и $L^2 = (\cup L_j^2) \bigcup (\cup S_i^2)$ — каноническое разбиение, определенное только что (не регулярное). Ясно, что каждый элемент регулярного канонического разбиения $\overline{L}_j^2$ совпадает, как подломаная ломаной L^2, с соответствующим регулярным элементом L_j^2 канонического разбиения. Каждый сингулярный элемент S_i^2 канонического разбиения

является или внутренней точкой некоторого ребра ломаной L^2, или совпадает с одной из фиксированных вершин.

Пусть S_i^2 — некоторый сингулярный элемент канонического разбиения. Элемент S_i^2 или представляет собой ломаную, начальную и конечную точки которой мы обозначим через A_i и B_i соответственно, или состоит из одной точки, которую мы также обозначим через $A_i = B_i$. В дальнейшем, переходя при необходимости к подразбиениям исходных ломаных, *будем предполагать, что каждая из точек A_i и B_i или является вершиной обеих ломаных L^1 и L^2, или не является вершиной ни одной из них.* Из этого предположения вытекает, в частности, что если S_i^2 состоит более чем из одной точки, то обе его концевые вершины являются вершинами обеих ломаных. Если же S_i^2 состоит из одной точки $A_i = B_i = S_i^2$, то эта точка может как быть общей вершиной ломаных L^1 и L^2, так и не быть вершиной ни одной из них. В последнем случае эта точка является внутренней для некоторых ребер из L^1 и L^2. Таким образом, из нашего предположения вытекает, в частности, что если хотя бы одна из точек A_i и B_i не является общей вершиной ломаных L^1 и L^2, то элемент S_i^2 состоит из одной точки.

Чтобы сформулировать для произвольной пары ломаных L^1 и L^2 аналог предложения 4.3 из раздела 4.1 о связи кручений, нам следует обобщить на случай таких ломаных понятие индекса $\mathrm{ind}(L^2, L^1)$ и концевых твистингов. В свою очередь, чтобы определить индекс пары ломаных, нужно приписать каждому элементу построенного канонического разбиения некоторый "знак". Прежде чем определять знаки сингулярных элементов канонического разбиения, полезно разбить множество всех таких элементов на два класса. Элементы, попавшие в один класс, будем называть *трансверсальными*, а в другой — *касательными*.

Итак, пусть, как и выше, $L^2 = (\cup L_j^2) \bigcup (\cup S_i^2)$ каноническое разбиение ломаной L^2 относительно ломаной L^1. Мы будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено противное, что ломаные L^1 и L^2 различны как подмножества плоскости, исключая тем самым из рассмотрения тривиальный случай совпадающих ломаных.

Мы начнем с определения допустимой окрестности сингулярного элемента. Пусть S_i^2 — произвольный сингулярный элемент, и обозначим через A_i и B_i — начальную и конечную вершины ломаной S_i^2. Обозначим через E_i^j ориентированную подломаную ломаной L^j, полученную из S_i^2 добавлением всех тех ребер ломаной L^j, которые содержат хотя бы одну из точек A_i и B_i. Обозначим начальное и конечное звенья построенной ломаной E_i^j через b^j и e^j соответственно. Отметим, что ребра b^j и e^j могут совпадать.

Рассмотрим в плоскости ε-окрестность U_ε элемента S_i^2, т.е. множество тех точек плоскости, расстояние от которых до S_i^2 не превосходит $\varepsilon > 0$, причем выберем ε настолько малым, чтобы окрестность U_ε пересекалась только со звеньями ломаной S_i^2 и звеньями b^1, b^2, e^1 и e^2, построенными выше. Если элемент S_i^2 является концевым и состоит более чем из одной точки, а V — концевая вершина ломаной L^2, принадлежащая S_i^2, то подправим множество U_ε следующим образом. Пусть e — общее звено ломаных L^1 и L^2, содержащее V, а ℓ — прямая, проходящая через V перпендикулярно к e. Обозначим через $H(V)$ замкнутый полукруг, отсекаемый от U_ε прямой ℓ и пересекающийся с e лишь по точке V. Перестроенное множество U_ε определим как замыкание множества $U_\varepsilon \setminus H(V)$ и будем по-прежнему обозначать через U_ε.

Определение. Построенное выше множество U_ε будем называть *допустимой ε-окрестностью* сингулярного элемента S_i^2.

Пусть сингулярный элемент S_i^2 отличен от концевой вершины ломаной L^2. В этом случае каждая из ломаных L^j, $j = 1, 2$, разбивает каждую допустимую окрестность U_ε элемента S_i^2 на две компоненты. Обозначим через δ_ε границу допустимой окрестности U_ε. Ясно, что δ_ε — вложенная замкнутая кусочно-гладкая кривая на плоскости, пересекающаяся с каждой из ломаных L^1 и L^2 ровно по двум точкам. При этом, каждая из этих точек пересечения лежит на одном из ребер b^1, b^2, e^1, e^2. Ясно, что если элемент S_i^2 является внутренним, то все эти четыре точки пересечения попарно различны, а если S_i^2 — концевой элемент, то две из этих точек совпадают между собой и совпадают с общей концевой вершиной ломаных L^1 и L^2.

Построим теперь разбиение множества всех сингулярных элементов на два класса.

Определение. Сингулярный элемент S_i^2 назовем *касательным*, если ломаная L^2 разбивает границу δ_ε произвольной допустимой окрестности U_ε элемента S_i^2 на две замкнутые компоненты, причем только одна из этих компонент пересекается по своей внутренности с ломаной L^1. В противном случае, сингулярный элемент S_i^2 назовем *трансверсальным*.

В дальнейшем нам также будет полезно следующее разбиение множества трансверсальных сингулярных элементов на два класса. Назовем трансверсальный сингулярный элемент *существенным*, если он содержит внутреннюю вершину хотя бы одной из ломаных L^1 или L^2. В противном случае, трансверсальный сингулярный элемент назовем *несущественным*.



Рис. 4.11: Типы сингулярных элементов.

Замечание. Поясним только что данные определения, см. рис. 4.11. Пусть сначала S_i^2 — концевой сингулярный элемент. Если S_i^2 совпадает с одной из концевых вершин ломаной L^2, то он является трансверсальным элементом, так как ломаная L^2 в этом случае вообще не разбивает никакую допустимую окрестность элемента S_i^2. Если же концевой сингулярный элемент S_i^2 состоит больше чем из одной точки, то он, очевидно, является касательным.

Далее, внутренний сингулярный элемент S_i^2 является трансверсальным, если точки, принадлежащие ломаным L^1 и L^2, чередуются на границе δ_ε произвольной допустимой окрестности элемента S_i^2. В противном случае, элемент S_i^2 является касательным.

Наконец, концевой трансверсальный элемент всегда является несущественным, а внутренний трансверсальный элемент является несущественным только если он состоит из одной точки, не являющейся вершиной ни одной из ломаных L^1 и L^2.

Итак, мы построили разбиение множества всех сингулярных элементов канонического разбиения на два класса — касательные и трансверсальные сингулярные элементы.

Предположим теперь, что обе ломаные L^1 и L^2 незамкнуты и соединяют различные точки A и B, т.е. соответствующие концевые точки ломаных L^1 и L^2 совпадают. Как и выше, будем предполагать, что $L^1 \neq L^2$. Ориентируем ломаные L^1 и L^2 от A к B. Для таких ломаных определим знаки элементов канонического разбиения.

Для регулярных элементов канонического разбиения — ломаных L_j^2, знак определяется точно так же, как и в случае ломаных общего положения. А именно, напомним, если A_j и B_j — начальная и конечная вершины ломаной L_j^2, являющейся регулярным элементом канонического разбиения, и b_j — часть ломаной L^1 между A_j и B_j, то

замкнутая ломаная $L_j^2 \cup b_j$ ограничивает конечную область на плоскости, которую мы обозначим через Ω_j. Ломаную b_j, как и выше, будем называть *основанием* области Ω_j, а сами области Ω_j — *Ω-областями*. Выбранная ориентация ломаной L^2 определяет *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2. Определим *знак* $\mathrm{sign}(L_j^2)$ *ломаной* L_j^2 равным $+1$, если, двигаясь в положительном направлении по ломаной L_j^2, мы обходим область Ω_j против часовой стрелки. В противном случае, положим $\mathrm{sign}(L_j^2) = -1$.

Определим теперь знаки сингулярных элементов. Если S_i^2 — трансверсальный сингулярный элемент, то положим $\mathrm{sign}(S_i^2) = 0$. Пусть теперь S_i^2 — касательный сингулярный элемент. Рассмотрим некоторую его допустимую окрестность U, и пусть δ — граница допустимой окрестности U. По определению, ломаная L^2 разбивает δ на две компоненты. Обозначим через δ_0 ту из этих компонент, которая содержит внутри себя точки из L^1 (эта компонента существует и единственна по определению). Ориентация ломаной L^2 задает порядок на точках пересечения ломаной L^2 с δ. Ориентируем δ_0 от первой точки пересечения ломаной L^2 с δ ко второй. Назовем так ориентированную кривую δ_0 *главной компонентой* границы δ допустимой окрестности. С другой стороны, ориентация плоскости также задает ориентацию кривой δ_0, как части замкнутой кривой δ. Если эти две ориентации на δ_0 совпадают, то положим $\mathrm{sign}(S_i^2) = +1$, в противном случае, положим $\mathrm{sign}(S_i^2) = -1$.

Итак, каждому элементу канонического разбиения приписан знак, который равен ± 1 или 0. (Здесь мы пользуемся предположением о том, что ломаные L^1 и L^2 не совпадают как подмножества плоскости. Отметим, что если $L^1 = L^2$, то знак единственного сингулярного элемента не определен.)

Определение. Пусть L^1 и L^2 — две ломаные, не совпадающие как подмножества плоскости. Пусть L^1 и L^2 соединяют различные точки A и B, и $L^2 = (\cup L_j^2) \bigcup (\cup S_i^2)$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1. Сумма знаков элементов канонического разбиения называется *индексом ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\mathrm{ind}(L^2, L^1)$:

$$\mathrm{ind}(L^2, L^1) = \sum_j \mathrm{sign}(L_j^2) + \sum_i \mathrm{sign}(S_i^2).$$

Замечание. Пусть L^1 и L^2 — пара ломаных, соединяющих фиксированные точки A и B на плоскости, и находящихся в общем положении. Тогда, как мы уже отмечали выше, для ломаных L^1 и L^2 определено

как регулярное каноническое разбиение, так и просто каноническое разбиение (не регулярное). Поэтому для ломаной L^2 относительно L^1 определено два числа: индекс в смысле ломаных в общем положении, определенный в разделе 4.1, который мы начиная с этого момента будем называть *регулярным индексом*, и индекс, определенный только что. Однако, поскольку, очевидно, все сингулярные элементы канонического разбиения в случае ломаных в общем положении являются трансверсальными и не дают вклада в индекс, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.6 *Если ломаные L^1 и L^2, соединяющие фиксированные точки A и B, находятся в общем положении, то регулярный индекс ломаной L^2 по отношению к L^1 совпадает с общим (не регулярным) индексом.*

Перейдем теперь к определению концевых твистингов. Если концевой сингулярный элемент состоит из одной точки V (здесь или $V = A$, или $V = B$), то, очевидно, имеется концевой регулярный элемент, содержащий точку V, и можно определить твистинг точно так же, как и в случае общего положения. А именно, нужно ориентировать границу Ω-области Ω, порожденной этим регулярным концевым элементом, в соответствии с положительным направлением движения по ломаной L^2 и определить концевой твистинг в точке V равным твистингу этой точки как вершины ориентированной ломаной $\partial\Omega$. В этом случае, напомним, если $V = A$, то концевой твистинг $\alpha(L^2, L^1)$ в вершине A совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1, и направлением начального звена ломаной L^2. В свою очередь, если $V = B$, то концевой твистинг $\beta(L^2, L^1)$ в вершине B совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1.

Предположим теперь, что не существует концевого регулярного элемента, содержащего точку V. Это означает, что имеется единственный элемент канонического разбиения, содержащий точку V, и этот элемент, который мы обозначим через S^2_V, является касательным сингулярным элементом. Отметим, что теперь угол между инцидентными вершине V концевыми ребрами ломаных L^1 и L^2 равен 0, поэтому воспользоваться старым определением концевого твистинга в точке V нельзя. Действительно, величина угла между нужными нам направлениями этих ребер равна π, поэтому *ориентированный* угол между этими направлениями не определен. Чтобы задать концевой твистинг

в точке V, мы воспользуемся знаком касательного сингулярного элемента S^2_V. А именно, в этом случае, положим концевой твистинг в вершине V равным $3\,\mathrm{sign}(S^2_V)$. Как и выше, обозначим концевые твистинги в вершинах A и B через $\alpha(L^2, L^1)$ и $\beta(L^2, L^1)$ соответственно.

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат настоящего раздела, являющийся обобщением предложения 4.3 на случай произвольных ломаных.

Предложение 4.16 *Пусть L^1 и L^2 — ломаные, соединяющие пару точек A и B, не совпадающие как подмножества плоскости и ориентированные от A к B. Тогда*

$$\mathrm{tn}\, L^2 = \mathrm{tn}\, L^1 + 6\,\mathrm{ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

Доказательство. Для доказательства предложения 4.16 мы воспользуемся специальными деформациями Φ_t, $t \in [a,\ b]$, ломаной L^2, где $\Phi_a(L^2) = L^2$, $\Phi_b(L^2) = \overline{L^2}$.

Определение. Деформацию Φ_t ломаной L^2 будем называть *регуляризующей*, если она обладает следующими свойствами:

1. деформация Φ_t неподвижна на концевых точках A и B;
2. деформация Φ_t не меняет индекс $\mathrm{ind}(L^2, L^1)$, т.е. $\mathrm{ind}(\Phi_t(L^2), L^1) = \mathrm{const}$;
3. в результате деформации получается ломанная $\Phi_b(L^2)$, находящаяся по отношению к L^1 в общем положении при фиксированных точках A и B;
4. кручение $\Phi_t(L^2)$, а также концевые твистинги $\alpha(\Phi_t(L^2), L^1)$ и $\beta(\Phi_t(L^2), L^1)$ ломаной $\Phi_t(L^2)$ по отношению к L^1, непрерывно зависят от $t \in [a,\ b]$.

Ясно, что регуляризующая деформация должна “ликвидировать” касательные сингулярные элементы канонического разбиения и оставить лишь трансверсальные сингулярные элементы канонического разбиения, состоящие из одной точки. При этом условие 2 сохранения индекса при регуляризующей деформации не дает нам возможности просто так “уничтожать” касательные сингулярные элементы: нужно следить за тем, чтобы при этом индекс не изменился (напомним, что из всех сингулярных элементов именно касательные элементы дают вклад в индекс). Мы построим регуляризующую деформацию Φ_t, $t \in [0,\ 1]$, в виде двух последовательных деформаций, из которых первая, скажем

Ψ_t, $t \in [0,\ 1/2]$, перестраивает касательные сингулярные элементы, а вторая, скажем Θ_t, $t \in [1/2,\ 1]$ — перестраивает трансверсальные сингулярные элементы. Мы будем требовать, чтобы деформация Ψ_t обладала всеми свойствами регуляризующих деформаций, кроме свойства 3, т.е. полученная в результате ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не должна находиться в общем положении по отношению к L^1. Однако, мы будем требовать, чтобы ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не образовывала бы уже касательных сингулярных элементов. Такую деформацию Ψ_t будем называть 1-*регуляризующей.* В свою очередь, деформация Θ_t будет регуляризующей деформацией, причем свойство 4 будет усилено: мы будем требовать, чтобы при деформации Θ_t ни концевые твистинги, ни кручение ломаной L^2 не менялись. Такие деформации Θ_t будем называть 2-*регуляризующими.*

Мы построим 1-регуляризующую деформацию Ψ_t, $t \in [0,\ 1/2]$, обладающую следующими специальными свойствами. Пусть каноническое разбиение ломаной $L^2 = \Psi_0(L^2)$ относительно L^1 содержит s_t касательных сингулярных элементов, s_r трансверсальных сингулярных элементов, и r регулярных элементов. Тогда существует такое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{s_t} = 1/2$ отрезка $[0,\ 1/2]$, что каноническое разбиение ломаной $\Psi_t(L^2)$ при $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, s_t$, содержит $s_t - i$ касательных сингулярных элементов, $s_r + 2i$ трансверсальных сингулярных элементов, и $r+i$ регулярных элементов. Другими словами, при переходе через значение $t = t_i$, $0 \le i \le s_t - 1$, ровно один касательный сингулярный элемент перестраивается, образуя два новых трансверсальных сингулярных элемента и один новый регулярный элемент. В частности, ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ уже не образует касательных сингулярных элементов. Такие 1-регуляризующие деформации будем называть *правильными.*

Прежде чем определять правильную 2-регуляризующую деформацию Θ_t, сформулируем следующее очевидное утверждение.

Утверждение 4.7 *Ломаные L^1 и L^2, соединяющие фиксированные точки A и B, находятся в общем положении, если и только если каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 не содержит ни касательных сингулярных элементов, ни существенных трансверсальных сингулярных элементов.*

Мы построим 2-регуляризующую деформацию Θ_t, $t \in [1/2,\ 1]$, обладающую следующими специальными свойствами. Обозначим через $\widetilde{L^2}$ ломаную, полученную из L^2 деформацией Ψ_t, т.е. положим $\widetilde{L^2} = \Psi_{1/2}(L^2)$. Пусть каноническое разбиение ломаной $\Theta_{1/2}(\widetilde{L^2}) = \widetilde{L^2}$ содержит s_e существенных трансверсальных сингулярных элементов,

s_n несущественных трансверсальных сингулярных элементов и r регулярных элементов (и, по построению, 0 касательных сингулярных элементов). Тогда существует такое разбиение $1/2 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{s_e} = 1$ отрезка $[1/2,\ 1]$, что каноническое разбиение ломаной $\Theta_t(\widetilde{L^2})$ при $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, s_e$, содержит $s_e - i$ существенных трансверсальных сингулярных элементов, $s_n + i$ несущественных трансверсальных сингулярных элементов, r регулярных элементов, и, по-прежнему, 0 касательных сингулярных элементов. Другими словами, при переходе через значение $t = t_i$, $0 \le i \le s_e - 1$, ровно один существенный трансверсальный сингулярный элемент перестраивается, образуя один новый несущественный трансверсальный сингулярный элемент. В частности, ломаная $\Theta_1(\widetilde{L^2})$ уже не образует существенных трансверсальных сингулярных элементов. Поэтому $\Theta_1(\Psi_{1/2}(L^2))$ находится в общем положении с ломаной L^1 в силу утверждения 4.7. Такие 2-регуляризующие деформации будем называть *правильными*.

Регуляризующую деформацию Φ_t, $t \in [0,\ 1]$, являющуюся результатом последовательного применения правильных 1- и 2-регуляризующих деформаций Ψ_t, $t \in [0,\ 1/2]$, и Θ_t, $t \in [1/2,\ 1]$, будем также называть *правильной*.

Предположим, что мы уже умеем строить правильные регуляризующие деформации Φ_t, Θ_t и Ψ_t. Поскольку ломаные $\Phi_1(L^2)$ и L^1 находятся в общем положении, к ним применимо предложение 4.3. Поэтому, при $t = 1$, имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{tn}(\Phi_t(L^2)) = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(\Phi_t(L^2), L^1) - \alpha(\Phi_t(L^2), L^1) - \beta(\Phi_t(L^2), L^1). \quad *$$

Заметим, что правильная 2-регуляризующая деформация Θ_t, $t \in [1/2,\ 1]$, по определению, не меняет ни одного из слагаемых, входящих в равенство $(*)$. Поэтому равенство $(*)$ справедливо при всех $t \in [1/2,\ 1]$. Так как, по определению, $\Phi_{1/2}(L^2) = \Psi_{1/2}(L^2)$, при $t = 1/2$ справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{tn}(\Psi_t(L^2)) = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(\Psi_t(L^2), L^1) - \alpha(\Psi_t(L^2), L^1) - \beta(\Psi_t(L^2), L^1). \quad **$$

Отметим, что ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не образует касательных сингулярных элементов по отношению к L^1. Теперь доказательство предложения легко получается индукцией по числу s_t касательных сингулярных элементов канонического разбиения ломаной L^2.

В самом деле, если s_t равно нулю, т.е. касательных элементов нет, то утверждение предложения совпадает с равенством $(**)$, которое уже доказано. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо при $s_t < n$, и пусть каноническое разбиение ломаной L^2 по отношению

к L^1 содержит n касательных сингулярных элементов. Тогда, по предположению индукции, равенство $(**)$ справедливо при $t \in (0,\ 1/2]$. Далее, в силу свойства 2 регуляризующей деформации, $\operatorname{ind}(\Psi_t(L^2), L^1) = \operatorname{const} = \operatorname{ind}(L^2, L^1)$, поэтому

$$\operatorname{tn}(\Psi_t(L^2)) = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(L^2, L^1) - \alpha(\Psi_t(L^2), L^1) - \beta(\Psi_t(L^2), L^1),$$

при $t \in (0,\ 1/2]$. Перейдем к пределу при $t \to 0+$. В силу свойства 4 регуляризующей деформации Ψ_t, получим:

$$\operatorname{tn}(\Psi_0(L^2)) = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(L^2, L^1) - \alpha(\Psi_0(L^2), L^1) - \beta(\Psi_0(L^2), L^1),$$

то есть,

$$\operatorname{tn}(L^2) = \operatorname{tn} L^1 + 6\operatorname{ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1),$$

что и требовалось. Таким образом, для завершения доказательства предложения осталось построить правильные 1- и 2-регуляризующие деформации. Мы вынесем это построение в отдельный подраздел.

Построение правильной регуляризующей деформации

Прежде всего, перейдя, если нужно, к некоторому измельчению ломаной L^2, будем, не ограничивая общности, предполагать, что каждый регулярный элемент ломаной L^2 состоит по меньшей мере из двух звеньев. Напомним, выше мы предполагали также, что каждая из концевых точек произвольного сингулярного элемента канонического разбиения или является вершиной обеих ломаных L^1 и L^2, или не является вершиной ни одной из них.

Рассмотрим каноническое разбиение ориентированной ломаной L^2 относительно L^1. Пусть S_i^2 — или касательный сингулярный элемент канонического разбиения, или существенный трансверсальный элемент, и A_i и B_i — концевые точки ломаной S_i^2. Обозначим через $b_i = A_i'A_i$ то вектор-звено из L^2, конечная вершина которого совпадает с A_i, а через $e_i = B_iB_i'$ — то вектор-звено из L^2, начальная вершина которого совпадает с B_i. При этом, если $A_i = A$, то положим $A_i' = A_i$, а если $B_i = B$, то положим $B_i' = B_i$. По определению, если $A_i \neq A$, то звено $b_i = A_i'A_i$ принадлежит некоторому регулярному элементу, причем, в силу принятого соглашения, вершина A_i' является внутренней вершиной этого регулярного элемента. Аналогично, если $B_i \neq B$, то звено $e_i = B_iB_i'$ принадлежит некоторому регулярному элементу, причем вершина B_i' является внутренней вершиной этого регулярного элемента. Обозначим через $\overline{S_i}$ ломаную, полученную из S_i^2 добавлением звеньев b_i и e_i.

Отметим, что ломаные $\overline{S_i}$ и $\overline{S_j}$, построенные для разных сингулярных элементов S_i^2 и S_j^2 канонического разбиения, пересекаются не больше чем по общей концевой вершине.

Мы начнем с построения 1-регуляризующей деформации Ψ_t. Построим по каждому касательному сингулярному элементу S_i^2 деформацию Ψ_t^i ломаной L^2, такую что носитель деформации Ψ_t^i совпадает с ломаной $\overline{S_i}$.

Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U касательного сингулярного элемента S_i^2. Ломаная L^1 разбивает область U на две компоненты, которые мы обозначим через U' и U''. Отметим, что внутренность одной из этих компонент, скажем U'', пересекается с ломаной L^2, а внутренность другой, соответственно U', — не пересекается, см. рис. 4.12. Далее, ясно, что все внутренние вершины V_k ломаной $\overline{S_i}$ лежат на пересечении замыканий компонент U' и U''. Зададим в каждой вершине V_k вектор v_k, направленный внутрь компоненты U'. Очевидно, сдвигая вершины V_k ломаной $\overline{S_i}$ вдоль векторов v_k внутрь компоненты U', можно так продеформировать ломаную $\overline{S_i}$, что полученная в результате ломаная не будет образовывать касательных сингулярных элсмснтов по отношснию к ломаной L^1. Обозначим через Ψ_t^i деформацию ломапой L^2, совпадающую па участке $\overline{S_i}$ с только что построенной деформацией, и постоянную вне $\overline{S_i}$.

Посмотрим, как изменилось каноническое разбиение ломаной L^2 при деформации Ψ_t^i. По построению, ломаная $\Psi_t^i(\overline{S_i})$ пересекается с ломаной L^1 ровно по двум точкам, каждая из которых образует, очевидно, новый трансверсальный сингулярный элемент канонического разбиения. Подломаная, высекаемая из $\Psi_t^i(\overline{S_i})$ этими двумя точками, образует новый регулярный элемент L_i канонического разбиения. Таким образом, касательный сингулярный элемент S_i^2 перестроился в один регулярный элемент и два трансверсальных сингулярных элемента.

Лемма 4.15 *Знак регулярного элемента L_i совпадает со знаком того сингулярного касательного элемента S_i^2, из которого он возник.*

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно вытекает из определений. В самом деле, напомним, что элемент L_i получается из элемента S_i^2 в результате деформации Ψ_t^i, которая сдвигает вершины V_k ломаной S_i^2 внутрь области U', отсеченной ломаной L^1 от допустимой окрестпости U. Яспо, что продолжая двигать вершипы V_k до границы δ допустимой окрестности, можно так продолжить эту деформацию (уже в классе вложенных кусочно-гладких кривых), что деформируемая кривая L_i будет вытеснена на главную компоненту δ_0



Рис. 4.12: Построение регуляризующей деформации.

границы δ допустимой окрестности. Из этого наблюдения сразу вытекает, что $\mathrm{sign}(L_i) = \mathrm{sign}(S_i^2)$. Действительно, при движении по L_i в направлении, заданном ориентацией ломаной L^2, соответствующая Ω-область остается по ту же сторону от L_i, что и допустимая окрестность U от главной компоненты δ_0 границы ∂U окрестности U при движении по этой главной компоненте δ_0 в положительном направлении. Лемма доказана.

Таким образом, индекс $\mathrm{ind}(\Psi_t^i(L^2), L^1)$ не меняется при деформации Ψ_t^i. Легко проверяется, что остальные свойства 1-регуляризующих деформаций также выполнены.

Построим такие деформации Ψ_t^i для всех сингулярных касательных элементов S_i^2. Определим теперь деформацию Ψ_t ломаной L^2 как результат последовательного применения деформаций Ψ_t^i. Поскольку носители разных деформаций Ψ_t^i пересекаются не более чем по концевым точкам, деформация Ψ_t определена корректно. Кроме того, очевидно, что полученная в результате деформации Ψ_t ломаная $\widetilde{L^2}$ не образует по отношению к L^1 касательных сингулярных элементов. Однако, ломаная $\widetilde{L^2}$ может не находиться по отношению к L^1 в общем положении при фиксированных A и B, так как она образует, вообще говоря, с ломаной L^1 существенные трансверсальные сингулярные элементы. Итак, мы построили правильную 1-регуляризующую деформацию Ψ_t ломаной L^2.

Построим теперь 2-регуляризующую деформацию Θ_t ломаной $\widetilde{L^2}$, которая уничтожает существенные трансверсальные сингулярные элементы. Пусть теперь S_i^2 — произвольный существенный трансверсальный сингулярный элемент ломаной $\widetilde{L^2}$. По определению, элемент S_i^2 является внутренним элементом. Построим деформацию Θ_t^i, носитель которой совпадает с ломаной $\overline{S_i}$ (см. обозначения выше).

Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U существенного трансверсального сингулярного элемента S_i^2. Если элемент S_i^2 состоит из одной точки V_1, то зададим в точке V_1 вектор, не параллельный ни одному из звеньев ломаных L^1 и $\widetilde{L^2}$, инцидентных вершине V_1.

Пусть теперь элемент S_i^2 состоит более чем из одной точки. Упорядочим вершины ломаной S_i^2 в соответствие с ориентацией ломаной $\widetilde{L^2}$, и обозначим их через $V_1, \dots, V_K$, где $K > 1$. Через каждую вершину V_i проведем прямую ℓ_i, содержащую биссектрису меньшего угла между инцидентными вершине V_i ребрами ломаной $\widetilde{L^2}$.

Ломаные L^1 и $\widetilde{L^2}$ разбивают область U на четыре компоненты. Так как S_i^2 состоит более чем из одной точки, то две из этих компонент пересекаются с S_i^2 только по концевым точкам ломаной S_i^2, а каждая из двух других пересекает внутренность ломаной S_i^2. Более того, одна из этих последних двух компонент пересекает внутренность ребра b_i, не пересекая при этом внутренности ребра e_i, а другая — наоборот. Первую из этих двух компонент мы обозначим через U', а вторую — через U'', см. рис. 4.12.

Далее, ясно, что все вершины $V_1, \dots, V_K$ ломаной S_i^2 лежат на пересечении замыканий компонент U' и U''. Зададим в первой вершине этого множества вектор, направленный внутрь компоненты U' и параллельный прямой ℓ_1. Отметим, что направление этого вектора всегда определено и притом однозначно, так как инцидентные вершине V_1 звенья границы компоненты U' принадлежат ломаной $\widetilde{L^2}$. В каждой вершине V_i, $i > 1$, зададим вектор, направленный внутрь компоненты U'' и параллельный прямой ℓ_i. Отметим, что направление этого вектора всегда однозначно определено по аналогичным соображениям. Очевидно, сдвигая вершины V_j вдоль построенных векторов, можно так продеформировать ломаную $\overline{S_i}$, что полученная в результате ломаная будет в общем положении с L^1. Обозначим через Θ_t^i деформацию ломаной $\widetilde{L^2}$, совпадающую с только что построенной на ломаной $\overline{S_i}$ и постоянную вне $\overline{S_i}$.

Посмотрим, как изменилось каноническое разбиение ломаной $\widetilde{L^2}$ при деформации Θ_t^i. По построению, полученная в результате деформации ломаная $\Theta_l^i(\overline{S_i})$ пересекается с ломаной L^1 ровно по одной точке, которая образует, очевидно, новый несущественный трансверсальный сингулярный элемент канонического разбиения. Таким образом, существенный трансверсальный сингулярный элемент S_i^2 перестроился в один несущественный трансверсальный сингулярный элемент.

Заметим, что при деформации Θ_t^i не меняются ни концевые тви-

стинги, ни кручение ломаной $\widetilde{L^2}$, ни индекс этой ломаной по отношению к L^1. Остается построить по деформациям Θ_t^i одну деформацию Θ_t, являющуюся результатом последовательного применения деформаций Θ_t^i. Ясно, что полученная деформация будет правильной 2-регуляризующей деформацией.

Итак, мы построили правильные 1-регуляризующую деформацию Ψ_t и 2-регуляризующую деформацию Θ_t. Из конструкции ясно, что последовательное применение деформаций Θ_t и Ψ_t порождает искомую правильную регуляризующую деформацию Φ_t. Доказательство предложения 4.16 полностью закончено.

Как и в случае общего положения, индекс одной ломаной по отношению к другой можно определить другим, иногда более удобным способом.

Пусть L^1 и L^2 — такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1. Как и в случае общего положения, мы хотим построить разбиение элементов канонического разбиения на классы. Начнем с регулярных элементов. Для них разбиение строится точно так же, как и в случае общего положения. А именно, пусть L_j^2 — произвольный внутренний регулярный элемент канонического разбиения, и Ω_j — соответствующая Ω-область.

Определение. Область Ω_j и соответствующий регулярный элемент L_j^2 называются *A-областью* и *A-элементом* соответственно, если Ω_j содержит точку A и не содержит B. Если Ω_j содержит B и не содержит A, то Ω_j и L_j^2 называются *B-областью* и *B-элементом*. Далее, если Ω_j содержит и A, и B, то Ω_j и L_j^2 называются *полными* или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A, ни B, то Ω_j и L_j^2 называются *пустыми* или *E-областью* и *E-элементом*.

Ясно, что каждый внутренний регулярный элемент канонического разбиения является или A-, или B-, или F-, или E-элементом. Как и в случае общего положения, продолжим это разбиение на концевые регулярные элементы (если они есть). Отметим, что концевая регулярная Ω-область не может содержать внутри себя одновременно точки A и B. Если концевая Ω-область содержит внутри себя точку A или B, то отнесем ее, соответственно, к A- или B-областям. В противном случае, если замыкание концевой Ω-области содержит точку A, то отнесем эту область к A-областям, иначе — к B-областям. В частности, если ломаные L^1 и L^2 пересекаются только по концевым точкам, т.е. каноническое разбиение состоит из одного концевого регулярного элемента и двух концевых сингулярных элементов, то отнесем этот

регулярный элемент и соответствующую Ω-область к A-областям, см. рис. 4.1. Таким образом, множество всех регулярных элементов канонического разбиения (соответственно, всех Ω-областей) разбито на четыре класса: A-, B-, F- и E-элементы (области).

Пусть теперь S_i^2 — сингулярный элемент канонического разбиения. Отнесем все внутренние сингулярные элементы к E-элементам. Концевой сингулярный элемент также отнесем к E-элементам, если и только если он является трансверсальным (т.е. он состоит из одной точки, или, другими словами, имеется регулярный концевой элемент, содержащий этот сингулярный). Если же концевой сингулярный элемент не совпадает с соответствующей концевой вершиной (т.е. является касательным), то отнесем этот элемент к A-элементам, если он содержит точку A, и к B-элементам в противном случае. Отметим, что сингулярный элемент не может содержать сразу обе точки A и B, так как ломаные L^1 и L^2 по предположению не совпадают как подмножества плоскости. Таким образом, построено разбиение множества всех элементов канонического разбиения на четыре класса.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Пусть $L^2 = \cup_{i=1}^N L_i$ — каноничсскос разбиснис ломаной L^2 относитсльно L^1, где через L_i обозначены последовательно занумерованные элементы канонического разбиения (как регулярные, так и сингулярные). Припишем теперь каждому элементу L_i букву $X_i^{\mathrm{sign}(L_i)}$, где буква X_i равна A, B, F или E в зависимости от того, к какому классу принадлежит элемент L_i, и $\mathrm{sign}(L_i)$ — знак этого элемента, определенный выше. Составим *слово* $W(L^2, L^1)$, записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\mathrm{sign}(L_1)} \cdots X_N^{\mathrm{sign}(L_N)}.$$

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв, и обозначим его через $\mathrm{Weight}(L^2, L^1)$. Буквы, входящие в слово в нулевой степени, договоримся не писать. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4.8 *Во введенных выше обозначениях,*

$$\mathrm{ind}(L^2, L^1) = \mathrm{Weight}(L^2, L^1).$$

Напомним, что в случае общего положения нами были получены оценки на индекс ломаной L^2 по отношению к L^1 в терминах количества A- и B-элементов, см. следствие 4.3. Чтобы получить аналогичные оценки в общем случае, нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 4.9 *Пусть L^1 и L^2 — пара произвольных не совпадающих ломаных, соединяющих точки A и B. Пусть Φ_t — правильная регуляризующая деформация ломаной L^2 относительно L^1. Тогда количества A-, B- и F-элементов, образованных ломаной L^2 по отношению к L^1, совпадают с соответствующими количествами A-, B- и F-элементов, образованных ломаной $\Phi_t(L^2)$ по отношению к L^1.*

Доказательство. В самом деле, отметим, что только регулярные элементы и концевые касательные сингулярные элементы не являются пустыми. При правильной регуляризующей деформации Φ_t каждый внутренний сингулярный элемент порождает не более одного регулярного элемента, который является пустым, и не порождает крайних элементов. Далее, крайний сингулярный A- или B-элемент порождает при деформации Φ_t регулярный A- или B-элемент соответственно. Наконец, регулярные элементы не переходят из класса в класс при регуляризующей деформации. Доказательство закончено.

Из утверждения 4.9, следствия 4.3, и того факта, что $\operatorname{ind}(L^2, L^1) = \operatorname{ind}(\Phi_t(L^2), L^1)$ по определению деформации Φ_t, получаем следующие оценки на индекс.

Пусть L^1 и L^2 — различные ломаные линии с общими концевыми вершинами A и B. Пусть, как и выше, Φ — это регуляризующая деформация ломаной L^2. Обозначим через $\overline{\Phi(L^2)}$ ломаную, редуцированную из $\Phi(L^2)$ (напомним, что $\Phi(L^2)$ и L^1 — в общем положении).

Следствие 4.10 *В сделанных выше обозначениях, рассмотрим канонические разбиения ломаных L^2 и $\overline{\Phi(L^2)}$ относительно L^1. Пусть p и q — количества A- и B-элементов канонического разбиения исходной ломаной L^2 относительно L^1. Тогда*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le p + q + 1.$$

Более того,

- *если канонические разбиения ломаных L^2 и $\overline{\Phi(L^2)}$ не содержат F-элементов, то*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le \max(p, q);$$

- *если каноническое разбиение ломаной L^2 не содержит F-элемента, а каноническое разбиение ломаной $\overline{\Phi(L^2)}$ содержит F-элемент, то*

$$|\operatorname{ind}(L^2, L^1)| \le p + q - 1.$$

В заключении данного раздела мы приведем еще несколько полезных оценок на кручение ломаной L, концевые точки A и B которой расположены на замкнутой ломаной W, ограничивающей выпуклый многоугольник σ. Обозначим через W^1 и W^2 те ломаные, на которые точки A и B разбивают W. Предположим, что ломаная L не содержится целиком в W, в частности, L не совпадает ни с W^1, ни с W^2. Имеет место следующий аналог следствия 4.4.

Утверждение 4.10 *В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:*

$$|\operatorname{tn} L| \le 3|\operatorname{ind}(L, W^1) + \operatorname{ind}(L, W^2)| + 6.$$

Доказательство. Ориентируем ломаные W^1 и W^2 от A к B. В силу предложения 4.16, имеем:

$$\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} W^1 + 6\operatorname{ind}(L, W^1) - \alpha(L, W^1) - \beta(L, W^1),$$
$$\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} W^2 + 6\operatorname{ind}(L, W^2) - \alpha(L, W^2) - \beta(L, W^2).$$

Рассматривая те же два случая, что и в доказательстве следствия 4.4, получим следующие неравенства для концевых твистингов:

$$|\alpha(L, W^1)+\alpha(L, W^2)| \le 3+|\operatorname{tw} A| \quad \text{и} \quad |\beta(L, W^1)+\beta(L, W^2)| \le 3+|\operatorname{tw} B|.$$

Кроме того, так как W ограничивает выпуклую область,

$$|\operatorname{tn} W^1 + \operatorname{tn} W^2| + |\operatorname{tw} A| + |\operatorname{tw} B| \le 6.$$

Теперь, складывая первые два равенства и используя сделанные выше оценки, получаем требуемое.

Нам также понадобится следующая модификация только что доказанного утверждения. В обозначениях утверждения 4.10, рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L относительно W. Предположим, что концевой сингулярный элемент L_1, содержащий точку A, не совпадает с точкой A, и, для определенности, является подломаной ломаной W^1. Как и выше, будем предполагать, что $L \not\subset W$, поэтому, в частности, $L_1 \ne W^1$. Для краткости, обозначим концевой сингулярный элемент L_1 через ℓ, и пусть A' — концевая вершина ломаной ℓ, отличная от A. Обозначим через $\overline{L}$ и $\overline{W^1}$ ломаные, полученные соответственно из L и W^1 выбрасыванием подломаной ℓ. Далее, обозначим через $\overline{W^2}$ ломаную, полученную из W^2 добавлением ломаной ℓ.

Утверждение 4.11 *В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:*

$$|\operatorname{tn} L| \le 3|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^2})| + 6.$$

Другими словами, в сделанных предположениях, при оценке кручения ломаной L, можно перейти к ломаной $\overline{L}$, сингулярные концевые элементы которой совпадают с соответствующими концевыми вершинами.

Доказательство. Ориентируем ломаные W^1 и W^2 от A к B. В силу предложения 4.16, имеем:

$$\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} W^1 + 6\operatorname{ind}(L, W^1) - \alpha(L, W^1) - \beta(L, W^1),$$
$$\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} W^2 + 6\operatorname{ind}(L, W^2) - \alpha(L, W^2) - \beta(L, W^2).$$

По определению индекса ломаной, $\operatorname{ind}(L, W^1) = \operatorname{sign}(\ell) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^1})$. С другой стороны, так как подломаная ℓ ломаной L пересекается с ломаной W^2 только по одной точке A, то $\operatorname{ind}(L, W^2) = \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^2})$. Наконец, по определению концевого твистинга, $\alpha(L, W^1) = 3\operatorname{sign}(\ell)$. Имея ввиду сделанные наблюдения, складывая предыдущие равенства и группируя слагаемые, получаем, что:

$$2\operatorname{tn} L = 6\big(\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^2})\big) - \big(\beta(L, W^1) + \beta(L, W^2)\big) + \\ + 3\operatorname{sign}(\ell) + \big(\operatorname{tn} W^1 + \operatorname{tn} W^2 - \alpha(L, W^2)\big).$$

Осталось заметить, что $|\beta(L, W^1) + \beta(L, W^2)| \le 3 + |\operatorname{tw} B|$ как и в доказательстве утверждения 4.10, где $\operatorname{tw} B$ — твистинг точки B как вершины ломаной W ориентированной одним из двух возможных способов; далее, $|3\operatorname{sign}(\ell)| = 3$; и, наконец, как и в доказательстве утверждения 4.10,

$$|\operatorname{tn} W^1 + \operatorname{tn} W^2| + |\alpha(L, W^2)| + |\operatorname{tw} B| \le 6,$$

так как ломаные W^1 и W^2 — это стыкующиеся в точках A и B "половинки"границы W выпуклого многоугольника, а $\alpha(L, W^2)$ совпадает с твистингом в вершине A ломаной W, ориентированной одним из двух возможных способов. Поэтому, получаем:

$$2|\operatorname{tn} L| \le 6\big|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^2})\big| + 3 + |\operatorname{tw} B| + \\ + 3 + |\operatorname{tn} W^1 + \operatorname{tn} W^2| + |\alpha(L, W^2)| \le \\ \le 6\big|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W^2})\big| + 12.$$

Разделив последнее неравенство на 2, получаем требуемое.

Оказывается, утверждение 4.10 можно существенно усилить, если предположить дополнительно, что ломаная L целиком лежит в многоугольнике σ.

Утверждение 4.12 *Пусть L — ломаная, лежащая в выпуклом многоугольнике σ, причем предположим, что концевые точки A и B ломаной L расположены на ограничивающей многоугольник σ ломаной W. Тогда кручение ломаной L по абсолютной величине не превосходит шести:* $|\operatorname{tn} L| \leq 6$.

Доказательство. Для доказательства построим специальную деформацию ломаной L. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — все внутренние вершины из L, попавшие на ломаную W. Зададим в каждой из вершин V_i вектор v_i, направленный внутрь многоугольника σ. Определим деформацию Φ_t, $t \in [0,\ 1]$, ломаной L, сдвигая каждую из вершин V_i вдоль соответствующего вектора v_i внутрь многоугольника σ. Ясно, что ломаные $\Phi_t(L)$, $t \in (0,\ 1]$, находятся в общем положении с ломаной W при фиксированных общих концевых вершинах. Поэтому для этих ломаных справедливо строгое неравенство:

$$|\operatorname{tn} \Phi_t(L)| < 6, \qquad t \in (0,\ 1].$$

Кроме того, очевидно, кручение ломаной $\Phi_t(L)$ непрерывно зависит от t. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to 0+$, получаем требуемое утверждение.

4.4 Геометрия плоских линейных деревьев

В разделе 4.2 мы подробно изучили связь между числом вращения плоских локально минимальных бинарных деревьев и числом уровней выпуклости граничного множества. Оказывается, эта связь имеет довольно глубокие корни. Как выяснилось, аналогичный результат имеет место для произвольных линейных деревьев на плоскости. В настоящем разделе мы определим понятие числа вращения $\operatorname{tw} \Gamma$ для произвольного линейного дерева Γ на плоскости, а также понятие геометрической границы $\partial_g \Gamma$ такого дерева. Эти две естественных характеристики произвольного линейного дерева оказываются связанными точно так же как в случае локально минимальных бинарных деревьев, см. предложение 4.10. При этом предложение 4.10 может быть получена как простое следствие осповпой теоремы пастоящего раздела (см. пиже теорему 6) и теоремы о локальной структуре минимальных бинарных деревьев. Более того, из той же теоремы 6 и теорем о локальной структуре параметрических локально минимальных деревьев и взвешенных

локально минимальных деревьев (см. главу 3) можно получить аналоги предложения 4.10 для этих классов минимальных деревьев, см. следствия 4.18, 4.20 и 4.21 ниже.

Итак, основным объектом изучения данного раздела будут плоские линейные деревья. Если G — произвольное дерево, т.е. связный граф без циклов, то *плоским линейным деревом типа* G или *топологии* G мы будем называть такое вложение графа G в плоскость, что образ каждого ребра из G представляет собой прямолинейный отрезок. На языке теории графов, плоское линейное дерево Γ типа G — это эквивалентный G плоский граф, все ребра которого — прямолинейные отрезки. Иногда Γ называют *плоской линейной укладкой дерева* G. Казалось бы, вопрос о плоских линейных укладках произвольных графов (а не только деревьев) давно и хорошо изучен: имеются критерии существования вложения в плоскость произвольного графа, например, теорема Понтрягина–Куратовского, и, более того, известна теорема Вагнера: если граф допускает некоторое вложение в плоскость, то он допускает и линейную плоскую укладку, см., например, [25]. Наконец, найдены алгоритмы, проверяющие существует ли у данного графа плоская укладка, и строящие соответствующий плоский граф, если ответ положителен.

Однако совсем иначе обстоит дело, если мы потребуем, чтобы искомая плоская линейная укладка графа G обладала какими-либо дополнительными геометрическими свойствами, например удовлетворяла условиям какой-нибудь теоремы о локальной структуре минимальной сети из главы 3. Сформулируем общую задачу, которая возникает при таком подходе.

Задача 4.1 (Граничная задача с заданными углами) *Пусть фиксирован граф G и граничное отображение $\beta\colon V \to M$ (здесь, как обычно, $M \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество точек плоскости, и V — подмножество множества вершин из G). Существует ли плоская линейная сеть Γ типа G, затягивающая множество M по граничному отображению β, такая что углы между некоторыми парами ребер из Γ удовлетворяет каким-либо заранее заданным ограничениям? Описать все графы G, для которых решение существует.*

Покажем, как из поставленной задачи получается как частный случай, например, задача о локально минимальных сетях на плоскости. Пусть G — произвольный граф, степени вершин которого не превосходят трех. Пусть фиксировано граничное отображение $\beta\colon V \to M$, и предположим, что V содержит все вершины из G степени 1 и 2. Задача о поиске плоской линейной сети Γ типа G, затягивающей множество M

по граничному отображению β, и такой что угол между любыми двумя соседними ребрами сети Γ больше или равен 120°, — это, в точности, задача поиска локально минимальной сети данного типа G с данной границей $\beta\colon V \to M$. В случае, если G — дерево, то для каждого граничного отображения β ответ можно получить, как мы уже видели в предыдущем разделе, с помощью алгоритма Хванга–Мелзака [35, 64].

Техника, которая будет развита в данном разделе, позволит нам доказать ряд результатов о геометрии плоских линейных деревьев, которые, в частности, дают возможность получать ограничения на возможные топологии деревьев G, допускающих линейные укладки с ограничениями на углы, см. ниже. В качестве следствий, как мы уже говорили, мы получим эффективные ограничения на возможные топологии плоских линейных деревьев, являющихся локально минимальными в смысле длины или взвешенной длины. Кроме того, на наш взгляд, доказанная нами общая теорема о плоских линейных деревьях имеет и самостоятельный интерес.

4.4.1 Число вращения плоского линейного дерева

Определим понятие числа вращения произвольного линейного дерева Γ. Пусть a и b — произвольные ребра из Γ. Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a,b)$ в Γ, начинающийся на a и заканчивающийся на b. Путь $\gamma(a,b)$, очевидно, представляет собой ориентированную ломаную на плоскости. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева* Γ назовем кручение ломаной $\gamma(a,b)$: $\operatorname{tw}(a,b) = \operatorname{tn}\gamma(a,b)$. Отметим, что так определенное число вращения ориентированной пары ребер обладает следующими свойствами:

- $\operatorname{tw}(a,b) = -\operatorname{tw}(b,a)$ (косая симметрия);
- $\operatorname{tw}(a,b)+\operatorname{tw}(b,c) = \operatorname{tw}(a,c)$ для любых ребер a, b и c из Γ, лежащих на одном пути в Γ (аддитивность вдоль путей);
- $\operatorname{tw}(a,a) = 0$.

Определение. *Числом вращения линейного дерева* Γ называется максимум чисел вращения по всем упорядоченным парам (a,b) ребер из Γ:

$$\operatorname{tw}\Gamma = \max_{(a,b)} \operatorname{tw}(a,b).$$

Замечание. Выше, при изучении геометрии локально минимальных бинарных деревьев, см.выше, а также [42, 43, 38], (а также при изучении минимальных взвешенных бинарных деревьев, см. [39], а также

ниже) мы определяли число вращения для произвольного плоского бинарного дерева. При этом, определенное в разделе 4.2 число вращения бинарного дерева было планарным инвариантом, т.е. было одинаковым для планарно эквивалентных бинарных деревьев.

Такое определение, на самом деле, было возможно, поскольку мы знали локальное устройство изучаемых локально минимальных сетей, а именно, знали величины углов, под которыми могут стыковаться их ребра. В рамках же рассматриваемой нами более общей задачи, ограничения на углы могут быть заданы в виде неравенств. Ясно, что, исходя из таких ограничений, нельзя адекватно определить число вращения между парой ребер дерева. (В качестве примера, можно рассмотреть задачу о минимальных взвешенных деревьях, у которых имеются вершины степени больше чем три.) Тем не менее, для каждого конкретного линейного дерева число вращения определяется естественным образом, что и сделано выше, и можно изучать, как изменяется число вращения внутри некоторого класса таких деревьев. Отметим, что для минимальных, а также взвешенных минимальных бинарных деревьев, определенное нами число вращения совпадает с числом вращения таких деревьев в смысле раздела 4.2 и 4.5 и работ [42, 43, 38, 39].

4.4.2 Геометрическая граница линейного дерева

Определим теперь понятие геометрической границы линейного дерева. Пусть Γ — линейное дерево, и P — произвольная вершина из Γ. Каждая прямая ℓ, проходящая через P, определяет пару полуплоскостей, которые мы будем называть *полуплоскостями, порожденными* ℓ.

Определение. Вершину P линейного дерева Γ назовем *граничной*, если существует проходящая через P прямая ℓ, такая что одна из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ, содержит все ребра из Γ, инцидентные P. Все остальные вершины из Γ будем называть *внутренними*. Множество всех граничных вершин дерева Γ назовем *геометрической границей* дерева Γ и обозначим через $\partial_g\Gamma$.

Замечание. Ниже, там где это не вызовет недоразумений, мы, для краткости, будем называть геометрическую границу линейного дерева просто границей, опуская слово “геометрическая”.

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать основную теорему настоящего раздела.

Теорема 6 *Пусть* Γ *— произвольное линейное дерево, и* $M = \partial_g\Gamma$ *— его геометрическая граница. Обозначим через* $\varkappa(M)$ *количество уровней выпуклости множества* $\partial_g\Gamma$. *Тогда*

$$\operatorname{tw}\Gamma \leq 12(\varkappa(M) - 1) + 6.$$

Более того, эта оценка является точной в следующем смысле. Для каждого целого $k \geq 1$ *существует плоское линейное дерево* Γ, *такое что* $\operatorname{tw}\Gamma = 12(k-1) + 6$, *и* $\varkappa(\partial_g\Gamma) = k$.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько шагов.

4.4.3 Правильные линейные деревья

В качестве первого шага, мы покажем, что достаточно доказать теорему 6 для специального класса так называемых правильных линейных деревьев.

Внутренние вершины произвольного линейного дерева Γ могут быть следующих трех типов. Внутренняя вершина P из Γ называется *устойчивой*, если для любой прямой ℓ, проходящей через P, каждая из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ, содержит ребра из Γ, инцидентные P. Внутренняя вершина степени два называется *фиктивной*, а внутренняя вершина степени больше чем два и не являющаяся устойчивой называется *неустойчивой*, см. рис. 4.13.

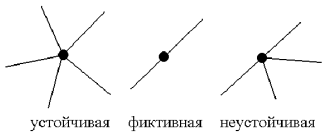


Рис. 4.13: Типы внутренних вершин.

Пусть Γ — произвольное линейное дерево. Рассмотрим произвольную фиктивную вершину V из Γ (если такая есть) и заменим пару ребер e_V и e'_V из Γ, инцидентных V, на одно "длинное" ребро, являющееся объединением отрезков e_V и e'_V. Ясно, что так перестроенная сеть снова является линейным деревом, которое совпадает с Γ как подмножество плоскости, однако содержит на одну фиктивную вершину меньше. Будем повторять описанную процедуру до тех пор, пока

не построим линейное дерево Γ', совпадающее с Γ как подмножество плоскости, но уже не имеющее фиктивных вершин. Будем говорить, что линейное дерево Γ' получено *укрупнением дерева* Γ. Дерево Γ' совпадает с Γ, как подмножество плоскости, поэтому, в частности, $\operatorname{tw}\Gamma = \operatorname{tw}\Gamma'$. Кроме того, по определению, совпадают и границы этих деревьев. Таким образом, следующее соглашение не ограничивает общности: *Всюду ниже будем рассматривать лишь линейные деревья, не содержащие фиктивных вершин.*

Далее, оказывается, произвольное линейное дерево Γ сколь угодно малой деформацией, неподвижной на границе дерева Γ, можно превратить в линейное дерево без неустойчивых внутренних вершин, переведя все неустойчивые внутренние вершины в устойчивые.

Предложение 4.17 *Пусть Γ — произвольное линейное дерево. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ существует линейное дерево Γ_r без неустойчивых внутренних вершин, такое что, $|\operatorname{tw}\Gamma - \operatorname{tw}\Gamma_r| < \varepsilon$, и множества $\partial_g\Gamma$ и $\partial_g\Gamma_r$ совпадают.*

Доказательство. Мы построим деформацию дерева Γ, изменяющую положение только его неустойчивых внутренних вершин.

Пусть V — произвольная внутренняя неустойчивая вершина из Γ. Тогда, по определению, существует ровно два инцидентных ей ребра из Γ, угол между которыми равен π. Эти ребра назовем *опорными ребрами вершины* V. Замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через опорные ребра вершины V, и содержащую все ребра из Γ, инцидентные V, назовем *опорной полуплоскостью вершины* V. Так как, напомним, мы предполагаем, что Γ не содержит фиктивных вершин, опорная полуплоскость однозначно определена для произвольной внутренней неустойчивой вершины.

Рассмотрим подграф Υ' дерева Γ, порожденный множеством всех неустойчивых внутренних вершин из Γ, т.е. подграф, множество вершин которого совпадает с множеством всех неустойчивых внутренних вершин дерева Γ, а множество ребер состоит из тех и только тех ребер из Γ, которые соединяют неустойчивые внутренние вершины. Так как мы строим деформацию, неподвижную на всех вершинах, кроме неустойчивых внутренних, то достаточно научиться строить эту деформацию для каждой связной компоненты графа Υ'. Иными словами, без ограничения общности будем предполагать, что Υ' — связен, т.е. является деревом.

Предположим сначала, что граф Υ' состоит из одной вершины V. Это означает, что все вершины из Γ, смежные с V, не являются неустойчивыми внутренними вершинами. Построим деформацию дерева

Г, неподвижную на всех вершинах из Г, отличных от V, и смещающую вершину V внутрь ее опорной полуплоскости. Ясно, что при любых достаточно малых смещениях эта деформация превращает вершину V в устойчивую внутреннюю вершину дерева Г и не меняет типы всех остальных вершин из Г.

Пусть теперь граф Υ' содержит по крайней мере две вершины. Добавим к графу Υ' все опорные ребра входящих в Υ' вершин. Полученное дерево обозначим через Υ. Отметим, что линейное дерево Υ может, вообще говоря, содержать фиктивные вершины, причем любая его вершина степени 2 является фиктивной. Обозначим через $\hat{\Upsilon}$ укрупнение дерева Υ. В силу сказанного выше, граф $\hat{\Upsilon}$ не имеет вершин степени 2, а все его вершины степени 1 не принадлежат Υ'.

Для доказательства предложения достаточно, очевидно, построить малую деформацию дерева Г, неподвижную на границе $\partial_g\Gamma$, переводящую несколько неустойчивых внутренних вершин в устойчивые внутренние вершины, и не меняющую тип остальных вершин дерева Г. Действительно, если такая деформация построена, то доказательство завершается индукцией по числу внутренних неустойчивых вершин.

Пусть V — некоторая вершина дерева Υ' степени 1. Ясно, что по определению дерева Υ, существует или одно, или два ребра из Υ, инцидентных V и не входящих в Υ'. Если таких ребра два, то V является вершиной графа $\hat{\Upsilon}$ и имеет в нем степень 3. Кроме того, среди вершин из Г, смежных с V, ровно одна вершина является неустойчивой внутренней вершиной, причем эта вершина принадлежит Υ'. Построим деформацию дерева Г, смещающую вершину V внутрь единственного инцидентного V неопорного ребра из $\hat{\Upsilon}$ и оставляющую неподвижными все остальные вершины из Г. Ясно, что при любых достаточно малых смещениях эта деформация превращает вершину V в устойчивую внутреннюю вершину дерева Г и не меняет типы всех остальных вершин из Г. Таким образом, если хотя бы одна из вершин дерева Υ' степени 1 инцидентна двум не входящим в Υ' ребрам дерева Υ, то искомая деформация дерева Г построена.

Рассмотрим теперь оставшуюся возможность: пусть для каждой вершины V из Υ' степени 1 существует ровно одно ребро из Υ, инцидентное V и не входящее в Υ'. В этом случае, очевидно, каждая такая вершина V является фиктивной вершиной графа Υ, и поэтому лежит внутри некоторого ребра e_V графа $\hat{\Upsilon}$. Отметим, что ребро e_V составлено из опорных ребер тех вершин дерева Г, которые лежат внутри e_V. Обозначим через A_V и A'_V вершины ребра e_V в $\hat{\Upsilon}$, при этом предположим, что A_V и V — смежны в Υ. Вершина A_V, очевидно, имеет в дереве $\hat{\Upsilon}$ степень 1. Для вершины A'_V это, вообще говоря, неверно. Мы начнем с того, что выберем среди вершин V подходящую для наших

целей вершину, которую будем обозначать через $\overline{V}$. Кроме того, мы определим отрезок E, который будет содержать ребро $e_{\overline{V}}$. После этой подготовительной работы, мы построим искомую деформацию дерева Г.

Пусть сначала степень вершины A'_V равна единице. Тогда, в силу связности дерева $\hat{\Upsilon}$, это дерево состоит из одного ребра e_V. Положим $\overline{V} = V$, и $E = e_V$.

Пусть теперь дерево $\hat{\Upsilon}$ состоит больше чем из одного ребра. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.16 *Пусть* Φ *— дерево, состоящее более чем из одного ребра и не имеющее вершин степени два. Тогда в* Φ *или существует вершина, смежная с не менее чем тремя вершинами степени* 1*, или существует вершина степени* 3*, смежная с двумя вершинами степени* 1*.*

Доказательство. Отрежем от Φ все ребра, инцидентные вершинам степени 1. По предположению, полученный в результате граф Φ' не пуст и является деревом. Если Φ' состоит из одной вершины, то Φ — звезда, количество ребер которой больше двух, поэтому единственная вершина из Φ степени больше 1 удовлетворяет условию леммы. Если же Φ содержит ребра, то условиям леммы удовлетворяет любая вершина из Φ, которой соответствует вершина степени 1 в Φ'. Лемма доказана.

В силу наших предположений, дерево $\hat{\Upsilon}$ удовлетворяет условиям леммы 4.16. Если в $\hat{\Upsilon}$ имеется вершина A', смежная с тремя или более вершинами степени 1, то среди этих вершин степени 1 имеется, очевидно, по крайней мере одна вершина A, такая что ребро AA' не является опорным для вершины A'. В этом случае мы положим $E = AA'$, и в качестве $\overline{V}$ выберем соответствующую вершину из Υ', смежную с A в Υ.

В противном случае, в $\hat{\Upsilon}$ имеется вершина A' степени 3, смежная двум вершинам степени 1. Здесь имеется две возможности: или одно или оба соответствующих граничных ребра являются опорными для A'. Если такое ребро одно, то обозначим через A граничную вершину инцидентную другому граничному ребру. Тогда снова ребро AA' не является опорным для A', и как и выше, мы положим $E = AA'$ и $\overline{V}$ — вершина из Υ', смежная с A. Если же оба граничных ребра, инцидентных A' являются опорными для A', то выберем в качестве отрезка E, отрезок, состоящий из этих двух опорных ребер вершины A'. В качестве вершины $\overline{V}$ возьмем любую из двух вершин степени 1 дерева Υ', лежащих на E.

Перейдем теперь к построению деформации. Ясно, что построенный нами отрезок E составлен из опорных ребер тех вершин дерева Γ, которые лежат внутри E. При этом все эти вершины являются фиктивными вершинами дерева Υ, кроме, быть может, одной вершины степени 3 (если отрезок E состоит из двух ребер дерева $\hat{\Upsilon}$, являющими опорными).

Обозначим через $\overline{V} = V_1, \ldots, V_n$ последовательные вершины дерева Υ, лежащие внутри отрезка E, и пусть $V_1, \ldots, V_p$ — максимальный начальный отрезок этой последовательности, такой что опорные полуплоскости вершин V_i для $1 \leq i \leq p$ совпадают. Обозначим через B вершину дерева Υ, смежную с V_p отличную от V_{p-1}.

Построим ломаную $L = \{A = W_0, W_1, \ldots, W_p, W_{p+1} = B\}$, такую что

1. ломаная L лежит в общей опорной полуплоскости вершин V_i, $1 \leq i \leq p$;
2. ломаная L, вместе с отрезком AB, ограничивает строго выпуклый многоугольник;
3. расстояние между точками V_i и W_i не превосходит ε;
4. если V_i является вершиной графа $\hat{\Upsilon}$, то выберем точку W_i на единственном неопорном для V_i ребре из $\hat{\Upsilon}$, инцидентном V_i (такое ребро, очевидно, существует и единственно, так как степень V_i в $\hat{\Upsilon}$ равна 3).

Построим деформацию линейного дерева Γ, постоянную на всех вершинах, за исключением $V_1, \ldots, V_p$, и переводящую каждую вершину V_i в соответствующую вершину W_i, $i = 1, \ldots, p$. Ясно, что при достаточно малом ε, эта деформация превращает вершины V_i, $i = 1, \ldots, p$, в устойчивые внутренние вершины дерева Γ, и не меняет тип других вершин из Γ, отличных от B.

Для вершины B существует три возможности:

1. или $p < n$, т.е. вершина $B = V_{p+1}$ является вершиной дерева Υ, лежащей внутри отрезка E, в частности, B — неустойчивая внутренняя вершина из Γ, опорная полуплоскость которой не совпадает с опорной полуплоскостью вершины V_p;
2. или $p = n$ и степень вершины B в дереве $\hat{\Upsilon}$ равна 1 (в этом случае B не является неустойчивой внутренней вершиной из Γ);
3. или $p = n$ и степень вершины B в дереве $\hat{\Upsilon}$ больше 1 (при этом, очевидно, вершина B — неустойчивая внутренняя вершина из Γ,

а единственное инцидентное B ребро дерева Γ, содержащееся в E, по построению не является опорным для B).

В первом случае внутренняя неустойчивая вершина B становится внутренней устойчивой вершиной. Во втором и в третьем случаях тип вершины B не меняется. Таким образом, искомая деформация дерева Γ построена.

Итак, нами построена сколь угодно малая неподвижная на границе деформация линейного дерева Γ, превращающая некоторое количество неустойчивых внутренних вершин дерева Γ в устойчивые внутренние вершины и не меняющая типы других вершин из Γ. Повторяя описанную процедуру до тех пор, пока не будут исчерпаны все неустойчивые внутренние вершины дерева Γ, мы построим искомое дерево Γ_r. Предложение доказано.

Замечание. Отметим, что при достаточно малом ε на каждом шаге описанной в доказательстве предложения 4.17 процедуры, вершины деформируемого дерева Γ смещаются внутри выпуклой оболочки вершин, остающихся неподвижными на этом шаге.

Определение. Линейное дерево Γ, не содержащее ни фиктивных, ни неустойчивых внутренних вершин, назовем *правильным.*

Из предложения 4.17 немедленно вытекает, что при доказательстве теоремы 6, можно ограничиться случаем правильных линейных деревьев. *Всюду ниже, не ограничивая общности, будем рассматривать лишь правильные линейные деревья.*

Замечание. Отметим, что все внутренние вершины правильного линейного дерева, по определению, являются устойчивыми.

Имеет место следующее простое, но полезное предложение.

Предложение 4.18 *Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево, и a и b — такие ребра из Γ, что $\operatorname{tw}(a,b) = \operatorname{tw}\Gamma$. Тогда ребра a и b необходимо являются граничными. Более точно, если $\gamma(a,b)$ — путь в Γ, начинающийся на ребре a и заканчивающийся на ребре b, то концевые вершины этого пути являются граничными.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть, скажем, ребро b не является граничным. Так как дерево Γ — правильное, то обе вершины, инцидентные ребру b, являются устойчивыми внутренними вершинами для Γ. Рассмотрим ломаную $\gamma = \gamma(a,b)$ — единственный путь в Γ от a к b, ориентируем γ от a к b, и пусть B — концевая вершина

ломаной γ. По предположению, вершина B из Γ является устойчивой внутренней вершиной. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через ребро b (и, в частности, через вершину B). Тогда, так как B — устойчивая внутренняя вершина, в каждой из порожденных прямой ℓ открытых полуплоскостей содержатся ребра из Γ, инцидентные B. Выберем в каждой из этих полуплоскостей по одному такому ребру и обозначим выбранные ребра через c_i, $i = 1, 2$. Рассмотрим ломаные $\gamma_i = \gamma \cup c_i$, ориентированные от a к c_i. Очевидно, что твистинги ломаных γ_i в вершине B отличны от нуля и противоположны по знаку, поэтому, или $\mathrm{tw}(a, c_1) > \mathrm{tw}(a, b)$, или $\mathrm{tw}(a, c_2) > \mathrm{tw}(a, b)$, что противоречит выбору ребер a и b. Доказательство закончено.

4.4.4 Квази-геодезические

В данном разделе вводится понятие квази-геодезической в правильном линейном дереве. Этот объект будет очень полезным при доказательстве теоремы 6.

Пусть Γ — правильное линейное дерево, P — произвольная внутренняя вершина из Γ, и l — произвольная прямая на плоскости. Мы начнем с доказательства следующего несложного факта.

Предложение 4.19 *В сделанных выше обозначениях, существует путь γ в Γ, соединяющий две граничных вершины из Γ, такой что $P \in \gamma$, и ортогональная проекция пути γ на прямую l взаимно однозначна с образом.*

Доказательство. Разобьем доказательство на две леммы.

Лемма 4.17 *По крайней мере одно из ребер сети Γ, инцидентных вершине P (обозначим его через e), однозначно проектируется на прямую l (т.е. ребро e не ортогонально l).*

Доказательство. В самом деле, в противном случае все ребра, инцидентные P, лежат на проходящей через P прямой $l^\perp$, ортогональной к l. Поэтому каждая из порожденных $l^\perp$ открытых полуплоскостей не содержит ребер из Γ, инцидентных P, что противоречит предположению о том, что вершина P — внутренняя вершина правильного линейного дерева, т.е. устойчивая внутренняя вершина. Лемма 4.17 доказана.

Лемма 4.18 *Пусть e — произвольное ребро линейного дерева Γ. Предположим, что e не ортогонально прямой l, и пусть P' — вершина из Γ, инцидентная e. Тогда, если P' не является граничной вершиной*

дерева Γ, *то среди ребер из* Γ, *инцидентных* P' *и отличных от* e, *найдется ребро* e', *такое что ортогональная проекция на прямую* l *пути, составленного из двух ребер* e *и* e', *взаимно однозначна с образом.*

Доказательство. Рассмотрим прямую $l^\perp$, проходящую через P' и перпендикулярную прямой l, и обозначим через Π_i, $i = 1, 2$, две открытых полуплоскости, порожденные $l^\perp$. Так как ребро e не ортогонально l, то оно лежит в одной из этих полуплоскостей, скажем в Π_1. Поскольку вершина P' является устойчивой внутренней вершиной дерева Γ, в полуплоскости Π_2 лежит некоторое ребро из Γ, инцидентное P'. Обозначим это ребро через e'. Очевидно, ребро e' так же не ортогонально прямой l.

Обозначим через $\nu\colon \mathbb{R}^2 \to l$ ортогональную проекцию плоскости на прямую l. Точка $\nu(P')$ разбивает прямую l на две компоненты, в одну из которых проектируется полуплоскость Π_1, а в другую — Π_2. Теперь ясно, что отрезки $\nu(e)$ и $\nu(e')$ пересекаются только по точке $\nu(P')$. Лемма 4.18 доказана.

Используя лемму 4.18, можно продолжить состоящий из одного ребра путь, найденный в лемме 4.17, до максимального пути, который, по лемме 4.18, будет ограничен некоторыми граничными вершинами дерева Γ. Предложение 4.19 доказано.

Определение. Путь γ в правильном линейном дереве Γ, соединяющий пару граничных вершин из Γ, и такой что существует прямая l на плоскости, ортогональная проекция пути γ на которую взаимно однозначна с образом, называется *квази-геодезической*. Прямая l в этом случае называется *направляющей квази-геодезической* γ.

Пусть теперь n — произвольный единичный вектор (т.е. некоторое направление), и пусть l — некоторая прямая, параллельная n. Пусть γ — некоторая квазигеодезическая с направляющей l в правильном линейном дереве Γ. Обозначим через A и B граничные вершины из Γ, которые соединяет γ, и пусть P — некоторая точка на γ. Точка P разбивает путь γ на две компоненты γ' и γ'' (если P совпадает с A или B, то одна из этих компонент — пуста). Снова обозначим через ν ортогональную проекцию плоскости на прямую l. Положим $A_l = \nu(A)$, $B_l = \nu(B)$, и $P_l = \nu(P)$. Предположим, что компонента γ'' не пуста, вектор P_lB_l сонаправлен с n, и B — концевая вершина пути γ''.

Определение. Построенная выше компонента γ'' называется *квази-геодезическим лучем, выпущенным из точки* P *в направлении* n. Далее, если a — ребро пути γ, содержащее P и пересекающееся с γ'' более

чем по точке, то γ'' называют также *квази-геодезическим лучом, выпущенным с ребра a сети Γ в направлении n.*

Из предложения 4.19 вытекает следующий результат.

Следствие 4.11 *Из любой внутренней вершины произвольного правильного линейного дерева в любом направлении можно выпустить квази-геодезический луч. С любого ребра произвольного правильного линейного дерева в любом направлении, не перпендикулярном этому ребру, можно выпустить квази-геодезический луч.*

В качестве первого приложения разработанной техники, мы докажем следующее полезное предложение, являющееся обобщением классического результата о плоских минимальных деревьях (см. [9, 30, 69]).

Предложение 4.20 *Пусть Γ — произвольное линейное дерево, $\partial_g\Gamma = M$ — его геометрическая граница, и σ — выпуклая оболочка множества M. Тогда $\Gamma \subset \sigma$.*

Доказательство. Пусть сначала Γ — правильное линейное дерево. Докажем предложение "от противного". Предположим, что существует точка P из Γ, лежащая вне σ.

Лемма 4.19 *Пусть σ — произвольный выпуклый многоугольник, и Γ — произвольное правильное линейное дерево. Если Γ не лежит целиком в σ, то существует граничная вершина из Γ, лежащая вне σ.*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка из Γ, лежащая вне σ. Если P не является вершиной сети Γ, то рассмотрим ребро e из Γ, содержащее P. Поскольку σ — выпуклый многоугольник, а $P \notin \sigma$, то одна из вершин сети Γ, инцидентных ребру e, также не принадлежит σ, поэтому, без ограничения общности, можно сразу предполагать, что точка P — это вершина сети Γ. Если P — граничная вершина, то утверждение леммы выполнено. Предположим, что вершина P не принадлежит $\partial_g\Gamma$. Тогда, так как Γ — правильное линейное дерево, вершина P является устойчивой внутренней вершиной.

Итак, пусть P — устойчивая внутренняя вершина. Пусть l — некоторая прямая, отделяющая точку P от выпуклого многоугольника σ. Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости, которые мы обозначим через Π' и Π''. Пусть, для определенности, $P \in \Pi'$. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в полуплоскость Π'. Выпустим из внутрешей вершины P квази-геодезический луч γ в направлении n. Ясно, что γ не пересекает σ, поэтому концевая вершина луча γ, принадлежащая $\partial_g\Gamma$ в силу леммы 4.18, лежит вне σ. Лемма доказана.

Из предположения о существовании точки $P \in \Gamma$, лежащей вне σ, и леммы 4.19 немедленно вытекает, что вне выпуклой оболочки множества M расположена точка из M — противоречие, что и доказывает предложение 4.20 для случая правильных линейных деревьев.

Пусть теперь Γ — произвольное линейное дерево. Повторив для него процедуру, описанную в доказательстве предложения 4.17, продеформируем Γ сколь угодно малой деформацией в правильное линейное дерево Γ_r. Для дерева Γ_r предложение 4.20 уже доказано, поэтому все дерево Γ_r, и, в частности, все его внутренние вершины, лежат в выпуклой оболочке границы $\partial_g\Gamma_r$ дерева Γ_r. Напомним, что граница дерева Γ_r совпадает по построению с границей исходного дерева Γ, поэтому, дерево Γ_r лежит в выпуклой оболочке множества $\partial_g\Gamma$. Будем последовательно деформировать дерево Γ_r обратно в дерево Γ. На каждом шаге этой деформации граница $\partial_g\Gamma$ остается на месте, и, как было отмечено при доказательстве предложения 4.17, все подвижные вершины перемещаются в выпуклой оболочке неподвижных вершин. Таким образом, при этой деформации все вершины деформируемого дерева не выходят за пределы выпуклой оболочки множества $\partial_g\Gamma$, что и требовалось. Доказательство закончено.

В заключение данного раздела мы приведем одно элементарное свойство ломаных, взаимно однозначно проектируемых на некоторую прямую, которое будет использоваться нами в дальнейшем.

Утверждение 4.13 *Пусть γ — некоторая ломаная, и предположим, что существует прямая l, ортогональная проекция ломаной γ на которую взаимно однозначна с образом. Ориентируем ломаную γ и прямую l в одном направлении. Последнее означает, что углы между векторами-звеньями ломаной γ и вектором-направлением n прямой l меньше чем $\pi/2$. Пусть a — первое, и b — последнее звено ломаной γ. Положим $\alpha = \operatorname{tw}(n, a)$, т.е. α равно деленной на $\pi/3$ величине ориентированного угла от вектора n к вектору a, и, аналогично, $\beta = \operatorname{tw}(n, b)$. Тогда $\operatorname{tn}\gamma = \beta - \alpha$. В частности, $|\alpha| < 3/2$, $|\beta| < 3/2$, и $|\operatorname{tn}\gamma| < 3$.*

Доказательство. Справедливость утверждения немедленно вытекает из существования многоугольника, образованного ломаной γ и тремя последовательными сторонами, средняя из которых параллельна l, а две других — перпендикулярны l, см. рис. 4.14.

Из утверждения 4.13 немедленно вытекает следующий важный для нас факт.

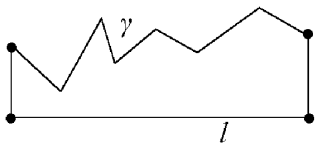


Рис. 4.14: Многоугольник, образованный γ и l.

Следствие 4.12 *Кручение произвольной квази-геодезической строго меньше* 3.

4.4.5 Шапочки

В данном разделе мы обобщим понятие шапочки на случай произвольных ломаных.

Пусть L^1 — произвольная замкнутая ломаная, и L^2 — произвольная незамкнутая ломаная. Построим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1. Обозначим через σ область, ограниченную ломаной L^1. Тогда каждый внутренний регулярный элемент L_j канонического разбиения, лежащий вне многоугольника σ, называется *регулярной шапочкой*. Концевой регулярный элемент называется *регулярной шапочкой*, если он лежит вне области σ, а обе его концевые вершины лежат на ломаной L^1.

Далее, внутренний сингулярный элемент L_i канонического разбиения называется *сингулярной шапочкой*, если оба примыкающих к L_i регулярных элемента лежат в σ. Концевой сингулярный элемент называется *сингулярной шапочкой*, если, во-первых, он отличен от концевой точки, и, во-вторых, единственный соседний с ним внутренний регулярный элемент лежит в σ. В дальнейшем мы иногда будем говорить просто о шапочках, имея в виду как регулярные, так и сингулярные шапочки.

Пусть L_j — некоторая регулярная шапочка, и A_j и B_j — концевые вершины L_j. Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаных, которые мы обозначим через L' и L''. Рассмотрим области σ' и σ'', ограниченные парами ломаных (L_j, L') и (L_j, L'') соответственно. Тогда одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $\sigma' \subset \sigma''$.

Определение. Открытая область σ', построенная выше, называется

H-областью, соответствующей регулярной шапочке L_j, и обозначается через $H(L_j)$. Ломаную L' назовем *основанием* (как для L_j, так и для $H(L_j)$), и обозначим через $b(L_j)$. Замыкание области $H(L_j)$ будем обозначать через $\overline{H}(L_j)$, и называть *$\overline{H}$-множеством*, соответствующим регулярной шапочке L_j.

Ясно, что $\partial H(L_j) = L_j \cup b(L_j)$, и $\overline{H}(L_j) = H(L_j) \cup \partial H(L_j)$.

Пусть теперь L_i — сингулярная шапочка. *Основанием $b(L_i)$ сингулярной шапочки L_i* будем называть саму ломаную L_i. Удобно также определить для сингулярных шапочек понятие $\overline{H}$-множества, положив $\overline{H}(L_i) = b(L_i) = L_i$.

Рассмотрим теперь произвольное правильное линейное дерево Γ. Пусть $\partial_g\Gamma = M$ — геометрическая граница дерева Γ, и L^1 — замкнутая ломаная, являющаяся границей некоторого уровня выпуклости M^l множества M. Пусть незамкнутая ломаная L^2 — это некоторый путь в дереве Γ. Построим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1.

Шапочка L_i, образованная ломаной $L^2 \subset \Gamma$ по отношению к L^1, называется *существенной*, или если она регулярная, или если она сингулярная и, к тому же, содержит хотя бы одну внутреннюю вершину дерева Γ. В противном случае, шапочка называется *несущественной*. Таким образом, шапочка L_i называется несущественной если и только если она сингулярна, и все вершины ломаной $L_i \subset \Gamma$ являются граничными вершинами правильного линейного дерева Γ. Отметим, что все вершины несущественной шапочки L_i необходимо лежат на одном и том же уровне выпуклости.

Замечание. В отличие от случая общего положения, путь $L^2 \subset \Gamma$ может образовывать шапочки и по отношению к первому, т.е. самому внешнему уровню выпуклости множества $M = \partial_g\Gamma$. Однако, очевидно, каждая такая шапочка является несущественной.

Пусть, как и выше, M^t — это t-ый уровень выпуклости граничного множества $M = \partial_g\Gamma$ правильного линейного дерева Γ. Пусть σ^t — выпуклая оболочка множества M^t, а W^t — граница многоугольника σ^t, т.е. $W^t = \partial\sigma^t$. Через $\mathrm{int}(\sigma^t)$ обозначим внутренность многоугольника σ^t, т.е. $\mathrm{int}(\sigma^t) = \sigma^t \setminus W^t$. Снова положим $\sigma = \sigma^1$, и $W = W^1$. Пусть L^2 — произвольный путь в дереве Γ (в частности, L^2 — некоторая незамкнутая ломаная). В силу предложения 4.20, ломаная L^2 целиком содержится в σ.

Определение. Существенная шапочка, образованная L^2 по отношению к W^t, называется *t-шапочкой*.

Пусть L_i — некоторая t-шапочка (в частности, шапочка L_i — существенная). Заметим, что если ломаная L_i образует также и некоторую s-шапочку, то, во-первых, $s \leq t$, а, во-вторых, ломаная L_i образует также и r-шапочки для всех r, $s \leq r \leq t$. Существует такое наименьшее число s_0, что ломаная L_i образует s_0-шапочку. Другими словами, s_0 — такое число, что ломаная L_i образует некоторую s_0-шапочку и не образует $(s_0 - 1)$-шапочек (еще раз напомним, что все t-шапочки существенны по определению).

Определение. В сделанных только что обозначениях, число s_0 называется *индексом t-шапочки L_i*. Каждая из существенных s_0 шапочек, образованных ломаной L_i, называется *верхушкой t-шапочки L_i*. Верхушка L' называется *регулярной*, если шапочка L' регулярна, и *сингулярной* в противном случае.

Замечание. Геометрический смысл понятия индекса существенной шапочки ясен из следующего рассмотрения. Предположим, что t-шапочка L_i пересекает множество $\sigma \setminus \mathrm{int}(\sigma^s)$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \mathrm{int}(\sigma^{s-1})$ для некоторого s. Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i образует шапочку по отношению к W^s, но не образует шапочки по отношению к W^{s-1}. Возможны следующие два случая.

1. Хотя бы одна из s-шапочек, образованных ломаной L_i, является существенной. Тогда индекс t-шапочки L_i равен s.

2. Все s-шапочки, образованные ломаной L_i, являются несущественными. Тогда, как вытекает из нижеследующей леммы, индекс t-шапочки равен $s + 1$.

Лемма 4.20 *Если, в сделанных выше предположениях, ломаная L_i не образует существенных s-шапочек, т.е. реализуется второй случай, то ломаная L_i образует существенную $(s + 1)$-шапочку.*

Доказательство. В самом деле, так как ломаная L_i образует существенную t-шапочку, но не образует существенных s-шапочек, то $t \neq s$, поэтому $t > s$. Далее, ломаная L_i пересекает $\sigma \setminus \sigma^{s+1}$, так как она пересекает даже меньшее множество $\sigma \setminus \mathrm{int}(\sigma^s)$, поэтому L_i образует по крайней мере одну регулярную шапочку по отношению к W^{s+1}. Это и есть искомая существенная $(s + 1)$-шапочка. Лемма доказана.

Замечание. Пусть L_i — некоторая t-шапочка, и L' — некоторая ее верхушка. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L_i)$. Тем не менее, следующее утверждение имеет место.

Утверждение 4.14 *Пусть L_i и L_j — две t-шапочки, и $\overline{H}(L_i) \subset \overline{H}(L_j)$. Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда, для любой верхушки T_i меньшей шапочки L_i, найдется верхушка T_j большей шапочки L_j, такая что $\overline{H}(T_i) \subset \overline{H}(T_j)$.*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим произвольную верхушку T_i меньшей шапочки L_i. Так как $T_i \subset \overline{H}(L_i) \subset \overline{H}(L_j)$, существует верхушка T_j большей шапочки L_j, такая что $T_i \subset \overline{H}(T_j)$, откуда немедленно следует, что $\overline{H}(T_i) \subset \overline{H}(T_j)$, что и требовалось.

Мы используем следствие 4.11 о квазигеодезических для доказательства следующего важного предложения.

Предложение 4.21 *Пусть Γ — некоторое правильное линейное дерево. Рассмотрим произвольный путь L в Γ, и пусть σ^t — выпуклая оболочка некоторого уровня выпуклости M^t границы $M = \partial_g\Gamma$ дерева Γ. Обозначим через W^t замкнутую ломаную, ограничивающую σ^t. Рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L по отношению к W^t, и пусть L_j — некоторая регулярная шапочка, образованная ломаной L по отношению к W^t. Тогда*

1. *если соответствующая Π-область $\Pi(L_j)$ содержит точку пути L, то $H(L_j)$ также содержит точку из границы $M = \partial_g\Gamma$ дерева Γ;*

2. *если внутренность основания $b(L_j)$ шапочки L_j содержит вершину пути L, являющуюся внутренней вершиной дерева Γ, то $H(L_j)$ содержит точку из границы $M = \partial_g\Gamma$ дерева Γ.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение предложения. Пусть некоторая точка P из L лежит внутри области $H(L_j)$. Если P не является вершиной сети Γ, то рассмотрим ребро e из Γ, содержащее P. Поскольку σ — выпуклый многоугольник, а $P \notin \sigma$, то одна из вершин сети Γ, инцидентных ребру e, также не принадлежит σ. Однако, с другой стороны, ребро e не может пересекать L_j, так как дерево Γ не содержит циклов. Поэтому эта вершина необходимо содержится в $H(L_j)$, и, поэтому, без ограничения общности, мы можем сразу предполагать, что точка P — это вершина сети Γ. Если P — граничная вершина, то утверждение предложения выполнено. Предположим теперь, что вершина P не принадлежит $\partial_g\Gamma$. Тогда, так как Γ — правильное дерево, вершина P является его внутренней устойчивой вершиной.

Итак, пусть P — внутренняя устойчивая вершина. Пусть l — некоторая прямая, отделяющая точку P от выпуклого многоугольника σ.

Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости, которые мы обозначим через Π' и Π''. Пусть, для определенности, $P \in \Pi'$. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в полуплоскость Π'. Выпустим из вершины P квази-геодезический луч γ в направлении n. Ясно, что γ не пересекает σ. Но с другой стороны, γ не может пересечь и L_j (в противном случае дерево Γ содержит цикл, что невозможно). Поэтому γ заканчивается внутри области $H(L_j)$, и, в частности, концевая точка луча γ, принадлежащая $\partial_g\Gamma$, лежит в $H(L_j)$. Первое утверждение предложения доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Пусть V — некоторая внутренняя вершина дерева Γ, принадлежащая пути L и лежащая внутри основания $b(L_j)$ шапочки L_j. Так как многоугольник σ — выпуклый, существует прямая l, проходящая через V, и такая что многоугольник σ целиком лежит в одной из ограниченных l замкнутых полуплоскостей. Обозначим через n вектор, перпендикулярный прямой l и направленный во вторую полуплоскость, т.е. "от σ". Выпустим геодезический луч γ из V в направлении n. Этот геодезический луч целиком лежит в $H(L_j)$ (луч γ не может пересекать L_j так как дерево Γ не содержит циклов, и, по построению, не возвращается на σ). Поэтому, в частности, в $H(L_j)$ лежит граничная вершина, являющаяся концевой вершиной этого геодезического луча. Предложение доказано.

Из предложения 4.21 вытекают следующие важные следствия.

Следствие 4.13 *Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево, $M = \partial_g\Gamma$ — его геометрическая граница, и пусть L — некоторый путь в Γ. Пусть L' — некоторая регулярная шапочка, образованная путем L по отношению к какому-нибудь уровню выпуклости множества M, а $\hat{L}'$ — регулярная верхушка шапочки L' (если такая есть). Тогда*

1. *соответствующая H-область верхушки $\hat{L}'$ не пересекается с L, другими словами, $\Pi(\hat{L}') \cap L = \emptyset$;*

2. *внутри основания $b(\hat{L}')$ верхушки $\hat{L}'$ не содержится вершин пути L, являющихся внутренними вершинами дерева Γ.*

Доказательство. Если $H(\hat{L}')\cap L$ не пусто, то, в силу предложения 4.21, область $H(\hat{L}')$ содержит точки из M. Последнее невозможно, так как $\hat{L}'$ — верхушка. Первое утверждение следствия доказано. Второе утверждение доказывается точно так же.

Следствие 4.14 *Пусть* Γ *— произвольное правильное линейное дерево,* $M = \partial_g \Gamma$ *— его геометрическая граница, и пусть* L *— некоторый путь в* Γ*. Предположим, что* L *образует две существенных шапочки* L' *и* L'' *по отношению к некоторому уровню выпуклости* M^t *множества* M*, причем* $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L'')$*. Тогда индексы шапочек* L' *и* L'' *различны.*

В частности, если $L^1, \ldots, L^m$ *— некоторые существенные шапочки, образованные* L*, и такие что*

$$\overline{H}(L^1) \subset \cdots \subset \overline{H}(L^m),$$

а L^1 *является* t*-шапочкой, то* $m < t$*.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть L' и L'' — две t-шапочки, $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L'')$, и индексы шапочек L' и L'' совпадают и равны s. Пусть T' — произвольная верхушка меньшей шапочки L'. Тогда, в силу утверждения 4.14, существует такая верхушка T'' большей шапочки L'', что $\overline{H}(T') \subset \overline{H}(T'')$. Очевидно, что s-шапочка T'' регулярна. Если s-шапочка T' также регулярна, то H-область регулярной верхушки T'' содержит точки из ломаной $T' \subset L$, что противоречит утверждению 1 следствия 4.13. Если же s-шапочка T' сингулярна, то она, очевидно, целиком лежит внутри основания шапочки T''. Поэтому основание регулярной верхушки T'' содержит лежащую на пути L внутреннюю вершину из Γ (напомним, что s-шапочка T' — существенная по определению). Последнее противоречит утверждению 2 следствия 4.13.

Второе утверждение следствия немедленно вытекает из первого. Действительно, индекс шапочки L_1 не больше чем t, индексы шапочек L_i убывают, поэтому индекс последней шапочки — L_m, не больше чем $\operatorname{ind} L_1 - (m-1)$, и, в итоге,

$$\operatorname{ind} L_m \leq \operatorname{ind} L_1 - (m-1) \leq t - m + 1.$$

Осталось заметить, что, по определению, 1-шапочек не существует, поэтому, в частности, индекс шапочки L_m строго больше 1, следовательно $1 < t - m + 1$. Доказательство закончено.

Теперь все готово, чтобы перейти непосредственно к доказательству теоремы 6.

4.4.6 Доказательство теоремы 6

Фиксируем основные обозначения. Пусть Γ — линейное дерево, $M = \partial_g \Gamma$ — множество граничных точек дерева Γ, и пусть M имеет $\varkappa$ уровней выпуклости. Мы хотим доказать, что тогда $\operatorname{tw} \Gamma \leq 12(\varkappa - 1) + 6$.

Прежде всего, мы будем предполагать без ограничения общности (см. предложение 4.17), что дерево Γ является правильным.

Пусть a и b — некоторые ребра из правильного линейного дерева Γ, такие что $\operatorname{tw}\Gamma = \operatorname{tw}(a,b)$. В силу предложения 4.18, ребра a и b — граничные. Обозначим через L единственный путь в Γ, соединяющий a и b, и ориентируем L от a к b. Тогда $\operatorname{tn} L = \operatorname{tw}\Gamma$. Обозначим через A и B концевые вершины пути L, инцидентные a и b соответственно. При этом, обе точки A и B принадлежат M.

Пусть M^t — t-ый уровень выпуклости множества M. Предположим, что $A \in M^p$, $B \in M^q$, и пусть $p \le q$.

Обозначим через σ^t выпуклую оболочку множества M^t, и через W^t — границу множества σ^t: $\partial\sigma^t = W^t$. Как и выше, будем обозначать через $\operatorname{int}(\sigma^t)$ внутренность многоугольника σ^t. Для краткости положим $\sigma = \sigma^1$, и $W = W^1$.

Пусть $S^t = \sigma^t \setminus \sigma^{t+1}$. Если множество σ^{t+1} не пусто, то множество S^t двусвязно (т.е. гомотопно окружности), ограничено W^t и W^{t+1}, причем $W^t \subset S^t$, а $W^{t+1} \cap S^t = \emptyset$.

Мы отдельно рассмотрим две возможности: или $p = q$, или $p < q$. Начнем с первого случая.

4.4.7 Случай $p = q$

Если $p = q = 1$, т.е. путь L начинается и заканчивается на границе W выпуклой оболочки σ внешнего уровня выпуклости M^1, то, в силу утверждения 4.12, $|\operatorname{tn} L| \le 6$, и утверждение теоремы имеет место. Поэтому, в дальнейшем, мы будем считать, что $p = q \ge 2$.

Далее, если ломаная L целиком лежит на границе W^p выпуклого многоугольника σ^p, то, очевидно, $|\operatorname{tn} L| \le 6$, и утверждение теоремы снова имеет место. Поэтому ниже мы предполагаем, что $L \not\subset W^p$.

Обозначим через W_1 и W_2 те части замкнутой ломаной W^p, на которые ее разбивают точки A и B. Так как $L \not\subset W^p$, то, в частности, L не совпадает ни с W_1, ни с W_2. Рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L относительно W^p. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — множества, состоящие из всех p-шапочек (существенных по определению), образованных L, таких что их $\overline{H}$-множества содержат точки A и B соответственно. Очевидно, $\overline{H}$-множества шапочек, принадлежащих $\mathcal{H}_A$ (соответственно, $\mathcal{H}_B$), упорядочены по включению. Поэтому, из следствия 4.14 вытекает следующий результат.

Предложение 4.22 *Каждое из множеств $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ состоит не более чем из $p-1$ элемента.*

Непосредственно из построения вытекает следующее:

1. все p-шапочки, порожденные L и не принадлежащие ни $\mathcal{H}_A$, ни $\mathcal{H}_B$, являются пустыми элементами канонического разбиения ломаной L или относительно W_1, или относительно W_2;

2. каждый *внутренний* не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2, является регулярным, и содержит, по крайней мере, одну (существенную) шапочку из $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$; более того, разные такие непустые элементы содержат различные шапочки из $\mathcal{H}$;

3. каждый концевой не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2, может быть как регулярным, так и сингулярным. Он может образовывать шапочку, а может и не образовывать. Если рассматриваемый элемент образует шапочку, то эта шапочка может быть как существенной, так и несущественной.

Уже исходя из этих несложных наблюдений можно было бы получить оценку на индексы $\mathrm{ind}(L, W_i)$, однако эта оценка оказывается слишком грубой для доказательства теоремы. Поэтому необходимы немного более тонкие рассуждения, проясняющие ситуацию, описанную в пункте 3. Для того, чтобы сделать это, нам понадобится слегка подправить ломаную L.

Коррекция ломаной L

Рассмотрим произвольную шапочку, соответствующую произвольному пустому элементу L_j, образованному L по отношению к одной из ломаных W_i, $i = 1, 2$. Мы назовем такую шапочку *пустой шапочкой*. Шапочка называется *строго пустой*, если соответствующее $\overline{H}$-множество не содержит $\overline{H}$-множеств, порожденных другими пустыми шапочками ломаной L. Ясно, что всегда существует строго пустая шапочка $\overline{H}(L')$, образованная ломаной L по отношению к W_i, и содержащаяся в $\overline{H}(L_j)$.

Выше, в разделе 4.1, мы определили элементарные деформации для случая ломаных в общем положении. Эти деформации, напомним, позволяли последовательно избавляться от строго пустых областей. Это делалось в два шага: сначала строго пустая область, образованная ломаной L^2 относительно L^1, вытеснялась на свое основание, а затем — основание "снималось" с ломаной L^1. В общем случае для уничтожения регулярной строго пустой шапочки можно воспользоваться точно такой же деформацией. Если же строго пустая шапочка сингулярна, то она, по определению, совпадает со своим основанием, поэтому, чтобы ее уничтожить, не надо делать первый шаг элементарной деформации.

Второй шаг определяется точно так же, как и в случае ломаных общего положения. Итак, мы определили деформации произвольных ломаных, которые, так же, как и в случае ломаных общего положения, мы будем называть *элементарными деформациями.*

Применим к строго пустой шапочке $\overline{H}(L')$ элементарную деформацию и перестроим L так, чтобы полученная ломаная образовывала, по отношению к W_i, одной строго пустой шапочкой и, значит, одним пустым элементом меньше. Ясно, что при такой элементарной деформации не меняются ни направления концевых ребер пути L, ни шапочки, принадлежащие $\mathcal{H}$ (последнее имеет место, так как элементы разбиения, смежные с элементом L', лежат в многоугольнике σ^p и, поэтому, не принадлежат к p-шапочкам из $\mathcal{H}$). Повторяя этот процесс до тех пор, пока все пустые шапочки не будут уничтожены, и используя тот факт, что кручение ломаной L не меняется при элементарных деформациях, получим следующее предложение.

Предложение 4.23 *Существует деформация ломаной L, неподвижная на всех непустых шапочках и сохраняющая направления граничных ребер ломаной L, такая что полученная в результате ломаная не образует пустых шапочек. Ни кручение ломаной L, ни концевые твистинги, при этой деформации не меняются.*

Таким образом, можно предполагать, без ограничения общности, что L не образует пустых шапочек.

Теперь, с помощью утверждения 4.11, избавимся от касательных концевых сингулярных элементов (если такие есть) как по отношению к W_1, так и по отношению к W_2. Обозначим через $\overline{L}$ ломаную, полученную из L выбрасыванием касательных концевых сингулярных элементов (если они есть). Ориентируем ломаную $\overline{L}$ в соответствие с ориентацией ломаной L, и пусть A' и B' — начальная и конечная вершины ломаной $\overline{L}$. Обозначим через $\overline{W_1}$ и $\overline{W_2}$ ломаные, на которые точки A' и B' разбивают W^p. При этом, ломаная $\overline{W_i}$, $i = 1, 2$, получается из W_i добавлением и/или выбрасыванием концевых касательных сингулярных элементов ломаной L. Имеет место следующая очевидная лемма.

Лемма 4.21 *В сделанных выше предположениях, пусть L_i — некоторая шапочка, образованная ломаной L по отношению к W^p. Тогда соответствующее $\overline{H}$-множество или содержит обе точки A и A', или не содержит ни одной из этих точек. Аналогично, это $\overline{H}$-множество или содержит обе точки B и B', или не содержит ни одной из этих точек.*

Таким образом, из построения и из леммы 4.21 вытекает, что $\overline{L}$, во-первых, не имеет концевых касательных сингулярных элементов, т.е. образует, по отношению к каждой $\overline{W_i}$, четыре концевых элемента, два из которых — регулярны, и, во-вторых, ломаная $\overline{L}$, так же, как и L, не содержит пустых шапочек по отношению к W.

Определим теперь числа n_i, $i = 1, 2$, так. Положим n_i равным количеству не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ концевых областей, образованных ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$. Очевидно, $n_i \leq 2$ по определению. Далее, напомним, что ломаная $\overline{L}$ ориентирована от A' к B'. Обозначим через n_f общее количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ первых регулярных элементов разбиений $\overline{L}$ относительно как $\overline{W_1}$, так и $\overline{W_2}$. Аналогично, через n_l обозначим количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ последних, не совпадающих с первыми, регулярных элементов этих разбиений. Очевидно, $n_f \leq 2$, $n_l \leq 2$, и $n_1 + n_2 = n_f + n_l$. Оказывается, если ломаная $\overline{L}$ не образует пустых шапочек и концевых касательных сингулярных элементов, то имеет место следующая более сильная оценка.

Предложение 4.24 *Пусть ломаная $\overline{L}$ не образует пустых шапочек по отношению к W^p, а также не образует концевых касательных сингулярных элементов. Тогда, в сделанных выше обозначениях, имеет место следующее неравенство:*

$$n_1 + n_2 = n_f + n_l \leq 2.$$

Доказательство. В тривиальном случае, когда ломаная $\overline{L}$ пересекает ломаную W^p лишь в точках A' и B', имеем очевидно две возможности: или ломаная $\overline{L}$ целиком лежит в σ^p, и тогда $n_1 = n_2 = 1$, $n_f = 2$, $n_l = 0$ (для каждой $\overline{W_i}$ имеется всего одна (первая) концевая область, не содержащая шапочку), поэтому $n_1 + n_2 = 2$; или ломаная L целиком лежит вне σ^p, и тогда $n_1 = n_2 = n_f = n_l = 0$ (для каждой W_i имеется всего одна (первая) концевая область, содержащая шапочку), поэтому $n_1 + n_2 = 0$.

Предположим теперь, что имеется хотя бы одна точка пересечения ломаных $\overline{L}$ и W^p, отличная от A' и B'. Рассмотрим первый регулярный элемент L_1 канонического разбиения ломаной $\overline{L}$ относительно ломаной W^p (по предположению, этот элемент содержит A'). Предположим сначала, что L_1 лежит вне многоугольника σ^p. В этом случае, очевидно, первые регулярные элементы разбиения $\overline{L}$ по отношению к ломаным $\overline{W_i}$ содержат шапочки из $\mathcal{H}$, поэтому каждое из чисел n_i, $i = 1, 2$, не превосходит единицы, откуда $n_1 + n_2 \leq 2$. Кроме того, очевидно, в этом случае $n_f = 0$.

Пусть теперь L_1 лежит внутри σ^p, и предположим, для определенности, что конец ломаной L_1 принадлежит $\overline{W_1}$ (напомним, что ломаная $\overline{L}$, и значит все элементы канонического разбиения, ориентированы от A' к B'). Тогда первый концевой регулярный элемент разбиения $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_1}$ не содержит шапочки. Обозначим через L_2 — следующий регулярный элемент канонического разбиения $\overline{L}$ относительно W^p. Если L_2 лежит внутри σ^p, то сингулярный элемент S, расположенный между L_1 и L_2, образует пустую шапочку, что противоречит определению ломаной $\overline{L}$. Поэтому элемент L_2 лежит вне многоугольника σ^p, поэтому образует шапочку, которая по нашему предположению не пуста. Наконец, ясно что первый регулярный элемент канонического разбиения ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_2}$ в этом случае содержит $L_1 \cup L_2$, поэтому он содержит непустую шапочку, т.е. шапочку из $\mathcal{H}$, откуда $n_f \leq 1$.

Таким образом, вне зависимости от расположения первого элемента ломаной $\overline{L}$, имеет место неравенство $n_f \leq 1$. Аналогично можно показать, что $n_l \leq 1$, откуда окончательно получаем: $n_f + n_l \leq 2$. Предложение доказано.

Обозначим через n_i^A количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ регулярных концевых A'-элементов разбиения ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$, и, аналогично, через n_i^B — количество не содержащих шапочек из $\mathcal{H}$ регулярных концевых B'-элементов разбиения ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$. Очевидно, $n_1^A + n_1^B = n_1$, и $n_2^A + n_2^B = n_2$, поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.15 *В сделанных выше обозначениях,*

$$n_1^A + n_2^A + n_1^B + n_2^B \leq 2.$$

Замечание. Из определений немедленно вытекает, что количество A'-элементов, образованных ломаной $\overline{L}$ по отношению к ломаной $\overline{W_i}$, не превосходит $n_i^A + \#(\mathcal{H}_A)$, а количество B'-элементов, образованных ломаной $\overline{L}$ по отношению к ломаной $\overline{W_i}$, не превосходит $n_i^B + \#(\mathcal{H}_B)$, где через $\#(X)$ обозначается количество элементов во множестве X.

При разборе случая $p < q$ нам понадобится следующее уточнение предложения 4.24.

Следствие 4.16 *Пусть, как и выше, ломаная $\overline{L}$ не образует пустых шапочек по отношению к W^p, а также не образует концевых касательных сингулярных элементов. Предположим дополнительно, что одно из граничных ребер ломаной $\overline{L}$ лежит вне σ^p. Тогда*

- $n_1 + n_2 \le 1$;
- $n_i + \max(n_j^A, n_j^B) \le 1$ *при* $i \ne j$;
- $\max(n_1^A, n_1^B) + \max(n_2^A, n_2^B) \le 1$.

Доказательство. В самом деле, из доказательства предложения 4.24 (см. выше) вытекает, что если один из концевых регулярных элементов канонического разбиения ломаной $\overline{L}$ относительно W^p лежит вне области σ^p, то или $n_f = 0$, или $n_l = 0$. Кроме того, как показано выше, оба эти числа не превосходят единицы, откуда $n_1 + n_2 \le 1$. Осталось заметить, что так как

$$n_1^A + n_2^A + n_1^B + n_2^B = n_1 + n_2 \le 1,$$

то лишь одно из четырех чисел n_i^A и n_i^B может равняться 1, а остальные — необходимо равны нулю. Отсюда вытекают оставшиеся два неравенства. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь канонические разбиения ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$. Имеются следующие возможности.

(1.) Разбиение ломаной $\overline{L}$ относительно $\overline{W_i}$ содержит F-элемент. Тогда, в силу предложения 4.22, общее количество A'- и B'-элементов не превосходит $2(p-1)-2+n_i$, так как, по меньшей мере, одна из шапочек, входящих в $\mathcal{H}_A$ (соответственно, в $\mathcal{H}_B$), порождена F-элементом. Поэтому, в силу следствия 4.10, имеем:

$$|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_i})| \le 2(p-2) + n_i + 1 = 2p - 3 + n_i.$$

(2.) Разбиение ломаной $\overline{L}$ относительно $\overline{W_i}$ не содержит F-элемента. Тогда, как количество A'-областей, так и количество B'-областей, не превосходит $(p-1) + \max(n_i^A, n_i^B)$. Здесь возможны два случая.

(2,а.) После регуляризации и редукции ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$ каноническое разбиение полученной ломаной снова не содержит F-элемента. Тогда, в силу следствия 4.10, имеем:

$$|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_i})| \le p - 1 + \max(n_i^A, n_i^B) \le 2p - 3 + \max(n_i^A, n_i^B),$$

при $p \ge 2$.

(2,б.) После регуляризации и редукции ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W_i}$ каноническое разбиение полученной ломаной содержит F-элемент. Тогда, в силу следствия 4.10, имеем:

$$|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_i})| \le p - 1 + n_i^A + p - 1 + n_i^B - 1 \le 2p - 3 + n_i.$$

Оценим сумму $|\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_1})+\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_2})|$, для чего сложим соответствующие оценки. Напомним, что, в силу предложения 4.24, $n_1+n_2\le 2$. Далее, из неравенства $\max(n_i^A,n_i^B)\le 1$ вытекает, что $\max(n_1^A,n_1^B)+\max(n_2^A,n_2^B)\le 2$. Наконец, $n_i+\max(n_j^A,n_j^B)\le n_1+n_2\le 2$. Итак, во всех случаях получаем, что

$$|\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_1})+\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_2})|\le 2(2p-3)+2=4(p-1).$$

Теперь, воспользовавшись утверждением 4.11, имеем:

$$|\operatorname{tn} L|\le 3\,|\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_1})+\operatorname{ind}(\overline{L},\overline{W_2})|+6\le 3\cdot 4(p-1)+6=12(p-1)+6,$$

т.е. $|\operatorname{tn} L|\le 12(p-1)+6$. Основная теорема доказана в случае $p=q$.

4.4.8 Случай $p<q$

Итак, пусть теперь $p<q$. Разобьем ломаную L следующим образом. Первый фрагмент, L_1, — это часть ломаной L между точкой $A=A_1$ и такой первой точкой $B_1\in L$, что вся оставшаяся часть ломаной L между B_1 и B лежит в замкнутом многоугольнике σ^p. Другими словами, L_1 — это минимальная связная часть ломаной L, содержащая A и такая, что $L\setminus L_1$ целиком содержится в σ^p. Отметим, что L_1 может состоять из одной точки $A_1=B_1$.

Второй фрагмент L_2 ломаной L — это часть ломаной L между точкой $A_2=B_1$ и такой первой точкой B_2, что вся оставшаяся часть ломаной L, начиная с B_2, лежит в замкнутом многоугольнике σ^{p+1}. Другими словами, B_2 — это первая точка на L, такая что $L\setminus(L_1\cup L_2)\subset\sigma^{p+1}$.

Далее, для $i>1$ и такого, что $p+i-1\le q$, т.е. $i\le q-p+1$, определим фрагмент L_i ломаной L как часть L между $A_i=B_{i-1}$ и такой первой точкой B_i, что оставшаяся часть ломаной L от B_i до B содержится в замкнутом многоугольнике σ^{p+i-1}.

Последний фрагмент разбиения — L_{q-p+2}, совпадает с оставшейся частью ломаной L, если эта часть не пуста.

Итак, мы построили разбиение ломаной L на участки L_1, L_2, … , L_{q-p+2}, такие что каждый фрагмент L_i соединяет точки A_i и B_i, где A_1, $B_1\in W^p$, $A_i=B_{i-1}\in W^{p+i-2}$, и $B_i\in W^{p+i-1}$ при $1\le i\le q-p+1$, причем $L_i\subset\sigma^{p+i-2}$ при $2\le i\le q-p+1$. Кроме того, A_{q-p+2} и B_{q-p+2} принадлежат W^q, и $L_{q-p+2}\subset\sigma^q$. Обозначим через a_i и b_i концевые ребра ломаной L_i, инцидентные точкам A_i и B_i соответственно. Отметим, что, по определению, ребро b_i, $i=1,\dots,(q-p+1)$, пересекает границу W^{p+i-1} выпуклого многоугольника σ^{p+i-1} по единственной точке B_i.

Предположим, что точка B_i, $i = 1, \ldots, q-p+1$, пересечения ломаной L с ломаной W^{p+i-1} является внутренней точкой некоторого звена ломаной L. Тогда начальный сингулярный элемент ломаной L_i, $i = 2, \ldots, q-p+2$, так же, как и конечный элемент предыдущей ломаной L_{i-1}, является трансверсальным (состоит из одной точки), и, более того, $\mathrm{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$. В частности, из этого предположения вытекает, что первый и последний фрагменты L_1 и L_{q-p+2} содержат, по крайней мере, по одному ребру. Путь L, обладающий указанным свойством, назовем *хорошим*. Мы сначала докажем теорему для хорошего пути L, а затем рассмотрим общий случай.

Итак, в сделанных предположениях, для доказательства теоремы достаточно показать следующее:

1. имеет место неравенство: $\mathrm{tn}\, L_1 \leq 12(p-1) + 3$;

2. для каждого из фрагментов L_i, $i = 2, \ldots, q-p+1$, выполнено: $\mathrm{tn}\, L_i \leq 12$;

3. для последних двух фрагментов L_{q-p+1} и L_{q-p+2} справедлива оценка: $|\,\mathrm{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2})| \leq 15$.

Используя перечисленные оценки и тот факт, что $\mathrm{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$ при $i = 2, \ldots, q-p+2$, получим утверждение теоремы:

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{tn}\, L\big| = \Big|\mathrm{tn}\, L_1 + \sum_{i=2}^{q-p} \mathrm{tn}\, L_i + \mathrm{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2})\Big| \leq \\ \leq 12(p-1) + 3 + 12(q-p-1) + 15 = 12(q-1) + 6.\end{aligned}$$

Перейдем к реализации указанного плана.

Шаг (1)

Так как концевые вершины ломаной L_1 лежат на одной и той же ломаной W^p, кручение ломаной L^1 не превосходит, как мы уже доказали выше, $12(p-1)+6$. Однако, такая оценка оказывается слишком грубой. Усилим эту оценку, используя тот факт, что фрагмент L_1 приходит на W^p в точке B_1 снаружи по-отношению к σ^p. А именно, имеет место следующая оценка.

Предложение 4.25 *В сделанных выше предположениях, справедливо следующее неравенство:* $|\,\mathrm{tn}\, L_1| \leq 12(p-1) + 3$.

Доказательство. Как и при доказательстве случая $p = q$, можно, во-первых, предполагать, что L_1 не образует пустых шапочек по отношению к W^p, и, во-вторых, перейти к ломаной $\overline{L_1}$, которая, к тому же, не образует касательных концевых сингулярных элементов по отношению к W^p. Обозначим, как и выше, через $\overline{W_1}$ и $\overline{W_2}$ компоненты замкнутой ломаной W^p, на которые ее разбивают концевые точки A_1' и B_1' ломаной $\overline{L_1}$. Обозначим через $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{A_1}$, $\mathcal{H}_{B_1}$, $n_i^{A_1}$, $n_i^{B_1}$, и n_i те же объекты, что и при разборе случая $p = q$.

Так как концевое звено ломаной $\overline{L_1}$ лежит, очевидно, вне области σ^p, мы находимся в условиях следствия 4.16. Используя те же оценки для индекса ломаной $\overline{L_1}$ по отношению к $\overline{W_i}$, что и в случае $p = q$, и заменяя предложение 4.24 следствием 4.16, получаем:

$$|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_2})| \leq 2(2p-3) + 1 = 4(p-1) - 1.$$

Теперь, в силу утверждения 4.11, имеем:

$$|\operatorname{tn} L| \leq 3\,|\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_2})| + 6 \leq 3 \cdot 4(p-1) - 3 + 6 = 12(p-1) + 3.$$

Предложение 4.25 доказано.

Шаг (2)

Оценим кручение каждого из L_i, $2 \leq i \leq q - p + 1$, доказав следующее предложение.

Предложение 4.26 *В сделанных выше обозначениях, если* $2 \leq i \leq q - p + 1$, *то* $|\operatorname{tn} L_i| \leq 12$.

Доказательство. Ориентируем L_i от A_i к B_i. Напомним, что мы обозначили через a_i и b_i соответственно первое и последнее ребра из L_i. Далее, напомним, что $A_i \in W^{p+i-2}$, а $B_i \in W^{p+i-1}$. Обозначим через B_i' инцидентную ребру b_i вершину из L_i, отличную от B_i, т.е. $b_i = B_i' B_i$.

Пусть l — такая прямая, проходящая через точку B_i, что многоугольник σ^{p+i-1} и точка B_i' лежат в разных полуплоскостях, порожденных этой прямой. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный l и направленный в полуплоскость, содержащую B_i', т.е. "вне σ^{p+i-1}". Пусть γ — квази-геодезический луч, выпущенный с ребра сети Γ, содержащего b_i, в направлении n (такой луч существует в силу следствия 4.11). Ясно, что γ пересекает W^{p+i-1} только в точке B_i, и, более того, γ необходимо пересекает W^{p+i-2}. Обозначим через C первую вдоль γ точку пересечения с W^{p+i-2}. Часть γ между B_i и C снова обозначим через γ.



Рис. 4.15: Оценка кручения фрагмента L_i.

Предположим сначала, что $\gamma \subset L_i$. Обозначим через $L_i[A_i, C]$ часть ориентированного пути L_i от A_i до C. Тогда, в силу утверждения 4.12, имеем: $|\operatorname{tn}(L_i[A_i, C])| \leq 6$. Далее, по следствию 4.12, $|\operatorname{tn}\gamma| \leq 3$. Поэтому

$$|\operatorname{tn} L_i| = |\operatorname{tn}(L_i[A_i, C]) + \operatorname{tw} C + \operatorname{tn}\gamma| \leq 6 + 3 + 3 = 12,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $\gamma \not\subset L_i$. Положим $\gamma' = L_i \cap \gamma$. Ясно, что γ' связно, так как Γ не имеет циклов, и, кроме того, $\gamma' \supset b_i$. Далее, обозначим через L_i' замыкание $L_i \setminus \gamma'$, а через γ'' — замыкание $\gamma \setminus \gamma'$. Точки A_i и C делят ломаную W^{p+i-2} на две компоненты. Обозначим через W' ту из них, которая, вместе с ломаными L_i' и γ'', ограничивает множество σ', не содержащее точки B_i; оставшуюся компоненту обозначим через W'', см. рис. 4.15.

Обозначим через $\overline{\gamma}$ ломаную $W' \cup \gamma$, ориентированную от точки A_i. Рассмотрим каноническое разбиение ломаной L_i относительно ломаной $\overline{\gamma}$, и пусть Ω — первая Ω-область, порожденная ломаной L_i относительно ломаной $\overline{\gamma}$. Обозначим через α начальный твистинг ломаной L_i относительно $\overline{\gamma}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.22 *В сделанных выше обозначениях,*

$$\operatorname{tn} L_i = \operatorname{tn}\overline{\gamma} - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega).$$

Доказательство. В самом деле, по построению, ломаная L_i целиком лежит в выпуклом многоугольнике σ^{p+i-2} и пересекается с $\overline{\gamma}$ только по подломаной γ' и по некоторым подломаным из W'. Поэтому, очевидно, каждая компонента из $L_i \cap W'$ порождает касательный сингулярный элемент канонического разбиения ломаной L_i относительно ломаной $\overline{\gamma}$. Легко построить деформацию Φ ломаной L_i, такую что

1. деформация Φ не меняет направления концевых звеньев ломаной L_i;

2. полученная в результате ломаная $\Phi(L_i)$ по-прежнему целиком лежит в многоугольнике σ^{p+i-2};

3. каноническое разбиение ломаной $\Phi(L_i)$ относительно $\overline{\gamma}$ состоит из трех элементов (другими словами, ломаная $\Phi(L_i)$ пересекается с ломаной $\overline{\gamma}$ лишь по некоторому начальному и концевому участкам).

В самом деле, чтобы построить такую деформацию Φ, достаточно сместить все вершины внутренних сингулярных элементов канонического разбиения ломаной L_i относительно $\overline{\gamma}$ внутрь многоугольника σ^{p+i-2}. Ясно, что деформация Φ не меняет кручение ломаной L_i.

Чтобы завершить доказательство леммы, осталось воспользоваться предложением 4.16 и вычислить индекс $\operatorname{ind}(\Phi(L_i), \overline{\gamma})$. По построению, каноническое разбиение ломаной $\Phi(L_i)$ относительно $\overline{\gamma}$ состоит из трех элементов, из которых два элемента — это начальный и конечный сингулярные элементы L_A и L_B, а один — регулярный элемент ℓ. Отметим, что, по построению, знак единственного регулярного элемента ℓ совпадает с определенным выше знаком $\operatorname{sign}(\Omega)$. Далее, концевой сингулярный B_i-элемент L_B всегда является касательным — он совпадает с γ'. Кроме того, по построению, элемент L_B лежит вне области Ω. Поэтому, как легко показать, его знак противоположен знаку регулярного элемента ℓ и равен $-\operatorname{sign}(\Omega)$. Концевой твистинг $\beta(\Phi(L_i), \overline{\gamma})$ равен $-3\operatorname{sign}(\Omega)$ по определению. Учитывая все вышесказанное, получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{tn}(\Phi(L_i)) &= \operatorname{tn}\overline{\gamma} + 6\operatorname{ind}(\Phi(L_i), \overline{\gamma}) - \alpha(\Phi(L_i), \overline{\gamma}) - \beta(\Phi(L_i), \overline{\gamma}) = \\ &= \operatorname{tn}\overline{\gamma} + 6\big(\operatorname{sign}(L_A) + \operatorname{sign}(\Omega) - \operatorname{sign}(\Omega)\big) - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega) = \\ &= \operatorname{tn}\overline{\gamma} + 6\operatorname{sign}(L_A) - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega).\end{aligned}$$

Напомним, что, по предположению, начальный сингулярный элемент канонического разбиения ломаной L_i относительно W^{p+i-2} является трансверсальным, поэтому элемент L_A — тоже трансверсальный элемент. Тогда $\operatorname{sign}(L_A) = 0$, и

$$\operatorname{tn}(\Phi(L_i)) = \operatorname{tn}\overline{\gamma} - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega),$$

что и доказывает утверждение леммы.

Вернемся к доказательству предложения. Ориентируем ломаную γ от точки C к B_i и обозначим через β твистинг ломаной $\overline{\gamma}$ в точке

C. Так как $\operatorname{tn}(\overline{\gamma}) = \operatorname{tn}\gamma + \beta + \operatorname{tn} W'$, в сделанных выше обозначениях получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tn} L_i &= \operatorname{tn}\overline{\gamma} - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega) = \\ &= \big(\beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega)\big) + \operatorname{tn}\gamma + \operatorname{tn} W'. \end{aligned} \qquad (*)$$

Заметим, что знак концевого твистинга α в этом случае совпадает со знаком области Ω. В самом деле, $\operatorname{sign}(\Omega)$ — это знак направления движения по границе области Ω при ее обходе в соответствие с ориентацией ломаной L_i. При этом движении мы, в частности, сворачиваем в точке A_i с первого звена w ломаной $\overline{\gamma}$, взятого с противоположной ориентацией, на первое звено a_i ломаной L_i. По определению, знак твистинга α — это знак репера $(-w,\ a_i)$. Осталось заметить, что вектор-звено a_i — это вектор-звено из ориентированной ломаной L_i, а вектор $-w$ направлен вне области Ω. Далее, знак твистинга β противоположен знаку области Ω по аналогичным соображениям. Наконец, $|\alpha| \le 3$, и $|\beta| \le 3$. Поэтому заключаем, что $|\beta + 3\operatorname{sign}(\Omega) - \alpha| \le 3$. Наконец, $|\operatorname{tn}\gamma| \le 3$, а $|\operatorname{tn} W'| \le 6$, поэтому

$$|\operatorname{tn} L_i| \le \big|\beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega)\big| + |\operatorname{tn}\gamma| + |\operatorname{tn} W'| \le 12.$$

Предложение доказано.

Шаг (3)

Нам будет полезен следующий результат. Пусть W — замкнутая ломаная, ограничивающая выпуклый многоугольник σ, и пусть L — ломаная, лежащая в σ и соединяющая точки $A \in W$ и $B \in W$. Предположим, что $L \not\subset W$. Ориентируем ломаную L от A к B, и обозначим через a и b начальное и конечное звенья ломаной L соответственно. Ориентируем ломаную W в соответствие с положительным направлением обхода многоугольника σ. Точки A и B разбивают ломаную W на две ориентированных подломаных. Обозначим через W' ту из этих подломаных, движение по которой от B к A происходит в положительном направлении. Через W'' обозначим вторую компоненту ломаной W. Рассмотрим каноническое разбиение ломаной L относительно W', и пусть α и β — начальный и конечный твистинги ломаной L относительно W'.

Лемма 4.23 *В сделанных только что предположениях, имеет место следующая оценка:*

$$\operatorname{tn} L \le 6 - \alpha.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.22, продеформируем ломаную L так, чтобы (1) полученная в результате ломаная

$\Phi(L)$ пересекалась с ломаной W лишь по начальному и концевому участкам, и (2) кручение ломаной не изменилось бы: $\operatorname{tn} L = \operatorname{tn} \Phi(L)$. Рассмотрим каноническое разбиение ломаной $\Phi(L)$ относительно ломаной W', ориентированной, как обычно, от A к B. Это разбиение состоит из трех компонент, которые мы обозначим, как и при доказательстве леммы 4.22, через L_A, ℓ и L_B. При этом элемент ℓ является регулярным, а элементы L_A и L_B — сингулярные концевые элементы. Снова воспользуемся предложением 4.16. Заметим, что по построению знак единственного регулярного элемента ℓ равен $+1$. Имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{tn}(L) &= \operatorname{tn}(W') + 6\big(\operatorname{sign}(L_A) + \operatorname{sign}(\ell) + \operatorname{sign}(L_B)\big) - \alpha - \beta = \\ &= 6 - \alpha + \big(6\operatorname{sign}(L_A) + 6\operatorname{sign}(L_B) + \operatorname{tn}(W') - \beta\big).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что в последнем соотношении выражение, стоящее в скобках, не превосходит нуля.

Покажем, что $\operatorname{sign}(L_A) \le 0$. В самом деле, если элемент L_A является трансверсальным, то $\operatorname{sign}(L_A) = 0$, а если элемент L_A является касательным, то, очевидно, ломаная $L_A \subset W'$ лежит вне порожденной регулярным элементом ℓ области Ω, и $\operatorname{sign}(L_A) = -\operatorname{sign}(\ell) = -1$. Аналогично, $\operatorname{sign}(L_B) \le 0$. Далее, $\operatorname{tn}(W') \le 0$, так как ломаная W' — это часть границы выпуклого многоугольника σ, причем, при движении вдоль W' от A к B мы обходим многоугольник σ в отрицательном направлении. Наконец, $6\operatorname{sign}(L_B) - \beta \le 0$. Действительно, если элемент L_B является касательным, то $\beta = 3\operatorname{sign}(L_B)$, поэтому $6\operatorname{sign}(L_B) - \beta = 3\operatorname{sign}(L_B)$, а $\operatorname{sign}(L_B) \le 0$. Если же L_B — трансверсален, то знак твистинга β — это знак репера $(b,\ -w)$, где b — это последнее вектор-звено ломаной L, а w — последнее вектор-звена ломаной W' (обе ломаные ориентированы от A к B). Знак же репера $(b,\ -w)$ положителен. Осталось вспомнить, что, в этом случае, $\operatorname{sign}(L_B) = 0$, поэтому $6\operatorname{sign}(L_B) - \beta = -\beta \le 0$. Лемма доказана.

Наконец, докажем следующий результат.

Предложение 4.27 *Если фрагмент L_{q-p+2} не пуст, то*

$$|\operatorname{tn} L_{q-p+1} + \operatorname{tn} L_{q-p+2}| \le 15.$$

Доказательство. Прежде всего, для определенности, предположим, что мы оцениваем кручение сверху (те же рассуждения можно применить и для получения оценки снизу, если предварительно произвести отражение плоскости относительно некоторой прямой).

Рассмотрим ломаную W^q, ориентированную против часовой стрелки. Точки $A_{q-p+2} = B_{q-p+1}$ и B_{q-p+2} разбивают эту ломаную на две компоненты. Обозначим через W'_q ту из них, движение по которой от B_{q-p+2} к A_{q-p+2} происходит в положительном направлении. Ориентируем ломаную W'_q от точки $A_{q-p+2} = B_{q-p+1}$ к точке B_{q-p+2}. Первое вектор-звено ломаной W'_q обозначим через w.

Рассмотрим прямую l, проходящую через ребро w, и обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в ту из ограниченных прямой l открытых полуплоскостей, которая не содержит многоугольник σ^q. Проделаем для ломаной L_{q-p+1} построения, описанные в доказательстве предложения 4.26 для ломаной L_i и сохраним введенные там обозначения, см. рис. 4.15.

Обозначим через c первое вектор-звено ориентированного от C к B_{q-p+1} пути γ. Обозначим через τ_b и τ_c деленные на $\pi/3$ ориентированные углы между векторами $(-n, b_{q-p+1})$ и векторами $(-n, c)$ соответственно. Тогда, по построению, $|\tau_b| < 3/2$, $|\tau_c| < 3/2$, и, в силу утверждения 4.13, $\operatorname{tn}\gamma = \tau_b - \tau_c$.

Обозначим через ε начальный твистинг ломаной L_{q-p+2} относительно W'_q. Тогда,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \operatorname{tw}(-w, a_{q-p+2}) = \operatorname{tw}(-w, b_{q-p+1}) = \\ &= \operatorname{tw}(-w, -n) + \operatorname{tw}(-n, b_{q-p+1}) = 3/2 + \tau_b.\end{aligned}$$

Поэтому $\tau_b = \varepsilon - 3/2$.

Используя все эти соображения, формулу $(*)$ и лемму 4.23, получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2}) &= \operatorname{tn} L_{q-p+1} + \operatorname{tn} L_{q-p+2} \\ &= \operatorname{tn}(W') + \operatorname{tn}\gamma + \beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega) + \operatorname{tn} L_{q-p+2} \\ &= \operatorname{tn}(W') + \tau_b - \tau_c + \beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega) + \operatorname{tn} L_{q\ \ p\,|\,2} \\ &= \operatorname{tn}(W') + \operatorname{tn} L_{q-p+2} + (\varepsilon - 3/2) + \beta - \alpha + \\ &\qquad + 3\operatorname{sign}(\Omega) - \tau_c \le \\ &\le 6 + (6 - \varepsilon) + (\varepsilon - 3/2) + \big(\beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega)\big) - \tau_c \\ &= 10 + 1/2 + \big(\beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega)\big) - \tau_c.\end{aligned}$$

При доказательстве предложения 4.26 было показано, что $|\beta - \alpha + \operatorname{sign}(\Omega)| \le 3$. Кроме того, как было отмечено выше, $|\tau_c| < 3/2$. Итак,

$$\begin{aligned}\operatorname{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2}) &\le 10 + 1/2 + \big(\beta - \alpha + 3\operatorname{sign}(\Omega)\big) - \tau_c \le \\ &\le 10 + 1/2 + 3 + 3/2 = 15.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Итак, теорема 6 полностью доказана в предположении, что путь L хороший.

4.4.9 Завершение доказательства теоремы в общем случае

Для завершения доказательства теоремы 6, очевидно, достаточно перестроить произвольное правильное дерево Γ в новое правильное линейное дерево Γ', обладающее следующими свойствами.

1. Граница $M' = \partial_g \Gamma'$ дерева Γ' состоит из того же количества уровней выпуклости, что и граница $\partial_g \Gamma$ дерева Γ, т.е. $\varkappa(M') = \varkappa(M)$.

2. В дереве Γ' имеется путь L', начинающийся на p-ом уровне выпуклости множества M', заканчивающийся на q-ом уровне выпуклости множества M', и получающийся из исходного пути $L \subset \Gamma$ деформацией ломаных. При этом, кручение пути L' совпадает с кручением пути L.

3. Путь L' — хороший путь в дереве Γ'.

Опишем алгоритм такой перестройки. Начнем со следующего очевидного утверждения. Пусть Γ — произвольное, не обязательно правильное, линейное дерево, и $\{V_i\}$ — множество всех его вершин. Зададим в каждой точке V_i произвольный вектор v_i, длина которого не больше чем некоторое фиксированное $\varepsilon > 0$.

Утверждение 4.15 *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой системы векторов v_i, описанной выше, найдется деформация дерева Γ в классе линейных деревьев, обладающая следующим свойством: если V_i' — образ вершины V_i при этой деформации, то вектор V_iV_i' совпадает с заданным вектором v_i.*

Деформацию линейного дерева Γ из утверждения 4.15 назовем *допустимой ε-деформацией.*

Следствие 4.17 *Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, существует допустимая ε-деформация дерева Γ в правильное дерево Γ', такая что каждый уровень выпуклости границы $\partial\Gamma'$ полученного дерева является многоугольником, все углы которого меньше чем π.*

Доказательство. В самом деле, по определению правильного линейного дерева, все его граничные (внутренние) вершины остаются граничными (соответственно, внутренними) вершинами при любых достаточно малых деформациях этого линейного дерева. Отсюда немедленно вытекает утверждение следствия.

Ясно, что число вращения при деформациях, описанных в следствии 4.17, меняется непрерывно. Вышесказанное позволяет, для завершения доказательства, предполагать, что каждый уровень выпуклости граничного множества исходного правильного линейного дерева Γ представляет собой многоугольник с углами меньше π.

Рассмотрим определенный выше путь L, и пусть, как и выше, A и B — начальная и конечная вершины пути L. По-построению, вершины A и B являются граничными, причем A лежит на p-ом, а B на q-ом уровнях выпуклости множества $\partial_g\Gamma$. Перестроим дерево Γ в окрестности каждой его граничной вершины V, отличной от A и B, и такой, что степень вершины V больше 1, добавив к Γ маленькое ребро e_V таким образом, чтобы в перестроенном дереве Γ, которое мы обозначим через Γ', вершина V стала внутренней. Граница $\partial_g\Gamma'$ нового дерева Γ' состоит из точек A и B и вершин степени 1.

Добавление ребер e_V к дереву Γ приводит, вообще говоря, к перестройке уровней выпуклости его границы. Однако, так как каждый уровень выпуклости исходного множества $\partial\Gamma$ представляет собой многоугольник с углами меньше π, можно выбрать ребра e_V настолько малыми, что указанная перестройка уровней выпуклости сведется к малой деформации выпуклых многоугольников в классе выпуклых многоугольников. В частности, ребра e_V могут быть выбраны настолько малыми, что число уровней выпуклости дерева Γ не изменится, т.е. $\varkappa(\Gamma) = \varkappa(\Gamma')$, и, более того, точка A останется вершиной перестроенного p-ого уровня выпуклости, а точка B — вершиной перестроенного q-го уровня выпуклости множества $\partial\Gamma'$.

Отметим, что путь L пока вообще не изменялся. Ломаная L является путем в дереве Γ', соединяющим его граничные вершины A и B. Как и выше, рассмотрим разбиение пути L на фрагменты $L_1, \dots, L_{q-p+2}$ (по отношению к границе дерева Γ'), и обозначим через A_i и B_i — начальную и конечную вершины фрагмента L_i. Из построения следует, что все внутренние вершины ломаной L являются внутренними вершинами дерева Γ' (их степень в Γ' больше 1). Поэтому путь L может не оказаться хорошим в Γ' только если некоторые из точек B_i, $i = 1, \dots, q-p+1$, являются внутренними вершинами дерева Γ'. Напомним, что точка B_i принадлежит границе выпуклой оболочки σ' для $(p+i-1)$-го уровня выпуклости множества $\partial_g\Gamma'$. Сдвинем каждую из

таких внутренних вершин B_i внутрь соответствующего σ'. Ясно, что при такой перестройке дерева $1'$ его граница вообще не меняется, а кручение пути L можно изменить сколь угодно мало. Теперь путь L является хорошим, что и требовалось. Первое утверждение теоремы 6 полностью доказано. Для доказательства точности полученной оценки достаточно рассмотреть ломаную, имеющую форму двойной спирали, и устроенную так, как показано на рисунке 4.16. На рис. 4.16 рассмотрен случай $k = 2$. Все вершины изображенной ломаной являются граничными, число уровней выпуклости граничного множества равно 2, число вращения равно 18. Общий случай получается из этого увеличением числа витков спиралей. Тем самым теорема полностью доказана.

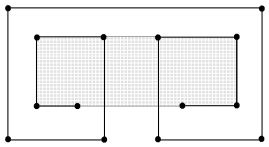


Рис. 4.16: Двойная спираль с числом вращения 18.

4.4.10 Некоторые следствия

Продемонстрируем, как работает теорема 6 на примерах плоских локально минимальных деревьев-следов, локально минимальных параметрических деревьев и взвешенных локально минимальных деревьев.

Пусть Γ — локально минимальное дерево (след), затягивающее конечное множество M точек плоскости, и $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — его канонический представитель. Тогда, из теоремы о локальном устройстве таких сетей (см. главу 3) вытекает, что дерево Γ — линейное, и угол между любыми двумя соседними ребрами дерева Γ больше или равен 120°. Легко показать, что геометрическая граница $\partial_g\Gamma$ такого линейного дерева совпадает со множеством всех его вершин степени 1 и 2, из которого выброшены все фиктивные вершины степени 2. Кроме того, из теорем о локальном устройстве следует, что $\partial_g\Gamma \subset M$. Поэтому, из теоремы 6 немедленно получается следующее обобщение предложения 4.10.

Следствие 4.18 *Пусть* Γ — *произвольное* (*не обязательно бинарное*) *локально минимальное дерево, затягивающее фиксированное конечное*

множество M точек плоскости. Тогда $\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(\partial_g\Gamma)-1)+6 \le 12(\varkappa(M)-1)+6$.

Замечание. Отметим, что геометрическая граница $\partial_g\Gamma$ не может быть определена исходя лишь из графа G и граничного отображения $\partial\Gamma$, так как *a priori* не понятно, какие из вершин степени 2 графа G становятся фиктивными вершинами минимального дерева Γ. Поэтому разумно дать промежуточную оценку, определив, например, множество M', состоящее из всех точек из M, соответствующих при граничном отображении $\partial\Gamma$ вершинам степени 1 и 2 графа G. Из теоремы 6 получаем следующий результат.

Следствие 4.19 *Во введенных обозначениях,* $\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(M')-1)+6$.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ локально минимальное параметрическое дерево типа G с границей $\partial\Gamma$, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Вершины дерева Γ, не попавшие во множество M, будем, как обычно, называть *подвижными*. Тогда, из теоремы о локальном устройстве таких сетей (см. главу 3) вытекает, что дерево Γ — линейное, и в каждой подвижной вершине сети Γ сумма направлений всех приходящих в эту вершину ребер равна 0. Отсюда следует, что каждая подвижная вершина из Γ является внутренней вершиной линейного дерева Γ. Иными словами, геометрическая граница $\partial_g\Gamma$ содержится во множестве M. Поэтому, из теоремы 6 немедленно получается следующий результат.

Следствие 4.20 *Пусть Γ — произвольное локально минимальное параметрическое дерево, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда* $\operatorname{tw}\Gamma \le 12(\varkappa(\partial_g\Gamma)-1)+6 \le 12(\varkappa(M)-1)+6$.

Пусть теперь Γ — взвешенное локально минимальное параметрическое дерево типа G с границей β, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Предположим, как обычно, что веса всех ребер сети Γ положительны. Тогда, из теоремы о локальном устройстве взвешенных локально минимальных сетей (см. главу 3), вытекает, что дерево Γ — линсйнос, и в каждой подвижной вершинс сети Γ линсйная комбинация направлений всех приходящих в нее ребер с коэффициентами, равными весам этих ребер, равна 0.

Отсюда, так как все веса положительны, следует, что каждая подвижная вершина из Γ является внутренней вершиной линейного дерева Γ. Иными словами, геометрическая граница $\partial_g\Gamma$ содержится во

множестве M. Поэтому, из теоремы 6 немедленно получается следующее утверждение, обобщающее результаты из [49, 39] для минимальных взвешенных бинарных деревьев.

Следствие 4.21 *Пусть* Γ — *произвольное взвешенное локально минимальное дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество* M *точек плоскости. Тогда* $\operatorname{tw}\Gamma \leq 12(\varkappa(\partial_g\Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\varkappa(M) - 1) + 6$.

Замечание. В работах [49, 39] этот результат был получен для минимальных взвешенных *бинарных* деревьев без использования теоремы 6, исходя только из теоремы о локальной структуре таких сетей и разработанном автором обобщении алгоритма Мелзака для взвешенных локально минимальных бинарных деревьев, см. ниже.

4.5 Геометрия плоских минимальных взвешенных бинарных деревьев

Оказывается, для плоского взвешенного бинарного дерева можно определить число вращения исходя только из плоской топологии дерева (т.е. класса его планарной эквивалентности) и функционала взвешенной длины. Другими словами, можно определить число вращения для класса планарно эквивалентных плоских взвешенных деревьев. Аналогичная конструкция была изложена в разделе 4.2 для классов планарной эквивалентности плоских бинарных деревьев. Напомним, что определение числа вращения в разделе 4.2 было подобрано так, что для каждого локально минимального бинарного дерева его число вращения как *плоского линейного дерева* совпадает с его числом вращения как *плоского бинарного дерева*. Это дает возможность при поиске локально минимальных деревьев с данной границей для каждой топологии сразу вычислить число вращения (плоского бинарного дерева), что в сочетании со следствием 4.21, позволяет отсеивать многие нереализующиеся топологии не строя соответствующей минимальной реализации (с помощью алгоритма Мелзака или его аналогов).

Определяемое в данном разделе число вращения взвешенного бинарного дерева обладает аналогичным свойством: для каждого минимального взвешенного бинарного дерева его число вращения как *плоского взвешенного бинарного дерева* совпадает с его числом вращения как *плоского линейного дерева*. Поэтому это понятие играет аналогичную роль, а именно, позволяет отсеивать многие топологии *a priori*, не строя соответствующих минимальных реализаций. Кроме того,

в данном разделе строится обобщение алгоритма Мелзака на случай взвешенных бинарных деревьев, позволяющий строить такие деревья с помощью компьютера, и доказывается результат об "общем положении" таких деревьев, имеющая на наш взгляд самостоятельный интерес (аналог предложения 4.9).

Замечание. Отметим, что плоские бинарные деревья в данном контексте предполагаются вложенными (речь идет о классе планарной эквивалентности).

4.5.1 Число вращения плоского взвешенного бинарного дерева

Локальное устройство взвешенных минимальных бинарных деревьев (или, для краткости, 2-деревьев) описано в теореме 2. Из теоремы 2 вытекает, напомним, что все ребра плоского минимального взвешенного дерева Γ — прямолинейные отрезки, и линейная комбинация единичных векторов направлений ребер из Γ, входящих в произвольную его подвижную вершину, с коэффициентами — весами этих ребер равна нулю. Отсюда и из предположения о положительности весов, очевидно, вытекает, что веса каждых трех ребер взвешенного минимального 2-дерева, инцидентных одной и той же его точке Штейнера, удовлетворяют следующему правилу: сумма любых двух из них не меньше чем третий — это необходимое условие существования такого взвешенного минимального 2-дерева. При этом, если имеет место равенство, то одно из ребер меньшего веса необходимо содержится в другом, т.е. в этом случае минимальное дерево не может быть вложенным. Поэтому, говоря о взвешенных 2-деревьях, *мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что в каждой вершине V степени 3 выполнено следующее* правило треугольника: *сумма весов любых двух инцидентных V ребер строго больше веса третьего инцидентного V ребра.*

Обобщим теперь понятие числа вращения на случай взвешенных 2-деревьев. Для этого сначала рассмотрим произвольную точку Штейнера P взвешенного 2-дерева Γ, и пусть e_i, $i = 1, 2, 3$, — ребра сети Γ, инцидентные P. Обозначим через ω_i вес ребра e_i. Рассмотрим на плоскости треугольник $P_1P_2P_3$, такой что для любых трех различных i, j и k, где $1 \leq i, j, k \leq 3$ длина стороны P_iP_j равна ω_k. Этот треугольник существует, так как веса ω_i, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют, по предположению, правилу треугольника. Треугольник $P_1P_2P_3$ называется *характеристическим треугольником вершины P*. Обозначим через α_i угол характеристического треугольника в вершине P_i.

Рассмотрим теперь произвольную упорядоченную пару (e_i, e_j), составленную из ребер e_l, $l = 1, 2, 3$, инцидентных P. Пусть U — некоторая хорошая окрестность вершины P сети Γ, т.е., напомним, такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки P, что ее пересечение с деревом Γ представляет собой звезду с центром в P и вершинами степени 1, лежащими на окружности ∂U. Тогда пересечение $\partial U \cap \Gamma$ границы окрестности U с сетью состоит из трех точек A_i, $i = 1, 2, 3$. Будем считать, для определенности, что $A_l \in e_l$. Обозначим через δ дугу из ∂U, ограниченную точками A_i и A_j и содержащую A_k, где $k \neq i$ и $k \neq j$. Если движение вдоль δ от A_i к A_j происходит по часовой стрелке, то сопоставим паре (e_i, e_j) число $-\alpha_k/(\pi/3)$. В противном случае, сопоставим паре (e_i, e_j) число $+\alpha_k/(\pi/3)$. Это число называется *твистингом от ребра e_i к ребру e_j*.

Рассмотрим теперь произвольную пару (a, b) ребер дерева Γ, и пусть γ — единственный путь в γ соединяющий эти ребра. Ориентируем путь γ от a к b, и пусть $a = e_1, \ldots, e_k = b$ — последовательные ребра пути γ, а $P_0, P_1, \ldots, P_k$ — его последовательные вершины. Для каждой внутренней вершины P_i пути γ рассмотрим пару последовательных ребер (e_i, e_{i+1}) из γ, инцидентных вершине P_i. Твистинг от ребра e_i к ребру e_{i+1} называется *твистингом вершины P_i ориентированного пути γ*.

Определение. Сумма твистингов всех внутренних вершин ориентированного пути γ, идущего от ребра a к ребру b во взвешенном 2-дереве Γ, называется *числом вращения* $\operatorname{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары* (a, b) ребер из Γ.

Определение. Максимум чисел вращения $\operatorname{tw}(a, b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер дерева Γ, называется *числом вращения* $\operatorname{tw}\Gamma$ *взвешенного 2-дерева* Γ.

Отметим, что $\operatorname{tw}(a, b) = -\operatorname{tw}(b, a)$, и $\operatorname{tw}(a, b) + \operatorname{tw}(b, c) = \operatorname{tw}(a, c)$ для любых ребер a, b и c из Γ, лежащих на одном пути в Γ. Кроме того, если $\operatorname{tw}\Gamma = \operatorname{tw}(a, b)$, то ребра a и b инцидентны вершинам степени 1. Ребро 2-дерева, инцидентное вершине степени 1, т.е. граничной вершине, называется *граничным ребром.*

Пусть Γ — взвешенное минимальное 2-дерево, и (a, b) — произвольная упорядоченная пара его ребер. Рассмотрим единственный путь γ в Γ, соединяющий a и b, и ориентируем его от a к b. Путь γ является, очевидно, ломаной линией, поэтому определено кручение $\operatorname{tn}\gamma$ вдоль него. С другой стороны, определено число вращения $\operatorname{tw}(a, b)$ между ребрами a и b взвешенного 2-дерева Γ. По определению, $\operatorname{tn}\gamma = \operatorname{tw}(a, b)$. Этот

факт дает определенному только что числу вращения *минимального* взвешенного 2-дерева естественную геометрическую интерпретацию.

Утверждение 4.16 *Число вращения произвольного взвешенного минимального 2-дерева* Γ*, как плоского взвешенного бинарного дерева, совпадает с числом вращения дерева* Γ *как плоского линейного дерева.*

Таким образом, из утверждения 4.16 и следствия 4.21 получаем следующее важное утверждение.

Следствие 4.22 *Пусть* Γ *— минимальное взвешенное 2-дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество* M *точек плоскости. Тогда* $\operatorname{tw}\Gamma \leq 12(\varkappa(M)-1)+6$*, где через* $\operatorname{tw}\Gamma$ *обозначено, как и выше, число вращения* Γ *как плоского взвешенного бинарного дерева.*

4.5.2 Обобщенный алгоритм Мелзака: случай трех точек

Знание локальной структуры минимального взвешенного бинарного дерева с положительными весами позволяет построить для таких деревьев аналог алгоритма Мелзака. В данном разделе мы разберем случай трех точек, а в следующем — общий случай.

Итак, пусть взвешенное минимальное 2-дерево Γ затягивает вершины треугольника ABC. Обозначим через S единственную точку Штейнера сети Γ. Пусть p, q и r — веса ребер SA, SB и SC, а n_A, n_B и n_C — единичные векторы, сонаправленные с векторами SA, SB и SC соответственно. В силу теоремы 2 о локальной структуре имеет место равенство:

$$p\,n_A + q\,n_B + r\,n_C = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что числа p, q и r удовлетворяют правилу треугольника, т.е. сумма любых двух из них не превосходит оставшегося.

Опишем вокруг треугольника BSC окружность S^1, и продолжим отрезок AS за точку S до следующего пересечения прямой AS с окружностью S^1 в некоторой точке A'. Ясно, что угол BSA' равен углу BCA', а угол CSA' равен углу CBA', см. рис. 4.17. Построим характеристический треугольник PQR вершины S, положив $QR = p\,n_A$, $RP = q\,n_B$ и $PQ = r\,n_C$ (это возможно, так как $p\,n_A + q\,n_B + r\,n_C = 0$). Обозначим через α_P, α_Q и α_R углы треугольника PQR в вершинах P, Q и R соответственно. Легко понять, что угол BSA', равный углу

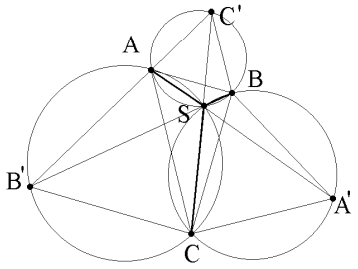


Рис. 4.17: Минимальное взвешенное дерево, затягивающее вершины треугольника.

BCA', равен α_R, а угол CSA', равный CBA', равен α_Q. Поэтому треугольники $A'BC$ и PQR подобны.

Аналогичная процедура может быть проделана и для двух других сторон треугольника ABC, а именно на них аналогично могут быть построены точки C' и B' и соответствующие треугольники ABC' и $AB'C$, подобные треугольнику PQR, см. рис. 4.17. Отметим, что точка S лежит на пересечении отрезков AA', BB' и CC'.

Вычислим теперь длину отрезка AA'. Для этого выберем на отрезке SA' точку S', такую что треугольник $S'BS$ подобен треугольнику PQR, и угол $BS'S$ равен α_P (это можно сделать, поскольку угол BSA' равен α_R, а угол SBA' больше чем α_Q). Заметим, что треугольники BCS и $BA'S'$ также подобны. В самом деле, угол $BA'S' = BA'S$, очевидно, равен углу BCS, а угол $BS'A'$ равен $\pi - \alpha_P = \alpha_Q + \alpha_R$, и поэтому равен углу BSC. Используя все эти соображения, можно записать:

$$p\,|SS'| = q\,|SB|, \qquad \text{и} \qquad p\,|S'A'| = r\,|SC|.$$

В итоге получаем:

$$p\,|AA'| = p\,|SA| + q\,|SB| + r\,|SC| = \text{Weight}(\Gamma).$$

Ясно, что аналогично можно вычислить длины отрезков BB' и CC', показав, что

$$q\,|BB'| = r\,|CC'| = \text{Weight}(\Gamma).$$

Из построения также ясно, что если α, β и γ — углы треугольника ABC в вершинах A, B и C соответственно, то имеют место следующие неравенства:

$$\alpha < \pi - \alpha_P, \qquad \beta < \pi - \alpha_Q, \qquad \text{и} \qquad \gamma < \pi - \alpha_R.$$

Пусть теперь p, q и r — произвольные положительные числа, удовлетворяющие правилу треугольника. Рассмотрим треугольник PQR, такой что длины его сторон лежащих напротив вершин P, Q и R, равны соответственно p, q и r. Обозначим через α_P, α_Q и α_R соответственно углы треугольника PQR в вершинах P, Q и R.

Пусть ABC — некоторый другой треугольник на плоскости, и пусть α, β и γ — углы треугольника ABC в вершинах A, B и C соответственно. Назовем треугольник ABC pqr-*допустимым*, если $\alpha < \pi - \alpha_P$, $\beta < \pi - \alpha_Q$, и $\gamma < \pi - \alpha_R$. Из сказанного выше вытекает, что если существует взвешенное минимальное 2-дерево, состоящее из трех ребер AS, BS и CS с весами p, q и r соответственно, то треугольник ABC необходимо является pqr-допустимым. Покажем, что справедливо и обратное утверждение.

Итак, пусть ABC — pqr-допустимый треугольник, и α, β и γ — его углы в вершинах A, B и C соответственно. Построим на его сторонах три треугольника $A'BC$, $AB'C$ и ABC', каждый из которых пересекается с ABC только по одной стороне, и такие что углы этих треугольников в их вершинах A, B и C равны соответственно α_P, α_Q и α_R. Отрезки AA', BB' и CC' называются *линиями Симпсона*, отвечающими сторонам BC, AC и AB соответственно.

Рассмотрим теперь треугольник $A'BC$ и опишем вокруг него окружность S^1. Поскольку угол $BA'C$ этого треугольника по построению равен α_P, для любой точки S, лежащей на дуге δ окружности S^1 ограниченной точками B и C и не содержащей точку A', величина угла BSC равна $\pi - \alpha_P$. Так как треугольник ABC по условию pqr-допустимый, его угол α меньше чем $\pi - \alpha_P$, поэтому точка A расположена вне ограниченного окружностью S^1 круга. С другой стороны, из pqr-допустимости треугольника ABC вытекает также, что $\beta + \alpha_Q < \pi$ и $\gamma + \alpha_R < \pi$, поэтому точка A лежит внутри угла $BA'C$. Поэтому отрезок AA' пересекает дугу δ в некоторой внутренней точке, которая, очевидно, лежит также и внутри треугольника ABC. Обозначим эту точку через S.

Так как угол CSA' равен углу CBA' и равен α_Q, угол CSA равен $\pi - \alpha_Q$. По аналогичным соображениям, угол BSA равен $\pi - \alpha_R$. Обозначим через n_A, n_B и n_C единичные векторы, сонаправленные с векторами SA, SB и SC соответственно. Отложим на луче SB точку P', а на луче SA' точку Q' так что $|SP'| = q$, а $|SQ'| = p$. Поскольку угол $P'SQ'$ равен α_R, треугольник $P'Q'S$ конгруэнтен треугольнику PQR, в частности, $|P'Q'| = r$, а угол $P'Q'S$ равен α_Q, и поэтому равен углу $Q'SC$, откуда следует, что прямые $P'Q'$ и SC параллельны.

Отложим теперь на луче SC точку P'' так что $|SP''| = r$. Ясно, что четырехугольник $SP''Q'P'$ — параллелограмм, и векторы SP' и SP''

равны векторам $q\,n_B$ и $r\,n_C$ соответственно. Далее, $SP' + SP'' = SQ'$, но вектор SQ' в свою очередь равен $-p\,n_A$, поэтому получаем в итоге

$$p\,n_A + q\,n_B + r\,n_C = 0.$$

Последнее означает, что взвешенное 2-дерево, составленное из отрезков AS, BS и CS, взятых с весами p, q и r соответственно, является минимальным взвешенным 2-деревом затягивающим вершины треугольника ABC.

Итак, нами доказана следующий результат, дающий полное описание взвешенных минимальных 2-деревьев, затягивающих вершины треугольников.

Предложение 4.28 *1. Пусть p, q и r — положительные числа. Треугольник ABC, вершины которого затягиваются взвешенным минимальным 2-деревом состоящим из трех ребер AS, BS и CS с весами p, q и r соответственно, существует тогда и только тогда, когда числа p, q и r удовлетворяют правилу треугольника.*

2. *Пусть p, q и r — положительные числа, удовлетворяющие правилу треугольника, и ABC — некоторый треугольник на плоскости. Взвешенное минимальное 2-дерево затягивающее вершины треугольника ABC и состоящее из трех ребер AS, BS и CS с весами p, q и r соответственно, существует если и только если треугольник ABC является* pqr-*допустимым.*

3. *Если взвешенное минимальное 2-дерево, затягивающее данный треугольник по данному граничному отображению существует, то оно единственно.*

4. *Вершина S степени 3 взвешенной минимальной сети, затягивающей вершины треугольника ABC, совпадает с точкой пересечения всех соответствующих линий Симпсона треугольника ABC. В частности, для каждого* pqr-*допустимого треугольника соответствующие три линии Симпсона пересекаются в одной точке.*

5. *Вершина S степени 3 взвешенной минимальной сети, затягивающей вершины треугольника ABC, совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных вокруг построенных выше треугольников $A'BC$, $AB'C$ и ABC'. В частности, для любого* pqr-*допустимого треугольника три соответствующие окружности имеют общую точку.*

Предложение 4.28 позволяет обобщить алгоритм Мелзака на случай построения минимального взвешенного 2-дерева, затягивающего вершины произвольного треугольника ABC. Итак, нам даны положительные числа p, q и r, удовлетворяющие правилу треугольника, и треугольник ABC. На первом шаге мы определяем числа α_P, α_Q и α_R, которые равны углам при вершинах P, Q и R соответственно треугольника PQR, такого что $|PQ| = r$, $|PR| = q$ и $|QR| = p$, и проверяем, является ли треугольник ABC pqr-допустимым. Если не является, то взвешенной минимальной сети не существует, и алгоритм заканчивает работу, в противном случае — переходим ко второму шагу.

На втором шаге мы построим вне треугольника ABC и на какой-нибудь его стороне, скажем на BC, треугольник $A'BC$ такой что углы $A'BC$ и BCA' треугольника $A'BC$ равны α_Q и α_R соответственно. Опишем вокруг треугольника $A'BC$ окружность S^1. Точка пересечения окружности S^1 с линией Симпсона AA' отличная от A' и есть искомая вершина S взвешенной минимальной сети.

4.5.3 Обобщенный алгоритм Мелзака: общий случай

Пусть G — произвольное взвешенное бинарное топологическое дерево с положительными весами, M_G — некоторое подмножество вершин из G, содержащее все его вершины степени 1, и пусть $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное граничное отображение, $\beta(M_G) = M$. Предположим, что веса любых трех ребер дерева G, инцидентных одной и той же его вершине степени 3, удовлетворяют правилу треугольника, т.е. выполнено необходимое условие существования взвешенного минимального дерева с такими весами. Мы предъявим алгоритм — обобщенный алгоритм Мелзака, позволяющий ответить на следующий вопрос: существует ли погруженная минимальная взвешенная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, или, как мы будем говорить, существует ли у G *минимальная реализация с границей* β.

Прежде всего, можно предполагать без ограничения общности, что M_G совпадает со множеством всех вершин степени 1 бинарного дерева G. Действительно, если 2-дерево G имеет минимальную реализацию с границей β, то эта реализация единственна, см. предложение 5.8 главы 5. Поэтому, если какие-то вершины степени 3 попали во множество M_G, то следует сначала рассмотреть ограничение β_1 граничного отображения β на множество всех вершин степени 1 из 2-дерева G, проверить, существует ли минимальная реализация Γ_1 дерева G с границей β_1, и если да, то проверить, совпадает ли ограничение отображения Γ_1 на M_G с заданным отображением β. Итак, мы предполагаем, что M_G

совпадает с множеством всех вершин из G степени 1.

Если G имеет ровно одно ребро, то, очевидно, минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда образы граничных вершин этого дерева различны (напомним, что мы ищем погруженные сети).

Пусть теперь G состоит более чем из одного ребра. По лемме 4.7, дерево G имеет некоторые усы (e, e'). Пусть v и v' — вершины степени 1, инцидентные ребрам e и e' соответственно, а s — вершина степени 3, инцидентная одновременно ребрам e и e'. Обозначим через e'' третье ребро, инцидентное вершине s, а через w — отличную от s вершину, инцидентную ребру e''.

Если образы $A = \beta(v)$ и $A' = \beta(v')$ вершин v и v' при отображении β совпадают, то минимальной реализации не существует. В противном случае, рассмотрим характеристический треугольник вершины s, и построим на плоскости треугольник $AA'B$, подобный этому характеристическому треугольнику. При этом, если p, q и r — веса ребер e, e' и e'' соответственно, и PQR — характеристический треугольник вершины s, где $|QR| = p$, $|RP| = q$, и $|PQ| = r$, то соответствие между вершинами треугольников $AA'B$ и PQR устанавливается так: $A \leftrightarrow P$, $A' \leftrightarrow Q$, и $B \leftrightarrow R$. Очевидно, треугольник $AA'B$ может быть построен двумя способами.

Перестроим дерево G в дерево G', отрезав от G усы. Определи граничное отображение β' на множестве $M_{G'}$ всех вершин из G' степени 1, положив его равным β везде, кроме s, и определив $\beta'(s)$ равным B. Превратим дерево G' во взвешенное, ограничив функцию веса, заданную на ребрах из G, на ребра из G'. Очевидно, полученное взвешенное дерево по прежнему будет удовлетворять условию треугольника. Отметим, что в результате описанной перестройки количество граничных ребер уменьшилось на 1.

Следующая лемма вытекает из элементарных планиметрических построений, аналогичных доказательству предложения 4.28.

Лемма 4.24 *В сделанных обозначениях, если взвешенное 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с границей β, то для одного из двух треугольников $AA'B$ дерево G' имеет минимальную реализацию Γ' с границей β'. Минимальные сети Γ и Γ' совпадают на $G' \setminus e''$. Треугольник $AA'\Gamma(w)$ является* pqr*-допустимым. В частности, луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ содержится внутри угла ABA' и содержит точку $\Gamma(s)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности S^1, описанной вокруг треугольника ABA', а точка $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1.*

Обратно, если существует минимальная реализация Γ' дерева G'

с границей β', такая что треугольник $AA'\Gamma'(w)$ является pqr*-допустимым (и, поэтому выполняются следующие условия:*

- *луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w)$ содержится внутри угла ABA', и*
- *точка $\Gamma'(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1, которая описана вокруг правильного треугольника ABA'),*

то существует минимальная реализация Γ дерева G с границей β, которая получается из Γ' так. Обозначим через C точку пересечения интервала $(\Gamma'(s), \Gamma'(w))$ с окружностью S^1. На всех ребрах из G, отличных от e, e' и e'', отображение Γ определим равным отображению Γ'. На ребрах e, e' и e'' определим его так, чтобы эти ребра переходили соответственно в отрезки $[C, A]$, $[C, A']$ и $[C, \Gamma'(w)]$ соответственно. При этом, конечно же, $\Gamma(s) = C$.

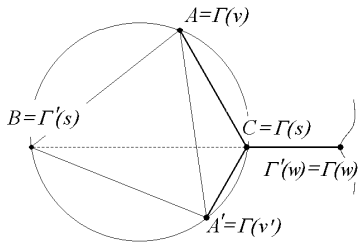


Рис. 4.18: Иллюстрация идеи обобщенного алгоритма Мелзака.

Итерируя описанный только что процесс перестройки взвешенного дерева G и граничного отображения β во взвешенное дерево G' и граничное отображение β' до тех пор, пока в результирующем дереве останется ровно одно ребро, мы реализуем *прямой ход обобщенного алгоритма Мелзака.* Каждая итерация называется *шагом прямого хода обобщенного алгоритма Мелзака.* Ясно, что если прямой ход состоит из n шагов, то существует 2^n реализаций прямого хода, в зависимости от выбора треугольника ABA' на каждом шаге.

Для завершения обобщенного алгоритма Мелзака, необходимо выполнить так называемый *обратный ход.* На первом шаге обратного хода мы проверяем, не совпали ли образы граничных вершин результирующего дерева, состоящего из одного ребра. Если нет, то строим минимальную реализацию этого дерева, отображая единственное его

ребро в отрезок, соединяющий образы граничных вершин при результирующем граничном отображении. После этого, начинаем последовательно строить минимальные реализации взвешенных деревьев, полученных на прямом ходе. Соответствующие построения мы уже описали в лемме 4.24. Если на одном из шагов обратного хода нарушаются условия леммы 4.24, то переходим к испытанию следующей из 2^n реализаций прямого хода. Таким образом, или при проверке очередной реализации прямого хода обратный ход обобщенного алгоритма Мелзака приведет к построению искомой минимальной реализации и закончит работу, или будут проверены все 2^n вариантов и сделан вывод о том, что данное взвешенное дерево G не имеет минимальной реализации с граничным отображением β.

Как мы уже отмечали, к успешному завершению прямого хода обобщенного алгоритма Мелзака может привести не более одной реализации прямого хода. Обобщенный алгоритм Мелзака, подобно стандартному алгоритму Мелзака, не умеет отсеивать "неперспективные" последовательности и, поэтому, тратит много времени на работу с ними. В случае бинарных деревьев локально минимальной длины, напомним, имеется алгоритм Хванга, позволяющий заранее понять, как устроена та единственная последовательность треугольников ABA', которая может привести к успешному завершению алгоритма Мелзака. В случае взвешенных локально минимальных бинарных деревьев аналогичная конструкция не работает.

В заключении данного пункта мы приведем два важных следствия из обобщенного алгоритма Мелзака. Первое из них позволяет быстро вычислять вес взвешенного минимального бинарного дерева.

Предположим, что взвешенное бинарное дерево G с границей β и с положительными весами имеет минимальную реализацию Г. Тогда, очевидно, для каждого ребра e дерева G можно так подобрать последовательность отрезания усов при работе прямого хода алгоритма Мелзака (вообще говоря, многими способами), что на последнем шаге перестроенное дерево совпадет как раз с ребром e. Отрезок E на плоскости, являющийся минимальной реализацией этого однореберного взвешенного дерева, называется *линией Симпсона ребра e взвешенного минимального дерева* Г. Отметим, что отрезок E однозначно определяется ребром e и реализацией Г. Напомним, что в случае локально минимальных бинарных деревьев длина линии Симпсона произвольного ребра такого дерева совпадает с длиной всего минимального дерева, см. утверждение 4.5. Оказывается, в случае взвешенных бинарных деревьев имеет место аналогичное утверждение.

Предложение 4.29 *Пусть G — взвешенное бинарное дерево с поло-*

жительными весами, и предположим, что существует его минимальная реализация Γ *с границей* β. *Обозначим через* L *длину линии Симпсона, соответствующей ребру* $\overline{e}$ *из* G *при минимальной реализации* Γ, *а через* p — *вес ребра* $\overline{e}$. *Тогда имеет место следующее равенство:*

$$p\,L = \mathrm{Weight}(\Gamma).$$

Доказательство. Предположим, что граница $M = \beta(M_G)$ дерева Γ состоит по крайней мере из 4 точек (случай трех точек рассмотрен в предыдущем разделе, случай двух точек — очевиден). В силу леммы 4.7, существуют граничные ребра e и e' из G, отличные от $\overline{e}$, образующие усы. Пусть s — вершина из G инцидентная обоим ребрам e и e', и e'' третье ребро 2-дерева G, инцидентное s. Обозначим через v, v' и v'' вершины ребер e, e' и e'', отличные от s соответственно, и положим $A = \Gamma(v'')$, $B = \Gamma(v)$, $C = \Gamma(v')$ и $S = \Gamma(s)$.

Построим на отрезке BC треугольник $A'BC$, подобный характеристическому треугольнику вершины s. При этом, так как минимальная реализация Γ уже имеется, положение вершины A' определено однозначно: точки A' и S должны лежать в разных полуплоскостях по отношению к прямой BC. Обозначим через Γ' минимальную реализацию дерева взвешенного дерева G', полученного из G отрезанием усов e и e'. Очевидно, Γ' получается из Γ выбрасыванием ребер SA, SB и SC и добавлением ребра AA' веса p'', где p'' — вес ребра e'' в G. Поскольку ребра e и e' по построению отличны от ребра $\overline{e}$, в дереве G' осталось ребро $\overline{e}$. Кроме того, по определению линий Симпсона, линии Симпсона минимальных взвешенных 2-деревьев Γ и Γ' отвечающие ребру $\overline{e}$, совпадают друг с другом, и, в частности, их длины одинаковы и равны L.

Докажем предложение по индукции. А именно, предположим, что для всех 2-деревьев с числом граничных вершин меньшим чем у Γ предложение имеет место. В частности, по предположению:

$$p\,L = \mathrm{Weight}(\Gamma').$$

Обозначим через Γ'' взвешенное минимальное 2-дерево, затягивающее множество $\{A,\ B,\ C\}$ и содержащееся в Γ как подмножество. Веса ребер дерева Γ'' равны весам соответствующих ребер из Γ. Пусть l'' — длина линии Симпсона дерева Γ'', соответствующей ребру e'', т.е. $l'' = |AA'|$. Тогда

$$p''\,l'' = \mathrm{Weight}(\Gamma'').$$

Но, с другой стороны очевидно,

$$p\,L = \mathrm{Weight}(\Gamma') = \mathrm{Weight}(\Gamma) - \mathrm{Weight}(\Gamma'') + p''\,l'' = \mathrm{Weight}(\Gamma).$$

Предложение доказано.

Приведем еще одно важное следствие из алгоритма Мелзака, касающееся устойчивости минимальных взвешенных бинарных деревьев (аналог предложения 4.8). Напомним, что выше мы определили расстояние ρ на множестве граничных отображений бинарного дерева как максимум расстояний между образами соответствующих точек.

Предложение 4.30 *Предположим, что взвешенное 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ для некоторого граничного отображения β, заданного на множестве M_G всех вершин из G степени 1. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого граничного отображения β', $\rho(\beta, \beta') < \varepsilon$, дерево G также имеет минимальную реализацию с граничным отображением β'. Иными словами, минимальные 2-деревья устойчивы при малых вариациях границы.*

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех граничных отображений β' дерева G, таких что $\rho(\beta', \beta) < \delta$, существуют минимальные реализации Γ' дерева G с границами β', и расстояние между образами $\Gamma(v)$ и $\Gamma'(v)$ произвольной вершины $v \in G$ при отображениях Γ и Γ' меньше ε. Иными словами, минимальная реализация дерева G непрерывно зависит от граничного отображения этого дерева.

Наконец, приведем аналог предложения 4.9 об общем положении локально минимального бинарного дерева. Пусть Γ — взвешенное минимальное 2-дерево, затягивающее конечное множество M точек плоскости. Как и в случае локально минимальных бинарных деревьев, будем говорить, что Γ *находится в общем положении*, если каждое его ребро находится в общем положении с каждым отрезком, соединяющим любую пару вершин из M.

Предложение 4.31 *Для любого взвешенного минимального 2-дерева, затягивающего конечное множество M точек плоскости, состоящее по крайней мере из трех точек, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует деформация множества M в некоторое множество M', такая что:*

- *расстояние между каждой смещенной вершиной $m' \in M'$ и ее начальным положением $m \in M$ не превосходит ε;*
- *разбиение множества M на уровни выпуклости сохраняется при этой деформации;*
- *эта деформация может быть продолжена до деформации взвешенного минимального 2-дерева Γ в классе взвешенных минимальных 2-деревьев в некоторое взвешенное минимальное 2-дерево Γ';*

- *полученное дерево* Γ' *находится в общем положении.*

Доказательства последних двух предложений полностью аналогичны доказательствам соответствующих предложений о локально минимальных деревьях.

Глава 5

Геометрия множества взвешенных локально минимальных сетей с фиксированными типом и границей в $\mathbb{R}^N$

Выше, см. главу 3, мы уже отмечали что решение обобщенной проблемы Штейнера как правило не единственно. В данной главе мы займемся изучением вопроса единственности минимальных сетей в $\mathbb{R}^N$ более подробно. Оказывается, в $\mathbb{R}^N$ возникают целые непрерывные семейства (взвешенных) локально минимальных сетей фиксированного типа с фиксированной границей. Наша цель — описать устройство этих семейств. Мы покажем, что они имеют структуру выпуклых многогранников. Для этого в начале данной главы изучаются множества взаимно параллельных линейных сетей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, у которых предполагаются фиксированными топология и граница. Полученные здесь результаты, см. теорему 7, на наш взгляд, имеют самостоятельный интерес.

5.1 Геодезические сети. Линейные сети

Пусть W — это риманово многообразие, каждые две точки которого соединяются единственной геодезической.

Определение. Сеть $\Gamma\colon G \to W$, все ребра которой — отрезки геодезических (возможно, вырожденные), называется *геодезической сетью.*

Пусть $\mathfrak{L}(G)$ — это множество всех геодезических сетей вида $\Gamma\colon G \to W$, где G — произвольный граф. Так как каждые две точки объемлющего многообразия W по предположению соединяются единственной геодезической, элементы пространства $\mathfrak{L}(G)$ могут быть описаны положениями своих вершин. Поэтому, если $|G|$ — количество вершин графа G, то $\mathfrak{L}(G)$ представимо в виде многообразия $W^{|G|}$. Это представление задает естественную гладкую структуру на $\mathfrak{L}(G)$, которая и будет иметься в виду в дальнейшем, когда мы будем говорить, например, о дифференцируемости функций, заданных на пространстве геодезических сетей. Элементы множества $\mathfrak{L}(G)$ назовем *геодезическими сетями топологии* G.

Пусть G — граф с некоторой границей, а φ — произвольное граничное отображение. Множество всех геодезических сетей $\Gamma\colon G \to W$, таких что $\partial\Gamma = \varphi$, обозначим через $[G, \varphi]$ и будем называть *пространством геодезических сетей топологии G с данной границей φ.* По определению, $[G, \varphi] \subset \mathfrak{L}(G)$. Каждый элемент из $[G, \varphi]$ однозначно задается положением своих подвижных вершин, поэтому если s — количество подвижных вершин графа G, то $[G, \varphi]$ естественным образом наделяется структурой многообразия $W^s \subset W^{|G|}$.

В случае $W = \mathbb{R}^N$ геодезические сети называются *линейными сетями.* Случай линейных сетей представляет собой важный частный случай геодезических сетей. Для линейных сетей можно ввести понятие параллельности, которое оказывается чрезвычайно полезным при изучении геометрии локально минимальных и взвешенных локально минимальных сетей в евклидовом пространстве.

Пусть Γ и Γ' — две погруженных линейных сети одного и того же типа G. Ориентируем граф G произвольным образом. Это позволит нам рассматривать образы ребер этого графа при отображениях Γ и Γ' как векторы в пространстве $\mathbb{R}^N$. Мы скажем, что сети Γ и Γ' *параллельны*, если для каждого ребра e из G векторы $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ сонаправлены.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — погруженная линейная сеть типа G с произвольной фиксированной границей $\varphi\colon \partial G \to \mathbb{R}^N$. Обозначим через $[G, \varphi]_\Gamma$ множество всех линейных сетей из $[G, \varphi]$ параллельных Γ. Об-

щая задача, которая будет решена в настоящем разделе, см. теорему 7, состоит в следующем.

Задача 5.1 *Описать структуру множества* $[G, \varphi]_\Gamma$.

В качестве следствий теоремы 7 мы получим описание всех взвешенных локально минимальных сетей данного типа с данной границей, см. следствие 5.7.

Выше мы определили разбиение произвольного графа, а значит и произвольной сети, на невырожденные компоненты. При рассмотрении классов параллельности линейных сетей эти компоненты, как легко видеть, независимы в следующем смысле.

Предложение 5.1 *Пусть* $\{\Gamma_i \colon G_i \to \mathbb{R}^N\}_{i-1}^k$ *— невырожденные компоненты линейной погруженной сети* Γ *с границей* φ, *и* φ_i *— граница сети* Γ_i. *Тогда*

$$[G, \varphi]_\Gamma = [G_1, \varphi_1]_{\Gamma_1} \times \cdots \times [G_k, \varphi_k]_{\Gamma_k}.$$

Отметим, что предложение 5.1 позволяет свести задачу описания множества $[G, \varphi]_\Gamma$ к задаче описания таких множеств для невырожденных компонент.

Пусть Γ, как и выше, — погруженная линейная сеть типа G с границей φ. Для описания множества $[G, \varphi]_\Gamma$ нам понадобится следующая линейная система уравнений. Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^N$ некоторые евклидовы координаты. Фиксируем некоторую ориентацию сети Γ, и будем называть эту ориентацию *исходной*. Если e — произвольное ребро сети Γ, ориентированное одним из двух возможных способов, то положим $\varepsilon(e)$ равным 1, если эта ориентация ребра e совпадает с исходной. В противном случае, положим $\varepsilon(e) = -1$. Пусть $\nu(e)$ — координаты единичного вектора направления ребра e сети Γ в исходной ориентации.

Разобьем граф G на невырожденные компоненты G_i, и пусть $\Gamma_i = \Gamma|_{G_i}$ — соответствующие сети. Рассмотрим произвольную компоненту Γ_i. Обозначим через $M_1, \ldots, M_n$ координаты образов граничных вершин $v_1, \ldots, v_n$ сети Γ_i. Пусть e_j — единственное граничное ребро, инцидентное вершине v_j. Для каждого ребра e_j, отличного от e_1, фиксируем некоторый ориентированный путь γ_j в Γ, соединяющий ребра e_1 и e_j, начинающийся в v_1 и заканчивающийся в v_j. Отметим, что ориентация пути γ_j определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из γ_j. Далее, пусть $c_1, \ldots, c_k$ — циклы из Γ_i, соответствующие некоторой фундаментальной системе циклов графа G_i, на каждом из которых

фиксирована ориентация. Отметим, что объединение построенных систем фундаментальных циклов по всем невырожденным компонентам G_i образует фундаментальную систему циклов подвижного подграфа $\widehat{G}$ графа G. Как и в случае путей γ_j, ориентация каждого цикла c_q определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из c_q.

Каждому ребру e сети Γ_i поставим в соответствие вещественную переменную λ_e. Рассмотрим следующую линейную систему уравнений на вещественные переменные λ_e, записанную в векторной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e:e\in\gamma_j} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = M_j - M_1, & \forall\gamma_j, \quad j = 2,\dots,n \\ \sum\limits_{e:e\in c_q} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = 0, & \forall c_q, \quad q = 1,\dots,k. \end{cases}$$

Здесь $(\dots,\lambda_e,\dots) \in \mathbb{R}^m$, где m — количество ребер графа G_i. Эта система линейных уравнений называется *фундаментальной системой невырожденной компоненты* Γ_i, а ее ранг — *рангом* $\operatorname{rk}\Gamma_i$ *компоненты* Γ_i. Отметим, что уравнения фундаментальной системы, соответствующие путям γ_j, выражают вектора M_1M_j в виде суммы векторов–звеньев ориентированной ломаной γ_j. Уравнения фундаментальной системы, отвечающие циклам c_q, означают замкнутость каждой ориентированной ломаной c_q: сумма всех векторов–звеньев такой ломаной равна нулю.

Определение. *Фундаментальной системой сети* Γ называется линейная система уравнений, составленная из фундаментальных систем всех невырожденных компонент сети Γ. *Рангом* $\operatorname{rk}(\Gamma)$ *сети* Γ называется ранг ее фундаментальной системы.

Замечание. Так как каждое ребро сети Γ принадлежит ровно одной ее невырожденной компоненте, фундаментальная система сети Γ имеет блочный вид, и, поэтому, ранг сети Γ равен сумме рангов ее невырожденных компонент:

$$\operatorname{rk}(\Gamma) = \sum_i \operatorname{rk}(\Gamma_i).$$

Отметим, что определенная нами фундаментальная система сети Γ зависит от выбора путей γ_j и циклов c_q. Тем не менее, имеет место следующий гомологический результат.

Предложение 5.2 *Все фундаментальные системы сети* Γ *эквивалентны как линейные системы уравнений. В частности, множества решений всех фундаментальных систем совпадают, и ранг сети* Γ *определен корректно, т.е. не зависит от выбора фундаментальной системы сети.*

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма. Пусть G — произвольный граф. Ориентируем каждое ребро графа G. Обозначим через $C_i(G)$ группу клеточных i-мерных цепей комплекса G над $\mathbb{Z}$, т.е. множество всех формальных конечных линейных комбинаций i-мерных клеток комплекса G с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, наделенное естественной операцией сложения, а через $\partial_i\colon C_i(G) \to C_{i-1}(G)$ граничный гомоморфизм. Тогда группа $H_1(G,\mathbb{Z})$ первых гомологий полученного цепного комплекса содержит все ориентированные циклы графа G, каждый из которых представляет собой формальную линейную комбинацию ребер графа G с подходящими коэффициентами ± 1. При этом, каждая фундаментальная система циклов графа G образует базис в $H_1(G,\mathbb{Z})$. Поэтому имеет место следующий результат.

Лемма 5.1 *Каждый ориентированный цикл графа G представим в виде целочисленной линейной комбинации ориентированных фундаментальных циклов.*

Из леммы 5.1 немедленно вытекают следующие результаты.

Лемма 5.2 *Пусть Γ — произвольная погруженная линейная сеть, $\{\lambda_e\}$ — некоторое решение ее фундаментальной системы, и c — произвольный ориентированный цикл в подвижной подсети сети Γ. Тогда*

$$\sum_{e:e\in c} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = 0.$$

Поэтому фундаментальная система, полученная из данной фундаментальной системы заменой базиса фундаментальных циклов подвижного подграфа, эквивалентна исходной системе.

Лемма 5.3 *Пусть δ — ориентированный путь в невырожденной компоненте сети Γ, начинающийся в e_1 и заканчивающийся в e_j. Тогда фундаментальная система уравнений сети Γ, полученная из исходной фундаментальной системы сети Γ заменой уравнений для γ_j на уравнения*

$$\sum_{e:e\in\delta} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = M_j - M_1$$

для δ, эквивалентна исходной фундаментальной системе.

Утверждение предложения вытекает из лемм 5.2 и 5.3. Доказательство закончено.

Изучим, как связаны решения фундаментальной системы сети Γ и элементы множества $[G,\varphi]_\Gamma$. Если Γ' — произвольная параллельная

Γ линейная сеть типа G с границей φ, то набор длин ребер сети Γ' удовлетворяет фундаментальной системе сети Γ.

Обратно, пусть $\{\lambda_c\}$ — некоторое решение фундаментальной системы. Покажем, что если все $\lambda_e > 0$, то существует параллельная Γ линейная сеть типа G с границей φ, длины ребер которой равны соответствующим значениям λ_e. Для этого сначала для произвольного решения $\{\lambda_e\}$ фундаментальной системы построим линейную сеть Γ' из $[G, \varphi]$. Легко видеть, что если мы реализуем все невырожденные компоненты сети Γ' на соответствующих им подмножествах множества M, то мы, тем самым, реализуем и всю сеть Γ'. Поэтому, в силу блочного вида фундаментальной системы, без ограничения общности можно предполагать, что граф G совпадает со своей единственной невырожденной компонентой.

Пусть T — остовное дерево графа G с границей $\partial T = \partial G$. Выберем все пути γ_j лежащими в T. Напомним, что на графе G, а значит и на дереве T, фиксирована ориентация. Построим линейное дерево Υ, такое что $\Upsilon(v_1) = M_1$, и вектор $\Upsilon(c)$, соответствующий произвольному ориентированному ребру e из T, равен $\lambda_e \nu(e)$. Так как набор чисел $\{\lambda_e\}$ удовлетворяет фундаментальной системе, то граница $\partial\Upsilon$ дерева Υ совпадает с $\partial\Gamma$ (отметим, что по определению, параметризующее дерево T сети Υ является остовным подграфом в G).

Так как отображение Υ определено на всех вершинах графа G, то оно по линейности продолжается до единственной линейной сети $\Gamma' \colon G \to \mathbb{R}^N$. Покажем, что вектор $\Gamma'(e)$, соответствующий произвольному ориентированному ребру e из G, равен $\lambda_e \nu(e)$.

Если $e \in T$, то доказывать нечего. Далее, пусть $e \notin T$, и c — единственный цикл в графе $T \cup \{e\}$, ориентированный произвольным образом. Обозначим через v и v' инцидентные e вершины из G. В силу леммы 5.2, имеем:

$$\varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = -\sum_{e' : e' \in c \cap T} \varepsilon(e')\nu(e')\lambda_{e'}.$$

Осталось заметить, что в правой части стоит как раз разность радиус векторов точек $\Upsilon(v)$ и $\Upsilon(v')$, что и требовалось.

Обозначим через Λ аффинное подпространство в $\mathbb{R}^m$, являющееся множеством решений фундаментальной системы сети Γ (здесь m — количество ребер графа G). Пусть $\psi \colon \Lambda \to [G, \varphi]$ — построенное только что отображение, ставящее в соответствие каждому набору $(\dots, \lambda_e, \dots) \in \Lambda$ соответствующую линейную сеть из $[G, \varphi]$, точнее, вектор координат подвижных вершин этой сети. Очевидно, что ψ — аффинное отображение.

Легко видеть, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 5.3 *Сеть* $\Gamma' \in [G, \varphi]$, $\Gamma' = \psi(\dots, \lambda_e, \dots)$, *параллельна сети* Γ *если и только если все* λ_e *строго положительны. Иными словами,*

$$[G, \varphi]_\Gamma = \psi\big(\Lambda \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+\big),$$

где через $\mathbb{R}^m_+$ *обозначена внутренность положительного ортанта в пространстве* $\mathbb{R}^m$.

Предложение 5.3 позволяет легко доказать следующий результат.

Лемма 5.4 *Отображение* ψ *взаимно однозначно с образом, и, поэтому,* ψ *— аффинное вложение.*

Доказательство. Так как положительный ортант — открытое множество, взаимная однозначность отображения ψ вытекает из аффинности этого отображения и того факта, что расположение вершин линейной сети однозначно определяет вектор длин ее ребер.

Теперь все готово, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема 7 *Пусть* Γ *— погруженная линейная сеть типа* G *с границей* φ *в* $\mathbb{R}^N$. *Обозначим через* m *число ребер графа* G, *и через* r *— ранг* $\operatorname{rk}(\Gamma)$ *сети* Γ. *Тогда* $[G, \varphi]_\Gamma$ *— открытое выпуклое многогранное подмножество в* $\psi(\Lambda)$ (*вообще говоря, не ограниченное*), *его размерность равна* $m - r$, *и количество граней максимальной размерности не превосходит* m.

Доказательство. В силу предложения 5.3,

$$[G, \varphi]_\Gamma = \psi(\Lambda \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+).$$

Теперь выпуклость, открытость и многогранность множества $[G, \varphi]_\Gamma$ в аффинном подпространстве $\psi(\Lambda) \subset [G, \varphi]$ вытекает из аффинности отображения ψ и выпуклости, открытости и многогранности в Λ множества $\Lambda \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$. В частности, размерность множества $[G, \varphi]_\Gamma$ равна размерности пространства Λ, т.е. равна $m - r$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться следующей очевидной леммой.

Лемма 5.5 *Пусть* X *— внутренняя точка положительного ортанта* $\mathbb{R}^m_+$, *и* Π *— проходящее через* X *аффинное подпространство в* $\mathbb{R}^m$, *пересекающее* $\mathbb{R}^m_+$ *по множеству* W. *Тогда* W *— выпуклое многогранное множество, количество граней максимальной размерности которого не превосходит* m.

Теорема доказана.

Оказывается, если граница сети Γ удовлетворяет некоторым естественным ограничениям, то теорему 7 можно усилить. Пусть, как и выше, $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — погруженная линейная сеть. Определим *геометрическую границу* $\partial_g\Gamma$ *сети* Γ следующим образом. Вершину v сети Γ отнесем к $\partial_g\Gamma$, если и только если существует такая проходящая через v гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$, что одно из ограниченных ей открытых полупространств содержит внутренности всех ребер из Γ, инцидентных v.

Имеет место следующий результат.

Предложение 5.4 *Погруженная линейная сеть содержится в выпуклой оболочке своей геометрической границы.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда выпуклая оболочка всей сети содержит выпуклую оболочку ее геометрической границы как собственное подмножество. Отсюда немедленно вытекает, что существует вершина v сети, не принадлежащая геометрической границе, лежащая на границе выпуклой оболочки сети, и такая что одна из опорных гиперплоскостей к выпуклой оболочке сети пересекает эту оболочку в точности по вершине v. Но последнее означает, что v принадлежит геометрической границе сети, что невозможно. Доказательство закончено.

Из предложения 5.4 и теоремы 7 вытекает следующий результат.

Следствие 5.1 *В предположениях теоремы 7, если граница φ сети Γ содержит геометрическую границу $\partial_g\Gamma$ этой сети, то множество $[G,\varphi]_\Gamma$ является внутренностью выпуклого (ограниченного) многогранника размерности $m-r$, количество граней максимальной размерности которого не превосходит m.*

Замечание. Легко построить пример погруженной линейной сети Γ, граница φ которой не содержит геометрической границы $\partial_g\Gamma$, однако множество $[G,\varphi]_\Gamma$ ограничено. Было бы интересно найти критерий ограниченности множества $[G,\varphi]_\Gamma$ в терминах геометрии границы φ.

5.2 Взвешенные минимальные сети в $\mathbb{R}^N$

В данном разделе мы используем полученные выше общие результаты для описания структуры множества лежащих в $\mathbb{R}^N$ погруженных взвешенных минимальных сетей фиксированного типа и с данной границей. Напомним, что локальная структура таких сетей описывается

теоремой 2 так. Погруженная взвешенная сеть Γ с границей M в римановом многообразии W является минимальной, если и только если имеют место следующие свойства:

- все ребра сети — отрезки геодезических;
- для каждой негранничной вершины v линейная комбинация единичных векторов направлений входящих в v ребер с коэффициентами — весами этих ребер, равна нулю.

Замечание. Вообще говоря, взвешенная минимальная сеть $\Gamma\colon G \to W$ может содержать кратные ребра. Из теоремы 2 о локальной структуре вытекает, что если каждые две точки многообразия W соединяет не более одной геодезической (например, W — область в $\mathbb{R}^N$ или в пространстве Лобачевского), то образы всех кратных ребер совпадают. Более того, если в этом случае перестроить взвешенный граф G, заменив каждый набор $e_1, \dots, e_p$ кратных ребер на одно из этих ребер с весом, равным $\sum_{i=1}^{p} \omega(e_i)$, и определить на полученном графе $\overline{G}$ сеть $\overline{\Gamma}$, совпадающую с Γ, то взвешенная сеть $\overline{\Gamma}$ вновь будет минимальной с той же границей, что и сеть Γ. Описанную операцию на взвешенных графах и соответствующих сетях назовем *склейкой кратных ребер*, а полученные в результате склейки кратных ребер граф $\overline{G}$ и сеть $\overline{\Gamma}$ будем обозначать через $g(G)$ и $g(\Gamma)$ соответственно.

Следствие 5.2 *Пусть Γ является взвешенной минимальной сетью, и v — произвольная ее подвижная вершина. Тогда степень вершины v не меньше 2, и веса ребер, инцидентных v, удовлетворяют "правилу многоугольника": вес каждого из этих ребер не больше суммы весов всех остальных из этих ребер. В частности, если направления всех ребер, инцидентных вершине v, колинеарны, то эти ребра разбиваются на два класса, с одинаковыми суммарными весами. Поэтому, веса ребер, инцидентных подвижной вершине степени 2, равны между собой.*

Замечание. Пусть G — некоторый взвешенный граф, и $\Gamma\colon G \to W$ — взвешенная минимальная сеть. Если некоторая вершина степени 2 сети Γ — подвижная, то инцидентные этой вершине ребра, по следствию 5.2, необходимо имеют одинаковые веса и, поэтому, стыкуются под углом в 180°. Отсюда вытекает, что если выбросить из множества вершин параметризующего графа G подвижные вершины степени 2, инцидентные разным (не циклическим) ребрам одного веса[1], и "укрупнить" при

[1]Отметим, что если граф G содержит вершину степени 2, инцидентную циклическому ребру, то G совпадает с эти циклическим ребром.

этом ребра, склеивая каждую пару ребер из G, инцидентных такой вершине, в одно ребро того же веса, то получим новую взвешенную минимальную сеть, образ которой совпадает с образом сети Γ.

Обратно, из любой взвешенной сети Γ, не меняя ее образа, можно получить другую взвешенную сеть, выбрав на ребрах параметризующего графа G произвольные внутренние точки и добавив их к множеству подвижных вершин. При этом надо сделать очевидную перестройку ребер и весовой функции сети. Более того, по теореме 2, при любой такой перестройке сети каждая взвешенная минимальная сеть остается взвешенной минимальной сетью.

Определение. Каждую не инцидентную циклическому ребру подвижную вершину степени 2 произвольного взвешенного графа G, а также соответствующую вершину произвольной сети Γ типа G, будем называть *фиктивной*.

Для сетей в многообразиях, каждые две точки которых соединяются не более чем одной геодезической, понятие фиктивной вершины можно естественно расширить. Пусть теперь G — произвольный взвешенный граф (возможно, с кратными ребрами), параметризующий сеть Γ в многообразии W, обладающим указанным свойством, и $g(G)$ — результат склейки кратных ребер графа G.

Определение. Вершину v сети Γ типа G (соответственно, графа G) назовем *фиктивной*, если и только если фиктивной является соответствующая вершина графа $g(G)$.

Другими словами, вершина v сети Γ является фиктивной, если она подвижна, смежна ровно с двумя вершинами, скажем v_1 и v_2, и сумма весов ребер, соединяющих v с v_1 равна сумме весов ребер, соединяющих v с v_2. Отметим, что на случай таких сетей естественно переносится операция удаления фиктивных вершин.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.1 *Пусть каждые две точки риманового многообразия W соединяет не более одной геодезической. Тогда взвешенная сеть Γ с границей $\partial\Gamma$ является минимальной если и только если минимальной является взвешенная сеть, полученная из Γ удалением всех фиктивных вершин.*

Замечание. Пусть Γ — произвольная взвешенная минимальная сеть с границей $\partial\Gamma$. Если для некоторой граничной вершины выполняется условие теоремы 2 о локальной структуре, характеризующее подвижные вершины, т.е. линейная комбинация векторов направлений ребер,

входящих в эту вершину, с коэффициентами — весами этих ребер, равна нулю, то такую вершину можно исключить из границы, объявив ее подвижной, что не изменит свойства сети Γ быть взвешенной минимальной. Такие граничные вершины будем называть *ложными*. Легко видеть, что взвешенные минимальные сети общего положения не содержат ложных вершин.

Замечание. Пусть Γ — произвольная взвешенная минимальная сеть с границей $\partial\Gamma$. Разрежем сеть Γ по всем граничным вершинам степени больше 1 и рассмотрим произвольную связную компоненту. Определим границу каждой такой компоненты как множество всех ее вершин степени 1. Ясно, что граница каждой компоненты является частью границы сети Γ. Поэтому, в соответствие с теоремой 2, каждая компонента сама является взвешенной минимальной сетью.

Множество всех вершин степени 1 произвольного графа (сети) назовем *эффективной границей* этого графа (сети). Графы (сети), границы которых эффективны, назовем *невырожденными*. Итак, каждая связная компонента взвешенной минимальной сети, разрезанной по всем граничным вершинам степени больше 1, является невырожденной взвешенной минимальной сетью. Эти связные компоненты сети Γ назовем *невырожденными компонентами сети* Γ. Такое определение невырожденных компонент для случая взвешенных минимальных сетей совпадает с данным выше определением невырожденных компонент сети общего вида.

Задача описания взвешенных минимальных сетей общего вида сводится к задаче описания невырожденных взвешенных минимальных сетей. А именно, имеет место следующий очевидный результат.

Утверждение 5.2 *Взвешенная сеть G с границей $\partial\Gamma$ является минимальной тогда и только тогда, когда каждая ее невырожденная компонента — взвешенная минимальная сеть по отношению к своей границе.*

Понятие взвешенной длины естественным образом определено для произвольной взвешенной геодезической сети. Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω, и Γ — произвольная геодезическая сеть типа G. Обозначим через $\ell_\omega(\Gamma)$ линейную комбинацию длин всех ребер сети Γ с коэффициентами — весами соответствующих ребер из G и назовем это число *взвешенной длиной геодезической сети* Γ. Функция ℓ_ω определена на пространстве всех геодезических сетей топологии G.

5.2.1 Структура множества взвешенных локально минимальных сетей

Начиная с этого места мы снова будем предполагать, что $W = \mathbb{R}^N$. Напомним, что через $\mathfrak{L}(G)$ мы обозначаем пространство всех линейных сетей топологии G. На этом пространстве, как было только объяснено, определена функция ℓ_ω взвешенной длины. Следующее предложение доказывается точно так же, как и утверждение 3.3.

Предложение 5.5 *Функция $\ell_\omega\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathbb{R}$ — выпукла вниз.*

Следствие 5.3 *Ограничение функции ℓ_ω на $[G,\varphi]$ выпукло.*

Следующее предложение описывает множество экстремумов функции $\ell_\omega\colon [G,\varphi] \to \mathbb{R}$ и вытекает из стандартных свойств выпуклых функций.

Предложение 5.6 *Множество экстремумов функции $\ell_\omega\colon [G,\varphi] \to \mathbb{R}$ непусто, выпукло (а, значит, линейно связно), ограничено и состоит из точек абсолютного минимума.*

Множество минимумов функции $\ell_\omega\colon [G,\varphi] \to \mathbb{R}^N$ обозначим через $[G,\varphi]_{\min}$.

Найдем теперь необходимое и достаточное условие того, что точка $x \in [G,\varphi]$ является точкой минимума. Для этого мы воспользуемся формулой первой вариации взвешенной длины, см. следствие 1.8.

Пусть G — взвешенный граф, ω — весовая функция, Γ — произвольная линейная сеть из $\mathfrak{L}(G)$, и v — произвольная ее вершина. Обозначим через N_v линейную комбинацию единичных векторов направлений входящих в вершину v невырожденных ребер с коэффициентами — весами этих ребер. Далее, пусть $D(v)$ — множество всех вершин, смежных с v, для которых ребра, соединяющие их с вершиной v — вырождены.

Рассмотрим произвольную деформацию Γ_t сети Γ в классе $\mathfrak{L}(G)$, и пусть E_v — начальный вектор скорости движения вершины v при этой деформации.

Из следствия 1.8 вытекает, что сеть Γ является точкой абсолютного минимума функции $\ell_\omega\colon [G,\varphi] \to \mathbb{R}$ если и только если для любых семейств векторов E_v, равных нулю в неподвижных вершинах, выражение

$$\sum_v \Big(\langle N_v, E_v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{v' \in D(v)} \omega(vv') |E_v - E_{v'}| \Big),$$

где $\omega(vv')$ — вес ребра сети Γ, соединяющего v и v', неотрицательно.

Следствие 5.4 *Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω, а Γ — линейная сеть из $[G,\varphi]$, не содержащая вырожденных ребер. Тогда Γ является точкой абсолютного минимума функции взвешенной длины ℓ_ω, т.е. $\Gamma \in [G,\varphi]_{\min}$, если и только если Γ — взвешенная минимальная сеть с границей φ. В частности, если все абсолютные минимумы функции взвешенной длины на пространстве $[G,\varphi]$ содержат вырожденные ребра, то не существует погруженной взвешенной минимальной сети типа G с границей φ.*

Перейдем теперь к формуле второй вариации длины. Нам не понадобится формула второй вариации в общем случае, поэтому мы выпишем ее лишь в предположении, что все вершины деформируемой сети равномерно движутся по прямым. Деформация, удовлетворяющая указанному свойству, называется *линейной*.

Предложение 5.7 *Пусть $[a_t,b_t]$ — произвольная линейная деформация отрезка $[a_0b_0]$, $t \geq 0$, и $|a_0b_0| \neq 0$, т.е. отрезок $[a_0,b_0]$ невырожден. Тогда*

$$\left.\frac{d^2|a_tb_t|}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{|b_0-a_0|^2|b'-a'|^2 - \langle b_0-a_0, b'-a'\rangle^2}{|b_0-a_0|^3},$$

где a' и b' — скорости кривых a_t и b_t в начальный момент времени $t=0$.

Доказательство получается прямым подсчетом.

Следствие 5.5 *В предположениях предложения 5.7, вторая производная длины отрезка неотрицательна и равна нулю если и только если разность $b'-a'$ векторов начальных скоростей вариации отрезка колинеарна направлению отрезка. В частности, вторая производная длины отрезка равна нулю если и только если все отрезки $[a_t,b_t]$ рассматриваемой линейной вариации взаимно параллельны.*

Приведем теперь аналог доказанной Хвангом [35] теоремы единственности локально минимальных деревьев данного типа с данной границей. Для этого мы расширим класс фиктивных вершин так. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — взвешенная минимальная сеть с границей φ. Подвижная вершина V сети Γ называется *слабо фиктивной*, если все инцидентные ей ребра взаимно параллельны. Из минимальности сети Γ вытекает, что ребра сети Γ, инцидентные слабо фиктивной вершине V, а также соответствующие ребра графа G, разбиваются на два класса с одинаковым суммарным весом. При этом, образы любых двух таких ребер пересекаются по точке тогда и только тогда когда эти ребра принадлежат разным классам. Отметим, что фиктивные вершины

являются фиктивными для любой взвешенной минимальной сети Γ, т.е. это свойство не зависит от выбора отображения Γ в классе взвешенных минимальных сетей. В общем случае, слабо фиктивные вершины могут перестать быть таковыми при сколь угодно малом изменении отображения Γ в классе взвешенных минимальных сетей. Приведем пример.

Пример. Пусть G — граф, состоящий из четырех ребер, стыкующихся в одной общей вершине v, и весовая функция постоянна и равна 1. Пусть ∂G — эффективная граница графа G, которая состоит из 4 вершин. Рассмотрим граничное отображение φ, переводящее множество ∂G в четыре различных точки $M_1, \dots, M_4$, лежащие на одной прямой l. Будем предполагать без ограничения общности, что точки M_i занумерованы последовательно. Тогда, для любого расположения образа A вершины v на интервале (M_2, M_3), соответствующая линейная сеть Γ является взвешенной минимальной сетью типа G с границей φ. Вершина $\Gamma\colon v \mapsto A$ этой сети — слабо фиктивна. Отметим, что в этом случае имеется однопараметрическое семейство взвешенных минимальных сетей типа G с границей φ.

Если же сколь угодно мало изменить отображение φ так, чтобы точки M_i стали вершинами плоского выпуклого четырехугольника, то для такого граничного отображения существует единственная взвешенная минимальная сеть Γ типа G. Образ A вершины v сети Γ совпадает с точкой пересечения диагоналей граничного четырехугольника. Ясно, что вершина $\Gamma\colon v \mapsto A$ в этом случае не является слабо фиктивной.

Предложение 5.8 *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — погруженное взвешенное минимальное дерево без слабо фиктивных вершин. Тогда Γ — единственная погруженная взвешенная минимальная сеть типа G с границей $\partial\Gamma$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует отличная от Γ взвешенная минимальная сеть $\Gamma'\colon G \to \mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Gamma' = \partial\Gamma$. В силу следствия 5.4, обе сети Γ и Γ' лежат в $[G, \varphi]_{\min}$. Рассмотрим семейство линейных сетей $\Gamma_t = (1-t)\Gamma + t\Gamma'$, где $t \in [0, 1]$. Обозначим через E_v вектор скорости деформации Γ_t в вершине v при $t = 0$.

В силу предложения 5.6, все линейные сети Γ_t лежат в $[G, \varphi]_{\min}$, и, значит, имеют одинаковую взвешенную длину $\ell(t) = \ell_\omega(\Gamma_t)$. Поэтому вторая производная функции $\ell(t)$ равна нулю. Из следствия 5.5 вытекает, что для любых смежных вершин v_1 и v_2 графа G разность

векторов E_{v_1} и E_{v_2} параллельна ребру e сети Γ, соединяющему соответствующие v_i вершины. В частности, если в одной из вершин, скажем в v_1, вектор E_{v_1} равен нулю, то вектор E_{v_2} параллелен ребру e.

Рассмотрим множество F всех вершин v графа G, в которых вектор E_v отличен от нуля. Такие вершины будем называть *смещаемыми*. Рассмотрим подграф в G, порожденный множеством F, выберем в этом подграфе произвольную связную компоненту, (которая, очевидно, является деревом), и пусть v — вершина степени один в этой компоненте. Так как граф G не содержит фиктивных вершин, а v — подвижная вершина, то степень вершины v в графе G больше 2. Поэтому, множество всех несмещаемых вершин из G, смежных с v, состоит не менее чем из двух элементов. Так как сеть Γ не содержит слабо фиктивных вершин, среди несмещаемых вершин смежных с v существует по крайней мере две, скажем v_1 и v_2, таких что образы e_i ребер, соединяющих v с v_i, не лежат на одной прямой. Так как вершины v_1 и v_2 несмещаемы, вектора E_{v_1} и E_{v_2} равны нулю. Поэтому, в соответствие с вышесказанным, вектор E_v должен быть параллелен обоим отрезкам e_i, что невозможно. Доказательство закончено.

Если дерево Γ содержит слабо фиктивные вершины, то, как видно из примера 5.2.1, никакой единственности нет. Аналогично, если Γ не является деревом, то, вообще говоря, также единственности нет. Приведем соответствующий пример.

Пример. Рассмотрим правильный шестиугольник на плоскости, из каждой вершины которого наружу отложен отрезок, составляющий со смежными сторонами шестиугольника углы в 120°. Если в качестве границы полученной линейной сети выбрать все ее вершины степени 1, и выбрать весовую функцию постоянной, то полученная взвешенная минимальная сеть может быть продеформирована в классе взвешенных минимальных сетей того же типа и с той же границей: шестиугольник можно сжимать и растягивать вдоль прямых, проходящих через граничные ребра. Если к границе добавить еще хотя бы одну вершину степени три, то полученная взвешенная минимальная сеть уже не может быть продеформирована. Причину этого легко понять: если разрезать такую сеть по граничной вершине степени три, то она превратится во взвешенное минимальное дерево, которое единственно в соответствие с предложением 5.8.

Следующее предложение позволит нам свести задачу описания множества взвешенных минимальных сетей данного типа с фиксированной границей к теореме 7.

Предложение 5.9 *Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω, а Γ и Γ' — две взвешенных минимальных сети типа G с одной и той же границей φ. Тогда сети Γ и Γ' параллельны. Поэтому, в частности, если Γ_t — линейная деформация, соединяющая сети Γ и Γ', то все Γ_t — суть взаимно параллельные взвешенные минимальные сети типа G с границей φ.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что соответствующие ребра сетей Γ и Γ' — параллельны (напомним, что для параллельности сетей этого не достаточно). В силу следствия 5.4, обе сети Γ и Γ' лежат в $[G,\varphi]_{\min}$. Рассмотрим семейство линейных сетей $\Gamma_t = (1-t)\Gamma + t\Gamma'$, где $t \in [0,1]$. Обозначим через E_v вектор скорости деформации Γ_t в вершине v при $t=0$.

В силу предложения 5.6, все линейные сети Γ_t лежат в $[G,\varphi]_{\min}$, и, значит, имеют одинаковую взвешенную длину $\ell(t) = \ell_\omega(\Gamma_t)$. Поэтому вторая производная функции $\ell(t)$ равна нулю. По следствию 5.5, соответствующие ребра сетей Γ и Γ' параллельны, что и требовалось. Для завершения доказательства предложения достаточно показать, что все линейные сети Γ_t не содержат вырожденных ребер.

Нам потребуется следующий результат из [55].

Утверждение 5.3 *Пусть L — прямая в $\mathfrak{L}(G)$, проходящая через погруженную линейную сеть Γ. Тогда L содержит не более чем конечное множество линейных сетей, не являющихся погруженными. Поэтому, если L — прямая в $[G,\varphi]$, проходящая через погруженную линейную сеть Γ, то L также содержит не более чем конечное множество линейных сетей, не являющихся погруженными.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть прямая L задается параметрически так: $L(t) = \Gamma + t\,n$, где $t \in \mathbb{R}$ — параметр, а n — ненулевой вектор в $\mathfrak{L}(G)$. Напомним, что $\mathfrak{L}(G)$ параметризуется координатами образов вершин линейных сетей из $\mathfrak{L}(G)$. Поэтому, если сеть Γ задается, как точка из $\mathfrak{L}(G)$, вектором $(V_1,\dots,V_m)$, составленным из координат V_k образов своих вершин, то прямая L имеет вид: $L(t) = (V_1 + t\,n_1,\dots,V_m + t\,n_m)$, где $(n_1,\dots,n_m)$ — координаты вектора n. Отметим, что линейная сеть $L(t)$ вырождена тогда и только тогда, когда для некоторых i и j выполняется условие: $V_i + t\,n_i = V_j + t\,n_j$. Однако, при $t=0$ линейная сеть $L(0) = \Gamma$ — невырождена, поэтому $V_i \neq V_j$. Отсюда немедленно вытекает, что или $n_i = n_j$, и тогда $V_i + t\,n_i$ не совпадает с $V_j + t\,n_j$ ни при каком t, или, в противном случае, существует единственное t, при котором эти точки одинаковы. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение вытекает из того, что $[G, \varphi]$ — линейное подпространство в $\mathfrak{L}(G)$. Доказательство закончено.

Вернемся к доказательству предложения. Предположим противное, т.е. среди линейных сетей Γ_t имеются не погруженные. В силу утверждения 5.3, таких сетей имеется лишь конечное число. Поэтому среди сетей Γ_t существует погруженная сеть Γ'', такая что между Γ и Γ'' имеется ровно одна не погруженная сеть $\overline{\Gamma}$ из семейства Γ_t.

Рассмотрим произвольную связную компоненту $\overline{\Gamma}_d$ множества всех вырожденных ребер сети $\overline{\Gamma}$. Легко видеть, что эта компонента является подсетью в $\overline{\Gamma}$, содержащей все ребра из $\overline{\Gamma}$, соединяющие вершины из $\overline{\Gamma}_d$. Пусть $\overline{G}_d$ — подграф в G, параметризующий $\overline{\Gamma}_d$, и v — произвольная вершина из $\overline{G}_d$. Обозначим через $e_1, \dots, e_p$ все ребра из $\overline{G}_d$, инцидентные v, а через $f_1, \dots, f_q$ — все ребра из G, инцидентные v и отличные от e_i. Далее, пусть μ_i и ν_j — единичные вектора направлений входящих в вершину $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ ребер $\Gamma\colon e_i \to \mathbb{R}^N$ и $\Gamma\colon f_j \to \mathbb{R}^N$ сети Γ соответственно.

Так как сети Γ и Γ'' — минимальны, имеем

$$\sum_{j=1}^{q} \omega(f_j)\nu_j + \sum_{i=1}^{p} \omega(e_i)\mu_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{q} \omega(f_j)\nu_j - \sum_{i=1}^{p} \omega(e_i)\mu_i = 0,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^{q} \omega(f_j)\nu_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \omega(e_i)\mu_i = 0.$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$ — множество Γ-образов вершин из $\overline{G}_d$. Так как $\overline{G}_d$ содержит по крайней мере одно ребро, и сеть Γ — погруженная, множество M состоит более чем из одной точки. Поэтому, выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(M)$ множества M является отличным от точки выпуклым многогранником. Пусть $m \in M$ — произвольная вершина выпуклого многогранника $\mathrm{conv}(M)$, через которую можно провести гиперплоскость, пересекающуюся с $\mathrm{conv}(M)$ только по m. Пусть v — вершина из $\overline{G}_d$, такая что $\Gamma(v) = m$. Так как все веса ребер положительны, то для выбранной вершины v равенство

$$\sum_{i=1}^{p} \omega(e_i)\mu_i = 0$$

не выполняется. Полученное противоречие и завершает доказательство предложения.

Следствие 5.6 *Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω, и φ — произвольное граничное отображение. Тогда множество всех погруженных минимальных сетей типа G с границей φ или пусто, или совпадает с относительной внутренностью выпуклого компакта $[G,\varphi]_{\min}$. Поэтому, если существует взвешенная минимальная сеть типа G с границей φ, то*

$$\operatorname{int}[G,\varphi]_{\min} = [G,\varphi]_{\Gamma}.$$

Доказательство. Предположим сразу, что существует хотя бы одна взвешенная минимальная сеть Γ типа G с границей φ. Из предложения 5.9 вытекает, что множество всех взвешенных минимальных сетей типа G с данной границей φ — выпуклое подмножество в $[G,\varphi]_{\min}$. Покажем, что каждая точка Γ' из относительной внутренности множества $[G,\varphi]_{\min}$ является взвешенной минимальной сетью.

Выпустим из точки Γ луч r в направлении точки Γ'. Так как Γ' принадлежит относительной внутренности множества $[G,\varphi]_{\min}$, то достаточно близкие к Γ' точки луча r, не лежащие на отрезке $[\Gamma,\Gamma']$, принадлежат $[G,\varphi]_{\min}$. Пусть Γ'' — любая из таких точек. Из утверждения 5.3 вытекает, что на интервале (Γ',Γ'') содержится погруженная линейная сеть $\overline{\Gamma}$. По предложению 5.9, отрезок $[\Gamma,\overline{\Gamma}]$, соединяющий две взвешенных минимальных сети одного типа с одной и той же границей, состоит из взвешенных минимальных сетей, что и требовалось.

Таким образом, из теоремы 7 и следствия 5.1 из нее, вытекает следующий результат.

Следствие 5.7 *Пусть Γ взвешенная минимальная сеть типа G в $\mathbb{R}^N$ с границей φ и весовой функцией ω. Обозначим через r ранг сети Γ, через m — количество ребер сети Γ, а через $[G,\varphi]$ — конфигурационное пространство подвижных вершин графа G.*

Тогда множество взвешенных минимальных сетей типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(m-r)$-мерного многогранника $[G,\varphi]_{\min}$, являющегося множеством всех минимумов функции взвешенной длины $\ell_\omega\colon [G,\varphi]\to\mathbb{R}$.

Более того, многогранник $[G,\varphi]_{\min}$ имеет не более чем m граней максимальной размерности.

Опишем теперь более подробно, как устроены деформации взвешенных минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей.

Пусть G — произвольный взвешенный граф с весовой функцией ω и границей B, и $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^N$ — взвешенная минимальная сеть с границей

$\varphi\colon B \to \mathbb{R}^N$. Ребро графа G назовем *циклическим*, если оно принадлежит хотя бы одному циклу. Обозначим через $\widehat{G}_B$ подвижный подграф для G. Ребро e из G отнесем к *нулевому уровню*, если e — циклическое ребро подвижного подграфа $\widehat{G}_B$. Ребро, не принадлежащее нулевому уровню, но инцидентное или некоторому ребру нулевого уровня, или слабо фиктивной вершине, назовем *ребром первого уровня*, а все остальные ребра (т.е. ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях) назовем *ребрами второго уровня*.

Имеет место следующий результат.

Теорема 8 *Пусть* Γ *— произвольная взвешенная минимальная сеть в* $\mathbb{R}^N$ *типа* G *с границей* φ, *и* Γ_t, $t \in [0,1]$, *некоторая ее деформация в классе взвешенных минимальных сетей с той же границей* φ. *Тогда в процессе деформации* Γ_t *все ребра остаются параллельны себе. При этом, ребра второго уровня неподвижны, а для ребер первого уровня остаются неподвижными прямые, содержащие эти ребра.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд новых понятий и их свойств.

5.2.2 Формы Максвелла

Пусть G — взвешенный граф с границей ∂G и положительной весовой функцией ω, а $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — произвольная линейная сеть в $\mathbb{R}^N$ с границей $\Gamma|_{\partial G}$. Пусть $G_1, \dots, G_k$ — невырожденные компоненты графа G, и $\Gamma_q = \Gamma|_{G_q}$ — соответствующие невырожденные компоненты сети Γ. Рассмотрим некоторую невырожденную компоненту Γ_q. Для каждой граничной вершины v_p из G_q обозначим через ν_p единичный вектор направления единственного входящего в вершину $\Gamma_q\colon v_p \to \mathbb{R}^N$ ребра $\Gamma_q\colon e_p \to \mathbb{R}^N$ сети Γ_q, а через m_p — радиус-вектор точки $\Gamma_q(v_p)$ в $\mathbb{R}^N$.

Далее, пусть Θ — стандартная форма объема в $\mathbb{R}^N$. Другими словами, если $(x^1, \dots, x^N)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$, то

$$\Theta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N.$$

Обозначим через $\mu(\Gamma_q)$ внешнюю форму степени $N-2$, значение которой на произвольном наборе векторов $V_1, \dots, V_{N-2}$ из $\mathbb{R}^N$ определяется так:

$$\mu(\Gamma_q)\big(V_1, \dots, V_{N-2}\big) = \sum_p \omega(e_p)\Theta(m_p, \nu_p, V_1, \dots, V_{N-2}),$$

где сумма берется по всем граничным вершинам v_p графа G_q.

Определение. Внешняя форма $\mu(\Gamma_q)$ называется *формой Максвелла невырожденной компоненты* Γ_q или *формой Максвелла сети* Γ, соответствующей невырожденной компоненте Γ_q.

Предложение 5.10 *Пусть* Γ — *произвольная взвешенная минимальная сеть, и* $\Gamma_q\colon G_q \to \mathbb{R}^N$ — *ее невырожденная компонента. Тогда форма Максвелла* $\mu(\Gamma_q)$ *равна нулю.*

Доказательство. Для каждой подвижной вершины $v \in G_q$ рассмотрим единичные вектора n_v^j направлений входящих в вершину $\Gamma_q\colon v \to \mathbb{R}^N$ ребер. Так как сеть Γ_q минимальна, то при каждом фиксированном v линейная комбинация векторов n_v^j с коэффициентами — весами ω_j соотвстствующих ребер, равна нулю. Поэтому равна нулю и внешняя $(N-2)$-форма, получешная из формы объема так:

$$\Theta\big(m_v, \sum_j \omega_j n_v^j,\ \cdot\ , \dots\ ,\ \cdot\ \big),$$

где через m_v обозначен радиус-вектор точки $\Gamma_q(v)$. Следовательно, добавив эти равные нулю формы к форме Максвелла $\mu(\Gamma_q)$, мы не изменим форму $\mu(\Gamma_q)$.

Прибавим все эти (нулевые) формы к $\mu(\Gamma_q)$. В полученной сумме мы изменим порядок суммирования, сгруппировав вместе слагаемые, соответствующие одному и тому же ребру e, а затем уже просуммировав по всем ребрам из G_q. А именно, пусть e — произвольное ребро из G, A_e и B_e — радиус-векторы концевых точек отрезка $\Gamma(e)$, а n_A и n_B — векторы направления отрезка $\Gamma(e)$, ориентированного соответственно в сторону A_e и B_e. Иными словами, $n_A = -n_B = B_eA_e/|B_eA_e|$. Тогда ребру e в нашей сумме соответствует следующее выражение:

$$\omega(e)\Theta(A_e, n_A, \dots) + \omega(e)\Theta(B_e, n_B, \dots) =$$
$$\omega(e)\big(\Theta(A_e, n_A, \dots) - \Theta(B_e, n_A, \dots)\big) = \omega(e)\big(\Theta(A_e - B_e, n_A, \dots)\big) = 0,$$

так как векторы $A_e - B_e$ и n_A колинеарны. Поэтому форма $\mu(\Gamma_q)$ равна нулю, что и требовалось. Доказательство предложения закончено.

Пусть G — взвешенный граф, совпадающий со своей невырожденной компонентой. Рассмотрим два граничных отображения φ и φ', одинаковых на всех граничных вершинах из G, кроме одной, скажем v. Обозначим через e единственное ребро из G, инцидентное v.

Предложение 5.11 *Предположим, что* G *имеет в* $\mathbb{R}^N$ *взвешенные минимальные реализации* Γ *и* Γ' *по описанным выше граничным отображениям* φ *и* φ' *соответственно. Более того, пусть взвешенные*

минимальные сети Γ *и* Γ' *параллельны. Тогда отрезок* $[\varphi(v), \varphi'(v)]$ *параллелен* Γ*-образу ребра* e*. В частности, отрезки* $\Gamma(e)$ *и* $\Gamma'(e)$ *лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим через n единичный вектор направлений входящих в вершины $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ и $\Gamma'\colon v \to \mathbb{R}^N$ ребер $\Gamma\colon e \to \mathbb{R}^N$ и $\Gamma'\colon e \to \mathbb{R}^N$, а через m и m' — радиус-векторы точек $\varphi(v)$ и $\varphi'(v)$ соответственно. Рассмотрим формы Максвелла взвешенных минимальных сетей Γ и Γ'. Имеем

$$\mu(\Gamma) - \mu(\Gamma') = \omega(e)\Theta(m - m', n, \dots).$$

По предложению 5.10, эта $(N-2)$-форма тождественно равна нулю. Следовательно, вектор $m - m' = \varphi'(v)\varphi(v)$ колинеарен вектору n. Доказательство предложения закончено.

5.2.3 Усы

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ — взвешенная локально минимальная сеть типа G, и пусть граф G совпадает со своей невырожденной компонентой. Обозначим через $C(G)$ множество всех циклических ребер из G. Множество $C(G)$ является подграфом в G. Связные компоненты графа $C(G)$ назовем *ядрами*.

Профакторизуем G, как топологическое пространство, по $C(G)$. Результат обозначим через G'. Полученное фактор-пространство естественным образом наделяется структурой графа, вершины которого — это вершины из G, не входящие ни в какое ядро, а также все ядра. Две вершины из G' смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им элементы из G (вершины или ядра) соединены в G ребром. Естественную проекцию графа G на фактор граф G' обозначим через π. Легко видеть, что G' является деревом.

Пусть $\overline{G}$ — произвольное дерево. Для краткости, мы будем называть вершины из $\overline{G}$ степени 1 *граничными*, так же, как и ребра, инцидентные им. Все остальные ребра будем называть *внутренними*. Совокупность смежных граничных ребер из $\overline{G}$ назовем *усами*, если из общей для них вершины выходит не более одного внутреннего ребра. Отметим, что при таком определении усы могут состоять из одного граничного ребра.

Предложение 5.12 *Каждое дерево* $\overline{G}$*, количество вершин которого больше единицы, имеет усы. Если это дерево содержит негранично ребро, то имеется двое непересекающихся усов.*

Доказательство. Отрежем от дерева $\overline{G}$ все граничные ребра. Если у полученного дерева нет ребер, то все граничные ребра из $\overline{G}$ образуют усы. В противном случае, у полученного дерева имеется не менее двух вершин степени 1. Ясно, что все граничные ребра из $\overline{G}$, инцидентные каждой такой вершине степени 1, образуют усы. Доказательство закончено.

Итак, рассмотрим в фактор-графе G' некоторые усы. Ясно, что π-прообраз этих усов — это или набор из $k \geq 1$ смежных граничных ребер, или некоторое ядро вместе с выходящими из него граничными ребрами графа G. Более того, в последнем случае существует не более одного негранично нециклического ребра из G, инцидентного этому ядру. Полученный π-прообраз будем называть *усами графа* G, а единственное негранично нециклическое ребро, инцидентное усам (если таковое имеется) — *ребром крепления* этих усов. Из предложения 5.12 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 5.8 *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^N$ *— взвешенная локально минимальная сеть, совпадающая со своей невырожденной компонентой. Тогда граф* G *имеет некоторые усы. Если граф* G *содержит внутреннее нециклическое ребро, то он имеет двое непересекающихся усов.*

Усы, содержащие циклическое ребро, будем называть *циклическими усами*, а все остальные усы — *деревянными*.

5.2.4 Доказательство теоремы 8

Первое утверждение теоремы вытекает из предложения 5.9. Перейдем к доказательству второго утверждения. Очевидно, что его достаточно доказать в предположении, что сеть Γ совпадает со своей невырожденной компонентой. Напомним, что в этом случае граница сети совпадает с множеством ее вершин степени 1.

Если граф G содержит одно ребро, то утверждение теоремы тривиально. Предположим теперь, что для всех G, содержащих менее n ребер, теорема доказана. Пусть граф G содержит n ребер.

Пусть сначала граф G имеет деревянные усы $(e_1, \ldots, e_k)$, $k \geq 1$, инцидентные общей внутренней вершине v. Имеется две возможности: или вершина $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ не является слабо фиктивной в Γ, или является.

Если вершина $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ не является слабо фиктивной, то по крайней мере двое из отрезков $\Gamma\colon e_i \to \mathbb{R}^N$ не колинеарны. В силу неизменности направления каждого ребра в процессе деформации Γ_t, вершина $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ и, значит, все отрезки $\Gamma\colon e_i \to \mathbb{R}^N$ в этом случае неподвижны. По определению, усы $(e_1, \ldots, e_k)$ состоят из ребер второго

уровня, и, как мы только что показали, для них теорема имеет место. Далее, отрежем от G усы $(e_1, \dots, e_k)$ и полученный невырожденный граф обозначим через G'. Обозначим через Γ'_t ограничение деформации Γ на G'. Так как вершина $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ неподвижна при деформации Γ_t, то деформация Γ'_t сетей топологии G' также неподвижна на границе. По предположению индукции, теорема имеет место для сетей Γ'_t. Легко видеть, что ребра из G' относятся, по отношению к G', к тем же уровням, что и по отношению к G. Таким образом, в этом случае теорема доказана.

Пусть теперь вершина $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^N$ является слабо фиктивной. В этом случае отрезки $\Gamma\colon e_i \to \mathbb{R}^N$ лежат на одной прямой ℓ, содержащей также ребро крепления $\Gamma\colon e \to \mathbb{R}^N$ усов. В процессе деформации все эти ребра продолжают лежать на прямой ℓ, которая, очевидно, остается неподвижной. Поэтому для ребер первого уровня $e, e_1, \dots, e_k$ утверждение теоремы имеет место. Пусть v' — отличная от v вершина ребра e. Ориентируем прямую ℓ от $\Gamma(v')$ к $\Gamma(v)$, и обозначим через $m \in \ell$ такую точку $\Gamma_{t'}(v)$, что, для всех t, точки $\Gamma_t(v)$ лежат на замкнутой отрицательной полупрямой $\ell' \subset \ell$, ограниченной точкой m.

Снова отрежем от графа G усы $(e_1, \dots, e_k)$ и обозначим через G' полученный в результате граф. Для каждого t рассмотрим сеть $\Gamma'_t\colon G' \to \mathbb{R}^N$, такую что $\Gamma'_t|_{G'\setminus e} = \Gamma_t$, а $\Gamma'_t|_e$ — аффинное отображение, переводящее вершину v' в точку $\Gamma_t(v')$, а вершину v — в точку m. В силу выбора точки m все Γ'_t — погруженные сети, параллельные $\Gamma_t|_{G'}$. Определим границу графа G', положив $\partial G' = \big(\partial G \cap G'\big) \cup \{v\}$. Граф G' с границей $\partial G'$ совпадает со своей невырожденной компонентой. Далее, положим $\varphi' = \partial\Gamma'$. По предположению индукции, для взвешенной минимальной сети Γ' утверждение теоремы имеет место. Осталось заметить, что для всех ребер из G', кроме ребра e, разбиение на уровни по отношению к G' совпадает с разбиением на уровни по отношению к G. Поэтому для всех этих ребер утверждение теоремы имеет место, что и завершает доказательство.

Пусть теперь в G нет деревянных усов. По следствию 5.8, граф G содержит некоторые циклические усы G'. Пусть e — ребро крепления усов G', и $a \in e$ — некоторая внутренняя точка ребра e. Ясно, что ребро e — не циклическое. Разрежем граф G по точке a. Так как e — не циклическое ребро, граф G распадется на две компоненты. Обозначим через $\overline{G}'$ ту из этих двух компонент, которая содержит усы G', а через e' — ребро из $\overline{G}'$, принадлежащее e. Оставшуюся компоненту обозначим через $\overline{G}$.

Рассмотрим ограничение Γ'_t деформации Γ_t на $\overline{G}'$. По предложению 5.11, отрезки $\Gamma'_t(e')$ лежат на одной прямой. Поэтому для ребра

e, которое, очевидно, относится к первому уровню, теорема доказана. Кроме того, мы получаем, что для t, близких к 0, можно сделать такую репараметризацию ребер $\Gamma_t\colon e \to \mathbb{R}^2$ сетей Γ_t, которая, во-первых, непрерывно зависит от t, и, во-вторых, после нее точка $\Gamma_t(a)$ неподвижна. Теперь применим предположение индукции к обоим компонентам $\overline{G}$ и $\overline{G}'$. Очевидно, ребра из $\overline{G}$ и $\overline{G}'$, отличные от ребер разреза, принадлежат к тем же уровням, что и в графе G. Последнее замечание доказывает, что утверждение теоремы имеет место для сетей Γ_t, близких к $\Gamma_0 = \Gamma$. Применяя описанную процедуру для каждой сети Γ_t, $t \in [0, 1]$, выбранной в качестве сети Γ, мы получим покрытие отрезка малыми интервалами, на каждом из которых утверждение теоремы выполнено. В силу компактности отрезка, из этого покрытия можно выбрать конечное, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 8 позволяет описать, чем взвешенные минимальные сети с одинаковыми топологиями и границами отличаются друг от друга.

Следствие 5.9 *Пусть Γ и Γ' — две взвешенных минимальных сети в $\mathbb{R}^N$ одного и того же типа G и с одной и той же границей. Тогда имеют место следующие свойства:*

- *сеть Γ параллельна сети Γ';*
- *взвешенные длины сетей Γ и Γ' равны;*
- *если e — произвольное ребро из G, лежащее на втором уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' совпадают;*
- *если e — произвольное ребро из G, лежащее на первом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' лежат на одной прямой;*
- *если e — произвольное ребро из G, лежащее на нулевом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' параллельны между собой.*

5.3 Взвешенные минимальные сети Штейнера на плоскости

Рассмотрим теперь важный частный случай — плоские сети, степени вершин которых не превосходят трех. Такие сети и их параметризующие графы называются *плоскими сетями Штейнера* и *графами Штейнера* соответственно. Они возникают при исследовании локально минимальных сетей в смысле функционала обычной (не взвешенной)

длины: каждая локально минимальная сеть есть сеть Штейнера. Для взвешенных минимальных сетей на плоскости удается вычислить размерность многогранника $[G, \varphi]_{\min}$ исходя из топологии параметризующего графа G с границей ∂G. Оказывается, размерность равна цикломатическому числу подвижного подграфа. Для простоты изложения мы будем предполагать, что для каждой внутренней вершины v сети неравенство треугольника для весов инцидентных v ребер выполняется строго. Отсюда, в частности, вытекает, что минимальная сеть не может иметь слабо фиктивных вершин.

В предыдущей главе мы описали обобщенный алгоритм Мелзака для построения взвешенных минимальных реализаций взвешенных плоских деревьев Штейнера и получили некоторые следствия из него. Там же было определено понятие линии Симпсона для таких деревьев. В следующем разделе мы покажем, как можно легко вычислить длину линии Симпсона исходя только из информации о структуре погружения, задающего взвешенное минимальное невырожденное дерево Штейнера, его весовой функции и координатах граничных точек. Мы начнем с того, что опишем важную характеристику погружения, а именно, оснащение вращения, индуцированное этим погружением.

5.3.1 Оснащение вращения

Пусть G — произвольный граф, и $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ некоторая погруженная сеть. Напомним, что, по определению, ребра сети — вложенные кривые. Тем не менее, минимальные взвешенные сети обладают еще одним важным свойством: у каждой вершины такой сети имеется вложенная локальная сеть (напомним, что мы предполагаем выполненными строгие неравенства треугольника для весов). Каждую сеть, обладающую этим дополнительным свойством, будем называть *нормальной*.

Пусть теперь Γ — нормальная невырожденная сеть Штейнера. Отметим, что так как Γ — невырождена, т.е. ее граница состоит в точности из всех вершин степени 1, то множество всех подвижных вершин сети Γ — это множество всех вершин из Γ степени 2 и 3, причем каждая вершина степени 2 — фиктивная.

Пусть v — произвольная подвижная вершина из Γ степени 3. В силу нормальности сети Γ, некоторая локальная сеть Γ_U с центром в v является вложенной сетью, состоящей из трех ребер. Пусть e и e' — произвольные два ребра из G_U. Положим по определению *число вращения* $\mathrm{tw}(e, e')$ упорядоченной пары (e, e') равным 1, если при обходе в положительном направлении вершины v, начиная с образа ребра e', мы сначала встретим образ ребра e, а лишь затем образ третьего ребра сети Γ_U. В противном случае, положим $\mathrm{tw}(e, e') = -1$. Если E и E' —

ребра графа G, содержащие e и e' соответственно, то *числом вращения* $\mathrm{tw}(E, E')$ *упорядоченной пары* (E, E'), *индуцированным сетью* Γ, назовем число $\mathrm{tw}(e, e')$.

Пусть теперь v — произвольная фиктивная вершина графа G, а E и E' — ребра из G, инцидентные v. Положим по определению $\mathrm{tw}(E, E') = 0$. Итак, каждая нормальная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ индуцирует на G *оснащение вращения*, представляющее собой совокупность чисел вращения всех упорядоченных пар смежных ребер из G.

Пусть теперь G — взвешенный невырожденный граф Штейнера с весовой функцией ω, и Γ — некоторая нормальная сеть типа G, а v — произвольная подвижная вершина графа G степени 3, инцидентная ребрам E_i, $i = 1, \ldots, 3$. Построим треугольник со сторонами, равными весам $\omega(E_i)$, и обозначим через α_i величину того угла этого треугольника, который противолежит стороне длины $\omega(E_i)$. Положим

$$\mathrm{tw}^{\omega}(E_i, E_j) = \frac{3\alpha_k}{\pi}\,\mathrm{tw}(E_i, E_j),$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Число $\mathrm{tw}^{\omega}(E_i, E_j)$ называется *взвешенным числом вращения* упорядоченной пары (E_i, E_j) ребер взвешенного графа G, индуцированным нормальной сетью Γ.

Пусть теперь v — произвольная фиктивная вершина из G, а E и E' — инцидентные ей ребра из G. Положим $\mathrm{tw}^{\omega}(E, E') = 0$. Итак, каждая взвешенная невырожденная нормальная сеть Штейнера $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ индуцирует на G *взвешенное оснащение вращения*, представляющее собой совокупность взвешенных чисел вращения всех упорядоченных пар смежных ребер из G.

Если G является невырожденным деревом Штейнера, то можно продолжить как оснащение вращения, так и взвешенное оснащение вращения на все упорядоченные пары ребер этого дерева по аддитивности вдоль путей. Последнее означает следующее. Если (E, E') — упорядоченная пара произвольных различных ребер из G, а $\gamma = \{E_0 = E, E_1, \ldots, E_k = E'\}$ — единственный путь в G, соединяющий E с E', то положим

$$\mathrm{tw}(E, E') = \sum_{p=1}^{k} \mathrm{tw}(E_{p-1}, E_p), \quad \text{и} \quad \mathrm{tw}^{\omega}(E, E') = \sum_{p=1}^{k} \mathrm{tw}^{\omega}(E_{p-1}, E_p).$$

Если же $E = E'$, то положим $\mathrm{tw}(E, E') = \mathrm{tw}^{\omega}(E, E') = 0$. Число $\mathrm{tw}(E, E')$ называется *числом вращения упорядоченной пары* (E, E') *ребер дерева* G, или *числом вращения от ребра* E *к ребру* E', порожденным сетью Γ. Соответственно, число $\mathrm{tw}^{\omega}(E, E')$ называется *взвешенным числом вращения упорядоченной пары* (E, E') *ребер взвешенного*

дерева G, или *взвешенным числом вращения от ребра* E *к ребру* E', порожденным взвешенной сетью Γ.

Замечание. Отметим, что если Γ — плоское взвешенное бинарное дерево, то определенное только что число вращения пары ребер из Γ совпадает с определенным в предыдущей главе и имеет тот же геометрический смысл, т.е. если Γ локально минимально, то число вращения равно полному углу поворота вдоль соответствующего пути в Γ, деленному на $\pi/3$.

Далее, в терминах чисел вращения легко выписать координаты концов линии Симпсона. Пусть G — произвольное взвешенное невырожденное дерево Штейнера, и Γ — некоторая его взвешенная минимальная реализация с эффективной границей $\partial\Gamma$. Выберем в G произвольное ребро e, и пусть $L = [X, Y]$ — соответствующая e линия Симпсона.

Пусть, для начала, ребро e — граничное, v — единственная граничная вершина, ему инцидентная, и $m = \Gamma(v)$ — ее образ при отображении Γ. Тогда, как легко видеть, одна из концевых точек линии L, скажем X, совпадает с m. Далее, пусть $v_1, \ldots, v_k$ — остальные граничные вершины из G, а $m_p = \Gamma(v_p)$. Пусть e_p — единственное граничное ребро, инцидентное v_p. Обозначим через t_p взвешенное число вращения $\mathrm{tw}^{\omega}(e, e_p)$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 5.13 *Второй конец* Y *линии Симпсона* L *может быть вычислен по следующей формуле:*

$$Y = \frac{1}{\omega(e)} \sum_{p=1}^{k} \omega(e_p) m_p \, e^{-i\, t_p\, \pi/3},$$

где через m_p *обозначены также комплексные координаты точек* m_p.

Доказательство. Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.6 *Пусть* ABC *— треугольник на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *со сторонами* $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ *и углами* $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$. *Предположим, что пара векторов* (AB, AC) *образует положительно ориентированный репер. Тогда вершина* C *может быть вычислена через* A *и* B *так:*

$$c\,C = a\,A\,e^{-i\,\beta} + b\,B\,e^{i\,\alpha}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$C = A + \frac{b(B-A)e^{i\alpha}}{c},$$

поэтому

$$c\,C = A\big(c - b\,e^{i\alpha}\big) + b\,B\,e^{i\alpha}.$$

С другой стороны, сумма векторов AB, BC и CA равна нулю, что на комплексном языке переписывается так:

$$c + a\,e^{i(\pi-\beta)} + b\,e^{-i(\pi-\alpha)} = 0,$$

откуда

$$c - b\,e^{i\alpha} = a\,e^{-i\beta},$$

что и требовалось.

Отметим сначала, что, по определению, линии Симпсона для невырожденного дерева Штейнера совпадают с соответствующими линиями Симпсона для бинарного дерева, полученного выбрасыванием фиктивных вершин. Поэтому доказательство предложения достаточно провести в предположении, что G — бинарное дерево.

Итак, пусть G — бинарное дерево. Доказательство проведем по индукции. Если дерево состоит из одного ребра e, образ которого — отрезок $[A, B]$, то линия Симпсона совпадает с этим отрезком. С другой стороны, если $X = A$, то по доказываемой формуле второй конец Y линии Симпсона должен иметь вид:

$$Y = \frac{1}{\omega(e)}\omega(e)\,B = B,$$

что верно.

Далее, предположим, для всех бинарных деревьев, содержащих меньше чем n вершин степени 1 предложение доказано. Пусть теперь бинарное дерево G содержит $n \geq 3$ вершин степени 1.

По лемме 4.7, дерево G имеет усы (e', e''), не содержащие ребра e. Пусть f — единственное ребро из G, смежное одновременно с e' и e''. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{tw}^{\omega}(f, e') > 0$, поэтому, в частности, $\mathrm{tw}^{\omega}(f, e'') < 0$.

Обозначим через A и B образы вершин степени 1, инцидентных соответственно e' и e'', при отображении Γ. Применим в сети Γ шаг прямого хода обобщенного алгоритма Мелзака, заменив вершины A и B на вершину C, такую что длины сторон $a = |BC|$, $b = |AC|$ и $c = |AB|$ треугольника ABC равны соответственно $\lambda\omega(e')$, $\lambda\omega(e'')$

и $\lambda\omega(f)$ для некоторого $\lambda > 0$, а вектора AB и AC образуют положительно ориентированный репер. Обозначим через α и β величины углов треугольника ABC в вершинах A и B. Отметим, что в соответствие с геометрическим смыслом взвешенного числа вращения имеем: $\alpha = -\operatorname{tw}^{\omega}(f, e'')\pi/3$, а $\beta = \operatorname{tw}^{\omega}(f, e')\pi/3$

Пусть $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ — результат работы описанного только что шага алгоритма, и w — вершина из G', соответствующая C. Положим $t = \operatorname{tw}^{\omega}(e, f)$. Тогда для Γ' предложение справедливо по предположению индукции. Иными словами,

$$Y = \frac{1}{\omega(e)} \sum_{p\colon\ v_p \in G'} \omega(c_p) m_p\, e^{-i\, t_p\, \pi/3} + \frac{1}{\omega(e)} \omega(f) C\, e^{-i\, t\, \pi/3}$$

(отметим, что линия Симпсона сохраняется при работе обобщенного алгоритма Мелзака). Однако, последнее слагаемое в этом выражении в силу леммы 5.6 можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(e)} \omega(f) C\, e^{-i\, t\, \pi/3} &= \frac{1}{\lambda\omega(e)} \lambda\omega(f) C\, e^{-i\, t\, \pi/3} = \\
&= \frac{1}{\lambda\omega(e)} \Bigl(\lambda\omega(e')\, A\, e^{-i\,\beta} + \lambda\omega(e'')\, B\, e^{i\,\alpha} \Bigr) e^{-i\, t\, \pi/3} = \\
&= \frac{1}{\omega(e)} \Bigl(\omega(e')\, A\, e^{-i\, \operatorname{tw}^{\omega}(f, e')\, \pi/3} + \omega(e'')\, B\, e^{-i\, \operatorname{tw}^{\omega}(f, e'')\, \pi/3} \Bigr) e^{-i\, t\, \pi/3} = \\
&= \frac{1}{\omega(e)} \Bigl(\omega(e')\, A\, e^{-i\, \operatorname{tw}^{\omega}(e, e')\, \pi/3} + \omega(e'')\, B\, e^{-i\, \operatorname{tw}^{\omega}(e, e'')\, \pi/3} \Bigr),
\end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. Предложение доказано.

Далее, пусть теперь e — некоторое негранично ребро дерева G. Разрезав G по ребру e, мы разобьем дерево G на два невырожденных дерева Штейнера, скажем G' и G''. Обозначим через $m'_1, \ldots, m'_{k'}$ вершины степени 1 из G', не принадлежащие e, а через $m''_1, \ldots, m''_{k''}$ — вершины степени 1 из G'', также не принадлежащие e. Пусть e'_p — ребро из G, инцидентное m'_p, а e''_p — ребро из G, инцидентное m''_p. Обозначим через t'_p и t''_p числа вращения $\operatorname{tw}^{\omega}(e, e'_p)$ и $\operatorname{tw}^{\omega}(e, e''_p)$ соответственно. Следующее предложение немедленно вытекает из предложения 5.13.

Предложение 5.14 *Концы X и Y линии Симпсона L могут быть*

вычислены по следующим формулам:

$$X = \frac{1}{\omega(e)} \sum_{p=1}^{k'} \omega(e'_p) m'_p \, e^{-i\, t'_p\, \pi/3},$$

$$Y = \frac{1}{\omega(e)} \sum_{p=1}^{k''} \omega(e''_p) m''_p \, e^{-i\, t''_p\, \pi/3}.$$

5.3.2 Функция Максвелла

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная взвешенная минимальная сеть, и пусть $G_1, \ldots, G_m$ — невырожденные компоненты графа G, и $\Gamma_q = \Gamma|_{G_q}$ — соответствующие невырожденные компоненты сети Γ. Рассмотрим некоторую невырожденную компоненту Γ_q. Для каждой граничной вершины v_p из G_q обозначим через ν_p единичный вектор направления единственного входящего в вершину $\Gamma_q\colon v_p \to \mathbb{R}^2$ ребра $\Gamma_q\colon e_p \to \mathbb{R}^2$ сети Γ_q.

Каждому вектору ν_p соответствует комплексное число $e^{i\,\varphi_p}$. Далее, пусть, как и выше, m_p — комплексное число, соответствующее точке $\Gamma(v_p)$. Обозначим через $\mu(\Gamma_q)$ комплексное число $\sum_p m_p \omega(e_p) \exp(-i\,\varphi_p)$, где сумма берется по всем граничным вершинам v_p графа G_q.

Определение. Комплексный вектор $\mu(\Gamma) = \big(\mu(\Gamma_1), \ldots, \mu(\Gamma_m)\big)$ называется *вектором Максвелла* взвешенной минимальной сети Γ. Если $m = 1$, то вектор Максвелла будем называть *числом Максвелла.*

Предложение 5.15 *Компонента $\mu(\Gamma_q)$ вектора Максвелла $\mu(\Gamma)$ взвешенной минимальной сети Штейнера Γ — это положительное вещественное число, равное взвешенной длине невырожденной компоненты Γ_q сети Γ.*

Доказательство. Так как число Максвелла $\mu(\Gamma_q)$ взвешенной минимальной сети Γ_q совпадает с q-ой компонентой вектора Максвелла $\mu(\Gamma)$ сети Γ, предложение достаточно доказать в предположении что сеть Γ невырождена.

Для каждой подвижной вершины $v \in G$ рассмотрим единичные вектора n_v^j направлений входящих в вершину $\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^2$ ребер. Так как сеть минимальна, то при каждом фиксированном v линейная комбинация векторов n_v^j с коэффициентами — весами соответствующих ребер, равна нулю. Поэтому равно нулю и произведение комплексного числа $\Gamma(v)$ на комплексное число, сопряженное к линейной комбинации соответствующих векторам n_v^j комплексных чисел с коэффициентами —

весами входящих в v ребер. Следовательно, добавив эти равные нулю произведения к $\mu(\Gamma')$, мы не изменим значение $\mu(\Gamma')$.

Прибавим все эти (нулевые) произведения к $\mu(\Gamma)$. В полученной сумме мы изменим порядок суммирования, сгруппировав вместе слагаемые, соответствующие одному и тому же ребру e, а затем уже просуммировав по всем ребрам из G. А именно, пусть e — произвольное ребро из G, A_e и B_e — (комплексные) координаты концевых точек отрезка $\Gamma(e)$, а n_A и n_B — векторы направления отрезка $\Gamma(e)$, ориентированного соответственно в сторону A_e и B_e. Иными словами, $n_A = -n_B = B_eA_e/|B_eA_e|$. Пусть векторам n_A и n_B соответствуют комплексные числа $e^{i\varphi_A}$ и $e^{i\varphi_B}$, где $\varphi_B = \pi + \varphi_A$. Тогда ребру e в нашей сумме соответствует следующее выражение:

$$\omega(e)e^{-i\varphi_A}A_e + \omega(e)e^{-i\varphi_B}B_e = \omega(e)e^{-i\varphi_A}(A_e - B_e).$$

В силу того, что векторы n_A и B_eA_e колинеарны, рассматриваемое выражение равно взвешенной длине $\omega(e)|AB|$ ребра $\Gamma\colon e \to \mathbb{R}^2$. Поэтому $\mu(\Gamma)$ равно взвешенной длине сети Γ, что и требовалось. Доказательство предложения закончено.

Замечание. Отметим, что мнимая часть каждой компоненты $\mu(\Gamma_i)$ вектора Максвелла совпадает по определению с внешней формой Максвелла $\mu(\Gamma_i)$ степени 0, определенной выше.

Из предложения 5.15 немедленно вытекает следующий результат.

Предложение 5.16 *Пусть Γ и Γ' — две параллельных взвешенных минимальных сети с одной и той же границей φ. Тогда вектора Максвелла сетей Γ и Γ' совпадают. В частности, как соответствующие компоненты сетей Γ и Γ', так и сами сети Γ и Γ', имеют одинаковую взвешенную длину.*

Пусть G — невырожденный взвешенный граф Штейнера с эффективной границей ∂G и весовой функцией ω, а $\varphi\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$ — некоторое граничное отображение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — взвешенная минимальная сеть с границей $\partial\Gamma = \varphi$. Выберем произвольную граничную вершину v_0 графа G, и пусть $v_1, \ldots, v_n$ — остальные граничные вершины графа G, а e_p — единственное ребро из G, инцидентное v_p. Положим $m_p = \Gamma(v_p)$. Пусть t_p — взвешенное число вращения от ребра e_0 к ребру e_p, индуцированное сетью Γ. Определим *число Максвелла* $\mu(\Gamma, e_0)$ *пары* (Γ, e_0) так:

$$\mu(\Gamma, e_0) = \sum_{p=1}^{n} m_p\omega(e_p)e^{\,i\,t_p\,\frac{\pi}{3}} - m_0\omega(e_0).$$

Предложение 5.17 *Пусть* Γ' *и* Γ'' *— две (ориентируемо) планарно эквивалентных невырожденных взвешенных минимальных сети топологии* G*. Тогда эти сети параллельны если и только если* $\arg\bigl(\mu(\Gamma',e)\bigr) = \arg\bigl(\mu(\Gamma'',e)\bigr)$ *для некоторого (а, значит, и произвольного) граничного ребра* e *графа* G*.*

Доказательство. Действительно, пусть v — произвольная граничная вершина графа G и e — единственное инцидентное ей ребро из G. Обозначим через $e^{i\,\alpha}$ направление вектора $\Gamma'(e)$, ориентированного от точки $\Gamma'(v)$. Тогда достаточно заметить, что значение функции Максвелла $\mu(\Gamma')$ и число Максвелла $\mu(\Gamma',e)$ связаны так: $\mu(\Gamma') = \mu(\Gamma',e)e^{-i\,\alpha}$. Аналогично, если $e^{i\,\beta}$ — направление вектора $\Gamma''(e)$, ориентированного от точки $\Gamma''(v)$, то $\mu(\Gamma'') = \mu(\Gamma'',e)e^{-i\,\beta}$. Однако, $\mu(\Gamma')$ и $\mu(\Gamma'')$ — положительные вещественные числа, см. предложение 5.10, поэтому параллельность сетей Γ' и Γ'', равносильная сонаправленности векторов $\Gamma'(e)$ и $\Gamma''(e)$, эквивалентна равенству аргументов чисел Максвелла $\mu(\Gamma',e)$ и $\mu(\Gamma'',e)$.

5.3.3 Построение деформации невырожденной минимальной сети

Пусть G — невырожденный взвешенный граф Штейнера с эффективной границей ∂G и весовой функцией ω, и φ — некоторое граничное отображение. Предположим, что существует взвешенная минимальная сеть $\Gamma \in [G,\varphi]$.

Пусть $e_1,\dots,e_k$ — ребра графа G, и $A_1,\dots,A_k$ — внутренние точки этих ребер, $A_p \in e_p$, такие что топологический граф G', полученный из G разрезанием ребер e_p по точкам A_p, является 2-деревом. Ясно, что k равно цикломатическому числу графа G. Отметим, что в силу сделанных предположений, все ребра e_i — внутренние ребра графа G. Обозначим через Γ' сеть, полученную из сети Γ разрезанием по всем точкам A_p. Пусть $\partial G'$ — эффективная граница дерева G'. Ясно, что $\partial G'$ получается из ∂G добавлением вершин A_p^1 и A_p^2 дерева G', на которые распались точки A_p. Обозначим через $\partial\Gamma'$ эффективную границу сети Γ'.

Рассмотрим граничное отображение φ' дерева G', полученное из $\partial\Gamma'$ малым смещением точек $\Gamma(A_p)$ в направлениях, перпендикулярных ребрам $\Gamma(e_p)$. При этом, если B_p — результат такого смещения для точки $\Gamma(A_p)$, то положим $\varphi'(A_p^1) = \varphi'(A_p^2) = B_p$. Пусть e_p^1 и e_p^2 — граничные ребра из G', на которые распалось ребро $e_p \subset G$ после выбрасывания точки A_p. Ориентируем их в сторону граничных вершин A_p^1 и A_p^2 соответственно. По предложению 4.8, для достаточно малых

смещений существует взвешенная минимальная реализация $\overline{\Gamma}'$ дерева G' с границей φ', и эта реализация непрерывно зависит от граничного отображения φ'. Отсюда вытекает, что оснащение вращения $\overline{\Gamma}'$ совпадает с оснащением вращения Γ'. Поэтому, в частности, в силу теоремы о локальной струтуре 2, при таких взвешенных минимальных реализациях образы ориентированных ребер e_p^1 и e_p^2 остаются противоположно направленными. Поэтому, склеив сеть $\overline{\Gamma}'$ по каждой паре вершин $\varphi' : A_p^1 \to \mathbb{R}^2$ и $\varphi' : A_p^2 \to \mathbb{R}^2$, получим новую взвешенную минимальную реализацию графа G с границей $\partial\Gamma$.

Пусть n_p — единичная нормаль к $\Gamma(e_p)$ в точке $\Gamma(A_p)$. Тогда смещение точки $\Gamma(A_p)$ задается числом t_p, таким что $B_p = \Gamma(A_p) + t_p n_p$. Поэтому построенная выше сеть $\overline{\Gamma}'$ однозначно определяется точкой $t = (t_1, \dots, t_k)$ из $\mathbb{R}^k$, причем ясно, что разным точкам t соответствуют разные такие сети. Кроме того, по предложению 4.7, каждому малому t соответствует ровно одна сеть $\overline{\Gamma}'$, которую мы обозначим через $\overline{\Gamma}'_t$. Наконец, как и выше, для каждой сети $\overline{\Gamma}'_t$ мы построим свою взвешенную минимальную реализацию Γ_t графа G с границей $\partial\Gamma$. Таким образом, мы построили k-параметрические вариации сетей $\overline{\Gamma}'$ и Γ, являющиеся топологическими вложениями ν' и ν малого открытого k-мерного куба I^k из $\mathbb{R}^k$ с центром в нуле в пространства $\mathfrak{L}(G')$ и $[G, \varphi]$ соответственно.

Отображения ν и ν' обладают дополнительно следующими важными свойствами.

Предложение 5.18 *Отображение ν переводит куб I^k взаимно однозначно на некоторую окрестность сети Γ во множестве $[G, \varphi]_{\min}$.*

Отображения ν и ν' — аффинны.

Доказательство. Как уже было отмечено выше, отображение ν является вложением в $[G, \varphi] \supset [G, \varphi]_{\min}$. Кроме того, по определению, каждая сеть из $\nu(I^k)$ является погруженной минимальной сетью, и поэтому, лежит в $[G, \varphi]_{\min}$. Поэтому нам осталось показать, что все линейные сети из $[G, \varphi]_{\min}$, близкие к Γ, лежат в образе отображения ν.

Действительно, пусть $\overline{\Gamma}$ — линейная сеть из $[G, \varphi]_{\min}$, настолько близкая к Γ, что

- для любой вершины $v \in G$ расстояние между точками $\Gamma(v)$ и $\overline{\Gamma}(v)$ меньше половины длины самого короткого ребра сети Γ, и
- прямая, проходящая через $\Gamma(A_p)$ в направлении n_p пересекает отрезок $\overline{\Gamma}(e_p)$ ровно в одной точке. Эту точку мы обозначим через B_p.

Первое ограничение гарантирует, что сеть $\overline{\Gamma}$ не содержит вырожденных ребер, поэтому, по следствию 5.4, $\overline{\Gamma}$ обязана быть погруженной минимальной сетью.

Далее, определив все t_p из соотношения $\Gamma(A_p)B_p = t_p n_p$, мы получаем представление сети $\overline{\Gamma}$ в виде $\nu(t)$, т.е. сеть $\overline{\Gamma}$ действительно лежит в $\nu(I)$, что и требовалось.

Перейдем ко второму утверждению предложения. Сначала мы докажем его для отображения ν'. Напомним, что пространство $\mathfrak{L}(G')$ — евклидово пространство четной размерности, равной удвоенному количеству всех вершин 2-дерева G'. Имеется каноническое отождествление пространства $\mathfrak{L}(G')$ с $\mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$, где каждое $\mathbb{R}^2$ — конфигурационное пространство некоторой вершины из $\Gamma' \in \mathfrak{L}(G')$. Ясно, что аффинность отображения ν' равносильна аффинности композиции его с проекцией на каждый сомножитель $\mathbb{R}^2$. Эта последняя композиция есть отображение из куба I^k в конфигурационное пространство некоторой вершины v из G'.

Прежде всего отметим, что если v — граничная вершина из G', то v или неподвижна при построенной деформации $\overline{\Gamma}'_t$ (в этом случае v также является граничной вершиной для G), или v — это одна из вершин A_p, и тогда, по определению деформации $\overline{\Gamma}'_t$, вершина v движется по прямой $\Gamma(A_p) + t_p n_p$. В обоих случаях композиция отображения ν' с проекцией на соответствующее $\mathbb{R}^2$, очевидно, аффинна. Таким образом, для завершения доказательства леммы остается рассмотреть случай, когда v — точка Штейнера графа G'.

Итак, пусть v — некоторая точка Штейнера из G', e и e' — два ребра дерева G', инцидентные v, а V — образ вершины v при отображении Γ'. Пусть $L = [X, Y]$ и $L' = [X', Y']$ — линии Симпсона, соответствующие e и e'. Обозначим через m_p комплексные координаты точек $\Gamma(A_p)$. По предложению 5.14,

$$X = A + \sum_{p=1}^{k} m_p C_p, \qquad Y = B + \sum_{p=1}^{k} m_p C'_p, \tag{$*$}$$

где A, B, C_p и C'_p— комплексные числа, зависящие лишь от оснащения вращения, индуцированного погружением Γ', а также от координат образов граничных вершин дерева G', отличных от A_p^1 и A_p^2. Покажем, что в формулах для X и Y коэффициенты при m_p, на самом деле, одинаковы, т.е. $C'_p = C_p$.

Действительно, обозначим через γ единственный цикл графа, полученного из G' склейкой по вершинам A_p^1 и A_p^2. Если ребро e принадлежит γ, то ребра e_p^1 и e_p^2 находятся в разных компонентах графа

$G' \setminus E$, где E — внутренняя точка ребра e, и разность между числами вращения $\mathrm{tw}(e_p^1, e)$ и $\mathrm{tw}(e_p^2, e)$ кратна 6. Поэтому $C'_p = C_p$. Если же реализуется вторая возможность, т.е. $e \notin \gamma$, то ребра e_p^1 и e_p^2 находятся в одной компоненте графа $G' \setminus E$, поэтому m_p входит в одну из сумм из $(*)$ с нулевым коэффициентом. Пусть, для определенности, $C'_p = 0$. Вычислим коэффициент C_p при m_p в оставшейся сумме. Так как в этом случае, как легко видеть, числа вращения $\mathrm{tw}(e_p^1, e)$ и $\mathrm{tw}(e_p^2, e)$ отличаются на целое число, дающее остаток 3 при делении на 6, имеем:

$$C_p = e^{i\pi\,\mathrm{tw}(e_p^1, e)/3} + e^{i\pi\,\mathrm{tw}(e_p^2, e)/3} = 0,$$

т.е. во втором случае $C_p = C'_p = 0$.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_k) \in I^k$. Обозначим через V_t образ вершины v при отображении $\nu'(t)$. Пусть $L_t = [X_t, Y_t]$ и $L'_t = [X'_t, Y'_t]$ — линии Симпсона сети $\nu'(t)$, соответствующие ребрам e и e'. Ясно, что точка V_t является точкой пересечения прямых, проходящих через L_t и L'_t соответственно. Сначала мы покажем, что точки X_t, Y_t, X'_t и Y'_t аффинно зависят от t, причем вектора Y_tX_t и $Y'_tX'_t$ не зависят от t, а после это воспользуемся следующим простым утверждением, которое проверяется непосредственными вычислениями.

Утверждение 5.4 *Пусть V — точка плоскости, являющаяся пересечением прямых XY и $X'Y'$. Пусть X_t, Y_t, X'_t, Y'_t — k-параметрическая деформация точек X, Y, X' и Y', аффинно зависящая от $t \in \mathbb{R}^k$, $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $X'_0 = X'$, $Y'_0 = Y'$, причем вектора Y_tX_t и $Y'_tX'_t$ не зависят от t. Тогда точка V_t, являющаяся точкой пересечения прямых X_tY_t и $X'_tY'_t$, аффинно зависит от t. Другими словами, точка пересечения прямых, движущихся поступательно и с постоянными скоростями, сама движется по некоторой прямой и тоже с постоянной скоростью.*

Итак, покажем, что точки X_t, Y_t, X'_t и Y'_t аффинно зависят от t. Так как мы рассматриваем столь малые деформации (малые кубы I^k), что индуцированное сетью $\nu'(t)$ оснащение вращения на G' не зависит от t, имеем:

$$X_t = X + \sum_{p=1}^{k} t_p\, n_p\, C_p, \qquad Y_t = Y + \sum_{p=1}^{k} t_p\, n_p\, C_p,$$

и, точно также,

$$X'_t = X' + \sum_{p=1}^{k} t_p\, n_p\, C'_p, \qquad Y'_t = Y' + \sum_{p=1}^{k} t_p\, n_p\, C'_p,$$

где n_p — комплексное число, соответствующее вектору n_p. Легко видеть, что эти формулы задают аффинную зависимость точек X_t, Y_t, X'_t и Y'_t от t, причем, очевидно, векторы Y_tX_t и $Y'_tX'_t$ — постоянны. Таким образом, доказательство аффинности отображения ν' завершено.

Доказательство аффинности отображения ν получается автоматически, так как подвижные вершины дерева Γ, координатами которых параметризуется пространство $[G,\varphi]$ — это все точки Штейнера дерева Γ'. Доказательство предложения закончено.

Итак, отображения ν и ν' — аффинные отображения из некоторого k-мерного куба $I^k \subset \mathbb{R}^k$ в пространства $[G,\varphi]$ и $\mathfrak{L}(G')$ соответственно. Из взаимной однозначности этих отображений вытекает, что их образы — это некоторые k-мерные кубы. Продолжим эти отображения по аффинности на все пространство $\mathbb{R}^k$, и полученные отображения обозначим через $\overline{\nu}$ и $\overline{\nu}'$ соответственно. Понятно, что $\nu(I^k)$ и $\nu'(I^k)$ — это открытые подмножества в $\overline{\nu}(\mathbb{R}^k)$ и $\overline{\nu}'(\mathbb{R}^k)$ соответственно. Из сказанного выше вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5.5 *Множество $[G,\varphi]_{\min}$ целиком лежит в $\overline{\nu}(\mathbb{R}^k)$, и является выпуклым k-мерным телом в $\overline{\nu}(\mathbb{R}^k)$. Более того, каждая взвешенная минимальная сеть Γ топологии G с границей $\partial\Gamma = \varphi$ является внутренней точкой выпуклого тела $[G,\varphi]_{\min} \subset \overline{\nu}(\mathbb{R}^k)$.*

Подводя итоги, получаем следующий результат.

Теорема 9 *Пусть Γ — не имеющая слабо фиктивных вершин степени 3 взвешенная минимальная сеть Штейнера типа G в $\mathbb{R}^2$ с границей φ и весовой функцией ω. Обозначим через k цикломатическое число подвижного подграфа $\widehat{G}_\varphi$ графа G, через f — количество фиктивных вершин сети Γ, через m — количество ребер сети Γ, а через $[G,\varphi]$ — конфигурационное пространство подвижных вершин графа G.*

Тогда множество взвешенных минимальных сетей типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(k+f)$-мерного многогранника $[G,\varphi]_{\min}$, являющегося множеством всех минимумов функции взвешенной длины $\ell_\omega\colon [G,\varphi] \to \mathbb{R}$. Все минимальные сети данной топологии и с данной границей параллельны между собой и имеют одинаковую взвешенную длину.

Более того, многогранник $[G,\varphi]_{\min}$ имеет не более чем m граней максимальной размерности.

Оказывается, если взвешенная минимальная сеть Γ не является сетью Штейнера, т.е. степень вершин сети может быть больше трех, или

размерность объемлющего пространства больше 2, или сеть Штейнера содержит слабо фиктивные вершины степени три, то размерность многогранника $[G, \varphi]_{\min}$ не вычисляется в терминах цикломатического числа подвижного подграфа. Приведем соответствующие примеры.

Пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ плоскость $\mathbb{R}^2$, в которой расположим правильный шестиугольник из каждой вершины которого наружу выпущены отрезки, образующие со смежными сторонами шестиугольника углы по 120°. Проведем прямую l параллельную одной из сторон шестиугольника и пересекающую шестиугольник по внутренним точкам двух его сторон. Эта прямая разбивает нашу сеть на две компоненты. Легко видеть, что одну из этих двух компонент можно так повернуть относительно прямой l, что у полученного пространственного 8-угольника все углы будут равны 120°. Если теперь из вершин 8-угольника, лежащих на l, выпустить отрезки, образующие со смежными сторонами 8-угольника углы в 120°, то в результате мы получим локально минимальную сеть, имеющую 8 внутренних вершин — 8-угольника, и 8 граничных — концов отрезков, выпущенных из вершин 8-угольника. Несложно проверить, что построенная сеть не деформируется в классе минимальных сетей с той же границей. Таким образом, мы построили сеть, пример графа G с постоянной весовой функцией и граничного отображения φ, для которых существует единственная взвешенная минимальная сеть типа G с границей φ, несмотря на то, что цикломатическое число подвижного подграфа графа G равно 1. Идея построения этого примера принадлежит студенту механико-математического факультета МГУ М. В. Пронину.

Пример. Рассмотрим квадрат на плоскости и продолжим его стороны за вершины. В результате, получим линейную сеть с 8 вершинами степени 1 и четырьмя вершинами степени 4. В качестве границы этой сети выберем эффективную границу, а весовую функцию положим тождественно равной 1. Легко проверяется, что, хотя подвижный подграф полученной взвешенной минимальной сети содержит цикл, эта сеть не может быть продеформирована в классе взвешенных минимальных сетей того же типа и с той же границей.

Пример. Рассмотрим на плоскости правильный шестиугольник, из каждой вершины которого наружу отложены отрезки, образующие с прилегающими сторонами равные углы. На паре противоположных сторон шестиугольника выберем по внутреней точке, скажем V_1 и V_2, и проведем через них прямую ℓ. Из точек V_i отложим отрезки, параллельные сторонам шестиугольника, содержащим V_i, и лежащие в одной

и той же полуплоскости П, ограниченной прямой ℓ. Итак, мы построили линейную погруженную сеть с одним циклом, восемью вершинами степени 3 и восемью вершинами степени 1. Определим границу этой сети как множество всех ее вершин степени 1 и зададим весовую функцию равной 1 на всех ребрах, лежащих в полуплоскости П, и равной 2 на всех остальных ребрах. Ясно, что эта взвешенная сеть является минимальной и имеет две слабо фктивных вершины степени 3. Кроме того, очевидно, единственный цикл этой сети нельзя сжимать и растягивать, поэтому размерность пространства всех минимальных сетей этого типа с той же границей равна 2, т. е. количеству слабо фиктивных вершин.

Литература

[1] *Т. В. Аникеева*, Замкнутые локально мнимальные сети на многогранниках. — Вестник МГУ., сер. матем., 1998, в печати.

[2] *В. И. Арнольд*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., Наука, 1984.

[3] *M. Brazil, J. Cole, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng, N. C. Wormald*, Full minimal Steiner trees on lattice sets. — Preprint, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia.

[4] *M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng, N. C. Wormald*, Minimal Steiner trees for $2^k \times 2^k$ square lattices. — J. Combin. Theory, accepted for publication.

[5] *M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng, N. C. Wormald*, Minimal Steiner trees for generalizid checkerboards. — Preprint, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia.

[6] *M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng, N. C. Wormald*, Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points. — Research Report N 24, 1995, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia.

[7] *M. Besson and A. Tromba*, The cusp catastrophe of Thom in bifurcation of minimal Surfaces. — Manuscripta Math., 1984, vol. 46, pp. 273–307.

[8] *R. C. Clark*, Communication networks, soap films and vectors. — Phys. Ed., 1981, vol. 16, pp. 32–37.

[9] *E. J. Cockayne*, On the Steiner problem. — Canad. J. Math., 1967, vol. 10, pp. 431–450.

[10] *F. R. K. Chung, R. L. Graham*, Steiner trees for ladders. — Ann. Disc. Math, 1978, v. 2, pp. 173–200.

[11] *F. R. K. Chung, M. Gardner, R. L. Graham*, Steiner trees on a checkerboard. — Math. Magazine, 1989, v. 62, pp. 83–96.

[12] *Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко*, Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987.

[13] *B. Delaunay*, Sur la sphère vide, Bull. Acad. Sci. USSR(VII), Classe Sci. Mat. Nat., 1934, pp. 793–800.

[14] *E. W. Dijkstra*, A note on two problems with connection with graphs. — Numer. Math., 1959, vol. 1, no. 5, pp. 269–271.

[15] *D. Z. Du*, On Steiner Ratio Conjectures. — Manuscript, Inst. Appl. Math. Academia Sinica, Beijing, China, 1989.

[16] *D. Z. Du and F. K. Hwang*, A New Bound for the Steiner Ratio. — Trans. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 278, no. 1, pp. 137–148.

[17] *D. Z. Du and F. K. Hwang*, A Proof of Gilbert–Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio. — DIMACS Technical Report, 1990.

[18] *D. Z. Du and F. K. Hwang*, An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio. — Proc. of the 31st annual symp. on found. of comp. science, 1990.

[19] *D. Z. Du, F. K. Hwang and S. C. Chao*, Steiner minimal trees for points on a circle. — Proc. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 95, no. 4, pp. 613–618.

[20] *D. Z. Du, F. K. Hwang and J. F. Weng*, Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines. — Trans. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 278, no. 1, pp. 149–156.

[21] *D. Z. Du, F. K. Hwang and J. F. Weng*, Steiner minimal trees for Regular Polygons. — Disc. and Comp. Geometry, 1987, vol. 2, pp. 65–84.

[22] *D. Z. Du, F. K. Hwang and E. N. Yao*, The Steiner ratio conjecture is true for five points. — J. Combin Th., Ser. A38, 1985, pp. 230–240.

[23] *D. Z. Du, F. K. Hwang, G. D. Song and G. T. Ting*, Steiner minimal trees on sets of four points. — Discr. and Comp. Geometry, 1987, vol. 2, pp. 401–414.

[24] *A. L. Edmonds, J. H. Ewing, and R. S. Kulkarni*, Regular tessilations of surfaces and $(p, q, 2)$-triangle groups. — Ann. Math., 1982, v. 166, pp. 113–132.

[25] *В. А. Емеличев и др.*, Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

[26] *А. Т. Фоменко*, Топологические вариационные задачи. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[27] *А. Т. Фоменко*, Вариационные методы в топологии. — М.: Наука, 1982.

[28] *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс*, Курс гомотопической топологии. — М., Наука, 1989.

[29] *M. R. Garey, R. L. Graham and D. S. Johnson*, Some NP-complete geometric problems. — Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., 1976, pp. 10–22.

[30] *E. N. Gilbert and H. O. Pollak*, Steiner minimal trees. — SIAM J. Appl. Math., 1968, vol. 16, no. 1, pp. 1–29.

[31] *A. Gray*, Tubes. — Addison–Wesley Publ. Comp., 1990.

[32] *Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер*, Риманова геометрия в целом. — М., Мир, 1971. (*D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer*, Riemannsche Geometrie im Großen. Springer–Verlag, 1968)

[33] *A. Heppes*, Isogonal spherischen netze, — Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math., 1964, v. 7, pp. 41–48.

[34] *S. Hildebrandt and A. Tromba*, The Parsimonious Universe, Springer-Verlag, New York, 1996.

[35] *F. K. Hwang*, A linear time algorithm for full Steiner trees. — Oper. Res. Letter, 1986, vol. 5, pp. 235–237.

[36] *F. K. Hwang and J. F. Weng*, Hexagonal coordinate Systems and Steiner minimal trees. — Disc. Math., 1986. vol. 62, pp. 49–57.

[37] *F. K. Hwang, D. Richards and P. Winter*, The Steiners Tree Problem. — Elsevier Science Publishers, 1992.

[38] *А. О. Иванов*, Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев. — Матем. сборник, 1995, т. 186, N. 9, сс. 45–76.

[39] *А. О. Иванов*, Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья. — Фундаментальная и прикладная матем., 1996, т. 2, N. 2, сс. 375–409.

[40] *А. О. Иванов, И. В. Исхаков, А. А. Тужилин*, Минимальные сети на правильных многоугольниках: реализация линейных паркетов. — Вестник МГУ, сер. мат., 1993, n. 6, сс. 77–81.

[41] *А. О. Иванов, И. В. Птицына и А. А. Тужилин*, Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах. — Матем. сборник, 1992, т. 183, N. 12, сс. 3–44.

[42] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Решение задачи Штейнера для выпуклых границ. — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, N. 2, сс. 207–208.

[43] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети. — Матем. сб., 1991, т. 182, N. 12, сс. 1813–1844.

[44] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато. — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, N. 2 (284), сс. 53–115.

[45] *A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin*, The Steiner problem for convex boundaries, I; II. — Advances in Soviet Mathematics, 1993, vol. 15, pp. 15–131.

[46] *A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin*, Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. — N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press, 1994.

[47] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев. — Успехи мат. наук, 1994, т. 49, вып. 6(300), сс. 191–192.

[48] *A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin*, Some problems concerning minimal networks, International Journal of Shape Modeling, v.1, no.1, (1994) pp.81–107.

[49] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Взвешенные минимальные бинарные деревья. — Успехи мат. наук, 1995, т. 50, n. 3, сс. 155–156.

[50] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, О минимальных бинарных деревьях с правильной границей. — Успехи мат. наук, 1996, т. 51, n. 1, сс. 139–140.

[51] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Классификация минимальных скелетов с правильной границей. — Успехи мат. наук, 1996, т. 51, n. 4, сс. 157-158.

[52] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Геометрия плоских линейных деревьев. — Успехи мат. наук, 1996, т. 51, n. 2, сс.161–162.

[53] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Число вращения плоских линейных деревьев. — Матем. сб., 1996, т. 187, n. 8, сс.41–92.

[54] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Структура множества плоских минимальных сетей с заданными топологией и границей. — Успехи мат. наук, 1996, т. 51, n. 3, сс.201–202.

[55] *А. О. Иванов и А. А. Тужилин*, Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей, — Известия РАН, сер. мат., 1997, т. 61, n. 6, сс. 119–152.

[56] *A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin*, Planar Local Minimal Binary Trees with Convex, Quasiregular, and Regular Boundaries, — Rheinische Friedrich–Wilhelms Universitat Bonn, Sonderforschungsbereich 256, Nichtlincare Particllc Differcntialglcichungcn, Preprint no. 490, 1996.

[57] *A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin*, Geometry and Topology of Local Minimal 2-trees, Boletim Soc. Bras. Mat., 1997, v.28, n.1 pp.103–139.

[58] *V. Jarnik and M. Kössler*, O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu. — Cas. Pest. Mat. a Fys., 1934, vol. 63, pp. 223–235.

[59] *W. Klingenberg*, Lectures on clsed geodesics. — Springer, 1978.

[60] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Дифференциальная геометрия. — М., Наука, 1980.

[61] *J. B. Kruskal*, On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 7, pp. 48–50.

[62] *H. W. Kuhn*, Steiner's problem revisted. — In the book Studies in Optimization, ser. Studies in Math., vol. 10, Math. Assoc. Amer., edited by G. B. Dantzig and B. C. Eaves, 1975, pp. 53–70.

[63] *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. (*von K. Leichtweiß*, Konvexe Mengen. VEB D. Verlag, Berlin, 1980.)

[64] *Z. A. Melzak*, On the problem of Steiner. — Canad. Math. Bull., 1960, vol. 4, pp. 143–148.

[65] *Z. A. Melzak*, Companion to concrete mathematics. — Wiley–Interscience, New York, 1973.

[66] *F. Morgan, and J. Hass*, Geodesic nets on the 2-sphere. — Proc. AMS, 1996, v. 124, pp. 3843–3850.

[67] *H. O. Pollak*, Some remarks on the Steiner problem. — J. Combin. Thy., Ser. A24, 1978, pp. 278–295.

[68] *М. М. Постников*, Введение в теорию Морса, — М.: Наука, 1971.

[69] *F. Preparata and M. Shamos*, Computational Geometry. An introduction. — New York, Springer–Verlag, 1985.

[70] *R. C. Prim*, Shortest connecting networks and some generalizations. — BSTJ, 1957, vol. 36, pp. 1389–1401.

[71] *Б. Н. Пшеничный*, Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

[72] *J. H. Rubinstein, D. A. Thomas*, The Steiner ratio conjecture for six points. J. Combin. Thy., Ser. A58, 1989, pp. 54–77.

[73] *J. H. Rubinstein, D. A. Thomas*, Graham's problem on shortest networks for points on a circle, Algorithmica.

[74] *J. H. Rubinstein, D. A. Thomas*, A variational approach to the Steiner network problem. Ann. Oper. Res., 1991, v. 33, 481–499.

[75] *T. Rushing*, Topological embeddings. — Acad. Press, 1973.

[76] *M. I. Shamos*, Computational Geometry. — Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978.

[77] *И. В. Шклянко*, Одномерная проблема Плато на поверхностях. — Вестник МГУ., сер. матем., 1989, N. 3, сс. 8–11.

[78] *W. D. Smith*, How to find Steiner minimal trees in Euclidean d-space. Algoritmica, 1992, N 7, pp. 137–177.

[79] *М. В. Пронин*, Локально минимальые сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны. — Вестник МГУ., сер. матем., 1998, в печати.

[80] *И. В. Птицына*, Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна. — Вестник МГУ., сер. матем., 1995, N. 2, сс. 15–22.

[81] *И. В. Птицына*, Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах. — Матем. сборник, 1994, т. 185, N. 5, сс. 119–138.

[82] *А. А. Тужилин*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами. — Матем. сборник, 1996, т. 187, N. 4, сс. 117–159.

[83] *А. А. Тужилин*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами. — Матем. Заметки, 1997, т. 61, N 6.

[84] *А. А. Тужилин*, Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей, двойственные триангуляции которых являются скелетами. — Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, N 2, сс. 511–562.

[85] *А. А. Тужилин и А. Т. Фоменко*, Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. — М.: Наука, 1991.

[86] *D. A. Thomas, J. H. Rubinstein, T. Cole*, The Steiner minimal network for convex configuration, — The Univ. of Melbourne, Depart. of Math., Research report, 1991, Preprint N 15.

[87] *А. Вдовина, Е. Селиванова*, Локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. — Вестник МГУ, 1998, в печати.

[88] *M. Zacharias*, Encyklopädie der Mathematischen, — Wissenschaften, vol. III, AB9.

Литература. 334

Список работ по теме диссертации

[1(43)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети, Матем. Сб., 1991, т.182, n.12, сс.1813–1844. (Предложения 2.1, 2.7, 2.8, 3.4, 3.7, 3.10, 3.11 доказаны А. О. Ивановым.)

[2(44)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато, Успехи мат. наук, 1992, т.47, n.2, сс.53–115. (Теорема из раздела 1.6.3 и предложения 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.1, 3.6, 3.8, 3.10, 3.15, 3.16 доказаны А. О. Ивановым.)

[3(45)] *A.O.Ivanov A.O., and Tuzhilin A.A.*, The Steiner problem for convex boundaries, 1: the general case, Advances in Soviet Mathematics, 1993, v. 15, pp.15–92, AMS. (Предложения 1.1, 2.1, 3.1, 5.1, 7.1, 7.2, 10.1 доказаны А. О. Ивановым.)

[4(46)] *Ivanov A.O., and Tuzhilin A.A.*, Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations, CRC Press, 1994. (Глава 1: Теорема 4.1, предложения 4.1, 5.1; глава 2: теоремы 2.1, 2.2, 3.1; глава 3: теорема 1.1–1.5, 2.1, предложения 1.1, следствия 1.1, 1.2; глава 6: предложения 1.4, 1.10–1.13, 2.4 доказаны А. О. Ивановым.)

[5(47)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев, Успехи Мат. Наук, 1994, т.49, n.6 (300), сс.191–192. (Теорема доказана А. О. Ивановым.)

[6(48)] *Ivanov A.O., and Tuzhilin A.A.*, Some problems concerning minimal networks, International Journal of Shape Modeling, v.1, no.1, (1994) pp.81–107. (Теоремы 6–8, предложения 1.1, 4.1–4.4 доказаны А. О. Ивановым.)

[7(49)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Взвешенные минимальные бинарные деревья, Успехи Мат. Наук, 1995, т.50, n.3, сс.155–156. (Теоремы 1 и 2 доказаны А. О. Ивановым.)

[8(52)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия плоских линейных деревьев, Успехи Матем. Наук, 1996, т.51, n.2, сс.161–162. (Основная теорема доказана А. О. Ивановым).

[9(54)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Структура множества плоских минимальных сетей с заданными топологией и границей, Успехи Матем. Наук, 1996, т.51, n.3, сс.201–202. (Теорема доказана А. О. Ивановым.)

[10(53)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Число вращения плоских линейных деревьев, Матем. Сб., 1996, т.187 n.8, сс.41–92. (Основная теорема, теоремы 1.1, 1.2, предложения 1.2, 2.1, 2.3–2.5, 3.1, 3.3–3.6, следствия1–4 доказаны А. О. Ивановым.)

[11] 57) *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Geometry and Topology of Local Minimal 2-trees, Boletim Soc. Bras. Mat., 1997, v.28, n.1 pp.103–139. (Основная теорема, теоремы 1.1, 4.1, предложения 1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 5.1, 5.3, 5.4, 5.5 доказаны А. О. Ивановым.)

[12(55)] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия множества минимальных сетей с заданными топологией и границей, Известия РАН, сер. Мат., 1997, т.61, n.6, сс.119–152. (Основная теорема, теоремы 8.1, 8.2, 9.1, предложения 4.1, 4.2, 5.2, 6.2, 6.3, 7.1, 7.2, 8.1–8.4, 8.6, 8.7 доказаны А. О. Ивановым.)

[13(38)] *Иванов А.О.*, Геометрия плоских локально минимальных деревьев. Мат. сборник, 1995, т.186, n.9, сс.45–76.

[14(39)] *Иванов А.О.*, Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья, Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т.2, n.2, сс.375–409.