

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 514.77

ИВАНОВ Александр Олегович

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ФОРМЫ КАЛИБРОВКИ

(01.01.04 - геометрия и топология)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических
наук, профессор
А. Т. ФОМЕНКО

Москва - 1989

Оглавление.

Введение.	3
Глава I. Достаточное условие устойчивости инвариантных конусов любой коразмерности в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N	19
§I.1 Минимальные поверхности и формы калибровки (основные определения и факты).	19
§I.2 Эквивариантная задача Плато (основные определения и факты).	28
§I.3 Устойчивость инвариантных конусов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N . Доказательство теорем I.3.1 и I.3.2.	35
§I.4 Примеры использования достаточного условия устойчивости инвариантных конусов (Теорема I.4.1).	42
Глава 2. Глобальная минимальность нескольких серий инвариантных конусов коразмерности два в \mathbb{R}^N	48
§2.1 Примеры глобально минимальных конусов коразмерности два в \mathbb{R}^N (Теорема 2.1.1).	48
§2.2 Построение формы калибровки на пространстве орбит в случае I Теоремы 2.1.1.	55
§2.3 Построение формы калибровки на пространстве орбит в случаях 2 - 3.	60
Глава 3. Форма калибровки на векторных расслоениях.	64
§3.1 Нулевое сечение векторного расслоения - минимальная поверхность (Теорема 3.1.1).	64
§3.2 Некоторые следствия и примеры.	67
Литература.	70

Введение.

Задачи, связанные с изучением минимальных поверхностей, то есть поверхностей наименьшей площади или объема, принято объединять под общим названием - проблема Плато. Классическая задача Плато - найти в трехмерном евклидовом пространстве поверхность минимальной площади и данного топологического типа, ограниченную данной кривой, была решена в 1930-е годы Дугласом [1], Курантом [2] и Радо [3].

Физической моделью таких поверхностей являются мыльные пленки, возникающие на проволочных контурах, после того, как их вынимают из мыльного раствора, или, более общо, границы раздела двух физических сред, находящихся в равновесии. В приложениях возникают не только двумерные, но и многомерные минимальные поверхности, затачивающие фиксированные "контур" в каком-нибудь римановом многообразии. Однако, долгое время не удавалось получить обобщение классических результатов на многомерный риманов случай. Оказалось необходимым пересмотреть такие фундаментальные понятия как поверхность, граница, функционал объема. Выяснилось, что существует несколько естественных способов определить все эти объекты. Это позволило изучать минимальные поверхности различными методами, дополняющими друг друга.

В результате, в 1960 - 1970-е годы был получен ряд важных общих теорем существования решения проблемы Плато. А именно, Райфенберг [4] и Морри [5] в терминах измеримых множеств, Федерер и Флеминг на языке спрямляемых потоков, Альмгрен [7] на языке варифолдов, А.Т. Фоменко для стратифицированных многообразий [8], Дао Чонг Тхи [9] для мультиварифолдов доказали существование минимальной поверхности с заданной границей в

пространстве произвольной размерности. Отметим, что во всех этих работах минимальность понимается в следующем, наиболее сильном смысле.

Определение 0.1.

Пусть A - замкнутое компактное гладкое подмногообразие в римановом многообразии M . Поверхность x с границей A называется глобально (абсолютно) минимальной (ГМ), если любая поверхность x' с той же границей A имеет не меньший объем: $\text{vol}(x) \leq \text{vol}(x')$. (В каждом отдельном случае объем понимается соответствующим образом.)

Это означает, что при любом изменении (вариации) поверхности x , оставляющем на месте границу A , объем x не уменьшается.

Однако, у функционала объема существуют не только глобальные но и локальные минимумы и седловые точки. Это соображение приводит к следующим естественным определениям (см. строгие определения в §1.1 главы I):

Определение 0.2.

Поверхность x с границей A называется локально минимальной (минимальной), если объем x не уменьшается при любой малой по величине вариации малого участка поверхности x , сохраняющей неизменной границу A .

Определение 0.3.

Локально минимальная поверхность x с границей A называется устойчивой, если объем x не уменьшается при любой малой по величине вариации всей поверхности x , сохраняющей неизменной границу A .

Простейший пример локально минимальной не устойчивой по-

верхности - дуга большого круга в стандартной сфере в евклидовом пространстве, если угловое расстояние между начальной и конечной точками больше π . Изменение небольшого участка дуги (угловая длина меньше π) приводит к увеличению длины. Однако, изменяя всю нашу кривую мы можем легко уменьшить ее длину.

Локально минимальные поверхности обладают следующим характеристическим свойством: их вектор средней кривизны n (след второй фундаментальной формы поверхности) равен нулю (см., например, [10]). Это эквивалентно равенству нулю первой вариации функционала объема. Для устойчивых и глобально минимальных поверхностей нет таких несложно проверяемых характеристик.

Несмотря на доказанные теоремы существования решения проблемы Плато, задачи построения конкретных примеров ГМ поверхностей с данной границей A , выяснения является ли данная поверхность глобально минимальной или устойчивой в каждом конкретном случае требуют отдельного изучения. Поэтому в настоящее время представляют интерес конструктивные методы решения проблемы Плато. Например, существует эффективный способ вычислять наименьшие возможные объемы замкнутых поверхностей произвольного нетривиального топологического типа в терминах метрики объемлющего многообразия и его тензора кривизны. Если для какой-то конкретной поверхности x объем $vol(x)$ в точности равен вычисленной нижней грани объемов поверхностей того же типа, то поверхность x глобально минимальна. Этот метод разработан А.Т. Фоменко [11] и развит А.Т. Фоменко и Ле Хонг Ван [12]. С помощью него были получены новые серии примеров минимальных поверхностей в группах Ли и симметрических пространствах,

В 1982 году Харви и Лоусон [13] предложили другой эффек-

тивный метод построения глобально минимальных поверхностей. Он состоит в следующем (см. также § I.1 главы I настоящей работы).

Пусть на \mathbb{R}^N задана внешняя дифференциальная форма φ размерности k , обладающая следующими двумя свойствами:

(i) форма φ замкнута (то есть $d\varphi \equiv 0$);

(ii) $\varphi(x) \leq \text{vol}(x)$ для любой ориентированной k -плоскости $x \subset \mathbb{R}^N$ (здесь vol - форма k -объема в \mathbb{R}^N).

Тогда, если взять k -мерную поверхность $x^k \subset \mathbb{R}^N$ такую, что $\varphi|_x$ совпадает с формой объема на x , то x будет глобально минимальной поверхностью в \mathbb{R}^N .

В самом деле, возьмем любое x' такое, что $\partial x = \partial x'$. Тогда из свойств формы φ и теоремы Стокса имеем:

$$\text{vol}(x) = \int_x \varphi * 1 = \int_{x'} \varphi * 1 < \text{vol}(x').$$

Вместо \mathbb{R}^N можно рассматривать любое гладкое риманово многообразие w^N . Форма φ называется формой калибровки. Неявно это понятие впервые появилось у Дао Чонг Тхи в [14].

Таким образом, чтобы доказать глобальную минимальность поверхности x в w , достаточно построить такую форму калибровки φ , чтобы $\varphi|_x$ совпадала с формой объема на x .

С помощью этого метода было найдено много новых серий примеров ГМ поверхностей. Харви и Лоусон доказали глобальную минимальность так называемых специально лагранжевых поверхностей (см. подробности в [13]), Ле Хонг Ван построила серию калибровок и соответствующих минимальных поверхностей в компактных однородных пространствах, в частности, в орбитах присоединенного представления компактной группы Ли [15] (смотри также пример А.А. Борисенко [16]).

Большая работа по исследованию калибровок с постоянными коэффициентами в евклидовом пространстве малых размерностей проведена Морганом и Харви (см. [17], [18]). Морган [18], Ненси [19] и Лоулор [20] получили с помощью форм калибровки критерий минимальности пары k -мерных плоскостей в \mathbb{R}^n , пересекающихся в одной точке. В последнее время, формы калибровки часто находят применение при изучении минимальных конусов (см. ниже).

В настоящей работе метод калибровок используется для получения новых результатов об устойчивости и глобальной минимальности конусов с симметричной границей в евклидовом пространстве. Автором также построена новая форма калибровки на римановом расслоении к ориентируемому риманову многообразию.

Как уже отмечалось выше, для решения многомерной задачи Плато пришлось существенно расширить класс рассматриваемых поверхностей за рамки гладких многообразий. Однако, первое время, держалась гипотеза о том, что всякая $(n - 1)$ -мерная минимальная поверхность в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n аналитична во всех своих внутренних точках. (Результат классический при $n = 3$, см. [1 - 3].) Эта гипотеза была доказана для $n = 4$ Альмгреном [21] в 1966 году и затем Саймонсом [22] для $n = 5, 6, 7$ в 1968 году. Тем более удивительным оказалось открытие, сделанное в 1969 году Бомбьери, Де Джорджи и Джусти [23], что теорема о внутренней регулярности не верна при $n = 8$. Они построили примеры глобально минимальных $(n - 1)$ -мерных конусов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n для $n \geq 8$. Поэтому, нет оснований ожидать, что минимальные поверхности в римановых многообразиях будут всюду регулярными, и встает вопрос об описании особенностей таких поверхностей.

В этой области был получен ряд общих результатов с регулярности решения задачи Плато "почти всюду" (см. Альмгрен [7], Федерер, Флеминг [6], А.Т. Фоменко [8]). Другая важная задача - исследовать возможные "формы", которые могут принимать сингулярности минимальных поверхностей. Для этого эффективно используется метод минимальных конусов.

Определение 0.4.

Пусть A - подмногообразие (или, более обще, подмножество) в стандартной единичной сфере S^{n-1} в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Конусом CA над A называется поверхность, образованная всеми отрезками, выгуженными из начала координат в точки A .

Рассмотрим поверхность s в \mathbb{R}^n . Назовем касательным конусом $c_p(s)$ к s в точке $p \in s$ объединение всех лучей, выходящих из p и касательных к s (см. точное определение, например, в книге А.Т. Фоменко [10]). Если касательный конус $c_p(s)$ в точке p является плоскостью, то p - регулярная точка, если нет - сингулярная. По-видимому Альмгрен [21] впервые заметил, что если s - глобально минимальная поверхность, то пересечение касательного конуса $c_p(s)$ с единичным шаром $B(p, 1)$ с центром в точке p - тоже глобально минимальная поверхность. Таким образом, изучая минимальные конусы, мы, тем самым, исследуем в первом приближении "форму" минимальных поверхностей вблизи особых точек. С другой стороны, минимальные конусы сами дают примеры минимальных поверхностей с простейшей особенностью - изолированная особая точка (вершина конуса).

Гипотеза о регулярности минимальной гиперповерхности в \mathbb{R}^n , $n = 4, 5, 6, 7$ была доказана Альмгреном и Саймонсом с помощью известной теоремы о конусах, утверждающей, что в евклидовом

пространстве \mathbb{R}^n не существуют нетривиальных (т.е. отличных от гиперплоскости) минимальных $(n-1)$ -мерных конусов, если размерность пространства n не превосходит 7 (коразмерность конусов равна единице). (См. [21], [22].) Начиная с $n=8$ ситуация меняется. Первый пример глобально минимального конуса коразмерности один в \mathbb{R}^n был построен Бомбьери, Де Джорджи, Джусти [23]. Это конус над многообразием $A = S^3 \times S^3 \subset S^7 \subset \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$.

Если коразмерность конуса больше 1, то существуют минимальные конусы меньшей размерности (нет аналога теоремы Альмгрен-Саймонса, см. выше). Один из первых примеров таких конусов был найден Федерером и Флемингом в [6]. Они доказали, что пара ортогональных k -мерных плоскостей, проходящих через начало координат в \mathbb{R}^n , является глобально минимальной поверхностью при $n \geq 2k$, $k \geq 2$. (Эта поверхность, очевидно, является конусом над объединением сфер.) В частности, при $k=2$ мы получаем пример двумерного нетривиального глобально минимального конуса в \mathbb{R}^n .

Много интересных примеров минимальных конусов можно получить в рамках так называемой эквивариантной задачи Плато. В этом случае предполагается, что граница A конуса SA является инвариантной относительно действия компактной связной группы Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$, где $\mathfrak{so}(n)$ — связная компонента единицы группы изометрий пространства \mathbb{R}^n . Аппарат, разработанный Сяном и Лоусоном [24] (см. также А.Т. Фоменко [10] и §1.2 главы I настоящей работы), позволяет, при этих условиях, сводить задачу исследования минимальности поверхности x с границей A к задаче на пространстве орбит (понизить размерность). Более точно:

Рассмотрим m^N — риманово многообразие, на котором гладко действует связная компактная группа Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_0(m)$, где $\mathfrak{g}_0(m)$ —

связная компонента единицы группы изометрий многообразия m^N . Пусть $v^p \subset m^N$ - некоторая поверхность, инвариантная относительно действия группы \mathfrak{g} . Как v , так и все m , расслоено на орбиты $\mathfrak{g}(x) = \{g(x) : g \in \mathfrak{g}\}$. Пусть $\pi: m \rightarrow m/\mathfrak{g}$ - каноническая проекция на пространство орбит m/\mathfrak{g} . Если $\psi(x, y)$ - скалярное произведение на касательном пространстве $T_x(m)$ к многообразию m , то можно построить риманову метрику на пространстве орбит m/\mathfrak{g} следующим образом. Пусть κ - распределение нормальных плоскостей к орбитам $\mathfrak{g}(x)$, и пусть $x', y' \in T_{\pi(x)}[m/\mathfrak{g}]$. Тогда существуют единственные векторы $x, y \in T_x(m)$ - прообразы x', y' , принадлежащие κ , и можно положить $\psi'(x', y') = \psi(x, y)$. Определим, далее, на m/\mathfrak{g} функцию объема орбиты $f(x) = \text{vol}(\pi^{-1}(x))$. Наконец, введем на пространстве орбит метрику $dl_\kappa = f^{1/k} \cdot ds'$, где $k = p - v$, v - размерность главных орбит, и ds' - метрика, порожденная построенным выше скалярным произведением ψ' . Сян и Лоусон [24] показали, что \mathfrak{g} -инвариантное подмногообразие $v^p \subset m^N$ локально минимально в m тогда и только тогда, когда v/\mathfrak{g} локально минимально в пространстве орбит m/\mathfrak{g} относительно метрики dl_κ . Более того, объемы v и v/\mathfrak{g} , подсчитанные в соответствующих метриках, совпадают.

Эта конструкция позволяет осуществить редукцию задачи на пространство орбит.

Опираясь на классификацию групп $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$, действующих в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n так, что орбиты действия имеют малую (1, 2, 3) коразмерность, полученную Сяном и Лоусоном [24], Лоусон [25], А.Т. Фоменко и А.В. Тьрин [10] провели исследование всех инвариантных конусов в \mathbb{R}^n коразмерности один. Отметим, что при доказательстве глобальной минимальности конусов, Лоусон

[25] неявно уже пользовался формой калибровки.

В случае коразмерности два и выше в настоящее время известно лишь несколько серий примеров минимальных конусов. Многие из них получены при помощи форм калибровки. В работе Харви и Лоусона [13] построена серия минимальных конусов, являющихся специально лагранжевыми поверхностями. Это конусы над орбитами стандартного действия тора

$$\tau^{n-1} = \{ \text{diag}(\exp(i \cdot \theta_1), \dots, \exp(i \cdot \theta_n)) : \theta_1 + \dots + \theta_n = 0 \} \subset \mathfrak{su}(n)$$
 в \mathbb{C}^n , $n \geq 2$.

Несколько серий минимальных конусов, натянутых на группы Ли, реализованные как поверхности в евклидовом пространстве всех матриц, приведено в работе Ченга [26]. И. С. Балинская [27] исследовала вопрос о минимальности конусов, инвариантных относительно присоединенного представления простых групп Ли в их алгебрах Ли.

Недавно (в 1988 году), Лоулор [28] получил с помощью форм калибровки общее достаточное условие глобальной минимальности конуса σ_a с границей a в \mathbb{R}^n , которое позволяет, зная вторую фундаментальную форму поверхности a в каждой точке и еще одну внутреннюю характеристику вложения конуса (см. подробности в [28]), свести вопрос о минимальности конуса к исследованию существования решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с липшецевыми коэффициентами, удовлетворяющих определенным начальным и краевым условиям. В случаях, когда a устроено достаточно просто, этот метод приводит к успеху. В частности, Лоулору удалось, используя этот метод, завершить исследования Бомбьери, Де Джорджи, Джусти [23], Саймонса [22], Лоусона [25], Биншадлера [29], Симоса [30], А.Т. Фоменко и

А.В.Терина [10] и автора [31], [32] конусов с границей α имеющей вид прямого произведения сфер s^k , $k = m_1, \dots, m_n$. Полученный Лоулором окончательный ответ выглядит так: если размерность конуса α больше 7, конус α глобально минимален; если меньше - то неустойчив. Если же размерность конуса α равна 7, то конус устойчив, причем он глобально минимален, если среди сфер s^k нет окружностей, т. е. $m_i \neq 1$.

Тем же способом Лоулор доказал минимальность конуса над проективным пространством $\mathbb{R}P^{n-1}$ вложенным в стандартную сферу $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n = n^2$ при $n > 3$. Вложение устроено так: вектору-столбцу $x \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие матрица $x \cdot x^T$ из евклидова пространства всех матриц \mathbb{R}^n . Тем самым, Лоулор построил примеры минимальных конусов с неориентируемой границей.

Оказалось, если вместо глобальной минимальности исследовать устойчивость конусов с помощью форм калибровки (считая вершину конуса закрепленной), возникает некоторое упрощение. (См. также Теорему I.3.2 (0,2) насколько такое ослабление условия глобальной минимальности сильно.)

В настоящей работе получено достаточное условие устойчивости конусов произвольной коразмерности в \mathbb{R}^n с инвариантной границей в терминах функции \int объема орбиты (Теорема I.3.1 (0,1)), а также приведены примеры использования этой теоремы для доказательства устойчивости некоторых новых серий инвариантных конусов коразмерности два и выше в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (Теорема I.4.1).

Для некоторых исследованных на устойчивость конусов автором доказана глобальная минимальность (Теорема 2.1.1). Отметим, что, хронологически, автором вначале была доказана глобальная

минимальность нескольких серий конусов коразмерности два в \mathbb{R}^n (Теорема 2.1.1), а потом уже, при попытках улучшить и обобщить результат, было получено достаточное условие устойчивости (Теорема 1.3.1). Порядок изменен для удобства изложения.

Автором построен новый пример формы калибровки на римановом многообразии, а именно, на векторном расслоении πM с базой M , где M - риманово ориентируемое многообразие. На пространстве расслоения πM рассматривается метрика, в которой слой ортогональны нулевому сечению (см. Теорему 3.1.1 (0.3)). Доказано, что нулевое сечение такого расслоения - глобально минимальная поверхность. В частности, любое риманово ориентируемое многообразие может быть реализовано как глобально минимальная поверхность.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Пусть G - компактная связная группа Ли, действующая в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n как подгруппа связной компоненты единицы группы изометрий евклидова пространства: $G \subset SO(n)$. Пусть пространство орбит этого действия $\mathbb{R}^n/G \equiv \omega \subset \mathbb{R}^n$, причем ω - подмножество в \mathbb{R}^n , ограниченное конечным набором гиперплоскостей, проходящих через начало координат $0 \in \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\tilde{f}: \omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ - функция объема орбит, заданная на пространстве орбит ω . Предположим, что \tilde{f} - однородна по радиусу со степенью однородности m , то есть если $(r, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1})$ - регулярные координаты в $\omega \subset \mathbb{R}^n$, где r - расстояние до точки O , то

$$\tilde{f}(r, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}) = r^m \tilde{f}(1, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}) \equiv r^m \cdot f(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}).$$

Пусть $a \in S^{n-1}(1) \subset \mathbb{R}^n$, a - точка максимума функции f на сфере $S^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 0.1.

Пусть \tilde{f} - функция объема орбит на пространстве орбит ω , однородная по радиусу со степенью однородности m ; f - ограничение функции объема орбит на стандартную сферу $S^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим конус ca , натянутый на орбиту a , отвечающую точке $a \in S^{n-1}(1) \cap \omega$, где a - точка максимума функции f на сфере $S^{n-1}(1)$. Если вторая производная функции объема орбит f в точке a вдоль любого касательного к сфере $S^{n-1}(1)$ направления не превосходит $f(a) \cdot (m+1)^2/4$, то конус ca - устойчивая минимальная поверхность с границей a в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (вершина конуса закреплена).

Сказывается, если в условиях теоремы 0.1, установить устойчивость отрезка геодезической oa , соответствующего конусу ca в пространстве орбит ω , в некоторой трубчатой его окрестности в пространстве орбит, то тем самым будет доказана и глобальная минимальность oa , а значит и конуса ca :

Теорема 0.2.

Пусть $G \in so(n)$ действует на евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $\omega \subset \mathbb{R}^n$ - пространство орбит - область, ограниченная гиперплоскостями, проходящими через начало координат. Пусть f - функция объема орбит на ω , однородная по радиусу, $a \in S^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$ - точка максимума функции f на сфере $S^{n-1}(1) \cap \omega$, и пусть отрезок геодезической oa - устойчив в некоторой трубчатой окрестности oa в пространстве орбит ω . Тогда oa - глобально минимальная геодезическая, в классе всех выходящих из точки a на границу области ω . Конус ca , соответствующий oa - глобально минимальная поверхность в \mathbb{R}^n с границей a .

Применять достаточное условие устойчивости (теорему 0.1)

просто, если удастся явно вычислить точку максимума a функции объема орбит f на сфере. Ряд таких примеров приведен в Теореме I.4.I. Например, доказано, что конус над орбитой действия группы $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^5$ со стационарной подгруппой $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ устойчив при $k > 3$.

В случае когда точка экстремума функции объема орбиты неизвестна, применять теорему 0.I значительно сложнее. Нужно пытаться получить какие-либо оценки второй производной функции объема орбит в окрестности точки экстремума. (См. также замечание I.4.3.)

Автору удалось подобрать подходящую форму калибровки и, тем самым, доказать глобальную минимальность нескольких исследованных на устойчивость серий конусов (Теорема 2.I.I). Однако, в связи с серьезными вычислительными трудностями (см. доказательство Теоремы 2.I.I), пришлось ввести сильные ограничения на размерность объемлющего пространства. Например, доказано, что конус над орбитой действия группы $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^5$ со стационарной подгруппой $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ глобально минимален при $k > 51$.

Остановимся теперь на результатах автора о нулевом сечении векторных расслоений.

Пусть M^p — риманово многообразие, на котором задана метрика (g_i, j) , и пусть $\pi: V^{p+k} \rightarrow M^p$ — вещественное векторное локально тривиальное расслоение над M^p со слоем \mathbb{R}^k . Пусть на расслоении (π, V^{p+k}, M^p) задана аффинная связность Γ — семейство "горизонтальных" плоскостей $\Gamma(v)$, гладко зависящих от точки $v = (m, w) \in V^{p+k}$ (здесь $v = (m, w)$, где $m \in M^p$, $w \in \mathbb{R}^k$). Горизонтальность означает, что ограничение дифференциала проекции

расслоения на плоскость $\Gamma(v)$ невырождено в каждой точке v . Потребуем кроме того, чтобы нулевое сечение $f_0: m \rightarrow v$ было горизонтальным, то есть $df_0(m)(\tau_m(m)) = \Gamma(m, 0)$.

Введем на пространстве расслоения v риманову метрику следующим образом. В каждой точке $v \in v$ касательное пространство к пространству расслоения v распадается в прямую сумму двух подпространств: $\tau_v(v) = \mathbb{R}^k \oplus \Gamma(v)$, где $\Gamma(v)$ - горизонтальная плоскость, а \mathbb{R}^k - плоскость, касательная к слою в точке v . Зададим $(\tilde{g}_{ij}(m))$, $i \leq k, j \leq k$ - семейство метрик в \mathbb{R}^k гладко зависящих от точки $m \in m^p$. Наконец, зададим метрику на пространстве расслоения v^{p+k} в следующем блочном виде:

$$\left[\begin{array}{c|c} g_{ij}(m) & 0 \\ \hline 0 & \tilde{g}_{ij}(m) \end{array} \right],$$

где в верхнем левом углу стоит метрика на m^p и задает скалярное произведение на горизонтальных плоскостях $\Gamma(v)$ (они имеют размерность p), а в правом нижнем углу стоит определенная выше метрика $\tilde{g}_{ij}(m)$ и задает скалярное произведение на касательных плоскостях к слоям. Касательная плоскость к слою в точке v и горизонтальная плоскость $\Gamma(v)$ считаются ортогональными. (См. в Главе 3 примеры для касательного и нормального расслоений.)

Теорема 0.3.

Пусть m^p - риманово многообразие, и пусть $\pi: v^{p+k} \rightarrow m^p$ - вещественное векторное локально тривиальное расслоение над m^p со слоем \mathbb{R}^k , $f_0: m \rightarrow v$ его нулевое сечение. Пусть на v^{p+k} введена метрика так, как описано выше. Тогда $f_0(m^p) \subset v^{p+k}$ - глобально минимальная поверхность.

Следствие 0.1. Любое риманово ориентируемое многообразие M может быть вложено в некоторое другое риманово многообразие V (выбранное специальным образом) как глобально минимальная поверхность.

Опишем теперь расположение материала по главам. В дальнейшем используется следующая система нумерации параграфов и утверждений: обозначение "Лемма I.2.3." говорит о том, что это третья Лемма во втором параграфе первой главы. В первых двух параграфах первой главы приведены основные необходимые определения и факты о минимальных поверхностях, формах калибровки и эквивариантной задаче Плато. Параграф третий этой главы посвящен формулировке, доказательству и обсуждению достаточного условия устойчивости инвариантных конусов любой коразмерности в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (Теорема I.3.1 и Теорема I.3.2). В параграфе четвертом приведены примеры использования этого достаточного условия для доказательства устойчивости нескольких серий конусов (Теорема I.4.1).

В главе второй настоящей работы доказана глобальная минимальность нескольких серий инвариантных конусов коразмерности два. В параграфе первом формулируется Теорема 2.1.1, перечисляющая эти минимальные конусы, а параграфы второй и третий содержат описание построения форм калибровки, с помощью которых доказывается эта теорема.

В параграфе первом главы третьей сформулирована и доказана Теорема 3.1.1 о минимальности нулевого сечения векторного расслоения. Параграф второй содержит некоторые следствия и примеры, получающиеся при помощи этой теоремы.

Приведенные выше результаты А.С. Иванова были доложены ав-

тором на научных конференциях, в частности на международной конференции, а также на ведущих научно-исследовательских семинарах:

на секции "Приложение геометрии к естественным наукам" на Бакинской международной топологической конференции;

научно-исследовательском семинаре по геометрии и ее приложениям (под руководством академика А.В. Погорелова, ХГУ);

научно-исследовательском семинаре по векторному и тензорному анализу и его приложениям (под руководством О.В. Мантурова, С.П. Новикова, Л.В. Сабина, В.В. Трофимова, А.Т. Фоменко);

научно-исследовательском семинаре "Современные геометрические методы" (под руководством А.Т. Фоменко, В.В. Трофимова, А.В. Болвинова);

на секции по функциональному анализу и его приложениям в Воронежской Всесоюзной математической (зимней) школе (под руководством проф. Ю.Г. Борисовича);

на конференции "Геометрия, дифференциальные уравнения и механика" (МГУ).

Автор глубоко признателен своему научному руководителю - профессору А.Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, без которого она никогда не была бы сделана.

Автор также благодарен А.В. Болвинову, А.А. Тужилину и А.В. Тырину за полезные обсуждения.

Глава I. Достаточное условие устойчивости инвариантных конусов любой коразмерности в евклидовом пространстве.

В §§I.1, I.2 настоящей главы приведены основные факты о минимальных поверхностях, формах калибровки и эквивариантной задаче Плато. §I.3 посвящен формулировке и доказательству достаточного условия устойчивости конусов произвольной коразмерности в \mathbb{R}^N с инвариантной границей (Теорема I.3.1). §I.4 содержит несколько серий примеров использования Теоремы I.3.1 для проверки устойчивости таких конусов. В частности, доказана устойчивость нескольких новых серий инвариантных конусов большой коразмерности (Теорема I.3.2).

§I.1 Минимальные поверхности и формы калибровки (основные определения и факты).

Пусть M - риманово ориентированное r -мерное многообразие с краем или без края. Обозначим $T(M)$ касательное расслоение к M , $T_m(M)$ - касательное пространство к M в точке $m \in M$. В каждой точке $m \in M$ для каждой пары векторов $x, y \in T_m(M)$ определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle$. Это скалярное произведение позволяет определить скалярное произведение двух тензоров любого данного типа, которое мы также будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Так как M - риманово многообразие, на $T(M)$ возникает связность, согласованная с метрикой. Эта связность порождает естественную связность в расслоении на тензоры любого типа, сохраняющую скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Рассмотрим Z - поле тензоров на многообразии M , $x \in T_m(M)$. Обозначим $\nabla_x Z$ ковариантную производную поля Z вдоль

вектора x . Тензор $\nabla_x Z$ имеет тот же тип, что и Z . Поскольку связность сохраняет скалярное произведение, имеем:

$$\nabla_x \langle Z, W \rangle = \langle \nabla_x Z, W \rangle + \langle Z, \nabla_x W \rangle,$$

где Z и W - тензорные поля одного типа.

Определение I.I.I. Пусть $\nu(M)$ - векторное расслоение на M . Пусть в слоях этого расслоения задано скалярное произведение, и пусть линейная связность на $\nu(M)$ сохраняет это скалярное произведение. Тогда $\nu(M)$ называется римановым векторным расслоением над M (Саймонс, [22]).

Пусть M - r -мерное ориентируемое многообразие с краем или без края, и пусть W - n -мерное риманово многообразие. Пусть $f: M \rightarrow W$ - гладкое погружение. $\tau(M)$ и $\nu(M)$ - касательное и нормальное расслоения к M . Связность и метрика на W индуцируют связность и инвариантное скалярное произведение на $\tau(M)$ и $\nu(M)$. Эти связности можно легко определить следующим образом.

Пусть Y - векторное поле на M . Ограничим Y на такую окрестность U точки $m \in M$, что отображение f - диффеоморфизм на U . отождествим поле Y с полем $f_* Y$, которое определено на образе отображения f и состоит из векторов касательных к W . Пусть $x \in \tau_m(M)$. Положим

$$\nabla_x(Y) = (\bar{\nabla}_x Y)^T$$

где $\bar{\nabla}$ - риманова связность на $\tau(W)$ и $(\)^T$ - проекция на $\tau_m(M)$.

Предложение I.I.I. ([10], [22])

∇ - это риманова связность на $\tau(M)$, согласованная с метрикой на M , индуцированной вложением f .

Аналогично определяется связность на $\nu(M)$. Пусть V - сечение расслоения $\nu(M)$. Ограничим V на окрестность точки $m \in M$, отображаемую в W диффеоморфно. Мы можем теперь рассматривать V

как векторное поле на m , определенное на образе окрестности точки m . Положим

$$\nabla_x V = (\bar{\nabla}_x V)^N,$$

где $(\)^N$ означает проекцию на подпространство $Nm(m)$.

Предложение I.1.2. ([10], [22])

∇ - это связность на $N(m)$, сохраняющая скалярное произведение.

Определим теперь вторую фундаментальную форму погруженного многообразия. Для этого нам понадобятся еще два векторных расслоения над m . Пусть $s(m)$ - расслоение, слой которого в каждой точке m совпадает с пространством симметричных линейных преобразований $tm(m) \rightarrow tm(m)$. Обозначим $N(m) = \text{Hom}(N(m), s(m))$. Если $L \in Nm(m)$ и $v \in Nm(m)$, то L^v - соответствующее симметричное линейное преобразование $tm(m)$ в $tm(m)$. Вторая фундаментальная форма A является сечением расслоения $N(m)$.

Определение I.1.2. ([10], [22])

Пусть $v \in Nm(m)$. Продолжим v произвольным векторным полем V на m так, чтобы поле V было ортогонально к $f(m)$ в окрестности точки $f(m)$. Определим $A^v : tm(m) \rightarrow tm(m)$ по формуле

$$A^v(x) = -(\bar{\nabla}_x V)^T.$$

Форма A называется второй фундаментальной формой вложения.

Предложение I.1.3. ([10], [22])

Форма A корректно определена (не зависит от продолжения v) и является гладким сечением расслоения $N(m)$.

В некоторых случаях, удобно рассматривать вторую фундаментальную форму как билинейную симметричную форму на $tm(m)$ со значениями в $Nm(m)$. Пусть $x, y \in tm(m)$. Определим $B(x, y) \in Nm(m)$ следующим образом: $\langle B(x, y), v \rangle = \langle A^v(x), y \rangle$.

Предложение I.I.4. ([10], [22])

Пусть $x, y \in T_x(M)$. Продолжим y векторным полем Y на M , касательным к $f(M)$. Тогда $v(x, y) = (\bar{\nabla}_x Y)^N$.

Вторая фундаментальная форма v позволяет определить среднюю кривизну многообразия. Поскольку v — билинейная форма на касательных пространствах $T_x(M)$ со значениями в $N_x(M)$ и на $T_x(M)$ задано скалярное произведение, определен след формы v . Это сечение расслоения $N(M)$, мы обозначим n .

Определение I.I.3. ([10], [22])

Сечение n расслоения $N(M)$ называется средней кривизной погруженного многообразия M .

Пусть e_1, \dots, e_p — ортонормированный базис в $T_x(M)$. Тогда

$$n = \sum v(e_i, e_i).$$

Понятие средней кривизны тесно связано с понятием минимальных поверхностей, к определению которых мы и перейдем.

Определение I.I.4. ([10], [22])

Пусть x — гладкое многообразие с границей A , где A — компактное, замкнутое многообразие. $f: x \rightarrow W$ — погружение в риманово многообразие W . Погружение f индуцирует на x риманову метрику. Пусть $\{F_t\}$, $t \in [0, 1]$ — однопараметрическое семейство погружений x в W , причем $F_0 = f$, ограничение $F(x, t)$ на границу A не зависит от t и отображение $F(x, t)$ бесконечно гладко. Тогда $\{F_t\}$ называется вариацией f (вариацией x).

Носителем вариации $\{F_t\}$ многообразия x называется такое множество $\text{supp}(F) \subset M$, что $F(x, t) = f(x)$ для всех t и для всех $x \in x \setminus \text{supp}(x)$.

Определение I.I.5. ([10])

Поверхность x с границей A называется локально минимальной

(минимальной) в ω с границей A , если риманов объем $\text{vol}(x)$ не уменьшается при малых по величине вариациях с малым носителем.

Определение I.I.6. ([10])

Локально минимальная поверхность x с границей A называется устойчивой в ω , если риманов объем $\text{vol}(x)$ не уменьшается при малых по величине вариациях с любым носителем.

Определение I.I.7. ([10])

Поверхность x с границей A называется глобально минимальной (ГМ) в ω , если риманов объем $\text{vol}(x)$ не уменьшается при любых вариациях с любым носителем.

Для локально минимальных поверхностей существует удобное описание в терминах средней кривизны. Вариация (F_t) поверхности x индуцирует векторное поле E , касательное к объемлющему многообразию ω и определенное на образе x . Оно строится следующим образом. Пусть a/a_t - стандартное векторное поле на $n \times [0,1]$.

Положим

$$E(m) = dF(a/a_t(m,0)).$$

Предложение I.I.5. ([10], [22])

Пусть x - компактное многообразие с границей A , $v(t)$ - риманов объем образа $F_t(x)$. Тогда

$$dv/dt(0) = - \int_x \langle E, n \rangle * 1,$$

где n - средняя кривизна x . В частности, x - локально минимальное многообразие с границей A тогда и только тогда, когда средняя кривизна n многообразия x всюду равна нулю.

К сожалению, таких простых описаний устойчивых, а тем более глобально минимальных поверхностей не существует. Проверка устойчивости и глобальной минимальности в каждом конкретном

случае представляет собой не тривиальную задачу. Дело осложняется также и тем, что класс гладких многообразий оказывается слишком узким для изучения минимальных поверхностей. Одним из естественных расширений этого класса является понятие интегрального (целочисленного) потока.

Пусть w - гладкое риманово многообразие. Обозначим $E_p(w)$ - пространство гладких дифференциальных форм размерности p на w . Пусть $D_p(w) \subset E_p(w)$ - подпространство p -форм с компактным носителем в w .

Определение 1.1.8. ([6])

Потоком размерности p на w называется непрерывный линейный функционал на $D_p(w)$, (На $D_p(w)$ рассматривается топология равномерной сходимости вместе со всеми частными производными.) Пространство потоков на w будем обозначать $D^p(w)$

Пусть $\tau \in D^p(w)$, тогда определим границу $\partial\tau \in D^{p-1}(w)$ потока τ следующим образом:

$$\partial\tau(w) = \tau(\delta w),$$

где $w \in D_{p-1}(w)$, δ - внешнее дифференцирование. Очевидно, $\partial(\partial\tau) = 0$.

Потоки на w можно рассматривать как обобщение ориентированных подмногообразий. В самом деле, пусть $v \subset w$ - p -мерное подмногообразие, $\xi(v)$ - распределение единичных простых p -векторов касательных к v . Тогда легко определить соответствующий поток $[v] \in D^p(w)$ так:

$$[v](w) = \int_v \langle \xi, w \rangle * 1, \text{ для всех } w \in D_p(w).$$

Простым называется p -вектор ξ , представимый в виде $\xi = u_1 \wedge \dots \wedge u_p$, где u_i 1-векторы (т. е. просто векторы). Пусть $w \in$

$\in E_p(\omega)$. Тогда

$$\|\omega\|^* = \sup\{\|\omega(v)\| : v \in \nu\},$$

где $\|\omega(v)\| = \sup\{\langle \omega(v), \xi(v) \rangle : \xi(v) - \text{единичный простой } p\text{-вектор над } \tau\nu(\omega)\}$, называется комассой формы ω .

Определение I.I.9. ([6])

Пусть $\tau \in D^p(\omega)$. Тогда $m(\tau)$

$$m(\tau) = \sup\{\tau(\omega) : \|\omega\|^* \leq 1, \omega \in D_p(\omega)\}$$

называется массой потока τ .

Отметим, что если $\tau = [\nu]$ для некоторого подмногообразия ν , то $m(\tau) = m([\nu]) = \text{vol}(\nu)$ - совпадает с объемом подмногообразия ν .

Более обще, для любого открытого $u \subset \omega$, определим

$$m_u(\tau) = \sup\{\tau(\omega) : \|\omega\|^* \leq 1, \text{supp}(\omega) \subset u\}.$$

Будем говорить, что поток $\tau \in D^p(\omega)$ имеет локально конечную массу, если $m_u(\tau) < \infty$ для всех компактов $u \subset \omega$. Тогда, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, существует мера Радона $\|\tau\|$ на ω и $\|\tau\|$ -измеримая функция $\tau(v)$ со значениями во внешней алгебре $\bigwedge_p(\tau\nu(\omega))$, $|\tau(v)| = 1$, определенная $\|\tau\|$ -почти всюду на ω , такая, что

$$\tau(\omega) = \int_{\omega} \langle \tau(v), \omega \rangle d\|\tau\|, \quad \omega \in D_p(\omega).$$

В частности, $\|\tau\|(\omega) = m(\tau)$.

Множество p -потоков локально конечной массы на ω будем обозначать $\Omega_p(\omega)$. В терминах потоков можно поставить обобщенную задачу Плато. А именно, пусть дан $(p-1)$ -поток $A \in \Omega_{p-1}(\omega)$. Требуется найти p -поток $\tau \in \Omega_p(\omega)$, $\partial\tau = A$, такой, что

$$m(\tau) = \inf\{m(s) : s \in \Omega_p(\omega), \partial s = A\}.$$

Такой поток τ будем называть поток минимальной массы с грани-

пей А.

Федерер и Флеминг [6] доказали в этих терминах теорему существования и единственности решения обобщенной задачи Плато. Однако проверка минимальности конкретных потоков представляет собой сложную задачу. Одним из эффективных методов такой проверки является метод форм калибровки, разработанный Харви и Лоусоном в [13]. Этот метод состоит в следующем.

Пусть ψ - гладкая внешняя p -форма комассы 1 на M . Для любой точки $v \in M$ определим множество $Gv(\psi) = \{ \text{простые, единичные } \xi \in \wedge_p(Tv(M)) : \langle \psi(v), \xi(v) \rangle = 1 \}$. Обозначим $chGv(\psi)$ выпуклую оболочку множества $Gv(\psi)$ в $\wedge_p(Tv(M))$.

Определение I.I.IO. ([13])

Поток $\tau \in \Omega_p(M)$ называется ψ -поток, если соответствующая ему векторзначная функция τ такова, что $\tau(v) \in chGv(\psi)$ $\|\tau\|$ -почти всюду на M . Если $\tau(v)$ задает ориентированное поле плоскостей (т. е. $\tau(v)$ - простой p -вектор для любого v) и $\tau(v) \in Gv(\psi)$ $\|\tau\|$ -почти всюду на M , то τ называется ψ -цепью. Если $\tau = [v]$ для некоторого подмногообразия $v, v \subset M$, то τ (и v) называется ψ -подмногообразием в M .

Очевидно, если τ - ψ -поток конечной массы, то

$$\tau(M) = \int_M \langle \tau(v), \psi(v) \rangle d\|\tau\| = M(\tau),$$

так как $\langle \tau(v), \psi(v) \rangle = 1$ $\|\tau\|$ -почти всюду на M .

Определение I.I.II. ([13])

Гладкая внешняя p -форма $\psi \in D_p(M)$ называется формой калибровки на M , если

(i) $\|\psi\|^2 = 1,$

(ii) $d\psi = 0.$

Метод форм калибровки основан на следующем важном принципе:

Предложение I.1.6. ([13])

Пусть ψ - форма калибровки на многообразии M и пусть τ^0 - ψ -поток с компактным носителем. Тогда любой поток τ с компактным носителем на M гомологичный τ^0 (т. е. $\tau^0 - \tau = \alpha \psi$ для некоторого потока α) имеет не большую массу:

$$M(\tau^0) \leq M(\tau),$$

причем равенство достигается только в случае если τ - ψ -поток.

Доказательство.

Очевидно,

$$\tau^0(\psi) - \tau(\psi) = \alpha \psi(\psi) = \alpha(d\psi) = 0$$

по определению формы калибровки.

Поэтому,

$$M(\tau^0) = \tau^0(\psi) = \tau(\psi) = \int_M \langle \tau(\psi), \psi \rangle d|\tau| \leq M(\tau),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, чтобы доказать минимальность потока τ , достаточно построить такую форму калибровки ψ , чтобы τ был ψ -поток.

§1.2 Эквивариантная задача Плато (основные определения и факты).

Пусть M - риманово многообразие, на котором гладко действует его группа изометрий $I(M)$. Обозначим $I_0(M)$ - связную компоненту единицы этой группы, и пусть G - некоторая связная компактная подгруппа группы $I_0(M)$. Пусть $X \subset M$ - поверхность, инвариантная относительно действия группы G . Такие поверхности, расслоенные на орбиты $G(x) = \{g(x); g \in G\}$ действия группы, называются G -инвариантными.

Рассмотрим обобщенную задачу Плато. Пусть в M фиксирован "контур" - замкнутое подмногообразие A , инвариантное относительно действия группы G . Эквивариантная задача Плато формулируется так: в каких случаях можно гарантировать существование G -инвариантной минимальной поверхности X с G -инвариантной границей A ?

Нетрудно показать, что G -инвариантное подмногообразие X в многообразии M локально минимально относительно всех достаточно малых вариаций в том и только том случае, когда оно является локально минимальным лишь по отношению ко всем достаточно малым эквивариантным вариациям (т.е. инвариантным относительно действия той же группы). (См. например [24]). Это наблюдение позволяет редуцировать задачу Плато на многообразии M с инвариантной границей A к задаче нахождения минимальных поверхностей на пространстве орбит (понизить размерность).

Пусть $x \in M$, $G(x)$ - орбита точки x при действии группы G . Тогда $G(x) = G/G_x$, где G_x - стационарная подгруппа точки x в группе G .

Определение I.2.1. (См., например, [33].)

Две орбиты $\mathfrak{e}(x)$ и $\mathfrak{e}(y)$ называются орбитами одного типа, если подгруппы \mathfrak{e}_x и \mathfrak{e}_y сопряжены друг с другом в \mathfrak{e} , то есть $\mathfrak{e}_x = g \mathfrak{e}_y g^{-1}$ для некоторого $g \in \mathfrak{e}$. Классы сопряженности подгрупп $\{\mathfrak{e}_x\}$ называются орбит-типами.

На множестве орбит-типов можно ввести естественное упорядочение.

Определение I.2.2. ([33])

Класс $\{\mathfrak{e}_y\}$ следует за классом $\{\mathfrak{e}_x\}$ ($\{\mathfrak{e}_y\} > \{\mathfrak{e}_x\}$), если, для некоторых представителей $\mathfrak{e}_x \in \{\mathfrak{e}_x\}$, $\mathfrak{e}_y \in \{\mathfrak{e}_y\}$, существует $g \in \mathfrak{e}$ такой, что $g \mathfrak{e}_y g^{-1} \subset \mathfrak{e}_x$.

Нетрудно проверить ([33]), что если многообразие m связно, то существует единственный класс $\{n\}$ такой, что $\{n\} > \{\mathfrak{e}_x\}$ для любого $x \in m$. Объединение всех орбит этого класса является открытым плотным в m подмногообразием $m^* = \{x \in m : \mathfrak{e}_x \in \{n\}\}$.

Определение I.2.3. ([33])

Класс $\{n\}$ называется главным орбит-типом. Если $\{n'\} \neq \{n\}$, но все представители $n' \in \{n'\}$ и $n \in \{n\}$ имеют одинаковую размерность, т. е. $\dim(n') = \dim(n)$, то класс n' называется особым орбит-типом. Если $\{n''\} \neq \{n\}$ и $\dim(n'') > \dim(n)$, то класс $\{n''\}$ называется сингулярным орбит-типом.

Пусть $\pi: m \rightarrow m/\mathfrak{e}$ — каноническая проекция на пространство орбит m/\mathfrak{e} ; тогда в m/\mathfrak{e} содержится открытое плотное подмножество M^*/\mathfrak{e} , являющееся подмногообразием. Обозначим $\psi(x, y)$ — скалярное произведение на $\tau_x(m)$. Тогда можно построить новое скалярное произведение (риманову метрику) на подмногообразии M^*/\mathfrak{e} следующим образом. Фиксируем распределение ν нормальных плоскостей к орбитам $\mathfrak{e}(x)$, и пусть $x', y' \in \tau_{\pi(x)}[M^*/\mathfrak{e}]$. Тогда су-

существуют единственные векторы x, y - преобразы векторов x', y' , принадлежащие \mathfrak{K} , и можно положить $\varphi'(x', y') = \varphi(x, y)$. (Расстояние между точками из M^*/\mathfrak{G} равно длине ортогональной кривой, соединяющей соответствующие орбиты). Определим на m/\mathfrak{G} функцию объема орбиты $f(a)$, положив

$$f(a) = \begin{cases} \text{объем } \pi^{-1}(a), & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ - главная орбита;} \\ m \cdot \text{объем } \pi^{-1}(a), & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ - особая орбита,} \\ & \text{где } m \text{ - число точек в однородном пространстве } n'/n \text{ и } n' \text{ - соответствует точке } x \in \\ & \in \pi^{-1}(a); \\ 0, & \text{если } \pi^{-1}(a) \text{ - сингулярная орбита.} \end{cases}$$

Пусть $x^p \subset M$ - \mathfrak{G} -инвариантное подмногообразие; положим $k = p - v = \dim(x) - v$, где v - размерность главной орбиты. Тогда при проекции $\pi: m \rightarrow m/\mathfrak{G}$ подмногообразие $x \cap M^*$ проектируется в k -мерное подмногообразие в M^*/\mathfrak{G} . Если $\mathfrak{d}s$ - метрика на M^* и $\mathfrak{d}s'$ - метрика на m/\mathfrak{G} , порожденная построенным выше скалярным произведением φ' , то можно определить новую метрику на m/\mathfrak{G} , положив $\mathfrak{d}l_k = \mathfrak{f}^{1/k} \cdot \mathfrak{d}s'$. Эта конструкция, предложенная Сяном и Лоусоном [24], позволяет сводить задачу Плато с инвариантной границей на многообразии m к задаче на пространстве орбит m/\mathfrak{G} .

Предложение I.2.1. (Сян, Лоусон [24])

Пусть $\mathfrak{d}l_k$ - метрика, построенная выше на пространстве орбит m/\mathfrak{G} . Тогда p -мерный объем \mathfrak{G} -инвариантной поверхности x^p в m относительно метрики $\mathfrak{d}s$ равен k -мерному объему факторповерхности x/\mathfrak{G} в факторпространстве M^*/\mathfrak{G} относительно метрики $\mathfrak{d}l_k$, где $k = p - v$ - коразмерность главной орбиты.

Предложение I.2.2. (Лоусон [25])

Пусть x^p - некоторое \mathfrak{G} -инвариантное подмногообразие в m .

Это подмногообразие локально минимально (т.е. его средняя кривизна равна нулю) в m относительно метрики ds в том и только том случае, когда фактормногообразие x/ϵ локально минимально в пространстве орбит m^*/ϵ относительно метрики $d1_k$.

Замечание 1.2.1. Пусть $k = 0$, тогда $v \subset m$ совпадает с какой-то орбитой $\epsilon(x)$. Поэтому критическим точкам функции объема орбиты $f(x)$ отвечают локально минимальные орбиты.

Замечание 1.2.2. Лоусон [25] показал, что в случае компактной связной группы ϵ , действующей в \mathbb{R}^n как подгруппа $so(n)$, метрика ds' , построенная выше, всегда евклидова.

Предложение 1.2.3. (Биндсшаллер [29])

Пусть ϵ - замкнутая подгруппа в группе Ли $so(n)$ изометрий евклидова пространства \mathbb{R}^n , и пусть $A^{k-1} \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ - ϵ -инвариантное подмногообразие. Тогда существует обобщенное решение задачи Плато (в смысле теории потоков) - поверхность x^k с границей A^{k-1} , инвариантная относительно действия группы ϵ . Если группа ϵ действует на \mathbb{R}^n без особых орбит и если ϵ -инвариантное решение единственно, то x^k - единственное решение задачи Плато с границей A^{k-1} . (Случай $k = n - 1$ был рассмотрен Лоусоном [25]).

Таким образом, когда граница A допускает нетривиальную группу симметрий, возможна редукция задачи Плато на пространство орбит.

В качестве примера использования этого аппарата приведем здесь классификацию инвариантных минимальных конусов коразмерности один в евклидовом пространстве. А именно, рассмотрим следующую задачу: пусть $A^{n-2} \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ - гладкое замкнутое ϵ -инвариантное подмногообразие, являющееся главной орбитой действия

компактной группы Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$. Вопрос: является ли конус ca над A минимальной поверхностью в \mathbb{R}^n с границей A ? Отметим, что коразмерность ca в \mathbb{R}^n равна единице.

Большая часть задачи полной классификации таких конусов решена Сяном и Лоусоном ([24], [25]). Окончательный ответ был получен А.Т. Фоменко и А.В. Тыриним [10]. Эти результаты составляют следующие два предложения.

Предложение 1.2.4. (Сян, Лоусон [24])

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ — связная компактная подгруппа, главные орбиты действия которой на \mathbb{R}^n имеют коразмерность два. (Т.е. конусы над этими орбитами имеют коразмерность один.) Тогда \mathfrak{g} является одной из групп, перечисленных в таблице 1. Группа \mathfrak{g} действует на \mathbb{R}^n со стационарной подгруппой n . Соответствующие значения n и вид подгруппы n также приведены в таблице 1.

Таблица 1.

№	\mathfrak{g}	n	n	π	$f^2 = (\text{vol})^2$
1	$\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(k)$	$p+k$	$\mathfrak{so}(p-1) \times \mathfrak{so}(k-1)$	$\pi/2$	$x^{2p-2} \cdot y^{2k-2}$
2	$\mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(k)$	$2k$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{so}(k-2)$	$\pi/4$	$(xy)^{2k-4} \cdot (x^2-y^2)^2$
3	$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(k)$	$4k$	$\tau^4 \times \mathfrak{su}(k-2)$	$\pi/4$	$(xy)^{4k-6} \cdot (x^2-y^2)^4$
4	$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(k)$	$8k$	$(\mathfrak{sp}(1))^2 \times \mathfrak{sp}(k-2)$	$\pi/4$	$(xy)^{8k-10} \cdot (x^2-y^2)^8$
5	$u(5)$	20	$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \times \tau^4$	$\pi/4$	$(xy)^2 \cdot \text{Im}\{(x+iy)^4\}^8$
6	$\mathfrak{so}(3)$	5	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\pi/3$	$\text{Im}\{(x+iy)^3\}^2$
7	$\mathfrak{su}(3)$	8	τ^2	$\pi/3$	$\text{Im}\{(x+iy)^3\}^4$
8	$\mathfrak{sp}(3)$	14	$(\mathfrak{sp}(1))^3$	$\pi/3$	$\text{Im}\{(x+iy)^3\}^8$
9	$\mathfrak{sp}(2)$	10	τ^2	$\pi/4$	$\text{Im}\{(x+iy)^4\}^4$
10	\mathfrak{g}_2	14	τ^2	$\pi/6$	$\text{Im}\{(x+iy)^6\}^4$
11	F_4	26	$\text{Spin}(8)$	$\pi/3$	$\text{Im}\{(x+iy)^3\}^8$
12	$\text{Spin}(10) \times u(1)$	32	$\mathfrak{su}(4) \times \tau^4$	$\pi/3$	$\text{Im}\{(x+iy)^3\}^{20}$

Пространство орбит $\mathbb{R}^N/\mathfrak{g}$ во всех случаях I - I2 представляет собой подмножество двумерной плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ и имеет вид $c(\cdot) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < \operatorname{tg}(y/x) < \cdot, x > 0\}$. Соответствующие значения α приведены в таблице I. Метрика d^2_k , введенная выше, (См. Предложение I.2.2) имеет вид $d^2_k = f^2(x, y) \cdot (dx^2 + dy^2)$. Вид функции f^2 приведен в таблице 1. Локально минимальным поверхностям в \mathbb{R}^N , затачивающим орбиты A , отвечают гесдезические в $c(\cdot) \subset \mathbb{R}^2$ в метрике d^2_k , идущие из точки $q = \pi(A)$ на границу $c(\cdot)$. ($\pi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N/\mathfrak{g}$ - каноническая проекция на пространство орбит.) Исследование полученной двумерной задачи привело к следующему результату.

Предложение I.2.5. (Сян, Лоусон [24]; А.Т.Фоменко, А.В.Тырин [10])

Единственными глобально минимальными поверхностями с границей A , где A - орбиты, представленные в таблице 1, являются конусы над следующими многообразиями $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = A^{N-2} \subset S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$:

- a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(k)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(p-1) \times \mathfrak{so}(k-1)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = S^{p-1} \times S^{k-1}$ в \mathbb{R}^{p+k} для $p+k > 8$, и для $p+k=8$, $p > 2$, $k > 2$;
- b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(k)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{so}(k-2)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{2k} для $k > 8$;
- c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(k)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{T}^1 \times \mathfrak{su}(k-2)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{4k} для $k \geq 4$;
- d) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(k)$, $\mathfrak{h} = (\mathfrak{sp}(1))^2 \times \mathfrak{sp}(k-2)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{8k} для $k \geq 2$;
- e) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(5)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{T}^1$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{20} ;
- f) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(3)$, $\mathfrak{h} = (\mathfrak{sp}(1))^3$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{14} ;
- g) $\mathfrak{g} = F_4$, $\mathfrak{h} = \operatorname{Spin}(8)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{26} ;
- h) $\mathfrak{g} = \operatorname{Spin}(10) \times \mathfrak{u}(1)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(4) \times \mathbb{T}^1$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{32} .

Для всех остальных многообразий из таблицы 1 соответствующие конусы не являются минимальными.

В случае большой коразмерности (два и выше), подобных результатов нет. Однако анализ проведенной выше редукции задачи о минимальности инвариантных конусов к исследованию геодезических на пространстве орбит в метрике dl_x^2 специального вида: $dl_x^2 = f^{2/k} ds'^2$ (см. выше), позволяет сформулировать гипотезу о возможности получить условие минимальности инвариантного конуса любой коразмерности в терминах соответствующей функции объема орбит $f: \mathbb{R}^N/\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Эта гипотеза и реализована в настоящей работе (Теорема I.3.I).

В заключении параграфа опишем конструкцию, позволяющую "поднимать" форму калибровки с пространства орбит $\mathbb{R}^N/\mathfrak{G}$ на \mathbb{R}^N .

Пусть \mathfrak{G} компактная связная группа Ли, действующая на \mathbb{R}^N как подгруппа $so(n)$, f - функция объема орбиты, заданная на $\mathbb{R}^N/\mathfrak{G}$, p - размерность главных орбит. Обозначим Ω_0 единичную p -форму, двойственную касательным плоскостям к орбитам.

Предложение I.2.6. (Харви, Лоусон [13].) Пусть w - замкнутая форма степени $n - p - 1$ на \mathbb{R}^N такая, что $|w|^\sharp < f$. Тогда форма $\Omega = (1/f) \cdot \Omega_0 \wedge w$ является формой калибровки почти всюду в \mathbb{R}^N .

В частности, рассмотрим форму калибровки на пространстве орбит $\mathbb{R}^N/\mathfrak{G}$ относительно метрики dl_x и поднимем ее на \mathbb{R}^N при помощи отображения проекции $\pi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N/\mathfrak{G}$. Полученная форма w (см. [13]) будет удовлетворять условиям предложения 2.2.2. По ней можно построить форму калибровки Ω на всем \mathbb{R}^N . При этом, Ω -подмногообразия это в точности π -прообразы соответствующих w -подмногообразий.

§1.3 Устойчивость инвариантных конусов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Доказательство теорем I.3.1 и I.3.2.

В этом параграфе изучается устойчивость инвариантных конусов произвольной коразмерности в \mathbb{R}^n , причем вершина конуса считается закрепленной, т.е. вершина конуса всегда лежит вне носителя его вариации (так ставил задачу, например, Саймонс [22]). Ответ на вопрос, насколько это ограничение сильное, дает теорема I.3.2.

Пусть \mathfrak{g} - компактная связная группа Ли, действующая в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n как подгруппа связной компоненты единицы группы изометрий евклидова пространства: $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$. Пусть пространство орбит этого действия $\mathbb{R}^n/\mathfrak{g} = \omega \subset \mathbb{R}^n$, причем ω - подмножество в \mathbb{R}^n , ограниченное конечным набором гиперплоскостей, проходящих через начало координат $0 \in \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\tilde{f}: \omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ - функция объема орбит, заданная на пространстве орбит ω . Предположим, что \tilde{f} - однородна по радиусу со степенью однородности m , то есть если $(r, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1})$ - регулярные координаты в $\omega \subset \mathbb{R}^n$, где r - расстояние до точки O , то

$$\tilde{f}(r, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}) = r^m \cdot \tilde{f}(1, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}) \equiv r^m \cdot f(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}).$$

Пусть $a \in \mathfrak{s}^{n-1}(1) \subset \mathbb{R}^n$, a - точка максимума функции f на сфере $\mathfrak{s}^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема I.3.1.

Пусть \tilde{f} - функция объема орбит на пространстве орбит ω , однородная по радиусу со степенью однородности m ; f - ограничение функции объема орбит на стандартную сферу $\mathfrak{s}^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим конус ca , натянутый на орбиту a , отвечающую точке $a \in \mathfrak{s}^{n-1}(1) \cap \omega$, где a - точка максимума функции f на

сфере $s^{n-1}(1)$. Если вторая производная функции объема орбит f в точке a вдоль любого касательного к сфере $s^{n-1}(1)$ направления не превосходит $f(a) \cdot (n+1)^2/4$, то конус ca - устойчивая минимальная поверхность с границей A в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (вершина конуса закреплена).

Замечание I.3.1. В формулировке теоремы предполагается наличие максимума у функции объема орбит f на множестве $s^{n-1}(1) \cap \omega$. Это требование естественно. Во-первых, функция f непрерывна на компакте $s^{n-1}(1) \cap \omega$ неотрицательна внутри него и равна нулю на границе (f - объем орбиты), поэтому f имеет максимум внутри множества $s^{n-1}(1) \cap \omega$. Во-вторых, именно орбитам экстремального объема соответствуют локально минимальные конусы (см. замечание I.2.1), а только их имеет смысл исследовать на устойчивость.

Замечание I.3.2. Возникает естественный вопрос: сколько критических точек может иметь функция объема орбит f на множестве $s^{n-1}(1) \cap \omega$? Нетрудно доказать следующее утверждение, формулировка которого была предложена автору А.В.Болсиновым. Пусть $f(x) = \prod_{k=1}^m \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ - линейные однородные функции на \mathbb{R}^n (функции объема орбит часто имеют такой вид). Рассмотрим эту функцию на множестве $\omega = s^{n-1}(1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_k(x) \geq 0\}$. Тогда у функции f существует на ω единственная точка экстремума, которая является точкой максимума.

Доказательство Теоремы I.3.1.

С помощью метода, описанного в §I.2, сведем задачу исследования устойчивости конуса ca к задаче на пространстве орбит.

В нашем случае пространство орбит известно: это $\omega \subset \mathbb{R}^n$; границе A конуса ca отвечает точка $a \in s^{n-1}(1) \subset \mathbb{R}^n$. Сам конус

са при факторизации по действию группы переходит в отрезок, соединяющий точку a с началом координат $o \in \mathbb{R}^n$. На пространстве орбит рассматривается метрика $d_1^2 = \tilde{f}^2 \cdot ds^2$, где ds^2 - евклидова метрика в \mathbb{R}^n (см. замечание I.2.2).

Поскольку a - точка максимума функции f , отрезок oa является геодезической на пространстве орбит в метрике d_1^2 . (Это следует из предложения I.2.2, но может быть легко проверено и непосредственно.) Из предложений I.2.1 - I.2.3 следует

Лемма I.3.1. Устойчивость конуса sa в \mathbb{R}^n эквивалентна устойчивости отрезка геодезической oa в пространстве орбит ω с метрикой d_1^2 .

Теперь для доказательства устойчивости геодезической oa мы построим на пространстве орбит I-форму, которая будет формой калибровки на пространстве орбит ω в некоторой конусообразной окрестности отрезка $oa \equiv \gamma_0$.

Введем в \mathbb{R}^n координаты $(r, \theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ так, что $a = (1, 0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_{n-2}^0)$, и θ - угловое расстояние от точки a по единичной сфере.

Рассмотрим функцию g на пространстве орбит, имеющую вид

$$g(r, \theta) = f(a) \cdot r^{m+1} \cdot \cos^p(m+1)\theta / (m+1).$$

Рассмотрим дифференциальную I-форму dg :

$$dg = f'(a) \cdot r^m \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot dr - \\ - f(a) \cdot p \cdot r^{m+1} \cdot \cos^{p-1}(m+1)\theta \cdot \sin(m+1)\theta \cdot d\theta$$

(Вид формы dg был предложен автору И.С.Балинской и А.В.Болсиновым.) Нам нужно проверить, является ли форма dg формой калибровки на пространстве орбит $\omega \subset \mathbb{R}^n$ в метрике $d_1^2 = \tilde{f}^2 \cdot ds^2$ в какой-нибудь малой конусообразной окрестности отрезка геодезической $oa \equiv \gamma_0$, а также, является ли γ_0 dg -поверхностью (см. опре-

деления I.1.10 и I.1.11).

Лемма I.3.2. Отрезок $\gamma_0 \equiv \gamma_0$ является d_g -кривой в пространстве орбит w относительно метрики $d_1^2 = \tilde{f}^2 \cdot ds^2$.

Доказательство леммы. Это немедленно следует из определения формы d_g , вида метрики d_1^2 и однородности функции \tilde{f} :

$$\int_{\gamma_0} d_g = \int_{\gamma_0} f(a) \cdot r^M \cdot dr = \int_{\gamma_0} \tilde{f}(r, \varphi) \cdot dr = l(\gamma_0),$$

где $l(\gamma_0)$ - длина отрезка γ_0 .

Лемма I.3.3. Форма d_g - замкнута.

Доказательство леммы. Это очевидно.

Лемма I.3.4. Если вторая производная функции объема орбит f в точке a вдоль любого касательного к сфере $S^{n-1}(1)$ направления L не превосходит $f(a) \cdot (n+1)^2/4$, то есть

$$D_L^2 f(a) < f(a) \cdot (n+1)^2/4,$$

то существует такая конусообразная окрестность отрезка γ_0 , что в ней комасса формы d_g не превосходит единицы.

Доказательство леммы. Нужно проверить, что для любой кривой γ из некоторой конусообразной окрестности γ_0 выполнено следующее неравенство:

$$\int_{\gamma} d_g < l(\gamma). \quad (I.3.4)$$

Приведем соответствующие выкладки. Левая часть неравенства (I.3.4) переписывается в виде:

$$\int_{\gamma} d_g = \int_{\gamma} f(a) \cdot r^M \cdot \cos^p (n+1) \theta (r' - p \cdot r \cdot \operatorname{tg} (n+1) \theta \cdot \theta') dt$$

Длина кривой γ вычисляется следующим образом:

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \cdot ds =$$

$$= \int_{\gamma} f(\theta, \varphi) \cdot r^M \cdot \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + ds_1^2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})}.$$

Поэтому,

$$\int_{\gamma} f(\theta, \varphi) \cdot r^M \cdot \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2} < l(\gamma).$$

Таким образом, для выполнения неравенства (I.3.4) достаточно, чтобы

$$\int_{\gamma} f(\theta, \varphi) \cdot r^M \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2} \cdot dt > \int_{\gamma} dg.$$

Поэтому, достаточно чтобы в каждой точке малой окрестности отрезка γ_0 было выполнено следующее неравенство:

$$f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot (r' - p \cdot r \cdot \operatorname{tg}(m+1)\theta \cdot \theta') <$$

$$< f(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2}.$$

Запишем следующую цепочку неравенств:

$$f(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2} > \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} >$$

$$> r' \cdot a + r \cdot \theta' \cdot b = f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot r' -$$

$$- f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot p \cdot r \cdot \operatorname{tg}(m+1)\theta \cdot \theta'$$

(мы использовали неравенство Коши - Буняковского), поэтому, положим

$$a = f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta;$$

$$b = p \cdot f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot \operatorname{tg}(m+1)\theta$$

получим, что для выполнения условия (I.3.4) достаточно, чтобы

$$f(\theta, \varphi) > \sqrt{a^2 + b^2},$$

то есть,

$$f(\theta, \varphi) \geq f(a) \cdot \cos^p(m+1)\theta \cdot \sqrt{1+p^2 \cdot \operatorname{tg}(m+1)\theta^2}.$$

Теперь, раскладывая обе части последнего неравенства в ряд вдоль любого направления L в окрестности точки a и пользуясь тем, что $Df(a) = 0$, $D^2f(a)$ - отрицательно определенная квадратичная форма (a - точка максимума функции f), и тем, что производные правой части по любому L совпадают с производными по θ получим, что для выполнения последнего неравенства достаточно:

$$D_L^2 f(a) < f(a) \cdot (1-p) \cdot p \cdot (m+1)^2$$

для любого касательного к сфере $S^{n-1}(1)$ направления L , то есть

$$D_L^2 f(a) < f(a) \cdot (m+1)^2/4,$$

так как $1/4$ - наибольшее значение многочлена $(1-p)p$. Лемма доказана.

Теперь, так как доказана устойчивость геодезической γ_0 в пространстве орбит, утверждение теоремы получается из леммы I.3.1. Теорема доказана.

Основываясь теперь на вопросе о том, насколько устойчивость конуса с закрепленной вершиной (как в предыдущей теореме) "слабее" глобальной минимальности. Оказывается, если в условиях теоремы I.3.1 установить устойчивость отрезка геодезической γ_0 в некоторой трубчатой ее окрестности (отпустить вершину конуса), то тем самым будет доказана и глобальная минимальность γ_0 в пространстве орбит, а значит и конуса σ_a . Более точно:

Теорема I.3.2.

Пусть $\theta \in \mathfrak{so}(n)$ действует на \mathbb{R}^n , $w \in \mathbb{R}^n$ - пространство орбит - область, ограниченная гиперплоскостями, проходящими через начало координат. Пусть f - функция объема орбит на w , однород-

ная по радиусу, $a \in s^{n-1}(1) \cap \omega \subset \mathbb{R}^n$ - точка максимума функции f на сфере $s^{n-1}(1) \cap \omega$, и пусть отрезок геодезической $\gamma_0 \equiv \gamma_a$ - устойчив в некоторой трубчатой окрестности γ_0 относительно метрики $d_1^2 = f^2 \cdot ds^2$. Тогда γ_0 - глобально минимальная геодезическая, в классе всех выходящих из точки a на границу области ω . Конус ca , соответствующий γ_0 - глобально минимальная поверхность в \mathbb{R}^n с границей A .

Доказательство Теоремы I.3.2.

Пусть отрезок $\gamma_a \equiv \gamma_0$ не глобально минимален. Это означает, что существует отрезок геодезической γ , идущий из точки a на границу пространства орбит ω такой, что $l(\gamma) < l(\gamma_0)$, где $l(\gamma)$ - длина кривой γ в метрике d_1^2 ,

Рассмотрим гомотетию σ с коэффициентом k , переводящую шар $v(0, R)$, содержащий отрезки геодезических γ_0 и γ в такую ϵ -окрестность γ_0 , в которой у γ_0 уже нет сокращающих деформаций (такая окрестность существует по условию). При этом

$$\sigma: \gamma_0 \rightarrow \gamma_0^k; \quad \sigma: \gamma \rightarrow \gamma^k,$$

где γ_0^k - это отрезок нашей геодезической γ_0 . Длины полученных кривых, как нетрудно показать используя вид метрики d_1^2 и однородность функции f , связаны между собой следующим образом:

$$l(\gamma^k) = k^{M+1} \cdot l(\gamma) < k^{M+1} \cdot l(\gamma_0) = l(\gamma_0^k).$$

Поэтому вариация $(\gamma_0 \setminus \gamma_0^k) \cup \gamma^k$ - уменьшает длину γ_0 в выбранной выше трубчатой ϵ -окрестности γ_0 , что противоречит предположению об устойчивости γ_0 . Полученное противоречие доказывает теорему I.3.2.

Эта теорема показывает, что устойчивость конуса с закрепленной вершиной, в условиях теоремы I.3.1, является, в некотором смысле, естественным ослаблением глобальной минимальности.

§1.4 Примеры использования достаточного условия устойчивости инвариантных конусов (Теорема 1.4.1).

Применять теорему 1.3.1 просто, если удается вычислить явно точку максимума a функции объема орбит f на $s^{n-1}(1) \cap \omega$. В этом случае задача исследования устойчивости инвариантных конусов сводится к вычислению вторых производных.

Начнем со стандартного примера конусов коразмерности два над произведением сфер. Группа $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(k)$ действует на пространстве $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ со стационарной подгруппой $\mathfrak{so}(p-1) \times \mathfrak{so}(k-1)$. Пространство орбит ω и функция объема орбит f в этом случае хорошо известны ([24], [10]): $\omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$; $f = x^{p-1} \cdot y^{k-1}$ (см. таблицу I). Степень однородности m функции f равна $p + k - 2$. Точка максимума a функции f на $s^1(1) \cap \omega$ имеет вид $a = (\sqrt{(p-1)/m}, \sqrt{(k-1)/m})$. Перепишав функцию f в полярных координатах и применив теорему 1.3.1 получим, что конус над орбитой максимального объема устойчив при $p + k \geq 8$, $p \geq 2$, $k \geq 2$. В частности, теорема 1.3.1 дает устойчивость глобально не минимального конуса над орбитой $s^4 \times s^5$, устойчивость которого исследовалась с помощью компьютера Симосом [30] и лишь недавно (в 1988 году) независимо доказана Лоулором [28] аналитически. А.Т. Фоменко и А.В. Тьрин [10] показали, что при всех остальных p и k конус над орбитой максимального объема не устойчив. Таким образом, достаточное условие устойчивости конуса из теоремы 1.3.1 может, в некоторых случаях, оказаться и необходимым.

С помощью теоремы 1.3.1 автором получено несколько новых серий примеров устойчивых конусов коразмерности два в евклидо-

вом пространстве. Соответствующие группы \mathfrak{g} действующие в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N и их стационарные подгруппы \mathfrak{h} приведены в таблице 2.

Таблица 2.

\mathfrak{g}	\mathfrak{g}	\mathfrak{h}	N	α	$\lambda(x, y)$
1	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$k+5$	$\mathbb{H}/3$	$\{(x+iy)^3\}^2$
2	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$	$k+8$	$\mathbb{H}/3$	$\{(x+iy)^3\}^4$
3	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times (\mathfrak{sp}(1))^3$	$k+14$	$\mathbb{H}/3$	$\{(x+iy)^3\}^8$
4	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(2)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$	$k+10$	$\mathbb{H}/4$	$\{(x+iy)^4\}^4$
5	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$	$k+14$	$\mathbb{H}/6$	$\{(x+iy)^6\}^4$
6	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{F}_4$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \text{Spin}(8)$	$k+26$	$\mathbb{H}/3$	$\{(x+iy)^3\}^8$
7	$\mathfrak{so}(k) \times \text{Spin}(10) \times \mathfrak{u}(1)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{su}(4) \times \mathbb{T}^4$	$k+32$	$\mathbb{H}/3$	$\{(x+iy)^3\}^{20}$

Лемма I.4.1. Пространство орбит $\mathbb{R}^N/\mathfrak{g} \cong \omega$, где \mathfrak{g} - одна из групп, приведенных в таблице 2, имеет вид $\omega = \mathbb{R}^1(z \geq 0) \times \mathfrak{c}(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$, где $\mathfrak{c}(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \text{tg}(y/x) \leq \alpha\}$.

Метрика d_1 на пространстве орбит ω (см. выше) имеет вид:

$$d_1^2 = z^{2k-2} \cdot \text{Im}(\lambda(x, y)) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Вид функции $\lambda(x, y)$ и значения α приведены в таблице 2.

Коразмерность соответствующих орбит $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^N во всех случаях равна трем.

Доказательство леммы. Все рассматриваемые группы \mathfrak{g} имеют вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{g}'$, где \mathfrak{g}' - одна из групп из таблицы I, действия которых описаны в предложении I.2.4. Теперь все утверждения леммы следуют из предложения I.2.4 и того факта, что $\mathbb{R}^k/\mathfrak{so}(k) = \mathbb{R}^1(z \geq 0)$. Лемма доказана.

Найдем локально минимальные конусы. Это конусы над орбитами максимального объема в сфере $S^{N-1}(1)$. На пространстве орбит

ω им отвечают точки максимума функции объема орбит на сфере $S^2(1)$. Найдем их. Введем, для удобства, следующие обозначения:

$\lambda(x, y) \equiv ((x + iy)^p)^m$; (r, θ, φ) - сферические координаты в R^3 .

Тогда функция f имеет вид:

$$f \equiv z^{k-1} \cdot \text{Im}(\lambda(x, y)) = \\ = r^{k-1+pm} \cdot \cos^{k-1}(\theta) \cdot \sin^{pm}(\theta) \cdot \sin^m(p\varphi).$$

Лемма 1.4.2. Локально минимальным конусам в R^N отвечают следующие прямые-геодезические γ_0 на пространстве орбит ω :

$$\text{tg}^2(\theta_0) = (p \cdot m) / (k-1), \quad \varphi_0 = \pi / (2p).$$

Доказательство леммы. Локально минимальным конусам в R^N отвечают прямые-геодезические в пространстве орбит ω . Это те и только те прямые, которые идут из начала координат o в точки максимума функции объема орбит f на единичной сфере S^2 в ω . Легко сосчитать, что максимум достигается в единственной точке (θ_0, φ_0) . Лемма доказана.

Теперь применим теорему 1.3.1. Для этого нам нужно сосчитать вторую производную функции f в точке a вдоль любого направления, касательного к сфере S^2 . Все такие производные имеют вид $(\alpha \cdot a / \alpha \theta + \beta \cdot a / \alpha \varphi)^2 |_a (f)$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Чтобы исследовать устойчивость конусов, нужно проверить выполнение условия теоремы 1.3.1, которое в нашем случае имеет вид $(\alpha \cdot a / \alpha \theta + \beta \cdot a / \alpha \varphi)^2 |_a (f) < f(a) \cdot (m+1)^2 / 4$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $m = k-1+pm$ - степень однородности функции объема орбит f .

Очевидно, для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы $\alpha^2 f / \alpha \theta^2 |_a < f(a) \cdot (m+1)^2 / 4$, и $\beta^2 f / \alpha \varphi^2 |_a < f(a) \cdot (m+1)^2 / 4$, так как функция $f(\theta, \varphi)$ имеет вид $f(\theta, \varphi) = f_1(\theta) \cdot f_2(\varphi)$.

Последние два условия дают следующие ограничения на k :

$$2k + 2pm - 1 < (k + pm)^2 / 4, \quad (1.4.1)$$

$$p^2 m < (k + pm)^2 / 4. \quad (I.4.2)$$

При всех k , удовлетворяющих условиям (I.4.1), (I.4.2) соответствующие конусы будут устойчивыми минимальными поверхностями в \mathbb{R}^N . Более точно, доказана следующая теорема:

Теорема I.4.1.

Конусы с размерности два в \mathbb{R}^N над следующими поверхностями $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} = \mathfrak{A}^{n-3} \subset \mathfrak{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, где \mathfrak{G} и \mathfrak{H} приведены в таблице 2, являются устойчивыми минимальными поверхностями в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N :

а) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$
в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^5$ при $k > 3$;

б) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^4$
при $k > 2$;

в) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(3)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times (\mathfrak{sp}(1))^3$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$
в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{12}$ при $k > 2$;

г) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{10}$
при $k > 3$;

д) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{14}$
при $k > 4$;

е) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times F_4$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \text{Spin}(8)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$
в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{26}$ при $k > 2$;

ж) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(k) \times \text{Spin}(10) \times \mathfrak{u}(1)$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{su}(4) \times \mathbb{T}^1$,
 $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{32}$ при $k > 2$.

Доказательство Теоремы I.4.1.

Утверждение теоремы является простым следствием достаточного условия устойчивости инвариантных конусов, полученного выше, (теорема I.3.1), лемм I.4.1 и I.4.2, и неравенств (I.4.1) и (I.4.2).

Замечание 1.4.1. Автором исследовался также случай конусов CA над прямым произведением сфер, т. е. группа $G = so(k_1) \times \dots \times so(k_n)$ действует на \mathbb{R}^N , $N = \sum k_i$, $n > 2$ со стационарной подгруппой $H = so(k_1 - 1) \times \dots \times so(k_n - 1)$. В этом случае тоже легко сосчитать точку максимума a функции объема орбит f на пространстве орбит w : $a = (\sqrt{(k_1 - 1)/m}, \dots, \sqrt{(k_n - 1)/m})$, где m - степень однородности функции f , $m = \sum k_i - n = N - n$. Из теоремы 1.3.1 получается устойчивость соответствующих конусов в \mathbb{R}^N при $k_i > 1$ для всех i и $N - n \geq 6$. Однако, при подготовке настоящей работы, автору стало известно, что недавно, (в 1988 году) Лоулор [28] независимо получил более сильный результат, доказав глобальную минимальность таких конусов при $k_i > 2$. В этой же работе Лоулор показал, что при $N - n < 6$ такие конусы не устойчивы.

Замечание 1.4.2. Автором доказана глобальная минимальность конусов CA из теоремы 1.4.1 для достаточно больших k (см. ниже, теорема 2.1.1).

Замечание 1.4.3. В случае когда точка экстремума a функции объема орбиты f неизвестна, применять теорему 1.3.1 существенно сложнее. Нужно пытаться провести какие-либо оценки второй производной функции f в окрестности точки экстремума. Во время подготовки настоящей работы, автором прочитан один такой пример. Группа $G = so(3) \times so(k)$ действует в \mathbb{R}^N , $N = 3k$ (представление $\rho_3 \otimes \rho_k$, где ρ_k - стандартное представление группы $so(k)$ в \mathbb{R}^k). В этом случае пространство орбит трехмерно и имеет вид $w = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq x_3, x_1 \geq x_2, x_2 \geq x_3\}$. Функция объема орбит f на w имеет вид:

$$f = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{k-2} \cdot (x_1^2 - x_2^2) \cdot (x_1^2 - x_3^2) \cdot (x_2^2 - x_3^2).$$

Оказывается, чтобы найти максимум функции f на сфере $S^2(1)$, нужно решать уравнение восьмой степени с коэффициентами, зависящими от параметра k . Однако, после довольно громоздких оценок, удастся получить следующий результат: существует такое k_0 , что для всех $k > k_0$ конус σ над орбитой $\alpha = \sigma/n$ максимального объема (такая орбита существует, см. замечание I.3.3) устойчив.

Глава 2. Глобальная минимальность нескольких серий инвариантных конусов коразмерности два в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N .

В настоящей главе с помощью дополнительных исследований доказывается глобальная минимальность некоторых устойчивых конусов из теоремы I.4.I. Для этого строится форма калибровки на всем пространстве орбит, в отличие от методов доказательства теоремы I.3.I.

§2.1 Примеры глобально минимальных конусов коразмерности два в \mathbb{R}^N .

Автором доказана глобальная минимальность следующих инвариантных конусов коразмерности два в \mathbb{R}^N .

Теорема 2.1.1.

Конусы с коразмерности два в \mathbb{R}^N над следующими поверхностями $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^{N-3} \subset \mathfrak{s}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ являются глобально минимальными поверхностями в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N :

- а) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(k)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{so}(k-1)$,
 $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в \mathbb{R}^{3k} при $k > 6$;
- б) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$
в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^5$ при $k > 52$;
- в) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^8$
при $k > 39$;
- г) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(3)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times (\mathfrak{sp}(1))^3$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$
в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{14}$ при $k > 74$;
- д) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{10}$
при $k > 51$;
- е) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathbb{T}^2$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{14}$
при $k > 75$;
- ж) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \mathbb{F}_4$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{Spin}(8)$, $A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$

в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{26}$ при $k > 74$;

н) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k) \times \text{Spin}(10) \times \mathfrak{u}(1)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{su}(4) \times \mathfrak{t}^1$,

$A = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{32}$ при $k > 136$.

Эти конусы \mathcal{C}_A являются единственными глобально минимальными поверхностями с границей A в \mathbb{R}^N .

Замечание 2.1.1. Ограничения на k в формулировке теоремы, по-видимому, не оптимальны (их можно уменьшить), но это упирается в серьезные вычислительные трудности. Это же препятствие стоит на пути получения полной классификации симметричных минимальных конусов коразмерности два в \mathbb{R}^N с помощью наших методов.

Доказательство Теоремы 2.1.1.

Проведем, как и в теореме 1.3.1 редукцию задачи на пространство орбит.

Таблица 3.

$\frac{N}{n}$	\mathfrak{g}	\mathfrak{h}	N	α	$\lambda(x, y)$
1	$(\mathfrak{so}(k))^3$	$(\mathfrak{so}(k-1))^3$	$3k$	$\pi/2$	$i(xy)^{2k-2}$
2	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_2$	$k+5$	$\pi/3$	$\{(x+iy)^3\}^2$
3	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{t}^2$	$k+8$	$\pi/3$	$\{(x+iy)^3\}^4$
4	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(3)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times (\mathfrak{sp}(1))^3$	$k+14$	$\pi/3$	$\{(x+iy)^3\}^6$
5	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{sp}(2)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{t}^2$	$k+10$	$\pi/4$	$\{(x+iy)^4\}^4$
6	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{t}^2$	$k+14$	$\pi/6$	$\{(x+iy)^6\}^4$
7	$\mathfrak{so}(k) \times \mathfrak{F}_4$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \text{Spin}(8)$	$k+26$	$\pi/3$	$\{(x+iy)^3\}^8$
8	$\mathfrak{so}(k) \times \text{Spin}(10) \times \mathfrak{u}(1)$	$\mathfrak{so}(k-1) \times \mathfrak{su}(4) \times \mathfrak{t}^1$	$k+32$	$\pi/3$	$\{(x+iy)^3\}^{20}$

Лемма 2.1.1. Пространство орбит $\mathbb{R}^N/\mathfrak{g} \cong \omega$, где \mathfrak{g} — одна из групп, фигурирующих в теореме 2.1.1, имеет вид $\omega = \mathbb{R}^1(z \geq 0) \times \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, где $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \text{tg}(y/x) < \infty\}$.

Метрика d_1 на пространстве орбит ω (см. выше) имеет вид:

$$d_1^2 = z^{2k-2} \cdot \text{Im}(\lambda(x, y)) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Вид функции $\lambda(x, y)$ и значения μ приведены в таблице 3.

Коразмерность соответствующих орбит ω/n в \mathbb{R}^N во всех случаях равна трем.

Доказательство леммы. Эта лемма представляет собой объединение леммы I.4.I и замечания I.4.I.

На глобальную минимальность имеет смысл исследовать только локально минимальные конусы. Найдем их. Это конусы над орбитами максимального объема в сфере $S^{N-1}(1)$. На пространстве орбит ω им отвечают точки максимума функции объема орбит на сфере $S^2(1)$. Введем, для удобства, следующие обозначения: $(xyz)^{2k-2} \equiv (xyz)^k$, $z^{2k-2} \operatorname{Im}(\lambda(x, y)) \equiv z^k \operatorname{Im}((x+iy)^P)^k$, (r, θ, φ) - сферические координаты в пространстве орбит $\omega \subset \mathbb{R}^3$.

Лемма 2.I.2. Локально минимальным конусам в \mathbb{R}^N отвечают следующие прямые-геодезические γ_0 на пространстве орбит ω : в случае а) теоремы 2.I.I $\operatorname{tg}^2(\theta_0) = 2$, $\varphi_0 = \pi/4$; в случаях б) - г): $\operatorname{tg}^2(\theta_0) = (p \cdot m)/k$, $\varphi_0 = \pi/(2p)$.

Доказательство леммы. Эта лемма представляет собой объединение леммы I.4.2 и замечания I.4.I.

Таким образом, задача исследования глобальной минимальности конусов сводится, в силу предложений I.2.I - I.2.3, к задаче исследования на минимальность прямой-геодезической γ_0 на пространстве орбит в классе кривых, идущих из точки a экстремума функции объема орбиты на единичной сфере на границу ω . Доказательство этой минимальности будет проведено с помощью форм калибровки, построение которых описывается ниже.

Рассмотрим дифференциальную I-форму на пространстве орбит имеющую вид $k \cdot dF$, где k - некоторая константа, а $F = F(r, \theta, \varphi)$ - функция на пространстве орбит. Вопрос: когда такая I-форма яв-

дается подходящей формой калибровки?

Обозначим, для удобства прямые-геодезические, описанные в лемме 2.1.2, γ_j , $j = \bar{1}, \dots, 8$, где j это номер рассматриваемого случая.

Лемма 2.1.3. 1) Если функция F удовлетворяет следующим двум условиям

$$a) F_r'^2 = r^{3k} \text{ на всем отрезке } \gamma_0;$$

$$b) F_r'^2 + F_\theta'^2 \cdot r^{-2} + F_\varphi'^2 \cdot (r \cdot \sin\theta)^{-2} \leq r^{3k} \cdot k_1(\theta, \varphi) / k_1(\theta_0, \varphi_0),$$

где $k_1(\theta, \varphi) = \sin^{2k}(\theta) \cdot \cos^k(\theta) \cdot \sin^k(\varphi) \cdot \cos^k(\varphi)$, $\operatorname{tg}^2(\theta_0) = 2$, $\varphi_0 = \pi/4$, то I-форма $k_1^{1/2}(\theta_0, \varphi_0) \cdot dF$ - форма калибровки на пространстве орбит ω с калибровочным многообразием γ_1 .

2) Если функция F удовлетворяет условиям

$$c) F_r'^2 = r^{pm+k} \text{ на всем отрезке } \gamma_j, \quad j = \bar{2}, \dots, 8;$$

$$d) F_r'^2 + F_\theta'^2 \cdot r^{-2} + F_\varphi'^2 \cdot (r \cdot \sin\theta)^{-2} \leq r^{pm+k} \cdot \sin^m(\mu\varphi) \cdot k_2(\theta) / k_2(\theta_0),$$

где $k_2(\theta) = \cos^k(\theta) \cdot \sin^{pm}(\theta)$, $\operatorname{tg}^2(\theta_0) = pm/k$, то I-форма $k_2^{1/2}(\theta_0) \cdot dF$ - форма калибровки на пространстве орбит ω с калибровочным многообразием γ_j .

Доказательство леммы. Случай I. Замкнутость формы $k \cdot dF$ очевидна. Покажем, что в условиях леммы ее комасса не превосходит единицы. Для этого достаточно проверить, что длина $l(\gamma)$ любой кривой γ , идущей из точки a на границу пространства орбит ω не меньше интеграла от нашей формы по этой кривой. Длина γ имеет вид:

$$l(\gamma) = \int_{[0, 1]} r^{3k/2} \cdot k_1^{1/2}(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \varphi'^2} \cdot dt.$$

Интеграл от формы dF имеет вид:

$$\int_{\gamma} dF = \int_{\gamma} (F'_r \cdot r' + F'_\theta \cdot \theta' + F'_\varphi \cdot \varphi') dt.$$

Сравним подынтегральные выражения. Используя свойство б) и неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\begin{aligned} & r^{3k/2} \cdot k_1^{1/2}(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \varphi'^2} \geq b) \geq \\ & \geq k_1^{1/2}(\theta_0, \varphi_0) \cdot \sqrt{F_r'^2 + F_\theta'^2 \cdot r^{-2} + F_\varphi'^2 \cdot (r \sin \theta)^{-2}} \cdot \\ & \quad \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \varphi'^2} \geq (К. - Б.) \geq \\ & \geq k_1^{1/2}(\theta_0, \varphi_0) \cdot (F'_r \cdot r' + F'_\theta \cdot \theta' + F'_\varphi \cdot \varphi'). \end{aligned}$$

Таким образом, из условия б) следует, что масса нашей формы не превосходит единицы. Воспользуемся теперь условием а), чтобы показать, что γ_1 - калибровочное многообразие для нашей I-формы. Интеграл от формы dF вдоль отрезка γ_1 принимает вид

$$\int_{\gamma_1} dF = \int_{\gamma_1} (F'_r \cdot r') dt.$$

Длина γ_1 вычисляется так:

$$l(\gamma_1) = \int_{[0, 1]} r^{3k/2} \cdot k_1^{1/2}(\theta_0, \varphi_0) \cdot r' \cdot dt.$$

Поэтому, из условия а) следует, что

$$k_1^{1/2}(\theta_0, \varphi_0) \cdot \int_{\gamma_1} dF = l(\gamma_1),$$

что и требовалось. Первая часть леммы доказана.

Случай ж), $j = 2, \dots, 8$ доказывается точно так же. Приведем здесь лишь необходимые выкладки.

Длина кривой γ , идущей из точки a на границу пространства орбит w , имеет вид:

$$l(\gamma) = \int_{[0, 1]} r^{k/2 + pm/2} \cdot \sin^{m/2}(\rho\vartheta) \cdot k_2^{1/2}(\theta) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \vartheta'^2} \cdot dt.$$

Используя свойство d) и неравенство Коши - Буняковского получаем

$$\begin{aligned} & r^{k/2 + pm/2} \cdot \sin^{m/2}(\rho\vartheta) \cdot k_2^{1/2}(\theta) \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \vartheta'^2} > \\ & > d) > k_2^{1/2}(\theta_0) \cdot \sqrt{F_r'^2 + F_\theta'^2 \cdot r^{-2} + F_\vartheta'^2 \cdot (r \cdot \sin \theta)^{-2}} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \vartheta'^2} > (К. - Б.) > \\ & > k_2^{1/2}(\theta_0) \cdot (F_r' \cdot r' + F_\theta' \cdot \theta' + F_\vartheta' \cdot \vartheta'). \end{aligned}$$

то есть, из условия d) следует, что комасса нашей формы не превосходит единицы.

Интеграл от формы dF вдоль отрезка γ_i принимает вид

$$\int_{\gamma_i} dF = \int_{\gamma_i} (F_r' \cdot r') dt.$$

Длина γ_i вычисляется так:

$$l(\gamma_i) = \int_{[0, 1]} k_2^{1/2}(\theta_0) \cdot r^{k/2 + pm/2} \cdot r' \cdot dt.$$

Поэтому, из условия c) следует, что

$$k_2^{1/2}(\theta_0) \cdot \int_{\gamma_i} dF = l(\gamma_i),$$

что и требовалось. Лемма полностью доказана.

Теперь для доказательства теоремы 2.1.1 достаточно построить на пространстве орбит функцию F , обладающую свойствами, описанными в лемме 2.1.3. Из существования такой функции будет следовать глобальная минимальность отрезков геодезических γ_i и,

в силу предложений I.2.1 - I.2.3, соответствующих конусов CA . Единственность глобально минимальных поверхностей с границей A следует из предложения I.2.3. Построение функций F , с описанными выше свойствами проводится в следующих двух параграфах.

§2.2 Построение формы калибровки в случае I.

Итак, нам нужно построить функцию $F(r, \theta, \varphi)$ на пространстве орбит w , которая удовлетворяла бы условиям а) и б) леммы 2.1.3. Будем искать F в виде $F = a^{-1} \cdot r^a \cdot \varphi^b(\theta, \varphi)$, где функция $\varphi(\theta, \varphi) = k_1(\theta, \varphi)/k_1(\theta_0, \varphi_0)$, (функция $k_1(\theta, \varphi)$ определена в лемме 2.1.3, $k_1(\theta, \varphi) = \sin^{2k}(\theta) \cdot \cos^k(\theta) \cdot \sin^k(\varphi) \cdot \cos^k(\varphi)$).

Нетрудно сосчитать, что $\varphi'_r = 0$.

$$\varphi'_\theta = \varphi(\theta, \varphi) \cdot (2 \operatorname{ctg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta)) \cdot k,$$

$$\varphi'_\varphi = \varphi(\theta, \varphi) \cdot (\operatorname{ctg}(\varphi) - \operatorname{tg}(\varphi)) \cdot k.$$

Поэтому, $F'_r = r^{a-1} \cdot \varphi^b(\theta, \varphi)$. Поскольку, очевидно, $\varphi(\theta_0, \varphi_0) = 1$, условие а) леммы 2.1.3 равносильно $a = 1 + 3k/2$. Условие б) имеет следующий вид:

$$\varphi(\theta, \varphi) \equiv 1 - \varphi^{2b-1}(\theta, \varphi) \cdot (1 + (b/a)^2 \cdot k^2 \cdot (2 \cdot \operatorname{ctg}\theta - \operatorname{tg}\theta)^2 + (b/a)^2 \cdot k^2 \cdot (\sin\theta)^{-2} \cdot (\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)^2) \geq 0.$$

Очевидно: $\varphi(\theta_0, \varphi_0) = 0$. Обозначим $\Pi \equiv (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$.

Легко видеть, что $\varphi(\theta, \varphi)$ стремится к 1 при стремлении (θ, φ) к границе квадрата Π , если выбрать $b > 1/2 + 1/k$.

Если мы теперь докажем, что $\varphi(\theta, \varphi) = 0$ только в точке (θ_0, φ_0) на Π , то это будет означать, что (θ_0, φ_0) - единственный экстремум (минимум) функции φ на квадрате Π . Из этого будет следовать, что $\inf\{\varphi(\theta, \varphi) : (\theta, \varphi) \in \Pi\} = \varphi(\theta_0, \varphi_0) = 0$, что и требуется. Поэтому, нужно выбрать b так, чтобы $\varphi(\theta, \varphi) = 0$ только в точке (θ_0, φ_0) на Π и, кроме того, $b > 1/2 + 1/k$.

Приведем здесь вычисления, показывающие при каких условиях на k возможен такой выбор b .

Изучим сначала функцию φ'_φ . Легко видеть, что φ'_φ обращается в ноль на $\Pi' \equiv \Pi \setminus \{(\theta, \varphi_0) : \theta \in (0, \pi/2)\}$ тогда и только тогда, когда

$$2k \cdot \cos^2 \theta - (2b - 1) \cdot k^2 \cdot (\cos^2 \theta \cdot (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot (2 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta)) - (2b - 1) \cdot ((a/b)^2 - 6k^2) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi = 0, \quad (\theta, \varphi) \in \Pi'.$$

При этом, $w'_\varphi(\theta, \varphi_0) = 0$ при всех $\theta \in (0, \pi/2)$.

Заметим, что если

$$(a/b)^2 - 6k^2 > 0, \quad (2.2.1)$$

то, в силу выбора b , последнее слагаемое отрицательно.

Обозначим то, что осталось $\epsilon(\theta, \varphi)$:

$$\epsilon(\theta, \varphi) = 2k \cdot \cos^2 \theta - (2b - 1) \cdot k^2 \cdot (\cos^2 \theta \cdot (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot (2 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta))$$

Функция $\epsilon(\theta, \varphi)$ на границе квадрата Π не положительна. Подберем b так, чтобы вместе с условием (2.2.1) было выполнено

$$\epsilon(\theta, \varphi) < 0, \quad (\theta, \varphi) \in \Pi \quad (2.2.2)$$

Условия (2.2.1) и (2.2.2) гарантируют нам отрицательность $w'_\varphi(\theta, \varphi)$ всюду в Π' .

Так как на границе Π функция $\epsilon(\theta, \varphi)$ не положительна, для выполнения (2.2.2) достаточно, чтобы $\epsilon(\theta, \varphi)$ была отрицательна во всех своих экстремумах в Π .

Вычислим нули полного дифференциала $d\epsilon(\theta, \varphi)$:

$$\epsilon'_\varphi(\theta, \varphi) = (2b - 1) \cdot k^2 \cdot \sin(2\varphi) \cdot \cos(2\varphi) \cdot (2 \cdot \cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 2 \cdot \cos^2 \theta),$$

Корни уравнения $\epsilon'_\varphi(\theta, \varphi) = 0$ изображены на рис. 1 ($\cos^2 \theta_1 = 1/3$)

Поскольку мы ищем совместные нули производных ϵ'_θ и ϵ'_φ , уравнение $\epsilon'_\theta(\theta, \varphi) = 0$ можно решать только на множестве корней уравнения $\epsilon'_\varphi(\theta, \varphi) = 0$, т.е. на множестве, изображенном на рис. 1. Это уравнение легко переписать в виде:

$$-k \cdot \sin(2\theta) \cdot (2 + (2b - 1) \cdot k \cdot (2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot (\sin^2 \theta - 2 \cdot \cos^2 \theta) - \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi)) = 0,$$

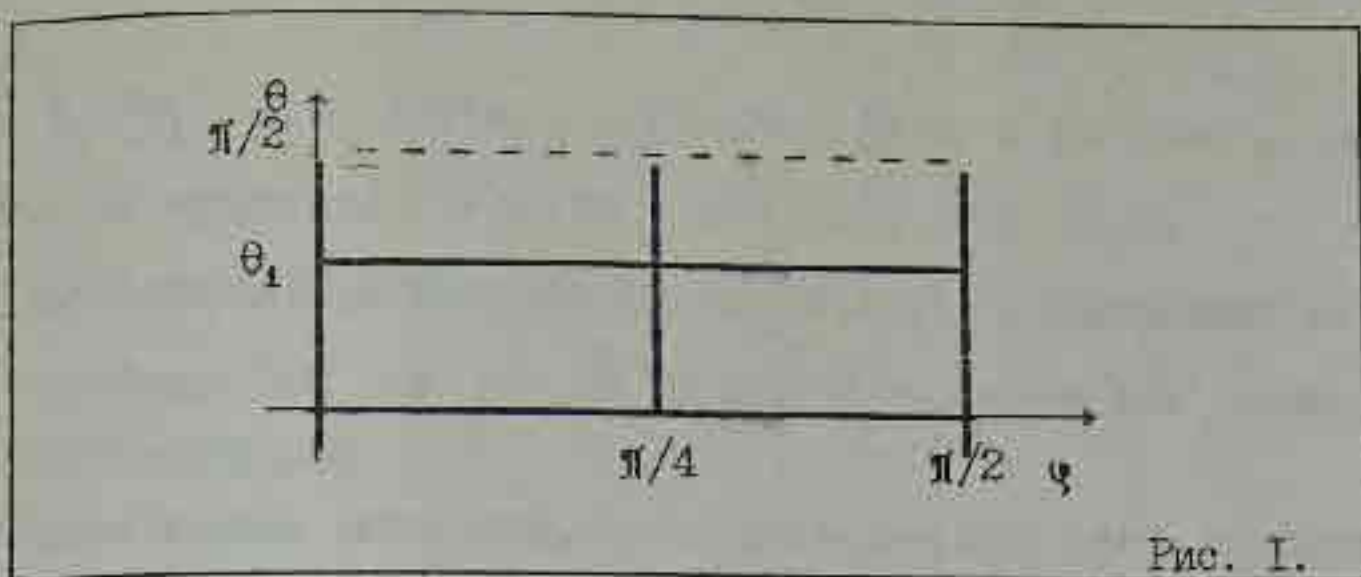


Рис. 1.

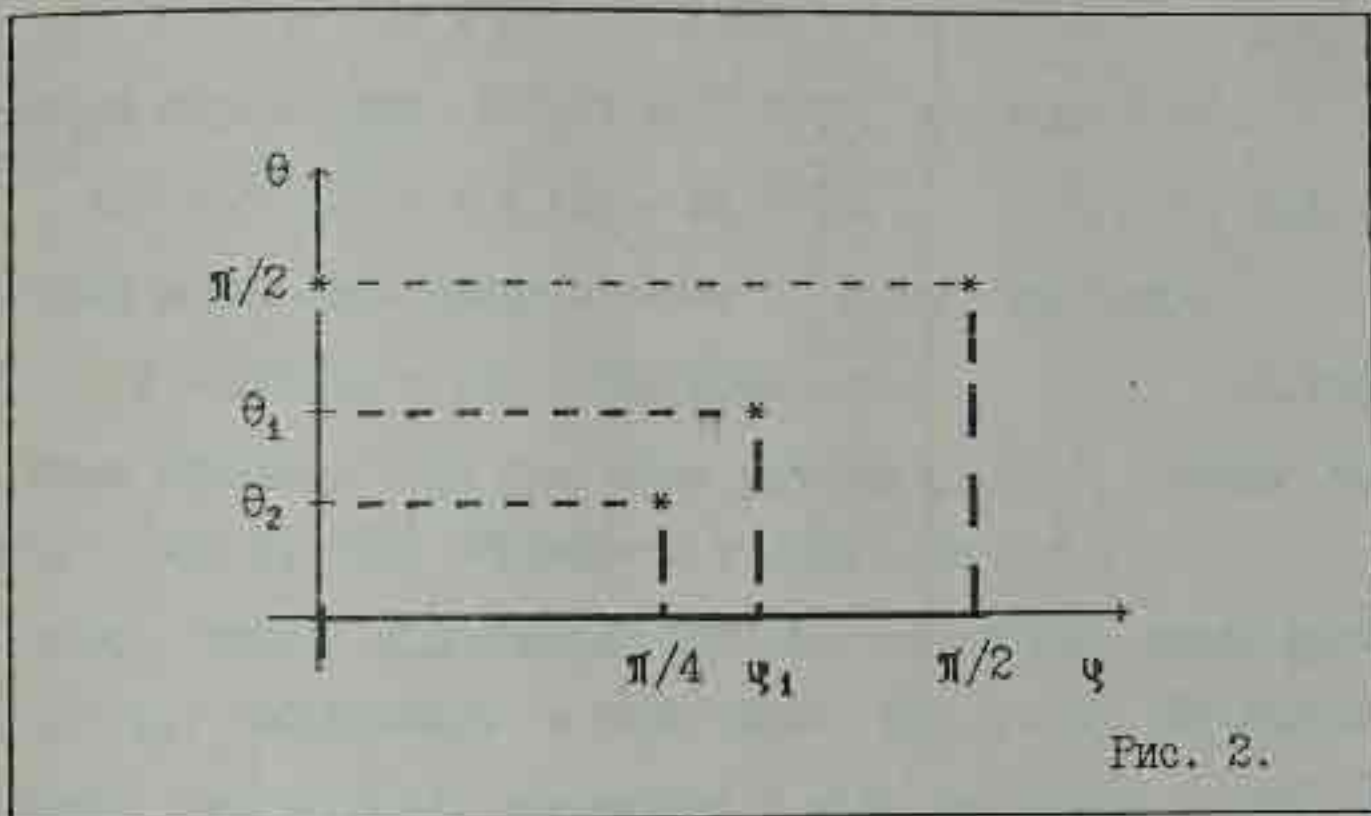


Рис. 2.

Совместные нули функций $\epsilon'_\theta(\theta, \varphi)$ и $\epsilon'_\varphi(\theta, \varphi)$ изображены на рис. 2.

Здесь $\cos^2 \theta_1 = 1/3$; $\cos^2 \theta_2 = 4/(3 \cdot (2b - 1) \cdot k)$; а значение φ_1 находится из уравнения $2 = k \cdot (2b - 1) \cdot (\cos^4 \varphi_1 + \sin^4 \varphi_1)$.

Вычислим теперь значения функции $\epsilon(\theta, \varphi)$ во внутренних точках, изображенных на рис. 2, и потребуем, чтобы эти значения были отрицательными.

Единственное нетривиальное ограничение на b дает требование $\epsilon(\theta_2, \pi/4) < 0$. Для его выполнения необходимо, чтобы

$$k^2 \cdot (2b - 1)^2 > 16/3. \quad (2.2.3)$$

Комбинируя ограничения (2.2.1) и (2.2.3), получаем

$$1/2 + 2/(\sqrt{3}) < b < (3k + 2)/(2\sqrt{6}k). \quad (2.2.4)$$

Чтобы можно было выбрать такое b , достаточно чтобы

$$1/2 + 2/(\sqrt{3}) < (3k + 2)/(2\sqrt{6}k). \quad (2.2.5)$$

Таким образом, если выполнено условие (2.2.5), можно так выбрать b , что $\epsilon'_\varphi(\theta, \varphi)$ обращается в ноль лишь при $\varphi = \varphi_0$.

Теперь, считая выполненным (2.2.4), потребуем, чтобы функция $\epsilon'_\theta(\theta, \varphi_0)$ обращалась в ноль только при $\theta = \theta_0$. Вычисления показывают, что $\epsilon'_\theta(\theta, \varphi_0)$ обращается в ноль вне $\theta = \theta_0$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \cos^4 \theta \cdot (2b - 1) \cdot \left\{ (a/b)^2 - 9k^2 \right\} + \cos^2 \theta \cdot (2k - \\ & - (2b - 1) \cdot \left\{ (a/b)^2 - 6k^2 \right\}) + 2k - (2b - 1) \cdot k^2 = 0. \end{aligned}$$

Это - биквадратное уравнение на $\cos^2 \theta$. Нам нужно, чтобы оно не имело корней в отрезке $[0, 1]$ (только таким корням отвечают некоторые значения θ).

При допустимых значениях b ветви этой параболы направлены вниз. При $\cos^2 \theta = 0$ и 1 значения этого квадратного трехчлена отрицательны. Поэтому, для того, чтобы на отрезке $[0, 1]$ не было

корней, достаточно потребовать, чтобы точка максимума нашей параболы лежала слева от нуля. Оказывается, для этого достаточно выбрать b так, чтобы

$$b < (3k/2 + 1)/(k \cdot \sqrt{(\sqrt{3}/2 + 6)}). \quad (2.2.6)$$

Собрав вместе условия (2.2.4), (2.2.6) и требуя, чтобы множество допустимых b было не пусто получим ограничение на k :

$$1/2 + 2/(\sqrt{3}k) < (3k/2 + 1)/(k \cdot \sqrt{(\sqrt{3}/2 + 6)}).$$

Последнее неравенство выполнено при $k > 10.67\dots$. При таких значениях k можно выбрать значение параметра b так, чтобы наша функция $F(\theta, \varphi)$ удовлетворяла условиям леммы 2.1.3. Таким образом, при таких k (нужно вернуться к исходным обозначениям) мы получаем форму калибровки на пространстве орбит \mathcal{M} , следовательно, глобальную минимальность соответствующих конусов \mathcal{C}_A из теоремы 2.1.1.

§2.3 Построение форм калибровки в случаях 2 - 8.

В этих случаях функция F строится совершенно аналогично. Приведем соответствующие выкладки.

Итак, нам нужно построить функцию $F(r, \theta, \varphi)$ на пространстве орбит w , которая удовлетворяла бы условиям с) и d) леммы 2.1.3. Будем искать F в виде $F = a^{-1} \cdot r^a \cdot \varphi^b(\theta) \cdot \sin^c(p\varphi)$, где функция $\varphi(\theta) = k_2(\theta)/k_2(\theta_0)$, (функция $k_2(\theta)$ определена в лемме 2.1.3, $k_2(\theta) = \cos^k(\theta) \cdot \sin^{pm}(\theta)$).

Условие с) леммы 2.1.3 равносильно равенству $a = (k+pm)/2 + 1$, так как

$$\varphi(\theta_0) = 1; F'_r = r^{a-1} \cdot \varphi^b(\theta) \cdot \sin^c(p\varphi).$$

Легко сосчитать, что

$$\varphi'_\theta(\theta) = \varphi(\theta) \cdot (pm \cdot \operatorname{ctg}\theta - k \cdot \operatorname{tg}\theta).$$

Поэтому условие d) леммы 2.1.3 имеет вид:

$$\psi(\theta, \varphi) \equiv 1 - \varphi^{2b-1}(\theta) \cdot \sin^{2c-p}(\varphi) \cdot [1 + (b/a)^2 \cdot (pm \cdot \operatorname{ctg}\theta - k \cdot \operatorname{tg}\theta)^2 + p^2 \cdot (c/a)^2 \cdot (\operatorname{ctg}^2(\varphi)/\sin^2\theta)] > 0,$$

где $\theta \in (0, \pi/2)$; $\varphi \in (0, \pi/p)$.

Очевидно, $\psi(\theta_0, \varphi_0) = 0$. Обозначим $P \equiv (0, \pi/2) \times (0, \pi/p)$.

Легко видеть, что $\psi(\theta, \varphi)$ стремится к единице при стремлении точки (θ, φ) к границе P , если выбрать b и c так, чтобы

$$b > 1/2 + \max(1/k, 1/(pm)),$$

$$c > 1 + \pi/2. \tag{2.3.1}$$

Если мы теперь докажем, что $d\psi(\theta, \varphi) = 0$ только в точке (θ_0, φ_0) на P , то это будет означать, что (θ_0, φ_0) - единственный в прямоугольнике P экстремум (минимум) для функции ψ . Из этого будет следовать, что $\inf\{\psi(\theta, \varphi) : (\theta, \varphi) \in P\} = \psi(\theta_0, \varphi_0) \equiv 0$. Поэтому необходимо выбрать b и c так (учитывая условия (2.3.1)), чтобы $d\psi(\theta, \varphi) = 0$ только в (θ_0, φ_0) на P .

Приведем ниже схему вычислений, показывающих, при каких ограничениях на k можно так выбрать b и c .

Изучим, сначала, $w'_q(\theta, \varphi)$. Оказывается, что $w'_q(\theta, \varphi)$ обращается в ноль в $P \setminus \{(\theta, \varphi_0) : \theta \in (0, \pi/2)\}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \cos^2 \theta \cdot (c/a)^2 \cdot p^2 \cdot (2 - (2c - m)) = \\ & = (2c - m) \cdot \sin^2(p\varphi) \cdot [\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + (b/a)^2 \cdot (pm \cdot \cos^2 \theta - \\ & - k \cdot \sin^2 \theta)^2 - p^2 \cdot (c/a)^2 \cdot \cos^2 \theta]. \end{aligned}$$

При этом, $w'_q(\theta, \varphi_0) = 0$ при любом $\theta \in (0, \pi/2)$.

Заметим теперь следующее. Левая часть последнего равенства отрицательна в силу неравенств (2.3.1). Поэтому, если выражение в квадратных скобках справа положительно, то равенство невозможно.

Это условие, разделив выражение в квадратных скобках на $\cos^4 \theta$, можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^4 \theta \cdot k^2 \cdot (b/a)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot (1 - p^2 \cdot (c/a)^2 - 2 \cdot (b/a)^2 \cdot pmk) + \\ & + (b/a)^2 \cdot p^2 \cdot m^2 - p^2 \cdot (c/a)^2 > 0. \end{aligned}$$

Это верно заведомо, если

$$\begin{cases} (b/a)^2 \cdot p^2 \cdot m^2 - p^2 \cdot (c/a)^2 > 0; \\ 1 - p^2 \cdot (c/a)^2 - 2 \cdot (b/a)^2 \cdot pmk > 0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Преобразовав (2.3.2) и объединив с (2.3.1) мы получим, что если

$$\begin{cases} b > \max(1/k, 1/pm) + 1/2; \\ c > 1 + m/2; \\ k > 2 + pm - b^2 \cdot pm + \sqrt{b} \end{cases}, \quad (2.3.3)$$

где $D = 16 \cdot b^4 \cdot (pm)^2 - 16 \cdot b^2 \cdot pm - 8 \cdot b^2 \cdot (pm)^2 + 4 \cdot c^2 \cdot p^2$, то $\psi'_\theta(\theta, \varphi) = 0$ в прямоугольнике P только в точках (θ, φ_0) , где $\theta \in (0, \pi/2)$.

Теперь, считая выполненным условие (2.3.3), потребуем, чтобы функция $\psi'_\theta(\theta, \varphi_0)$ обращалась в ноль только при $\theta = \theta_0$.

Вычисления показывают, что $\psi'_\theta(\theta, \varphi_0) = 0$ вне $\theta = \theta_0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^4 \theta \cdot (2k - (2b - 1) \cdot k^2) + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot (2k + 2pm - \\ & - (2b - 1) \cdot (a/b)^2 + (2b - 1) \cdot 2pmk) + 2pm - \\ & - (2b - 1) \cdot (pm)^2 = 0. \end{aligned}$$

Заметим: коэффициент при $\operatorname{tg}^4 \theta$ и свободный член отрицательны. Поэтому, если мы потребуем

$$(2k + 2pm) \cdot b^2 - (2b - 1) \cdot a^2 + (2b - 1) \cdot b^2 \cdot 2pmk < 0, \quad (2.3.4)$$

то все выражение будет отрицательным, и, следовательно, $\psi'_\theta(\theta, \varphi_0)$ не будет иметь корней, отличных от θ_0 .

Условие (2.3.4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & k > 4pm \cdot b^2 - 2 - pm + (4b^2 / (2b - 1)) + \sqrt{D_1}, \text{ где} \\ & D_1 = 16b^4 \cdot (pm^2) - 16b^2 \cdot pm - 8b^2 \cdot (pm)^2 + 16b^2 \cdot (b^2 - (2b - 1) \\ & + 2pm \cdot b^2 \cdot (2b - 1)) / (2b - 1)^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вместе с условием (2.3.3) дает нам оценки на k , при которых, можно выбрать b и c так, что построенная функция F удовлетворяет условиям Леммы 2.1.3. Это завершает доказательство теоремы 2.1.1.

Замечание 2.3.1. Утверждение а) теоремы 2.1.1 ([31], 1986 год) существенно улучшено Лоулорсом [28] (1988 год). Ему удалось завершить исследования Бомбьери, Де Джорджи, Джустини [23], Саймонса [22], Лоусона [25], Биндшадлера [29], Симоса [30], А.Т.Фоменко и А.В.Тирина [10] и автора [31], [32] конусов с

границей A имеющей вид прямого произведения сфер S^k , $k = m_1, \dots, m_r$. Полученный Лоулором окончательный ответ выглядит так: если размерность конуса γ больше 7, конус γ глобально минимален; если меньше - то неустойчив. Если же размерность конуса γ равна 7, то конус устойчив, причем он глобально минимален, если среди сфер S^k нет окружностей, т. е. $m_i \neq 1$. (См. также Введение.)

Глава 3. Форма калибровки на векторных расслоениях.

В этой главе строится пример формы калибровки на локально тривиальном векторном расслоении с метрикой специального вида (§3.1). Показано, что нулевое сечение такого расслоения - глобально минимальная поверхность (Теорема 3.1.1). В §3.2 приведены примеры таких расслоений. Эти результаты выделены в отдельную главу, так как стоят несколько в стороне от изложенных выше.

§3.1 Нулевое сечение векторного расслоения - глобально минимальная поверхность.

Пусть M^P - риманово многообразие, на котором задана метрика (g_i) , и пусть $\pi: V^{P+K} \rightarrow M^P$ - вещественное векторное локально тривиальное расслоение над M^P со слоем \mathbb{R}^K . Пусть на расслоении (π, V^{P+K}, M^P) задана аффинная связность Γ - семейство "горизонтальных" плоскостей $\Gamma(v)$, гладко зависящих от точки $v = (m, w) \in V^{P+K}$ (здесь $v = (m, w)$, где $m \in M^P$, $w \in \mathbb{R}^K$). Горизонтальность означает, что ограничение дифференциала проекции расслоения на плоскость $\Gamma(v)$ невырождено в каждой точке v . Потребуем кроме того, чтобы нулевое сечение $f_0: M \rightarrow V$ было горизонтальным, то есть $d f_0(m)(\tau_m(m)) = \Gamma(m, 0)$.

Введем на пространстве расслоения V риманову метрику следующим образом. В каждой точке $v \in V$ касательное пространство к пространству расслоения V распадается в прямую сумму двух подпространств: $\tau_v(V) = \mathbb{R}^K \oplus \Gamma(v)$, где $\Gamma(v)$ - горизонтальная плоскость, а \mathbb{R}^K - плоскость, касательная к слою в точке v . Зададим $(\tilde{g}_i(m))$, $1 \leq i, j \leq k$ - семейство метрик в \mathbb{R}^K гладко зависящих от точки $m \in M^P$. Наконец, зададим метрику на пространстве расслоения V^{P+K} в следующем блочном виде:

$$\left[\begin{array}{c|c} g_{ij}(m) & 0 \\ \hline 0 & \tilde{g}_{ij}(m) \end{array} \right].$$

где в верхнем левом углу стоит метрика на M^p и задает скалярное произведение на горизонтальных плоскостях $\Gamma(v)$ (они имеют размерность p), а в правом нижнем углу стоит определенная выше метрика $\tilde{g}_{ij}(m)$ и задает скалярное произведение на касательных плоскостях к слою. Касательная плоскость к слою в точке v и горизонтальная плоскость $\Gamma(v)$ считаются ортогональными.

Теорема 3.1.1.

Пусть M^p - риманово многообразие, и пусть $\pi: V^{p+k} \rightarrow M^p$ - вещественное векторное локально тривиальное расслоение над M^p со слоем \mathbb{R}^k , $f_0: M \rightarrow V$ его нулевое сечение. Пусть на V^{p+k} введена метрика так, как описано выше. Тогда $f_0(M^p) \subset V^{p+k}$ - глобально минимальная поверхность.

Доказательство Теоремы 3.1.1.

Рассмотрим на пространстве расслоения V дифференциальную p -форму ω , заданную следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(m, w)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) &= \\ &= \langle f_{0*} \pi_*(\varepsilon_1) \wedge \dots \wedge f_{0*} \pi_*(\varepsilon_p); f_{0*}(tm(m)) / \|f_{0*}(tm(m))\| \rangle, \end{aligned}$$

где $v = (m, w) \in V$, $\varepsilon_i \in T_v(V)$ - произвольные касательные векторы к V , $tm(m)$ - простой единичный p -вектор, определяющий касательную плоскость к многообразию M в точке m , \wedge - внешнее произведение, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение p -векторов на V , порожденное введенной на пространстве расслоения метрикой, $\| \cdot \|$ - норма порожденная этим скалярным произведением.

Наше расслоение локально тривиально, поэтому можно ввести

на ν локальные координаты $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^k)$, где (x^i) - координаты на базе m , а (y^j) - координаты на слое \mathbb{R}^k . Нетрудно сосчитать, что в этих координатах форма ω имеет следующий вид:

$$\omega(m, w) = \sqrt{g} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p,$$

где $\sqrt{g} = \|\int_{\partial \pi} (\tau m(m))\|$ - корень из определителя метрики (g_{ij}) , введенной выше.

Лемма 3.1.1. Форма ω - форма калибровки на пространстве расслоения ν . Образ нулевого сечения $f_0(m) \subset \nu$ - ω -подмногообразие в пространстве расслоения ν .

Доказательство леммы 3.1.1. Форма ω замкнута по определению, так как операции переноса и внешнего дифференцирования коммутируют.

Лемма 3.2.2. ([6]) Если форма ω проста, то ее комасса равна ее длине.

В каждой точке ν форма ω проста, поэтому ее комасса, в силу леммы 3.2.2, равна ее длине и равна, как легко проверить единице.

На многообразии $f_0(m) \subset \nu$ форма ω совпадает с формой объема (тут мы снова пользуемся специальным видом метрики на ν), поэтому ν является ω -подмногообразием в ν . Лемма доказана.

Теперь утверждение теоремы следует из предложения 1.1.6. Теорема 3.1.1. доказана.

§3.2. Некоторые следствия и примеры.

В качестве примера, рассмотрим касательное расслоение к риманову многообразию $m: \pi: tm^p \rightarrow m^p$. Связность $(\Gamma(v))$ - это стандартная связность, порожденная римановой метрикой (g_{ij}) на m . В этом случае естественно взять в качестве метрики (\tilde{g}_{ij}) на слоях скалярное произведение на соответствующих касательных пространствах к M , то есть ту же метрику (g_{ij}) . То есть в стандартных локальных координатах $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^p)$, где (x^i) - координаты на базе, а (y^i) - на слое, метрика на пространстве расслоения $\nu = tm$ будет иметь вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} g_{ij}(m) & 0 \\ \hline 0 & g_{ij}(m) \end{array} \right]$$

Из теоремы 3.1.1. следует, что образ нулевого сечения касательного расслоения, рассматриваемого как риманово многообразие с такой метрикой, глобально минимальная поверхность.

В качестве второго примера рассмотрим нормальное расслоение к риманову многообразию m^p , вложенному в другое риманово многообразие w^H . Это расслоение $\pi: nm^p \rightarrow m^p$ является, очевидно, подрасслоением касательного расслоения $\pi: tw^H \rightarrow w^H$, ограниченного на m^p . Будем предполагать, что метрика (g_{ij}) на многообразии m индуцирована метрикой объемлющего многообразия. Рассмотрим на пространстве расслоения tw^H метрику, описанную выше.

Пространство расслоения nm^p вложено в tw^H как подмногообразие. Поэтому можно индуцировать на nm^p риманову метрику с помощью этого вложения. Полученная метрика в локальных координатах $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{H-p})$, где (x^i) - координаты на M^p , а

(y^i) - на слоях, будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{c|c} g_{ij}(m) & 0 \\ \hline 0 & \tilde{g}_{ij}(m) \end{array} \right],$$

где $g_{ij}(m)$ - метрика, индуцированная на m вложением в многообразие w , а $\tilde{g}_{ij}(m)$ - метрика на нормальных к m плоскостях, индуцированная вложением πm^P в πw^N . Из теоремы 3.1.1. следует, что нулевое сечение расслоения πm^P - глобально минимальная поверхность в πm^P в описанной выше метрике.

Следствие 3.2.1. Любое риманово ориентируемое многообразие m может быть вложено в некоторое другое риманово многообразие v (выбранное специальным образом) как глобально минимальная поверхность.

Доказательство следствия. Достаточно взять в качестве v касательное расслоение к многообразию m с построенной выше метрикой, и вложить в него m как образ нулевого сечения.

Замечание 3.2.1. Аналогично можно ввести подходящую метрику и на нормальном расслоении к риманову многообразию.

Замечание 3.2.2. Ле Хонг Ван предложила следующую общую схему. Рассмотрим риманово многообразие v и подмногообразие m в нем. Тогда определено естественное отображение вложения m в v $i: m \rightarrow v$. Пусть кроме того, определено некоторое "встречное" отображение $j: v \rightarrow m$, то есть некоторая естественная проекция. Тогда, можно рассмотреть форму $j^*(\omega)$ на v , где ω - форма объема на m . Полученная форма будет, очевидно, замкнутой. Если нам теперь удастся подобрать метрику на v так, чтобы комасса ω оказалась равна единице, мы получим глобально минимальную поверх-

ность m в многообразии \mathcal{M} относительно этой новой метрики. Теорема 3.1.1 это, в некотором смысле, реализация этой программы для локально тривиальных векторных расслоений.

Литература.

- [1.] Douglas J. The higher topological form of Plateau's problem. - Ann. R. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 2., 1939., v. 8, p. 1-24.
- [2.] Courant R. Plateau's problem and Dirichlet's principle. - Ann. Math., 1937., v. 38, p. 679-724.
- [3.] Rado T. The problem of least area and the problem of Plateau. - Math. Z., 1930., Bd. 32., s. 763-796.
- [4.] Reiffenberg E.R. Solution of Plateau problem for m -dimensional surfaces of varying topological type. - Acta Math., 1960., v. 104., № 2., p. 1-92.
- [5.] Morry Ch.B. The problem of Plateau on a Riemannian manifold. - Ann. Math. - 1948., v. 49., № 4., p. 807-851.
- [6.] Federer H., Fleming W.Y. Normal and integral currents. - Ann. Math., 1960., v. 72., № 3., p. 458-520.
- [7.] Almgren F.J. Plateau's problem. An invitation to varifold geometry. - N.Y.: Benjamin., 1966.
- [8.] Фоменко А.Т. Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. - Матем. сб., 1972., т. 89(131), вып. 3., с. 475-520.
- [9.] Дао Чонг Тхи. Мультиварианты и классические многомерные задачи Плато. - Изв. АН СССР., Математика., 1980., т. 44., № 5., с. 1031-1065.
- [10.] Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии. - М.: Наука, 1982.
- [11.] Фоменко А.Т. Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райффенберга. - Изв. АН СССР., 1972., т. 36., № 5., с. 1049-1080.
- [12.] Фоменко А.Т., Ле Хонг Ван., Дефект однородных пространств и теория минимальных поверхностей.

- [13.] Harvey R., Lawson H.B. Calibrated geometries. - Acta Math., 1982., v. 148., p. 47-157.
- [14.] Дао Чонг Тхи. Вещественные минимальные потоки в компактных группах Ли. - Труды семинара по вект. и тенз. анализу., Вып. 19., изд-во МГУ, 1979.
- [15.] Ле Хонг Ван. Минимальные поверхности и формы калибровки в симметрических пространствах. - Труды семинара по вект. и тенз. анализу., Вып. 22., изд-во МГУ, 1985.
- [16.] Борисенко А.А. Исследование глобальной минимальности вложений однородного пространства G_2/F_2 , индуцированных фундаментальными представлениями G_2 . - в печати.
- [17.] Morgan F., Harvey R. The Faces of the Grassmanian of 3-planes in R^7 (Calibrated geometries on R^7). - Inv. Math., 1986., v. 83., p. 191-228.
- [18.] Morgan F. The exterior algebra $\wedge^k R^n$ and area minimization. Lin. Alg. App., 1985., v. 66., p. 1-28.
- [19.] Nance D. Sufficient Conditions for a pair of n-planes to be area-minimizing. - Math. Ann., 1987., v. 279., p. 161-164.
- [20.] Lawlor G. The Angle Criterion. - Inv. Math. to appear.
- [21.] Almgren F.J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and extension of Bernstein's theorem. - Ann. Math., 1966., v. 84., № 3., p. 277-293.
- [22.] Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. - Ann. Math., 1968., v. 88., № 1., p. 62-105.
- [23.] Bombieri E., de Giorgi E., Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. - Inv. Math., 1969., v. 7., № 3., p. 243-268.
- [24.] Hsiang W.Y., Lawson H.B. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. - J. Diff. Geom., 1971., v. 5., № 1., p. 1-38.

- [25.] Lawson H.B. The equivariant Plateau problem and interior regularity. - Trans. Amer. Math. Soc., 1972., v. 173., № 2., p. 231-249.
- [26.] Cheng B. Area Minimizing Equivariant Cones and Coflat Calibrations. - Ph. D. Thesis., Mass. Inst. of Technology (1987).
- [27.] Балинская И.С. Минимальные конусы присоединенного действия классических групп Ли. - Труды семинара по вект. и тенз. анализу., Вып. 23., изд-во МГУ, 1988., с. II-18.
- [28.] Laylor G. The curvatur ciation., Ph. D. Thesis, Stanford U., (1988)
- [29.] Bindschadler D. Invariant solutions to the oriented Plateau problem of maximal codimension. - Trans. Amer. Math. Soc., 1980., v. 261., № 2., p. 439-462.
- [30.] Simoes P. On a class of minimal cones in \mathbb{R}^n . - AMS. Bull., 1974., v. 80., p. 483-489.
- [31.] Иванов А.О. Глобально минимальные симметрические поверхности в евклидовом пространстве. - Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. - М.: изд-во МГУ., 1986., с. 69-71.
- [32.] Иванов А.О. Минимальные конусы большой размерности. - Новое в глобальном анализе., Воронеж: изд-во Воронеж. ун-та, 1987.
- [33.] Ivanov A.O. Volume minimizing cones of codimension two. - Бакинская международная топологическая конференция., Тезисы., Часть II., Баку, изд-во "Коммунист", 1987., с. 26
- [34.] Иванов А.О. Достаточное условие устойчивости симметричных конусов любой размерности в \mathbb{R}^n . - Труды семинара по вект. и тенз. анализу., вып. 24., изд-во МГУ, в печати.